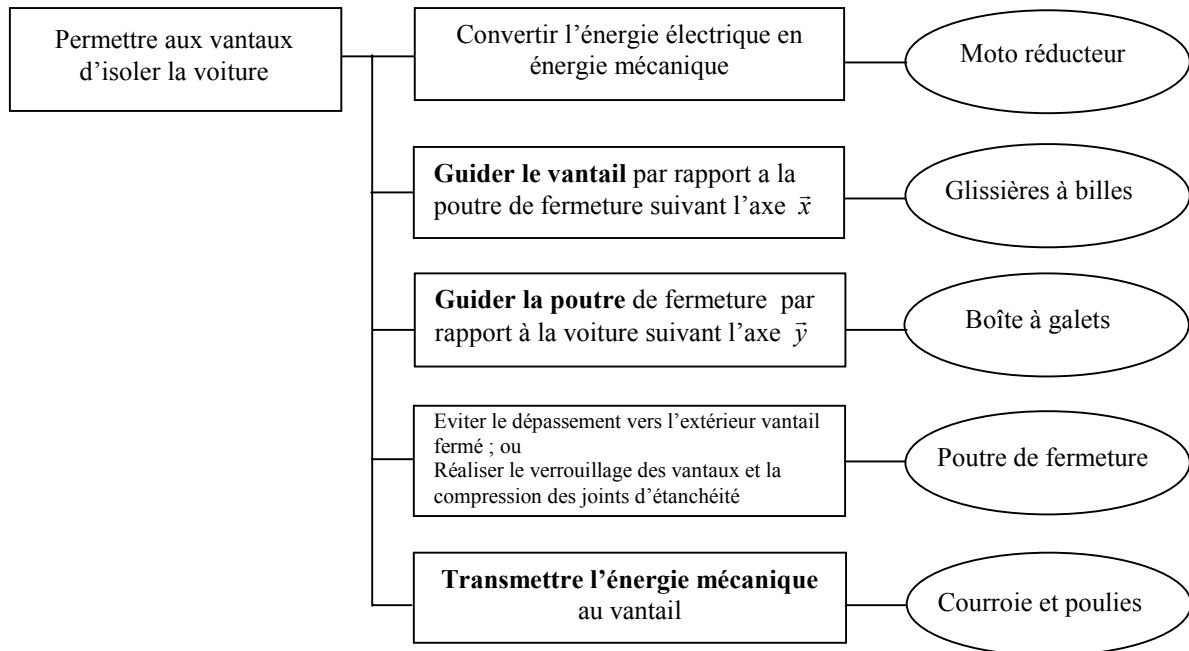
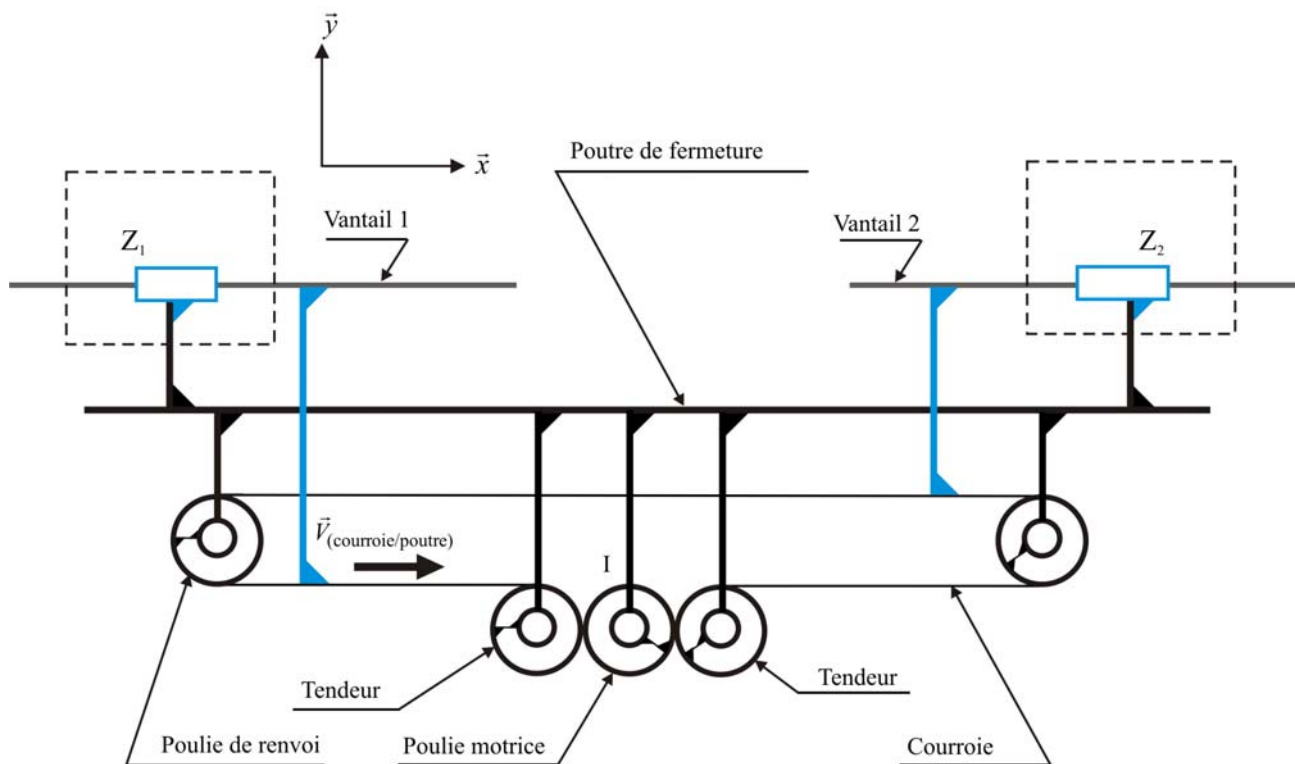


Eléments de correction

Question 1. Compléter le diagramme FAST donné sur le document réponse 1 en précisant les fonctions techniques réalisées par les composants.

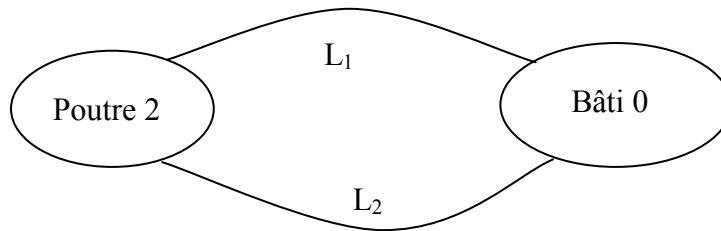


Question 2. Compléter le schéma du document réponse 2, que vous rendrez avec votre copie, en proposant des modèles de liaisons entre les vantaux 1 et 2 et la courroie crantée ; et dans les zones Z_1 et Z_2 entre les vantaux 1 et 2 et la poutre de fermeture.



Question 3 :

- a) Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce modèle. En déduire les contraintes géométriques à satisfaire lors de la réalisation.



