



# DM04- Scooter MP3®

## PTSI

Mercredi 06 mai

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Présentation (20 min)</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Étude et validation partielle du parallélogramme d'inclinaison (30 min)</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Étude et validation partielle du dispositif de verrouillage (1h10)</b>	<b>5</b>

# Scooter MP3®

## 1 Présentation (20 min)

La densification des zones urbaines ces vingt dernières années a conduit à une saturation de la plupart des grandes villes européennes. Ainsi, les conditions de circulation devenues très difficiles, les réseaux de transport en commun saturés, ont conduit de nombreux usagers à se tourner vers les véhicules à deux roues. D'abord destiné à un public de passionnés recherchant des sensations et un sentiment de liberté, le marché des deux roues a connu une évolution plus utilitaire. Ceci explique le fort succès des scooters cette dernière décennie. L'enjeu des constructeurs de scooters est donc de proposer des véhicules pouvant se déplacer aisément en milieu urbain et sur route tout en s'adaptant à ces nouveaux usagers peu habitués aux spécificités des deux roues en améliorant le confort et la sécurité. Dans ce domaine, la société Piaggio propose un scooter dont le train avant est muni de deux roues.

Les objectifs sont d'avoir une tenue de route plus proche d'un véhicule à quatre roues, d'augmenter la capacité de freinage ainsi que le confort d'utilisation en ville tout en conservant la maniabilité d'un deux roues classique.

Nous allons nous intéresser dans ce sujet à certains aspects de la conception du train avant à deux roues développé par la société Piaggio sur son scooter MP3, figure 1.



FIGURE 1 – Scooter MP3

Le train avant est défini comme l'ensemble comprenant : la roue (ou les roues) avant, la suspension, le dispositif de freinage, tous les éléments participant aux liaisons entre ces éléments. Sur un scooter à une seule roue avant, le train avant est lié au châssis du véhicule par une liaison pivot permettant d'orienter la roue avant par rapport au véhicule par l'intermédiaire du guidon. Cette liaison permet de diriger le véhicule. Pour un scooter à deux roues avant, le train avant doit non seulement permettre le pivotement des roues commandé par le guidon mais il doit également permettre l'inclinaison de l'ensemble du scooter tout en conservant le contact des roues au sol, figure 2.



FIGURE 2 – Scooters à 2 et à 3 roues

La solution retenue pour permettre une inclinaison du véhicule malgré la présence de deux roues sur le train avant repose sur la cinématique imposée par un dispositif en parallélogramme représenté figure 3. Une vue d'ensemble du train avant avec le parallélogramme d'inclinaison est fournie Document 1.

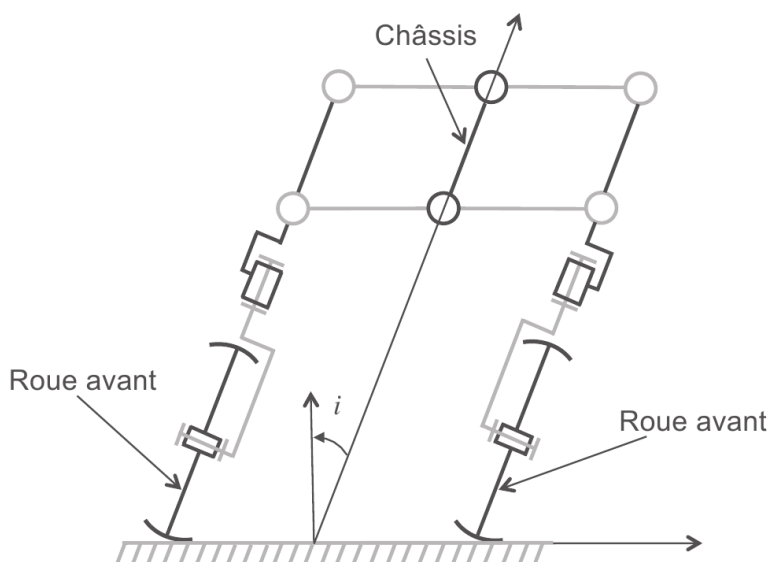


FIGURE 3 – Principe du parallélogramme d'inclinaison

Le diagramme des interacteurs 4 et l'extrait de cahier des charges, figure 5, suivant permettent de spécifier les principales performances attendues par ce train avant innovant.

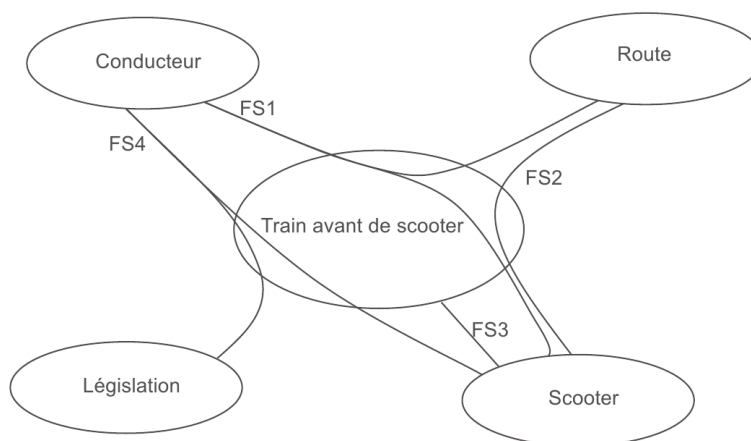


FIGURE 4 – Diagramme des interacteurs

- FS1 : Permettre au conducteur de maîtriser le véhicule sur la route,
- FS2 : Assurer la liaison sur le sol,
- FS3 : Assurer une partie du freinage du scooter,
- FS4 : Être conforme à la législation en vigueur.

	Critères	Niveaux
FS1 : Permettre au conducteur de maîtriser le véhicule sur la route	Inclinaison autorisée	$-50^\circ < i < 50^\circ$ (voir <b>Figure 3</b> )
	Stabilité du véhicule en ligne droite	Autonome pour $V > 15$ km/h
	Verrouillage de l'inclinaison du train avant (en option)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pour <math>V &lt; 15</math> km/h</li> <li>• temps verrouillage / déverrouillage <math>&lt; 3</math> s</li> </ul>
	Rigidité de l'ensemble du train avant	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Jeu nul dans les liaisons</li> <li>• déplacement des colonnes sous efforts (au point <math>O_{C3}</math> défini <b>Document 3</b>) : <math>\ \vec{U}_{O_{C3}}\  &lt; 1</math> mm.</li> </ul>
	Masse maximum du train avant	80 kg
	Rayon de braquage Minimum	$< 2,5$ m
	Commandes au guidon	Commandes : moteur, freins avant, phares et clignotants, avertisseur sonore, verrouillage du train (en option).
FS2 : Assurer la liaison au sol	Contact des deux roues au sol	Permanent
FS3 : Assurer une partie du freinage du scooter	Décélération maximum	$8 \text{ ms}^{-2}$
FS4 : Etre conforme à la législation en vigueur	Distance entre les deux roues avant pour être conduit par un titulaire de permis B quelle que soit la cylindrée	$> 460$ mm
	Normes pour homologation	Normes Euro 3

FIGURE 5 – Principales performances du train avant

## 2 Étude et validation partielle du parallélogramme d'inclinaison (30 min)

Objectifs : On cherche à vérifier le critère de rigidité de l'ensemble du train avant sous sollicitations de la fonction FS1. Pour cela on étudie le mécanisme d'inclinaison des roues en parallélogramme dont une illustration est donnée Document 1. On utilisera pour la suite de notre étude les modèles simplifiés donnés Document 2, Document 3 et Document 4.

Ce système, constitué de deux bras B1 et B2 et de deux colonnes C3 et C4, est relié au châssis 0 du scooter par deux liaisons pivots. Chaque bras est en liaison pivot avec chaque colonne. Les colonnes C3 et C4 sont liées en liaison pivot avec les deux bras de suspension qui supportent les deux roues avant, figure 3. Un schéma cinématique minimal du système d'inclinaison est donné sur le Document 2.

**Question 1 :** Calculer le degré d'hyperstatisme du mécanisme modélisé par le schéma cinématique minimal du Document 2.

On applique un chargement connu au système étudié en imposant un torseur d'effort

extérieur, représentant le contact roue-sol, à chacune des colonnes.

