Algoritmos Numéricos por Computadora

Primer parcial - Primavera 2024

Sube tu archivo resultado a Canvas → Examen Parcial 1 antes de las 11:30am.

Tu archivo debe mostrar claramente todos los resultados.

Cada pregunta vale 5 puntos.

El script debe correr con las funciones que agregues al final.

Asegúrate de guardar el archivo frecuentemente.

Los exámenes son trabajos individuales. Está estrictamente prohibido dar o recibir ayuda de cualquier persona.

El artículo 29 del Reglamento de Alumnos establece que "se calificará como no acreditada (N.A.) cualquier materia cuando el alumno incurra en alguna práctica fraudulenta".

1. Punto flotante IEEE-754 doble precisión

a) Encuentra los exponentes be y e del número 1. Puedes usar la función bin2dec.

```
uno = 1
```

```
uno = 1
```

```
format hex
uno
```

```
uno =
   3ff0000000000000
```

```
format default
b = '0011111111110000000000000000000000000000000000000000000000000000';
be = bin2dec(b(2:12))
```

```
be = 1023
```

```
e = be - 1023
```

```
e = 0
```

b) Encuentra el exponentes be y e del número 2. Puedes usar la función bin2dec.

```
dos = 2
```

```
dos = 2
```

```
format hex
```

```
dos
```

```
dos =
   4000000000000000
```

```
format default
b = '0100000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000';
be = bin2dec(b(2:12))
```

```
be = 1024
```

```
e = be - 1023
```

```
e = 1
```

c) ¿Cuántos números pueden representarse de manera exacta en el intervalo [1,2) ?

```
numsEn12 = 2/eps(1)
```

```
numsEn12 = 9.0072e+15
```

d) ¿Cuántos números pueden representarse de manera exacta en el intervalo [2,4) ?

```
numsEn24 = 4/eps(2)
```

```
numsEn24 = 9.0072e+15
```

e) ¿Cuántos números (normalizados) pueden representarse de manera exacta en el intervalo (0,1) ?

```
minEn01 = 0+eps; %tomamos el minimo del intervalo
maxEn01 = 1-eps; %y el maximo del intervalo
diferencia = maxEn01 - minEn01;
numsEn01 = maxEn01/eps(diferencia) %obtenemos la distancia entre los dos
```

```
numsEn01 = 9.0072e+15
```

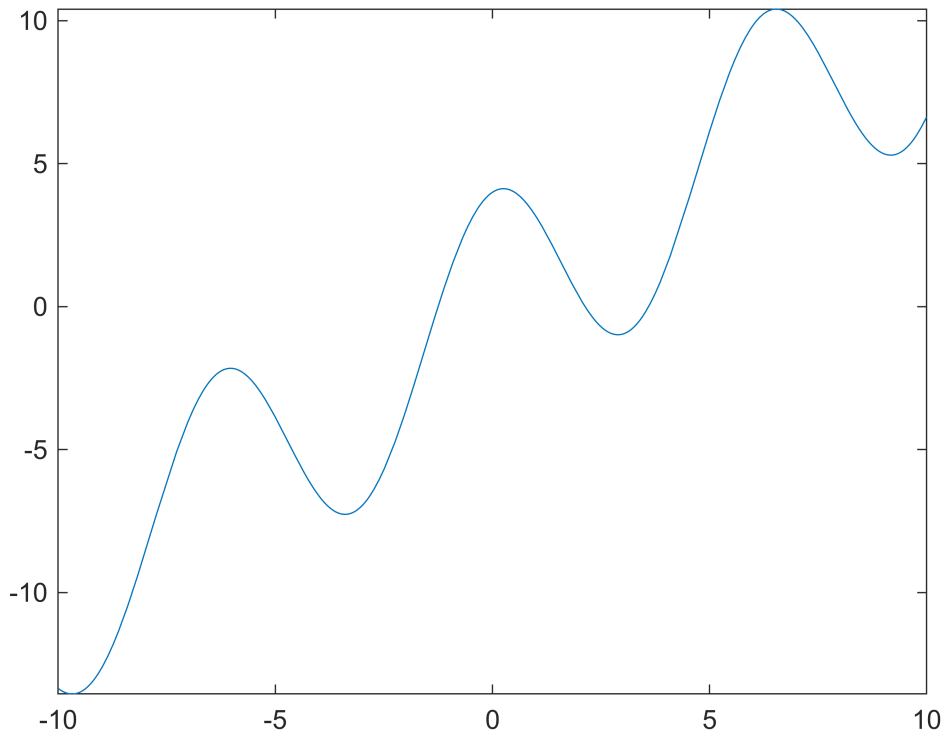
Usando tres algoritmos diferentes, calcula todas las soluciones de la ecuación

