

Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Síntesis de Redes Activas
Trabajo Práctico N°4

Docentes:
Dr. Ing. Pablo Ferreyra
Ing. César Reale

Autores:
Matías Lucas Morales Robles
José Ignacio Torres
Esteban Samuel Suárez

Índice

| | |
|---|----------|
| 1. Enunciado | 2 |
| 1.1. Circuito 1 | 2 |
| 1.2. Metodología | 3 |
| 2. Introducción | 4 |
| 3. Desarrollo | 5 |
| 3.1. Pasa Alto | 8 |
| 3.1.1. Síntesis | 8 |
| 3.1.2. Simulaciones | 10 |
| 3.2. Pasa Bajo | 11 |
| 3.2.1. Síntesis | 11 |
| 3.2.2. Simulaciones | 13 |
| 3.3. Filtro Completo | 14 |
| 3.3.1. Simulaciones | 14 |
| 3.3.2. Sensibilidad | 15 |
| 3.3.3. Análisis de Montecarlo | 17 |
| 3.3.4. Mediciones | 19 |

1. Enunciado

1.1. Circuito 1

En base a la planilla de requerimientos presentada en la Figura 1, se solicita realizar las siguientes tareas:

- Aproximar la función de atenuación mediante polinomios de Chebyshev, utilizando Python o MATLAB como herramientas de cálculo.
- Sintetizar un circuito que cumpla con los requerimientos anteriores, empleando topologías bi-cuadráticas de realimentación positiva o negativa (a elección).
- Simular cada etapa, así como el filtro completo, utilizando *LTspice*.
- Calcular la sensibilidad de la frecuencia del polo de cada bicoadrática (ω_p) y del ancho de banda ($\left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)$).
- Analizar la desviación considerando que todos los componentes presentan una tolerancia del 10 %.
- Realizar una simulación de Montecarlo en *LTspice* para estudiar las variaciones del filtro.
- Construir el circuito, medir experimentalmente las curvas de atenuación y desfase, y compararlas con los resultados teóricos y de simulación.

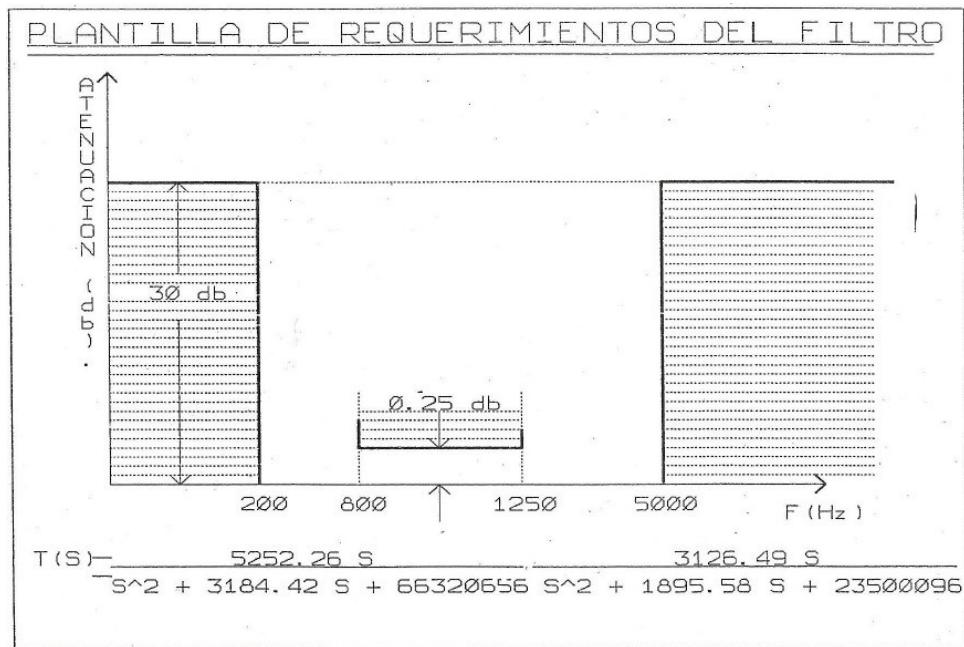


Figura 1: Requerimientos del filtro

1.2. Metodología

En general, para cada uno de los casos particulares solicitados se debe:

- Realizar una sintética introducción teórica.
- Analizar el circuito propuesto, su desarrollo numérico y todos los cálculos analíticos.
- Realizar simulaciones en LTspice.
- Armar el circuito y hacer las mediciones en laboratorio.
- Finalmente, comparar los valores calculados, simulados y medidos, y extraer conclusiones acerca de las diferencias. Analizar las causas.
- Presentar un informe digital y en papel.

2. Introducción

Las principales características de los polinomios de Chebyshev en el diseño de filtros son las siguientes:

- **Atenuaciones específicas:** Estos polinomios permiten diseñar filtros con atenuaciones determinadas en la banda de paso, logrando valores mayores que otros enfoques, como el basado en Butterworth.
- **Menor orden:** Para una misma atenuación, los filtros basados en polinomios de Chebyshev requieren un orden menor. Esto reduce costos y simplifica la implementación del circuito.
- **Optimización del ancho de banda:** Permiten obtener un ancho de banda optimizado mientras se mantiene la atenuación especificada en la banda de paso.
- **Flexibilidad de diseño:** Facilitan el ajuste de parámetros como la atenuación máxima en la banda de paso y la frecuencia de corte, permitiendo cumplir con requisitos específicos del sistema.

3. Desarrollo

De acuerdo con lo especificado en la plantilla de requerimientos, se puede extraer la siguiente información:

- **Banda de paso:** desde 800 Hz hasta 1250 Hz, con una atenuación máxima de 0,25 dB.
- **Banda de rechazo:** frecuencias menores a 200 Hz y mayores a 5000 Hz, con una atenuación mínima de 30 dB.

