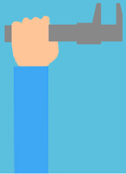
Les liaisons mécaniques

Renaud Costadoat

Lycée Dorian



Les liaisons mécaniques

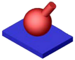
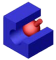
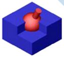
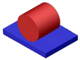
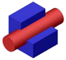
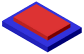
Objectif

- Le principal outil utilisé afin de modéliser le comportement d'un mécanisme est le torseur car il permet d'exprimer n'importe quel **champ de vecteurs**.
- La mécanique appliquée au Sciences Industrielles a décomposé le mouvement général d'un solide afin de proposer des mouvements de base pour lesquels il est possible de spécifier la forme d'un torseur.

Les liaisons élémentaires

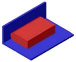
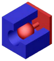
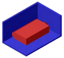
Definition

Une liaison élémentaire entre deux solides S_1 et S_2 est obtenue à partir du contact d'une surface géométrique élémentaire liée à S_1 sur une surface géométrique élémentaire liée à S_2.

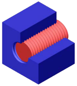
	Plan	Cylindre	Sphère
Sphère			
Cylindre			
Plan			

Les liaisons composées

Une liaison composée est obtenue par association cohérente de liaisons élémentaires.

Glissière			Pivot
Encastrement			Sphérique à doigt

Liaison avec surface hélicoïdale

Hélicoïdale	

Degrés de liberté ou de mobilité d'une liaison

- Les **degrés de liberté** d'une liaison entre deux solides S_1 et S_2 correspondent aux mouvements relatifs indépendants autorisés au sein de cette liaison entre S_1 et S_2.
- Il existe 6 mouvements élémentaires possibles d'un solide dans l'espace rapporté à un repère $R(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$
  - 3 translations : T_x, T_y, T_z,
  - 3 rotations : R_x, R_y, R_z.
- **m** est le nombre de degrés de liberté d'une liaison
- Le degré de liaison d'une liaison vaut, dans l'espace, **6-m**, c'est le **complémentaire** du degré de liberté.
- Dans le plan $(A, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$, les 3 mouvements possibles d'un solide sont :
  - 2 translations : T_x, T_y,
  - 1 rotation : R_z.

  Le degré de liaison d'une liaison vaut, dans le plan, **3-m**.

Les liaisons mécaniques

1. Liaison pivot,
2. Liaison glissière,
3. Liaison pivot glissant,
4. Liaison hélicoïdale,
5. Liaison sphérique ou rotule,
6. Liaison sphérique à doigt,
7. Liaison appui plan,
8. Liaison linéaire annulaire,
9. Liaison linéaire rectiligne,
10. Liaison ponctuelle,
11. Liaison encastrement.

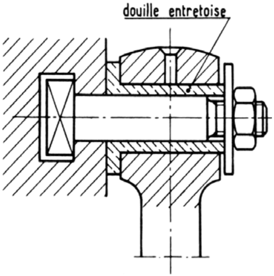
Definition

Caractéristiques des liaisons parfaites:

- des contacts sans frottement entre les surfaces,
- des surfaces de contact géométriquement parfaites,
- aucun jeu.

Liaison pivot

- Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison pivot si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une rotation autour d'un axe,
- Degré de liberté: $R_1 = 1$, degré de liberté égal à 1.



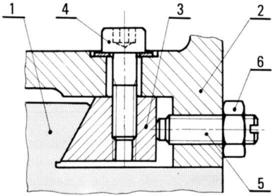
Vue plane de face

Vue plane de côté

Perspective

Liaison glissière

- Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison glissière si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une translation le long d'un axe,
- Degré de liberté: $T_1 = 1$, degré de liberté égal à 1



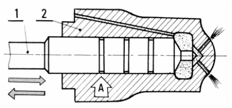
Vue plane de face

Vue plane de côté

Perspective

Liaison pivot glissant

- Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison pivot glissant si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation et d'une translation par rapport à un axe,
- Degré de liberté: $T_1 = 1$ et $R_1 = 1$, degré de liberté égal à 2.



