

例外 Lie 群和 Lie 代数

李心宇

2024 年 1 月 16 日

Lie 群即连续 (光滑) 群. 如果说群即对称, 那么便可以说 Lie 群即是连续对称. 相应地, Lie 代数作为 Lie 群在单位处的切空间, 刻画的便是所谓无穷小对称性. 事实上, Marius Sophus Lie 最早便是在微分方程的对称性中发现了 Lie 群的结构 (Évariste Galois 在代数方程的研究中抽象出群).

对称无处不在. 因此自诞生伊始, Lie 群便在数学和物理里发挥了重要的作用. 对数学家来说, Lie 理论处于代数, 几何, 分析的交汇之处. 对物理学家来说, 对称越来越成为指导研究的核心思想之一, 例如在经典力学的 Lagrange 描述中, Noether 定理指出 Lie 群的对称可以构造出相应的守恒量.

Lie 群的结构丰富多彩, 研究起来却也带来一些困难 (尤其是对代数学家), 因此我们对 Lie 代数这一代数对象进行研究. Lie 群的局部性质通过指数映射等同于 Lie 代数的性质, 但对 Lie 代数的基础研究基本只用到线性代数的工具.

Lie 代数分两类: 交换的和不交换的. 当然这样天真的分类过于简单, 实际上我们用幂零或者可解的概念来刻画交换性. 对幂零 Lie 代数或可解 Lie 代数, Lie 和 Engel 做了一些研究. 事实表明, 这些具有很好交换性的 Lie 代数无非是上三角的矩阵 Lie 代数或者严格上三角的矩阵 Lie 代数.

刻画非交换性的相应术语称为半单. 当然这也是代数学里常常出现的术语: 在不同的范畴里我们都可以谈论所谓半单的对象. 顾名思义, Lie 代数 \mathfrak{g} 称为半单的, 如果它是单 Lie 代数的直和. 半单 Lie 代数的重要性质是所有 \mathfrak{g} -模 (即 \mathfrak{g} 的表示) 都是完全可约的 (我们暂时只考虑复 Lie 代数和它的有限维复表示). 复半单 Lie 代数被完全分类了, 这是数学史上最优美的结果之一. 事实上, 能够证明代数对象复半单 Lie 代数, 几何对象根系以及组合对象 Dynkin 图在同构意义下有某种一一对应关系, 因此分类了后两类对象便分类了所有复半单 Lie 代数. 根据 Wilhelm Killing [Kil88] 和 Élie Cartan [Car94] 的工作, 所有根系被分为如下几型:

$$A_n(n \geq 1), B_n(n \geq 2), C_n(n \geq 3), D_n(n \geq 4)$$

以及

$$G_2, F_4, E_6, E_7, E_8.$$

其中, A_n 来自经典 Lie 代数 $\mathfrak{sl}(n+1, \mathbb{C})$, B_n 来自经典 Lie 代数 $\mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C})$, C_n 来自经典 Lie 代数 $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$, D_n 来自经典 Lie 代数 $\mathfrak{so}(2n, \mathbb{C})$. 相比之下, 后五类则神秘得多, 它们被称为例外 Lie 代数. 它们的维数依次为 14, 52, 78, 133, 248.

本文便谈一谈这些例外 Lie 代数以及相应的例外 Lie 群. 囿于水平有限, 我只能讲部分我了解的内容. 尤其值得注意的是, 近年来例外 Lie 群自然地出现在许多理论物理的研究中, 如杂化弦理论, 二维共形场论, 以及大统一理论. 这方面内容我不能做很好的介绍.

我们的正文部分比较技术化, 尽管绝大多数证明都不是完整的, 一般只给出想法上的梗概. 不过我也设置了一些彩蛋. 另外脚注部分也有一些有趣的历史小故事.

文档中有不少方便读者用的超链接. 为了更好的阅读体验, 最好用合适的 PDF 阅读器阅读电子版, 而非打印下来的纸质版.

目录

1	“随手写下 Serre 关系”	4
1.1	根系	4
1.2	根分解与 Serre 关系	6
1.3	用 Serre 关系构造半单 Lie 代数	8
2	G_2: Clifford 代数与旋量	11
2.1	Clifford 代数	11
2.2	旋量群	13
2.3	旋量表示	13
2.4	G_2 与旋量	19
3	朝花夕拾: 八元数	22
3.1	八元数	22
3.2	G_2 与八元数, 三隅对称性	24
4	暂时的顶峰: Freudenthal–Tits 魔方	28
4.1	Jordan 代数	29
4.2	Tits 的构造	30
5	E_8	36
5.1	E_8 根系的标准构造	36
5.2	E_8 的根格与权格	37
5.3	E_8 的 Weyl 群	38
6	摩登的话题	43
6.1	各种 ADE 分类	43
6.2	顶点算子代数	44
6.3	例外几何	44
6.4	不太常见的 Lie 理论的应用	46
7	后记	47

1 “随手写下 Serre 关系”

这一节我们讲如何用 Serre 关系构造复半单 Lie 代数. 这是一个一般性的策略, 即它对任何根系生成一个相应的复半单 Lie 代数, 并不在意这个根系是经典的还是例外的.

1.1 根系

在一切故事开始之前, 我们先回顾一下抽象根系的概念.

定义 1 (抽象根系). 假设 E 是一个有限维的实内积空间, 内积记为 (\cdot, \cdot) . $R \subset E - \{0\}$ 被称为一个**根系** (R 中的向量被称为**根**), 如果

- 作为 \mathbb{R} -向量空间, R 生成 E .
- 对任何根 α, β , 数 $n_{\alpha\beta} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ 是整数.
- 考虑关于超平面的反射

$$s_{\alpha}: E \rightarrow E, \lambda \mapsto \lambda - \frac{2(\alpha, \lambda)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

对任何根 α, β , $s_{\alpha}(\beta)$ 也是根.

- 若 $\alpha, c\alpha$ 都是根, 则 $c = \pm 1$.

有些作者在定义根系时不加上上述第四条要求, 而把满足第四条要求的根系称为约化根系. 不过我们只考虑约化根系, 因此总假设根系满足上述全部四条要求.

定义根系的动机就来自将会谈到的根分解. 其中第二条关于 $n_{\alpha\beta}$ 都是整数的约束, 就来自 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的表示的分类: $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的有限维表示都是最高权表示, 并且所有权都是整数.

可见, 根系是一个非常初等的几何对象. 其中第三条要求给了根系很强的对称性, 第二条要求则加了很强的限制, 给了我们分类根系的出发点. 如序言中所说, 根系确实被完全分类了. 例如二维根系在同构意义下一共只有四个, 为所谓的 $A_1 \times A_1 = D_2, A_2, B_2 = C_2, G_2$ 型.

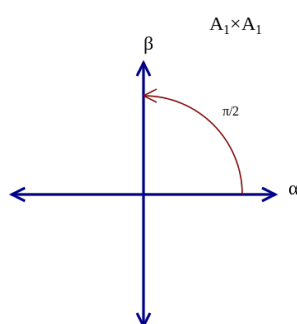


图 1: $A_1 \times A_1$

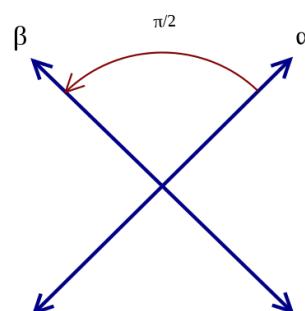


图 2: D_2

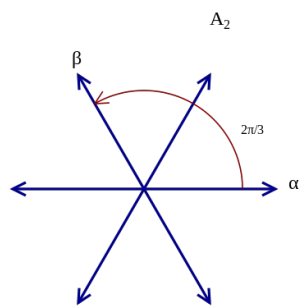


图 3: A_2

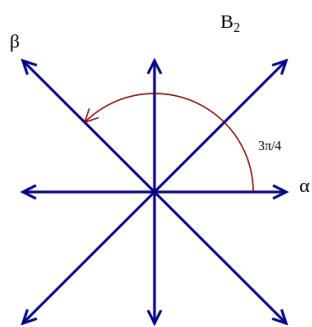


图 4: B_2

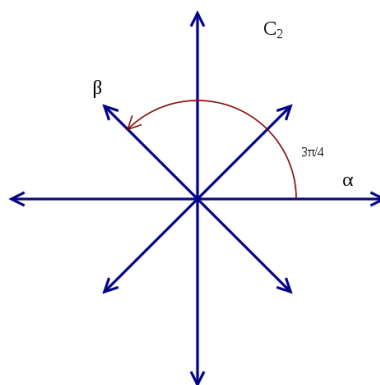


图 5: C_2

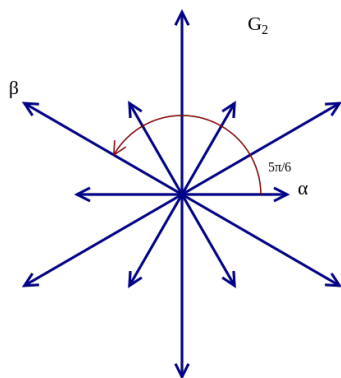


图 6: G_2

一张优美的图片是所谓 E_8 根系的二维投影 (E_8 本身生活在一个 8 维实内积空间中).

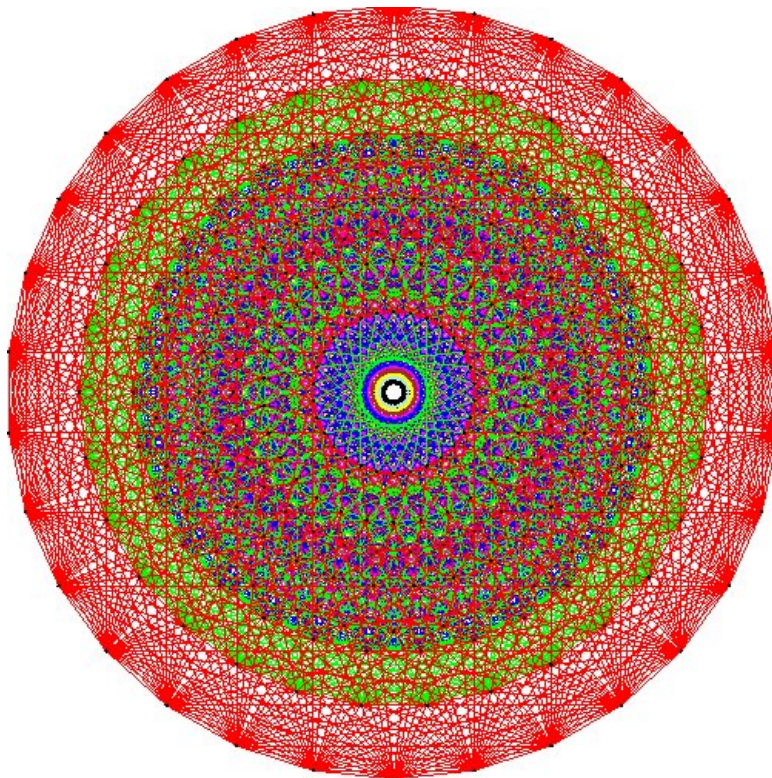


图 7: Picture by John Stembridge, based on a drawing by Peter McMullen.¹

1.2 根分解与 Serre 关系

下面来到 Lie 代数的世界. 我们回忆复半单 Lie 代数的根分解.

定理 1 (根分解). 固定一个复半单 Lie 代数 \mathfrak{g} , 则

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

其中 \mathfrak{h} 是所谓的 **Cartan** 子代数 (交换, 自正规化并且所有元素在 ad 表示下都可对角化), $R \subset \mathfrak{h}^*$ 是相应的根系 (即那些 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, 使得下面定义的 $\mathfrak{g}^{\alpha} \neq 0$),

$$\mathfrak{g}^{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} : \text{ad}(h)(x) = \alpha(h)x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$$

为根 α 对应的根空间.

¹John Stembridge has a web page with a more detailed and complete technical explanation of the picture, along with a number of simpler examples.

根据复半单 Lie 代数的知识, 我们能证明这里的 R 确实是一个抽象根系, 并且两个复半单 Lie 代数同构当且仅当它们对应的根系同构. 这里我们需要在 \mathfrak{h}^* 上构造一个内积, 或者只要在 \mathfrak{h} 上定义一个合理的内积. 这是可以做到的, 一种途径是所谓的 Unitary trick. 当然我们也知道, 半单 Lie 代数的 Killing 形式总是对称且非退化的, 也可以由此构造出一个近似内积的结构.

以 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ 为例, 这时 Cartan 子代数 \mathfrak{h} 可取成那些迹为 0 的对角矩阵构成的子空间. 考虑 \mathfrak{h} 上线性泛函

$$e_i: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \begin{bmatrix} h_1 & & & \\ & h_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & h_n \end{bmatrix} \mapsto h_i.$$

容易看出,

$$\mathfrak{h}^* = \frac{\mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}e_n}{\mathbb{C}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)}.$$

用 E_{ij} 表示只有第 i 行, j 列为 1, 其它位置均为 0 的基础矩阵, 则容易看出对任何 $i \neq j, h \in \mathfrak{h}$,

$$\text{ad}(h)(E_{ij}) = hE_{ij} - E_{ij}h = (e_i - e_j)(h)E_{ij}.$$

因此, $R = \{e_i - e_j : i \neq j\} \subset \mathfrak{h}^*, \mathfrak{g}^{e_i - e_j} = \mathbb{C}E_{ij}$. 相应的根分解此时即

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}E_{ij}.$$

假设 α_i 是所有正的单根, 相应的 $-\alpha_i$ 是负的单根. 根据复半单 Lie 代数的基础理论, 我们能够选取 $e_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}, f_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}, h_i \in \mathfrak{h}$ 使得如下 Serre 关系成立:

定理 2 (Serre 关系).

$$[h_i, h_j] = 0 \tag{1}$$

$$[h_i, e_j] = a_{ij}e_j, [h_i, f_j] = -a_{ij}e_j \tag{2}$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij}h_i \tag{3}$$

$$(\text{ad } e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0 \tag{4}$$

$$(\text{ad } f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0 \tag{5}$$

其中 $a_{ij} = 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ 是所谓 Cartan 矩阵的元素.

这里 e_i, f_i, h_i 的雏形是 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 中的

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

事实上 $\mathbb{C}(e_i, f_i, h_i)$ 就构成一个同构于 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的子代数.

1.3 用 Serre 关系构造半单 Lie 代数

反之, 假设有一个根系 R , 设 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 是其一组基 (即全体正的单根), 我们可以依此定义出一个有 $3r$ 个生成元 e_i, f_i, h_i 的 “Lie 代数”, 这些生成元恰好满足上述五条 Serre 关系. 定义出这样一个空间是很容易的 (考虑自由 Lie 代数的商), 真正困难之处在于证明这个空间是有限维的 (我们总要求 Lie 代数是有限维的, 这样才能保证很多优良的性质. 复半单 Lie 代数的无限维类比即 Kac–Moody 代数).

不负责任地说, 若只关心例外 Lie 代数, 仅有限个有限维空间, 可以用蛮力一一验证.

下面我们简述一下整个过程. 我们基本遵循 Serre 的原始路线 [Ser00]. 其中关键的一步是利用 Weyl 群的作用 (给出有限性).

定理 3 (Serre, [Ser00]). 给定一个根系 R , $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ 是其一组基. 设 \mathfrak{g} 是一个有 $3r$ 个生成元 e_i, f_i, h_i 的复 Lie 代数, 其满足上述五条 Serre 关系, 则 \mathfrak{g} 是一个复半单 Lie 代数, h_i 生成的子代数 \mathfrak{h} 是一个 Cartan 子代数, 并且 \mathfrak{g} 的根系同构于 R .

证明. 我们给出证明的梗概.

- 根据 Claude Chevalley, Harish-Chandra 和 Nathan Jacobson 的工作, 我们考虑 Lie 代数 \mathfrak{a} , 它有 $3r$ 个生成元 $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_r, h_1, \dots, h_r$, 满足 Serre 关系的前三条 (1), (2), (3), 则

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{x} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{y},$$

其中 \mathfrak{x} 是 e_i 生成的子代数, \mathfrak{y} 是 f_i 生成的子代数, 而 h_i 构成 \mathfrak{h} 的一组基. 因此我们可以认为 R 生活在 \mathfrak{h}^* 里, 并且 $a_{ij} = \alpha_j(h_i)$. 进一步, \mathfrak{x} 等同于 e_i 生成的自由 Lie 代数, \mathfrak{y} 等同于 f_i 生成的自由 Lie 代数.