Con estos criterios, se utilizará Python para sintetizar el filtro. Para ello, se ingresan las especificaciones anteriores como parámetros de entrada.

```

fp = [800, 1250] #Puntos banda de Paso [Hz]
fs = [200, 5000] #Puntos banda de Rechazo [Hz]

wp = np.dot(2*np.pi, fp) #Puntos banda de paso [Rad/s]
ws = np.dot(2*np.pi, fs) #Puntos banda de Rechazo [Rad/s]

Ap = 0.25 #Atenuación Máxima Banda de Paso [dB]
As = 30 #Atenuación Mínima Banda de Rechazo [dB]

```

Figura 2: Especificaciones

Luego, utilizaremos la librería `scipy` para obtener el polinomio de Chebyshev correspondiente a las especificaciones del filtro. Además, emplearemos la librería `control` para expresar dicho polinomio en forma de función de transferencia y, de este modo, facilitar la obtención del diagrama de Bode de manera sencilla y directa.

```

N, wn = signal.cheb1ord(wp, ws, Ap, As, analog = True) #Retorna el orden mínimo del filtro y las frecuencias de corte
b, a = signal.cheby1(N, Ap, wn, btype = "bandpass", analog = True) #Retorna los coef del numerador(b) y del denominador (a) del filtro sintetizado

FiltroAten = ct.TransferFunction(a, b)
Filtro = ct.TransferFunction(b, a)

omega = np.logspace(3, 5, 100)
plt.figure(figsize=(12, 6))
ct.bode_plot(FiltroAten, omega, dB = True, Hz = True, title="Filtro Especificado [Atenuación]")
plt.show()

```

Figura 3: Obtención del polinomio de Chebyshev

Con esto es posible graficar la respuesta en Bode (en términos de atenuación) y compararla directamente con lo especificado en la plantilla de requerimientos.

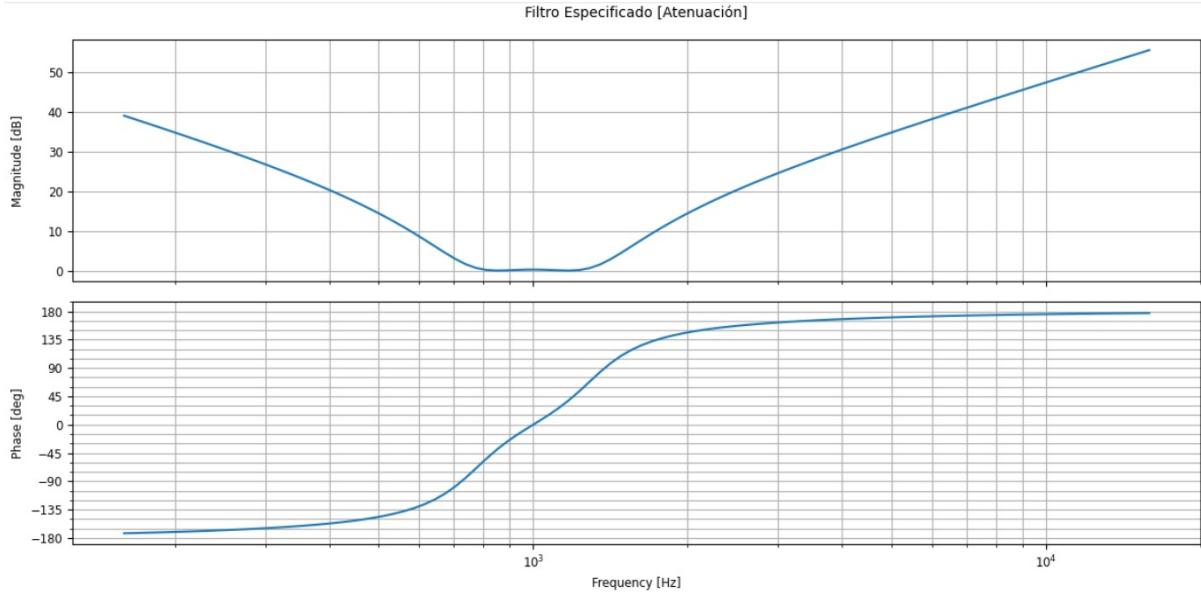


Figura 4: Diagrama de Bode del filtro pasabanda

La función de transferencia obtenida para el filtro resulta:

$$\frac{1.642\text{e+}07 s^2}{s^4 + 5080 s^3 + 9.586\text{e+}07 s^2 + 2.006\text{e+}11 s + 1.559\text{e+}15}$$

Figura 5: Función de Transferencia del filtro pasabanda

Se observa que la función de transferencia obtenida corresponde a un filtro *pasa banda*. Por ello, puede descomponerse en dos filtros biquadráticos: uno *pasa alto* y otro *pasa bajo*, lo cual permite su implementación mediante topologías de realimentación.

La función de transferencia del filtro pasa alto resulta:

$$\frac{s^2}{s^2 + 1896 s + 2.35\text{e+}07}$$

Figura 6: Función de Transferencia del filtro pasa alto

Por otro lado, para la topología correspondiente a un filtro pasa bajo, se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{1.642e+07}{s^2 + 3184 s + 6.632e+07}$$

Figura 7: Función de Transferencia del filtro pasa bajo

Si graficamos la respuesta en frecuencia de cada una de las biquadráticas, así como la respuesta conjunta del filtro completo, se observa que el comportamiento obtenido satisface adecuadamente las especificaciones establecidas.

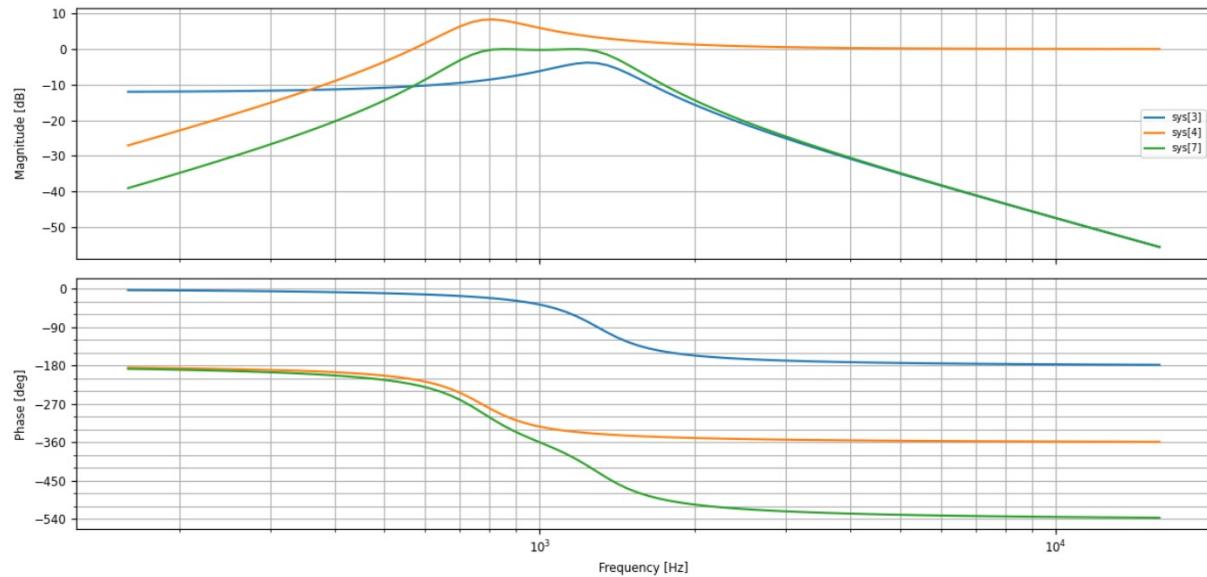


Figura 8: Respuesta en frecuencia de los tres filtros

3.1. Pasa Alto

3.1.1. Síntesis

Para sintetizar esta biquadrática se utilizará la topología de realimentación positiva tipo *Sallen-Key*. La función de transferencia que se desea implementar es:

