

**CONTROL ROBUSTO DE UN HELICÓPTERO DE DOS GRADOS DE  
LIBERTAD PIVOTADO.**

**Trabajo para optar al título de Magister en Ingeniería Electrónica**

**Por**

**EDWARD HERNANDO BEJARANO BARRETO**



**UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS  
PRIMER CLAUSTRO UNIVERSITARIO DE COLOMBIA**

**DIRECTOR**

**DIEGO ALEXANDER TIBADUIZA BURGOS**

**CODIRECTOR**

**CARLOS ANDRÉS TORRES**

**UNIVERSIDAD SANTO TOMÁS**

**MAESTRÍA EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

**BOGOTÁ D.C**

**2017**

## **Dedicatoria**

*A mi familia por enseñarme que pese a las adversidades, todo es posible....*

## **Agradecimientos**

*A Dios por su ayuda en momentos en que solo pensaba en desfallecer.*

*A mis padres por su esfuerzo y dedicación por hacerme una mejor persona día a día, a ti Luisa por tu infinito Amor, por tu apoyo incondicional, por tu paciencia, por sacrificar tiempo juntos para que yo pudiera realizar este sueño que tanto anhelaba y que pese a los buenos y malos momentos que tuvimos en este tiempo siempre supe que estabas ahí, por todo esto y por muchas cosas mas solo me queda decirte Gracias.*

*A los Doctores Diego Alexander Tibaduiza y Carlos Andrés Torres por permitirme llevar a cabo este trabajo bajo su guía y conocimiento.*

*A mis compañeros de maestría Jefferson Sarmiento, Jairo Cuellar, Milton Rojas, Pablo Ospina, Pedro Aya y Raul Martínez por el apoyo incondicional por sus consejos y sobre todo por su paciencia.*

*A todos los profesores del programa de Ingeniería Electrónica de la Universidad Santo Tomás sede Bogotá por su apoyo y ayuda.*

## **Resumen**

El presente documento presenta el desarrollo y comparación de estrategias de control clásico y robusto para un helicóptero de dos grados de libertad pivotado. En particular, se trabajó en el desarrollo de controladores LQR clásico y LMI, los cuales se validaron sobre una plataforma experimental que fue desarrollada y construida basado en pautas tomadas del prototipo del fabricante QUANSER.

Para el diseño e implementación para la plataforma tipo helicóptero de 2 grados de libertad pivotado, es importante tener en cuenta que al ser ésta una plataforma no comercial se hizo uso diferentes elementos encontrados en ámbitos como el aeromodelismo, la sensórica y la electrónica con la que se cuenta tanto en el mercado nacional como internacional, esto con el fin de poder aplicar las técnicas de control en cuestión. Adicionalmente, con base en la integración de todos los elementos como motores, sensores, diseños mecánicos, hélices y demás elementos que forman parte del sistema se hallaron los modelos matemáticos que describen el comportamiento del mismo para su posterior validación en la plataforma.

Posteriormente, se aplican las diferentes técnicas de diseño para los respectivos controladores y se observa el comportamiento de la plataforma con la implementación de ambos lazos de control. Finalmente, se realiza la comparación de los controladores para determinar su desempeño frente a perturbaciones definidas e iguales para los dos controladores.

## Tabla de contenido

Dedicatoria.....	2
Agradecimientos .....	3
Resumen.....	4
Introducción .....	7
Objetivos.....	11
Objetivo General .....	11
Objetivos Específicos.....	11
1.    Marco de referencia .....	12
1.1.    Helicóptero de dos grados de libertad .....	12
1.2.    Motor Brushless .....	12
1.3.    Controlador electrónico de velocidad .....	13
1.4.    Batería lipo (Polímero de Litio) .....	14
1.5.    Acelerómetros .....	15
1.6.    Giroscopio .....	17
1.7.    RS232.....	18
1.8.    Ángulos de navegación .....	19
1.9.    Control LQR.....	19
2.    Metodología .....	21
2.1.    Diseño de helicóptero de 2 grados de libertad pivotado descripción del modelo .....	21
2.2.    Implementación de la plataforma.....	25
2.2.1.    Descripción de los componentes utilizados.....	29
3.    Modelo del sistema .....	35
3.1.    Modelo teórico .....	36
3.1.1.    Modelo simplificado.....	38
3.1.2.    Linealización del modelo.....	38

3.2.	Simulación de los modelos.....	40
3.3.	Modelo y Validación experimental .....	41
4.	Diseño de controlador LQR .....	45
4.1.	Controlador LQR Pitch .....	45
4.1.1.	Análisis de estabilidad LQR pitch .....	47
4.2.	Implementación de controlador LQR.....	50
4.3.	Medición de desempeño del controlador LQR frente a perturbaciones.....	52
5.	Controlador LMI.....	56
5.1.	Diseño del controlador .....	58
5.1.1.	Inercia del sistema.....	60
5.1.2.	Condiciones para el desarrollo de LMI's.....	63
5.1.3.	Ubicación de los polos.....	65
5.2.	Estabilidad del controlador LMI .....	66
5.3.	Desarrollo del controlador con base en las restricciones .....	69
6.	Conclusiones .....	76
7.	Trabajos Futuros .....	78
8.	Bibliografía .....	79
9.	Infografía.....	84
	Anexo 1. Código LQR .....	85
	Anexo 2. Código LMI.....	86
	Anexo 3. Artículo resultado de investigación.....	89

## **Lista de tablas**

<i>Tabla 1.</i> Comparación y selección de componentes .....	27
<i>Tabla 2.</i> Información técnica de los motores brushless.....	30
<i>Tabla 3.</i> Características de las hélices. ....	31
<i>Tabla 4.</i> Desempeño del controlador LQR .....	55
<i>Tabla 5.</i> Desempeño del Controlador LMI.....	73

## Lista de figuras

Fig. 1. Helicóptero de 2 DOF – empresa Quanser .....	12
Fig. 2. Diagrama de conexión de un ESC .....	14
Fig. 3. Funcionamiento interno de un giroscopio MEMS .....	17
Fig. 4. Ángulos de navegación.....	19
Fig. 5. Diseño inicial de la estructura .....	21
Fig. 6. Plano Lateral final de la estructura .....	22
Fig. 7. Diseño Final Helicóptero con soportes.....	23
Fig. 8. Ubicación de la caja de acople para los ejes con la base de soporte .....	23
Fig. 9. Ejes de Soporte para el eje pitch y el eje yaw .....	24
Fig. 10. Ubicación del eje pivotante en la estructura del helicóptero .....	24
Fig. 11. Ubicación del eje pivotante en la estructura del helicóptero .....	25
Fig. 12. Selección de material en Solid-Edge para cálculos de masa y centros de gravedad .....	26
Fig. 13. Plataforma experimental.....	26
Fig. 14. Motor brushless 1000Kv .....	30
Fig. 15. Hélices 1045 .....	31
Fig. 16. ESC Hobbypower - 30A.....	32
Fig. 17. IMU-MPU 6050 .....	32
Fig. 18. Potenciómetro lineal 10K .....	33
Fig. 19. Diagrama circuital de tarjeta de adquisición de datos .....	34
Fig. 20. Diagrama de Simulink de controladores diseñados.....	35
Fig. 21. Diagrama de cuerpo libre del helicóptero de 2DOF.....	36
Fig. 22. Simulación del modelo teórico de pitch –respuesta al paso .....	40
Fig. 23. Simulación del modelo teórico de yaw- respuesta al paso .....	41
Fig. 24. Respuesta de la plataforma al paso en pitch .....	42
Fig. 25. Respuesta de la plataforma a una señal cuadrada en pitch .....	42
Fig. 26. Respuesta de la plataforma a una señal paso en yaw. ....	42
Fig. 27. Validación del modelo hallado para pitch .....	43
Fig. 28. Validación del modelo hallado para yaw .....	44
Fig. 29. Lazo de control LQR .....	46
Fig. 30. Controlador LQR en pitch .....	50

Fig. 31. Señal de control LQR en pitch .....	51
Fig. 32. Controlador LQR en yaw .....	51
Fig. 33. Señal de control LQR en yaw .....	52
Fig. 34. Sistema de control LQR con perturbación en pitch.....	53
Fig. 35. Señal de control LQR con perturbación en pitch .....	53
Fig. 36. Sistema de control LQR con perturbación en yaw .....	54
Fig. 37. Señal de control LQR con perturbación en yaw .....	54
Fig. 38. Modelo en Simulink de la ecuación de Estados .....	62
Fig. 39. Respuesta en ángulo y velocidad del modelo de Ecuación de Estados .....	62
Fig. 40. Representación gráfica de la incertidumbre politópica .....	64
Fig. 41. Región de ubicación de los polos .....	66
Fig. 42. Controlador $H^\infty$ , con ganancias determinadas haciendo uso de LMI .....	70
Fig. 43. Respuesta teórica del helicóptero de 2 grados de libertad para un paso de 15 grados ...	70
Fig. 44. Respuesta experimental del helicóptero de 2 grados de libertad para un paso de 45grados y una variación en la masa del 18% en relación con L1 .....	71
Fig. 45. Respuesta experimental del helicóptero de 2 grados de libertad para un paso de 55grados y una variación en la masa del 18% en relación con L1 .....	72
Fig. 46. Respuesta experimental del helicóptero de 2 grados de libertad para un paso de - 55grados y una variación en la masa del 18% en relación con L1 .....	72
Fig. 47. Respuesta experimental de controlador LQR con un paso de 45 grados .....	73
Fig. 48. Respuesta experimental del controlador LMI para el eje pitch con un paso de 45 grados .....	74
Fig. 49. Respuesta experimental del controlador LQR para el eje pitch con un sobrepeso del 30% del peso total .....	74
Fig. 50. Respuesta experimental del controlador LMI para el eje pitch con un sobrepeso del 30% del Helicóptero .....	75

## Introducción

Los vehículos aéreos no tripulados UAV's o drones se han venido empleando desde 1849 con diferentes propósitos debido a las múltiples ventajas que éstos ofrecen. Si bien su uso empezó con fines netamente militares, en la actualidad, la implementación de estos vehículos se ha expandido a diferentes ámbitos desde el educativo hasta el comercial (Esther, 2015). Los helicópteros de dos grados de libertad pivotados son plataformas que emulan el comportamiento de un helicóptero común con un rotor principal y un rotor de cola anti torque. Esto permite ahondar e investigar en conceptos y teorías relevantes para aplicaciones del mundo real sobre dinámicas y control de vuelo en helicópteros de cuerpo rígido, drones, o aeronaves similares (Quanser, 2006), (Universita' Degli Studi di Siena, 2010).

Teniendo en cuenta lo anterior, este proyecto pretende realizar la comparación entre un controlador LQR y un controlador LMI implementados sobre un helicóptero de dos grados de libertad pivotado. Al final, se observará el desempeño de los mismos con el fin de poder establecer cuál de los dos presenta un mejor comportamiento frente a perturbaciones en dicho helicóptero.

En este sentido, es necesario encontrar en primera instancia el modelo matemático que describa el comportamiento del sistema. Luego, realizar la validación del mismo para determinar el porcentaje de aproximación que tiene respecto a la respuesta real del sistema. Posteriormente, aplicar las técnicas de diseño de los controladores LMI y LQR, e implementarlos en el sistema con el fin de poder observar el desempeño de los mismos.

A su vez el presente documento se encuentra organizado de la siguiente forma, en el primer capítulo se trata la introducción, los objetivos y el marco de referencia, el desarrollo del capítulo 2 se encontrará el desarrollo de la metodología, la implementación de la plataforma y el modelo del sistema, en el desarrollo del 3 capítulo se encontrara el diseño del controlador LQR y por último en el capítulo 4 el desarrollo del controlador haciendo uso de LMI, para finalizar encontraran las conclusiones y bibliografía correspondiente al desarrollo del presente trabajo de investigación.

## **Objetivos**

### **Objetivo General**

- Diseñar e implementar un controlador LQR clásico y un controlador robusto LMI para un helicóptero de 2 grados de libertad pivotado

### **Objetivos Específicos**

- Realizar un estudio de tecnologías que den como resultado la selección de uno o más sensores que permitan medir la velocidad y la posición para cada uno de los grados de libertad.
- Obtener el modelo de incertidumbres paramétricas para un helicóptero de dos grados de libertad pivotado.
- Validar el modelo encontrado Vs el diseño experimental del helicóptero de 2 grados de libertad pivotado.
- Diseñar un controlador de tipo LQR clásico que permita aumentar la velocidad de respuesta del sistema con presencia de sobre impulso máximo.
- Diseñar un controlador de tipo robusto haciendo uso de la técnica LMI basado en una función objetivo y restricciones tales como un mínimo nivel de perturbación a la salida, una ubicación de polos en una región deseada, restricción sobre la señal de control y estabilidad en una rango amplio de operación.
- Comparar tanto en simulación como experimentalmente los controladores propuestos, teniendo en cuenta los mismos criterios de perturbaciones a la entrada del mismo.

## 1. Marco de referencia

### 1.1. Helicóptero de dos grados de libertad

Los helicópteros de dos grados de libertad (DOF) pivotados son plataformas que emulan el comportamiento de un helicóptero común con un rotor principal y un rotor de cola anti torque. Esto permite ahondar e investigar en conceptos y teorías relevantes para aplicaciones del mundo real sobre dinámicas y control de vuelo en helicópteros de cuerpo rígido, drones, o aeronaves similares (Quanser, 2006), (Universita' Degli Studi di Siena, 2010).

En la siguiente figura se puede apreciar una plataforma comercial para fines educativos ofrecida por la empresa Quanser.



**Fig. 1.** Helicóptero de 2 DOF – empresa Quanser (Quanser, 2006)

### 1.2. Motor Brushless

Los motores brushless o motores sin escobillas es un tipo de motor altamente empleado en aplicaciones de automóviles, helicópteros, drones aeromodelismo y aeroespaciales. Como su nombre lo indica, estos motores no emplean escobillas para su conmutación, en lugar de esto son

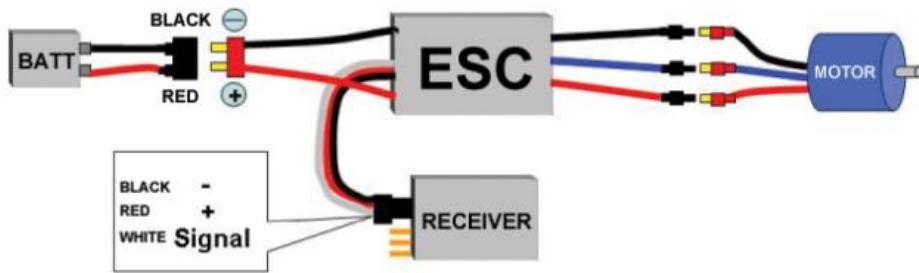
comutados electrónicamente. Debido a esto poseen algunas ventajas sobre los motores de inducción o motores DC con escobillas:

- Mejor relación velocidad vs torque.
- Alta respuesta dinámica
- Alta eficiencia
- Mayor rango de velocidad
- Mayor vida útil

Adicionalmente, la relación torque versus el tamaño del motor es mayor a la de los motores DC convencionales, lo cual los convierte en dispositivos bastante útiles en aplicaciones en donde el espacio y el peso son factores críticos (Yedamale, 2010), a su vez, pese a tan altas prestaciones estos motores son más costos que un motor DC con escobillas, necesitan de un driver de potencia ESC el cual debe estar muy bien calibrado por medio de PWM para el buen funcionamiento del motor y que este funcione en el rango total para el cual fue diseñado y para la generación de este PWM siempre se debe hacer uso de electrónica que defina los ciclos solicitados en el bloque de control, esto aumentando considerablemente el costo de implementación de un motor de este tipo.

### **1.3. Controlador electrónico de velocidad**

Los ESC's (por sus siglas en inglés *Electronic Speed Controller*) son los encargados de variar la velocidad de rotación de los motores brushless. Estos dispositivos proveen una señal trifásica AC al rotor del motor brushless a partir de una señal de control de baja potencia (Jaramillo & Gómez, 2013). Dicha señal de control es una modulación de ancho de pulso PWM que comúnmente tiene una frecuencia de 50Hz; en donde el ancho de pulso de trabajo está determinado por el fabricante (típicamente en un rango de 1-2ms).



**Fig. 2.** Diagrama de conexión de un ESC (Hobby King)

Por lo general, las baterías empleadas para la alimentación de la etapa de potencia son de tipo Lipo, NiMh, NiCd y Li-ion, preferiblemente Lipo a razón de la pequeña resistencia interna que presenta lo cual redonda en una entrega de aproximadamente el 97% de la energía total almacenada, a su vez por la gran cantidad de ciclos de carga y descarga que pueden mantener entre otras características.

#### 1.4. Batería Lipo (Polímero de Litio)

Las baterías de polímero de litio *Lipo* son las más usadas en aplicaciones de robótica, equipos autónomos y aeromodelismo ya que poseen ciertas ventajas frente a las baterías Li-ion, NiMh y NiCd:

- El voltaje por celda es de 3.7V, mayor que las de NiMh y NiCd de 1.2V por celda.
- Tiene una capacidad de carga de 5 a 12 veces mayor a las baterías NiCd.
- A diferencia de las baterías NiCd y NiMh las de tipo Lipo no poseen efecto de memoria.
- Requieren un tiempo de carga menor que las NiMH.
- Al contrario de las baterías Li-ion las Lipo no necesitan un circuito para limitar la corriente de cada celda.
- Son livianas.

## 1.5. Acelerómetros

Son sensores con los cuales es posible medir la aceleración que sufre una masa inercial interna del dispositivo cuando éste se encuentra en movimiento. Para detectar dicha aceleración, estos sensores se basan en la primera ley de Newton

$$F=ma \quad (1.1)$$

Dónde:

$F$  es fuerza

$m$  masa

$a$  aceleración.

Teniendo en cuenta lo anterior, muchos acelerómetros se basan en la detección de la fuerza ejercida en una masa en un sistema masa resorte (Serway & Jewett, 2004). Considérese un sistema mecánico conformado por una masa fija  $m$  sujetada a un resorte con una rigidez  $k$ . En caso de que la masa se desplace una distancia  $x$  la fuerza experimentada es entonces:

$$F=kx \quad (1.2)$$

Reemplazando en (1)

$$kx=ma \quad (1.3)$$

De esta manera, despejando  $a$  en (3) se obtiene

$$a=kx/m \quad (1.4)$$

Con esto, es posible obtener la aceleración experimentada por la masa a partir del desplazamiento de la misma.

Los acelerómetros pueden clasificarse según su tecnología, los más importantes son:

- Capacitivos

Los acelerómetros capacitivos tienen la característica de poder medir aceleración desde 0Hz hasta varios cientos de Hz, por lo que se suelen emplear para aplicaciones de baja o muy baja frecuencia, aunque cuentan con muy buena resistencia a posibles picos de aceleración.

Concretamente, los acelerómetros capacitivos están completamente sellados, por lo que son muy insensibles a interferencias y radiaciones electromagnéticas. En relación al encapsulado, cuentan con diferentes formatos, aunque el estándar tiene una rosca macho en el centro, que permite un sencillo montaje en cualquier aplicación.

Incorporan la electrónica permitiendo obtener una alta sensibilidad, con una baja deriva térmica y gran linealidad. Aplicaciones típicas son medidas sísmicas, medidas de inclinación, medidas dinámicas de posición y velocidad, etc.

- Piezoresistivos

La familia de acelerómetros MEMS o acelerómetros DC, cubre todas las variantes posibles en este tipo de sensores. Su principal característica es que pueden medir desde 0Hz hasta varios cientos de Hz, con rangos que parten de los 2g y pueden llegar a los 6000 g. Su salida amplificada, la compensación en temperatura y una alta resolución son algunas de sus características más destacadas.

También existen series MEMS no amplificadas, con salida directa del puente para poderse acondicionar externamente como extensometría. Algunas aplicaciones típicas son los ensayos para la seguridad den el automóvil, análisis de confort en tren, análisis del transporte, monitorización de estructuras, etc.

- Piezoeléctricos

Los acelerómetros piezoeléctricos también conocidos como acelerómetros ICP comercialmente, son acelerómetros pensados para la medida de medias y altas frecuencias. Por su característica

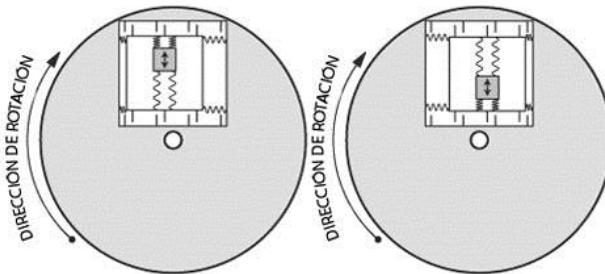
física, constan de un material piezoelectrónico que al ser manipulado mecánicamente proporciona una tensión muy pequeña, proporcional a ese movimiento.

Existen diferentes formatos de acelerómetro piezoelectrónico, sellados en acero inoxidable, con agujero pasante, triaxiales, etc., lo que prácticamente todos comparten es su amplio ancho de banda, que parte desde unos pocos Hz hasta los miles de Hz. Aplicaciones típicas son la medida de vibraciones en máquinas.

## 1.6. Giroscopio

Es un instrumento mecánico capaz de medir la orientación en el espacio de algún dispositivo y cuyo funcionamiento se basa en el principio de conservación del momento angular. Es por ello, que éstos representan una parte fundamental de los sistemas de navegación de vehículos (Sáñor, 2014).

Gracias a los avances tecnológicos, en la actualidad, estos dispositivos se han convertido en sensores tipo MEMS, con los que se puede medir la velocidad angular generada por un movimiento de rotación. Una pequeña masa al interior del giroscopio se desplaza debido a los cambios de velocidad angular generados por los giros del sensor, este movimiento se convierte en señales eléctricas de baja potencia. (Ver Fig. 3)



**Fig. 3.** Funcionamiento interno de un giroscopio MEMS

Fuente: <http://www.tecnoficio.com/electricidad/images/giroscopio%20vibrante%20en%20movimiento%201.jpg>

## 1.7. RS232

Por sus siglas en inglés *Recommended Standard 232*, el protocolo de comunicación RS232 es un estándar mundial que rige los parámetros de uno de los modos de comunicación serial. Gracias a éste, se estandarizan las velocidades de transferencia de datos, la forma de control que utiliza dicha transferencia, los niveles de voltajes utilizados, el tipo de cable permitido, las distancias entre equipos, los conectores, entre otros. Dependiendo de los dispositivos a conectar las comunicaciones seriales pueden tener líneas adicionales a las de transmisión (Tx) y recepción (Rx), como lo son las líneas de control de flujo (Hands-hake).

La interfaz del protocolo permite trabajar con comunicación síncronas o asíncronas y tipos de canal simplex, half dúplex o full dúplex. El primero, permite la comunicación de un dispositivo a otro únicamente en una dirección; un canal half dúplex permite la comunicación en ambos sentidos, sin embargo, esta operación se ejecuta durante un tiempo determinado, ya que posteriormente se debe realizar una conmutación en la línea para hacer el cambio de dirección; El tercer tipo de canal –full dúplex- permite la comunicación en ambas direcciones simultáneamente (EIA standard RS-232-C, 1969).

La configuración principal para el uso de este estándar es la siguiente:

- Selección de la velocidad en baudios: 1200, 2400, 4800, 9600, 14400, 19200, 38400, 56000, 115200.
- Paridad: paridad par, paridad impar, sin paridad.
- Bits de parada: 1, 2.
- Cantidad de bits por cada símbolo o carácter enviado: 7, 8.
- Niveles de Voltaje para la representación de los valores “1”o”0”, los cuales permiten un no retorno a cero.

## 1.8. Ángulos de navegación

Los ángulos de navegación son tres coordenadas angulares que permiten especificar la orientación de un sistema móvil tridimensional respecto a uno fijo (Euler, 1776). Los tres ángulos son: Pitch, yaw y roll. (Ver Fig. 4).

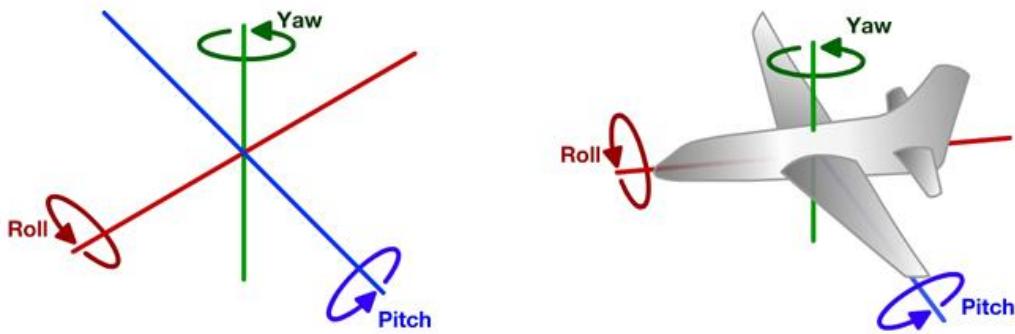


Fig. 4. Ángulos de navegación

Fuente: <http://theboredengineers.com/WordPress3/wp-content/uploads/2012/05/PitchRollYaw.png>

## 1.9. Control LQR

El control LQR (por sus siglas en inglés *Linear Quadratic Regulator*), es un método de control óptimo con el cual se asegura la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a través de ganancias de realimentación. Este método busca minimizar una función de costo, la cual, se puede definir como la sumatoria de desviaciones de los valores reales medidos respecto a los deseados; de esta manera, lo que se pretende es encontrar aquellas ganancias del controlador que minimizan las desviaciones no deseadas (MIT), (Ogata, 2010).

