



Universidad Nacional de Córdoba  
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Sistemas de Control 2  
Trabajo Práctico N°1

Docente:  
Dr. Ing. Julián Pucheta

Autor:  
Esteban Suarez

# Contents

<b>1</b>	<b>Desarrollo</b>	<b>2</b>
1.1	Caso de Estudio 1 . . . . .	2
1.1.1	Item 1 . . . . .	3
1.1.2	Item 2 . . . . .	5
1.1.3	Item 3 . . . . .	8
1.1.4	Desafíos enfrentados y lecciones aprendidas . . . . .	8
1.1.5	Identificación de logros . . . . .	9
1.2	Caso de Estudio 2 . . . . .	10
1.2.1	Item 4 . . . . .	11
1.2.2	Item 5 . . . . .	13
1.2.3	Item 6 . . . . .	15
1.2.4	Desafíos enfrentados y lecciones aprendidas . . . . .	17
1.2.5	Identificación de logros . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>19</b>
<b>3</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Sitios Web</b>	<b>20</b>
<b>5</b>	<b>Repositorio GitHub</b>	<b>20</b>

# 1 Desarrollo

## 1.1 Caso de Estudio 1

Para este análisis, se propone un sistema RLC cuya evolución temporal puede describirse mediante un modelo en variables de estado, obtenido directamente de las ecuaciones diferenciales derivadas de la ley de tensiones de Kirchhoff.

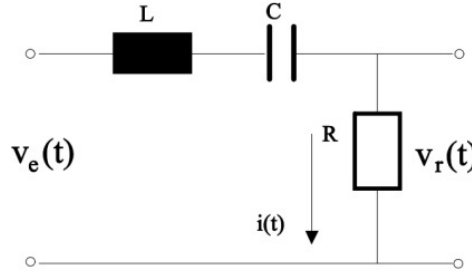


Figure 1: Diagrama circuital

Mediante la Ley de Kirchhoff se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} v_e(t) &= v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \\ v_e(t) &= i \cdot R + L \cdot \frac{di}{dt} + v_C(t) \end{aligned}$$

A su vez, también es posible afirmar lo siguiente:

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$$

Además, es posible definir las siguientes variables de estado:

$$x_1 = i(t) \quad x_2 = v_c(t)$$

Por lo tanto, la representación en el espacio de estados queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_e \\ y &= \begin{bmatrix} R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cabe aclarar que la salida  $y$  se corresponde con la tensión sobre la resistencia,  $v_R(t)$ . Con base en la modelización del circuito y su expresión en el espacio de estados, se establecen las siguientes consignas técnicas para su análisis y resolución.

### 1.1.1 Ítem 1

Este ítem consiste en lo siguiente: se asignan los siguientes valores a los parámetros del sistema:  $R = 220 \Omega$ ,  $L = 500 \text{ mH}$ , y  $C = 2,2 \mu\text{F}$ . Se solicita obtener simulaciones que permitan analizar la dinámica del sistema ante una entrada de tensión escalón de 12 V, la cual cambia de signo cada 10 ms. La Función de Transferencia para este sistema es la siguiente:

$$G(s) = \frac{440s}{s^2 + 440s + 9,091 \cdot 10^5}$$

El cálculo de la función de transferencia es crucial para analizar el comportamiento dinámico del sistema, ya que permite obtener información sobre el tiempo de respuesta tanto rápido como lento. La respuesta rápida es fundamental para seleccionar el paso o el tiempo de integración adecuados al usar el método de Euler, que se aplica para aproximar la respuesta del sistema. En cambio, la respuesta lenta es útil para estimar el tiempo necesario para que el sistema llegue a su estado estable, lo que a su vez ayuda a determinar un tiempo de simulación que capture correctamente toda la dinámica del sistema en cuestión. Entonces, los polos calculados para este sistema fueron los siguientes:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -2,2 \times 10^2 + 9,2773 \times 10^2 i \\ \lambda_2 &= -2,2 \times 10^2 - 9,2773 \times 10^2 i\end{aligned}$$

Las dinámicas rápida y lenta resultantes fueron las siguientes:

$$\begin{aligned}t_R &= \frac{\ln(0.95)}{\text{real}(\lambda_2)} = 233,51 \times 10^{-6} [\text{s}] \\ t_L &= \frac{\ln(0.05)}{\text{real}(\lambda_1)} = 13,6 \times 10^{-3} [\text{s}]\end{aligned}$$

Para garantizar una representación precisa de la respuesta del sistema, se determina un tiempo de integración que es cien veces menor que el de la dinámica rápida (aunque podría ser 10 también).

Por otro lado, si bien la dinámica lenta dictamina que el tiempo de establecimiento puede rondar los 68 ms, durante la simulación nunca va a ser alcanzada esta condición, dado que la tensión de entrada va a estar conmutando cada 10 ms. Dado que la conmutación va a ocurrir cada 10 ms, tomaremos un tiempo total de simulación de 30 ms, para poder capturar 3 ciclos de la señal de entrada.