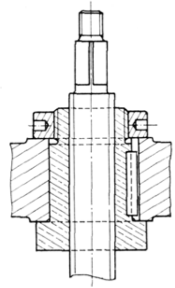
Vue plane de face

Vue plane de côté

Perspective

Liaison hélicoïdale

- Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison hélicoïdale si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation et d'une translation proportionnelles par rapport à un axe,
- Degré de liberté: T_1 et R_1 sont dépendants. Si k est le pas, on a $k \times \theta_1 = 2\pi \times \Delta_1$, degré de liberté égal à 1.



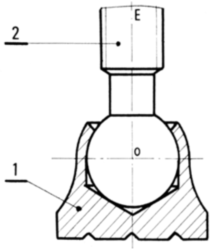
Vue plane de face

Vue plane de côté

Perspective

Liaison rotule

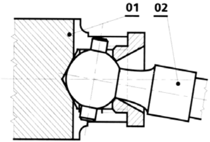
- Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison sphérique ou rotule si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible est une rotation autour d'un point,
- Degré de liberté: $R_1 = 1$, $R_2 = 1$ et $R_3 = 1$, degré de liberté égal à 3.



Vue plane de face | Vue plane de côté | Perspective

Liaison sphérique à doigt

- Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison sphérique à doigt si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte de la rotation par rapport à deux axes concourants,
- Degré de liberté: $R_1 = 1$ et $R_2 = 1$, degré de liberté égal à 2.



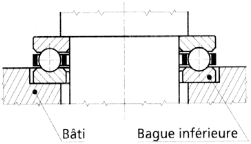
Vue plane de face

Vue plane de côté

Perspective

Liaison appui plan

- Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison appui plan si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour d'un axe et de la translation le long de deux axes perpendiculaires au premier,
- Degré de liberté: $R_1 = 1$, $T_2 = 1$ et $T_3 = 1$, degré de liberté égal à 3.



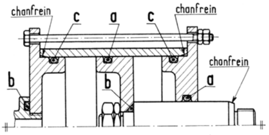
Vue plane de face

Vue plane de côté

Perspective

Liaison linéaire annulaire

- Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison linéaire annulaire si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour d'un point et d'une translation suivant un axe passant par ce point,
- Degré de liberté: $T_1 = 1$, $R_1 = 1$, $R_2 = 1$ et $R_3 = 1$, degré de liberté égal à 4.



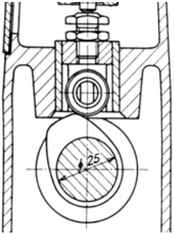
Vue plane de face

Vue plane de côté

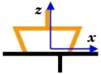
Perspective

Liaison linéaire rectiligne

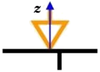
- Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison linéaire rectiligne si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte d'une rotation autour de deux axes et de la translation le long de deux autres axes, l'une des rotations et l'une des translations étant relatives au même axe,
- Degré de liberté: $T_2 = 1$, $T_3 = 1$, $R_1 = 1$ et $R_2 = 1$, degré de liberté égal à 4.



Vue plane de face



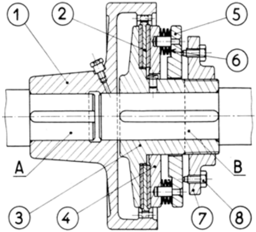
Vue plane de côté



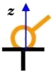
Perspective

Liaison ponctuelle

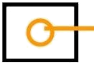
- Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison ponctuelle si, au cours du fonctionnement, le seul mouvement relatif possible résulte de la rotation autour d'un point et de la translation le long de deux axes concourants en ce point
- Degré de liberté: $T_2 = T_3 = 1$ et $R_1 = R_2 = R_3 = 1$, degré de liberté égal à 5.



Vue plane de face



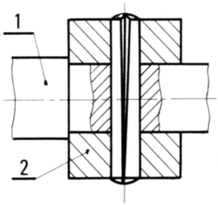
Vue plane de côté



Perspective

Liaison encastrement

- Deux solides S_1 et S_2 sont en liaison encastrement s'il n'existe aucun degré de liberté entre les solides,
- Degré de liberté: $T_x = T_y = T_z = R_x = R_y = R_z = 0$, degré de liberté nul.



