

# **Aspectos Aritméticos de la Teoría de Ehrhart**

---

*Presentado por*

***David Esteban Martín Acosta***

*Estudiante de Pregrado en Ciencias de la Computación*

*Universidad Nacional de Colombia, Medellín*

Una monografía presentada como requisito parcial para optar al título de  
Científico de la Computación

Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional de Colombia  
Medellín, Colombia

Julio 2025

*Aspectos Aritméticos de la Teoría de Ehrhart, © Julio 2025*

**Autor:**

David Esteban Martín Acosta

**Director:**

Camilo Arias Abad

*Profesor Asociado, Universidad Nacional de Colombia*

**Universidad:**

Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia



## **DEDICATORIA**

---

*A mi amada abuela, cuya memoria permanece como una luz eterna en mi vida. Tu sabiduría, bondad y amor incondicional siguen guiándome, incluso más allá de este mundo. Este logro es un tributo a ti.*



## AGRADECIMIENTOS

---

Quiero agradecer profundamente al profesor Camilo Arias Abad, quien a lo largo de mi formación puso a mi completa disposición su experiencia y conocimiento en topología y geometría. Ha sido un placer y un honor poder contar con su amistad, profesionalismo, calidad como persona y como docente, la cual se refleja en el hecho de que nunca se negó a ofrecerme su apoyo y orientación, incluso en temas que resultaban complejos para mí. Sin su paciencia, compromiso y disposición constante, hubiera sido imposible haber logrado avanzar en este proceso académico. Espero poder continuar mi camino académico inspirado por su pasión por las matemáticas, su claridad en la enseñanza y su dedicación incondicional a la formación de sus estudiantes.

Del ámbito académico, quiero agradecer al profesor Darío Alejandro García Rico de la Universidad de los Andes, por haberme guiado durante gran parte de la carrera e impulsado mi interés por las matemáticas. Y a Sophia Elia, de la University of California, Berkeley, por su generosa disposición a compartir material, responder inquietudes y acompañarme a lo largo de mi proceso de investigación en la teoría de Ehrhart. Su apoyo constante y desinteresado, a pesar de la distancia, fue una ayuda invaluable durante el desarrollo de este trabajo.

A quienes tuve el honor de conocer y que me brindaron su acompañamiento a lo largo de mi formación profesional, deseo expresar mi más profundo agradecimiento. En primer lugar, a Oswaldo Peña, por ser un ejemplo constante de profesionalismo, disciplina y paciencia, y por ofrecerme un apoyo fundamental en el ámbito personal. A Rafael Guzmán, por su amistad incondicional durante toda la carrera y por las enriquecedoras conversaciones que sostuvimos sobre diversos temas de las matemáticas, las cuales contribuyeron de manera significativa a mi crecimiento académico. Y, de manera muy especial, a la señora Yolanda Otero, quien, con su generosidad y entrega, se convirtió en una segunda madre para mí, siendo un apoyo incondicional en todos los aspectos de mi vida a lo largo de este proceso formativo.

Por último, y no menos importante, quiero agradecer a mis hermanos Leonardo y Pablo, por ser para mí un ejemplo de constancia y fortaleza, y por su amor y apoyo incondicional a lo largo de esta etapa. A mi abuela María Clotilde Cuesta, quien, con su cariño y sus palabras, siempre me motivó a estudiar matemáticas, recordándome con ternura que nunca logró entender las divisiones. Y finalmente, a mis padres, Diana Acosta y Victor Martin, por su amor, sacrificio y apoyo inquebrantable, espero que con este logro pueda honrar todo el esfuerzo que hicieron por mí.



## RESUMEN

---

En el contexto de la geometría de politopos enteros, los polinomios de Ehrhart surgieron en la década de 1960 como una herramienta para enumerar puntos de retícula en múltiplos enteros de un politopo convexo. En las décadas posteriores, dichos polinomios se convirtieron en un objeto central dentro de la combinatoria geométrica y la teoría de álgebras graduadas, en parte gracias a su estrecha conexión con estructuras algebraicas y fenómenos enumerativos.

Una clase particularmente importante de politopos, los llamados politopos reflexivos, fue introducida en el estudio de variedades tóricas Fano y se caracterizó por su simetría combinatoria, el polinomio  $h^*$  asociado a ellos es palíndromo. Esta propiedad implica que las raíces del polinomio de Ehrhart están distribuidas simétricamente con respecto a la recta vertical  $\Re(z) = -\frac{1}{2}$ , lo que dio lugar a una pregunta natural: ¿bajo qué condiciones estas raíces se ubican exactamente sobre tal línea?

Este fenómeno, denominado Hipótesis de la Línea Canónica (**CL**), fue observado en ejemplos clásicos como el hipercubo y el octaedro  $d$ -dimensional. La conjetura de que todas las raíces de ciertos polinomios de Ehrhart tienen parte real igual a  $-\frac{1}{2}$  fue considerada una analogía combinatoria de la Hipótesis de Riemann, motivo por el cual fue objeto de creciente atención en la literatura matemática contemporánea.

Un avance decisivo fue logrado por Fernando Rodríguez-Villegas en 2002 (véase [1]), al demostrar que si el numerador  $U(t)$  de la serie de Ehrhart tiene todas sus raíces en la circunferencia unitaria en el plano complejo, entonces el polinomio de Ehrhart resultante tiene todas sus raíces con parte real constante. Este resultado permitió explicar de forma general el alineamiento vertical de raíces en politopos reflexivos como los politopos cruzados, cuyo numerador  $U(t) = (1+t)^d$  cumple la condición del teorema.

De forma más reciente, el concepto de intercalamiento ha surgido como una poderosa herramienta para garantizar que las raíces de una sucesión de polinomios ortogonales se alternen cuidadosamente a lo largo de la línea  $\Re(z) = -\frac{1}{2}$ . En particular, se ha demostrado que, para familias como los politopos cruzados  $\Diamond_d$ , las raíces de  $\mathcal{L}_{\Diamond_d}(z)$  no solo yacen en la recta crítica, sino que además cada polinomio de dimensión  $d$  interlaza al de dimensión  $d+1$ , reforzando la estabilidad vertical de las raíces.

La confluencia de ambos enfoques combinatorio y de intercalamiento, consolidó el estudio de los polinomios de Ehrhart como una interfaz natural entre combinatoria algebraica, teoría analítica de números y geometría discreta. El caso de los politopos reflexivos se erige así como modelo paradigmático de este fenómeno, cuyas implicaciones siguen siendo objeto de exploración en la actualidad.



# CONTENIDOS

---

Dedicatoria . . . . .	iv
Agradecimientos . . . . .	vi
Resumen . . . . .	viii
Lista de tablas . . . . .	xii
Acrónimos . . . . .	xiii
<b>1 Introducción . . . . .</b>	<b>1</b>
1.1 Preliminares de convexidad: envolventes y compacidad . . . . .	2
1.2 Fundamentos de politopos convexos en retículos . . . . .	5
1.3 Estructura simplicial y triangulaciones de politopos . . . . .	12
<b>Referencias . . . . .</b>	<b>19</b>
<b>Bibliografía . . . . .</b>	<b>21</b>

## LISTA DE FIGURAS

---

1.1	Hiperplano en $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación $ax + by + cz + d = 0$	2
1.2	Ejemplos de conjuntos convexos y no convexos	3
1.3	Envolvente convexa de un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$	4
1.4	Politopo en V-representación (izq.) y H-representación (der.)	6
1.5	Caras de un politopo	7
1.6	Vértices numerados $v_1, \dots, v_6$ de un politopo	7
1.7	Facetas de un politopo	8
1.8	Retículos estándar y oblicuo en $\mathbb{R}^2$	10
1.9	Politopo de retículo	11
1.10	Ejemplos de $d$ -símplices para $d = 0, 1, 2, 3$	12
1.11	Triangulaciones unimodulares de politopos en dimensiones 2 y 3	14