Teniendo en cuenta lo anterior, dado el sistema dinámico

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (1.6)$$

Con

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{y}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$$

Se define una función de costo

$$J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + Ru^T(t)]dt \quad (1.7)$$

Teniendo en cuenta la ley de realimentación, el control óptimo que minimiza a J es

$$u(t) = -Kx(t) \quad (1.8)$$

Donde  $\mathbf{K}$  está dado por

$$K = R^{-1}B^TP \quad (1.9)$$

En donde P es la única solución definida positiva de la matriz Ecuación Algebraica de Riccati

$$A^TP + AP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \quad (1.10)$$

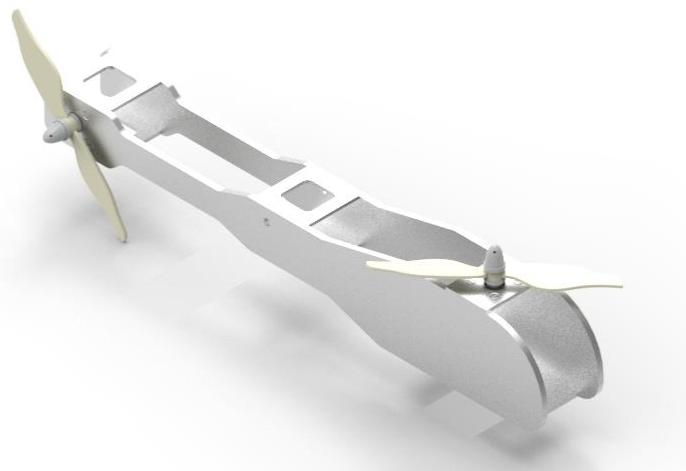
## 2. Metodología

### 2.1. Diseño de helicóptero de 2 grados de libertad pivotado descripción del modelo

Para el diseño del helicóptero de dos grados de libertad pivotado se consideraron características tales como, el tamaño, el peso, la distribución de la masa de cada uno de los elementos que forman parte del sistema, ejes rotativos y pivotantes, bases de soporte, empuje de los motores entre otros, estos aspectos observados de una plataforma Quanser 2 DOF Helicopter.

De las características descritas en el párrafo anterior, considerar la distribución de la masa del helicóptero es quizás un elemento importante, ya que se busca que la posición de reposo se encuentre en un ángulo de -45 grados con respecto al eje pivotante, esto para partir de que la masa delantera y trasera se encuentren en un desbalance que debe ser ajustado haciendo uso del controlador y del set point que se le ajuste a este.

Para el inicio del diseño se tuvo en cuenta con anterioridad el peso de los motores, la masa de las hélices, la distribución de los tornillos de sujeción, cables de datos y de potencia, ubicación de sensores, fuerza de empuje de los motores ya que inicialmente se desarrolló una estructura que se llevó hasta el proceso de implementación pero en las pruebas de funcionamiento no se comportó de la mejor manera a razón de que el movimiento del aire generado por las hélices del motor se truncaba con las estructura ya que la misma se diseñó totalmente cerrada.

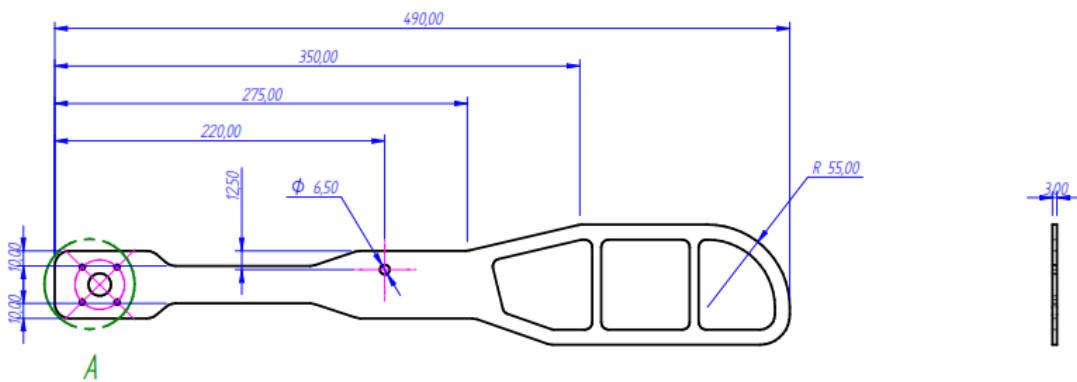


**Fig. 5.** Diseño inicial de la estructura (Autor)

Por tanto, se determina hacer un nuevo diseño del helicóptero que incluye las siguientes modificaciones:

- Rediseño de la estructura con cortes o ventanas que permitan el flujo de aire generado por el motor del eje pitch.
- El material de la estructura se cambia por acrílico de alto impacto de 3mm de espesor, dado que cumple con criterios tales como, ser liviano, económico y permite realizar cortes por medio de láser.

Una vez se lleva a cabo la implementación y respectivas pruebas, se observa una mejor respuesta con menor esfuerzo del motor.



**Fig. 6.** Plano Lateral final de la estructura (Autor)

Luego de los cambios realizados a la estructura, se diseñaron una serie de soportes que permitieron tanto la ubicación de los motores para el eje pitch como del eje yaw por medio de tornillos de sujeción, al igual se diseñó un soporte que permitiera la ubicación del sensor qué realizaría la medición del giro del eje pitch directamente sobre el punto pivotado para eliminar el desplazamiento angular del sensor y así no incurrir en medidas erróneas de la posición y velocidad en dicho eje, y que a su vez, permitiera la conexión de las líneas de alimentación y datos que entrarían y saldrían del sensor sin que estas interrumpieran con el movimiento del helicóptero, no sin antes tener en cuenta que se hacía necesario el diseño de un soporte general

que permitiera la obtención de los movimientos en el eje pitch y el eje yaw. En la Fig. 7 se observa el resultado de la estructura del helicóptero con el nuevo diseño.



**Fig. 7.** Diseño Final Helicóptero con soportes (Autor)



**Fig. 8.** Ubicación de la caja de acople para los ejes con la base de soporte (Autor)

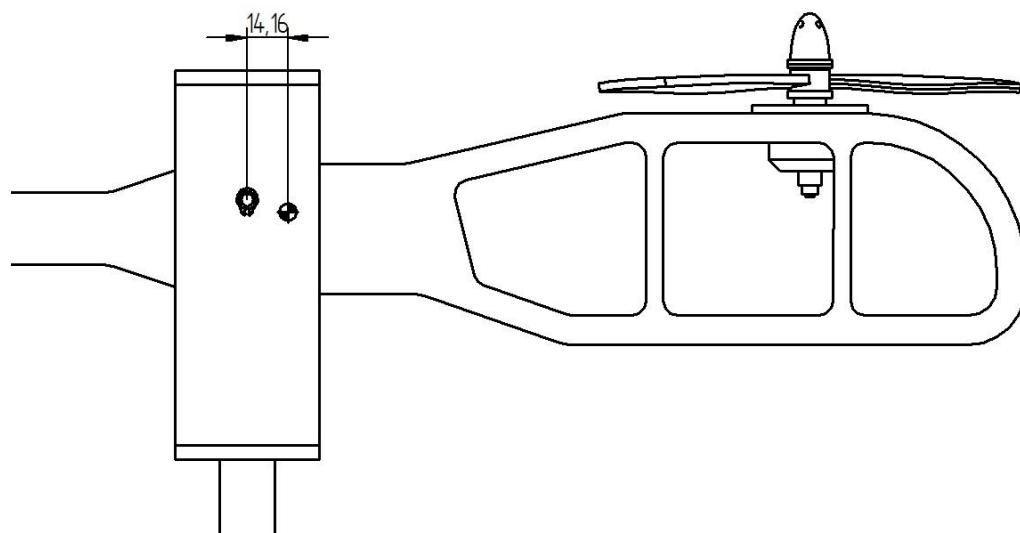
Luego del diseño de la estructura general correspondiente al helicóptero, soportes de motores y sensor, y observando que era elemental el movimiento en el eje yaw y en el eje pitch con el menor rozamiento posible, se selecciona un rodamiento que a su vez hace las veces de soporte del eje, el cual realiza el movimiento en yaw y permite sostener la totalidad del peso de la

estructura, y para el caso del eje pitch se hace uso de una varilla calibrada que tiene un rozamiento conocido entre ésta y el acrílico que posteriormente se tendrá en cuenta para la determinación del modelo matemático del sistema.

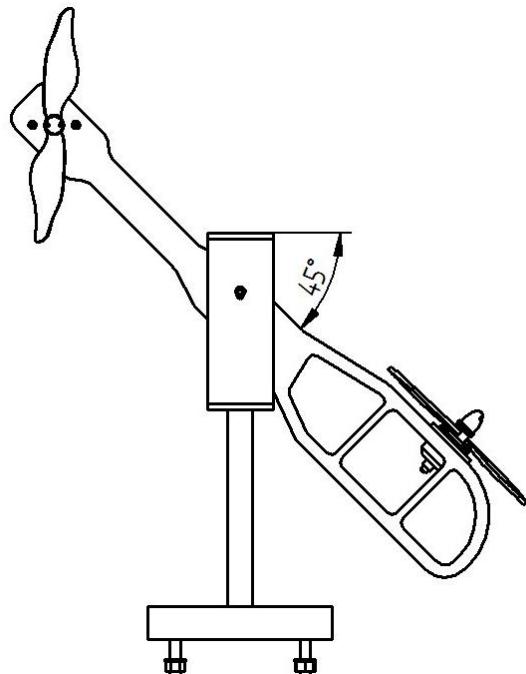


**Fig. 9.** Ejes de Soporte para el eje pitch y el eje yaw (Autor)

A su vez es de vital importancia la ubicación del eje de pivote sobre la posición del helicóptero ya que sobre el mismo se debe hacer la medición tanto de la posición como de la velocidad de pitch y debe asegurar que el centro de masa este inclinado hacia la parte frontal del helicóptero asegurando siempre que la posición de reposo del helicóptero sea a -45 grados sobre dicho eje.



**Fig. 10.** Ubicación del eje pivotante en la estructura del helicóptero (Autor)

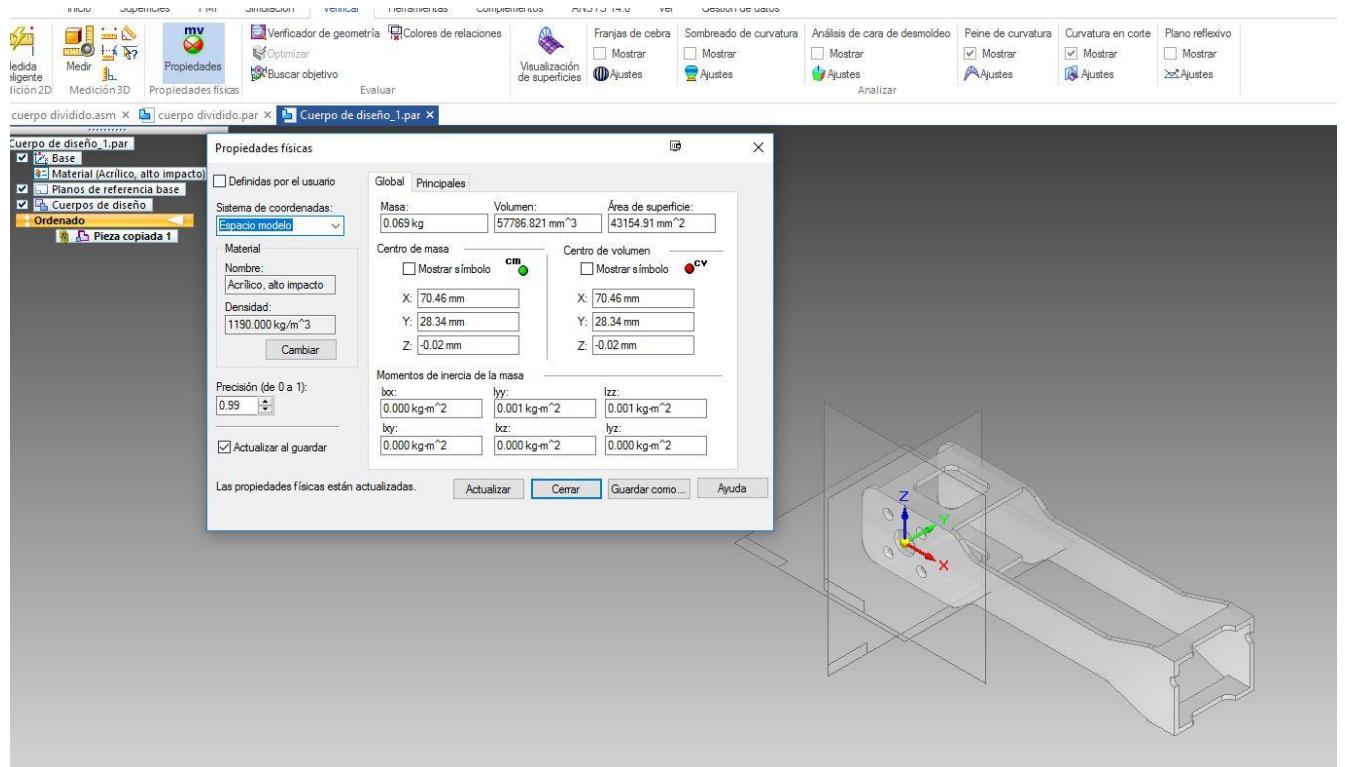


**Fig. 11.** Ubicación del eje pivotante en la estructura del helicóptero (Autor)

## 2.2. Implementación de la plataforma.

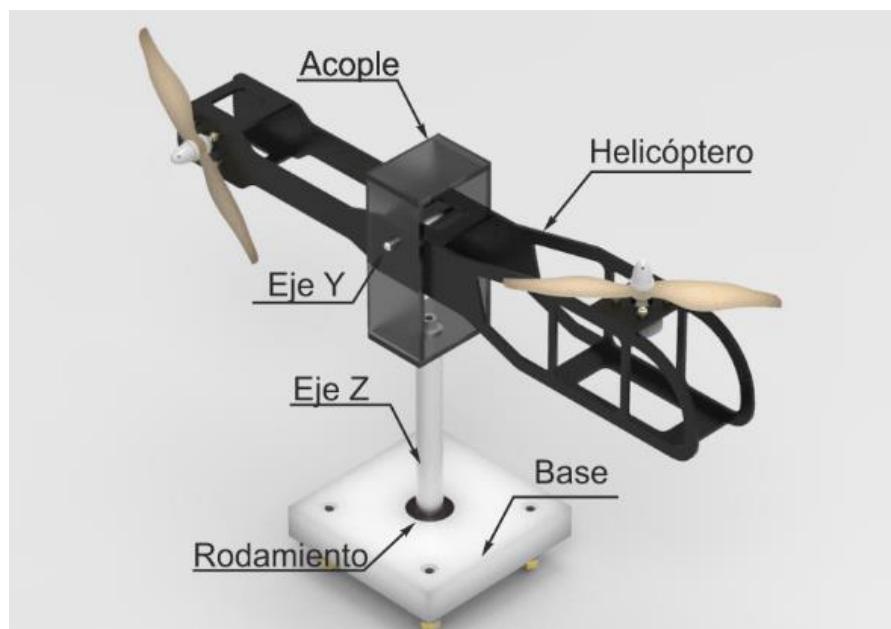
Posterior al proceso de diseño indicado anteriormente se realiza la implementación de la plataforma experimental de un helicóptero de dos grados de libertad, la cual permite el movimiento en los ejes pitch y yaw, con el fin de poder aplicar técnicas de control robusto, lineales y no lineales.

Para la elaboración de esta plataforma se ha seleccionado el acrílico de alto impacto de espesor de 3mm como material de construcción de la estructura, esto a razón de que su densidad permite una excelente relación entre el tamaño del helicóptero y el peso del mismo, además, facilita el ensamble y cambio de piezas que sufren con la vibración de los motores.



**Fig. 12.** Selección de material en Solid-Edge para cálculos de masa y centros de gravedad (Autor)

Dicho modelo se puede apreciar en la siguiente figura.



**Fig. 13.** Plataforma experimental (Autor)

La plataforma experimental emula la configuración de un helicóptero común con un rotor principal y un rotor de cola antitorque. El helicóptero posee dos hélices ubicadas perpendicularmente una de la otra y son controladas por dos motores brushless, uno por cada hélice. La hélice superior controla el movimiento en el eje pitch y la hélice de atrás el eje yaw. Adicionalmente, la planta posee una IMU (por sus siglas en inglés *Inertial measurement unit*) para la medición de la posición y velocidades angulares en los ejes pitch y yaw, y un potenciómetro lineal para complementar la medición del eje yaw.

Observando el funcionamiento de la plataforma del fabricante Quanser, se realiza un estudio de tecnología de los elementos que la conforman. Este estudio arroja los componentes necesarios para el desarrollo de la plataforma que se desea implementar.

Teniendo en cuenta que no se desea reproducir una plataforma idéntica a la Quanser, se recurre a tecnologías de Aeromodelismo las cuales son menos costosas y cuentan con especificaciones similares, presentando características aproximadas al proceso que se quiere realizar, estos elementos se describen a continuación:

**Tabla 1.** Comparación y selección de componentes. Fuente: Laboratorio de Automatización y Control de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Tipo de Elemento	Quanser 2 DOF	Costo	Elementos Aeromodelismo	Costo
<b>Motor eje Pitch</b>	Pittman 9234s004 r, Servo motor, 12VDC, 6.151rpm no load, 283g de masa.	USD\$ 108	A2212 1000KV,Motor sin escobillas, 56 gramos de masa, 12000 rpm con batería de 12 voltios durante 60 segundos.	USD\$ 7.50
<b>Motor eje Yaw</b>	Faulhaber 2842s006c, Micromotor, 6VDC, 5100 rpm sin carga, 132g de masa.	USD\$ 137.5	A2212 1000KV,Motor sin escobillas, 56 gramos de masa, 12000 rpm con batería de 12 voltios durante 60 segundos.	USD\$ 7.50
<b>Sensor eje Pitch</b>	Enconder incremental 3500 Pulsol por vuelta, 12v a 24 v.	USD\$ 144	IMU de 6 grados de libertad acelerómetro y un giroscopio, ambos de tres ejes.	USD\$1.75

<b>Tipo de Elemento</b>	<b>Quanser 2 DOF</b>	<b>Costo</b>	<b>Elementos Aeromodelismo</b>	<b>Costo</b>
<b>Sensor eje Yaw</b>	Enconder incremental 3500 Pulsol por vuelta, 12v a 24 v.	USD\$ 144	IMU de 6 grados de libertad acelerómetro y un giroscopio, ambos de tres ejes.	USD\$1.75
<b>Driver Potencia Pitch</b>	Quanser Universal Power Module f actuator 24V 5A warranty UPM-2405	USD\$513.4	Hobby Power 30A, Brushless, entrega continua de 30A, maxima corriente de 40A durante 10 Secs. Voltaje de entrada: 2-4 cells lithium battery or 5-12 cells NiCd/NIMh battery.	USD\$3.7
<b>Driver de potencia Yaw</b>	Quanser Universal Power Module f actuator 24V 5A warranty UPM-2405	USD\$513.4	Hobby Power 30A, Brushless, entrega continua de 30A, maxima corriente de 40A durante 10 Secs. Voltaje de entrada: 2-4 cells lithium battery or 5-12 cells NiCd/NIMh battery.	USD\$3.7
<b>Tarjeta de Adquisicion</b>	Quanser Consulting MULTIQ-2 Encoder Data Aquisition Card ISA	USD\$ 245	Arduino Micro basado en el microcontrolador ATmega328, Operating Voltage (logic level) : 5V 8 analog inputs ports, 14 Digital input / output ports, 6PWM ports, 1 pairs of TTL level serial transceiver ports RX / TX, Power Support for external 5V ~ 12V DC power supply ,Support power supply by 9V battery	USD\$2.79
<b>Fuente de</b>	Incluida en el Driver	USD\$0	Bateria Lipo de 3 celdas	USD \$54.

Alimentacion	de Potencia		de 11.4 voltios a 5000mA, peso 600 gramos.	
--------------	-------------	--	---	--

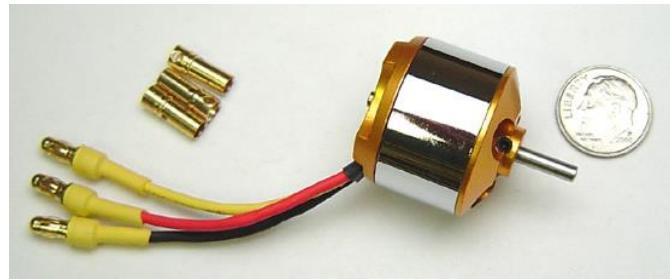
Como se puede observar en la tabla anterior se comparan los elementos físicos más importantes para el desarrollo de la planta a implementar, dicha comparación se realiza entre la planta desarrollada por QUANSER y cada uno de los elementos que la conforman vs componentes de aeromodelismo que tienen las mismas o mejores características pero tienen restricciones ya que deben ser programadas, acopladas e implementadas en la aplicación que se desea implementar y pese a que existen gran variedad de elementos de aeromodelismo no se compraran en sus totalidad a razón de que muchos de estos no permiten ni el control de velocidad o sus características son mucho mayores a las necesidades del proyecto.

Pese a que se pudo observar detenidamente una plataforma QUANSER y que la misma utilizaba diferente tipo de tecnología para medición de la posición se optó por el uso de acelerómetros y giroscopios para el sensado de las variables implicadas en el control tanto por la facilidad de acople a la estructura como por el coste mínimo en la adquisición de este tipo de elementos, es así que la elección de la tecnología a implementar se basó inicialmente en las características de peso, tamaño y prestaciones y posteriormente al coste de cada uno de los elementos y de la facilidad de adquisición de los mismos en el mercado nacional.

## 2.2.1. Descripción de los componentes utilizados.

### 2.2.1.1. Motores Brushless.

Estos son los principales elementos encargados de generar las fuerzas de empuje en los ejes pitch y yaw. Se han seleccionado los motores brushless A2212/13T los cuales son altamente empleados en aplicaciones de aeromodelismo. Dichos motores poseen una relación Kv de 1000rpm/V, una eficiencia cercana al 80% y una velocidad máxima de 10500rpm.



**Fig. 14.** Motor brushless 1000Kv

Fuente: <http://www.bphobbies.com/view.asp?id=V450327&pid=B1688512&img=1>

En la siguiente tabla, proporcionada por el fabricante, se pueden apreciar los demás datos técnicos de los motores seleccionados.

**Tabla 2.** Información técnica de los motores brushless.

<b>No. De celdas:</b>	2 – 3 Li-Poly
<b>Kv:</b>	1000 RPM/V
<b>Eficiencia Max:</b>	80%
<b>Eficiencia Max – Corriente:</b>	4 – 10 <sup>a</sup> (>75%)
<b>Corriente sin carga:</b>	0.5 <sup>a</sup> @10V
<b>Resistencia:</b>	0.090 ohms
<b>Corriente Max:</b>	15 <sup>a</sup> for 60S
<b>Potencia Max:</b>	167W for 60S
<b>Peso:</b>	47 g / 1.65 oz.
<b>Tamaño:</b>	27.5 mm x 30 mm
<b>Diámetro del eje:</b>	3.17mm (3.2mm)

### 2.2.1.2. Hélices.

Se escogieron las hélices con un diámetro de 10in con un paso de 4.5in puesto que el fabricante de los motores brushless seleccionados recomienda el uso de las mismas y además provee una tabla de datos de pruebas de dichos motores con estas hélices, suministrando información importante de voltajes, corrientes, velocidades y fuerzas de empujes, los cuales son factores importantes en el estudio aerodinámico del sistema. Algunas características de las hélices seleccionadas se pueden ver a continuación:

**Tabla 3.** Características de las hélices.

<b>Diámetro del eje:</b>	6.0mm
<b>Diámetros ajustables con adaptador:</b>	3mm, 3.2mm, 4mm, 5mm, 6mm, 6.35mm, 7.95mm
<b>Espesor del centro:</b>	9.7mm
<b>Peso:</b>	15g
<b>Rigidez:</b>	Alta



**Fig. 15.** Hélices 1045

Fuente:

[http://www.hobbyking.com/hobbyking/store/\\_22446\\_GWS\\_Style\\_Slowfly\\_Propeller\\_10x4\\_5\\_Black\\_CCW\\_4\\_pcs\\_.html](http://www.hobbyking.com/hobbyking/store/_22446_GWS_Style_Slowfly_Propeller_10x4_5_Black_CCW_4_pcs_.html)

#### **2.2.1.3. ESC (Control de Velocidad para motor sin Escobillas).**

El criterio de selección para los controladores de velocidad es la corriente máxima suministrada a los motores. Para ello, se seleccionó un ESC HOBBYPOWER de 30<sup>a</sup> con las siguientes especificaciones técnicas:

- Salida: 30<sup>a</sup> continuos- 40<sup>a</sup> máx. durante 10 segundos.
- Voltaje de entrada: Batería Lipo de 2-4 celdas o batería NiMh de 5-12 celdas.
- BEC: 2<sup>a</sup>/5V
- Velocidad máxima: 210,000rpm para 2 poles, 70,000rpm para 6 polos, 35,000rpm para 12 polos.
- Tamaño: Size: 45mm (L) \* 24mm (W) \* 11mm (H).
- Peso: 25g.



