INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

INGENIERÍA MATEMÁTICA

FORMULARIO

JESÚS ALAN ESPINOSA GARCÍA

PROFESOR:

MENDEL ESQUIVEL RICARDO

MATERIA:

MÉTODOS NUMÉRICOS I

Ciudad de México, 2023

Índice general

Capítulo 1

Unidad 1

1.1. Teoremas y resultados de continuidad

Definición.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. La sucesión **converge** a un número x(el límite) si
$\forall \epsilon > 0$ un $N_\epsilon$tal que $n > N_\epsilon$implica $|x_n - x| < \epsilon$

Teorema del Valor extremo

Si $f \in C[a, b]$ entonces existirá $c_1, c_2 \in [a, b]$ con $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para cada $x \in [a, b]$. Si además f es diferenciable en (a,b), los numeros c_1 y c_2 estarán ya en los extremos de [a,b] o donde f' sea cero.

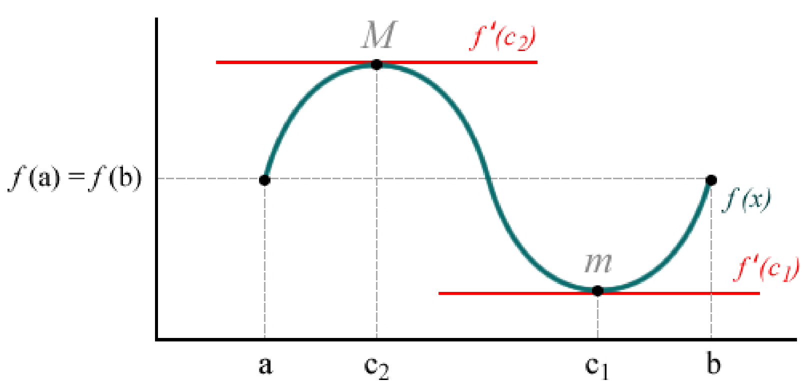

Figura 1.1: Teorema del valor extremo

Teorema del valor intermedio

Si $f \in C[a,b]$ y k es un numero cualquiera entre f(a) y f(b), existirá un número c entre (a,b) para el cual: f(c)=k.

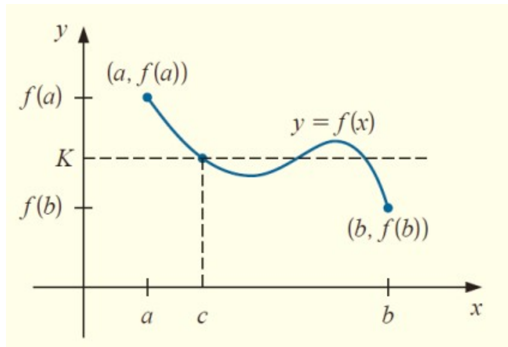

Figura 1.2: Teorema del valor intermedio

Teorema Generalizado de Rolle

Supongamos que $f \in C[a,b]$ es n veces diferncialble en (a,b). Si f(x) es cero en n+1 puntos distintos $x_0, x_1, ..., x_n \in [a,b]$, entonces existirá un número c en (a,b) con $f^{(n)}(c) = 0$

NOTA:

$|cos(x)| \leq 1$
$|sen(x)| \leq |x|$
Verifiquemos lo segundo.
Inmediatamente se puede inferir que para cualquier x tal que $1 \leq |x|$
. Ahora bien para el intervalo $[-1,1]$ y para $x \in [-1,1]$ se tiene que por TVM :
$f'(c) = cos(c) = \frac{sen(x)-sen(0)}{x-0} = \frac{sen(x)}{x}$
Como $|cos(c)| \leq 1$ entonces:
$|\frac{sen(x)}{x}| \leq 1 \Rightarrow |sen(x)| \leq |x|$

Teorema de Taylor

Supongamos que $f \in C^n[a,b]$ tal que f^{n+1} existe en [a,b] y que $x_0 \in [a,b]$.Para toda $x \in [a,b]$habrá un numero $\xi(x)$ entre x_0 y x tal que:
$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$
donde:
$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k}{k!}(x_0)(x-x_0)^k$

y $R_n(x) = \frac{f^{n+1}}{(n+1)!}(\xi(x))(x - x_0)^{k+1}$

Ejercicio usando el Teorema de Taylor

Determine el polinomio de Taylor de tercer grado para f(x) = Cos(x) respecto a $x_0 = 0$

Solucion:
Sean:
$f(x) = cos(x) \qquad f(x_0) = 1$
$f^1(x) = -sen(x) \qquad f^1(x_0) = 0$
$f^2(x) = -cos(x) \qquad f^2(x_0) = 1$
$f^3(x) = sen(x) \qquad f^3(x_0) = 0$
$f^4(x) = cos(x) \qquad f^4(x_0) = 1$
De donde el polinomio de Taylor nos queda:
$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$
Con:
$P_n(x) = 1 - \frac{(x)^2}{2!}$
$R_n(x) = \frac{Cos(\xi(x))(x)^4}{4!}$

Use el polinomio de Taylor para aproximar Cos(0.01)

Solucion:
Sea $Cos(x) = 1 - \frac{(x)^2}{2!} + \frac{Cos(\xi(x))(x)^4}{4!}$
$Cos(0{,}01) = 1 - \frac{(0{,}01)^2}{2!} + \frac{Cos(\xi(0{,}01))(0{,}01)^4}{4!} \approx 0{,}99995$

Capítulo 2