## **LISTA DE TABLAS**

---

# ACRÓNIMOS

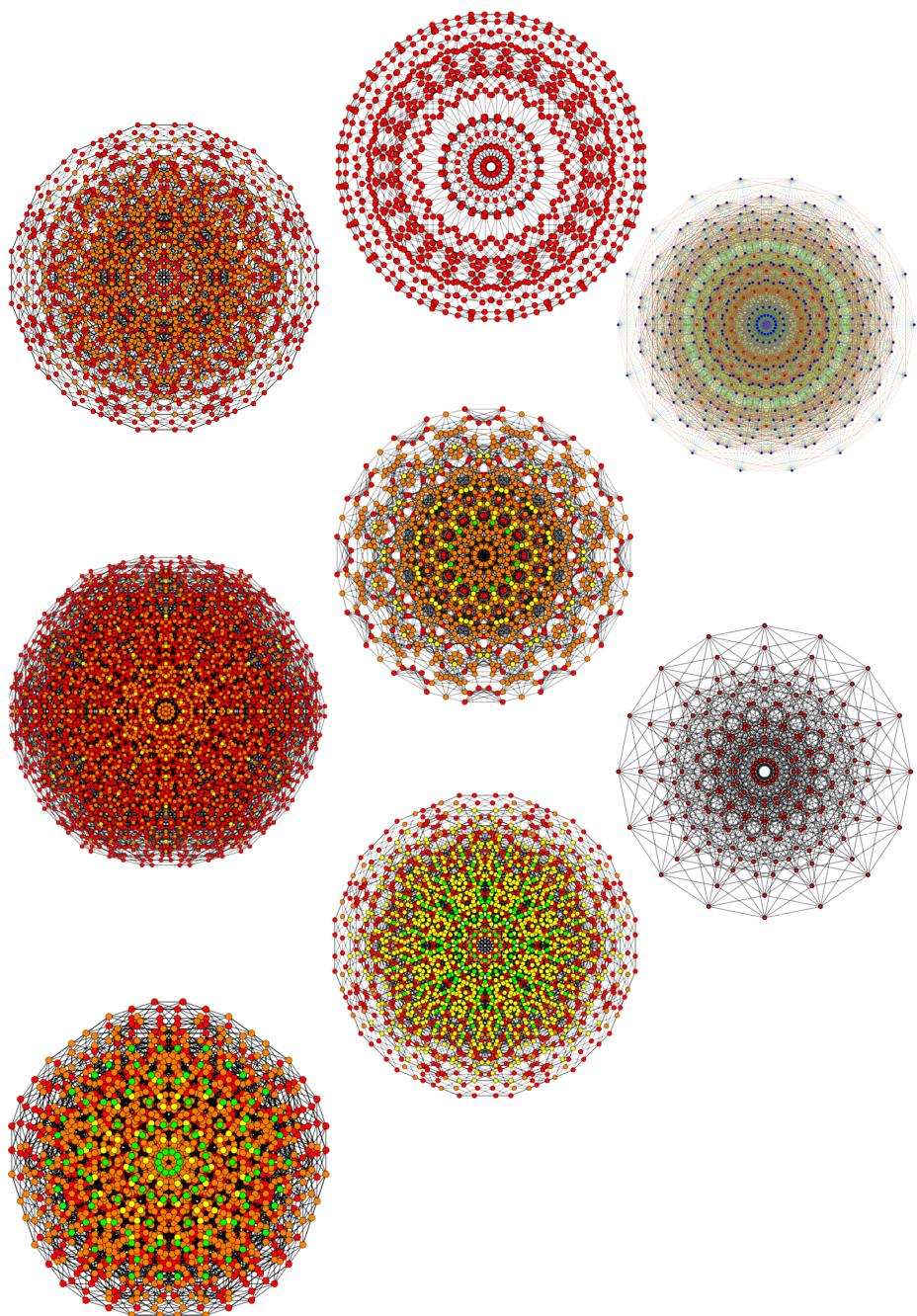
---

Abreviatura	Término
<b>CL</b>	Hipótesis de la línea canónica
$\sqcup, \sqcup$	Unión disjunta
$\ \cdot\ $	Norma infinito
$\langle *, * \rangle$	Producto interno estándar en $\mathbf{R}^d$
$\cap$	Intersección generalizada
$\cup$	Unión generalizada
$\emptyset$	Conjunto vacío
$\text{aff}(\mathcal{X})$	Envolvente afín del conjunto $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\mathcal{H}$	Hiperplano
$\mathcal{H}^+, \mathcal{H}^-$	Semiespacios cerrados de $\mathbf{R}^d$
$\mathcal{H}^<, \mathcal{H}^>$	Semiespacios abiertos de $\mathbf{R}^d$
$\text{conv}(\mathcal{X})$	Envolvente convexa de un conjunto finito de puntos $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\dim(\mathcal{P})$	Dimensión de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\Lambda$	Retícula en $\mathbf{R}^d$
$\Lambda'$	Sub retícula en $\Lambda \subseteq \mathbf{R}^d$
$\Delta^d$	$d$ -símplex
$\chi(\mathcal{P})$	Característica de Euler de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\mathcal{N}_{\mathcal{T}}(\mathcal{P})$	Número de simplices de la triangulación de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\mathcal{A}(\mathcal{P})$	Área de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\mathcal{I}(\mathcal{P})$	Conjunto de puntos interiores enteros de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\partial\mathcal{B}(\mathcal{P})$	Conjunto de puntos frontera enteros de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\mathcal{T}_n$	Tetraedro de Reeve
$k\mathcal{P}$	$k$ -ésima dilatación entera de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\mathcal{L}_{\mathcal{P}(k)}$	Polinomio de Ehrhart de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$Ehr_{\mathcal{P}}(z)$	Serie de Ehrhart de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\text{vol}(\mathcal{P})$	Volumen de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\text{relint}(\mathcal{P})$	Interior relativo de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\mathcal{L}_{\mathcal{P}^\circ(k)}$	Polinomio de Ehrhart del interior relativo de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\mathcal{P}^*$	Politopo dual de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\mathcal{P}^\circ$	Politopo interior de un politopo $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^d$
$\Diamond_d$	Politopo cruzado $d$ -dimensional
$\mathbf{Z}_{\geq 0}$	Conjunto de los enteros no negativos
$\mathbf{Z}_{> 0}$	Conjunto de los enteros positivos
$\mathbf{R}_{> 0}$	Conjunto de los reales positivos
$\mathbf{R}_{\geq 0}$	Conjunto de los reales no negativos
$\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$	Politopo de aristas simétricas asociadas a un grafo
$\mathcal{V}(\mathcal{G})$	Conjunto de vértices de un grafo $\mathcal{G}$
$\mathcal{E}(\mathcal{G})$	Conjunto de aristas de un grafo $\mathcal{G}$
$sgn f(\beta)$	Signo de la raíz $\beta$ del polinomio $f$
$\mathcal{K}_{(a_1, \dots, a_k)}$	Grafo completo $k$ -pártito
$\mathcal{P}Gen_{d,i}$	Politopo reflexivo de dimensión $d$ e $i$ -ésimo generado por alg genético



# 1

## Introducción



*"We especially need imagination in science; not everything is mathematics, nor is everything mere logic, it is also about a touch of beauty and poetry"*

Maria Montessori

En este capítulo se introducen los fundamentos de geometría afín y convexa, politopos en  $\mathbb{R}^d$  y retículos en  $\mathbb{Z}^d$ , junto con triangulaciones unimodulares. Los detalles técnicos omitidos se pueden consultar en:[2], [3], [4].

### 1.1 Preliminares de convexidad: envolventes y compacidad

Antes de formalizar la envolvente afín se fija el marco geométrico dentro del cual se trabajará. Se considerará  $\mathbb{R}^d$  como un espacio afín sobre  $\mathbb{R}$ ; en consecuencia, toda combinación de puntos mencionada será una combinación afín, es decir, una expresión en la que los coeficientes suman uno. Con este convenio se introduce a continuación la definición de la envolvente afín para un conjunto finito de puntos.

#### Definición 1.1.1 Envolvente afín

Sea  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ . Se denomina envolvente afín de  $\mathcal{X}$ , denotada por  $\text{aff}(\mathcal{X})$ , como el conjunto de todos los puntos que pueden escribirse como combinaciones afines de elementos de  $\mathcal{X}$  es decir,

$$\text{aff}(\mathcal{X}) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

Este conjunto corresponde al subespacio afín más pequeño que contiene a  $\mathcal{X}$ .

Para describir sub estructuras de codimensión uno, resulta conveniente introducir el producto interno estándar en  $\mathbb{R}^d$ , para dos vectores,  $x = (x_1, \dots, x_d)$  y  $y = (y_1, \dots, y_d)$  en  $\mathbb{R}^d$  como:  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ .

#### Definición 1.1.2 Hiperplano

Un hiperplano, en  $\mathbb{R}^d$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^d$  definido como:

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle = \alpha\}$$

donde  $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  es un vector normal al hiperplano y  $\alpha \in \mathbb{R}$  es un escalar que determina la posición del hiperplano en el espacio.

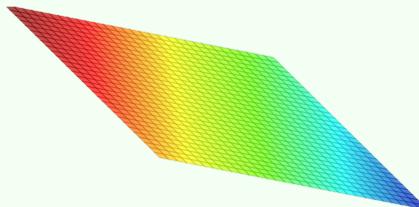


Figura 1.1: Hiperplano en  $\mathbb{R}^3$  definido por la ecuación  $ax + by + cz + d = 0$

El hiperplano  $\mathcal{H}$  induce dos regiones determinadas por la desigualdad asociada. Con signo no estricto, se obtiene la variante cerrada y, con signo estricto, la abierta. A continuación se definen formalmente estos semiespacios.

#### Definición 1.1.3 Semiespacios abiertos y cerrados

Se asocia  $\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle = \alpha\}$  los semiespacios cerrados

$$\mathcal{H}^+ = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle \geq \alpha\}, \quad \mathcal{H}^- = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle \leq \alpha\}$$

y los semiespacios abiertos:

$$\mathcal{H}^> = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle > \alpha\}, \quad \mathcal{H}^< = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u \rangle < \alpha\}$$

A continuación se introduce la noción de convexidad, esencial para caracterizar conjuntos cuya estructura geométrica admite descripciones tanto afines como por intersección de semiespacios.

#### Definición 1.1.4 Conjunto convexo

Se dice que  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$  es convexo si para todo par de puntos  $x, y \in \mathcal{X}$  y para toda combinación afín no negativa  $\lambda x + (1 - \lambda)y$  con  $\lambda \in [0, 1]$ , dicho punto pertenece a  $\mathcal{X}$ .