$$\frac{s^2}{s^2 + 1896 s + 2,35 \times 10^7}$$

El circuito modelo a emplear para su cálculo es el siguiente:

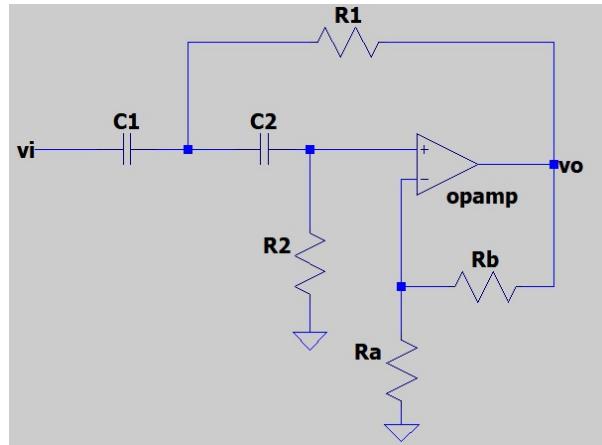


Figura 9: Filtro Pasa Alto Sallen Key

Con este circuito, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones a partir de la red mostrada, suponiendo además que el amplificador operacional es ideal y, por lo tanto, no introduce polos que modifiquen la respuesta del filtro:

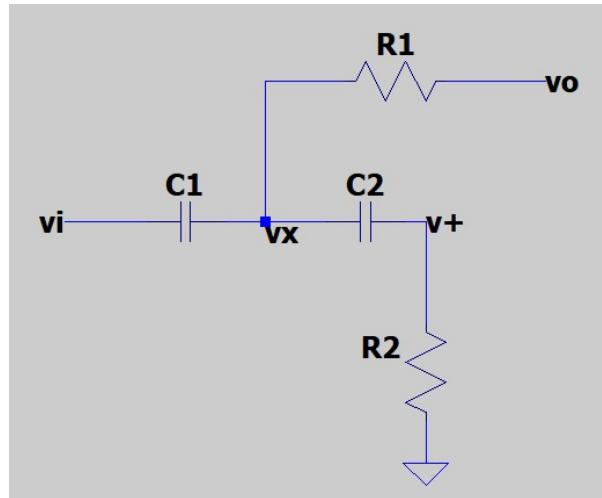


Figura 10: Circuito Pasa Alto

Utilizando el método de nodos, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones para la red mostrada, asumiendo que el amplificador operacional es ideal y por lo tanto no introduce polos adicionales en la respuesta del filtro:

$$\begin{aligned} V_i sC_1 + V_o \frac{1}{R_1} &= V_x \left(sC_1 + sC_2 + \frac{1}{R_1} \right) - V_+(sC_2) \\ 0 &= -V_x(sC_2) + V_+ \left(\frac{1}{R_2} + sC_2 \right) \end{aligned}$$

Resolviendo para V_+ y tomando $C_1 = C_2 = C$, se obtiene:

$$V_+ = \frac{V_i(s^2C^2) + V_o \left(\frac{sC}{R_1} \right)}{s^2C^2 + sC \left(\frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{R_1R_2}}$$

Identificamos los siguientes términos:

$$\begin{aligned} D &= s^2C^2 + sC \left(\frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{R_1R_2} \\ N_{ff} &= s^2C^2, \quad N_{fb} = \frac{sC}{R_1} \end{aligned}$$

La ganancia del amplificador es:

$$k = \frac{R_a + R_b}{R_a}$$

y la función de transferencia del filtro viene dada por:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{k N_{ff}}{D - k N_{fb}} = \frac{k s^2C^2}{s^2C^2 + sC \left(\frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{R_1R_2} - k \frac{sC}{R_1}}$$

Igualando esta expresión con la función de transferencia deseada:

$$\frac{s^2}{s^2 + 1896s + 2,35 \times 10^7} = \frac{k s^2}{s^2 + s \frac{1}{C} \left(\frac{2}{R_2} + \frac{1-k}{R_1} \right) + \frac{1}{R_1R_2C^2}}$$

Por lo tanto, la solución del sistema (asumiendo $k = 1$) queda determinada por los siguientes componentes pasivos:

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ F} \longrightarrow 1 \mu\text{F}$$

$$R_1 = 40,34 \mu\Omega \longrightarrow 40,34 \Omega$$

$$R_2 = 1,06 \text{ m}\Omega \longrightarrow 1,06 \text{ k}\Omega$$

Dado que $k = 1$, el amplificador operacional debe configurarse como un *buffer* para obtener la ganancia unitaria requerida.

3.1.2. Simulaciones

Simularemos el siguiente circuito utilizando la topología especificada y los valores de los elementos pasivos previamente calculados:

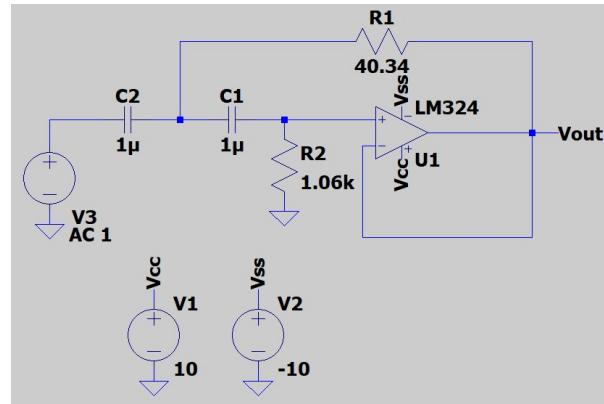


Figura 11: Circuito simulado

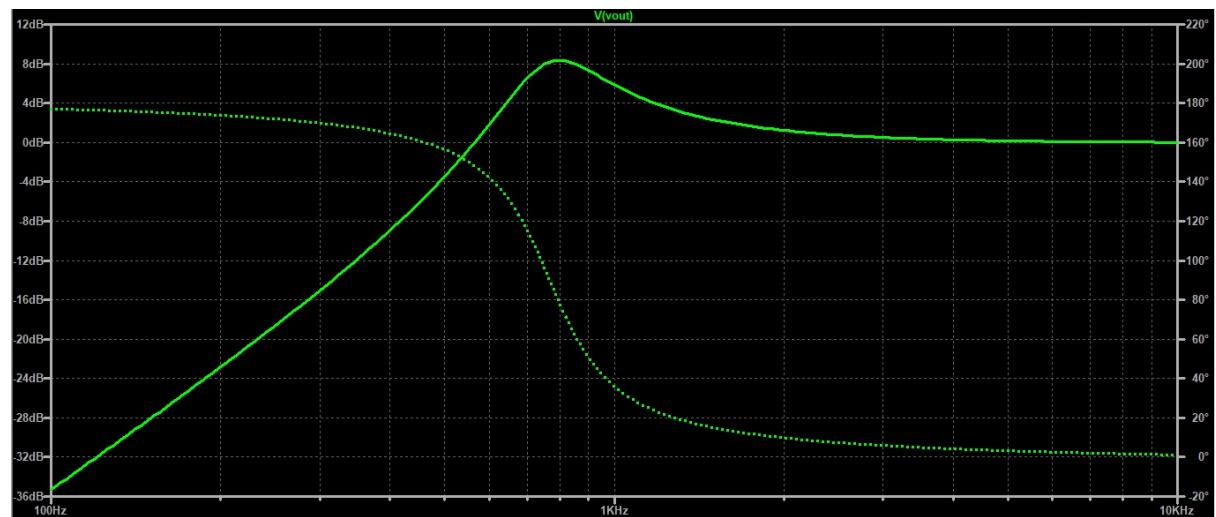


Figura 12: Diagrama de Bode Pasa Alto

3.2. Pasa Bajo

3.2.1. Síntesis

Para sintetizar esta biquadrática se utilizará nuevamente la topología de realimentación positiva tipo *Sallen-Key*. La función de transferencia que se desea obtener es:

$$H(s) = \frac{1,642 \times 10^7}{s^2 + 3184 s + 6,632 \times 10^7}$$

El circuito modelo a emplear para su diseño es el siguiente:

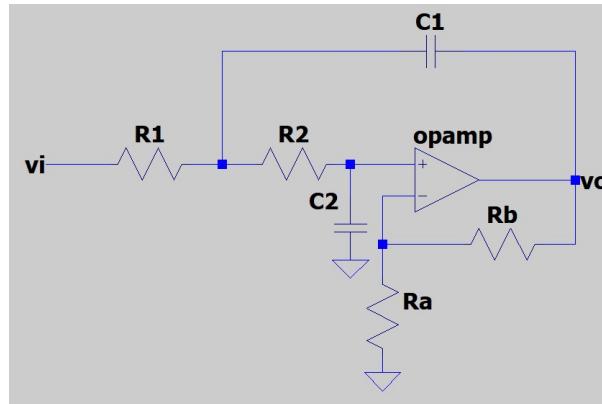


Figura 13: Filtro Pasa Bajo Sallen Key

Con este circuito, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones a partir de la red mostrada, considerando que el amplificador operacional es ideal y, por lo tanto, no introduce polos que modifiquen la respuesta del filtro.

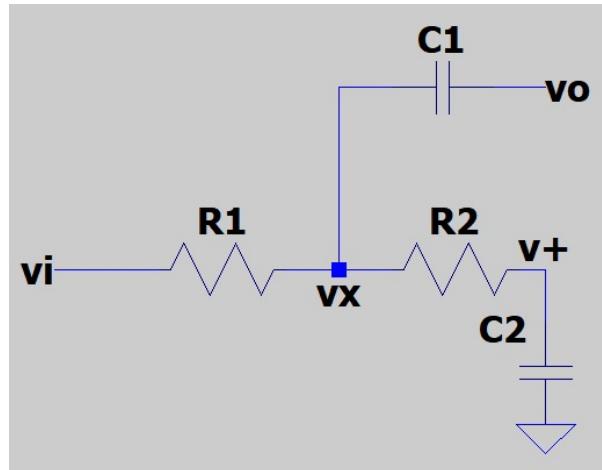


Figura 14: Circuito Pasa Bajo

A partir del circuito propuesto, y aplicando el método de nodos bajo la hipótesis de que el amplificador operacional es ideal, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones considerando $C_1 = C_2 = C$ y $R_1 = R_2 = R$:

$$\begin{aligned}\frac{V_i}{R} + V_o sC &= V_x \left(\frac{2}{R} + sC \right) - V^+ \left(\frac{1}{R} \right) \\ 0 &= -V_x \left(\frac{1}{R} \right) + V^+ \left(\frac{1}{R} + sC \right)\end{aligned}$$

Resolviendo para V^+ , se obtiene:

$$V^+ = \frac{V_i + V_o sCR}{s^2 C^2 R^2 + 3sCR + 1}$$

De esta expresión podemos identificar:

$$D = s^2 C^2 R^2 + 3sCR + 1, \quad N_{ff} = 1, \quad N_{fb} = sCR$$

La ganancia en continua del amplificador es:

$$k = \frac{R_a + R_b}{R_a}$$

Por lo tanto, la función de transferencia del filtro queda:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{k N_{ff}}{D - k N_{fb}} = \frac{k}{s^2 C^2 R^2 + sCR(3 - k) + 1}$$

Finalmente, igualando con la función de transferencia deseada:

$$\begin{aligned}\frac{1,642 \times 10^7}{s^2 + 3184 s + 6,632 \times 10^7} &= \frac{k \frac{1}{C^2 R^2}}{s^2 + s \frac{3 - k}{CR} + \frac{1}{C^2 R^2}} \\ \boxed{\frac{1,642 \times 10^7}{s^2 + 3184 s + 6,632 \times 10^7}} &= \frac{k / (C^2 R^2)}{s^2 + s \frac{3 - k}{CR} + \frac{1}{C^2 R^2}}\end{aligned}$$