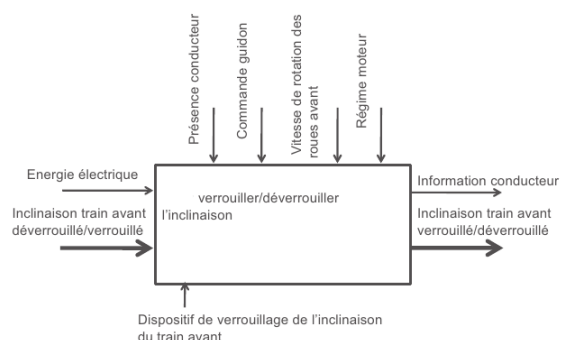
**Question 2 :** En appliquant le principe fondamental de la statique à chacune des pièces du système d'inclinaison (liaisons supposées parfaites), on obtient un système d'équations reliant les inconnues de liaison aux données du problème. Est-il possible de résoudre le système obtenu sans hypothèse supplémentaire ?

Justifier, mais il n'est pas demandé de résoudre.

### 3 Étude et validation partielle du dispositif de verrouillage (1h10)

On s'intéresse dans cette partie à la conception du dispositif de verrouillage de l'inclinaison. Il doit permettre de vérifier le critère de verrouillage de la fonction de service FS1 pour les vitesses inférieures à  $15\text{km.h}^{-1}$ . Ce dispositif, présent en option, répond à un souci d'amélioration du confort d'utilisation du scooter en milieu urbain. Le train avant est sensiblement alourdi, par sa structure particulière, par rapport à un véhicule classique. D'autre part, les protections et les éléments de confort propres au marché du scooter amènent le poids des scooters, même de faible cylindrée, à atteindre celui d'une moto de grosse cylindrée. Afin de conserver une bonne maniabilité aux faibles vitesses et de s'adapter aux usagers de tout gabarit, le verrouillage de l'inclinaison est donc proposé en option dans la fonction FS1 de la partie 1. Il permet en outre d'éviter de poser le pied aux arrêts (nombreux en circulation urbaine), et de garer le scooter dans n'importe quelle configuration (pente, à cheval sur un trottoir ou une bordure, etc ...) sans avoir à utiliser la béquille centrale (opération difficile sur un engin d'environ 200 kg).

Le diagramme suivant présente la fonction technique à remplir par le dispositif de verrouillage d'inclinaison du train avant ainsi que les données influant sur son fonctionnement.



La commande du dispositif doit être actionnée au guidon et validée par le calculateur en fonction de la vitesse du scooter (mesure de la vitesse de rotation des roues) et du régime moteur. Un voyant au guidon permet d'avertir le conducteur de l'état du dispositif. Le dispositif ne peut être déverrouillé que si le conducteur est assis sur la selle.

L'extrait de cahier des charges de la figure 6 permet de spécifier la fonction technique FT1. Afin de clarifier la spécification de FT1, trois phases de fonctionnement ont été distinguées :

- verrouillage (toujours par commande manuelle) (Phase A),
- déverrouillage automatique (Phase B),
- déverrouillage manuel (Phase C).

CDCF FT1 Phase de fonctionnement A : verrouillage.

	critère	niveau	flexibilité
FT1 : verrouiller l'inclinaison	temps de verrouillage	3s	maxi
	puissance électrique consommée	80 W	maxi
	vitesse du scooter	< 10 km/h	impératif
	ordre verrouillage	commande manuelle au guidon (contrôlée puis validée par calculateur)	
	maintien du verrouillage	sans apport d'énergie	impératif

CDCF FT1 Phase de fonctionnement B : déverrouillage automatique.

	critère	niveau	flexibilité
FT1 : déverrouiller l'inclinaison automatiquement	temps de déverrouillage	3s	maxi
	puissance électrique consommée	80 W	maxi
	vitesse du scooter	> 15 km/h	impératif
	régime de rotation moteur	> 2500 tr/min	impératif
	présence conducteur	détection capteur de selle	impératif
	ordre déverrouillage	calculateur	

CDCF FT1 Phase de fonctionnement C : déverrouillage manuel.

	critère	niveau	flexibilité
FT1 : déverrouiller l'inclinaison manuellement	temps de déverrouillage	3s	maxi
	puissance électrique consommée	80 W	maxi
	présence conducteur	détection capteur de selle	impératif
	ordre déverrouillage	commande manuelle au guidon (contrôlée puis validée par calculateur)	

FIGURE 6 – Extrait du cahier des charges

Le verrouillage de l'inclinaison du train avant nécessite la suppression de ces mobilités :

- la mobilité du parallélogramme d'inclinaison (voir partie 1),
- la mobilité de la suspension avant (particulièrement utile en mode parking).

Les solutions retenues pour bloquer ces deux mobilités sont :

- un frein à disque (visible sur le Document 1) actionné par câble pour le parallélogramme d'inclinaison,
- un verrou hydraulique pour chaque bras de suspension (visible sur le Document 1 et schématisé sur les Document 5 et Document 6).

### 3.1 Validation du dispositif de verrouillage

Objectifs : On s'intéresse ici à la conception de la chaîne d'énergie du dispositif de verrouillage. Nous allons établir une notice de calcul permettant de concevoir et de valider le mécanisme de transmission du dispositif de verrouillage en conformité avec le cahier des charges de la fonction FT1.

Malgré la nature différente des énergies mises en jeu pour les deux dispositifs de verrouillage, le constructeur souhaite utiliser un unique actionneur pour limiter les coûts de production, faciliter les opérations de maintenance, limiter les masses embarquées ainsi que l'encombrement et garantir la synchronisation des deux types de verrouillage.

#### Détermination de la pression hydraulique nécessaire au verrouillage de la mobilité de la suspension avant.

Une schématisation du bras de suspension et du verrou hydraulique (identiques pour les deux roues avant) est fournie Document 5 et Document 6 respectivement. Une roue est en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_0)$  avec le bras oscillant 11 lui-même en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{x}_0)$  avec le bras de suspension constitué des pièces 12 et 13.

Le bras oscillant 11 est en liaison pivot d'axe  $(P, \vec{x}_0)$  avec la demi-fourche 10. La liaison équivalente entre 12 et 13 est assimilée à une glissière de direction  $\vec{x}_{13}$ . Entre 12 et 13 sont placés un amortisseur et un ressort non représentés. En parallèle du bras de suspension, une tige 14 est liée par une liaison pivot glissant d'axe  $(M, \vec{x}_0)$  avec 12 et par une liaison pivot glissant d'axe  $(M, \vec{x}_{13})$  avec 13. C'est cette dernière liaison pivot glissant qui sera verrouillée par le verrou hydraulique.

Le principe retenu pour verrouiller la liaison pivot glissant entre 13 et 14 consiste à pincer un cylindre élastique Cy sur la tige 14 (Document 6). Le blocage se fait alors par adhérence. Le contact entre Cy et 14 sera considéré comme ponctuel aux points  $J'_1$  et  $J'_2$ .

Pour simplifier, on considère que les coefficients de frottement et d'adhérence entre Cy et 14 sont égaux et valent :  $f=0,3$ .

La résultante globale des efforts à transmettre par adhérence de 14 sur Cy est :  $\vec{R}_{14 \rightarrow Cy} = Z_{14 \rightarrow Cy} \cdot \vec{z}_{13}$  avec  $Z_{14 \rightarrow Cy} = 923N$ , le coefficient de frottement étant inclus dans cette valeur.

Compte tenu de la grande souplesse de Cy, on considère que les efforts transmis en  $J_1$  et  $J_2$  sont identiques en norme aux efforts en  $J'_1$  et  $J'_2$  respectivement.

Données du Document 5 :  $\vec{IO} = R \cdot \vec{z}_0$  avec  $R = 240mm$ ,  $\vec{OP} \approx l_{11} \cdot \vec{y}_0$  avec  $l_{11} = 200mm$ ,  $(\vec{y}_0, \vec{y}_{13}) = (\vec{z}_0, \vec{z}_{13}) = \theta_{013} = -30^\circ$ .

L'angle étant supposé petit, on travaillera sur la configuration non déformée (partie Doc 6a du Document 6).