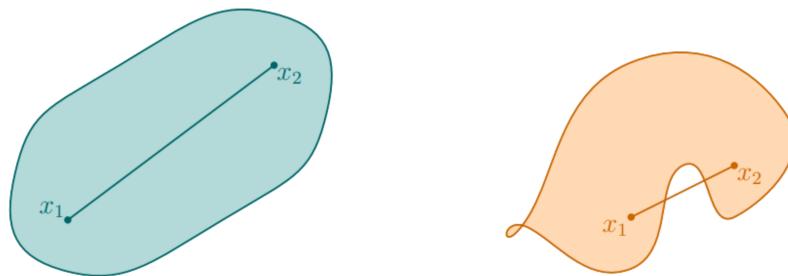


Figura 1.2: Ejemplos de conjuntos convexos y no convexos

A continuación se aborda el proceso de generación de conjuntos convexos a partir de un conjunto arbitrario de puntos.

#### Definición 1.1.5 Envolvente convexa

Sea  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  un conjunto finito de puntos. Se denomina envolvente convexa de  $\mathcal{X}$  al conjunto convexo más pequeño que lo contiene, y se denota por  $\text{conv}(\mathcal{X})$ . Formalmente, se tiene:

$$\text{conv}(\mathcal{X}) := \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

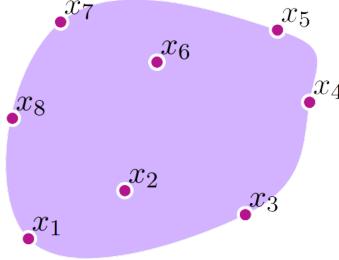


Figura 1.3: Envolvente convexa de un conjunto de puntos en  $\mathbb{R}^2$

Dado que la envolvente convexa se construye a partir de combinaciones afines con coeficientes restringidos a ser no negativos, puede considerarse como una subcolección particular dentro de la envolvente afín. En consecuencia, la relación de contención  $\text{conv}(\mathcal{X}) \subseteq \text{aff}(\mathcal{X})$  se establece de manera inmediata.

### Teorema 1.1.6 Carathéodory

Sea  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$  un conjunto no vacío, entonces, todo punto de  $\text{conv}(\mathcal{X})$  puede expresarse como una combinación convexa de a lo sumo  $d + 1$  puntos de  $\mathcal{X}$ , es decir,

$$\text{conv}(\mathcal{X}) = \left\{ \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i x_i : x_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\}$$

#### Demostración:

Considérese un conjunto  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  y un punto  $x \in \text{conv}(\mathcal{X})$ . Por definición, existe una combinación convexa

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \quad \text{con } \lambda_i \geq 0 \text{ y } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que  $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda_i > 0$ , ya que los coeficientes nulos no afectan la combinación. Para el caso en que el número de puntos involucrados en la combinación es menor o igual a  $d + 1$ , la afirmación queda demostrada. En el otro caso, se demostrará que  $x$  se puede representar como combinación convexa de a lo sumo  $d + 1$  puntos del conjunto  $\mathcal{X}$ . Para esto, considérese el siguiente sistema lineal homogéneo en  $\mathbb{R}^d$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0.$$

Este sistema tiene  $d + 1$  ecuaciones, una por componente del espacio y una por la condición de suma, pero  $n > d + 1$  incógnitas. Por el teorema de Kronecker-Capelli, existe una solución no trivial. Se escoge tal solución  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  con al menos un componente positivo. Se define, para un parámetro  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\lambda_i(t) := \lambda_i - t\alpha_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Nótese que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i - t \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 - t \cdot 0 = 1.$$

y además,  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)x_i$  ya que  $\sum \alpha_i x_i = 0$ . Para preservar la no negatividad de los coeficientes, se selecciona el mayor valor posible de  $t$  tal que  $\lambda_i(t) \geq 0$  para todo  $i$ . Se define

$$t := \min \left\{ \frac{\lambda_i}{\alpha_i} : \alpha_i > 0 \right\}$$

Este valor es positivo y finito, y garantiza que al menos uno de los nuevos coeficientes  $\lambda_j(t)$  se anule. Así, se obtiene una nueva combinación convexa que representa  $x$ , pero involucrando estrictamente menos puntos. Reiterando este procedimiento inductivamente, se concluye que todo punto en  $\text{conv}(\mathcal{X})$  puede expresarse como combinación convexa de a lo sumo  $d + 1$  puntos de  $\mathcal{X}$ . ■

### Lema 1.1.7

Sea  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$  un conjunto compacto y no vacío, entonces, su envolvente convexa  $\text{conv}(\mathcal{X})$  también es compacta.

#### Demostración:

Sea  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^d$  un conjunto compacto y no vacío. Se demostrará que  $\text{conv}(\mathcal{X})$  es compacto. Para ello, considérese una sucesión  $\{x^k\} \subseteq \text{conv}(\mathcal{X})$ . Por el teorema de Carathéodory, cada término  $x^k$  puede expresarse como una combinación convexa de a lo sumo  $d + 1$  puntos de  $\mathcal{X}$ , es decir,

$$x^k = \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i^k x_i^k, \text{ donde } \alpha_i^k \geq 0, \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i^k = 1, \text{ y } \forall i, k \quad x_i^k \in \mathcal{X}.$$

El conjunto de pares  $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_{d+1}^k, x_1^k, \dots, x_{d+1}^k) \in \Delta^d \times \mathcal{X}^{d+1}$ , pertenece al producto del  $d$ -simplex  $\Delta^d$  que es compacto con  $\mathcal{X}^{d+1}$  también compacto, por ser producto finito de conjuntos compactos. Por tanto, el conjunto  $\Delta^d \times \mathcal{X}^{d+1}$  es compacto. Como consecuencia, existe una subsucesión convergente

$$(\alpha_1^k, \dots, \alpha_{d+1}^k, x_1^k, \dots, x_{d+1}^k) \rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_{d+1}, x_1, \dots, x_{d+1})$$

donde  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i = 1$ , y  $x_i \in \mathcal{X}$ . Tomando el límite de la subsucesión, se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \sum_{i=1}^{d+1} \alpha_i x_i \in \text{conv}(\mathcal{X})$$

Mostrando que toda sucesión en  $\text{conv}(\mathcal{X})$  admite una subsucesión convergente con límite en  $\text{conv}(\mathcal{X})$ , por lo tanto,  $\text{conv}(\mathcal{X})$  es compacto. ■

## 1.2 Fundamentos de politopos convexos en retículos

En esta sección se estudian, de forma elemental, las nociones de politopo en  $\mathbb{R}^d$ . Se comienza con la definición general de politopo y sus representaciones  $\mathcal{V}-\mathcal{H}$ , a continuación, se introduce el politopo de retículo, cuyos vértices pertenecen a un retículo

$\Lambda$ , y se exponen las nociones de sub retículo, puntos de retículo y determinante de retículo como invariantes aritméticos combinatorios.

### Definición 1.2.1 Politopo

Sea  $d \in \mathbb{N}$ . Un subconjunto  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$  se denomina politopo si es convexo, compacto y de dimensión finita. Equivalentemente,  $\mathcal{P}$  admite las siguientes representaciones:

- Envolvente convexa de un conjunto finito de puntos ( $\mathcal{V}$  - Politopo):

$$\mathcal{P} = conv(\mathcal{X}) := conv\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}$$

- Intersección acotada de un número finito de semiespacios afines cerrados ( $\mathcal{H}$  - Politopo):

$$\mathcal{P} = \bigcap_{j=1}^n \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \langle x, u_j \rangle \leq \alpha_j \right\}, u_j \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \text{ y } \alpha_j \in \mathbb{R} \text{ para } j = 1, \dots, n$$

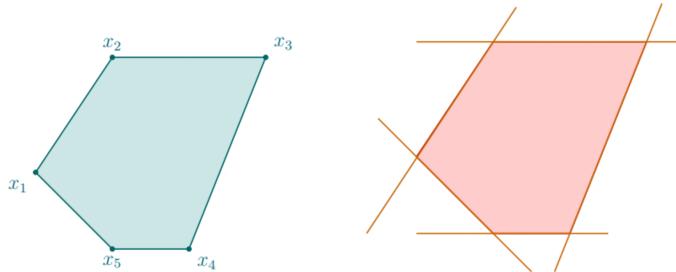


Figura 1.4: Politopo en V-representación (izq.) y H-representación (der.)

Antes de demostrar la equivalencia entre las representaciones  $\mathcal{V}-\mathcal{H}$  de un politopo, se introducen conceptos fundamentales que servirán de soporte al argumento.

