Algoritmos Numéricos por Computadora

Examen final - Primavera 2024

Sube tu archivo resultado a Canvas → Examen final antes de las 18:45 horas.

Aseguráte que tus resultados se despliegan en el archivo que subas. Los resultados deben aparecer abajo de las preguntas (en línea).

Al final del script debes incluir las funciones usadas para resolver las preguntas.

En cada gráfica, coloca etiquetas en los ejes, un grid, un título adecuado y, si es conveniente, una leyenda.

Cada pregunta vale 5 puntos.

Los exámenes son trabajos individuales. Está estrictamente prohibido dar o recibir ayuda de cualquier persona. El artículo 29 del Reglamento de Alumnos establece que "se calificará como no acreditada (N.A.) cualquier materia cuando el alumno incurra en alguna práctica fraudulenta".

1. Aplicar métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales.

Utiliza RK4 y ABM4 (en su versión que guarda *todos* los valores calculados de f) para resolver el siguiente problema de valor inicial:

$y' = \frac{-2y}{1+t}$ $\qquad y(0) = 2$ $\qquad$ t in [0,2.5]

a) Mide los tiempo de ejecución de cada método para $h = 10^{-3}$. Guarda los resultados (valores de y) en las variables $\mathrm{yRK4}$ y $\mathrm{yABM4}$.

```
f = @(t, y) (-2*y)/(1+t);
y0 = 2;
tspan = [0, 2.5];

tic
[tRK4, yRK4] = odeRK4(f, y0, tspan, 0.01);
toc
```

```
Elapsed time is 0.031409 seconds.
```

```
tic
[tABM4, yABM4] = ABM4(f, y0, tspan, 0.01);
toc
```

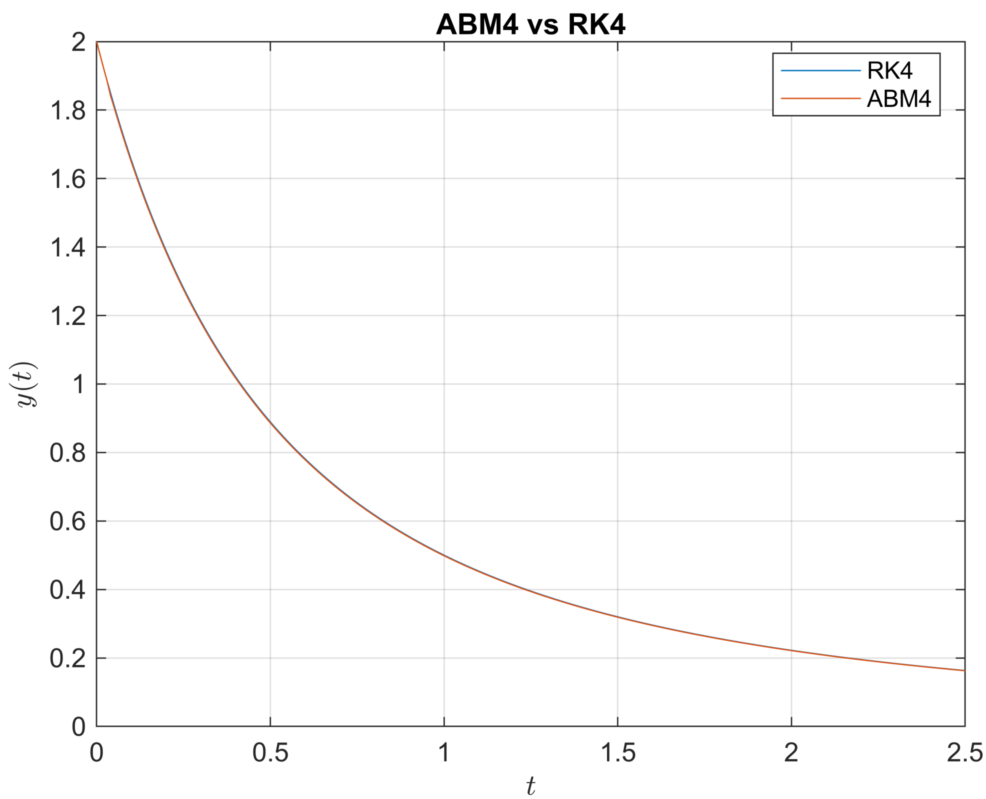
```
Elapsed time is 0.148007 seconds.
```