**Question 3 :** En isolant la pièce 14, exprimer les torseurs d'actions mécaniques transmissibles par les liaisons ponctuelles avec frottement en  $J'_1$  et  $J'_2$ , notés  $\{T_{Cy \rightarrow 14}^{J'_1}\}$  et  $\{T_{Cy \rightarrow 14}^{J'_2}\}$  à la limite du glissement entre 14 et Cy. On exprimera ces torseurs dans la base  $B_{13} = (\vec{x}_{13} = \vec{x}_0, \vec{y}_{13}, \vec{z}_{13})$  respectivement en  $J'_1$  et  $J'_2$  en fonction de  $Z_{14 \rightarrow Cy}$  et de  $f$ .

**Question 4 :** En isolant B, en déduire la projection sur  $\vec{x}_{13}$  de la résultante des actions mécaniques transmissibles de P sur B  $\vec{R}_{P \rightarrow B}$ , en fonction de  $Z_{14 \rightarrow Cy}$  et de  $f$ .

En déduire la pression  $P_2$  à imposer dans le dispositif de verrouillage en fonction de  $Z_{14 \rightarrow Cy}$ ,  $f$ ,  $P_{atm}$  et des caractéristiques géométriques.

### Détermination du couple moteur nécessaire au verrouillage des mobilités du train avant.

Le mécanisme de transmission du dispositif de verrouillage schématisé Document 7 est actionné par un moteur électrique. Il est principalement constitué d'un ensemble 1 en liaison pivot par rapport au bâti 0. L'axe du moteur électrique est solidaire de la vis V qui engrène sur la roue R solidaire de la roue R' qui entraîne l'ensemble 1.

L'extrémité du câble actionnant le frein à disque du parallélogramme est fixée à l'ensemble 1 au point E. La rotation de 1 permet donc de mettre en tension le câble du frein à disque du parallélogramme. La pièce 2 est en liaison pivot avec l'ensemble 1. Un ressort de torsion placé entre 1 et 2 permet d'imposer un couple noté  $\overrightarrow{C_{res \rightarrow 2}} = C_{res \rightarrow 2} \cdot \vec{z}_0$  sur 2. La pièce 2 est en liaison sphérique au point C avec la bielle 3.

La bielle 3 est en liaison sphérique au point D avec le piston 4 du maître cylindre dont le schéma de principe est présenté Document 8. Le maître cylindre permet d'actionner les verrous hydrauliques des deux bras de suspension avant.

**Question 5 :** On supposera qu'en position verrouillée :  $\theta_{32} = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{y}_2, \vec{y}_3) = -30^\circ$  et  $\theta_{20} = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = 0^\circ$ .

Les actions du ressort du maître cylindre ainsi que les actions dues à la pression arrière  $P_1$  seront négligées.

En isolant la pièce 4, puis la pièce 2, déterminer alors le couple  $C_{res \rightarrow 2}$  à imposer par le ressort de torsion sur 2 pour verrouiller les deux bras de suspension en fonction de  $P_2$  et des données géométriques.

Lors du verrouillage des verrous hydrauliques, la course  $C_4$  du piston 4 du maître cylindre est de 6 mm. On considère que cela entraîne un débattement angulaire maximum de la pièce 2,  $\Delta\theta_{20,MAX} = 6$ .

La Figure 8 montre un relevé expérimental de l'effort de tension dans le câble noté  $F$  en fonction de l'angle lorsque l'on actionne le frein à disque.  $F$  est mesuré au point E du Document 7. La résultante des actions du câble en E est :  $\overrightarrow{F_{cab \rightarrow 1}} = -F \cdot \vec{x}_1$ .

Pour assurer le blocage du parallélogramme d'inclinaison, la tension dans le câble doit être égale à 200 N.

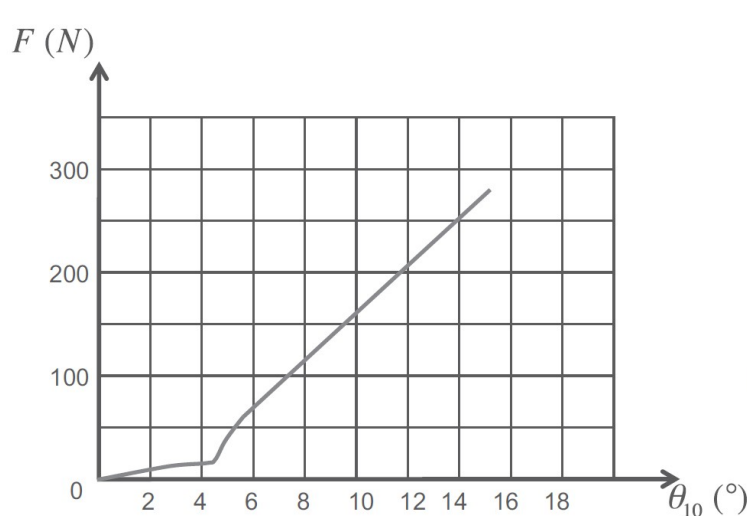
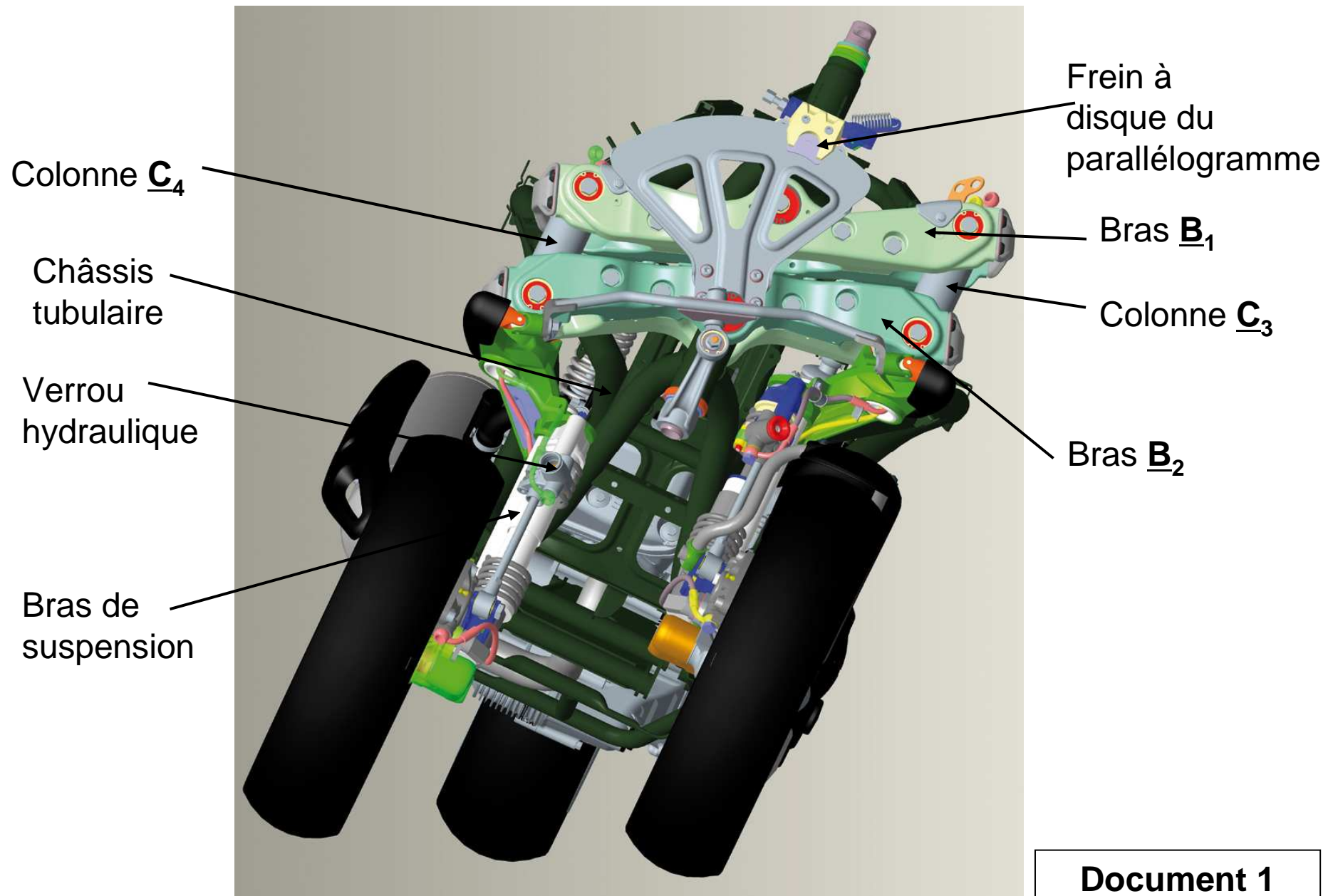