**Fig. 16.** ESC Hobbypower - 30A

Fuente: <http://www.rcshopbd.com/product/hobbypower-30a-brushless-esc/>

#### 2.2.1.4. Sensores.

Los sensores para la medición de los movimientos en los ángulos pitch y yaw son una IMU y un potenciómetro lineal respectivamente.

Para la medición del ángulo pitch se ha seleccionado el sensor MPU-6050, de bajo costo (1.65 USD), el cual es una IMU de 6 grados de libertad ya que consta de un acelerómetro y un giroscopio, ambos de tres ejes. El MPU-6050 emplea un protocolo de comunicación i2c para la entrega de datos de aceleración y velocidad angular.



**Fig. 17.** IMU-MPU 6050

Fuente: <http://electrotec.cms.webhub.la/elements/images/image-article-9d2c009e6f20acf62734dfab4755bd0f.jpg>

Debido a la acción de la gravedad, el eje z (yaw) no puede ser medido con el acelerómetro, sólo puede ser medido mediante los datos del giroscopio. Sin embargo, debido a la acción integral en la medida del ángulo a través del giroscopio se van acumulando pequeños errores con el paso del tiempo lo cual genera una deriva. A causa de este fenómeno, se ha empleado

un potenciómetro lineal para complementar la medida del giroscopio del ángulo en el eje yaw.

El potenciómetro lineal, de  $50\text{K}\Omega$  acoplado a la plataforma con una relación 1:1, entrega un voltaje entre 0-5V proporcional al ángulo medido en yaw.



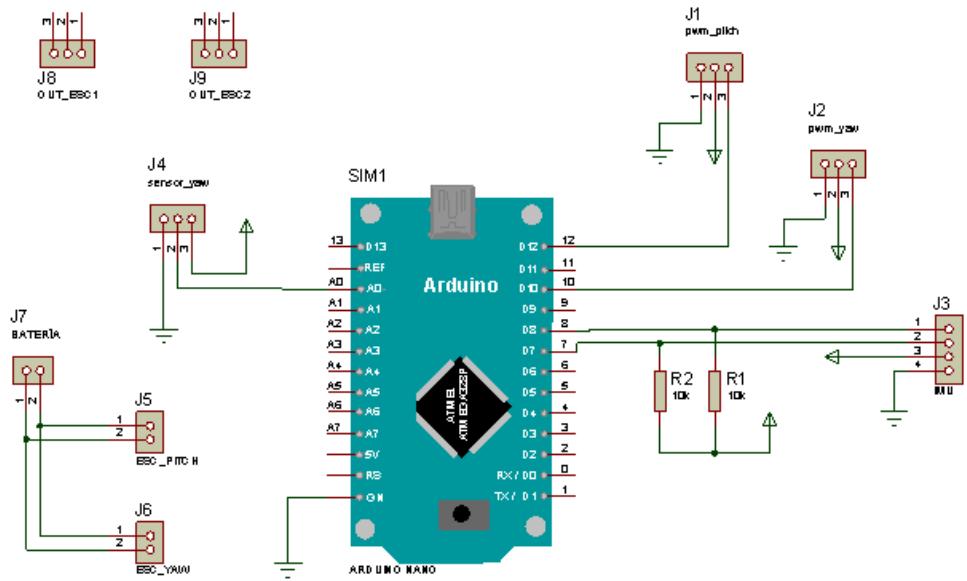
**Fig. 18.** Potenciómetro lineal 10K

Fuente: <http://www.dynamoelectronics.com/potenciometros-trimmeretc/591-potenciometro-lineal-10k-10-vueltas.html>

#### **2.2.1.5. Tarjeta de adquisición de datos.**

Se ha diseñado una tarjeta electrónica con un Arduino micro para el envío y recepción de datos a los diferentes bloques que componen el sistema. Esta tarjeta se encarga interpretar las señales enviadas por los sensores y realiza su respectiva codificación; además, se implementa un filtro complementario para la reducción del ruido presente en las lecturas tomadas de estos sensores. Adicionalmente, genera las señales PWM que controlan los ESC's para el desplazamiento del helicóptero en el ángulo de navegación deseado.

Esta tarjeta realiza la trasmisión de las señales de sensado – previamente acondicionadas – hacia el PC y, al mismo tiempo, recibe los datos enviados desde el ordenador, los cuales contienen las órdenes para la generación de las señales de control. Lo anterior se lleva a cabo a través de un protocolo de comunicación serie RS232. A continuación se puede apreciar el diagrama circuital de la tarjeta.

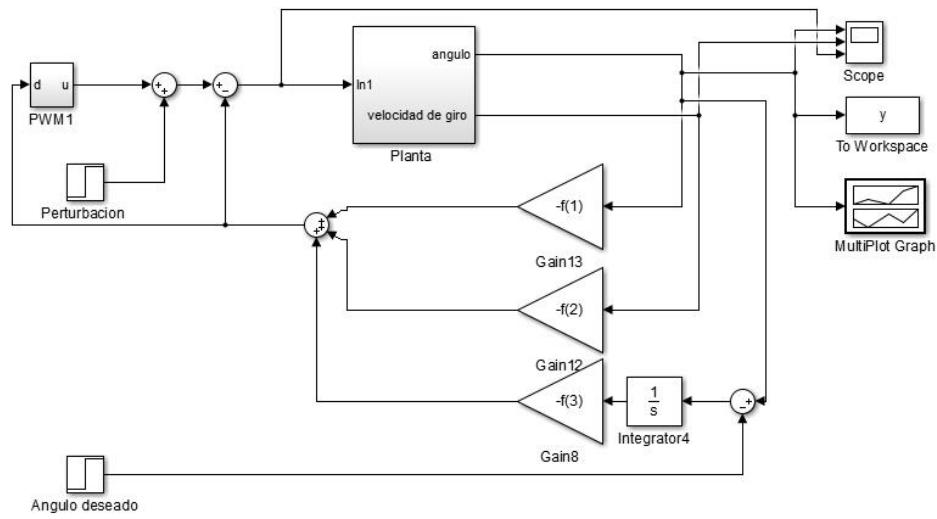


**Fig. 19.** Diagrama circuital de tarjeta de adquisición de datos (Autor)

#### 2.2.1.6. Adquisición de datos por parte de Matlab.

El proceso de adquisición de datos por parte de Matlab inicia con la información captada por los sensores con los cuales cuenta la plataforma (posición y velocidad) que son leídos por parte de la tarjeta de adquisición haciendo uso del protocolo I2C, posteriormente, estos datos son organizados y enviados hacia el equipo de cómputo por medio de la interfaz RS232, donde simultáneamente son recibidos por Simulink para luego ser procesados ya sea por el controlador LMI o LQR según sea el caso.

Luego del procesamiento por parte de los controladores, se envía esta señal hacia la tarjeta de adquisición la cual interpretará los datos y envía las señales de PWM para controlar la velocidad de los motores.

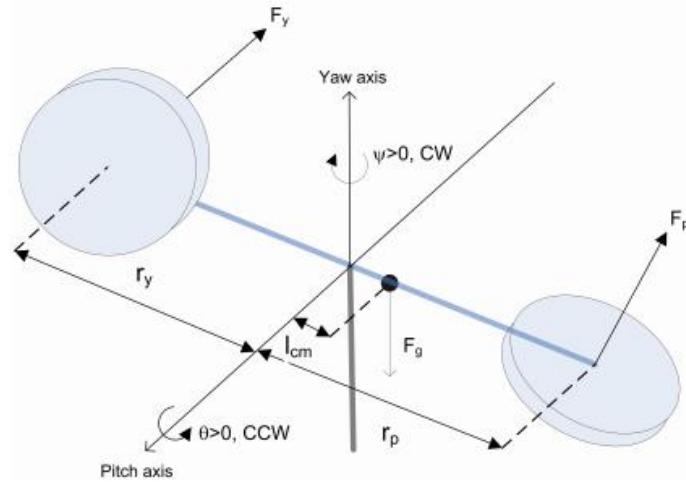


**Fig. 20.** Diagrama de Simulink de controladores diseñados (Autor)

### 3. Modelo del sistema

### 3.1. Modelo teórico

El modelo matemático que describe el comportamiento del sistema se obtiene mediante el estudio del diagrama de cuerpo libre aplicando leyes de Newton. Considerando la plataforma como un cuerpo rígido se tiene el siguiente diagrama (Solaque G., Cristancho, & Gil C., 2014):



**Fig. 21.** Diagrama de cuerpo libre del helicóptero de 2DOF

Fuente: <http://jpkc.nwp.edu.cn/yjsgsp/2013/16/attachment/lab/2%20DOF%20Helicopter%20Lab%20Manual.pdf>

Teniendo en cuenta la segunda ley de Newton se sabe que

$$\mathbf{F} = \mathbf{m}\mathbf{a} \quad (3.1)$$

Donde

F=fuerza.

M= masa

a=aceleración

Para movimientos rotacionales su equivalente es:

$$\boldsymbol{\tau} = J\dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (3.2)$$

En donde

$\tau$ = momento angular.

$J$ = momento de inercia.

$\omega$ = velocidad angular.

Reemplazando  $\omega$  por  $\dot{\theta}$  en 17

$$\tau = J\ddot{\theta} \quad (3.3)$$

Suponiendo que el sistema se encuentra en equilibrio y aplicando la segunda ley de Newton en cada eje de rotación se obtiene que en pitch

$$\sum \tau = J\ddot{\theta}$$

$$J_p\ddot{\theta}(t) = T_p r_p + K_y T_y - \mu_p r_p \dot{\theta}(t) - f_g l_{cm} \sin \theta(t) \quad (3.4)$$

Para yaw

$$\sum \tau = J\ddot{\phi}$$

$$J_y\ddot{\phi}(t) = T_y r_y + K_p T_p - \mu_y r_y \dot{\phi}(t) \quad (3.5)$$

Con

$J_i$  = momento inercial

$T_i$  = fuerza de empuje producidos por las hélices

$K_i$  = constantes de torque de reacción generadas por la acción de las hélices

$\mu_i$  = coeficiente de rozamiento dinámico en los ejes de rotación.

$f_g$  = Fuerza de gravedad actuando sobre el centro de masa.

$l_{cm}$  = distancia entre el eje vertical y el centro de masa.

### 3.1.1. Modelo simplificado.

Para realizar la simplificación de los modelos de las dinámicas del sistema eliminando los acoplos existentes entre las dinámicas de cada eje de rotación. Para ello la fuerza de empuje  $T_y$  se aproxima a cero en 19 y  $T_p$  se aproxima a 0 en 20. De tal forma que

$$J_p \ddot{\theta}(t) = T_p r_p - \mu_p r_p \dot{\theta}(t) - f_g l_{cm} \sin \theta(t) \quad (3.6)$$

$$J_y \ddot{\phi}(t) = T_y r_y - \mu_y r_y \dot{\phi}(t) \quad (3.7)$$

### 3.1.2. Linealización del modelo.

Para simplificar los cálculos, y poder aplicar técnicas de control lineal en el sistema es necesario realizar una linealización de la dinámica de este para el movimiento en el eje pitch. Por medio de la linealización a través de series de Taylor (Prieto, 2015), suponiendo una variación pequeña del ángulo pitch se tiene que:

$$\sin \theta = \theta$$

Con lo cual

$$J_p \ddot{\theta}(t) = T_p r_p - \mu_p r_p \dot{\theta}(t) - f_g l_{cm} \quad (3.8)$$

Aplicando transformada de Laplace en 3.2 y 3.3 se obtienen las funciones de transferencia de pitch y yaw respectivamente

$$\frac{\theta(s)}{T_p(s)} = \frac{\frac{r_p}{J_p}}{s^2 + \frac{\mu_p r_p}{J_p} s + \frac{f_g l_{cm}}{J_p}} \quad (3.9)$$

$$\frac{\phi(s)}{T_y(s)} = \frac{\frac{r_y}{J_y}}{s^2 + \frac{\mu_y r_y}{J_y} s} \quad (3.10)$$

$J_p$  y  $J_y$  se pueden calcular teniendo en cuenta la inercia rotacional a través de un punto y la inercia de una barra. La inercia total será la suma de las inercias de las dos masas de los motores ubicados a los extremos y la inercia de la barra (Prieto, 2015), (Solaque G., Cristancho, & Gil C., 2014).

$$J_t = m_1 r_p^2 + m_2 r_y^2 + \frac{1}{12} m_{bp} L^2 \quad (3.11)$$

$m_{bp}$  y  $L$  son, respectivamente, la masa y la longitud de la barra de pivote.

$m_1$  y  $m_2$  son las masas de los motores de pitch y yaw.

Las fuerzas de empuje  $T_p$  y  $T_y$  se pueden expresar como se ve en 3.7 (Sedoon, 1990)

$$T_i = \frac{1}{2} \rho C_T A V^2 \quad (3.12)$$

Donde

$\rho$  es la densidad del aire.

$C_T$  es el coeficiente de empuje.

$A$  es el área que forma la hélice al girar.

$V=\Omega R$  la velocidad de giro de la hélice.

$\Omega$ =velocidad angular

$R$ =radio de la hélice.

Suponiendo que la fuerza de empuje es proporcional al cuadrado de la velocidad angular de las hélices 3.7 puede ser reescrita como

$$T_i = K \Omega^2 \quad (3.13)$$

Con

$$K = \frac{1}{2} \rho C_T A R^2 \quad (3.14)$$

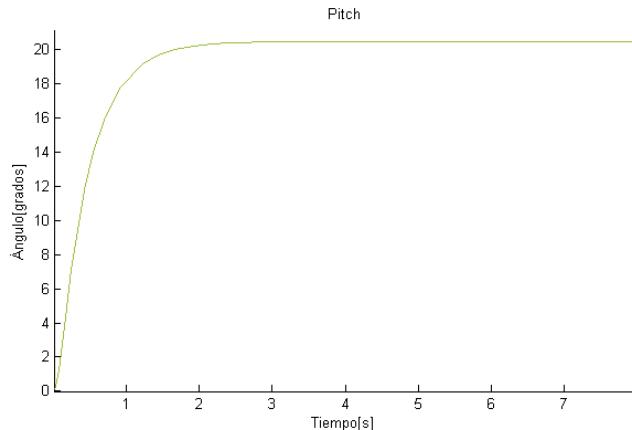
Se conoce que la velocidad angular de las hélices está dada por la relación rpm/V de los motores brushless empleados. Estos motores tienen una relación  $K_v = 1000\text{rpm}/V$ , con una eficiencia de cercana al 80%, reduciéndose a  $800\text{rpm}/V$ . Haciendo la conversión de rpm a rad/s se tiene una relación de  $83.77\text{rad/s}$  por cada voltio aplicado a los motores. De esta manera las funciones de transferencia de 3.5 y 3.6 pueden ser reescritas como se muestra a continuación

$$\frac{\theta(s)}{V_p(s)} = \frac{\frac{r_p}{J_p} K 83.77^2}{s^2 + \frac{\mu_p r_p}{J_p} s + \frac{f_g l_{cm}}{J_p}} \quad (3.15)$$

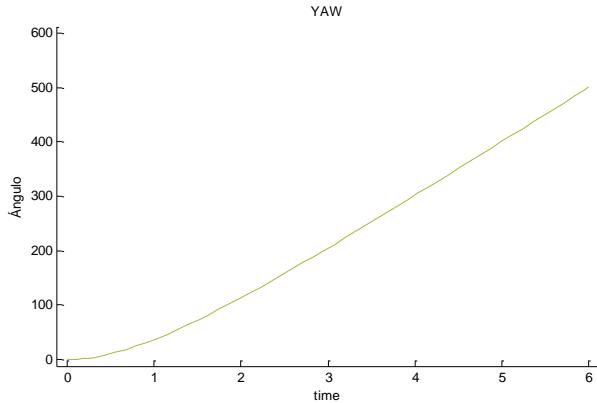
$$\frac{\varphi(s)}{V_y(s)} = \frac{\frac{r_y}{J_y} K 83.77^2}{s^2 + \frac{\mu_y r_y}{J_y} s} \quad (3.16)$$

### 3.2. Simulación de los modelos

Una vez hallados los modelos, se procede a realizar la simulación de los mismos para observar la respuesta del sistema frente a una señal paso.



**Fig. 22.** Simulación del modelo teórico de pitch –respuesta al paso (Autor)



**Fig. 23.** Simulación del modelo teórico de yaw- respuesta al paso (Autor)

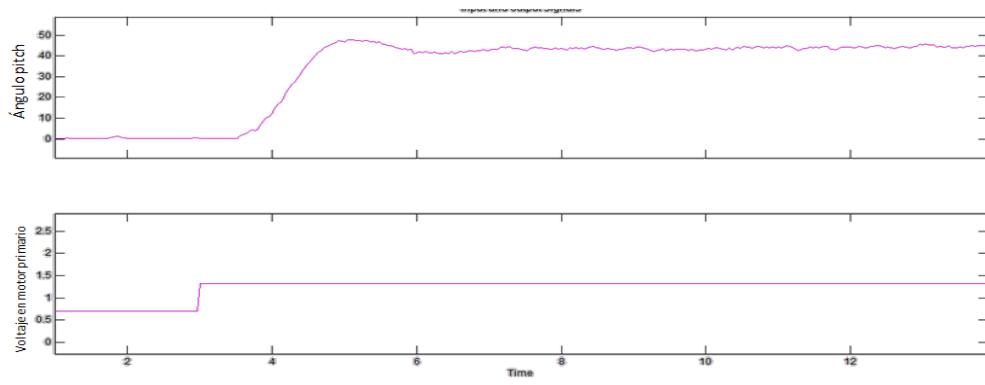
Como se puede evidenciar, el modelo lineal para el ángulo pitch no presenta oscilaciones alrededor del punto de operación ni sobre impulso. Al mismo tiempo, es posible observar que el ángulo yaw sigue una trayectoria exponencial creciente.

### 3.3. Modelo y Validación experimental

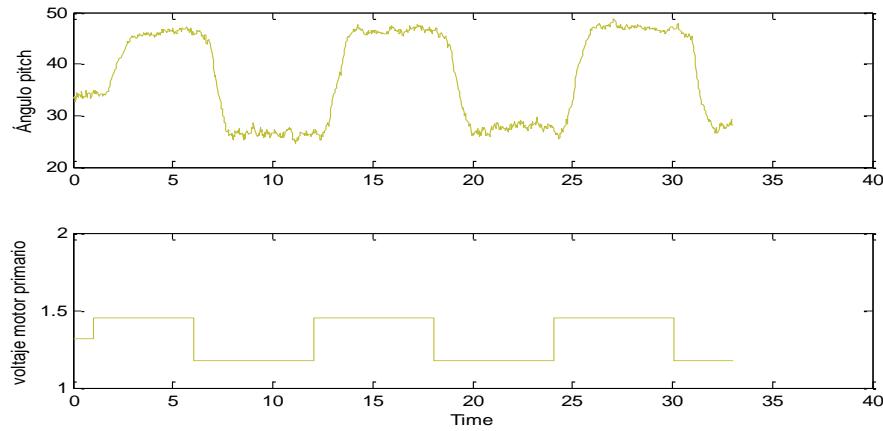
Haciendo uso de la herramienta de IDENT de la Matlab a través del método de identificación se hallarán los modelos que describan la respuesta del sistema a un estímulo específico.

En primera instancia, es necesario establecer las pruebas experimentales que permitan observar la respuesta del sistema frente a estímulos determinados, estos estímulos fueron adquiridos y graficados en Matlab y Simulink para poder contar con una tabla de datos que permitiera en cualquier momento observar la señal de respuesta del sistema a diferentes función paso . Para ello se debe excitar la planta con señales de entrada de diferentes amplitudes y frecuencias. Esto se logra a través de señales tipo paso, cuadradas o pseudoaleatorias (Escobar & Poveda, 2014).

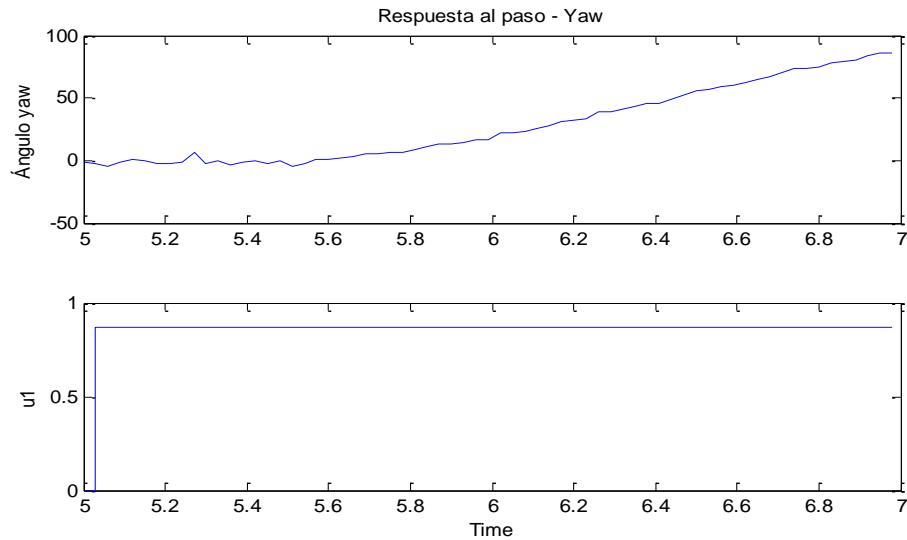
Para el caso del movimiento alrededor de pitch se estudió el comportamiento del sistema frente a señales paso de diferentes amplitudes y una señal cuadrada alrededor de un punto de operación; por otro lado, para yaw sólo se observó su dinámica frente a señales de entrada tipo paso; en las figuras 24, 25 y 26 se puede ver la respuesta de la plataforma a dichas señales.