Vue plane de face | Vue plane de côté | Perspective

Torseur cinématique

- Le torseur cinématique est le torseur représentant le champ de vecteurs vitesse d'un solide S dans le repère R.
  - Sa résultante est le vecteur vitesse de rotation du solide : $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$,
  - Son moment en un point P est le vecteur vitesse linéaire du point P : $\overrightarrow{V_{P\in S/R}}$,

  Le Torseur cinématique du solide S par rapport à R s'écrit:

$$\left\{V_{S/R}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{P\in S/R}} \end{array}\right\}_P = \left\{\begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{array}\right\}_P$$

- Et on peut écrire ce torseur en un point quelconque du solide pour en obtenir sa vitesse en utilisant le théorème de Varignon.

Exemples de torseurs cinématiques

- Dans un mouvement de translation, $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$ est nul, donc le torseur devient un torseur couple :

$$\left\{V_{S/R}\right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V_{P\in S/R}} \end{array} \right\}_P$$

- $\overrightarrow{V_{P\in S/R}} = \overrightarrow{0}$ si le point P appartient à l'axe de rotation du solide. Si on exprime le torseur au point P :

$$\left\{V_{S/R}\right\}_P = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_P$$

Attention: Ce torseur à un moment non-nul si on l'exprime en un point qui n'appartient pas à l'axe de rotation du solide

Exemples de torseurs cinématiques

- Un mouvement hélicoïdal est caractérisé par une rotation combinée à une translation, l'axe de rotation étant confondu avec la direction de la translation. Cela entraine que pour tout point A de l'axe de rotation, $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$. Le torseur cinématique de S en A appartenant à l'axe de rotation s'écrit de la façon suivante :

$$\left\{V_{S/R}\right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{array} \right\}_A \text{, avec } \overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \lambda.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

- Pour tous autres points P du solide, le vecteur vitesse est une combinaison de $\overrightarrow{V_{A\in S/R}}$ et du terme $\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}$

Torseurs cinématiques classiques

Les torseurs classiques sont définis en connaissant les mouvements autorisés et les degrés de liberté de la liaison.

Liaison pivot	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $(O, \vec{x})$
Liaison glissière	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 direction $\vec{x}$
Liaison pivot glissant	Torseur cinématique $\left\{ \begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $(O, \vec{x})$

Torseurs cinématiques classiques

Liaison hélicoïdale	Torseur cinématique $\left\{\begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $(O, \overrightarrow{x})$ $V_x = \frac{p.\omega_x}{2\pi}$
Liaison sphérique ou rotule	Torseur cinématique $\left\{\begin{array}{cc} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 0 axe
Liaison sphérique à doigts	Torseur cinématique $\left\{\begin{array}{cc} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 2 axes, $(O, \overrightarrow{x})$, $(O, \overrightarrow{y})$
Liaison appui plan	Torseur cinématique $\left\{\begin{array}{cc} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $(O, \overrightarrow{z})$ normale au plan

Torseurs cinématiques classiques

Liaison linéaire annulaire	Torseur cinématique $\left\{\begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $(O, \overrightarrow{x})$
Liaison linéaire rectiligne	Torseur cinématique $\left\{\begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 2 axes $(O, \overrightarrow{x})$, $(O, \overrightarrow{z})$ direction de la ligne $\overrightarrow{x}$ normale au plan $\overrightarrow{z}$
Liaison ponctuelle	Torseur cinématique $\left\{\begin{array}{cc} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $(O, \overrightarrow{z})$ normale au plan
Liaison encastrement	Torseur cinématique $\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 0 axe

