# Efforts mécaniques

Renaud Costadoat
Lycée Dorian



## Introduction

*Savoir*

Vous êtes capables :

- de modéliser le comportement cinématique d’un système.

*Problematique*

Vous devez êtes capables :

- de modéliser une actions mécaniques,
- de déterminer comment ces actions se propagent par les pièces d’un système.

## Modélisation vectorielle

Une **action mécaniques** peut être considérée comme un ensemble de forces s'exerçant entre des solides. Chacune de ces forces est modélisable par un vecteur.

- La force exercée sur le solide $S_1$ par $S_0$ au point A est notée $\overrightarrow{A_{S_1 \to S_0}}$ :
  - l'**origine** du vecteur est le point du solide où s'applique la force,
  - le **sens** et la direction du vecteur correspondent au sens et à la direction de la force,
  - la **norme** du vecteur correspond à l'intensité, en Newton (N), de la force.





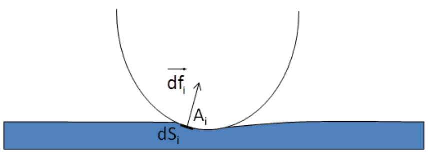

## Modélisation locale

Il existe deux sortes d'actions mécaniques les actions à **distance** et les actions de **contact**.

Une action mécanique d'un solide 1 sur un solide 2 est dite à **distance** si elle ne résulte pas d'une liaison mécanique entre 1 et 2. Exemple: actions magnétiques et l'action de la pesanteur.

Ex: Action mécanique de pesanteur

- $\overrightarrow{df_v} = \rho.\overrightarrow{g}.dv$,
- $\rho$ est la masse volumique de la particule ($Kg/m^3$),
- $\overrightarrow{g}$ le vecteur accélération de la pesanteur ($m/s^2$),
- $dV$ un élément de volume élémentaire ($m^3$).


Ex: Pression de contact, un élément de force surfacique est donné par :

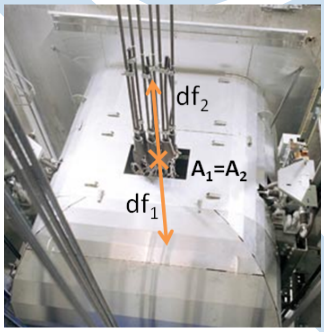
- $\overrightarrow{df_s} = P.\overrightarrow{n}.ds$,
- $P$ est la pression de contact ($Pa$),
- $ds$ un élément de surface élémentaire ($m^2$),
- $\overrightarrow{n}$ la normale extérieure au plan de contact.

## Modélisation globale d'une action mécanique

- Il est possible d'introduire le torseur, noté $\left\{T_{\overline{S}\rightarrow S}\right\}$ qui représente l'action mécanique de $\overline{S}$ sur $S$ au point A,
- Le principe est donc de sommer l'ensemble des actions mécaniques élémentaires de contact.

Étude d'un cas simplifié, nécessité du moment: $S$ subit 2 actions mécaniques élémentaires $\overrightarrow{df_1}$ et $\overrightarrow{df_2}$ aux points $A_1$ et $A_2$. Ces deux actions mécaniques élémentaires sont opposées : $\overrightarrow{df_1} = -\overrightarrow{df_2}$.

- Cas 1: $A_1$ est confondu avec $A_2$, $\Sigma\overrightarrow{df_i} = 0$ L'action mécanique résultante de $S_0$ sur $S_0$ est nulle.



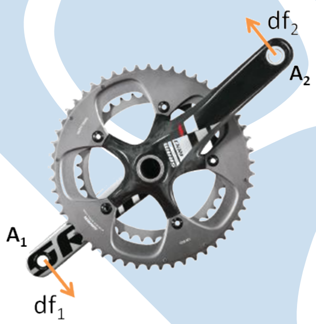



Introduction

## Modélisation globale d'une action mécanique

Étude d'un cas simplifié, nécessité du moment: $S$ subit 2 actions mécaniques élémentaires $\overrightarrow{df_1}$ et $\overrightarrow{df_2}$ aux points $A_1$ et $A_2$. Ces deux actions mécaniques élémentaires sont opposées : $\overrightarrow{df_1} = -\overrightarrow{df_2}$.

- Cas 2: $A_1$ n'est pas confondu avec $A_2$, $\Sigma\overrightarrow{df_i} = 0$. L'action mécanique résultante de $\overline{S}$ sur $S$ n'est pas nulle puisque le solide $S$ est susceptible de subir une rotation sous l'effet de ces deux actions mécaniques élémentaires, donc: il faut tenir compte de la position des $A_i$ pour élaborer une action mécanique globale représentant les actions élémentaires.



## Généralisation

Si les actions mécaniques locales $\overrightarrow{df_{S_{Ai}}}$ (surfaciques) et $\overrightarrow{df_{V_{A_i}}}$ (volumiques) de $\overline{S}$ sur $S$ sont réparties sur les points $A_i$, on peut définir les éléments de réduction du torseur d'action mécanique de $\overline{S}$ sur $S$ de la façon suivante :

$$\left\{T_{\overline{S}\to S}\right\} = \left\{ \begin{array}{r} \overrightarrow{R_{\overline{S}\to S}} = \iiint \overrightarrow{df_{V_{A_i}}} + \iint \overrightarrow{df_{S_{Ai}}} \\ \overrightarrow{M_{O,\overline{S}\to S}} = \iiint \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{df_{V_{A_i}}} + \iint \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{df_{S_{Ai}}} \end{array} \right\}_O$$

Remarque: Même si ce calcul intégral est rarement entrepris, il est important de comprendre ce que représente un torseur d'efforts. Ce torseur peut être écrit en faisant apparaitre ses composantes en projection dans un repère $R$ :

$$\left\{T_{\overline{S}\to S}\right\} = \left\{ \begin{array}{cc} X_{\overline{S}\to S} & L_{O,\overline{S}\to S} \\ Y_{\overline{S}\to S} & M_{O,\overline{S}\to S} \\ Z_{\overline{S}\to S} & N_{O,\overline{S}\to S} \end{array} \right\}_O$$





## Résolution analytique

*Definition*

Un objet est à l'équilibre lorsqu'il a un mouvement rectiligne uniforme (son accélération linéaire et son accélération angulaire sont nulles).