- 考虑

$$\theta_{ij} = \text{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j), \phi_{ij} = \text{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j),$$

则 $\theta_{ij} \in \mathfrak{x}, \phi_{ij} \in \mathfrak{y}$. 记 \mathfrak{u} 为这些 θ_{ij} 在 \mathfrak{x} 中生成的理想, \mathfrak{v} 为这些 ϕ_{ij} 在 \mathfrak{y} 中生成的理想, $\mathfrak{r} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{v}$.

- 对泛包络代数 $U\mathfrak{a}$ 使用 PBW (Poincaré–Birkhoff–Witt) 定理, 我们能够证明 $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{r}$ 都是 \mathfrak{a} 的理想. 于是可以考虑商 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}/\mathfrak{r}$. 这个 \mathfrak{g} 实际上就是我们关心的复半单 Lie 代数.
- 为方便, 我们仍用 e_i, f_i, h_i 表示它们在投影 $\mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ 下的像. 记

$$\mathfrak{n}_+ = \mathfrak{x}/\mathfrak{u}, \mathfrak{n}_- = \mathfrak{y}/\mathfrak{v},$$

则

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-.$$

- 一个技术性的观察: e_i, f_i 在 \mathfrak{g} 上的作用都是局部幂零的, 即对任何 $z \in \mathfrak{g}$, 存在 $N_i, M_i \in \mathbb{Z}_+$ 使得 $\text{ad}(e_i)^{N_i}(z) = 0, \text{ad}(f_i)^{M_i}(z) = 0$.

事实上, 假设 V 是 \mathfrak{g} 中那些 z , 使得对充分大的 $N \in \mathbb{Z}_+$, $\text{ad}(e_i)^N(z) = 0, 1 \leq i \leq r$, 构成的子空间. 可以证明 V 是一个子代数, 并且容易观察知 $e_i, f_i, h_i \in V$, 因此 $V = \mathfrak{g}$. 类似知道 f_i 的作用都是局部幂零的. 由是, 算子

$$\theta_i = \exp(\text{ad}(e_i)) \exp(-\text{ad}(f_i)) \exp(\text{ad}(e_i))$$

是良好定义的.

- 下面回到权的概念. 对 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, 定义

$$\mathfrak{a}^\lambda = \{z \in \mathfrak{a} : \text{ad}(h)(z) = \lambda(h)z, \forall h \in \mathfrak{h}\},$$

$$\mathfrak{g}^\lambda = \{z \in \mathfrak{g} : \text{ad}(h)(z) = \lambda(h)z, \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

\mathfrak{a}^λ (或 \mathfrak{g}^λ) 中的元素被称为具有权 λ . 依照 Serre 关系中的 (2), e_i 具有权 α_i , f_i 具有权 $-\alpha_i$. 根据第一目中 \mathfrak{a} 的分解, 我们知道 \mathfrak{a} 是它的权空间的直和. 于是 $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ 也是其相应权空间的直和.

如果 $\mathfrak{a}^\lambda \neq 0$, 则 λ 是单根 α_i 的整系数线性组合, 并且系数都是同样符号的 (即都 ≥ 0 或都 ≤ 0).

更具体说来,

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{a}^0, \mathfrak{r} = \sum_{\lambda > 0} \mathfrak{a}^\lambda, \mathfrak{y} = \sum_{\lambda < 0} \mathfrak{a}^\lambda.$$

对 \mathfrak{g} 有类似的分解.

- 神奇的 Weyl 群 W 出现了. 我们断言, 如果对某个 $w \in W, \lambda = w(\mu)$, 则

$$\dim \mathfrak{g}^\lambda = \dim \mathfrak{g}^\mu.$$

熟知 W 由 $s_{\alpha_i}, 1 \leq i \leq r$ 生成, 其中

$$s_\alpha: \gamma \mapsto \gamma - \frac{2(\alpha, \gamma)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

表示关于和 α 垂直的超平面的反射.

事实上, 如果 $\lambda = s_{\alpha_i}(\mu)$, 则

$$\theta_i: \mathfrak{g}^\lambda \rightarrow \mathfrak{g}^\mu$$

是线性同构 (证明是直接计算).

- 我们断言 $\dim \mathfrak{g}^{\alpha_i} = 1$, 并且对 $m \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$, $\mathfrak{g}^{m\alpha_i} = 0$.

该结论对 \mathfrak{a} 来说是显然的, 相应化约为关于 \mathfrak{g} 的结论.

- 结合以上两目, 我们知道对任何 $\alpha \in R$, $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$. 只需注意到 Weyl 群在根系上的作用是可迁的.
- 我们断言如果 λ 不是根且 $\lambda \neq 0$, 则 $\mathfrak{g}^\lambda = 0$.

首先根据第六目的观察, 我们只需考虑 λ 是 α_i 的整系数线性组合的情况. λ 是某个根的倍数的情况以及在第八目中被讨论过. 于是我们假定在 λ 的直和分解式中, 至少有两个系数非 0. 那么 λ 一定在某个 Weyl 腔的内部, 故存在 $w \in W$ 使得

$$\mu = w(\lambda) = \sum_{i=1}^r t_i \alpha_i,$$

其中有些 $t_i > 0$, 有些 $t_i < 0$. 根据第六目的讨论, $\mathfrak{g}^\mu = 0$, 故 $\mathfrak{g}^\lambda = 0$. 进而由第七目所言, $\mathfrak{g}^\lambda = 0$.

- 言至此, 我们已然得到“根分解”

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}^\alpha,$$

并且每个 \mathfrak{g}^α 都是一维的. 特别地,

$$\dim \mathfrak{g} = r + |R| < \infty.$$

余下, 我们还有一些琐碎的事项留待验证, 例如验证上述构造的 \mathfrak{g} 确实是一个复半单 Lie 代数, 并且其根系恰好为 R , 不过这些并不复杂, 在此不一一列举了. \square

粗看起来读者可能不明白 Serre 关系中的 (4), (5) 在哪里起了作用, 事实上正是这两条关系保证了第五目中 e_i, f_i 在 \mathfrak{g} 上的作用是局部幂零的. 我们在通过支配整权的 Verma 模得到有限维商的时候也用到这个技术.

David Vogan 曾表示, 他觉得 Serre 关系是非常刻意且人为的. 然而只要“随手写下 Serre 关系”, 我们便能构造出复半单 Lie 代数.

2 G_2 : Clifford 代数与旋量

这是几何的一节, 我们重点关注最小的例外 Lie 群: G_2 . 为此, 我们首先来看 Clifford 代数 $\text{Cl}(V)$ 和旋量群 $\text{Spin}(V)$ 的基本观念. 我们将证明 G_2 可被实现为旋量群 Spin_7 的一个比较自然的子群.

2.1 Clifford 代数

Clifford 代数起源于对二次型的研究, 由 William Kingdon Clifford 在 1878 至 1882 年间引入. 在本节中, 若不单独说明, 我们用 V 表示一个有限维的实或复向量空间, 配有二次型 Q .

定义 2 (Clifford 代数). Clifford 代数 $\text{Cl}(V, Q)$ 定义为自由代数 $T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$ 的商

$$\text{Cl}(V, Q) = T(V)/I_Q,$$

其中 I_Q 为 $v^2 - Q(v)1, v \in V$ 在 $T(V)$ 中生成的理想. 诚然, 也可以用经典的“生成元, 关系”方法描述此代数. 若不引起歧义, 我们也简写为 $\text{Cl}(V)$ 或 $\text{Cl}(Q)$.

例子 1 (外代数).² 把 Q 取成恒为 0 的平凡二次型, 则此时 $\text{Cl}(V) = \Lambda(V)$ 即为 V 生成的外代数. 依摩登的术语, Clifford 代数可看作外代数的量子化.

例子 2 (\mathbb{C} 与 \mathbb{H}).³ 在实向量空间 \mathbb{R} 或复向量空间 \mathbb{C} 上给予二次型 $Q(v) = -v^2$, 相应得到的 Clifford 代数为

$$\text{Cl}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}, \text{Cl}(\mathbb{C}) = \mathbb{H}.$$

例子 3 (Dirac 方程). Dirac 方程是相对论量子力学的基本原理之一. 我们把相对论的基本原理

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

写成算符形式, 其中

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla,$$

得到所谓的 Klein-Gordon 方程

$$\hbar^2 \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi = m^2 c^2 \psi.$$

Paul Adrien Maurice Dirac⁴ 希望把这个方程开方. 形式上, 开方后的方程应该形如

$$i\hbar \left(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t} + \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \psi = mc\psi.$$

²似乎 Clifford 最初引进 Clifford 代数就受到 Hermann Günther Graßmann 在外代数方面工作的影响.

³四元数 \mathbb{H} 的构造主要归功于 William Rowan Hamilton, 因此英文里把 \mathbb{H} 称为 Hamiltonian.

⁴Dirac 被认为是 20 世纪最重要的物理学家之一. 他对早期量子力学和量子电动力学的发展作了重要的贡献. Sir Michael Atiyah 就特别推崇 Dirac. 但 Dirac 的性格也很怪异, Albert Einstein 就曾在一封给 Paul Ehrenfest 的信中抱怨 “I have trouble with Dirac. This balancing on the dizzying path between genius and madness is awful.”

平方后对比 Klein-Gordon 方程, 这些“系数” γ_μ 应该满足如下关系:

$$\gamma_0^2 = 1, \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1, \gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu, \mu \neq \nu.$$

考虑以 $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ 为基的 \mathbb{R}^4 , 配有二次型 Q 满足

$$Q(\gamma_0) = 1, Q(\gamma_1) = Q(\gamma_2) = Q(\gamma_3) = -1,$$

则相应的 Clifford 代数 $\text{Cl}(\mathbb{R}^4, Q)$ 满足这些系数 γ_μ 的要求.

Dirac 本人通过矩阵运算具体构造出一组满足要求的 γ_μ :

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

这些矩阵如今被称为 Dirac 矩阵, 可以从中看见 Pauli 自旋矩阵. 事实上, Pauli 矩阵也和 Clifford 代数有密切联系.

设 V 是实向量空间, Q 非退化, 则 Q 由它的标准型, 或者说符号 (p, q) 决定, 其中 p 是正惯性指数, q 是负惯性指数. 在这种情况下, 我们把相应的 Clifford 代数简记为 $\text{Cl}_{p,q}$. 前述 Dirac 方程对应的模型即为 $\text{Cl}_{1,3}$.

回到更代数的观察. 注意到 $T(V)$ 是分次代数, 而理想 I_Q 的生成元 $v^2 - Q(v)1$ 只含偶数次的元素, 因此有

命题 1 (\mathbb{Z}_2 分次). $\text{Cl}(V, Q)$ 具有自然的 \mathbb{Z}_2 -分次结构. 我们把偶数次元素构成的子代数记为 $\text{Cl}^0(V, Q)$, 而把奇数次元素构成的子代数记为 $\text{Cl}^1(V, Q)$. 上述论断即

$$\text{Cl}(V, Q) = \text{Cl}^0(V, Q) \oplus \text{Cl}^1(V, Q),$$

$$\text{Cl}^i(V, Q) \cdot \text{Cl}^j(V, Q) \subset \text{Cl}^{i+j}(V, Q),$$

其中指标按照 mod 2 处理.

在理论物理中, 也把具有 \mathbb{Z}_2 -分次的代数称为超代数, 这来自于超对称的代数描述.

此外, 我们有

命题 2. 若 (V, Q) 分解为 $V = V_1 \oplus V_2$, 并且该分解关于 Q 正交, 即对任何 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, Q(v_1 + v_2) = Q(v_1) + Q(v_2)$, 则

$$\text{Cl}(V, Q) \simeq \text{Cl}(V_1, Q) \otimes \text{Cl}(V_2, Q).$$

和一般的结合代数一样, 我们用 $(\text{Cl}(V, Q))^\times$ 表示 $\text{Cl}(V, Q)$ 中乘法可逆元构成的群. 很显然, 对 $v \in V$, 如果 $Q(v) \neq 0$, 则 $v \in (\text{Cl}(V, Q))^\times$.

2.2 旋量群

下面我们引入旋量群的概念.

定义 3 (旋量群). 称 $(\text{Cl}(V, Q))^\times$ 中由 $v \in V, Q(v) = \pm 1$ 生成的子群为一般旋量群, 记为 $\text{Pin}(V, Q)$. 称 $\text{Spin}(V, Q) := \text{Pin}(V, Q) \cap \text{Cl}^0(V, Q)$ 为旋量群.

例子 4. 在 $\text{Cl}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$ 的例子中, 即有 $\text{Pin}(\mathbb{R}) = \{\pm 1, \pm i\}, \text{Spin}(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$.

在接下来的理论中, 我们总假定二次型 Q 是非退化的. 依照前面的约定, 把 $\text{Cl}_{p,q}$ 对应的旋量群记为 $\text{Pin}_{p,q}, \text{Spin}_{p,q}$. 有时候我们还用 $\text{Pin}_n, \text{Spin}_n$ 指代 $\text{Pin}_{n,0}, \text{Spin}_{n,0}$.

$\text{Pin}_{p,q} \cap \mathbb{R}^{p+q}$ 作用于 \mathbb{R}^{p+q} : $x.v = Q(x)v$. 这个作用可以良定地延拓为 $\text{Pin}_{p,q}$ 在 \mathbb{R}^{p+q} 上的作用, 这也给出 $\text{Pin}_{p,q}$ 在 \mathbb{R}^{p+q} 上的表示. 事实上, 该作用还保持 \mathbb{R}^{p+q} 上的二次型 Q . 换句话说, 我们得到了同态

$$\text{Ad}: \text{Pin}_{p,q} \rightarrow \text{O}_{p,q}.$$

还能证明, 限制在 $\text{Spin}_{p,q}$ 上, 上述表示给出

$$\text{Ad}: \text{Spin}_{p,q} \rightarrow \text{SO}_{p,q}.$$

事实上, 我们还能够证明, 在 $(p, q) \neq (1, 1)$ 时, 有正合列

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \text{Pin}_{p,q} \rightarrow \text{O}_{p,q} \rightarrow 1,$$

$$1 \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow \text{Spin}_{p,q} \rightarrow \text{SO}_{p,q} \rightarrow 1.$$

在 $(p, q) = (n, 0)$ 时, 这即应和了几何学家所说的 Spin_n 是 SO_n 的 (万有) 二重覆叠. 这一部分都是比较几何的讨论, 可以参考 [LM16].

2.3 旋量表示

对旋量群 Spin_m 来说, 最重要的代数特征是所谓的旋量表示: 在奇数维时, 有一个不可约的旋量表示, 而在偶数维时, 有两个不可约的半旋量表示. 由于 $\text{Spin}_m \subset \text{Cl}_m^0$, 任何 Cl_m^0 的表示即给出一个 Spin_m 的表示. 我们注意到 Spin_m 是连通且单连通的 Lie 群 ($m \geq 3$), 因此它的表示论与其 Lie 代数 $\mathfrak{spin}(m) \simeq \mathfrak{so}(m)$ 没有区别, 可以按照 m 的奇偶性划入 B_n 类或 D_n 类.

定理 4 (旋量表示). 能够证明, $\text{Cl}(V, Q)$ 和 $\text{Cl}^0(V, Q)$ 作为代数都是半单的, 因此它们的表示都是完全可约的.

- 若 $m = 2n + 1$ 为奇数, 则 Cl_m 有一个不可约表示 S , 其复维数为 2^n .

考虑 B_n 类根系的标准构造:

$$\mathfrak{spin}(2n+1)^\mathbb{C} \simeq \mathfrak{so}(2n+1, \mathbb{C}) \simeq \{a \in \mathfrak{gl}(2n+1, \mathbb{C}) : a + B^{-1}a^T B = 0\} =: \mathfrak{g},$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

此时

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & z_n & & & \\ & & & -z_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -z_n \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \right\}$$

构成 \mathfrak{g} 的 Cartan 子代数.