¿Cuál método es el más rápido? ¿Por qué?

```
% ABM4, gracias a que solo evalua la funcion 2 veces en vez de 4
```

b) Grafica los resultados $y(t)$ obtenidos por los dos métodos.

```
plot(tRK4, yRK4)
hold on
plot(tABM4, yABM4)
grid on
title('ABM4 vs RK4')
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$y(t)$','interpreter','latex')
legend('RK4', 'ABM4', 'location','best')
hold off
```



c) De manera simbólica, demuestra que la solución exacta es:

$$y(t) = \frac{2}{(t+1)^2}$$

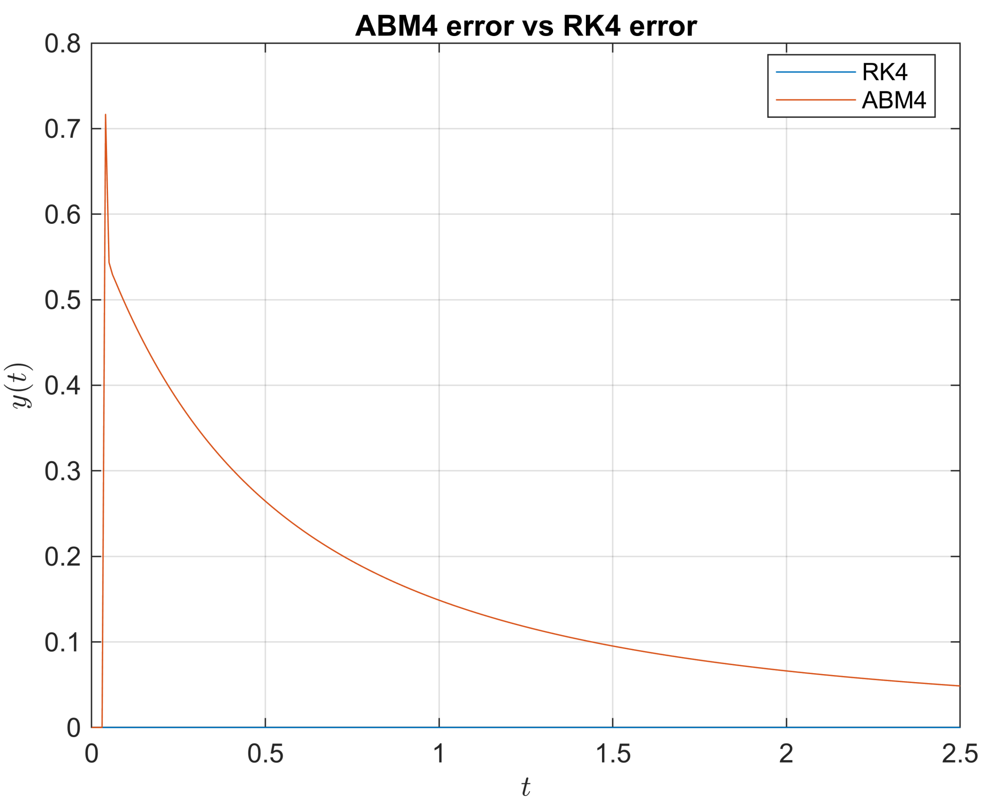
```
syms y(t) t
eqn = diff(y) == (-2*y)/(1+t);
cnd = y(0) == y0;
ysym = dsolve(eqn, cnd)
```

ysym =

$$\frac{2}{(t+1)^2}$$

d) Grafica los errores absolutos de RK4 y ABM4 con respecto a la solución exacta.

```
ysymVal = subs(ysym, t, tRK4);

plot(tRK4, abs(yRK4 - ysymVal)*100)
hold on
plot(tABM4, abs(yABM4 - ysymVal)*100)
grid on
title('ABM4 error vs RK4 error')
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$y(t)$','interpreter','latex')
legend('RK4', 'ABM4', 'location','best')
hold off
```



¿Qué método tiene más error? ¿De qué orden de magnitud son los errores? ¿Qué relación tienen con h?

```
% Ambos metodos son de orden de h^4, en este caso, ABM4 esta teniendo mas
% error probablemente por truncamiento mas que por redondeo, una h mas
% adecuada deberia solucionar el problema
```