Para proceder con la simulación del sistema, es necesario establecer tanto el punto de operación como las condiciones iniciales. En este caso:

$$\mathbf{x}_{op} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i_0 = 0, \quad v_{c0} = 0$$

Entonces ahora que ya están definidos todos los parámetros, es posible observar los siguientes comportamientos como resultado de la simulación:

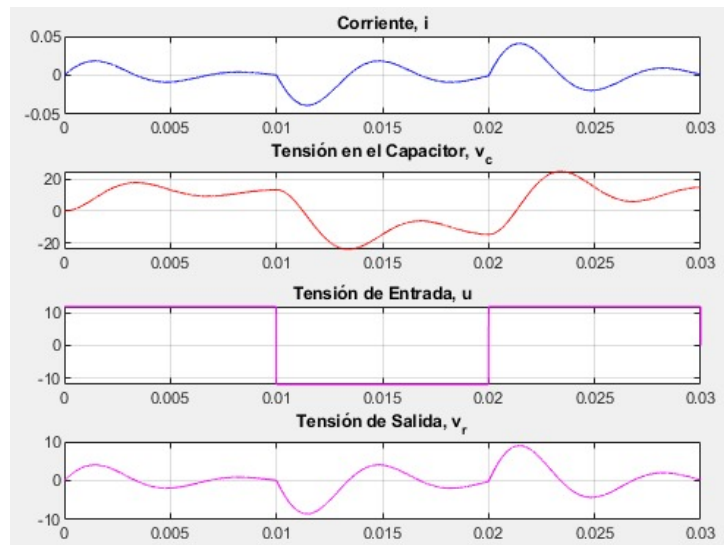


Figure 2: Señales del circuito

Del gráfico es posible extraer las siguientes conclusiones:

1. La corriente total del circuito comienza siendo nula, luego alcanza un valor máximo (que es un instante de tiempo donde el capacitor no se ha llegado a cargar y el inductor ya empieza a presentar buenas características conductivas), y posteriormente tiende a anularse debido a que el capacitor empieza a adquirir una cantidad importante de carga.
2. En el primer ciclo, la tensión en el capacitor comienza siendo nula para posteriormente tender a estabilizarse en un valor cercano a los 12V. Ahora bien, en los siguientes ciclos sucede que al cambiar la polaridad de la tensión de entrada, la tensión en el capacitor no arranca desde un valor nulo debido a la existencia de condiciones iniciales no nulas en su comportamiento, para luego tender al valor de la tensión de alimentación.
3. En todos los ciclos sucede que la tensión sobre el resistor comienza siendo nula, luego se incrementa (debido al comportamiento transitorio del capacitor y el inductor), y luego tiende a cero debido a que toda la tensión comienza a caer en el capacitor.

### 1.1.2 Ítem 2

Este ítem consiste en lo siguiente: en el archivo `Curvas_Medidas_RLC_2025.xls` (datos en la hoja 1 y etiquetas en la hoja 2) están las series de datos que sirven para deducir los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$  del circuito. Emplear el método de la respuesta al escalón, tomando como salida la tensión en el capacitor.

Para determinar los valores de los componentes  $R$ ,  $L$  y  $C$ , es posible valerse del método de Chen, el cual permite extraer la función de transferencia de un sistema a partir de su respuesta al ingreso de un escalón unitario. En este caso particular, se analiza la tensión de salida  $v_R(t)$  en función de la entrada  $v_e(t)$ .

Dado que los datos experimentales registrados en las tablas corresponden a una entrada de 12 V, es necesario normalizar la señal de salida dividiendo sus valores por dicho voltaje. De este modo, los resultados obtenidos se ajustarán correctamente a las condiciones requeridas por el método, y podrán compararse adecuadamente con las Curvas Medidas.

Desde el punto de vista físico, un circuito RLC responde como un sistema de segundo orden. En base a la forma de la curva observada en el archivo de Excel, puede inferirse que el comportamiento del circuito se encuadra dentro del caso sobreamortiguado, lo cual implica la presencia de dos polos reales, distintos y negativos.

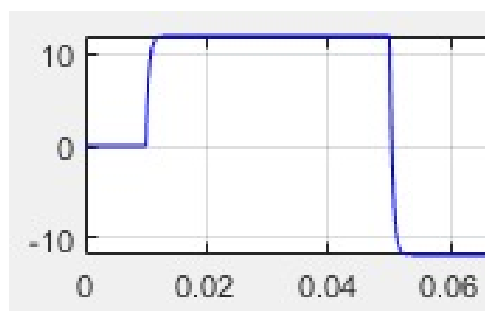


Figure 3: Señal de tensión sobre el capacitor

Entonces asumiendo una Función de Transferencia del siguiente tipo, el método de Chen resulta ser una herramienta que permite calcular las constantes de tiempo  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  ( $T_3$  nulo en este caso particular) y la ganancia  $K$ .