### Definición 1.2.2 Dimensión de un politopo

Se define la dimensión de  $\mathcal{P}$ , como la dimensión del menor subespacio afín que contiene a  $\mathcal{P}$ , es decir

$$\dim(\mathcal{P}) := \dim(\text{aff}(\mathcal{P}))$$

### Definición 1.2.3 Cara de un politopo

Una cara de  $\mathcal{P}$  es un subconjunto no vacío  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$  tal que existe un funcional lineal  $\phi \in (\mathbb{R}^d)^*$  que satisface

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{P} : \phi(x) = \max_{y \in \mathcal{P}} \phi(y)\}$$

La dimensión está dada por  $\dim(\mathcal{F}) := \dim(\text{aff}(\mathcal{F}))$

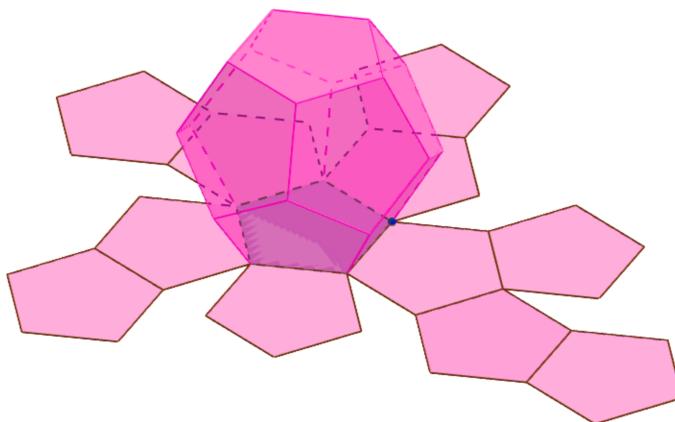


Figura 1.5: Caras de un politopo

### Definición 1.2.4 Vértice de un politopo

Un vértice de  $\mathcal{P}$  es un punto  $v \in \mathcal{P}$  tal que  $\{v\}$  es una cara de  $\mathcal{P}$ . Equivalentemente,  $v$  no puede escribirse como combinación convexa de otros puntos distintos de  $\mathcal{P}$ .

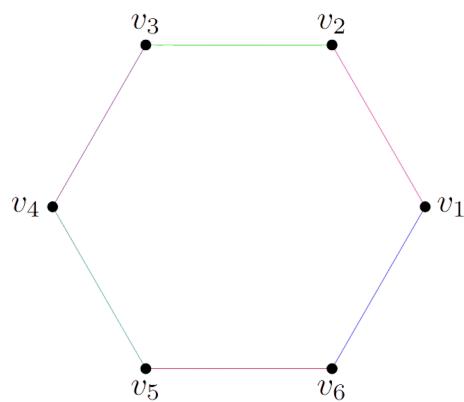


Figura 1.6: Vértices numerados  $v_1, \dots, v_6$  de un politopo

### Definición 1.2.5 Faceta de un politopo

Una faceta de  $\mathcal{P}$  es una cara  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$  de dimensión  $\dim(\mathcal{P}) - 1$

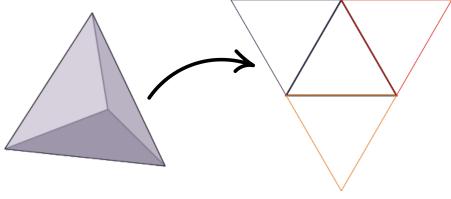


Figura 1.7: Facetas de un politopo

### Teorema 1.2.6 Equivalencia entre V-Politopo y H-Politopo<sup>([4])</sup>

Sea  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$ , entonces  $\mathcal{P}$  es un politopo si y solo si, se verifica una de las siguientes condiciones

- $\mathcal{P}$  es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en  $\mathbb{R}^d$
- $\mathcal{P}$  es la intersección acotada de un número finito de semiespacios afines cerrados.

#### Demostración:

Sea  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$  un conjunto no vacío y convexo. La demostración se desarrolla en dos construcciones independientes:

##### $\Rightarrow$ Todo H-politopo es un V-politopo

Sea  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$  un  $\mathcal{H}$ -politopo, es decir, un conjunto acotado que puede describirse como la intersección de un número finito de semiespacios afines cerrados. Se demostrará que  $\mathcal{P}$  puede describirse como la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos de  $\mathbb{R}^d$ . Procediendo por inducción sobre la dimensión  $d$ .

Sí  $d = 0$ , entonces  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^0$  consiste en un único punto. Este conjunto es, por definición, la envolvente convexa de sí mismo. Por tanto,  $\mathcal{P}$  es un  $\mathcal{V}$ -politopo. Sea  $d \geq 1$ , supóngase que todo  $\mathcal{H}$ -politopo en dimensión menor o igual que  $d - 1$  puede representarse como la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos. Sea ahora  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$  un  $\mathcal{H}$ -politopo, por lo que existe una colección finita  $\Gamma$  de semiespacios cerrados de  $\mathbb{R}^d$  tal que  $\mathcal{P} = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma$ . Para cada  $\gamma \in \Gamma$ , denótese por  $\partial\gamma$  el hiperplano que delimita el semiespacio  $\gamma$ , y defínase la intersección  $\mathcal{F}_\gamma := \mathcal{P} \cap \partial\gamma$ . Cada conjunto  $\mathcal{F}_\gamma$  es una cara de  $\mathcal{P}$ , y como tal, es un  $\mathcal{H}$ -politopo contenido en un subespacio afín de dimensión estrictamente menor que  $d$ . Por la hipótesis inductiva, cada  $\mathcal{F}_\gamma$  puede escribirse como  $\mathcal{F}_\gamma = \text{conv}(\mathcal{V}_\gamma)$ , donde  $\mathcal{V}_\gamma$  es un conjunto finito de puntos.

Sea ahora  $\mathcal{V} := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{V}_\gamma$ , se demostrará qué  $\mathcal{P} = \text{conv}(\mathcal{V})$ . Sea  $x \in \mathcal{P}$  un punto arbitrario, debido a que  $\mathcal{P}$  es convexo y compacto, puede encontrarse un segmento  $[y, z] \subseteq \mathcal{P}$  tal que  $x \in [y, z]$  y  $y, z \in \partial\mathcal{P}$ , entonces, existen  $\alpha, \beta \in \Gamma$  tales que  $y \in \mathcal{F}_\alpha$ ,  $z \in \mathcal{F}_\beta$ . Dado que  $y \in \text{conv}(\mathcal{V}_\alpha)$  y  $z \in \text{conv}(\mathcal{V}_\beta)$ , se tiene qué  $x \in \text{conv}(\mathcal{V}_\alpha \cup \mathcal{V}_\beta) \subseteq \text{conv}(\mathcal{V})$ . Por tanto,  $\mathcal{P} \subseteq \text{conv}(\mathcal{V})$ , y como  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}$ , también se tiene la inclusión inversa. Así, se concluye que  $\mathcal{P} = \text{conv}(\mathcal{V})$ , y por lo tanto,  $\mathcal{P}$  es un  $\mathcal{V}$ -politopo.

##### $\Leftarrow$ Todo V-politopo es un H-politopo

Sea  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$  un  $\mathcal{V}$ -politopo, es decir, un conjunto compacto y convexo que puede escribirse como la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos. Por lo tanto, existe un conjunto  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  tal que  $\mathcal{P} = \text{conv}(\mathcal{X})$ . Se asumirá que  $\dim(\mathcal{P}) = d$ , es decir, que  $\mathcal{P}$  es de dimensión completa en  $\mathbb{R}^d$ . Se demostrará que  $\mathcal{P}$  también puede expresarse como la intersección de un número finito de semiespacios afines cerrados, lo que equivale a decir que  $\mathcal{P}$  es un  $\mathcal{H}$ -politopo.

Como  $\mathcal{P}$  es compacto, convexo y de dimensión completa, se tiene que  $\text{int}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$ . Sea  $x_0 \in \text{int}(\mathcal{P})$  y  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  la translación definida por  $\mathcal{T}(x) = x - x_0$ . Se define el politopo trasladado  $\mathcal{P}' := \mathcal{T}(\mathcal{P}) = \mathcal{P} - x_0 = \{x - x_0 : x \in \mathcal{P}\}$ , el cual es convexo, pues la translación es una transformación afín, por lo tanto, es una función lineal continua. Como la imagen de un conjunto convexo bajo una aplicación lineal es convexa, y  $\mathcal{P}$  es convexo, se concluye que  $\mathcal{P}'$  es convexo. También, es compacto, ya que la translación es un homeomorfismo, por lo que preserva las propiedades topológicas. De este modo, como  $\mathcal{P}$  es compacto, al ser la envolvente convexa de un conjunto finito, se deduce que  $\mathcal{P}'$  es compacto. Además, posee dimensión  $d$ , ya que  $\dim(\mathcal{P}') = \dim(\mathcal{P})$  y satisface que  $0 \in \text{int}(\mathcal{P}')$ , pues  $x_0 \in \text{int}(\mathcal{P})$ . Debido a que  $\mathcal{P}' = \text{conv}(\mathcal{V}')$ , donde  $\mathcal{V}' := \{v_i - x_0\}_{i=1}^n$ ,  $\mathcal{P}'$  sigue siendo un  $\mathcal{V}$ -politopo.

Por las características topológicas de  $\mathcal{P}'$  y contenencia del origen en su interior, se define su conjunto polar como  $(\mathcal{P}')^* := \left\{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, x \rangle \leq 1 \text{ para todo } x \in \mathcal{P}'\right\}$ . Dado que  $\mathcal{P}' = \text{conv}(\mathcal{V}')$ , es suficiente imponer la condición sobre los puntos de  $\mathcal{V}'$ , y se tiene  $(\mathcal{P}')^* = \bigcap_{v \in \mathcal{V}'} \left\{y \in \mathbb{R}^d : \langle y, v \rangle \leq 1\right\}$ . Así,  $(\mathcal{P}')^*$  es una intersección finita de semiespacios cerrados, es decir, un  $\mathcal{H}$ -politopo, luego por la condición de doble polaridad  $((\mathcal{P}')^*)^* = \mathcal{P}'$ . Lo que implica que  $\mathcal{P}'$  también puede escribirse como intersección finita de semiespacios cerrados, y, por tanto, es un  $\mathcal{H}$ -politopo. Finalmente, como  $\mathcal{P} = \mathcal{P}' + x_0$ , se concluye que  $\mathcal{P}$  es también un  $\mathcal{H}$ -politopo, ya que la translación de un  $\mathcal{H}$ -politopo es nuevamente un  $\mathcal{H}$ -politopo.

