

Séquence : 05

Document : TD01

Lycée Dorian

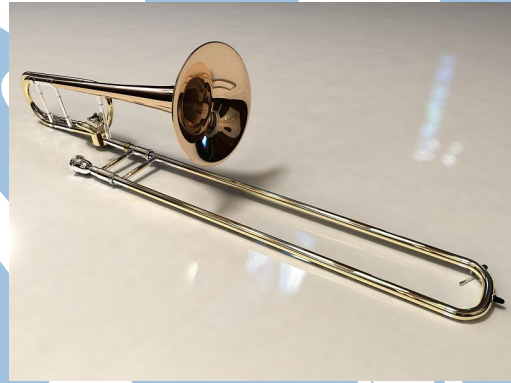
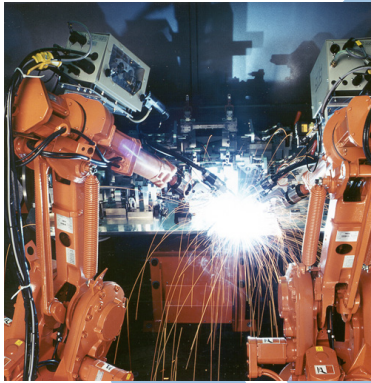
Renaud Costadoat

Françoise Puig



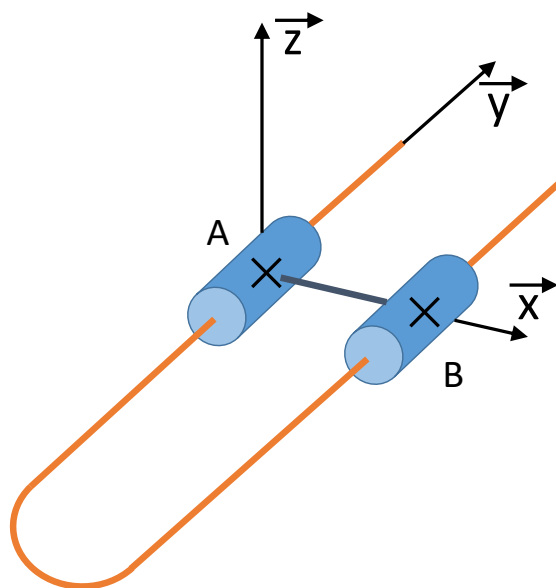
Avec Correction

Liaisons équivalentes



Référence	S05 - TD01
Compétences	Mod2-C12: Modélisation cinématique des liaisons entre solides Mod2-C14: Modèle cinématique d'un mécanisme Rés-C1: Loi entrée sortie géométrique et cinématique
Description	Equivalence des liaisons en parallèle et en série
Système	Robot de soudage, Trombone à coulisse

1 Trombone à coulisse



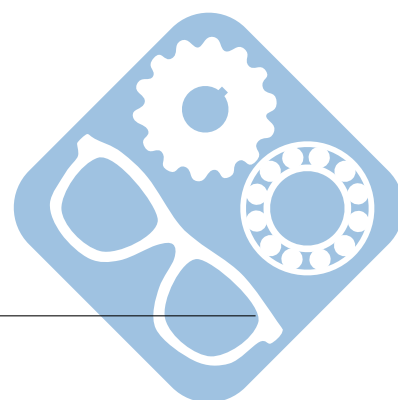
Le **trombone** est un instrument de musique à vent et à embouchure de la famille des cuivres clairs. Le terme désigne implicitement le **trombone à coulisse** caractérisé par l'utilisation d'une **coulisse télescopique**, mais il existe également des modèles de trombone à pistons. Le trombone à coulisse est l'un des rares instruments à vent dont la maîtrise ne nécessite pas l'utilisation individuelle des doigts.

Le trombone est constitué d'un corps (0) et d'une coulisse (1). Le vecteur $\overrightarrow{AB} = e \cdot \overrightarrow{x'}$.

