Corrigé centrale TSI 2017
Assistance pour le maniement de charges dans l'industrie

II. Exigence fonctionnelle : « assurer le mouvement vertical »

a. Élaboration du modèle géométrique direct et du modèle articulaire inverse

Q 1. Détermination des coordonnées opérationnelles l_4 et $h(t)$.

Écriture de la fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{O_0A} + \overrightarrow{AO_1} + \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_0} = \vec{0} \rightarrow l_4.\overrightarrow{y_0} + L.\overrightarrow{y_1} + l_1.\overrightarrow{y_2} - h(t).\overrightarrow{z_0} = \vec{0}$$

En projetant sur $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$:

- Sur $\overrightarrow{y_0}$: $l_4 + L.\cos\theta_{10} + l_1.\cos(\theta_{10}+\theta_{21}) = 0$
- Sur $\overrightarrow{z_0}$: $L.\sin\theta_{10} + l_1.\sin(\theta_{10}+\theta_{21}) - h(t) = 0$

On en déduit :
$$l_4 = -L.\cos\theta_{10} - l_1.\cos(\theta_{10}+\theta_{21}) \qquad (1)$$
$$h(t) = L.\sin\theta_{10} + l_1.\sin(\theta_{10}+\theta_{21}) \qquad (2)$$

Q 2. Détermination du modèle articulaire inverse en suivant les conseils du sujet.

- Recherche de θ_{21}:

  En élevant au carré les équations (1) et (2) et en les additionnant, on obtient :
  $$l_4^2 + h(t)^2 = L^2 + 2L.l_1\,[\cos(\theta_{10}+\theta_{21}).\cos(\theta_{10}) + \sin(\theta_{10}+\theta_{21}).\sin(\theta_{10})] + l_1^2$$
  On identifie la forme $\cos a.\cos b + \sin a.\sin b = \cos(a-b)$

  $\Rightarrow \cos(\theta_{21}) = \frac{l_4^2+h(t)^2-L^2-l_1^2}{2L.l_1}$ d'où $\boxed{\theta_{21} = arccos\left(\frac{l_4^2+h(t)^2-L^2-l_1^2}{2L.l_1}\right)}$

- Recherche de θ_{10}:

  On utilise le modèle géométrique direct avec les équations proposées dans le sujet :
  $$l_1.\cos(\theta_{10}+\theta_{21}) = l_4 + L.\cos\theta_{10} \qquad (3)$$
  $$l_1.\sin(\theta_{10}+\theta_{21}) = h(t) - L.\sin\theta_{10} \qquad (4)$$

  En élevant au carré les équations (3) et (4) et en les additionnant, on obtient :
  $$2.L.l_4.\cos\theta_{10} - 2L.h(t).\sin\theta_{10} = l_1^2 - h(t)^2 - L^2 - l_4^2$$
  On pose $\cos(\varphi) = \frac{l_4}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$ et $\sin(\varphi) = \frac{-h(t)}{\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}$

  On en déduit alors :
  $$\cos(\theta_{10}-\varphi) = \frac{l_1^2 - h(t)^2 - L^2 - l_4^2}{2.L.\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}\ et\ \varphi = Arctan\left(-\frac{h(t)}{l_4}\right)$$

  Finalement : $\boxed{\theta_{10} = \arccos\left(\frac{l_1^2-h(t)^2-L^2-l_4^2}{2.L.\sqrt{l_4^2+h(t)^2}}\right) + \mathrm{Arctan}\left(-\frac{h(t)}{l_4}\right)}$

b. Élaboration du modèle cinématique

Q 3. Détermination de la vitesse angulaire $\dot{\theta}_{21}$

En dérivant l'expression de $\cos(\theta_{21})$, on obtient :

$$-\dot{\theta}_{21}.\sin(\theta_{21}) = \frac{\dot{h}(t).h(t)}{L.l_1} \Rightarrow \dot{\theta}_{21} = -\frac{\dot{h}(t).h(t)}{L.l_1.sin(\theta_{21})}$$

Q 4. Vitesse maximale du moteur articulaire du genou.

