TEMA 4:

Definición: Sea E un e.v. y τ una topología sobre E. Diremos que E es un espacio vectorial topológico (e.v.T) si las operaciones suma de vectores y producto por escalares son continuas.

$E \times E \to E$
$(x,y) \longmapsto x+y$ Fijamos $(x_0, y_0) \to x_0 + y_0$. Entonces $+$ es continua $\Leftrightarrow$ $\forall\, U$ entorno de $z_0 = x_0 + y_0$
$\exists\, V$ entorno de x_0, W entorno de y_0 / $V + W \subset U$.

E: espacio real.
$\mathbb{R} \times E \to E$
$(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ Fijamos $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in E$. El producto por escalares es continuo en (λ_0, x_0) $\Leftrightarrow$ $\forall\, U$ entorno de $y_0 = \lambda_0 x_0$ $\exists\, \varepsilon > 0$ y V entorno de x_0 tal que
$\lambda V \subset U \quad \forall \lambda : |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$

Conclusión: En un espacio vectorial topológico (e.v.t) (E, τ) las traslaciones y el producto por escalares $(\neq 0)$, son homeomorfismos.

$E \to E$ ($x_0 \in E$ cualquiera
$x \longmapsto x + x_0$ (Traslación del vector x_0) y $E \to E$, $x \longmapsto \lambda_0 x$ $(\lambda_0 \in \mathbb{R} \neq 0)$

En particular se tiene:
A) $U + V$ es abierto si U, V son abiertos $(U + V = \bigcup_{x \in U} \underbrace{\{x + V\}}_{\text{abierto}})$ $\Rightarrow$ abierto
B) λU es abierto si U es abierto y $\lambda \neq 0$
C) Dado U entorno de 0, $\exists\, V$ entorno de 0 / $U + V \subset U$

Aplicar:
$E \times E \to E$ Dado U entorno de 0, $\exists\, V$ entorno de 0/
$(0,0) \longmapsto 0$ $V + V \subset U$ (se puede repetir) (n veces)

Dado U entorno de 0, $\exists\, V$ entorno de 0 / $V + V + V + V + \dots + V \subset U$

Proposición: En un e.v.t. (E, τ) un sistema fundamental de entornos queda completamente determinado por un sistema fundamental de entornos de 0.

Demostración: Sea $x \in E$, U entorno de $0 \Rightarrow x + U$ entorno de x ($x \in x + U$, ya que $x = x + 0$ y $0 \in U$) y $x + U$ es un entorno de x porque T (Traslación del vector x) es un homeomorfismo. Si V: entorno de x, entonces definimos

$U = V - \{x\}$ $(0 = x - x$ con $x \in U)$ y U es un entorno de 0 ya que la traslación de vector $-x$ es un homeomorfismo.

Proposición: Todo espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ es un e.v.t.

Demostración: Demostramos que las operaciones suma y producto por escalares son continuas $\left(\begin{array}{l} x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \\ y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} y \end{array} \right\} \Rightarrow x_n + y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x + y$ y

$\left. \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \\ \lambda_n \xrightarrow{\text{en } \mathbb{R}} \lambda \end{array} \right. \quad \lambda_n x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \lambda x \Big)$

Definimos en $\mathbb{R}^\infty$ $(\mathbb{R}^\infty = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty\})$ un sistema fundamental de entornos de 0: $U(k_1, k_2, \ldots, k_r; \varepsilon) = \{x = (x_n) / |x_{k_i}| < \varepsilon \ \forall i = 1, 2, \ldots, r\}$ $k_i \in \mathbb{N}$ $\forall i = 1, \ldots, r$ $\varepsilon > 0$

Entonces $\mathbb{R}^\infty$ es un e.v.t.

Basta ver que 1) $0 = (x_n)_{n=1}^\infty / x_n = 0$ es tal que $0 \in U(k_1, \ldots, k_r; \varepsilon)$

2) $U(k_1, k_2, \ldots, k_r; \varepsilon)_{\varepsilon > 0} \cap U(m_1, m_2, \ldots, m_s; \delta)$ $\delta > 0$

$\exists U(k_1, k_2, \ldots, k_r, m_1, m_2, \ldots, m_s; \eta) \subseteq U(k_1, \ldots, k_r; \varepsilon) \cap U(m_1, \ldots, m_s; \delta)$
$\eta = \min\{\varepsilon, \delta\}$

Observar que si $x = (x_n)_{n=1}^\infty / x \in U(k_1, \ldots, k_r, m_1, \ldots, m_s; \eta) \Rightarrow$
$\Rightarrow |x_{k_i}| < \eta$, $i = 1, \ldots, r$ y $|x_{m_j}| < \eta$, $j = 1, \ldots, s$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow |x_{k_i}| < \varepsilon \ \forall i = 1, 2, \ldots, r$ y $|x_{m_j}| < \delta$, $j = 1, 2, \ldots, s$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow x \in U(k_1, \ldots, k_r; \varepsilon) \cap U(m_1, \ldots, m_s; \delta)$

Ejemplo: En $\mathcal{C}^\infty[a,b]$ espacio de las funciones $(f: [a,b] \to \mathbb{R})$ infinitamente derivables, definimos un S.F. de entornos de 0 de la forma $U(k; \varepsilon)_{k \geq 0 \, (k \in \mathbb{Z}), \, \varepsilon > 0} = \{ f \in \mathcal{C}^\infty[a,b] / |f^{(i)}(x)| < \varepsilon \ \forall x \in [a,b]$ $i = 0, 1, \ldots, k$ donde $f^{(k)}$ derivada de orden k y para $k = 0$, $f^{(0)} = f\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{C}^\infty[a,b]$ es un e.v.t.

Proposición: Todo e.v.t. (E, τ) verifica el axioma T_3 de separación (Dado U entorno de $0 \Rightarrow \exists W$ entorno de $0 / \overline{W} \subset U$)

Demostración: Dado U, entorno de 0. Como la suma de vectores es continua y $0 - 0 = 0$, dado U, $\exists W$ entorno de $0 / W - W \subset U$. (1)

Veamos que $\overline{W} \subset U$. En efecto sea $x \in \overline{W}$, entonces $x + W$: entorno de x. Entonces por definición de clausura, se tiene que $(x + W) \cap W \neq \emptyset$. Por tanto $\exists y \in (x + W) \cap W \Leftrightarrow$

$\left\{ \begin{array}{ll} y = x + a & \text{con } a \in W \\ y = b & \text{con } b \in W \end{array} \right. \Rightarrow x = y - a \Rightarrow x \in W - W \subset U$ por (1). Queda demostrado que $\overline{W} \subset W$.

Definición: En un e.v.t (E, τ) un conjunto M se dice acotado si $\forall U$: entorno de 0, $\exists n>0$ tal que $M \subset nU$

Definición: En un e.v.t (E, τ) se dice localmente acotado si $\exists$ un abierto A no vacío y acotado.

Ejemplo: Todo espacio normado es localmente acotado: basta tomar $B(0,r) = \{x \in E / \|x\| < r, r>0\}$, abierto $\neq \emptyset$ $(0 \in B(0,r))$

Proposición: Existen e.v.t que no son localmente acotados.

Demostración: Tomar $E = \mathbb{R}^{\infty}$ con el sistema fundamental de entornos definidos $U(k_1, \dots, k_r; \varepsilon) = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} / |x_{k_i}| < \varepsilon \ \forall i = 1, 2, \dots, r\}$ Veamos que todo abierto $\neq \emptyset$ no es acotado (basta ver que los $U(k_1, \dots, k_r; \varepsilon)$ no son acotados).

Supongamos que algún $U(k_1, \dots, k_r; \varepsilon)$ fuese acotado.

Sea $V(m_1, m_2, \dots, m_s; \varepsilon)$ con $m_i > \max\{k_1, \dots, k_r\}$ y $m_1 < m_2 < \dots < m_s$

Definimos la sucesión:

$$x = (x_n)_{n=1}^{\infty} / x_n = \begin{cases} \varepsilon/2 & \text{si } n \in \{k_1, k_2, \dots, k_r\} \\ a & \text{si } n \notin \{k_1, \dots, k_r\} \text{ con } a \geq \varepsilon \cdot p \end{cases}$$

donde p es tal que $U(k_1, \dots, k_r; \varepsilon) \subset p \cdot V(m_1, \dots, m_s; \varepsilon)$ (1)
$p>0$

Entonces $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in U(k_1, \dots, k_r)$ (Trivial) pero $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \notin pV(m_1, \dots, m_s; \varepsilon)$. En efecto, si $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in pV$ $\Rightarrow |x_{m_j}| < p \cdot \varepsilon$, pero $|x_{m_j}| = |a| = a < p \cdot \varepsilon$ Absurdo
$j = 1, 2, \dots, s$

Ejercicio: En un e.v.t (E, τ), $M \subset E$ es acotado $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ y $\forall (\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ con $\varepsilon_n > 0$ con $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n x_n = 0$ (en E)

"$\Leftarrow$" Supongamos que M no es acotado.

Entonces, $\exists U$ entorno de 0 tal que $M \not\subset nU$ $\forall n = 1, 2, \dots$

Para $n = 1$, $\exists x_1 \in M / x_1 \notin U$;

Para $n = 2$, $\exists x_2 \in M / x_2 \notin 2U$;

⋮

Para n, $\exists x_n \in M / x_n \notin nU \Leftrightarrow x_1 \notin U, \frac{1}{2}x_2 \notin U, \dots, \frac{1}{n}x_n \notin U$ (1)

Entonces se tiene que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ $\forall n = 1, 2, \dots$ y $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0$ / $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \lim 1/n = 0$

Sin embargo $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} \neq 0$

Si $\lim \frac{1}{n} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall$ entorno de 0, en particular para U, $\exists n_0$ /

$\frac{1}{n} x_n \in U \quad \forall n > n_0$. Contradice (1) $\Rightarrow M$ acotado

"$\Rightarrow$" Sea U entorno de 0. Como $\begin{array}{l} \mathbb{R}\times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{array}$ es continua,

en particular para $\lambda = 0$ y $x=0$, dado U, $\exists V$ entorno de 0 y $\exists \varepsilon > 0 \,/\, \lambda V \subset U \quad \forall |\lambda| < \varepsilon$ (1). Dado V, como M es acotado $\Rightarrow \exists m > 0 \,/\, M \subset mV \Rightarrow (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M \Rightarrow (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset mV \Rightarrow$
$\Rightarrow (\varepsilon_n x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \varepsilon_n m V$. Como $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} m \cdot \varepsilon_n = 0$,
luego dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \,/\, 0 < m \cdot \varepsilon_n < \varepsilon \quad \forall n > n_0 \Rightarrow$ Tomando $\lambda = m \cdot \varepsilon_n$ y aplicando (1) $\Rightarrow m\varepsilon_n V \subset U \Rightarrow \varepsilon_n x_n \subset U$ $\forall n > n_0$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n x_n = 0$

<u>Corolario</u>: En un e.v.t. (E, τ) toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente es un acotado.

<u>Demostración</u>: Sea $M = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$. Aplicando el ejercicio anterior M es acotado $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ y para todo $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$, con $\varepsilon_n > 0$ y $\lim \varepsilon_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n x_n = 0$. En efecto ya que $\lim \varepsilon_n x_n = \lim \varepsilon_n \cdot \lim x_n = 0$, $x=0$ (por la continuidad de $\mathbb{R}\times E \to E$, $(\lambda, x) \to \lambda x$).

<u>Corolario</u>: Todo subconjunto finito $\{x_1, \dots, x_n\}$ de un e.v.t (E, τ) es un acotado.

<u>Demostración</u>: Definimos la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty} \,/\, \begin{array}{l} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ \\ y_n = x_k \text{ si } n > k \end{array}$

Entonces $\{x_1, \dots, x_k\} = \{y_n : n = 1, 2, \dots\}$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = x_k$. Aplicando el corolario anterior, se tiene que $\{y_n : n = 1, 2, \dots\}$ es acotado luego $\{x_1, \dots, x_k\}$ es cerrado.

<u>Definición</u>: Un e.v.t. (E, τ) es localmente convexo $\Leftrightarrow \forall U$ abierto $(U \neq \emptyset)$, $\exists V$ abierto y convexo $(V \neq \emptyset) \,/\, V \subset U$.

<u>Proposición</u>: En un e.v.t. (E, τ) localmente convexo, cualquier punto tiene un entorno convexo.

<u>Demostración</u>: Basta con probar la proposición para $x=0$ (la suma de x_0 + convexo = convexo). Teniendo en cuenta que:
$\begin{array}{l} E \times E \to E \\ (x, y) \mapsto x - y \end{array}$ es continua ya que $x - y = x + (-y)$, en particular es continua en $(0,0)$. Entonces dado U: entorno de 0, $\exists V$ entorno de $0 \,/\, V - V \subset U$. Como (E, τ) es localmente convexo,

dada V, $\exists$ W ($W \neq \emptyset$) abierto convexo / $W \subset V$. Como $W \neq \emptyset$, $\exists$ al menos un $z \in W$. Entonces $Z = W - \{z\}$ es un entorno de 0, convexo y contenido en U. $0 \in Z$ ya que $0 = z - z$ con $z \in W$ y Z es un abierto (Z es el trasladado de W de vector $-z$ y todas las traslaciones son homeomorfismos) luego Z es un entorno de 0.

Veamos que Z es convexo: $x, y \in Z$ y $\lambda \in [0,1] \Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in Z$. En efecto,

$$\left.\begin{array}{l} x = u - z \text{ con } u \in W \\ y = v - z \text{ con } v \in W \end{array}\right\} \Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)(u-z) + \lambda(v-z) =$$

$$= \underbrace{(1-\lambda)u + \lambda v}_{\in W \,(W \text{ convexo})} - \underbrace{(1-\lambda)z - \lambda z}_{-z} = w - z \text{ con } w \in W \Rightarrow w - z \in W - \{z\}$$

$\Rightarrow$ Luego Z convexo.

Por último, veamos que $Z \subset U$. En efecto, sea $t \in Z \Rightarrow t = w - z$ con $w \in W$ (observar que $W - W \subset V - V \subset U$) $\Rightarrow t \in U$

FUNCIONALES LINEALES Y CONTINUOS SOBRE UN E.V.T. (E, τ)

$f: E \to \mathbb{R}$ (E e.v. real)

- lineal $\Leftrightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$ y $f(\alpha x) = \alpha \cdot f(x)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
- continua en $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists U$ entorno de x_0 tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in U$.

Proposición: Si $f: E \to \mathbb{R}$, (E, τ) e.v.t. es lineal y continua en $x_0 \Rightarrow f$ es continua en E.

Demostración: Sea $x_1 \in X_0$, veamos que f es continua en x_1. Como f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists U$ entorno de x_0 / $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in U$ (1). Definimos $V = U + (x_1 - x_0)$. Entonces V es un entorno de x_1, ya que $x_1 = x_0 + x_1 - x_0$ con $x_0 \in U$.

Sea $y \in V$, veamos que $|f(y) - f(x_1)| < \varepsilon$. En efecto:

$|f(y) - f(x_1)| = |f(x + x_1 - x_0) - f(x_1)| \leq |f(x) + f(x_1) - f(x_0) - f(x_1)| =$
$= |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ Por (1), luego f es continua en x_1.

Como x_1 es arbitrario, f es continua en E.

Teorema: En un e.v.t. un funcional lineal, $f: E \to \mathbb{R}$ es continuo $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists U$ entorno de 0 / f está acotada en U ($\exists A > 0$: $|f(x)| \leq A$ $\forall x \in U$).

Demostración: "$\Rightarrow$" Si f es continua, en particular es continua en 0. Entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists U$ entorno de 0 / $|f(x) - f(0)| < \varepsilon$ $\forall x \in U$, pero $f(0) = 0$ luego $|f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in U \Rightarrow f$ está acotada en U.

"$\Leftarrow$" Supongamos que f está acotada en un entorno de U de 0. Entonces $\exists A>0$ tal que $|f(x)| \leq A \quad \forall x \in U$ (1). Dado $\varepsilon>0$, definimos $V = \frac{\varepsilon}{A} U$ entorno de 0. Sea $y \in V \Rightarrow y = \frac{\varepsilon}{A} x$ con $x \in U$.

Aplicando (1) se tiene $|f(x)| = |f(\frac{A}{\varepsilon} y)| = |\frac{A}{2} f(y)| =$
$= \frac{A}{\varepsilon} |f(y)| \leq A \Rightarrow |f(y)| \leq \frac{A\varepsilon}{A} = \varepsilon$, luego f es continua en 0
$\Rightarrow f$ es continua en E.

Teorema: En un e.v.t. (E, τ). Sea $f: E \to \mathbb{R}$ un funcional lineal. Entonces:

1) Si f es continua $\Rightarrow f$ está acotada en todo acotado de (E,τ)

2) El recíproco es cierto si (E,τ) verifica el 1er axioma de numerabilidad ($\exists$ un sistema fundamental de entornos de 0 numerable).

P. ejemplo. Dado $x \in \mathbb{R}$ $V_n = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$, $n = 1, 2, \ldots$
Sistema fundamental de entornos de x numerable. Dado U entorno de x, $\exists U_n / U_n \subset U$.

Demostración: 1) Como f es continua, en particular lo es en 0. Entonces por el teorema anterior, f está acotada en un entorno de 0, U ($\exists A > 0 / |f(x)| \leq A \quad \forall x \in U$). Sea M un acotado cualquiera de (E,τ). $(M \neq \emptyset)$. Entonces $(M \neq \emptyset)$. Entonces $\exists n > 0 /$
$M \subset nU$ (definición de acotado). Por tanto, si $x \in M \Rightarrow$
$\Rightarrow x = ny$ con $y \in U$. Entonces $|f(x)| = |f(ny)| \underset{\text{trivial}}{=} |n \cdot f(y)| =$
$= n|f(y)| \underset{\text{Aplicando (1)}}{\leq} n \cdot A$, luego f está acotada en M.

2) Sea $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset U_{n+1} \supset \ldots$ Sistema fundamental de entornos de 0. Supongamos que f no es continua. Por el T^a anterior, f no está acotada en ningún entorno de 0, luego no está acotado en $U_1, U_2, \ldots, U_n$. $\Rightarrow \exists x_1 \in U_1 / |f(x_1)| > 1$; $\exists x_2 \in U_2 /$
$|f(x_2)| > 2$, $\ldots$ $\exists x_n \in U_n / |f(x_n)| > n$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
En efecto, sea U entorno de $0 \Rightarrow \exists n_0 / U_n \subset U \quad \forall n \geq n_0$
Entonces x_n con $n > n_0$, es tal que $x_n \in U_n$ ($x_{n+1} \in U_{n+1} \subset U_n$)
$\Rightarrow x_n \in U \ \forall n > n_0$, luego $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, tiene límite, luego es un acotado (demostrado) pero f no está acotado en $\{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ # Pues por hipótesis f está acotada en todo acotado.

TOPOLOGÍA DÉBIL EN UN E.V.T (E,τ). Sea (E,τ) un e.v.t y definimos $U(f_1,\dots,f_k;\varepsilon) = (*)$

Entorno débil de 0 → $f_i : E \to \mathbb{R}$ funciones lineales y continuas $i=1,\dots,k$.

$(*) = \{x\in E \,/\, |f_i(x)|<\varepsilon, \ \forall i=1,\dots,k\}$ $\varepsilon>0$. Estos conjuntos forman un sistema fundamental de entornos de 0 cuya topología σ es por definición la topología débil sobre E.

1) $0 \in U(f_1,\dots,f_m;\varepsilon)$ ya que $|f_i(0)| = |0| = 0 < \varepsilon \ \forall i=1,\dots,k$

2) Dados $U(f_1,\dots,f_m,\varepsilon)$ y $V(g_1,\dots,g_m,\delta)$. Entonces $\exists\ W(h_1,\dots,h_r,\gamma) \,/\, W \subset U\cap V$.

Ya que $W = W(h_1,\dots,h_r;\gamma)$ donde $r = n+m$ y definiendo $h_i = f_i$ si $i=1,\dots,n$, $h_j = g_j$ si $j=n,\dots,r$, $\gamma = \min\{\varepsilon,\delta\}$

Entonces $W\subset U\cap V$ pues si $x\in W \Rightarrow |h_i(x)|<\gamma\ \forall i=1,\dots,r$ $\Rightarrow |f_i(x)| < \gamma \le \varepsilon$ $\forall i=1,\dots,n$ o $|g_j(x)| < \gamma \le \delta$ $\forall j=n,\dots,r$ $\Rightarrow x\in U$ y $x\in V$

Observación: De lo anterior tenemos que dado $x\in E$, se define $U(x)$ = entorno de x donde $U(x) = x + U(f_1,\dots,f_m;\varepsilon)$

Definición: $A\subset E$ es un abierto débil $\Leftrightarrow A=\emptyset$ o si $A\neq\emptyset$, $\forall x\in A\ \exists\ U(x)\subset A$. Por lo tanto, (E,σ) es un e.v.t.

Proposición: La topología débil es menos fina que la topología inicial $(\sigma < \tau)$

Demostración: Basta probar que si $U(f_1,\dots,f_n;\varepsilon)$ es un entorno débil de $0 \Rightarrow U$ es entorno de 0 para τ. Tenemos:

$U(f_1,\dots,f_m;\varepsilon) = \{x\in E \,/\, |f_i(x)|<\varepsilon\ \forall i=1,\dots,m\} =$

$= \bigcap_{i=1}^{m} f_i^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon) =$ (intersección finita de abiertos de τ) $=$

($f_i : E \to \mathbb{R}$, dado $(-\varepsilon,\varepsilon) \Rightarrow f_i^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon)$ abierto de τ) $=$

$=$ abierto de τ que contiene a 0.

Nota: En general $\sigma < \tau$ (donde $<$ es estricta).

Queremos ver ejemplos en los que abiertos de τ no están en σ, tenemos que buscarlos en dimensión infinita.

Ejemplo $(E,\tau) = (c_0, \|\cdot\|)$ donde $c_0 = \{x=(x_n)_{n=1}^{\infty} \,/\, \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ y $\|x\| = \sup |x_n|$

Sea $B = \{x\in c_0 \,/\, \|x\|<1\}$ abierto de τ, que contiene a 0.

Veamos que B no es un abierto débil.

Si B fuese un abierto débil $\Rightarrow$ dado $0 \in B$, $\exists U(f_1, \dots, f_k; \varepsilon)$ / $U \subset B$. Los funcionales $f_i : E \to \mathbb{R}$ son lineales y continuos para $\|\cdot\|$. Entonces $f_i \in E' = c_0' = \ell_1$ ($\ell_1 = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} / \sum |x_k| < \infty\}$)
Para cada $i = 1, 2, \dots, k$ $\exists (x_n^{(i)})_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ / $f_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(i)} x_n$ donde $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ / $|x_n^{(i)}| < \varepsilon/4$ $\forall n \geq n_0$ $\forall i = 1, 2, \dots, k$ ya que para cada i, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(i)}| < \infty$.
Definimos un $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ donde:

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0 \\ 2 & \text{si } n = n_0 \\ 1 & \text{si } n = n_0 + 1 \\ 1/2 & \text{si } n = n_0 + 2 \\ \frac{1}{2^{l-1}} & \text{si } n = n_0 + l \end{cases}$$

Entonces:
1) $x \in c_0$ ya que $\lim x_n = 0$
2) $x \in U(f_1, \dots, f_k; \varepsilon)$ ya que $|f_i(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(i)} x_n\right| =$
$= \left|\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n^{(i)} x_n\right| = |x_{n_0}^{(i)} \cdot 2 + x_{n_0+1}^{(i)} \cdot 1 + x_{n_0+2}^{(i)} \cdot \frac{1}{2} + \dots| \leq$
$\leq \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{4} \cdot 1 + \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{1}{2} + \dots = \frac{\varepsilon}{4}(2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots) = \frac{\varepsilon}{4} \cdot \frac{2}{1 - 1/2} =$
$= \frac{\varepsilon}{4} \cdot 4 = \varepsilon$
Luego $x \in U(f_1, \dots, f_k; \varepsilon)$. Por tanto, $x \in B \Rightarrow \|x\| < 1$, pero $\|x\| = \sup |x_n| = 2$. Absurdo.

<u>Proposición</u>: La topología débil es la topología más débil que hace continuas a todas las aplicaciones lineales y continuas para la topología inicial.

<u>Demostración</u>: ($f : (E, \tau) \to \mathbb{R}$ continua $\not\Rightarrow f : (E, \sigma) \to \mathbb{R}$ continua porque $\sigma < \tau$)!

Dos partes.
1) Toda aplicación lineal y continua para (E, δ) es lineal y continua para (E, δ).
2) Si $\exists \sigma'$ topología sobre E / tenga la propiedad que hace continuas a las aplicaciones continuas sobre la topología inicial, entonces $\sigma < \sigma'$.

1) Sea $f : (E, \delta) \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Veamos que $f : (E, \sigma) \to \mathbb{R}$ es un entorno débil de 0 (abierto). Aplicando el teorema (Toda aplicación lineal es continua $\Leftrightarrow \exists U$ entorno de 0 / f está

acotada en $U(f;\varepsilon)$)

2) Supongamos que $\exists\ \sigma'$ topología sobre E / σ' tiene la propiedad de hacer continuas a las aplicaciones lineales y continuas para (E,τ). Veamos que $\sigma < \sigma'$. En efecto, (basta probarlo para entorno de 0). Sea $U(f_1,\dots,f_n;\varepsilon)$ con $f_i \in (E,\tau)'$ y $\varepsilon>0$. Entonces $U(f_1,\dots,f_n;\varepsilon) = \{x\in E / |f_i(x)|<\varepsilon\}$ entorno de 0 para σ (abierto).
Ponemos $U(f_1,\dots,f_n;\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon)$ abierto de σ' ya que cada $f_i^{-1}(-\varepsilon,\varepsilon)$ abierto de σ' ya que f_i es τ-continua.
Por tanto $U(f_1,\dots,f_n;\varepsilon)$ es un abierto de τ por ser intersección finita de abiertos para $\sigma' \Rightarrow \sigma<\sigma'$. Demostrado.

(E,τ) T_1 y dado $V\neq\emptyset$ (abierto) localmente convexo $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\ U$ abierto convexo no vacío / $V\subset U \Rightarrow$ para cada $x\in E$, $\exists\ U(x) = x+V$, V entorno de 0 convexo

$T_1 \Leftrightarrow \forall x_0\neq 0,\ \exists\ U$ entorno de 0 / $x_0\notin U$.

(E,τ) se dice que hay una cantidad suficientemente grande de funcionales lineales y continuos $\Leftrightarrow \forall x_0\neq 0,\ \exists\ f: E\to\mathbb{R}$ lineal y continuo / $f(x_0)\neq 0$.

Teorema: En todo e.v.t (E,τ) localmente convexo y T_1, $\exists$ una cantidad suficientemente grande de funcionales lineales y continuos.

Demostración: Como $x_0\neq 0$, por ser T_1, $\exists\ V$ entorno de 0 / $x_0\notin V$. Por ser (E,τ) localmente convexo, dado V, $\exists\ W$ convexo entorno de 0 / $W\subset V$. Podemos comprobar inmediatamente que $-W$: entorno de 0 convexo. Entonces definimos $U=W\cap(-W)$ entorno de 0 convexo y simétrico ($U=-U$). Veamos que U es un cuerpo convexo, es decir $\ker U\neq\emptyset$. Veamos que $0\in\ker U$:
Dado un $x\in E$ (arbitrario) $\Rightarrow \exists\ \varepsilon=\varepsilon(x)>0$ tal que $0+tx\in U$ $\forall |t|<\varepsilon$ (1). En efecto considerando la aplicación

$\mathbb{R}\times E \longrightarrow E$ continua por definición de e.v.t. Por tanto,
$(0,x) \longmapsto 0\cdot x = 0$

dado U, $\exists\ \varepsilon>0$ tal que $\lambda x\in U$ si $|\lambda|<\varepsilon$. Entonces (1) es cierto, luego U es un cuerpo convexo que contiene a 0.
Entonces U define el funcional de Minkowski $p_U(x) = \inf\{r>0 : \frac{x}{r}\in U\}$ (funcional convexo y finito)

Como $x_0 \notin V \Rightarrow x_0 \notin W \Rightarrow x_0 \notin U$. Entonces $p_U(x_0) \geq 1$. (Si $p_U(x_0) < 1 \Rightarrow \exists\, r < 1 / \frac{x_0}{r} \in U$: absurdo ya que $x_0 \notin U$)

Dado $x_0 \neq 0$ definimos el subespacio vectorial $L_0 = \{\lambda x_0 / \lambda \in \mathbb{R}\}$ y definimos

$$f_0 : L_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x = \lambda x_0 \longmapsto f_0(x) = \lambda \quad (f_0 \text{ lineal}) \text{ trivial}$$

Veamos que $f_0(x) \leq p_U(x)$ $\forall x \in L_0$ (2). En efecto: $f_0(x) = f_0(\lambda x_0) = \lambda$. Si $\lambda < 0$, entonces (2) es cierto ya que $f_U(x) \geq 0$ $\forall x \in E$. Si $\lambda \geq 0$, entonces se tiene $p_U(x) = p_U(\lambda x_0) = \lambda \cdot \underbrace{p_U(x_0)}_{\geq 1} \geq \lambda = f_0(x)$, luego (2) es cierto.

Aplicando el T^a H-B para e.v. $\exists\, f : E \to \mathbb{R}$ que extiende a f_0 ($f(x) = f_0(x)$ $\forall x \in L_0$) y $f(x) \leq p_U(x)$ $\forall x \in E$

Veamos que f es continua.

Sea $x \in U$, entonces $f(x) \leq p_U(x) \leq 1$ (3). (inmediato por definición de p_U). Veamos que $-1 \leq f(x)$ $\forall x \in U$.

Si $x \in U \Rightarrow x \in -U$ ($U = -U$), luego $x = -y$ con $y \in U$.

Entonces $f(x) = f(-y) = -f(y) \geq -1$ (3). Por tanto $|f(x)| \leq 1$ $\forall x \in U$, es decir f es lineal y acotado sobre un entorno de 0, luego f es continua. Por último, veamos que $f(x_0) \neq 0$. En efecto, $x_0 \in L_0$ luego $f(x_0) = f_0(x_0)$, pero $f_0(x_0) = f_0(\lambda \cdot x_0) = \lambda \neq 0$.

<u>Definición</u>: Sea (E, τ) un e.v.t. y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$, decimos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a $x \in E \Leftrightarrow$ $\forall f : E \to \mathbb{R}$ funcional lineal y continua, se tiene que $(f(x_n))_n$ converge en $\mathbb{R}$ a $f(x)$.

<u>Proposición</u>: Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x, entonces $(x_n)_n \xrightarrow{\sigma} x$

<u>Demostración</u>: Basta hacer la prueba para $x = 0$. Sea $U(f_1, \dots, f_k, \varepsilon) = \{x \in E / |f_i(x)| < \varepsilon,\ \forall i = 1, 2, \dots, k\}$ entorno de 0 para la topología σ. $f_i \in E'$ $\forall i = 1, \dots, k$; $\varepsilon > 0$.

Sabemos que para cada $i = 1, \dots, k$ $(f_i(x_n)) \xrightarrow{\text{en } \mathbb{R}} f_i(0) = 0$.

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ (ε es el definido en U) $\exists\, n_i /$ $|f_i(x_n)| < \varepsilon$ si $n > n_i$. Tomando $n_0 = \max\{n_i / i = 1, \dots, k\}$ se tiene:

$|f_i(x_n)| < \varepsilon$ si $n > n_0$. Ahora bien, esto significa que

$x_n \in U(f_1, f_2, \dots, f_k; \varepsilon)$ $\forall n \geq n_0$. Por tanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{\sigma} 0$

Proposición: En un e.v.t (E, τ) si una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de E converge a x (topología τ) entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente a x.

Demostración: Inmediata ya que $\sigma < \tau$ (demostrado).

Nota: El recíproco no es cierto. Veamos que $\exists$ una sucesión en (E, τ) tal que converge en σ, pero no converge en τ.

Ejemplo: Tomamos $(E, \tau) = (c_0, \|\cdot\|)$ donde $c_0 = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} / \lim x_n = 0\}$ y $\|x\| = \sup |x_n|$. Definimos:

$x^{(1)} = (1, 0, 0, \dots)$

$x^{(2)} = (0, 1, 0, \dots)$

$\vdots$

$x^{(n)} = (0, \dots, 0, \overset{n}{\overset{\downarrow}{1}}, 0, \dots)$

Está claro que $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset c_0$. Veamos que $(x^{(n)})_n \xrightarrow{\sigma} 0 \in c_0$

Sea $f \in c_0'$ (funcional lineal y continuo) $\Rightarrow \exists\, a = (a_1, \dots, a_n, \dots) \in l_1$ $(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty)$ / $\underset{x \in c_0}{f(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ (demostrado).

Entonces $f(x^{(1)}) = a_1$, $f(x^{(2)}) = a_2, \dots, f(x^{(n)}) = a_n, \dots$

Entonces $(f(x^{(n)})) \to 0$ ya que $f(x^{(n)}) = a_n \to 0$ ya que $\sum |a_n| < \infty$. Por tanto $(x^{(n)})_n \xrightarrow{\sigma} 0$, pero $(x^{(n)})_n \overset{\|\cdot\|}{\not\to} 0$ ya que si converge $\Rightarrow \|x^{(n)}\| \to 0$ si $n \to \infty$ pero $\|x^{(n)}\| = 1$ $\forall n$, luego $(x^{(n)})_n \xrightarrow{\sigma} 0$ pero $(x^{(n)})_n \overset{\|\cdot\|}{\not\to} 0$ $\underset{=}{}$ $\sup_k |x_k^{(n)}| = 1$

Proposición: En un espacio de Hilbert, dada una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$. Entonces $(x_n)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.
$((x_n)_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$, si $n \to \infty)$

Demostración: No es restrictivo hacer la prueba para l_2 (T^a del isomorfismo). Tomamos la sucesión $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ con $x^{(n)} \in l_2$:

$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots)$ / $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(n)})^2 < \infty$

Tenemos que demostrar que $\|x^{(n)} - x\| \to 0$ si $n \to \infty$.

Entonces $\|x^{(n)} - x\|^2 = \langle x^{(n)} - x, x^{(n)} - x \rangle = \langle x^{(n)}, x^{(n)} \rangle - 2\langle x^{(n)}, x \rangle + \langle x, x \rangle = \|x\|^2 + \|x^{(n)}\|^2 - 2\langle x^{(n)}, x \rangle$ (1)

Dado $x \in l_2$, la aplicación $f_x : l_2 \to \mathbb{R}$
$y \mapsto f_x(y) = \langle y, x \rangle$
es lineal y continua (demostrada).