FIGURE 7 – Tension dans le câble  $F$  en fonction de l'angle  $\theta_{10}$

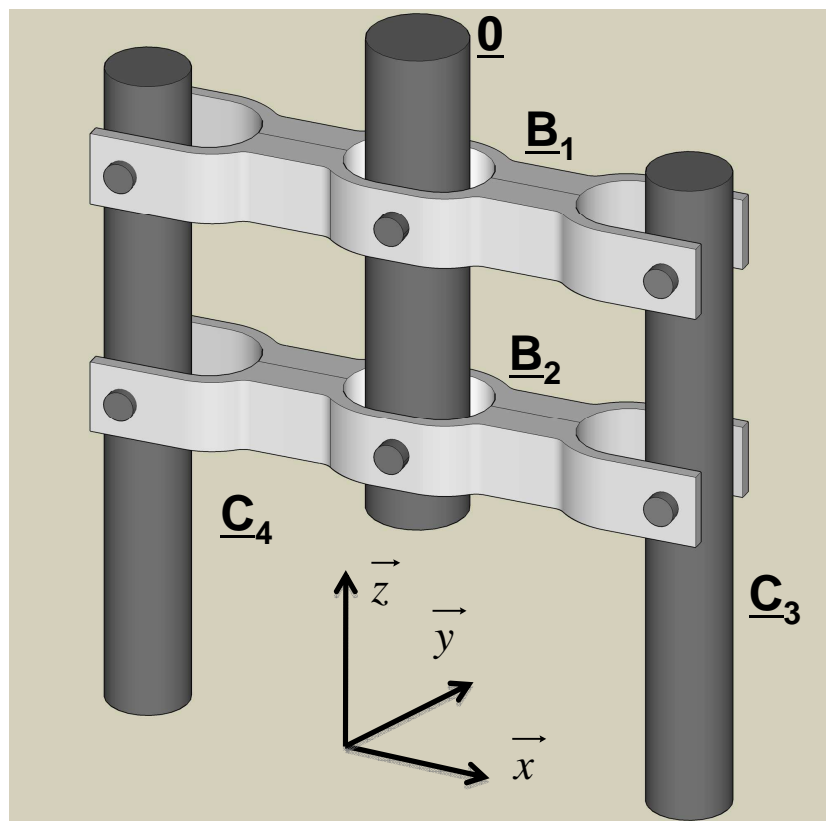


**Question 6** Relever la valeur  $\theta_{10,MAX}$  à imposer à la pièce 1 pour obtenir l'effort de tension de verrouillage. Dédire alors des questions précédentes l'expression de la raideur du ressort de torsion notée  $K_{Res}$  (en  $N.m.deg^{-1}$ ) qui permettra d'imposer la pression  $P_2$ . Faire l'application numérique.

## Vue d'ensemble du train avant



## Parallélogramme d'inclinaison



Modèle idéalisé 3D

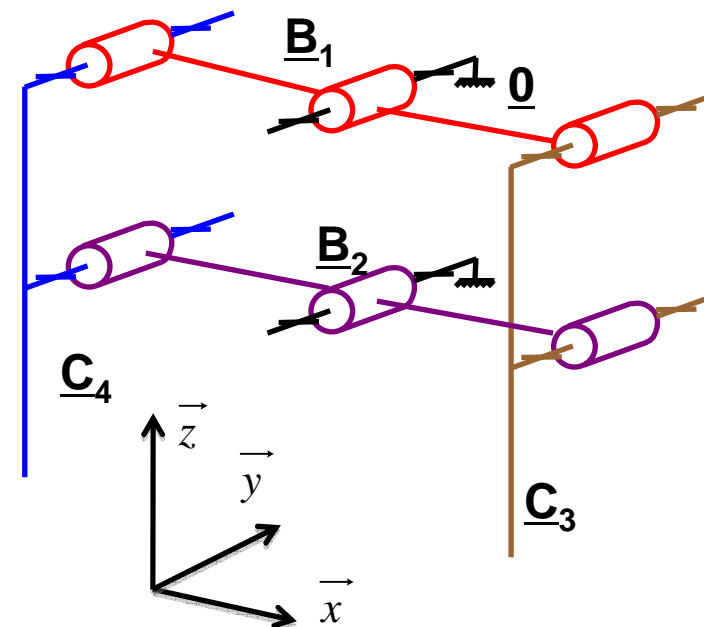
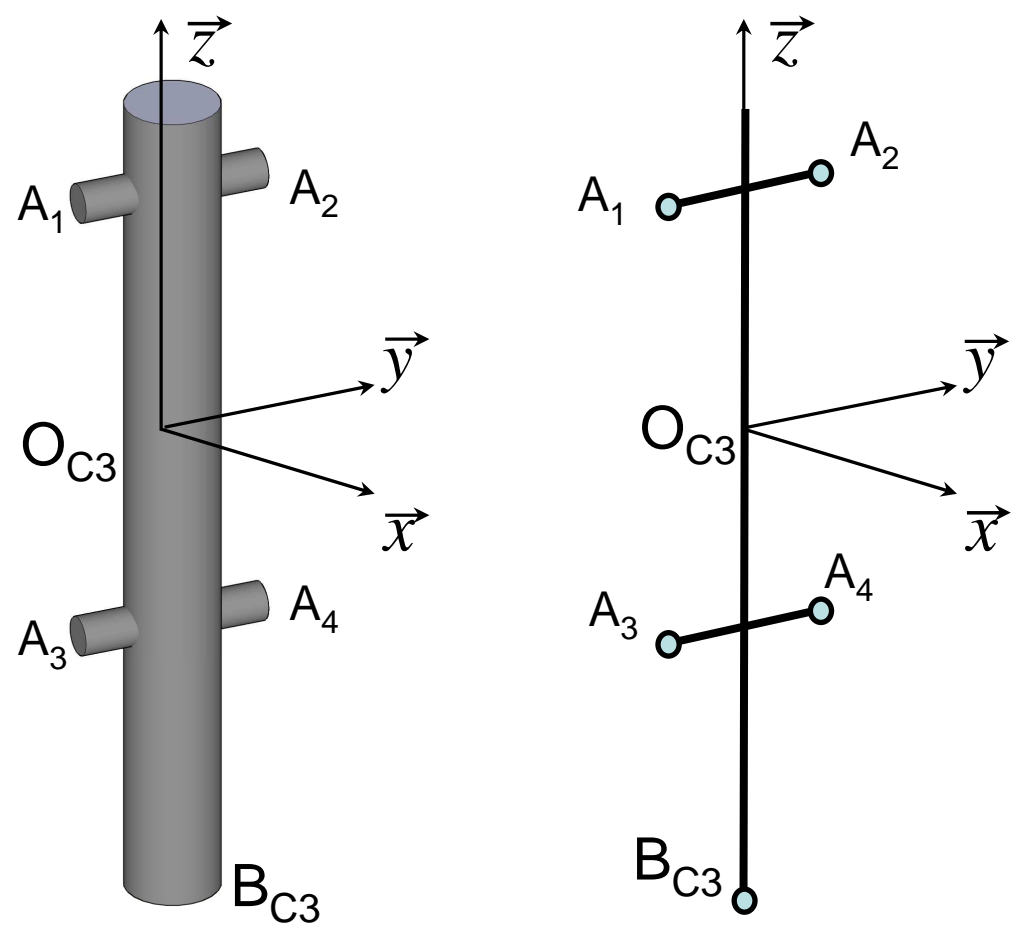