A partir de los resultados obtenidos:

$$CR = 122,79 \times 10^{-6}, \quad k = 2,609$$

Si fijamos $C = 1 \text{ F}$ para luego realizar el escalado correspondiente, entonces:

$$C_1 = C_2 = 1 \text{ F} \longrightarrow 0,1 \mu\text{F}$$

$$R_1 = R_2 = 122,79 \Omega \longrightarrow 1,23 \text{ k}\Omega$$

Esto nos dará la siguiente función de transferencia, la cual luego deberá ser escalada para obtener la esperada:

$$\frac{173,01 \times 10^6}{s^2 + 3184 s + 6,632 \times 10^7}$$

El factor de escala requerido es:

$$G = 0,094908$$

Este factor puede implementarse mediante un divisor resistivo en la entrada de la red. Para ello, basta añadir una resistencia adicional y aplicar el teorema de Thevenin, considerando que:

$$R_1 = R_3 \parallel R_4 = 1,23 \text{ k}\Omega \quad \text{y} \quad G = \frac{R_4}{R_4 + R_3}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$R_3 = 1,36 \text{ k}\Omega \quad R_4 = 12,94 \text{ k}\Omega$$

Además, para obtener el valor de k deseado, deben utilizarse las siguientes resistencias:

$$R_a = 621,5 \Omega \quad R_b = 1 \text{ k}\Omega$$

3.2.2. Simulaciones

Simularemos el siguiente circuito utilizando la topología especificada y los valores de los elementos pasivos previamente calculados:

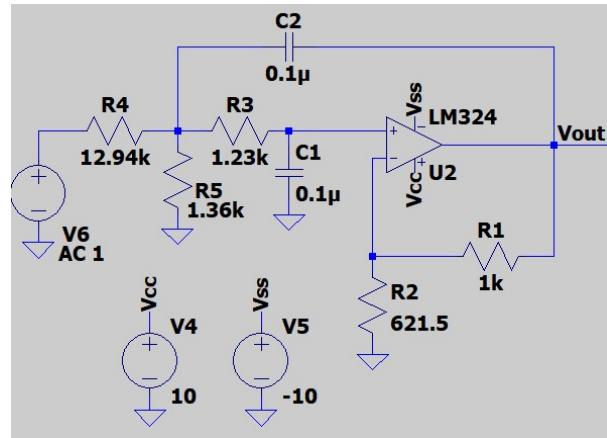


Figura 15: Circuito simulado

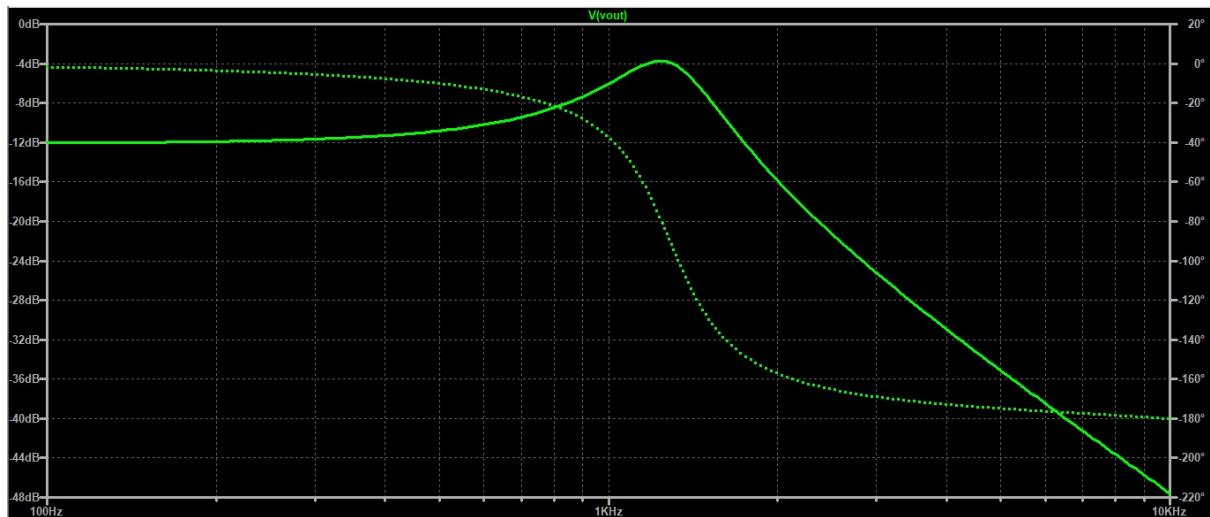


Figura 16: Diagrama de Bode Pasa Bajo

3.3. Filtro Completo

Para la implementación completa del filtro, basta con conectar ambas biquadráticas previamente calculadas en cascada, es decir, la salida de la primera etapa a la entrada de la segunda.