Torseur d'actions mécaniques transmissibles

L'action mécanique du solide (S_1) sur (S_2) au niveau de la liaison l_i peut être définie par un torseur :

$$\{T_{i(S_2\rightarrow S_1)}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{(S_2\rightarrow S_1)}} \\ \overrightarrow{M_{O,(S_2\rightarrow S_1)}} \end{array} \right\}_O$$

avec :

$$\overrightarrow{R_{(S_2\rightarrow S_1)}} = X_i.\overrightarrow{x} + Y_i.\overrightarrow{y} + Z_i.\overrightarrow{z}$$
$$\overrightarrow{M_{O,(S_2\rightarrow S_1)}} = L_i.\overrightarrow{x} + M_i.\overrightarrow{y} + N_i.\overrightarrow{z}$$

Le torseur d'actions mécaniques peut s'écrire ainsi :

$$\{T_{i(S_2\rightarrow S_1)}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_i & L_i \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{array} \right\}_O$$

Les composantes X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i non nulles sont les **inconnues statiques** de la liaison l_i.

n_{si} est le nombre d'inconnues statiques indépendantes.

Torseurs d'actions transmissibles classiques

Les torseurs classiques sont définis en connaissant les mouvements autorisés et les degrés de liberté de la liaison.

Liaison pivot	Torseur d'actions transmissibles $\left\{\begin{array}{cc} X & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $(O, \overrightarrow{x})$
Liaison glissière	Torseur d'actions transmissibles $\left\{\begin{array}{cc} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 1 direction $\overrightarrow{x}$
Liaison pivot glissant	Torseur d'actions transmissibles $\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y & M \\ Z & N \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $(O, \overrightarrow{x})$

Torseurs d'actions transmissibles classiques

Liaison hélicoïdale	Torseur d'actions transmissibles $\left\{\begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $(O, \overrightarrow{x})$ $L = \frac{p.X}{2\pi}$
Liaison sphérique ou rotule	Torseur d'actions transmissibles $\left\{\begin{array}{cc} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 0 axe
Liaison sphérique à doigts	Torseur d'actions transmissibles $\left\{\begin{array}{cc} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & N \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 2 axes, $(O, \overrightarrow{x})$, $(O, \overrightarrow{y})$

Torseurs d'actions transmissibles classiques

Liaison appui plan	Torseur d'actions transmissibles $\left\{\begin{array}{cc} 0 & L \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $(O, \vec{z})$ normale au plan
Liaison linéaire annulaire	Torseur d'actions transmissibles $\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 1 axe $(O, \vec{x})$
Liaison linéaire rectiligne	Torseur d'actions transmissibles $\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & M \\ Z & 0 \end{array}\right\}_O$	Axes nécessaires 2 axes $(O, \vec{x})$, $(O, \vec{z})$ direction de la ligne $\vec{x}$ normale au plan $\vec{z}$

Torseurs d'actions transmissibles classiques

Liaison ponctuelle	Torseur d'actions transmissibles $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}_O$	Axes nécessaires $(O, \overrightarrow{z})$ normale au plan
Liaison encastrement	Torseur d'actions transmissibles $\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}_O$	Axes nécessaires 0 axe

Liaison parfaite

Une liaison parfaite lorsque le produit de ses torseurs cinématique et statique est nul. Ces torseurs sont dit **réciproques**.

Soit: $\left\{T_{i(S_2 \to S_1)}\right\} \times \left\{V_{i(S_2/S_1)}\right\} = 0$

D'où, $\overrightarrow{M_{O,(S_2 \to S_1)}}.\overrightarrow{\Omega_{i(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{R_{(S_2 \to S_1)}}.\overrightarrow{V_{i(O \in S_2/S_1)}} = 0$

Donc, $L_i.\alpha_i + M_i.\beta_i + N_i.\gamma_i + X_i.u_i + Y_i.v_i + Z_i.w_i = 0$

Ainsi, $n_{ci} + n_{si} = 6$

Pour une liaison pivot: $n_{si} = 5$

$$\left\{T_{i(S_2 \to S_1)}\right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_i & 0 \\ Y_i & M_i \\ Z_i & N_i \end{array} \right\}_O \quad \left\{V_{i(S_2/S_1)}\right\} = \left\{ \begin{array}{cc} \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_O$$