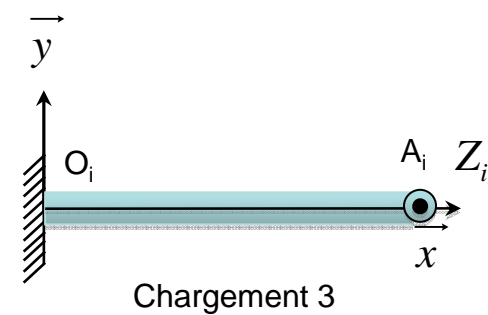
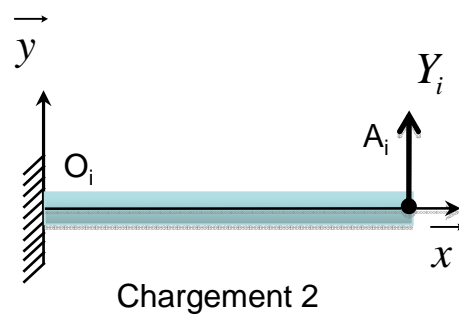
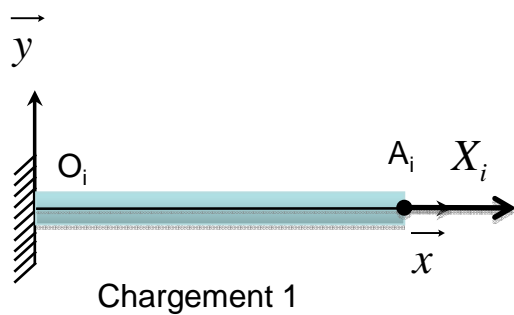
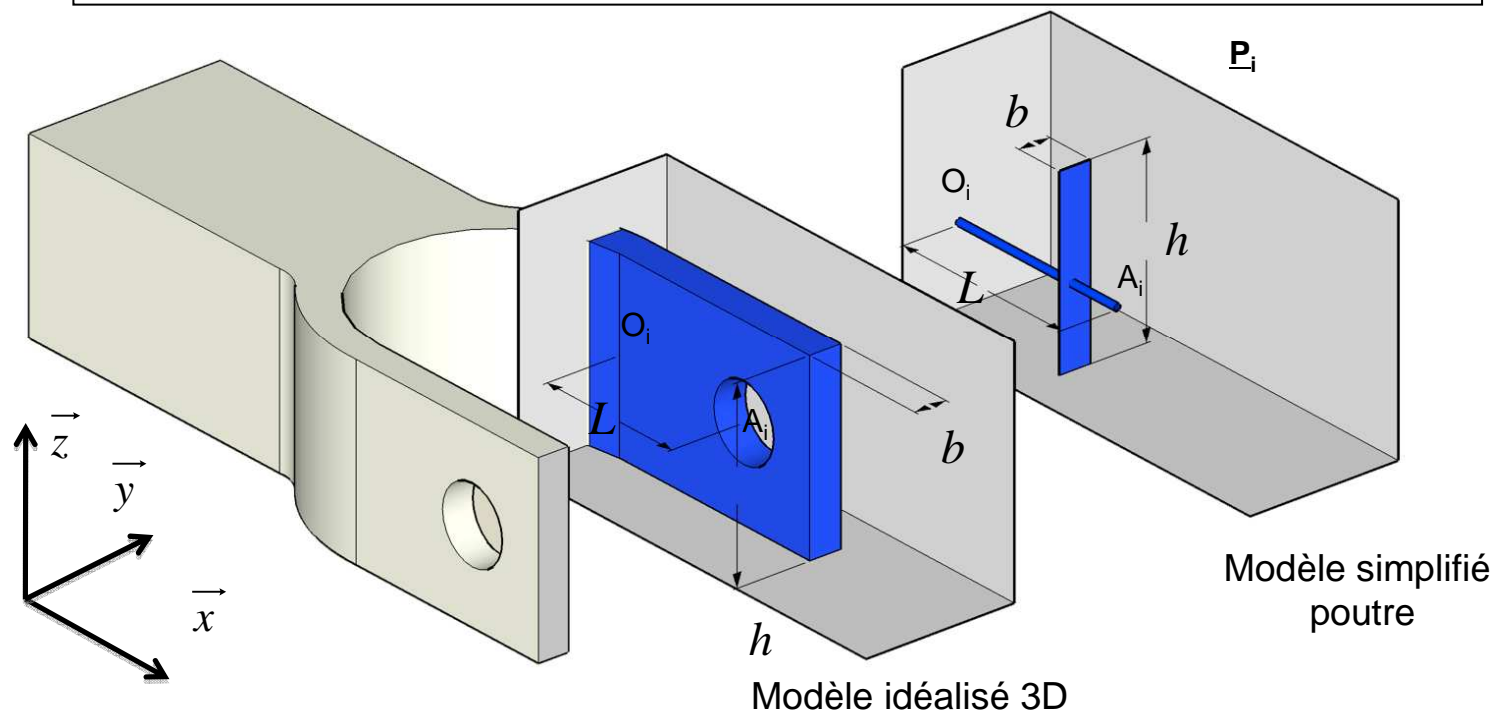
Schéma cinématique minimal

Colonne  $\underline{C}_3$



	$x$	$y$	$z$
$O_{C3}$	$0$	$0$	$0$
$A_1$	$0$	$-d$	$e$
$A_2$	$0$	$d$	$e$
$A_3$	$0$	$-d$	$-e$
$A_4$	$0$	$d$	$-e$
$B_{C3}$	$0$	$0$	$-f$

# Modèle poutre et chargements élémentaires

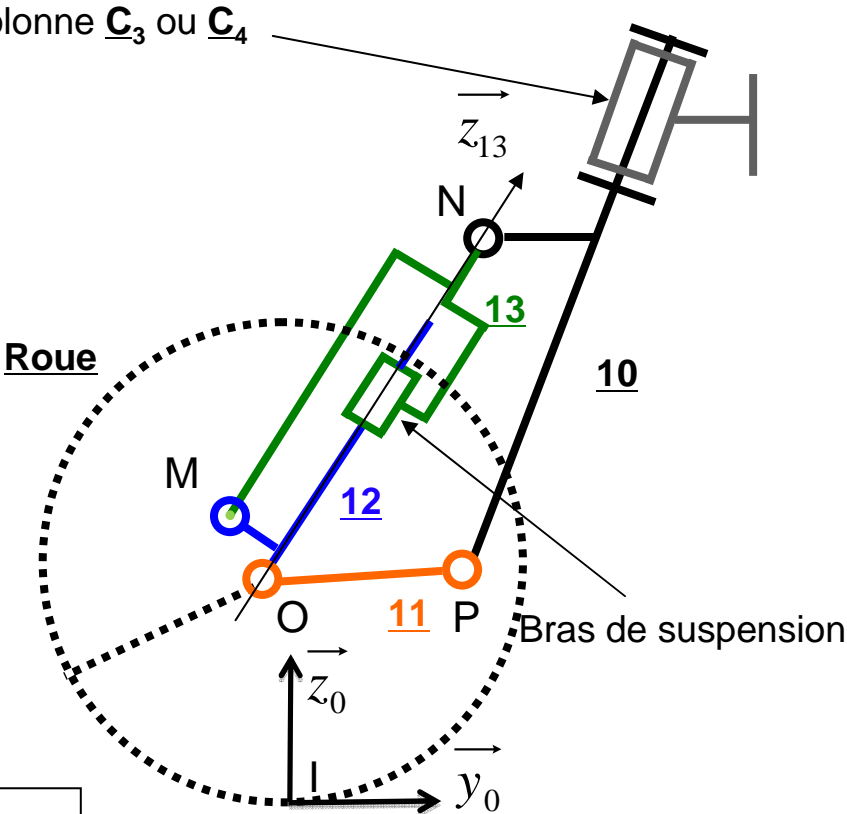
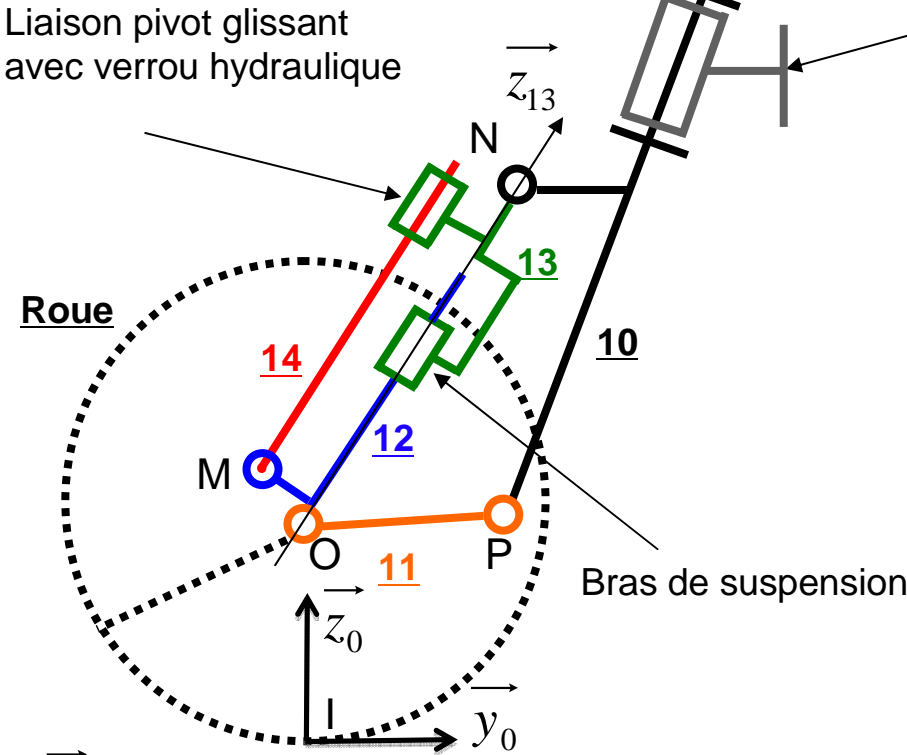