3.3.1. Simulaciones

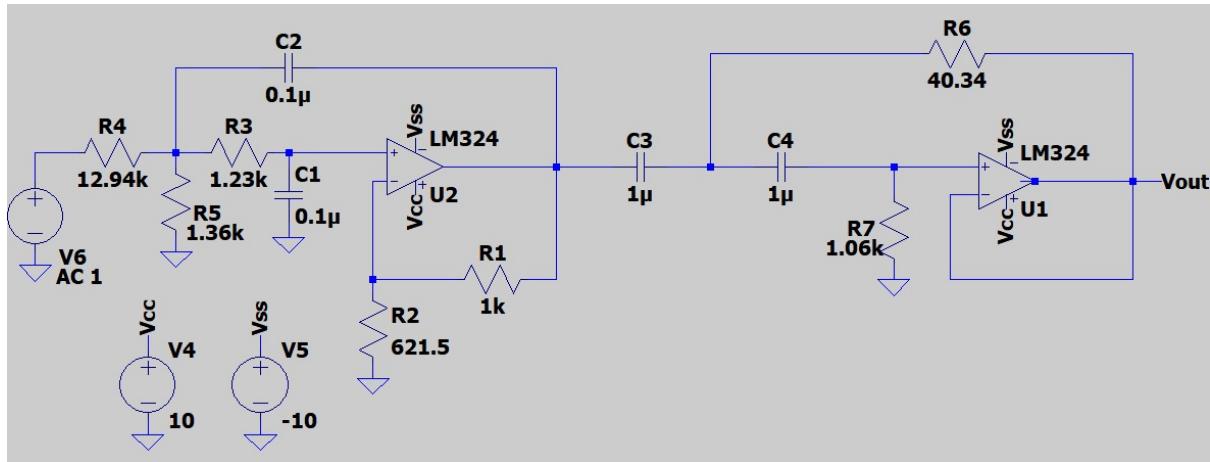


Figura 17: Circuito simulado

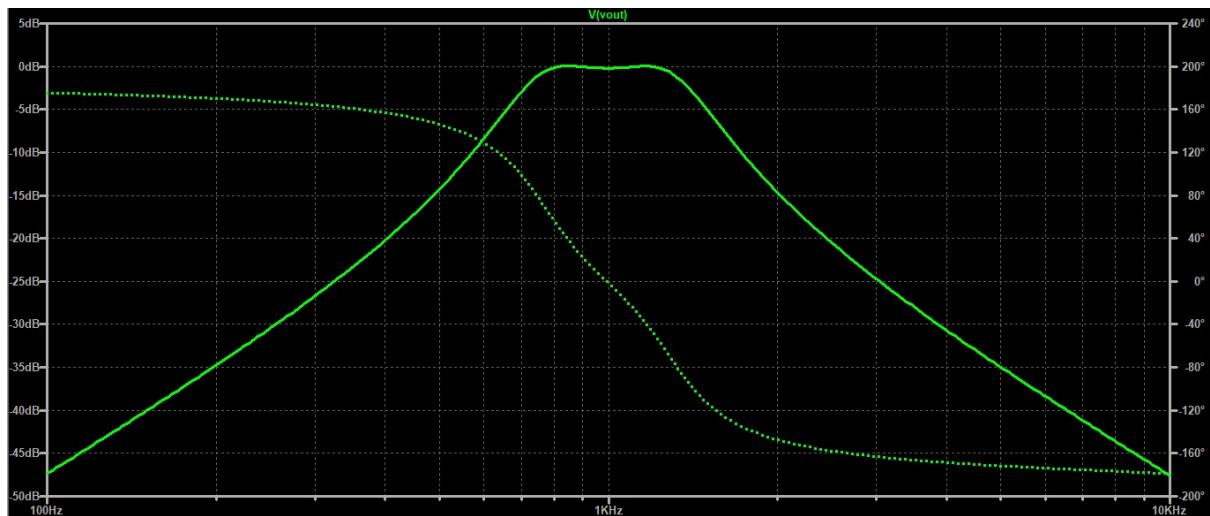


Figura 18: Diagrama de Bode Pasa Banda

Realizando un ajuste en las frecuencias de interés y determinando los valores mediante cursores, se obtuvieron los siguientes resultados:

- 800 Hz: -0,132 dB
- 1250 Hz: -0,290 dB
- 200 Hz: -34,76 dB
- 5000 Hz: -34,98 dB

Con estos valores puede verificarse que el filtro cumple con las especificaciones establecidas.

3.3.2. Sensibilidad

Para calcular la sensibilidad de la frecuencia de los polos ω_p y del ancho de banda $\left(\frac{\omega_p}{Q_p}\right)$, se utilizan las expresiones obtenidas previamente para cada una de las biquadráticas.

Análisis del Filtro Pasa Bajo

La biquadrática pasa bajos está dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{\omega_p^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2} = \frac{k \frac{1}{C^2 R^2}}{s^2 + s \frac{3-k}{CR} + \frac{1}{C^2 R^2}}$$

A partir de esta expresión se obtiene:

$$\omega_p = \frac{1}{CR}, \quad \frac{\omega_p}{Q_p} = \frac{3-k}{CR}, \quad k = \frac{R_a + R_b}{R_a}.$$

Las sensibilidades quedan entonces:

$$S_{\omega_p}^R = \frac{R \partial \omega_p}{\omega_p \partial R} = -1, \quad S_{\omega_p}^C = \frac{C \partial \omega_p}{\omega_p \partial C} = -1, \quad S_{\omega_p}^k = \frac{k \partial \omega_p}{\omega_p \partial k} = 0.$$

Para el ancho de banda:

$$S_{\omega_p/Q_p}^R = \frac{R \partial (\omega_p/Q_p)}{(\omega_p/Q_p) \partial R} = 0, \quad S_{\omega_p/Q_p}^C = \frac{C \partial (\omega_p/Q_p)}{(\omega_p/Q_p) \partial C} = 0,$$

$$S_{\omega_p/Q_p}^k = \frac{k \partial (\omega_p/Q_p)}{(\omega_p/Q_p) \partial k} = \frac{-k}{k-3} = 6,67.$$

Finalmente, se elaborará una tabla para analizar las variaciones y ajustar las tolerancias de los componentes, asegurando la mínima desviación posible. También se seleccionarán valores comerciales adecuados para cada componente.

| Elemento | Sensibilidad | | Tolerancia | Efecto Total | |
|--------------|----------------|--------------------|------------|--------------|----------------|
| | S_{ω_p} | S_{ω_p/Q_p} | | ω_p | ω_p/Q_p |
| R | -1 | 0 | 5 % | 5,00 % | 0,00 % |
| C | -1 | 0 | 5 % | 5,00 % | 0,00 % |
| k | 0 | 6,67 | 1 % | 0,00 % | 6,67 % |
| TOTAL | | | | 10,00 % | 6,67 % |

Cuadro 1: Variación de los parámetros del filtro Pasa Bajo

Análisis del Filtro Pasa Alto

La función de transferencia general del filtro pasa alto puede expresarse como:

$$\frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2} = \frac{k s^2}{s^2 + s \frac{1}{C} \left(\frac{2}{R_2} + \frac{1-k}{R_1} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C^2}}$$

A partir de esta expresión, se identifican los parámetros del filtro:

$$\omega_p = \frac{1}{C \sqrt{R_1 R_2}}$$

$$\frac{\omega_p}{Q_p} = \frac{2R_1 + R_2(1-k)}{C R_1 R_2}$$

donde el factor de ganancia se define como:

$$k = \frac{R_a + R_b}{R_a}$$

A continuación, se determinan las sensibilidades de los parámetros respecto de cada componente:

$$S_{\omega_p}^{R_1} = \frac{R_1}{\omega_p} \frac{\partial \omega_p}{\partial R_1} = -0,5$$

$$S_{\omega_p}^{R_2} = -0,5 \quad S_{\omega_p}^C = -1 \quad S_{\omega_p}^k = 0$$

Para el término de amortiguamiento:

$$S_{\omega_p/Q_p}^{R_1} = \frac{R_1}{\omega_p/Q_p} \frac{\partial (\omega_p/Q_p)}{\partial R_1} = \frac{R_2(k-1)}{2R_1 - (k-1)R_2} = 0$$

$$S_{\omega_p/Q_p}^{R_2} = \frac{2R_1}{R_2(k-1) - 2R_1} = -1$$

$$S_{\omega_p/Q_p}^C = -1$$

$$S_{\omega_p/Q_p}^k = \frac{k R_2}{k R_2 - 2(R_1 + 0,5 R_2)} = -13,076$$

Con estos resultados se elaborará una tabla resumen de tolerancias y efectos totales sobre los parámetros del filtro.

