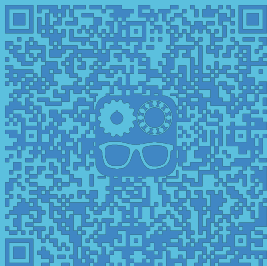




Etude harmonique des SLCI



Renaud Costadoat
Lycée Dorian



Introduction

Savoir

Vous êtes capables :

- de résoudre des équations différentielles à l'aide des transformées de Laplace,
- de représenter des réponses impulsionnelles et indicielles,
- de représenter un SLCI à l'aide d'un schéma blocs.

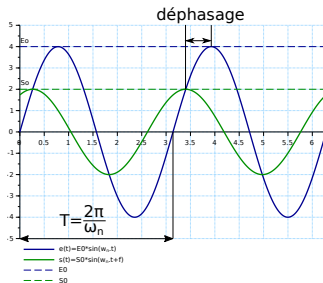
Problématique

Vous devez être capables :

- d'effectuer l'étude harmonique d'un système,
- de représenter cette étude sur les diagrammes adéquats.

Réponse harmonique

Lorsque l'entrée d'un SLCI est un signal sinusoïdal du type $e(t) = E_0 \cdot \sin(\omega_n \cdot t)$, sa sortie en régime permanent est de la forme $s(t) = S_0 \cdot \sin(\omega_n \cdot t + f)$.



On appelle réponse harmonique, la sortie $s(t)$ en régime permanent d'un système soumis à une entrée $e(t)$ périodique.

Les diagrammes harmoniques

Les courbes $e(t)$ et $s(t)$ dessinées ne sont valables que pour la pulsation ω_n du signal d'entrée. La représentation temporelle ne sera donc plus suffisante dans le cadre de cette étude.

L'objet d'une étude fréquentielle d'un système est d'étudier l'évolution du **gain** et de la **phase**, en fonction de la variation de la valeur de la pulsation ω du signal d'entrée, sur la réponse harmonique du système.

L'étude fréquentielle d'un système, consiste en l'étude, par la méthode des complexes, de la fonction de transfert du système $H(p)$:

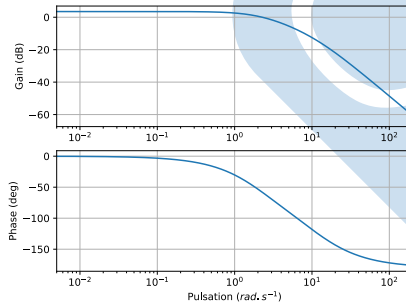
- le **gain** du système $\frac{S_0}{E_0}$ qui est égal au module du nombre complexe $H(j\omega)$: $\frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)|$
- la **phase** du système φ qui est égale à l'argument du nombre complexe $H(j\omega)$:
 $\varphi = \arg(H(j\omega))$

Diagramme de Bode

Plusieurs diagrammes permettent de décrire le comportement fréquentiel d'un système : Bode, Nyquist, Black. Dans un premier temps, nous nous limiterons à l'utilisation du diagramme de Bode.

Il est constitué de deux courbes correspondant aux tracés du module et la phase de $H(j\omega)$ en fonction de la pulsation sur une échelle logarithmique en base 10.

- Le module
 $G_{db} = 20 \cdot \log|H(j\omega)|$
est exprimé en décibel.
- La phase φ est
exprimée en degrés.

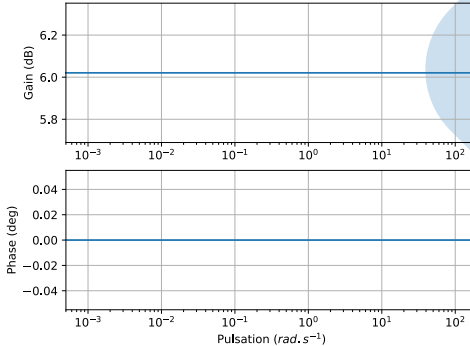


Cas du gain pur

$$H(p) = K$$

$$\bullet G_{db} = 20 \log |K|$$

$$\bullet \varphi = \arg(K) = \arctan\left(\frac{0}{K}\right) = 0.$$

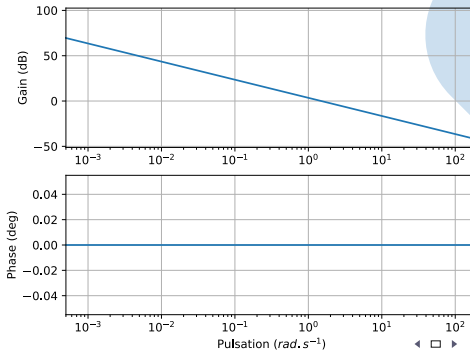


Cas de l'intégrateur

$$H(p) = \frac{K}{p}$$

$$\bullet G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{p} \right| = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$$

$$\bullet \varphi = \arg \left(\frac{K}{j\omega} \right) = -\arctan \left(\frac{\frac{\omega}{K}}{0} \right) = -90.$$