令 x_i 是 \mathfrak{h} 上线性泛函,

$$x_i : \begin{pmatrix} z_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & z_n & & & \\ & & & -z_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -z_n \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \mapsto z_i,$$

则 x_1, \dots, x_n 构成 \mathfrak{h}^* 的一组基. 此时的根系

$$R = \{\pm x_i \pm x_j (i \neq j), \pm x_i\}.$$

则 S 作为 Spin_m 的表示具有权

$$\frac{1}{2}(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n).$$

- 若 $m = 2n$ 为偶数, 则 Cl_m 有两个不同构的不可约表示 S^+, S^- , 复维数均为 2^{n-1} .
考虑 D_n 类根系的标准构造:

$$\mathfrak{spin}(2n)^\mathbb{C} \simeq \mathfrak{so}(2n, \mathbb{C}) \simeq \{a \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{C}) : a + B^{-1}a^T B = 0\} =: \mathfrak{g},$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

此时

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & z_n & & \\ & & & -z_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -z_n \end{pmatrix} : z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \right\}$$

构成 \mathfrak{g} 的 Cartan 子代数.

令 x_i 是 \mathfrak{h} 上线性泛函,

$$x_i : \begin{pmatrix} z_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & z_n & & \\ & & & -z_1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -z_n \end{pmatrix} \mapsto z_i,$$

则 x_1, \dots, x_n 构成 \mathfrak{h}^* 的一组基. 此时的根系

$$R = \{\pm x_i \pm x_j (i \neq j)\}.$$

则 S^+ 作为 Spin_m 的表示具有权

$$\frac{1}{2}(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n),$$

其中有偶数个负号.

S^- 作为 Spin_m 的表示具有权

$$\frac{1}{2}(\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_n),$$

其中有奇数个负号.

这里我们没有对 S, S^+, S^- 加指标, 即 S_n 或 S_m . 这是方便并且有好处的.

证明. 固定 \mathbb{R}^m 的一组标准正交基 $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$. 首先考虑 Cl_m^0 的子群

$$E_0 = \left\{ \pm \prod_{j=1}^m e_j^{i_j} : i_j = 0 \text{ 或 } 1, \sum_{j=1}^m i_j \text{ 为偶数} \right\}.$$

为避免歧义, 我们用 ν 指代 $-1 \in E_0$. 注意到

$$\text{Cl}_m^0 = \frac{\mathbb{C}[E_0]}{\langle \nu + 1 \rangle},$$

因此要研究 Cl_m^0 的表示, 只要看 E_0 的表示中 ν 按照 -1 作用的那些. 注意 E_0 是有限群, 其群代数 $\mathbb{C}[E_0]$ 是半单的, 于是我们也证明了 Cl_m^0 是半单代数.

- 通过直接计算, 可以验证 E_0 的中心

$$\mathcal{Z}(E_0) = \begin{cases} \{\pm 1\} & , m = 2n + 1 \\ \{\pm 1, \pm \prod_{i=1}^{2n} e_i\} & , m = 2n \end{cases}.$$

- 由 Schur 引理, ν 在每个不可约表示上按照 1 或 -1 作用, 因为 $\nu^2 = 1$. 那些 ν 按照 1 作用的表示可看作 $E_0/\langle \nu \rangle$ 的表示, 其中 $E_0/\langle \nu \rangle$ 是一个 2^{m-1} 阶的 Abel 群. 于是, 这样的表示恰好有 2^{m-1} 个.
- 注意到 $E_0 \rightarrow E_0/\langle \nu \rangle$ 的核里恰好两个元素 $\nu, 1$, 因此 E_0 的每个共轭类里要么只有一个元素 $g, g \in \mathcal{Z}(E_0)$, 要么有两个元素, 即 $\{\pm g\}$. 根据上一目对 $\mathcal{Z}(E_0)$ 的计算, 我们知道

- 当 $m = 2n + 1$ 时, E_0 恰好比 $E_0/\langle \nu \rangle$ 多一个共轭类.
- 当 $m = 2n$ 时, E_0 恰好比 $E_0/\langle \nu \rangle$ 多两个共轭类.

注意到有限群的不可约表示和共轭类一一对应. 因此 ν 以 -1 作用的 E_0 的不可约表示恰好分别为 1 个或 2 个.

- 考虑 $F \subset E_0$ 是由 $e_1 e_2, e_3 e_4, \dots, e_{2n-1} e_{2n}$ 生成的子群. 这是一个 2^{n+1} 阶的 Abel 群. 于是

$$|E_0 : F| = \begin{cases} 2^n & , m = 2n + 1 \\ 2^{n-1} & , m = 2n \end{cases}.$$

考虑 W 是 F 的一个一维表示, 其中 ν 按照 -1 作用, $e_{2r-1} e_{2r}$ 按照 $i\varepsilon_r$ 作用, 其中 $\varepsilon_r = \pm 1$ 待定. 考虑诱导表示

$$\text{Ind}_F^{E_0}(W) = \mathbb{C}[E_0] \otimes_{\mathbb{C}[F]} W.$$

其维数即为 $|E_0 : F|$, 也就是我们希望的相应的旋量表示的维数.

– 当 $m = 2n + 1$ 时, $\text{Ind}_F^{E_0}(W)$ 有一组基

$$\prod_{i=1, i \text{ odd}}^{2n+1} e_i^{j_i},$$

且 $\sum_{i=1}^{2n+1} j_i$ 为偶数.

此时通过选取 ε_r 的符号, W 有 2^n 种选取方式. E_0/F 可迁地置换它们. 通过 $e_{2r}e_{2r+1}$ 的共轭作用, 我们可以改变 ε_r 的符号, 而不改变其他任何符号. 固定一个 \tilde{W} , 则每种可能的 W 的选取恰好在 $\text{Ind}_F^{E_0}(\tilde{W})$ 中出现一次. 于是我们得到了 E_0 的一个表示 $S = \text{Ind}_F^{E_0}(\tilde{W})$, 其在 1 处的特征标为 $\chi_S(1) = 2^n$, 在 ν 处的特征标为 $\chi_S(\nu) = -2^n$, 在其他地方的特征标均为 0. 可以算得

$$(\chi_S, \chi_S) = \frac{1}{2^m} (2^n \cdot 2^n + (-2^n) \cdot (-2^n)) = 1,$$

故 S 确实是不可约表示.

– 当 $m = 2n$ 时, $\text{Ind}_F^{E_0}(W)$ 有一组基

$$\prod_{i=1, i \text{ odd}}^{2n-1} e_i^{j_i},$$

且 $\sum_{i=1}^{2n-1} j_i$ 为偶数.

此时 W 同样有 2^n 种选取方式. 在 E_0/F 的作用下, 它们分裂为两个轨道: 一条轨道满足 $\prod \varepsilon_r = 1$, 另一条轨道满足 $\prod \varepsilon_r = -1$. 此时我们只能同时改变偶数个 ε_r 的符号: 通过 $e_{2r}e_{2s}$ ($r < s$) 的共轭作用, 同时改变了 ε_r 和 ε_s 的符号. 于是, 该诱导表示分裂为两个 E_0 的表示: 其中一个 (记为 S^+) 作为 F 的表示, 包含所有那些使 $\varepsilon = \prod \varepsilon_r = 1$ 的 W , 另一个 (记为 S^-) 作为 F 的表示, 包含所有那些使 $\varepsilon = \prod \varepsilon_r = -1$ 的 W . 可以发现其特征标在 1 处为 2^{n-1} , 在 ν 处为 -2^{n-1} , 在 $\prod_{i=1}^{2n} e_i$ 处为 $2^{n-1}i^n\varepsilon$, 在 $-\prod_{i=1}^{2n} e_i$ 处为 $-2^{n-1}i^n\varepsilon$, 在其它地方都是 0. 同样可以计算得

$$(\chi_{S^+}, \chi_{S^+}) = \frac{1}{2^m} (|2^{n-1}|^2 + |-2^{n-1}|^2 + |2^{n-1}i^n\varepsilon|^2 + |-2^{n-1}i^n\varepsilon|^2) = 1,$$

故 S^+, S^- 均为不可约表示, 并且由 $\chi_{S^+} \neq \chi_{S^-}$ 知这两个表示并不同构.

我们成功构造了 Cl_m^0 的旋量表示. 至于其作为 Spin_m 表示的权, 可以通过选取 Spin_m 的极大环面具体计算出来. \square

回顾证明历程 (例如考虑特征标), 我们实际上可以得到

命题 3 (旋量表示的对偶性). 我们考虑旋量表示的对偶表示.

- 当 $m = 2n + 1$ 时, Spin_m 的旋量表示 S 是自对偶的, 即作为 Spin_m 的表示, $S^* \simeq S$.

- 考虑 $m = 2n$.
 - 若 n 为偶数, 则 Spin_m 的半旋量表示 S^+, S^- 都是自对偶的, 即作为 Spin_m 的表示, $S^{+*} \simeq S^+, S^{-*} \simeq S^-$.
 - 若 n 为奇数, 则 Spin_m 的半旋量表示 S^+, S^- 互为对偶, 即作为 Spin_m 的表示, $S^{+*} \simeq S^-, S^{-*} \simeq S^+$.

更精细的观察给出旋量表示的实结构与辛结构.

定理 5 (实结构与辛结构, [Del99]). 一个复表示可能是实的, 也可能具有辛结构 (即左 \mathbb{H} -模结构).

- 若 $m \equiv 0 \pmod{8}$, 则 Spin_m 的表示 S^+, S^- 都是实的.
- 若 $m \equiv 1, 7 \pmod{8}$, 则 Spin_m 的表示 S 是实的.
- 若 $m \equiv 4 \pmod{8}$, 则 Spin_m 的表示 S^+, S^- 都是辛的.
- 若 $m \equiv 3, 5 \pmod{8}$, 则 Spin_m 的表示 S 是辛的.

表示论里关心所谓的分歧律.

定理 6 (分歧律). 根据命题 2, $\text{Cl}_p \otimes \text{Cl}_q \simeq \text{Cl}_{p+q}$. 这给出含入映射 $\text{Spin}_m \rightarrow \text{Spin}_{m+1}$ 以及 $\text{Spin}_p \times \text{Spin}_q \rightarrow \text{Spin}_{p+q}$.

- 在含入 $\text{Spin}_{2n} \rightarrow \text{Spin}_{2n+1}$ 之下, Spin_{2n+1} 的表示也可以看作 Spin_{2n} 的表示. 这时, S 分解为 $S^+ \oplus S^-$.
- 在含入 $\text{Spin}_{2n+1} \rightarrow \text{Spin}_{2n+2}$ 之下, Spin_{2n+2} 的表示也可以看作 Spin_{2n+1} 的表示. 这时, S^+ 和 S^- 均同构于 S .

我们可以用一张简明的图表示上述结论:

$$\text{Spin}_{2n} \longrightarrow \text{Spin}_{2n+1} \longrightarrow \text{Spin}_{2n+2}$$

$$S^+ \oplus S^- \longleftarrow S \longleftarrow S^+, S^-$$

沿用这种表示方法, 我们有

•

$$\text{Spin}_{2r} \times \text{Spin}_{2s} \longrightarrow \text{Spin}_{2r+2s}$$

$$(S^+ \otimes S^+) \oplus (S^- \otimes S^-) \longleftarrow S^+$$

$$(S^+ \otimes S^-) \oplus (S^- \otimes S^+) \longleftarrow S^-$$

•

$$\mathrm{Spin}_{2r} \times \mathrm{Spin}_{2s+1} \longrightarrow \mathrm{Spin}_{2r+2s+1}$$

$$(S^+ \otimes S) \oplus (S^- \otimes S) \longleftarrow S$$

•

$$\mathrm{Spin}_{2r+1} \times \mathrm{Spin}_{2s+1} \longrightarrow \mathrm{Spin}_{2r+2s+2}$$

$$S \otimes S \longleftarrow S^+$$

$$S \otimes S \longleftarrow S^-$$

这些分歧律可以通过计算表示的权或者特征得到.

2.4 G_2 与旋量

下面让我们回到本文的正题: 我们即将构造例外 Lie 群 G_2 .

定理 7 (G_2 的紧形式). 考虑 Spin_7 . 根据定理 5, Spin_7 的旋量表示 S 可看作某个实表示 $S_{\mathbb{R}}$ 的复化, 其中 $\dim_{\mathbb{R}} S_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{C}} S = 8$. 考虑单位球 $\mathbb{S}^7 \subset S_{\mathbb{R}}$, $z \in \mathbb{S}^7$, 令 G 为 Spin_7 作用于 $S_{\mathbb{R}}$ 时 z 的稳定子群, 则 G 是一个紧的, 连通且单连通的 Lie 群. G 的实维数为 14, 对应 G_2 根系.

证明. 我们分步骤看一下证明的梗概.

- 首先观察到有 Lie 群同构

$$\mathrm{Spin}_5 \simeq \mathrm{Sp}(2), \mathrm{Spin}_6 \simeq \mathrm{SU}(4).$$

这个观察还是来自旋量表示. 以前者为例, 考虑 Spin_5 的旋量表示 S , S 的复维数是 4. 根据定理 5, S 还具有 \mathbb{H} -左模结构, 并且能配有一个 Spin_5 -不变的内积. 这即给出同态 $\mathrm{Spin}_5 \rightarrow \mathrm{Sp}(2)$. 利用旋量表示的性质可知这是单射. 另一方面, 通过比较维数可知相应的 Lie 代数同态 $\mathfrak{spin}(5) \rightarrow \mathfrak{sp}(2)$ 是同构, 因此 $\mathrm{Spin}_5 \simeq \mathrm{Sp}(2)$. 这是由于 $\mathrm{Sp}(2)$ 是连通的.

类似利用 Spin_6 的旋量表示 S^+ , 可以得到同构 $\mathrm{Spin}_6 \simeq \mathrm{SU}(4)$.

- Spin_5 可迁地作用于 $\mathbb{S}^7 \subset S$. 这是由于 $\mathrm{Sp}(2)$ 可迁地作用于 $\mathbb{S}^7 \subset \mathbb{H}^2$.
- 注意到 Spin_6 有在 \mathbb{R}^6 和 S^+ 上的作用. 我们有 Spin_6 可迁地作用于

$$\{(x, z) : x \in \mathbb{S}^5 \subset \mathbb{R}^6, z \in \mathbb{S}^7 \subset S^+\}.$$

此外, 恰当选取 $z \in \mathbb{S}^7 \subset S^+$, 可使 z 的稳定子群为 $\mathrm{SU}(3) \subset \mathrm{Spin}_6$, 其中 \subset 是如下映射的提升:

$$\mathrm{SU}(3) \hookrightarrow \mathrm{U}(3) \hookrightarrow \mathrm{SO}(6).$$

事实上, Spin_6 覆盖 $\mathrm{SO}(6)$, 而 $\mathrm{SO}(6)$ 可迁地作用于 \mathbb{S}^5 . 对 $x \in \mathbb{S}^5$, x 对应的 Spin_6 的稳定子群在差一个共轭的意义下就是 Spin_5 . Spin_6 -模 S^+ 限制为 Spin_5 -模即为 S . 根据上一目, 我们知道 Spin_6 在上述集合上的作用确实是可迁的.

注意到作为 Spin_6 的表示, S^+ 的权为

$$\left\{ \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3), \frac{1}{2}(-x_1 + x_2 - x_3), \frac{1}{2}(-x_1 - x_2 + x_3) \right\}.$$

限制在 $\mathrm{SU}(3) \subset \mathrm{Spin}_6$ 上, 得到的 $\mathrm{SU}(3)$ 表示的权为

$$\{0, x_1, x_2, x_3\}.$$

这是因为作为 $\mathrm{SU}(3)$ 的表示的权, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. 根据 $\mathrm{SU}(3)$ 的有限维表示的分类, 可知作为 $\mathrm{SU}(3)$ 的表示,

$$S^+ \simeq \mathbb{C}_{\mathrm{triv}} \oplus \mathbb{C}_{\mathrm{std}}^3,$$

其中 $\mathbb{C}_{\mathrm{triv}}$ 为平凡表示, $\mathbb{C}_{\mathrm{std}}^3$ 为标准表示 $\mathrm{SU}(3) \hookrightarrow \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$. 因此, $\mathrm{SU}(3)$ 固定住 $\mathbb{S}^7 \subset S^+$ 上的一些点 (事实上恰好是一个 \mathbb{S}^1). 对这些点, 其对应的稳定子群不可能更大了, 因为在 $\mathrm{SU}(4) \simeq \mathrm{Spin}_6$ 中, 固定 \mathbb{C}^4 中一个单位向量的稳定子群即为 $\mathrm{SU}(3)$.