La vitesse est maximale pour $t = 1{,}5s$. On a alors h = 0,826 m ; $\dot{h} = \frac{0{,}422\ m}{s}$; $et\ \theta_{21} = 55{,}9°$

$$\dot{\theta}_{21}(t = 1{,}5) = -\frac{0{,}422\ .\ 0{,}829}{43{,}1\ .\ 1{,}8.\ 10^{-4}.\ sin(55{,}9)} = -1{,}89\ rad/s$$

$$\dot{\theta}_{mot} = \frac{\dot{\theta}_{21}}{r} = \frac{-1{,}89}{1/120} - 277\ rad/s \Rightarrow N_{mot} = \frac{30}{\pi}\dot{\theta}_{mot} = -2168{,}5\ tr/min$$

c. Élaboration du modèle dynamique

On considère l'ensemble E = {cuisse (2) + charge transportée (4)} dans son mouvement par rapport à R_0.

Q 5. Calcul de la projection du moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1,E/0}.\vec{x}_0$

$$\vec{\sigma}_{O_1,E/0} = \vec{\sigma}_{G_4,E/0} + \overrightarrow{O_1G_4} \wedge \vec{R}_{C,E/0}$$

$\vec{\sigma}_{G_4,E/0} = \vec{0}$ car 4 est en translation / 0 , la masse et l'inertie de 2 sont négligées.

$\vec{R}_{C,E/0} = \vec{R}_{G_4,E/0} = m_4.\vec{V}_{G_4,E/0} = m_4.\dot{h}(t).\vec{z}_0$

D'où :

$$\vec{\sigma}_{O_1,E/0} = (\lambda(t).\vec{z}_0 - L.\cos(\theta_{10}).\vec{y}_0) \wedge m_4.\dot{h}(t).\vec{z}_0 = -m_4.\dot{h}(t).L.\cos(\theta_{10}).\vec{x}_0$$

$$\vec{\sigma}_{O_1,E/0}.\vec{x}_0 = -m_4.\dot{h}(t).L.\cos(\theta_{10})$$

Q 6. Calcul de la projection du moment dynamique $\vec{\delta}_{O_1,E/0}.\vec{x}_0$

Le sujet propose de déduire le résultat à partir du moment cinétique :

$$\vec{\delta}_{O_1,E/0} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\sigma}_{O_1,E/0}\right)_0 + m_4.\vec{V}_{O_1/0} \wedge \vec{V}_{G_4,E/0}$$

$$= \left(-m_4.\ddot{h}(t).L.\cos(\theta_{10}) + m_4.\dot{h}(t).L.\dot{\theta}_{10}.\cos(\theta_{10})\right)\vec{x}_0 + m_4.L.\dot{\theta}_{10}.\vec{z}_1 \wedge \dot{h}(t).\vec{z}_0$$

$$= -m_4.\ddot{h}(t).L.\cos(\theta_{10}).\vec{x}_0$$

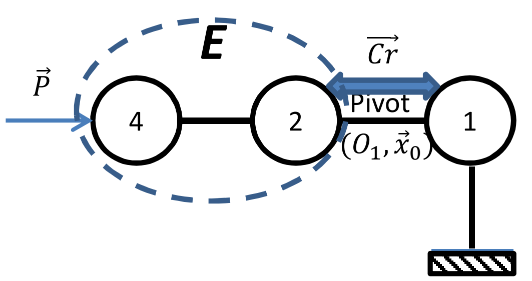
$$\vec{\sigma}_{O_1,E/0}.\vec{x}_0 = -m_4.\ddot{h}(t).L.\cos(\theta_{10})$$

Remarque : En faisant le calcul direct du moment dynamique en G_4 puis le transport en O_1, le calcul est plus rapide

$$\vec{\delta}_{O_1,E/0} = \vec{\delta}_{G_4,E/0} + \overrightarrow{O_1G_4} \wedge \vec{R}_{D,E/0} = (\lambda(t).\vec{z}_0 - L.\cos(\theta_{10}).\vec{y}_0) \wedge m_4.\ddot{h}(t).\vec{z}_0$$

$$= -m_4.\ddot{h}(t).L.\cos(\theta_{10}).\vec{x}_0$$

Q 7. Expression du couple Cr

On isole l'ensemble $E = \{4 + 2\}$ et on applique le théorème du moment dynamique en O_1 en projection sur $\vec{x}_0$. Inventaire des actions mécaniques extérieures : • Le poids $\vec{P}$ • Le couple appliqué par le réducteur $\overrightarrow{Cr}$ • L'action de la liaison pivot en O_1	