On voit sur le graphe de structure qu'il y a une boucle cinématique : $\gamma=1$. Par le calcul :

2 liaisons : $L = 2$

2 pièces y compris le bâti : $n = 2$

$$\gamma = L - n + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$$

mobilité $m = 1$

Par la formule des mobilités en cinématique	Par la formule des mobilités en statique
Inconnues cinématiques : $N_c = 4$ (2 pivots glissants) $h = \underbrace{m_u + m_i}_{1+0} + 6\gamma - N_c = 1 + 6 - 4 = 3$	Inconnues statiques : $N_s = 8$ (2 pivots glissants) $h = \underbrace{m_u + m_i}_{1+0} - 6(n-1) + N_s = 1 - 6 + 8 = 3$

Les deux pivots glissants devront être parallèles dans l'espace (contraintes d'orientation suivant les directions X et Z) et l'entre-axes devra être le même sur les deux pièces, c'est à dire l_3 identique sur 1 et 0.

- b) Proposer une liaison élémentaire cinématiquement équivalente à ces deux liaisons et exprimer son torseur cinématique caractéristique.

Approche statique :

Les deux liaisons pivot glissant L_1 et L_2 sont en parallèle. La liaison équivalente aura pour torseur inter effort la somme des torseurs inter efforts des deux liaisons.

$$\begin{aligned} \{T_1(2 \rightarrow 0)\} &: \left\{ \begin{array}{c|c} X_1(2 \rightarrow 0) & L_1(2 \rightarrow 0) \\ 0 & 0 \\ Z_1(2 \rightarrow 0) & N_1(2 \rightarrow 0) \end{array} \right\}_{H,R} \\ \{T_2(2 \rightarrow 0)\} &: \left\{ \begin{array}{c|c} X_2(2 \rightarrow 0) & L_2(2 \rightarrow 0) \\ 0 & 0 \\ Z_2(2 \rightarrow 0) & N_2(2 \rightarrow 0) \end{array} \right\}_{J,R} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c|c} X_2(2 \rightarrow 0) & L_2(2 \rightarrow 0) \\ 0 & -l_3 Z_2(2 \rightarrow 0) \\ Z_2(2 \rightarrow 0) & N_2(2 \rightarrow 0) \end{array} \right\}_{H,R} \\ \{T(2 \rightarrow 0)\} &: \left\{ \begin{array}{c|c} X_1(2 \rightarrow 0) + X_2(2 \rightarrow 0) & L_1(2 \rightarrow 0) + L_2(2 \rightarrow 0) \\ 0 & -l_3 Z_2(2 \rightarrow 0) \\ Z_1(2 \rightarrow 0) + Z_2(2 \rightarrow 0) & N_1(2 \rightarrow 0) + N_2(2 \rightarrow 0) \end{array} \right\}_{H,R} \end{aligned}$$

Ce qui correspond au torseur inter efforts d'une liaison glissière de direction \vec{Y} .

Approche cinématique :

Les deux liaisons pivot glissant L_1 et L_2 sont en parallèle. La liaison équivalente devra avoir un torseur cinématique compatible avec les 2 torseurs cinématique de chaque liaison.

$$\{V_1(2/0)\} : \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \Omega_{1y}(2/0) & V_{1y}(2/0) \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{H,R} \quad \text{et} \quad \{V_2(2/0)\} : \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \Omega_{2y}(2/0) & V_{2y}(2/0) \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{J,R}$$

Si on réduit le deuxième torseur au point H, $V_2(H, 2/0) = V_2(J, 2/0) + \overrightarrow{HJ} \wedge \Omega(2/0)$ on obtient :

$$\{V_2(2/0)\} : \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \Omega_{2y}(2/0) & V_{2y}(2/0) \\ 0 & l_3 \Omega_{2y}(2/0) \end{array} \right\}_{H,R}$$

Les deux liaisons étant en parallèle $\{V(L_e)\} = \{V_2(2/0)\} = \{V_2(2/0)\}$, d'où en notant la liaison équivalente :

$$\{V(L_e)\} : \left\{ \begin{array}{c|c} \Omega_x(2/0) & V_x(2/0) \\ \Omega_y(2/0) & V_y(2/0) \\ \Omega_z(2/0) & V_z(2/0) \end{array} \right\}_{H,R}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \Omega_x(2/0) &= 0 & V_x(2/0) &= 0 \\ \Omega_y(2/0) &= \Omega_{1y}(2/0) = \Omega_{2y}(2/0) = 0 & V_y(2/0) &= V_{1y}(2/0) = V_{2y}(2/0) \\ \Omega_z(2/0) &= 0 & V_z(2/0) &= l_3 \Omega_{2y}(2/0) = 0 \Rightarrow \Omega_{2y}(2/0) = 0 \end{aligned}$$

Soit le torseur cinématique de la liaison équivalente :

$$\{V(L_e)\} : \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & V_y(L_e) \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_R$$

Le torseur cinématique de la liaison équivalente est celui d'une liaison glissière de direction \vec{Y} .

- c) Proposer et justifier un modèle pour la liaison élémentaire au point J qui rende la liaison résultante isostatique.**

Il faudra donner trois degrés de mobilité sur cette liaison afin de permettre Ω_x , Ω_z et V_x .

Approche cinématique :

$$\{V_2(2/0)\} : \left\{ \begin{array}{c|c} \Omega_{2x}(2/0) & V_{2x}(2/0) \\ \Omega_{2y}(2/0) & V_{2y}(2/0) \\ \Omega_{2z}(2/0) & 0 \end{array} \right\}_{J,R}$$