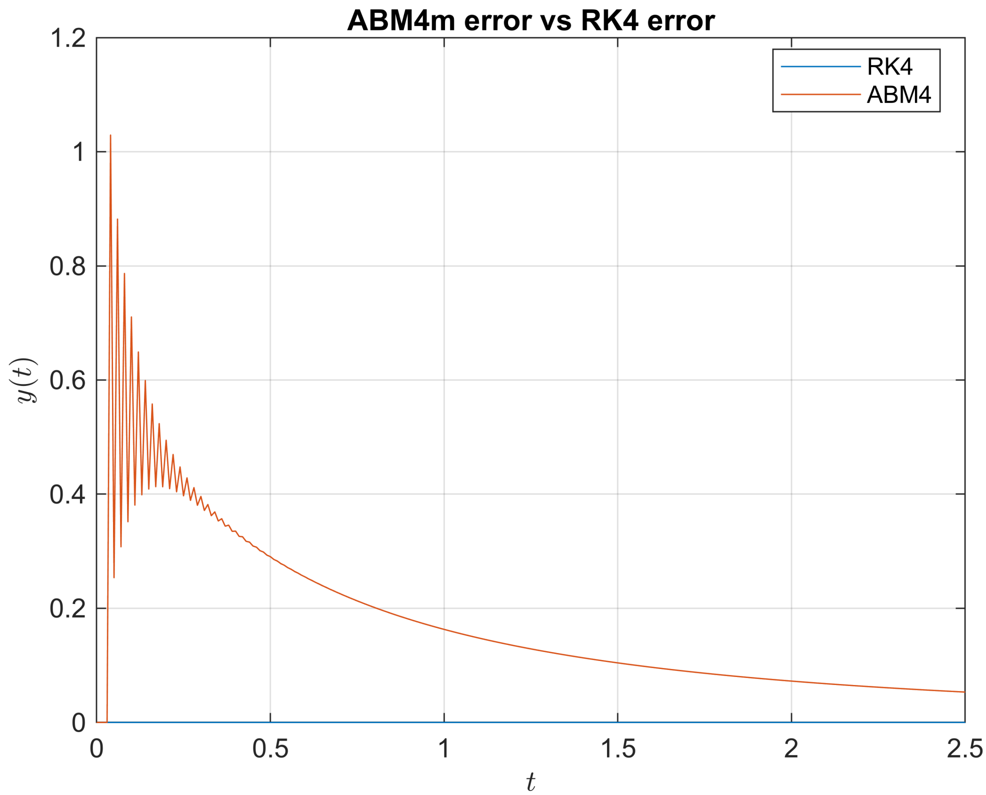
e) Como el predictor y el corrector de ABM4 son del mismo orden, podemos estimar el error local de truncamiento en la iteración $i+1$ para el predictor p y para el corrector c.

$$E_p = \frac{251}{270}(c_i - p_i) \quad \text{y} \quad E_c = -\frac{19}{270}(c_{i+1} - p_{i+1})$$

Estos errores deben sumarse a los valores determinados por las fórmulas del predictor p y del corrector c en cada iteración para obtener los valores de y_{i+1}.

Escribe la función `[t,y] = ABM4m(f, y0, tsan, h)` que implemente estas modificaciones y compara, en un gráfica, los errores absolutos obtenidos con los de RK4.

```
function [t, y] = ABM4m(f, y0, tspan, h)
    t = tspan(1):h:tspan(2);
    n = length(t);
    m = length(y0);
    y = zeros(m, n);
    y(:, 1) = y0;

    fv = zeros(m, n);
    [~, y(:, 1:4)] = odeRK4(f, y0, [t(1) t(4)], h);
    fv(:, 4) = bsxfun(f, t(1:4), y(:, 1:4));
    ci = 0; pi = 0;
    for i = 4:n-1
        yi = y(:, i);
        y(:, i+1) = yi + h/24*(55*fv(i) - 59*fv(i-1) + 37*fv(i-2) - 9*fv(i-3));
        fv(:, i+1) = f(t(i+1), y(:, i+1));
        y(:, i+1) = y(:, i+1) + 251/270*(ci - pi);

        pi = y(:, i+1);
        y(:, i+1) = yi + h/24*(9*fv(i+1) + 19*fv(i) - 5*fv(i-1) + fv(i-2));
        yi = y(:, i+1);
        y(:, i+1) = yi - 19/270*(yi - pi);
        fv(:, i+1) = f(t(i+1), y(:, i+1));
        ci = y(:, i+1);
    end
end

[tABM4, yABM4] = ABM4m(f, y0, tspan, 0.01);
plot(tRK4, abs(yRK4 - ysymVal)*100)
hold on
plot(tABM4, abs(yABM4 - ysymVal)*100)
grid on
title('ABM4m error vs RK4 error')
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$y(t)$','interpreter','latex')
legend('RK4', 'ABM4', 'location','best')
hold off
```



Debes observar que los errores de ABM4 se reducen fuertemente.

2. Analizar el funcionamiento de diversos métodos numéricos.

Escribe la función `[L,flag] = choleskyFlag(A)` que factoriza la matriz $A = L * L'$ y que regresa también la variable entera `flag` que indica si la matriz A es simétrica positiva definida. El ciclo del algoritmo de factorización debe terminar si se calcula un elemento diagonal que no sea real positivo (**no** puedes usar un for).

- Si `flag = 0` entonces la matriz es positiva definda y la factorización se realizó con éxito.
- Si `flag` no es cero, entonces la matriz no es positiva definda y `flag` indica la posición del pivote donde falló la factorización.

No puedes utilizar ninguna otra función, ni tuya ni de MATLAB, para determinar si la matriz A es simétrica positiva definida.