- 我们断言, Spin_7 可迁地作用于下述集合:

$$\{(x, y, z) : x, y \in \mathbb{S}^6 \subset \mathbb{R}^7, x \perp y, z \in \mathbb{S}^7 \subset S_{\mathbb{R}}\}.$$

事实上, Spin_7 覆盖 $\mathrm{SO}(7)$, 而 $\mathrm{SO}(7)$ 可迁地作用于 \mathbb{S}^6 . 对 $y \in \mathbb{S}^6$, y 对应的 Spin_7 的稳定子群在差一个共轭的意义下就是 Spin_6 . Spin_7 -模 S 限制为 Spin_6 -模即为 $S^+ \oplus S^-$. 另一方面, Spin_7 -模 $S = S_{\mathbb{R}} \oplus iS_{\mathbb{R}}$, 因此不妨设作为 Spin_6 -模, $S_{\mathbb{R}} = S^+$. 根据上一目的结论知该断言为真.

- 图穷匕见. 我们来验证定理.

易见, G 是 Spin_7 的闭子群, 并且由于 Spin_7 可迁地作用于 $\mathbb{S}^7 \subset S_{\mathbb{R}}$, 我们有

$$\dim_{\mathbb{R}} G = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Spin}_7 - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{S}^7 = 21 - 7 = 14.$$

取 $y = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^6 \subset \mathbb{R}^7$, $H \subset G$ 为 y 对应的 G 的稳定子群, 则 H 即为 Spin_6 的固定 z 的子群. 由上一目, 我们能够选取 $H = \mathrm{SU}(3) \subset \mathrm{Spin}_6$. 我们有纤维化

$$H \rightarrow G \rightarrow G/H,$$

其中 $H = \mathrm{SU}(3)$ 和 $G/H = \mathbb{S}^6$ 都连通且单连通. 因此由纤维化的长正合列

$$\cdots \rightarrow \pi_{i+1}(G/H) \rightarrow \pi_i(H) \rightarrow \pi_i(G) \rightarrow \pi_i(G/H) \rightarrow \cdots$$

知 G 连通且单连通.

最后我们确定 G 的根. 我们知道 $H = \mathrm{SU}(3)$ 通过伴随作用作用于 $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(3)$. 记 \mathfrak{g} 为 G 的 Lie 代数. 我们希望知道 H 如何作用于 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h} = \mathbb{S}^6$ 在 y 处的切空间. 为此, 只需观察 Spin_6 在 $\mathfrak{spin}(7)/\mathfrak{spin}(6)$ 上的作用, 因为 $\mathbb{S}^6 = \mathrm{Spin}_7/\mathrm{Spin}_6$. 该作用的权为 $\{\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3\}$. 记 T 为 $\mathrm{SU}(3)$ 的极大环面, 则 T 在 \mathfrak{g} 上作用的权为

$$\{0, 0, \pm(x_1 - x_2), \pm(x_2 - x_3), \pm(x_3 - x_1), \pm x_1, \pm x_2, \pm x_3\}.$$

因此 T 也是 G 的极大环面, 并且 G 的根系是 G_2 型的.

我们得到了 G_2 的紧形式. □

关于紧 Lie 群的表示论, Hermann Klaus Hugo Weyl 曾得到如下结果:

定理 8 (Weyl). 设 G 是紧的, 连通且单连通的 Lie 群. 则 G 的表示环 (G 的有限维表示范畴的 Grothendieck 群) 是一个多项式环, 并且其生成元和 G 的 Dynkin 图里的结点一一对应. 对正单根 θ_i , 关系式 $(\phi, \theta_i) > 0, (\phi, \theta_j) = 0, j \neq i$ 定义了基本 Weyl 室的一堵墙面. 沿着这条墙面走到第一个支配整权, 并取相应的表示 ρ_i . 这些 ρ_i 即为该多项式环的生成元.

在上述构造 G_2 的紧形式的过程中, 我们从两个表示出发: 一个是 $G_2 \subset \mathrm{Spin}_7$ 在 \mathbb{R}^7 上的表示, 还有一个是伴随表示. 这两个表示就是定理 8 中描述的 G_2 的表示环的生成元.

我们构造 G_2 的方法还可以推广到所有例外 Lie 群. 为了构造相应的例外 Lie 群 G , 我们选取 G 的子群 H , 使得 H 的秩极大, 然后通过描述 G/H 得到 G 的信息. 更多的讨论见 [Ada96]. 我们总结为下表

H	rank	dim	$\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 作为 H 的表示	dim	G	rank	dim
Spin_9	4	36	S	16	F_4	4	52
$\mathrm{Spin}_{10} \times \mathrm{U}(1)/\mathbb{Z}_4$	6	46	$(S^+ \otimes \xi^3) \oplus (S^- \otimes \xi^{-3})$	32	E_6	6	78
$\mathrm{Spin}_{12} \times \mathrm{Sp}(1)/\mathbb{Z}_2$	7	69	$S^+ \otimes \lambda^1$	64	E_7	7	133
$\mathrm{Spin}_{16}/\mathbb{Z}_2$	8	120	S^+	128	E_8	8	248

其中, 在 $\mathrm{Spin}_{16}/\mathbb{Z}_2$ 中, \mathbb{Z}_2 由 $\prod_{i=1}^{16} e_i$ 生成, 其在 S^+ 按照 $i^8 = 1$ 作用.

在 $\mathrm{Spin}_{12} \times \mathrm{Sp}(1)/\mathbb{Z}_2$ 中, \mathbb{Z}_2 由 $(\prod_{i=1}^{12} e_i, -1)$ 生成, 其在 $S^+ \otimes \lambda^1$ 上按照 $i^6 \cdot (-1) = 1$ 作用, 其中 λ^1 是 $\mathrm{Sp}(1)$ 的标准表示.

在 $\mathrm{Spin}_{10} \times \mathrm{U}(1)/\mathbb{Z}_4$ 中, \mathbb{Z}_4 由 $(\prod_{j=1}^{10} e_j, i)$ 生成, 其在 $(S^+ \otimes \xi^3) \oplus (S^- \otimes \xi^{-3})$ 上按照 $i^5 \otimes i^3$ 作用, 其中 ξ 是 $\mathrm{U}(1) = \mathbb{S}^1$ 的单位表示.

3 朝花夕拾: 八元数

我们用八元数重现上一节中对 G_2 的构造. 具体说来, 我们把 G_2 实现为八元数 \mathbb{O} 的自同构群 $\text{Aut}(\mathbb{O})$.

3.1 八元数

在此之前, 须先回顾何为八元数. 八元数最早由 John Thomas Graves 于 1843 年发现, 他在当年 12 月 26 日给 Hamilton 的一封信中提及了他的发现, 称其为 “octaves”. 但他在 1845 年才发表自己的工作 [Gra45], 略晚于 Arthur Cayley [Cay45]⁵. 需要注意的是, 在 18 至 19 世纪阶段, 许多重要的工作都来自数学家之间的信件. 即使后来有了更方便的通信工具, 也有一些数学家保持了写信的习惯, 如 André Weil, Robert Phelan Langlands 等.

我们模仿 $\mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{C}$ 及 $\mathbb{C} \rightsquigarrow \mathbb{H}$ 的过程给出 $\mathbb{H} \rightsquigarrow \mathbb{O}$ 的构造. 这个构造方法被称为 **Cayley–Dickson 加倍**.

定义 4 (Cayley–Dickson 加倍). 复数 \mathbb{C} 可以理解为实数偶, 按分量作加法, 而乘法定义为

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

四元数 \mathbb{H} 可以理解为复数偶, 按分量作加法, 而乘法定义为

$$(z_1, w_1)(z_2, w_2) = (z_1z_2 - w_1\bar{w}_2, z_1w_2 + w_1\bar{z}_2).$$

类似地, 八元数 \mathbb{O} 可以理解为四元数偶, 按分量作加法, 而乘法定义为

$$(p_1, q_1)(p_2, q_2) = (p_1p_2 - \bar{q}_2q_1, q_2p_1 + q_1\bar{p}_2).$$

上述操作被称为 Cayley–Dickson⁶加倍.

Cayley–Dickson 加倍给出

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$$

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}j$$

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l$$

其中 l 是一个新的“虚数单位”, 即 $l^2 = -1$. 其和 i, j, k 反交换. \mathbb{H} 的 \mathbb{R} -基 $\{1, i, j, k\}$ 给出了 $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}l$ 的基 $\{1, i, j, k, l, il, jl, kl\}$. 其中后 7 个元素的平方都是 -1 .

我们可以列出八元数 \mathbb{O} 的乘法表:

⁵今天也有人把八元数 \mathbb{O} 称作 Cayley numbers.

⁶Dickson 即 Leonard Eugene Dickson, 他是美国最早的抽象代数的研究者之一, 其关于 Cayley–Dickson 加倍的工作见 [Dic19].

	$e_0 = 1$	$e_1 = i$	$e_2 = j$	$e_3 = k$	$e_4 = l$	$e_5 = il$	$e_6 = jl$	$e_7 = kl$
$e_0 = 1$	1	i	j	k	l	il	jl	kl
$e_1 = i$	i	-1	k	$-j$	il	$-l$	kl	$-jl$
$e_2 = j$	j	$-k$	-1	i	jl	$-kl$	$-l$	il
$e_3 = k$	k	j	$-i$	-1	kl	jl	$-il$	$-l$
$e_4 = l$	l	$-il$	$-jl$	$-kl$	-1	i	j	k
$e_5 = il$	il	l	$-kl$	jl	$-i$	-1	k	$-j$
$e_6 = jl$	jl	kl	l	$-il$	$-j$	$-k$	-1	i
$e_7 = kl$	kl	$-jl$	il	l	$-k$	$-j$	$-i$	-1

其有一种更直观的表达方式, 即画在 Fano 平面⁷上.

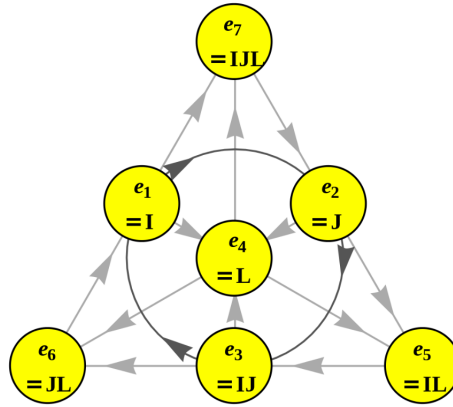


图 8: Multiplication table of the unit octonions summarized by the Fano plane.⁸

其中, 每一条带有定向的“直线” $a \rightarrow b \rightarrow c$ 表示 $a \cdot b = c, b \cdot a = -c$.

可以看见, \mathbb{O} 并非结合的, 但仍然有一些良好的性质. 例如, 像 \mathbb{C}, \mathbb{H} 一样, 我们仍然有共轭以及范数的概念:

定义 5 (\mathbb{O} 中的共轭). 对 $x = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k + x_4 l + x_5 il + x_6 jl + x_7 kl$, 定义其共轭为

$$\bar{x} = x_0 1 - x_1 i - x_2 j - x_3 k - x_4 l - x_5 il - x_6 jl - x_7 kl.$$

定义 6 (\mathbb{O} 中的范数). 对 $x \in \mathbb{O}$, 定义其范数为 $\|x\| = \sqrt{\bar{x}x}$. 可以验证, 这个定义和 \mathbb{R}^8 上的标准范数一致, 并且 $\|xy\| = \|x\|\|y\|$.

⁷Fano 平面是有限几何的重要例子, 由意大利数学家 Gino Fano 发现. 这是最小的射影平面: 其有 7 条线与 7 个点, 每条线上有 3 个点, 而任意 3 个点也确定一条线. 这个组合的构造也可以用线性代数得到: 它可以被视为二元域 \mathbb{F}_2 上的射影空间. 在组合数学中, 有一个重要的分支被称为区组设计. Fano 平面是最小的对称区组设计.

⁸By Jgmoxness - Own work, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=25030512>

上述表明 \mathbb{O} 是一个 \mathbb{R} -赋范可除代数, 即带有一个正定的二次型 $N(x) = \bar{x}x$ 且 $N(xy) = N(x)N(y)$. Adolf Hurwitz 证明了有限维的 \mathbb{R} -赋范可除代数一定同构于 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 之一 [Hur63]. 后来, Michel Kervaire 和 John Milnor 独立地运用深刻的代数拓扑工具 (K -理论) 证明了有限维 \mathbb{R} -可除代数也只有上述四类.

称 $\Phi: \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$ 是 \mathbb{O} 的一个自同构, 如果 Φ 是 \mathbb{R} -线性同构, 并且 $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$. 记 \mathbb{O} 的自同构群为 $\text{Aut}(\mathbb{O})$. 本节的主要定理为

3.2 G_2 与八元数, 三隅对称性

定理 9 (G_2 的紧形式的另一种构造). $\text{Aut}(\mathbb{O})$ 是 G_2 的紧形式.

推论 1 (\mathfrak{g}_2 Lie 代数). 对域 \mathbb{k} 上的不一定结合的代数 A , 考虑其微分

$$\text{der}(A) = \{\delta \in \text{End}_{\mathbb{k}}(A) : \delta(ab) = \delta(a)b + a\delta(b), \forall a, b \in A\}.$$

对应于 G_2 根系的半单 Lie 代数 \mathfrak{g}_2 可被实现为

$$\mathfrak{g}_2 = \text{der}(\mathbb{O}).$$

我们首先来看一下 $\text{Aut}(\mathbb{O})$ 的维数. 我们观察到, 对 \mathbb{O} 中任意一个满足 $e_1^2 = -1$ 的元素 e_1 , 其在 \mathbb{O} 中生成一个同构于 \mathbb{C} 的子代数. 若有 e_2 也满足 $e_2^2 = -1$ 并且和 e_1 反交换, 即 $e_1e_2 = -e_2e_1$, 则 e_1, e_2 在 \mathbb{O} 中生成一个同构于 \mathbb{H} 的子代数. 最后, 若还有 e_3 满足 $e_3^2 = -1$ 并且和 e_1, e_2, e_1e_2 反交换, 则 e_1, e_2, e_3 生成整个 \mathbb{O} . 我们称这样的 (e_1, e_2, e_3) 为一个基本三元组. 给定一个基本三元组 (e_1, e_2, e_3) 后, 存在唯一的方式定义 e_4, e_5, e_6, e_7 使得前述乘法表成立.

很显然, \mathbb{O} 的自同构讲一个基本三元组映成一个基本三元组. 反之, 任给两个基本三元组 $(e_1, e_2, e_3), (e'_1, e'_2, e'_3)$, 存在唯一的 \mathbb{O} 的自同构将 (e_1, e_2, e_3) 映成 (e'_1, e'_2, e'_3) . 这给了我们一个刻画 $\text{Aut}(\mathbb{O})$ 的好办法.

几何地来想, 一个基本三元组无非是 3 个“单位虚数”, 并且其中任何一个总是垂直于另外两个元素生成的子代数. 因此, 一个 \mathbb{O} 的自同构可以将 e_1 映为单位虚数构造的球面 \mathbb{S}^6 上任意一点 e'_1 , 再将 e_2 映为和 e'_1 垂直的单位虚数构成的球面 \mathbb{S}^5 上任意一点 e'_2 , 最后将 e_3 映为和 $e'_1, e'_2, e'_1e'_2$ 垂直的单位虚数构成的球面 \mathbb{S}^3 上任意一点 e'_3 . 因此

$$\dim_{\mathbb{R}} \text{Aut}(\mathbb{O}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{S}^6 + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{S}^5 + \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{S}^3 = 6 + 5 + 3 = 14.$$

这和我们之前的计算相符.

下面我们逐步来证明定理 9. 我们的办法是将其化归为定理 7. 这其中, Spin_8 的三隅对称性发挥了重要的作用.

定义 7 (三隅对称性). 我们回顾线性代数里的重要概念: 对偶. 两个向量空间 V_1, V_2 之间的一个对偶, 意指一个双线性映射

$$f: V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R},$$

使得相应诱导出的

$$V_1 \rightarrow V_2^*, V_2 \rightarrow V_1^*$$

都是单射. 这是所谓的非退化条件.

类似地, 三个向量空间 V_1, V_2, V_3 之间的一个三隅对称性⁹, 意指一个非退化的三线性映射

$$t: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

这里非退化指任给 $0 \neq v_1 \in V_1, 0 \neq v_2 \in V_2$, 存在 $v_3 \in V_3$ 使得 $t(v_1, v_2, v_3) \neq 0$, 以及对称的另两组条件.