De plus, la somme des forces et la somme des moments des forces au même point exercées sur lui sont nulles :

- théorème de la résultante statique : $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$,
- théorème du moment statique : $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A(\vec{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} \vec{C}_i = \vec{0}$.

La résolution analytique avec le Principe Fondamental de la Statique se déroule en suivant la séquence suivant:

1. Isoler un solide,
2. Faire le bilan des actions mécaniques associées (de contact et à distance),
3. Modéliser ces actions mécaniques sous la forme de torseurs,
4. Déplacer tous ces torseurs au même point,
5. Écrire le système d'équations issu du P.F.S.

## Résolution graphique

Dans le cas d'un problème plan ou tous les efforts sont modélisables par des glisseurs (moment nul), on peut utiliser une méthode graphique de résolution.

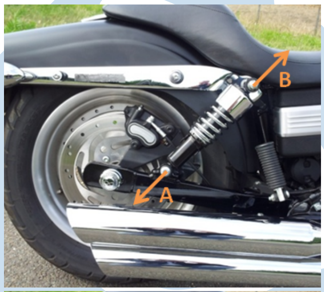
Système soumis à 2 glisseurs coplanaires.
Soit un solide $S$ soumis en A et B à 2 glisseurs $\overrightarrow{A_{S_1\rightarrow S}}$ et $\overrightarrow{B_{S_1\rightarrow S}}$, par application du théorème de la résultante statique:

$$\overrightarrow{A_{S_1\rightarrow S}}+\overrightarrow{B_{S_1\rightarrow S}}=\overrightarrow{0}\text{, donc }\overrightarrow{A_{S_1\rightarrow S}}=-\overrightarrow{B_{S_1\rightarrow S}}$$

Ces 2 vecteurs sont donc égaux en norme et de sens opposés, par application du théorème du moment statique en A, on a :

$$\overrightarrow{AA}\wedge\overrightarrow{A_{S_1\rightarrow S}}+\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{B_{S_1\rightarrow S}}=\overrightarrow{0}\text{, donc }\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{B_{S_1\rightarrow S}}=\overrightarrow{0}$$

$\overrightarrow{B_{S_1\rightarrow S}}$ est donc colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Donc $\overrightarrow{A_{S_1\rightarrow S}}$ aussi.





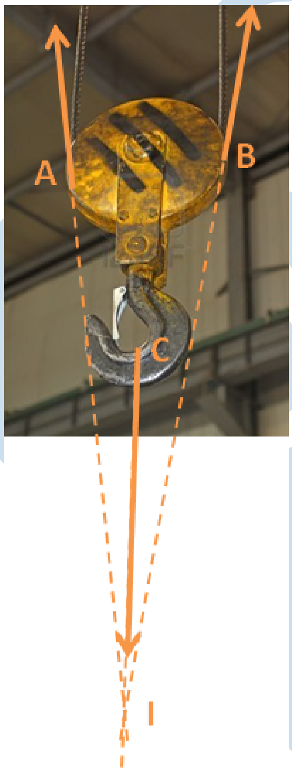
Les 2 glisseurs ont le même support, **la droite passant par les 2 points d'application**, ils sont de même norme et de sens opposés.



Introduction

## Résolution graphique

Système soumis à 2 glisseurs coplanaires.
Soit un solide $S$ soumis en A, B et C à 3 glisseurs $\overrightarrow{A_{S_1\rightarrow S}}$, $\overrightarrow{B_{S_1\rightarrow S}}$ et $\overrightarrow{C_{S_1\rightarrow S}}$, par application du théorème de la résultante statique, on a :
$\overrightarrow{A_{S_1\rightarrow S}}+\overrightarrow{B_{S_1\rightarrow S}}+\overrightarrow{C_{S_1\rightarrow S}}=\overrightarrow{0}$
Cette somme vectorielle nulle peut être traitée de façon graphique en construisant un triangle appelé le triangle le dynamique fermé.
Par application du théorème du moment statique en I, on a :
$\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{A_{S_1\rightarrow S}}+\overrightarrow{IB}\wedge\overrightarrow{B_{S_1\rightarrow S}}+\overrightarrow{IC}\wedge\overrightarrow{C_{S_1\rightarrow S}}=\overrightarrow{0}$
Soit I à l'intersection des supports de $\overrightarrow{A_{S_1\rightarrow S}}$ et $\overrightarrow{B_{S_1\rightarrow S}}$,
$\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{A_{S_1\rightarrow S}}=\overrightarrow{IB}\wedge\overrightarrow{B_{S_1\rightarrow S}}=\overrightarrow{0}$.
Ainsi, $\overrightarrow{IC}\wedge\overrightarrow{C_{S_1\rightarrow S}}=\overrightarrow{0}$, donc I appartient également à la direction de $\overrightarrow{C_{S_1\rightarrow S}}$.
Les trois glisseurs sont donc concourants en I, leur somme vectorielle est nulle.



## Conclusion

*Savoir*

Vous êtes capables :

- de modéliser une action mécanique,
- résoudre un problème de statique en utilisant le P.F.S.

*Problematique*

Vous devez êtes capables de :

- modéliser les actions de contact avec frottements.