**Fig. 24.** Respuesta de la plataforma al paso en pitch (Autor)

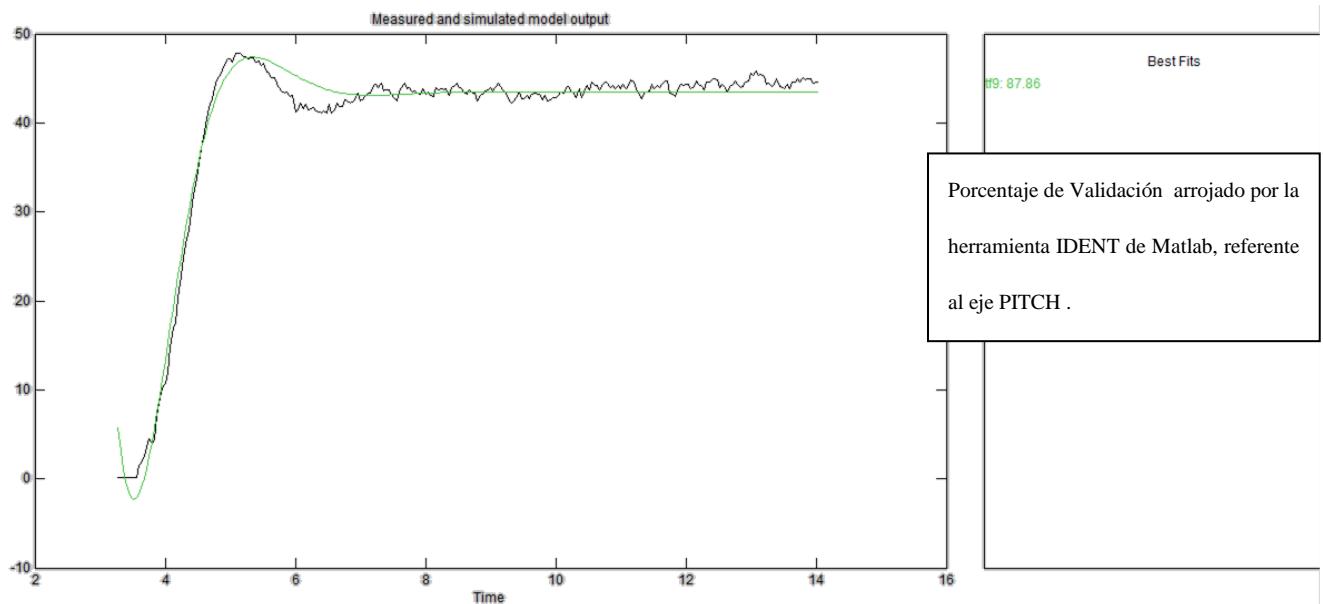


**Fig. 25.** Respuesta de la plataforma a una señal cuadrada en pitch (Autor)



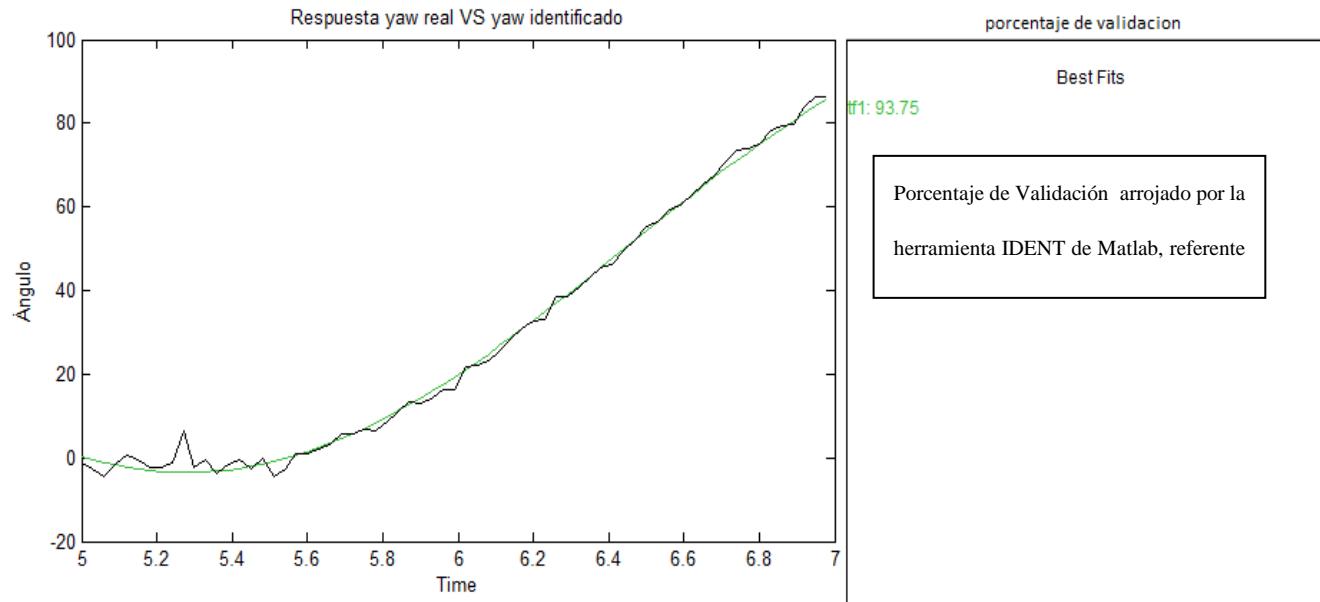
**Fig. 26.** Respuesta de la plataforma a una señal paso en yaw. (Autor)

Posteriormente, se escoge en la herramienta IDENT el modelo matemático que más se asemeje a la toma de datos realizada que permita generar una función de transferencia que describa de la manera más aproximada el comportamiento del sistema la cual es validada por un porcentaje de precisión contra la señal adquirida, como observamos a continuación se obtuvo que el modelo que describe el movimiento en pitch posee una aproximación del 87.86% respecto a la respuesta real del sistema, Al mismo tiempo, se encontró que para el modelo que describe el comportamiento de yaw la validación arroja una aproximación del 93.75%.



**Fig. 27.** Validación del modelo hallado para pitch (Autor)

Pese a que la figura muestra la respuesta del sistema y que este se encuentra estabilizado en el Angulo de 45 grados cabe resaltar que dicha estabilización no presenta ningún tipo de control y esa a su vez no reacciona a ningún tipo de perturbación.



**Fig. 28.** Validación del modelo hallado para yaw (Autor)

Luego de varios experimentos, se encontró que el modelo matemático que más se asemeja al comportamiento en el ángulo pitch de la planta es el siguiente:

$$G(s) = \frac{67.17}{s^3 + 1.591s^2 + 3.248s + 2} \quad (3.17)$$

A su vez, el modelo encontrado para el ángulo yaw de la planta es:

$$G(s) = \frac{106.6}{s^2 + 1.824} \quad (3.18)$$

## 4. Diseño de controlador LQR

Se ha decidido realizar el diseño de controladores individuales para cada ángulo con el fin de abordar la plataforma no como un modelo MIMO si no como dos modelos SISO lo que permite reducir la complejidad del sistema de control.

### 4.1. Controlador LQR Pitch

Para el diseño del controlador LQR es necesario plantear las ecuaciones de estado que describen el sistema (Ogata, 2010).

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.1)$$

$$y = Cx + Du \quad (4.2)$$

Las ecuaciones de estado para el ángulo pitch son las siguientes

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3.248 & -1.54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 67.17 \end{bmatrix} u \quad (4.3)$$

Donde

$$x_1 = \theta, x_2 = \dot{\theta}, x_3 = \ddot{\theta}$$

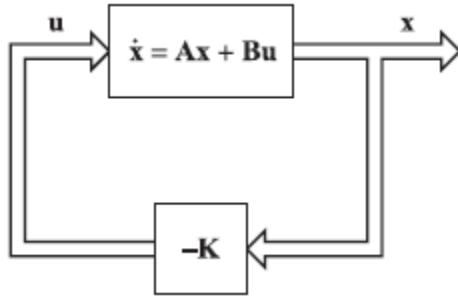
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3.248 & -1.54 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 67.17 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0], D=0$$

$$y = Cx = x_1$$

Mediante el método del regulador cuadrático lineal se determina la matriz K del vector de control óptimo

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.4)$$

De esta manera el diagrama de bloques del lazo de control es



**Fig. 29.** Lazo de control LQR (Autor)

Se busca solucionar la ecuación de Riccati para hallar la matriz  $\mathbf{P}$ ; si ésta existe y además es definida positiva el sistema es estable (Ogata, 2010).

$$A\mathbf{P} + \mathbf{A}'\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

Conociendo que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}'\mathbf{C}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se establece un parámetro de optimización el cual determina la rapidez del sistema

$$\mathbf{R} = 0.5$$

Se debe tener en cuenta que la matriz  $\mathbf{Q}$  y el parámetro de optimización  $\mathbf{R}$  determinan la importancia relativa del error y del coste de energía (Ogata, 2010).

Una vez hallada la matriz  $\mathbf{P}$ , ésta se reemplaza en la ley de control óptimo del LQR la cual está dada por:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}'\mathbf{P} \mathbf{x}(t) = -K\mathbf{x}(t) \quad (4.6)$$

Por lo tanto el vector de ganancias  $K$  está definido como

$$-K = -R^{-1}B'P \quad (4.7)$$

Solucionando 4.5 se tiene que el vector de ganancias de realimentación para el ángulo pitch es:

$$K = [1.3848 \quad 0.5621 \quad 0.1085]$$

#### 4.1.1. Análisis de estabilidad LQR pitch

Gracias al análisis de estabilidad de Lyapunov se sabe que un sistema es estable si su energía está decreciendo continuamente y, eventualmente, alcanza un punto de equilibrio mínimo.

Con base en lo anterior, si se tiene un sistema lineal de la forma:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(0) = x_0 \quad (4.8)$$

El sistema es estable si existe una función de Lyapunov tal que:

$$V(x(t)) = x(t)^T Px(t) < 0 \quad (4.9)$$

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T Px(t) + x(t)^T P\dot{x}(t) < 0 \quad (4.10)$$

Para el diseño del controlador LQR es necesario plantear las ecuaciones de estado que describen el sistema.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (4.11)$$

$$y = Cx + Du \quad (4.12)$$

Mediante el método del regulador cuadrático lineal se determina la matriz  $K$  del vector de control óptimo

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.13)$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax - BKx \\ \dot{x} &= (A - BK)x\end{aligned}\tag{4.14}$$

Como se desea conocer si el sistema es estable, se reemplaza 4.14 en 4.10

$$\begin{aligned}\dot{V}(x(t)) &= ((A - BK)x(t))^T P x(t) + x(t)^T P ((A - BK)x(t)) < 0 \\ \dot{V}(x(t)) &= x(t)^T ((A - BK)^T P + P(A - BK)) x(t) < 0\end{aligned}\tag{4.15}$$

Se busca solucionar la ecuación (4.15) para hallar la matriz  $P$ ; si ésta existe y además es simétrica definida positiva se puede demostrar que  $A - BK$  es una matriz estable.

Sin embargo, hay que considerar que esta condición no tiene en cuenta ningún parámetro de optimización.

Teniendo en cuenta que el controlador LQR busca minimizar la función de costo:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u)\tag{4.16}$$

Donde  $Q$  y  $R$  son matrices simétricas reales y determinan la importancia relativa del error y del coste de energía respectivamente.

Reemplazando (4.13) en (4.16) se tiene que

$$\begin{aligned}J &= \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + x(t)^T K^T R K x(t)) \\ J &= \int_0^\infty x(t)^T (Q + K^T R K) x(t)\end{aligned}\tag{4.17}$$

Ya que  $J$  representa la función de optimización del sistema se igualan

$$\begin{aligned}J &= V(x(t)) \\ J &= \dot{V}(x(t)) = x(t)^T (Q + K^T R K) x(t)\end{aligned}\tag{4.18}$$

Comparando (4.18) con (4.15)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t)^T((\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}))\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(t)^T(\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) \\ (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) &= (\mathbf{Q} + \mathbf{K}^T\mathbf{R}\mathbf{K}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Con esto, se halla la matriz  $\mathbf{P}$  en (4.19); si ésta existe y además es simétrica definida positiva significa que el sistema es estable, para este caso en particular dicha matriz la llamamos  $\mathbf{W}$  y tiene la siguiente definición indicada por Matlab:

Linear matrix variable 3x3 (symmetric, real, 6 variables, eigenvalues between [3.1723e-05, 23.2395])

Lo cual nos indica que es una matriz lineal variable simétrica real, donde sus valores propios son reales positivos lo cual indica que cumplen tanto las condiciones de simétricas y que sus valores sean reales y positivos.

## 4.2. Controlador en yaw

De igual manera, se deben establecer las ecuaciones de estado para el ángulo yaw.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.824 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 105.6 \end{bmatrix} u \quad (4.20)$$

Donde

$$x_1 = \varphi, x_2 = \dot{\varphi}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.824 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 105.6 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0], \mathbf{D}=0$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} = x_1$$

Se estableció un parámetro de optimización

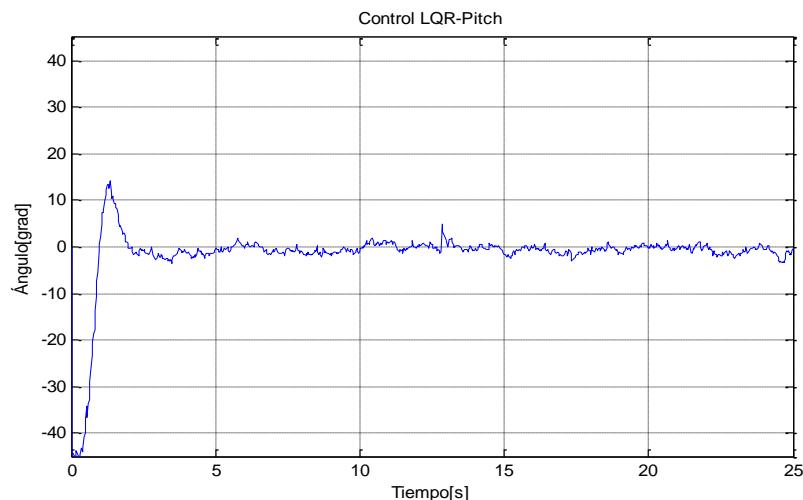
$$R=0.9$$

Para el diseño del controlador para el movimiento en el ángulo yaw se realiza el mismo procedimiento llevado a cabo para el ángulo pitch y se obtiene el vector de ganancias de realimentación

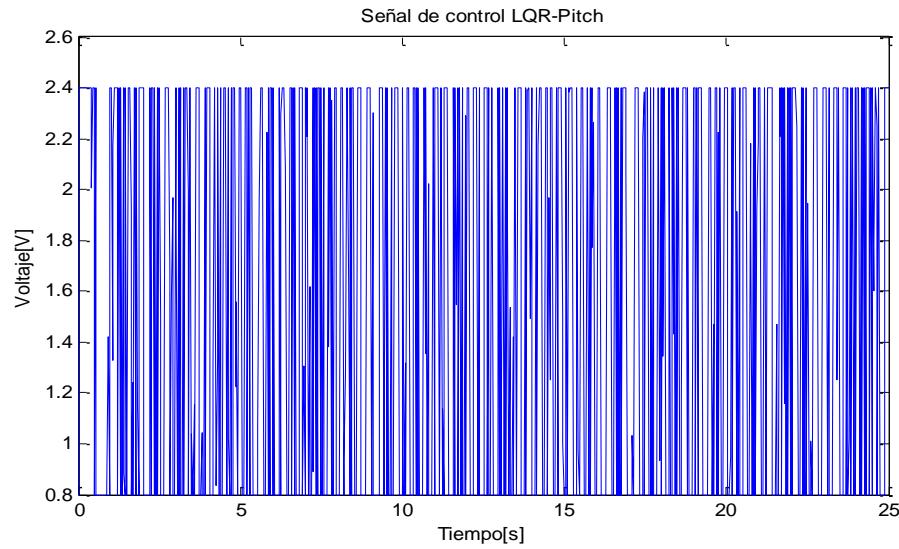
$$K = [1.0317 \quad 0.1398]$$

#### 4.2. Implementación de controlador LQR

Luego del diseño del controlador LQR se realiza su respectiva implementación en la plataforma experimental. Al realizar los experimentos necesarios se tiene que la respuesta del sistema de control LQR es la que se puede ver en las figuras 30 -32.

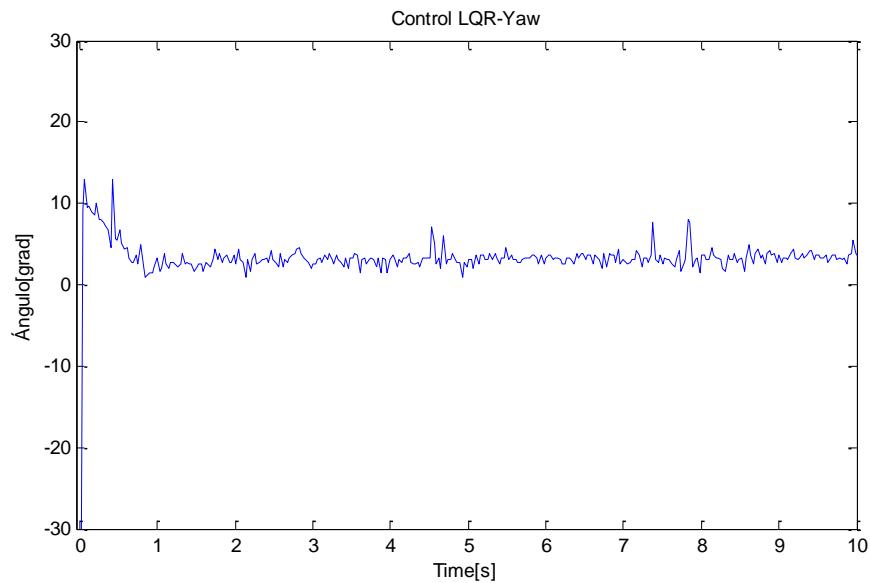


**Fig. 30.** Controlador LQR en pitch (Autor)

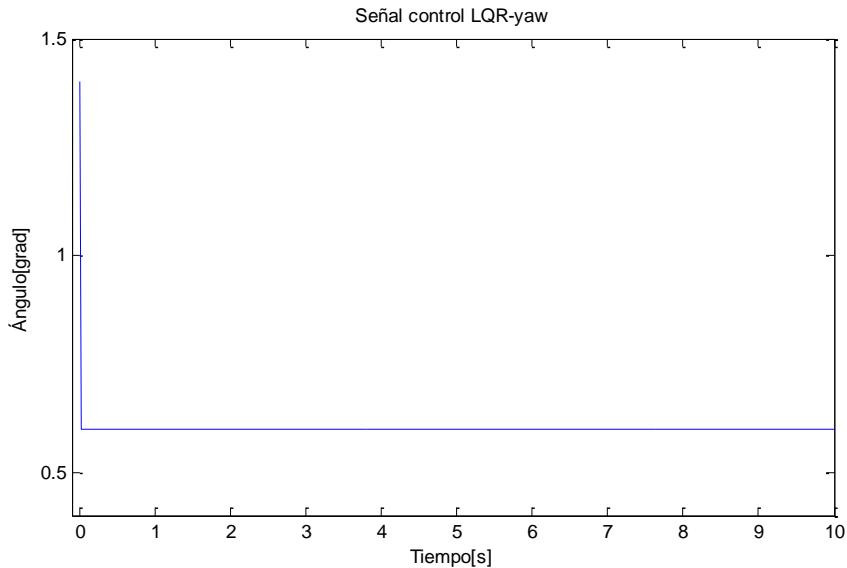


**Fig. 31.** Señal de control LQR en pitch (Autor)

En las figuras 30 y 31 se puede apreciar que en pitch el sistema alcanza la referencia en un tiempo aproximado de 3 segundos, con un sobre impulso cercano al 30%. La señal de control presenta una evidente saturación tanto en el nivel máximo como en el nivel mínimo de voltaje.



**Fig. 32.** Controlador LQR en yaw (Autor)



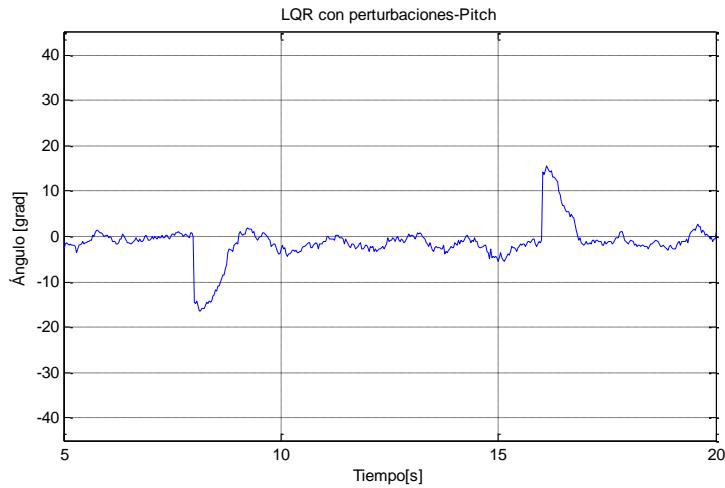
**Fig. 33.** Señal de control LQR en yaw (Autor)

En las figuras 32 y 33 se puede apreciar que en yaw el sistema alcanza la referencia en un tiempo aproximado de 1 segundos, no presenta sobre impulso ya la señal de control presenta una saturación en el nivel mínimo de voltaje.

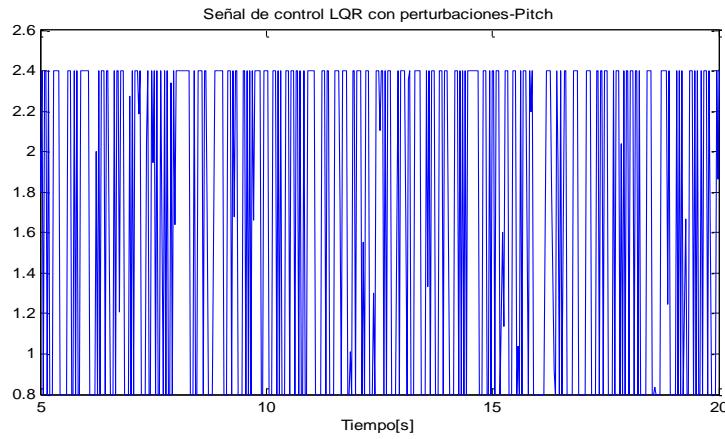
Si bien el controlador LQR en yaw es estable, éste no logra eliminar el error de estado estacionario y por tal razón no alcanza completamente la referencia deseada en este ángulo de navegación. Adicionalmente, se evidencia que la señal de control con el regulador cuadrático se satura en gran medida y esto en ocasiones puede representar un mayor consumo de energía.

#### 4.3. Medición de desempeño del controlador LQR frente a perturbaciones

Una vez estabilizado el sistema se dispone a observar el desempeño del controlador LQR frente a perturbaciones. Para poder estudiar esta respuesta todos los lazos de control se someterán a una perturbación en el momento  $T=8s$  y otra en  $T=16s$ . Teniendo en cuenta lo anterior, en las figuras 34-37 puede apreciarse el comportamiento de los mismos.

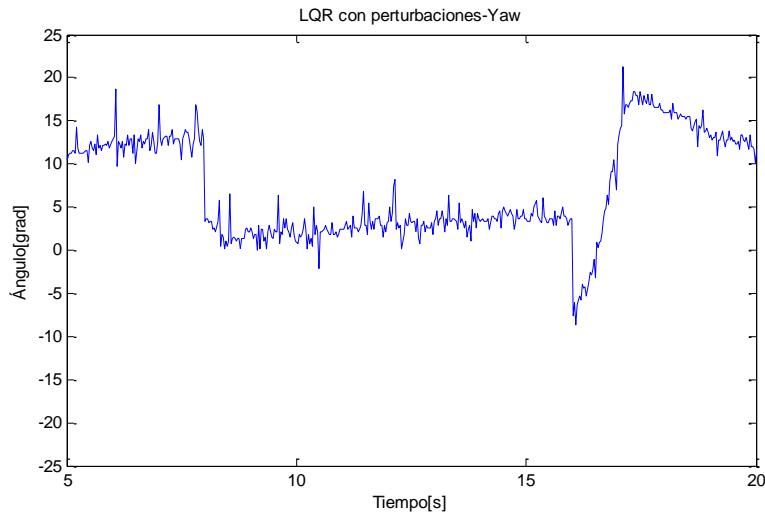


**Fig. 34.** Sistema de control LQR con perturbación en pitch (Autor)

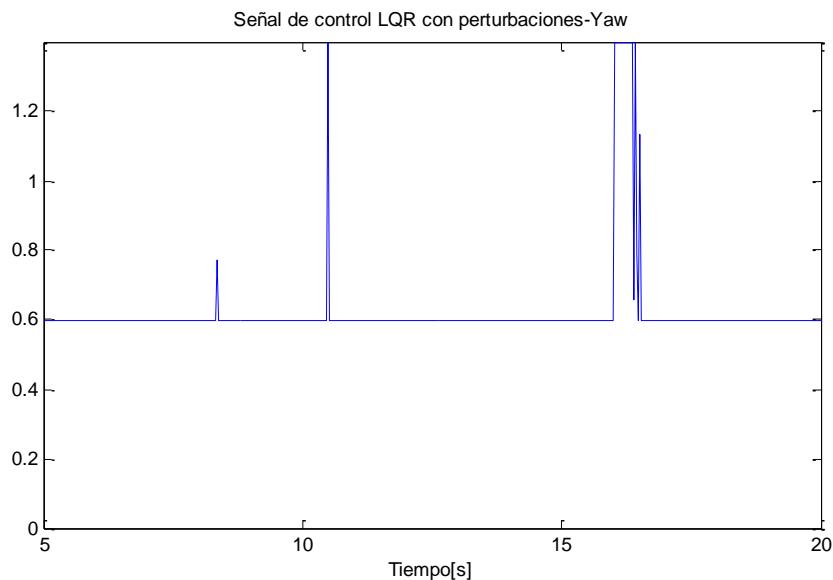


**Fig. 35.** Señal de control LQR con perturbación en pitch (Autor)

En las figuras 34 y 35 se puede apreciar que para el controlador en pitch, cuando se presenta una perturbación, el sistema retorna a la referencia en un tiempo aproximado de 2 segundos, con un sobre impulso cercano al 10%. La señal de control presenta una evidente saturación tanto en el nivel máximo como en el nivel mínimo de voltaje.



