Taller interpolación

Julián Arturo Calle, Omar Espinel y Osman Beltran

27 de Marzo 2019

1 Problema 1

- Partimos a partir del hecho que tenemos n puntos, esto significa que podemos crear un sistema de n ecuaciones y n incógnitas.

$$P_n(x_0); \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = Y_0 \tag{1}$$

$$P_n(x_1); \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = Y_1 \tag{2}$$

$$... \tag{3}$$

$$P_n(x_n); \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = Y_n \tag{4}$$

  Podemos decir que $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, son n incógnitas y el polinomio es de grado n. En general, para los puntos $(x_0, y_0)(x_1, y_1)(x_n, y_n)$ el polinomio interpolante será de grado $\leq n$.

- Ya con las n ecuaciones planteadas, podemos expresarlo en una matriz de n x n

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & ... & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & ... & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & ... & x_n \\ & & ... & & \\ 1 & x_1 & x_2 & ... & x_n \end{bmatrix}$$

- Esta matriz conocida como *la matriz de Vandermonde* y puede ser utilizada para resolver los coeficientes de la ecuación.

- Al final obtenemos una función final, al estilo

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \tag{5}$$

  Con la que podremos hallar los puntos interpolantes de la función, a partir de los puntos dados.

2 Problema 2

Considere el comportamiento de gases no ideales se describe a menudo con la ecuación virial de estado. los siguientes datos para el nitrógeno :

T(K) 100 200 300 400 450 500 600

B(cm3/mol) -160,-35, -4.2, 9.0, ? , 16.9 21.3

El comportamiento de los gases no ideales se describe a menudo con la *Ecuación viral del estado*

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V^2} + ..., \tag{6}$$

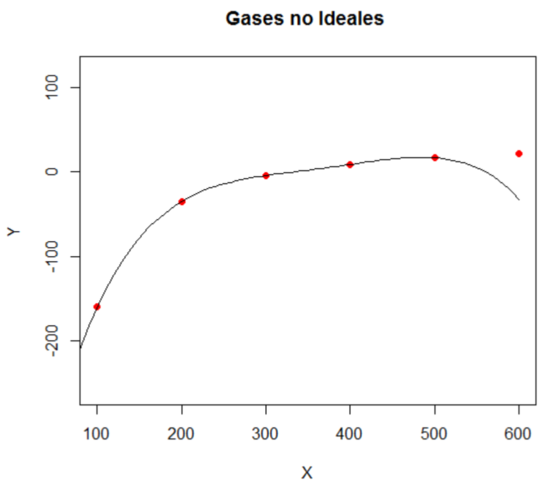
donde P es la presión, V el volumen molar del gas, T es la temperatura Kelvin y R es la constante del gas ideal. Los coeficientes $BC(T), ...$ son el segundo y tercer coeficiente viral, respectivamente. en la practica se usa la serie truncada

$$\frac{PV}{RT} \approx 1 + \frac{B}{V} \tag{7}$$

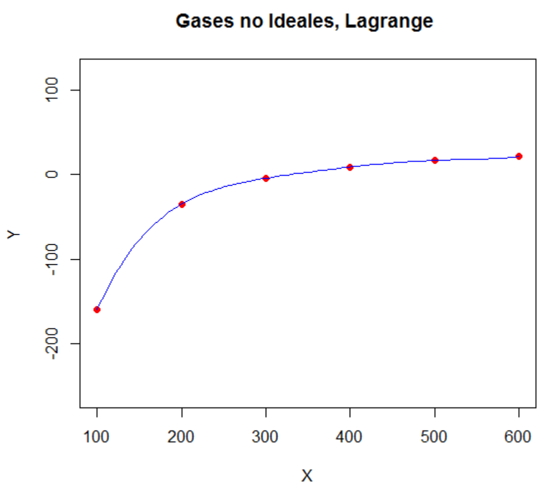
- Determine un polinomio interpolante para este caso(escriba el polinomio)
- Utilizando el resultado anterior calcule el segundo y tercer coeficiente virial a 450K
- Grafique los puntos y el polinomio que ajusta
- Utilice la interpolación de Lagrange y escriba el polinomio interpolante
- Grafique los puntos y el polinomio interpolante de Lagrange
- ¿Cuál es el segundo y tercer coeficiente virial a 450K?. con el método de Lagrange
- Compare su resultado con la serie truncada (modelo teórico), cuál de las tres aproximaciones es mejor por qué?