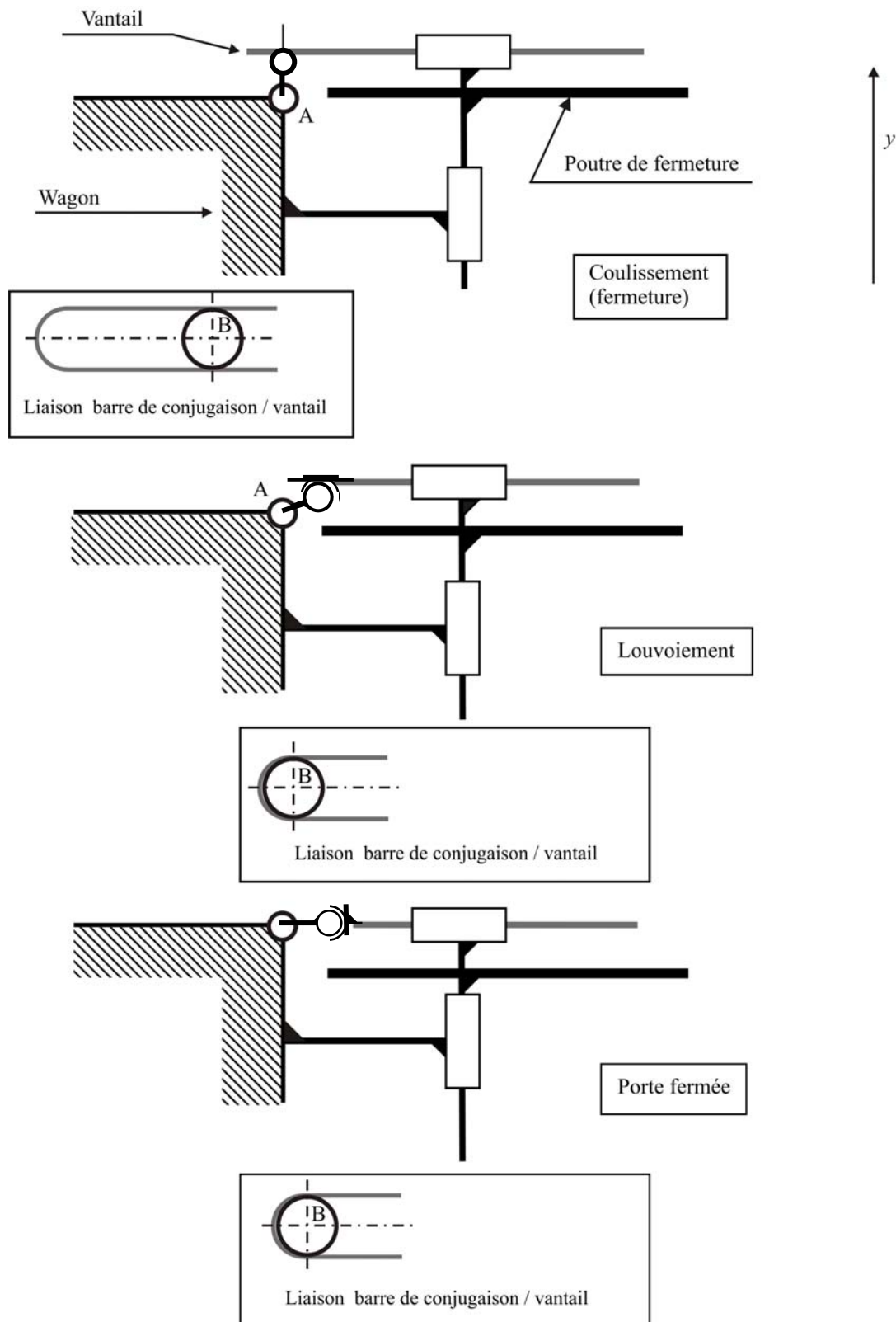
Ce qui correspond au torseur cinématique d'une liaison sphère plan (ponctuelle) de normale \vec{Jz} .

Approche statique :

$$\{T_2(2 \rightarrow 0)\} : \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_2(2 \rightarrow 0) & 0 \end{array} \right\}_{J,R}$$

Ce qui correspond au torseur cinématique d'une liaison sphère plan (ponctuelle) de normale \vec{Jz} .

Question 4. Compléter les schémas du document réponse 3 qui sera rendu avec la copie, en représentant la barre de conjugaison AB et en indiquant pour chaque étape la liaison de centre B entre la barre de conjugaison et le vantail.



Coulissement : liaison équivalent = liaison ponctuelle de normale (B, \vec{y}) .

Louvoisement et porte verrouillée : liaison équivalente = liaison sphère-cylindre de centre B et de direction \vec{z} .

- a) Exprimer $x(t)$ en fonction de l_1 , l_2 et $\theta(t)$ sous la forme $x(t) = \lambda_1(t) \cdot l_1 + \lambda_2(t) \cdot l_2$.

Calcul assez facile en notant que $x(t) = l_1 \cos \theta + l_2 \cos \beta$ avec $\cos \beta = \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \theta} / l_2$. Soit :

$$x(t) = l_1 \cos \theta + l_2 \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} \quad \text{avec } r = \frac{l_1}{l_2}$$

- b) Exprimer la vitesse \dot{x} du point E, appartenant au basculeur dans son mouvement par rapport à R_1 en fonction de l_1 , l_2 , $\theta(t)$ et $\dot{\theta}(t)$ sous la forme $A(\theta)\dot{x} = B(\theta)\dot{\theta}$.

$$\dot{x} = -l_1 \dot{\theta} \sin \theta - l_2 \left[\frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta}} \right] \dot{\theta}$$

$$\left[\sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} \right] \dot{x} = \left[-l_1 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} - l_2 r^2 \sin \theta \cos \theta \right] \dot{\theta}$$

$$A = \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta}$$

$$B = -l_1 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \sin^2 \theta} - l_2 r^2 \sin \theta \cos \theta$$

- c) Montrer qu'il existe une valeur de θ pour laquelle le basculeur ne pourra fournir aucune puissance au système. Expliquer qualitativement pourquoi cette position est instable.

Pour $\theta=0$, $A=1$ et $B=0$, soit $\dot{x}=0$, ce qui veut dire que le système ne peut transmettre aucune puissance ($P = \vec{F} \cdot \vec{V}$). Donc une force d'une intensité infinie suivant l'axe $-\vec{x}_1$ ne pourra pas faire tourner la liaison pivot d'axe $F\vec{z}_1$. Pour une petite variation de θ , (positive ou négative), la force F amènera une diminution de x , en s'éloignant de la position d'équilibre $\theta=0$.

- d) Un tel mécanisme est appelé mécanisme à genouillère. Existe-t-il dans le système de fermeture d'autres cas d'utilisation de ce principe. Dans l'affirmative, indiquer pour chacun, les trois points considérés et le mouvement qui est bloqué.

Il existe deux utilisations du principe de la genouillère :

- pour bloquer le mouvement du stator pendant la phase de coulissement : points E, F, D alignés (butée 2 agissant sur « ED »)
- pour bloquer le mouvement de la poutre de fermeture dans la position porte fermée : points I, F, E alignés (butée 1 agissant sur le stator).

- e) Expliquer quelle est la fonction des butées 1 et 2 (figures 5 et 8) et préciser en la justifiant, leur position de réglage.

La position précédente (I, F, E alignés) ne peut pas être obtenue précisément :

On choisit de la dépasser légèrement, car dans ce cas une action suivant $-\vec{x}_1$ occasionnera un déplacement du point F suivant $-\vec{y}_1$ avec $\theta < 0$. La limitation du déplacement est réglée par la butée 1 qui maintient ainsi le dispositif bloqué.

- f) Expliquer la pertinence de cette solution à empêcher l'ouverture des vantaux quelle que soit la poussée des passagers. Conclure quand à la satisfaction de la fonction FC2.

Comme il a été démontré à la question 5c, quand les points I, F, E sont alignés, aucune force suivant l'axe \vec{x} ne peut mouvoir le système de fermeture. Le système est alors irréversible.

Les limites de cette force seront évidemment données par la résistance des différentes pièces mécaniques.

Question 6-a Etape de louvoiment

Pendant la phase de louvoiment, pour une vitesse du vantail par rapport à la poutre de fermeture de $\|\vec{V}_{\text{vantail/poutre}}\| = 0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, la vitesse de rotation du moteur passe par un maximum.

A cet instant, la vitesse de translation de la poutre de fermeture par rapport au wagon suivant \vec{y} est de $0,15 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; ce qui donne une vitesse de rotation du stator $\|\Omega_{1/0} \vec{z}_1\| = 7,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

- i) Déterminer l'expression de la vitesse du moteur Ω_m en fonction de $\Omega_{1/0}$, $\Omega_{3/0}$, Z_1 et Z_4

$$\Omega_{3/0} = \frac{2v}{\Phi_P} ; \frac{\Omega_{1/3}}{\Omega_{2/3}} = \frac{Z_2}{Z_1} ; \frac{\Omega_{2/3}}{\Omega_{4/3}} = -\frac{Z_4}{Z_2}$$

$$\frac{\Omega_{1/3}}{\Omega_{4/3}} = \frac{\Omega_{1/0} - \Omega_{3/0}}{\Omega_{4/0} - \Omega_{3/0}} = -\frac{Z_4}{Z_1} = -\frac{1}{6}$$

$$\boxed{\Omega_m = \Omega_{4/1} = (\Omega_{3/0} - \Omega_{1/0}) \left(\frac{Z_1 + Z_4}{Z_4} \right)}$$

- ii) Effectuer l'application numérique et vérifier la conformité au cahier des charges du moteur donné annexe 2.