三隅对称性看起来比对偶罕见得多. 事实上, 三隅对称性和代数中的乘法结构是密不可分的. 给定一个三隅对称性

$$t: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

通过对偶, 我们有双线性映射

$$m: V_1 \times V_2 \rightarrow V_3^*, (v_1, v_2) \mapsto t(v_1, v_2, \cdot).$$

我们把这个双线性映射称为“乘法”. 由三隅对称性的非退化条件, 通过 V_1 中某个非零元素的左乘, V_2 与 V_3^* 等同起来; 通过 V_2 中某个非零元素的右乘, V_1 与 V_3^* 等同起来. 因此如果选定 $0 \neq e_1 \in V_1, 0 \neq e_2 \in V_2$, 我们可以将 V_1, V_2, V_3^* 等同为同一个向量空间 V . 这时三个向量 $e_1 \in V_1, e_2 \in V_2, e_1 e_2 = m(e_1, e_2) \in V_3^*$ 都被等同为一个 $e \in V$. 因此我们得到了一个真正的乘法

$$m: V \times V \rightarrow V,$$

e 是这个乘法的单位元. 由于非零元素的左乘或右乘诱导了 V 的自同构, V 还是一个可除代数.

反之, 也很容易通过可除代数构造出相应的三隅对称性.

先前, 我们通过 Cayley–Dickson 加倍的方法构造出可除代数 \mathbb{O} . 能否通过三隅对称性构造之呢? 答案是可以的, 我们要利用 Spin_8 的半旋量表示.

定理 10 (Spin_8 的三隅对称性). 记 $\lambda = \mathbb{R}^8$ 为 Spin_8 的标准表示, 则有三隅对称性

$$t_8: \lambda \times S^+ \times S^- \rightarrow \mathbb{R}.$$

按照前面所述操作, 这个三隅对称性给出可除代数 \mathbb{O} .

证明. 我们只需要给出乘法

$$m_8: \lambda \times S^+ \rightarrow S^{-*}.$$

⁹英文里对偶指 duality, 三隅对称性指 triality. 这个翻译未必是标准的, 我们参考了[香蕉空间](#)的翻译.

根据命题 3, $S^{-*} \simeq S^-$, 因此只要给出乘法

$$m_8: \lambda \times S^+ \rightarrow S^-.$$

关键的观察是 Spin_8 所在的 Clifford 代数恰好就是 $\text{Cl}(\lambda)$. 因此, 固定 λ 的标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, 通过左乘即作用在 S^+ 上, 得到 S^- . (回忆定理 4 中半旋量表示的构造: 其是某种特殊的诱导表示分裂而来.) \square

我们注意到 Spin_8 对应 D_4 根系, 其 Dynkin 图为

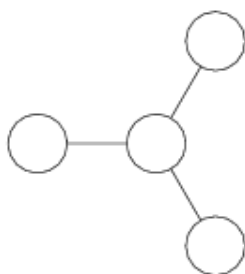


图 9: Dynkin diagram of D_4 .

其中, 按照最高权表示进行分类, 中心点对应伴随表示, 而外围三点分别对应 λ, S^+, S^- . 相应的 Dynkin 图的外自同构群为置换群 \mathfrak{S}_3 . 而当 $n \geq 5$ 时, D_n 的 Dynkin 图的外自同构群就都是置换群 \mathfrak{S}_2 . 这某种意义上解释了为什么只有 Spin_8 能得到相应的三隅对称性: \mathfrak{S}_3 置换 λ, S^+, S^- .

一些题外话. 在粒子物理的标准模型中, 除了希格斯玻色子外的所有粒子都要么按照矢量变换, 要么按照旋量变换. 按照矢量变换的粒子被称为规范玻色子, 它们承载基本模型里的力. 按照旋量变换的粒子被称为费米子, 它们对应物质的基本形式, 如夸克和轻子. 物质和力的相互作用, 例如电子的湮灭, 即被一个含有两个旋量, 一个矢量的三线型描述. 物理学家用费曼图描述该过程:

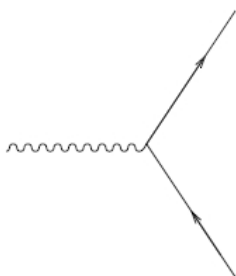


图 10: A Feynman diagram

其中直线表示旋量, 波浪线表示矢量. 上图即为 Spin_8 产生的三隅对称性.

我们已经把 \mathbb{O} 和 Spin_8 产生的三隅对称性等同起来. 为了研究 \mathbb{O} 的自同构, 我们需要研究相应的三隅对称性的自同构.

定义 8 (赋范三隅对称性). 若 V_1, V_2, V_3 都是内积空间, 则

$$t: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

是一个赋范三隅对称性, 如果它是一个三隅对称性, 并且对任何 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_3 \in V_3$, 有

$$|t(v_1, v_2, v_3)| \leq \|v_1\|_1 \|v_2\|_2 \|v_3\|_3.$$

定义 9 (赋范三隅对称性的自同构). 设 V_1, V_2, V_3 都是内积空间,

$$t: V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow \mathbb{R}$$

是一个赋范三隅对称性. 该系统的一个自同构, 意指一个三元组 (f_1, f_2, f_3) , 其中

$$f_i: V_i \rightarrow V_i$$

为保距线性变换, 并且对任何 $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_3 \in V_3$, 有

$$t(f_1(v_1), f_2(v_2), f_3(v_3)) = t(v_1, v_2, v_3).$$

很容易观察到, 赋范三隅对称性 t 给出赋范可除代数 A , 并且选定了单位向量 $e_1 \in V_1, e_2 \in V_2$ 后,

$$\text{Aut}(A) \simeq \{(f_1, f_2, f_3) \in \text{Aut}(t) : f_1(e_1) = e_1, f_2(e_2) = e_2\}.$$

命题 4. 回忆定理 10 中的三隅对称性

$$t_8: \lambda \times S^+ \times S^- \rightarrow \mathbb{R},$$

我们有 $\text{Aut}(t_8) \simeq \text{Spin}_8$.

证明. 追溯前述三隅对称性的构造. 对任意 $g \in \text{Spin}_8$, 存在唯一的 $g_+, g_- \in \text{Spin}_8$ 使得对任何 $v_1 \in \lambda, v_2 \in S^+, v_3 \in S^-$, 有

$$t(g(v_1), g_+(v_2), g_-(v_3)) = t(v_1, v_2, v_3).$$

由此可知. □

现在我们终于来到定理 9 的证明.

证明. 分别在 λ 和 S^+ 中固定一个单位向量. 根据前述讨论, $\text{Aut}(\mathbb{O})$ 等同于 Spin_8 中固定这两个单位向量的稳定子群. 注意到 Spin_8 在标准作用下固定一个单位向量的子群即为 Spin_7 , 而由分歧律, S^+ 作为 Spin_7 的表示即为 S . 因此由定理 7 知结论成立. □

4 暂时的顶峰: Freudenthal–Tits 魔方

在上一节里, 我们已经看到八元数 \mathbb{O} 和例外 Lie 群, 例外 Lie 代数密切相关. 一般来说, 所谓经典群都来自 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 的几何学. 例如 $O(n), U(n), Sp(n)$ 分别为 $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{H}^n$ 上保距线性变换构成的群, 并且有

$$\text{Isom}(\mathbb{RP}^n) \simeq O(n+1)/O(1),$$

$$\text{Isom}(\mathbb{CP}^n) \simeq U(n+1)/U(1),$$

$$\text{Isom}(\mathbb{HP}^n) \simeq Sp(n+1)/\{\pm 1\}.$$

这里 $\text{Isom}(X)$ 指 Riemann 流形 X 的等距自同构群.

很自然的, 大家会想: 能否定义一些八元数 \mathbb{O} 的几何空间, 例如 \mathbb{OP}^n , 然后用其自同构群的子群 (例如等距自同构群) 生成例外 Lie 群. 然而, 困难之处在于通常的射影空间 $\mathbb{KP}^n, \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 的定义对 $\mathbb{K} = \mathbb{O}$ 失效了: \mathbb{O} 不是结合的代数.

数学物理学家 Ernst Pascual Jordan 定义了所谓的 Jordan 代数, 并考虑了某种特殊的 Jordan 代数 (Albert 代数) $H_3(\mathbb{O})$. 1949 年, 他藉由此定义了 \mathbb{OP}^2 , 即所谓的八元数射影平面¹⁰. 一年后, Armand Borel [Bor50] 证明了 F_4 是某个 16 维射影平面的等距自同构群, 该流形实际上就是 \mathbb{OP}^2 . 同一年, Claude Chevalley 和 Richard Schafer [CS50] 证明了

$$F_4 = \text{Aut}(H_3(\mathbb{O})),$$

于是相应地有

$$\mathfrak{f}_4 = \mathfrak{der}(H_3(\mathbb{O})).$$

Hans Freudenthal [Fre54] 和 Jacques Tits [Tit66] 的系列工作将这方面的工作 (即利用八元数 \mathbb{O} 构造例外 Lie 群和例外 Lie 代数) 推向顶峰. 他们的工作是独立的, 方法也并不相同. 粗略来说, 他们有一套算法, 当你输入一个 $A \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ 和一个 $B \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$, 就能得到一个相应的 Lie 代数. 总结为下表 (称为 Freudenthal–Tits 魔方)

$A \backslash B$	\mathbb{R}	\mathbb{C}	\mathbb{H}	\mathbb{O}
\mathbb{R}	A_1	A_2	C_3	F_4
\mathbb{C}	A_2	$A_2 \times A_2$	A_5	E_6
\mathbb{H}	C_3	A_5	D_6	E_7
\mathbb{O}	F_4	E_6	E_7	E_8

Freudenthal–Tits 魔方的神奇之处不仅在于其能构造出所有例外 Lie 代数, 而且在于其是对称的: 但在稍后展示的构造过程中完全不能体现 A, B 有对称性. Sir Michael Francis Atiyah 曾提出或许可以用 Freudenthal–Tits 魔方解释 Arf–Kervaire 不变量问题.

¹⁰ \mathbb{OP}^2 也被称为 Cayley 平面, 用来致敬八元数理论的先驱 Arthur Cayley.

4.1 Jordan 代数

在解释 Freudenthal–Tits 魔方的构造之前, 我们要先引入 Jordan 代数的概念. 这也是一种不结合的代数.

定义 10 (Jordan 代数). 一个 \mathbb{R} -上的不一定结合的代数 A 被称为一个 Jordan 代数, 如果其乘法满足对任何 $x, y \in A$,

- $xy = yx$,
- $(xy)(xx) = x(y(xx))$.

该 Jordan 代数被称为形式实的, 如果

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0.$$

定义 Jordan 代数的动机来自早期的量子力学. 在早期量子力学的发展中, 哥本哈根学派¹¹将物理上的可观测量诠释为数学上 Hilbert 空间上的自伴算子. 这个定义在加法和数乘下都表现良好, 但在做矩阵乘法的时候会出现怪异的一点: 尽管 A, B 都是自伴算子, 它们的乘积 AB 未必是个自伴算子. 事实上, 泛函分析里证明了, AB 仍然是自伴算子当且仅当 $AB = BA$. 这对于物理学家来说是很怪异的, 因为这意味着“实在”并且自然出现的矩阵 AB 并不对应一个可观测的物理量.

经过一番尝试, 数学物理学家 Ernst Pascual Jordan 发现我们应该修改乘法的定义为

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

很显然, 自伴算子对运算 \circ 封闭. 同时, Jordan 发现了一个恒等式 (也被称为 Jordan 恒等式)

$$(x \circ y) \circ (x \circ x) = x \circ (y \circ (x \circ x)).$$

加上显然的关系

$$x \circ y = y \circ x,$$

这便是 Jordan 定义以其名字命名的代数的动机. Jordan 希望了解清楚这种代数结构, 以便物理上更好的认识可观测量.

定义 11 (特殊/例外 Jordan 代数). 很显然, 对任何 \mathbb{R} -结合代数 A , 定义

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$$

给出 A 上的 Jordan 代数结构. 为避免歧义, 我们用 A_J 表示此 Jordan 代数. 一个 Jordan 代数 \mathcal{J} 被称为特殊的, 如果其是某个 A_J 的 Jordan 子代数. 若不然, 则称其为例外的.

¹¹哥本哈根学派, 或者说哥本哈根诠释, 指的是以尼尔斯·玻尔和维尔纳·海森堡为首的一批主要活跃在丹麦王国的首都哥本哈根的物理学家对量子力学所持有的观点. 他们主要活跃于 1925–1927 年间, 对量子力学的早期发展作出重要贡献. 他们的很多思想沿用至今, 仍是人们理解量子力学的主流方式.

事不遂人愿, 物理学家的希望落空了. 原本, Jordan 希望找到一族由正整数编号的有限维例外 Jordan 代数 \mathcal{J}_n , 之后通过令 $n \rightarrow \infty$ 得到一个无穷维的空间作为物理上可观测量的家园. 然而, 1934 年, Jordan, John von Neumann 和 Eugene Wigner [JNW93] 证明了所有有限维形式实的 Jordan 代数一定是一些单理想的直和, 而且其中只有五类基本 (代数语言即不可分解) 的“块”: 前四类对应者 $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 上的 $n \times n$ Hermite 矩阵 (注意最后一类 $H_n(\mathbb{O})$ 只能对 $n \leq 3$ 定义), 以及某种所谓的旋分量. 其中旋分量可以证明是特殊的 Jordan 代数, 而 $H_n(\mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ 也明显是特殊的. 只有 $H_3(\mathbb{O})$ 仍未被定夺 (实际上首先需要验证这确实是 Jordan 代数, 这需要手动地计算, 因为 \mathbb{O} 不是结合代数). 似乎其也应该是特殊的, 因为其中 \circ 的定义也是

$$x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx).$$

然而, Abraham Adrian Albert¹² [Alb34] 证明了这其实是一个例外的 Jordan 代数. 为了纪念他, 这个 27 维的例外 Jordan 代数被称为 Albert 代数, 记为 \mathbb{A} .

以 Jordan 为首的物理学家对此是失望的: 他们本来想建立一套“例外”的量子力学, 但最终发现例外的 Jordan 代数屈指可数, 在有限维的情形下甚至只有 1 个, 即 Albert 代数. 但是 Albert 代数的维数太小了, 不足以承载庞大的世界. 自此, 物理学家便基本抛弃了 Jordan 代数. 1979 年, 初出茅庐的 Efim Isaakovich Zel'manov¹³ [Zel79] 证明了即使考虑无穷维的 Jordan 代数, 也只有 Albert 代数一个例外型. 物理学家的 Jordan 代数之旅彻底终结了.

不过数学家还没有抛弃 Jordan 代数. 对数学家来说, 一个完整的分类工作固然极其伟大, 但了解那些“例外”的类型也是很重要的. 在 Jordan 代数的范畴里, 有例外的 Albert 代数. 大家自然会联想到半单 Lie 代数分类里的那些例外类型. 最终, 大家终于通过 Jordan 代数得到了本节的主题: Freudenthal–Tits 魔方.

4.2 Tits 的构造

下面我们就来正式看看这个魔方究竟为何物. 我们主要采取 Jacques Tits 的途径.

下面设 \mathbb{K} 是 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 之一. 我们以及看到, \mathbb{K} 上有一个正定的二次型 n , 并且对任意 $x, y \in \mathbb{K}$, $n(xy) = n(x)n(y)$. 对 $x \in \mathbb{K}$, 定义其迹为

$$t_{\mathbb{K}}(x) = n(x+1) - n(x) - 1 = x + \bar{x}.$$

记迹为 0 的元素构成在子空间为 \mathbb{K}^0 (就是通常所说的“纯虚数”).

对 $a, b \in \mathbb{K}$, 考虑 \mathbb{R} -线性映射

$$D_{a,b}: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, c \mapsto [[a, b], c] + 3(a, c, b),$$

¹²Abraham Adrian Albert 是美国数学家, 他获得了 1939 年美国数学会颁发的 Cole 代数奖. 除了这里提到的 Albert 代数外, 他还以代数数论中的 Albert–Brauer–Hasse–Noether 定理而闻名.

¹³Zel'manov 在 1994 年于苏黎世举行的国际数学家大会上获得了 Fields 奖, 同一届的获奖者还有 Jean Bourgain, Pierre-Louis Lions 和 Jean-Christophe Yoccoz (似乎都是分析学家). 在 Fields 奖得主之中, Zel'manov 的工作也属于不那么主流的. 他的获奖工作主要包括对群论里 Burnside 问题的解答. 除此之外, 他还在幂零 Lie 代数以及 Jordan 代数方面作出过贡献.