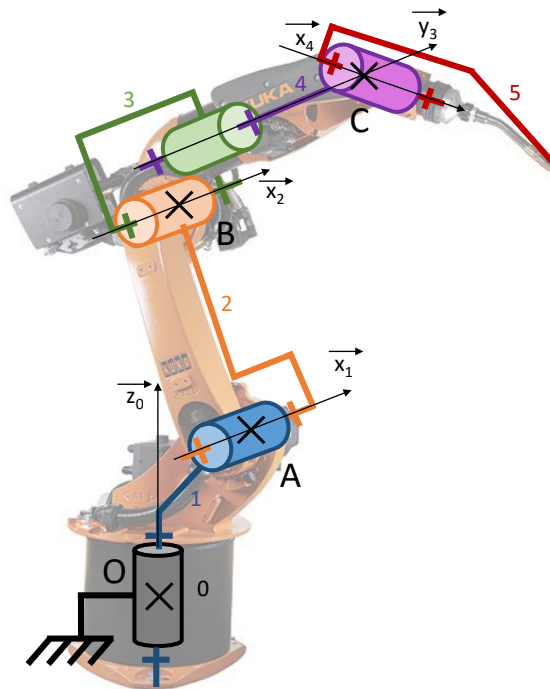
Question 1 : Écrire le graphe des liaisons du trombone à coulisse.

Question 2 : Écrire les torseurs cinématiques de chacune des liaisons et les déplacer au même point.

Question 3 : En déduire la liaison équivalente entre le **corps** du trombone et la **coulisse**.



2 Robot soudeur



Un **robot industriel** est un système polyarticulé, à l'image d'un bras humain, composé de plusieurs degrés de liberté, permettant de déplacer et d'orienter un outil (organe effecteur) dans un espace de travail donné.

Il existe :

- des robots de peinture ou de soudure largement utilisés dans l'industrie automobile,
- des robots de montage de dimension souvent plus réduite,
- des robots mobiles destinés à l'inspection souvent associés à de l'intelligence artificielle et capables, dans certains cas, de prendre en compte l'environnement.

Données :

- $\vec{OA} = a.\vec{y}_1 + b.\vec{z}_1$,
- $\vec{AB} = c.\vec{y}_2$,
- $\vec{BC} = d.\vec{y}_3 + e.\vec{z}_3$.

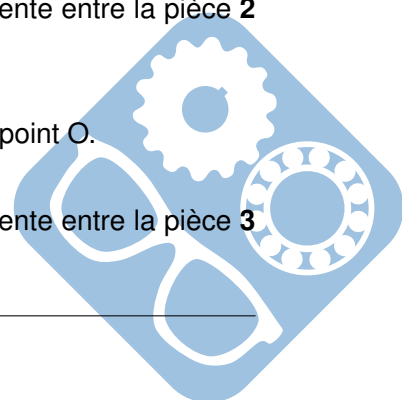
Question 1 : Écrire le graphe des liaisons du robot soudeur.

Question 2 : Écrire les torseurs cinématiques des liaisons $\{V_{1/0}\}$ et $\{V_{2/1}\}$ et les déplacer au point O.

Question 3 : En déduire le torseur et le nombre de mobilité de la liaison équivalente entre la pièce 2 et le bâti.

Question 4 : Écrire le torseur cinématique de la liaison $\{V_{3/2}\}$ et le déplacer au point O.

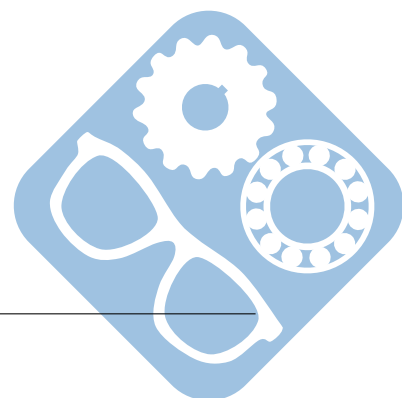
Question 5 : En déduire le torseur et le nombre de mobilité de la liaison équivalente entre la pièce 3 et le bâti.



Question 6 : Écrire le torseur cinématique de la liaison $\{V_{4/3}\}$ et le déplacer au point O.

