TD4 : Formes bilinéaires & formes quadratiques

Module : Mathématiques de Base 3 **Classes :** $2^{\text{ème}}$ année **AU : 2023 / 2024**

Correction

Exercice 1 :

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad q(X) = {}^t XM_\phi X$

$$q(X) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix},$$

$$= 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3.$$

La forme bilinéaire symétrique assosiée à q (la forme polaire) est donnée par :
$\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

$$\phi(X, Y) = {}^t XM_\phi Y = 2x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + y_2x_3 + x_1y_3 + y_1x_3.$$

2. Le noyau de ϕ est donnée par :

$$\ker(\phi) = \{X \in \mathbb{R}^3 / \forall Y \in \mathbb{R}^3, \phi(X, Y) = 0\},$$
$$= \{X \in \mathbb{R}^3 / \forall Y \in \mathbb{R}^3, {}^t XM_\phi Y = 0\},$$
$$= \{X \in \mathbb{R}^3 / \forall Y \in \mathbb{R}^3, {}^t YM_\phi X = 0\}.$$

Cela revient à résoudre :

$$M_\phi X = 0_{\mathbb{R}^3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$(1) - (2) \Rightarrow x_1 = 0$

$(2) \Rightarrow x_2 = -x_3$

$(3) \Rightarrow x_3 = 0.$

Donc $x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow \ker \phi = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

3. q(x)= 2 $x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$,
   $= 2[x_1^2 + x_1(x_2 + x_3)] + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$,
   $= 2[x_1 + (\frac{x_2+x_3)}{2})]^2 - \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_3^2}{2} - x_2x_3 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$,
   $= 2[x_1 + (\frac{x_2+x_3)}{2})]^2 + \frac{1}{2}(x_2^2 + 2x_2x_3) - \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_3^2$,
   $= 2[x_1 + (\frac{x_2+x_3)}{2})]^2 + \frac{1}{2}[(x_2 + x_3)]^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_3^2 + 2x_3^2$,
   $= 2[x_1 + (\frac{x_2+x_3)}{2})]^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)^2 - \frac{x_3^2}{2} + \frac{3}{2}x_3^2$,
   $= 2[x_1 + (\frac{x_2+x_3)}{2})]^2 + + \frac{1}{2}[(x_2 + x_3)]^2 + x_3^2$.

   Donc
   $$q(x) = 2l_1(x)^2 + \frac{1}{2}l_2(x)^2 + l_3(x)^2.$$

4. -La signature est $(3, 0)$
   - Le rang(q)= ? ?
   Méthode 1 : D'aprés la $3^{éme} questionona$:$\ker(\phi) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. or $\ker(\phi) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \Rightarrow \phi$ est non dégénérée.
   Le théorème du rang donne que
   $$rg(\phi) = rg(q) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

   Méthode 2 : On a $(r, s) = (3, 0)$. Alors, $rg(q) = r+s = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \Rightarrow \phi$ est non dégénérée.

5. On a ϕ est une forme bilinéaire symétrique et définie positive (car la signature de q est $(3, 0)$) ; donc ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

6. a)

$$N(V_1) = \sqrt{\phi(V_1, V_1)} = \sqrt{q(V_1)} = \sqrt{6} \quad \text{et} \quad N(V_2) = \sqrt{\phi(V_2, V_2)} = \sqrt{q(V_2)} = \sqrt{17}.$$

b)

$$
\begin{aligned}
d(V_1, V_2) &= N(V_1 - V_2) \\
&= \sqrt{q(V_1 - V_2)} \\
&= \sqrt{q(1, -1, -2)} = 3. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Exercice 2 :

1. — Soient $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Symétrie :

$$
\begin{aligned}
b(X_2, X_1) &= b((x_2, y_2), (x_1, y_1)) = 3x_2x_1 + 3y_2y_1 - (x_2y_1 + x_1y_2) \\
&\qquad = 3x_1x_2 + 3y_1y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1) \\
&= b((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = b(X_1, X_2)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ b est symétrique.

