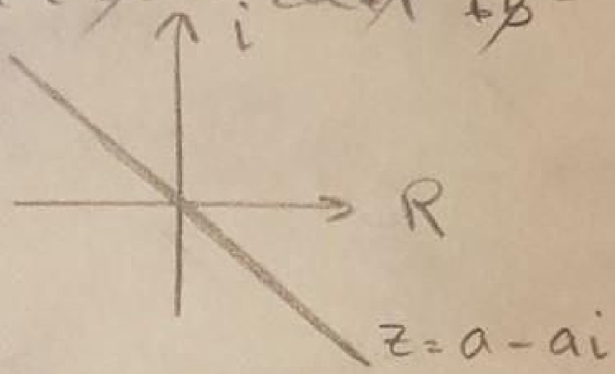
وال چهار

$|z+i| = |z-1| \quad z = a+bi$

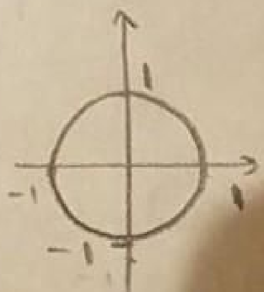
$\sqrt{a^2+(b+1)^2} = \sqrt{(a-1)^2+b^2}$

$\rightarrow \cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 2b + \cancel{1} = \cancel{a^2} - 2a + \cancel{1} + \cancel{b^2}$

$a = -b$



$\frac{1}{z} = \bar{z} \rightarrow \frac{1}{a+bi} = a-bi \rightarrow a^2+b^2=1$



سوال ششم)

فرض کنیم $P(x)$ ، n ریشه‌ی متمایز ندارد، پس یک ریشه با تکرار دو بار یا بیشتر دارد.

پس $\exists a \quad p(x) = (x-a)^2 q(x)$

مشتق گیری

$$p'(x) = 2(x-a)q(x) + (x-a)^2 q'(x)$$

$$= (x-a)\left[2q(x) + q'(x)\right]$$ ← واضح است که $p'(a)=0$ می‌شود #

طرف دوم: فرض کنیم P و P' ریشه‌ی مشترک دارند،

$$P(x) = (x-a)q(x) \quad , \quad P'(x) = (x-a)^2 r(x)$$

$$\to P'(x) = q(x) + \underbrace{(x-a)q'(x)}_{B(x),\ B(a)=0} = \underbrace{(x-a)^2 r(x)}_{A(x),\ A(a)=0}$$

$$q(x) = A(x) - B(x)$$

$$\to q(a) = A(a) - B(a) = 0$$

پس $(x-a)$ یکی از فاکتورهای $q(x)$ است پس $p(x) = (x-a)^2 s(x)$ ✓

سوال پنج: فرض خلف: $|z + \frac{1}{z}| > 2$ به توان 2

الف) $\to |z^2 + \frac{1}{z^2} + 2| > 4$

نامساوی مثلث $\to \underbrace{|z^2 + \frac{1}{z^2} + 2|}_{>4} \leqslant |z^2 + \frac{1}{z^2} + 1| + |1|$

$$\to |z^2 + \frac{1}{z^2} + 1| \geqslant 3$$

$$\to \underbrace{|z + \frac{1}{z}|}_{\geqslant 2}\underbrace{|z^2 + \frac{1}{z^2} + 1|}_{\geqslant 3} \geqslant 6 \to |z^3 + \frac{1}{z^3}| \geqslant 6$$ تناقض

سوال 7)

2) $(f \pm g)(T) = (f_n \pm g_n)T^n + (f_{n-1} \pm g_{n-1})T^{n-1} + \cdots$

$+ (f_1 \pm g_1)T^1 + (f_0 \pm g_0) I$

$= (f_n T^n + f_{n-1} T^{n-1} + \cdots + f_1 T^1 + f_0 I) \pm$

$(g_n T^n + g_{n-1} T^{n-1} + \cdots + g_1 T^1 + g_0 I)$

$= f(T) \pm g(T)$

4) $c f(T) = c(f_n T^n + f_{n-1} T^{n-1} + \cdots + f_1 T^1 + f_0 I)$

$= (cf_n T^n + cf_{n-1} T^{n-1} + \cdots + cf_1 T^1 + cf_0 I)$

$= (cf) T$

مستقل از j

3) $fg(T) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} f_i g_j T^{i+j} \longrightarrow (T^i) \times (T^j)$