$f(x) = x + 4\cos(x) = 0$

2. Raíces 1

Primero, gráfica la función para mostrar que existen tres (y solo tres) soluciones y observar en qué intervalos se encuentran.

```
fx = @(x) x + 4.*cos(x);
fplot(fx, [-10 10])
```



Encuentra la primera raíz x_1 de la función usando el método de bisección o el de falsa posición.

```
[root, iterations] = falsePosition(fx, -2, -0.5);
fprintf('Falsa posición - raiz: %f - iteraciones: %d', root, iterations);
```

```
Falsa posición - raiz: -1.252353 - iteraciones: 9
```

3. Raíces 2

Encuentra la segunda raíz x_2 de la función usando el método de la secante o el de Newton-Raphson.

```
[root, iterations] = newtonRaphson(fx, 1);
fprintf('Newton-Raphson - raiz: %f - iteraciones: %d', root, iterations)
```

```
Newton-Raphson - raiz: 2.133332 - iteraciones: 6
```

4. Raíces 3

Encuentra la tercera raíz x_3 de la función usando el método de Muller o el de interpolación cuadrática inversa.

```
[root, iterations] = ipi(fx, 3, 4, 5);
fprintf('IPI - raiz: %f - iteraciones: %d', root, iterations);
```

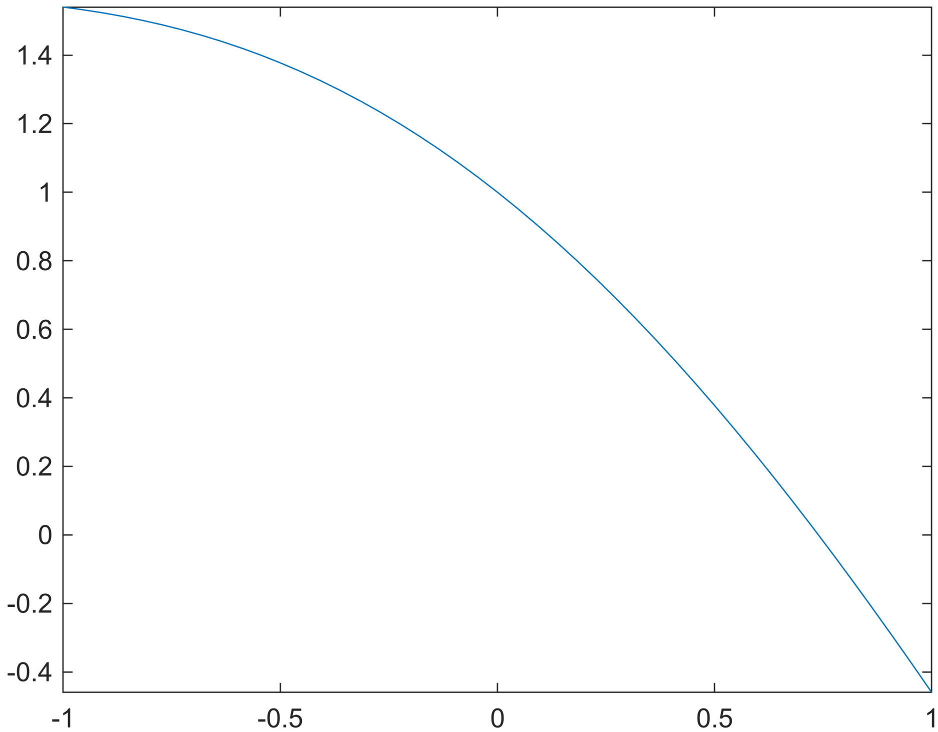
```
IPI - raiz: 3.595305 - iteraciones: 7
```

5. Algoritmo de Brent

Programa, al final del script, el algortimo de Brent de manera eficiente y elegante.