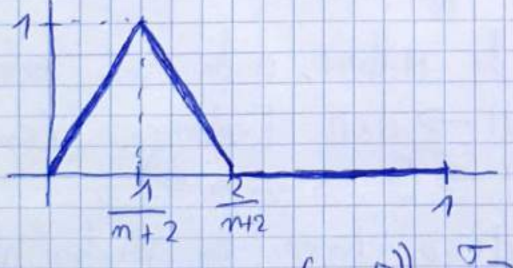
() $f_x(y_1+y_2) = \langle y_1+y_2, x\rangle = \langle y_1, x\rangle + \langle y_2, x\rangle = f_x(y_1)+f_x(y_2)$).
Continuidad $|f_x(y)| = |\langle y, x\rangle| \leq \|y\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$
f_x está acotado en $B_{\ell_2} \Rightarrow f_x$ continua. Por hipótesis $(x^{(n)})_n \xrightarrow{\sigma} x \underset{\text{débil}}{\overset{\text{def. de conv.}}{\Longrightarrow}} f_x(x^{(n)}) \to f_x(x)$, pero $f_x(x^{(n)}) =$
$= \langle x^{(n)}, x\rangle$ y $f_x(x) = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$. Tomando límites en (1) cuando $n \to \infty$ queda: $\lim \|x^{(n)} - x\|^2 = \lim \|x^{(n)}\|^2 +$
$+ \|x\|^2 - 2\lim \langle x^{(n)}, x\rangle = (\|x^{(n)}\| \xrightarrow{n\to\infty} \|x\|) = 2\|x\|^2 - 2\|x\|^2 = 0$.
Por tanto, $(x^{(n)}) \xrightarrow{\|\cdot\|} x$. Demostrado.

- $C[a,b] = \{x : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$ con la norma supremo, es decir, $\|x\| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$, la convergencia viene dada por:

Teorema: Una sucesión $(x_n(t))_{n=1}^{\infty} \in C[a,b]$ converge σ a $x(t) \in C[a,b] \iff$
1) $(x_n(t_0))_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x(t_0)$ para cada $t_0 \in [a,b]$ (conv. puntual)
2) $\exists A > 0 \,/\, \|x_n(t)\| < A \quad \forall n = 1, 2, \ldots \quad \forall t \in [a,b]$
(equiacotación de la sucesión).

- Un ejemplo en $C[0,1]$ de sucesión $(x_n(t))_n$ tal que $(x_n(t)) \xrightarrow{\sigma} 0$ (función idénticamente nula en $[0,1]$) pero, $(x_n(t))_n \not\xrightarrow{\|\cdot\|} 0$

Definimos la sucesión:



$$x_n(t) = \begin{cases} (n+2)\cdot t & \text{si } 0 \leq t \leq 1/(n+2) \\ -(n+2)\left(t - \frac{2}{n+2}\right) & \text{si } \frac{1}{n+2} \leq t \leq \frac{2}{n+2} \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n+2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Veamos que $(x_n(t))_n \xrightarrow{\sigma} 0$ (aplicando el teorema anterior), tenemos que comprobar:
1) Dado $t_0 \in [0,1]$, se tiene $x_n(t_0) \to 0$. Si $t_0 = 0$ o $t_0 = 1$, demostrado ya que $x_n(0) = x_n(1) = 0 \quad \forall n = 1, 2, \ldots$
Sea $0 < t_0 < 1$. Como $\frac{2}{n+2} \to 0$ cuando $n \to \infty$, dado t_0, $\exists n_0 \,/\, \frac{2}{n+2} < t_0 \quad \forall n \geq n_0$. Entonces $(x_n(t_0))_{n=1}^{\infty} \to 0$ ya que $x_n(t_0) = 0 \quad \forall n > n_0$
Por tanto, 1) se cumple.
Veamos 2) Tomamos $A = 1$ y se tiene por construcción de

$x_n(t)$ que $\|x_n(t)\| \le 1$ $\forall n$ y $\forall t$ ya que $0 \le x_n(t) \le 1$ $\forall n$ $\forall t \in [0,1]$.
Por tanto, $(x_n(t))_n$ cumple 2. Entonces por el Teorema anterior, $(x_n(t))_n \xrightarrow{\sigma} 0$, pero $(x_n(t))_n \overset{\|\cdot\|}{\not\to} 0$ ya que $\|x_n(t)\| = 1$ $\forall n$ ya que $\|x_n(t)\| = \sup_{t\in[0,1]} |x_n(t)| = 1$

Recordatorio: Si $(E,\|\cdot\|)$ normado, entonces $(E',\|\cdot\|)$ con $\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ es un espacio de Banach.

TOPOLOGÍAS SOBRE EL ESPACIO DUAL DE UN E.V.T

Sea (E,τ) un e.v.t y E' su dual para cada A acotado de (E,τ) y cada $\varepsilon > 0$, definimos $U(A;\varepsilon) = \{f \in E' : |f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in A\}$. Entonces $\{U(A;\varepsilon) : A$ acotados en (E,τ) y $\varepsilon > 0\}$ es un S.F de entornos abiertos de 0 para una cierta topología.

1) $f = 0 \in U(A,\varepsilon) \cap U(B,\delta)$ con A, B acotados y $\varepsilon, \delta > 0$.
Entonces, $\exists\, W(C,\eta)$ / $W(C;\eta) \subset U(A;\varepsilon) \cap U(B;\delta)$
Tomando $C = A \cup B$ (acotado) y $\eta = \min\{\varepsilon, \delta\}$. Definimos en E' una topología, llamada topología fuerte (denotada por b) sobre E' del siguiente modo: $X \subset E'$ entonces X es un abierto para b $\iff X = \emptyset$ o si $X \neq \emptyset$, $\forall x \in X$, $\exists\, U(A;\varepsilon)$ / $x + U(A;\varepsilon) \subset X$ donde A es un acotado de (E,τ) y $\varepsilon > 0$.

Proposición: Si $(E,\tau) = (E,\|\cdot\|)$ normado entonces b sobre E' coincide con la topología $\|\cdot\|$ por $\|f\| = \sup_{\|x\| \le \delta} |f(x)|$

Demostración: Veamos que $b < \|\cdot\|$. Basta tomar un elemento de 0 para b. Sea $U(A,\varepsilon)$ entorno de 0 para b (A acotado y $\varepsilon > 0$). Veamos que $U(A,\varepsilon)$ es un abierto para $\|\cdot\|$.
Para ello, vamos a determinar un $\delta > 0$ tal que
$B(0,\delta) = \{f \in E' / \|f\| < \delta\} \subset U(A;\varepsilon)$
Dado $B(0;1) = \{x \in E / \|x\| = 1\}$, por ser A acotado $\Rightarrow \exists m > 0$ / $A \subset mB(0,1)$. Entonces si $x \in A \Rightarrow x \in mB(0,1) \Rightarrow \frac{x}{m} \in B(0,1)$ $\Rightarrow \|\frac{x}{m}\| < 1$. Sea δ / $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{m}$. Veamos que $B(0,\delta) \subset U(A,\varepsilon)$.

En efecto, sea $f \in B(0,\delta) \Rightarrow \|f\| < \delta$. Como $\|f\| = \sup |f(x)|$.
Como $\|\frac{x}{n}\| \leq 1 \Rightarrow \delta > \|f\| \geq |f(\frac{x}{n})| \Rightarrow \delta > |f(\frac{x}{n})| \overset{\|x\| \leq \delta}{=}$
$= \frac{1}{n}|f(x)| \Rightarrow |f(x)| < n \cdot \delta < n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$ c.q.d.
Veamos que $\|\cdot\| < b$. Sea $B(0,\varepsilon) = \{f \in E' : \|f\| < \varepsilon\}$.
Veamos que $\exists\, U(A,\delta)$ entorno de 0 para b / $U(A,\delta) \subset B(0,\varepsilon)$
Basta tomar $A = \{x \in E / \|x\| \leq 1\}$ y $\delta / 0 < \delta < \varepsilon$. Entonces
si $f \in U(A,\delta) \Rightarrow |f(x)| < \delta \Rightarrow \underset{\forall x \in A}{|f(x)|} < \delta \Rightarrow \underbrace{\sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|}_{\|f\|} \leq \delta$,
luego $\|f\| \leq \delta < \varepsilon$, entonces $f \in B(0,\varepsilon)$.

<u>Teorema</u>: Sea (E,τ) un e.v.t. arbitrario, entonces (E',b) es siempre T_1 y localmente convexo.

<u>Demostración</u>: Sea $f \in E'$ tal que $f \neq 0$. Tenemos que determinar $U(A;\varepsilon)$ (A acotado de E; $\varepsilon > 0$) tal que $f \notin U(A;\varepsilon)$. Como $f \neq 0 \Rightarrow \exists x_0 \in E : f(x_0) \neq 0$ ($f: E \to \mathbb{R}$ lineal y continua).
Tomamos $A = \{x_0\}$ acotado en (E,τ) (Todo conjunto finito es acotado) y $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0$. Veamos que $f \notin U(A,\varepsilon)$.
En efecto, si $f \in U(A,\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$, pero $x_0 \in A$ y entonces $|f(x)| < \varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2} \Rightarrow 1 < 1/2$ Absurdo.
Por lo tanto, (E',b) es T_1. Veamos que $U(A,\varepsilon)$ es convexo $\forall A$: acotado y $\forall \varepsilon > 0$. En efecto, sean $f, g \in U(A,\varepsilon)$ y $\lambda \in [0,1]$. Entonces $(1-\lambda)f + \lambda g \in U(A,\varepsilon)$ ya que $|(1-\lambda)f(x) + \lambda \cdot g(x)| \leq (1-\lambda)|f(x)| + \lambda \cdot |g(x)| <$
$(1-\lambda)\varepsilon + \lambda\varepsilon = \varepsilon \quad \forall x \in A$.
Por tanto, $U(A,\varepsilon)$ es convexo y en consecuencia (E',b) es localmente convexo.

<u>TOPOLOGÍA DÉBIL SOBRE E'</u>:

Para cada conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de E y cada $\varepsilon > 0$, definimos el conjunto $U(x_1, \ldots, x_n; \varepsilon) = \{f \in E' / |f(x_i)| < \varepsilon \;\; \forall i = 1, 2, \ldots, n\}$.
Entonces $\{U(F,\varepsilon) / F$ subconjunto de E, $\varepsilon > 0\}$ define un S.F de entornos de 0 en E'. Entonces en E' el S.F anterior define una topología, denotada por σ^* y llamada topología débil sobre E'. $X \subset E'$ es un abierto débil $\Leftrightarrow X = \emptyset$ o si $X \neq \emptyset$, $\forall x \in X$, $\exists U(F,\varepsilon) / U(F,\varepsilon) \subset X$ donde F subconjunto finito de E.

Proposición: Sea (E, τ) un e.v.t. Entonces sobre E', se tiene que $\sigma^* < b$.

Demostración: Basta tener en cuenta que todo subconjunto finito de E es en particular un subconjunto acotado de E. Por tanto, todo abierto de σ^* es en particular un abierto de b (el recíproco no es cierto).

Ejercicio: Probar que $(c_0, \|\cdot\|)$ es separable (denso y numerable).

$c_0 = \{x = (x_n)_n \,/\, \lim x_n = 0\}$ y $\|x\| = \sup |x_n|$

Sea $FQ = \{x = (q_n)_{n=1}^{\infty} \,/\, q_n \in \mathbb{Q}$ y $q_n = 0$ excepto para una cantidad finita de $n\}$.

FQ: es numerable por ser $\mathbb{Q}$ numerable, $x_Q \in FQ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_Q = (q_1, \dots, q_n, 0, \dots)$ $q_i \in \mathbb{Q}$.

Veamos que $\overline{FQ} = c_0$ (obviamente $\overline{FQ} \subset c_0$). Sea $x \in c_0$ y $\varepsilon > 0$, veamos que $\exists x_Q \in FQ \,/\, \|x - x_Q\| < \varepsilon$.

Dado $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \in c_0$, como $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \,/\, |x_n| < \varepsilon \; \forall n > n_0$.

Dado n_0, determinamos $XQ = (q_1, \dots, q_{n_0}, 0, 0, \dots) \in FQ \,/$
$|q_1 - x_1| < \varepsilon, |q_2 - x_2| < \varepsilon, \dots, |q_{n_0} - x_{n_0}| < \varepsilon$

Entonces $\|x - XQ\| = \|(x_1 - q_1, x_2 - q_2, \dots, x_{n_0} - q_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots)\| = \sup_n \{|x_k - q_k| : k = 1, \dots, n_0; \; |x_n| \; n > n_0\} < \varepsilon$

Ejercicio: Probar que en (c_0', σ^*) existen funciones sobre la esfera unidad $(S = \{f \in c_0' : \|f\| = 1\})$ / $\lim f_n = 0$.

Recordar: $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ (b sobre c_0' coincide con la topología de la norma).

Cada vector $a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ define un funcional lineal y continuo f_a sobre c_0 mediante la fórmula.

$f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x_n$ Tomamos $a^{(1)} = (1, 0, \dots)$

$x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ $\quad a^{(2)} = (0, 1, 0, \dots)$

$\vdots$

$a^{(n)} = (0, \dots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \dots)$

todos los vectores $a^{(n)} \in \ell_1$. Entonces $f_{a^{(n)}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} x_k = x_n$. Veamos que $f_{a^{(n)}} \in S$, es decir, $\|f_{a^{(n)}}\| = 1$ $\forall n$. En efecto, $\|f_{a^{(n)}}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f_{a^{(n)}}(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x_n| = 1$

ya que podemos tomar $x = (1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ con $|x_n| < 1 \; \forall n > 1$

y $\lim x_n = 0$ $(\|x\| = 1)$.

Luego $\|f_{a^{(n)}}\| = 1 \ \forall n$. Veamos que $f_{a^{(n)}} \xrightarrow{*} 0$ ⟸ funcional idénticamente nulo. ⟺ para cada $x \in c_0$ se tiene que $f_{a^{(n)}}(x) \xrightarrow{\text{en } \mathbb{R}} 0$. En efecto:

$\lim f_{a^{(n)}}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ya que $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$.

La sucesión $(f_{a^{(n)}}) \not\to 0$ en norma (b) ya que $\lim\limits_n \|f_{a^{(n)}} - 0\| = \lim\limits_n \|f_{a^{(n)}}\| = 0$ Absurdo ya que $\|f_{a^{(n)}}\| = 1 \ \forall n$

Definición: $A : (\underset{\text{e.v.t}}{E, \tau}) \to (\underset{\text{e.v.t}}{F, S})$ A operador ⟺ A es lineal y el dominio D_A es un subespacio vectorial de E (En general $D_A \subset E$).

Definición: Un operador A con $D_A = E$, se dice que es acotado ⟺ $\forall M$ acotado de $E \Rightarrow A(M)$ es un acotado de F.

Definición: Un operador A con $D_A \subset E$, se dice que es un acotado en D_A ⟺ $\forall M$ acotado en $D_A \Rightarrow A(M)$ acotado en F.

Ejercicio: Definimos el operador $A : l_2 \to l_2$ por $A(x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, \dots)$

A) Probar que D_A es denso en l_2.

B) Probar que A no es un espacio acotado sobre D_A.

$D_A \neq l_2$. Tomamos $x = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots) \in l_2$ pero $A(x) = (1, 1, \dots, 1, \dots) \notin l_2 \Rightarrow D_A = \{x \in l_2 / \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 < \infty\}$

A operador:

Veamos que A es lineal:

$A(x+y) = A(z) = (z_1, 2z_2, \dots, nz_n, \dots) = (x_1+y_1, 2(x_2+y_2), \dots, n(x_n+y_n), \dots) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n, \dots) + (y_1, 2y_2, \dots, ny_n, \dots) = A(x) + A(y)$

Análogamente $A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_A$.

A) $\overline{D_A} = l_2$

Basta ver que $l_2 \subset \overline{D_A}$. Dado $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$ y $\varepsilon > 0$, $\exists y \in D_A / \|x - y\| < \varepsilon$ $(\|x-y\|^2 < \varepsilon^2)$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 / \sum_{n > n_0} x_n^2 < \varepsilon^2$ ya que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Definimos

$y = (x_1, x_2, \dots, x_{n_0}, 0, \dots) \in D_A$ y se tiene:

$\|x-y\|^2 = \|(0, \dots, 0, x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_0+k}^2 = \sum_{n > n_0} x_n^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \|x - y\| < \varepsilon$.

T⁹ (demostrado): $f : (E, \tau) \to (F, S)$ lineal. Entonces si f es continua $\Rightarrow f$ es acotado.

B) Si E satisface el 1^er axioma de numerabilidad, el recíproco es cierto (si f acotado $\Rightarrow f$ continua).

$A: (D_A, \|\cdot\|) \longrightarrow (\ell_2, \|\cdot\|)$ lineal. Si A fuese acotado, como $(D_A, \|\cdot\|)$ es normado, verifica el 1^er axioma de numerabilidad $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ A sería continuo. Consideramos la sucesión
$x^{(1)} = (1, 0, \dots)$, $x^{(2)} = (1, \frac{1}{2}, 0, \dots)$, ..., $x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots)$
$\Rightarrow (x^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset D_A$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$ donde $x = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots)$ ya que $\|x - x^{(n)}\|^2 =$
$= \|(\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ veces}}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)^2} \to 0$ si $n \to \infty$
ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Por continuidad de A, se tendría que $\lim A(x^{(n)}) = A(x)$, pero $A(x) = A(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots) =$
$= (1, 1, \dots, 1, \dots) \notin \ell_2$.

Ejercicio: Sea (E, τ) un e.v.t. Si $V \subset E$ es convexo $\Rightarrow$
$\Rightarrow V + V = 2V$. El recíproco es cierto si V es abierto.

Eje 7. Sea $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ un sist. ortogonal de un espacio de Hilbert. Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en H. $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge en $\mathbb{R}$.

Solución: La serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ converge $\overset{\text{Def}}{\Leftrightarrow} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ converge $\Leftrightarrow$
(H: Hilbert (completo)) $\Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy
Análogamente para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ ya que $\mathbb{R}$ es completo.
Por tanto, todo se reduce a probar que:
La sucesión $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en H $\Leftrightarrow$
la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, donde $S_n =$
$= \sum_{k=1}^{n} x_k$; $A_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$
tomamos $m > n$, entonces $\|S_m - S_n\|^2 = \langle S_m - S_n, S_m - S_n \rangle$
$= \langle \sum_{k=n+1}^{m} x_k, \sum_{k=n+1}^{m} x_k \rangle = \sum_{k=n+1}^{m} \langle x_k, x_k \rangle = \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|^2 =$
$= A_m - A_n$. Por tanto, $\lim_{\substack{m > n \\ m, n \to +\infty}} \|S_m - S_n\| = \lim_{m, n \to +\infty} (A_m - A_n)$

8. Sea $\{\varepsilon_n : n = 1, 2, \dots\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert H y $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales o complejos. Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varepsilon_n$ converge en H $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ converge en $\mathbb{R}$

Solución: De forma análoga al ej 7, tenemos $\|S_m - S_n\|^2 = $ ($m > n$)
$= \langle \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k \varepsilon_k, \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k \varepsilon_k \rangle \overset{(*)}{=}$ donde $S_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \varepsilon_k$
para cada $n \geq 1$.
Tomamos H real.
Pero $(*) = \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k^2$. Por tanto, la serie $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $H \Leftrightarrow$ la sucesión $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ donde $A_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$ luego $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varepsilon_n$ converge en $H \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ converge en $\mathbb{R}$ (En el caso complejo, hay que poner $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$)

9. Demostrar que todo espacio de Hilbert es estrictamente normado ($\forall x, y \neq 0$, entonces $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = \lambda x$ con $\lambda > 0$).

Solución: a) "$\Leftarrow$" Si $y = \lambda x$ con $\lambda > 0$, entonces $\|x+y\| =$ $\|x + \lambda x\| = \|(1+\lambda)x\| = (1+\lambda)\|x\| = \|x\| + \|\lambda x\| =$ $= \|x\| + \|y\|$

b) "$\Rightarrow$" Partimos de: $x, y \neq 0$ con $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$
Elevando a 2 queda: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|$
Por otra parte, $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle$ $+ 2\langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$. Por tanto
$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| > 0$
Por reducción al absurdo. Si $y \neq \lambda x \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow y - \lambda x \neq 0$ $\forall \lambda \Rightarrow \|y - \lambda x\|^2 > 0 \ \forall \lambda$. Pero $\|y - \lambda x\|^2 = \langle y - \lambda x, y - \lambda x \rangle$ $= \langle y, y \rangle + \lambda^2 \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle > 0 \ \forall \lambda \Rightarrow$
$\Rightarrow \|x\|^2 \lambda^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \|y\|^2 > 0$ (Ec. de una parábola en el plano (λ, μ))
Entonces el discriminante: $\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 < 0$.
Teniendo en cuenta que $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$. Se tiene:
$\underbrace{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2}_{0} < 0$. Absurdo

Por tanto, $\exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x$. 1) λ no es cero ya que si lo fuera $y = 0$ ($y \neq 0$). 2) Si $\lambda < 0$, entonces $\langle x, y \rangle = \langle x, \lambda x \rangle > 0$, pero $\langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle > 0$.

Como $\langle x,y\rangle > 0 \Rightarrow \lambda > 0$, luego $\lambda > 0$.

(10). Sea E un espacio euclídeo (real o complejo). Probar que si $Re(\langle x_1, x_2\rangle) = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$, (1) entonces $x_1 = x_2$.

Caso 1: $Re(\langle x_1, x_2\rangle) = 0$. Entonces $\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$. Demostrado

Caso 2: $Re(\langle x_1, x_2\rangle) > 0$ (no tiene sentido considerar el caso $Re(\langle x_1, x_2\rangle) < 0$). Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1 - x_2 \neq 0$
$\Rightarrow \|x_1 - x_2\|^2 > 0$. Pero $\langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = \langle x_1, x_1\rangle +$
$+ \langle x_2, x_2\rangle - 2\langle x_1, x_2\rangle$ (Caso real) $= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 -$
$- 2 \underbrace{\langle x_1, x_2\rangle}_{\text{nº real}} = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\,Re\langle x_1, x_2\rangle =$ (por (1))

$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) = -\|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 > 0$.
Absurdo. Entonces en el caso real, queda demostrado.

Caso complejo: Supongamos que $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \|x_1 - x_2\|^2 > 0$
pero $\|x_1 - x_2\|^2 = \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = \langle x_1, x_1\rangle + \langle x_2, x_2\rangle -$
$- \langle x_1, x_2\rangle - \langle x_2, x_1\rangle = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - \langle x_1, x_2\rangle - \overline{\langle x_1, x_2\rangle} =$
$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - (\langle x_1, x_2\rangle + \overline{\langle x_1, x_2\rangle}) = \|x_1\|^2 +$
$\|x_2\|^2 - 2\,Re\langle x_1, x_2\rangle \underset{\text{por (1)}}{=} \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2) =$
$= -\|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 > 0$ Absurdo.

(11). H es un espacio de Hilbert, $x \in H$. Entonces x es ortogonal a L (L: subespacio vectorial de H) $\Leftrightarrow$
$\forall y \in L$, se tiene $\|x\| \leq \|x - y\|$.

Solución: Si $x = 0$, entonces se tiene que $0 \leq \|-y\| = \|y\|$ cierto siempre. Por tanto, supongamos que $x \neq 0$. Entonces $\|x\|^2 > 0$. Tenemos $0 < \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle x - y + y, x\rangle =$ ($y \in L$ arb.)
$= \langle x - y, x\rangle + \underbrace{\langle y, x\rangle}_{=0 \text{ ya que } x \text{ es ort. a } L} = \langle x - y, x\rangle$.

Por la desigualdad de C-B. $\underbrace{|\langle x - y, x\rangle|}_{= \|x\|^2} \leq \|x - y\| \cdot \|x\|$

Dividimos por $\|x\| > 0 \Rightarrow \|x\| \leq \|x - y\|$ Demostrado.
Recíprocamente supongamos $\|x\| \leq \|x - y\|$ $\forall y \in L$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\exists\, y_0 \in L / \langle x, y_0\rangle \neq 0$.
Entonces $y_0 \neq 0$.
Estudiamos el caso real: Supongamos que $\langle x, y_0\rangle > 0$.

Para cada $\lambda > 0$, definimos el vector $y_\lambda = \lambda \cdot \frac{y_0}{\|y_0\|} \in L \ \forall \lambda > 0$ y $\|y_\lambda\| = \lambda$.

Por otra parte $\forall y \in L$ se tiene $\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle =$
$= \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle - 2\langle x, y \rangle \quad (1) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$.

Como $\|x\| \leq \|x-y\| \Rightarrow \|x\|^2 \leq (\|x-y\|^2) = \|x\|^2 + \|y\|^2 -$
$- 2\langle x, y \rangle \Leftrightarrow 2\langle x, y \rangle \leq \|y\|^2 \ \forall y \in L$. En particular para y_λ, se tiene: $2\langle x, y_\lambda \rangle \leq \|y_\lambda\|^2$

Luego queda: $2\langle x, \frac{\lambda y_0}{\|y_0\|} \rangle \leq \lambda^2 \Leftrightarrow \frac{2\lambda}{\|y_0\|} \langle x, y_0 \rangle \leq \lambda^2$

Dividiendo por λ, $\frac{2}{\|y_0\|} \langle x, y_0 \rangle \leq \lambda \ \forall \lambda > 0 \Rightarrow \langle x, y_0 \rangle \leq 0$.
Absurdo.

En el caso $\langle x, y_0 \rangle < 0$, teniendo en cuenta que $\langle x, -y_0 \rangle =$
$= -\langle x, y_0 \rangle$. Definimos $y_\lambda = \frac{\lambda(-y_0)}{\|y_0\|} \in L \ \forall \lambda > 0$.
y se llega al mismo absurdo.

Ejercicio: Demostrar que en un espacio de Hilbert $\forall \underset{\text{subconjunto}}{M \subset H}$ $(M \neq \emptyset)$ (H: Hilbert), se tiene que $M \subset (M^\perp)^\perp$.
¿Es posible la inclusión estricta?, donde $M^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in M\}$

Solución: Si $x \in M \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in M^\perp \Rightarrow x \in (M^\perp)^\perp$, luego $M \subset (M^\perp)^\perp$

Sea M un subespacio vectorial de H / $M \neq H$ (Tomar $H = l_2$, por el Tª del isomorfismo y por ejemplo $M = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_2 / \sum_{n=1}^\infty n^2 x_n^2 < \infty\}$). y tal que $\overline{M} = H$ (demostramos que $\{x \in l_2 / \sum n^2 x_n^2 < \infty\}$ es denso en l_2). Entonces $M \underset{\text{estricta}}{\subset} (M^\perp)^\perp$. En efecto, supongamos que $M = (M^\perp)^\perp \Rightarrow$
$\Rightarrow M$ es un cerrado (Todo ortogonal es cerrado, demostrado), luego $\overline{M} = M = H$ Absurdo.

(Del otro día) Ejercicio: Sea (E, τ) un e.v.t., V: convexo. $V + V = 2V$.
El recíproco es cierto si V es un abierto no vacío

Solución: Supongamos que V es convexo. Siempre es cierto que $2V \subset V + V$ ya que $y \in 2V \Rightarrow y = 2x$ con $x \in V$.
Escribimos $y = x + x \in V + V$. Veamos que $V + V \subset 2V$.
En efecto, $z \in V + V \Rightarrow z = x + y$ con $x \in V$, $y \in V$. Pero
$z = 2\frac{(x+y)}{2} = 2\underbrace{\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)}_{\in V \text{ por ser convexo}} \in 2V$ (Tomar $\lambda = \frac{1}{2}$, $(1-\lambda)$

$x + \lambda y \in V \quad \forall \lambda \in [0,1])$.

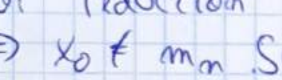
Supongamos que V = abierto no vacío y tal que $V+V = 2V$.
Veamos que V es convexo. Sean $x, y \in V$ y $\lambda \in [0,1]$.
Veamos que $[x,y]$ = (segmento de extremos x,y) : $\{z = (1-\lambda)x + \lambda y$ con $\lambda \in [0,1]\} \subset V$.

$m = \frac{x+y}{2} \in V$ (ya que $2V = V+V$)

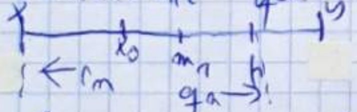
$x+y = 2 \frac{(x+y)}{2} \to V$

Por esta propiedad $(V+V=2V) \Rightarrow$ Todos los puntos medios de $[x,y]$ pertenecen a V. Los puntos medios $\{m_n : n = 1,2,\dots\}$ forman un subconjunto denso en $[x,y]$ / $m_n \in V \ \forall n = 1,2,\dots$

Por reducción al absurdo, supongamos que $x_0 \in [x,y]$ / $x_0 \notin V \Rightarrow$
$\Rightarrow x_0 \neq m_n$. Supongamos que x_0 está en la parte izquierda.



Sea $p \in [x,y]$ / $x_0 = \frac{x+p}{2}$ (x_0 punto medio de $[x,p]$). Entonces $p \notin V$. Sea $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos medios tal que $\lim_{n\to\infty} q_n = p$ (q_n: monótona creciente). Entonces sus simétricas $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ con respecto a x_0, forman una sucesión monótona decreciente que converge a x. Entonces como $(r_n)_n \notin V$



Como $q_n \in M \Rightarrow r_n \notin V \Rightarrow r_n \in V^c$ (complementario de V) =
= cerrado $\Rightarrow \lim r_n = x \in V^c \Rightarrow x \notin V$ Absurdo.

TEMA 3:

E e.v. sobre $\mathbb{R}$. Diremos que en E hay definido un producto escalar si $\exists\ E\times E \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ cumpliendo:

1) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
2) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$
3) $\langle x+y,z\rangle = \langle x+z\rangle + \langle y+z\rangle$
4) $\langle x,x\rangle \geq 0\ \forall x$ y vale $0 \Leftrightarrow x=0$

Cuando en E se tiene un producto escalar se dice que E es un espacio euclídeo

Supongamos que E es un e.v sobre $\mathbb{C}$. Sea $x\neq 0$, entonces por (4) $\langle x,x\rangle>0$, tomamos $\lambda=i$ $ix\neq 0 \Rightarrow \langle ix,ix\rangle>0$, pero aplicando (2) $\langle ix,ix\rangle = i\langle x,i\rangle = i\langle ix,x\rangle =$
$= i^2\langle x,x\rangle = -\langle x,x\rangle<0$ #

Si E es un e.v. sobre $\mathbb{C}$, definimos un p. escalar como una aplicación
$E\times E \to \mathbb{C}$
$(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$

1) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$
2) $\langle \lambda x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$
3) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$
4) $\langle x,x\rangle \geq 0$ y vale $0 \Leftrightarrow x=0$

Si E e.v sobre $\mathbb{C}$ con un producto escalar diremos que E es un espacio euclídeo complejo.

$x\neq 0 \Rightarrow$ (aplicando 4) $\Rightarrow \langle x,x\rangle>0$, entonces $ix\neq 0$, entonces
$\langle ix,ix\rangle =$ (aplicando 2) $= i\langle x,ix\rangle \overset{(1)}{=} i\overline{\langle ix,x\rangle} =$
$= i\cdot\overline{i\langle x,x\rangle} = i\cdot\bar{i}\cdot\langle x,x\rangle = i(-i)\langle x,x\rangle = \langle x,x\rangle>0$

Proposición: $\langle x,\lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x,y\rangle$

Demostración: $\langle x,\lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y,x\rangle} = \bar{\lambda}\,\overline{\langle y,x\rangle} = \bar{\lambda}\langle x,y\rangle$

Proposición: $\langle x+y,z\rangle = \langle x+z,y+z\rangle$

Demostración: $\langle x+y,z\rangle = \overline{\langle z,x+y\rangle} = \overline{\langle z,x\rangle + \langle z,y\rangle} =$
$= \overline{\langle z,x\rangle} + \overline{\langle z,y\rangle} = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$

E: espacio euclídeo real, entonces definimos $\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{1/2}$:
(norma euclídea).

Proposición: $\forall\, x, y \in E$ se tiene que $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
(Cauchy - Schwarz)

Ejemplos (de espacios euclídeos):

1) $\mathbb{R}^n$ esp. euclídeo, donde el producto escalar es definido por $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; $x = (x_i)_{i=1}^{n}$; $y = (y_i)_{i=1}^{n}$

Observar que $\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$

2) $\mathbb{C}^n$ espacio euclídeo complejo ($\mathbb{C}$: cuerpo complejo), donde el producto escalar es definido por
$\langle x,y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$; $x = (x_k)_{k=1}^{n}$; $y = (y_k)_{k=1}^{n} \in \mathbb{C}^n$;
$\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{1/2} = \left(\sum x_k \bar{x}_k\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$

3) l_2 es un espacio euclídeo real de dimensión infinita, donde el producto escalar es definido por:
$\langle x,y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ y
$\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$

4) $C[a,b]$ (f continuas) es un espacio euclídeo real de dimensión infinita, donde el producto escalar es definido por
$\langle x(t), y(t)\rangle = \int_a^b x(t)\, y(t)\, dt$; $x(t), y(t) \in C[a,b]$;
$\|x(t)\|_1 = (\langle x(t), x(t)\rangle)^{1/2} = \left(\int_a^b x(t)\, dt\right)^{1/2}$

Sabemos que $\|x(t)\| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$, es tal que: $\|x(t)\|_1^2 =$
$= \int_a^b x^2(t)\, dt \leq \sup |x^2(t)| \int_a^b dt \leq (\sup |x(t)|)^2 (b-a) =$
$= \|x(t)\|^2 (b-a)$

Luego $\|x(t)\|_1 \leq \|x(t)\| \overbrace{\sqrt{b-a}}^{A} = A\|x(t)\|$ (1). Por tanto, si $x_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} x(t) \Rightarrow x_n(t) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} x(t)$ ya que
$\|x_n(t) - x(t)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Rightarrow \|x_n(t) - x(t)\|_1 \to 0$ por la desigualdad (1). El recíproco no es cierto (las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ no son equivalentes).

Definición: Sea E un espacio euclídeo, $\underset{x,y\neq 0}{x, y \in E}$ se dicen ortogonales $\Leftrightarrow \langle x,y\rangle = 0$ (Trivialmente si x ó $y = 0$, entonces $\langle x,y\rangle = 0$).

Definición: Sea E un e. euclídeo, $\underset{x,y\neq 0}{x, y \in E}$. Se dicen ortonormales

$\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \text{ entonces } \|x\| = 1 \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$

<u>Definición</u>: Un sistema de vectores $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ de un espacio euclídeo E se dice completo $\Leftrightarrow$ el mínimo subespacio <u>cerrado</u> que engendra el sistema coincide con E.

<u>Observación</u>: El espacio euclídeo E es completo $\Leftrightarrow$ Toda sucesión de Cauchy es convergente para la norma definida por el producto escalar.

<u>Definición</u>: Un sistema de vectores $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ de un espacio euclídeo E se dice que es una base ortogonal (ortonormal) $\Leftrightarrow$ el sistema es completo y ortogonal (ortonormal)

Dado un sist. ortogonal $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ no es restrictivo. Suponer que es ortonormal ya que podemos considerar $\{x_\alpha = \frac{y_\alpha}{\|y_\alpha\|} : \alpha \in A\}$ y es ortonormal.

$$\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \left\langle \frac{y_\alpha}{\|y_\alpha\|}, \frac{y_\beta}{\|y_\beta\|}\right\rangle = \frac{1}{\|y_\alpha\|} \cdot \frac{1}{\|y_\beta\|} \overbrace{\langle y_\alpha, y_\beta\rangle}^{0} = 0$$

$$y \quad \|x_\alpha\| = \left\|\frac{y_\alpha}{\|y_\alpha\|}\right\| = \frac{1}{\|y_\alpha\|} \|y_\alpha\| = 1 \quad \forall \alpha$$

<u>Ejemplos</u> (de bases ortonormales en espacios euclídeos):

1) $\mathbb{R}^n$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ donde $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots)$ $i = 1, 2, \dots, n$.
Forman una base ortonormal: $\left(\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \right)$

El mismo subespacio engendrado por $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ es $\mathbb{R}^n$
$\left(x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \text{ con } x = (x_i)_{i=1}^n \right)$

2) l_2, $\{e_i : i = 1, 2, \dots\}$ donde $e_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, 0, \dots)$ $\forall i = 1, 2, \dots$

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$x = (x_n)_{n=1}^\infty \in l_2$; sea $x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$
Entonces $x = \lim x^{(n)}$ ya que $\|x - x^{(n)}\| = \|(0, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\| = \left(\sum_{k=1}^\infty x_{n+k}^2\right)^{1/2} \to 0$ si $n \to +\infty$ ya que $\sum_{n=1}^\infty x_n^2 < \infty$. Pero $x^{(n)} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i \Rightarrow$ El subespacio cerrado engendrado por $\{e_i \; i = 1, 2, \dots\}$ es l_2.

