Réponse harmonique des SLCI

Renaud Costadoat
Lycée Dorian

Introduction

Savoir

Vous êtes capables :

- de résoudre des équations différentielles à l'aide des transformées de Laplace,
- de représenter des réponses impulsionnelles et indicielles,
- de représenter un SLCI à l'aide d'un schéma blocs.

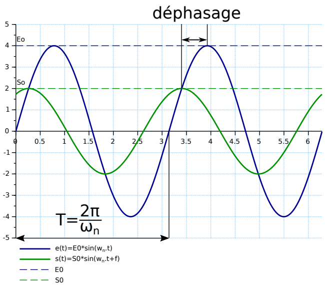
Problematique

Vous devez êtes capables :

- d'effectuer l'étude harmonique d'un système,
- de représenter cette étude sur les diagrammes adéquats.

Réponse harmonique

Lorsque l'entrée d'un SLCI est un signal sinusoïdal du type $e(t) = E_0.sin(\omega_n.t)$, sa sortie en régime permanent est de la forme $s(t) = S_0.sin(\omega_n.t + f)$.



On appelle réponse harmonique, la sortie $s(t)$ en régime permanent d'un système soumis à une entrée $e(t)$ périodique.

Les diagrammes harmoniques

Les courbes $e(t)$ et $s(t)$ dessinées ne sont valables que pour la pulsation ω_n du signal d'entrée. La représentation temporelle ne sera donc plus suffisante dans le cadre de cette étude.

L'objet d'une étude fréquentielle d'un système est d'étudier l'évolution du **gain** et de la **phase**, en fonction de la variation de la valeur de la pulsation ω du signal d'entrée, sur la réponse harmonique du système.

L'étude fréquentielle d'un système, consiste en l'étude, par la méthode des complexes, de la fonction de transfert du système H(p) :

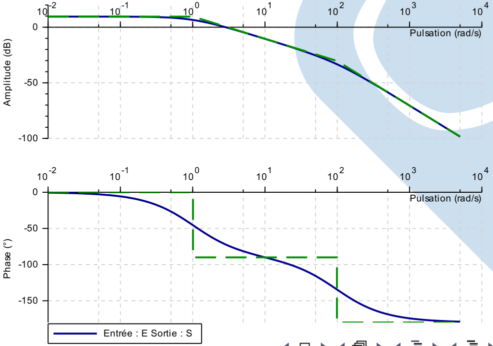
- le **gain** du système $\frac{S_0}{E_0}$ qui est égal au module du nombre complexe $H(j\omega)$: $\frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)|$
- la **phase** du système φ qui est égale à l'argument du nombre complexe $H(j\omega)$: $\varphi = arg(H(j\omega))$

Diagramme de Bode

Plusieurs diagrammes permettent de décrire le comportement fréquentiel d'un système : Bode, Nyquist, Black. Dans un premier temps, nous nous limiterons à l'utilisation du diagramme de Bode.

Il est constitué de deux courbes correspondant aux tracés du module et la phase de $H(j\omega)$ en fonction de la pulsation sur une échelle logarithmique en base 10.

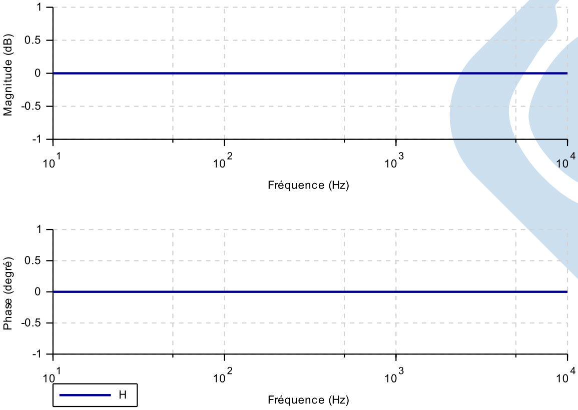
- Le module $G_{db} = |H(j\omega)|$ est exprimé en décibel.
- La phase φ est exprimée en degrés.