Ahora bien, el método parte de tomar tres puntos de la gráfica que deben cumplir con la premisa de ser equidistantes entre sí:

$$\begin{aligned} x_1 &= (t_1, y(t_1)) \\ x_2 &= (2t_1, y(2t_1)) \\ x_3 &= (3t_1, y(3t_1)) \end{aligned}$$

Para obtener los parámetros del circuito, se analizan tanto la respuesta del voltaje en el capacitor como la de la corriente, con el fin de obtener las funciones de transferencia  $\frac{V_c(s)}{V_e(s)}$  y  $\frac{I(s)}{V_e(s)}$ . Esta estrategia permite identificar cada uno de los elementos del sistema trabajando en el dominio de Laplace.

Aunque bastaría con la función  $\frac{V_c(s)}{V_e(s)}$  para determinar todos los parámetros, se debe tener en cuenta que en el instante en que la corriente alcanza su valor máximo, esta se encuentra únicamente limitada por la resistencia del circuito. Aprovechando este hecho, se puede calcular el valor de  $R$  mediante la Ley de Ohm utilizando la tensión en ese punto. A partir de este dato, es posible formular un sistema de ecuaciones que permita resolver los demás componentes del circuito.

En este trabajo, se opta por calcular ambas funciones de transferencia. Las coordenadas seleccionadas sobre las curvas, utilizadas para el análisis, se muestran en las imágenes que siguen.

$$\begin{aligned} x_{v1} &= (0.0101, 0.1836) \\ x_{v2} &= (0.0102, 0.3367) \\ x_{v3} &= (0.0103, 0.4610) \end{aligned}$$

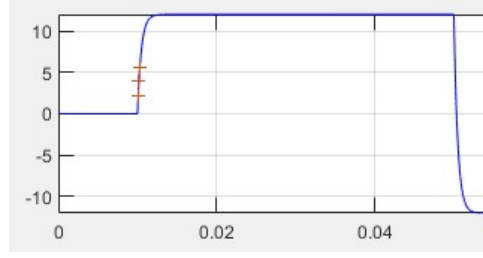


Figure 4: Puntos tomados sobre la señal  $v_c$

Entonces se obtuvieron las siguientes funciones de transferencia:

$$G_v(s) = \frac{1}{2.821 \cdot 10^{-9}s^2 + 0.0004875s + 1} \approx \frac{K}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}$$

$$G_i(s) = \frac{2.177 \cdot 10^{-6}s}{2.821 \cdot 10^{-9}s^2 + 0.0004875s + 1} \approx \frac{s \cdot C}{LC \cdot s^2 + RC \cdot s + 1}$$

Ahora bien, cabe aclarar que solamente  $G_v(s)$  fue calculada mediante el método de Chen, ya que para  $G_i(s)$  sabemos que tiene el mismo denominador por tratarse de la misma entrada que para  $G_v(s)$ . En cuanto al numerador de  $G_i(s)$ , sabemos que es de la forma  $s \cdot C$ , con lo cual solo queda calcular el valor de la capacidad  $C$  mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{dV_c(t)}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

Entonces, lo único que queda es calcular la variación de  $v_c(t)$  y  $t$  entre dos instantes de la tabla, calcular  $i(t)$  en el instante final y luego despejar la capacidad  $C$ , que resulta ser igual al siguiente valor:

$$C = 2.1770 \times 10^{-6} \text{ F}$$

Además, la ganancia resulta ser unitaria:

$$K = 1$$

Entonces ahora que se conoce el valor de  $C$ , y por simple observación de los denominadores de las funciones de transferencia, es posible despejar los valores de  $R$  y  $L$ :

$$R = 223.9408 \Omega$$

$$L = 1.3 \times 10^{-3} \text{ H}$$

Ahora que se conocen los parámetros que caracterizan al sistema, se procedió a simular su comportamiento con la finalidad de comparar los resultados con los datos provistos por la tabla de datos, resultando en las siguientes gráficas:

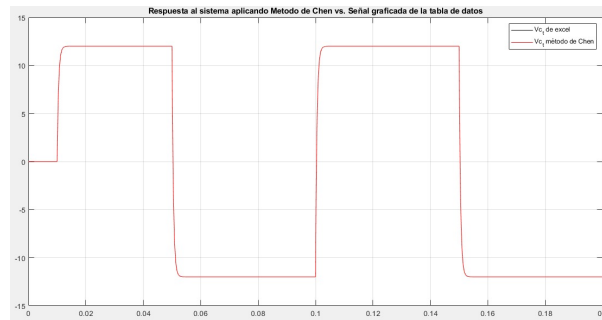


Figure 5: Respuesta del sistema (para  $v_c(t)$ ) aplicando Chen vs. Señal graficada de la tabla de datos