■

### Definición 1.2.7 Retículo

Un retículo en  $\mathbb{R}^d$  es un subgrupo aditivo discreto  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  tal que existe un conjunto de vectores linealmente independientes  $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^d$ , con  $1 \leq k \leq d$  para el cual se cumple

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i v_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Una colección finita  $\{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^d$  que satisface la condición anterior se denomina base de un retículo  $\Lambda$ .
- El número  $k$  se denomina el rango de  $\Lambda$ . Si  $k = d$ , se dice que el retículo es de rango completo.

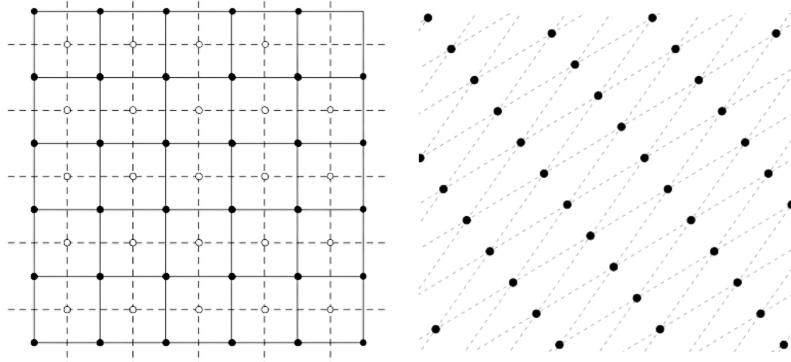


Figura 1.8: Retículos estándar y oblicuo en  $\mathbb{R}^2$

#### Definición 1.2.8 Sub retículo

Sea  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  un retículo de rango  $k$ . Un subconjunto  $\Lambda' \subseteq \Lambda$  se denomina un sub retículo de  $\Lambda$  si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\Lambda'$  es un subgrupo aditivo de  $\Lambda$
- $\Lambda'$  es discreto en  $\mathbb{R}^d$
- $\Lambda'$  es un retículo en su espacio generado  $\text{span}_{\mathbb{R}}(\Lambda')$ , es decir, existe una base  $\mathcal{B}' = \{b'_1, \dots, b'_\ell\} \subseteq \mathbb{R}^d$ , con  $\ell = \text{rank}(\Lambda') \leq k$ , tal que

$$\Lambda' = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} a_i b'_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

Si además se cumple que  $\text{span}_{\mathbb{R}}(\Lambda') = \text{span}_{\mathbb{R}}(\Lambda)$ , se dice que  $\Lambda'$  es un sub retículo de rango completo.

#### Definición 1.2.9 Determinante de un retículo

Sean  $\Lambda' \subseteq \Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  dos retículos tales que  $\text{span}_{\mathbb{R}}(\Lambda') = \text{span}_{\mathbb{R}}(\Lambda)$ . Sean  $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_d\}$  una base de  $\Lambda$ , y  $\mathcal{B}' = \{b'_1, \dots, b'_d\}$  una base de  $\Lambda'$ . Sea  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$  la matriz que representa el cambio de base de  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$ , es decir, la matriz tal que

$$b'_j = \sum_{i=1}^d A_{ij} b_i \quad \text{para } j = 1, \dots, d$$

entonces, el determinante de  $\Lambda'$  relativo a  $\Lambda$  se define como

$$\det_{\Lambda}(\Lambda') := |\det A|.$$

#### Definición 1.2.10 Politopo de retículo

Sea  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$  un retículo. Un politopo de retículo es un politopo  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$  cuyos vértices pertenecen a  $\Lambda$ .

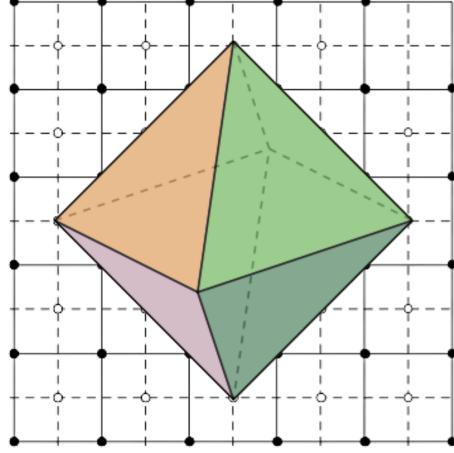


Figura 1.9: Politopo de retículo

### Proposición 1.1.11

El conjunto  $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$  es un retículo de rango  $d$  y determinante uno.

#### Demostración:

Conforme a la definición adoptada, un subconjunto  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  es un retículo si es un subgrupo aditivo libre abeliano de rango  $d$  y es discreta en la topología euclídea. Se procede a verificar ambos requisitos para  $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ .

#### Estructura de grupo libre abeliano de rango d

Sea  $\{e_1, \dots, e_d\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^d$ , donde  $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ésima}}, 0, \dots, 0)$ . Se muestra que  $\mathbb{Z}^d$  es el subgrupo generado de forma libre por  $\{e_1, \dots, e_d\}$ . Partiendo por la inclusión, se tiene que para todo vector  $x = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ ,  $x = \sum_{i=1}^d n_i e_i$  con  $n_i \in \mathbb{Z}$ , luego  $x$  pertenece al subgrupo  $\bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z} e_i$ . Ahora, para la independencia integral, si  $\sum_{i=1}^d k_i e_i = 0$  con coeficientes  $k_i \in \mathbb{Z}$ , la coordenada  $i$ -ésima del vector nulo es  $k_i = 0$ ; por tanto  $k_1 = \dots = k_d = 0$ . La familia  $\{e_i\}$  es libre sobre  $\mathbb{Z}$ . Por lo tanto, se concluye que  $\mathbb{Z}^d = \bigoplus_{i=1}^d \mathbb{Z} e_i$ , es un grupo libre abeliano de rango  $d$ .

#### Discreción de $\mathbb{Z}^d$

Para un vector  $x = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ , existe al menos un índice  $i$  con  $n_i \neq 0$ , por consiguiente  $\|x\|_\infty \geq 1$ . Se define  $\mathcal{U} = \left\{y \in \mathbb{R}^d : \|y\|_\infty < \frac{1}{2}\right\}$  entonces  $\mathcal{U} \cap \mathbb{Z}^d = \{0\}$ , de modo que 0 es un punto aislado de  $\mathbb{Z}^d$ . Como las traslaciones  $z + \mathcal{U}$ , con  $z \in \mathbb{Z}^d$  son entornos disjuntos, resulta que  $\mathbb{Z}^d$  es discreto en  $\mathbb{R}^d$ .

Además, por definición, se conoce que el determinante de un retículo generado por una base  $\{v_1, \dots, v_d\}$  se define como  $|\det(v_1 \dots v_d)|$ . En el caso de  $\mathbb{Z}^d$  la matriz generadora es la identidad  $I_d$ , por lo que  $\det(\mathbb{Z}^d) = |\det I_d| = 1$ . En consecuencia,  $\mathbb{Z}^d$  satisface ambas condiciones de la definición y, por tanto, es un retículo de rango  $d$  con determinante uno, en particular, un retículo unimodular.

### Definición 1.2.12 Punto de retículo

Un punto  $\mathcal{W}$  de coordenadas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se llama punto de retículo si todas sus coordenadas son números enteros, es decir, si:

$$\mathcal{W} := (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

### Definición 1.2.13 Polígono integral

Un polígono integral es un polígono simple  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ , cuyos vértices son puntos de retículo. Equivalentemente, un polígono simple es un polígono cuyos vértices no coinciden entre sí, ningún vértice yace sobre un lado distinto de los que lo contienen y ningún par de lados no consecutivos se intercepta.

#### Nota

Cabe señalar que, en el presente tratamiento, los politopos en  $\mathbb{R}^d$  han sido definidos como conjuntos convexos. Esta especificación no es superflua, ya que en la literatura pueden encontrarse nociones más generales de politopo que no requieren convexidad, como ocurre con ciertos polígonos en  $\mathbb{R}^2$  que admiten ángulos internos mayores a  $180^\circ$ . Sin embargo, dado que el estudio formal de la geometría convexa se basa esencialmente en la estructura que impone la convexidad incluyendo resultados fundamentales como la separación por hiperplanos, la representación por vértices extremos y la estabilidad bajo operaciones afines, se restringirá el análisis exclusivamente al caso de politopos convexos. Esta decisión permite aplicar de manera sistemática el aparato teórico de la convexidad.

## 1.3 Estructura simplicial y triangulaciones de politopos

### Definición 1.3.1 Símplex d dimensional (d-símplex)

Sea  $d \in \mathbb{N}$  y sean  $v_0, v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}^d$  puntos afínmente independientes, es decir, el conjunto  $\{v_1 - v_0, \dots, v_d - v_0\}$  es linealmente independiente. Se define el símplex  $d$  dimensional generado por dichos vértices como la envolvente convexa

$$\Delta^d = \text{conv}\{v_0, v_1, \dots, v_d\} = \left\{ \sum_{i=0}^d \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \right\}$$

El subespacio afín mínimo que contiene a  $\Delta^d$  tiene dimensión  $d$ .