**Fig. 36.** Sistema de control LQR con perturbación en yaw (Autor)



**Fig. 37.** Señal de control LQR con perturbación en yaw (Autor)

En las figuras 36 y 37 se puede apreciar que para el controlador en yaw, cuando se presenta una perturbación, el sistema retorna a la referencia en un tiempo aproximado de 2 segundos, con un sobre impulso cercano al 10%. La señal de control presenta una evidente saturación tanto en el nivel máximo como en el nivel mínimo de voltaje.

Como se puede ver, el control LQR genera un sobre impulso cercano al 10% en pitch, y en el ángulo yaw genera un error de estado estacionario con lo cual nunca se llega a la referencia. Adicionalmente, se debe tener en cuenta que las señales de control para los controladores LQR se siguen saturando por lo que el sistema requiere una mayor cantidad de energía. En la siguiente tabla se muestra una comparativa de los criterios de desempeño evaluados.

**Tabla 4.** Desempeño del controlador LQR

	Tiempo de estabilización	Sobreimpulso (máx)	Saturación de señal de control	Estable
<b>LQR-Pitch</b>	2s	10%	Si	Estable
<b>LQR-yaw</b>	3s	20%	Si	Si, aunque genera error de estado estacionario

## 5. Controlador LMI

Una desigualdad de matrices lineales LMI es una restricción convexa y por ende son frecuentemente usadas para la solución de problemas de optimización. Como se describe en [1] las condiciones de LMI están dadas por un parámetro de estabilización lineal dependiente de una ganancia de realimentación de estado. La forma de una LMI es muy general; desigualdades lineales, desigualdad de matrices normales, desigualdades cuadráticas convexas y algunas restricciones de teoría de control tales como las desigualdades de Lyapunov y Riccati pueden ser escritas como una desigualdad de matrices lineales LMI. Además, múltiples LMI pueden ser escritas como una única LMI, por lo que son usadas como herramientas para la solución de una gran variedad de problemas de optimización y control [2]-[3].

Una desigualdad de matriz lineal está definida como

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > \mathbf{0} \quad (5.1)$$

Donde

$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$$

$$\mathbf{F}_i \in \mathbf{R}^{nxn}$$

La desigualdad significa que  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  es una matriz definida positiva.

El uso de LMI's en el análisis de sistemas de control empieza en 1890 [4] cuando Lyapunov muestra en su trabajo que la ecuación diferencial (5.2)

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (5.2)$$

es estable si y sólo si existe una matriz definida positiva  $\mathbf{P}$  tal que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad (5.3)$$

La condición en (5.4) es lo que se conoce como desigualdad de Lyapunov la cual constituye una desigualdad de matrices lineales LMI donde  $P$  es la variable.

$$P > \mathbf{0}, A^T P + PA < \mathbf{0} \quad (5.4)$$

Lyapunov también demostró que esta desigualdad podría ser resuelta de forma analítica, garantizando que el sistema es estable si  $P$  es definida y positiva.

Sin embargo, fue hasta 1940 cuando se empezaron a aplicar los métodos de Lyapunov en problemas prácticos de ingeniería en control, especialmente en sistemas no lineales. De esta manera se reconoce la importancia del uso de LMI's para el análisis de sistemas de control. Más adelante, en 1970 se observa que las desigualdades LMI podían ser resueltas a través de la solución de la ecuación algebraica de Riccati, lo que conlleva a reemplazar el antiguo método gráfico por un método analítico que podría implementarse en algún ordenador [4].

Gracias al uso de LMI's en el análisis de sistemas de control no lineales se ha abierto la posibilidad de aplicar diferentes técnicas de control robusto con un enfoque basado en dichas desigualdades [5]-[7]. Esto ha hecho posible representar un problema de control como un problema de optimización sujeto a las condiciones de la matriz, lo cual permite que sea resuelto numéricamente mediante algoritmos de solución de desigualdades LMI [8]. Estos controladores robustos, aseguran la estabilidad de los sistemas bajo diferentes condiciones de operación; asimismo, a diferencia de los controladores clásicos, permiten tener en cuenta parámetros de incertidumbre [5].

Una de las técnicas de control robustas más empleadas es la teoría de control  $H_\infty$ , éste problema puede resolverse a través de la solución de la ecuación de Lyapunov o la ecuación de Riccati [9]. Sin embargo, estos enfoques requieren que el diseñador establezca funciones de peso de manera arbitraria para especificar el desempeño requerido [5]. Debido a esto, la solución del controlador  $H_\infty$  planteada desde un enfoque LMI posee ventajas significativas respecto a las anteriores. En primer lugar, no necesita de funciones de peso y además tiene en cuenta los parámetros de

incertidumbre; de igual manera, la solución LMI calcula de manera automática los parámetros óptimos del controlador.

### 5.1. Diseño del controlador

Para el diseño del controlador LMI es necesario plantear las ecuaciones de estado con base en el modelo no linealizado (Ogata, 2010). A su vez para el desarrollo de este modelo se hace necesario tener en cuenta que a partir de la figura (21), se considera el sistema como un sólido rígido pivotante sobre su eje de inercia y que este no se encuentra equidistante a los extremos del sólido, es así que se hace necesario determinar el momento angular por medio de la siguiente formula:

$$\vec{L} = I * \vec{W} \quad (5.5)$$

Donde  $I$  es el momento de inercia y  $W$  es la velocidad angular del sólido rígido, pese a esto se debe tener en cuenta que la variación de la rotación del eje se encuentra directamente representada por la variación de la velocidad angular la cual se determina derivando la ecuación anterior.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I*\vec{W})}{dt} = I * \frac{d\vec{W}}{dt} = I * \vec{a} \quad (5.6)$$

Donde  $\vec{a}$  es la aceleración angular.

La variación del momento angular de un sistema rígido es equivalente al momento de las fuerzas externas que actúan sobre él.

$$I * \vec{a} = \sum \vec{T} \text{ externas} = \sum \vec{r} * \vec{F} \text{ externas} \quad (5.7)$$

Donde podemos indicar que  $\vec{r}$  es la distancia desde el eje de rotación hacia cada uno de los extremos del helicóptero, teniendo en cuenta esto podemos considerar la siguiente ecuación que describe la dinámica del sistema.

$$I * \vec{a} = L_1 * Fm + (L_2 * Fg_{L2} * \sin \theta) - (L_1 * Fg_{L1} * \sin \theta) - (L_1 * B * \theta) - (L_2 * B * \theta) \quad (5.8)$$

$$I * \vec{a} = L_1 * Fm + \sin \theta * (L_2 * Fg_{L2} - L_1 * Fg_{L1}) - B * \theta * (L_1 + L_2)$$

Donde:

$L_1$ = Longitud desde el eje de rotación hacia la parte delantera del helicóptero ( 0,210m)

$L_2$  = Longitud desde el eje de rotación hacia la parte trasera del helicóptero (0,190m)

$F_m$  = Fuerza de empuje debida al motor de Pitch

$Fg_{L_1}$ = Fuerza de gravedad sobre  $L_1$  incluyendo la masa del motor, hélice, estructura y eje de motor (3,1066 N).

$Fg_{L_2}$  = Fuerza de gravedad sobre  $L_2$  incluyendo la masa del motor, hélice, estructura y eje de motor (1,7934N).

$B$  = Coeficiente de rozamiento del eje de metal sobre el acrílico de la estructura

$a$  = Aceleración angular del eje

$\theta$  = Angulo en el cual se desplaza el eje del helicóptero

$I$  = Inercia total del sistema

Donde la fuerza de empuje generada por el motor debe considerar tanto la interacción del aire con la hélice, la velocidad de giro del motor el tamaño de la hélice:

$$T \text{ Motor} = \frac{P * A}{2 * r^2} * W^2 \quad (5.9)$$

Donde:

$r$  = Radio de la Hélice

$P$ = Densidad del Aire (1.32e3)

$A$ = Constante e Ajuste

$W$  = Velocidad angular del motor (3141,59 rad/v)

Teniendo en cuenta lo indicado en (41), podemos decir:

$$Fm = \frac{P * W^2}{r^3} \quad (5.10)$$

$$Fm = \frac{P * (3141,59 \text{ rad/v})^2}{0,130^3}$$

$$Fm = \frac{P * (3141,59 \text{ rad/v})^2}{130^3}$$

$$Fm = P * 4,49 \text{ rad/V}$$

### 5.1.1. Inercia del sistema

Teniendo en cuenta que la ecuación (5.5) presenta el modelo dinámico del sistema se debe hallar la inercia del sistema para determinar un modelo descriptivo general en términos de la aceleración angular y del voltaje aplicado al motor del eje pitch.

$$I = \sum M * L^2 \quad (5.11)$$

Don M son las masas correspondientes a los elementos que se encuentren ubicados tanto en L1 como en L2.

$$IL_1 = (Mm + Mh + Me + ML1) * L1^2$$

$$IL_1 = (0,047kg + 0,017kg + 0,015Kg + 0,238Kg) * (0,210m^2)$$

$$IL_1 = (0,047kg + 0,017kg + 0,015Kg + 0,238Kg) * 0,0441m^2$$

$$IL_1 = (0,317kg) * 0,0441m^2$$

$$IL_1 = 0,0130287Kg * m^2$$

$$IL_2 = (Mm + Mh + Me + ML2) * L2^2$$

$$IL_2 = (0,047kg + 0,017kg + 0,015Kg + 0,104Kg) * (0,190m^2)$$

$$IL_2 = (0,047kg + 0,017kg + 0,015Kg + 0,104Kg) * 0,0361m^2$$

$$IL_2 = (0,183Kg) * 0,0361m^2$$

$$IL_2 = 0,0066063Kg * m^2$$

$$ITotal = 0,0066063Kg * m^2 + 0,0130287Kg * m^2$$

$$ITotal = 0,020586 \text{ Kg} * m^2$$

Reemplazando en (5.2)

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (5.12)$$

Despejando  $\alpha$

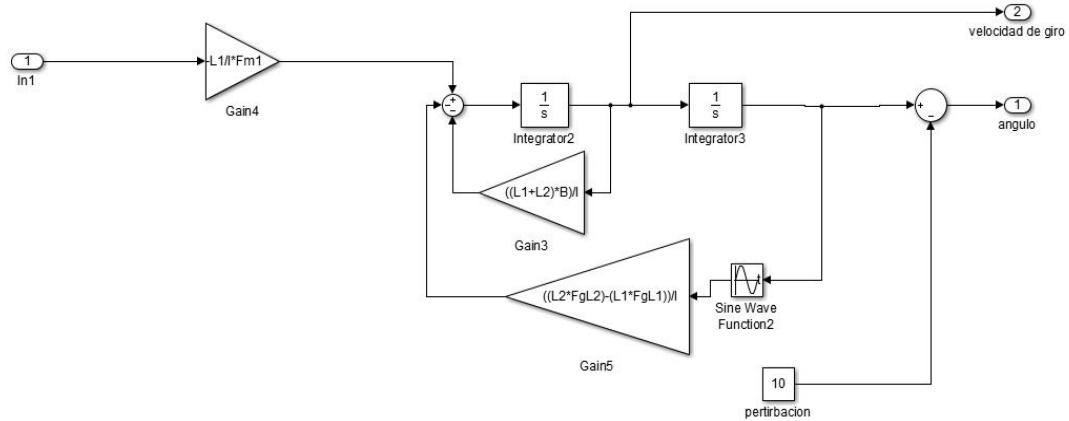
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{L1 * Fm}{I} + \frac{\sin \theta * (L2 * Fg_{L2} - L1 * Fg_{L1})}{I} - \frac{B * \theta * (L1 + L2)}{I}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 10,29Fm - 15,17 \sin \theta - 9,7153 \frac{d\theta}{dt}$$

A partir de esto se puede indicar que la ecuación que representa el modelo del helicóptero es no lineal y usaremos estos parámetros para la ecuación de estados del sistema.

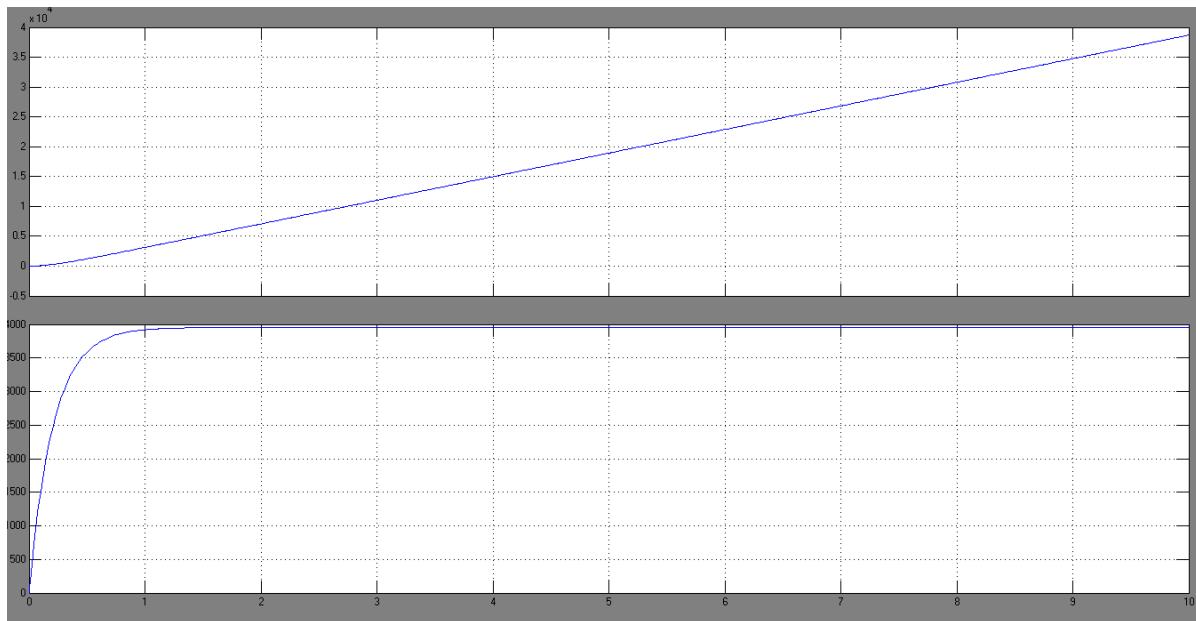
$$\begin{bmatrix} \dot{X1} \\ \dot{X2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L2 * Fg_{L2} - L1 * Fg_{L1} & -B * \theta * (L1 + L2) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{L1 * Fm}{I} \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

A partir de la matriz de estados anterior realizamos su correspondiente simulación haciendo uso de la herramienta Simulink de Matlab.



**Fig. 38.** Modelo en Simulink de la ecuación de Estados (Autor)

A este modelo se le aplica una señal paso para verificar que los parámetros con los que se implementó respondan según la dinámica del helicóptero.



**Fig. 39.** Respuesta en ángulo y velocidad del modelo de Ecuación de Estados (Autor)

Como se puede observar el modelo desarrollado en simulink no cuenta con ningún valor numérico, estos valores numéricos fueron creados en un archivo .m donde se encuentran cada uno de los valores.

### **5.1.2. Condiciones para el desarrollo de LMI's**

Partiendo del modelo en simulink anteriormente descrito se hace necesario desarrollar el modelo de matrices lineales, restricciones y métodos de optimización que se utilizan para determinar cada una de las ganancias correspondientes del controlador  $H\infty$ .

A su vez la teoría de control robusto indica que se debe realizar un análisis tanto a las señales entregadas por los sensores como por las señales que nos son medibles por la electrónica asociada al sistema a las cuales se les determinara incertidumbres y a las señales externas que perturbaran el buen funcionamiento del sistema.

Aunque pese a las teorías de control clásica las cuales dependían directamente del error entre el set point y el valor de medido de la variable su diseño por diferentes teorías tanto heurísticas como matemáticas se sesgaban únicamente a determinar los parámetros del controlador con base en unas ecuación de transferencia que muchas veces no involucraban todos los parámetros que podían afectar el sistema a modelar pese a esto muchos de los controladores contaban con un buen desempeño pero sin poder en muchos casos escoger los parámetros óptimos de control.

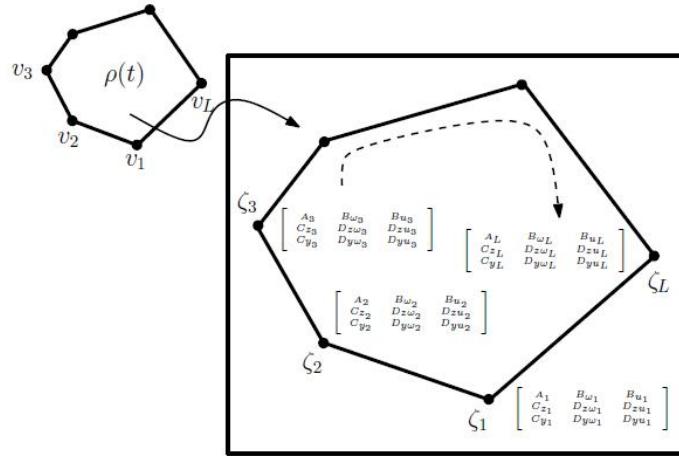
Dentro de las causas que se pueden encontrar en la generación de algún tipo de incertidumbre en el sistema encontramos factores que influencian desde la dinámica del sistema como el modelo matemático que se pretenda determinar estas pueden ser desde las variaciones de temperatura de los elementos que conforman el sistema, modificaciones en los puntos de trabajo de la planta, falta de consideración de no linealidad del sistema, dinámicas del sistemas no modeladas, imprecisiones en los parámetros calculados y medidos [6].

Teniendo en cuenta lo anteriormente enunciado podemos considerar las incertidumbres estructuradas o paramétricas o debidas a los parámetros durante el funcionamiento del sistema, e incertidumbres no estructuradas las cuales se refieren a elementos dinámicos no tenidos en cuenta durante el proceso de modelamiento del sistema o debidas a la variación del comportamiento dinámico del sistema, Ej. Pérdida de masa de un tanque durante el transcurso del tiempo, para el caso puntual del presente trabajo solo se desarrollaran las incertidumbres estructuradas haciendo uso de modelos polítópicos.

Donde se puede considerar que el modelo de estos sistemas de tipo Lineales invariantes en el tiempo será expandido haciendo uso de una matriz dependientemente la cual representara cada una de las incertidumbres de la forma:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(\mathbf{\rho}) = \mathbf{A}(\mathbf{\rho})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_w(\mathbf{\rho})\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_u(\mathbf{\rho})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_z(\mathbf{\rho})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{zw}(\mathbf{\rho})\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{zu}(\mathbf{\rho})\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_y(\mathbf{\rho})\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{yw}(\mathbf{\rho})\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{yu}(\mathbf{\rho})\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (5.14)$$

Donde  $\rho$  es un vector que vincula todos los parámetros inciertos que se desean que se tengan en cuenta, estos parámetros inciertos deben limitarse entre un rango mínimo y máximo de variabilidad, dando como resultado según el número de parámetros inciertos una combinación de posibles soluciones de  $2^n$  vértices que se representan de la siguiente manera:



**Fig. 40.** Representación gráfica de la incertidumbre polítópica (T. Pinzón y C. Andrés,2012)

Para el caso del presente trabajo se determina como incertidumbre el giro de los motores ya que no es una variable que se esté midiendo pero que sí es vital para el buen funcionamiento del sistema, indicamos que el rango mínimo de la velocidad de giro del motor será el 30% y el valor máximo de 100%, esto a razón de que si se da el caso de que se fracture una hélice o que el motor tenga alguna restricción mecánica que no le permita girar el control lleve el sistema a un valor óptimo para que cumpla con la premisa deseada.

Pese a la determinación de las incertidumbres del sistema se puede observar que hasta el momento no se ha vinculado las restricciones de máximo esfuerzo de control, rechazo a

perturbaciones y eliminación de error en estado estacionario las cuales se tendrán en cuenta en el diseño de las ganancias de realimentación  $F$ , que asegurarán el comportamiento del sistema.

Para determinar los valores de las ganancias de realimentación  $F$  se debe considerar que las mismas actuarán sobre el sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}_u \mathbf{F}) \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{B}_w \mathbf{w}(\mathbf{t}) \\ \mathbf{Z}(\mathbf{t}) &= (\mathbf{C}_z + \mathbf{D}_{zu} \mathbf{F}) \mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{D}_{zw} \mathbf{w}(\mathbf{t})\end{aligned}\quad (5.15)$$

### 5.1.3. Ubicación de los polos.

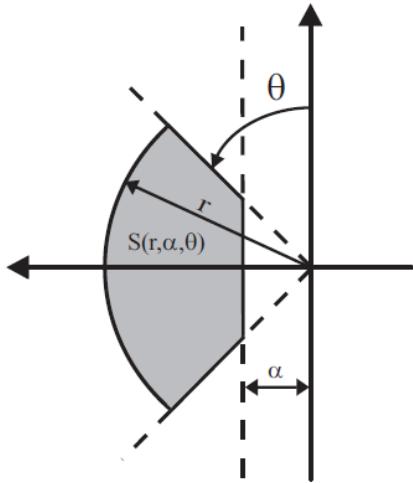
La ubicación de los polos en lazo cerrado permite mejorar el funcionamiento transitorio del sistema, esta condición se basa en forzar la ubicación de los polos dominantes del sistema de tal forma que permitan asegurar un mínimo factor de amortiguamiento ( $\zeta = \cos \theta$ ) y una máxima frecuencia natural ( $w_0 = \gamma \sin \theta$ ), a razón de esto estos parámetros limitan el sobre impulso máximo, el tiempo de elevación y el tiempo de establecimiento del sistema.

#### 5.1.3.1. Restricciones de la tasa de decaimiento

Con base en lo descrito en (M. Chilali and P. Gahinet., 1996) se toma el teorema indicado correspondiente a las restricciones LMI para la ubicación de los polos en lazo cerrado en la región  $S(\alpha, \theta, \gamma)$  de la forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_u \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{B}_u^T + 2\alpha \mathbf{W} < 0 \quad (5.16)$$

Dónde:



**Fig. 41.** Región de ubicación de los polos (T. Pinzón y C. Andrés,2012)

Donde la Matriz que representa la desigualdad de las la Limitacion de Z (factor de amortiguamiento) es:

$$\begin{vmatrix} \cos \theta (AW + WA^T + B_u Y + Y^T B_u^T) & \sin \theta (AW - WA_i^T + B_u Y - Y^T B_u^T) \\ \sin \theta (-AW + WA^T - B_u Y + Y^T B_u^T) & \cos \theta (AW + WA^T + B_u Y + Y^T B_u^T) \end{vmatrix} < 0 \quad (5.17)$$

Y donde la Matriz que representa la desigualdad de las la limitación de  $\omega_0$  (Frecuencia Natura) es:

$$\begin{bmatrix} -\gamma W & WA^T + Y^T B_u^T \\ AW + B_u Y & -\gamma W \end{bmatrix} < 0 \quad (5.18)$$

Siendo  $F = YW^{-1}$ .

## 5.2. Estabilidad del controlador LMI

Gracias al análisis de estabilidad de Lyapunov se sabe que un sistema es estable si su energía está decreciendo continuamente y, eventualmente, alcanza un punto de equilibrio mínimo.

Con base en lo anterior, si se tiene un sistema lineal de la forma

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(0) = x_0 \quad (5.19)$$

El sistema es estable si existe una función de Lyapunov tal que

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) < 0 \quad (5.20)$$

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}(t)^T P x(t) + x(t)^T P \dot{x}(t) < 0 \quad (5.21)$$

Para el diseño del controlador LQR es necesario plantear las ecuaciones de estado que describen el sistema.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5.22)$$

$$y = Cx + Du \quad (5.23)$$

Mediante el método del regulador cuadrático lineal se determina la matriz K del vector de control óptimo

$$u(t) = -Kx(t) \quad (5.24)$$

Por tanto

$$\dot{x} = Ax - BKx$$

$$\dot{x} = (A - BK)x \quad (5.25)$$

Como se desea conocer si el sistema es estable, se reemplaza 5.25 en 5.21

$$\dot{V}(x(t)) = ((A - BK)x(t))^T P x(t) + x(t)^T P((A - BK)x(t)) < 0$$

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T ((A - BK)^T P + P(A - BK))x(t) < 0 \quad (5.26)$$

Se busca solucionar la ecuación (5.26) para hallar la matriz P; *si ésta existe y además es simétrica definida positiva se puede demostrar que A-BK es una matriz estable.*

Sin embargo, hay que considerar que esta condición no tiene en cuenta ningún parámetro de optimización.

Teniendo en cuenta que el controlador LQR busca minimizar la función de costo

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) \quad (5.27)$$

Donde Q y R son matrices simétricas reales y determinan la importancia relativa del error y del coste de energía respectivamente.