Application numérique : $\Phi_P = 80 \text{ mm}$; $Z_1 = 60$ dents ; $Z_4 = 10$ dents.

$$\Omega_{3/0} = \frac{2v}{\Phi_P} = \frac{2(0,5)}{80 \cdot 10^{-3}} = 12,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ soit } 119,5 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$$

$$\Omega_m = \Omega_{4/1} = (\Omega_{3/0} - \Omega_{1/0}) \left(\frac{Z_1 + Z_4}{Z_4} \right) = (12,5 - 7,3) \cdot 7 = 36,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ soit } 348 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}.$$

Ce qui est inférieur à 1000 tr · min⁻¹

Question 6-b Etape de verrouillage

Déterminer l'expression de la vitesse du moteur Ω_m en fonction de $\Omega_{1/0}$, Z_1 , Z_4 .

Pendant la phase de verrouillage, la poulie 3 est fixe par rapport à la poutre $\Omega_{3/0} = 0$

$$\boxed{\Omega_m = \Omega_{4/1} = (-\Omega_{1/0}) \left(\frac{Z_1 + Z_4}{Z_4} \right)}$$

Question 6-c Etape de coulissement

Pendant la phase de coulissement, la vitesse des vantaux par rapport à la poutre de fermeture est égale à $\vec{V}_{\text{vantail/poutre}} = v \cdot \vec{x}$.

- Donner l'expression de la vitesse du moteur Ω_m en fonction de v , Φ_p , Z_1 , Z_4 .

Pendant la phase de coulissement, le stator 1 est fixe $\omega_{1/0} = 0$

$$\Omega_m = \Omega_{4/1} = \Omega_{3/0} \left(\frac{Z_1 + Z_4}{Z_4} \right)$$

$$\Omega_{4/1} = \Omega_m = \frac{2v(Z_4 + Z_1)}{\Phi_p Z_4}$$

- En supposant que les phases de louvoiement et de verrouillage ont une durée totale de 1,5 s, vérifier que la vitesse maximale du moteur, dont les caractéristiques sont données en annexe 2, permet d'assurer le temps de fermeture exigé par le cahier des charges (fonction FP1).

On rappelle que pendant l'étape de coulissement l'écartement des vantaux passe 1300 mm à 200 mm.

En supposant que le temps d'accélération est négligeable, toute la phase de coulissement se fait à vitesse constante. Cette vitesse est de :

$$\frac{1,3 - 0,2}{2 \cdot (1,5)} = 0,36 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La vitesse correspondante du moteur est de :

$$\Omega_m = \frac{2(0,36) \cdot 1000 \cdot (7)}{80} = 64,15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

soit 613 tr · min⁻¹. Ce qui convient car la vitesse maximale du moteur est de 1000 tr · min⁻¹.

Etude de la commande de la chaîne de motorisation**Modèle de commande**

Question 7. Montrer que l'évolution de la vitesse de rotation du stator est régie par l'équation différentielle suivante :

$$I_{eq}(\theta_m) \dot{\Omega}_s = AC_m - B(\theta_m) \Omega_m^2 - C(\theta_m) F$$

La solution la plus simple est d'utiliser le théorème de l'énergie-puissance appliqué au système :

$$(S) = \{\text{Tout le système de fermeture-ouverture+actionneur}\}$$

Au regard des hypothèses du sujet :

Puissances :

$$P(\text{ext} \rightarrow S / R_g) = F \vec{y} \cdot V_y \vec{y} = F \cdot V_y$$

$$\begin{aligned} P(\text{stator} \leftrightarrow \text{rotor}) &= \vec{C}(\text{stator} \rightarrow \text{rotor}) \cdot \vec{\Omega}(\text{rotor} \rightarrow \text{stator}) \\ &= C_m \vec{z}_1 \cdot \Omega_{4/1} \vec{z}_1 = C_m \Omega_m = C_m N \Omega_s \end{aligned}$$

Energie cinétique (on note $\Omega_r = \Omega(\text{rotor} / R_g) = \Omega(4/0)$) :

$$\begin{aligned} T(S / R_g) &= T(\text{stator} / R_g) + T(\text{rotor} / R_g) + T(\text{masse } M_y / R_g) \\ &= \frac{1}{2} I_s \Omega_s^2 + \frac{1}{2} I_r \Omega_r^2 + \frac{1}{2} M_y V_y^2 \end{aligned}$$

En notant que $\Omega(4/0) = \Omega(4/1) + \Omega(1/0) = \Omega_m + \Omega_s$ et en utilisant les différents facteurs de transformation, il vient sans difficulté :

$$T(S / R_g) = \frac{1}{2} I_s \Omega_s^2 + \frac{1}{2} I_r (N+1)^2 \Omega_s^2 + \frac{1}{2} M_y (N_1(\theta_m))^2 \Omega_s^2$$

Utilisation du théorème de l'énergie-puissance

La dérivation par rapport au temps de l'expression de l'énergie cinétique conduit à la relation :

$$\begin{aligned} \frac{dT(S / R_g)}{dt} &= I_s \Omega_s \dot{\Omega}_s + I_r (N+1)^2 \Omega_s \dot{\Omega}_s \\ &\quad + M_y (N_1(\theta_m))^2 \Omega_s \dot{\Omega}_s + M_y N_1(\theta_m) \Omega_s^2 \frac{\partial N_1}{\partial \theta} \dot{\theta}_m \end{aligned}$$

En utilisant l'expression des puissances, et en notant que $\dot{\theta}_m = \Omega_m$, on en déduit :

$$\left[I_s + I_r (N+1)^2 + M_y (N_1(\theta_m))^2 \right] \dot{\Omega}_s = C_m N + F \cdot N_1(\theta_m) - M_y N_1(\theta_m) \frac{N'_1(\theta_m)}{N} \Omega_m^2$$

En identifiant cette expression avec celle proposée, on en déduit :

$$\begin{aligned} I_{eq}(\theta_m) &= I_s + I_r (N+1)^2 + M_y (N_1(\theta_m))^2 \\ A &= N \\ B &= \frac{M_y N_1(\theta_m) N'_1(\theta_m)}{N} \\ C(\theta_m) &= -N_1(\theta_m) \end{aligned}$$

Question 8.a. Préciser les relations liant :

- le couple moteur $C_{m0}(\theta_{m0})$, la vitesse de rotation Ω_{m0} et la force due à la poussée des passagers $F(t) = F_0$ supposée constante en fonction de A , B et C ;
- le couple moteur $C_{m0}(\theta_{m0})$ à la tension $U_0(\theta_{m0})$ aux bornes de l'induit en fonction de la vitesse du moteur Ω_{m0} et des paramètres du moteur.

$$\begin{aligned} C_{m0} N + F_0 \cdot N_1(\theta_m) - M_y N_1(\theta_m) \frac{N'_1(\theta_m)}{N} \Omega_{m0}^2 &= 0 \\ C_{m0}(t) &= \frac{K_c}{R} (U_0 - K_e \Omega_{m0}) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} A C_{m0} - B(\theta_{m0}) \Omega_{m0}^2 - C(\theta_{m0}) F_0 &= 0 \\ C_{m0}(t) &= \frac{K_c}{R} (U_0 - K_e \Omega_{m0}) \end{aligned}$$

Question 8.b. Soient les variations $c_{m1}(t)$, $\Omega_1(t)$, $f_1(t)$ et $u_1(t)$ autour du régime d'équilibre déterminé à la question 8.a.

