TP D'ANALYSE NUMERIQUE : ALGEBRE LINEAIRE et MATLAB (suite)

PARTIE 2

III. Valeurs propres et vecteurs propres

Par définition, λ_1 est valeur propre de A associée au vecteur propre X_1 si A. X_1 = λ_1 . X_1
Il existe différentes méthodes de calcul numérique pour extraire les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice A. Vous allez en programmer une en particulier avec MATLAB : la méthode de la puissance itérée avec déflation de Wielandt, dont l'explication détaillée est donnée dans l 'annexe mathématique.

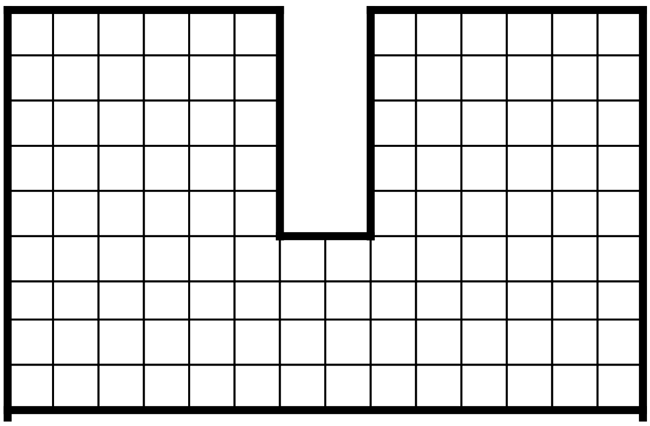
Application 1

Pour étudier la sonorité du tambour dont la forme est présentée sur la figure 3, on recherche ses pulsations propres, c'est à dire les fréquences de vibration qui vont créer une résonance (ou onde stationnaire) sur la peau du tambour. Mis en équation, ce problème revient à trouver les valeurs de ℓ qui vérifient :

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\lambda u$$

ainsi que leur vecteur propre associé. La fonction u(x,y) correspond ici à la distance sur les z par rapport à la position d'équilibre horizontal. On aura u = 0 sur les bords de la peau du tambour.

Figure 3



Donner les 10 valeurs propres de plus petit module et les 10 de plus grand module. Ces valeurs correspondent aux 10 fréquences les plus basses et aux 10 les plus hautes. Visualiser les vibrations (vecteurs propres) correspondantes. Toutes ces vibrations vous semblent-elles physiquement plausibles ? Si non, expliquer pourquoi et pourquoi on les obtient.

Application 2

On essaye de transmettre une image par un canal dans lequel la transmission d'informations est très lente. L'idéal serait de pouvoir voir apparaître l'image progressivement, c'est-à-dire avec de plus en plus de détails au fur et à mesure que les informations arrivent. Cela permettrait d'arrêter la transmission très rapidement si l'on juge l'image inintéressante, ou dès que la qualité est jugée suffisante. Tout cela doit bien évidemment se faire en transmettant un volume de données ***plus petit possible*** par rapport à que ce que contient l'image elle-même.

Réaliser cela à partir de la décomposition de matrices en valeurs singulières. Cette décomposition est décrite dans l'annexe mathématique. Comment peut-on évaluer la qualité de l'image courante par rapport à l'image d'origine (qualité = 100% si les deux images sont identiques …). Quels sont, à votre avis, les avantages et les inconvénients de ce codage de l'image ?

PARTIE 2
ANNEXE MATHEMATIQUE

III. Valeurs propres, vecteurs propres et valeurs singulières

Puissance itérée

Théorème : Soit A une matrice n x n.

Si $|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| > |\lambda_4| > .... > |\lambda_n|$ sont les valeurs propres de A

alors $\forall \vec{x} \in IR^n, \lim_{k\to\infty} A^k.\vec{x} = \lambda_1^k.\vec{v}_1$, avec $\vec{v}_1$ vecteur propre associé à la valeur propre λ_1 .

C'est sur ce théorème qu'est construite la méthode de la puissance itérée qui permet d'estimer λ_1 et $\vec{v}_1$ en calculant des valeurs consécutives de $A^k.\vec{x}$ pour k assez grand. Pour cela, on réalise des itérations à partir d'un Y^0 quelconque, par exemple sur le processus :

$X^k = Y^k / \text{norm}(Y^k)$
$Y^{k+1} = A.X^k$

On a alors la valeur propre estimée à l'itération (k+1) par la norme de Y^{k+1}
On pourra arrêter les itérations en fonction de la valeur de k grand (toujours difficile définir), en fonction de l'évolution de la valeur estimée de la valeur propre ou en fonction de la qualité de la colinéarité entre X^k et $Y^{k+1} = A.X^k$. Il faudra privilégier cette dernière solution.