Prueba la función con las siguientes matrices. Si la matriz es positiva definida, muestra que $A = L * L'$.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 26 & 21 \\ 2 & 21 & 18 \end{bmatrix}$$

```
A = [4 2 2;
    2 26 21;
    2 21 18];
```

```
[flag, L] = choleskyFlag(A);
% comprobacion
eigA = eig(A);
all(eigA > 0) && all(isreal(eigA))
```

```
ans = logical
   1
```

```
disp(flag)
```

```
   1
```

```
L*L'
```

```
ans = 3×3
     4     2     2
     2    26    21
     2    21    18
```

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

```
A = [1 2 3;
     2 4 5;
     3 5 6];
[flag, L] = choleskyFlag(A);
% comprobacion
eigA = eig(A);
all(eigA > 0) && all(isreal(eigA))
```

```
ans = logical
   0
```

```
disp(flag)
```

```
   0
```

```
L*L'
```

```
ans = 3×3 complex
   1.0000 + 0.0000i   2.0000 + 0.0000i      NaN +    NaNi
   2.0000 + 0.0000i   4.0000 + 0.0000i      NaN +    NaNi
      NaN +    NaNi      NaN +    NaNi      Inf + 0.0000i
```

3. Entender los errores numéricos inherentes a las soluciones computacionales.

Resuelve la siguiente ecuación diferencial "stiff":

$$y(t)' = -1000y + 3000 - 2000e^{-t} \qquad y(0) = 0$$

en el intervalo [0, 0.01].

a) El criterio de convergencia $h < \frac{2}{a}$ con $(a = 1000)$ indica que h debe ser menor a 0.002 para que el metodo de Euler sea estable. Utiliza el método de Euler con $h = 0.0025$ y grafica $y(t)$.

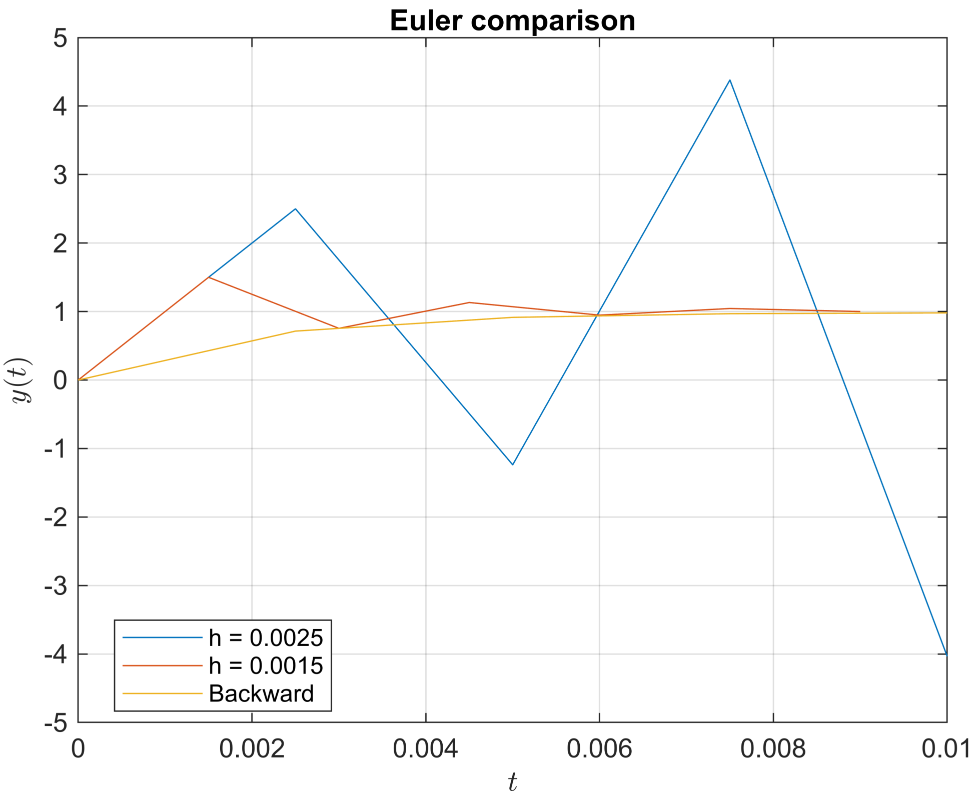
```
f = @(t, y) -1000*y + 3000 - 2000*exp(-t);
h = 0.0025;
y0 = 0;
tspan = [0, 0.01];

[tEuler, yEuler] = odeEuler(f, y0, tspan, h);
plot(tEuler, yEuler)
hold on
grid on
title('Euler comparison')
xlabel('$t$','interpreter','latex')
ylabel('$y(t)$', 'interpreter', 'latex')
```

b) Si $\frac{2}{a} < h < \frac{1}{a}$ el metodo de Euler es estable pero presenta ocilaciones.Utiliza el método de Euler con $h = 0.0015$ y grafica $y(t)$.

```
h = 0.0015;
[tEuler, yEuler] = odeEuler(f, y0, tspan, h);
plot(tEuler, yEuler)
```