— Soient $X_1 = (x_1, y_1)$, $X_2 = (x_2, y_2)$ et $X_3 = (x_3, y_3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Linéarité par rapport à la première variable :

$$
\begin{aligned}
b(X_1 + \lambda X_2, X_3) &= b((x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2), (x_3, y_3)) = b((x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2), (x_3, y_3)) \\
&= 3(x_1 + \lambda x_2)x_3 + 3(y_1 + \lambda y_2)y_3 - ((x_1 + \lambda x_2)y_3 + x_3(y_1 + \lambda y_2)) \\
&= 3x_1x_3 + 3\lambda x_2x_3 + 3y_1y_3 + 3\lambda y_2y_3 - (x_1y_3 + \lambda x_2y_3 + x_3y_1 + \lambda x_3y_2) \\
&= 3x_1x_3 + 3y_1y_3 - x_1y_3 - x_3y_1 + 3\lambda x_2x_3 + 3\lambda y_2y_3 - \lambda x_2y_3 - \lambda x_3y_2 \\
&= 3x_1x_3 + 3y_1y_3 - (x_1y_3 + x_3y_1) + \lambda[3x_2x_3 + 3y_2y_3 - (x_2y_3 + x_3y_2)] \\
&= b((x_1, y_1), (x_3, y_3)) + \lambda b((x_2, y_2), (x_3, y_3)) \\
&= b(X_1, X_3) + \lambda b(X_2, X_3)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ b est linéaire par rapport à la première variable.

linéarité par rapport à la première variable $+$ symétrique $\Rightarrow$ bilinéaire symétrique

2.

$$
A = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}
$$

$B = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$, avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$

$$\begin{aligned}
b(e_1, e_1) &= b((1,0),(1,0)) = 3\times 1\times 1 + 3\times 0\times 0 - (1\times 0 + 0\times 1) = 3\\
b(e_1, e_2) &= b(e_2, e_1) = b((1,0),(0,1)) = 3\times 1\times 0 + 3\times 0\times 1 - (1\times 1 + 0\times 0) = -1\\
b(e_2, e_2) &= b((0,1),(0,1)) = 3\times 0\times 0 + 3\times 1\times 1 - (0\times 1 + 1\times 0) = 3
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)^2 - 1 = (3-\lambda-1)(3-\lambda+1)\\
&= (2-\lambda)(4-\lambda)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Les valeurs propres de A sont 2 et 4.

4. A admet deux valeurs propres **positives non nulles** $\Longrightarrow$ b est **défine positive**
5. b est une forme :

$$\left.\begin{array}{l} \text{bilinéaire} \\ \text{symétrique} \\ \text{définie} \\ \text{positive} \end{array}\right\} \Rightarrow \; b \text{ est un produit scalaire}$$

6. Soit $X = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$

$$\| X \| = \sqrt{b(X,X)} = \sqrt{b((x_1,y_1),(x_1,y_1))} = \sqrt{3x_1^2 + 3y_1^2 - 2x_1y_1}$$

7.

$$\begin{aligned}
\| X_1 + X_2 \|^2 &= b(X_1 + X_2, X_1 + X_2)\\
&= b(X_1, X_1) + b(X_1, X_2) + b(X_2, X_1) + b(X_2, X_2)\\
&= \| X_1 \|^2 + 2\, b(X_1, X_2) + \| X_2 \|^2
\end{aligned}$$

$$\| X_1 + X_2 \|^2 = \| X_1 \|^2 + \| X_2 \|^2 \Longrightarrow b(X_1, X_2) = 0$$

Or b est un produit scalaire

$$b(X_1, X_2) = 0 \Longrightarrow X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont orthogonaux}$$

Exercice 3 :

1. — $q(\lambda X) = \lambda^2 q(X)$.
   Soient $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
q(\lambda X) &= q(\lambda(x,y,z)) = q((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) \\
&= 2(\lambda x)^2 + 2\times\lambda x\times\lambda y + 2\times\lambda x\times\lambda z + 2\times(\lambda y)^2 + 2\times\lambda y\times\lambda z + 2(\lambda z)^2 \\
&= 2\lambda^2x^2 + 2\lambda^2xy + 2\lambda^2xz + 2\lambda^2y^2 + 2\lambda^2yz + 2\lambda^2z^2 \\
&= \lambda^2(2x^2+2xy+2xz+2y^2+2yz+2z^2) = \lambda^2 q((x,y,z)) = \lambda^2 q(X)
\end{aligned}$$

— **Forme polaire**

Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$.

$$\phi(X_1, X_2) = \frac{1}{2}[q(X_1 + X_2) - q(X_1) - q(X_2)]$$

est une forme bilinéaire symétrique ?

$$\phi(X_1, X_2) = \frac{1}{2}[q(X_1 + X_2) - q(X_1) - q(X_2)]$$

$$\begin{aligned}
q(X_1+X_2) &= q((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) = q((x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)) \\
&= 2(x_1+x_2)^2 + 2(x_1+x_2)(y_1+y_2) + 2(x_1+x_2)(z_1+z_2) \\
&\quad +2(y_1+y_2)^2 + 2(y_1+y_2)(z_1+z_2) + 2(z_1+z_2)^2 \\
&= 2(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2) + 2(x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2) \\
&\quad +2(y_1^2+y_2^2+2y_1y_2) + 2(y_1z_1+y_1z_2+y_2z_1+y_2z_2) \\
&\quad +2(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2) \\
q(X_1) &= 2x_1^2+2x_1y_1+2x_1z_1+2y_1^2+2y_1z_1+2z_1^2 \\
q(X_2) &= 2x_2^2+2x_2y_2+2x_2z_2+2y_2^2+2y_2z_2+2z_2^2
\end{aligned}$$

$$\phi(X_1, X_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2y_1y_2 + y_1z_2 + y_2z_1 + 2z_1z_2$$