Reemplazando (5.24) en (5.27) se tiene que

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + x(t)^T K^T R K x(t)) \\ J &= \int_0^{\infty} x(t)^T (Q + K^T R K) x(t) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Ya que J representa la función de optimización del sistema se igualan

$$J = V(x(t))$$

$$\dot{J} = \dot{V}(x(t)) = x(t)^T (Q + K^T R K) x(t) \quad (5.29)$$

Comparando (5.29) con (5.26)

$$\begin{aligned} x(t)^T ((A - BK)^T P + P(A - BK)) x(t) &= x(t)^T (Q + K^T R K) x(t) \\ (A - BK)^T P + P(A - BK) &= (Q + K^T R K) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Con esto, se halla la matriz P en (5.30); si ésta existe y además es simétrica definida positiva significa que el sistema es estable, para este caso en particular dicha matriz la llamamos W y tiene la siguiente definición indicada por Matlab:

*Linear matrix variable 3x3 (symmetric, real, 6 variables, eigenvalues between [3.1723e-05, 23.2395])*

Lo cual indica que es una matriz lineal variable simétrica real, donde sus valores propios son reales positivos cumpliendo tanto las condiciones de simetría y de valores reales y positivos.

### **5.3. Desarrollo del controlador con base en las restricciones**

El objetivo del desarrollo de un controlador de tipo  $H\infty$  mediante el uso de las LMI, es encontrar un vector de ganancias que cumplan las condiciones indicadas satisfaciendo las restricciones del modelo politópico presentado con anterioridad.

Partiendo del modelo no lineal de la matriz de estados (5.13), la cual vincula el modelado del funcionamiento del sistema y las restricciones definidas anteriormente se busca que el sistema se mantenga en un Angulo deseado de 0 grados pese a perturbaciones.

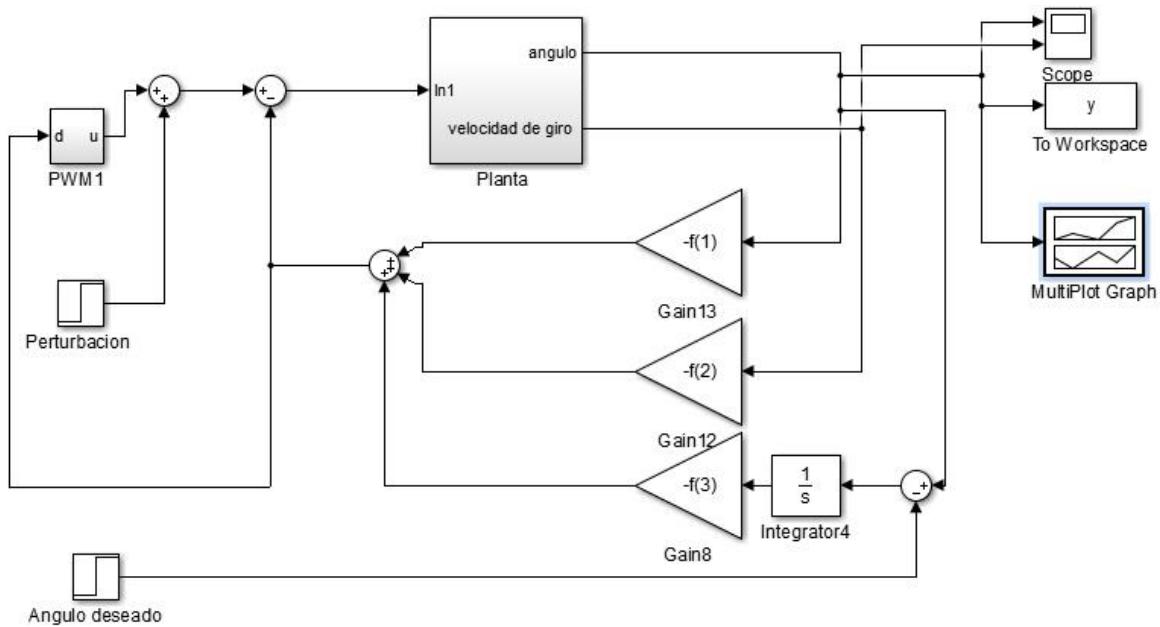
Para el caso del presente desarrollo se tomaron valores para los parámetros con los cuales se inicia el proceso de resolución del algoritmo de optimización haciendo unos del Toolbox de Matlab LMI, el cual entrega las siguientes ganancias inicialmente.

$$\alpha = 15, \gamma = 7 * \frac{\pi}{10} * Ts, \vartheta = 75 * \frac{\pi}{180}$$

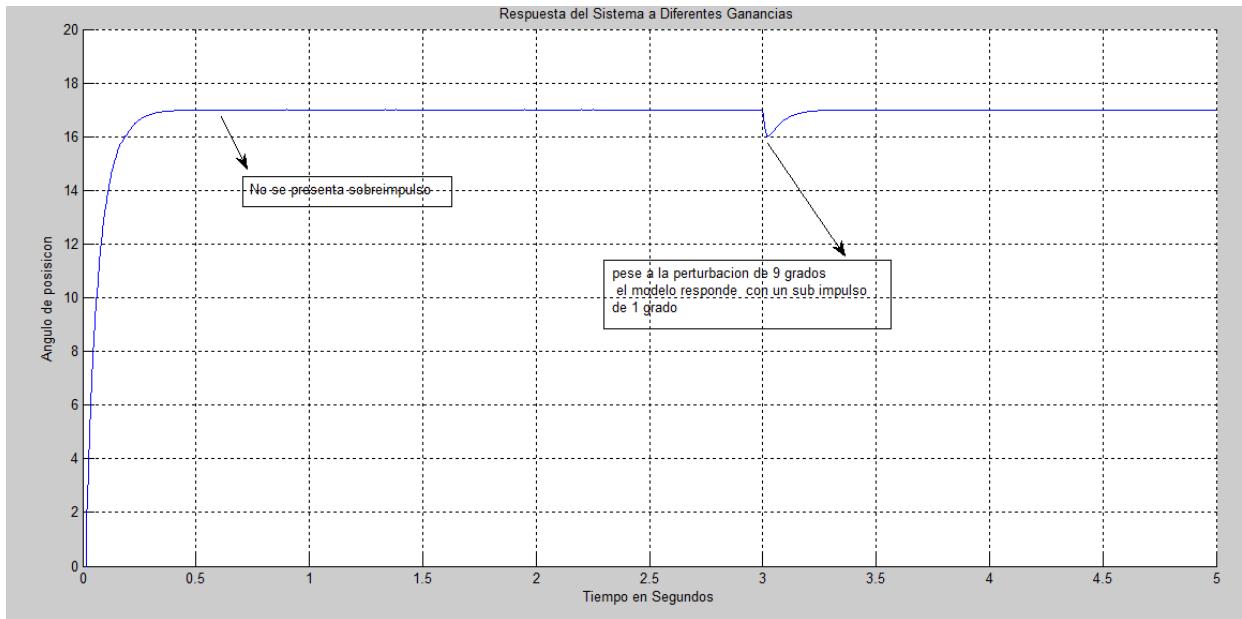
Dando como resultado en el proceso de optimización los siguientes valores de ganancias.

$$F = [7,4352 \quad 0,0753 \quad 100,6348]$$

Se desarrolla la correspondiente simulación haciendo uso de Simulink de Matlab para exportar las correspondientes ganancias y realizar pruebas indicando que el Angulo deseado es de 17 grados y que se presentara una perturbación negativa 3 segundos después de iniciada la simulación con un valor de -9 grados.



**Fig. 42.** Controlador  $H_{\infty}$ , con ganancias determinadas haciendo uso de LMI (Autor)



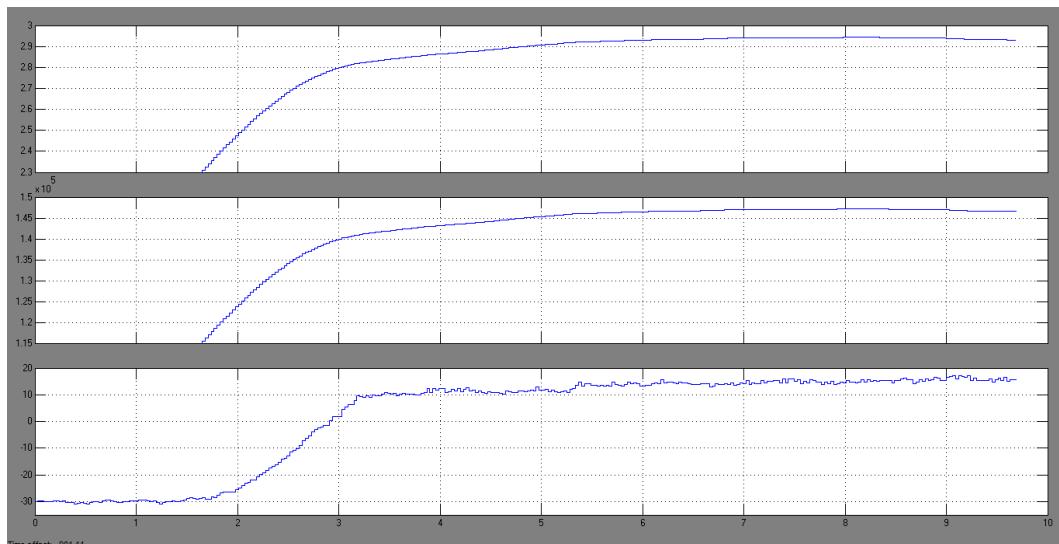
**Fig. 43.** Respuesta teórica del helicóptero de 2 grados de libertad para un paso de 15 grados (Autor)

Pese a la buena respuesta del controlador a perturbaciones y la eliminación del sobre impulso máximo, se debe tener en cuenta que la ganancia  $F[3] = 100,6348$ , experimentalmente genera que el ESC (driver del motor brushless), genere un fallo por sobrecorriente y apague el motor, de

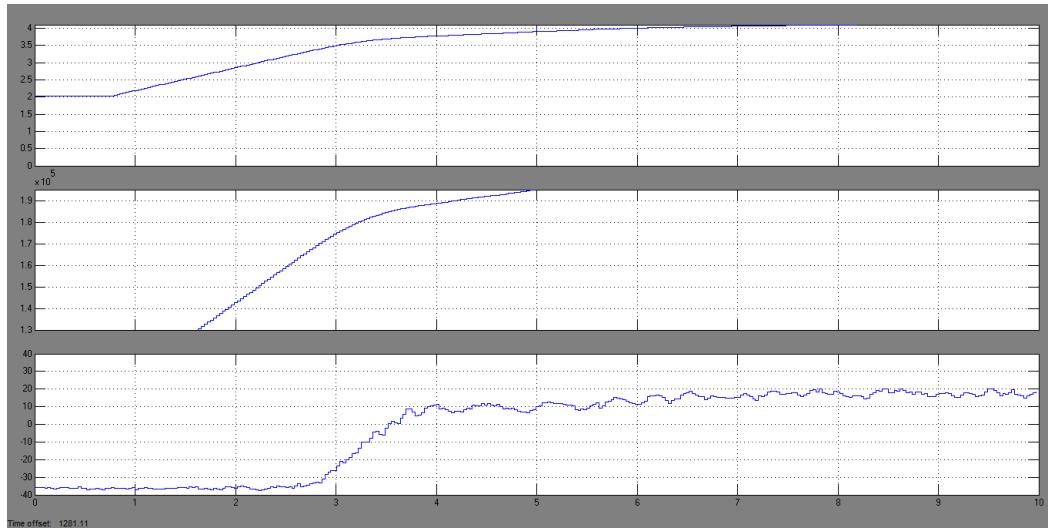
tal forma se hace necesario cambiar los valores de los parámetros a  $\alpha = 12, \gamma = 3 * \frac{\pi}{10} * Ts, \vartheta = 35 * \frac{\pi}{180}$ , dando como resultado experimental los siguientes valores, teniendo en cuenta que se realizó un aumento de la masa del helicóptero en 63 gramos, esto para determinar la robustez del controlador diseñado.

En la primera parte de la gráfica (42) se encuentra la señal de control limitada en un valor de 0,7 a 5 correspondiente a los valores que recibe el Driver de potencia que controla el motor, en la segunda grafica se encuentra el valor entregado por el controlador y la tercer grafica es la respuesta del sistema a este cambio abrupto.

Cabe resaltar que esta respuesta corresponde a un escalón de entrada de 45grados, se puede observar que el sistema no cuenta con sobre impulso, el tiempo de estabilización es de 2,3 segundos

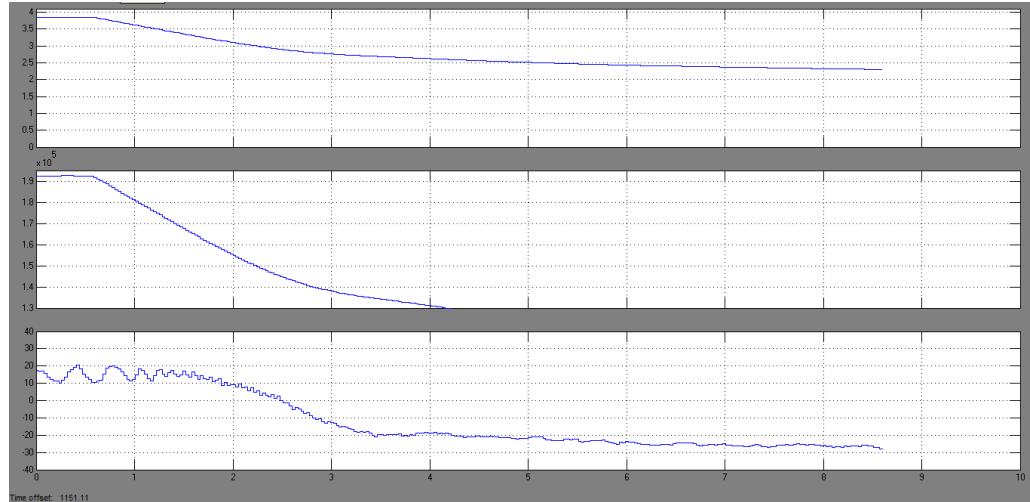


**Fig. 44.** Respuesta experimental del helicóptero de 2 grados de libertad para un paso de 45grados y una variación en la masa del 18% en relación con L1 (Autor)



**Fig. 45.** Respuesta experimental del helicóptero de 2 grados de libertad para un paso de 55grados y una variación en la masa del 18% en relación con L1 (Autor)

Luego de estas pruebas se pone el helicóptero en un Angulo de 20 grados y en un instante se le indica que baje hasta -35 grados, dando la siguiente respuesta:

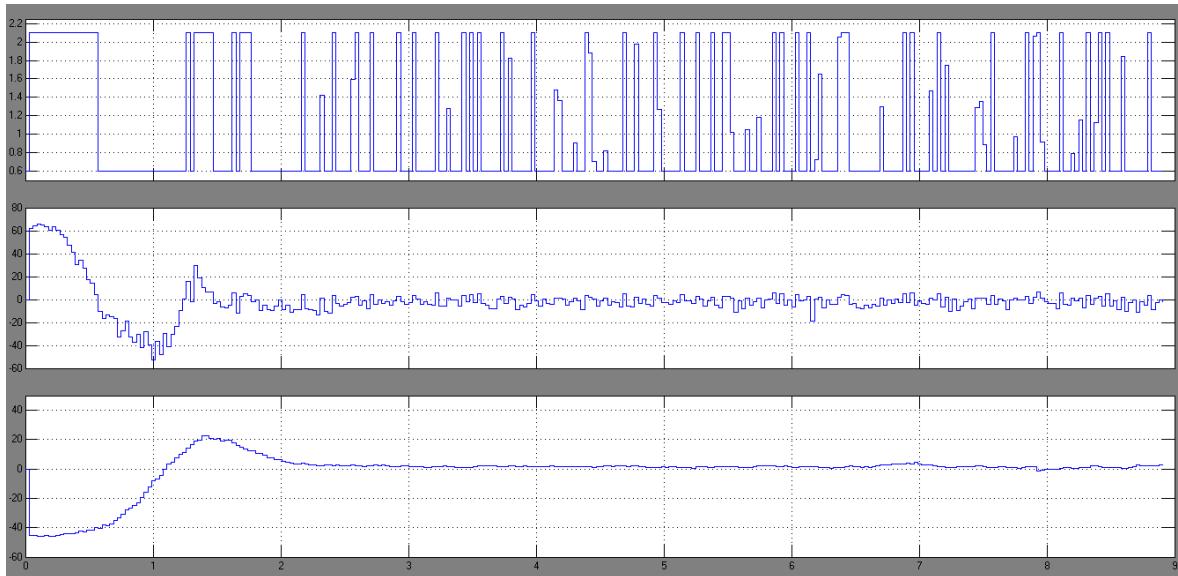


**Fig. 46.** Respuesta experimental del helicóptero de 2 grados de libertad para un paso de -55grados y una variación en la masa del 18% en relación con L1 (Autor)

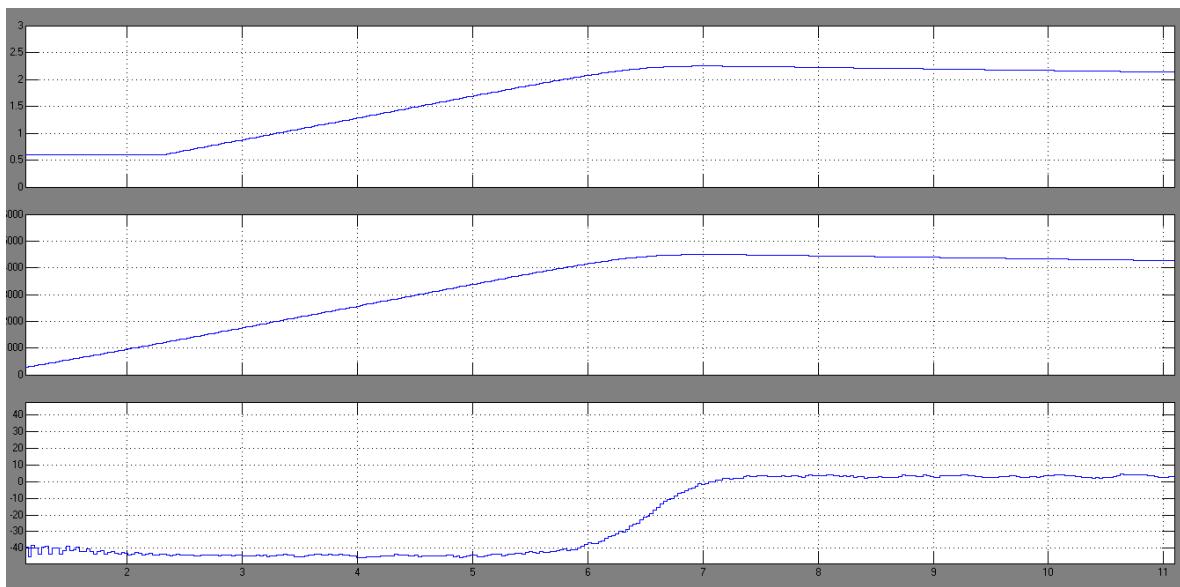
**Tabla 5.** Desempeño del Controlador LMI

	Tiempo de estabilización	Sobre impulso (máx)	Saturación de señal de control	Estabilidad
<b>LMI-pitch</b>	2,1s	0%	No	Estable
<b>LMI-yaw</b>	2.9s	23%	Si	Estable presentando error en estado estacionario.

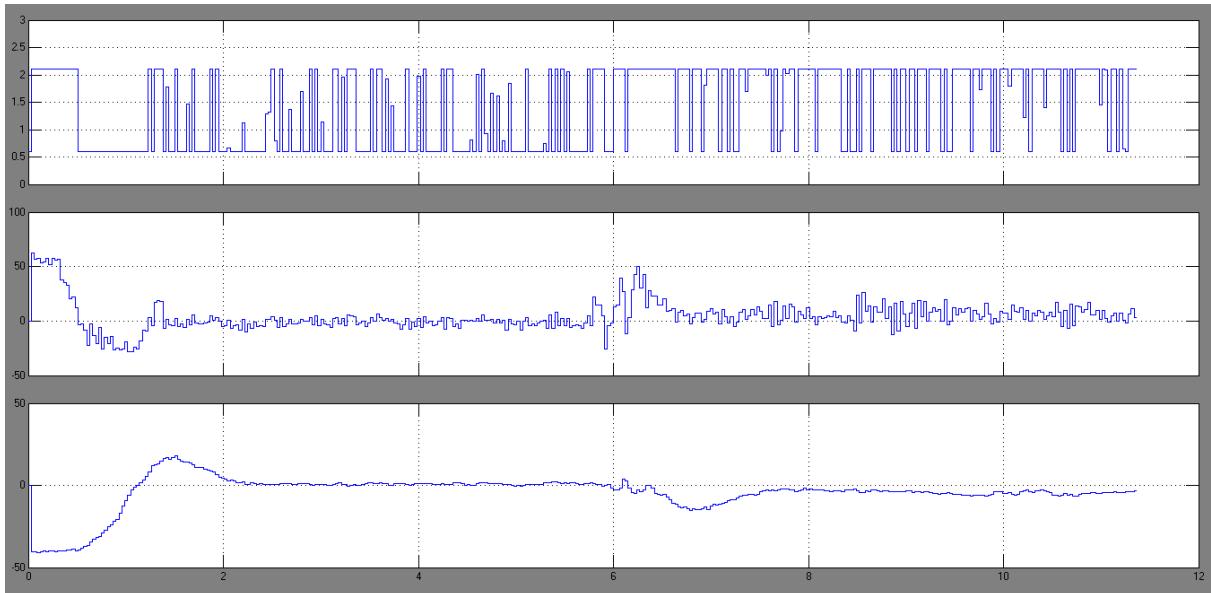
Comparación Experimental



**Fig. 47.** Respuesta experimental de controlador LQR con un paso de 45 grados (Autor)

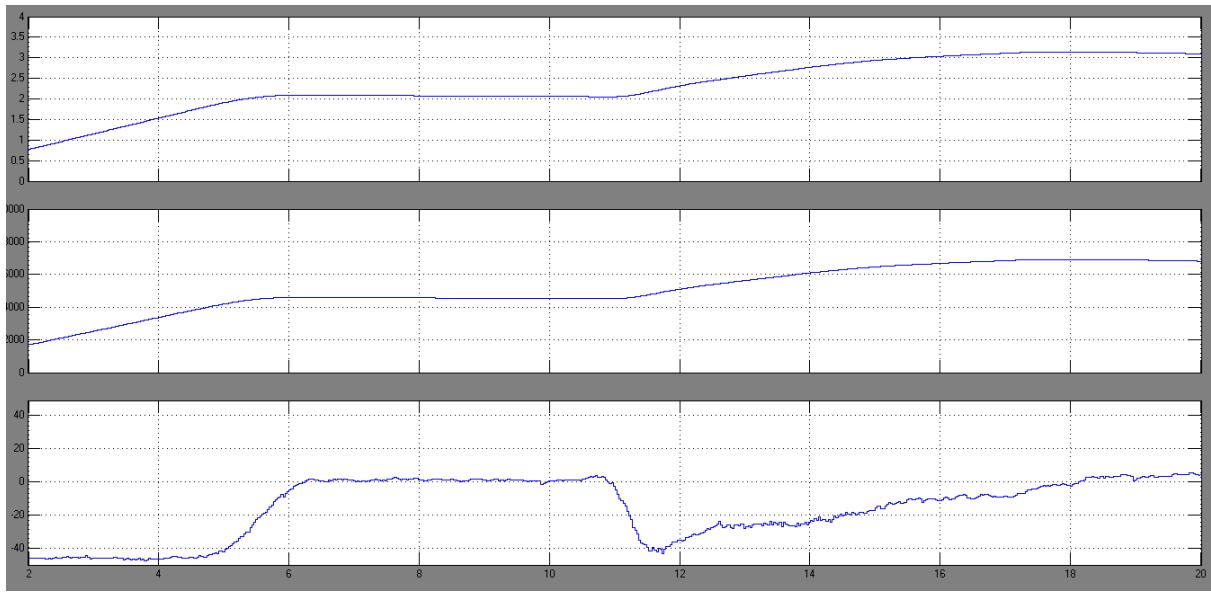


**Fig. 48.** Respuesta experimental del controlador LMI para el eje pitch con un paso de 45 grados (Autor)



**Fig. 49.** Respuesta experimental del controlador LQR para el eje pitch con un sobre peso del 30% del peso total (Autor)

En la primera parte de la gráfica podemos observar la señal de control luego de pasar por el PWM que controlaría el motor, en la segunda el valor numérico de la señal de control que será comparada contra una señal tipo rampa para generar el PWM, y en la última señal, se observa la respuesta del sistema a un valor deseado de 0 grados.