Déterminer une équation différentielle, à paramètres variant dans le temps, décrivant l'évolution de la variation de vitesse du moteur Ω_1 autour du point de fonctionnement décrit par $(\theta_{m0}, \Omega_{m0}, F_0, U_{m0})$. Exprimer cette équation sous la forme :

$$\tau(\theta_{m0})\dot{\Omega}_1(t) + \Omega_1(t) = K(\theta_{m0})u_1(t) - D(\theta_{m0})f_1(t)$$

On part de l'équation différentielle donnée en Q7

$$I_{eq}(\theta_m) \frac{\dot{\Omega}_m}{N} = A(C_{m0} + c_{m1}) - B(\theta_m)(\Omega_{m0} + \Omega_1)^2 - C(\theta_m)(F_0 + f_1)$$

et de la relation :

$$(C_{m0}(t) + c_{m1}) = \frac{K_c}{R} [(U_0 + u_1) - K_e(\Omega_{m0} + \Omega_1)]$$

En regroupant les termes liés au régime permanent (Q8.a) et aux variations, la relation précédente peut se réécrire sous la forme :

$$I_{eq}(\theta_{m0}) \frac{\dot{\Omega}_m}{N} = \underbrace{\left[AC_{m0} - B(\theta_m)\Omega_{m0}^2 - C(\theta_{m0})F_0 \right]}_{0 \text{ (régime permanent)}} + \underbrace{Ac_{m1} - 2B(\theta_{m0})\Omega_{m0}\Omega_1 - C(\theta_m)f_1}_{\text{régime des variations}} - \underbrace{B(\theta_{m0})\Omega_1^2}_{2^{\text{nd}} \text{ ordre}}$$

$$\underbrace{C_{m0}(t) - \frac{K_c}{R}(U_0 - K_e\Omega_{m0})}_{0 \text{ (régime permanent)}} + c_{m1} = \frac{K_c}{R}(u_1 - K_e\Omega_1)$$

On obtient donc l'équation différentielle suivante régissant le comportement en régime de variations :

$$I_{eq}(\theta_m) \frac{\dot{\Omega}_1}{N} = Ac_{m1} - 2B(\theta_m)\Omega_{m0}\Omega_1 - C(\theta_m)f_1$$

$$c_{m1} = \frac{K_c}{R}(u_1 - K_e\Omega_1)$$

Il fallait alors faire l'hypothèse de **petites** variations pour négliger le terme en Ω^2 .

En utilisant dans la première équation l'expression du couple moteur on obtient:

$$I_{eq}(\theta_m) \frac{\dot{\Omega}_1}{N} = A \frac{K_c}{R} u_1 - \left[A \frac{K_c K_e}{R} + 2B(\theta_m)\Omega_{m0} \right] \Omega_1 - C(\theta_m)f_1$$

Soit finalement l'équation différentielle recherchée :

$$\frac{RI_{eq}(\theta_m)}{N(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})} \dot{\Omega}_1 + \Omega_1 = \frac{AK_c}{(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})} u_1 - \frac{RC(\theta_m)}{(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})} f_1$$

En identifiant les différents termes on peut poser les relations suivantes :

$$\tau = \frac{RI_{eq}(\theta_m)}{N(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})}$$

$$K = \frac{AK_c}{(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})}$$

$$D = \frac{RC(\theta_m)}{(AK_c K_e + 2RB(\theta_m)\Omega_{m0})}$$

Question 8.c. La position θ_{m0} de l'arbre moteur variant dans le temps, les coefficients de l'équation différentielle précédente peuvent être modélisés comme des paramètres incertains qu'il est possible d'écrire sous la forme d'une partie connue constante et d'une variation, soit :

$$\tau(\theta_{m0}) = \tau_0(1 + \delta\tau), \quad K(\theta_{m0}) = K_0(1 + \delta K) \quad \text{et} \quad D(\theta_{m0}) = D_0(1 + \delta d).$$

En supposant en première approximation que les variations sont nulles, déterminer les fonctions de transfert $\Omega_1(p)/U_1(p)$ et $\Omega_1(p)/F_1(p)$ en les écrivant sous une forme canonique en fonction de τ_0 , K_0 et D_0 .

Calcul sans difficulté particulière, en utilisant la relation $\tau_0 \dot{\Omega}_1(t) + \Omega_1(t) = K_0 u_1(t) - D_0 f_1(t)$ on établit :

$$\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)} = \frac{K_0}{1 + \tau_0 p} \quad \text{et} \quad \frac{F_1(p)}{U_1(p)} = -\frac{D_0}{1 + \tau_0 p}$$

Question 8.d. Montrer que la fonction de transfert Ω_1/U_1 peut être approchée sous la forme K_1/p . Préciser le domaine de validité et exprimer K_1 en fonction de τ_0 et K_0 .

Pour $\omega \gg 1/\tau_0$ la fonction Ω_1/U_1 peut être approchée par la relation :

$$\frac{\Omega_1(p)}{U_1(p)} \approx \frac{K_0}{\tau_0 p} = \frac{K_1}{p} \quad \text{avec} \quad K_1 = \frac{K_0}{\tau_0}.$$

Question 9. Au regard des exigences du cahier des charges, justifier le choix de ce type de régulateur.

Le cahier des charges impose un écart nul vis-à-vis d'un effort perturbateur constant, en conséquence la chaîne directe doit comporter une intégration entre le comparateur et le point d'entrée de la perturbation, soit ici dans le régulateur. A noter :

- que la présence d'un intégrateur ($H_1(p)$) dans la chaîne directe est insuffisante dans ce cas pour assurer un écart nul car cet intégrateur se trouve après le point d'entrée de la perturbation de la structure de commande de la figure 14,
- par ailleurs l'intégrateur du procédé provient d'une approximation du modèle du procédé et ne correspond donc pas à une intégration « idéale ».