Figura 1.10: Ejemplos de  $d$ -símplices para  $d = 0, 1, 2, 3$

La posibilidad de descomponer un politopo en  $d$ -símplices, cuya construcción se estudiará posteriormente, permite demostrar inicialmente una propiedad en los símplices y después extenderla a politopos arbitrarios. Para formular con rigor la noción de triangulación unimodular, es preciso introducir previamente los conceptos auxiliares siguientes.

Una definición equivalente a la ya descrita para la cara de un politopo, está dada de la siguiente manera. Antes de introducirla, se debe introducir la noción de hiperplano soporte. Sea  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$  un politopo. Se dirá que un hiperplano  $\mathcal{H}$  es un hiperplano soporte si  $\mathcal{P}$  queda contenido en uno de los semiespacios definidos por  $\mathcal{H}$  y la intersección  $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}$  no es vacía.

### Definición 1.3.2 Cara de un politopo

Se denomina cara de  $\mathcal{P}$  al subconjunto  $\mathcal{F} = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}$ , donde  $\mathcal{H}$  es un hiperplano soporte de  $\mathcal{P}$ .

### Lema 1.3.3

Sea  $\mathcal{P} = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^d$  un politopo, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Si  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  son caras de  $\mathcal{P}$ , entonces  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  es nuevamente una cara de  $\mathcal{P}$ .
- Para toda cara  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{P}$  existe un subconjunto de índices  $I \subseteq \{1, \dots, k\}$  tal que  $\mathcal{F} = \text{conv}\{v_i : i \in I\}$ .

### Demostración:

Sean  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_2$  dos caras de  $\mathcal{P}$ , donde  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son hiperplanos de soporte de  $\mathcal{P}$ . Supóngase que  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \neq \emptyset$ , en caso contrario,  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  es trivialmente una cara de  $\mathcal{P}$ . Como  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  son hiperplanos de soporte de  $\mathcal{P}$ , existen vectores  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d$  y escalares  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  tales que  $\forall z \in \mathcal{P}, \langle v_i, z \rangle \leq a_i$ , y  $x_i \in \mathcal{F}_i \iff \langle v_i, x_i \rangle = a_i, i = 1, 2$ . Si fuera necesario, las desigualdades en dirección opuesta  $\geq$  se reemplazan por  $(-v_i, -a_i)$  para obtener siempre  $\leq$ . Dado que  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  no es vacío, no hay contradicción entre ambas desigualdades. Se define el hiperplano

$$\mathcal{H}_3 = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle v_1 + v_2, x \rangle = a_1 + a_2\}.$$

Para todo,  $z \in \mathcal{P}$  se cumple,  $\langle v_1 + v_2, z \rangle = \langle v_1, z \rangle + \langle v_2, z \rangle \leq a_1 + a_2$ , por lo que  $\mathcal{P}$  queda contenido en el semiespacio  $\{\langle v_1 + v_2, x \rangle \leq a_1 + a_2\}$ . Además, si  $z \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ , entonces  $\langle v_1, z \rangle = a_1$  y  $\langle v_2, z \rangle = a_2$ , luego  $\langle v_1 + v_2, z \rangle = a_1 + a_2$ , de modo que  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_3$ . Recíprocamente, si  $z \in \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_3$ , la igualdad  $\langle v_1 + v_2, z \rangle = a_1 + a_2$  junto con  $\langle v_i, z \rangle \leq a_i$  fuerza  $\langle v_i, z \rangle = a_i$  para  $i = 1, 2$ ; esto implica  $z \in \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ , y, por tanto  $z \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ . Así,  $\mathcal{P} \cap \mathcal{H}_3 \subseteq \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ . Se concluye que  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{P} \cap \mathcal{H}_3$ , y puesto que  $\mathcal{H}_3$  es un hiperplano de soporte de  $\mathcal{P}$  (ya que  $\mathcal{P} \subseteq \{\langle v_1 + v_2, x \rangle \leq a_1 + a_2\}$  y la intersección con  $\mathcal{H}_3$  no es vacía), se verifica que  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  es cara de  $\mathcal{P}$ .

Ahora, se demuestra la segunda condición del lema. Sea  $x \in \mathcal{F}$ , puesto que  $x \in \mathcal{P}$ , se expresa  $x$  como combinación convexa de vértices de  $\mathcal{P}$ . En particular, existen vértices  $v_1, \dots, v_k \in \text{Vert}(\mathcal{P})$  y coeficientes  $\lambda_i \geq 0$  con  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  tales que  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$ . Sea  $\{v'_1, \dots, v'_n\} \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$  el subconjunto de aquellos vértices cuyo coeficiente en la combinación es estrictamente positivo, de modo que

$$x = \sum_{j=1}^n \lambda'_j v'_j, \quad \lambda'_j > 0, \quad \sum_{j=1}^n \lambda'_j = 1.$$

Si existiese algún  $v'_j \notin \mathcal{F}$ , entonces se tendría  $\langle v, v'_j \rangle < a$ , mientras que para todo vértice  $v'_i$  se cumple  $\langle v, v'_i \rangle \leq a$ . Por tanto,  $\langle v, x \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda'_j \langle v, v'_j \rangle < \sum_{j=1}^n \lambda'_j a = a$ , lo cual es contradictorio con  $\langle v, x \rangle = a$ , pues  $x \in \mathcal{F}$ . Se concluye que necesariamente  $v'_j \in \mathcal{F}$  para todo  $j$ . En consecuencia,  $x$  se presenta como combinación convexa de los vértices de  $\mathcal{P}$  que yacen en  $\mathcal{F}$ . Dado que  $x$  era un punto arbitrario de  $\mathcal{F}$ , se deduce,  $\mathcal{F} = \text{conv}\{v \in \text{Vert}(\mathcal{P}) : v \in \mathcal{F}\}$ , es decir,  $\mathcal{F}$  es la envolvente convexa de los vértices de  $\mathcal{P}$  contenidos en  $\mathcal{F}$ , como se quería probar. ■

Se emplea la subdivisión del politopo en elementos de estructura más sencilla, de modo que las propiedades globales puedan deducirse a partir de las de dichos componentes.

#### Definición 1.3.4 Triangulación unimodular

Supóngase que el politopo  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$  es de dimensión  $d$ . Se define una triangulación unimodular de  $\mathcal{P}$  como una colección finita  $\mathcal{T}$  de  $d$ -símplices que satisface:

- $\mathcal{P} = \bigcup_{S \in \mathcal{T}} S$ .
- Para todo  $S_1, S_2 \in \mathcal{T}$ , entonces  $S_1 \cap S_2$  es una cara común de  $S_1$  y  $S_2$ .

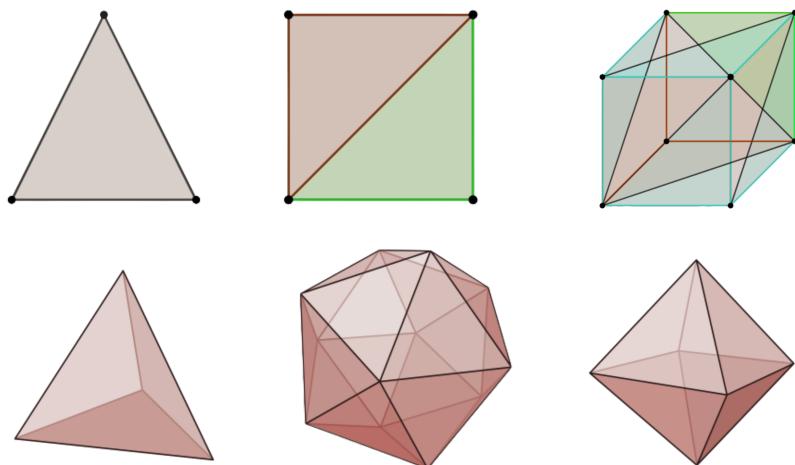


Figura 1.11: Triangulaciones unimodulares de politopos en dimensiones 2 y 3

Se dice que  $\mathcal{P}$  se puede triangular unimodularmente sin usar nuevos vértices si existe una triangulación  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{P}$  de modo que los vértices de todos los  $d$ -símplices de  $\mathcal{T}$  son vértices de  $\mathcal{P}$ . Para la demostración del teorema que garantiza la existencia de triangulaciones unimodulares para politopos arbitrarios, se requieren los dos lemas siguientes.

### Lema 1.3.5

Sea  $\Delta^d \subset \mathbb{R}^d$  un  $d$ -símplice, entonces se verifican las siguientes propiedades:

- Cada cara de  $\Delta^d$  es un  $k$ -símplice para algún  $0 \leq k < d$ .
- La intersección de dos caras cualesquiera de  $\Delta^d$  es también una cara de  $\Delta^d$ .