Cas du gain pur

$$\boxed{H(p) = K}$$

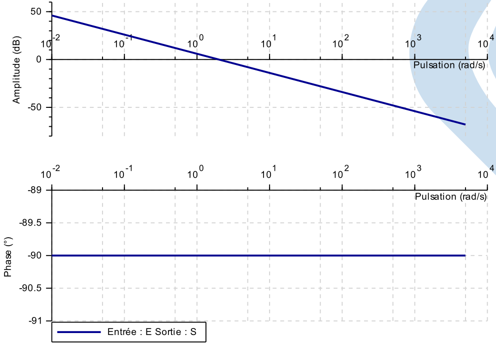
- $G_{db} = 20 log|K|$
- $\varphi = arg(K) = arctan\left(\frac{0}{K}\right) = 0.$



Cas de l'intégrateur

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{p}}$$

- $G_{db} = 20log\left|\frac{K}{p}\right| = 20log(K) - 20log(\omega)$
- $\varphi = arg\left(\frac{K}{j\omega}\right) = -arctan\left(\frac{\frac{\omega}{K}}{0}\right) = -90.$



Cas du premier ordre

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau.p}$$

Pour $\omega \to 0$

- $G_{db} = 20log\left|\frac{K}{1+\tau.p}\right| = 20log(K) - 20log(1) = 20log(K)$
- $\varphi = arg\left(\frac{K}{1+\tau.j\omega}\right) = -arctan\left(\frac{0}{K}\right) = 0.$

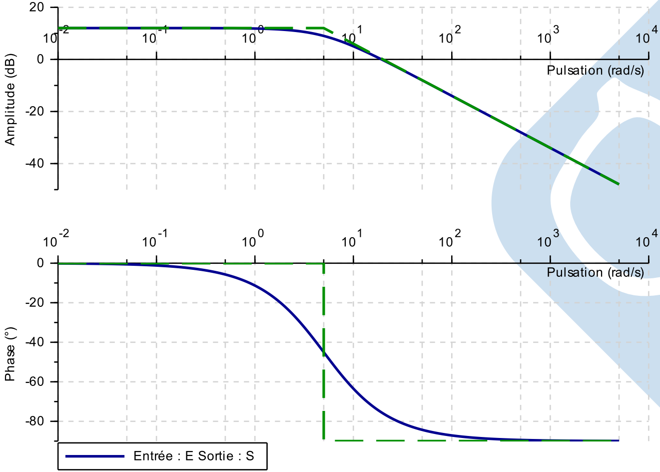
Pour $\omega \to +\infty$

- $G_{db} = 20log\left|\frac{K}{1+\tau.p}\right| = 20log\left(\frac{K}{\tau}\right) - 20log(\omega)$
- $\varphi = arg\left(\frac{K}{1+\tau.j\omega}\right) = -arctan\left(\frac{+\infty}{K}\right) = -90.$

Pour $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$, pulsation de cassure.

- $G_{db} = 20log\left(\frac{K}{\sqrt{2}}\right) = 20log(K) - 3db$
- $\varphi = arg\left(\frac{K}{1+\tau.j\omega_c}\right) = -arctan(1) = -45.$

Cas du premier ordre



Cas du second ordre (z>1)

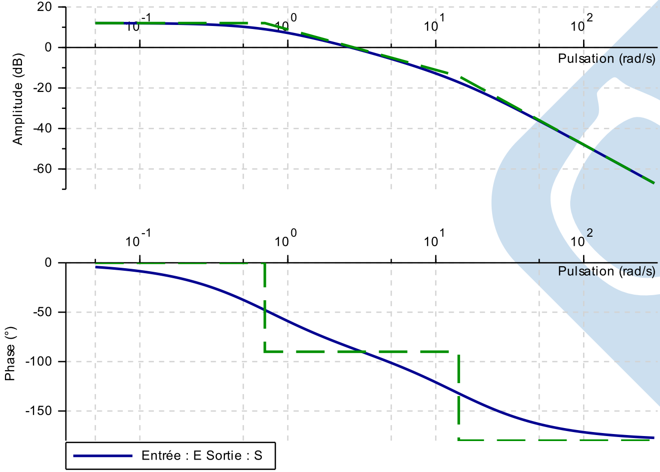
$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2.z}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

Cas z>1, alors $H(j\omega) = \dfrac{K}{(1 + T_1.j.\omega).(1 + T_2.j.\omega)}$

- $G_{db} = 20log\left|\dfrac{K}{(1 + T_1.j.\omega).(1 + T_2.j.\omega)}\right| = 20log(K) - 10log(1 + T_1^2.\omega^2)) - 10log(1 + T_2^2.\omega^2))$
- $\varphi = arg\left(\dfrac{K}{(1 + T_1.j.\omega).(1 + T_2.j.\omega)}\right) = -arctan(T_1.\omega) - arctan(T_2.\omega)$.

Pour $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{T_1.T_2}}$, la courbe de phase passe toujours par -90.