| Elemento | Sensibilidad | | Tolerancia | Efecto Total | |
|-----------------|---------------------|--------------------|-------------------|---------------------|----------------|
| | S_{ω_p} | S_{ω_p/Q_p} | | ω_p | ω_p/Q_p |
| R1 | -0,5 | 0 | 5 % | 2,50 % | 0,00 % |
| R2 | -0,5 | -1 | 5 % | 2,50 % | 5,00 % |
| C | -1 | -1 | 1 % | 1,00 % | 1,00 % |
| k | 0 | -13,076 | 1 % | 0,00 % | 13,08 % |
| TOTAL | | | | 6,00 % | 19,08 % |

Cuadro 2: Variación de los parámetros del filtro Pasa Alto

3.3.3. Análisis de Montecarlo

Para este análisis se emplearán los valores comerciales de los componentes pasivos, considerando las tolerancias especificadas previamente.

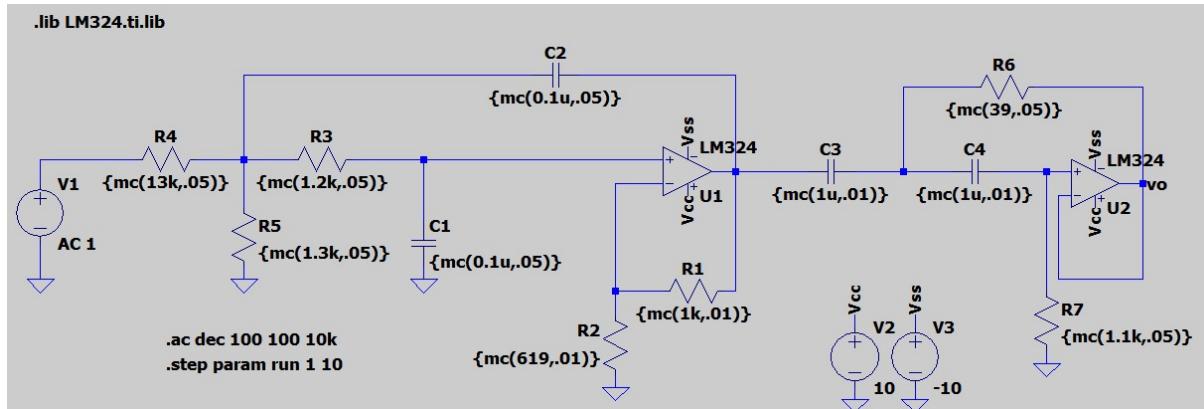


Figura 19: Circuito simulado

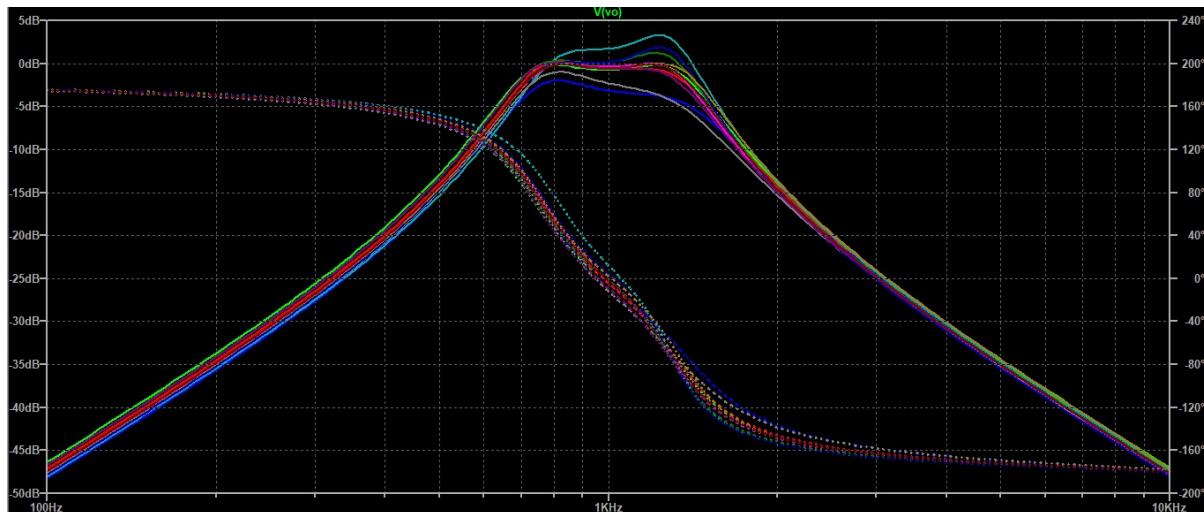


Figura 20: Simulación de Montecarlo

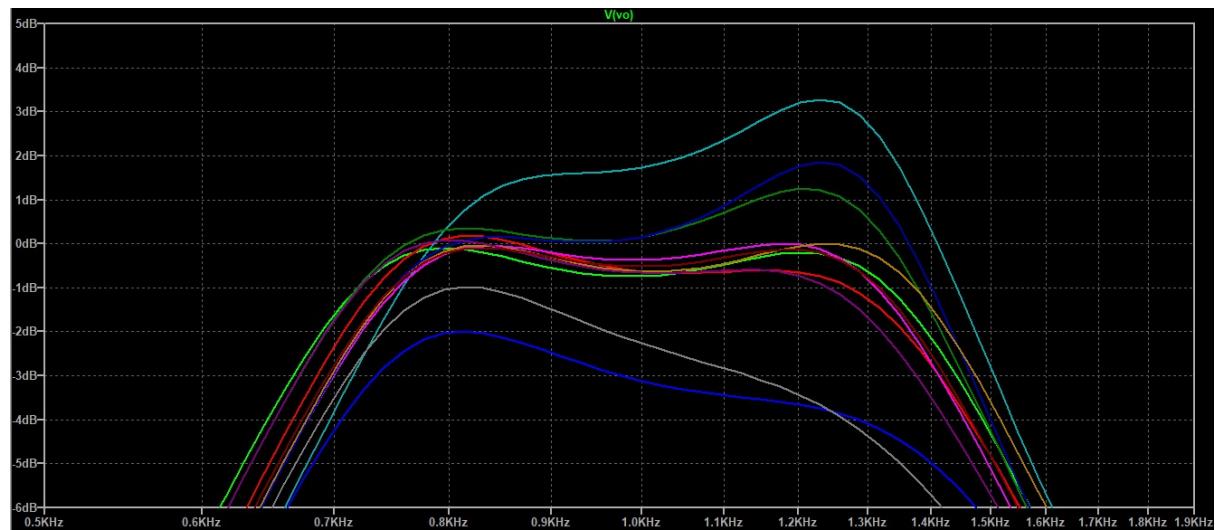


Figura 21: Simulación de Montecarlo con zoom en la banda de paso

3.3.4. Mediciones

Se implementó el circuito físicamente utilizando los valores más cercanos a los calculados. Posteriormente, se realizaron mediciones experimentales con el fin de graficar su respuesta en frecuencia.