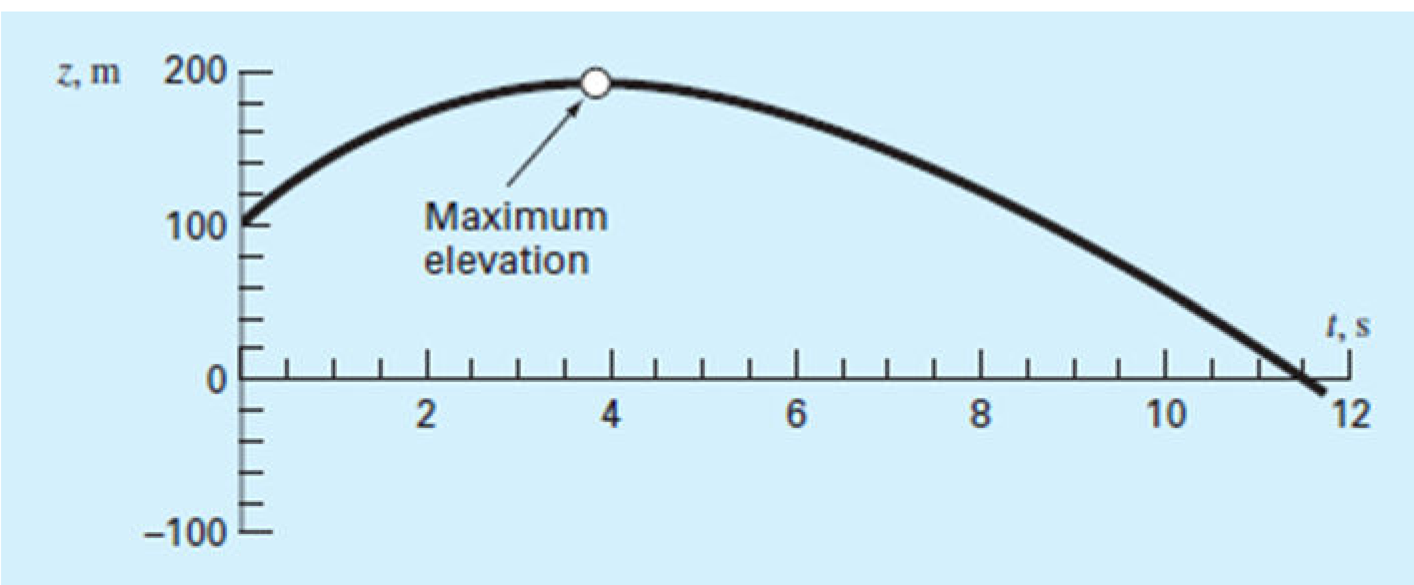
c) Utiliza el método de Backward Euler con $h = 0.0025$ y grafica $y(t)$. Observa que la ecuación diferencial es lineal y utiliza una implementación **eficiente**.

```
h = 0.0025;
g = @(t,y) (y + (3000 - 2000*exp(t))*h)/(1 + 1000*h);
[tEuler, yEuler] = odeEulerImplicito(g, y0, tspan, h);
plot(tEuler, yEuler)
legend('h = 0.0025', 'h = 0.0015','Backward', 'location', 'best')
hold off
```



4. Construir representaciones matemáticas de sistemas físicos.

Un saltador bungee a una altura inicial z_0 es lanzado hacia arriba a una velocidad inicial v_0.



La fuerza que actua sobre el saltador es:

$F = F_g + F_a$

F_g : fuerza debida a la gravedad = $-m\,g$

F_a : fuerza debida a la resistencia del aire (fricción) = $-c\,v$

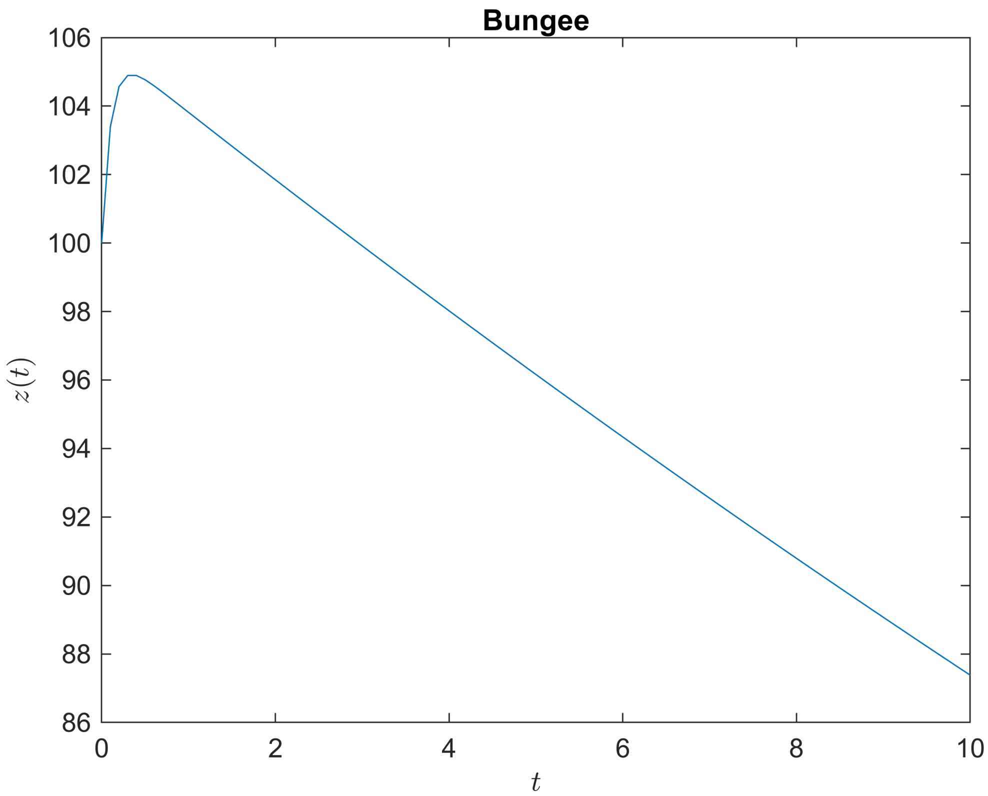
a) Utiliza la segunda ley de Newton $F = m\,a$ para demostrar que la ecuación diferencial (no homogenea) de segundo orden que determina la altura z del saltador es:

$$\frac{d^2}{dt^2}z + \frac{c}{m}\frac{d}{dt}z = -g$$

```
% F - Fa = Fg
% ma - (-cv) = -mg
% a = d^2/dt^2 z     v = d/dt z
% m * d^2/dt^2 z + c * d/dt z = - mg
% d^2/dt^2 z + c/m * d/dt z = - g
```

b) Convierte esta ecuación en dos ecuaciones diferenciales de primer orden y resuelve el sistema en el intervalo $\text{tspan} = [0\ 10]$ usando RK4. Grafica $z(t)$. Utiliza los siguientes valores: $g = 9.81\frac{m}{s^2}$, $m = 80\,\text{kg}$, $c = 15\,\frac{\text{kg}}{c}$ (coeficiente lineal de arrastre), $z_0 = 100\,m$ y $v_0 = 55\frac{m}{s}$.

```
g = 9.81; m = 80; c = 15; z0 = 100; v0 = 55;
tspan = [0 10]; zv0 = [z0; v0];
M = [0 1; -c/m -g];
f = @(t, zv) M*zv;

[t, zv] = odeRK4(f, zv0, tspan, 0.1);
plot(t, zv(1, :))
title("Bungee")
xlabel("$t$", 'interpreter','latex')
ylabel("$z(t)$", 'interpreter','latex')
```



c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

```
[zmax, tmax] = max(zv(1, :));
fprintf('La altura maxima es %f', zmax)
```

```
La altura maxima es 104.893363
```

¿En qué tiempo alcanza la altura máxima?

```
fprintf('En el tiempo %f', t(tmax))
```

```
En el tiempo 0.300000
```

d) Resuelve simbólicamente la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}z + \frac{c}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}z = -g$$

y demuestra que

$$z(t) = z_0 + \frac{m}{c}\left(v_0 + \frac{m\,g}{c}\right)\left(1 + e^{-\frac{c}{m}t}\right) - \frac{m\,g}{c}t$$

```
syms z(t) m g c z0 v0
dz = diff(z);
eqn = diff(z, t, 2) + dz*c/m + g == 0;
cnd1 = z(0) == z0;
cnd2 = dz(0) == v0;
```

```
cnd = [cnd1 cnd2];
zsym = dsolve(eqn, cnd)
```

```
zsym =
```

$$\frac{z_0\,c^2+v_0\,c\,m+g\,m^2}{c^2}-\frac{\mathrm{e}^{-\frac{c\,t}{m}}\left(g\,m^2+c\,v_0\,m\right)}{c^2}-\frac{g\,m\,t}{c}$$

e) A partir de la solución exacta, determina ahora el tiempo exacto en el que el saltador alcanza la elevación *máxima* y la altura correspondiente.

```
gr = 9.81; mr = 80; cr = 15; z0r = 100; v0r = 55;
tspansym = 0:h:10;
zsymVal = subs(zsym, [m g c z0 v0], [gr mr cr z0r v0r]);
zsymVal = subs(zsymVal, t, tspansym);

[zmaxsym, tmaxsym] = max(zsymVal(1, :));
fprintf('La altura maxima es %f', zmaxsym)
```

```
La altura maxima es 111.387063
```

```
fprintf('En el tiempo %f', tspansym(tmaxsym))
```

```
En el tiempo 0.470000
```