2

مستقل از i

$= \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f_i T^i}_{f(T)} \underbrace{\sum_{j=0}^{n} g_j T^j}_{g(T)} = f(T) g(T)$

$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} f_i g_j T^{i+j}$

$= \underbrace{\sum_{j=0}^{n} g_j T^j}_{g(T)} \overbrace{\sum_{i=0}^{n} f_i T^i}^{f(T)} = g(T) f(T)$

سؤال ۵

وقتی اندازه‌ی عدد مختلط z یک است $\leftarrow$ $\exists \theta \to z = \cos\theta + i\sin\theta$

$$= e^{i\theta}$$

$$\to P(x) = \alpha (x - e^{i\theta_1})(x - e^{i\theta_2}) \cdots (x - e^{i\theta_n})$$

$$\to P(1) = \alpha (\underbrace{1 - \cos\theta_1}_{2\sin^2\frac{\theta_1}{2}} - i \underbrace{\sin\theta_1}_{2\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}})(1 - \cos\theta_2 - i\sin\theta_2) \cdots (1 - \cos\theta_n - i\sin\theta_n)$$

$\leftarrow$ در هر پرانتز می‌توانیم از $2\sin\frac{\theta_1}{2}$ فاکتور بگیریم

$$\to \underbrace{\alpha \times 2^n \sin\frac{\theta_1}{2} \sin\frac{\theta_2}{2} \cdots \sin\frac{\theta_n}{2}}_{\alpha'} \times \overbrace{\left(\sin\frac{\theta_1}{2} - i\cos\frac{\theta_1}{2}\right)}^{-e^{-i\frac{\theta_1}{2}}} \times$$

$$\underbrace{\left(\sin\frac{\theta_2}{2} - i\cos\frac{\theta_2}{2}\right)}_{-e^{-i\frac{\theta_2}{2}}} \times \cdots \times \underbrace{\left(\sin\frac{\theta_n}{2} - i\cos\frac{\theta_n}{2}\right)}_{-e^{-i\frac{\theta_n}{2}}}$$

$$= \alpha' \times \underbrace{\cancel{(-1)^n}}_{n \text{ زوج}} \times \left(e^{-\frac{i}{2}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}\right)$$

ادامه صفحه‌ی بعد

به طور مشابه: ادامه سؤال 8

$$P(-1) = \alpha(-1-\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)(-1-\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)\cdots(-1-\cos\theta_n - i\sin\theta_n)$$

$$= \alpha(-1)^n (\underbrace{1+\cos\theta_1}_{2\cos^2\frac{\theta_1}{2}} + \underbrace{i\sin\theta_1}_{2\sin\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}})(1+\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdots(1+\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$

$$= \overbrace{\alpha\, 2^n \cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}\cdots\cos\frac{\theta_n}{2}}^{\alpha'} \times \overbrace{\left(\cos\frac{\theta_1}{2} + i\sin\frac{\theta_1}{2}\right)}^{e^{i\frac{\theta_1}{2}}} \times \underbrace{\left(\cos\frac{\theta_2}{2} + i\sin\frac{\theta_2}{2}\right)}_{e^{i\frac{\theta_2}{2}}} \times \cdots \times \underbrace{\left(\cos\frac{\theta_n}{2} + i\sin\frac{\theta_n}{2}\right)}_{e^{i\frac{\theta_n}{2}}}$$

$$c_1 = \alpha' \times e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$$

پس $f(-1) = c_2 e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$, $f(1) = c_1 e^{-\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$

پس اگر $f(1)$ حقیقی باشد باید توان e در $f(1)$ برابر صفر شود که نتیجه می‌دهد

$(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) = 0$. پس در این صورت توان e در $f(-1)$

هم صفر می‌شود و $f(-1)$ هم برابر c_2 می‌شود که برابر ضرب یک سری کسینوس‌ها

در 2^n و α (ضریب حقیقی ادامه چندجمله‌ای) است که عددی حقیقی است.