**Bras de suspension : position non verrouillée et verrouillée**

ressort de l'amortisseur non représenté

## Suspension pour une roue du train avant (Doc 5a)

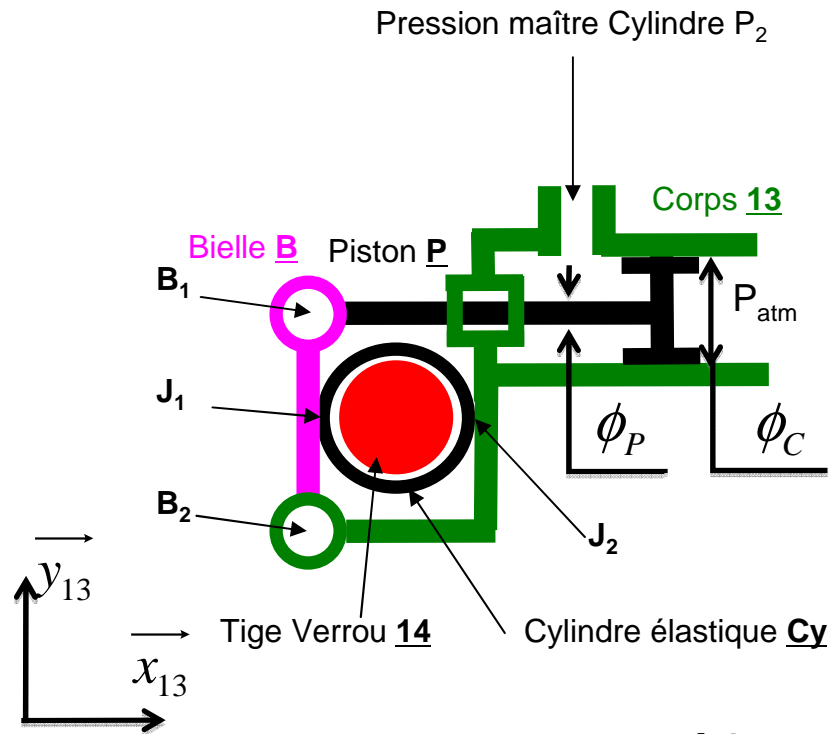
### Schéma équivalent en position verrouillée (Doc 5b)



$$\begin{aligned} \overrightarrow{IO} &= R \overrightarrow{z_0} & R &= 240 \text{ mm} \\ \overrightarrow{OP} &\approx l_{11} \overrightarrow{y_0} & l_{11} &= 200 \text{ mm} \\ \left( \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{y_{13}} \right) &= \left( \overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z_{13}} \right) = \theta_{013} = -30^\circ \end{aligned}$$

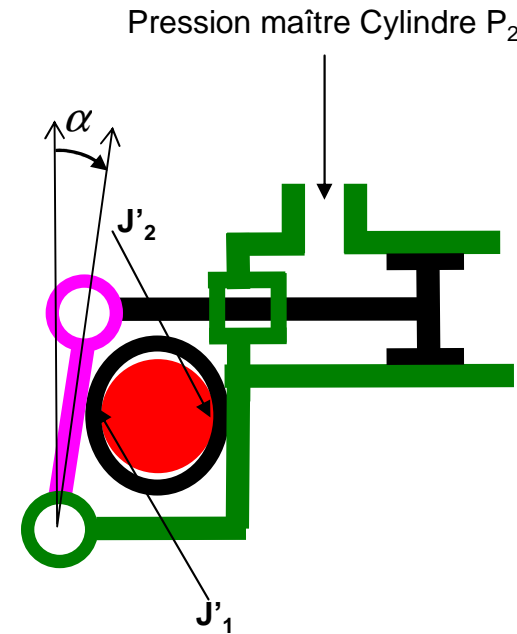
Document 5

# Verrou hydraulique



**Non verrouillé (Doc 6a)**

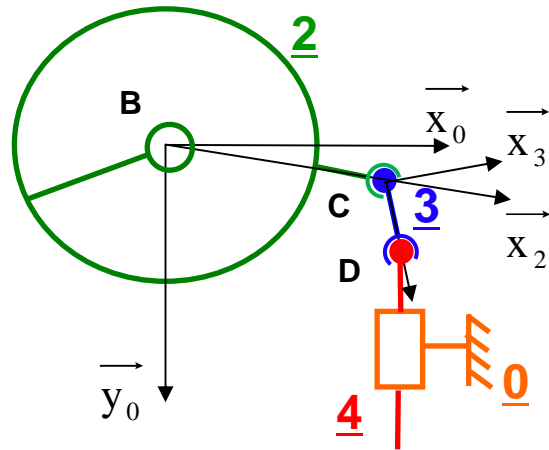
$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_2 B_1} &= l_B \overrightarrow{y_{13}} & l_B &= 30mm \\ \overrightarrow{B_2 J_1} &= \frac{l_B}{2} \overrightarrow{y_{13}} & d_T &= 50mm \\ \overrightarrow{J_1 J_2} &= d_T \overrightarrow{x_{13}} & \phi_C &= 30mm \\ & & \phi_P &= 15mm \\ \alpha &\approx 0 rad \end{aligned}$$



**Verrouillé (Doc 6b)**

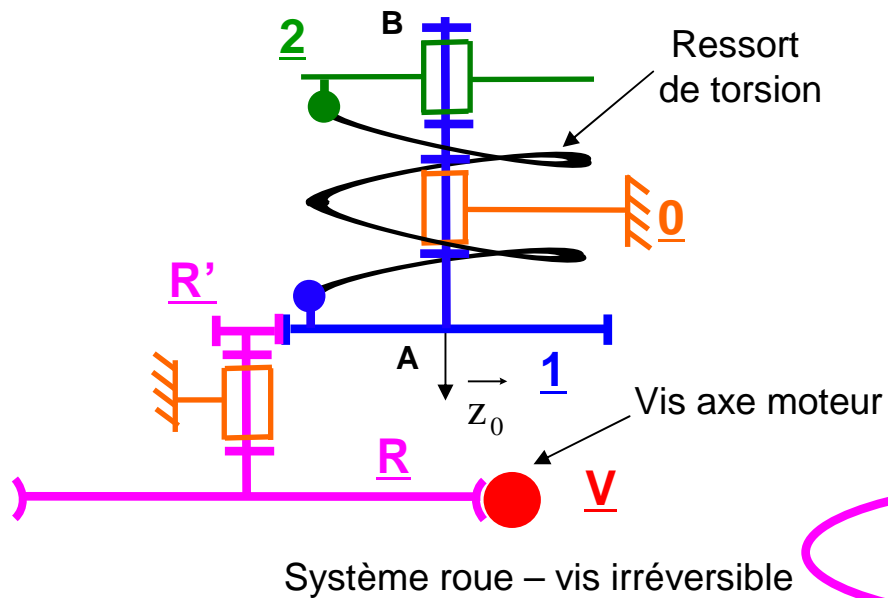
déformée et déplacements amplifiés  
 $\alpha$  est négligeable