3) $C[a, b]$ con el producto escalar $\langle x(t), y(t)\rangle = \int_a^b x(t) y(t) dt$
Una base ortogonal es $\left\{ \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{n 2\pi t}{b-a}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{n 2\pi t}{b-a}\right) \right.$ $\left. n = 1, 2, \dots \right\}$

$< \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{n2\pi t}{b-a}\right) > = 0 \quad \forall n$

$< \frac{1}{2}, \operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi t}{b-a}\right) > = 0 \quad \forall n$

$< \cos\left(\frac{n2\pi t}{b-a}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi t}{b-a}\right) > = 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{2} \cos \frac{n2\pi t}{b-a}\, dt = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi t}{b-a}\right) \cdot \frac{1}{\frac{n2\pi}{b-a}}\right]_a^b = 0$ ya que

$\operatorname{sen} \frac{n2\pi b}{b-a} - \operatorname{sen} \frac{n2\pi a}{b-a} = 2 \cos \frac{n2\pi b + n2\pi a}{2(b-a)} \operatorname{sen} \underbrace{\frac{n2\pi b - n2\pi a}{2(b-a)}}_{0} = 0$

Ortonormales $\left\{ \frac{1/2}{\|1/2\|}, \frac{\cos\left(\frac{n2\pi t}{b-a}\right)}{\|\cdot\|}, \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi t}{b-a}\right)}{\|\cdot\|}, n = 1, 2, \dots \right\}$

Como la convergencia en $\|\cdot\| \Rightarrow$ converge en $\|\cdot\|_1$, se tiene que $\left\{ \frac{1}{2}, \cos\left(\frac{n2\pi t}{b-a}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{n2\pi t}{b-a}\right) : n = 1, 2, \dots \right\}$ es una base ortogonal

Consideramos espacios euclídeos separables (existe un conjunto denso y numerable).

<u>Proposición</u>: En un espacio euclídeo separable, cualquier base ortogonal es a lo sumo numerable.

<u>Demostración</u>: Sea $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ una base ortogonal (no es restrictivo suponer que es ortonormal), entonces $\operatorname{card} A \leq \omega$ ($\omega = \operatorname{card} \mathbb{N}$)

$\|x_\alpha - x_\beta\|^2_{\alpha \neq \beta} = < x_\alpha - x_\beta, x_\alpha - x_\beta > = \underbrace{< x_\alpha, x_\alpha >}_{1} - 2 \underbrace{< x_\alpha, x_\beta >}_{0}$

$+ \underbrace{< x_\beta, x_\beta >}_{1} = 2 \Rightarrow \|x_\alpha - x_\beta\| = \sqrt{2} \quad \forall \alpha \neq \beta$

Consideramos $\{B(x_\alpha; \frac{1}{2}) : \alpha \in A\}$ donde

$B(x_\alpha; \frac{1}{2}) = \{x \in E : \|x - x_\alpha\| < \frac{1}{2}\}$. Entonces $B(x_\alpha, \frac{1}{2}) \cap$
$\cap B(x_\beta, \frac{1}{2}) = \emptyset \quad \forall \alpha \neq \beta$ ya que si $x \in B(x_\alpha, \frac{1}{2}) \cap$
$\cap B(x_\beta, \frac{1}{2}) \Rightarrow \|x_\alpha - x_\beta\| \leq \|x_\alpha - x\| + \|x - x_\beta\| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Absurdo ya que $\|x_\alpha - x_\beta\| = \sqrt{2}$

Por ser E separable $\Rightarrow$ existe $\{y_n : n = 1, 2, \dots\}$ / $\overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}} = E$ (si $U \neq \emptyset$ es un abierto $\Rightarrow U \cap \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ ya que si $U \cap \{y_n, n \in \mathbb{N}\} = \emptyset \Rightarrow \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subset E - U$ (cerrado)
$\Rightarrow \overline{\{y_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset E - U$: contradicción ya que $E - U \neq E$)

Entonces para cada $B(x_\alpha; \frac{1}{2})$, $\exists\, n_\alpha$ / $y_{n_\alpha} \in B(x_\alpha, \frac{1}{2})$

Como $\{B_\alpha(x_\alpha, \frac{1}{2}) : \alpha \in A\}$ son disjuntos $\Rightarrow$
$\operatorname{card} A \leq \omega = \operatorname{card} \mathbb{N}$

Teorema 1: En un espacio euclídeo E separable siempre $\exists$ al menos una base ortonormal (por tanto a lo sumo numerable)

Definición: Dado un espacio euclídeo real separable E, sea $\{\varepsilon_n : n=1,2,\dots\}$ una base ortonormal. Entonces para cada $x\in E$, el nº real $c_k = \langle x, \varepsilon_k\rangle$ se llama coeficiente de Fourier de x respecto de la base $\{\varepsilon_n : n=1,2,\dots\}$

En $\mathbb{R}^n$, se tiene que dado $x=(x_i)_{i=1}^n$ y la base $\{e_i : i=1,\dots,n\}$ entonces $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ y se tiene: $\langle x, e_i\rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_i\rangle = x_i \Rightarrow x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ donde $c_i = x_i$ = coef. de Fourier

Def: Sea E un espacio euclídeo de dim infinita y $\{\varepsilon_n : n=1,2,\dots\}$ un sistema ortonormal. Definimos $c_k = \langle x, \varepsilon_k\rangle$ para cada $x\in E$.

¿$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_k$ es convergente? ¿si es convergente, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\varepsilon_k = x$?

Ejer: Definimos $S_m = \sum_{k=1}^m a_k \varepsilon_k$ (a_k : incógnitas) / $\|S_m - x\|$ sea mínimo.

Solución: $\|S_m - x\|^2 = \langle S_m - x, S_m - x\rangle = \langle S_m, S_m\rangle - 2\langle S_m, x\rangle +$
$+\langle x, x\rangle = \langle \sum_{k=1}^m a_k\varepsilon_k, \sum_{k=1}^m a_k\varepsilon_k\rangle - \underbrace{2\langle \sum_{k=1}^m a_k\varepsilon_k, x\rangle}_{\sum_{k=1}^m a_k c_k} +$
$+\|x\|^2 = \sum_{k=1}^m a_k^2 - 2\sum_{k=1}^m a_k c_k + \|x\|^2 =$
$= \sum_{k=1}^m (a_k - c_k)^2 - \sum_{k=1}^m c_k^2 + \|x\|^2$ mínimo $\Leftrightarrow a_k = c_k \ \forall k=1,\dots,m$

$\|S_m - x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^m c_k^2 \ (a_k = c_k)$, pero $\|S_m - x\|^2 \geq 0$ $\forall m \Rightarrow \|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^m c_k^2 \ \forall m \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ es una serie convergente y además $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|x\|^2$ Desigualdad de Bessel.

Definición: Un sistema ortonormal $\{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$ en un espacio euclídeo se dice cerrado $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2 \ \forall x\in E$.

Ig. de Parseval →

Teorema 1: En un espacio euclídeo E, un sistema ortonormal $\{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$ es cerrado $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varepsilon_k = x, \ \forall x\in E$.
$c_k = \langle x, \varepsilon_k\rangle$

Teorema: En un ~~espacio euclídeo E, un~~ sistema ortonormal $\{\varepsilon_k$: ~~$k=1,2,\dots\}$ es cerrado $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varepsilon_k = x$~~ $\forall x\in E$ donde
$c_k =$

Demostración: Consideramos la igualdad $\|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k - x\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2$ (ya demostrado) $\forall n$

Tomando límites cuando $n \to \infty$ queda $\lim_{n\to\infty} \|\sum_{k=1}^{n} c_k \varepsilon_k - x\| = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ (1) $\xrightarrow{}$ convergente

A) Supongamos que $\{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$ es cerrado $\Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$

Entonces, de (1) se obtiene $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|\sum c_k \varepsilon_k - x\|^2 = 0$

$\Rightarrow \|\sum_{k=1}^{n} c_k \varepsilon_k - x\| \to 0$ cuando $n \to \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_k = x$

B) "$\Leftarrow$" Supongamos que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_k = x$. Entonces de (1) se obtiene: $0 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \Rightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ Igualdad de Parseval $\Leftrightarrow \{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$ es cerrado.

Teorema 2: Sea E un espacio euclídeo y separable. Entonces un sistema ortonormal $\{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$ es completo $\Leftrightarrow$ es cerrado.

Demostración: "$\Leftarrow$" Supongamos que $\{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$ es cerrado, por el Tª 1, se tiene que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k = x \Leftrightarrow x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \varepsilon_k$ $\forall x \in E$. Luego el mínimo subespacio engendrado por $\{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$ es E ($x = \lim$ combinación lineal de vectores del sistema). Por tanto, $\{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$ es completo.

"$\Rightarrow$" Supongamos que $\{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$ es completo $\Rightarrow$ cada $x = \lim$ combinaciones lineales de vectores de $\{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$

$\Rightarrow x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_k$, en particular la distancia es mínima: $\|x - \sum_m \alpha_k \varepsilon_k\|$ si $\alpha_k = c_k$ $\forall k = 1,\dots,n$ luego se tiene que $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \varepsilon_k \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_k = x \Leftrightarrow \{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$ es cerrado por el Tª 1.

Teorema 3: (Riesz-Fisher): Sea E un espacio euclídeo (toda sucesión de Cauchy es convergente para la norma deducida del p. e.) y sea $\{\varepsilon_k : k=1,2,\dots\}$ un sistema ortonormal arbitrario. Entonces dada un vector $(c_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$ $(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty)$, existe un vector $x \in E$ / $\langle x, \varepsilon_k \rangle = c_k$ $\forall k$ y además $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$

Demostración: Ponemos $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varepsilon_k$ (una vez dado $(c_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$) para cada $n \geq 1$. Calculamos $\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \langle S_{n+p} - S_n, S_{n+p} - S_n \rangle$
=

$= < \sum_{k=1}^{m+p} c_k \varepsilon_k - \sum_{k=1}^{m} c_k \varepsilon_k , \sum_{k=1}^{m+p} c_k \varepsilon_k - \sum_{k=1}^{m} c_k \varepsilon_k > =$

$= < \sum_{k=m+1}^{m+p} c_k \varepsilon_k , \sum_{k=m+1}^{m+p} c_k \varepsilon_k > = \sum_{k=m+1}^{m+p} c_k^2$. Como $(c_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{m+p} c_k^2 \to 0$ si $m, p \to \infty$

Por tanto, $(S_m)_{m=1}^{\infty}$ es de Cauchy en E. Como E es completo, $\exists \lim_{m\to\infty} S_m = x \in E$ veamos que $<x, \varepsilon_k> = c_k \; \forall k$. En efecto,

$<x, \varepsilon_k> = <x - S_m + S_m, \varepsilon_k>$ (para cualquier m) $=$

$= <x - S_m, \varepsilon_k> + <S_m, \varepsilon_k> = <x - S_m, \varepsilon_k> + <\sum c_k \varepsilon_k, \varepsilon_k>$ $\overset{c_k \text{ si } k \leq m}{}$

$= <x - S_m, \varepsilon_k> + c_k$ si $k \leq m$.

Tenemos $|<x - S_m, \varepsilon_k>| \overset{C-S}{\leq} \|x - S_m\| \cdot \|\varepsilon_k\| = \|x - S_m\|$. Tomando límites cuando $m \to \infty$ queda: $<x, \varepsilon_k> = \lim_{m\to\infty} <x - S_m, \varepsilon_k> + c_k$, pero $\lim_{m\to\infty} <x - S_m, \varepsilon_k> = 0$ ya que $\|x - S_m\| \to 0$ cuando $m \to \infty$. Por tanto $<x, \varepsilon_k> = c_k \; \forall k$. Veamos que $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$. Ponemos

$<x - S_m, x - S_m> = <x - \sum_{k=1}^{m} c_k \varepsilon_k , x - \sum_{k=1}^{m} c_k \varepsilon_k> =$

$= <x, x> - 2 <x, \sum_{k=1}^{m} c_k \varepsilon_k> + <\sum_{k=1}^{m} c_k \varepsilon_k , \sum_{k=1}^{m} c_k \varepsilon_k> =$

$= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{m} c_k^2 + \sum_{k=1}^{m} c_k^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{m} c_k^2 \Rightarrow \|x - S_m\|^2 = \|x\|^2 - \sum c_k^2$

Tomando límites cuando $m \to \infty$ queda

$0 = \|x\|^2 - \lim \sum c_k^2 \Rightarrow \lim \sum c_k^2 = \|x\|^2$, pero $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} c_k^2 =$

$= \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|x\|^2$

<u>Teorema 4</u>: Sea E un espacio euclídeo separable y completo, entonces un sistema ortonormal $\{\varepsilon_k : k = 1, 2, \dots\}$ es completo $\Leftrightarrow$ el único vector del espacio E que es ortogonal a todos los vectores $\varepsilon_k \; \forall_k$ es 0.

<u>Definición</u>: Un espacio euclídeo, completo, separable y de dim infinita, se dice que es un espacio de HILBERT.

<u>Teorema 5 (T^a del isomorfismo)</u>: Dos espacios de Hilbert cualesquiera son isomorfos.

<u>Demostración</u>: Si H es un espacio de Hilbert, arbitrario, vamos a demostrar que H es isomorfo a l_2

Sea $\{\varepsilon_k : k = 1, 2, \dots\}$ un sistema ortonormal completo de Hilbert. Sea $x \in H$, entonces $<x, \varepsilon_k> = c_k \; \forall k$ y sabemos que $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ converge, luego $c = (c_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$. Entonces podemos definir una aplicación

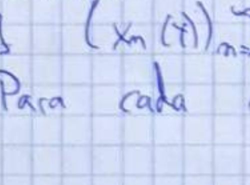
$$\varphi : H \longrightarrow l_2$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = c$$

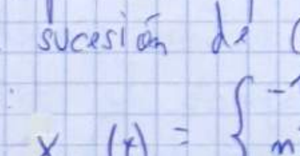
φ inyectiva, ya que si $x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$;
$\varphi(x) = c$, $\varphi(y) = d$ donde $c = (c_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$, $d = (d_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$
$c_k = \langle x, \varepsilon_k \rangle$
$d_k = \langle y, \varepsilon_k \rangle$
Entonces si $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow c = d \Leftrightarrow c_k = d_k \ \forall k \Rightarrow \langle x-y, \varepsilon_k \rangle = 0$
$\forall k \overset{T^a 4}{\Rightarrow} x - y = 0 \Rightarrow x = y$ Contradicción.
φ suprayectiva. Dado $c = (c_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2$, veamos que $\exists x \in H / \varphi(x) = c$
Por el T^a de R-F, $\exists\, x \in H / \langle x, \varepsilon_k \rangle = c_k \ \forall k$
$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ ya que $\varphi(x+y) = e = (e_k)_{k=1}^{\infty} \in l_2 / e_k =$
$= \langle x+y, \varepsilon_k \rangle = \langle x, \varepsilon_k \rangle + \langle y, \varepsilon_k \rangle = c_k + d_k$ luego
$\varphi(x+y) = e = (e_k)_{k=1}^{\infty} = (c_k + d_k)_{k=1}^{\infty} = (c_k)_{k=1}^{\infty} + (d_k)_{k=1}^{\infty} =$
$= \varphi(x) + \varphi(y)$
$\varphi(\alpha x) = d = (d_k)_{k=1}^{\infty} / d_k = \langle \alpha x, \varepsilon_k \rangle = \alpha \langle x, \varepsilon_k \rangle =$
$= \alpha c_k \Rightarrow d = \alpha c$ con $c = (c_k)_{k=1}^{\infty}$ luego $\varphi(\alpha x) = d = \alpha c =$
$= \alpha \cdot \varphi(x)$
Además $\|\varphi(x)\| = \|c\| = (\sum c_k^2)^{1/2} \overset{\text{Parseval}}{=} (\|x\|^2)^{1/2} = \|x\|$
(φ isometría)
$(E, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_2)$
<u>Definición</u>: φ isomorfismo entre espacios normados $\Leftrightarrow$ φ: isom. algebraico y $\exists\, A, B > 0 / \ \|\varphi(x)\|_2 \leq A \|\varphi(x)\|_1 \leq B \|\varphi(x)\|_2$

$C[-1,1]$ por <u>ejemplo</u>
$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-1}^{1} x(t) \cdot y(t)\, dt$
$C[-1,1]$ no es isomorfo a l_2 ya que $C[-1,1]$ es espacio euclídeo de dim. infinita, separable, pero no es completo,
$\exists\ (x_n(t))_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy / $\nexists \lim x_n(t)$.
Para cada $n > 1$:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq -1/n \\ nt & \text{si } -1/n < t < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$x_n(t) \in C[-1,1] \ \forall n > 1$. Veamos que $(x_n(t))_n$ es de Cauchy





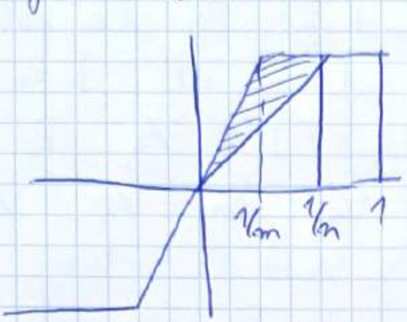
$\| x_m(t) - x_n(t) \|$ $(m > n) > 0$

$\|x_m(t)-x_n(t)\|^2 = \int_{-1}^{1} (x_m(t)-x_n(t))^{1/2}\, dt = \int_{-1}^{1} |x_m(t)-x_n(t)|^2\, dt \leq$

$\leq \int_{-1}^{1} |x_m(t)-x_n(t)|\, dt$ (ya que $|x_m(t)-x_n(t)| \leq 1 \ \forall t \in [-1,1]$ $\forall m,n$)

≤ 2 (rectángulo de base $\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$ y altura 1) $+ 2$ (trapecio $=$

$=$ triángulo $+$ sector $=$ base $\cdot \frac{1}{m}$ y altura 1) $= 2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) + 2\left(\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)$



$\to 0$ si $m,n \to \infty$

$\Rightarrow \|x_m(t)-x_n(t)\| \to 0$ si $m,n \to \infty$

Supongamos que $\exists \lim_{n\to+\infty} x_n(t) = x(t) \in C[-1,1]$. Sea $y(t) = \begin{cases} -1 & -1\leq t<0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

Observar que $y(t) \notin C([-1,1])$ (no es continua en 0)

Ponemos $\int_{-1}^{1} (x(t)-y(t))^2\, dt = \int_{-1}^{1} (x(t)-x_n(t)+x_n(t)-y(t))^2\, dt =$

$= \int_{-1}^{1} (x(t)-x_n(t))^2 dt + \int_{-1}^{1} (x_n(t)-y(t))^2 dt + 2\int_{-1}^{1} (x(t)-x_n(t)) \cdot$

$(x_n(t)-y(t))\, dt$

(1) (2) (3)

Tomando límites cuando $n\to\infty$, se tiene que $\lim_{n\to\infty}$ (1) $=0$ ya que es $= \|x(t)-x_n(t)\|^2 \to 0$ si $n\to\infty$ por hipótesis.

$\lim_{n\to\infty}$ (2) $=0$ ya que $\int_{-1}^{1} (x_n(t)-y(t))^2 dt = \int_{-1}^{1} |x_n(t)-y(t)|^2 dt \leq$

$\leq \int_{-1}^{1} |x_n(t)-y(t)|\, dt \leq 2 \cdot$ triang (base $= \frac{1}{n}$ y altura 1) $=$

$= 2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{n} \to 0$ si $n\to\infty$

$\lim_{n\to\infty}$ (3) $=0$ ya que $\left|\int_{-1}^{1} (x(t)-y_n(t))(x_n(t)-y(t))\, dt\right| \leq$

$\leq \int_{-1}^{1} |x(t)-x_n(t)|\cdot|x_n(t)-y(t)|\, dt \leq K\int_{-1}^{1} |x_n(t)-y(t)|\, dt \leq$

$\leq K\cdot\frac{1}{n} \to 0$ si $n\to\infty$

Conclusión: $\int_{-1}^{1} (x(t)-y(t))^2 dt = 0 \Rightarrow x(t)-y(t)=0 \ \forall t\in[-1,1]$

$\Rightarrow x(t)=y(t) \ \forall t\in[-1,1]$ contradicción, ya que $y(t)\notin C[-1,1]$

<u>Lema</u>: Sea (E,d) un espacio métrico separable (existe un subespacio denso y numerable). Todo subespacio no vacío F es también separable.

Demostración: Sea $\{x_n : n=1,2,\dots\}$ es denso y numerable en E. Para cada n, sea $\delta_n = \inf\{d(x_n,y) : y\in F\}$ (siempre existe ya que $d(x_n,y)\geq 0 \ \forall y\in F$). Sea $m\in\mathbb{N}$, entonces $\delta_n + \frac{1}{m}$ no es el ínfimo. Entonces $\exists\, y_{n,m}\in F \,/\, \delta_n < d(x_n, y_{n,m}) < \delta_n + \frac{1}{m}$

Dado $\varepsilon>0$, determinamos $m \,/\, \frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{3}$

Entonces $d(x_n, y_{n,m}) < \delta_n + \frac{\varepsilon}{3}$. Por otra parte, como $\{x_n : n=1,2,\dots\}$ es denso, dado $y\in F$ $\exists\, x_n \,/\, d(y,x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$, luego $\delta_n = \inf\{d(x_n,y) : y\in F\} \leq \varepsilon/3$. Por tanto, $d(y,y_{n,m}) \leq$ $\leq d(y,x_n) + d(x_n,y_{n,m}) < \varepsilon/3 + \delta_n + \varepsilon/3 \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$

(dado $y\in F$, $\exists\, y_{n,m}\in F \,/\, d(y,y_{n,m})<\varepsilon$), luego $\overline{\underbrace{\{y_{n,m} : n,m\in\mathbb{N}\}}_{\text{numerable}}} = F$, por tanto F es separable

Teorema: En un espacio de Hilbert H, todo subespacio vectorial cerrado es un espacio euclídeo de dim. finita o bien isomorfo a H.

Demostración: Si F es subespacio de H cerrado de dim. finita (demostrado) $\cong \mathbb{R}^n$, $n = \dim F$. Si $\dim F$ es infinita, entonces F es un espacio euclídeo para el producto escalar definido en H, es completo porque todo cerrado en un completo lo es y es separable por el lema anterior. Entonces F es un espacio de Hilbert, por el t^{a} del isomorfismo, $F\cong H$

Proposición: Sea H un espacio de Hilbert y $M\subset H$, $M\neq\emptyset$. Entonces $M^{\perp}$ (ortogonal de M) $=\{x\in H \,/\, \langle x,y\rangle = 0 \ \forall y\in M\}$ es un subespacio cerrado.

Demostración: $x_1, x_2 \in M^{\perp}$. Veamos $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in M^{\perp}$. En efecto $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \underset{y\in M}{y}\rangle = \alpha_1 \underbrace{\langle x_1,y\rangle}_{0} + \alpha_2 \underbrace{\langle x_2,y\rangle}_{0} = 0$. Por tanto $M^{\perp}$ es un subespacio vectorial de H. Veamos que es cerrado: $(x_n)_{n=1,\dots}$ de $M^{\perp} \,/\, x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Veamos que $x\in M^{\perp}$. En efecto, sea $y\in M$, entonces $\langle x,y\rangle = \langle x - x_n + x_n, y\rangle = \langle x-x_n, y\rangle + \underbrace{\langle x_n, y\rangle}_{0}\ \forall n$

Tomando lím cuando $n\to\infty$, queda

$\langle x,y\rangle = \lim_n \langle x-x_n, y\rangle = 0$ ya que $|\langle x-x_n,y\rangle| \underset{C-B}{\leq}$ $\leq \|x_n - x\|\,\|y\| \to 0$ ya que $x_n\to x$ (por hipótesis)

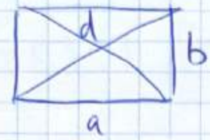
Por tanto $\langle x,y\rangle = 0 \Rightarrow x\in M^{\perp}$. Entonces $M^{\perp}$ es un sub. cerrado de H. Por ejemplo: ℓ_2, $\varepsilon_n = (0,0,\dots,\overset{n}{1},0,\dots)$;

$\varepsilon_n^{\perp} = \{x\in \ell_2 \,/\, \langle x,\varepsilon_n\rangle = 0\}$ = sub. cerrado (además de dim. infinita) ya que $\varepsilon_m \in \varepsilon_n^{\perp}\ \forall m\neq n$. Entonces $\varepsilon_n^{\perp} \cong \ell_2\ \forall n$

Nota: $M \subset H$, $M \neq \emptyset \Rightarrow M^{\perp}$ sub. cerrado $(M^{\perp})^{\perp} \supset M$ (hay casos en que la inclusión es estricta).

Ejercicios: ①. Probar que en un espacio euclídeo: $\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x+y\|^2 + 2\|z - \frac{x+y}{2}\|^2$ (Identidad de Apolonio)

② Probar que ... : $\|x-z\| \cdot \|y-t\| \leq \|x-y\| \cdot \|z-t\| + \|y-z\| \cdot \|x-t\|$ (desigualdad de Ptolomeo)



$d^2 \leq a^2 + b^2$ $(d^2 = a^2 + b^2)$

③. En un espacio euclídeo $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$

④ En un e. euclídeo complejo: $\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2 \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

⑤. Probar que l_1 con la norma $\|x\| = \sum |x_n|$ no procede de ningún prod. escalar

⑥. En l_2 definimos $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n$ donde $0 < \lambda_n < 1$. Probar que l_2 con ese producto escalar no es Hilbert.

⑦. Sea H un espacio de Hilbert y $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ un sistema ortogonal. Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.

⑧. Sea $\{\varepsilon_n : n = 1, 2, \dots\}$ un sistema ortonormal en un esp. de Hilbert y $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ (reales o complejos). Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varepsilon_n$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$ converge

⑨ Probar que todo espacio de Hilbert es estrictamente normado ($\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ $x \neq 0, y \neq 0 \Leftrightarrow \exists \lambda > 0 / y = \lambda x$)

⑩. Sea E un espacio euclídeo (real o complejo). Probar que si $\operatorname{Re}\langle x_1, x_2 \rangle = \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2$, entonces $x_1 = x_2$

⑪. En un esp. de Hilbert, $x \in L^{\perp}$ (L subespacio de H.) $\Leftrightarrow \|x\| \leq \|x-y\| \quad \forall y \in L$.

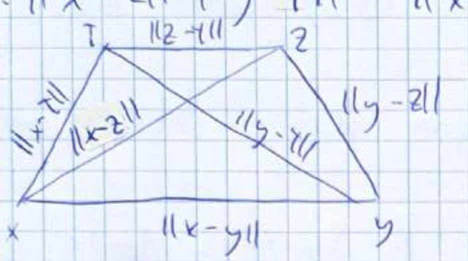
⑫. Sea $C[0, +\infty)$ el espacio de las funciones continuas en $[0, +\infty)$ tales que $\int_0^{\infty} |x(t)|^2 \cdot e^{-t} dt$ converge. Definimos el producto escalar $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^{\infty} x(t) \cdot y(t) \cdot e^{-t} dt$ a) Comprobar que es un producto escalar. b) Aplicando ortogonalización sobre el sistema linealmente independiente $\{1, t, t^2, \dots\}$. Se obtienen los polinomios de Chebyshev-Laguerre. Encontrar tres primeros.

(1). En todo espacio euclídeo se satisface la propiedad del paralelogramo

$$\|\underbrace{z-x}_{X}\|^2+\|\underbrace{z-y}_{Y}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|X+Y\|^2+\|X-Y\|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|2z-(x+y)\|^2+\|-x+y\|^2\right) = \frac{1}{2}\|x-y\|^2+\frac{1}{2}\|2z-(x+y)\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2+\frac{1}{2}\left\|2\left(z-\frac{x+y}{2}\right)\right\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2+2\left\|z-\frac{x+y}{2}\right\|^2$$

(2). $\|x-z\|\cdot\|y-t\| \le \|x-y\|\cdot\|z-t\|+\|y-z\|\cdot\|x-t\|$ (1)



$x-t=X$
$y-t=Y$
$z-t=Z$

(1) es equivalente a: $\|x-z\|\cdot\|Y\| \le \|x-y\|\cdot\|Z\| + \|y-z\|\cdot\|X\|$ (1')

Caso trivial, algun X, Y, Z sean 0 (p.e. $X=0$)

$\|x\|\cdot\|Y\| \le \|y\|\cdot\|Z\|$

Todas las mayúsculas son realmente minúsculas, i.e $x=X$, $y=Y$, $z=Z$

Caso no trivial:

$X\neq 0$, $Y\neq 0$ y $Z\neq 0$. Entonces dividiendo (1') por $\|X\|\cdot\|Y\|\cdot\|Z\|$ queda:

$$\frac{\|x-z\|}{\|X\|\cdot\|Z\|} \le \frac{\|x-y\|}{\|X\|\cdot\|Y\|}+\frac{\|y-z\|}{\|Y\|\cdot\|Z\|} \quad (2)$$

$A, B\in E$, entonces veamos que $\frac{\|A-B\|^2}{\|A\|^2\|B\|^2} = \frac{1}{\|A\|^2\cdot\|B\|^2}\langle A-B, A-B\rangle$
$A\neq 0, B\neq 0$

$$= \frac{1}{\|A\|^2\cdot\|B\|^2}\left(\|A\|^2+\|B\|^2-2\langle A,B\rangle\right) = \frac{1}{\|A\|^2}+\frac{1}{\|B\|^2}-\frac{2}{\|A\|^2\cdot\|B\|^2}\cdot\langle A,B\rangle = \frac{1}{\|A\|^2}+\frac{1}{\|B\|^2}-2\left\langle \frac{A}{\|A\|^2},\frac{B}{\|B\|^2}\right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{A}{\|A\|^2}-\frac{B}{\|B\|^2}, \frac{A}{\|A\|^2}-\frac{B}{\|B\|^2}\right\rangle = \left\|\frac{A}{\|A\|^2}-\frac{B}{\|B\|^2}\right\|$$

Luego $\forall\ A, B\in E\ (A\neq 0,\ B\neq 0)$:

$$\frac{\|A-B\|}{\|A\|\cdot\|B\|} = \left\|\frac{A}{\|A\|^2}-\frac{B}{\|B\|^2}\right\| \quad (3)$$

Por tanto: $\frac{\|x-z\|}{\|x\|\cdot\|z\|} \overset{(3)}{=} \left\|\frac{x}{\|x\|^2} - \frac{z}{\|z\|^2}\right\| \leq \left\|\frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2}\right\| +$

$+ \left\|\frac{y}{\|y\|^2} - \frac{z}{\|z\|^2}\right\| \overset{(3)}{=} \frac{\|x-y\|}{\|x\|\cdot\|y\|} + \frac{\|y-z\|}{\|y\|\cdot\|z\|}$ como queríamos demostrar.

(3). E espacio euclídeo

$\langle x,y\rangle=0 \iff \|x+y\|^2 \overset{(1)}{=} \|x\|^2+\|y\|^2$

$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle =$

$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle \iff (1) \iff \langle x,y\rangle=0$

(4). E espacio euclídeo $\langle x,y\rangle=0 \iff \|\lambda x+\mu y\|^2 = \|\lambda x\|^2 +$
$+ \|\mu y\|^2 \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{C}$

$\|\lambda x+\mu y\|^2 = \langle \lambda x+\mu y, \lambda x+\mu y\rangle = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 + \langle \lambda x, \mu y\rangle$
$+ \langle \mu y, \lambda x\rangle = \|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\lambda\bar{\mu}\langle x,y\rangle)$

(1) es cierto $\iff \mathrm{Re}\,(\lambda\bar{\mu}\langle x,y\rangle)=0$

a) Supongamos que $\langle x,y\rangle=0 \Rightarrow \mathrm{Re}\,(\lambda\bar{\mu}\langle x,y\rangle)=0$ ✓

b) $\mathrm{Re}\,(\lambda\bar{\mu}\langle x,y\rangle)=0 \ \forall \lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Tomamos $\lambda=\mu$ con $\lambda\neq0$
$\Rightarrow \mathrm{Re}\,(|\lambda|^2\langle x,y\rangle)=0 = |\lambda|^2\cdot \mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle = \mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle=0$

Tomamos $\lambda=1$ y $\mu=i$. Entonces $\mathrm{Re}\,(-i\langle x,y\rangle)=0$, luego
$\mathrm{Re}\,(-i\langle x,y\rangle) = \mathrm{Im}\,\langle x,y\rangle=0$. Por tanto $\langle x,y\rangle=0$

$\langle x,y\rangle = \alpha+i\beta \Rightarrow -i\langle x,y\rangle = \beta - i\alpha$

(5). $l_1 = \{x=(x_n)_{n=1}^{\infty} \ / \ \sum|x_n|<\infty\}$

$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ no procede de ningún producto escalar. Si procediese de un producto escalar $\Rightarrow$ Se verifica la identidad del paralelogramo:

$\|x\|^2+\|y\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2)$

$x=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\right)$, $\|x\| = \sum_{n=1}\frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2}=1$

$y=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\right)$

$\|y\| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$, pero $x+y=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{8},\frac{3}{16},\ldots\right)$

$\|x+y\| = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right) = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$

$x-y=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\ldots\right)$, luego $\|x-y\| = \sum|\ | = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots =$
$=1$

$\|x\|^2+\|y\|^2 = 1+1=2$, pero

$\frac{1}{2}(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2) = \frac{1}{2}(2^2+1) = 5/2$

⑥ $l_2 = \{x=(x_n)_{n=1}^{\infty} / \sum x_n^2 < \infty\}$. Fijamos $0<\lambda_n<1$ $\forall n$ y definimos $\langle x,y\rangle \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n$. Veamos que l_2 con $\langle x,y\rangle$ definida en (1) es producto escalar pero no es espacio de Hilbert (no es completo).

Veamos que (1) está bien definida.

$\sum |\lambda_n x_n y_n| \leq \sum |x_n| \cdot |y_n| = \frac{1}{2} \sum 2|x_n||y_n| =$

$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2+y_n^2) = \frac{1}{2}\sum x_n^2 + \frac{1}{2}\sum y_n^2 < \infty$

Por tanto $\sum \lambda_n x_n y_n$ converge.

1) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ trivial

2) $\langle x+y, z\rangle = \langle x+z\rangle + \langle y,z\rangle$ trivial

3) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$

4) $\langle x,x\rangle \geq 0$ $\forall x\in l_2$ y $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$

ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^2 = 0 \Leftrightarrow x_n = 0$ $\forall n \Leftrightarrow x=0$

$x_n < \lambda_n < 1$ / $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n < \infty$. Definimos la sucesión $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ donde cada $x^{(n)} = (1,\dots,1,0,0,\dots)$. Veamos que $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Supongamos $m>n \Rightarrow$

$\Rightarrow \|x^{(m)}-x^{(n)}\|^2 = \|(\underbrace{1,\dots,1}_{m},0,\dots) - (\underbrace{1,1,\dots,1}_{n},0,\dots)\|^2 =$

$= \|(\underbrace{0,\dots}_{n},\underbrace{1,\dots,1}_{m-n},0,\dots\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k$ (como $\sum \lambda_n < \infty$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum \lambda_k \to 0$ cuando $m,n\to\infty$

Por tanto $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en l_2

Veamos que $\nexists \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$ ya que si $\exists x\in l_2 / \lim_{n\to\infty} x^{(n)} = x$, entonces $x=(x_1,\dots,x_n,\dots)$

$\|x^{(n)}-x\|^2 = \|(1,\dots,1,0,\dots)-(x_1,\dots,x_n,\dots)\|^2 =$

$= \|(1-x_1,\dots,1-x_n,-x_{n+1},\dots)\|^2 = (1-x_1)^2\lambda_1+\dots+(1-x_n)^2\lambda_n + x_{n+1}^2+\dots \to 0$ cuando $n\to\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 1, x_2=1,\dots, x_n = 1$ $\forall n \Rightarrow x=(1,1,1,\dots,1,\dots)\notin l_2$

(12). Definimos $\langle x(t), y(t)\rangle = \int_0^{+\infty} x(t)\, y(t) \cdot e^{-t}\, dt$ (1)

(1) está bien definida:

$$\left|\int_0^{+\infty} x(t)\cdot y(t)\, e^{-t}\, dt\right| \le \int_0^{+\infty} |x(t)|\cdot|y(t)|\cdot e^{-t}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} 2\cdot |x(t)|\,|y(t)|\, e^{-t}\, dt \le \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x^2(t)+y^2(t))\, e^{-t}\, dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^2\cdot e^{-t}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} y^2 e^{-t}\, dt < \infty$$ ya que $x(t), y(t) \in C[0,+\infty)$

$\langle x(t), y(t)\rangle = \langle y(t), x(t)\rangle$

$\langle x(t)+y(t), z(t)\rangle = \langle x(t), z(t)\rangle + \langle y(t), z(t)\rangle$

$\langle \alpha x(t), y(t)\rangle = \alpha \langle x(t), y(t)\rangle$

$\langle x(t), x(t)\rangle \ge 0$ ya que $x^2(t)\cdot e^{-t} \ge 0 \quad \forall t \in [0,+\infty)$

$\langle x(t), x(t)\rangle = 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} x^2(t)\cdot e^{-t}\, dt = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \ \forall t$

$\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$ L.I. $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots\}$ sist. ortonormal.

$\varepsilon_1 = \alpha\cdot 1 = \alpha$ / $\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1\rangle = 1$. Entonces $\langle \alpha, \alpha\rangle = \int_0^{+\infty} \alpha^2 e^{-t}\, dt =$
$= \alpha^2 \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = \alpha^2 \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-t}\, dt = \alpha^2 \lim_{A\to\infty} [e^{-t}]_A^0 =$
$= \alpha^2 \cdot \lim_{A\to\infty} (1-e^{-A})$ tomamos $\alpha = 1$ y $\varepsilon_1 = 1$.

$\varepsilon_2 = \alpha\cdot 1 + \beta\cdot t$

$$\left.\begin{array}{l}\langle \varepsilon_2, \varepsilon_2\rangle = 1\\ \langle \varepsilon_2, \varepsilon_1\rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \langle \alpha+\beta t, 1\rangle = \int_0^{+\infty} (\alpha+\beta t)\cdot e^{-t}\, dt = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases}\alpha = 1\\ \beta = -1\end{cases}$, $\varepsilon_2 = 1 - t$

$\varepsilon_3 = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ / $\langle \varepsilon_3, \varepsilon_j\rangle = 0$ si $j = 1,2$
$\langle \varepsilon_3, \varepsilon_3\rangle = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = -4$, $\gamma = 1$

$\varepsilon_3 = 2 - 4t + t^3$

TEMA 2: ESPACIOS NORMADOS

Definición: Sea L un e.v. Un funcional convexo finito p diremos que es una norma sobre L $\Leftrightarrow$

a) $p(x)=0 \Leftrightarrow x=0$,

b) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall x \in L$

Se suele denotar $p(x) = \|x\|$. Entonces $(L, \|\cdot\|)$ es normado si

a) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0$

b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(L, \|\cdot\|)$ normado $\Rightarrow (L, d)$: espacio métrico, donde $d(x,y) := \|x-y\|$

Si (L,d) es completo (sucesión de Cauchy es completa), entonces $(L, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

$(x_n)_n$: sucesión de Cauchy $\Leftrightarrow d(x_n, x_m) \to 0$ cuando $n,m \to \infty$

" " " " $\Leftrightarrow \|x_n - x_m\| \to 0$ " "

En $(L, \|\cdot\|)$ decir que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene por límite x (x_n converge a x $\Leftrightarrow x_n \to x$) $\Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$

En $(L, \|\cdot\|)$ un conjunto A es abierto $\Leftrightarrow A = \emptyset$ o si $A \neq \emptyset$ $\forall x \in A$, $\exists \underset{\varepsilon>0}{B(x,\varepsilon)} = \{y \in L : \|y-x\| < \varepsilon\} \subset A$.

Proposición: En todo $(L, \|\cdot\|)$ las operaciones $+$ y $\cdot$ (producto escalar), son continuas: $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ y $(\lambda_n)_n$ entonces

si $\left.\begin{array}{l} \lim x_n = x \\ \lim y_n = y \\ \lim \lambda_n = \lambda \end{array}\right\}$ se tiene que $\lim_n (x_n+y_n) = x+y$ y $\lim_n (\lambda_n x_n) = \lambda x$

Demostración: $\|x_n + y_n - (x+y)\| = \|x_n - x + y_n - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$

$\to 0$ cuando $n \to \infty \Rightarrow \lim (x_n+y_n) = x+y$

$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|\lambda_n (x_n - x) + (\lambda_n - \lambda) x\| \leq \|\lambda_n (x_n - x)\| +$

$+ \|(\lambda_n - \lambda) x\| = \underbrace{|\lambda_n|}_{\text{acotado}} \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} + \underbrace{|\lambda_n - \lambda|}_{\to 0} \cdot \|x\| \to 0$

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ $\quad \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$ $\left(x = (x_i)_{i=1,\dots,n}\right)$

norma euclídea

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ norma

$\|x\|_0 = \max_{i=1,2,\dots,n} |x_i|$ norma

En $(L, \|\cdot\|)$, dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ se dicen equivalentes $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists\, a, b > 0$ tales que $\|x\| \leq a\|x\|_1 \leq b\|x\|$ $\forall x \in L$.

Ejercicio: Probar que en $\mathbb{R}^n$ las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes.

Sea $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$ y $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ norma supremo y $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$: norma

Veamos que las dos normas no son equivalentes. Supongamos que si son equivalentes (reducción al absurdo) $\Rightarrow \exists\, a, b > 0$ /
$a\|f\| \leq \|f\|_1 \leq b\|f\|$ (1) $\forall f \in C[0,1]$

Definimos $f_n(t) = t^n$, $n = 1, 2, \ldots$ (continua en $[0,1]$), entonces $\|f_n\| = \sup_{t\in[0,1]} |t^n| = 1$ $\forall n$; $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |t|^n\,dt =$
$= \int_0^1 t^n\,dt = \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

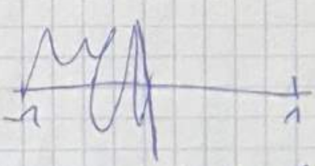
Si $(f_n)_n$ / $f_n \underset{\text{en norma } (\|\cdot\|)}{\to} f \Rightarrow f_n \underset{\|\cdot\|_1}{\to} f$ (el recíproco no es cierto).

En efecto, $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$. Entonces $\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq$
$\leq \sup_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \|f_n - f\|_1 \to 0$, luego $f_n \underset{\|\cdot\|_1}{\to} f$

El recíproco no es cierto: $f_n = t^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, se tiene $f_n \overset{\|\cdot\|_1}{\to} 0$ (ya visto) pero $f_n \overset{\|\cdot\|}{\not\to} 0$ ya que $\|f_n\| = 1$ $\forall n$

Ejemplo: En el espacio $C[-1,1]$ definimos la norma supremo. Estudiar si $A = \{f \in C[-1,1] / f(t) = 0 \ \forall t\ 0 < t \leq 1\}$ es un subespacio vectorial cerrado o abierto.

Solución: A subespacio vectorial (trivial)



($(L, \|\cdot\|)$, $X \neq \emptyset$, X cerrado $\Leftrightarrow$ Dada una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ / $\lim x_n = x$, $x \in X$).

Supongamos que A no es cerrado $\Rightarrow \exists\, (f_n)_n \subset A$ / $\lim f_n = f \notin A$
$\Rightarrow \exists\, t_0$ / $0 < t_0 \leq 1$ / $f(t_0) \neq 0$

Tomaremos $\varepsilon < |f(t_0)|$ entonces $\|f_n - f\| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ (ya que $f_n \overset{\|\cdot\|}{\to} f$) para $t = t_0$:
$|f_n(t_0) - f(t_0)| \leq \sup_{t\in[-1,1]} |f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\| < \varepsilon$ (Tomar un $n \geq n_0$)
$\Rightarrow |f(t_0)| < \varepsilon$ $\#$ A cerrado.

Veamos que A no es abierto: Sea $f=0\in A$. Si fuese abierto $\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon>0 \,/\, B(0,\varepsilon)=\{f\in C[-1,1] \,/\, \|f\|<\varepsilon\}\subset A$. Dado $\varepsilon>0$, tomamos $0<a<\varepsilon$, entonces $f_a(t)=a$ $\forall t\in[-1,1]$ es tal que $f_a\in B(0,\varepsilon)$ ya que $\|f_a\|=\sup_{t\in[-1,1]}|f(t)|=a<\varepsilon$, pero $f_a\notin A$ (ya que $f_a(t)\neq 0$ $\forall t: 0<t\le 1$)

Desigualdad de Hölder: Sea $a=(a_1,\dots,a_n)$, $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$). Sean $p,q>1 \,/\, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ entonces

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|\le\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Demostración: Observar que la desigualdad de Hölder es homogénea. Si es cierta para $a,b\in\mathbb{R}^n$, entonces es cierta para $\lambda a,\mu b$ $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

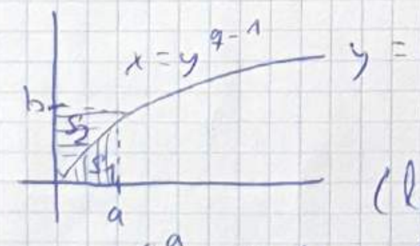
Entonces no es restrictivo suponer que $\sum|a_k|^p=\cancel{(\sum|b_k|^q)}=A>0$ $\sum|b_k|^q=B>0$.

Definimos $\lambda=\frac{1}{A^{1/p}}$, $\mu=\frac{1}{B^{1/q}}$, entonces $\frac{\sum|a_k|^p}{A}=\frac{\sum|b_k|^q}{B}=1$

$\frac{\sum|a_k|^p}{A}=\sum|\lambda a_k|^p$; $\frac{\sum|b_k|^q}{B}=\sum|\mu b_k|^q$ $\Rightarrow \sum|\lambda a_k|^p=$
$=\sum|\mu b_k|^q=1$

Todo se reduce a probar que $\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|\le 1$. Consideramos la función $y=x^{p-1}$ $x>0$ (Observar que $y\to 0$ si $x\to 0$).

Queremos probar que $\frac{1}{p-1}=q-1$. Entonces $1=pq-p-q+1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow pq=p+q\Leftrightarrow 1=\frac{1}{q}+\frac{1}{p}$ (la hipótesis). Por lo que tenemos $x=y^{\frac{1}{p-1}}=y^{q-1}$



$a,b>0$. Siempre se tiene que $S_1+S_2\ge ab$ (la igualdad se da cuando $a=b$)

luego $\int_0^a x^{p-1}dx+\int_0^b y^{q-1}dy=\frac{x^p}{p}\Big]_0^a+\frac{y^q}{q}\Big]_0^b=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\ge ab$ (1) $\forall a,b>0$.

Tomamos $a=|a_k|$ y $b=|b_k|$, $a_k,b_k\neq 0$, entonces queda: $\frac{|a_k|^p}{p}+\frac{|b_k|^q}{q}\ge|a_k b_k|$. Sumando desde $k=1$ hasta $k=n$, se tiene $\frac{1}{p}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a_k^p}_{1}+\frac{1}{q}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}b_k^q}_{1}\ge\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k|$

$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow 1 ? \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|$

Teorema: En un e.v normado L, todas las normas son equivalentes.

Demostración: Sea $\| \ \|$ la norma inicial de L y sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ una base de L. Suponemos que L es un e.v sobre $\mathbb{R}$. Entonces, cada $x \in L$ se expresa de forma única como $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ con $x_k \in \mathbb{R}$ $\forall k = 1, \dots, n$.

Definimos la norma $\|x\|_1 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$ (comprobar que $\|\cdot\|_1$ es una norma) (la (iii) es aplicando la desigualdad de Holder tomando $r = q = 2$).

Veamos que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes.

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k e_k\| = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|x_k|}_{a_k} \cdot \underbrace{\|e_k\|}_{b_k} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2\right)^{1/2} = \|x\|_1 \cdot A \quad \forall x \in L$$

Veamos lo contrario:

$S = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 1\}$ (esfera unidad).

Definimos una $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x = (x_k)_{k=1}^{n} \Rightarrow f(x) = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\|$. Veamos que f es continua.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $x = (x_k)_{k=1}^{n}$, $y = (y_k)_{k=1}^{n}$, entonces

$$|f(x) - f(y)| = \left| \left\|\sum x_k e_k\right\| - \left\|\sum y_k e_k\right\| \right| \leq \left\|\sum x_k e_k - y_k e_k\right\| =$$

Holder $r=q=2$

$$= \left\|\sum (x_k - y_k) e_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|(x_k - y_k) e_k\| = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k| \cdot \|e_k\| \leq$$

$$\leq \left(\sum |x_k - y_k|^2\right)^{1/2} \cdot \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} \|e_k\|^2\right)^{1/2}}_{A} = A \left(\sum |x_k - y_k|^2\right)^{1/2} \to 0$$

si $x \to y$

$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \to 0$ si $x \to y$, luego f es continua.

Como S es compacto, $\exists x^{(0)} \in S \ / \ f(s^{0}) = \min_{x \in S} f(x)$. Sea $m = f(x^{(0)})$, veamos que $m > 0$. Si $m = 0$, entonces se tendría que $f(x^{(0)}) = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)} e_k\right\| = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k^{(0)} e_k = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_k^{(0)} = 0 \quad \forall k$ (e_k base) $\Rightarrow x^{(0)} = 0$. # pues $x^{(0)} \in S$. Entonces $m > 0$. Sea $x \in L \ / \ \|x\|_1 = 1 \Rightarrow \left(\sum |x_k|^2\right)^{1/2} = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 1$

$\Rightarrow (x_1, \dots, x_n) \in S \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \geq m$ ($m = \min$)

pero $f(x_1, \dots, x_n) = \left\|\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right\| \geq m$. Por tanto, si $x \in L$ con $\|x\|_1 \Rightarrow \|x\| \geq m$.

Sea $y \in L$ ($y \neq 0$), entonces $\left\|\frac{y}{\|y\|_1}\right\| = 1$, luego aplicando la prop.

anterior a $\frac{y}{\|y\|_1}$, se tiene: $\left\|\frac{y}{\|y\|_1}\right\| \geq m \Leftrightarrow \frac{1}{\|y\|_1}\|y\| \geq m \Leftrightarrow$
$\|y\| \geq m \cdot \|y\|_1$ (2) $\forall y \in L$ $(y \neq 0)$, pero si $y=0 \Rightarrow$ (2) es cierto.
Luego $\|y\|_1 \leq \frac{1}{m}\|y\|$ $\forall y \in L$. Entonces las normas son equivalentes.

<u>Teorema</u>: Todo espacio normado $(L, \|\cdot\|)$ de dimensión finita es un espacio de Banach.

<u>Demostración</u>: Sea $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(L, \|\cdot\|)$, veamos que $\exists x \in L / x = \lim_{n\to\infty} x^{n}$ única.
Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de L. Entonces para cada $x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k^{(n)} e_k$. Igual que en el primer Teorema, definimos $\|x\|_1 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$. Por ser $(x^{(n)})_n$ una sucesión de Cauchy se tiene $\|x^{(n)} - x^{(p)}\| \to 0$ cuando $n, p \to \infty$.
Tenemos $\|x^{(n)} - x^{(p)}\| = \|\sum_{k=1}^{n} x_k^{(n)} e_k - \sum_{k=1}^{n} x_k^{(p)} e_k\| =$
$= \|\sum_{k=1}^{n} (x_k^{(n)} - x_k^{(p)}) e_k\| \geq B \|\sum (x_k^{(n)} - x_k^{(p)}) e_k\|_1 \overset{B>0}{=}$
↳todas las normas son equiv.
$= B\left(\sum |x_k^{(n)} - x_k^{(p)}|^2\right)^{1/2} \Rightarrow \left(\sum |x_k^{(n)} - x_k^{(p)}|^2\right)^{1/2} \to 0$ para cada k fijo.
$|x_k^{(n)} - x_k^{(p)}| \to 0$ cuando $n, p \to \infty$, luego $(x_k^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ sucesión de números reales que es de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ es completo, $\exists x_k = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$. Sea $x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k$ veamos que $\|x^{(n)} - x\| \to 0$, cuando $n \to \infty$. En efecto, como $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes tenemos: $\|x^{(n)} - x\| \to 0$ si $n \to \infty$

<u>Teorema</u>: En un espacio normado $(L, \|\cdot\|)$ de dimensión finita, todo subespacio vectorial F es cerrado.

<u>Demostración</u>: $(F, \|\cdot\|)$ normado de dimensión finita, luego es un Banach, (aplicando el teorema anterior). Entonces F es cerrado
$((x_n) \subset F / x = \lim x_n \Rightarrow x \in F$: Trivial$)$

<u>Teorema</u>: En un espacio normado $(L, \|\cdot\|)$, todo subespacio F es de dimensión finita y cerrado.

<u>Ejemplo</u>: Un ejemplo de subespacio F no cerrado en un espacio normado L ($\Rightarrow$ que L es de dim infinita)
Consideramos $m = \{x = (x_n)_n / (x_n)_n$ acotada$\}$ con la norma

$\|x\| = \sup_m |x_m|$ (comprobar que es una norma).

Definimos: $F \subset L$ / $F = \{(x_m)_m \,/\, x_m = 0 \ \forall m$ excepto a lo sumo para una cantidad finita de valores de $m\}$

F: subespacio vectorial de L ya que $x, y \in F \Rightarrow x+y \in F$

$(x = (x_m)_{m=1}^{\infty}, \ y = (y_m)_{m=1}^{\infty} \in F, \ y \ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in F)$

Veamos que F no es cerrado: veamos que $\exists$ una sucesión $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty} \subset F$ / $\exists\, x = \lim_n x^{(n)}$, pero $x \notin F$.

Definimos $x^{(1)} = (1, 0, \ldots), \ x^{(2)} = (1, \frac{1}{2}, 0, \ldots), \ldots, x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, \ldots) \in F \quad \forall n \geq 1$

Veamos que $\exists \lim_n x^{(n)} = x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots) \in F$

$\|x - x^{(n)}\| \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.

$\|x - x^{(n)}\| = \|(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots)\|_m = \sup |x_m| =$

$= \frac{1}{n+1} \to 0$ si $n \to \infty$, luego $\lim_n x^{(n)} = x$. Por tanto, F no es cerrado.

Ejemplo: Sea $L = C[0,1] = \{x : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua$\}$ con la norma $\|x\| = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|$. ¿Converge las sucesiones?

a) $x_n(t) = t^n - t^{n+1} \quad \forall n \geq 1$?

b) $x_n(t) = t^n - t^{2n} \quad \forall n \geq 1$?

Solución:

I Guess we mean know

a) Sí y además $\lim_n x_n(t) = x(t) = 0$

$\|x_n(t) - 0\| = \|x_n(t)\| = \sup_{t \in [0,1]} |t^n - t^{n+1}| = \max_{t \in [0,1]} (t^n - t^{n+1}) =$

$= [n t^{n-1} - (n+1) t^n = 0 \Leftrightarrow n = (n+1)t, \ t = \frac{n}{n+1}] = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} =$

$= e^{-1} - e^{-1} = 0.$

b) $t \in [0,1], \ \lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim (\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{t^n} - \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{t^{2n}}) = 0$ pero $\|x_n(t) - 0\| =$

$= \sup_{t \in [0,1]} |t^n - t^{2n}| =$

$= \max_{t \in [0,1]} |t^n - t^{2n}| = [n t^{n-1} - 2n t^{2n-1} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 = 2t^n \Rightarrow t^n = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \sqrt[n]{1/2}$ máx$] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ luego

$\lim_{n\to\infty} \|x_n(t) - 0\| \not\to 0$

Conclusión: la sucesión $x_n(t) = t^n - t^{2n}$ no es de Cauchy en $C[0,1]$ con la norma supremo.

Ejemplo: Sea m el e.v. de las sucesiones acotadas con la norma $\|x\| = \sup_{n} |x_n|$. En m consideramos los subespacios vectoriales $l_1 = \{x = (x_n)_n / \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ y $c_0 = \{x = (x_n)_n / \lim_{n\to+\infty} x_n = 0\}$. Demostrar que $\overline{l_1} = c_0$.

Solución: c_0 es un subespacio cerrado de m: Sea $(x^{(m)})_m \subset c_0 /$ $\lim_{m\to+\infty} x^{(m)} = x$. Veamos que $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$

$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots)$

$\vdots$

$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots)$

$\lim_{n\to+\infty} x_n^{(m)} = 0$ para cada $m = 1, 2, \dots$ Como $\lim_{m\to+\infty} x^{(m)} = x \overset{m}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \|x^{(m)} - x\| \to 0$ cuando $m \to \infty$ pero $\|x^{(m)} - x\| =$
$= \sup_n |\underbrace{x_n^{(m)}}_{\to 0} - x_n| \to 0 \Rightarrow x_n \to 0 \Rightarrow x \in c_0$. Por tanto, c_0 es cerrado.

Como $l_1 \subset c_0 \Rightarrow \overline{l_1} \subset \overline{c_0} = c_0$. Veamos la contraria:

$c_0 \subset \overline{l_1}$. Sea $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, veamos que $x \in \overline{l_1}$. En efecto, definimos $x^{(1)} = (x_1, 0, \dots) \in l_1$, $x^{(2)} = (x_1, x_2, 0, 0, \dots) \in l_1, \dots$
$x^{(n)} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots) \in l_1, \dots$

Veamos que $x^{(n)} \to x$. Es cierto ya que $\|x - x^{(n)}\| =$
$= \|(\underbrace{0, \dots, 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\| = \sup_{k=1,2,\dots} |x_{n+k}| \to 0$ ya que
$x_n \to 0$ por ser $x \in c_0$. Luego $\lim x^{(n)} = x \Rightarrow x \in \overline{l_1}$.

Ejer: Sea $C^1[0,1]$ el e.v. de las funciones continuamente diferenciables ($\exists$ la 1ª derivada y es además continua). Decir si los siguientes funcionales son o no normas sobre $C^1[a,b]$.

$x = x(t) \in C^1[a,b]$

a) $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$

b) $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$

c) $\|x\| = |x(b) - x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$

d) $\|x\| = |x(a)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$

e) $\|x\| = \int_a^b |x(t)|\,dt + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$

a) Sí, b) No, c) No, d) Sí, e) Sí

<u>Ejercicio</u>: Sea $C[-1,1]$ e.v. funciones continuas sobre $[-1,1]$ con la norma $\|x(t)\| = \sup |x(t)|$. Definimos $x_n(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} nt & t\in[-1,0] \\ 0, & t\in[0,1] \end{cases}$

a) ¿Para qué valores de n se tiene que $x_n(t) \in S = \{x(t) \in C[-1,1] : \|x(t)\| = 1\}$

b) ¿Es $(x_n(t))_n$ una sucesión de Cauchy?

c) ¿Es $A = \{x_n(t) : n = 1, 2, \ldots\}$ un compacto?

<u>Ejercicio</u>: Sea $(L, \|\cdot\|)$ un espacio normado, ¿un subconjunto K es compacto $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)_n \subset K$, $\exists$ una subsucesión $(x_{n_k})_k$ que es convergente en K.

i)

a) $n=1$, $x_1(t) \notin S$ ya que $\|x_1(t)\| = \max\limits_{t\in[-1,1]} |x_1(t)| = \max\limits_{t\in[-1,0]} |\operatorname{sen} t| =$

$= \operatorname{sen} 1 \neq 1$

$n>1$, $\|x_n(t)\| = \max\limits_{t\in[-1,0]} |\operatorname{sen} nt| = 1 \Rightarrow x_n(t) \in S \quad \forall n>1$

$nt = -\frac{\pi}{2}$, $t = -\frac{\pi}{2n} \in [-1,0] \quad \forall n>1$

b) $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{A+B}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{A-B}{2} \Rightarrow \|x_n(t) - x_m(t)\| \not\to 0$

Si $n, m \to \infty$

ii) a) (x_n) converge en m pero no converge en l_1

b) " " " l_2.

c) " " l_2 " l_1

d) " " c_0 " l_1

e) " " " l_2

<u>Ejercicio</u>: Sea $l_p = \{x = (x_n)_n \,/\, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ con $p \geq 1$

$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$. Probar que $x = \left(1, \frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \ldots, \frac{1}{\ln n}, \frac{1}{\ln(n+1)}, \ldots\right) \in c_0$.

Pero $x \notin l_p \quad \forall p \geq 1$ (observar que $l_p \subset c_0$)

Ejercicio: $\|x\| = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$ (norma euclídea)

$\|x\|_1 = \sum |x_i|$

$\|x\|_0 = \text{máx } |x_i|$ ¿ Demostrar que son equivalentes?

$$\left.\begin{array}{l} \|x\|^2 = \sum_{i=1} |x_i|^2 \leq \left(\sum |x_i|\right)^2 = \|x\|_1^2 \Rightarrow \|x\| \leq \|x\|_1 \\ \|x\|_1 = \sum |x_i| \leq n \cdot x_j \leq n \sqrt{x_1^2 + \dots + x_j^2 + \dots + x_n^2} = n \cdot \|x\| \end{array}\right\} \|x\| \sim \|x\|_1$$

$x_j = \text{máx } |x_i|$

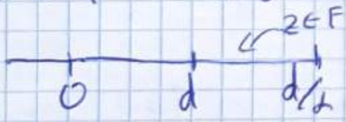
$$\left.\begin{array}{l} \|x\|_1 = \sum |x_i| \leq n |x_j| = n \cdot \|x\|_0 \\ \|x\|_0 = \text{máx } |x_i| = |x_j| \leq \sum |x_i| = \|x\|_1 \end{array}\right\} \|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_0$$

$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_0$

Lema de Riesz: Sea $(L, \|\cdot\|)$ un e. normado y F subespacio vectorial cerrado de L y $F \neq L$. Sea $0 < \alpha < 1$, entonces $\exists\, x_\alpha \in L$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|x_\alpha - y\| > \alpha \;\; \forall y \in F$.

Demostración: Como $L \neq F$. $\exists\, x \in L \,/\, x \notin F$. Sea $d = d(x, F) = \inf\{\|x - y\| \,/\, y \in F\}$. Veamos que $d > 0$. Si $d = 0$, entonces para cada n, $\exists\, y_n \in F \,/\, \|x - y_n\| \leq \frac{1}{n}$

Por tanto, $x = \lim_{n \to +\infty} y_n$ (↳ sucesión) #. Como F es cerrado significaría que $x \in F \Rightarrow d > 0$. Como $0 < \alpha < 1 \Rightarrow \frac{d}{\alpha} > d$



$z \in F$ tal que $d \leq \|x - z\| < d/\alpha$ (por definición de d)

Definimos $x_\alpha = \dfrac{x - z}{\|x - z\|}$ $(x \neq z)$ entonces $\|x_\alpha\| = \dfrac{1}{\|x - z\|} \cdot \|x - z\| = 1$

Sea $y \in F$ (arbitraria), entonces $\|x_\alpha - y\| = \left\| \dfrac{x - z}{\|x - z\|} - y \right\| =$

$= \dfrac{1}{\|x - z\|} \left\| x - z - y\|x - z\| \right\| = \underbrace{\dfrac{1}{\|x - z\|}}_{> \alpha/d} \| x - \underbrace{(\underset{F}{z} + \underset{F}{y} \underbrace{\|x - z\|}_{\text{escalar}})}_{\in F} \| > \dfrac{\alpha}{d} \cdot d =$

$= \alpha$

Teorema de Riesz: Sea $(L, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si la bola unidad cerrada B $(B = \{x \in L \,/\, \|x\| \leq 1\})$ o la esfera unidad S $(S = \{x \in L \,/\, \|x\| = 1\})$ son compactos, entonces L es de dim finita.

Demostración: No es restrictivo hacer la prueba solo para S. En efecto, observar que si B es compacto, entonces S también es compacta ya que todo cerrado en un compacto es compacto. Prueba por reducción al absurdo.

Supongamos que S es compacto y que L es de dimensión infinita.
Sea $x_1 \in S$ $(\|x\|=1)$. Consideramos el subespacio $F_1 = L(\{x_1\}) = \{\lambda_1 x_1 \,/\, \lambda_1 \in \mathbb{R}\}$. Entonces F_1 es cerrado por ser un subespacio de L de dim finita (Teorema 4) ($\dim F_1 = 1$) y por tanto $F_1 \neq L$. (L dim inf)
Sea $0<\alpha<1$, aplicando el lema de Riesz, $\exists\, x_2$ con $\|x_2\|=1$ $(x_2 \in S)$ tal que $\|x_2 - \underbrace{\lambda_1 x_1}_{\in F_1}\| > \alpha$ $\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}$. Consideramos el subespacio $F_2 = L(\{x_1, x_2\})$. Entonces F_2 es un subespacio cerrado de L ya que F_2 es de dimensión finita ($\dim F_2 = 2$) y además $F_2 \neq L$ (L dim infinita). Dado $0<\alpha<1$, aplicando el lema de Reisz, $\exists\, x_3$ con $\|x_3\|=1$ $(x_3 \in S)$ tal que $\|x_3 - (\underbrace{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}_{\in F_2})\| > \alpha$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Procediendo de esta forma obtenemos una sucesión $(x_n)_n$ en S $(x_n \in S \ \forall n)$. (1)
Como S es compacto, $\exists$ subsucesión $(x_{n_k}) \,/\, \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x \in S$.
Sea $0<\varepsilon<\alpha/2$. $\exists\, k_0$ tal que $\|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$ $\forall k > k_0$. Entonces $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| = \|x_{n_{k+1}} - x + x - x_{n_k}\| \le \|x_{n_{k+1}} - x\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon + \varepsilon$
$2\varepsilon < \alpha$ si $k > k_0$ (2).
De (1) obtenemos $\|x_n - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1})\| > \alpha$ $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ dado m y $1 \le p < m$, se tiene $\|x_m - x_p\| > \alpha$ (basta tomar $m = n$ y $x_i = 0$ $\forall i \neq p$, y $\lambda_p = 1$).
Tomamos en (2) $m = n_{k+1}$ y $p = n_k$, se tiene una contradicción.

Ejercicio: Probar que en los espacios l_p $(p \ge 1)$ definidos por $l_p = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \,/\, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$. Probar que
$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ es una norma.

Solución: $\cdot\ \|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$\cdot\ \|\lambda x\|_p = |\lambda|\, \|x\|_p$
$\cdot\ \|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \Leftrightarrow \left(\sum |x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |y_n|^q\right)^{1/q}$
previamente se demuestra la desigualdad de Minkowski:
$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \qquad p \ge 1$$
Para $p=1$, la desigualdad de Minkowski es trivial ya que es la desigualdad triangular. Por tanto supongamos que $p>1$.

Partimos de la identidad: $(|a|+|b|)^p = (|a|+|b|)^{p-1}|a| + (|a|+|b|)^{p-1}|b|$. Tomamos $a = a_k$ y $b = b_k$ y sumamos desde $k=1$ hasta $k=n$. Entonces queda:

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^p = \sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^{p-1}|a_k| + \sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^{p-1}|b_k| \quad (1)$$

Aplicando la desigualdad de Holder al lado derecho queda

$$(1) \le \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum (|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q} \left(\sum |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

Tengamos en cuenta que $(p-1)=p \Leftrightarrow pq-q=p \Leftrightarrow pq=p+q \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. Entonces $(2) = \left(\sum (|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1/q} \cdot \left(\left(\sum |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum |b_k|^q\right)^{\frac{1}{p}} \right) \quad (3)$

Dividiendo (3) por $\left(\sum (|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1/q}$ queda

$$\left(\sum (|a_k|+|b_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |a_k|\right)^{1/p} + \left(\sum |b_k|^p\right)^{1/p}$$

Teniendo en cuenta que $|a_k+b_k| \le |a_k|+|b_k|$ queda la desigualdad de Minkowski.

$$\|x+y\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n+y_n|^p\right)^{1/p} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \overset{\text{minkowski}}{\le}$$

$$\le \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p} \right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} + \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p + \|y\|_p$$

<u>Definición</u>: Sea L un e.v. real definimos un producto escalar en L como un funcional $L \times L \to \mathbb{R}$ denotado por $\langle x, y \rangle$ tal que verifica:

1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Cuando en L hay definido un producto escalar, se dice que L es un espacio euclídeo.

- Si L es un espacio euclídeo $\Rightarrow$ L es normado para la norma $\|x\| = (\langle x, x \rangle)^{1/2}$ (comprobación inmediata).

· Si L es un espacio normado, ¿existe un producto escalar tal que define la $\|\cdot\|$?

Ejercicio: Probar que en todo espacio euclídeo L, se tiene:

A) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Identidad del paralelogramo)

B) $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$

Teorema (Jordan-Von Neumann): La condición necesaria y suficiente para que un espacio sea euclídeo es que se verifique la identidad del paralelogramo.

Ejercicio: Probar que en $\mathbb{R}^n$ $(n>1)$, la norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ no procede de ningún producto escalar.

Supongamos que la norma $\|\cdot\|_1$ procede de un producto escalar. Entonces por el T^a de Jordan (VN) se tendría que $\|\cdot\|_1$ verifica la I.P (identidad del paralelogramo).
$\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$. Sin embargo, para $x = (1,0,\dots,0)$, $y = (0,\dots,0,1)$; $\|x\|_1 = 1 = \|y\|_1$ y $\|x+y\|_1 = \|(1,0,\dots,0,1)\| = 2$
$\|x-y\|_1 = \|(1,0,\dots,0,-1)\| = 2$

Entonces $\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 = 8 = 2(1+1) = 4$

Ejercicio: En $C([a,b])$ con la norma supremo $(\|x(t)\| = \max |x(t)|)$ no procede de ningún producto escalar.