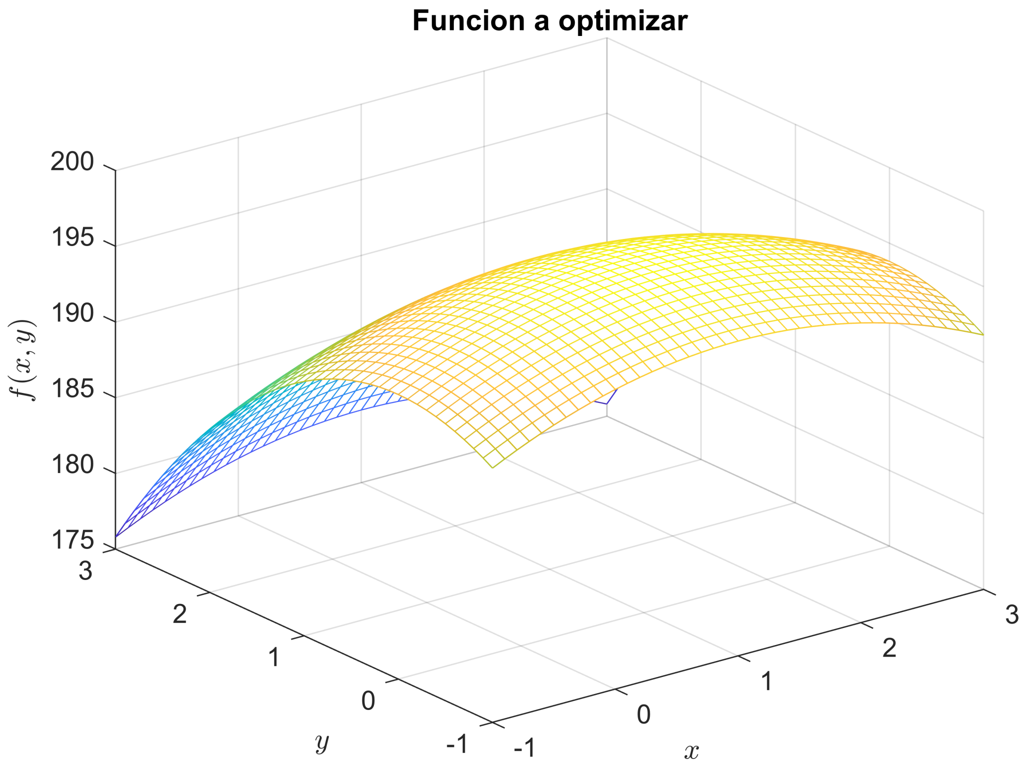
5. Demostrar habilidad en el uso eficiente de MATLAB.

Escribe la función `[x,i,min]= NRoptimizacionVV(f,x)` para optimizar funciones de varias variables.

Debes tener funciones **eficientes** para calcular, de manera numérica, el gradiente `del = gradiente(f, x)` y la hessiana H = `hessiana(f, x)` de la función.

a) Grafica la función $f(x,y)=2\,x\,y+2x-x^2-2y^2$ en $-1\le x\le 3$, $-1\le y\le 3$. Puedes utilizar la función `mesh` de MATLAB.

```
f = @(x, y) 2*x*y + 2*x - x.^2 - 2.*y.^2;
[x, y] = meshgrid(-1:0.1:3);
mesh(x, y, f(x, y))
title('Funcion a optimizar')
xlabel('$x$','interpreter','latex')
ylabel('$y$','interpreter','latex')
zlabel('$f(x,y)$','interpreter','latex')
```



b) Encuentra el valor (x, y) donde ocurre el máximo de la función $f(x, y) = 2\,x\,y + 2x - x^2 - 2y^2$ y el valor de este máximo, utilizando la función `NRoptimizacionVV(f,x)`e iniciando en $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

```
xy0 = [0; 0];
g = @(u) -(2*u(1)*u(2) + 2*u(1) - u(1).^2 - 2.*u(2).^2);
[x, i, max] = NRoptimizacionVV(g, xy0);
fprintf('Valor maximo de x - %f y de y - %f', x(1), x(2))
```

```
Valor maximo de x - 194.104280 y de y - -28.448257
```

```
fprintf('Valor maximo de f - %f', max)
```

```
Valor maximo de f - 49950.726809
```