Par ailleurs ce correcteur permet de satisfaire la marge de phase (en jouant avec le gain)

Question 10.a. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $T(p) = \Omega_1(p)/F_1(p)$ entre les perturbations dues à la poussée des passagers et la sortie, en fonction des différentes fonctions de transfert de la figure 14. Montrer que la réponse fréquentielle peut être approchée par la relation :

$$\|T(j\omega)\| = \|H_2(j\omega)\| \cdot \min \left(\|H_1(j\omega)\| ; \left\| \frac{1}{R(j\omega)G H_3(j\omega)} \right\| \right) = \|H_2(j\omega)\| \cdot \|M(j\omega)\|$$

Le transfert $T(p) = \Omega_1(p)/F_1(p)$ est donné par la relation :

$$T(p) = -H_2(p) \frac{H_1(p)}{1 + GR(p)H_1(p)H_3(p)}$$

La réponse fréquentielle est obtenue en posant $p = j\omega$, on obtient alors :

$$T(j\omega) = -H_2(j\omega) \frac{H_1(j\omega)}{1 + GR(j\omega)H_1(j\omega)H_3(j\omega)}$$

En considérant successivement les conditions $\|GRH_1H_3\| \gg 1$ et $\|GRH_1H_3\| \ll 1$, on peut écrire :

$$\|M(j\omega)\| = \left\| \frac{H_1(j\omega)}{1 + GR(j\omega)H_1(j\omega)H_3(j\omega)} \right\| \approx \begin{cases} \left\| \frac{1}{GR(j\omega)H_3(j\omega)} \right\| & \text{si } \|GRH_1H_3\| \gg 1 \\ \|H_1(j\omega)\| & \text{si } \|GRH_1H_3\| \ll 1 \end{cases}$$

Les conditions $\|GRH_1H_3\| \gg 1$ et $\|GRH_1H_3\| \ll 1$ peuvent encore être réécrites suivant les formulations $\|H_1\| \gg \|1/GRH_3\|$ et $\|H_1\| \ll \|1/GRH_3\|$. On peut donc écrire l'expression de $\|M(j\omega)\|$ suivante :

$$\|M(j\omega)\| = \left\| \frac{H_1(j\omega)}{1 + GR(j\omega)H_1(j\omega)H_3(j\omega)} \right\| \approx \begin{cases} \left\| \frac{1}{GR(j\omega)H_3(j\omega)} \right\| & \text{si } \|H_1\| \gg \|1/GRH_3\| \\ \|H_1(j\omega)\| & \text{si } \|H_1\| \ll \|1/GRH_3\| \end{cases}$$

Au regard de cette dernière relation on s'aperçoit que $\|M(j\omega)\|$ prend la valeur de la plus petite des deux expressions $\|H_1(j\omega)\|$ et $\|1/[GR(j\omega)H_3(j\omega)]\|$. D'où l'expression :

$$\|T(j\omega)\| = \|H_2(j\omega)\| \cdot \|M(j\omega)\| = \|H_2(j\omega)\| \cdot \min \left(\|H_1(j\omega)\| ; \left\| \frac{1}{R(j\omega)G H_3(j\omega)} \right\| \right)$$

Question 10.b. Exprimer G_0 en fonction de K_r . En utilisant le document réponse 4, à rendre avec la copie, tracer le diagramme asymptotique de la fonction $\|H_1(j\omega)\|$ (veiller au respect des pentes) et celui de $\|M(j\omega)\|$ en adoptant l'approximation de la question précédente.

L'expression de $1/[GR(p)H_3(p)]$ est :

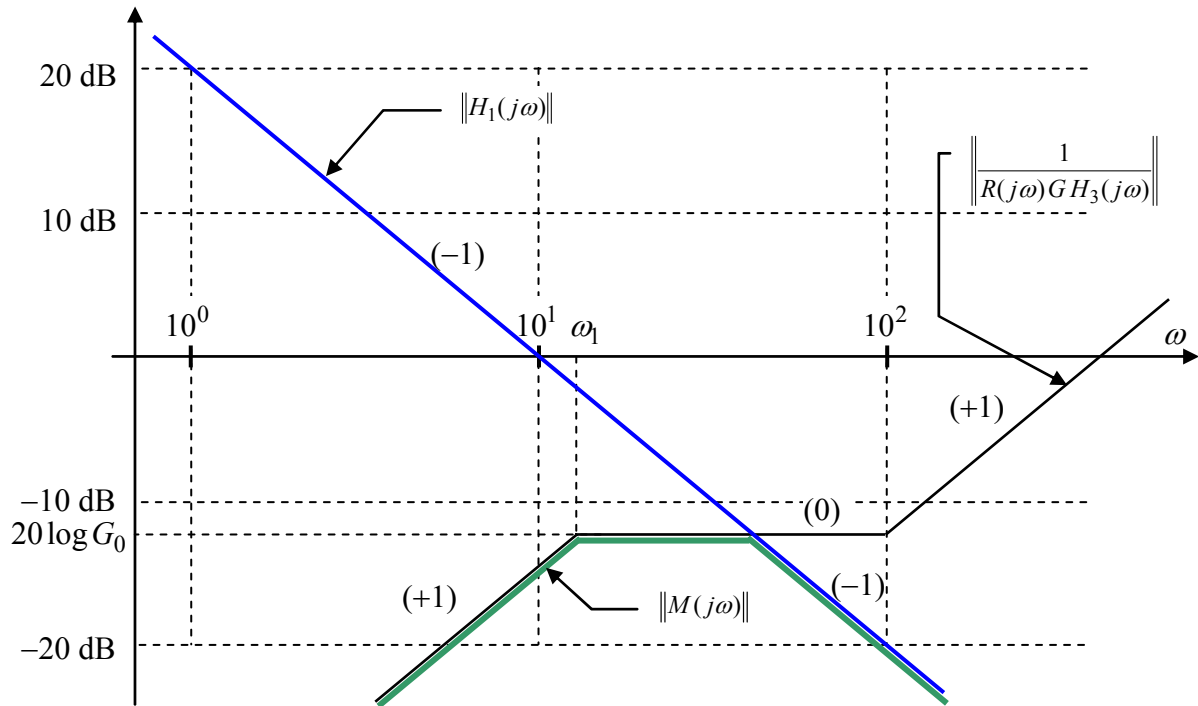
$$\frac{1}{GR(p)H_3(p)} = \frac{T_i p (1 + 0,01p)}{K_r (1 + T_i p)}$$

Les pulsations de brisure sont $\omega_1 = 1/T_i$ et $\omega_2 = 100$ rad/s. Entre ω_1 et ω_2 la fonction de transfert précédente peut être approchée par la relation :

$$\frac{1}{GR(p)H_3(p)} = \frac{T_i p (1 + 0,01p)}{K_r (1 + T_i p)} \approx \frac{T_i p \cdot 1}{K_r \cdot T_i p} = \frac{1}{K_r}$$

Soit $G_0 = 1/K_r$.

Le diagramme de Bode de la fonction $H_1(p) = 10/p$ est donné sur la figure suivante.



Question 10.c. En déduire alors une approximation de la fonction de transfert $T(p) = \Omega_1(p)/F_1(p)$ en exprimant toutes les brisures en fonction de K_r et T_i .

Les tracés précédents permettent de déduire une forme approchée de $T(p)$:

$$T(p) = -0,05M(p) = -\frac{0,05Kp}{(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)} = -\frac{0,05T_ip}{K_r(1+T_ip)(1+\tau_2p)}$$

La constante de temps τ est déduite par la pulsation correspondant à l'intersection entre $H_1(p)$ et G_0 :

$$\left\| \frac{10}{j\omega} \right\| = G_0$$

Soit pour la pulsation $\omega = 10/G_0 = 10K_r$. On en déduit :

$$\tau = \tau_2 = 1/(10K_r)$$

Question 10.d. Proposer une nouvelle expression approchée de $T(p)$ sous la forme :

$$T_a(p) = \frac{N(p)}{1+\tau p}$$

où $N(p)$ est le numérateur de $T(p)$. En utilisant la forme approchée $T_a(p)$, déterminer l'évolution de la vitesse $\Omega_1(t)$ en réponse à un échelon de la force de perturbation et tracer son allure.