Pruébalo con

```
f = @(x) cos(x) - x;
fplot(f, [-1 1])
```




```
[root, iterations] = brent(f, -1, 1);
fprintf('Brent - raiz: %f - iteraciones: %d', root, iterations)
```

```
Brent - raiz: 0.739085 - iteraciones: 7
```

6. Aplicación 1

Un resorte presenta una fuerza de restauración dada por:

$F = c_1x + c_3x^3 + c_5x^5$

donde x es la compresión del resorte.

Los valores de las constantes son

c_1 = 5.25 kg/cm,

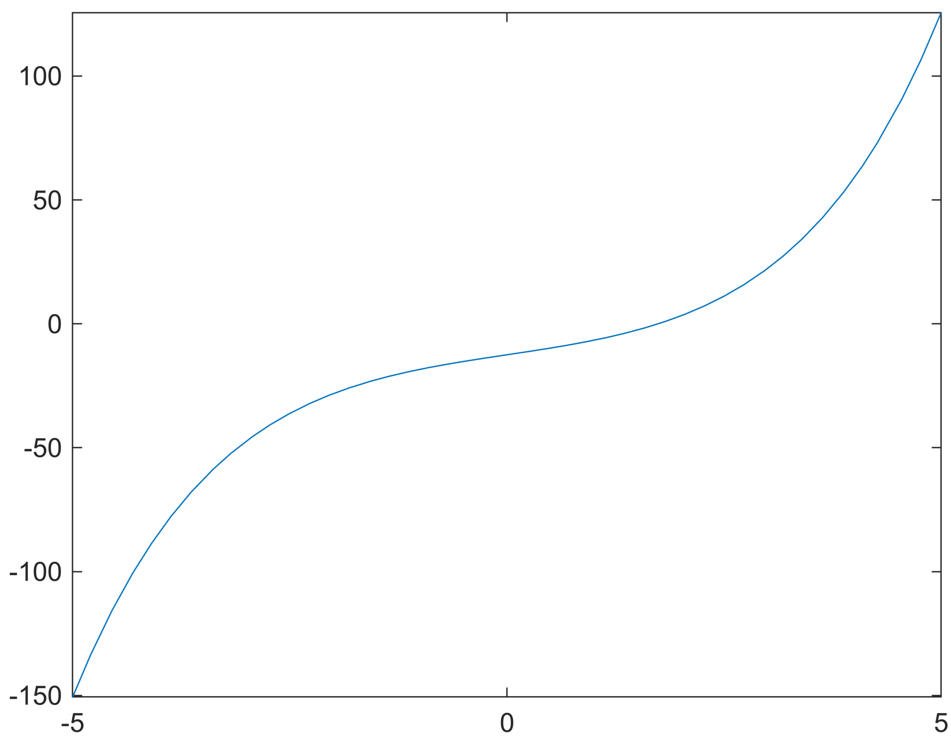
c_3 = 0.60 kg/cm,

c_5 = 0.0118 kg/cm.

Si un peso $F = 12.5$kg se aplica al resorte, ¿cuánto se comprime (valor de x)?

```
c1 = 5.25;       % kg/cm
c3 = 0.60;
c5 = 0.0118;
W = 12.5;        % kg

fx = @(x) c1.*x + c3.*x.^3 + c5.*x.^5 - W;
fplot(fx)
```




```
[result, i] = newtonRaphson(f, 1.5);
fprintf('La compresión del resorte es: %f cm', result)
```

```
La compresión del resorte es: 0.739085 cm
```

7. Aplicación 2

Se tiene un cañon que dispara proyectiles con una velocidad v a un ángulo θ. ¿A qué ángulo debe dispararse el cañon para pegar en el suelo a una distancia R?