Demostración (T^a del paralelogramo): "$\Rightarrow$" Demostrado.
$\|x\| = (\langle x,x\rangle)^{1/2}$ def. de norma

"$\Leftarrow$" Supongamos que $(L, \|\cdot\|)$ es un e. normado que satisface la identidad del paralelogramo. Veamos que es euclídeo: existe un producto escalar / define la norma. Definimos $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$. Tenemos que probar que es un producto escalar:

1) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$. En efecto $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \frac{1}{4}(\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2) = \langle y,x\rangle$

2) $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$. En efecto, si $x=0 \Rightarrow \langle x,x\rangle = \frac{1}{4}(\|0\|^2 - \|0\|^2) = 0$. Recíprocamente si $\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \|x+x\|^2 = 0 \Rightarrow \|2x\|^2 = 4\|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(1)

3) $\langle x+y,z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$. En efecto, veamos que $\langle x+y,z\rangle =$
$= 2\langle x, \frac{z}{2}\rangle + 2\langle y, \frac{z}{2}\rangle \Leftrightarrow 4\langle x+y, z\rangle = \|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 =$
$=$ (aplicando la identidad del paralelogramo) $= 2\|x+\frac{z}{2}\|^2 +$
$+ 2\|y+\frac{z}{2}\|^2 - \|x-y\|^2 - \left(2\|x-\frac{z}{2}\|^2 + 2\|y-\frac{z}{2}\|^2 - \|x-y\|^2\right) =$
$= 2\left(\|x+\frac{z}{2}\|^2 - \|x-\frac{z}{2}\|^2\right) + 2\left(\|y+\frac{z}{2}\|^2 - \|y-\frac{z}{2}\|^2\right) =$
$= 8\langle x, \frac{z}{2}\rangle + 8\langle y, \frac{z}{2}\rangle$. Dividimos por 4 y queda:

$\langle x+y, z\rangle = 2\langle x, \frac{z}{2}\rangle + 2\langle y, \frac{z}{2}\rangle$ (2). Hacemos $y=0$ en (2)
y queda: $\langle x, z\rangle = \langle 2x, \frac{z}{2}\rangle + \underbrace{2\langle 0, z/2\rangle}_{0 \text{ (por def de } \langle\cdot\rangle)}$

$\langle x, z\rangle = 2\langle x, \frac{z}{2}\rangle$ (3)
Teniendo en cuenta (2) y (3) queda $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$.
Prueba (1).
4) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}$ (4). Tomamos $\lambda=-1$ y
por la definición de $\langle\cdot\rangle$ queda: $\langle -x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|-x+y\|^2 -$
$- \|-x-y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x-y\|^2 - \|x+y\|^2) = -\frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) =$
$= -\langle x,y\rangle$. Para $\lambda=-1$, la fórmula (4) es cierta.
Sea $\lambda\in\mathbb{Q}^+$ (racional positivo) $\Rightarrow \lambda = \frac{m}{n}$ con $m,n\in\mathbb{N}$.
Entonces $\langle\lambda x, y\rangle = \langle \frac{m}{n}x, y\rangle = \langle \frac{x}{n} + \overset{(m)}{\cdots} + \frac{x}{n}, y\rangle \underset{\text{prop distrib.}}{=}$
$= \langle \frac{x}{n}, y\rangle + \overset{(m)}{\cdots} + \langle \frac{x}{n}, y\rangle = \left(\langle x,y\rangle = \langle \frac{x}{n} + \overset{(n)}{\cdots} + \frac{x}{n}, y\rangle \underset{\text{distrib.}}{=}\right.$
$\left.= \langle \frac{x}{n}, y\rangle + \overset{(n)}{\cdots} + \langle \frac{x}{n}, y\rangle = n\langle \frac{x}{n}, y\rangle\right) =$
$= \frac{1}{n}\langle x,y\rangle + \overset{(m)}{\cdots} + \frac{1}{n}\langle x,y\rangle = \frac{m}{n}\langle x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$.
Por tanto, (4) es cierta $\forall\lambda\in\mathbb{Q}^+$
Sea $\lambda\in\mathbb{Q}^-$ (racional negativo). $\langle\lambda x, y\rangle = \langle -\lambda(-x), y\rangle =$
$= -\lambda\langle -x, y\rangle = -\lambda\cdot(-1)\langle x,y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle$. Por tanto ($\lambda=0$, demostrado) (4) es cierta $\forall\lambda\in\mathbb{Q}$
Demostramos que $\|\cdot\|$ es continua para la + y el producto por escalares $\Rightarrow \langle\cdot\rangle$ continua. Por tanto, si $\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q} \,/\, \lim_n \lambda_n = \lambda$. Entonces $\langle\lambda_n x, y\rangle =$
$= \lambda_n\langle x,y\rangle$ (demostrado por ser $\lambda_n\in\mathbb{Q}$). Tomando límite
cuando $n\to+\infty$ queda: $\lim_n \langle\lambda_n x, y\rangle = \lim \lambda_n \langle x,y\rangle$
Finalmente $\langle x,x\rangle = \frac{1}{4}(\|x+x\|^2 - \underbrace{\|x-x\|^2}_{0}) = \frac{1}{4}\cdot 4\|x\|^2 = \|x\|^2$

Ejer: m, l_1, l_2, c_0

a) Sucesión que converge en m pero no converge en l_1.

$(x^{(n)})_n$ donde $x^{(1)} = (1, 0, \dots)$, $x^{(2)} = (1, \frac{1}{2}, 0, \dots)$

$x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots)$

$(x^{(n)})_n$ converge en m y no converge en l_1

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} \underset{(\text{en } m)}{=} x = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots) \in m$; pero $\nexists \lim\limits_{n\to+\infty} x^{(n)}$ en l_1

b) Una sucesión que converge en m pero no converge en l_2.

$(x^{(n)})_n$ donde $x^{(1)} = (1, 0, \dots)$, $x^{(2)} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots)$

$x^{(n)} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, \dots)$

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{(n)} \underset{(\text{en } m)}{=} x = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \dots)$

c) Una sucesión que converge en l_0 pero no converge en l_1.

Solución: la sucesión en a)

d) " " c_0 " " l_1: Sol. la sucesión en a)

e) " " c_0 " " l_2: Sol. la sucesión en b)

$l_2 \subset c_0$; l_2; $\|\cdot\| = (\sum |a_n|^2)^{1/2}$

c_0; $\|\cdot\| = \sup |a_n|$

Ejercicio: l^p ($p \geq 1$), $\|\cdot\|_p = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p}$

a) $l^p \subset c_0$: si $a \in l^p \Rightarrow a = (a_n)_{n=1}^{\infty} / \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_n |a_n|^p = 0 \Rightarrow \lim\limits_n |a_n| = 0 \Rightarrow \lim\limits_n a_n = 0 \Rightarrow$

b) $x = (1, \frac{1}{\ln 2}, \dots, \frac{1}{\ln n}, \dots) \in c_0$ ya que $\lim\limits_n \frac{1}{\ln n} = 0$.

Pero $x \notin l_p$ $\forall p \geq 1$.

Si $\exists$ algún $p \geq 1 / x \in l_p \Rightarrow \sum\limits_{n=2} \frac{1}{(\ln n)^p} < \infty$, contradicción

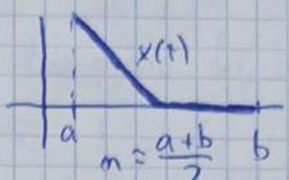
ya que $\exists\ n_0 / \frac{1}{(\ln n)^p} > \frac{1}{n}$ $\forall n > n_0 \Leftrightarrow$

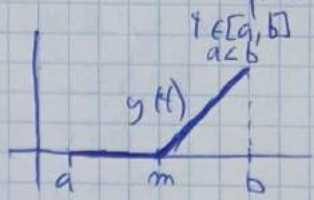
$\Leftrightarrow (\ln n)^p < n$ $\forall n > n_0 \Leftrightarrow \frac{n}{(\ln n)^p} > 1$ $\forall n > n_0 \Leftrightarrow \left(\frac{n^{1/p}}{\ln n}\right)^p > 1$

$\forall n \geq n_0$ cierto ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{1/p}}{\ln x} = \lim \frac{\frac{1}{p} x^{\frac{1}{p}-1}}{\frac{1}{x}} =$

$= \frac{1}{p} x^{1/p} \to +\infty$ si $x \to \infty$ $(\frac{1}{p} > 0)$

Probar que $C[a,b]$ con la norma supremo ($\|x(t)\| = \sup\limits_{\substack{t\in[a,b] \\ a<b}} |x(t)|$) no es euclídeo.





Caso 1: $a\cdot b \neq 0$

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{2|a|}{b-a}(t-m) & \text{si } a \leq t \leq m \\ 0 & \text{si } m \leq t \leq b \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq t \leq m \\ \frac{2|b|}{b-a}(t-m) & \text{si } m \leq t \leq b \end{cases}$$

$\|x(t)\| = |a|$, $\|y(t)\| = |b|$

$\|x(t)+y(t)\| = \max\{|a|,|b|\}$

$\|x(t)-y(t)\| = \max\{|a|,|b|\}$

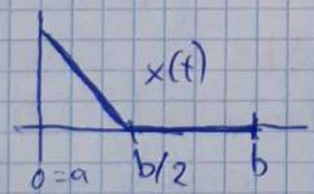
Si $C[a,b]$ fuese euclídeo $\Rightarrow$ se verifica la ley del paralelogramo:

$$\|x(t)+y(t)\|^2 + \|x(t)-y(t)\|^2 = 2(\|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2)$$

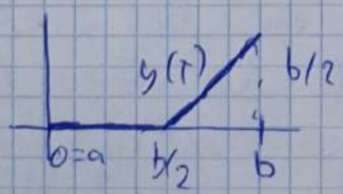
$2(\max\{|a|,|b|\})^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2 \Leftrightarrow (\max\{|a|,|b|\})^2 =$
$= |a|^2 + |b|^2$

- Si $\max\{|a|,|b|\} = |a|$, entonces queda: $|a|^2 = |a|^2 + |b|^2 \Rightarrow b = 0$ #
- Si $\ldots = |b|$, entonces queda $|b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \Rightarrow a = 0$ #

Caso 2: $a\,b = 0$ (p. e. $a = 0$)



$$x(t) = \begin{cases} -t + b/2 & \text{si } 0 \leq t \leq b/2 \\ 0 & \text{si } b/2 \leq t \leq b \end{cases}$$



$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t \leq b/2 \\ t - b/2 & \text{si } b/2 \leq t \leq b \end{cases}$$

Entonces $\|x(t)\| = b/2 = \|y(t)\|$, $\|x(t)+y(t)\| = b/2 = \|x(t)-y(t)\|$

Si $C[a,b]$ fuese euclídeo, entonces se verifica la ley del paralelogramo $\Rightarrow \|x(t)+y(t)\|^2 = 2(\|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2)$. Luego quedaría $(b/2)^2 + (b/2)^2 = 2(b/2)^2 + 2(b/2)^2 \Rightarrow b = 0$ # $(b>0)$

Def:

$(L, \|\cdot\|)$ espacio normado: 1er axioma de numerabilidad: $\exists$ un sistema fundamental numerable (S.F.N) de entornos de x: $\{B(x, 1/n) ; n = 1, 2, \dots\}$ ya que dado cualquier entorno V de x $\Rightarrow \exists\, r > 0 \,/\, B(x, r) \subset V$, pero dado $r > 0$, $\exists\, n \,/\, \frac{1}{n} < r \Rightarrow$
$\Rightarrow B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x, r) \subset V$.

Definición: Sea $f : L \to \mathbb{R}$ lineal ($f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall x \in L$.) Diremos que f es continua si dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $\|x - x_0\| < \delta$ ($|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ si $\|x - x_0\| \leq \delta$) (2). Cuando f es continua $\forall x_0 \in L$, se dice que f es continua.

Proposición: Un funcional lineal $f : L \to \mathbb{R}$ (L normado) es continuo $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ es continuo en 0.

Demostración: "$\Rightarrow$" Inmediata

"$\Leftarrow$" Supongamos que f es continua en 0. Sea $x_0 \in L$, veamos que es continua en x_0 ($x_0 \neq 0$). Como f es continua en 0, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$: $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$ si $\|x - 0\| = \|x\| \leq \delta$ (1).

Tomamos $y = x - x_0$.

Si $\|y\| \leq \delta \Rightarrow |f(y)| \leq \varepsilon$, pero $|f(y)| = |f(x - x_0)| =$
$= |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$, (2) es cierto, luego f es continua en x_0.

Proposición: Sea $f : L \to \mathbb{R}$ un funcional lineal (L normado) entonces f es continua $\Leftrightarrow$ f está acotada en la bola unidad.

Demostración: "$\Rightarrow$" Por la proposición 1, f es continua en 0: dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $|f(x)| \leq \varepsilon$, si $\|x\| \leq \delta$. Sea $x \in B \Rightarrow \|\delta x\| = \delta \|x\| \leq \delta$. Por tanto, $|f(\delta x)| \leq \varepsilon$. Pero $|f(\delta x)| = \delta |f(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon / \delta$ acotada en B.

"$\Leftarrow$" Supongamos que f está acotada en $B = \{x \,/\, \|x\| \leq 1\}$, $\exists\, M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in B$. Sea $\varepsilon > 0$ (arbitrario), definimos $0 < \delta \leq M/\varepsilon$. Entonces si $x \,/\, \|x\| \leq \delta \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \|\frac{1}{\delta} x\| \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\delta} x \in B$, por lo que $|f(\frac{1}{\delta} x)| \leq M \overset{f \text{ lineal}}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow \frac{1}{\delta} |f(x)| \leq M \Leftrightarrow |f(x)| \leq M \cdot \delta \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

Luego f es continua en 0 y por la proposición anterior, f es continua.

Proposición: Sea $f : L \to \mathbb{R}$ funcional lineal (L normado). Entonces f es continua $\Leftrightarrow$ f está acotado en todo conjunto acotado de L ($A \subset L$ es un cjto acotado si $A \subset B(0, r)$ para un cierto r $\Leftrightarrow$

$\|x\| \leq r \quad \forall x \in A)$.

Demostración: "$\Rightarrow$" Como f es continua aplicando la proposición anterior, f está acotada en $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$ tal que $\exists M > 0$ que verifica $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in B$. Sea A un acotado cualquiera de L: $\exists r > 0 : \|x\| \leq r \quad \forall x \in A$. Entonces si $x \in A \Rightarrow$
$\Rightarrow \|\frac{x}{r}\| \leq 1 \Rightarrow \frac{x}{r} \in B \Rightarrow |f(\frac{x}{r})| \leq M$
$|f(\frac{x}{r})| = \frac{1}{r}|f(x)| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq M \cdot r$, luego f está acotada en A.
"$\Leftarrow$" Si f está acotada en cualquier acotado de L, en particular está acotada en $B = \{x / \|x\| \leq 1\}$. Aplicando la proposición anterior, f es continua.

Ejemplo: $f : (-\pi/2, \pi/2) \xrightarrow{\text{tangente}} \mathbb{R}$, $\underbrace{f(-\pi/2, \pi/2)}_{\text{acotado}} = \mathbb{R} \leftarrow$ no acotado

¿Por qué? $\tan(x+y) \neq \tan(x) + \tan(y)$ (f no es lineal).

Proposición: Sea $f : L \to \mathbb{R}$ un funcional lineal (L: normado). Entonces f es continua $\Leftrightarrow \exists U$ abierto de L $(U \neq \emptyset)$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que $t \notin f(U)$.

Teorema: Sea $f : L \to \mathbb{R}$ un funcional lineal (L normado). Entonces f es continua $\Leftrightarrow$ $\ker f$ es un subespacio cerrado de L

Demostración: "$\Rightarrow$" Como f es continua y $\{0\}$ es un cerrado, entonces $f^{-1}(\{0\})$ es un cerrado en L, pero $f^{-1}(\{0\}) = \ker f = \{x \in L / f(x) = 0\}$

Como $\ker f$ subespacio vectorial, $\ker f$ es un subespacio vectorial cerrado.

"$\Leftarrow$" Supongamos que $\ker f$ es un subespacio cerrado si $\ker f = L \Rightarrow$
$\Rightarrow f = 0$ continua (demostrado). Si $\ker f \neq L \Rightarrow L \setminus \ker f$ es un complacto de $\ker f \neq \emptyset$. Entonces definimos $U = L|_{\ker f}$ es un abierto no vacío. Tomamos $t = 0$ y se tiene que $t \notin f(U)$
(si $t = 0 \in f(U) \Rightarrow \exists x \in U / f(x) = 0$ pero $x \notin \ker f \Rightarrow f(x) \neq 0$ absurdo

Aplicando la proposición anterior se tiene que f es continua.

Teorema: Sea $f : L \to \mathbb{R}$ un funcional lineal. Si L normado es de dimensión finita, entonces f es continua.

Demostración: Consideramos el $\ker f$, y se tiene que $\ker f$ es un subespacio vectorial de L. Como L es de dimensión finita, $\ker f$ es cerrado. Aplicando el Teorema anterior, f es continua.

Ejercicio 1: Probar que la desigualdad de Minkowski no es cierta (en general) si $0 < p < 1$.

Ejercicio 2: Sea $(L, \|\cdot\|)$ un espacio normado y F subespacio vectorial abierto de L. Entonces $F = L$.

Ejercicio: Sea $(L, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $(x_n)_n$, entonces decimos que la serie $\sum x_n$ converge $\Leftrightarrow$ $(s_n)_n$ donde $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2, \dots, s_n = x_1 + \dots + x_n$ converge ($\exists x \in L / x = \lim_{n \to +\infty} s_n$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$)

Ej 1: $\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p}$ (1)

tomamos $p = \frac{1}{2}$, $n = 2$, $a_1 = a_2 = 1$ y $b_1 = 1$, $b_2 = 0$

Parte izquierda de (1) queda: $\left((2^{1/2} + 1^{1/2})\right)^2 \leq (1^{1/2} + 1^{1/2})^2 + (1^{1/2})^2 \Leftrightarrow 2 + 1 + 2\sqrt{2} \leq 4 + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq 1$ Falso.

Ej 2: Como F es un subespacio vectorial $\Rightarrow F \neq \emptyset$ ya que $0 \in F$. Como F es abierto $\Rightarrow \exists\ r > 0 / B(0, r) = \{x \in L / \|x\| \leq r\} \subset F$. Veamos que $F = L$. Como $F \subset L$, falta probar que $L \subset F$. Sea $x \in L$. Si $x = 0 \Rightarrow x \in F$ (demostrado).

Si $x \neq 0$, entonces sea $y = r \cdot \frac{x}{\|x\|}$, se tiene que $\|y\| = \left\|\frac{r x}{\|x\|}\right\| = r \frac{\|x\|^{1}}{\|x\|} = r \Rightarrow y \in B(0, r) \subset F \Rightarrow y \in F$. Como $y = \frac{r x}{\|x\|} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{y \|x\|}{r} \Rightarrow x \in F$. Demostrado.

Por tanto, $L \subset F$. Entonces $L = F$.

Teorema: Sea $(L, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(x_n)_n$ es una sucesión $/ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge en $\mathbb{R}$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge en L.

Demostración: Consideramos la sucesión de las sumas parciales $x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n, \dots$ y veamos que converge.

Tomamos $n > m$, entonces $\|x_1 + x_2 + \dots + x_n - (x_1 + x_2 + \dots + x_m)\| =$
$= \|x_{m+1} + \dots + x_n\| \leq \|x_{m+1}\| + \dots + \|x_n\| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\| - \sum_{k=1}^{m} \|x_k\| \to 0$

cuando $m, n \to \infty$ ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge en $\mathbb{R}$.

Por tanto, $\|\underbrace{x_1+\dots+x_m}_{S_m}-(\underbrace{x_1+\dots+x_n}_{S_n})\|\to 0$. Cuando $m,n\to\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la sucesión de las sumas parciales es de C y como el espacio es completo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

<u>Nota</u>: El recíproco del teorema anterior no es cierto, en general. Tomamos $L=l_2$ con la norma $\|x\|=\|(x_n)_n\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$. Entonces $(l_2,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Veamos que $\exists\, (x^{(n)})_n \subset l_2$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n)}$ converge en l_2, pero $\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n)}$ converge en l_2, pero $\sum_{n=1}^{\infty}\|x^{(n)}\|$ diverge en $\mathbb{R}$.

Sea $x^{(1)}=(1,0,\dots)$, $x^{(2)}=(0,\frac{1}{2},0,\dots),\dots, x^{(n)}=(0,\dots,\underset{\overset{\uparrow}{n}}{\frac{1}{n}},0,\dots)$ entonces $(x^{(n)})_n\subset l_2$ y se tiene:

$\|x^{(1)}\|=1$; $\|x^{(2)}\|=\frac{1}{2},\dots,\|x^{(n)}\|=\frac{1}{n},\dots$ Entonces $\sum_{n=1}^{\infty}\|x^{(n)}\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que es divergente en $\mathbb{R}$. Pero, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n)}$ converge al vector $x=(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\dots)\in l_2$.

En efecto, veamos que $S_n=x^{(1)}+x^{(2)}+\dots+x^{(n)}\xrightarrow{(l_2,\|\cdot\|)} x$ ya que $\|x-S_n\|=\|(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\dots)-(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},0,\dots)\|=$
$=\|(\underbrace{0,\dots,0}_{n},\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+2},\dots)\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+k}\right)^2\right)^{1/2}\to 0$. Cuando $n\to\infty$ ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, luego $\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n)}=x=$
$=(1,\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{n},\frac{1}{n+1},\dots)\in l_2$.

<u>Definición</u>: Sea (E,d) un espacio métrico. Una aplicación $T: E\to E$ se dice <u>contractiva</u> $\Leftrightarrow \exists\, 0<\alpha<1$ tal que $d(T(x),T(y))\leq \alpha\cdot d(x,y)\quad \forall x,y\in E$.

<u>Definición</u>: $T:E\to E$ tiene punto fijo $\Leftrightarrow \exists$ al menos $x\in E\,/\, T(x)=x$.

<u>Teorema (de Banach)</u>: Sea (E,d) un espacio métrico completo y $T: E\to E$ contractiva. Entonces T tiene punto fijo. Además, es único.

<u>Demostración</u>: Sea $x_0\in E$ (arbitrario) y definimos $x_1=T(x_0)$, $x_2=T(x_1),\dots,x_n=T(x_{n-1}),\dots$ Ponemos $T^n=\underbrace{T\circ T\circ\dots\circ T}_{n \text{ veces}}$ y se tiene: $x_1=T^1(x_0)$, $x_2=T^2(x_0),\dots,x_n=T^n(x_0)$.
Veamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en E. Como E es completo, basta probar que $(x_n)_n$ es de Cauchy.

Sea $m>n$, $d(x_m, x_n) = d(T^m(x_0), T^n(x_0)) \le \lambda\, d(T^{m-1}(x_0), T^{n-1}(x_0)) \le$
$\le \lambda^2 d(T^{m-2}(x_0), T^{n-2}(x_0)) \underbrace{\le \ldots \le}_{\text{reiterando}} \lambda^n d(T(x_0), x_0)$

Luego $\boxed{d(x_{n+1}, x_n) \le \lambda^n d(T(x_0), x_0) \quad (1)}$ Sea $m>n$, entonces $d(x_m, x_n) \le d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \ldots +$
$+ d(x_{n+1}, x_n) \underset{(1)}{\le} \lambda^{m-1} d(T(x_0), x_0) + \lambda^{m-2} d(T(x_0), x_0) + \ldots +$
$+ \lambda^n d(T(x_0), x_0) = (\lambda^{m-1} + \lambda^{m-2} + \ldots + \lambda^n)\, d(T(x_0), x_0) = \dfrac{\lambda^m - \lambda^n}{\lambda - 1} d(T(x_0), x_0)$
$\to 0$ cuando $m, n \to \infty$ ya que $0<\lambda<1$. Por tanto, la sucesión $(x_m)_m$ es de Cauchy en (E, d), luego $\exists x \in E / \lim\limits_{m\to+\infty} x_m = x$.
Veamos que x es punto fijo de T. Tenemos $d(x, T(x)) \underset{\text{des. triang.}}{\le}$
$\le d(x, x_m) + d(x_m, T(x)) = d(x, x_m) +$
$+ d(T(x_{m-1}), T(x)) \underset{T \text{ continua}}{\le} d(x, x_m) + \lambda d(x_{m-1}, x) \to 0$
cuando $m \to +\infty$ ya que $x = \lim x_m$. Por tanto $d(x, T(x)) = 0$
$\Rightarrow x = T(x)$, luego T tiene un pto fijo. Veamos que x es único
Supongamos que x es único. Supongamos que $\exists x' \neq x$ tal que $T(x') = x'$, entonces: $d(x, x') = d(T(x), T(x')) \underset{T \text{ continua}}{\le} \lambda d(x, x')$,
como $d(x, x') > 0 \Rightarrow$ dividiendo por $d(x, x')$ queda:
$1 \le \lambda$! absurdo ya que $\lambda < 1$

<u>Corolario</u>: Sea $(L, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $T: L \to L$ es contractivo. Entonces T tiene punto fijo y es único.

<u>Demostración</u>: Tener en cuenta que un espacio normado de Banach es en particular un espacio métrico completo para la métrica d definida por $d(x,y) = \|x-y\|$.

<u>Aplicación del T^a de Banach</u>: Sea $E = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 1\}$

a) Probar que (E, d) es un espacio métrico completo, donde $d(x,y) = |x-y|$, $\forall x, y \in E$.

b) Sea $T: E \to E$, $x \mapsto T(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$. Probar que T es contractiva y hallar el mínimo λ.

c) Hallar el punto fijo de T.

<u>Solución</u>: b) $T(x) \in E$. Si $x \in E \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} \ge 1 \ \forall x \ge 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 2 \ge 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \ge 0$ ✓ ya que $x \ge 1$
Ver que $\exists\ 0 < \lambda < 1$ tal que $d(T(x), T(y)) \le \lambda\, d(x,y)$
Supongamos por ejemplo $x > y$, $d(T(x), T(y)) = \left|\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{y}\right|$

$= \left| \frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{x\cdot y} \right| = |x-y| \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{x\cdot y} \right| \underset{x>y}{=} (x-y) \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{xy} \right| =$

$= \begin{cases} xy \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{2} \\ xy < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{xy} \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} d(x,y)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right) \leq \alpha d(x,y) \text{ para } \alpha / \\ d(x,y)\left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{2}\right) \leq \alpha\, d(x,y) \ \forall \ldots \end{cases}$

$/ \alpha \geq \frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{2} \leq \alpha < 1\right) \Rightarrow$ Entonces el mínimo α es $\frac{1}{2}$

c) $T(x) = x$, $\frac{x}{2} + \frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 + 2 = 2x^2 \Leftrightarrow \left\{ x = \begin{cases} \boxed{\sqrt{2}} \\ \cancel{-\sqrt{2}} \notin E \end{cases}\right.$

<u>Nota</u>: El T^a de Banach en general no es cierto para operadores $T / d(T(x), T(y)) < d(x,y)$

<u>Ejemplo</u>: Sea $E = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$ con $d(x,y) = |x-y|$.

Definimos el operador $T: E \to E$

$x \to T(x) = x + \frac{1}{x}$

a) Probar que $d(T(x), T(y)) < d(x,y) \quad \forall x \neq y \in E$. (1)

b) Probar que T no tiene punto fijo.

Tomamos $E = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$ espacio métrico completo, donde la métrica es $d(x,y) = |x-y|$

Definimos $T: E \to E$ Veamos que T satisface (1)

$x \mapsto T(x) = x + \frac{1}{x}$

$d(T(x), T(y)) = \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = \left| x - y - \frac{x-y}{xy} \right| = \left| (x-y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) \right|$

$= |x-y| \left| 1 - \frac{1}{xy} \right| = |x-y| \underbrace{\left(1 - \frac{1}{xy}\right)}_{<1} < |x-y| = d(x,y)$

ya que $xy > 1$, $0 < \frac{1}{xy} \leq 1$

T no tiene punto fijo ya que si $T(x) = x$, entonces

$\cancel{x} + \frac{1}{x} = \cancel{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = 0$ Absurdo.

<u>Definición</u> (Norma de un funcional lineal y continuo):

Sobre un espacio normado $(L, \|\cdot\|)$.

Sea $f: L \to \mathbb{R}$ lineal y continuo, entonces f está acotado sobre $B = \{x \in L : \|x\| \leq 1\}$, por tanto $\exists \sup_{x \in B} |f(x)|$ (es un número real ≥ 0)

Por definición de norma de f: $\|f\| = \sup_{x \in B} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$

(Observar que $\|\cdot\|$ es una norma ya que:

a) $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$

b) $\|\alpha f\| = \sup_{x \in B} |(\alpha f)(x)| = \sup_{x \in B} |\alpha f(x)| = |\alpha| \sup_{x \in B} |f(x)| =$

$= |\alpha| \cdot \|f\|$

c) $\|f+g\| = \sup_{x\in B} |(f+g)(x)| = \sup_{x\in B} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in B} (|f(x)|+|g(x)|) \leq$

$\leq \sup_{x\in B} |f(x)| + \sup_{x\in B} |g(x)| = \|f\| + \|g\|$

Se define el <u>espacio dual</u> de L, se denota por L' (L^*) como e.v. de las funciones lineales y continuas sobre L.

Si $f \in L'$, $\|f\| = \sup_{x\in B} |f(x)|$ <u>norma</u> sobre L'.

<u>Proposición 1</u> Si $f \in L'$, entonces $\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$

<u>Demostración</u>: Sea $x\neq 0$, entonces $\frac{x}{\|x\|} \in B$ $\left(\|\frac{x}{\|x\|}\| = \frac{1}{\|x\|}\|x\|=1\right)$

$\Rightarrow \|f\| \geq |f(\frac{x}{\|x\|})| = \frac{1}{\|x\|}|f(x)| = \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ $\forall x\neq 0$. Por tanto

$\|f\| = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ (1)

Supongo que $f\neq 0$ ya que si $f=0$, entonces se tiene la igualdad de forma trivial (demostrado). Si $\|f\| > \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|}$ entonces

$\exists A>0 / \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} < A < \|f\|$. Entonces $\exists x\in B / A \underset{(*)}{\leq} |f(x)| < \|f\|$

Por tanto, $x\neq 0$, $\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} < A \Rightarrow |f(x)| \leq A\|x\| \leq A$
$x\in B$ ($\|x\|\leq 1$)

Contradicción con (*).

Luego $\|f\| = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|}$

<u>Proposición 2</u>: Si $f\in L'$, entonces $|f(x)| \leq \|f\|\,\|x\|$ $\forall x\in L$

<u>Demostración</u>: Si $x=0$, queda demostrado. Supongamos $x\neq 0$, aplicando la prop. 1, se tiene que $\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$

$\sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\| \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|\cdot\|x\|$

<u>Ejercicio</u>: Sea $L = C[a,b]$ (funciones continuas sobre $[a,b]$) con la norma $\|x(t)\| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|$, sea $f: C[a,b] \to \mathbb{R}$
$x(t) \longmapsto f(x(t)) = \int_a^b x(t)dt$

Probar que f es un funcional lineal y continuo y hallar $\|f\|$

<u>Solución</u>: f lineal (Trivial). Veamos que f es continuo: f está acotado en $B = \{x(t)\in C[a,b] : \|x(t)\|\leq 1\}$

Sea $x(t)\in B \Rightarrow |f(x(t))| = \left|\int_a^b x(t)dt\right| \leq \int_a^b |x(t)|dt \leq$

$\leq \sup_{x\in[a,b]} |x(t)| \int_a^b dt = (b-a)\sup_{x\in[a,b]} |x(t)| = (b-a)\|x(t)\| \leq$

$\leq b-a$. Por tanto f está acotado en B, luego f es <u>continuo</u>

Hallar $\|f\| = \sup_{x(t)\in B} |f(x(t))|$. Por (1) tomamos que $\sup_{x(t)\in B} |f(x(t))| =$

$= \|f\| \leq b-a$. Si $\exists\ x_0(t) \in B \,/\, |f(x_0(t))| = b-a$ entonces quedaría probado que $\|f\| = b-a$ ($\underbrace{\sup |f(x(t))|}_{\|f\|} \geq b-a$). Basta tomar $x_0(t) = 1\ \forall t \in [a,b]$, entonces $|f(x_0(t))| = \left|\int_a^b x_0(t)dt\right| =$

$= \left|\int_a^b dt\right| = b-a$. Por lo tanto, $\|f\| = b-a$

Ejemplo: Definimos en $C[a,b]$ la norma $\|x(t)\|_1 =$

$= \int_a^b |x(t)|\,dt$ (comprobar que es una norma).

a) ¿Sigue siendo f un funcional lineal y continuo?

b) Si es así, calcular $\|f\|_1$.

Solución: Veamos que f es funcional lineal (trivial) y continuo por la $\|\cdot\|_1$.

Sea $x(t) \in B$ (para la norma $\|\cdot\|_1$), entonces $|f(x(t))| =$

$= \left|\int_a^b x(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |x(t)|\,dt \ (1) = \|x(t)\|_1 \leq 1$. Por tanto f está acotado en B (para $\|\cdot\|_1$), luego f es un funcional lineal y continuo para $\|\cdot\|_1$. Vamos a calcular $\|f\|_1 \underset{\text{por def}}{=} \sup_{x(t)\in B\ (\text{norma } \|\cdot\|_1)} |f(x(t))|$

Por (1) $\sup_{x(t)\in B(\|\cdot\|_1)} |f(x(t))| \leq 1$. Entonces $\|f\|_1 \leq 1$. Veamos que $\exists\ x_0(t) \in B\ (\|\cdot\|_1) \,/\, |f(x_0(t))| = 1$

Tomamos $x_0(t) = \dfrac{1}{b-a}\ \forall t \in [a,b]$. Entonces se tiene $|f(x_0(t))| =$

$= \left|\int_a^b \dfrac{1}{b-a}\,dt\right| = \dfrac{1}{b-a}(b-a) = 1$. Por tanto, $\|f\|_1 = 1$

Definición: Un espacio normado $(L, \|\cdot\|)$ se dice estrictamente normado $\Leftrightarrow \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists\ \lambda > 0 \,/\, y = \lambda x$, $x \neq y$, $x, y \neq 0$

Ejemplo: l_1 no es estrictamente normado para la norma $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$

tomamos $\left.\begin{array}{l} x = (1,0,\dots) \\ y = (0,1,0,\dots) \end{array}\right\}$ $x \neq y$; x y $\neq 0$; $x, y \in l_1$. Se tiene que $\|x+y\| = \|(1,1,0,\dots)\| = 1+1 = 2 = \|x\| + \|y\| = 1+1$

pero $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, se tiene $y \neq \lambda x$. $y = \lambda x \Leftrightarrow (0,1,0,\dots) =$

$= \lambda(1,0,\dots) \Leftrightarrow 0 = \lambda \Rightarrow$ Absurdo

Ejercicio: Probar que l_2 con la norma $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2\right)^{1/2}$ es estrictamente normado.

Solución: "$\Leftarrow$" Si $y = \lambda x \Rightarrow x + y = x + \lambda x = (1+\lambda)x \Rightarrow \|x+y\| =$
$= \|(1+\lambda)x\| = |1+\lambda| \, \|x\| = (1+\lambda)\|x\| = \|x\| + \lambda\|x\| = \|x\| +$
$+ \|\lambda x\| = \|x\| + \|y\|$. (válido en cualquier espacio normado).

