

- les méthodes itératives utilisées pour les "grands" systèmes linéaires,
- le langage MATLAB sous Windows.

PARTIE 1

On peut écrire un système de n équations à n inconnues, sous la forme $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ où, dans ce cas, A est une matrice (n, n) , et X et B sont des vecteurs de dimension n . Le vecteur B est donné et X représente l'inconnue.

a) Jacobi, b) Gauss-Seidel, c) Relaxation.

On testera ensuite ces méthodes sur de "grands" systèmes (à diagonale dominante et pour des dimensions d'au moins 100, voir application).

$$\Delta \mathbf{u} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\Gamma} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

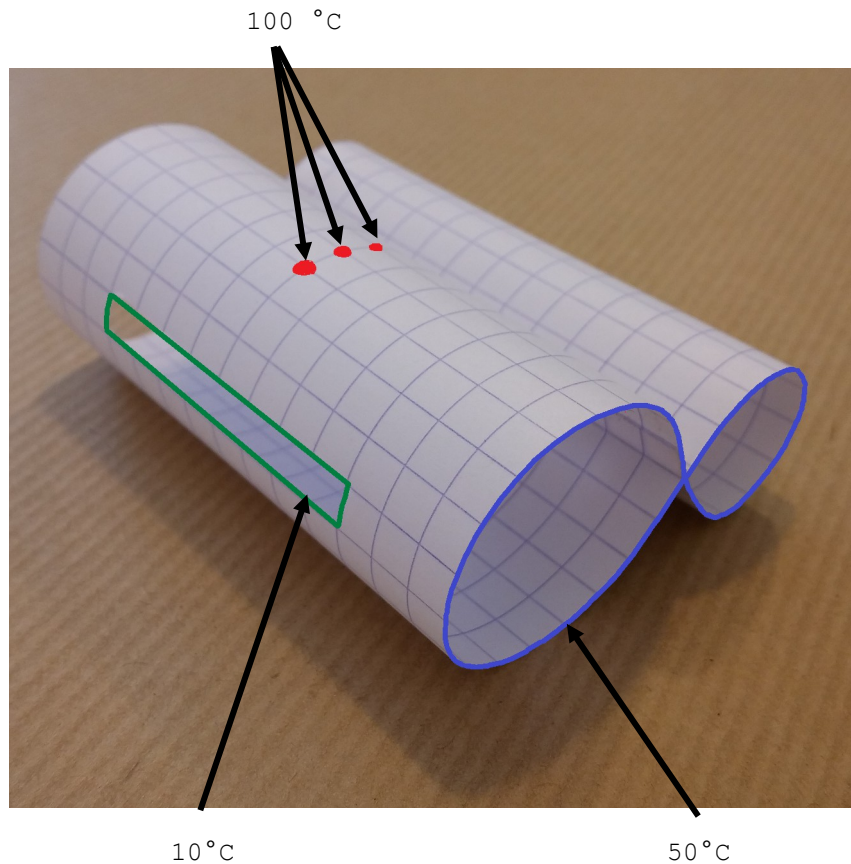


Figure 1

où u est la fonction représentant la température sur la surface Δ de la pièce de métal limitée par les bords Γ_1 en bleu et Γ_2 en vert, sur la figure 1 (le bord opposé et symétrique appartient aussi à Γ_1). On cherche à résoudre le problème avec les conditions aux limites suivantes :

- $f(x,y) = 50\text{ °C}$ sur le bord Γ_1
- $f(x,y) = 10\text{ °C}$ sur le bord Γ_2
- $f(x,y) = 100\text{ °C}$ sur I, J et K (voir figures 1 et 2).

Pour cela, nous utiliserons la méthode des différences finies. On modélisera donc la pièce de métal par sa surface dépliée, présentée figure 2 en annexe. Seules les températures aux points intersections du quadrillage nous intéresseront. En appliquant à ces points les conditions de la formule précédente, on trouvera les températures cherchées.