Cas du premier ordre

Pour $\omega \rightarrow 0$

- $G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{1 + \tau.p} \right| = 20 \log(K) - 20 \log(1) = 20 \log(K)$
- $\varphi = \arg \left(\frac{K}{1 + \tau.j\omega} \right) = -\arctan \left(\frac{0}{K} \right) = 0.$

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$$

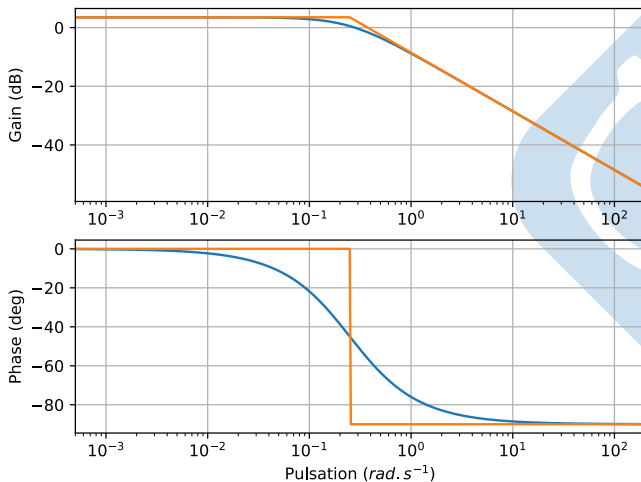
Pour $\omega \rightarrow +\infty$

- $G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{1 + \tau.p} \right| = 20 \log \left(\frac{K}{\tau} \right) - 20 \log(\omega)$
- $\varphi = \arg \left(\frac{K}{1 + \tau.j\omega} \right) = -\arctan \left(\frac{+\infty}{K} \right) = -90.$

Pour $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$, pulsation de cassure.

- $G_{db} = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{2}} \right) = 20 \log(K) - 3db$
- $\varphi = \arg \left(\frac{K}{1 + \tau.j\omega_c} \right) = -\arctan(1) = -45.$

Cas du premier ordre



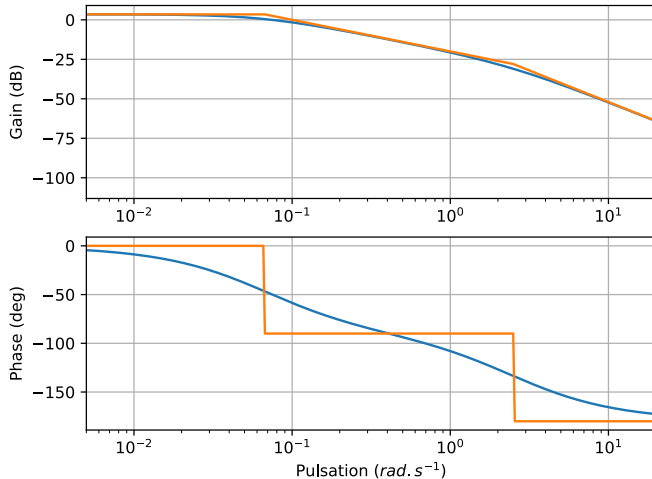
Cas du second ordre ($z > 1$)

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Cas $z > 1$, alors $H(j\omega) = \frac{K}{(1 + T_1 \cdot j \cdot \omega) \cdot (1 + T_2 \cdot j \cdot \omega)}$

- $G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{(1 + T_1 \cdot j \cdot \omega) \cdot (1 + T_2 \cdot j \cdot \omega)} \right| = 20 \log(K) - 10 \log(1 + T_1^2 \cdot \omega^2) - 10 \log(1 + T_2^2 \cdot \omega^2)$
- $\varphi = \arg \left(\frac{K}{(1 + T_1 \cdot j \cdot \omega) \cdot (1 + T_2 \cdot j \cdot \omega)} \right) = -\arctan(T_1 \cdot \omega) - \arctan(T_2 \cdot \omega).$

Pour $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}}$, la courbe de phase passe toujours par -90° .