Sabemos que la trayectoria del proyectil está dada por

$$x(t) = (v\cos\theta)t$$

$$y(t) = (v\sin\theta) - \frac{1}{2}g\,t^2$$

Resolviendo para y como función de x se tiene

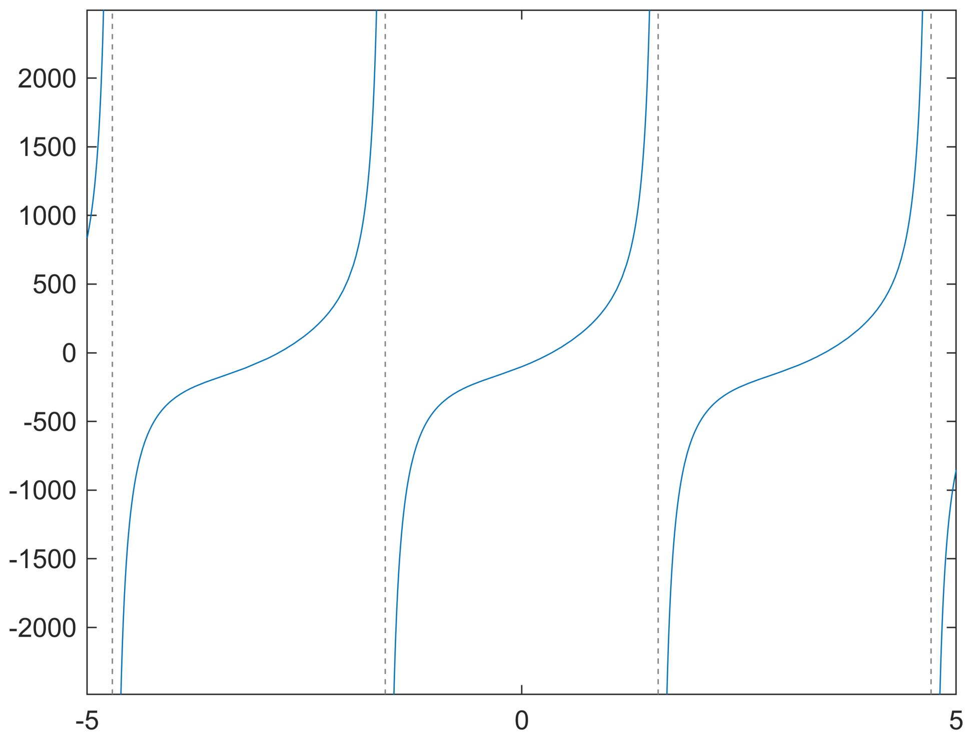
$$y(x) = x(\tan\theta) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v\cos\theta}\right)^2$$

donde el ángulo está dado en radianes.

Ahora el rango R es el valor de x cuando $y = 0$, un problema de raíces, claro.

Si $v = 55\frac{m}{s}$ y queremos $x = 250$, ¿cuánto debe valer θ?

```
v = 55;
x = 250;
g = 9.81;
yx = @(theta) x.*tan(theta) - 1/2*g.*((x/v.*cos(theta)).^2);
fplot(yx)
```




```
[rads, i] = newtonRaphson(yx, 0.2);
```

Convierte el resultado a grados

```
rads
```

```
rads = 0.3447
```

```
ang = rad2deg(rads)
```

```
ang = 19.7519
```

Compara tu resultado con el valor exacto

$$\theta = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{R\,g}{v^2}\right)$$

```
radsExactos = 1/2*asin(x*g/v^2)
```

```
radsExactos = 0.4727
```

```
angExacto = rad2deg(radsExactos)
```

```
angExacto = 27.0843
```

```
diferenciaRads = abs(radsExactos - rads)
```

```
diferenciaRads = 0.1280
```

```
diferenciaAng = abs(angExacto - ang)
```

```
diferenciaAng = 7.3324
```