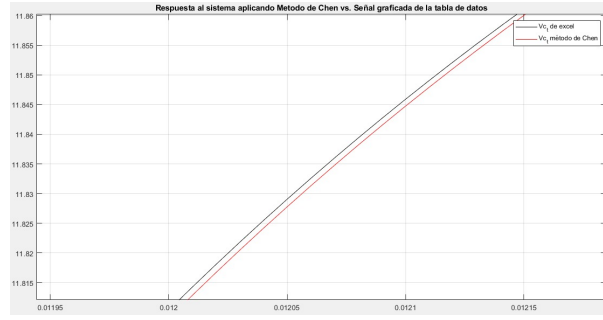


Figure 6: Zoom sobre el gráfico comparativo de  $v_c(t)$  para ver las diferencias entre las señales

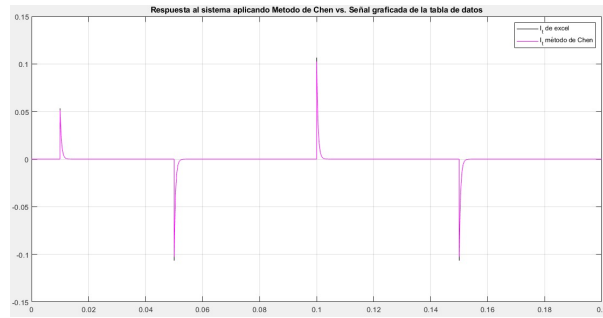


Figure 7: Respuesta del sistema (para  $i(t)$ ) aplicando Chen vs. Señal graficada de la tabla de datos

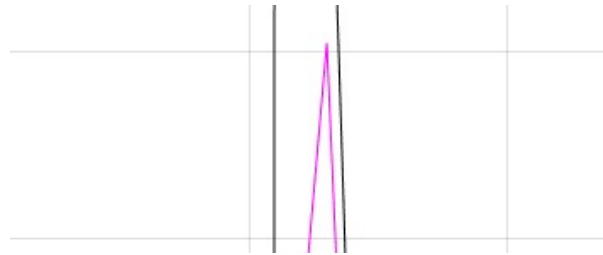


Figure 8: Zoom sobre el gráfico comparativo de  $i(t)$  para ver las diferencias entre las señales

Como puede verse, el análisis comparativo entre las respuestas simuladas a partir del modelo basado en las funciones de transferencia obtenidas y los datos experimentales consignados en la tabla revela una discrepancia mínima entre ambas. Esta diferencia resulta lo suficientemente acotada como para considerar que el error de modelado se mantiene dentro de un rango aceptable, validando así la adecuación del sistema propuesto.



### 1.1.3 Ítem 3

Este ítem consiste en lo siguiente: una vez determinados los parámetros  $R$ ,  $L$  y  $C$ , emplear la serie de corriente desde 0,05 segundos en adelante para validar el resultado superponiendo las gráficas.

Como etapa complementaria de validación, se procedió al modelado del sistema en el dominio del espacio de estados, empleando los valores de  $R$ ,  $L$  y  $C$  previamente determinados. A partir de este modelo, se generaron las curvas correspondientes a la corriente, las cuales fueron posteriormente comparadas con la respuesta experimental provista.

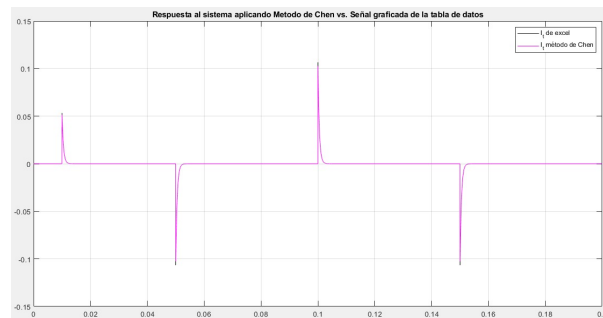


Figure 9: Respuesta del sistema (para  $i(t)$ ) aplicando Chen vs. Señal graficada de la tabla de datos

Como puede verse, la diferencia entre la respuesta simulada y la medida es prácticamente insignificante.