### Demostración:

Por el lema 1.3.3 se infiere que toda cara de  $\Delta^d$  se presenta como la envolvente convexa de un subconjunto de vértices de  $\Delta^d$ . Si se supusiera que alguna cara  $\mathcal{F}$  de  $\Delta^d$  no fuera un símplice, los vértices que la generan no serían afínmente independientes. Sin embargo, ello implicaría que los vértices de  $\Delta^d$  no son afínmente independientes, en contradicción con la hipótesis de que  $\Delta^d$  es un  $d$ -símplice. Por consiguiente, cada cara de  $\Delta^d$  debe ser un  $k$ -símplice para algún  $k < d$ . Para la segunda afirmación, se invoca el lema 1.3.3, el cual garantiza que la intersección de dos caras de un politopo es nuevamente una cara. Puesto que  $\Delta^d$  es un politopo, se concluye que la intersección de cualesquier dos de sus caras es una cara de  $\Delta^d$ . ■

### Lema 1.3.6

Sea  $\mathcal{T}$  una triangulación unimodular de  $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$  y sea  $\mathcal{F}$  una faceta de  $\mathcal{P}$ , entonces  $\mathcal{T}(\mathcal{F}) = \{\mathcal{S} \cap \mathcal{F} : \mathcal{S} \in \mathcal{T}, \dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{F}) = d-1\}$  es una triangulación unimodular de  $\mathcal{F}$ .

### Demostración:

La demostración se llevará a cabo en dos etapas

$$\bullet \quad \mathcal{F} = \bigcup_{\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})} \Delta^d$$

Primero, se observa que  $\bigcup_{\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})} \Delta^d \subseteq \mathcal{F}$ , pues cada  $\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$  es de la

forma  $\Delta^d = \mathcal{S} \cap \mathcal{F}$  con  $\mathcal{S} \in \mathcal{T}$ , y por tanto  $\Delta^d \subseteq \mathcal{F}$ . Para la inclusión inversa, supóngase por contradicción que existe  $x \in \mathcal{F}$  tal que  $x \notin \bigcup_{\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})} \Delta^d$ . Como

$\mathcal{T}$  triangula  $\mathcal{P}$ , existe un símplice  $\mathcal{S}_x \in \mathcal{T}$  con  $x \in \mathcal{S}_x$ . Luego  $\Delta_x^d := \mathcal{S}_x \cap \mathcal{F}$  es la intersección de  $\mathcal{S}_x$  con la faceta  $\mathcal{F}$ . Si  $\dim(\Delta_x^d) = d-1$ , entonces  $x \in \Delta_x^d \subseteq \bigcup_{\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})} \Delta^d$ , contradictorio con la elección de  $x$ . Por tanto, debe ocurrir

$\dim(\Delta_x^d) < d-1$ . Dado que  $\mathcal{F}$  es de dimensión  $d-1$ , en la variedad afín

$\text{aff}(\mathcal{F})$  existe una vecindad relativa  $\mathcal{V}$  de  $x$  en  $\mathcal{F}$  cuya dimensión es  $d - 1$ . Pero  $\Delta_x^d$  tiene dimensión estrictamente menor a  $d - 1$ , de modo que ningún entorno relativo de  $x$  en  $\mathcal{F}$  puede quedar completamente contenido en  $\Delta_x^d$ . En consecuencia, en cualquier vecindad relativa  $\mathcal{V}$  de  $x$  en  $\mathcal{F}$  debe hallarse un punto  $y$  que no pertenezca a  $\Delta_x^d$ .

Como  $y \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$ , existe un simplice  $\mathcal{S}_y \in \mathcal{T}$  con  $y \in \mathcal{S}_y$ . Además,  $y \in \mathcal{F}$  implica  $\dim(\mathcal{S}_y \cap \mathcal{F}) = d - 1$ , de modo que  $y \in \Delta_y^d := \mathcal{S}_y \cap \mathcal{F} \subseteq \bigcup_{\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})} \Delta^d$ . Esto

muestra que toda vecindad relativa de  $x$  en  $\mathcal{F}$  intersecta la unión  $\bigcup_{\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})} \Delta^d$ , lo

cual contradice la suposición inicial de que  $x$  no pertenecía a dicha unión. Por último, dado que cada  $\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$  es cerrado en  $\text{aff}(\mathcal{F})$  y la colección es finita, la unión  $\bigcup_{\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})} \Delta^d$  es cerrada en  $\mathcal{F}$ . La contradicción anterior demuestra que

no puede existir  $x \in \mathcal{F}$  fuera de la unión, y por tanto  $\mathcal{F} = \bigcup_{\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})} \Delta^d$ .

- Para todo  $\Delta_1^d, \Delta_2^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ , se verifica que  $\Delta_1^d \cap \Delta_2^d$  es una cara común de  $\Delta_1^d$  y  $\Delta_2^d$ .

Sean  $\Delta_1^d, \Delta_2^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ . Por definición, existen  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{T}$  tales que  $\Delta_1^d = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{F}$ ,  $\Delta_2^d = \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{F}$ ,  $\dim(\Delta_1^d) = \dim(\Delta_2^d) = d - 1$ . Como  $\mathcal{T}$  es la triangulación de  $\mathcal{P}$ , se sabe que  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  es una cara común de  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$ , entonces existen hiperplanos de soporte  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  para  $\mathcal{P}$  tales que  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{H}_1 = \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{H}_2$ , con  $\dim(\mathcal{H}_i) = d - 1$ . Sea  $\text{aff}(\mathcal{F})$  el subespacio afín que contiene a  $\mathcal{F}$ . Defínanse  $h_1 = \mathcal{H}_1 \cap \text{aff}(\mathcal{F})$ ,  $h_2 = \mathcal{H}_2 \cap \text{aff}(\mathcal{F})$ . Cada  $h_i$  tiene dimensión  $d - 2$ , ya que  $\dim(\text{aff}(\mathcal{F})) = d - 1$  y  $\mathcal{H}_i$  es de dimensión  $d - 1$  transversal a  $\text{aff}(\mathcal{F})$  en el punto de intersección con  $\mathcal{F}$ . Se verifica entonces,  $h_1 \cap \Delta_1^d = (\mathcal{H}_1 \cap \text{aff}(\mathcal{F})) \cap (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{F}) = (\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{S}_1) \cap (\mathcal{F} \cap \text{aff}(\mathcal{F})) = (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) \cap \mathcal{F} = \Delta_1^d \cap \Delta_2^d$ . De igual modo,  $h_2 \cap \Delta_2^d = (\mathcal{H}_2 \cap \text{aff}(\mathcal{F})) \cap (\mathcal{S}_2 \cap \mathcal{F}) = (\mathcal{H}_2 \cap \mathcal{S}_2) \cap (\mathcal{F} \cap \text{aff}(\mathcal{F})) = (\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2) \cap \mathcal{F} = \Delta_1^d \cap \Delta_2^d$ . Por tanto,  $\Delta_1^d \cap \Delta_2^d = h_1 \cap \Delta_1^d = h_2 \cap \Delta_2^d$ , demostrando que dicha intersección es una cara común de  $\Delta_1^d$  y  $\Delta_2^d$ .

### Teorema 1.3.7 Existencia de triangulaciones unimodulares<sup>([5])</sup>

Cualquier politopo  $\mathcal{P}$  se puede triangular unimodularmente en simplices sin necesidad de introducir nuevos vértices

#### Demostración:

Se procede por inducción sobre el número de vértices de  $\mathcal{P}$ . Si  $\mathcal{P}$  tiene exactamente  $d + 1$  vértices, entonces  $\mathcal{P}$  es un  $d$ -simplice y la colección  $\{\mathcal{P}\}$  constituye una triangulación unimodular de  $\mathcal{P}$  sin vértices nuevos. Para el paso inductivo se asume que el teorema es cierto para politopos con  $n$  vértices. Sea  $\mathcal{P} = \text{conv}(\mathcal{V})$  un politopo de dimensión  $d$  con  $n + 1$  vértices  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v\}$ . Se elige  $v$  de modo que  $\mathcal{Q} = \text{conv}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\})$  tenga dimensión  $d$ . Por la hipótesis de inducción,  $\mathcal{Q}$  admite una triangulación unimodular que de se denotara  $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$  sin vértices nuevos.

Además, por el lema previo, cada triangulación unimodular de  $\mathcal{Q}$  induce triangulaciones unimodulares  $\mathcal{T}(\mathcal{F})$  de sus facetas de dimensión  $d - 1$ . Se denomina faceta  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{Q}$  como visible desde  $v$  sí para todo  $x \in \mathcal{F}$ , el segmento semiabierto  $[v, x)$  no intersecta a  $\mathcal{Q}$ . Sea  $\mathcal{T}$  el conjunto de envolventes convexas de  $v$  con cada uno de los  $(d - 1 -)$  simplices que triangulan a las facetas visibles de  $\mathcal{Q}$  desde  $v$ . Se probará que  $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}(\mathcal{Q})$  es una triangulación de  $\mathcal{P}$ . Para ello, se demuestran dos hechos:

- $\mathcal{P} = \bigcup(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}(\mathcal{Q}))$

De las definiciones de  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$  se obtiene inmediatamente que  $\bigcup(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}(\mathcal{Q})) \subseteq \mathcal{P}$ . Para la inclusión inversa, sea  $x \in \mathcal{P}$ . Si  $x \in \mathcal{Q}$ , como  $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$  es una triangulación de  $\mathcal{Q}$  entonces  $x \in \mathcal{T}(\mathcal{Q})$ . Si  $x \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$ , considere el segmento entre  $x$  y  $v$ . Por convexidad de  $\mathcal{P}$ ,  $x$  puede ser representado como la combinación lineal  $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda v$  en donde  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n + \lambda = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$ , por lo que  $x = \frac{(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n)(1 - \lambda)}{1 - \lambda} + \lambda v$ , en consecuencia, es un punto de un segmento entre un punto de  $\mathcal{Q}$  y  $v$ . Sea  $q$  el punto más cercano a  $x$  tal que  $x \in [q, v]$ , entonces,  $(q, v] \cap \mathcal{Q} = \emptyset$  y  $q$  pertenece a una faceta  $\mathcal{F}$  visible desde  $v$ . Por lo tanto,  $x \in \text{conv}(\{\Delta^d, v\})$  en donde  $\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$  es el simplex que contiene a  $q$ . Con lo anterior, se concluye  $\mathcal{P} \subseteq \bigcup(\mathcal{T} \cup \mathcal{T}(\mathcal{Q}))$ .