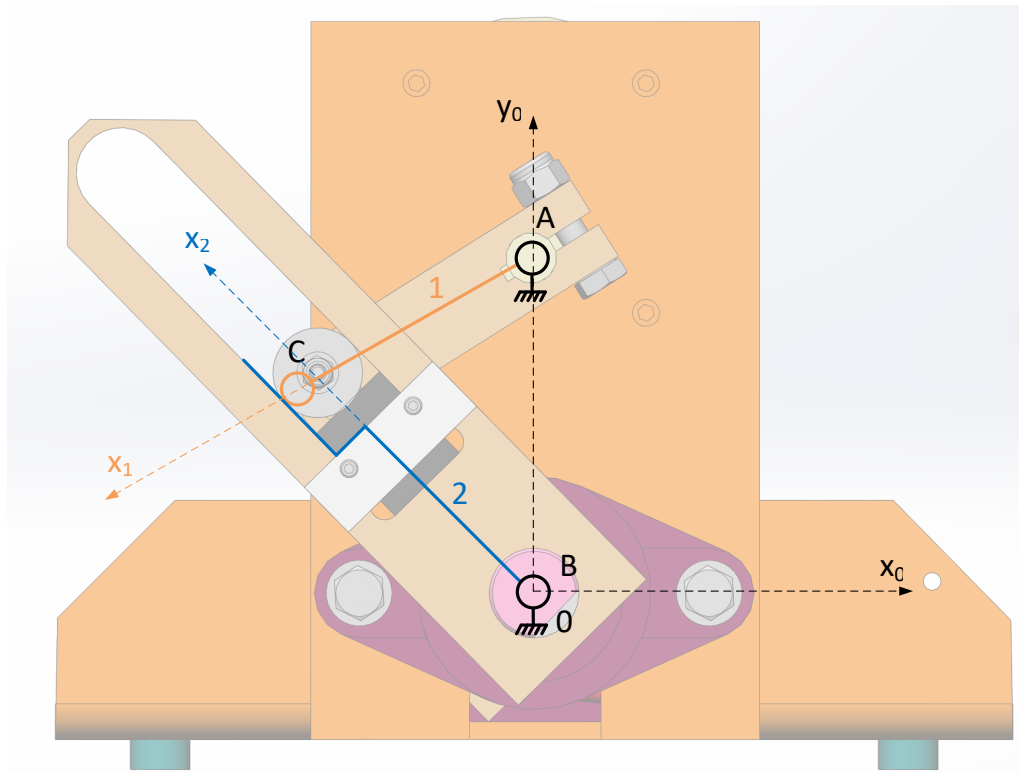
Question 7 : En déduire le torseur et le nombre de mobilité de la liaison équivalente entre la pièce **4** et le **bâti**.

Question 8 : Conclure quant à l'intérêt d'ajouter des liaisons à une mobilité sur un bras robotisé.



3 Barrière sympact

La cinématique de la transformation du mouvement de la barrière Sympact est présentée sur le schéma suivant.



On donne les éléments géométriques suivants :

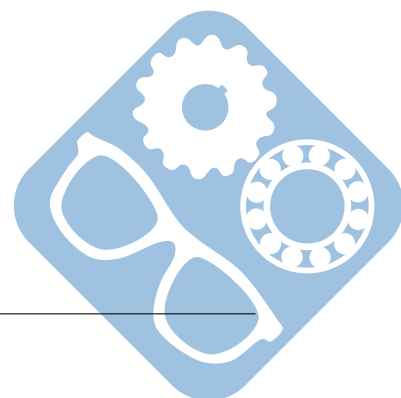
- $\vec{AB} = -l_1 \cdot \vec{y}_0$,
- $\vec{AC} = l_2 \cdot \vec{x}_1$,
- $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$,
- $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$.

Question 1 : Déterminer les torseurs des liaisons suivantes $\{V_{1/0}\}$, $\{V_{2/0}\}$ et $\{V_{2/1}\}$.

Question 2 : Déplacer ces torseurs au point A, dans le repère R_0 .

Question 3 : Déterminer la liaison équivalente $\{Ve_{2/0}\}$.

Question 4 : Déterminer le nombre de mobilités du système.



4 Correction

4.1 Trombone à coulisse

Question 1 : Il y a deux liaisons entre le corps **0** et la coulisse **1** :

- Pivot-glissant (A, \vec{y}) ,
- Pivot-glissant (B, \vec{y}) .

Question 2 :

$$\{V'_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega'_{10} & V'_{A,10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A, \{V''_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega''_{10} & V''_{B,10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$$

$$\overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = \overrightarrow{V_{B \in 1/0}} + \overrightarrow{AB} \wedge \Omega_{1/0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ V''_{B,10} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega''_{10} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{V''_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega''_{10} & V''_{B,10} \\ 0 & e \cdot \omega''_{10} \end{Bmatrix}_A$$

$$\{Ve_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega'_{10} & V'_{A,10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega''_{10} & V''_{B,10} \\ 0 & e \cdot \omega''_{10} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{A,10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

Question 3 : La liaison équivalente est une glissière.