Représenter la répartition des températures à l'équilibre sous la forme d'une surface (les températures correspondant alors à des altitudes).

II. Fonction de matrices

Exponentielles de Matrices

Pour les séries dont les termes sont des matrices, il se pose les mêmes problèmes de convergence que pour les séries ordinaires. On peut montrer que la série :

$$\exp(A) = \sum_n \frac{A^n}{n!}$$

est toujours convergente à condition d'adopter une norme multiplicative :

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Application

Sur le même domaine Δ on veut résoudre les deux problèmes de chaleur dynamique qui suivent. $u(x, y, t)$ est maintenant une fonction du temps t .

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{avec} \quad u(x, y, 0)|_{\Gamma} = f(x, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

où n est ici la normale au contour Γ .

Problème 1 : Evolution libre de la température

On part à l'instant $t = 0$ de l'état où tous les points sont à 0°C sauf les trois points I, J et K, qui sont à 300°C . Au bout d'un certain temps, on atteint l'équilibre.

- Comment se caractérise cet équilibre ?
- Donner la température d'équilibre et un ordre de grandeur du temps qu'il faut pour l'atteindre.
- Réaliser l'animation de la propagation de la température à la surface de la pièce.

Problème 2 : Chauffage de la plaque

Pour traiter le problème du chauffage de la plaque par l'intermédiaire des trois points I, J et K, on fera évoluer la température de la plaque pendant une unité de temps (ce qui fera diminuer la température des trois points I, J et K. On simulera ensuite le chauffage en remettant ces points à 300°C et on recommencera l'opération autant de fois qu'il le faut pour que l'équilibre soit atteint.

- Donner la température d'équilibre supposée.
- Réaliser l'animation de la propagation de la température à la surface de la pièce.

PARTIE 1 : ANNEXE MATHÉMATIQUE

I. Résolutions de systèmes

Principe général des méthodes itératives par décomposition

Le principe de ces méthodes itératives de résolution de $A.X = B$ est de décomposer A selon :

$$A = M - N \quad \text{où } M \text{ est une matrice inversible.}$$

On lance alors des itérations sur le processus itératif (à partir d'un X_0 quelconque) :

$$M.X^{m+1} = N.X^m + B \quad \text{ou} \quad X^{m+1} = M^{-1}.N.X^m + M^{-1}.B \quad \text{ou} \quad X^{m+1} = \Pi.X^m + \beta$$

Si ce procédé converge vers une limite X_s , on aura alors :

$$M.X_s = N.X_s + B \quad \text{ou encore} \quad (M-N).X_s = B$$

X_s est donc solution de $A.X = B$

La convergence de ce processus est liée au rayon spectral de la matrice $\Pi = M^{-1}.N$

Définition : Le rayon spectral $\rho(M)$ d'une matrice M est le plus grand module de ses valeurs propres.

Théorème : Une c.n.s. de convergence du processus itératif précédent est $\rho(\Pi) < 1$

Dans ce qui suit, on utilise la décomposition $A = D + L + U$ où D est la diagonale de A, L sa partie strictement inférieure et U sa partie strictement supérieure.

Méthode de Jacobi

Pour la méthode de Jacobi, $M = D$.

Méthode de Gauss-Seidel

Pour la méthode de Gauss-Seidel, $M = D + L$.

Théorème : Si A est inversible et à diagonale strictement dominante, (c'est à dire $|a_{kk}| > \sum_{i \neq k} |a_{ki}|, \forall k$),
alors les procédés de Jacobi et Gauss-Seidel convergent.