- Para todos  $\Delta_1^d, \Delta_2^d \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}(\mathcal{Q})$  la intersección  $\Delta_1^d \cap \Delta_2^d$  es una cara común de  $\Delta_1^d$  y  $\Delta_2^d$

Sean  $\Delta_1^d, \Delta_2^d \in \mathcal{T} \cup \mathcal{T}(\mathcal{Q})$  se presentan los siguientes casos:

- $\Delta_1^d, \Delta_2^d \in \mathcal{T}(\mathcal{Q})$  :

Debido a que  $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$  es una triangulación unimodular,  $\Delta_1^d \cap \Delta_2^d$  es una cara en común de los simplices.

- $\Delta_1^d, \Delta_2^d \in \mathcal{T}$  :

Existen  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$  tales que  $\Delta_1^d = \text{conv}(\{\mathcal{S}_1, v\})$ , y  $\Delta_2^d = \text{conv}(\{\mathcal{S}_2, v\})$ . Como  $\mathcal{T}(\mathcal{F})$  es una triangulación,  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  es una cara común de  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$ . Por convexidad y el lema 1.3.3 se obtiene  $\Delta_1^d \cap \Delta_2^d = \text{conv}(\{v, \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2\})$ . Además, como consecuencia de este mismo lema  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  es la envolvente convexa de un conjunto de vértices comunes a  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$ , y como consecución del lema 1.3.5  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  es un simplex. Luego  $\Delta_1^d \cap \Delta_2^d = \text{conv}(\{v, \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2\})$  es la envolvente convexa de un conjunto de vértices comunes a  $\Delta_1^d$  y  $\Delta_2^d$ . Dado que  $\Delta_1^d$  y  $\Delta_2^d$  son simplices, se concluye que  $\Delta_1^d \cap \Delta_2^d$  es una cara común de  $\Delta_1^d$  y  $\Delta_2^d$ .

- $\Delta_1^d \in \mathcal{T}$  y  $\Delta_2^d \in \mathcal{T}(\mathcal{Q})$  :

Como  $\Delta_1^d \in \mathcal{T}$  existe  $\mathcal{S} \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$  tal que  $\Delta_1^d = \text{conv}(\{v, \mathcal{S}\})$  Por la construcción, es claro que  $\Delta_1^d \cap \mathcal{Q} = \mathcal{S}$ , y esto corresponde a una cara de algún  $\Delta^d \in \mathcal{T}(\mathcal{Q})$ . Como  $\mathcal{T}(\mathcal{Q})$  es una triangulación de  $\mathcal{Q}$ , se tiene que  $\Delta^d \cap \Delta_2^d$  es una cara común de  $\Delta^d$  y  $\Delta_2^d$ . Entonces  $\Delta_1^d \cap \Delta_2^d = \mathcal{S} \cap \Delta_2^d = (\mathcal{S} \cap \Delta^d) \cap \Delta_2^d = \mathcal{S} \cap (\Delta^d \cap \Delta_2^d)$ . Como ya se ha mostrado que  $\mathcal{S}$  y  $\Delta^d \cap \Delta_2^d$  son caras de  $\Delta^d$ , se concluye que  $\mathcal{S} \cap (\Delta^d \cap \Delta_2^d) = \Delta_1^d \cap \Delta_2^d$ . Adicionalmente, puesto que  $\Delta_1^d \cap \Delta_2^d = \mathcal{S} \cap (\Delta^d \cap \Delta_2^d)$ , los vértices de  $\Delta_1^d \cap \Delta_2^d$

son vértices comunes de  $\mathcal{S}$  y de  $\Delta_2$ . Dado que  $\mathcal{S}$  es una cara de  $\Delta_1^d$ , se deduce que los vértices de  $\Delta_1^d \cap \Delta_2^d$  son vértices comunes de  $\Delta_1^d$  y  $\Delta_2^d$ , y, por tanto, constituyen una cara común de ambos simplices.

■

## REFERENCIAS

---

- [1] Rodriguez-Villegas, F. (2002). On the zeros of certain polynomials. *Proceedings Of The American Mathematical Society*, 130(8), 2251-2254. <https://doi.org/10.1090/s0002-9939-02-06454-7>
- [2] Beck, M., & Robins, S. (2015). Computing the continuous discretely: Integer-Point Enumeration in Polyhedra (Second Edition). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2969-6>
- [3] Brøndsted, A. (1983). An Introduction to Convex Polytopes. En Graduate texts in mathematics. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1148-8>
- [4] Ziegler, G. M. (1995). Lectures on Polytopes. En Graduate texts in mathematics. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8431-1>
- [5] Camilo, A. M. J. (2017). Unimodalidad y Teoría de Ehrhart. <http://hdl.handle.net/1992/38989>
- [6] Reeve, J. E. (1957). On the Volume of Lattice Polyhedra. *Proceedings Of The London Mathematical Society*, s3-7(1), 378-395. <https://doi.org/10.1112/plms/s3-7.1.378>
- [7] Hibi, T. (1991). Ehrhart polynomials of convex polytopes, h-vectors of simplicial complexes, and nonsingular projective toric varieties. In Discrete and Computational Geometry (New Brunswick, NJ, 1989/1990). DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., 6, 165–177. Providence, RI: American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/dimacs/006>
- [8] Lee, D., & Ju, H. (2015). An Extension of hibi's palindromic theorem. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.1503.05658>
- [9] Kölbl, M. (2022). Properties of Ehrhart Polynomials whose Roots Lie on the Critical Line. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.2207.08011>
- [10] Batyrev, V. V. (1993). Dual Polyhedra and Mirror Symmetry for Calabi-Yau Hypersurfaces in Toric Varieties. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.alg-geom/9310003>
- [11] Liu, F. (2017). On positivity of Ehrhart polynomials. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.1711.09962>

- [12] Higashitani, A., Kummer, M., & Michałek, M. (2017b). Interlacing Ehrhart polynomials of reflexive polytopes. *Selecta Mathematica*, 23(4), 2977-2998.  
<https://doi.org/10.1007/s00029-017-0350-6>
  
- [13] Berglund, P., He, Y., Heyes, E., Hirst, E., Jejjala, V., & Lukas, A. (2024). New Calabi–Yau manifolds from genetic algorithms. *Physics Letters B*, 850, 138504.  
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2024.138504>

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] Braun, B., & Develin, M. (2006). Ehrhart Polynomial Roots and Stanley's Non-negativity Theorem. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.math/0610399>
- [2] Hegedüs, G., Higashitani, A., & Kasprzyk, A. (2019). Ehrhart Polynomial Roots of Reflexive Polytopes. *The Electronic Journal Of Combinatorics*, 26(1). <https://doi.org/10.37236/7780>
- [3] Bey, C., Henk, M., & Wills, J. M. (2006). Notes on the roots of Ehrhart polynomials. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.math/0606089>
- [4] He, Y., Seong, R., & Yau, S. (2018). Calabi–Yau Volumes and Reflexive Polytopes. *Communications In Mathematical Physics*, 361(1), 155-204. <https://doi.org/10.1007/s00220-018-3128-6>
- [5] Braun, B., & Liu, F. (2018).  $h^*$ -Polynomials With Roots on the Unit Circle. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.1807.00105>
- [6] Stanley, R. P. (2009). Two Enumerative Results on Cycles of Permutations. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.0901.2008>
- [7] Batyrev, V. (2006). Lattice polytopes with a given  $h^*$ -polynomial. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.math/0602593>
- [8] Beck, M., De Loera, J. A., Develin, M., Pfeifle, J., & Stanley, R. P. (2004). Coefficients and Roots of Ehrhart Polynomials. arXiv (Cornell University). <https://doi.org/10.48550/arxiv.math/0402148>
- [9] Kirschenhofer, Peter & O, A. & Tichy, Robert. (1999). On analytical and Diophantine properties of a family of counting polynomials. *Acta Scientiarum Mathematicarum*. 65.
- [10] Kołodziejczyk, K., & Reay, J. (2007). Polynomials and spatial Pick-type theorems. *Expositiones Mathematicae*, 26(1), 41-53. <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2007.06.001>
- [11] Higashitani, A., Kummer, M., & Michałek, M. (2017). Interlacing Ehrhart polynomials of reflexive polytopes. *Selecta Mathematica*, 23(4), 2977-2998. <https://doi.org/10.1007/s00029-017-0350-6>