**Fig. 50.** Respuesta experimental del controlador LMI para el eje pitch con un sobrepeso del 30% del Helicóptero  
(Autor)

Como se puede observar en la Figura (49), encontramos que el controlador LQR presenta un sobrepaso de 20% del valor deseado de 0 grados, a diferencia del controlador LMI que no presenta ningún tipo de sobre impulso, a su vez es posible observar la saturación de la señal de control por parte del controlador LQR la cual no se presenta con el controlador LMI, que posee una tendencia suave de cambio.

Pese a lo anteriormente indicado, cuando en un instante dado se aplica una masa adicional al eje del helicóptero del 30% de su masa total (Perturbación), es posible determinar (Ver Figura 49), que el controlador LQR presenta una respuesta mucho más rápida que el LMI, a su vez el sub impulso generado por esta perturbación para el controlador LMI es grande.

## **6. Conclusiones**

El desarrollo del presente trabajo presenta el diseño, la implementación, modelamiento matemático, validación de dicho modelo matemático no lineal y desarrollo de controladores LQR, LMI. Que permitan su comparación bajo criterios como sobre impulso máximo, tiempo de establecimiento y perturbaciones externas.

El modelo matemático de un helicóptero de dos grados de libertad hallado utilizando las ecuaciones de movimiento fue validado utilizando el helicóptero de pruebas diseñado para el presente trabajo, demostrando ser un modelo suficiente ya que el mismo fue comparado haciendo uso de la herramienta IDENT de Matlab la cual indica una congruencia del 95% en comparación con las adquisición de datos del modelo real.

Pese a que no se encontraba dentro de los objetivos se realizó el diseño y la fabricación del helicóptero de 2 grados de libertad pivotado, a su vez se realizó el estudio de tecnologías para la selección del giroscopio y acelerómetro que permitiera medir las variables en los 2 ejes indicados, también se realizó al adaptación de equipamiento de aeromodelo (Motores, Ejes, Hélices, Drivers de potencia), como actuadores en el proceso de desarrollo.

Es necesario limitar la acción de control indistintamente de que sea diseñado con técnicas LQR o LMI, debido a que se presentan un acople excesivo que hará inestable el sistema o en algunos casos llevará hasta los extremos la ley de control presentando variaciones abruptas que pueden redundar en daños a cada uno de los bloques que conforman el sistema.

El diseño de controladores haciendo uso de LMI's permite la utilización de varios puntos de trabajo optimizando las prestaciones del mismo bajo condiciones especiales de trabajo del sistema, como cambios de masa abruptos o cambios bruscos debido a perturbaciones.

La aplicación tanto del controlador LQR como del controlador basado en LMI, presentan gran facilidad de implementación, esto debido a la generación única de ganancias que retroalimentan el sistema permitiendo que no se haga necesario la implementación de bloques integrales o derivativos como es el caso del control clásico.

Pese al desarrollo de técnicas avanzadas de control pasando desde el control clásico, moderno, digital entre otros, indicar que alguna técnica de control es mejor que otra es muy subjetivo. Esto debido a que pese que la técnica vincule más elementos de la dinámica del sistema, existe la posibilidad de que la sintonización o modelo utilizado no sea el óptimo para el control que se pretenda desarrollar. Cabe resaltar que algunas técnicas en comparación con otras tienen mayor facilidad ya sea en el diseño como en la implementación de la misma.

Pese a que la respuesta de los sensores cumple con los criterios de Nyquist se encontró que al realizar el envío y la recepción de los paquetes de datos haciendo uso de la interfaz RS232, se presenta un retardo acumulativo relacionado directamente con la velocidad del envío de datos, el procesamiento por parte de Matlab y reenvió de las señales de control hacia al tarjeta de adquisición el cual después de varios minutos de funcionamiento desconectaba el sistema de la interfaz con Matlab.

## **7. Trabajos Futuros**

Teniendo en cuenta el desarrollo realizado sería importante llevar a cabo mejoras en cuanto al proceso de adquisición de datos, para un posterior desarrollo de técnicas de control como algoritmos genéticos, Lógica difusa, redes neuronales , la cuales presentan enfoques totalmente diferentes al presentado en el presente desarrollo.

Desarrollar un modelo físico de helicóptero para el desarrollo de pruebas del tipo NO pivotado, que permita volar bajo condiciones controladas como ausencia de corrientes de viento, con ambientes dinámicos y no dinámicos.

## 8. Bibliografía

- Ariki, M. (s.f.). Control Systems, Robotics, and Automation-PID control. Encyclopedia of Life Support Systems, 2.
- EIA standard RS-232-C. (1969). Interface between Data Terminal Equipment and Data Communication Equipment Employing Serial Binary Data Interchange. Electronic Industries Association, Engineering Dept, Washington.
- Escobar, A., & Poveda, L. (2014). Metodología de identificación de procesos. Artículo.
- Esther, F. U. (Febrero de 2015). ISN Blog. International Relations and Security Network. Obtenido de Civilian Drones: Fixing an Image Problem?: <http://isnblog.ethz.ch/security/civilian-drones-fixing-an-image-problem>.
- Euler, L. (1776). Translatione Qvacvnqve Corporvm Rigidorvm. Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, 20, 189–207.
- Hobby King. (s.f.). 20A UBEC 30A UBEC User Manual. Manual de usuario.
- Jaramillo, F., & Gómez, A. (2013). Sistema de control para la estabilidad y orientación de un helicóptero quadrotor. Tesis de grado, Escuela de Ingeniería de Antioquia, Envigado.
- Mazzone, V. (s.f.). Controladores PID. Recuperado el Abril de 2016, de <http://www.eng.newcastle.edu.au/~jhb519/teaching/caut1/Apuntes/PID.pdf>
- MIT. (s.f.). Recuperado el Abril de 2016, de Linear Quadratic Regulator: <http://ocw.mit.edu/courses/mechanical-engineering/2-154-maneuvering-and-control-of-surface-and-underwater-vehicles-13-49-fall-2004/lecture-notes/lec19.pdf>.
- Ogata, K. (2010). Ingeniería de control moderno (5ta ed.). Prentice Hall.
- Prieto, E. (2015). Control de posición de un balancín Motor-Hélice. researchgate, 14.
- Quanser. (2006). Aerospace Plant: 2-DOF Helicopter, Position Control. Manual de usuario.

Sándor, K. (2014). Gyroscope. Obtenido de Demosntrations:  
<http://demonstrations.wolfram.com/Gyroscope>.

Sedoon, J. (1990). Basic Helicopter Aerodynamics. (B. p. books, Ed.) Oxford.

Serway, R., & Jewett, J. W. (2004). Physics for Scientists and Engineers (Sexta ed.). Brooks/Cole.

Solaque G., L., Cristancho, C., & Gil C., C. (2014). Diseño e implementación de una plataforma experimental de dos grados de libertad controlada por dos técnicas: PID y lógica difusa. Ciencia e Ingeniería Neogranadina, 24(1), 99-115.

Universita' Degli Studi di Siena. (2010). Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche. CE150 Helicopter Model. Manual de uso.

Yedamale, P. (2010). Brushless DC (BLDC) Motor Fundamentals.

M. Chilali and P. Gahinet, “ $H\infty$  design with pole placement constraints: an LMI approach,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 41, no. 3, pp. 358-367, 1996.

T. Pinzón y C. Andrés, «Control robusto de convertidores conmutados de cc/cc mediante desigualdades matriciales lineales», TDX (Tesis Doctorals en Xarxa), sep. 2012.

LMI control toolbox user's guide (PDF Download Available)», ResearchGate.

Zhao, Xingang, Zhe Jiang, Jianda Han, and Guangjun Liu. “Adaptive Robust LQR Control With the Application to the Yaw Control of Small-Scale Helicopter.” In Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, 1002–7, 2006. doi:10.1109/ICMA.2006.257762.

Liu, Z.X., C. Yuan, Y.M. Zhang, and J. Luo. “A Learning-Based Fuzzy LQR Control Scheme for Height Control of an Unmanned Quadrotor Helicopter.” In 2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 936–41, 2014. doi:10.1109/ICUAS.2014.6842343.

López-Martínez, Manuel, Manuel G. Ortega, Carlos Vivas, and Francisco R. Rubio. “Control No Lineal Robusto de Una Maqueta de Helicóptero Con Rotores de Velocidad Variable.”

Revista Iberoamericana de Automática E Informática Industrial RIAI 4, no. 3 (July 2007): 46–60. doi:10.1016/S1697-7912(07)70224-8.

Jiang, Zhe, Jianda Han, Yuechao Wang, and Qi Song. “Enhanced LQR Control for Unmanned Helicopter in Hover.” In 1st International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, 2006. ISSCAA 2006, 6 pp. – 1443, 2006. doi:10.1109/ISSCAA.2006.1627508.

Liu, Hao, Geng Lu, and Yisheng Zhong. “Robust LQR Attitude Control of a 3-DOF Laboratory Helicopter for Aggressive Maneuvers.” IEEE Transactions on Industrial Electronics 60, no. 10 (October 2013): 4627–36. doi:10.1109/TIE.2012.2216233.

P. Castillo, P. García. “Modelado Y Estabilización de Un Helicóptero Con Cuatro Rotores.” Revista Iberoamericana de Automática E Informática Industrial (RIAI), ISSN 1697-7912, Vol. 4, No. 1, 2007, Pags. 41-57 4, no. 1 (2007). doi:10.1016/S1697-7912(07)70191-7.

“PFC Modelo Y Control LQR de Una Aeronave de Cuatro Rotores.” Scribd. Accessed November 18, 2015. <https://es.scribd.com/doc/178961088/PFC-Modelo-y-Control-LQR-de-Una-Aeronave-de-Cuatro-Rotores>.

Ahmed, Q., A.I. Bhatti, S. Iqbal, y I.H. Kazmi. 2010. «2-sliding mode based robust control for 2-DOF helicopter». En 2010 11th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS), 481-86. doi:10.1109/VSS.2010.5544531.

Aras, A.C., y O. Kaynak. 2014. «Trajectory tracking of a 2-DOF helicopter system using neuro-fuzzy system with parameterized conjunctors». En 2014 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM), 322-26. doi:10.1109/AIM.2014.6878099.

Bittanti, S., F.A. Cuzzola, M. Lovera, y N. Lussana. 1999. «An LPV-LMI approach to generalised active control of vibrations in helicopters». En Control Conference (ECC), 1999 European, 2783-88.

Boby, R.I., H. Mansor, T.S. Gunawan, y S. Khan. 2014. «Robust adaptive LQR control of nonlinear system application to 3-Dof flight control system». En 2014 IEEE International

Conference on Smart Instrumentation, Measurement and Applications (ICSIMA), 1-4. doi:10.1109/ICSIMA.2014.7047443.

Dutka, A.S., A.W. Ordys, y M.J. Grimble. 2003. «Non-linear predictive control of 2 DOF helicopter model». En 42nd IEEE Conference on Decision and Control, 2003. Proceedings, 4:3954-59 vol.4. doi:10.1109/CDC.2003.1271768.

Hao, Liu, Lu Geng, y Zhong Yisheng. 2011. «Theory and experiments on robust LQR attitude control of a 3-DOF lab helicopter». En Control Conference (CCC), 2011 30th Chinese, 2335-40.

Jiang, Zhe, Jianda Han, Yuechao Wang, y Qi Song. 2006. «Enhanced LQR control for unmanned helicopter in hover». En 1st International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, 2006. ISSCAA 2006, 6 pp. - 1443. doi:10.1109/ISSCAA.2006.1627508.

Kaloust, J., C. Ham, y Z. Qu. 1997. «Nonlinear autopilot control design for a 2-DOF helicopter model». Control Theory and Applications, IEE Proceedings - 144 (6): 612-16. doi:10.1049/ip-cta:19971638.

Liu, Hao, Geng Lu, y Yisheng Zhong. 2013. «Robust LQR Attitude Control of a 3-DOF Laboratory Helicopter for Aggressive Maneuvers». IEEE Transactions on Industrial Electronics 60 (10): 4627-36. doi:10.1109/TIE.2012.2216233.

Liu, Zhichao, Z. Choukri El Haj, y Hongbo Shi. 2010. «Control strategy design based on fuzzy logic and LQR for 3-DOF helicopter model». En 2010 International Conference on Intelligent Control and Information Processing (ICICIP), 262-66. doi:10.1109/ICICIP.2010.5564250.

Liu, Z.X., C. Yuan, Y.M. Zhang, y J. Luo. 2014. «A learning-based fuzzy LQR control scheme for height control of an unmanned quadrotor helicopter». En 2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), 936-41. doi:10.1109/ICUAS.2014.6842343.

Pérez-D'Arpino, C., W. Medina-Meléndez, L. Fermín-León, J.M. Bogado, R.R. Torrealba, y G. Fernández-López. 2010. «Generalized Bilateral MIMO Control by States Convergence with time delay and application for the teleoperation of a 2-DOF helicopter». En 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 5328-33. doi:10.1109/ROBOT.2010.5509910.

Tanaka, K., T. Komatsu, H. Otake, y H.O. Wang. 2008. «Micro helicopter control: LMI approach vs SOS approach». En IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2008. FUZZ-IEEE 2008. (IEEE World Congress on Computational Intelligence), 347-53. doi:10.1109/FUZZY.2008.4630389.

Vishnupriyan, J., P.S. Manoharan, y A.P.S. Ramalakshmi. 2014. «Uncertainty modeling of nonlinear 2-DOF helicopter model». En 2014 International Conference on Computer Communication and Informatics (ICCCI), 1-6. doi:10.1109/ICCCI.2014.6921840.

Wang, Naizhou, Hailong Pei, Yuebang He, y Qi Zhang. 2012. «Robust H<sub>2</sub> static output feedback tracking controller design of longitudinal dynamics of a miniature helicopter via LMI technique». En Control and Decision Conference (CCDC), 2012 24th Chinese, 346-50. doi:10.1109/CCDC.2012.6244051.

Xie, Rong, Xinmin Wang, y Yan Li. 2008. «H Infinity State Feedback Control for the Stabilization of the Three Euler Angles of Helicopter Based on LMI». En 2008 International Conference on Intelligent Computation Technology and Automation (ICICTA), 1:375-79. doi:10.1109/ICICTA.2008.332.

Yu, Gwo-Ruey. 2007. «Robust-Optimal Control of a Nonlinear Two Degree-of-Freedom Helicopter». En 6th IEEE/ACIS International Conference on Computer and Information Science, 2007. ICIS 2007, 744-49. doi:10.1109/ICIS.2007.160.

Zaeri, A.H., S.B. Mohd-Noor, M.M. Isa, F.S. Taip, y A.E. Marnani. 2012a. «Disturbance Rejection for a 2-DOF Nonlinear Helicopter Model by Using MIMO Fuzzy Sliding Mode Control with Boundary Layer». En 2012 Third International Conference on Intelligent Systems, Modelling and Simulation (ISMS), 411-16. doi:10.1109/ISMS.2012.129.

## **9. Infografía**

[http://www.sensores-de-medida.es/sensing\\_sl/SENSORES-Y-TRANSDUCTORES\\_35/Aceler%C3%B3metros---Sensores-de-aceleraci%C3%B3n\\_49/Aceler%C3%B3metros-capacitivos\\_80/](http://www.sensores-de-medida.es/sensing_sl/SENSORES-Y-TRANSDUCTORES_35/Aceler%C3%B3metros---Sensores-de-aceleraci%C3%B3n_49/Aceler%C3%B3metros-capacitivos_80/)

[http://www.sensores-de-medida.es/sensing\\_sl/SENSORES-Y-TRANSDUCTORES\\_35/Aceler%C3%B3metros---Sensores-de-aceleraci%C3%B3n\\_49/Aceler%C3%B3metros-piezoresistivos\\_59/](http://www.sensores-de-medida.es/sensing_sl/SENSORES-Y-TRANSDUCTORES_35/Aceler%C3%B3metros---Sensores-de-aceleraci%C3%B3n_49/Aceler%C3%B3metros-piezoresistivos_59/)

[http://www.sensores-de-medida.es/sensing\\_sl/SENSORES-Y-TRANSDUCTORES\\_35/Aceler%C3%B3metros---Sensores-de-aceleraci%C3%B3n\\_49/Aceler%C3%B3metros-piezoel%C3%A9ctricos\\_50/](http://www.sensores-de-medida.es/sensing_sl/SENSORES-Y-TRANSDUCTORES_35/Aceler%C3%B3metros---Sensores-de-aceleraci%C3%B3n_49/Aceler%C3%B3metros-piezoel%C3%A9ctricos_50/)

## Anexo 1. Código LQR

```
%matrices de estados
A=[0 1 0;0 0 1; -2 -3.248 -1.54]
B=[0; 0; 67.17]
C=[1 0 0]
syms k11 k21 k31 k12 k22 k32 k31 k32 k33;
q=3;
R=(1/q);%matrices hermíticas Q y R
Q=C'*C;
K=[[k11 k21 k31; k12 k22 k32; k31 k32 k33]];
-K*A-A'*K+K*B*q*B'*K-Q %ecuación de Riccati
[y1,y2,y3]=solve((39551521*k11^2)/5000 + (77*k11)/20 - (327*k21)/1250,
(2493*k21)/1000 - (327*k22)/2500 + (39551521*k11*k21)/5000,
(39551521*k21^2)/5000 + (142*k22)/125 - 1,k11,k21,k22)
%k11=0.00034654278324112878262110942890375;
%k21=0.008731472405623437998583237647776;
%k22= 0.34940968326296807783176704268842;
%?k_=[k11 k21;k21 k22];
%q*B'*k_ %vector de ganancias de realimentación
```

## Anexo 2. Código LMI

```
%-----
% LMI en Control
%-----
%Código 2: LMI con Incertidumbres
%-----
clear all
clc

%Parametros del helicóptero de 2 grados de libertad pivotado
I=0.020586;           %inercia total
Mm=0.047;             % masa de 1 motor
L1m=0.238;            % masa de la estructura del helicoptero L1
L2m=0.104;            % masa del parte trasera del helicoptero
Hm=0.017;              % masa de la helice
Em=0.015               % masa del eje de montaje de la helice
L1=0.210;              % distancia de motor desde el centro hasta un extremo
L2=0.190;              % distancia de la parte trasera del helicoptero
g=9.8 ;                %gravedad
FgL2=(Mm+L2m+Hm+Em)*g
FgL1=(Mm+L1m+Hm+Em)*g
p=1.29e3;              %dato sacado de la densidad del aire dependiendo la
altura de bogota
B=0.245;               %Factor de rosamiento
p=1.29e3;              %dato sacado de la densidad del aire dependiendo la
altura de bogota

v1=1;

Fm1=p*1.4303*v1;      % voltage aplicado ala entrada
fs=600
Ts=1/fs;
%-----

%R=[10 50];           %Rango de Resistencias
%p1=[1/R(2) 1/R(1)];
p1=[1 0.3];
p2=[-1 -0.3];          %Rango de Ciclo de Trabajo Complementario
%p3=[1/p2(2) 1/p2(1)];
%p4=[1/(p2(2)^2*R(2)) 1/(p2(1)^2*R(1))];

%-----
%Sistema con incertidumbres
%-----
An=[];
Bun=[];
Pn=[];
for i=1:2
    for j=1:2
        P=[p1(i) p2(j) ];
        Pn=[P;Pn]
    end
end
end
```

```

for i=1:4

Fm=L1/I*((p*0.303*Pn(i,1))-(p*0.303*Pn(i,2)))

A=[0 1 0 ; -(2*(Mm)*L1*g)/I -(2*L1*B)/I 0 ; 1 0 0 ] ;
Bu=[0 ; Fm; 0 ] ;

%Bu=[0 ; L/I*(Fm1-Fm3);0 ]
An=[An;A];
Bun=[Bun;Bu];
end

X=[0; 0;0];

%X=[Vg/ (R*Dp*Dp) ; (R*Dp*Vg) / (R*Dp*Dp) ; 0]; %Vector de estado en estado estable
%-----
Bw=[0 2*L1/I 0]'; % Matriz de Perturbacion
Cy=[0 1 0]; % Matriz de Salida Medible
Dyu=[0]; % Matriz de Transmision Directa
%-----
%LMI's
%-----
% Definicion de dimensiones
%-----
[nA,mA]=size(An(1:3,:));
[nBu,mBu]=size(Bun(1:3,1));
m=length(A)/mA;
%-----
%-----
% Definicion de variables
%-----
W = sdpvar(mA,mA,'symmetric');
Y = sdpvar(mBu,mA,'full');
sdpvar mu;
%-----
%Parametros Ubicacion de Polos
%-----
alfa=10%130;
ro=2*pi/(10*Ts);
teta=25*pi/180;
b=0;
%-----
F=[];

for q=1:1:4

F=F+set(W>0);
F=F+set(An(3*q-2:3*q,:) *W+Bun(3*q-2:3*q,1)*Y+W*An(3*q-2:3*q,:)' +Y'*Bun(3*q-2:3*q,1)'<0);
%-----
%Formulacion LMI para el Control H infinito
%-----
```

```

F=F+set( [An (3*q-2:3*q,:) *W+W*An (3*q-2:3*q,:)' +Bun (3*q-
2:3*q,1)*Y+Y'*Bun (3*q-2:3*q,1)' Bw W*Cy'+Y'*Dyu'; ...
           Bw'                               -mu      0      ; ...
           (Cy*W+Dyu*Y)                      0       -mu] <0) ;
%-----%
%Formulacion LMI para La Ubicacion de Polos
%-----%

%Restriccion para la tasa de decaimiento
F=F+set( An (3*q-2:3*q,:)*W+Bun (3*q-2:3*q,1)*Y+W*An (3*q-
2:3*q,:)' +Y'*Bun ([3*q-2:3*q],1)' <-2*alfa*W);
%Restriccion para la limitacion del factor de amortiguamiento
F=F+set( [cos(teta)*(An (3*q-2:3*q,:)*W+W*An (3*q-2:3*q,:)' +Bun (3*q-
2:3*q,1)*Y+Y'*Bun (3*q-2:3*q,1)') sin(teta)*(An (3*q-2:3*q,:)*W-W*An (3*q-
2:3*q,:)' +Bun (3*q-2:3*q,1)*Y-Y'*Bun (3*q-2:3*q,1)') ...
           sin(teta)*(-An (3*q-2:3*q,:)*W+W*An (3*q-2:3*q,:)' -Bun (3*q-
2:3*q,1)*Y+Y'*Bun (3*q-2:3*q,1)') cos(teta)*(An (3*q-2:3*q,:)*W+W*An (3*q-
2:3*q,:)' +Bun (3*q-2:3*q,1)*Y+Y'*Bun (3*q-2:3*q,1)')] <0);
%Restriccion para la limitacion de la frecuencia natural Wn
F=F+set( [-ro*W          W*An (3*q-2:3*q,:)' +Y'*Bun (3*q-2:3*q,1)'; An (3*q-
2:3*q,:)*W+Bun (3*q-2:3*q,1)*Y -ro*W] <0);

%F=F+set( [1 X';X W]>=0);
% F=F+set( [W Y';Y (b*b)*eye(1,1)]>=0);
end
%-----
options=sdpsettings('verbose',1,'solver','lmilab');
%-----
sol=solvesdp(F,mu,options)
muo=double(mu)
gamma=sqrt(muo)
Wo=double(W);
K = double(Y)*inv(double(W)) % Ganancia de Realimentacion

f=-K

```

### **Anexo 3. Artículo resultado de investigación**

## **Modelado y validación de un helicóptero de 2 grados de libertad pivotado**

*Modeling and Validation of a 2 Degrees of Freedom Pivoting Helicopter*

Edward H. Bejarano B.

Universidad Santo Tomas

edwardbejarano@usantotomas.edu.co

Diego A. Tibaduiza B.

Carlos A. Torres P.

Universidad Santo Tomas

Universidad Santo Tomas

diegotibaduiza@usantotomas.edu.co

carlostorresp@usantotomas.edu.co

El presente artículo tiene como objetivo la presentación detallada de cada uno de los pasos desarrollados en el modelamiento y validación de un helicóptero de 2 grados de libertad pivotado, a su vez se presentará una descripción del funcionamiento del mismo desde su diseño mecánico, de la sensórica implementada para la captura de las variables que intervienen en el proceso, tiempos de muestreo utilizados, tratamiento realizado a las variables medidas, y los experimentos y métodos utilizados para el modelamiento y validación del sistema mencionado. Además se hará una explicación y aplicación de los métodos: caja gris, ARX y ARMAX como parte final del proceso de modelamiento y validación, y por último se hace una comparación de dichos métodos contra los datos adquiridos del sistema.

Palabras clave: ARMAX, ARX, Correlación, Filtrado, Grados de Libertad, Modelado, Muestras, Tiempo de muestreo, Validación.

This article aims at detailed presentation of each of the steps developed in carrying out the modeling and validation of a helicopter 2 degrees of freedom pivot, turn a description of the operation of the helicopter 2 degrees of freedom is presented pivoted since its mechanical design, implemented to capture the variables involved in the

process, explanation of the sampling times and the treatment performed to the measured variables and experiments and methods for modeling and system validation mentioned sensors, explanation and application of the method of gray box, ARX and ARMAX in modeling process and validation of the modeling, comparison of methods against the acquired system data.