# Mécanisme de transmission du dispositif de verrouillage

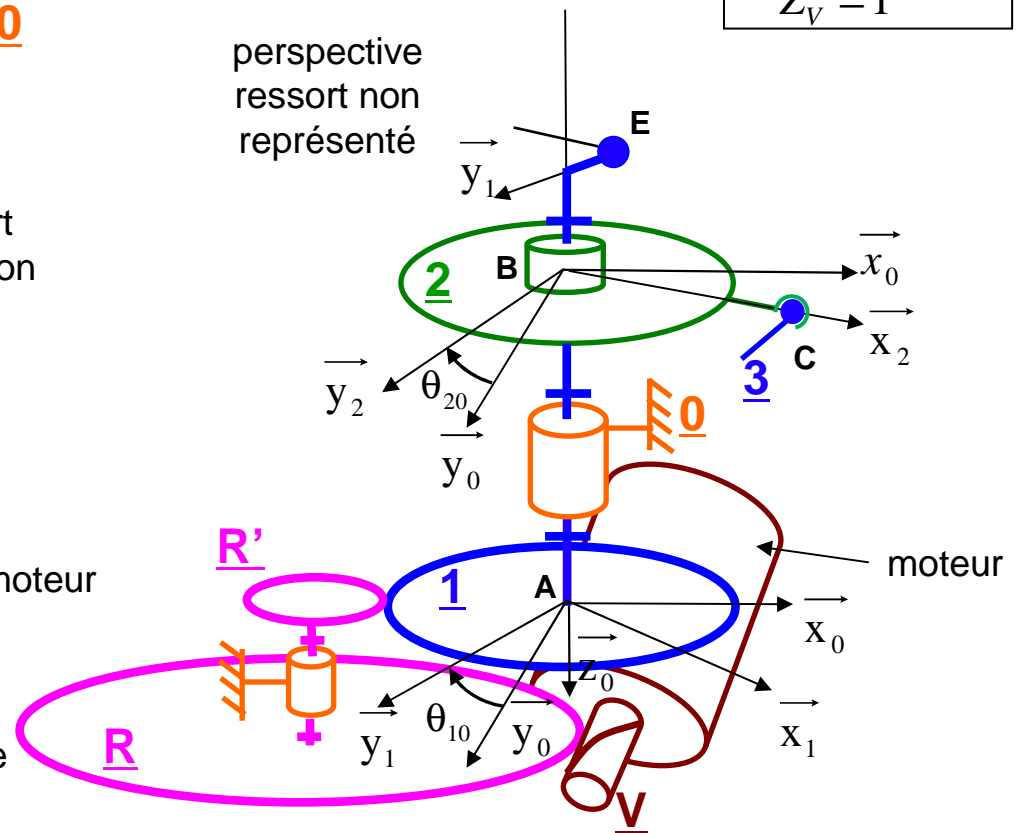


$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= -h\overrightarrow{z_0} \\ \overrightarrow{BC} &= r_2\overrightarrow{x_2} \\ \overrightarrow{BE} &= -e_1\overrightarrow{z_0} - r_1\overrightarrow{y_1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_1 &= 75\text{mm} \\ r_2 &= 60\text{mm} \\ Z_R &= 180 \\ Z_{R'} &= 20 \\ Z_1 &= 140 \\ Z_V &= 1\end{aligned}$$



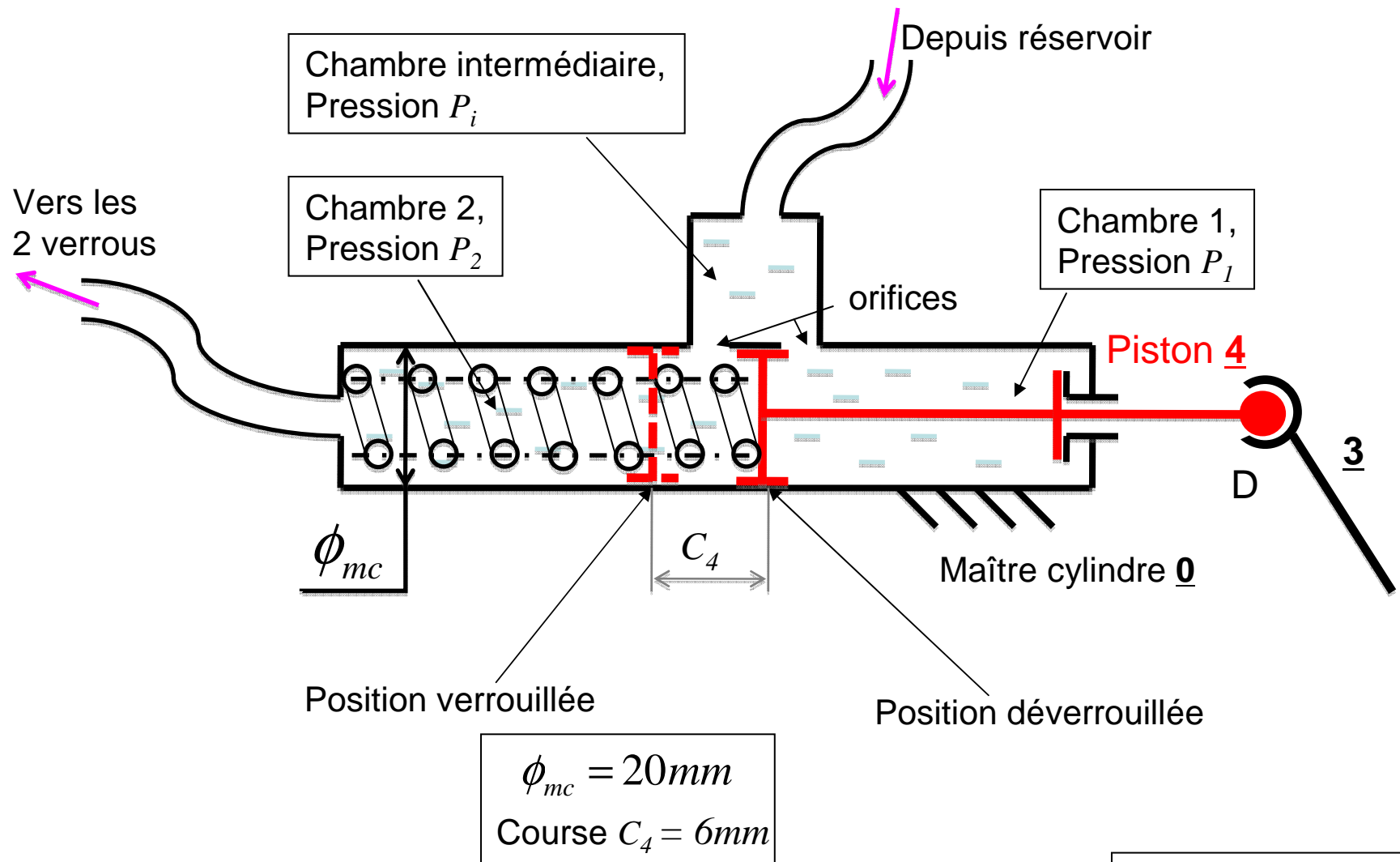
perspective  
ressort non  
représenté



Document 7



## Maître Cylindre



## Correction

**Question 1 :**  $N_s = 6 * 5 = 30$

$$r_s = 6 * (5 - 1) - 1 = 23$$

$$h = 7$$

**Question 2 :** En appliquant le PFS sur chaque pièce isolée (4 car on ne peut pas isoler le bâti), on obtient 24 équations. Il existe une mobilité dans ce système, ce qui signifie qu'une de ces équations est de la forme  $0 = 0$ , il reste donc 23 équations indépendantes.

Il y a 30 inconnues statiques car 6 liaisons pivots, il est alors impossible de résoudre. IL faudrait un système isotatique pour résoudre.