4.2 Robot soudeur

Question 1 : Les liaisons sont les suivantes :

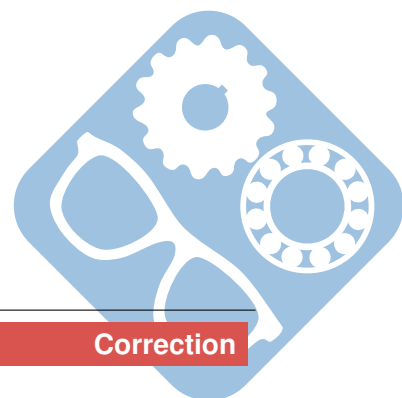
1. Pivot entre 0 et 1 (O, \vec{z}_0) ,
2. Pivot entre 1 et 2 (A, \vec{x}_1) ,
3. Pivot entre 2 et 3 (B, \vec{x}_2) ,
4. Pivot entre 3 et 4 (C, \vec{y}_3) ,
5. Pivot entre 4 et 5 (C, \vec{x}_4) .

Question 2 :

$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10} & 0 \end{Bmatrix}_{(O, R_0 \text{ ou } R_1)}, \{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A, R_1)}$$

$$\overrightarrow{V_{O \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{OA} \wedge \Omega_{2/1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_{21} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{21} & 0 \\ 0 & b \cdot \omega_{21} \\ 0 & -a \cdot \omega_{21} \end{Bmatrix}_{(O, R_1)}$$



Question 3 :

$$\{V_{2/0}\} = \begin{pmatrix} \omega_{21} & 0 \\ 0 & b.\omega_{21} \\ \omega_{10} & -a.\omega_{21} \end{pmatrix}_{(O,R_1)}.$$

Il y a deux mobilités : ω_{10} et ω_{21} .

Question 4 :

$$\{V_{3/2}\} = \begin{pmatrix} \omega_{32} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(B,R_1)} = \begin{pmatrix} \omega_{32} & 0 \\ 0 & (b+c.\sin\theta_{21}).\omega_{32} \\ 0 & -(a+c.\cos\theta_{21}).\omega_{32} \end{pmatrix}_{(O,R_1)}$$

Question 5 :

$$\{V_{3/0}\} = \begin{pmatrix} \omega_{32} + \omega_{21} & 0 \\ 0 & b.\omega_{21} + (b+c.\sin\theta_{21}).\omega_{32} \\ \omega_{10} & -a.\omega_{21} - (a+c.\cos\theta_{21}).\omega_{32} \end{pmatrix}_{(O,R_1)}$$

Il y a trois mobilités : ω_{10} , ω_{21} et ω_{32} .

Question 6 :

$$\{V_{4/3}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{43} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(C,R_3)}$$

$$\overrightarrow{OC} = a.\overrightarrow{y_1} + b.\overrightarrow{z_1} + c.\overrightarrow{y_2} + d.\overrightarrow{y_3} + e.\overrightarrow{z_3} = a.\overrightarrow{y_1} + b.\overrightarrow{z_1} + c.\overrightarrow{y_2} + (d.\cos\theta_{32} - e.\sin\theta_{32}).\overrightarrow{y_2} + (d.\sin\theta_{32} + e.\cos\theta_{32}).\overrightarrow{z_2}$$

$$\overrightarrow{OC} = [a + c.\cos\theta_{21} + d.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) - e.\sin(\theta_{32} + \theta_{21})].\overrightarrow{y_1} + [b + c.\sin\theta_{21} + d.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) + e.\cos(\theta_{32} + \theta_{21})].\overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{\Omega_{4/3}} = \omega_{43}.\overrightarrow{y_3} = \omega_{43}.[\cos(\theta_{32} + \theta_{21}).\overrightarrow{y_1} + \sin(\theta_{32} + \theta_{21}).\overrightarrow{z_1}]$$

$$\overrightarrow{V_{O \in 4/3}} = [[a + c.\cos\theta_{21} + d.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) - e.\sin(\theta_{32} + \theta_{21})].\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) - [b + c.\sin\theta_{21} + d.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) + e.\cos(\theta_{32} + \theta_{21})].\cos(\theta_{32} + \theta_{21})].\omega_{43}.\overrightarrow{x_1}$$

En simplifiant, grâce aux formules trigonométriques, on obtient : $\overrightarrow{V_{O \in 4/3}} = [a.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) - b.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + c.\sin(\theta_{32}) - e].\omega_{4/3}.\overrightarrow{x_3}$

Ce résultat aurait pu être trouvé directement en faisant le maximum de calculs dans le repère R_3 .

$$\overrightarrow{V_{O \in 4/3}} = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{4/3}}$$

$$\overrightarrow{V_{O \in 4/3}} = (-a.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) + b.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) - c.\sin(\theta_{32}) + e).\overrightarrow{z_3} \wedge \omega_{4/3}.\overrightarrow{y_3}$$