Keywords: ARMAX, ARX, Correlation, Filter, Degrees of freedom, Modeling, Sampling Time, Validation.

## Introducción

La historia de los vehículos aéreos no tripulados inicia en 1849 con el lanzamiento de 5 globos aerostáticos contra la ciudad de Venecia (Italia), los cuales solamente contaban con sistemas de control de temporizadores para el lanzamiento de bombas, se presentó que algunos de estos fueron imprecisos y se activaron en las mismas líneas austriacas (Anderson, 1992), posterior a esto aparecieron los misiles crucero durante el transcurso de la primera guerra mundial controlados por una serie de giroscopios, luego se dieron a conocer aviones radiocontrolados utilizados como elemento de entrenamiento para tiradores británicos durante el desarrollo de la segunda guerra mundial. También durante las guerras de Korea y Vietnam EEUU desarrolló UAV's (Vehículos Aéreos no Tripulados), como equipamiento de reconocimiento, y ahora más recientemente durante la guerra fría estos UAV's se han venido desarrollando de forma tal que son sistemas compuestos (Anderson, 1992) por plataformas, enlaces de datos, estaciones de control, entre otros.

En Colombia el desarrollo de UAV's se ha venido estudiando por ingenieros y técnicos de las Fuerzas Armadas, quienes implementaron el IRIS, un drone que surge de la necesidad de un prototipo funcional tanto para ataque como para reconocimiento de áreas (Pierson y Pierson, 1997), de bajo costo y reproducible.

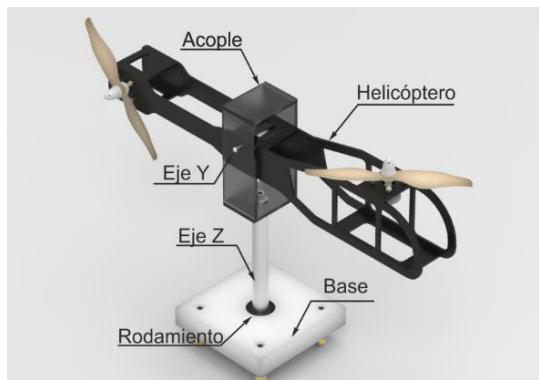
Debido al avance de este tipo de tecnologías se ha generado curiosidad en áreas como el control electrónico de procesos, la necesidad de nuevos y mejores sistemas de sensores, y de la mano de estas dos, el modelamiento de sistemas como apoyo a los procesos de diseño y simulación de los mismos en laboratorio.

## Formulación del problema

Para poder describir el helicóptero de 2 grados de libertad pivotado es importante entender el funcionamiento del mismo, ya que para este caso, el helicóptero se encuentra sujeto a una base como se puede observar en la Fig. 1.

En la fabricación de la estructura física se tuvieron en cuenta varios aspectos relacionados con el diseño mecánico como son ángulos de trabajo,

peso total de helicóptero, peso de los motores, tipo de material para la fabricación de la estructura, eliminación de la mayor cantidad de rozamiento en el movimiento de los ejes, tipos y tamaños de las hélices, ubicación de los sensores, entre otros, que tienen una influencia directa en el funcionamiento y la dinámica del sistema en general.



*Figura 1.* Helicóptero de 2 grados de libertad Pivotado (Modelo en 3D).

## Movimientos

El dispositivo tiene dos grados de libertad: giro en el eje Z (Yaw), y giro en eje Y (Pitch).

Giro en eje Z (Fig. 2): este giro está controlado

Fecha recepción del manuscrito: Julio 25 , 2016

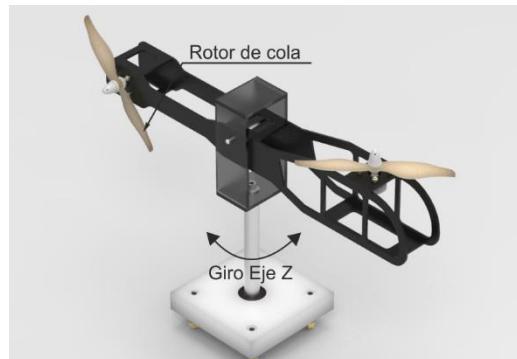
Fecha aceptación del manuscrito:

Edward H. Bejarano B., Universidad Santo Tomás; Diego A. Tibaduiza, Universidad Santo Tomás; Carlos A. Torres P., Universidad Santo Tomás

por el rotor de cola, no se encuentra limitado.

Giro en el eje Y (Fig. 3): este giro está controlado por el rotor principal, se encuentra limitado entre 45 grados y -45 grados, dados por la estructura que contiene el helicóptero, se diseñó de esta forma para poder verificar en un rango amplio el funcionamiento de este tipo de estructura.

Cuando el dispositivo se encuentra en posición de reposo, el rotor principal se encuentra en la parte inferior y el helicóptero se encontrará inclinado 45 grados hacia abajo para permitir la elevación del mismo al entrar a funcionar el rotor principal. Para garantizar este posicionamiento el centro de masa se desplazó en dirección del rotor principal.



*Figura 2.* Helicóptero de 2 grados de libertad Pivotado (Modelo en 3D vista diagonal).

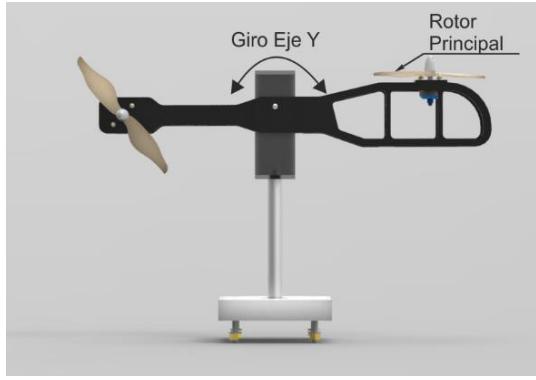


Figura 3. Helicóptero de 2 grados de libertad Pivotado (Modelo en 3D vista lateral).

Como se puede observar en la Fig. 4 se deben tener en cuenta cada uno de los ejes para el desarrollo del modelamiento, teniendo en cuenta el movimiento de la dinámica de los ejes Pitch y Yaw.

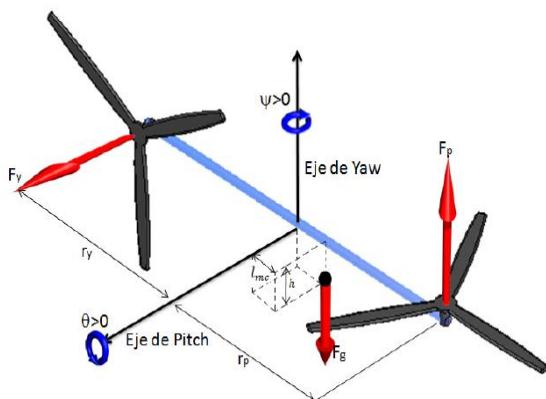


Figura 4. Ángulos de navegación para helicóptero de 2 grados de libertad.

## Funcionamiento

El desarrollo de la estructura para el helicóptero de 2 grados de libertad pivotado se realiza con la finalidad de aplicar técnicas de control robusto como LMI y verificar la respuesta de este tipo de controlador en una plataforma que representa un sistema no lineal; su funcionamiento se basa en ubicar el helicóptero en pitch en un ángulo determinado y que éste se mantenga sobre dicho valor pese a las posibles perturbaciones que se puedan presentar, esto por medio del giro de los motores brushless con los que cuenta.

## Sensórica

Como se pudo evidenciar en la explicación del diseño, se hace necesario medir variables como posición, velocidad y aceleración en cada uno de los ejes que conforman el helicóptero, donde una de las restricciones en la elección de la tecnología a implementar es que los sensores que se acoplen a la plataforma sean similares o iguales a aquellos que se utilizan en este tipo de aeronaves reales, puesto que en varias referencias bibliográficas encontradas se utilizan encoders, potenciómetros, entre otros, los cuales de ninguna manera son sensores que se encuentran en aeronaves reales, con esta premisa se hizo uso de una IMU (Unidad de Medición Inercial), la cual tiene la capacidad de medir la posición y la aceleración de 3 ejes, el sensor utilizado es un MPU-6050 (Fig. 5), que tiene una velocidad de muestreo de 1Khz, comunicación por medio de I2C, lo cual es óptimo para la aplicación que se desarrolló, este

sensor fue diseñado con base en los MEMS (Sistemas microelectromecánicos), puesto que permiten realizar la medición de variables que tengan pequeños cambios.

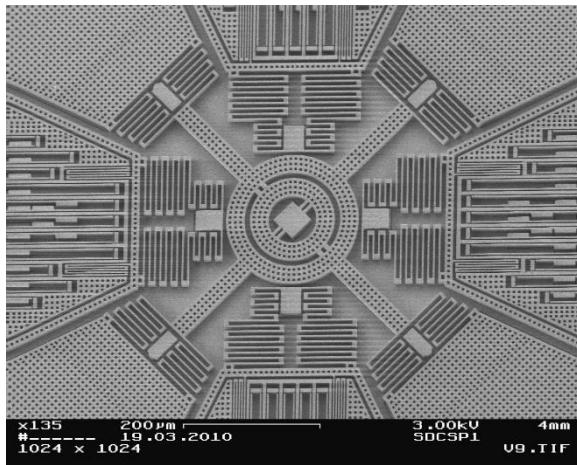


Figura 5. Imagen interior aumentada del acelerómetro tipo MEMS.

De tal manera que haciendo uso de este tipo de sensores es posible asegurar que las mediciones realizadas sobre el sistema coincidirán directamente con la dinámica del mismo en todos sus puntos.

realizó por medio de un Arduino Leonardo, el cual hará las veces de interfaz entre el sensor y Matlab, donde se realizará el análisis de la información capturada.

Teniendo en cuenta que la comunicación entre el arduino y el equipo de cómputo se realiza por medio de comunicación serial a una velocidad de 9600 bits/s, éste será este el limitante en el muestreo de los datos que recibirá Matlab.

Teniendo en cuenta que el sensor envía un paquete de 8 datos y cada uno tiene un tamaño de 24 bits, se envían en total 192 bits en cada paquete de datos, con una velocidad de 9600 bits/s (ecuación 1), se puede decir entonces que se envía un total de 50 datos por segundo, resultando así que se debe recibir una trama de datos que indiquen la posición en que se encuentra el helicóptero cada 20ms (ecuación 2) por parte de la herramienta Simulink de Matlab. A razón de lo anterior, se indica que siendo este tiempo mayor que el inverso de la frecuencia de muestreo del sensor, cualquier valor mayor a éste y menor a 50ms puede ser considerado como el tiempo de muestreo, para este caso en específico se utilizó un tiempo de muestreo de 50ms.

## Metodología

### Adquisición y muestreo

Como ya se mencionó anteriormente el sensado se realizará por medio de la IMU MP-6050, la cual ya entrega los datos digitalizados por medio de un conversor analógico a digital de 16Bits a 1Ksample/s, haciendo uso del bus I2C la lectura de estos datos se

$$Datos \text{ en } un \text{ segundo} = \frac{9600 \text{ Bits}}{192 \text{ Bits}} \quad (1)$$

$$Frecuencia \text{ de dato} = \frac{1}{50} = 0.02 \quad (2)$$

## Tratamiento de los datos

Inicialmente al realizar pruebas con el sensor MPU-6050, se pudo observar una excelente respuesta del sistema a razón de la eliminación del ruido por medio de filtros internos con los que cuenta el dispositivo, pero se presentó un problema al inicializar el motor brushless y ponerlo en funcionamiento. Puesto que éste trabaja en un rango de 1400 revoluciones para 0° hasta 10000 para el máximo de 90°, las vibraciones generadas por el motor son detectadas en su totalidad por el sensor dando como resultado, para la respuesta a un cambio en la entrada tipo escalón, señales como las de la Fig. 6.

Es así que al observar estas señales se puede determinar que pese a que siguen en su totalidad la dinámica del helicóptero, es excesivo el ruido intrínseco a razón de la vibración del motor, por ende se realizó una serie de experimentos que permitieron determinar la densidad espectral de frecuencia de las señales dando como resultado una concentración de frecuencias en 80Khz (Fig. 7).

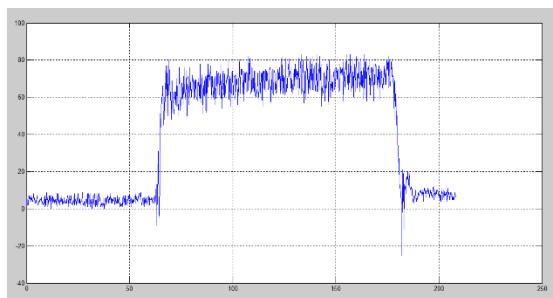


Figura 6. Respuesta a la señal paso del helicóptero en el eje pitch sin filtrado.

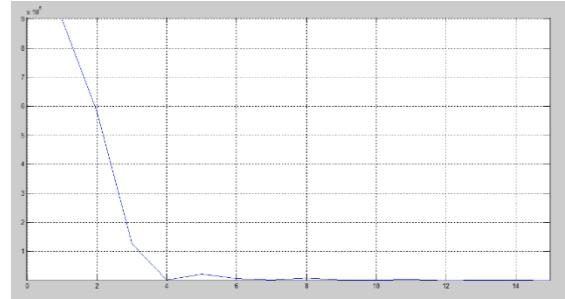


Figura 7. Densidad espectral de frecuencia del ruido intrínseco para el eje pitch.

Lo anterior permitió determinar también el rango de frecuencias a eliminar por el filtro de segundo orden a implementar, el resultado de dicho filtro se puede observar en la Fig. 8 para la misma muestra de datos.

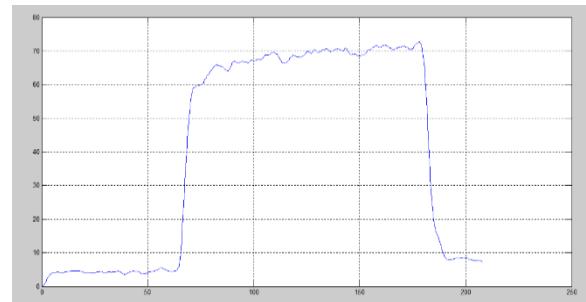


Figura 8. Señal filtrada del eje pitch.

## Resultados

Para el proceso de experimentación se hizo toma de muestras por medio del sensor MPU-6050 y un arduino Leonardo, el cual envía los datos hacia el Pc en donde son interpretados y filtrados por medio de la herramienta Simulink de Matlab, estos datos son:

tiempo de las muestras, salida del sistema a la respuesta paso, función paso aplicada al sistema, dichas señales fueron filtradas para eliminar las componentes no deseadas y posteriormente fueron enviadas al workspace para ser procesadas.

### Captura de señales de prueba al sistema

Para la realización de este experimento se implementó en Matlab el modelo que se muestra en la Fig. 9 haciendo uso de los módulos Query Instrument y To Instrument de Simulink, se realizó el filtrado y el envío de la señal paso hacia el driver del motor, y de esta manera poder variar la salida del sistema que para el caso será el Angulo del eje Pitch del helicóptero.

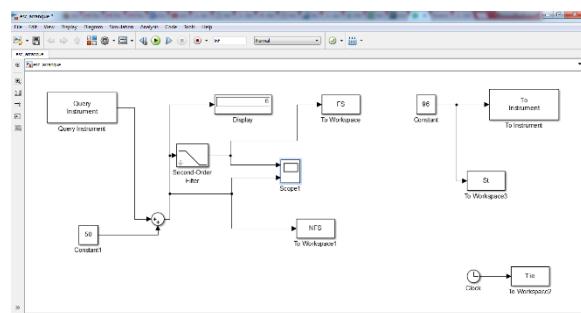


Figura 9. Bloque de captura y filtrado en Simulink de Matlab.

La experimentación se basó en excitar el sistema que se encontraba en la posición de reposo por medio de una señal paso para que la respuesta del sistema (Fig. 10) llevara al helicóptero a un valor cercano a

los 70°, esto con el fin de poder identificar la dinámica del sistema, determinar si el mismo contenía un retardo, para así poder establecer la ecuación de transferencia por diferentes métodos.

Cabe resaltar que los datos adquiridos, se utilizaron para la determinación del modelado tanto por el método de caja gris, como haciendo uso de la herramienta IDENT de Matlab, como se mostrará en seguida.

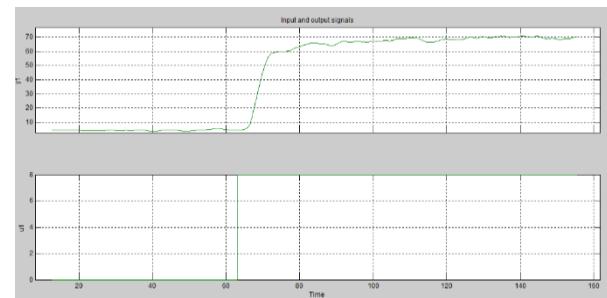


Figura 10. Respuesta del modelamiento a la señal paso utilizando la herramienta ident.

### Modelado por medio de Caja Gris

Para poder determinar la función de transferencia del sistema se hizo uso de la señal de salida (Figura 11 gráfica roja), se puede observar que la respuesta del sistema se asemeja bastante a la respuesta de un sistema de primer orden, para hallar los parámetros de la función de transferencia se realizaron los siguientes cálculos:

Primero se halló el valor final al cual llega el sistema de primer orden y el valor del paso, con ayuda de Matlab.

Esta señal tiene un tiempo de muestreo de 20ms haciendo uso de un retenedor de orden cero (zoh) como herramienta para la discretización.

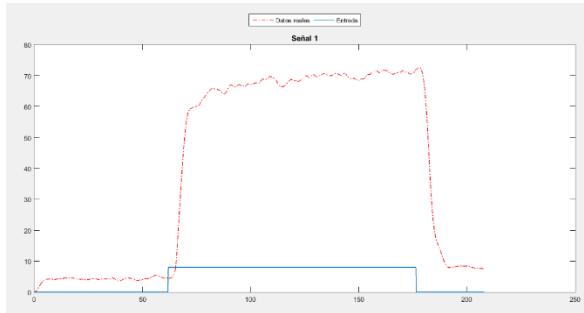


Figura 11. Respuesta al modelamiento a la señal a través del método de caja gris.

Hallando el modelo continuo de la señal se tiene que  $V_f = 67.044$ , que corresponde al valor final de la respuesta de primer orden, y  $V_s = 8$  que corresponde al valor de la función paso. Se calcula el numerador de la función de transferencia dividiendo estos dos valores hallados anteriormente observando la respuesta del sistema (ecuación 3).

$$k = \frac{V_f}{V_s} \quad (3)$$

En la gráfica se debe observar en qué tiempo la señal alcanza el 95% de su valor final quitando el retardo que demora al iniciar la señal paso, el cual es  $t_s = 27.8$ .

Se calculó  $\tau_{ao}$  con el tiempo anterior y así fue posible encontrar la función de transferencia que se muestra en la ecuación 4.

$$g(s) = \frac{8.83}{9.267s + 1} \quad (4)$$

Al discretizar (4) con un retenedor de orden 0 se obtiene (5).

$$g(z) = \frac{0.1789}{Z - 0.9786} \quad (5)$$

Al graficar las respuestas del sistema discretizado y la señal de los datos adquiridos se obtuvo la gráfica que se muestra en la Fig. 12.

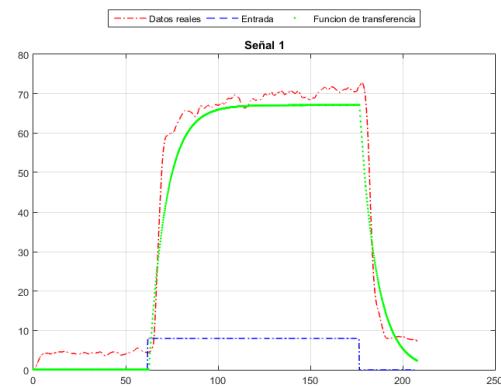


Figura 12. Validación del modelo hallado por medio de la herramienta ident.

### Algoritmo de identificación IDENT (ARMAX)

Posterior a la captura de los datos por medio de Simulink se realizó el proceso de identificación haciendo uso de la herramienta IDENT de Matlab, donde se tomaron como datos de entrada los valores capturados de la señal paso que se aplicó al sistema, como datos de salida generados los entregados por el MPU-6050 en respuesta a este paso, y como tiempo de muestreo 0.2 segundos, a razón del espaciamiento de los datos en la captura.

Se realizó en IDENT una selección de los datos que se deseaban utilizar tanto datos de trabajo como de validación para eliminar algunos tiempos no relevantes del sistema, posteriormente se realizó la estimación por ARMAX lo cual dio como resultado la ecuación 6 en tiempo discreto.

$$g = \frac{0.4521z^{-1} + 0.4521z^{-2}}{1 - 1.427z^{-1} + 0.4397z^{-2}} \quad (6)$$

En la Fig. 13 se muestra la respuesta del modelado por medio de ARMAX. Con un porcentaje de correlación del 73.7% y un error medio cuadrático de 0.01621.

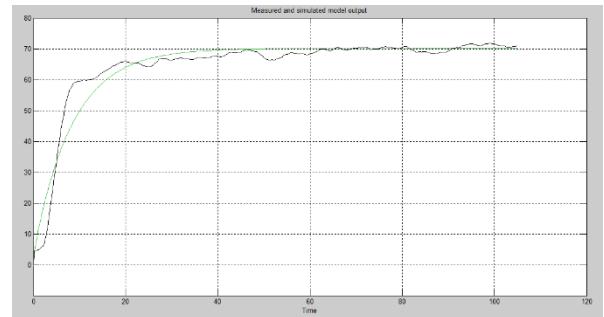
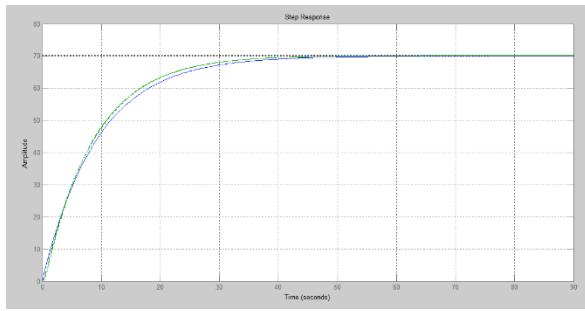


Figura 13. Validación del modelo por medio de algoritmo de identificación ARMAX.

### Comparación de los algoritmos de identificación

Posterior al desarrollo de la experimentación anteriormente enunciada, se procedió a realizar la comparación de las funciones de transferencia encontradas por los dos métodos.

Como se puede observar en la Fig. 14, las funciones tanto del ARMAX como la del método de caja negra son similares a un sistema de primer orden sin retardo, pero en un análisis más profundo, calculando el error entre la señal capturada y el modelado por medio de caja gris, se presenta un error del 29.9% en comparación con el modelo encontrado por medio de la herramienta IDENT, mientras que el modelo ARMAX presenta un error del 22.3% en comparación con la misma señal de entrada.



*Figura 14.* Respuesta a la señal paso de los modelos calculados (ARMAX y caja gris).

### Conclusiones

- Dado que el modelo de caja gris involucra el factor humano en la determinación de parámetros y el cálculo de la función de transferencia, el porcentaje de error va a ser mayor a los métodos que utilizan herramientas recursivas como IDENT de MATLAB.
- En el caso específico de este sistema se hizo necesario realizar un tratamiento a los datos, esto a razón de que las señales adquiridas presentaban ruido, para lo cual es importante determinar la densidad espectral de potencia y así poder identificar las frecuencias de las componentes afectan el sistema.
- La utilización de la herramienta ident y de cada uno de los métodos de identificación que ésta

maneja no asegura que se pueda determinar una función que describa la dinámica general del sistema.

### Agradecimientos

A la Universidad Santo Tomás sede Bogotá, Al Ingeniero Jorge López instructor y guía en el curso de Modelado y Simulación de Sistemas.

### Referencias

- Anderson, R.E. Social impacts of computing: Codes of professional ethics. *Social Science Computing Review*. Vol. 10, No. 2, (Winter 1992), pp.453-469.
- Harmon, J.E. The Structure of Scientific and Engineering Papers: A Historical Perspective. *IEEE Trans. On Professional Communication*. Vol 32, No. 2, (September, 1989), pp. 132-138.
- Pierson, M.M. and Pierson, B.L. Beginnings and Endings: Keys to Better Engineering Technical Writing. *IEEE Trans. On Professional Communication*. Vol 40, No. 4, (December, 1997), pp. 299-304.
- Strunk, W. and White, E.B. *The Elements of Style*. Fourth Edition, Boston: Allyn and Bacon. 2000.