2.1 Respuestas:

- $-573.9+6.63535*x-0.03183458*x^2+7.766667e-05*x^3-9.404167e-08*x^4$
- El volumen a una temperatura de 450K seria $\approx 15.35547\frac{cm^3}{mol}$



-
- $-573.9 + 6.63535 * x - 0.0318345833333333 * x^2 + 7.76666666666666e - 5 * x^3 - 9.40416666666667e - 8 * x^4 + 4.48333333333333e - 11 * x^5$



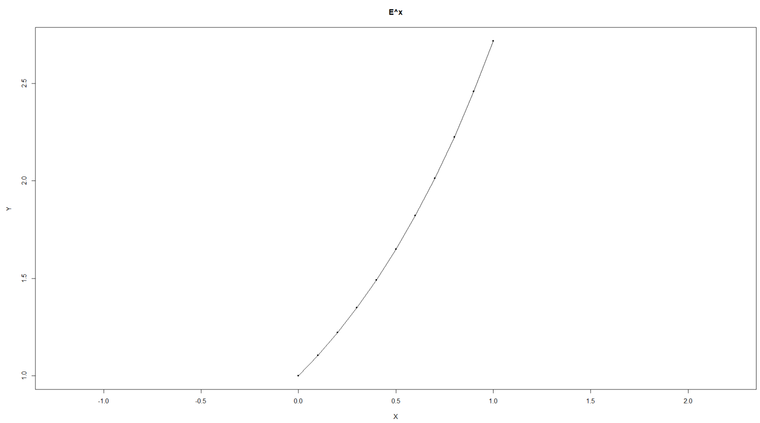
- .png
- El volumen a una temperatura de 450K usando el polinomio generador de Lagrange baricantrico $\approx 15.38855 cm^3 mol$

3 Problema 3

A partir de la siguiente ecuación

$$f(x) = e^x \quad [0,1] \tag{8}$$

3.1 Gráfica usando tabulación en intervalos de 0.1



3.2 Interpolación por Lagrange

4 Problema 4

En la tabla que sigue aparece las estadísticas de un curso con la cantidad de estudiantes en cada rango de notas.

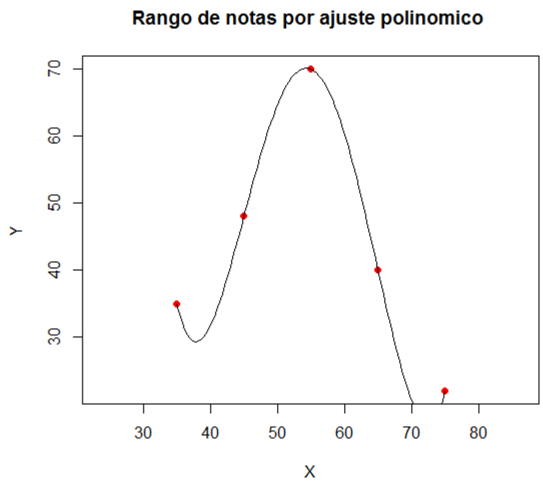
Rango de Notas 30-40 40-50 50-60 60-70 70-80

No Estudiantes 35 48 70 40 22

- Estime la cantidad de estudiantes con nota menor o igual a 55. Utilice un ajuste polinómico
- Estime la cantidad de estudiantes con nota menor o igual a 55. Utilice un ajuste de Lagrange

4.1 Respuestas:

4.1.1 a.



