Matemática para ciencias de los datos: Trabajo práctico 1

M. Sc. Saúl Calderón Ramírez
Instituto Tecnológico de Costa Rica,
Escuela de Computación, bachillerato en Ingeniería en Computación,
PAttern Recongition and MAchine Learning Group (PARMA-Group)

24 de septiembre de 2020

Fecha de entrega: Domingo 20 de Setiembre del 2020

Entrega: Un archivo .zip con el el pdf generado con lyx o latex, y un jupyter notebook en Pytorch, debidamente documentado, con una función definida por ejercicio que lo necesite. A través del TEC-digital.

Modo de trabajo: Grupos de 2 personas.

Resumen

En el presente trabajo práctico se repasarán aspectos básicos del algebra lineal, relacionados con los conceptos a desarrollar a lo largo del curso, mezclando aspectos teóricos y prácticos, usando el lenguaje Python con la librería Pytorch.

1. (**15 puntos**) Implemente la función *calcularTrazaMatriz* la cual calcule la traza de una matriz usando únicamente operaciones básicas en pytorch (multiplicación, multiplicación por elemento, matriz identidad, etc.), prescindiendo de estructuras de repetición como el *for* el *while*.**(ver colab)**

    a) Documente su correcto funcionamiento con matrices arbitrarias $A, B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y haciendo el cálculo manual de su traza correspondiente.

    $A = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

    $tr(A) = 2 - 5 + 6 = 3$

    $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

    $tr(B) = 1 + 2 + 3 = 6$

2. **(15 puntos)** Para la siguiente matriz:

$$A = s\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

defina un valor de s que haga la matriz ortonormal, y verifiquelo haciendo $U^T = U^{-1}$.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} B^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 1+4+4 & -2-2+4 & -2+4-2 \\ -2-2+4 & 4+1+4 & 4-2-2 \\ -2+4-2 & 4-2-2 & 4+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$s^2 + 4s^2 + 4s^2 = 1$$

$$9s^2 = 1$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

Verificación$A^T = A^{-1}$. Primero calculamos la matriz de menores para $A = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Matriz de cofactores C:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} \cdot \cdot \begin{bmatrix} +1 & -1 & +1 \\ -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Calculamos $det(A)$:

$$det(A) = -\frac{1}{27} + \frac{8}{27} + \frac{8}{27} - \frac{-4}{27} - \frac{-4}{27} - \frac{-4}{27} = 1$$

Tenemos que $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} C^T$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

Como $A^T = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix} = A^{-1}$el valor de $s = \frac{1}{3}$cumple lo solicitado.

3. **(10 puntos)** Sean las matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $A + B = I$ y $AB = 0_n$, demuestre que $A^2 = A$ y$B^2 = B$.

   Demostración de $A^2 = A$:

$$\begin{gathered} A + B = I \\ \Rightarrow B = I - A \\ \Rightarrow AB = A(I - A) = 0_n \\ \Rightarrow AI - A^2 = 0_n \\ \Rightarrow AI = 0_n + A^2 \\ \therefore A = A^2 \end{gathered}$$

   Demostración de $B^2 = B$:

$$\begin{gathered} A + B = I \\ \Rightarrow A = I - B \\ \Rightarrow AB = (I - B)B = 0_n \\ \Rightarrow BI - B^2 = 0_n \\ \Rightarrow BI = 0_n + B^2 \\ \therefore B = B^2 \end{gathered}$$

4. **(20 puntos)** Muestre con un ejemplo numérico que para un vector $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ y una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que:

$$\left(\vec{x}^T A\, \vec{x}\right)^T = \vec{x}^T A\, \vec{x}$$

   Usando la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$y el vector $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{x}^T A\, \vec{x}\right)^T &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)^T \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix} \right)^T \\
&= ([25])^T \\
&= [25] \\
\Rightarrow \left(\vec{x}^T A\, \vec{x}\right)^T &= \vec{x}^T A\, \vec{x}
\end{aligned}
$$

Incluya el código en Pytorch que permita corroborar tal igualdad para cualquier matriz simétrica A y vector $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, generado aleatoriamente. Recuerde que a partir de cualquier matriz cuadrada A generada aleatoriamente puede calcularse una matriz simétrica, según lo discutido en clase. **(ver colab)**

5. **(15 puntos)** Demuestre que la siguiente ecuación matricial: $\left\|A\, \vec{x} - \vec{b}\right\|^2 - \left\|\vec{b}\right\|^2$ con $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,se puede reescribir como sigue: $\vec{x}^T A^T A\, \vec{x} - 2\, \vec{b}^T A\, \vec{x}$

$$
\begin{aligned}
\left\|A\, \vec{x} - \vec{b}\right\|^2 - \left\|\vec{b}\right\|^2 &= \left(\sqrt{\left(A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}\right) \cdot \left(A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}\right)} \right)^2 - \left(\sqrt{\overrightarrow{b} \cdot \vec{b}} \right)^2 \\
&= \left(A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}\right)^T \left(A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}^T \vec{b} \\
&= \left(\overrightarrow{x}^T A^T - \vec{b}^T\right) \left(A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}\right) - \overrightarrow{b}^T \vec{b} \\
&= \overrightarrow{x}^T A^T A \overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}^T A^T \overrightarrow{b} - \vec{b}^T A \overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}^T \vec{b} - \overrightarrow{b}^T \vec{b} \\
&= \vec{x}^T A^T A \vec{x} - 2\vec{b}^T A \vec{x}
\end{aligned}
$$

6. **(15 puntos)** Sea la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y una matriz cualquiera (no puede asumir que es simétrica) $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Demuestre que la matriz $P^T AP$ es también simétrica.

   Sabemos que A es simétrica por tanto $A = A^T$, para el ejercicio demostramos que $P^T AP = \left(P^T AP\right)^T$

$$
\begin{aligned}
\left(P^T AP\right)^T &= P^T A^T P \\
&= P^T AP
\end{aligned}
$$

7. **(10 puntos)** Sea $f\left(\vec{x}\right)=\frac{1}{2}\vec{x}^{T}A\vec{x}+\vec{b}^{T}\vec{x}+\vec{b}\cdot\vec{x}$ con A una matriz simétrica, calcule $\nabla f\left(\vec{x}\right)$.

$$\begin{aligned}
f\left(\vec{x}\right) &= \frac{1}{2}\vec{x}^{T}A\vec{x}+\vec{b}^{T}\vec{x}+\vec{b}\cdot\vec{x}\\
&= \frac{1}{2}\vec{x}^{T}A\vec{x}+\vec{b}^{T}\vec{x}+\vec{b}^{T}\vec{x}\\
&= \frac{1}{2}\vec{x}^{T}A\vec{x}+2\vec{b}^{T}\vec{x}\\
\nabla f\left(\vec{x}\right) &= \frac{1}{2}\left(2A\vec{x}\right)+2\vec{b}\\
&= A\vec{x}+2\vec{b}
\end{aligned}$$

8. **(20 puntos extra)** La Matriz de covarianza

    a) Escriba la función en Pytorch sin usar estructuras de repetición *for* o *while,* usando únicamente las funciones para cálculo de vector medio, y multiplicaciones matriciales. Documente su uso con el ejemplo descrito en este documento. **(ver colab)**