Inserta aquí las funciones que utilices.

```
function [x, i] = brent(f, x1, x2, itMax, rTol)
    fa = f(x1);
    fb = f(x2);

    if sign(fa) == sign(fb)
        error('f(a) * f(b) is not true');
    end

    if ~exist("itMax","var")
        itMax = 100;
    end

    if ~exist("rTol", "var")
        rTol = eps;
    end

    i = 0;
    condition = true;
    f1 = f(x1);
    f2 = f(x2);
    x3 = 0.5*(x1+x2);
    if f1 ~= 0 && f2 ~= 0
        while condition
            f3 = f(x3);
            denom = (f2 - f1)*(f3 - f1)*(f2 - f3);
            numer = x3*(f1-f2)*(f2-f3+f1) ...
                + f2*x1*(f2-f3) + f1*x2*(f3-f1);
```

```
            if denom == 0; dx = x2+x1;
            else; dx = f3*numer/denom; end

            x = x3 + dx;
            if (x2-x)*(x-x1) < 0
                dx = 0.5*(x2-x1);
                x = x1 + dx;
            end

            if x < x3
                x2 = x3;
                f2 = f3;
            else
                x1 = x3;
                f1 = f3;
            end

            x3 = x;
            i = i + 1;
            condition = abs(f3) > rTol && i < itMax;
        end
    end

    if i == itMax
        warning('brent:IterationLimitReached', 'The iteration limit was reached')
    end
end

function [x, i] = falsePosition(f, a, b, rTol, itMax)
    signA = sign(f(a));

    if sign(f(b)) == signA
        error('f(a)*f(b) is not true');
    end

    if ~exist("itMax", "var")
        itMax = 100;
    end

    if ~exist("rTol", "var")
        rTol = eps;
    end

    i = 1;
    fa = f(a);
    fb = f(b);
    x = (a*fb - b*fa)/(fb - fa);
    condicion = true;
    while condicion
```

```
        if sign(f(x)) == signA
            b = x;
        else
            a = x;
        end
        fa = f(a);
        fb = f(b);
        xp = x;
        x = (a*fb - b*fa)/(fb - fa);
        i = i + 1;
        condicion = abs((x-xp)/x) > rTol && i < itMax;
    end

    if i == itMax
        warning('falsePosition:IterationLimitReached', 'The iteration limit was
reached')
    end
end

function [x, i] = newtonRaphson(f, p, itMax, rTol)
    h = 1e-6;
    df = abbreviatedCentralFirstDerivative(f, p, h);

    if ~exist("itMax", "var")
        itMax = 100;
    end

    if ~exist("rTol", "var")
        rTol = eps;
    end

    x = p - f(p)/df;
    i = 0;
    condicion = true;
    while condicion
        xPrev = x;
        df = abbreviatedCentralFirstDerivative(f, x, h);
        x = x - f(x)/df;

        i = i + 1;
        condicion = abs((x-xPrev)/x) > rTol && i < itMax;
    end

    if i == itMax
        warning('newtonRaphson:IterationLimitReached', 'The iteration limit was
reached')
    end
end

function df = abbreviatedCentralFirstDerivative(f, x, h)
```

```
    df = (f(x+h) - f(x-h))/(2*h);
end

function [x, i] = ipi(f, x1, x2, x3, rTol, itMax)
    if ~exist("itMax", 'var')
        itMax = 100;
    end

    if ~exist('rTol','var')
        rTol = eps;
    end

    f1 = f(x1);
    f2 = f(x2);
    i = 0;
    condicion = true;
    while condicion
        f3 = f(x3);
        p = polyfit([f1, f2, f3], [x1, x2, x3], 2);
        x = polyval(p, 0);
        x1 = x2;    f1 = f2;
        x2 = x3;    f2 = f3;
        x3 = x;

        i = i+1;
        condicion = abs((x - x2)/x) > rTol && i < itMax;
    end

    if i == itMax
        warning('ipi:IterationLimitReached', 'The iteration limit was reached')
    end
end
```