### 1.1.4 Desafíos enfrentados y lecciones aprendidas

A continuación se enumeran los desafíos enfrentados durante la resolución de esta primera mitad del trabajo práctico:

- Uno de los principales desafíos fue la familiarización con herramientas informáticas específicas. Si bien se poseía un conocimiento teórico básico sobre el entorno de MATLAB, la experiencia práctica era limitada. Fue necesario invertir tiempo en la exploración de sus funcionalidades, estructuras de programación y capacidades de simulación, lo cual resultó fundamental para el cumplimiento de los objetivos propuestos.
- Por otro lado, se identificaron limitaciones en el rendimiento del hardware disponible. Las primeras ejecuciones del modelo se vieron afectadas por tiempos de simulación prolongados, lo que generó incertidumbre sobre la validez del código desarrollado. Tras un proceso de depuración y ajustes, se concluyó que el inconveniente se debía al tiempo de simulación seleccionado. La reducción de este parámetro permitió una ejecución más ágil del programa, y evidenció la importancia de considerar las capacidades del equipo al momento de realizar tareas computacionalmente exigentes.
- Adicionalmente, un desafío significativo fue la interpretación y validación de los resultados obtenidos a partir del modelo. La comparación entre las curvas simuladas y los datos experimentales exigió un análisis crítico, con el objetivo de establecer si las discrepancias observadas eran atribuibles a errores de modelado o a aproximaciones asumidas.

Por otro lado, a continuación se enumeran las lecciones aprendidas durante la resolución de esta primera mitad del trabajo práctico:

- Durante el desarrollo del trabajo se implementaron diversas metodologías de modelado con el objetivo de representar adecuadamente el comportamiento dinámico del sistema bajo estudio. Uno de los enfoques aplicados fue la utilización del método de Chen, una técnica eficaz para la identificación de sistemas de segundo orden a partir de la respuesta al escalón. Este procedimiento permitió ajustar un modelo teórico que reproduce con alta fidelidad la dinámica observada experimentalmente.
- Asimismo, se abordó el modelado del sistema como un proceso monovariable en espacio de estados, lo que representó una instancia significativa de aprendizaje. Este enfoque permitió no solo establecer una representación estructurada del sistema, sino también profundizar en la comprensión del análisis dinámico desde una perspectiva matricial, facilitando su extensión a casos más complejos en estudios futuros.
- A partir de este modelo en espacio de estados, se procedió al cálculo de la evolución temporal del proceso de interés, simulando su respuesta ante distintas condiciones iniciales o entradas. Esta etapa no solo permitió validar el modelo frente a los datos experimentales, sino que también ofreció una herramienta versátil para analizar el sistema en diferentes escenarios, contribuyendo a la toma de decisiones fundamentadas en el comportamiento dinámico previsto.

#### **1.1.5 Identificación de logros**

A continuación se enumeran los logros alcanzados durante la resolución de esta primera mitad del trabajo práctico:

- ID1.1.1.3 Calcula el modelo lineal de un proceso estable monovariable a partir de su respuesta al escalón.
- ID1.1.1.4 Selecciona las variables de estado de un proceso lineal para generar una expresión matricial lineal.
- ID1.1.1.5 Infiere la evolución temporal de procesos reales representados en variables de estado.

## 1.2 Caso de Estudio 2

En el presente caso de estudio se analiza un motor de corriente continua sometido a un torque de carga no nulo. Su comportamiento puede representarse mediante un modelo equivalente en forma de circuito, tal como se ilustra en la figura que se presenta a continuación.

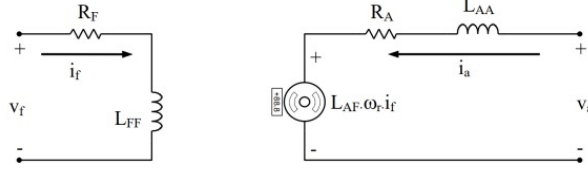


Figure 10: Modelo circuital equivalente

A partir del modelado del motor, es posible obtener las ecuaciones que describen su comportamiento dinámico:

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R_A}{L_{AA}} \cdot i_a - \frac{K_m}{L_{AA}} \cdot \omega_r + \frac{1}{L_{AA}} \cdot V_a \quad (1)$$

$$\frac{d\omega_r}{dt} = \frac{K_i}{J} \cdot i_a - \frac{B_m}{J} \cdot \omega_r - \frac{1}{J} \cdot T_L \quad (2)$$

$$\frac{d\theta_t}{dt} = \omega_r \quad (3)$$

De manera análoga a lo realizado en el Caso de Estudio I, es posible llevar a cabo un análisis en el espacio de estados.

A partir del conjunto de ecuaciones diferenciales planteadas, se observa la presencia de tres integradores en el sistema, lo cual justifica la definición inicial de tres variables de estado:

$$x_1 = i_a$$

$$x_2 = \omega_r$$

$$x_3 = \theta_t$$

Cabe destacar que, según la forma en que se definan las variables de salida, el sistema puede caracterizarse como MISO (Multiple Input Single Output) o MIMO (Multiple Input Multiple Output). Esta clasificación depende de la cantidad de variables consideradas como salidas del sistema.