ϕ est symétrique

$$\begin{aligned}
\phi(X_2, X_1) &= \frac{1}{2}[q(X_2+X_1) - q(X_2) - q(X_1)] \\
&= \phi(X_1, X_2)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ ϕ est symétrique.

Linéarité par rapport à la première variable :

Soient $X_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $X_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $X_3 = (x_3, y_3, z_3)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\phi(X_1+\lambda X_2, X_3) &= \phi((x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)) \\
&= \phi((x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2, z_1+\lambda z_2),(x_3,y_3,z_3)) \\
&= 2(x_1+\lambda x_2)x_3+(x_1+\lambda x_2)y_3+x_3(y_1+\lambda y_2) \\
&\quad +2(y_1+\lambda y_2)y_3+(y_1+\lambda y_2)z_3+y_3(z_1+\lambda z_2)+2(z_1+\lambda z_2)z_3 \\
&= 2x_1x_3+x_1y_3+x_3y_1+2y_1y_3+y_1z_3+y_3z_1+2z_1z_3 \\
&\quad +2\lambda x_2x_3+\lambda x_2y_3+x_3\lambda y_2+2\lambda y_2y_3+\lambda y_2z_3+y_3\lambda z_2+2\lambda z_2z_3 \\
&= \phi(X_1,X_3)+\lambda\phi(X_2,X_3)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ ϕ est linéaire par rapport à la première variable.

linéarité par rapport
à la première variable + symétrique $\Longrightarrow$ bilinéaire symétrique

2.

$$M=\begin{pmatrix} \phi(e_1,e_1) & \phi(e_1,e_2) & \phi(e_1,e_3) \\ \phi(e_2,e_1) & \phi(e_2,e_2) & \phi(e_2,e_3) \\ \phi(e_3,e_1) & \phi(e_3,e_2) & \phi(e_3,e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$B=(e_1,e_2,e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, avec $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$

$$\begin{aligned}
\phi(e_1,e_1) = &\ \phi((1,0,0),(1,0,0)) \\
&= 2*1*1+1*0+0*0+2*0*0+0*0+0*0+2*0*0=2 \\
\phi(e_1,e_2) = &\ \phi(e_2,e_1)=\phi((1,0,0),(0,1,0)) \\
&= 2*1*0+1*1+0*0+2*0*1+0*0+1*0+2*0*0=1 \\
\phi(e_1,e_3) = &\ \phi(e_3,e_1)=\phi((1,0,0),(0,0,1)) \\
&= 2*1*0+1*0+0*0+2*0*0+0*1+0*0+2*0*1=0
\end{aligned}$$

3.

$$det(M)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(4-1)-2=4$$

$det(M)\neq 0 \iff rang(\phi)=dim(\mathbb{R}^3) \iff$ ϕ est non dégénérée.

4.

$$
\begin{aligned}
q(x,y,z) &= 2x^2+2xy+2xz+2y^2+2yz+2z^2 \\
&= 2(x^2+xy+xz)+2y^2+2yz+2z^2 \\
&= 2(x^2+x(y+z))+2y^2+2yz+2z^2 \\
&= 2(x^2+2x\frac{y+z}{2}+(\frac{y+z}{2})^2-(\frac{y+z}{2})^2)+2y^2+2yz+2z^2 \\
&= 2(x+\frac{y+z}{2})^2-2(\frac{y+z}{2})^2+2y^2+2yz+2z^2 \\
&= 2(x+\frac{y+z}{2})^2-\frac{1}{2}(y+z)^2+2y^2+2yz+2z^2 \\
&= 2(x+\frac{y+z}{2})^2+\frac{3}{2}y^2+yz+\frac{3}{2}z^2 = 2(x+\frac{y+z}{2})^2+q_1(y,z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_1(y,z) &= \frac{3}{2}y^2+yz+\frac{3}{2}z^2 = \frac{3}{2}(y^2+\frac{2}{3}yz)+\frac{3}{2}z^2 \\
&= \frac{3}{2}(y^2+\frac{2}{3}yz+(\frac{z}{3})^2-abblue(\frac{z}{3})^2Mycolor2)+\frac{3}{2}z^2 \\
&= \frac{3}{2}(y+\frac{z}{3})^2-(\frac{z}{3})^2+\frac{3}{2}z^2 = \frac{3}{2}(y+\frac{z}{3})^2+\frac{4}{3}z^2
\end{aligned}
$$

$$
q(x,y,z) = 2(x+\frac{y+z}{2})^2+\frac{3}{2}(y+\frac{z}{3})^2+\frac{4}{3}z^2
$$

5. La signature de q est $(3,0)$.
6. La signature de q est $(3,0)$ et $dim(\mathbb{R}^3)=3$. Alors, q est définie positive.