Avec les hypothèses adoptées $T_i > \tau$ on peut donc retenir la forme simplifiée :

$$T_a(p) = -\frac{0,05T_ip}{K_r(1+T_ip)}$$

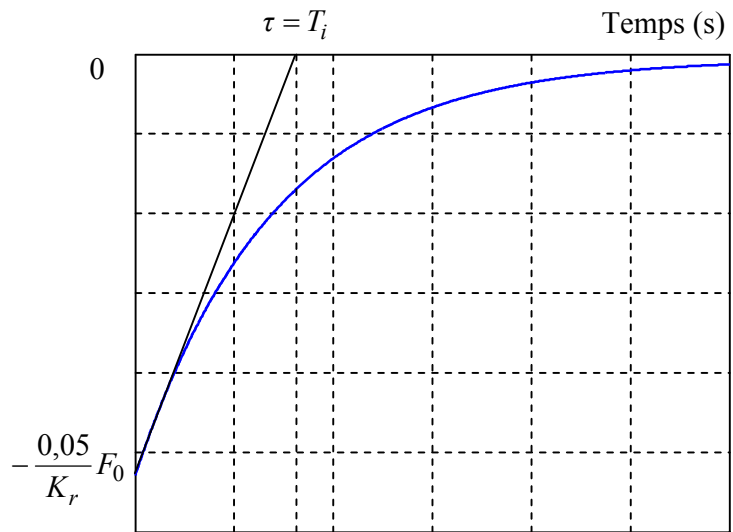
En réponse à un échelon de consigne d'amplitude F_0 on obtient :

$$\Omega_1(p) = -\frac{0,05T_i}{K_r(1+T_i p)} F_0$$

Ce qui conduit à l'évolution temporelle typique d'une fonction du 1^{er} ordre :

$$\Omega_1(t) = -\frac{0,05F_0}{K_r} e^{-\frac{t}{T_i}} \Upsilon(t)$$

Cette réponse est illustrée sur la figure ci-contre.



Question 10.e. En se référant à des fonctions types connues, donner en fonction de T_i un ordre de grandeur du temps de réponse vis-à-vis de la force perturbatrice.

La vitesse revient au point d'équilibre correspondant à la valeur de consigne. On ne peut utiliser directement la définition du temps de réponse habituel à un échelon car ici la réponse revient à l'équilibre. Mais en utilisant une analogie avec les fonctions du 1^{er} ordre (soit un temps de réponse de 3 fois la constante de temps) on peut écrire :

$$t_r = 3T_i$$

Question 10.f. Justifier alors l'intérêt d'adopter pour T_i la valeur la plus petite possible.

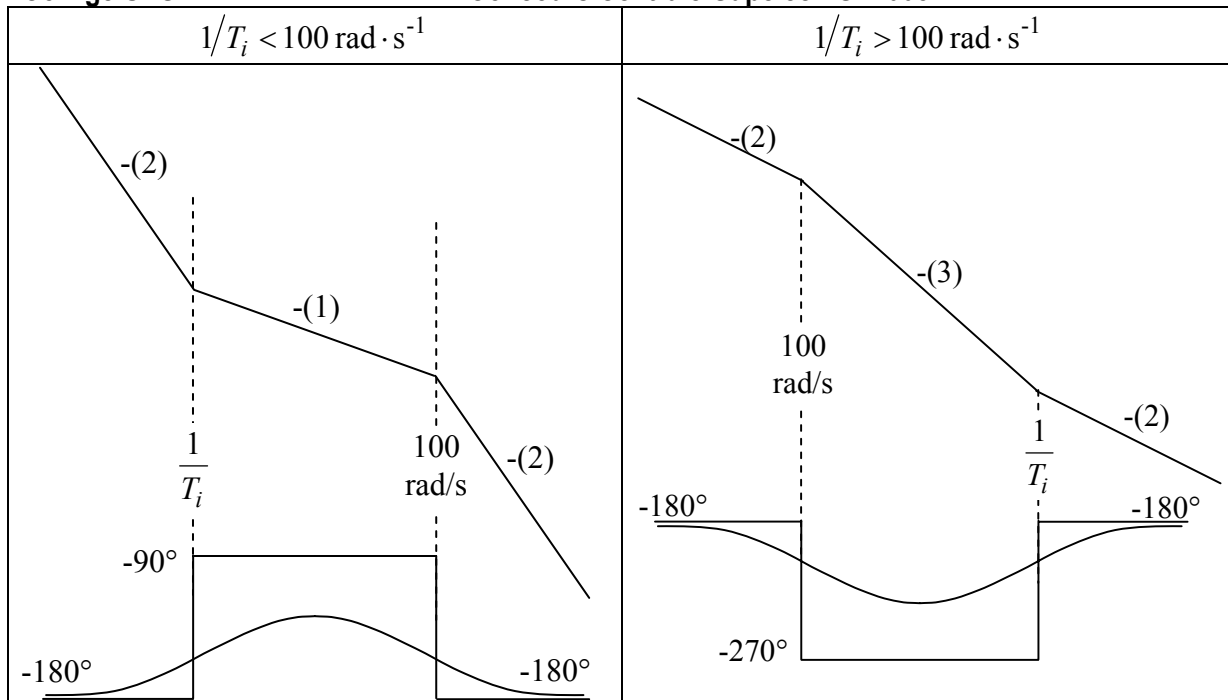
Le temps de réponse vis-à-vis des perturbations est d'autant plus faible que T_i est faible, aussi il est intéressant de choisir pour ce paramètre la plus petite valeur possible compatible avec les exigences de la stabilité en boucle fermée.

Question 11.a. En s'aidant, pour illustrer la réponse, de tracés succincts de diagrammes de Bode effectués directement sur votre copie, analyser la stabilité du système bouclé dans les deux cas : $1/T_i > 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $1/T_i < 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit :

$$T_{bo}(p) = \frac{10K_r(1+T_i p)}{T_i p^2(1+0,01p)}$$

Suivant la valeur de T_i par rapport à la pulsation de brisure de 100 rad/s on peut obtenir les deux situations suivantes.

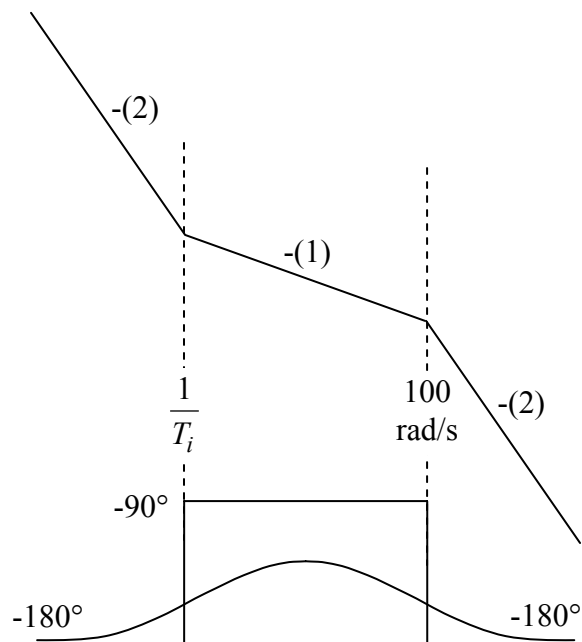


Au regard de ces diagrammes

- il est clair qu'avec $1/T_i > 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ la marge de phase sera nécessairement négative conduisant à l'instabilité du système boucle
- si $1/T_i < 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, un choix correct de T_i pourra permettre d'assurer la marge de phase souhaitée.