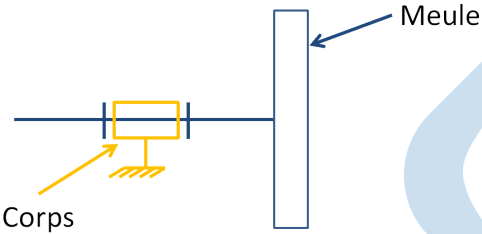
La schématisation

- La **représentation** des liaisons vue précédemment permet de définir des **schémas** qui permettent de représenter **une partie de la géométrie** du mécanisme.
- La géométrie représentée constitue le strict minimum nécessaire à la modélisation du mécanisme pour une application donnée.

Exemple

- Pour une étude cinématique, l'épaisseur d'une pièce n'a aucune importance, pas plus que le moyen technologique utilisé pour réaliser un encastrement,
- Ces informations ne doivent, par conséquent, pas être représentées.

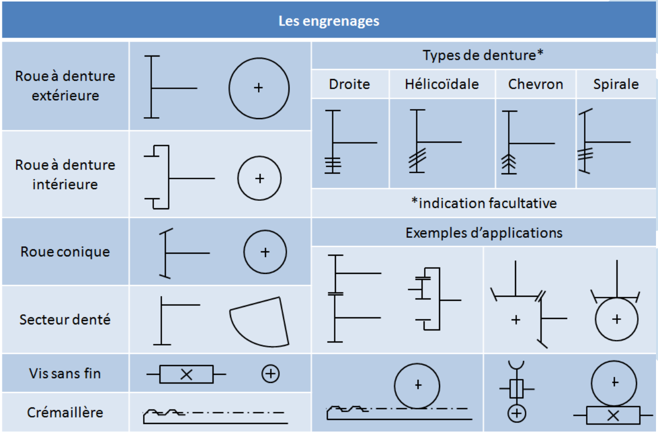
Schéma cinématique



- Il représente les mouvements relatifs entre sous-ensembles cinématiques.
- Il fait l'objet de la norme NF EN 23-952.
- Seules les mobilités sont modélisées (pas la réalisation des liaisons)

Les éléments du schéma cinématique

Les liaisons normalisées et les engrenages...



Les éléments du schéma cinématique

... les engrenages et les liens flexibles

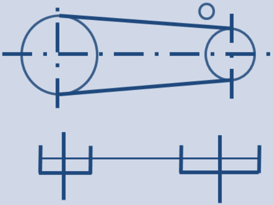
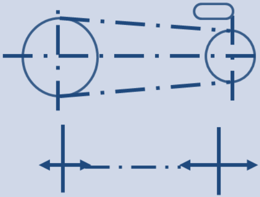
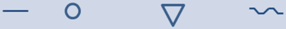
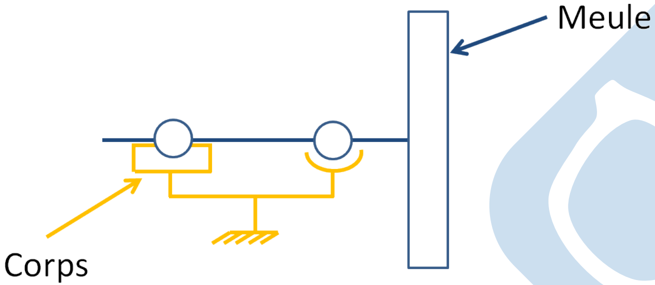
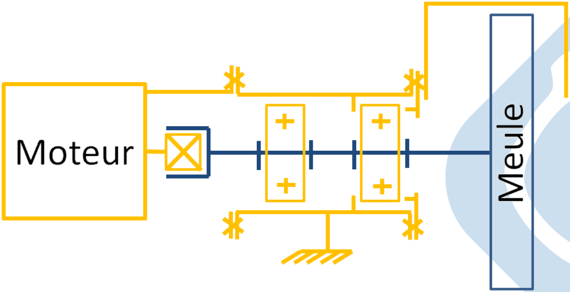
Poulies-Courroie	Pignons chaine
	