El polinomio generado para ajustar la estadística es: $3873.68 - 310.4417 * x + 9.099792 * x^2 - 0.1143333 * x^3 + 0.0005208333 * x^4$. Por tanto la cantidad de estudiantes que obtienen calificación de menor o igual a 55 sería:

$$(\frac{P}{P_t}) * T \tag{9}$$

Donde P es el rango de la población a saber, P_t es el rango de población total y T es el total de la población.

lo que se puede aproximar a

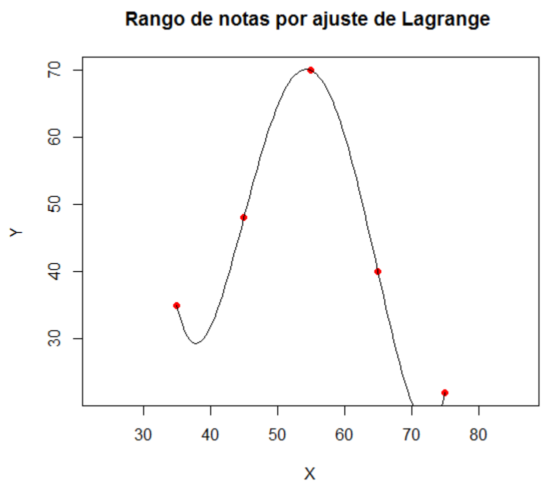
$$\frac{(\int_i^r P(x)dx)}{(\int_i^t P(x)dx)} * T \tag{10}$$

donde $P(x)$ es el polinomio interpolador, T es la población total

$$\frac{976.162}{1802.44} * 215 = 116.43 \approx 116 \tag{11}$$

Por ajuste polinómico la cantidad de personas cuya nota en menor o igual a 55 es 116.

4.1.2 b.



El polinomio generado para ajustar la estadística es: $495831/128 - 37253 * x/120 + 43679 * x^2/4800 - 343 * x^3/3000 + x^4/1920$. Por tanto la cantidad de estudiantes que obtienen calificación de menor o igual a 55 sería:

$$(\frac{P}{P_t}) * T \tag{12}$$

Donde P es el rango de la población a saber, P_t es el rango de población total y T es el total de la población.

lo que se puede aproximar a

$$\frac{(\int_i^r P(x)dx)}{(\int_i^t P(x)dx)} * T \tag{13}$$

donde $P(x)$ es el polinomio interpolador, T es la población total

$$\frac{976.11}{1802.2} * 215 = 116.44859 \approx 116 \tag{14}$$

Por ajuste de Lagrange la cantidad de personas cuya nota en menor o igual a 55 es 116.

5 Problema 6

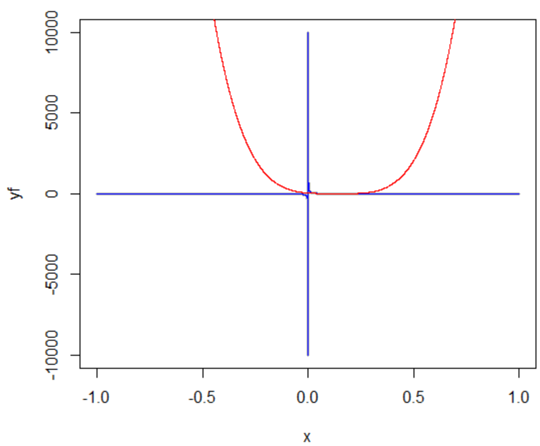
Utilice el polinomio de Taylor para interpolar $f(x) = e^x, x_0 = 0$ y $f(x) = \frac{1}{x}$

- a. Implemente un código en R para la solución del problema con 5 cifras
- b. Escriba el polinomio resultante en cada caso
- c. Considera que el polinomio es un buen interpolador, justifique su respuesta