其中 $[\cdot, \cdot]$ 是换位子

$$[a, b] = ab - ba,$$

(\cdot, \cdot, \cdot) 是结合子

$$(a, c, b) = (ac)b - a(cb).$$

可以证明 (定义该算子的动机以及相关性质的证明见 [Sch17]),

$$D_{a,b} = -D_{b,a},$$

$$D_{a,b}(cd) = D_{a,b}(c)d + cD_{a,b}d,$$

$$D_{ab,c} + D_{bc,a} + D_{ca,b} = 0.$$

记这些 $D_{a,b}$ 生成的向量空间为 $\text{in}\mathbf{der}(\mathbb{K})$, 其是 $\mathbf{der}(\mathbb{K})$ 的子空间. 在我们的例子里, 能够证明 $\text{in}\mathbf{der}(\mathbb{K}) = \mathbf{der}(\mathbb{K})$.

下面设 \mathcal{J} 是一个含幺的 Jordan 代数. 在我们后续的讨论中, \mathcal{J} 总是 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 上的 3×3 自伴矩阵构成的 Jordan 代数 $H_3(\mathbb{R}), H_3(\mathbb{C}), H_3(\mathbb{H}), H_3(\mathbb{O})$ 之一.

我们在 \mathcal{J} 上定义迹映射 $t_{\mathcal{J}}: \mathcal{J} \rightarrow \mathbb{R}$, 这是一个 \mathbb{R} -线性泛函, $t_{\mathcal{J}}(1) = 1$, 并且对任何 $x, y, z \in \mathcal{J}$,

$$t_{\mathcal{J}}((xy)z) = t_{\mathcal{J}}(x(yz)).$$

在我们应用的例子里, $t_{\mathcal{J}} = \frac{1}{3} \text{Tr}$, 其中 Tr 是标准的迹映射.

命题 5 (Jordan 代数的分解). 我们有分解

$$\mathcal{J} = \mathbb{R}1 \oplus \mathcal{J}^0,$$

其中

$$\mathcal{J}^0 = \{x \in \mathcal{J} : t_{\mathcal{J}}(x) = 0\}.$$

对 $x, y \in \mathcal{J}^0$, $x * y := xy - t_{\mathcal{J}}(xy)1$ 给出了 \mathcal{J}^0 上一个交换的乘法.

考虑线性变换 $d_{x,y}: \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}$:

$$d_{x,y}(z) = x(yz) - y(xz).$$

这被称为元素 x, y 决定的内导数. 由于对任何 x , $d_{1,x} = 0$, 因此只要考虑 $x, y \in \mathcal{J}^0$ 决定的内导数. 记内导数张成的线性空间为 $\text{in}\mathbf{der}(\mathcal{J})$, 其是 Lie 代数 $\mathbf{der}(\mathcal{J})$ 的一个理想.

下面我们解释 Tits 的构造. 除了 Tits 之外, Isaiah Kantor 和 Max Koecher 也独立得到了部分结果.

对 $A, B \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$, 令

$$\text{FT}(A, B) = \text{in}\mathbf{der}(A) \oplus (A^0 \otimes H_3(B)^0) \oplus \text{in}\mathbf{der}(H_3(B)),$$

其中 \otimes 就是通常的 $\otimes_{\mathbb{R}}$.

我们需要赋予 $\text{FT}(A, B)$ 一个 Lie 代数结构. 我们在 $\text{FT}(A, B)$ 上构造反对称的乘法 $[\cdot, \cdot]$ 满足对任何 $D \in \text{inDer}(A), d \in \text{inDer}H_3(B), a, b \in A^0, x, y \in H_3(B)^0$,

- $\text{inDer}(A)$ 和 $\text{inDer}(H_3(B))$ 是子 Lie 代数.
- $[\text{inDer}(A), \text{inDer}(H_3(B))] = 0$.
- $[D, a \otimes x] = D(a) \otimes x, [d, a \otimes x] = a \otimes d(x)$.
- $[a \otimes x, b \otimes y] = t_{H_3(B)}(xy)D_{a,b} + [a, b] \otimes (x * y) + 2t_A(ab)d_{x,y}$.

经过计算, 要想让上述定义的 $(\text{FT}(A, B), [\cdot, \cdot])$ 确实成为一个 Lie 代数 (满足 Jacobi 等式), 需要满足对任何 $a_1, a_2, a_3 \in A^0$ 和任何 $x_1, x_2, x_3 \in H_3(B)^0$, 有

$$\sum_{\text{cyc}} t_A([a_1, a_2]a_3)d_{(x_1 * x_2), x_3} = 0,$$

$$\sum_{\text{cyc}} t_{H_3(B)}((x_1 * x_3)x_3)D_{[a_1, a_2], a_3} = 0,$$

$$\sum_{\text{cyc}} (D_{a_1, a_2}(a_3) \otimes t_{H_3(B)}(x_1 x_2)x_3 + [[a_1, a_2], a_3] \otimes (x_1 * x_2) * x_3 + 2t_A(a_1 a_2)a_3 \otimes d_{x_1, x_2}(x_3)) = 0.$$

其中 \sum_{cyc} 表示轮换求和.

可以验证, 在 $A, B \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ 时, 上述三个等式确实成立, 故相应得到的 $\text{FT}(A, B)$ 确实是一个 Lie 代数.

这个验证看起来很困难, 但其实没有那么复杂, 以 $A = \mathbb{C}$ 为例: 此时 A 是一个交换且结合的代数, 因此 A 中的交换子和结合子都是 0. 此时前两个等式已经成立. 此时只要验证第三个等式, 并且也只要验证

$$\sum_{\text{cyc}} t_{\mathbb{C}}(a_1 a_2)a_3 \otimes d_{x_1, x_2}(x_3) = 0.$$

根据线性性, 只要验证 a_1, a_2, a_3 分别为实数或纯虚数的情形. 这时候注意到

$$\sum_{\text{cyc}} d_{x_1, x_2}(x_3) = 0$$

即知结论成立.

即使在最复杂的 $A = \mathbb{O}$ 的情况, 代数 A 也满足一些性质, 例如它是交错代数.

现在我们已经得到了 Lie 代数 $\text{FT}(A, B)$, 还需要验证其是半单的. 一种可能的途径是用蛮力验证相应的 Killing 型非退化 (不过在 E_8 的情形有足足 248 维, 最小的 F_4 也有 52 维, 这种想法对于肉体凡胎来说只能领会精神). 另一种想法是将其实现为某个紧 Lie 群的 Lie 代数. 为此, 我们回顾 Tits 等人最初的思路.

Tits 是如何得到他的构造的? 追本溯源, 还是射影几何.

如本节开头所言, 在 1950 年代, 数学家们已经知道

$$F_4 = \text{Isom}(\mathbb{O}\mathbb{P}^2).$$

Boris Abramovich Rosenfeld 于是猜测, E_6, E_7, E_8 分别是如下三种代数上的射影平面的等距变换群:

- 双八元数 $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}$,
- 四八元数 $\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$,
- 八八元数 $\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}$.

困难之处在于如何定义 $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2, (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2, (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$. 对于双八元数 $\mathbb{C} \otimes \mathbb{O}$, Rosenfeld 模仿 Jordan 利用 $H_3(\mathbb{O})$ 构造 $\mathbb{O}\mathbb{P}^2$ 的过程, 用 $H_3(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})$ 构造了 $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$. 然而, 该构造不能推广到 $\mathbb{H} \otimes \mathbb{O}$ 和 $\mathbb{O} \times \mathbb{O}$: $H_3(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})$ 和 $H_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})$ 都不构成 Jordan 代数. 即使硬构造出一个 $(\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$ 或 $(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2$, 其也不满足射影平面的公理. 尽管如此, 这种观念仍然是有启发性的.

设 \mathbb{K} 是 $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ 之一, 则我们知道

$$\text{isom}(\mathbb{K}\mathbb{P}^2) \simeq \text{der}(H_3(\mathbb{K})).$$

显然, $\text{der}(\mathbb{K})$ 中的元素作用在分量上给出 $H_3(\mathbb{K})$ 上的微分. 除此之外, 考虑

$$\mathfrak{sa}(3, \mathbb{K}) = \{x \in \text{Mat}_3(\mathbb{K}) : x^* + x = 0, \text{Tr}(x) = 0\},$$

(\mathfrak{sa} 这个记号是为了推广 $\mathfrak{so}, \mathfrak{su}$ 和 \mathfrak{sp}) 则对 $x \in \mathfrak{sa}(3, \mathbb{K})$, 可以构造 $H_3(\mathbb{K})$ 上的微分

$$\text{ad}_x : a \mapsto [x, a].$$

能够证明,

$$\text{der}(H_3(\mathbb{K})) \simeq \text{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{sa}(3, \mathbb{K}).$$

结合上前面 Rosenfeld 的观察, 我们期待有一个 Riemann 流形 $(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')\mathbb{P}^2$ 满足

$$\begin{aligned} \text{isom}((\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')\mathbb{P}^2) &\simeq \text{der}(H_3(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')) \\ &\simeq \text{der}(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}') \oplus \mathfrak{sa}(3, \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}') \\ &\simeq \text{der}(\mathbb{K}) \oplus \text{der}(\mathbb{K}') \oplus \mathfrak{sa}(3, \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}'). \end{aligned}$$

这里面每个 \simeq 都应该加上 “ \simeq ”, 是虚妄的构造. 然而, 尽管不能构造出相应的例外 Lie 群, 我们直接取构造

$$V(\mathbb{K}, \mathbb{K}') = \text{der}(\mathbb{K}) \oplus \text{der}(\mathbb{K}') \oplus \mathfrak{sa}(3, \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')$$

确实可以得到例外 Lie 代数. 很显然该构造关于 \mathbb{K}, \mathbb{K}' 对称, 这被称为 Vinberg 对称构造, 来自 Ernest Borisovich Vinberg¹⁴ [Vin05].

通过矩阵运算, 我们还能验证

$$\mathfrak{sa}(3, \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}') \simeq \mathfrak{sa}(3, \mathbb{K}') \oplus (\mathbb{K}^0 \otimes H_3(\mathbb{K}')^0).$$

因此

$$\begin{aligned} V(\mathbb{K}, \mathbb{K}') &= \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{K}') \oplus \mathfrak{sa}(3, \mathbb{K} \otimes \mathbb{K}') \\ &\simeq \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{K}') \oplus \mathfrak{sa}(3, \mathbb{K}') \oplus (\mathbb{K}^0 \otimes H_3(\mathbb{K}')^0) \\ &\simeq \mathfrak{der}(\mathbb{K}) \oplus \mathfrak{der}(H_3(\mathbb{K}')) \oplus (\mathbb{K}^0 \otimes H_3(\mathbb{K}')^0). \end{aligned}$$

这之前 Tits 的构造

$$\mathrm{FT}(A, B) = \mathrm{inder}(A) \oplus (A^0 \otimes H_3(B)^0) \oplus \mathrm{inder}(H_3(B))$$

一致, 因为在 $A, B \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ 的例子中能够证明

$$\mathrm{inder}(A) = \mathfrak{der}(A), \mathrm{inder}(H_3(B)) = \mathfrak{der}(H_3(B)).$$

假设真的有 $(\mathbb{K} \otimes \mathbb{K}')\mathbb{P}^2$ 存在, 其等距变换群似乎确实是紧的, 因此相应的 Tits 构造得到的确实是半单 Lie 代数. 因此我们需要构造

$$(\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2, (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2, (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2.$$

事实上, 确实可以构造出来, 但令人失望的是构造过程中却已经使用了例外 Lie 群 E_6, E_7, E_8 . 更具体地说, 我们将其实现为对称空间

$$\begin{aligned} (\mathbb{C} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2 &= E_6/((\mathrm{Spin}_{10} \times \mathrm{U}(1))/\mathbb{Z}_4) \\ (\mathbb{H} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2 &= E_7/((\mathrm{Spin}_{12} \times \mathrm{Sp}(1))/\mathbb{Z}_2) \\ (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2 &= E_8/(\mathrm{Spin}_{16}/\mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

(回忆第二节最后的表格.)

迄今为止我们还遗漏了一个重要的问题, 即究竟如何确定 $\mathrm{FT}(A, B)$ 是什么类型的. 一种思路是利用上述用对称空间构造相应射影平面的办法. 回忆我们在第二节中所做的, 对于齐性空间 G/H , 我们搞清楚 H 作用于在 G/H 的权, 进而结合 H 的根系得到 G 的根系.

Freudenthal–Tits 魔方基本是古典例外 Lie 群和例外 Lie 代数理论的巅峰. 之后, 这个魔方也启发了很多后续的研究, 例如

¹⁴Ernest Vinberg 于 2020 年 5 月 12 日因新冠肺炎去世.

- 为了理解例外 Lie 群的结构, Tits 提出了所谓 Tits 建筑的概念. 这是一个组合/几何的对象, 它同时推广了旗帜流形, 有限射影平面和 Riemann 对称空间. 之后 Tits 建筑在 p -进 Lie 群的研究中发挥了重要作用.
- Victor Gersheovich Kac [[Kac77](#)] 分类了所有单的超 Lie 代数 (即 \mathbb{Z}_2 -分次的 Lie 代数). 包括 [[BZ96](#)] 在内的一些文章考虑用超 Jordan 代数代替 Jordan 代数作 Tits 构造, 成功构造出了相应的例外的单的超 Lie 代数.

5 E_8

本节我们关注神奇的 E_8 . E_8 的神奇之处包括但不限于¹⁵

- E_8 是最大的例外 Lie 群, 同时其包含其他所有例外 Lie 群作为子群.
- 1982 年, Michael Hartley Freedman 用 E_8 格构造了一个拓扑 4-流形 (E_8 流形), 其没有光滑结构, 甚至不能三角剖分.
- 2016 年, Maryna Sergiivna Viazovska 证明了 E_8 格给出了 8 维球堆积问题的解. 因此 (以及她对 24 维球堆积问题的解答), 她获得了 2022 年度的 Fields 奖.
- Antony Garrett Lisi 尝试用 E_8 解释所有基本相互作用.
- 据说人们甚至在实验中观测到了 E_8 : R. Coldea, D. A. Tennant 和 E. M. Wheeler 等人观测了某种特定条件下钴铌合金中电子的自旋, 其结果如同 Alexander Borisovich Zamolodchikov 预测的那样, 8 个峰值中有 2 个和 E_8 有关.

传说 George Lusztig¹⁶酷爱计算, 其中他最喜欢算的就是 E_8 根系及其 Weyl 群, 因为它们足够具体但又足够复杂. Jeffrey Adams 和 David Vogan 等人创立了项目 [Atlas of Lie Groups and Representations](#), 致力于得到约化 Lie 群及其表示的所有信息. 他们的一项成名作就是计算了 E_8 的分裂实形式的 Kazhdan–Lusztig–Vogan 多项式. 以格 B 为例, 他们得到了一个 453060×453060 的矩阵, 1181642979 个不同的多项式. 这些多项式包含 13721641221 个不同的系数, 最大的系数为 11808808, 相应的多项式为

$$\begin{aligned} &152q^{22} + 3472q^{21} + 38791q^{20} + 293021q^{19} + 1370892q^{18} + 4067059q^{17} + 7964012q^{16} + 11159003q^{15} \\ &+ 11808808q^{14} + 9859915q^{13} + 6778956q^{12} + 3964368q^{11} + 2015441q^{10} + 906567q^9 \\ &+ 363611q^8 + 129820q^7 + 41239q^6 + 11426q^5 + 2677q^4 + 492q^3 + 61q^2 + 3q. \end{aligned}$$

本节里我们仔细看一下 E_8 根系及其 Weyl 群的一些初步性质.

5.1 E_8 根系的标准构造

我们先回顾一下 E_8 根系在 \mathbb{R}^8 中的标准构造. 在本节中, 我们固定 R 为 E_8 根系.

E_8 的 Dynkin 图如下:

¹⁵最后两条比较有争议.

¹⁶George Lusztig 获得了 2022 年度的 Wolf 数学奖. Lusztig 曾是 Atiyah 的学生, 学习几何拓扑. 然而他发现身边的同学 Dennis Sullivan 在“解决所有重要的几何拓扑问题”, 便转向了表示论. 巧合的是, Sullivan 获得了 2022 年度的 Abel 奖.