Cas du second ordre ($z > 1$)

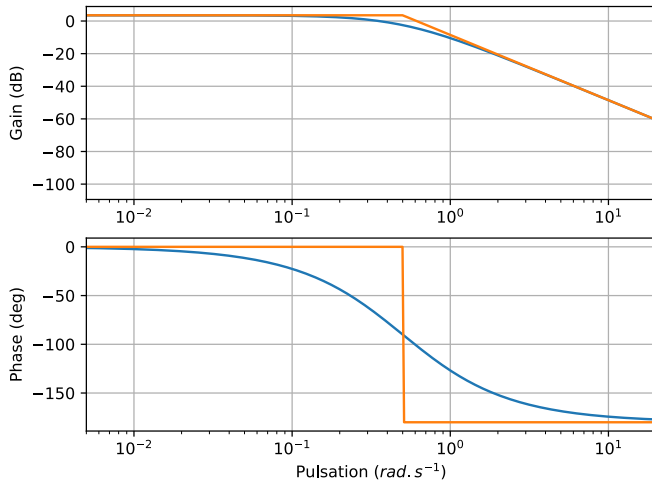
Cas du second ordre ($z=1$)

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Cas $z=1$, alors $H(j\omega) = \frac{K}{(1 + T \cdot j \cdot \omega)^2}$

- $G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{(1 + T \cdot j \cdot \omega)^2} \right| = 20 \log(K) - 20 \log(1 + T^2 \cdot \omega^2)$
- $\varphi = \arg \left(\frac{K}{(1 + T_1 \cdot j \cdot \omega) \cdot (1 + T_2 \cdot j \cdot \omega)} \right) = -2 \cdot \arctan(T \cdot \omega).$

Pour $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{T_1 \cdot T_2}}$, la courbe de phase passe toujours par -90 .

Cas du second ordre ($z=1$)

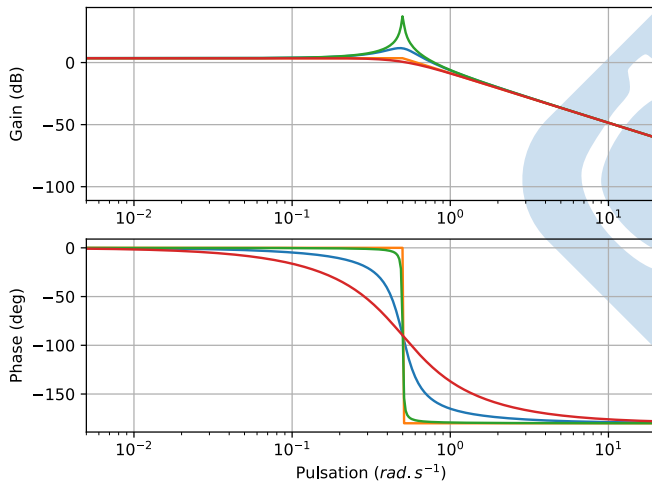
Cas du second ordre ($z < 1$)

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Cas $z < 1$, alors $H(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{2 \cdot z \cdot \omega}{\omega_0}}$

$$\bullet G_{db} = 20 \log \left| \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{2 \cdot z \cdot \omega}{\omega_0}} \right| = 20 \log(K) - 10 \log \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + 4 \cdot z^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)$$

$$\bullet \varphi = \arg \left(\frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{2 \cdot z \cdot \omega}{\omega_0}} \right) = -\arctan \left(\frac{\frac{2 \cdot z \cdot \omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right)$$

Cas du second ordre ($z < 1$)

Résonance

Une résonance apparaît, lorsque $0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$, cela se manifeste par la présence d'un pic sur la courbe de gain.

Celui-ci étant un maximum, il peut être calculé s'il existe, pour la pulsation ω_r de la manière suivante: $\frac{dG}{d\omega}(\omega_r) = 0$

$$\left[\frac{d((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot z^2 \omega_0^2 \cdot \omega^2)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_r} = 0$$

$$-4 \cdot \omega_r \cdot (\omega_0^2 - \omega_r^2) + 8 \cdot z^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \omega_r = 0.$$

La résonance apparaît donc à la pulsation

$$\omega_r = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot z^2}$$

Et sa valeur est

$$Q = \frac{|H(j \cdot \omega)_{max}|}{|H(0)|} = \frac{1}{2 \cdot z \cdot \sqrt{1 - z^2}}.$$

Conclusion

Savoir

Vous êtes capables :

- de construire les diagrammes de Bode à partir de fonctions de transfert,
- d'identifier des fonctions à partir de la lecture de ces diagrammes ou des tracés temporels.

Problématique

Vous devez être capables :

- de mettre en place une correction de l'asservissement en vue du respect du cahier des charges.