Le théorème du moment dynamique en O_1 en projection sur $\vec{x}_0$:

$$(\overrightarrow{O_1G_4} \wedge \vec{P} + \overrightarrow{Cr}).\vec{x}_0 = \vec{\delta}_{O_1,E/0}.\vec{x}_0$$

$Cr = -m_4.\ddot{h}(t).L.\cos(\theta_{10}) - m_4.g.L.\cos(\theta_{10})\ ou$ $\quad \mathrm{Cr} = -m_4.L.\cos(\theta_{10}).[\ddot{h}(t) + g]$

Application numérique : $m_4 = 60\ kg$; $L = 0{,}518\ m$; $\theta_{10} = 54{,}5°$; $\ddot{h}(t) = \frac{0{,}42}{0{,}5}m/s^2$

$$Cr = -60\ .\ 0{,}518.\ cos(54{,}5°).\ [0{,}84 + 9{,}81] = 192{,}2\ Nm$$

Q 8. Calcul du couple moteur

Compte tenu du rendement et du réducteur, le couple moteur s'exprime : $Cm = \frac{r}{\eta}.Cr$

Application numérique : $Cm == \frac{1}{120\ .0{,}75}.192{,}2 = 2{,}136\ Nm$

d. Validation du dimensionnement du moteur :

Q 9. Mouvements associés aux 4 phases du cycle

Phase 1 : Descente – Passage de la position jambe verticale à jambe fléchie
Phase 2 : Maintien en position jambe fléchie (pas d'évolution de l'angle θ_{10})
Phase 3 : Remontée - Passage de la position jambe fléchie à jambe verticale
Phase 4 : Maintien jambe verticale (moment du poids nul)

Q 10. Calcul du couple efficace

La relation du sujet $C_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T c(t)^2 dt}$, est équivalente à la relation plus classique pour ce calcul

$C_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{n}(C^2{}_{i\ eff}.T_i)}$ en considérant les valeurs efficaces du couple pour chaque phase du cycle.

Les phases 1 et 3 étant de formes complexes, les valeurs numériques C_{1eff} , C_{2eff} sont probablement issues de la simulation numérique.

Il suffit de tirer celles des phases 2 et 3 où le couple est constant donc les valeurs efficaces égales à ces constantes : C_{2eff} =0,9 Nm et C_{4eff} = 0.

Finalement : $C_{eff} = \sqrt{\frac{1}{15}(0{,}838^2.2 + 0{,}9^2.2 + 0{,}838^2.2 + 0^2.9)}$ = 0,543 Nm

Q 11. Conclusion sur le choix du moteur

Les caractéristiques du moteur et les données de dimensionnement issues de l'étude sont :

- vitesse à vide = 3120 $tr.min^{-1}$ sous U_n = 36 V > N_{max} = 2168 $tr.min^{-1}$ (Q4)
- couple permanent admissible = 0,56 Nm > C_{eff} = 0,543 Nm (Q10)

Le moteur convient sur ces 2 critères.

On vérifie aussi qu'à couple maximum de 1,156 N.m, la fréquence de rotation du moteur sera :

$N_{mot} = 3120 - 423 * 1{,}156 = 2631\ tr/min$

Ce qui est également satisfaisant.

III. Gérer le mouvement vertical

Q 12. Grandeurs physiques contrôlées :

D'après le modèle multiphysique de la figure 3 :

- la mesure est la « coordonnée verticale de l'articulation de la hanche » donc en mètres (m),
- la « consigne » est en entrée d'un intégrateur avant d'être comparée à la hauteur, il s'agit donc de la vitesse de déplacement vertical de la hanche (m/s).