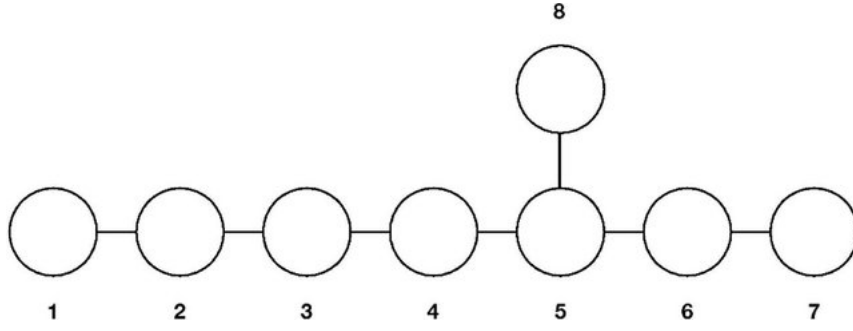


图 11: E_8 的 Dynkin 图

固定 \mathbb{R}^8 的“标准”标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$, 则上述 Dynkin 图中的各个结点分别对应

1. $e_1 - e_2 = (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$;
2. $e_2 - e_3 = (0, 1, -1, 0, 0, 0, 0, 0)$;
3. $e_3 - e_4 = (0, 0, 1, -1, 0, 0, 0, 0)$;
4. $e_4 - e_5 = (0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0)$;
5. $e_5 - e_6 = (0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0)$;
6. $e_6 - e_7 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0)$;
7. $e_7 - e_8 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1)$;
8. $\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^5, \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

这些结点分别都对应一个单根 α 满足 $(\alpha, \alpha) = 2$. 当单根 α, β 满足 $(\alpha, \beta) = 0$ 时, 其对应的结点不相邻. 当 $(\alpha, \beta) = -1$ 时, 其对应的结点相邻.

5.2 E_8 的根格与权格

考虑 L 为 E_8 的根格, 即

$$L = \sum_{\alpha \in R} \mathbb{Z}\alpha.$$

考虑 \mathbb{R}^8 中 $\{e_i - e_{i+1}\} \cup \{(-1^5, 1^3)\}$ 生成的格 L' . 这是我们比较熟悉的 D_8 根格:

$$L' = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbb{Z}^8 \subset \mathbb{R}^8 : \sum_{i=1}^8 x_i \equiv 0 \pmod{2} \right\}.$$

根据之前对 E_8 根系的单根的描述, 我们知道 $L' \subset L$ 并且 $[L : L'] = 2$. L/L' 的另一个陪集为

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \left(\mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right)^8 \subset \mathbb{R}^8 : \sum_{i=1}^8 x_i \equiv 1 \pmod{2} \right\}.$$

一般来说, 一个半单 Lie 代数的权格总是大于其根格. 然而利用上面对根格的刻画以及权格的几何性质, 容易算出对于 E_8 来说, 其权格和根格重合. 因此, E_8 的最小的非平凡表示就是 248 维的伴随表示, 这导致我们无法用简单的矩阵写下 E_8 Lie 群或 Lie 代数.

定义 12 (酉模格). 对一个格 $M \subset \mathbb{R}^n$, 定义其对偶格为

$$M^\vee = \{m^\vee \in \mathbb{R}^n : (m^\vee, m) \in \mathbb{Z}, \forall m \in M\}.$$

称 M 为酉模的, 如果 $M^\vee = M$.

定义 13 (偶格). 称一个格 $M \subset \mathbb{R}^n$ 为偶格, 如果对任何 $m, m' \in M$, (m, m') 是偶数.

能够证明, \mathbb{R}^n 中存在偶的酉模格当且仅当 $n \equiv 0 \pmod{8}$. (这和 Clifford 群的 8-周期性有关!) 在同构意义下, E_8 的根格是唯一一个 8 维的偶的酉模格. 可以证明, 在 24 维中恰好有 24 个偶的酉模格, 它们被称为 Niemeier 格. 其中有一个便是著名的 Leech 格. 如前所述, E_8 的根格和 Leech 格分别给出 8 维和 24 维球堆积问题的解.

5.3 E_8 的 Weyl 群

在本节中, 固定 W 为 E_8 的 Weyl 群.

命题 6. W 可迁地作用于根系 R (一般来说, 我们只知道 Weyl 群可迁地作用于 Weyl 室).

证明. 考虑到 D_8 根系包含在 E_8 根系内, W 包含 D_8 根系的 Weyl 群 $W(D_8)$ 作为子群. 我们熟悉 D_n 类根系的 Weyl 群: 我们可以置换所有坐标, 或者改变偶数个坐标的符号.

注意到 E_8 根系 R 包含如下两类根:

1. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \{-1, 0, 1\}^8$: 恰好 6 个坐标为 0, 2 个坐标为 1 或 -1.
2. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}^8$ 满足 $\sum_{i=1}^8 x_i \equiv 0 \pmod{2}$.

这其中第一类根有 $\binom{8}{2} \times 2^2 = 112$ 个, 第二类根有 $2^7 = 128$ 个, 因此共 240 个根.

很显然, $W(D_8)$ 分别可迁地作用于第一类根与第二类根. 因此若能找到 $\omega \in W$ 及第一类根 α , 使得 $\omega(\alpha)$ 是一个第二类根, 就说明了 W 可迁地作用于 R .

这样的 ω 和 α 容易取到. 例如, 考虑 ω 是关于与第二类根 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 垂直的超平面的反射, $\alpha = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 是一个第一类根, 则可以算出

$$\omega(\alpha) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

是一个第二类根, 结论得证. □

下面我们来计算 Weyl 群 W 的大小.

定理 11. E_8 根系的 Weyl 群 W 的大小为 $2^{14} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 = 696729600$.

推论 2. 结合有限单群的分类定理, 我们知道 W 不是单群.

我们使用不同的方法计算之.

第一种方法, 用到 Coxeter 群的一般理论, 参见 [Bou08a] 第 V 章的最后一节.

证明. 根据 Coxeter 群的一般理论, W 的大小等于其所有基本不变量次数的乘积. 我们不加证明地引用, W 的基本不变量的次数为 2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30 (这一事实同样可参考 [Bou08a]). 因此

$$|W| = 2 \times 8 \times 12 \times 14 \times 18 \times 20 \times 24 \times 30 = 2^{14} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 = 696729600,$$

算毕. □

上面的证明需要引用一些 Coxeter 群的理论. 下面我们考虑经典的群作用计数法, 即轨道-稳定化子对应. 具体说来, 设 G 是一个有限群, X 是一个 G -集合, 即带有 G 作用的一个集合. 如果我们进一步假定 G 在 X 上的作用是可迁的, 则

$$|G| = |H| \cdot |X|,$$

其中 $H = \text{Stab}_G(x)$ 是 X 中某个点 x 的稳定化子.

证明. 根据命题 6, W 可迁地作用于 R , 因此

$$|W| = |G_1| \cdot |R| = 240|G_1|,$$

其中 $G_1 = \text{Stab}_W(1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 是根 $r = (1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ 的稳定化子.

我们下面来计算 $|G_1|$. 同样地, 尝试构造一个带有可迁 G_1 作用的集合.

G_1 同样作用于 R , 即 E_8 的根格 L 中所有长度为 2 的向量. 不过这个作用不是可迁的. 我们希望找出这个作用的轨道. 限制在一条轨道上, 我们得到一个带有可迁 G_1 作用的集合.

依据定义, G_1 固定了 r . 对其他的根 s , G_1 也一定固定内积 (r, s) . 我们将 R 中的根 s 按照 (r, s) 分类, 得到下表:

(r, s)	值	相应的根 s
2	1	r
1	56	$(1, 0, \pm 1^6), (0, -1, \pm 1^6), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)$
0	126	余下的, 不太关心
-1	56	$(-1, 0, \pm 1^6), (0, 1, \pm 1^6), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right)$
-2	1	$-r$

因此 R 在 G_1 的作用下至少分解为 5 条轨道.

事实上, 可以证明 R 恰好分解为这 5 条轨道. 以 $X = \{s \in R : (r, s) = -1\}$ 为例. 为此, 我们考虑 G_1 的子群 $W(D_6)$, 这里 $W(D_6)$ 是 D_6 根系的 Weyl 群. $W(D_6)$ 是 G_1 的子群可有 Dynkin 图的包含关系 $D_6 \subset E_8$ 去掉一片叶子得到. 根据 D_n 类根系的 Weyl 群的计算, 我们知道 G_1 中的这个 $W(D_6)$ 包含所有这样的变换:

- 置换后 6 个坐标;
- 改变后 6 个坐标中偶数个符号.

因此 $W(D_6)$ 可迁地作用于

1. $(-1, 0, \pm 1^6)$
2. $(0, 1, \pm 1^6)$
3. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right)$

这三类根. 只要能找到 G_1 中的元素混合这三类根, 就可以说明 G_1 可迁地作用于 X .

经过计算, 关于垂直于 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)$ 的超平面的反射实现了这一点, 因此 G_1 可迁地作用于 X .

固定 $s = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \left(-\frac{1}{2}\right)^6\right) \in X$, 则

$$|G_1| = |G_2| \cdot |X| = 56|G_2|,$$

其中 $G_2 = \text{Stab}_{G_1}(s)$ 是 G_1 作用下 s 的稳定化子.

用 Dynkin 图来示意, r, s 的构型实际上即为 $\circ \text{---} \circ$.

我们继续进行这样的过程. 下一步, 我们希望找那些 t , 使得 $(t, s) = -1, (t, r) = 0$. 用 Dynkin 图的简明图形表示, 即 $\circ \text{---} \circ \text{---} \circ$, 其中从左到右的结点分别代表 r, s, t .

t 的可能选取包括

1. $(-1, -1, 0, 0^5)$;
2. $(0, 0, 1, \pm 1, 0^4)$ 及其后 5 个坐标的置换 (共 $2 \times 5 = 10$ 个);
3. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)$ (这一类看似有 $2^5 = 32$ 个, 但由于 E_8 根系要求此时所有坐标的和是个偶数, 实际上只有 $2^4 = 16$ 个).

记 Y 为上述 (r, s, t) 构型的空间, 则 $|Y| = 1 + 10 + 16 = 27$. 仿照前面的思路, 可以证明 G_2 可迁地作用于 Y (注意到 D_5 根系的 Weyl 群 $W(D_5)$ 是 G_2 的子群).

固定 $t = (0, 0, 1, -1, 0^4)$, 则

$$|G_2| = |G_3| \cdot |Y| = 27|G_3|,$$

其中 $G_3 = \text{Stab}_{G_2}(t)$ 是 G_2 作用下 t 的稳定化子.

依此类推, 我们走向构型 $\circ - \circ - \circ - \circ$, 其中左侧 3 个结点是固定的.

最右侧结点的可能选取包括

1. $(0, 0, 0, 1, \pm 1, 0^3)$ 及其后 4 个坐标的置换 (共 $2 \times 4 = 8$ 个);
2. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \left(\frac{1}{2}\right)^4\right)$ (这一类看似有 $2^4 = 16$ 个, 但由于 E_8 根系要求此时所有坐标的和是个偶数, 实际上只有 $2^3 = 8$ 个).

因此该构型空间的大小为 $8 + 8 = 16$. 同样可验证 G_3 可迁地作用于此构型空间.

固定第四个结点为 $(0, 0, 0, 1, -1, 0, 0, 0)$, 并令 G_4 为相应的稳定化子, $|G_3| = 16|G_4|$.

接下来考虑构型 $\circ - \circ - \circ - \circ - \circ$, 其中左侧 4 个结点是固定的.

最右侧结点的可能选取包括

1. $(0^4, 1, \pm 1, 0^2)$ 及其后 3 个坐标的置换 (共 $2 \times 3 = 6$ 个);
2. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm \left(\frac{1}{2}\right)^4\right)$ (这一类看似有 $2^3 = 8$ 个, 但由于 E_8 根系要求此时所有坐标的和是个偶数, 实际上只有 $2^2 = 4$ 个).

因此该构型空间的大小为 $6 + 4 = 10$. 同样可验证 G_4 可迁地作用于此构型空间.

固定第 5 个结点为 $(0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0)$, 并令 G_5 为相应的稳定化子, $|G_4| = 10|G_5|$.

接下来考虑构型 $\circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ$, 其中左侧 5 个结点是固定的.

最右侧结点的可能选取包括

1. $(0^5, 1, \pm 1, 0)$ 或 $(0^5, 1, 0, \pm 1)$ (共 4 个);
2. $\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^5, \frac{1}{2}, \pm \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ (共 2 个).

因此该构型空间的大小为 $4 + 2 = 6$. 同样可验证 G_5 可迁地作用于此构型空间.

固定第 6 个结点为 $(0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0)$, 并令 G_6 为相应的稳定化子, $|G_5| = 6|G_6|$.

找第 7 个向量时情况发生了一些变化. 我们考虑构型 $\circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ - \circ$, 其中左侧 6 个结点是固定的.

最右侧结点的可能选取包括

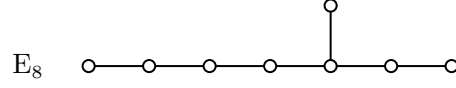
1. $(0^6, 1, \pm 1)$ (共 2 个);
2. $\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^6, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

因此该构型空间的大小为 3. 不幸的是, 我们接下来会看到, 此时 G_6 在此构型空间上的作用不再是可迁的.

考虑 R 中与所有前 6 个结点都垂直的根, 容易发现只有 $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)$ 与 $\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)$. 它们代表了同一个 Weyl 群中的元素 ω , 并且该元素在 G_6 中.

直接计算看出 ω 对换 $(0^6, 1, 1)$ 和 $\left(-\left(\frac{1}{2}\right)^6, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 并且保持 $(0^6, 1, -1)$ 不动.

考虑完整的 E_8 构型



其中下方行中左侧 6 个结点已经固定.

若最右侧的结点为 $(0^6, 1, 1)$, 则可取上方的结点为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 实现该构型. 但是如果取最右侧的结点为 $(0^6, 1, -1)$, 可验证无论上方的结点如何选取都无法实现 E_8 构型. 因此 $(0^6, 1, 1)$ 和 $(0^6, 1, -1)$ 不在 G_6 作用的同一条轨道内.

考虑长度为 2 的轨道

$$\left\{ (0^6, 1, -1), \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^6, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\},$$

根据前面的计算, $(0^6, 1, -1)$ 的稳定化子为平凡群.

至此, 我们已算出

$$|W| = 240 \times 56 \times 27 \times 16 \times 10 \times 6 \times 2 \times 1 = 2^{14} \times 3^5 \times 5^2 \times 7 = 696729600,$$

得证. □

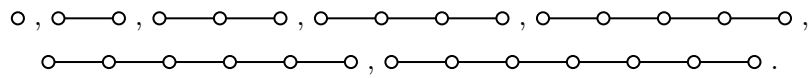
上面的证明告诉了我们更多信息. 例如, 我们实际已经算出 $E_5 (\simeq D_5)$, E_6 , E_7 类根系的 Weyl 群的大小:

$$|W(E_5)| = 16 \times 10 \times 6 \times 2 \times 1 = 2^7 \times 3 \times 5 = 1920,$$

$$|W(E_6)| = 27 \times 16 \times 10 \times 6 \times 2 \times 1 = 2^7 \times 3^4 \times 5 = 51840,$$

$$|W(E_7)| = 56 \times 27 \times 16 \times 10 \times 6 \times 2 \times 1 = 2^{10} \times 3^4 \times 5 \times 7 = 2903040.$$

除此之外, 我们还知道了 E_8 根系的 Weyl 群 W 可迁地作用于如下构型:



6 摩登的话题

古人云, 博观而约取, 厚积而薄发. 或又云, 知史以明鉴, 查古以至今. 我们上述探讨的内容大都还算古典的理论 (毕竟课程的主题还是数学史). 然而, 例外 Lie 群和例外 Lie 代数还有很多有趣的事实甚至值得探索的未解之谜, 我们浅看几例.