"$\Rightarrow$" Supongamos que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 +$
$+ 2\|x\| \cdot \|y\|$ (1). En l_2 hay definido un producto escalar $\langle x, y\rangle =$
$= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ $(x, y \in l_2)$. El p.e. (prod. escalar) está bien definido:

$\sum x_n y_n = \frac{1}{2}\sum 2x_n y_n \leq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2 + y_n^2)$ $(2x_n y_n \leq x_n^2 + y_n^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 0 \leq (x_n - y_n)^2) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2 < \infty$

$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Observar que $\langle x, x\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \|x\|^2$. Por otra parte:
$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle +$
$+ \|y\|^2 \Rightarrow \cancel{\|x\|^2} + 2\langle x, y\rangle + \cancel{\|y\|^2} = \cancel{\|x\|^2} + 2\|x\|\|y\| + \cancel{\|y\|^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\|$ (2)

Por reducción al absurdo: Supongamos que $y \neq \lambda x$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Entonces $y - \lambda x \neq 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, luego $\|y - \lambda x\|^2 > 0$ pero
$\|y - \lambda x\|^2 = \langle y - \lambda x, y - \lambda x\rangle = \langle y, y\rangle - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle x, x\rangle =$
$= \|y\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|x\|^2 \underset{(2)}{=} \|y\|^2 - 2\lambda\|x\| \cdot \|y\| + \lambda^2\|x\|^2 > 0$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\|x\| = A > 0$; $\|y\| = B > 0$

$\underbrace{B^2 - 2AB\lambda + \lambda^2 A^2}_{\text{parábola en } \mathbb{R}^2} > 0 \Leftrightarrow (AB)^2 - A^2B^2 < 0$ Absurdo.

el discriminante tiene que ser menor que 0 para no tener puntos de corte

Por tanto, $\exists \lambda \in \mathbb{R} / y = \lambda x$. Veamos que $\lambda > 0$, si $\lambda = 0$, entonces
$y = 0x = 0$ Absurdo $x, y \neq 0$.

Si $\lambda < 0$, entonces se tiene: $\|x+y\| = \|x + \lambda x\| = \|(1+\lambda)x\| =$
$= |1+\lambda| \cdot \|x\| = \|x\| + \|y\| = \|x\| + \|\lambda x\| = \|x\| + |\lambda| \cdot \|x\|$

Como $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$: dividiendo por $\|x\|$ queda: $|1+\lambda| =$
$= 1 + |\lambda| = 1 - \lambda$ Absurdo, $\lambda \in [-1, 0) / \lambda \in (-\infty, -1)$

Teorema (de Hahn-Banach para espacios normados):

Caso Real: Sea $(L, \|\cdot\|)$ un espacio normado real y L_0 un subespacio vectorial de L. Sea $f_0: L_0 \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo. Entonces existe un funcional lineal, continuo $f: L \to \mathbb{R}$ /
$f(x) = f_0(x)$ $\forall x \in L_0$ y $\|f\|_L = \|f_0\|_{L_0}$

Demostración: Si $f_0 \equiv 0$, entonces tomamos $f \equiv 0$ y se cumple trivialmente el Tª de Hahn-Banach para normados. Por tanto, supongamos que $f_0 \not\equiv 0$, luego $\exists x_0 \in L_0 / f_0(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists x_0 \neq 0$ (por ser f_0 lineal). Definimos el subespacio vectorial $\{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Como $x_0 \in L_0 \Rightarrow \{\lambda x_0 : \lambda \in \mathbb{R}\} \subset L_0$. Entonces $\|f_0\|_{L_0} = \sup \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} > 0$ ya que $\sup \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f_0(x_0)|}{\|x_0\|} > 0$. Definimos un funcional convexo:

$p : L \to \mathbb{R}^+$

$x \longmapsto p(x) = \|f_0\|_{L_0} \cdot \|x\|$, veamos que p es un funcional convexo y finito.

a) $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in L$ ya que $\|f_0\|_{L_0} \|x\| \geq 0$

b) $p(x+y) = \|f_0\|_{L_0} \cdot \|x+y\| \leq \underbrace{\|f_0\|_{L_0}}_{\geq 0} (\|x\| + \|y\|) = \|f_0\|_{L_0} \cdot \|x\| + \|f_0\|_{L_0} \cdot \|y\| = p(x) + p(y)$

c) $p(\alpha x) = \|f_0\|_{L_0} \cdot \|\alpha x\| = \|f_0\|_{L_0} \cdot |\alpha| \cdot \|x\| \overset{*}{=} \alpha \cdot \|f_0\|_{L_0} \|x\| = \alpha p(x) \quad \forall \alpha \geq 0$

d) $p(x)$ es finito (por la propia definición)

Como $f_0 : L_0 \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal y continuo $\Rightarrow |f_0(x)| \leq \|f_0\|_{L_0} \cdot \|x\| \quad \forall x \in L_0$, luego $|f_0(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in L_0$. Puesto que $f_0(x) \leq |f_0(x)|$, se tiene que $f_0(x) \leq p(x) \quad \forall x \in L_0$

Aplicando el Tª de Hahn-Banach (para espacios vectoriales), $\exists f : L \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $f(x) = f_0(x) \quad \forall x \in L_0$ y $f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in L$. Veamos que f es continua y luego que $\|f\|_L = \|f_0\|_{L_0}$. Sea $x \in L$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} a)\ f(x) \geq 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x) \leq p(x) = \|f_0\|_{L_0} \cdot \|x\| \\ b)\ f(x) < 0 \Rightarrow |f(x)| = -f(x) = f(-x) \leq p(-x) = \\ \quad = \|f_0\|_{L_0} \cdot \|-x\| = \|f_0\|_{L_0} \cdot \|x\| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |f(x)| \leq \|f_0\|_{L_0} \cdot \|x\| \quad \forall x \in L$

Si $\|x\| \leq 1$ ($\Leftrightarrow x \in B$: bola unidad de L) $\Rightarrow |f(x)| \leq \|f_0\|_{L_0} \Rightarrow f$ está acotada en $B \Rightarrow f$ es continua. Además como $|f(x)| \leq \|f_0\|_{L_0} \quad \forall x \in B$ $\Rightarrow \underbrace{\sup |f(x)|}_{\text{def } \|f\|_L} \leq \|f_0\|_{L_0}$. Por tanto $\|f\|_L \leq \|f_0\|_L$.

Sea $x \in L_0$, $x \neq 0$ entonces $f(x) = f_0(x) \Rightarrow |f(x)| = |f_0(x)| \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|_L$ (recordar que $\|f\|_L = \sup \frac{|f(y)|}{\|y\|}$)

Entonces $\sup\limits_{\substack{x \neq 0 \\ x \in L_0}} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|} \leq \|f\|_L \Rightarrow \|f_0\|_{L_0} \leq \|f\|_L$. En consecuencia $\|f\|_L = \|f_0\|_{L_0}$ como queríamos demostrar.

Versión compleja: Igual, es decir, $p(x) = \|f_0\|_{L_0} \|x\| \quad \forall x \in L$
Tenemos que $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. En efecto, $p(\lambda x) = \|f_0\|_{L_0} \cdot \|\lambda x\| = \|f_0\|_{L_0} \cdot |\lambda| \cdot \|x\| = |\lambda| \, p(x)$. Por hipótesis (Tª de Hahn-Banach complejo): $|f_0(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in L_0$. Aplicando el Tª de Hahn-Banach para e.v. complejos, $\exists f: L \to \mathbb{C}$ lineal tal que $f(x) = f_0(x) \quad \forall x \in L_0$ y $|f(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in L$. Análogamente se demuestra (como en el caso real) que f es continua y $\|f\|_L = \|f_0\|_{L_0}$

Definición: Un espacio normado $(L, \|\cdot\|)$ tiene la propiedad de tener un número suficientemente grande de funcionales lineales y continuos si $\forall x \neq y \ \exists$ un funcional lineal y continuo $f \,/\, f(x) \neq f(y)$

Nota: Esta propiedad es equivalente a decir que $\forall x_0 \neq 0 \ \exists$ funcional lineal y continuo tal que $f(x_0) \neq 0$.

Sea por ejemplo $(L, \|\cdot\|)$ un e.v. normado con $L \neq 0$. Si $x_0 \neq 0$, definimos $L_0 = \{\lambda x_0 \,/\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ subespacio de L. Por ejemplo

$$f_0 : L_0 \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_0(x) = \lambda \quad \text{donde } x = \lambda x_0$$

Entonces f_0 lineal: $f_0(x+y) = \lambda_1 + \lambda_2 = f_0(x) + f_0(y)$
$f_0(\alpha x) = \alpha \lambda = \alpha f_0(x)$ con $\left.\begin{array}{l} x = \lambda_1 x_0 \\ y = \lambda_2 x_0 \end{array}\right\} x+y = (\lambda_1+\lambda_2) x_0$

y es continua por ser L_0 un e.v. normado de dim finita ($\dim L_0 = 1$).
Aplicando el Tª de Hahn-Banach para espacios normados, $\exists f: L \to \mathbb{R}$ lineal y continuo $/ f(x) = f_0(x) \quad \forall x \in L_0$ y $\|f\|_L = \|f_0\|_{L_0}$
Pero $\underset{x_0 \in L_0}{x_0 = 1 \cdot x_0}$, luego $f(x_0) = f_0(x_0) = 1 \neq 0$

Sea $x_1 \neq x_2$, con $x_1 \in L_0$. Hemos visto que $\exists f: L \to \mathbb{R}$ lineal y continuo tal que $f(x_0) \neq 0$.
Análogamente $\exists g: L \to \mathbb{R}$ lineal y continua $/ g(x_1) = 1 \neq 0$ pero $f \neq g$ ya que $f(x_1) \neq 1 = g(x_1)$ porque $x_1 = \lambda x_0$ con $\lambda \neq 1$, luego $f(x_1) = \lambda \neq 1$.

Teorema: Sea $(L, \|\cdot\|)$ un e.v arbitrario. Entonces $(L', \|\cdot\|)$ (L' espacio dual de los funcionales lineales y continuos) donde $\|f\| = \sup_{x \in B} |f(x)|$, $f \in L'$ / es un espacio de Banach.

Demostración: Sea $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy en L'. Sea $x \in L$, entonces $|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| \to 0$ si $n, m \to \infty$ por ser $(f_n)_n$ sucesión de Cauchy. Entonces

$(f_n(x))_n^{\infty}$ sucesión de números reales es de Cauchy. Por tanto, es convergente, es decir, existe $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Por tanto, definimos un funcional $f \,/\, f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Tenemos que probar que f es lineal, continuo y que $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$.

a) f es lineal: $\cdot\, f(x+y) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x+y) = \lim_{n\to+\infty}(f_n(x)+f_n(y)) =$
$= \lim_{n\to+\infty} f_n(x) + \lim_{n\to+\infty} f_n(y) = f(x)+f(y)$.

$\cdot\, f(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lambda f(x)$

b) f es continua: Por ser $(f_n)_n$ una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon = 1$, $\exists\, n_0$ tal que $\|f_{n+p} - f_n\| \leq 1 \quad \forall n \geq n_0$ y $\forall p = 1, 2, \ldots$

Tomamos $n = n_0$, entonces $\|f_{n_0+p}\| \leq \|f_{n_0+p} - f_{n_0}\| + \|f_{n_0}\| \leq$
$\leq 1 + \|f_{n_0}\| \quad \forall p \geq 1$. Por tanto $|f_{n_0+p}(x)| \leq \|f_{n_0+p}\| \cdot \|x\| \leq$
$\leq (1 + \|f_{n_0}\|)\, \|x\|$. Tomamos lím cuando $p \to +\infty$.

$\lim_{p\to\infty} |f_{n_0+p}(x)| = |f(x)| \leq (1+\|f_{n_0}\|)\, \|x\|$. En particular, si $x \in B$ (bola unidad) $\Rightarrow |f(x)| \leq (1+\|f_{n_0}\|)\ \forall x \in B$. Por tanto f está acotada en B, luego f es continua.

c) $\lim_{n\to\infty} f_n = f \iff \|f_n - f\| \to 0$ si $n \to \infty \iff$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tal que $\|f_n - f\| < \varepsilon$ si $n > n_0$.

Por ser $(f_n)_n$ de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ tal que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon/4$ $\forall n, m > n_0$. Determinamos $l > n_0$ tal que $\|f_l - f\| > \varepsilon/4$ (en caso contrario queda demostrado que $\lim f_n = f$)

Entonces

$0 \qquad \|f_l - f\| - \frac{\varepsilon}{4} \qquad \|f_l - f\|$

existe $x \in B$ tal que
$\|f_l - f\| - \frac{\varepsilon}{4} < |(f_l - f)(x)| \leq \|f_l - f\|$ (por ser $\|f_l - f\| = \sup_{x\in B} |(f_l - f)(x)|$.) Por tanto $\|f_l - f\| < |(f_l - f)(x)| + \varepsilon/4$

Determinamos $n > n_0$ y $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/4$ (por ser $\lim f_n(x) = f(x)$)

Entonces $\|f_n - f\| \leq \|f_n - f_l\| + \|f_l - f\| \leq \|f_n - f_l\| + |(f_l - f)(x)| + \varepsilon/4$
$\leq \underbrace{\|f_n - f_l\|}_{<\varepsilon/4,\ n,l > n_0} + |(f_l - f_n)(x)| + |(f_n - f)(x)| + \varepsilon/4 <$

$< \varepsilon/4 + \underbrace{\|f_l - f_n\|}_{\substack{\text{menor que } \varepsilon/4 \\ l,n > n_0}} + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon$

Definición: Sean $(L, \|\cdot\|_1)$ y $(M, \|\cdot\|_2)$ dos espacios normados. Diremos que son isomorfas isométricamente $\Leftrightarrow$ $\exists\, \varphi : L \to M$ / φ: isomorfismo (e.v.) y φ es isometría: $\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_2 = \|x-y\|_1$

Ejemplos (de espacios duales)

1) $(\mathbb{R}^n)' \underset{\cong}{=} \mathbb{R}^n$ son isomorfos isométricamente

Prueba: $f \in (\mathbb{R}^n)' \Rightarrow f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica. Entonces si $x \in \mathbb{R}^n$ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Entonces $f(x) \overset{\text{lineal}}{=}$ $= \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$. Por tanto, f queda definida si dado el vector $a = (f(e_i))_{i=1}^{n}$. En consecuencia $\boxed{f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i}$ donde $a_i = f(e_i)$ $i = 1, 2, \dots, n$

Entonces definimos $\varphi : (\mathbb{R}^n)' \to \mathbb{R}^n$

$$f \longmapsto \varphi(f) = a = (f(e_i))_{i=1}^{n}$$

Entonces φ es inyectiva (si $f \neq g \Rightarrow \varphi(f) \neq \varphi(g)$ $\forall f, g \in (\mathbb{R}^n)'$)

φ lineal ya que $\varphi(f+g) = ((f+g)(e_i))_i = (f(e_i) + g(e_i))_i =$ $= (f(e_i))_{i=1}^{n} + (g(e_i))_{i=1}^{n} = \varphi(f) + \varphi(g)$, análogamente $\varphi(\lambda f) =$ $= \lambda\, \varphi(f)$.

φ suprayectiva. Dado $a = (a_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n$ veamos que $\exists\, f_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineal y continua. En efecto, definimos $f_a(e_i) = a_i$ $\forall i = 1, \dots, n$ y $f_a(x) = \sum x_i a_i = \sum x_i f_a(e_i)$. Entonces f_a es lineal y $\varphi(f_a) =$ $= a$. Además f_a es continua por ser lineal en $\mathbb{R}^n$ que es de dim finita, luego $f_a \in (\mathbb{R}^n)'$. Entonces φ es un isomorfismo entre e.v.

Veamos que φ es una isometría: $\|\varphi(f) - \varphi(g)\| = \|f - g\|$

En efecto $\|\underset{a_f}{\varphi(f)} - \underset{a_g}{\varphi(g)}\| = \|a_f - a_g\| =$ $\left(a_f = (f(e_i))_{i=1}^{n},\ a_g = (g(e_i))_{i=1}^{n}\right)$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} (f(e_i) - g(e_i))^2\right)^{1/2} = \left(\sum ((f-g)(e_i))^2\right)^{1/2} \leq \|f-g\|$ ya que $e_i \in B$. Análogamente veríamos que $\|f - g\| \leq \|a_f - a_g\|$

2) Probar que $(c_0)' = l_1$, $c_0 = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} / \lim x_n = 0\}$ y $l_1 = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} / \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$ con las normas $\|x\|_0 = \sup_n |x_n|$ y $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$

Fijamos un vector $a=(a_n)\in l_1$ y definimos $\varphi:(c_0)'\to l_1$, $\varphi(x)=\sum_{n=1} x_n \cdot a_n$ (Sabemos que $\sum|a_n|<\infty$). Veamos que φ está bien definida. Demostremos que $\sum x_n a_n$ converge:
En efecto: $\sum|x_n a_n| = \sum|x_n|\cdot|a_n| \leq M \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < \infty$ donde $M=\sup_n|x_n|$ (1)

f lineal: a) $\underset{x,y\in c_0}{f(x+y)} = \sum_{n=1}^{\infty}(x_n+y_n)a_n = \sum_n(\underbrace{x_n a_n}_{conv} + \underbrace{y_n\cdot a_n}_{conv}) =$
$= \sum x_n a_n + \sum y_n a_n = f(x)+f(y)$
b) $\underset{\lambda\in\mathbb{R}}{f(\lambda x)} = \sum \lambda x_n a_n = \lambda\sum x_n a_n = \lambda\cdot f(x)$

f continua: Sea $x\in c_0 / x\in B_{c_0} = \{x\in c_0 : \|x\|_0\leq 1\}$
Por (1), se tiene $|f(x)| = |\sum a_n x_n| \leq \sum|a_n x_n| \leq M\cdot\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| =$
$=\|x\|_0\,\|a\|_1 \leq \|a\|_1$, luego f está acotada en la bola unidad.

Definimos $\psi: l_1 \to (c_0)'$
$a \longmapsto \psi(a)=f$ donde $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$ donde $a=(a_n)_{n=1}^{\infty}$

ψ lineal: (trivial)
ψ inyectiva (trivial)
ψ sobreyectiva: Sea $f\in(c_0)'$, definimos el vector $a=(f(e_i))_{i=1}^{\infty}$ donde $e_1=(1,0,\dots)$, $e_2=(0,1,0,\dots),\dots$, $e_n=(0,\dots,\underset{(n)}{1},0,\dots)$. Entonces $e_i\in c_0$ y además $\|e_i\|_0=1$ $\forall i=1,\dots$ Veamos que $a=(f(e_i))_{i=1}^{\infty}\in l_1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| =$
$=\sum_{i=1}^{\infty}|f(e_i)|<\infty$

(Se ha saltado pasos, no lo acaba de demostrar).
$(c_0)'=l_1$. Consecuencia: l_1 con la norma supremo es un espacio de Banach (T^a anterior)

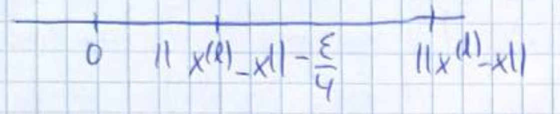
<u>Teorema</u>: c_0 es un espacio de Banach.
<u>Demostración</u>: En primer lugar demostremos que $C=\{x=(x_n)_{n=1}^{\infty} / \exists \lim x_n\}$ con la norma sup. $\|x\|=\sup_n|x_n|$ es un espacio de Banach. Sea $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en C, veamos que converge.

Ponemos
$$x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}, \dots)$$
$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}, \dots)$$
$$\begin{array}{ccc} \downarrow \text{conv} & \downarrow \text{conv} & \downarrow \text{converge} \\ x_1 & x_2 & x_n \end{array}$$

Consideramos una columna arbitraria: $x_l^{(1)}, x_l^{(2)}, \ldots, x_l^{(n)}, \ldots$ tiene límite. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \,/\, \|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon \ \forall\, n, m > n_0$ por ser $x^{(n)}$ de Cauchy. Entonces $|x_l^{(n)} - x_l^{(m)}| \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\| < \varepsilon \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ la sucesión $(x_l^{(1)}, x_l^{(2)}, \ldots, x_l^{(n)}, \ldots)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, luego $\exists \lim_{n \to +\infty} x_l^{(n)} = x_l$

Definimos $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ y veamos que $\|x^{(n)} - x\| < \varepsilon$ $\forall n > n_0$

Determinamos $l > n_0$ tal que $\|x^{(l)} - x\| > \varepsilon/4$ (en caso contrario, queda demostrado).



Como $\|\cdot\|$ es el supremo, existe un k tal que $|x_k^{(l)} - x_k| > \|x^{(l)} - x\| - \frac{\varepsilon}{4}$
$\Rightarrow \|x^{(l)} - x\| < |x_k^{(l)} - x_k| + \frac{\varepsilon}{4}$

Como $\lim_{n \to +\infty} x_k^{(n)} = x_k$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, m > n_0 \,/\, |x_k^{(m)} - x_k| < \frac{\varepsilon}{4}$

Entonces $\|x^{(n)} - x\|_{n > n_0} \leq \underbrace{\|x^{(n)} - x^{(l)}\|}_{\text{menor que } \varepsilon/4 \ n, l > n_0} + \|x^{(l)} - x\| < \frac{\varepsilon}{4} + |x_k^{(l)} - x_k| + \frac{\varepsilon}{4} \leq$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + |x_k^{(l)} - x_k^{(m)}| + |x_k^{(m)} - x_k| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \|x^{(l)} - x^{(m)}\| + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$

Definimos la función $f : C \to \mathbb{R}$
$x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \to f(x) = \lim x_n$

Entonces: f lineal: a) $f(x+y) = \lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n =$ ($y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$)
$= f(x) + f(y)$
b) $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$ (Trivial)

f es continua ya que si $x \in C$, es tal que $x \in B$ (bola unidad) se tiene:
$|f(x)| = |\lim x_n| \leq 1 \quad \forall x \in B$, luego f está acotado en $B \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ continua.

Demostramos que f lineal es continua $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f$ es un cerrado.
Por tanto $\operatorname{Ker} f = \{x \in C \,/\, f(x) = \lim x_n = 0\} = c_0$ es un cerrado en c. Como c es completo, c_0 también lo es, luego
<u>c_0 es un espacio de Banach.</u>

<u>Teorema</u>: $(l_1)' = m$ el espacio de las sucesiones acotadas ($m = l_\infty = l^\infty$)

<u>Teorema</u>: Si $p > 1$, entonces $(l_p)' = l_q$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

<u>Corolario</u>: l_2 es un espacio de Banach ya que $(l_2)' = l_2$

<u>Corolario</u>: Todos los l_p $\forall p > 1$ son espacios de Banach:
Dado $p > 1$, $\exists\, q \,/\, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow (l_q)' = l_p \Rightarrow l_p$ es un espacio de Banach

Corolario: $C[a,b]$ es el espacio de las funciones continuas, es un espacio de Banach para la $\|\cdot\|$ supremo.

Ejemplo: en $C[-1,1]$ definimos las normas: $\|f\|_1 = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|$ y $\|f\|_2 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt$. Sean T_1 y T_2 las topologías en $C[-1,1]$ definidas por $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ respectivamente.

a) Si $(f_n)_n$ converge en T_1, ¿converge en T_2?

b) Si $(f_n)_n$ converge en T_2, ¿converge en T_1?

c) Definimos $g_n(t) = \frac{\cos(nt)}{n\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \ldots$ ¿Converge $\sum g_n$ para T_1 o T_2? ¿Converge $\sum \|g_n\|_1$, $\sum \|g_n\|_2$?

a) $\|f\|_2 = \int_{-1}^{1} |f(t)|\,dt \leq \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)| \cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} dt}_{2} = 2\cdot\|f\|_1$ (1)

Si $(f_n) \xrightarrow{T_1} f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_1 \to 0$ si $n \to +\infty$. Por (1) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \|f_n - f\|_2 \to 0$ si $n \to +\infty$

b) No. Definimos $f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\in[-1,0] \\ t^n & \text{si } t\in[0,1] \end{cases}$

Veamos que $(f_n) \xrightarrow{T_2} f$ pero $(f_n) \not\xrightarrow{T_1} f$

luego $f_n \xrightarrow{T_2} f = 0$

$\|f_n\|_2 = \int_{-1}^{1} f_n(t)\,dt = \cancel{\int_{-1}^{0} 0}^{\,0} + \int_0^1 t^n\,dt = \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0$ si $n\to\infty$

Si $\|f_n - f\|_1 \to 0$. Entonces como $|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\| \Rightarrow$
$\Rightarrow f_n(t) \to f(t)$

si $\exists f \,/\, \lim f_n \overset{T_1}{=} f$. Se tendría: $t\in[-1,0] \Rightarrow f(t) = 0$. Si $t\in(0,1) \Rightarrow \lim_n f_n(t) = \lim_n t^n = 0$

Finalmente si $t = 1$, $\lim f_n(t) = \lim 1 = 1$. Por tanto

$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t\in[-1,1) \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases} \Rightarrow f$ no es continua

c) $\|g_n(t)\|_1 \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$

$\sum \|g_n(t)\|_1 \leq \sum \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum \frac{1}{n^{3/2}} < \infty \overset{\text{Banach}}{\Rightarrow} \sum g_n(t)$ converge en T_1

$\|g_n(t)\|_2 = \int_{-1}^{1} \frac{|\cos nt|}{n\sqrt{n}} \leq \left(\int_{-1}^{1} dt\right)\cdot\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{n\sqrt{n}} \Rightarrow \sum \|g_n(t)\|_2 \leq 2\sum \frac{1}{n^{3/2}}$

$< \infty \Rightarrow \sum g_n(t)$ converge en l_2

<u>Observaciones / Ejercicios</u> (cosas que se quedaron pendientes):

$(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$

$f \in (\mathbb{R}^n)'$ lineal y continua

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. A cada f le asociamos un vector

$a = (f(e_i))_{i=1}^n$. Entonces quedaba definida

$\varphi: (\mathbb{R}_n)' \longrightarrow \mathbb{R}$

$f \longmapsto \varphi(f) = a$ $\quad f(x) = \sum a_i x_i \quad x = \sum x_i e_i$

$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x-y\|$ (φ isometría $\Leftrightarrow \|\varphi(z)\| = \|z\|$
(basta tomar $z = x-y$))

Como $\varphi(f) = a$, luego hay que probar que $\|a\| = \|f\|$

($\|a\| = \left(\sum_{i=1}^n (f(e_i))^2\right)^{1/2}$; $\|f\| = \sup_{x \in B \text{ (bola unidad de } \mathbb{R}^n)} |f(x)| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$)

$|f(x)| = |\sum x_i a_i| \leq \sum |x_i| \cdot |a_i| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum |a_i|^2\right)^{1/2} =$

$= \|x\| \, \|a\|$ (si $\|x\| \leq 1 \Leftrightarrow x \in B$)

$\left.\begin{array}{l} x = \sum x_i e_i \\ a = (f(e_i))_{i=1}^n \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x)| \leq \|a\| \Rightarrow \sup |f(x)| \leq \|a\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f\| \leq \|a\|$

Tomamos $x = a$, entonces $f(a) = \sum_{i=1}^n a_i a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 = \|a\|^2$ (si $a=0 \Rightarrow f=0$
trivialmente $\|a\| = \|f\|$). Supongamos que $a \neq 0$.

Entonces $f(a) = \|a\|^2 > 0$, luego $f(x) = |f(a)|$ y entonces

$\frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\|$, $\sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(a)|}{\|a\|} = \|a\| \Rightarrow \|f\| \geq \|a\|$.

Por tanto $\|f\| = \|a\|$

• $\boxed{c_0' = l_1}$ $\quad (c_0' \approx l_1)$

Dado un vector $a \in l_1$, definimos $f: c_0 \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sum_{n=1}^\infty x_n a_n$, f está bien definida, f es lineal y continua

Entonces podemos definir $\varphi: l_1 \to c_0'$

$a \longmapsto f \;/\; f(x) = \sum x_n a_n$ $\quad \to \varphi$ inyectiva, $\to \varphi$ suprayectiva

• φ suprayectiva:

Dado $f \in c_0'$, veamos que $\exists\, a \in l_1 \;/\; \varphi(a) = f$

Definimos $a = (f(e_i))_{i=1}^\infty$ donde $e_i = (0, \ldots, \overset{i}{1}, 0, \ldots)$

Tenemos que probar que $a \in l_1$ $\left(\sum_{i=1}^\infty |f(e_i)| < \infty\right)$. En efecto

Sea $a^{(m)} = (a_1^{(m)}, \dots, a_m^{(m)}, \dots)$

donde $a_i^{(m)} = \begin{cases} 0 & \text{si } f(e_i)=0 \\ \frac{f(e_i)}{|f(e_i)|} & \text{si } f(e_i) \neq 0 \end{cases}$

(si $a=0 \Rightarrow f(e_i)=0$ demostrado ya que $\varphi(0)=0$ y queda demostrado).

Cada $a^{(m)} \in c_0$ $\forall m$ y $\|a^{(m)}\|_{c_0} = 1$ $\forall m$ ya que $\|a^{(m)}\|_{c_0} = \sup |a_i^{(m)}| = 1$ $i=1,\dots,\infty$

Entonces $f(a^{(m)}) = f\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} e_i\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i^{(m)} f(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{f(e_i)}{|f(e_i)|} f(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{|f(e_i)|^2}{|f(e_i)|} = \sum^{m} \frac{|f(e_i)|^2}{|f(e_i)|} = \sum |f(e_i)| > 0$ $\forall m$ $f(e_i) \neq 0$ para algún i

$\Rightarrow f(a^{(m)}) = |f(a^{(m)})| \underset{f \text{ lineal y continua}}{\leq} \|f\| \cdot \|a^{(m)}\| = \|f\|$, pero

$|f(a^{(m)})| = \sum_{i=1}^{m} |f(e_i)|$ luego $\sum_{i=1}^{m} |f(e_i)| \leq \|f\|$ $\forall m$

$\Rightarrow \sum |f(e_i)| \leq \|f\| \Rightarrow a = (f(e_i))_{i=1}^{\infty} \in \ell_1$. Veamos que $\varphi(a) = f \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m a_m$. Dado $x = (x_1, \dots, x_m, \dots) \in c_0$

Definimos para m

$x^{(m)} = (x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots) \in c_0$ $\forall m$

Además $x^{(m)} \xrightarrow{c_0} x$ (Trivial $\|x - x^{(m)}\| \to 0$ cuando $m \to \infty$)

Como f es continua $\Rightarrow f(x^{(m)}) \to f(x)$. Para $f(x^{(m)}) =$
$= f\left(\sum^{m} x_i e_i\right) = \sum^{m} x_i f(e_i) = \sum x_i a_i \to f(x)$, pero $\sum x_i a_i \xrightarrow{m \to \infty} \sum x_i a_i$

luego $f(x) = \sum x_i a_i \Leftrightarrow \varphi(a) = f$

φ isometría $\Leftrightarrow \|f(a)\| = \|a\|$ $\forall a \in \ell_1 \Leftrightarrow \|f\| = \|a\|$ donde
$\|f\| = \sup_{x \in B} |f(x)|$ y $\|a\| = \sum |a_i|$

$\|a\|_{\ell_1} = \sum |a_i| = \sum |f(e_i)| \leq \|f\| \Rightarrow \|a\| \leq \|f\|$

Como $f(x) = \sum x_m a_m$, se tiene que $|f(x)| = |\sum \_| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \cdot |a_n|$

(si $x \in B \Leftrightarrow \underset{\sup |x_i|}{\|x\|} \leq 1 \Rightarrow |x_i| \leq 1$)

luego $\sup_{x \in B} |f(x)| \leq |a| \Rightarrow \|f\| \leq \|a\| \Rightarrow \|f\| = \|a\| \Rightarrow \varphi$ isometría.

<u>Ejercicio</u>: Sea $C^1[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas diferenciables en $[a,b]\}$

Definimos:

$\|x(t)\|_1 = |x(a)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)|$

$\|x(t)\|_2 = \max |x(t)| + \max |x'(t)|$ Demostrar que son equiv

$\|x(t)\|_1 \le a\|x(t)\|_2 \le b\cdot\|x(t)\|_1 \quad \forall x(t), a,b>0$

$\|x(t)\|_1 = |x(a)| + \max|x'(t)| \le \max|x(t)| + \max|x'(t)| = \|x(t)\|_2$

$\|x(t)\|_2 = \max|x(t)| + \max|x'(t)| = |x(t_0)| + \max|x'(t)| =$ $\quad t_0\in[a,b]$

$= |x(t_0) - x(a) + x(a)| + \max|x'(t)| \le |x(t_0)-x(a)| + |x(a)| +$

$+ \max|x'(t)| =$ (T.V.M) $(\exists u\in[a,t_0] / x'(u) = [x(t_0)-x(a)](t_0-a))$

$= |x'(u)(t_0-a)| + |x(a)| + \max|x'(t)| =$

$= |x'(u)|(t_0-a) + |x(a)| + \max|x'(t)| \le$ $\quad (t_0-a\le b-a)$

$\le (t_0-a)\max_{t\in[a,t_0]}|x'(t)| + |x(a)| + \max|x'(t)| =$

$\le (b-a)\max|x'(t)| + |x(a)| + \max|x'(t)| = \max|x'(t)|(1+b-a)$

$+ |x(a)| \le (1+b-a\ge 1) \le (1+b-a)\max|x'(t)| + (1+b-a)|x(a)|$

$= (1+b-a)\|x(t)\|_1$ ✓

Ejercicio: Sea P el espacio de los polinomios sobre $[0,1]$

definimos $\|p(t)\|_1 = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$

$(p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n)$

$\|p(t)\|_2 = \sup_{t\in[0,1]} |p(t)|$

$\|p(t)\|_2 = \sup_{t\in[0,1]}|p(t)| = \sup_{t\in[0,1]} |a_0 + a_1 + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n| \le$

$\le \sup_{t\in[0,1]} |a_0| + |a_1 t| + \dots + |a_n t^n| \le |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n| = \|p(t)\|_1$

$\|p(t)\|_1$ Supongo que $\exists a>0 / \|p(t)\|_1 \le a\|p(t)\|_2$

$p_1(t) = 1$

$p_2(t) = 1 - \frac{1}{2}t$

$p_3(t) = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2$

$\vdots$

$p_n(t) = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n+1}$

tenemos que $\|p_n(t)\|_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \to \infty$ si $n\to\infty$

$\|p_n(t)\|_2 = \sup_{t\in[0,1]} |1 - \frac{1}{2}t + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n+1}| = 1 \quad \forall n$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \le a$ ya que $\sum \frac{1}{k} \to \infty$ si $n\to+\infty$ # (Supongo

Se considera $P[-1,1]$ el subespacio de los polinomios sobre $[-1,1]$ como subespacio de $C[-1,1]$ (funciones continuas sobre $[-1,1]$ con la norma supremo, $\|x(t)\| = \sup_{t\in[-1,1]} |x(t)|$).
Dado el funcional $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(p(t)) = p'(1)$ $t\in[-1,1]$, ¿se puede aplicar H-B para espacio normado al funcional f?