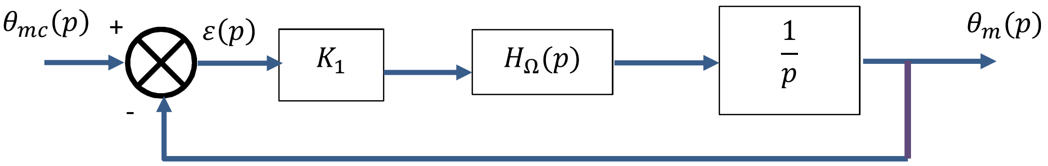
Q 13. Expression de la fonction de transfert en en vitesse $\mathbf{H_\Omega(p)}$:

Avec perturbation nulle et retour unitaire, on écrit directement :

$$H_\Omega(p) = \frac{\Omega_m(p)}{\Omega_{mC}(p)} = \frac{C_\Omega(p).M_c(p).\frac{1}{Jp+f}}{1 + C_\Omega(p).M_c(p).\frac{1}{Jp+f}} = \frac{\frac{K_2}{Jp}}{1+\frac{K_2}{Jp}} = \frac{1}{1+\frac{J}{K_2}p}$$

Q 14. Expression de $\varepsilon(p)$ écart ou erreur de position :

On remplace la boucle de vitesse réduite à $H_\Omega(p)$dans la question Q13, dans le schéma bloc de la figure 11 et on obtient la structure suivante :



$$\varepsilon(p) = \theta_{mc}(p) - \theta_m(p) = \theta_{mc}(p) - K_1.H_\Omega(p).\frac{1}{p}.\varepsilon(p)$$

On en déduit alors l'expression de $\varepsilon(p)$: $\boldsymbol{\varepsilon(p) = \frac{1}{1+K_1.H_\Omega(p).\frac{1}{p}}.\theta_{mc}(p)}$

Q 15. Erreur de position : L'entrée est un échelon unitaire (1 rad) soit $\theta_{mc}(p) = \frac{1}{p}$

$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+K_1.H_\Omega(p).\frac{1}{p}} = 0$$

Résultat logique avec l'intégrateur (classe 1) et l'absence de perturbation de couple.

Erreur de trainage : L'entrée est une rampe unitaire (1rad.s^{-1}) soit $\theta_{mc}(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+K_1.H_\Omega(p).\frac{1}{p}}.\frac{1}{p} = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p+K_1.H_\Omega(p)} = \frac{1}{K_1}$$

Système de classe1, erreur de traînage finie, inversement proportionnelle à l'action proportionnelle de K1.

CONCLUSION : Pour satisfaire la condition « erreur de trainage < 1% » imposée par le cahier des charges, il faut fixer K_1 tel que $K_1 = \frac{1}{\varepsilon_v} = \frac{1}{0.01} = 100$

Q 16. Erreur en accélération : L'entrée est une parabole (rad.s^{-2}) soit $\theta_{mc}(p) = \frac{1}{p^3}$

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1+K_1.H_\Omega(p).\frac{1}{p}}.\frac{1}{p^2} = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p^2+K_1.H_\Omega(p).p} = +\infty$$

Résultat attendu pour un système de classe 1, le cahier des charges n'est pas respecté sur ce critère.

Q 17. Mise en place d'un correcteur par anticipation :

Pour l'expression de $\varepsilon(p)$, on utilise le modèle fourni figure 12 et $\boldsymbol{H_\Omega(p) = \frac{1}{1+T.p}}$

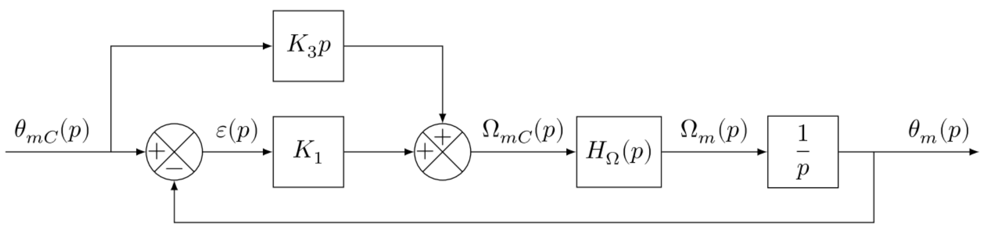


Figure 12 Second modèle

$$\varepsilon(p) = \theta_{mc}(p) - \theta_m(p) = \theta_{mc}(p) - \big(K_1.\varepsilon(p) + K_3.p.\theta_{mc}(p)\big).H_\Omega(p).\frac{1}{p}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1-K_3.H_\Omega(p)}{1+K_1.H_\Omega(p).\frac{1}{p}}.\theta_{mc}(p) = \frac{1-\frac{K_3}{1+Tp}}{1+\frac{K_1}{(1+Tp).p}}.\theta_{mc}(p) = \frac{(1+Tp-K_3)}{Tp^2+p+K_1}.p.\theta_{mc}(p)$$