Teniendo en cuenta que el vector  $\dot{x}$  representa la derivada temporal del conjunto de variables de estado, es posible expresar la dinámica del sistema mediante la siguiente ecuación matricial de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_m}{L_a} & 0 \\ \frac{K_i}{J} & -\frac{B_m}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ T_L \end{bmatrix}$$

La definición de la ecuación de salida dependerá de los criterios adoptados en el análisis del sistema. No obstante, su formulación deberá ajustarse a la estructura general establecida para los modelos en espacio de estados:

$$y = C \cdot x + D \cdot u$$

### 1.2.1 Ítem 4

Este ítem consiste en lo siguiente: obtener el torque máximo que puede soportar el motor modelado mediante las Ecs. (1-5), (1-6) y (1-7) cuando se lo alimenta con 2 V, graficando para 5 segundos de tiempo la velocidad angular y corriente  $i_a$  para establecer su valor máximo como para dimensionar dispositivos electrónicos.

Parámetros del motor:

- $R_a = 55.6 \, \Omega$
- $L_a = 366 \cdot 10^{-6} \, \text{H}$
- $K_m = 6.53 \cdot 10^{-3} \, \text{Nm/A}$
- $J_m = 5 \cdot 10^{-9} \, \text{kg} \cdot \text{m}^2$
- $B_m = 0$
- $K_t = 6.49 \cdot 10^{-3} \, \text{Nm/rad/s}$

De acuerdo con los requerimientos de esta etapa del análisis, se han definido como variables de salida la corriente de armadura  $i_a$  y la velocidad angular del rotor  $\omega_r$ .

Considerando que  $x_1 = i_a$  y  $x_2 = \omega_r$ , la expresión correspondiente a la ecuación de salida queda dada por:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Dado que no existe acoplamiento directo entre las entradas y las salidas del sistema, y una vez modelado el proceso en el espacio de estados, se procede a determinar el valor máximo de torque que puede aplicarse al eje del motor.

Para ello, se parte de un valor inicial de  $T_L = 0,0001 \left[ \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{V}} \right]$  y se simula la respuesta del sistema ante la aplicación de dicho torque. Esta simulación permite analizar el comportamiento dinámico del motor y establecer el límite admisible del par resistente sin comprometer el funcionamiento deseado. Entonces, se tiene el siguiente comportamiento:

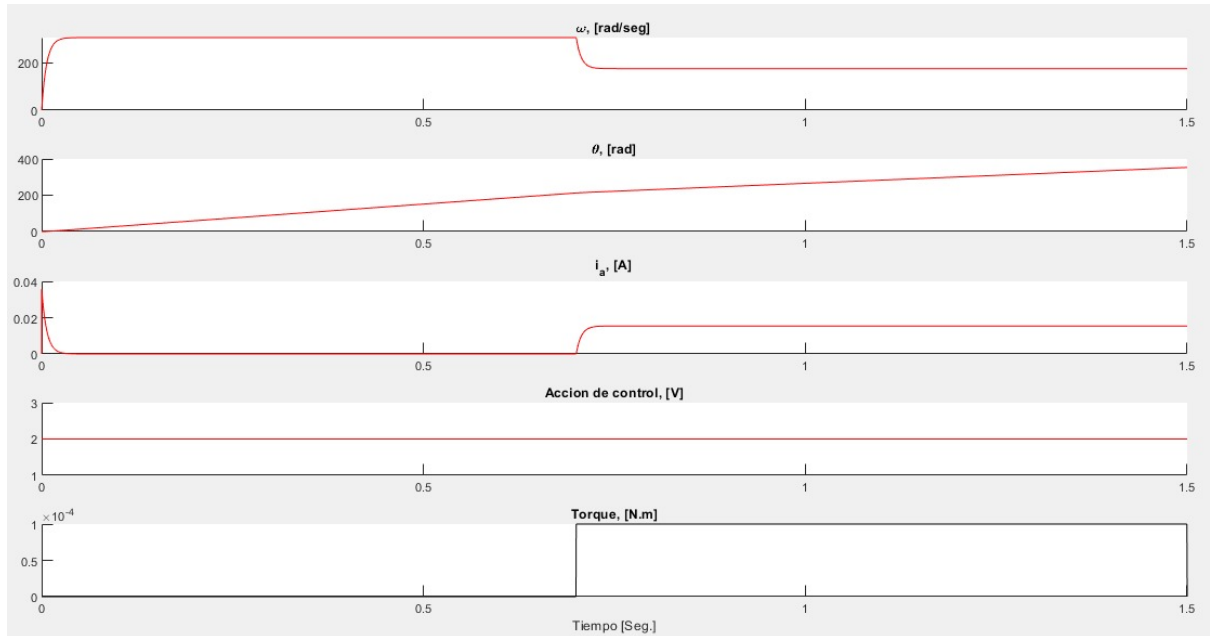


Figure 11: Evolución del comportamiento del sistema antes y después de la aplicación del torque de carga