Cas du second ordre (z>1)



Cas du second ordre (z=1)

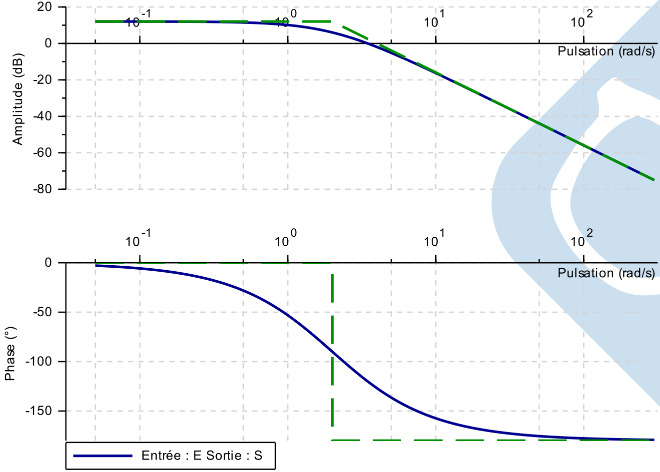
$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2.z}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

Cas z=1, alors $H(j\omega) = \dfrac{K}{(1 + T.j.\omega)^2}$

- $G_{db} = 20log\left|\dfrac{K}{(1 + T.j.\omega)^2}\right| = 20log(K) - 20log(1 + T^2.\omega^2))$
- $\varphi = arg\left(\dfrac{K}{(1 + T_1.j.\omega).(1 + T_2.j.\omega)}\right) = -2.arctan(T.\omega).$

Pour $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{T_1.T_2}}$, la courbe de phase passe toujours par -90.

Cas du second ordre (z=1)



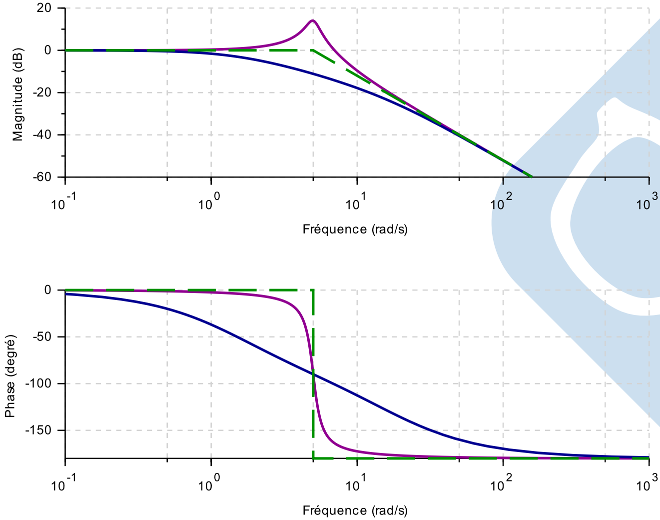
Cas du second ordre (z<1)

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2.z}{\omega_0}.p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

Cas z<1, alors $H(j\omega) = \dfrac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j.\frac{2.z.\omega}{\omega_0}}$

- $G_{db} = 20log\left|\dfrac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j.\frac{2.z.\omega}{\omega_0}}\right| = 20log(K) - 10log\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4.z^2.\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$
- $\varphi = arg\left(\dfrac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j.\frac{2.z.\omega}{\omega_0}}\right) = -arctan\left(\dfrac{\frac{2.z.\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right).$

Cas du second ordre (z<1)



Résonance

Une résonance apparaît, lorsque $0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$, cela se manifeste par la présence d'un pic sur la courbe de gain.

Celui-ci étant un maximum, il peut être calculé s'il existe, pour la pulsation ω_r de la manière suivante: $\frac{dG}{d\omega}(\omega_r) = 0$

$$\left[\frac{d((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4.z^2\omega_0^2.\omega^2)}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_r} = 0$$

$$-4.\omega_r.(\omega_0^2 - \omega_r^2) + 8.z^2.\omega_0^2.\omega_r = 0.$$

La résonance apparaît donc à la pulsation $\boxed{\omega_r = \omega_0.\sqrt{1-2.z^2}}$

Et sa valeur est $\boxed{Q = \frac{|H(j.\omega)_{max}|}{|H(0)|} = \frac{1}{2.z.\sqrt{1-z^2}}}$.

Conclusion

Savoir

Vous êtes capables :

- de construire les diagrammes de Bode à partir de fonctions de transfert,
- d'identifier des fonctions à partir de la lecture de ces diagrammes ou des tracés temporels.

Problematique

Vous devez êtes capables :

- de mettre en place une correction de l'asservissement en vue du respect du cahier des charges.