Q 18. **Calcul de l'erreur de trainage :** $\theta_{mc}(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} \frac{(1+Tp-K_3)}{Tp^2+p+K_1} = \frac{1-K_3}{K_1}$$

On souhaite une erreur de trainage nulle donc $1 - K_3 = 0$ d'où $K_3 = 1$

Q 19. **Calcul de l'erreur en accélération :** $\theta_{mc}(p) = \frac{1}{p^3}$

On remplace K_1 et K_3 par leurs valeurs numériques, respectivement 100 et 1, l'erreur est alors :

$$\varepsilon(p) = \frac{Tp}{Tp^2+p+100}.p.\theta_{mc}(p)$$

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} \frac{T}{Tp^2+p+100} = \frac{T}{100} = 33.10^{-5}$$

Les erreurs de trainage et en accélération sont désormais compatibles avec le cahier des charges.

IV. Acquérir l'intention de la mise en mouvement

Q 20. **Fréquence d'échantillonnage théorique :**

Le signal utile après filtrage anti repliement a une bande passante comprise entre 10Hz et 500Hz.
En respectant la limite stricte de Shannon, la fréquence d'échantillonnage théorique minimale doit donc être telle que $f_e = 2\,.f_{\max utile} = 2 * 500 = 1000Hz$

Q 21. **Filtre passif, expression de $\underline{V_a}$:**

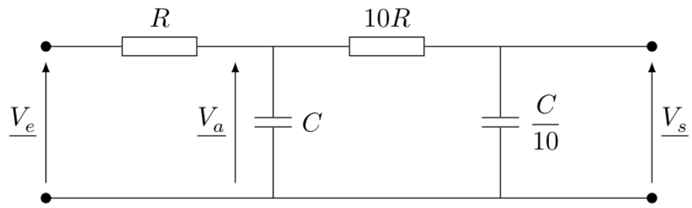


Figure 16 Filtre passif

En appliquant le théorème de Millman : $\underline{V_a} = \frac{\frac{\underline{V_e}}{R}+\frac{\underline{V_s}}{10R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{10R}+Cj\omega} = \frac{10\underline{V_e}+\underline{V_s}}{11+10RCj\omega}$

Q 22. **Filtre passif, relation entre $\underline{V_s}$ et $\underline{V_a}$:**

En appliquant un pont diviseur de tension : $\underline{V_s} = \frac{\frac{10}{Cj\omega}}{10R+\frac{10}{Cj\omega}}.\underline{V_a} = \frac{1}{1+RCj\omega}.\underline{V_a}$

Soit $\underline{V_a} = (1+RCj\omega).\underline{V_s}$

Q 23. **Filtre passif, fonction de transfert** $\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}}$:

$$(1+RCj\omega).\underline{V_s} = \frac{10\underline{V_e}+\underline{V_s}}{11+10RCj\omega}$$

D'où on tire : $\frac{\underline{V_s}}{\underline{V_e}} = \frac{10}{10+21RCj\omega+10(RCj\omega)^2} = \frac{1}{1+2{,}1RCj\omega+(RCj\omega)^2}$

Q 24. **Filtre passif, pulsation de coupure :**

En posant $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, on obtient le résultat proposé dans le sujet. La bande passante du signal est comprise entre 10Hz et 500Hz. $\Rightarrow \omega_0 = 2\pi.f_{max} = 1000.\pi\ rad/s$

Q 25. Résolution et fréquence d'échantillonnage du CAN 12 bits :