Méthode de relaxation

Le procédé de relaxation consiste à chercher une décomposition donnant à Π le plus petit rayon spectral possible. On introduit pour cela un paramètre de pondération ω dans la méthode de Gauss-Seidel. Si G^{m+1} est le vecteur solution donné par la méthode de Gauss-Seidel à l'itération (m+1) et de composantes g_i^{m+1} , alors les itérations de la méthode de relaxation correspondent à :

$$x_i^{m+1} = (1-\omega).x_i^m + \omega.g_i^{m+1}$$

En utilisant la décomposition précédente $A = D + L + U$, on a sous forme matricielle :

$$D X^{m+1} + L \omega X^{m+1} = (1-\omega) D X^m - \omega U X^m + \omega B$$

$$\text{d'où : } \Pi = (D + \omega L)^{-1}.((1-\omega) D - \omega U)$$

Remarque : Si on prend $\omega = 1$, on obtient la méthode de Gauss-Seidel.

Si on prend $\omega < 1$, on obtient la méthode de Gauss-Seidel sous-relaxée.

Si on prend $\omega > 1$, on obtient la méthode de Gauss-Seidel sur-relaxée.

Théorème : Une condition nécessaire pour que le procédé de relaxation converge est que $0 < \omega < 2$.

Il faut, avant de mettre en route le procédé d'itération, et une fois pour toute, trouver la valeur approximative (à 10^{-2} près environ par exemple) de ω minimisant $\rho(\Pi)$.

II. Différences finies

On quadrille le domaine dans lequel on veut estimer la fonction u (voir figure 2). Ainsi on remplace la recherche d'une fonction par la recherche du vecteur dont les composantes sont les valeurs en chaque nœud du quadrillage. On remplace alors les opérateurs de dérivation par des opérateurs de différences finies. Cela conduit aux approximations suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k}$$

et donc $\Delta u \approx u(x-1, y) + u(x+1, y) + u(x, y-1) + u(x, y+1) - 4u(x, y)$ avec $h = k = 1$

La condition $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ permet de définir le comportement aux bords du système, et traduit le fait que la fonction u ne varie pas le long d'une normale au bord. On modélise cela en considérant que le point fictif F , en dehors du domaine Δ , a la même température que B , le point le plus proche du bord Γ (figure 3).

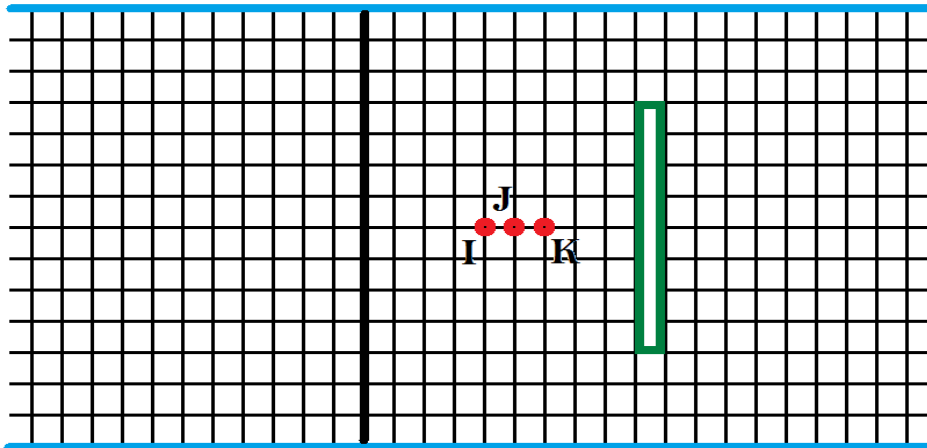


Figure 2

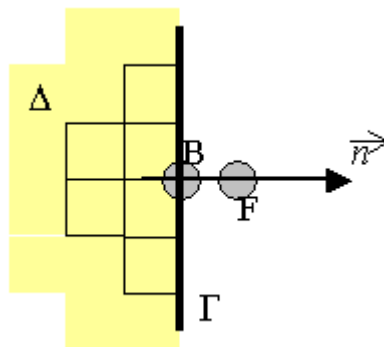


Figure 3