Indications	Indications
Plate - Ronde – Trapézoïdale- Crantée	Maillons - Rouleaux – Dents
	

Schéma architectural



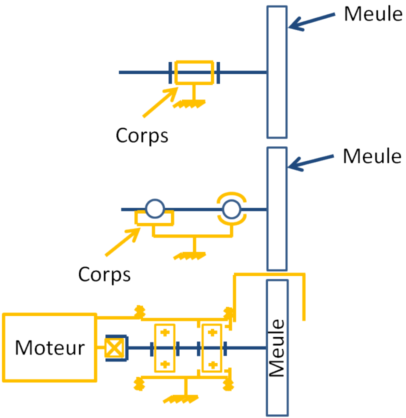
- Il met en évidence la **nature** et les **positions** relatives des différentes **liaisons élémentaires**
- Les **pièces sans mouvement relatif** ne sont pas **distinguées** les unes des autres
- Ses **composants** sont les **constituants** du schéma cinématique

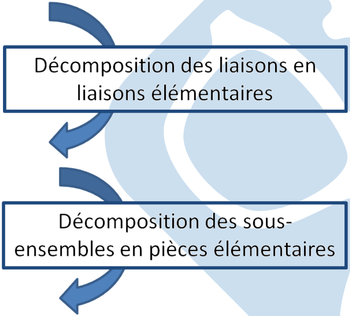
Schéma technologique



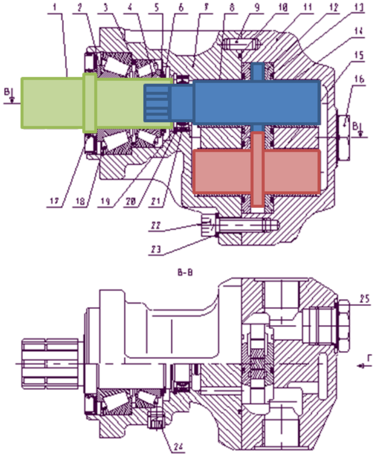
- Il permet la description de la nature et de l'**agencement** des principaux **composants** d'un produit, généralement représentés par des symboles normalisés.

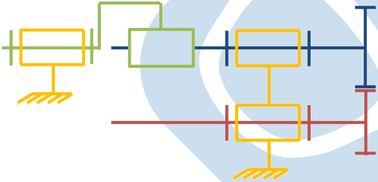
Les trois types de schémas



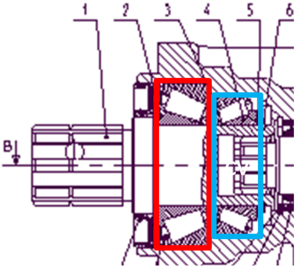


Pompe à engrenage (Cinématique)

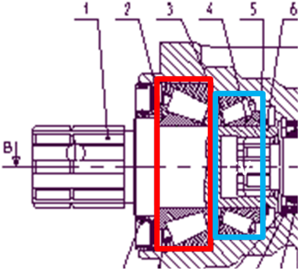


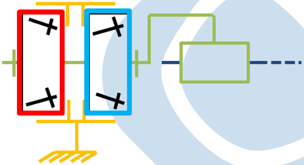


Pompe à engrenage (Architecture)



Pompe à engrenage (Technologique)





Les liaisons d'un mécanisme

Savoir

- Vous devez être capables de modéliser une liaison à partir des surfaces qui caractérisent le contact entre ses pièces,
- Déterminer les degrés de liberté et de liaison de celle-ci,
- Écrire le torseur correspondant et l'exprimer en n'importe quel point,
- Les schémas cinématiques, architecturaux et technologies sont la base de la communication de la structure d'un mécanisme.

Objectif

- Représenter la géométrie des pièces plus proche du réel,
- Modéliser l'ensemble de l'architecture d'un mécanisme par ses liaisons,
- Intégrer le phénomène d'hyperstaticité dans la résolution des boucles fermées.