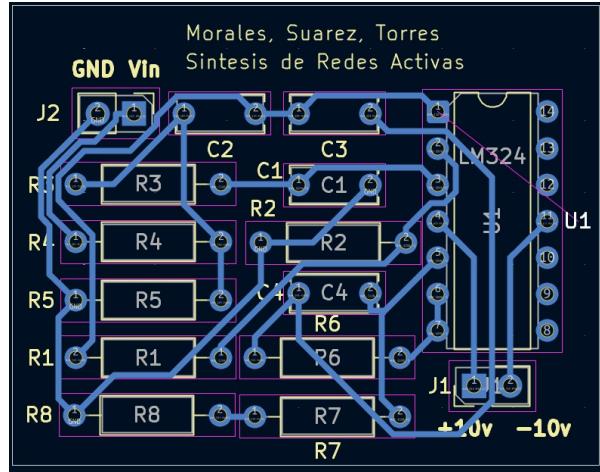


Figura 22: Diseño del circuito

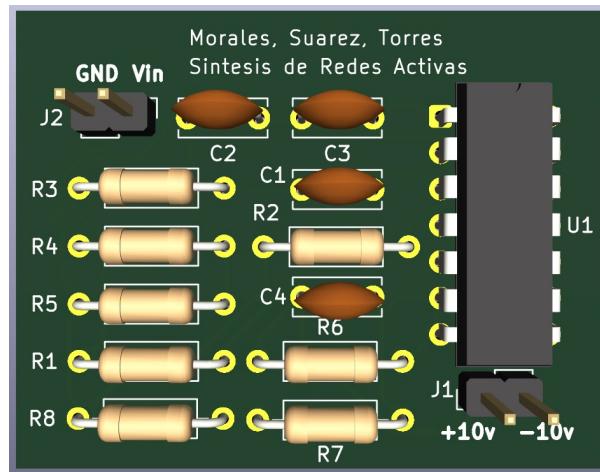


Figura 23: Diseño del circuito

Como puede observarse, algunos valores de resistencias no pudieron conseguirse con exactitud, por lo que la respuesta medida difiere ligeramente de la simulada.

Aplicando una tensión de entrada sinusoidal de 2 V_{pap} y variando la frecuencia desde 100 Hz hasta 10 kHz, se obtuvo la siguiente señal de salida. A partir de dichas mediciones se construyó el gráfico de la respuesta en frecuencia del filtro.

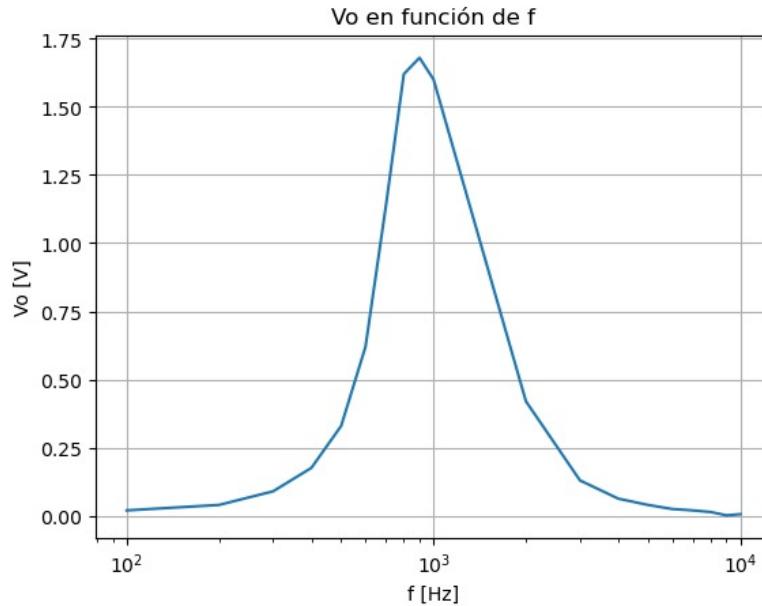


Figura 24: Tensión de salida en función de la frecuencia

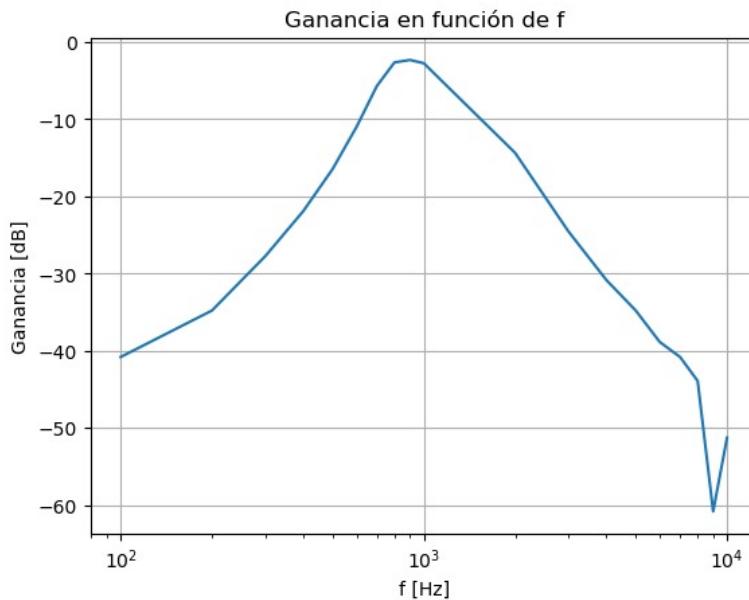


Figura 25: Respuesta en magnitud del filtro