Question 11.b. En prenant $K_r = 1$, tracer directement sur la feuille de copie les diagrammes de Bode asymptotiques (module et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée et l'allure de la courbe réelle du diagramme de phase. Veiller à effectuer ce tracé de façon à respecter une situation stable du système en boucle fermée.

La seule situation possible pour assurer la stabilité en boucle fermée est celle correspondant à $1/T_i < 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Le diagramme de Bode associé est donné sur la figure ci-contre.



Question 11.c. En utilisant la représentation dans le plan de Bode donnée en annexe 2, déterminer quelle est la valeur $T_{i\min}$ la plus petite possible que l'on peut conférer à T_i compatible avec la marge de phase minimale exigée par le cahier des charges (cette fonction servira uniquement à calculer T_i en plaçant judicieusement ω_m pour obtenir la marge de phase souhaitée).

La synthèse du régulateur P.I. peut s'interpréter dans ce cas comme le calcul d'un correcteur à avance de phase, sur un système double intégrateur, avec $T = T_i$. Cependant dans ce cas le terme $1/(aT) = 100 \text{ rad/s}$ est fixé, le seul paramètre de réglage étant ici T_i .

La valeur $T_{i\min}$ sera obtenue en adoptant le cas strict, savoir $\varphi_m = \Delta\varphi = 45^\circ$. Soit pour :

$$a = \frac{1 - \sin \varphi_m}{1 + \sin \varphi_m} = \frac{1 - \sin 45^\circ}{1 + \sin 45^\circ} = 0,17$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{1}{T_i} = 100a = 17 \text{ rad/s}}, \text{ ou encore } \boxed{T_i = 0,059 \text{ s}}$$

Question 11.d. En conservant la valeur $T_{i\min}$ calculée précédemment, en déduire alors la valeur du gain K_r du régulateur permettant d'assurer la marge de phase souhaitée.

La phase sera maximale pour $\omega_m = \sqrt{1700} = 41 \text{ rad/s}$, il faut donc déterminer K_r en vue d'assurer une pulsation de coupure $\omega_c = \omega_m = 41 \text{ rad/s}$. Soit :

$$20 \log \left(\frac{10K_r}{T_i \omega_c^2} \right) + 10 \log \left(\frac{1}{a} \right) = 0 \text{ dB}$$

On en déduit :

$$\boxed{K_r = \frac{T_i \omega_c^2 \sqrt{a}}{10} = \frac{\omega_c^2}{10 \omega_c} = 4,1}$$

On vérifie par ailleurs que l'hypothèse de la question 10, $G_0 = 1/K_r < 1$, est vérifiée.

Question 12. Vérifier si le cahier des charges est validé, et conclure sur l'adéquation du régulateur calculé vis-à-vis du problème posé.

- La fonction de transfert en boucle ouverte comporte deux intégrations, dont une avant le point d'entrée de la perturbation, dont l'écart en régime permanent sera nul vis-à-vis d'une consigne et d'un effort perturbateur constants.
- Le temps d'action intégrale est $T_i = 0,059 \text{ s}$, donc d'après l'analyse effectuée à la question 11, le temps de réponse vis-à-vis des perturbations est : $t_r = 3T_i = 0,177 \text{ s}$; cette valeur est inférieure à la valeur maximale donnée par le cahier des charges.

Question 13. Au regard du régulateur adopté, écrire la relation temporelle liant la grandeur de commande issue du régulateur $u_c(t)$ au signal d'écart $\varepsilon(t)$. Justifier, qu'en cas de blocage du vantail par un obstacle, la tension aux bornes du moteur atteint la tension d'alimentation maximale.

Comme le régulateur est de type P.I. il vient sans difficulté :

$$u_c(t) = K_r \varepsilon(t) + \frac{K_r}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau$$

Si la porte est bloquée pendant la phase de coulissement, comme la consigne est constante on peut écrire :

$$u_c(t) = u_{c0} + K_r \Omega_{1c}(t) + \frac{K_r}{T_i} \int_{t0}^t \Omega_{1c}(\tau) d\tau$$

Comme la vitesse de consigne est positive, le terme intégral est nécessairement positif divergeant lorsque le temps tend vers l'infini. La valeur de $u_c(t)$ est nécessairement limitée par la valeur maximale que la tension moteur peut atteindre $U_{\max} = 100$ volts.

Question 14.a. Exprimer en fonction du courant du moteur, des caractéristiques du moteur et de la chaîne de transmission, la force maximale subie par un passager (on pourra utiliser sans aucune justification les équations de la machine à courant continu données en annexe 2).

Comme la porte est bloquée la f.c.e.m. est nulle, en régime permanent le courant moteur et le couple associé sont alors :

$$i_m = \frac{U}{R} \text{ et } C_m = K_c \frac{U}{R}$$

La force subie par le passage s'obtient à partir du couple moteur, du rapport de réduction et du rayon de la poulie :

$$F_{\text{passager}} = K_c \frac{U}{R} \cdot \frac{N_r}{R_{\text{poulie}}} \text{ accepter aussi } F_{\text{passager}} = \frac{1}{2} K_c \frac{U}{R} \cdot \frac{N_r}{R_{\text{poulie}}}$$

Question 14.b. En supposant que la tension d'alimentation maximale est atteinte pendant le blocage, évaluer la valeur numérique de la force (régime **statique**) subie par le passager et vérifier si la contrainte exigée est assurée.

Si la tension maximale du moteur est atteinte on obtient :

$$F_{\text{passager}} = K_c \frac{U_{\max}}{R} \cdot \frac{N_r}{R_{\text{poulie}}} = 1,2 \frac{110}{20} \cdot \frac{7}{0,04} = 1160 \text{ N}$$

Cette valeur est supérieure à la valeur maximale autorisée par le cahier des charges, donc celui-ci n'est pas entièrement vérifié.

Question 15. Proposer un moyen permettant de satisfaire cette contrainte.

On peut utiliser par exemple une régulation du courant moteur en limitant la consigne de courant de manière à ne pas dépasser la valeur limite du courant conduisant au dépassement de la force maximale admissible.

Question 16. Proposer alors, en illustrant la solution retenue par un schéma bloc, une nouvelle structure de commande ou une modification de la structure proposée à la partie 4 permettant de mettre en œuvre la solution envisagée à la question 16.

On peut par exemple utiliser une structure cascade comme celle représentée sur la figure suivante. Cette structure comporte une boucle de courant interne dont la consigne est issue du régulateur de vitesse. La limitation du courant de consigne pourra donc permettre de limiter le couple moteur et en conséquence la force subie par le passager en cas de choc.