به طور مشابه اگر $f(-1)$ حقیقی باشد هم باز $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=0$ می‌شود که نتیجه می‌دهد

$f(1)=c_1$ که c_1 هم ضرب α در یک سری سینوس‌ها و 2^n بوده که آن هم

حقیقی است.

سؤال ۹: استقلال خطی

$$c_n(ax+b)^n + c_{n-1}(ax+b)^{n-1} + \cdots + c_1(ax+b) + c_0 = 0$$

$$\to c_n a^n x^n + (c_n k_{n,n-1} + c_{n-1} a^{n-1}) x^{n-1} + \cdots$$

$$+ (c_n k_{n,1} + c_{n-1} k_{n-1,1} + \cdots + c_1 a) x$$

$$+ (c_n k_{n,0} + c_{n-1} k_{n-1,0} + \cdots + c_1 \overbrace{k_{1,0}}^{b} + c_0) 1 = 0$$

پس این یک چندجمله‌ای درجه n است که بعلت توجه به اینکه مقدار x هرچه است صفر است. طبق قضیه، همه‌ی ضرایب x^i ها باید صفر باشد:

$$c_n a^n = 0 \xrightarrow{a \neq 0} c_n = 0$$

$$c_n k_{n,n-1} + c_{n-1} a^{n-1} = 0 \xrightarrow{c_n = 0} c_{n-1} a^{n-1} = 0 \xrightarrow{a \neq 0} c_{n-1} = 0$$

استقرا

$$c_n k_{n,1} + c_{n-1} k_{n-1,1} + \cdots + c_1 a_1 = 0 \xrightarrow{c_{2,3,\dots,n} = 0} c_1 a_1 = 0 \xrightarrow[a_1 \neq 0]{} c_1 = 0$$

$$c_n k_{n,0} + c_{n-1} k_{n-1,0} + \cdots + c_0 = 0 \xrightarrow{c_{1,2,\dots,n} = 0} c_0 = 0$$

۱۰

پس همه‌ی c_i ها باید صفر باشند ← مستقل خطی

و چون قضیه‌ی استفاده شده برای هر عدد طبیعی برقرار است، حکم برای هر عدد طبیعی برقرار است

ادامه در صفحه‌ی بعد

ادامه سؤال ۶

اثبات span کردن فضا

از روش حذفی گاوس استفاده می‌کنیم.

$v_0 = 1 \Rightarrow v_0' = 1$

$v_1 = ax + b \xrightarrow{-b \times v_0} v_1' = ax$

$v_2 = (ax+b)^2 = a^2 x^2 + \alpha_{2,1} x + b^2 \xrightarrow{-\frac{\alpha_{2,1}}{a} v_1' - b^2 v_0}$

$\Rightarrow v_2' = a^2 x^2$

$\vdots$

$v_n' = a^n x^n$

پس همه‌ی v_i ها را با $v_i' = a^i x^i$ می‌توان جایگزین کرد.

و هر چندجمله‌ای درجه n به صورت $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ است.

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

$$= \left(\frac{c_n}{a^n}\right) v_n' + \left(\frac{c_{n-1}}{a^{n-1}}\right) v_{n-1}' + \dots + \left(\frac{c_1}{a^1}\right) x + \left(\frac{c_0}{a^0}\right) 1$$

و $a^i \neq 0 \quad i = 0, 1, \dots, n$

$$= c_n' v_n' + c_{n-1}' v_{n-1}' + \dots + c_1' v_1' + c_0' v_0'$$

پس هر چندجمله‌ای درجه n یک ترکیب خطی $v_0, v_1, \dots, v_n$ است.