De la Figura 11 puede verse que el valor inicial escogido para el torque no supera el máximo soportado, y esto puede identificarse viendo que la velocidad angular ni siquiera alcanza a ser nula cuando se aplica el torque. A raíz de este resultado, lo siguiente en probar puede ser un valor tal como  $T_L = 0,0005 \left[ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{V}} \right]$ , donde los resultados se grafican a continuación:

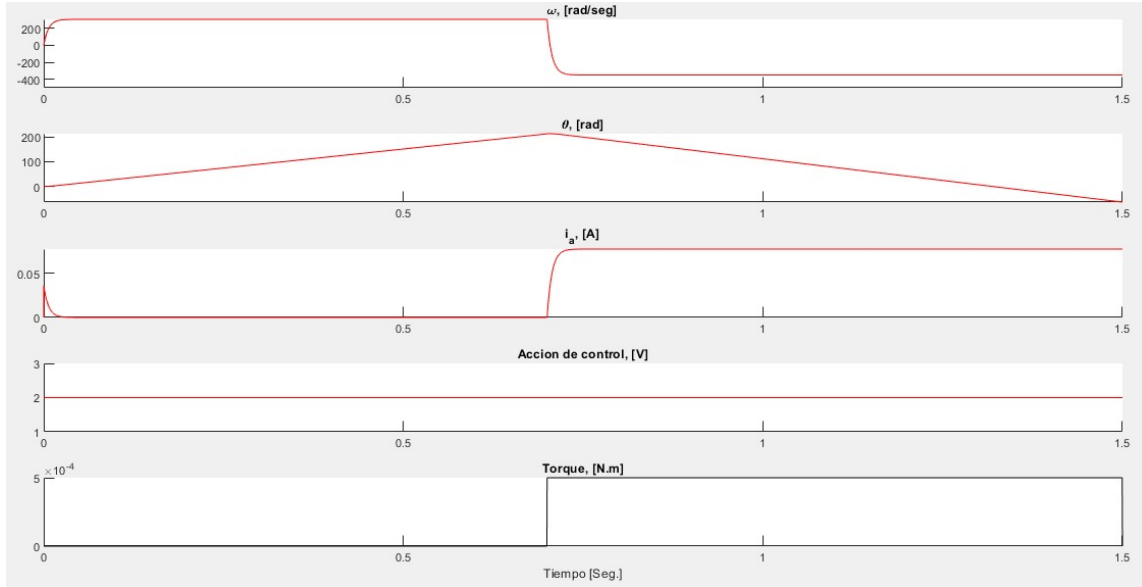


Figure 12: Evolución del comportamiento del sistema antes y después de la aplicación del torque de carga

Se puede observar en las imágenes que el valor seleccionado para el torque excede considerablemente el máximo permitido, lo que se puede identificar fácilmente al ver que la velocidad angular toma valores negativos, lo cual carece de sentido físico.

Tras realizar varias iteraciones, se obtiene  $T_{L,\max} = 0.00024 \left[ \frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{V}} \right]$ . De los resultados de simulación presentados a continuación, se observa que para dicho valor de torque, la velocidad angular se vuelve prácticamente nula y el ángulo de posición permanece constante.

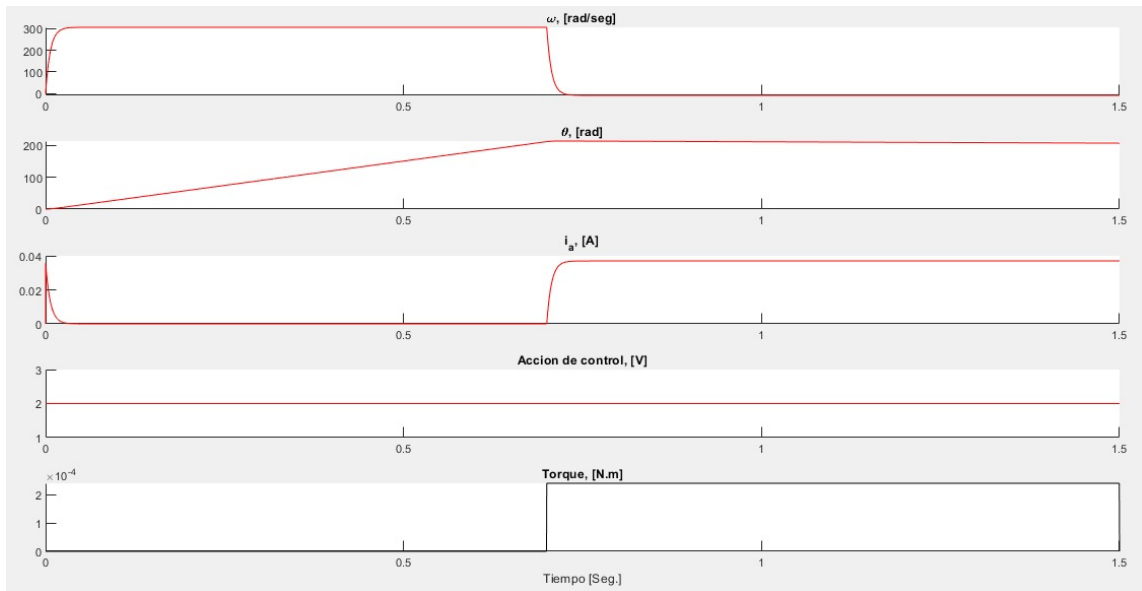


Figure 13: Evolución del comportamiento del sistema antes y después de la aplicación del torque de carga