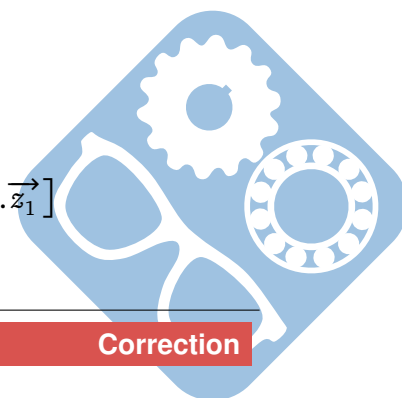
$$\overrightarrow{V_{O \in 4/3}} = (a.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) - b.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + c.\sin(\theta_{32}) - e).\omega_{4/3}.\overrightarrow{x_3}, \text{ avec } \overrightarrow{x_3} = \overrightarrow{x_1}, \text{ donc :}$$

$$\overrightarrow{V_{O \in 4/3}} = (a.\sin(\theta_{32} + \theta_{21}) - b.\cos(\theta_{32} + \theta_{21}) + c.\sin(\theta_{32}) - e).\omega_{4/3}.\overrightarrow{x_1}.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

Question 7 :

$$\overrightarrow{\Omega_{4/0}} = (\omega_{32} + \omega_{21}).\overrightarrow{x_1} + \omega_{10}.\overrightarrow{z_1} + \omega_{43}.[\cos(\theta_{32} + \theta_{21}).\overrightarrow{y_1} + \sin(\theta_{32} + \theta_{21}).\overrightarrow{z_1}]$$



$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{O \in 4/0}} &= [[a + c \cdot \cos \theta_{21} + d \cdot \cos(\theta_{32} + \theta_{21}) - e \cdot \sin(\theta_{32} + \theta_{21})] \cdot \sin(\theta_{32} + \theta_{21}) \\ &- [b + c \cdot \sin \theta_{21} + d \cdot \sin(\theta_{32} + \theta_{21}) + e \cdot \cos(\theta_{32} + \theta_{21})] \cdot \cos(\theta_{32} + \theta_{21})] \cdot \omega_{43} \cdot \overrightarrow{x_1} \\ &+ (b \cdot \omega_{21} + (b + c \cdot \sin \theta_{21}) \cdot \omega_{32}) \cdot \overrightarrow{y_1} - (a \cdot \omega_{21} + (a + c \cdot \cos \theta_{21}) \cdot \omega_{32}) \cdot \overrightarrow{z_1} \\ \{V_{4/0}\} &= \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \\ \overrightarrow{V_{O \in 4/0}} \end{array} \right\}_{(O, R_1)}. \text{ Il y a quatre mobilités : } \omega_{10}, \omega_{21}, \omega_{32} \text{ et } \omega_{43}. \end{aligned}$$

Question 9 : A chaque liaison ajoutée une mobilité (une équation indépendante) est ajoutée. Celle-ci apparaît car les liaisons ajoutées sont des liaisons pivot (1ddl). Le système doit alors avoir 5 mobilités au total.

4.3 Barrière Sympact

Question 1 :

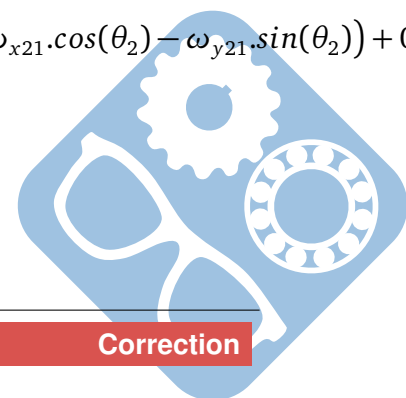
$$\{V_{1/0}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10} & 0 \end{array} \right\}_A, \{V_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{20} & 0 \end{array} \right\}_B, \{V_{2/1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} \omega_{x21} & V_{x21} \\ \omega_{y21} & 0 \\ \omega_{z21} & V_{z21} \end{array} \right\}_{C, R_2}.$$