**Question 3 :** En isolant 14,

$$\left\{ T_{Cy \rightarrow 14}^{J'_1} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{J'_1} & 0 \\ Y_{J'_1} & 0 \\ Z_{J'_1} & 0 \end{array} \right\}_{J'_1}$$

$$\left\{ T_{Cy \rightarrow 14}^{J'_2} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{J'_2} & 0 \\ Y_{J'_2} & 0 \\ Z_{J'_2} & 0 \end{array} \right\}_{J'_2}$$

$$\left\{ T_{12 \rightarrow 14}^M \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_M & 0 \\ Y_M & M_M \\ Z_M & N_M \end{array} \right\}_M$$

$$\text{Soit } \overrightarrow{J'_1 M} = -L \cdot \vec{z}_{13},$$

$$\left\{ T_{12 \rightarrow 14}^{J'_1} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_M & L \cdot Y_M \\ Y_M & M_M - L \cdot X_M \\ Z_M & N_M \end{array} \right\}_{J'_1}$$

$$\left\{ T_{Cy \rightarrow 14}^{J'_2} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{J'_2} & 0 \\ Y_{J'_2} & -d_T \cdot Z_{J'_2} \\ Z_{J'_2} & d_T \cdot Y_{J'_2} \end{array} \right\}_{J'_1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{J'_1} + X_{J'_2} + X_M = 0 \\ Y_{J'_1} + Y_{J'_2} + Y_M = 0 \\ Z_{J'_1} + Z_{J'_2} + Z_M = 0 \\ 0 + 0 + L \cdot Y_M = 0 \\ 0 - d_T \cdot Z_{J'_2} + M_M - L \cdot X_M = 0 \\ 0 + d_T \cdot Y_{J'_2} + N_M = 0 \end{array} \right.$$

$Y_M = 0$ , donc  $Y_{J'_1} + Y_{J'_2} = 0$ , or comme ils s'agit d'effort de frottement qui n'existent que s'ils s'opposent à un autre effort, ils sont donc nuls ici  $Y_{J'_1} = Y_{J'_2} = 0$

Cela signifie que  $X_{J'_1} = -f \cdot Z_{J'_1}$  ( $Z_{J'_1}$  est négatif d'après les données,  $Z_{14 \rightarrow Cy} = 923N$  et  $X_{J'_1}$  est positif, d'après le sens de la normale). De même,  $X_{J'_2} = f \cdot Z_{J'_2}$ .

$$\text{On a de plus : } \sqrt{f^2 \cdot Z_{J'_1}^2 + Z_{J'_1}^2} = \sqrt{f^2 \cdot Z_{J'_2}^2 + Z_{J'_2}^2}$$

$$\sqrt{f^2 \cdot Z_{J'_1}^2 + Z_{J'_1}^2} = \sqrt{f^2 \cdot Z_{J'_2}^2 + Z_{J'_2}^2}$$

$|Z_{J'_1}| = |Z_{J'_2}|$ , d'où  $|X_{J'_1}| = |X_{J'_2}|$ , avec  $X_{J'_1}$ , de signe opposé à  $X_{J'_2}$ , donc  $X_M = 0$

## Correction

$$\text{Donc, } \{T_{Cy \rightarrow 14}^{J_1}\} = \begin{pmatrix} -\frac{Z_{Cy \rightarrow 14}}{2.f} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{Z_{Cy \rightarrow 14}}{2} & 0 \end{pmatrix}_{J_1}$$

$$\{T_{Cy \rightarrow 14}^{J_2}\} = \begin{pmatrix} \frac{Z_{Cy \rightarrow 14}}{2.f} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{Z_{Cy \rightarrow 14}}{2} & 0 \end{pmatrix}_{J_2}$$

**Question 4 :** En isolant B,

$$\{T_{P \rightarrow B}\} = \begin{pmatrix} X_{B_1} & L_{B_1} \\ Y_{B_1} & 0 \\ Z_{B_1} & N_{B_1} \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$\{T_{13 \rightarrow B}\} = \begin{pmatrix} X_{B_2} & L_{B_2} \\ Y_{B_2} & 0 \\ Z_{B_2} & N_{B_2} \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\{T_{Cy \rightarrow B}\} = \begin{pmatrix} \frac{Z_{Cy \rightarrow 14}}{2.f} & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{Z_{Cy \rightarrow 14}}{2} & 0 \end{pmatrix}_{J_1}$$

Calcul au point  $B_2$  en ne gardant que le moment afin de supprimer les composantes qui ne nous intéressent pas.

$$-\frac{l_B}{2} \cdot \frac{Z_{Cy \rightarrow 14}}{2.f} + l_B \cdot X_{B_1} = 0$$

$$X_{B_1} = \overrightarrow{R_{P \rightarrow B}} \cdot \overrightarrow{x_{13}} = \frac{Z_{Cy \rightarrow 14}}{4.f}$$

$$X_{B_1} + P_{atm} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \Phi_c^2 - P_2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (\Phi_c^2 - \Phi_p^2) = 0$$

$$P_2 = \frac{X_{B_1} + P_{atm} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \Phi_c^2}{\frac{\pi}{4} \cdot (\Phi_c^2 - \Phi_p^2)}$$

$$P_2 = \frac{923}{4 * 0.3} + 0.1 * \frac{\pi}{4} \cdot 30^2$$

$$P_2 = \frac{\frac{\pi}{4} \cdot (30^2 - 15^2)}{4 * 0.3}$$

$$P_2 = 1.58 MPa = 15.8 bars$$

**Question 5 :** On isole 4 :

$$\{T_{0 \rightarrow 4}\} = \begin{pmatrix} X_{04} & L_{04} \\ 0 & M_{04} \\ Z_{04} & N_{04} \end{pmatrix}_P$$

$$\{T_{P \rightarrow 4}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_P$$

$$\{T_{3 \rightarrow 4}\} = \begin{pmatrix} X_D & 0 \\ Y_D & 0 \\ Z_D & 0 \end{pmatrix}_D$$

En projetant le théorème de la résultante sur X, on obtient  $F_P + Y_D = 0$

## Correction

On isole 3 (non demandé, mais cela permet de détailler les calculs)

$$\{T_{4 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} -X_D & 0 \\ -Y_D & 0 \\ -Z_D & 0 \end{Bmatrix}_D$$

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ Z_C & 0 \end{Bmatrix}_C$$

On a  $\overrightarrow{DC} = l_{DC} \cdot \vec{y}_3 = -l_{DC} \cdot \sin(\theta_{32}) \cdot \vec{x}_2 + l_{DC} \cdot \cos(\theta_{32}) \cdot \vec{y}_2$

De plus,  $\theta_{20} = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2) = 0^\circ$ , donc

$$\overrightarrow{DC} = l_{DC} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta_{32}) \\ \cos(\theta_{32}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{T_{2 \rightarrow 3}\} = \begin{Bmatrix} X_C & l_{DC} \cdot \cos(\theta_{32}) \cdot Z_C \\ Y_C & l_{DC} \cdot \sin(\theta_{32}) \cdot Z_C \\ Z_C & -l_{DC} \cdot \sin(\theta_{32}) \cdot Y_C - l_{DC} \cdot \cos(\theta_{32}) \cdot X_C \end{Bmatrix}_C$$

Donc,  $-l_{DC} \cdot \sin(\theta_{32}) \cdot Y_C - l_{DC} \cdot \cos(\theta_{32}) \cdot X_C = 0$ , donc  $\sin(\theta_{32}) \cdot Y_C + \cos(\theta_{32}) \cdot X_C = 0$  et  $Z_C = 0$

On isole 2 :

$$\{T_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} -X_C & 0 \\ -Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C$$

$$\{T_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_B & L_B \\ Y_B & M_B \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_B$$

$$\{T_{res \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{res \rightarrow 2} \end{Bmatrix}_B$$

Avec  $\overrightarrow{BC} = r_2 \cdot \vec{x}_2 = r_2 \cdot \vec{x}_0$

$$\{T_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} -X_C & 0 \\ -Y_C & 0 \\ 0 & -r_2 \cdot Y_C \end{Bmatrix}_B$$

En projetant le théorème du moment sur Z, on obtient  $C_{res \rightarrow 2} = r_2 \cdot Y_C$

Donc,  $C_{res \rightarrow 2} = r_2 \cdot Y_C = r_2 \cdot Y_D = r_2 \cdot F_P$ .

$$C_{res \rightarrow 2} = r_2 \cdot P_2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \Phi_{mc}^2$$

$$C_{res \rightarrow 2} = 60 \cdot 10^{-3} \cdot 1.5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 20^2$$

$$C_{res \rightarrow 2} = 28.26 N.m$$

**Question 6 :**  $\theta_{10,MAX} = 12^\circ$  pour  $F = 2000 N$ .

$$K_{res} = \frac{C_{res \rightarrow 2}}{\theta_{10,MAX} - \Delta\theta_{20,MAX}}$$

$$K_{res} = \frac{28.26}{12 - 6} = 4.72 N.m/deg^{-1}$$