Si la plage d'entrée analogique est $\Delta V_{CAN} = 3V$, la résolution ou quantum est :

$$q = \frac{\Delta V_{CAN}}{2^N - 1} \sim \frac{3}{2^{12}} = 7{,}32.10^{-4}V$$

La fréquence d'échantillonnage f_e doit être telle que : $\left|\frac{\underline{V_S}}{\underline{V_e}}\right| < \frac{q}{\Delta V_{CAN}} \sim \frac{1}{2^N}$ pour $\omega > \pi . f_e$

Soit l'inégalité :

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{f_e}{1000}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2{,}1.f_e}{1000}\right)^2}} < \frac{1}{2^{12}}$$

Si on pose $x = fe/1000$ réel positif il faut résoudre :

$$(1-(x)^2)^2 + (2{,}1.x)^2 > 2^{24}$$
$$1 + x^4 - 2.x^2 + 4{,}41.x^2 > 2^{24}$$

On pose $X = x^2$:

$$1 + X^2 + 2{,}41.X > 2^{24}$$

On trouve $X = 4094{,}8$ pour la solution physique à retenir soit $x \sim 64$ et $f_e = 64000\ Hz$

Vérification dans l'expression du module de la fonction de transfert.

$$\frac{1}{\sqrt{(1-(64)^2)^2 + (2{,}1.64)^2}} = 2{,}44.10^{-4} \sim \frac{1}{2^{12}}$$

On retient $f_e \geq 64kHz$:

Q 26. Equation du filtre discrétisé :

L'équation discrète s'écrit :

$$\frac{\tau}{T_c}(s_n - s_{n-1}) + s_n = e_n$$
$$\left(\frac{\tau}{T_c} + 1\right) s_n - \frac{\tau}{T_c} s_{n-1} = e_n$$
$$s_n = \frac{\tau}{\tau + T_c} s_{n-1} + \frac{T_c}{\tau + T_c} e_n$$

On en déduit les valeurs de A et B :

$$A = \frac{\tau}{\tau + T_c} ; B = \frac{T_c}{\tau + T_c}$$

Q 27. Compléter l'algorithme proposé :

Les conditions sont décrites en haut de la page 9/10 du sujet.

Le signal, une fois converti en numérique, subit un décalage négatif de valeur 2048 suivi, dans l'ordre, d'un redressement, d'une multiplication par 2 et d'un filtrage numérique passe-bas de fréquence de coupure égale à 6 Hz (figure 14). Le calcul de la valeur efficace de ce signal filtré est une image de l'intention de contraction du muscle. Un réglage à la première mise en service est nécessaire car le niveau du signal dépend de la pose des électrodes. Il consiste à mémoriser la valeur efficace obtenue lors d'une contraction maximale du muscle. Trois étapes du traitement du signal EMG sont représentées figure 15.

<table>
<tr>
<td>

```
# Initialisation des variables
t = 0
Tn = 0
Dt = 0
Tc = 1000
Tc_réel = float(Tc)
tau = 37.7
A = tau/(tau+Tc_réel)
B = Tc_réel /(tau+Tc_réel)
# Programme principal
while True :
        NEMG = Acquérir_entrée_analogique()
        t = Acquérir_temps()
        Dt = t - Tn
        while Dt < Tc :
                t = Acquérir_temps()
                Dt = t - Tn
        Tn = t
        NEMG = NEMG - 2048
        E = abs(NEMG)
        E_réel = float(E)
        S = A*S+B*(2*E_réel)
        ...
        # suite du traitement non abordée ici
        ...
```

</td>
<td>
Coefficients du filtre établis en Q26

Décalage de la valeur 2048 négatif

« Redressement » numérique…

Multiplication par 2 du signal redressé E_réel et fonction de transfert du filtre demandé : $s_n = As_{n-1} + Be_n$
</td>
</tr>
</table>

V. Évolution du produit

Q 28. Pour détecter « l'intention » du mouvement, on peut :

Détecter la variation de pression au sol > capteur de pression piézoélectrique sous les semelles, détecter la déformation de la structure de l'exosquelette > cellule de force, jauge pièzorésistive… ?

Q 29. Structure de transmission du mouvement entre moteurs et genou :

Il faut prévoir une transmission de puissance entre 2 axes parallèles. Une solution envisageable serait une transmission par poulies – courroies crantées.