7. ϕ est une forme :

$$
\left.\begin{array}{l}\text{bilinéaire}\\ \text{symétrique}\\ \text{définie}\\ \text{positive}\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad b \text{ est un produit scalaire}
$$

8. Soient $X\in\mathbb{R}^3$ et $X'\in\mathbb{R}^3$.

$$
N(X)=\sqrt{\phi(X,X)} \quad ; \quad d(X,X')=N(X-X')
$$

Exercice 4

1. — **Symétrie :**

$$\begin{aligned}\Phi(Q,P) &= Q(0)P(0)+Q(1)P(1)+Q(2)P(2) = P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2)\\ &= \Phi(P,Q)\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ **Φ est symétrique**

— **Linéarité par rapport à la première variable :**

$$\begin{aligned}\phi(P_1+\lambda P_2,Q) &= (P_1+\lambda P_2)(0)Q(0)+(P_1+\lambda P_2)(1)Q(1)+(P_1+\lambda P_2)(2)Q(2)\\ &= P_1(0)Q(0)+P_1(1)Q(1)+P_1(2)Q(2)\\ &\quad +\lambda(P_2(0)Q(0)+P_2(1)Q(1)+P_2(2)Q(2))\\ &= \Phi(P_1,Q)+\lambda\Phi(P_2,Q)\end{aligned}$$

linéarité par rapport à la première variable $+$ symétrique $\Longrightarrow$ bilinéaire symétrique

2.

$$M = \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,X) & \phi(1,X^2)\\ \phi(X,1) & \phi(X,X) & \phi(X,X^2)\\ \phi(X^2,1) & \phi(X^2,X) & \phi(X^2,X^2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5\\ 3 & 5 & 9\\ 5 & 9 & 17\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\Phi(1,1) &= 1*1+1*1+1*1=3\\ \Phi(1,X) &= \Phi(X,1)=0*1+1*1+2*1=3\\ \Phi(1,X^2) &= \Phi(X^2,1)=1*0+1*1+1*(2^2)=5\\ \Phi(X,X) &= 0*0+1*1+2*2=5\\ \Phi(X,X^2) &= \Phi(X^2,X)=0*0+1*1+2*(2^2)=9\\ \Phi(X^2,X^2) &= 0*0+1*1+(2^2)*(2^2)=17\end{aligned}$$

3. Φ est une forme :
   - bilinéaire symétrique
   - définie : Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ / $P(X)=aX^2+bX+c$ avec $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
\Phi(P,P)=0 \quad &\Longrightarrow \quad P^2(0)+P^2(1)+P^2(2)=0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} P(0) & = & 0\\ P(1) & = & 0\\ P(2) & = & 0\end{array}\right.\\
&\Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} c & = & 0\\ a+b+c & = & 0\\ 4a+2b+c & = & 0\end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} c & = & 0\\ a & = & -b\\ b & = & -2a\end{array}\right.\\
&\Longrightarrow \quad a=b=c=0 \quad \Longrightarrow \quad P\equiv 0
\end{aligned}
$$

— positive :

$$\Phi(P,P)=P^2(0)+P^2(1)+P^2(2)\geq 0 \implies \text{positive}$$

Donc, Φ est un produit scalaire.

4.

$$
\begin{aligned}
\Phi \text{ est définie} \quad &\Longrightarrow \quad \Phi \text{ est non dégénérée}\\
&\Longrightarrow \quad rg(\Phi)=dim(\mathbb{R}_2[X])=3
\end{aligned}
$$

et comme Φ est positive , alors la signature de Φ est $(3,0)$.

5.

$$
\begin{aligned}
\Phi(P_1,P_2) &= P_1(0)P_2(0)+P_1(1)P_2(1)+P_1(2)P_2(2)\\
&= \frac{8}{3}*(-2)+(-1+\frac{8}{3})*(1+1-2)+(-2+\frac{8}{3})*(2^2+2-2)\\
&= -\frac{16}{3}+0+\frac{8}{3}\\
&= -\frac{8}{3}\neq 0
\end{aligned}
$$

Donc, P_1 et P_2 ne sont pas orthogonaux.