No. f lineal, pero no continua para la norma supremo.
Si f fuese continua $\Rightarrow$ f estaría acotado en B (bola unidad de $P[-1,1]$ con la norma supremo).
Tomamos $x_n(t) = t^n \in B$ ya que $\|t^n\| = 1$ $\forall n$, pero
$|f(x_n(t))| = |x_n'(t)| = |n\, t^{n-1}|_{t=1} = n \to \infty$ si $n \to \infty$
$\Rightarrow f$ no está acotada en B.

CORRECCIÓN PARCIAL

(1). $E = \{f(x) \in C^1[0,1] / |f'(1/2)| < 1\}$

a) E convexo, $f(x), g(x) \in E$: $\lambda \in [0,1] \Rightarrow (1-\lambda) f(x) + \lambda g(x) \in E$ ya que: $|(1-\lambda) f'(1/2) + \lambda g'(1/2)| \leq (1-\lambda)|f'(1/2)| + \lambda |g'(1/2)| <$
$< 1 - \lambda + \lambda = 1$

E cuerpo convexo: Demostrar que $\ker E \neq \emptyset$. Veamos que $0 \in \ker E$ dada $f(x) \in C^1[0,1]$, $\exists\ \varepsilon = \varepsilon(f(x)) > 0$ tal que $t f(x) \in E$ $\forall |t| < \varepsilon$ (1).

Si $f'(1/2) = 0$, cualquier $\varepsilon > 0$ satisface (1) ya que $(t \cdot f(x))'_{x=1/2} = 0 \Rightarrow t \cdot f(x) \in E$.

Si $f'(1/2) \neq 0$, sea $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{|f'(1/2)|} \Rightarrow t \cdot f(x) \in E$ ya que $|t \cdot f'(1/2)| = |t| \cdot |f'(1/2)| < 1$ ya que $|t| < \varepsilon < \dfrac{1}{|f'(1/2)|}$

b) $\ker E = E$. Siempre $\ker E \subset E$. Veamos que $E \subset \ker E$. Sea $f(x) \in E$. Sea $g(x) \in C^1[0,1]$, veamos que $\exists\ \varepsilon = \varepsilon(g(x)) > 0$ tal que $f(x) + t \cdot g(x) \in E$ $\forall |t| < \varepsilon$ (2)

Si $g'(1/2) = 0$ cualquier $\varepsilon > 0$ satisface (2)

Si $g'(1/2) \neq 0$ tomando $0 < \varepsilon < \dfrac{1 - |f'(1/2)|}{|g'(1/2)|}$ satisface (2)

ya que $|f'(1/2) + t g'(1/2)| \leq |f'(1/2)| + |t||g'(1/2)| <$
$< |f'(1/2)| + \varepsilon |g'(1/2)| < |f'(1/2)| + \dfrac{1 - |f'(1/2)|}{|g'(1/2)|} |g'(1/2)| =$
$= 1$

$\Rightarrow \ker E = E$.

c) Como $0 \in \ker E$, entonces $p_E(f(x)) := \inf\{r > 0 : \frac{f(x)}{r} \in E\}$ (funcional de Minkowski)

$p_E(\cos \pi x) = \inf\{r > 0 : \frac{\cos \pi x}{r} \in E\} = \inf\{r > 0 : \left|\frac{-\pi \cdot \operatorname{sen} \pi x}{r}\right|_{x=1/2} < 1\}$
$= \inf\{r > 0 : \frac{\pi}{r} < 1\} = \inf\{r > 0 : \pi < r\} = \pi$

Análogamente $p_E(\operatorname{sen} \pi x) = 0$

(2). $C^1[0,1]$ $\quad p : C^1[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $p(f(x)) = |f(0)|$

Veamos que p es un funcional convexo y finito.

En efecto:

a) $p(f(x)) \geq 0 \quad \forall f(x) \in C^1[0,1]$

b) $p(f(x) + g(x)) = |f(0) + g(0)| \leq |f(0)| + |g(0)| = p(f(x)) + p(g(x))$

c) $p(\alpha f(x)) = |\alpha \cdot f(0)| = \alpha \cdot |f(0)| = \alpha \cdot p(f(x)) \quad \alpha \geq 0$

Definimos $A = \{ f \in C^1[0,1] / f(x) = \log g(x),\ g(x) \in C^1[0,1] / g(x) > 0 \ \forall x \in [0,1] \}$

$A \neq \emptyset$ ya que $0 \in A$ ya que $0 = \log 1$ $(1 \in C^1[0,1]$ y $1 > 0)$.

Sean $f_1(x), f_2(x) \in A \Rightarrow f_1(x) = \log g_1(x),\ f_2(x) = \log g_2(x)$.

Entonces $f_1(x) + f_2(x) = \log(g_1(x) g_2(x)) \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) \in A$.

$f(x) \in A$, $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot \log(g(x)) = \log(g(x)^\alpha)$

$\Rightarrow \alpha f(x) \in A$

$g(x)^\alpha \in C^1[0,1]$ y $g(x)^\alpha = e^{\alpha \cdot \log g(x)} > 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow A$ subespacio vectorial de $C^1[0,1]$

Definimos $F: A \to \mathbb{R} / F(f(x)) = g(0) \quad (f(x) = \log g(x) / g(x) > 0)$

$f_1(x), f_2(x) \in A$,

$F(f_1(x) + f_2(x)) = F(\log(g_1(x) g_2(x))) = g_1(0) \cdot g_2(0) =$

$= F(f_1(x)) \cdot F(f_2(x)) \neq F(f_1(x)) + F(f_2(x))$

F no es lineal $\Rightarrow$ no se puede aplicar H-B

3. a) $\overline{l_1} = c_0$

b) l_1 con dos normas $\begin{cases} \|x\| = \sup |x_n| \\ \|x\|_1 = \sum |x_n| \end{cases}$

$\|x\| = \sup |x_n| = |x_m| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \|x\|_1$

Veamos que no $\exists\ A > 0 / \|x\|_1 \leq A \|x\| \quad \forall x \in l_1$

Si (1) es cierto, Tomamos

$x^{(1)} = (1, 0, \dots) \in l_1$

$x^{(2)} = (1, \frac{1}{2}, 0, \dots) \in l_1$

$\vdots$

$x^{(n)} = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots) \in l_1$

$\|x^{(1)}\| = \|x^{(2)}\| = \dots = \|x^{(n)}\| = \dots = 1 \quad \forall n$ pero $\|x^{(1)}\|_1 = 1$

$\leq \|x^{(2)}\|_1 = 1 + \frac{1}{2}, \dots, \|x^{(n)}\| = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

Si (1) fuese cierto se tendría que $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leq A \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq A$, dado; ya que $\sum_{n=1} \frac{1}{n} = \infty$

(4) a) Lema de Riesz

b) c_0 subespacio cerrado de m. Aplicando el lema de Riesz, dado $0<\alpha<1 \Rightarrow \exists\, x_\alpha \in m$ con $\|x_\alpha\|=1$ y tal que $\|x_\alpha - y\|>\alpha$.
Tomando $x_\alpha = (1,1,\dots,1,\dots) \in m$ y $\|x_\alpha - y\| = \|(1-y_1, 1-y_2, \dots, 1-y_m, \dots)\|$. Veamos que $|1-y_m|>\alpha$ ya $(y_m)_{m=1}^{\infty}$ que si $|1-y_m|\leq \alpha \Rightarrow |1-y_m| \leq |1-y_n| \leq \alpha$. Tomando lím cuando $n\to\infty$, queda $\lim |1-y_n| = 1 \leq \alpha$. Absurdo ya que $0<\alpha<1$.

(5). $(l_2)' = l_2$

$a = (a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$ y definimos $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_n$ para cada $x=(x_n)\in l_2$.
- f está bien definida:

$\sum x_n a_n = \frac{1}{2}\sum 2x_n a_n \leq \frac{1}{2}\sum (x_n^2 + a_n^2) < \infty$

- f lineal (Trivial)
- f acotada en la bola unidad

$$\underset{\|x\|\leq 1}{|f(x)|} = |\sum x_n a_n| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum x_n^2\right)^{1/2}\left(\sum a_n^2\right)^{1/2} = \|x\|\cdot\|a\| \leq \|a\|$$

Por tanto $f\in (l_2)'$

Definimos $\varphi: l_2 \longrightarrow (l_2)'$

$a \longmapsto f \,/\, f(x) = \sum x_n a_n$, φ inyectiva (Trivial)

φ supreyectiva: Dado f, veamos que $\exists\, a\in l_2 \,/\, \varphi(a) = f$
Definimos $a^{(n)} = (f(e_1), \dots, f(e_n), 0, \dots) \in l_2 \quad \forall n \Rightarrow$
$\Rightarrow a^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, e_i$

Como $f\in (l_2)' \Rightarrow f(a^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\, f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} (f(e_i))^2$
(Si $f=0 \Rightarrow a=0$ satisface $\varphi(0)=0$)
Si $f\neq 0 \Rightarrow \exists$ al menos un $n \,/\, f(e_n)\neq 0 \Rightarrow a^{(n)}\neq 0$ para n y además $f(a^{(m)})>0 \quad \forall m\geq n$

Tenemos

$$\|f\| = \sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(a^{(m)})|}{\|a^{(m)}\|} = \frac{\|a^{(m)}\|^2}{\|a^{(m)}\|} = \|a^{(m)}\| \quad \forall m\geq n$$

Se tiene que $\|a^{(m)}\| \leq \|f\| \Rightarrow \|a^{(m)}\|^2 \leq \|f\|^2$, $\|a^{(m)}\|^2 = \sum_{i=1}^{m} (f(e_i))^2 \leq \|f\|^2 \Rightarrow \sum f(e_i)^2 \leq \|f\|^2$ y por tanto convergente $\Rightarrow a = (f(e_1), \dots, f(e_n), \dots) \in l_2$
$\varphi(a) = f$ (inmediato)
φ isometría: $\|\varphi(a)\| = \|f\| = \|a\|$
Habíamos probado que $\|a^{(m)}\| \leq \|f\|$. Tomando límite cuando $m\to+\infty$

$\Rightarrow \|a\| \leq \|f\|$. Antes hemos probado que $\|f\| \leq \|a\|$, luego φ isometría

TEMA 1: EL T^a DE HAHN-BANACH

A.N. Kolmogorov
Fomin 1975
Elementos de la T^a de funciones y el A. funcional
Parcial 24M

Espacios vectoriales sobre K ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$): L: e.v. sobre K $\Leftrightarrow$
Existe una operación $+$: $x, y \in L \Rightarrow x+y \in L$
Cumple:
1) $x+y = y+x$,
2) $x+0 = x$
3) $(x+y)+z = x+(y+z)$
4) Dado $x \in L$, $\exists\, -x \in L \,/\, (x+(-x)) = 0$.

y existe una operación (p. escalares) $\alpha x \in L$ ($\alpha \in K$, $x \in L$)
tal que: 1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
2) $1 \cdot x = x$
↳ escalares unitarios de K.
3) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$
4) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

Ejemplos 1) $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con las op. usuales.
2) $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ ($n>1$) con las op. usuales: $x = (x_j)_{j=1}^n$ o $z = (z_j)_{j=1}^n$ definimos $x+y = (x_j+y_j)_{j=1}^n$, $z+u = (z_j+u_j)_{j=1}^n$
$\alpha x = (\alpha x_1 \dots \alpha x_n)$, $wz = (wz_1, \dots, wz_n)$
$\alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad w \in \mathbb{C}$

3) $C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas $\}$
$F[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \}$
$f, g \in C[a,b]$, $(f+g)(t) = f(t)+g(t)$ $\forall t \in [a,b]$
αf definimos $(\alpha f)(t) = \alpha \cdot f(t)$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in C[a,b]$
$f+g$, αf igual en $F[a,b]$
4) $l_2 = \{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R} \,/\, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \}$
$\underset{(x_n)}{x} + \underset{(y_n)}{y} = z = (x_n+y_n)_{n=1}^{\infty}$; $\alpha x = (\alpha x_1 \dots \alpha x_n \dots)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$x, y \in l_2 \Rightarrow x+y \in l_2$, $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n+y_n)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2(x_n^2+y_n^2) =$
$= 2\sum_{n\geq 1} x_n^2 + 2\sum_{n\geq 1} y_n^2 < \infty$

$x_n^2+y_n^2+2x_ny_n \leq$
$\leq 2x_n^2+2y_n^2 \Leftrightarrow 0 \leq x_n^2+y_n^2-2x_ny_n$
$= (x_n-y_n)^2$

$\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in l_2 \Rightarrow \alpha x \in l_2$
$\sum_{n\geq 1} (\alpha x_n)^2 = \alpha^2 \sum_{n\geq 1} x_n^2 < \infty$

5) $c = \{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} ; x_n \in \mathbb{R} / \exists \lim_{n\to\infty} x_n \}$
6) $c_0 = \{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} ; x_n \in \mathbb{R} / \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \}$
7) $m = \{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} ; x_n \in \mathbb{R} / \exists M > 0 : \sup_{n=1,2,\dots} |x_n| \leq M \}$
8) $R^{\infty} = \{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} ; x_n \in \mathbb{R} \}$

Definición: Si L y M e.v, se dicen isomorfos si $\exists \varphi : L \to M$ tal que φ es biyectiva y satisface $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(\alpha x) = \alpha \cdot \varphi(x)$.

Ejemplo: $\mathbb{R}^n$, P_{n-1} espacio de los polinomios de grado no superior a $n-1$ (grado $\leq n-1$)

Definición: $\varphi : \mathbb{R}^n \to P_{n-1}$
$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \longmapsto p_n(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t + \dots + \alpha_n t^{n-1}$
φ: biyectiva
$\varphi((\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n)) = \varphi(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n) =$
$= \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha_2 + \beta_2) t + \dots + (\alpha_n + \beta_n) t^{n-1} = \alpha_1 + \alpha_2 t + \dots + \alpha_n t^{n-1}$
$+ \beta_1 + \beta_2 t + \dots + \beta_n t^{n-1} = \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + \varphi(\beta_1, \dots, \beta_n)$
Análogamente $\varphi(\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \lambda \cdot \varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, luego φ es un isomorfismo.

Definición: Sea L un e.v, entonces $\{ x_j \, j = 1, \dots, n \}$ se dice linealmente dependiente $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$ para algún $\alpha_j \neq 0$
Si $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0 \; \forall j = 1, \dots, n$, entonces se dice que son linealmente independiente (L.I).

Definición: Sea L un e.v. y $\{ x_j : j \in J \}$, entonces se dice que es L.I $\Leftrightarrow$ es L.I cualquier subconjunto finito infinito

Definición (de dim): un e.v. L es de dimensión finita $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists$ n vectores L.I y cualquier subconjunto de $n+1$ vectores es L.D

Definición: Un e.v. L es de dimensión infinita $\Leftrightarrow \forall n \, \exists$ un subconjunto de n vectores L.I

Ejemplo: Probar que todos los e.v. de los ejemplos 3-8 son de dim infinita

Solución: $l_2 \subset c_0 \subset c \subset m \subset R^{\infty}$
l_2 es de dim infinita ($\Rightarrow c_0, c, m$ y R^{∞} son de dim infinita)
$x \in l_2$, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} / \sum x_n^2 < \infty \Rightarrow \lim x_n^2 = 0 \Rightarrow x = (x_n) \in c_0$
Basta que probemos que l_2 es de dim infinita: dada n, $\exists x_1, \dots, x_n \in l_2$ son L.I

$x_1 = (x_{1,2}, x_{1,2}, \dots, x_{1m}, \dots) \;/\; \sum_{j=1}^{\infty} x_{1,j} < \infty$ etc.

$x_1 = (1,0,0,\dots) \in l_2$

$x_2 = (0,1,0,0,\dots) \in l_2$

$\vdots$

$x_m = (0,\dots,\overset{(m)}{1},0,\dots) \in l_2$

$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m = 0 \in l_2$; $(0 = (0,\dots))$

$\alpha_1(1,0,\dots) + \alpha_2(0,1,0,\dots) + \dots + \alpha_m(0,\dots,\overset{(m)}{1},0,\dots) = (0,0,\dots,0,\dots)$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_m = 0 \end{array}\right\} \text{Luego son LI.}$$

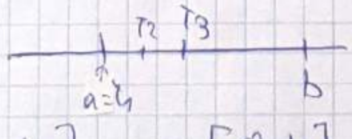
$C[a,b] \subset F[a,b]$. Veamos que $C[a,b]$ es de dim infinita (entonces $F[a,b]$ será de dim infinita)

Dado $m \geq 1$ definimos las funciones: $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$, ..., $f_m(t) = t^{m-1}$: m funciones continuas en $[a,b]$

Formamos la C.L. $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m$: funciones definidas en $[a,b]$ y continuas. Ponemos $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_m f_m = 0$ $\Rightarrow$ función idénticamente nula.

Siempre $\exists$ en $[a,b]$ m valores para t, distintos y no nulos y le llamamos $t_1, t_2, \dots, t_m$

Caso 1: $0 \notin [a,b]$ por ejemplo $t_1 = a$; $t_2 = \frac{a+b}{2}$; $t_3 = \frac{t_1+t_2}{2}$, ... $t_m = \frac{t_1 + t_{m-1}}{2}$



Caso 2: $0 \in [a,b]$ — $[0,b]$ ó $[a,0]$

considerámos $[a,0]$ ó $[0,b]$

p.e (por ejemplo) en $[0,b]$ tomamos $t_1 = b$, $t_2 = \frac{t_1}{2}$, $t_3 = \frac{t_2}{2}$, ... $t_m = \frac{t_{m-1}}{2}$. Damos a $t = t_1, t = t_2, \dots, t = t_m$, las incógnitas son $\alpha_1, \dots, \alpha_m$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 t_1 + \alpha_3 t_1^2 + \dots + \alpha_m t_1^{m-1} = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 t_2 + \alpha_3 t_2^2 + \dots + \alpha_m t_2^{m-1} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 + \alpha_2 t_m + \alpha_3 t_m^2 + \dots + \alpha_m t_m^{m-1} = 0 \end{array}\right\} m \text{ ecuaciones y } m \text{ incógnitas,}$$

Tiene solución única $(\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = (\text{Van der Monde}) = (t_2-t_1) \cdots (t_n-t_1) (t_3-t_2) \cdots (t_n-t_2) \cdots (t_{n-1}-t_n) \neq 0$$

por ser todos distintos.

Subespacios: Dado un e.v. L, un subconjunto M se dice subespacio de $L \Leftrightarrow M$ con las operaciones definidas en L es un e.v.

Caracterización: M es un sub. vect. de $L \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in K (\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$ y $\forall x, y \in M \Rightarrow \alpha x + \beta y \in M$

Dado un e.v. L. Siempre existen dos subespacios L y $\{0\}$ (Triviales). Si M es un subespacio de L / $M \neq \{0\}$, y $M \neq L$, entonces M se dice que es un subespacio propio.

Ejemplo: Si L es de dim > 1, entonces cualquier $x \neq 0$, genera un sub. propio $M(x) = \{\lambda x : \lambda \in K\}$

Ejemplo: El e.v. $C[a,b]$ es un sub. propio del e.v. $F[a,b]$

También, el e.v. $P[a,b]$ (el espacio de los polinomios definidos en $[a,b]$) es un subespacio propio de $C[a,b]$

Ejemplo: $l_2 \subset c_0 \subset c \subset m \subset \mathbb{R}^\infty$: subespacios propios.

Sea $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ / $x_n = n$ $\forall n$. Entonces $x \in \mathbb{R}^\infty$, pero $x \notin m$ luego m es un subespacio propio de $\mathbb{R}^\infty$. Sea $x = (x_n)_n$ donde $x_n = (-1)^n$, $n \geq 1$. Entonces $x \in m$ pero $x \notin c$.

Sea $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ / $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\forall n = 1, 2, \ldots$ Entonces $x \in c$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = 1$), pero $x \notin c_0$. Por tanto c_0 es un subespacio propio de c.

Sea $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ / $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall n = 1, 2, \ldots$ Entonces $x \in c_0$ ($\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$) pero $x \notin l_2$ ya que $\sum \frac{1}{x_n^2} = \sum \frac{1}{n}$ divergente.

Por tanto, l_2 es un sub. propio de c_0

Definición: Sea L un e.v. y $\{x_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$. Entonces $\exists$ un subespacio mínimo que contiene a $\{x_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ y se llama subespacio engendrado por $\{x_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$, se denota por $L(\{x_\alpha, \alpha \in \Lambda\})$

$L(\{x_\alpha : \alpha \in \Lambda\}) = \cap V$

V: sub. que contiene a $\{x_\alpha, \alpha \in \Lambda\}$ (siempre

$\exists$ al menos uno, L).
$L(\{x_\alpha, \alpha\in\Lambda\}) = \{x\in L / x = \sum_{j\in F} a_j x_{\alpha_j}\}$ (finito)

<u>Definición</u>: Sea L un e.v., decimos que $\{x_\alpha, \alpha\in\Lambda\}$ es una base de HAMEL $\Leftrightarrow L(\{x_\alpha : \alpha\in\Lambda\}) = L$

<u>Ejemplo</u>: Sea $M = \{x = (x_n)_n : x_n = 0$ para una infinidad de valores de $n\}$

a) ¿ M es un subespacio propio de m?
b) ¿ M es un sub. propio de c_0?

$x = (1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, \dots) \in M$
$y = (0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, \dots) \in M$

$x+y = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots) \notin M \Rightarrow M$ no es un sub. vectorial

a) M ni siquiera es un subconjunto de m.
$x = (1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots, n, 0, \dots) \in M$, pero $x \notin m$
b) M ni siquiera es un subconjunto de c_0. $x = (1, 0, 2, 0, \dots, n)$ $\in M$. $\lim_{n\to\infty} x_n$ no existe, luego $x\notin c_0$.

<u>Espacios cocientes</u>: Dado un e.v. L y un subespacio M, se define una R.B.E. en L de la siguiente forma:
$x\sim y \Leftrightarrow x - y \in M$.

<u>Reflexiva</u>: Dado $x\in L$, se tiene $x\sim x$ ya $x - x = 0 \in M$

<u>Simétrica</u>: Dados $x, y\in L$ se tiene que si $x\sim y \Rightarrow y\sim x$
($x\sim y \Rightarrow x-y\in M$ (multiplicando por -1, se tiene que $y - x\in M$)

<u>Transitiva</u>: Dados $x, y, z\in L$. Se tiene que si $x\sim y$ e $y\sim z \Rightarrow$
$\Rightarrow x\sim z$ $\left(\begin{array}{l} x\sim y \Rightarrow x-y\in M \\ y\sim z\Rightarrow y-z\in M \\ \hline \text{sumando}: x - z\in M\end{array}\right)$

Esta R.B.E produce una partición en L, cuyos elementos son clases de equivalencia, denotemos por $\bar{x}$ (x es cualquier representante de la clase).

Por definición el espacio cociente, denotado por L/M, es el espacio vectorial de las clases de equivalencia con las operaciones:
$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}, \quad x, y\in L$$
$$\alpha\bar{x} = \overline{\alpha x}, \quad \alpha\in K$$

Dado un e.v L y un subespacio M, por definición, se llama codimensión de M a la dimensión del e.v cociente L/M

Ejemplo: Si L tiene dim n y M tiene dimensión $k \leq n$, entonces dimensión de L/M es $n-k$ (entonces la codim de M es $n-k$)

Funcionales: Por definición, una función $f: L \text{ (e.v)} \to K \text{ } (\mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$ se dice que es un funcional

Definición: • Un funcional se dice aditivo si $f(x+y) = f(x) + f(y)$

• El funcional se dice homogéneo si $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$ $\lambda \in K$ $(\mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$

• funcional lineal $\Leftrightarrow$ f es aditivo y homogéneo

• Sea $f: L \to \mathbb{C}$ un funcional. Entonces se dice conjugado homogéneo si $f(\lambda x) = \bar{\lambda} f(x)$, $\bar{\lambda}$: conjugado de λ

• Un funcional $f: L \to \mathbb{C}$ se dice conjugado lineal $\Leftrightarrow$ f es aditivo y conjugado homogéneo.

Ejemplos: 1) En $\mathbb{R}^n$ fijamos $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y definimos $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \quad \text{con} \quad x = (x_j)_{j=1}^{n}$$

Entonces f es un funcional lineal.

Comprobar que $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

2) En $\mathbb{C}^n$ fijamos un vector $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ y definimos $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$z = (z_j)_{j=1}^{n} \longmapsto f(z) = \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{z}_j$$ Entonces f es conjugado lineal.

Comprobación: $f(z+w) = \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{(z_j + w_j)} = \sum_{j=1}^{n} a_j (\bar{z}_j + \bar{w}_j) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{z}_j + \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{w}_j = f(z) + f(w)$$

$$f(\lambda z) = \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{\lambda z_j} = \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{\lambda} \bar{z}_j = \bar{\lambda} \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \bar{z}_j = \bar{\lambda} f(z)$$

3) En $C[a,b]$ definimos $f: C[a,b] \to \mathbb{R}$

$$x(t) \longmapsto f(x(t)) = \int_a^b x(t)\,dt$$

Entonces f es un funcional lineal (comprobar)

4) En $C[a,b]$ (complejo) definimos $f: C[a,b] \to \mathbb{C}$, $x(t) \to f(x(t)) = \int_a^b \overline{x(t)}\, dt$. Entonces f es conjugado lineal.

Comprobar: $f(x(t)+y(t)) = f(x(t)) + f(y(t))$

$f(\lambda x(t)) = \int_a^b \overline{\lambda x(t)}\, dt = \int_a^b \overline{\lambda} \cdot \overline{x(t)}\, dt = \overline{\lambda} \cdot f(x(t))$

En general, si $x_0(t)$ es una función de $C[a,b]$, entonces $f: C[a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x(t)) = \int_a^b x_0(t) \cdot x(t)\, dt$. Entonces f es un funcional lineal.

5) En l_2 definimos $f: l_2 \to \mathbb{R}$

$x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ $\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 < \infty\right) \to f(x) = x_k$ para un cierto k $(k \geq 1)$ fijo. Entonces f es un funcional lineal.

Sea $f: L \to \mathbb{R}$ un funcional lineal no idénticamente nulo. Entonces $\operatorname{Ker} f$ es de codimensión 1.

Demostración: Como f no es idénticamente nulo, $\exists\, x_0 \neq 0$ tal que $f(x_0) = 1$ (si $f(x_0) \neq 1$, entonces definimos $x_1 = \frac{x_0}{f(x_0)}$ y se tiene que $f(x_1) = f\left(\frac{x_0}{f(x_0)}\right) = \frac{1}{f(x_0)} \cdot f(x_0) = 1$

Entonces, dado $x \in L$ (arbitrario) $\exists\, y \in \operatorname{Ker} f$ tal que $x = f(x) \cdot x_0 + y$ (1)

Comprobación: $f(x) = f(f(x) \cdot x_0 + y) = f(x) \cdot \overset{1}{f(x_0)} + f(y)$, $f(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \operatorname{Ker} f$

La forma de escribir (1) es única: $\left.\begin{array}{l} x = \lambda x_0 + y \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ x = \lambda' x + y' \end{array}\right\}$

$\lambda x_0 + y = \lambda' x + y' \Leftrightarrow (\lambda - \lambda') x_0 = y' - y$ — Caso $\lambda = \lambda' \Rightarrow y = y'$ ✓ ; Caso $\lambda \neq \lambda'$ # ya que

$\Rightarrow x_0 = \frac{y'-y}{\lambda - \lambda'} = \underbrace{\frac{1}{\lambda - \lambda'}}_{\in \mathbb{R}} (y' - y) \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{\lambda - \lambda'} (\underset{0}{f(y)} - \underset{0}{f(y')}) = 0$ # pues $\underset{1}{f(x_0)}$

$\lambda \overline{x_0}$ (ya que $x - \lambda x_0 = y \in \operatorname{Ker} f$) luego el espacio $L|_{\operatorname{Ker} f}$ es de dim 1 (generado por $\overline{x_0}$)

Ejemplo: Sean $f, f_1, \ldots, f_n$ funcionales lineales sobre un e.v. L / $f_1(x) = f_2(x) = \ldots = f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$. Entonces, puede que existan escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tales que $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)$ $\forall x \in L$

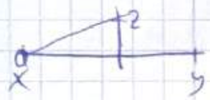
<u>Definición</u>: Sea L un e.v., entonces denotamos por $[x,y]$ (el segmento cerrado definido por x,y) y es definido por
$\{z = \alpha x + \beta y : \alpha, \beta \geq 0 \,/\, \alpha + \beta = 1\}$
$(x,y) = \{z = \alpha x + \beta y$ con $\alpha, \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1\}$ (el segmento abierto definido por x,y)

En L (e.v.) un subconjunto M se dice convexo $\Leftrightarrow \forall\, x,y \in M \Rightarrow$
$\Rightarrow [x,y] \subset M$

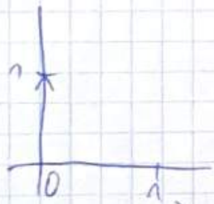
Dado un convexo M, definimos el conjunto $\text{Ker}\, M$ (núcleo de M) =
$= \{x + ty \in M$ con $|t| < \varepsilon$ y $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0\ \forall\, y \in L,\ x \in M\}$

Cuando $\text{Ker}\, M \neq \emptyset$, se dice que M es un cuerpo convexo

<u>Ejemplo</u>: $L = \mathbb{R}^2$ y $M = [x,y]$ con $x \neq y$. Entonces M es convexo (trivial) pero no es un cuerpo <u>convexo</u>.



Supongamos que $[x,y] = [0,1]$
$0 = (0,0)$
$1 = (1,0)$



Sea $y = (0,1)$
$x = (0,0)$
Si $x + ty = (0,0) + t(0,1) = (0,t) \in [0,1]$

$\Rightarrow (0,t) \in [0,1] \Leftrightarrow (0,t) = (1-\lambda)(0,0) + \lambda(1,0) \Rightarrow 0 = \lambda,\ \underline{t = 0}$
pero $|t| < \varepsilon$ ⨳

$M = B$ (Bola unidad cerrada)
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ es un cuerpo convexo.

En el espacio $C[a,b]$, sea $M = \{f(t) \in C[a,b] /$
$|f(t)| \leq 1\}$

Entonces M es un cuerpo convexo.

M convexo: $f, g \in M \Rightarrow h = (1-\lambda) f + \lambda \cdot g \quad (\lambda \in [0,1])$
$|h(t)| = |(1-\lambda) f(t) + \lambda g(t)| \leq (1-\lambda)|f(t)| + \lambda |g(t)| \leq 1 - \lambda$
$+ \lambda \Rightarrow [f,g] \subset M$

$0 \in M$ (idénticamente nula). Sea $y(u) \in C[a,b] \Rightarrow \exists\, A > 0 : |y(u)| \leq A\ \forall u \in [a,b]$. Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{A}$
Entonces $\underset{=0}{x} + ty \in M$ ya que $|ty(u)| = |t||y(u)| \leq$
$\leq |t| A < \varepsilon \cdot A = 1$, $\text{Ker}\, M \neq \emptyset$
$(|t| < \varepsilon)$

Ejercicio: $\Phi = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 \ / \ \sum_1^{\infty} n^2 x_n^2 \leq 1\}$

Entonces Φ es convexo, pero no es cuerpo convexo

$x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ con $x_n = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot n}$, $n = 1, 2, \ldots$

$x \in \ell_2$ ya que $\sum x_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n n^2} \leq \left(\dfrac{1}{2^n} \leq 1 \ \forall n\right) \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} < \infty$

Veamos que $\in \Phi$ ya que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \dfrac{1}{2^n n^2} = 1$

Φ es convexo. Sean $x, y \in \Phi$ y $\lambda \in [0,1]$ y ver si $z = (1-\lambda)x + \lambda y \in \Phi$. En efecto, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left((1-\lambda)x_n + \lambda y_n\right)^2 =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[(1-\lambda)^2 x_n^2 + \lambda^2 y_n^2 + 2(1-\lambda)\lambda x_n \cdot y_n\right] \underset{\uparrow}{\leq} \sum n^2 [(1-\lambda)^2 x_n^2 +$

$+ \lambda^2 y_n^2 + (1-\lambda)\lambda(x_n^2 + y_n^2)] =$ $\qquad 2x_n y_n \leq x_n^2 + y_n^2$

$= (1-\lambda)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 + \lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 y_n^2 + (1-\lambda)\lambda \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 x_n^2 + n^2 y_n^2) \leq$

$\leq (1-\lambda)^2 + \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda) = (\lambda + (1-\lambda))^2 = 1^2 = 1$ y con esto tenemos que es convexo

Veamos ahora que Φ no es cuerpo convexo (reducción al absurdo)

Supongamos que $\mathrm{Ker}\ \Phi \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \Phi \ / \ x \in \mathrm{Ker}\ \Phi$. Dado $y = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, se tiene que $\varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tal que $x + ty \in \Phi \ \forall |t| < \varepsilon$

Por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x_n + t \cdot y_n)^2 \leq 1$, luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x_n^2 + 2t x_n y_n + t^2 y_n^2) \overset{y_n = \frac{1}{n}}{=} \sum n^2 x_n^2 + t^2 + 2t \cdot n \cdot x_n \leq 1 \Rightarrow$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Por ser la} \\ \text{serie convergente}}}{\Rightarrow} \lim_{n \to \infty} n^2 x_n^2 + t^2 + 2n t x_n = 0 \qquad (1)$$

Ahora bien, como $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x_n^2 \leq 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} n^2 x_n^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} n \cdot x_n = 0$

De (1) queda $t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ pero (1) es cierto $\forall |t| < \varepsilon$. #

Proposición: Sea L un e.v. y M un cuerpo convexo. Entonces $\mathrm{Ker}\ M$ es un convexo

Demostración: Sean $x, y \in \mathrm{Ker}\ M$ y $\lambda \in [0,1]$, veamos que $z = (1-\lambda)x + \lambda y \in \mathrm{Ker}\ M$. En primer lugar $z \in M$ (M convexo $/ M \supset \mathrm{Ker}\ M$). Sea $a \in L$ (arbitrario), como $x \in \mathrm{Ker}\ M \Rightarrow \exists\ \varepsilon_1 = \varepsilon_1(a) > 0$ tal que $x + t_1 a \in M \ \forall |t_1| < \varepsilon_1$. Como $y \in \mathrm{Ker}\ M \Rightarrow \exists\ \varepsilon_2 = \varepsilon_2(a) > 0$ tal que $y + t_2 a \in M \ \forall |t_2| < \varepsilon_2$. Por ser M convexo se tiene que

$(1-\lambda)(x+\tau_1 a) + \lambda(y+\tau_2 a) \in M \quad \forall\ |\tau_1| < \varepsilon_1 \ y\ |\tau_2| < \varepsilon_2$ (1)

$\underbrace{(1-\lambda)x+\lambda y}_{z} + [(1-\lambda)\tau_1 + \lambda\tau_2]\, a \in M$, luego $z + [(1-\lambda)\tau_1 + \lambda\tau_2] a \in M$ $\forall |\tau_1| < \varepsilon$ y $|\tau_2| < \varepsilon$. En particular (1) es cierto si tomamos $\tau = \tau_1 = \tau_2$ y $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Entonces queda $z + a\tau \in M$ $\forall |\tau| < \varepsilon$, luego $z \in \ker M$. Entonces $\ker M$ es convexo.