Funciones

`[t,y] = ABM4m(f, y0, tsan, h)`

```
function [t, y] = ABM4(f, y0, tspan, h)
    t = tspan(1):h:tspan(2);
    n = length(t);
    m = length(y0);
    y = zeros(m, n);
    y(:, 1) = y0;
```

```
    fv = zeros(m, n);
    [~, y(:, 1:4)] = odeRK4(f, y0, [t(1) t(4)], h);
    fv(:, 4) = bsxfun(f, t(1:4), y(:, 1:4));
    for i = 4:n-1
        yi = y(:, i);
        y(:, i+1) = yi + h/24*(55*fv(i) - 59*fv(i-1) + 37*fv(i-2) - 9*fv(i-3));
        fv(:, i+1) = f(t(i+1), y(:, i+1));

        y(:, i+1) = yi + h/24*(9*fv(i+1) + 19*fv(i) - 5*fv(i-1) + fv(i-2));
        fv(:, i+1) = f(t(i+1), y(:, i+1));
    end
end
```

[L,flag] = choleskyFlag(A)

```
function [flag, L] = choleskyFlag(A)
    flag = true;
    if ~issymmetric(A), flag = false; end
    n = length(A);

    L = zeros(n, n);
    L(1, 1) = sqrt(A(1, 1));
    L(:, 1) = A(:, 1)/L(1, 1);

    for i = 2:n-1
        L(i, i) = sqrt(A(i, i) - L(i, 1:i-1).^2);
    end

    for j = 2:n-1
        for i = j+1:n
            L(i, j) = (A(i, j) - L(i, 1:j-1)*L(j, 1:j-1)')/L(j, j);
        end
    end

    L(n, n) = sqrt(A(n, n) - sum(L(n, 1:n-1).^2));

    if ~(isreal(diag(L))), flag = false; end
end
```

[x,i,min]= NRoptimizacionVV(f,x)

```
function [x, i, min] = NRoptimizacionVV(f, x0, rTol, itMax)
    if ~exist("rTol", "var"), rTol = nthroot(eps, 3); end
    if ~exist("itMax", "var"), itMax = 1000; end

    x = x0 - hessiana(f, x0)\gradiente(f, x0);
    i = 0;
    condition = true;
    while condition
```

```
        xP = x;
        x = xP - hessiana(f, xP)\gradiente(f, xP);

        i = i + 1;
        condition = norm((x - xP)./x, inf) > rTol && i < itMax;
    end
    min = f(x);
end
```

del = gradiente(f, x)

```
function del = gradiente(f, x)
    h = nthroot(eps, 3);
    n = length(x);
    dx = h*eye(n);
    del = zeros(n, 1);

    for i = 1:n
        del(i) = (f(x(i) + dx(:, i)) - f(x(i) - dx(:, i)))/(2*h);
    end
end
```

H = hessiana(f, x)

```
function H = hessiana(f, x)
    n = length(x);
    h = nthroot(eps, 3);

    dx = eye(n)*h;
    dfx = diag(x);
    H = zeros(n, n);
    for i = 1:n
        for j = 1:n
            if i == j, H(i, i) = (f(x + dx(:, i)) - 2*f(x) + f(x - dx(:, i)))/h^2;
            else
                temp = (f(dfx(:, j) + dx(:, j)) - f(dfx(:, j) - dx(:, j)))/(2*h);
                H(i, j) = temp;
            end
        end
    end
end
```

Otras funciones

```
function [t, y] = odeRK4(f, y0, tspan, h)
    t = tspan(1):h:tspan(2);
    n = length(t);
    y = zeros(length(y0), n);

    y(:, 1) = y0;
```

```
    for i = 1:n-1
        ti = t(i);
        yi = y(:, i);
        k1 = f(ti, yi);
        k2 = f(ti + 1/2*h, yi + 1/2*k1*h);
        k3 = f(ti + 1/2*h, yi + 1/2*k2*h);
        k4 = f(ti + h, yi + k3*h);

        y(:, i+1) = yi + 1/6*(k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)*h;
    end
end

function [t, y] = odeEuler(f, y0, tspan, h)
    t0 = tspan(1);
    tn = tspan(2);

    t = t0:h:tn;
    n = length(t);
    y = zeros(length(y0), n);
    y(:, 1) = y0;
    for i = 1:n-1
        phi = f(t(i), y(:, i));
        y(:, i+1) = y(:, i) + phi*h;
    end
end

function [t, y] = odeEulerImplicito(f, y0, tspan, h)
    t = tspan(1):h:tspan(2);
    n = length(t);
    y = zeros(1, n);
    y(1) = y0;

    for i = 1:n-1
        y(i+1) = f(t(i), y(i));
    end
end
```