Déflation de Wielandt

Théorème : Soit $\vec{u}_1$ le vecteur propre de A^t associé à la valeur propre λ_1 .

Si A admet les n valeurs propres réelles et distinctes λ_1 , λ_2 , λ_3 , ... ,λ_n et les vecteurs propres (colonnes) à gauche correspondants $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, ... , $\vec{v}_n$ et $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, ... , $\vec{u}_n$ les vecteurs propres à droite (lignes)

alors la matrice $A - \lambda_1.\dfrac{\vec{v}_1.\vec{u}_1}{\vec{u}_1.\vec{v}_1}$ admet 0, λ_2 , λ_3 , ... ,λ_n pour valeurs propres et $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, ... , $\vec{v}_n$ pour vecteurs propres.

Ce théorème permet, connaissant λ_1 , $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ de faire apparaître λ_2 comme valeur propre dominante (de plus grand module) et donc de calculer λ_2 et $\vec{v}_2$ par la méthode de la puissance itérée, etc.

Itérations inverses

On peut adapter cette méthode de la puissance itérée, qui permet normalement le calcul de la valeur propre de plus grand module, au calcul de la valeur propre de plus petit module. Il suffit pour cela d'appliquer la méthode de la puissance itérée à $Z = A^{-1}$. Cela donnera λ_Z , la valeur propre de $Z = A^{-1}$ de module le plus grand parmi les valeurs propres de Z. La valeur propre de plus petit module de A sera alors $\lambda_n = 1 / \lambda_Z$

Plus généralement, on peut calculer λ_c , la valeur propre de A la plus proche du complexe c en appliquant la méthode de la puissance itérée à $Z_c = (A - c.Id)^{-1}$. On obtient alors la valeur propre de Z_c de plus grand module, telle que $\lambda_A = c + 1 / \lambda_c$ est la valeur propre de A la plus proche de c.
Avec c = 0, on retrouve la valeur propre de plus petit module.

Décomposition en valeurs singulières

La notion de valeurs singulières est une généralisation de la notion de valeurs propres, qui n'est définie que pour des matrices carrées. Une matrice rectangulaire M_{mn} quelconque, de m lignes et n colonnes (on supposera m > n), peut se décomposer sous la forme :

$$M_{mn} = U_{mn} . D_{nn} . V'_{nn} \qquad (1)$$

avec $U'_{mn}. U_{mn} = Id_n$ et $V'_{nn} . V_{nn} = Id_n$. La matrice D_{nn} est diagonale et V_{nn} est orthonormale. Les valeurs propres de D_{nn} sont **les valeurs singulières** de M_{mn}.
Remarque *:* $U_{mn}. U'_{mn}$ est différent de Id_n

Démonstration :

On construit $Q_1 = M'_{mn}.M_{mn}$. Q_1 est symétrique de n lignes et n colonnes et a donc n valeurs propres réelles positives ou nulles et n vecteurs (ou plutôt directions) propres associés qui sont de plus orthogonaux entre eux. Le nombre r de valeurs propres réelles strictement positives donne le rang de la matrice Q_1 et par extension celui de M_{mn}. On peut donc écrire :

$$Q_1 = M'_{mn}.M_{mn} = V . \Lambda . V^{-1} = V . \Lambda . V'$$

où Λ représente la matrice diagonale n x n contenant les n valeurs propres de Q_1 que l'on supposera classées par ordre décroissant (de en haut à gauche à en bas à droite) et V représente la matrice des vecteurs propres associés, normés et en colonne. Le fait que ces vecteurs soient normés et orthogonaux deux à deux donne la propriété $V^{-1} = V'$.

De plus, l'égalité triviale $M_{mn} = M_{mn} . I_d$ donne $M_{mn} = M_{mn} . V . \Lambda^{-1/2} . \Lambda^{1/2} . V'$
En posant $U_{mn} = M_{mn} . V . \Lambda^{-1/2}$ et $D_{nn} = \Lambda^{1/2}$ on retrouve (1).

On peut montrer aussi que U_{mn} contient les n vecteurs propres de $Q_2 = M_{mn}.M'_{mn}$ en colonnes.

Une utilisation pratique possible :

L'équation (1) peut aussi s'écrire :

$$M_{mn} = \sum_{k=1}^{r} \sqrt{\lambda_k}\, u_k v'_k$$

avec λ_k la valeur propre numéro k de $Q_1 = M'_{mn}.M_{mn}$, u_k vecteur de la colonne k de U_{mn}, et v_k vecteur de la colonne k de V_{nn} (on utilise dans la formule le vecteur transposé)