6.1 各种 ADE 分类

数学中有各种各样的地方出现了 ADE 分类, 尽管分类的对象可能看起来风马牛不相及. 我们来看一些已知的 ADE 分类的例子:

- 单织的 Dynkin 图;
- 单织的复单 Lie 代数;
- 只有一个长度的不可约根系;
- 有限 Coxeter 群;
- Du Val 奇点;
- 全纯函数的简单临界点;
- 有限型箭图 (只有有限多种不可约表示的箭图);
- $SL(2, \mathbb{C})$ 的有限子群;
- \mathbb{R}^3 中正多面体的分类;
- 有限型的斜对称簇代数;
- 超几何方程的代数解;
- 二维共形场论的极小模型.

于是, 1976 年, Vladimir Igorevich Arnold 问有没有一个一般性的分类定理解释上述现象.

关于完全一般的构造, 人们还没有什么头绪. 但是在一些具体的例子中, 人们已经构造出一些精巧的对应.

- 根据复半单 Lie 代数的理论, 人们关联上 Lie 代数, 根系和 Dynkin 图.
- Peter Gabriel [Gab72] 给出了有限型箭图的 ADE 分类.
- McKay 对应表明有限群的表示和对应商簇的极小消解的几何有关. 特别地, 其给出 $SL(2, \mathbb{C})$ 的有限子群的 ADE 分类.

有人提出用镜像对称给出 ADE 分类的一个统一解释, 参考 [MathOverflow](#) 上的讨论.

6.2 顶点算子代数

在经典的物理学 (如电磁学等) 中, 遇见的通常都是经典群, 例外 Lie 群却经常出现在摩登的物理学的研究中. 在当代理论物理的研究中, 最重要的方向当属弦论¹⁷. 然而弦论并没有数学上的精确定义, 理论内部也还存在着很多数学家不能理解的断言. 二维共形场论是从弦论中衍生出来的一套理论. 数学上, Graeme Bryce Segal 和 Maxim Lvovich Kontsevich 给出了二维共形场论较为明确的数学定义, 因此能够被数学家所接受.

数学上, 二维共形场论是一套比较代数的理论, 其中诞生了顶点算子代数¹⁸的概念. 要理解顶点算子代数的概念, 需要有一些二维共形场论的物理背景, 否则 Bourbaki 式地学抽象的数学定义很无趣: 光是定义就要写两页纸¹⁹.

然而, 数学家们终归是认识到顶点算子代数是一个有趣且重要的对象. 其在魔群月光问题以及几何 Langlands 对应中都扮演了重要的角色. 除此之外, 顶点代数居然还能给出例外 Lie 代数的构造.

定理 12 (Frenkel–Kac–Segal 构造). 对任何偶的根格 L , 我们有函子

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Dynkin 图} & \longrightarrow & \text{二重覆叠 } \hat{L} & \longrightarrow & \text{顶点代数} & \longrightarrow & \text{仿射 Kac-Moody 代数} \\ & \searrow & \uparrow & & & & \\ & & \text{根格 } L & & & & \end{array}$$

我们不解释构造的细节, 这需要一些顶点代数的背景. [BHJF⁺18] 给出了一个初等的阐述.

进一步地, 对单织情形 (即 ADE 情形), 我们还能够通过根格直接构造出相应 Lie 群的紧形式. 特别地, 其给出 248 维的 E_8 的构造. 这是目前已知的最简洁的构造.

6.3 例外几何

丛是近代几何学最重要的观念革新之一. 很多丛的纤维都是线性空间, 相应的转移映射是线性映射, 因此自然出现了一般线性群 $GL(n)$ 和它的闭子群, 即矩阵 Lie 群. 我们把转移映射限制在某个矩阵 Lie 群 G 中, 得到的结构就是所谓的 G -主丛. G 代表这个丛的对称性.

¹⁷有争议. 曾经有一段时期, 高能物理学家纷纷开始研究弦论, 不久大部分人又抛之而去, 来如水, 去如风. 而且现在很多物理学家关心的都是 10 维的超弦理论, 并非传统的 26 维玻色弦理论.

¹⁸数学家的独立研究也走到了顶点代数. John Horton Conway 和他的学生, 例如 Richard Ewen Borcherds, 曾经仔细研究过所谓的 24 维 Leech 格. 他们把 Leech 格视为某种“根系”, 并研究相应的 Dynkin 图和“Lie 代数” (其实就是写下了 Leech 格对应的 Serre 关系, 得到的也就是一个 Kac–Moody 代数), 其中发现了很多恒等式. 这些恒等式其实就来自某种顶点代数的结构. Borcherds 当时并不懂这些, 作为纯数学的博士生更是没有接触过共形场论和弦论等理论物理, 因此枯燥地硬是做了几百页的计算. 据他所说, 他一开始完全是从纯数学的计算角度看待日后他的名作 “no-ghost theorem” 的.

¹⁹据说博学多识的长者 Israel Moiseevich Gelfand 晚年听顶点算子代数的报告, 对此很不满意. 正由于此, 一开始顶点代数在数学家群体中遇冷, 并没有引起太多关注. 除此之外, 还有两个原因: 一是因为当时纯数学领域没有特别有趣的顶点代数的例子, 很多顶点代数的例子都来自理论物理的研究, 数学家们不太懂. 另一方面 (据 Borcherds 多年后回忆), 是由于当时听报告的人把顶点 (vertex) 听成了涡流 (vortex), 以为是流体力学方面的报告. 因此代数专家都没有来, 而来的分析学家显然也不太感兴趣.

这里的 G 当然可以取成经典群, 但也可以取成例外 Lie 群. 简单地说, 所谓例外几何就是由例外 Lie 群主导对称性的几何.

定义 14 (特殊和乐). 设 (X, g) 是一个 Riemann 流形, 配有 Levi-Civita 联络 ∇ . 若其和乐群是特殊正交群的真子群, 则称 (X, g) 有特殊和乐.

Marcel Berger [Ber55] 分类了带有特殊和乐的 Riemann 流形. 更具体地, 他证明了如果带有特殊和乐的 Riemann 流形 X 单连通, 局部上不是乘积并且不是对称空间, 则 X 只有如下几种情况 (严格来说, Berger 只是证明了 X 至多这些可能, 但他并没有证明存在性. 例如 Calabi-丘流形的存在性是由丘成桐先生证明的.)

X	特殊和乐	维数
Kähler 流形	$U(n)$	$2n$
Calabi-丘流形	$SU(n)$	$2n$
四元数 Kähler 流形	$Sp(n) Sp(1)$	$4n$
超 Kähler 流形	$Sp(n)$	$4n$
$Spin_7$ 流形	$Spin_7$	8
G_2 流形	G_2	7

注意到我们在第三节中证明了 $G_2 = \text{Aut}(\mathbb{O}) \subset SO(7)$.

表格中最后两种流形即属于例外的.

这其中, 尤其是最后一类 G_2 流形尤为重要. 所有 G_2 流形都是 Ricci 平坦, 可定向的旋量流形.

和著名的 Calabi-丘流形一样, G_2 流形的构造并不容易 (有人将 G_2 流形理解为实 6 维的 Calabi-丘流形的 7 维类比). 尽管 Berger 在 1955 年已经分类了带有特殊和乐的流形, 第一个以 G_2 为和乐的 7-流形直到 1984 年才被 Robert Leamon Bryant [Bry87] 构造出来. 不过这个例子不是紧的, 甚至不是完备的. 1989 年, Bryant 和 Simon Salamon 给出了一个完备的例子, 但仍然不是紧的. 1994 年, Dominic David Joyce 证明了紧的例子的存在性²⁰. 他的证明不是构造性的, 而是用了非常硬核的分析工具, 如非线性椭圆方程的理论, 非常像丘成桐先生对 Calabi 猜想的证明.

不过, 我们还没有一个定理给出 G_2 流形的判别法. 甚至连相应的“Calabi 型猜想”都没有.

如前面所说, G_2 流形和 Calabi-丘流形关系密切. 众所周知, Calabi-丘流形在超对称和弦论 (10 维) 中扮演了重要角色. 相应地, G_2 流形在 M 理论和超弦理论 (11 维) 中扮演了重要角色.

²⁰在很多物理文献里将这个例子称为 Joyce 流形.

6.4 不太常见的 Lie 理论的应用

Lie 理论是一个强力的工具, 可以帮助解决很多其他领域的问题. 如下我们搜罗了一些不太常见的 Lie 理论的应用 (当然对相关领域的专家来说或许熟知的), 主要参考 Borchers 在 [MathOverflow](#) 上的提问:

- 紧 Kähler 流形的上同调构成 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ 的一个表示. 特别地, Hopf 流形不可能是 Kähler 流形. 同时可以验证 Kähler 流形的 Lefschetz 定理.
- 全纯模形式是某些特定的紧 Lie 群的离散序列表示的最高权向量.
- 大多数闭的 3-流形都可由 $SL(2, \mathbb{C})$ 商去一个离散子群得到.
- Bessel 函数不能由初等函数及不定积分表示 (微分 Galois 理论其实是 Sophus Lie 最初研究 Lie 理论的动机之一).
- q -二项式是单峰的, 因为它们是 $SL(2)$ 表示的特征标.
- 通过正交群, 人们在相差配边的意义下分类了流形.

7 后记

世界上是否真的有例外？这好像是一个比较哲学的问题。仅限于数学领域来看，数学家们一般也有两种不同的态度：有一类数学家认为数学中没有真正例外的对象，当前感到的例外只是因为对结构了解地不够透彻。另一类数学家则更加实用一些，主张具体情况具体分析，并不奢求大一统的理论。这也影响了这些数学家们的研究方式：例如研究 Lie 理论和表示论，有的学者或许只想着一个抽象的 Lie 代数 \mathfrak{g} ，另一类学者可能一直努力研究 E_8 这一个 Lie 代数。然而，这两种思维习惯绝非对立的，若能结合二者之长，将有助于我们在数学路上行得更远。这种融会贯通的典范如 Richard Borcherds 对魔群月光猜想的解答。

表示论是我目前最感兴趣的学科。最早，我是在丘成桐中学生夏令营中，余成龙老师讲授的代数组课程中了解到表示论这一学科的。在课上，他向我们展示了 Young 表的若干性质，这和对称群 $\mathfrak{sl}(n)$ 的表示论密切相关。之后，我和同学王进一在学习基础代数知识的过程中顺便学习了基础的群表示论内容：俄国人的教材里，在刚刚学完线性代数和基础群论后就讲授群表示论，给予群表示论充分的重视。大一的时候，我旁听了 George Lusztig 在 MIT 开设的群表示论专题课，其中一个话题就是对称群的表示。对称群的表示有着丰富的数学内涵。几何表示论的开端之一 Springer 理论就花大力气研究了对称群（以及其群代数的形变 Hecke 代数）的表示。单凡老师还给我讲过 Schur–Weyl 对偶的一些现代观点，以及对称群表示环的玻色-费米对应以及相应的 Fock 空间，这也将我引向数学物理。不过后来我发现数学物理，乃至“纯粹物理”本身也很有趣。

本文在撰写过程中得到了单凡老师和肖杰老师的鼓励与指导。此外，我在 MSE 上的提问得到了两位热心网友的回答，他们的回答对本文帮助很大。为了撰写此文，我还在清华大学图书馆借阅了不下 20 本书。尽管大部分书没有对本文起到直接帮助，但也开阔了我的视野。

于是余有叹焉。古人之观于天地、山川、草木、虫鱼、鸟兽，往往有得，以其求思之深而无不在也。夫夷以近，则游者众；险以远，则至者少。而世之奇伟、瑰怪，非常之观，常在于险远，而人之所罕至焉，故非有志者不能至也。有志矣，不随以止也，然力不足者，亦不能至也。有志与力，而又不随以怠，至于幽暗昏惑而无物以相之，亦不能至也。然力足以至焉，于人为可讥，而在己为有悔；尽吾志也而不能至者，可以无悔矣，其孰能讥之乎？此余之所得也！

余于仆碑，又以悲夫古书之不存，后世之谬其传而莫能名者，何可胜道也哉！此所以学者不可以不深思而慎取之也。

——游褒禅山记，王安石



图 12: 《教授生涯》, 李梓, 木刻版画, 1948 年.

参考文献

- [Ada96] J. Frank Adams. *Lectures on Exceptional Lie Groups*. University of Chicago Press, 1996.
- [Alb34] A Adrian Albert. On a certain algebra of quantum mechanics. *Annals of Mathematics*, pages 65–73, 1934.
- [Bae02] John Baez. The Octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(2):145–205, 2002.
- [Ber55] Marcel Berger. Sur les groupes d’holonomie homogènes de variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 83:279–330, 1955.
- [BHJF⁺18] Richard Borcherds, Mark Haiman, Theo Johnson-Freyd, Nicolai Reshetikhin, and Vera Serganova. *Berkeley Lectures on Lie Groups and Quantum Groups*. 2018.
- [Bor50] Armand Borel. Le plan projectif des octaves et les spheres comme espaces homogenes. *COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L ACADEMIE DES SCIENCES*, 230(15):1378–1380, 1950.
- [Bou89] Nicolas Bourbaki. *Lie Groups and Lie Algebras: chapters 1-3*, volume 1. Springer Science & Business Media, 1989.
- [Bou08a] Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras: chapters 4-6*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2008.
- [Bou08b] Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras: chapters 7-9*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2008.
- [Bry87] Robert L Bryant. Metrics with exceptional holonomy. *Annals of mathematics*, pages 525–576, 1987.
- [BZ96] Georgia Benkart and Efim Zelmanov. Lie algebras graded by finite root systems and intersection matrix algebras. *Inventiones mathematicae*, 126(1):1–45, 1996.
- [Car94] Élie Cartan. *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, volume 826. Nony, 1894.
- [Cay45] Arthur Cayley. XXVIII. On Jacobi’s Elliptic functions, in reply to the Rev. Brice Bronwin; and on Quaternions: To the editors of the Philosophical Magazine

- and Journal. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26(172):208–211, 1845.
- [CS50] Claude Chevalley and Richard D Schafer. The exceptional simple Lie algebras F_4 and E_6 . *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(2):137–141, 1950.
- [Del99] Pierre Deligne. Notes on Spinors. *Quantum fields and strings: a course for mathematicians*, 1:99–135, 1999.
- [Dic19] Leonard E Dickson. On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem. *Annals of Mathematics*, pages 155–171, 1919.
- [Eld09] Alberto Elduque. Tits construction of the exceptional simple lie algebras. *arXiv preprint arXiv:0907.3789*, 2009.
- [Fre54] Hans Freudenthal. Beziehungen der E_7 und E_8 zur oktavenebene I-II. *Proceedings of the Section of Sciences, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. Series A, mathematical sciences*, 57:218–230, 1954.
- [Gab72] Peter Gabriel. Unzerlegbare darstellungen I. *Manuscripta mathematica*, 6(1):71–103, 1972.
- [Gra45] John T Graves. XLVI. on a connection between the general theory of normal couples and the theory of complete quadratic functions of two variables. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 26(173):315–320, 1845.
- [Hur63] Adolf Hurwitz. Über die Komposition der quadratischen Formen. In *Mathematische Werke*, pages 641–666. Springer, 1963.
- [JNW93] Pascual Jordan, J von Neumann, and Eugene P Wigner. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. In *The Collected Works of Eugene Paul Wigner*, pages 298–333. Springer, 1993.
- [Kac77] Victor G Kac. Lie superalgebras. *Advances in mathematics*, 26(1):8–96, 1977.
- [Kil88] Wilhelm Killing. Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. *Mathematische Annalen*, 33(1):1–48, 1888.
- [KJ08] Alexander Kirillov Jr. *An introduction to Lie groups and Lie algebras*, volume 113. Cambridge University Press, 2008.

- [LM16] H. Blaine Lawson and Marie-Louise Michelsohn. *Spin Geometry*. Princeton University Press, 2016.
- [Lou97] Pertti Lounesto. *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge University Press, 1997.
- [McC04] Kevin McCrimmon. *A taste of Jordan algebras*. Springer, 2004.
- [Sch17] Richard D Schafer. *An introduction to nonassociative algebras*. Courier Dover Publications, 2017.
- [Ser00] Jean-Pierre Serre. *Complex semisimple Lie algebras*. Springer Science & Business Media, 2000.
- [Tit66] Jacques Tits. Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles. I. Construction. *Indag. Math*, 28(223-237):204, 1966.
- [Vin05] E. B. Vinberg. Construction of the exceptional simple lie algebras. *Translations of the American Mathematical Society-Series 2*, 213:241–242, 2005.
- [Zel79] Efim Isaakovich Zel’manov. Primary Jordan algebras. *Algebra i Logika*, 18(2):162–175, 1979.