<u>Definición</u>: Sea L un e.v. y $p: L \to [0,+\infty)$ un funcional (para algunos x podría ser $p(x) = +\infty$). Diremos que p es un funcional convexo si:
1) $p(x+y) \le p(x) + p(y)$
2) $p(\alpha x) = \alpha\, p(x)$ si $\alpha \ge 0$

Cuando $p(x) < +\infty$ $\forall x \in L$, se dice que el funcional convexo es finito.

<u>Ejemplos</u>: 1) En $\mathbb{R}^n$, la longitud de un vector x, $l(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$ es un funcional convexo finito. Observar que $l(x+y) \le l(x) + l(y)$ ($\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$) y $l(\alpha x) = \alpha \cdot l(x)$

2) Sea $A \neq \emptyset$ y $F(A) = \{f: A \to \mathbb{R}\}$ e.v. sobre $\mathbb{R}$. Fijamos $S \subset A$ / $S \neq \emptyset$ y sea $L = F_b(S) = \{f \in F(A) \ /\ f$ acotada sobre $S\}$.
Sea $s_0 \in S$, definimos $\underset{x(s) \in L = F_b(S)}{p(x(s))} = |x(s_0)| \ge 0$. Entonces p es un funcional convexo ya que $p(x(s) + y(s)) =$
$= |(x+y)(s_0)| = |x(s_0) + y(s_0)| \le |x(s_0)| + |y(s_0)| = p(x(s)) + p(y(s))$
Si $\alpha \ge 0$, entonces $p(\alpha x(s)) = |\alpha \cdot x(s_0)| = \alpha |x(s_0)| = \alpha \cdot p(x(s))$

3) En $L = m$ (espacio de las sucesiones acotadas), definimos $p(x) = \sup_n |x_n|$. Entonces p es un funcional convexo.
$x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$

<u>Teorema (funcional de Minkowski)</u>: Sea L un e.v. (real), p un funcional convexo y $k > 0$. Entonces $E = \{x \in L \ /\ p(x) \le k\}$ es convexo. Si p es finito entonces E es un cuerpo convexo y $\ker E = \{x \in L \ /\ p(x) < k\}$

<u>Demostración</u>: Sea $x, y \in E$ y $\lambda \in [0,1]$, veamos que $(1-\lambda)x + \lambda y \in E$. En efecto, tenemos $p((1-\lambda)x + \lambda y) \le p(\underset{\ge 0}{(1-\lambda)}x) + p(\underset{\ge 0}{\lambda} y) = (1-\lambda)p(x) + \lambda \cdot p(y) \le (1-\lambda)k + \lambda k = k$. Por tanto $(1-\lambda)x + \lambda y \in E$, luego E es convexo. Supongamos que p sea finito. Entonces $0 \in E$ (lo vemos). Se tiene que $p(0) = p(\underset{\alpha \ge 0}{\alpha \cdot 0}) = \alpha \cdot p(0) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (Como $p(0)$ finito) $p(0) = 0 \le k \Rightarrow 0 \in E$.
Veamos que $0 \in \ker E$ (esto demostraría que E es un cuerpo convexo).
Sea $y \in L$, entonces $\exists\ \varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tal que $0 + \tau y = \tau y \in E$ $\forall |\tau| < \varepsilon$.

$\tau y \in E \iff p(\tau y) \le k$. Si $\tau=0$ demostrado, si $\tau>0$, entonces $p(\tau y) = \tau (p(y))$ demostrado si $p(y)=0$. Cuando $p(y)>0$, se tiene $\tau \cdot p(y) \le k \iff \tau \le \frac{k}{p(y)}$ basta tomar $\varepsilon \le \frac{k}{p(y)}$. Si $\tau<0$, entonces tomamos $p(\tau y) = p(-\tau(-y)) = -\tau p(-y)$. Si $p(-y)=0$ demostrado. Si $p(-y)>0$, entonces $p(\tau y) = -\tau p(-y) \le k \iff -\tau \le \frac{k}{p(-y)}$.
Basta tomar $\varepsilon \le k/p(-y)$. Em resumem, se tiene que $p(\tau y) \le k$ si tomamos $0 \le \varepsilon \le \frac{k}{\max\{p(y), p(-y)\}}$ $(p(y), p(-y) > 0)$

Por tanto $0 \in \mathrm{Ker}\, E$, luego E es um cuerpo convexo.
Veamos que $\{x \in L \,/\, p(x) < k\} = \mathrm{Ker}\, E$
"$\subseteq$" Sea $x \,/\, p(x) < k$, veamos que $x \in \mathrm{Ker}\, E$ (si $x=0$, demostrado)
Tomamos $y \in L$, veamos que $\exists\, \varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tal que $\underset{x\neq 0}{x+\tau y \in E}$ $\forall |\tau| < \varepsilon \iff p(x+\tau y) \le k \quad \forall |\tau|<\varepsilon$
Ponemos $p(x+\tau y) \le p(x) + p(\tau y) \le k \iff p(\tau y) \le k - p(x)$ (2) (nº positivo ya que $p(x)<k$). Aplicando lo anterior es cierto tomando
$$0 < \varepsilon \le \frac{k-p(x)}{\max\{p(y), p(-y)\}} \quad (p(y), p(-y) > 0)$$

Sea $x \in \mathrm{Ker}\, E$, veamos que $p(x) < k$. Si $p(x)$ fuera / $p(x) \ge k$
Entonces, como $x \in \mathrm{Ker}\, E$, dado $y = x$, $\exists\, \varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ tal que $\underset{|\tau|<\varepsilon}{x+\tau x} = (1+\tau)x \in E$ luego $p((1+\tau)x) \le k$, pero $p((1+\tau)x) =$
(en particular para $\tau>0$) $= (1+\tau)\, p(x) \ge (1+\tau) k = k + \tau k > k$ ## con (2)

Teorema: Sea E um cuerpo convexo en um e.v. L tal que $0 \in \mathrm{Ker}\, E$. Entonces $p_E(x) = \inf\{r > 0 \,/\, \frac{x}{r} \in E\}$ es um funcional convexo finito llamado funcional de Minkowski asociado a E.

Demostración: Veamos que $p_E(x)$ está bien definida. En efecto, como $0 \in \mathrm{Ker}\, E$, dado x, $\exists\, \varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ tal que $0 + \tau x \in E$ $\forall |\tau| < \varepsilon$
Em particular para $\tau = \varepsilon/2$, se tendría que $\frac{\varepsilon}{2} x = \frac{x}{2/\varepsilon} \in E \Rightarrow$
$\Rightarrow p_E(x) \le 2/\varepsilon$, luego $p_E(x)$ es um nº finito, bien definida.
Veamos que p es um funcional convexo: a) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ si $\alpha \ge 0$
Si $\alpha = 0 \Rightarrow p(0) = 0$
Si $\alpha > 0$, entonces $p(\alpha x) = \inf\{r > 0 \,/\, \alpha x \in E\} = \inf\{r > 0 \,/\, \frac{x}{r/\alpha} \in E\} =$
$= \inf\{\frac{r\alpha}{\alpha} \,/\, \frac{x}{s} \in E\} = \inf\{\alpha s \,/\, \frac{x}{s} \in E\} = \alpha \cdot \inf\{s : \frac{x}{s} \in E\} = \alpha \cdot p(x)$

$\mu_E(x) = \inf \{ r > 0 \, / \, \frac{x}{r} \in E \}$ Funcional de Minkowski

μ_E funcional convexo

A) $\mu_E(\lambda x) = \lambda \mu_E(x) \quad \forall \lambda \geq 0 \quad \forall x \in L$ (demostrado)

B) $\mu_E(x+y) \leq \mu_E(x) + \mu_E(y)$ Dado $\varepsilon > 0$, por definición de μ_E,

$\exists r_1 \, / \, \mu_E(x) < r_1 < \mu_E(x) + \varepsilon$ y $\frac{x}{r_1} \in E$

$\exists r_2 \, / \, \mu_E(y) < r_2 < \mu_E(y) + \varepsilon$ con $\frac{y}{r_2} \in E$

Consideramos

$$\frac{x+y}{r} = \frac{x}{r} \cdot \frac{r_1}{r_1} + \frac{y}{r} \cdot \frac{r_2}{r_2} = \underbrace{\frac{x}{r_1} \cdot \frac{r_1}{r} + \frac{y}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r}}_{\in E}, \quad \frac{r_1}{r} + \frac{r_2}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

si $r = r_1 + r_2$

Como E es convexo, $\frac{x+y}{r} \in E$. Por definición de μ_E se tiene

$\mu_E(x+y) \leq r = r_1 + r_2 < \mu_E(x) + \varepsilon + \mu_E(y) + \varepsilon = \mu_E(x) + \mu_E(y) + 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

Entonces $\mu_E(x+y) \leq \mu_E(x) + \mu_E(y)$

$\Rightarrow$ Funcional de Minkowski es un funcional convexo

Teorema (de Hahn-Banach)

1) (Versión real L: e.v. sobre $\mathbb{R}$)

Sea L un e.v. sobre $\mathbb{R}$ y p un funcional convexo finito y L_0 un subespacio vectorial de L. Sea $f_0 : L_0 \to \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que $f_0(x) \leq p(x) \quad \forall x \in L_0$. Entonces existe una prolongación lineal $f : L \to \mathbb{R}$ ($f|_{L_0} = f_0$) tal que $f(x) \leq p(x)$ $\forall x \in L$

Demostración: Si $L_0 = L$, entonces $f = f_0$ y queda acabado

Supongamos que $L_0 \neq L$, entonces $\exists z \in L \, / \, z \notin L_0$. Definimos $L' = L(\{L_0, z\})$ = subespacio engendrado por L_0 y por z

Entonces los vectores de L' son de la forma $x + tz$, $x \in L_0$, $t \in \mathbb{R}$.

Supongamos que $\exists f' : L' \to \mathbb{R}$ funcional / $f'|_{L_0} = f$ y $f'(x+tz) \leq$
$\leq p(x+tz) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Entonces $f'(x+tz) = f'(x) + t \cdot f'(z) = f_0(x) + tc$

(queremos ver como tomar el c). Imponiendo la condición

$f'(x+tz) = \boxed{f_0(x) + t \cdot c \leq p(x+tz)}$ (1) ($t = 0$ trivial)

- Caso $t > 0$, dividimos (1) por t: $f_0\left(\frac{x}{t}\right) + c \leq p\left(\frac{x}{t} + z\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \boxed{c \leq p(x/t + z) - f_0\left(\frac{x}{t}\right)}$ (2)

- Caso $t < 0$, dividimos por t: $f_0\left(\frac{x}{t}\right) + c \geq \frac{1}{t} p(tz + x) =$
$= -\underbrace{\left(-\frac{1}{t}\right)}_{>0} p(tz + x) = -p\left(-z - \frac{x}{t}\right) \Leftrightarrow \boxed{c \geq -p\left(-\frac{x}{t} - z\right) - f_0\left(\frac{x}{t}\right)}$

Veamos que $\exists$ un nº real c que satisface simultáneamente las desigualdades (2) y (3).
Sean y', y'' dos vectores (arbitrarios) de L_0. Entonces se tiene:
$f_0(y'') - f_0(y') = f_0(y''-y') \leq p(y''-y') = p(y''+z+(-y'-z)) \leq$
$\leq p(y''+z) + p(-y'-z) \Leftrightarrow \boxed{-f_0(y'') - p(y''+z) \geq -f_0(y') - p(-y'-z')}$ (4)

Definimos $c' = \sup\{-f_0(y') - p(-y'-z) : y' \in L_0\}$
$c'' = \inf\{-f_0(y'') + p(y''+z) \; y'' \in L_0\}$
y se tiene que $c' \leq c''$. Por tanto cualquier $c / c' \leq c \leq c''$ satisface las condiciones de existencia de f' y de acotación por p.
Sea L un e.v generado por una cantidad numerable (finita o infinita) de vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Entonces $L_1 = L(\{L_0, x_1\})$, $L_2 = L(\{L_1, x_2\}), \ldots, L_n = L(\{L_{n-1}, x_n\}), \ldots$
Si aplicamos lo demostrado anteriormente: $\exists f_1 : L_1 \to \mathbb{R}$ que extiende a f_0, $\exists f_2 : L_2 \to \mathbb{R}$ que extiende a $f_1, \ldots, \exists f_n : L_n \to \mathbb{R}$ que extiende a $f_{n-1}, \ldots$
(Todas ellas satisfacen la acotación por p). Veamos que $\exists f : L \to \mathbb{R} / f$ extiende a f_0 y satisface la acotación por p.
Definimos $f(x) = (\text{como } x \in L \Rightarrow x \in L_n \text{ para algún } n) = f_n(x)$.
Esta definición está bien: si $\exists m \neq n / x \in L_m$, entonces $n < m$. Entonces como f_m extiende a f_{m-1} extiende a $f_{m-2}, \ldots \exists k / f_{m-k}$ extiende a f_n, luego $f_m(x) = f_{m-1}(x) = \ldots = f_{m-k}(x) = f_n(x)$. f es lineal y extiende a f_0 ya que todas las f_n $\forall n \geq 1$ extienden a f_0. También f satisface la acotación por p ya que todas las f_n la satisfacen.
Sea L un e.v. arbitrario (puede tener una cantidad no numerable de generadores). Definimos el conjunto $F = \{f' : L' \to \mathbb{R}$, funcionales lineales que extienden a f_0 y satisfacen la acotación por $p\}$.
Entonces $F \neq \emptyset$ ya que dado $z \notin L_0$, tomando $L' = L(\{L_0, z\})$, $\exists$ una extensión $f' : L' \to \mathbb{R}$ lineal que satisface la acotación por p, luego $f' \in F$. Sean $f_1, f_2 \in F$ decimos que $f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f_1 : L_1 \to \mathbb{R}$, $f_2 : L_2 \to \mathbb{R}$; $L_1 \subset L_2$ y f_2 extiende a f_1.
Entonces $\leq$ es una relación de orden en F ya que:
- Reflexiva: $f_1 \leq f_1$,
- Transitiva: $f_1 \leq f_2$ y $f_2 \leq f_3 \Rightarrow f_1 \leq f_3$
- Antisimétrica: $f_1 \leq f_2$ y $f_2 \leq f_1 \Rightarrow f_1 = f_2$

Sea $F_0 \subset F$ / F_0 está totalmente ordenado (cadena)
Veamos que $\exists$ $h := \sup\{g : g \in F_0\}$, definimos $L_{F_0} = \bigcup_{g \in F_0} L_g$ (L_g es el subespacio de L / $g: L_g \to \mathbb{R}$)
L_{F_0} es un subespacio vectorial de L ($x, y \Rightarrow \exists g_0 \in F_0$ / $x \in L_{g_1}$; $y \in L_{g_2}$ $g_1 \leq g_2$ ó $g_2 \leq g_1 \Rightarrow L_{g_2} \subset L_{g_1} \Rightarrow x+y \in L_{g_1}$ sub. vectorial $\subset L_{F_0}$. ($x \in L_{g_1} \subset L_{g_2}$; $x+y \in L_{g_2}$ sub. vect. $\subset L_{F_0}$)
Análogamente si $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha x \in L_{F_0}$. Dado $x \in L_{F_0}$, $\exists g \in F_0$ / $x \in L_{g_1}$, definimos $h(x) = g_1(x)$ (está bien definida ya que si $x \in L_{g_2}$ se tiene que $g_1 \leq g_2$ ó $g_2 \leq g_1$ y entonces $g_1(x) = g_2(x)$). Entonces por definición, se extiende a todos los $g \in F_0$ y $L_h = \bigcup_{g \in F_0} L_g \supset L_g$ $\forall g \in F_0$. Por tanto $g \leq h$ $\forall g \in F_0$.
Por el lema de Zorn, $\exists f \in F$ / f es maximal. Veamos que f es la solución del Teorema de H-R. Sabemos que f es un funcional lineal definido en L_f que extiende a f_0 y que satisface la acotación por p. Veamos que $L_f = L$. Si $L_f \neq L \Rightarrow \exists z \in L$ / $z \notin L_f$.
Sea $L' = L(\{L_f, z\}) \supset L_f$. Aplicando lo demostrado al principio, $\exists$ $f': L' \to \mathbb{R}$ lineal, que extiende a $f \Rightarrow f \leq f'$. Como f es maximal $\Rightarrow f = f' \Rightarrow L_f = L'$. $\#$
Por tanto $L_f = L$ queda demostrado.
<u>Lema (de Zorn)</u>: Si en un conjunto ordenado (ref. antisimétrica, transitiva) dado un subconjunto totalmente adecuado (cadena), tiene supremo. Entonces contiene al menos un elemento maximal.
<u>Definición</u>: Sea L un e.v complejo. Un funcional $p: L \to [0, +\infty)$ se dice que es un funcional convexo, si y solo si
a) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$
b) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$
El funcional se dice finito si $p(x) < \infty$ $\forall x \in L$.
<u>Versión compleja</u>: Sea L un e.v sobre $\mathbb{C}$ y p un funcional convexo finito. Sea L_0 un subespacio vectorial y $f_0: L_0 \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal tal que $|f_0(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in L_0$. Entonces $\exists$ una prolongación lineal $f: L \to \mathbb{C}$ ($f|_{L_0} = f_0$) tal que satisface la acotación por p ($|f(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in L$)
<u>Demostración</u>: L e.v. sobre $\mathbb{C}$, entonces L es en particular un e.v. sobre $\mathbb{R}$, que le llamamos $L_{\mathbb{R}}$ ($L = L_{\mathbb{R}}$). Sea L_0 un subespacio vectorial de L y $f_0: L_0 \to \mathbb{C}$ funcional tal que $|f_0(x)| \leq p(x)$ (1) $\forall x\ L_0$ tenemos que encontrar un funcional lineal $f: L \to \mathbb{C}$ /

$f(x) = f_0(x)$ $\forall x \in L_0$ y satisfaga (1) $(|f(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in L)$

Llamamos $L_{0\mathbb{R}}$ al e.v L_0 sobre $\mathbb{R}$ $(L_{0\mathbb{R}} = L_0)$. Definimos el funcional $f_{0\mathbb{R}}: L_{0\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ / $f_{0\mathbb{R}}(x) = Re(f_0(x))$ $x \in L_0$. Entonces $f_{0\mathbb{R}}$ es un funcional lineal sobre $L_{0\mathbb{R}}$ (observar: $Re(z+z') = Re\, z + Re\, z'$ y $Re(\lambda z) = \lambda \cdot Re\, z$ $(\lambda \in \mathbb{R})$)

En cuanto a la acotación tenemos $f_{0\mathbb{R}}(x) = Re(\underbrace{f_0(x)}_{\in \mathbb{C}}) \leq |f_0(x)| \overset{(1)}{\leq} p(x)$ $\forall x \in L_0$.

Aplicando Hahn-Banach (real), $\exists$ un funcional lineal $f_{\mathbb{R}}: L \to \mathbb{R}$ tal que $f_{\mathbb{R}}(x) = f_{0\mathbb{R}}(x)$ $\forall x \in L_0$ y $\boxed{f_{\mathbb{R}}(x) \leq p(x) \quad \forall x \in L.}$ (2)

Tenemos $-f_{\mathbb{R}}(x) \underset{\text{lineal}}{=} f_{\mathbb{R}}(-x) \leq p(-x) = p(x)$. Por tanto, tenemos

$\boxed{|f_{\mathbb{R}}(x)| \leq p(x) \ \forall x \in L}$ (3)

Ahora definimos un funcional $f: L \to \mathbb{C}$ por $f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix)$

Veamos que f es un funcional lineal

a) $f(ix) = f_{\mathbb{R}}(ix) - i f_{\mathbb{R}}(-x) = f_{\mathbb{R}}(ix) + i f_{\mathbb{R}}(x) = i(f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(x)) = i f(x) \Rightarrow f(ix) = i f(x)$ $\forall x \in L$ (4). Veamos que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. En efecto, $f(x+y) = f_{\mathbb{R}}(x+y) - i f_{\mathbb{R}}(ix+iy) = f_{\mathbb{R}}(x) + f_{\mathbb{R}}(y) - i(f_{\mathbb{R}}(ix) + f_{\mathbb{R}}(iy)) = f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix) + f_{\mathbb{R}}(y) - i f_{\mathbb{R}}(iy) = f(x) + f(y)$.

Falta probar que $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $f(\lambda x) = f_{\mathbb{R}}(\lambda x) - i f_{\mathbb{R}}(i\lambda x) = \lambda f_{\mathbb{R}}(x) - i \lambda f(ix) = \lambda(f_{\mathbb{R}}(x) - i f(x)) = \lambda \cdot f(x)$

b) $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\lambda = a+bi)$. Entonces se tiene que $f(\lambda x) = f((a+bi)x) = f(ax + bxi) = f(ax) + f(bxi) = a f(x) + b f(xi) \overset{(4)}{=} a f(x) + bi f(x) = (a+bi) f(x) = \lambda \cdot f(x)$. Entonces f es lineal

Veamos que $f(x) = f_0(x)$ $\forall x \in L_0$. Sea $x \in L_0$ se tiene $f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(x) = f_{0\mathbb{R}}(x) - i \cdot f_{0\mathbb{R}}(ix) =$ (recordar que $f_{0\mathbb{R}}(x) = Re\, f_0(x)$ $\forall x \in L_0$) $= Re(f_0(x)) - i\, Re(f_0(ix)) = Re(f_0(x)) - i\, Re(i f_0(x)) =$ (observar que $f_0(x) = u + iv$, luego $i f_0(x) = -v + iu$) $= Re\, f_0(x) - i(-Im(f_0(x))) = Re\, f_0(x) + i\, Im(f_0(x)) = f_0(x)$

Veamos que $f_{\mathbb{R}}(x) = Re(f(x))$ $\forall x \in L$. En efecto, como $f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - i\, \underline{f_{\mathbb{R}}(ix)}$ y $f_{\mathbb{R}}: L \to \mathbb{R}$ luego $f_{\mathbb{R}}(x), f(ix) \in \mathbb{R}$, se tiene $\boxed{Re(f(x)) = f_{\mathbb{R}}(x)}$ (5) $\forall x \in L$. Finalmente veamos que $|f(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in L$. Por red. al absurdo, supongamos que $\exists x_0 \in L$ / $|f(x_0)| > p(x_0)$. Entonces como $p(x_0) \geq 0$, se tiene que

$|f(x_0)|>0 \Rightarrow f(x_0)\neq 0$. Por tanto, se tiene que $f(x_0)=|f(x_0)|\, e^{i\varphi}$ donde φ es un argumento de $f(x_0)$. Sea $y_0 = x_0 \cdot e^{-i\varphi} \in L$, entonces

$f_{\mathbb{R}}(y_0) \underset{(5)}{=} Re(f(y_0)) = Re(f(x_0\, e^{-i\varphi})) = Re(\underbrace{e^{-i\varphi}}_{\in\mathbb{C}} f(x_0)) =$

$=$ (observar que $f(x_0)=|f(x_0)|\cdot e^{i\varphi} \Rightarrow f(x_0)\, e^{-i\varphi} = |f(x_0)|$) $=$

$= Re(|f(x_0)|) = |f(x_0)| > p(x_0)$ # ya que $f_{\mathbb{R}}(y_0) = |f_{\mathbb{R}}(y_0)| >$

$> p(y_0)$ $\quad$ ($p(y_0) = p(e^{-i\varphi}x_0) = |e^{-i\varphi}|\cdot p(x_0) = p(x_0)$)

Definición: Sea L un e.v. real. Sea $f: L \to \mathbb{R}$ un funcional lineal y $M, N \subset L$. Decimos que f separa a M y $N \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)\geq c \;\; \forall x\in M$ y $f(x)\leq c \;\; \forall x \in N$.

Proposición: Un funcional lineal f separa M y $N \Leftrightarrow f$ separa $M-N$ y $\{0\}$. ($M-N = \{z\in L \,/\, z = x-y$ con $x\in M$ e $y\in N\}$)

Demostración: "$\Rightarrow$" Como f separa M y $N \Rightarrow \exists c\in\mathbb{R} / f(x)\geq c$ $\forall x\in M$ y $f(x)\leq c$ $\forall x\in M$. Entonces, como $f(0)=0$. Si $z\in M-N$ $\Rightarrow f(z) = f(x-y) = \underset{x\in M,\, y\in N}{f(x)-f(y)} \geq 0$. Demostrado ($c=0$).

"$\Leftarrow$" Supongamos que f separa $M-N$ y $\{0\}$, entonces existe $c\in\mathbb{R} / f(z)\geq c$ $\forall z\in M-N$ y $\underset{0}{f(0)} \leq c$. Por tanto, $c\geq 0$ luego $f(z) = f(x)-f(y)\geq c\geq 0$, $z=x-y$, $x\in M, y\in N$.

Entonces $f(x)\geq f(y)$ $\forall x\in M$ y $\forall y\in N$. Sea $A = \sup\{f(y) / y\in N\}$, $A\in\mathbb{R}$. Entonces se tiene: $f(x)\geq A$ $\forall x\in M$ y $f(y)\leq A$ $\forall x\in N$ ($c=A$) demostrado.

Proposición: Un funcional lineal f separa M y $N \Leftrightarrow f$ separa $M-\{x\}$ y $N-\{x\}$ $\forall x\in L$.

Demostración: "$\Rightarrow$" Supongamos que f separa M y $N \Rightarrow \exists c\in\mathbb{R} /$ $f(x)\geq c$ $\forall x\in M$ y $f(x)\leq c$ $\forall x\in N$. Sea $x_0\in L$. Veamos que f separa $M-\{x_0\}$ y $N-\{x_0\}$. Tenemos $f(x)\geq c \Leftrightarrow \underbrace{f(x)-f(x_0)}_{f(x-x_0)} \geq c - f(x_0)$ $\forall x\in N \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)-f(x_0)\leq c-f(x_0)$ $\forall x\in N$ (c lo tomamos como $c=f(x_0)$).

"$\Leftarrow$" Como f separa $M-\{x\}$ y $N-\{x\}$ $\forall x$, en particular si $x=0$ ($M-\{0\} = M$ y $N-\{0\}=N$), f separa M y N.

Teorema: Sea L un e.v. real y M y N dos convexos disjuntos y uno de ellos (N o M) que sean cuerpo convexo. Entonces $\exists$ un funcional lineal f que separa M y N.

Demostración: Supongamos que $0 \in \mathrm{Ker}\, M$ (si no fuese así, como $\mathrm{Ker}\, M \neq \emptyset$, $\exists x_0 \in \mathrm{Ker}\, M$ y entonces consideramos los conjuntos $M - \{x_0\}$ y $N - \{x_0\}$)

Sea $y_0 \in N$, entonces: 1) $-y_0 \in \mathrm{Ker}\,(\overset{\text{convexo}}{\widetilde{M-N}})$ y 2) $0 \in \mathrm{Ker}\,(\overset{\text{convexo}}{\widetilde{M-N+y_0}})$

1) Como $0 \in \mathrm{Ker}\, M \underset{\text{def}}{\Rightarrow} 0 \in M$ e $y_0 \in N \Rightarrow 0 - y_0 \in M - N$ (1)

Sea $y \in L$, veamos que $\exists\, \varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tal que $\boxed{-y_0 + ty} \in M-N$ $\forall\, |t| < \varepsilon$. (1) es cierto ya que $0 \in \mathrm{Ker}\, M$: dado y $\exists\, \varepsilon = \varepsilon(y) > 0$ tal que $0 + ty \in M - N$ $\forall\, |t| < \varepsilon$. Por otra parte $-y_0 \in -N \Rightarrow -y_0 + ty \in M-N$ $\forall\, |t| < \varepsilon$. Por tanto $-y_0 \in \mathrm{Ker}\,(M-N)$

2) $0 \in M - N + y_0$ ya que $-y_0 \in M - N \Leftrightarrow 0 = -y_0 + y_0 \in M - N - y_0$. Por otra parte, como $-y_0 + ty \in M - N$ $\forall\, |t| < \varepsilon \Leftrightarrow y_0 - y_0 + M \in$ $\in M - N + y_0 \Rightarrow 0 \in \mathrm{Ker}\,(M - N + y_0)$. Veamos que $y_0 \notin M - N + y_0$ (si $y_0 \in$ $\in M - N + y_0) \Leftrightarrow -y_0 + y_0 \in M - N + y_0 - y_0 \Leftrightarrow 0 \in M - N$ # Por ser $M \cap N = \emptyset$.

Entonces $\exists$ el funcional de Minkowski p sobre $M - N + y_0$ y además $p(y_0) > 1$ (Recordar que $p(x) = \inf\{r > 0 / \frac{x}{r} \in M - N + y_0\}$. Como $y_0 \notin M - N + y_0 \Rightarrow p(y_0) > 1$ (si $p(y_0) \leq 1 \Rightarrow r / \frac{y_0}{r} \in M - N + y_0$ $r \leq 1\}$

Consideramos $L_0 = L(\{y_0\}) = \{\alpha y_0 : \alpha \in \mathbb{R}\}$ y definimos el funcional $f_0 : L_0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_0(\alpha y_0) = \alpha\, p(y_0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Veamos que f_0 es lineal: a) $f_0(\alpha y_0 + \beta y_0) = f_0((\alpha + \beta) y_0) =$ $= (\alpha + \beta)\, p(y_0) = \alpha\, p(y_0) + \beta\, p(y_0) = f_0(\alpha y_0) + f_0(\beta y_0)$

b) $f_0(\underset{\in \mathbb{R}}{\lambda}\, \alpha y_0) = \lambda \underbrace{\alpha\, p(y_0)}_{f_0(\alpha y_0)} = \lambda\, f_0(\alpha y_0)$

Tenemos que probar que $f_0(\alpha y_0) \leq p(\alpha y_0)$

- $\alpha \geq 0$, Entonces $f_0(\alpha y_0) = \alpha\, p(y_0) = p(\alpha y_0)$ Queda demostrado.
- $\alpha < 0$. Entonces $f_0(\alpha y_0) = \underbrace{\underset{\text{neg}}{\alpha} \cdot \underset{\text{posit}}{p(y_0)}}_{\text{neg}} < \underbrace{p(\alpha y_0)}_{\text{siempre es } \geq 0}$

Aplicando el Tª de H-B $\exists\, f : L \rightarrow \mathbb{R}$ lineal / $f|_{L_0} = f_0$ y $f(x) \leq p(x)$ $\forall x \in L$. Sea x / $x \in M - N - y_0 \Rightarrow p(x) \leq 1$ ($p(x) = \inf\{r > 0 : \frac{x}{r} \in M - N + y_0\}$ ya que $r = 1\}$. Entonces se tiene que $f(x) \leq p(x) \leq 1$ $\forall x \in M - N + y_0$.

Por otro lado, $y_0 \in L_0$ luego $f_0(y_0) = f(y_0)$ ($f|_{L_0} = f_0$)

Pero $f_0(y_0) = p(y_0) > 1$. Para $c = 1$ queda demostrado:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \leq 1 \quad \forall x \in M - N + y_0 \\ f(y_0) > 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ separa } M - N + y_0 \text{ e } y_0.$$

Por la prop 2, f separa $M-N$ y O. Por la prop. 1, f separa M y N.

Ejercicio: Sean $f_1, \dots, f_n$ y f funcionales sobre un e.v. L tales que $\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i \subset \ker f$. Entonces $\exists$ escalares α_i $i=1,\dots,m$ /
$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$

Solución (Inducción) Supongamos que $n=1$, $\exists x_1 \in L / f(x_1)=1$
(Observación: si $f \equiv 0$, entonces la solución es trivial ya que podemos tomar $\alpha_i = 0$ $\forall i=1,\dots,m$) Luego supongamos que $f \neq 0$
Como $\ker f_1 \subset \ker f \Rightarrow f_1(x_1) \neq 0$. Ponemos $\boxed{x = \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)} x + y}$ (1)

$f_1(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)} \cdot \cancel{f_1(x_1)} + f_1(y) \Rightarrow f_1(x) = 0 \Rightarrow y \in \ker f_1 \subset \ker f$.

Tomando f sobre (1), $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_1(x_1)} \cdot \underbrace{f(x_1)}_{1} + \underbrace{f(y)}_{0}$

$f(x) = \underbrace{\frac{1}{f_1(x_1)}}_{\alpha_1} f_1(x)$ $\forall x$; $f(x) = \alpha_1 \cdot f_1(x)$ $\forall x \in L \Leftrightarrow f = \alpha_1 f_1$

Demostración:

Supongamos que la propiedad es cierta $\forall 1 \leq k < m$, veamos que es cierta para m. Siempre se puede suponer que las f_i $i=1,\dots,m$ son L.I. ya que si f_j con $j \in J \subset \{1,2,\dots,m\}$ / f_j son L.I. entonces $\boxed{\bigcap_{j \in J} \ker f_j = \bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i}$ (2), luego si fuese cierta para las f_j, se tendría que $f = \sum_{j \in J} \alpha_j f_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i$
con $\alpha_i = \alpha_j$ si $i \in J$
$\alpha_i = 0$ si $i \notin J$

Veamos que (2) es cierto: a) $\bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i \subset \ker f_j$

b) $\bigcap_{j \in J} \ker f_j \subset \bigcap_{i=1}^{m} \ker f_i$. Si $x \in \bigcap_{j \in J} \ker f_j \Rightarrow f_j(x) = 0$ $\forall j \in J$
$\Rightarrow f_i(x) = 0$ $\forall i$ (ya que $f_{i \notin J} = $ C.L. de f_j)

Supongamos (reducción al abs.) $\exists x_i \in L / f_i(x_i) = 1$ y $f_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$ $\forall i,j = 1,\dots,k$ (para $k=1$ se tiene $f_i(x_i) = 1$
Para $k=2$, $\ker f_1 \not\subset \ker f_2$ y $\ker f_2 \not\subset \ker f_1$ (aplicando el caso $m=1$) $\Rightarrow \exists x_2 \in \ker f_1$ / $x_2 \notin \ker f_2 \Rightarrow f_1(x_2) = 0$
y $f_2(x_2) = 1$ y análogamente $\exists x_1 \in \ker f_2$ / $x_1 \notin \ker f_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f_2(x_1) = 0$ y $f_1(x_1) = 1$

Supongamos que para $k = n-1$, $\exists\, x_i \ (i = 1, \dots, n-1) / f_i(x_i) = 1$ y $f_i(x_j) = 0 \quad \forall\, i \neq j,\ i,j = 1,2,\dots,n-1$

Tenemos $\bigcap_{i=1}^{n-1} \ker f_i \not\subset \ker f_m$ (Si fuese cierto, entonces por la H.I se tendría $f_m = C.L\ f_i \ (i = 1,2,\dots,m-1)$ absurdo, por ser todas las f_i L.I $\quad i = 1,2,\dots,n$

Por tanto $\exists\, x_m \in \bigcap_{i=1}^{n-1} \ker f_i \,/\, x_m \notin \ker f_m \Rightarrow f_i(x_m) = 0$ $\forall\, i = 1,2,\dots,n-1$ y $f_m(x_m) = 1$

Ponemos $x = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i + y \quad (3)$. Si $i \in \{1,2,\dots,n\}$, entonces

$$f_i(x) = \sum \underbrace{f_i(x) f_i(x_i)}_{f_i(x)} + f_i(y) \Rightarrow f_i(y) = 0 \Rightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker f_i \subset \ker f$$

$\Rightarrow f(y) = 0$. Por tanto, actuando f sobre (3) queda:

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) f(x_i) \Rightarrow$ para $\lambda_i = f(x_i)$, se tiene que $f = \sum \lambda_i f_i$

~~Definición: Sea L un e.v., un funcional convexo finito p diremos que es una norma sobre L~~