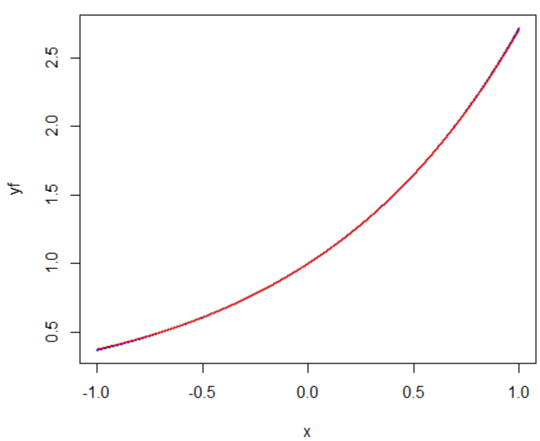
5.1 Respuesta:

- a. Ver archivo *punto 6 taller interpol.r*
- b. El polinomio interpolador de $f(x) = e^x$ es: $p(x) = 1 + \frac{1}{1!} * x + \frac{1}{2!} * x^2 + \frac{1}{3!} * x^3 + \frac{1}{4!} * x^4$.

  El polinomio interpolador de $f(x) = \frac{1}{x}$ es: $p(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4$.
- c. El error en $fx = 1/x : 0.0009009009$ para $x = 0.1$



El error en $fx = e^x : 0.000100005$ para $x = 0$



El Polinomio es buen interpolador dado que tiene un error absoluto muy bajo, por lo que es ideal para soluciones que requieran precisión, sin embargo solo puede funcionar si se tiene la función original o la derivada de la misma, y únicamente da una aproximación para un punto especifico.

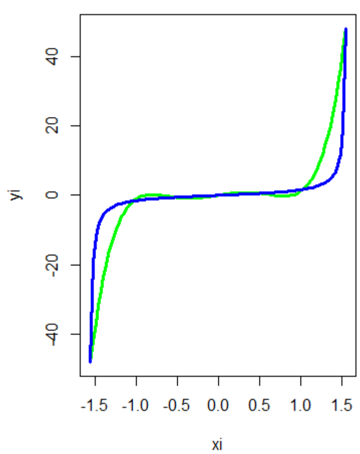
6 Problema 7

Se desea aproximar la funcion $tan(x)$ en el intervalo $[pi/2, -pi/2]$

- a. Considerar como nodos de interpolación los puntos $xk = k.a, parak = 0, 1, 2, 3$, precisamente en este orden. Utilice una interpolación polinómica y escriba el polinomio resultante.
- b. Grafique por lo menos 10 puntos y el polinomio resultante
- c. Utilice el método de Lagrange 150 intervalos. ¿Cuál es el error máximo apreciado en la tabla de valores?
- d.Determine el a que minimice el error máximo. Explicar el procedimiento seguido en su determinación, y demuestre su resultado

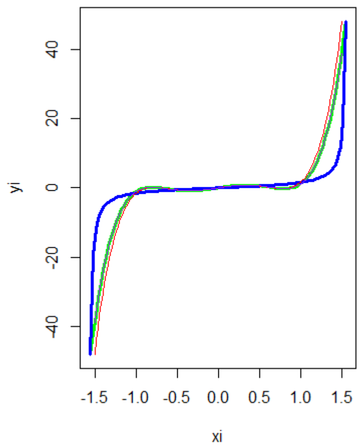
6.1 Respuesta

- a. Ver archivo *punto7.r* El polinomio interpolador es: $p(x) = 3.739463 * x - 12.56863 * x^3 + 9.956601 * x^5$.
- b. Ver archivo *punto7.r*



- c. El error máximo apreciado en la tabla de valor es de 0.94 entre el polinomio de Lagrange y el polinomio calculado

Se incluye la gráfica completa con todas las curvas:



- d. Se recalcula una a diferente que produce el mínimo error entre las probadas, el criterio para escogerla fue que quedaran los puntos entre los componentes 1 2 y 3 de las k lo mas equidistante posible y que estuviera en puntos donde la pendiente de la curva cambiase