Question 2 :

$$\begin{aligned} \{V_{1/0}\} &= \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10} & 0 \end{array} \right\}_A, \{V_{2/0}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & -l_1 \cdot \omega_{20} \\ 0 & 0 \\ \omega_{20} & 0 \end{array} \right\}_A. \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} &= \overrightarrow{V_{C \in 2/1}} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} &= \begin{pmatrix} V_{x21} \cdot \cos(\theta_2) \\ V_{x21} \cdot \sin(\theta_2) \\ V_{z21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_2 \cdot \cos(\theta_1) \\ l_2 \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \omega_{x21} \cdot \cos(\theta_2) - \omega_{y21} \cdot \sin(\theta_2) \\ \omega_{x21} \cdot \sin(\theta_2) + \omega_{y21} \cdot \cos(\theta_2) \\ \omega_{z21} \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} &= \begin{pmatrix} V_{x21} \cdot \cos(\theta_2) + l_2 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \omega_{z21} \\ V_{x21} \cdot \sin(\theta_2) - l_2 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \omega_{z21} \\ V_{z21} + l_2 \cdot \cos(\theta_1) \cdot (\omega_{x21} \cdot \sin(\theta_2) + \omega_{y21} \cdot \cos(\theta_2)) - l_2 \cdot \sin(\theta_1) \cdot (\omega_{x21} \cdot \cos(\theta_2) - \omega_{y21} \cdot \sin(\theta_2)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Question 3 :

$$\begin{aligned} \{V_{e2/0}\} &= \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\} = \{V_{2/0}\} \\ \begin{cases} \omega_{e20} = \omega_{x21} \cdot \cos(\theta_2) - \omega_{y21} \cdot \sin(\theta_2) + 0 = 0 \\ \omega_{e20} = \omega_{x21} \cdot \sin(\theta_2) + \omega_{y21} \cdot \cos(\theta_2) + 0 = 0 \\ \omega_{e20} = \omega_{z21} + \omega_{10} = \omega_{20} \\ V_{e20} = V_{x21} \cdot \cos(\theta_2) + l_2 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \omega_{z21} + 0 = -l_1 \cdot \omega_{20} \\ V_{e20} = V_{x21} \cdot \sin(\theta_2) - l_2 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \omega_{z21} + 0 = 0 \\ V_{e20} = V_{z21} + l_2 \cdot \cos(\theta_1) \cdot (\omega_{x21} \cdot \sin(\theta_2) + \omega_{y21} \cdot \cos(\theta_2)) - l_2 \cdot \sin(\theta_1) \cdot (\omega_{x21} \cdot \cos(\theta_2) - \omega_{y21} \cdot \sin(\theta_2)) + 0 \end{cases} \\ \text{Ainsi, } \omega_{x21} &= \omega_{y21} = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} \omega_{e_{x20}} = 0 \\ \omega_{e_{y20}} = 0 \\ \omega_{e_{z20}} = \omega_{z21} + \omega_{10} = \omega_{20} \\ V_{e_{x20}} = V_{x21} \cdot \cos(\theta_2) + l_2 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \omega_{z21} + 0 = -l_1 \cdot \omega_{20} \\ V_{e_{y20}} = V_{x21} \cdot \sin(\theta_2) - l_2 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \omega_{z21} + 0 = 0 \\ V_{e_{z20}} = 0 \end{cases}$$

Question 4 :

$$\begin{cases} \omega_{x21} \cdot \cos(\theta_2) - \omega_{y21} \cdot \sin(\theta_2) + 0 = 0 \\ \omega_{x21} \cdot \sin(\theta_2) + \omega_{y21} \cdot \cos(\theta_2) + 0 = 0 \\ \omega_{z21} + \omega_{10} = \omega_{20} \\ V_{x21} \cdot \cos(\theta_2) + l_2 \cdot \sin(\theta_1) \cdot \omega_{z21} + 0 = -l_1 \cdot \omega_{20} \\ V_{x21} \cdot \sin(\theta_2) - l_2 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \omega_{z21} + 0 = 0 \\ V_{z21} + l_2 \cdot \cos(\theta_1) \cdot (\omega_{x21} \cdot \sin(\theta_2) + \omega_{y21} \cdot \cos(\theta_2)) - l_2 \cdot \sin(\theta_1) \cdot (\omega_{x21} \cdot \cos(\theta_2) - \omega_{y21} \cdot \sin(\theta_2)) + 0 = 0 \end{cases}$$

Étude du système :

- 7 inconnues cinématiques : ω_{10} , ω_{20} , ω_{x21} , ω_{y21} , ω_{z21} , V_{x21} et V_{z21} ,
- 6 équations indépendantes.

On en déduit : $m = I_C - Rg(E) = 4 - 3 = 1$, le système possède 1 mobilité.

De plus, on remarque aussi dans ce cas que : $h = E - Rg(E) = 6 - 6 = 0$, le modèle est isostatique.