De manera natural, durante el tiempo en que el torque está presente, la corriente de armadura aumenta y se mantiene en  $i_a = 0.04 \text{ A}$ .

### 1.2.2 Ítem 5

Este ítem consiste en lo siguiente: a partir de las curvas de mediciones de las variables graficadas en la Fig. 1-3, se requiere obtener el modelo del sistema considerando como entrada un escalón de 12V, como salida la velocidad angular, y al torque de carga  $T_L$  aplicado una perturbación. En el archivo **Curvas\_Medidas\_Motor\_2025\_v.xls** están las mediciones, en la primera hoja los valores y en la segunda los nombres. Se requiere obtener el modelo dinámico, para establecer las constantes del modelo (1-5) y (1-6).

En este apartado, se propone desarrollar un modelo del sistema físico basándose en las señales de entrada y salida obtenidas durante la medición del motor:

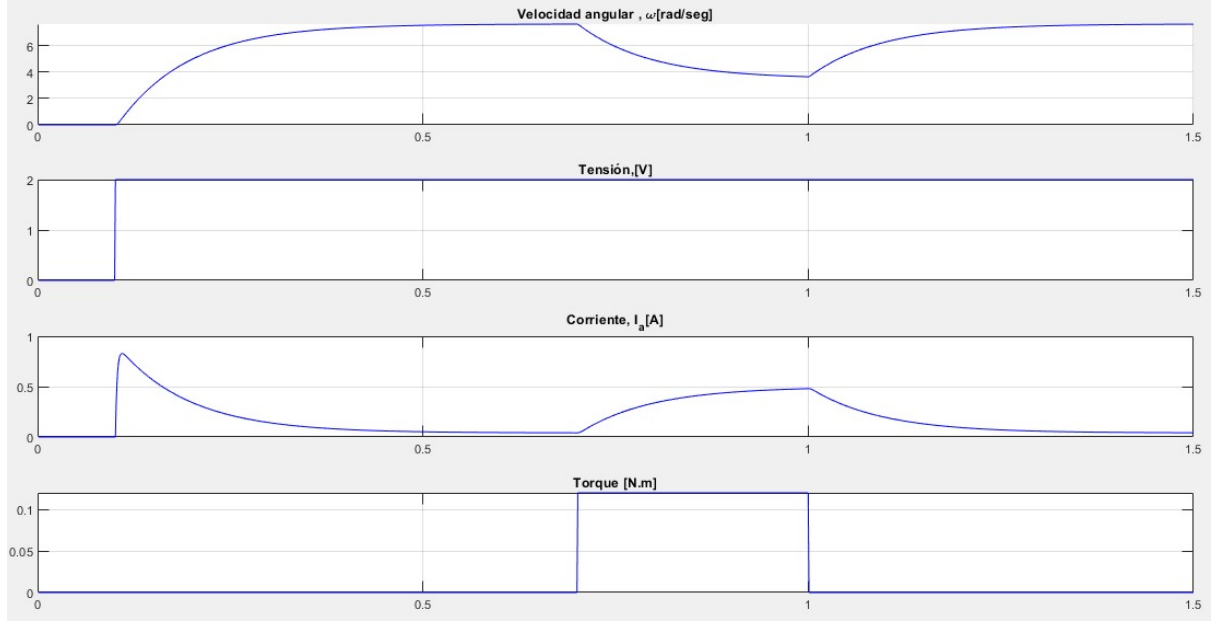


Figure 14: Evolución del comportamiento del sistema según la tabla de datos

Teniendo las curvas que describen el comportamiento del sistema, es que utilizaremos el método de Chen para obtener la función de transferencia que toma como salida la velocidad angular  $\omega_r(t)$ , y como entrada la tensión de alimentación  $v_a(t)$ , quedando con el siguiente formato:

$$G(s) = K \cdot \frac{T_3 \cdot s + 1}{(T_1 \cdot s + 1)(T_2 \cdot s + 1)}$$

donde las constantes  $T_i$  se determinan mediante el método de Chen.

Ahora bien, para identificar adecuadamente los parámetros del motor sometido a los ensayos, es fundamental obtener dos funciones de transferencia que caractericen su comportamiento dinámico:

$$\frac{\omega_r(s)}{U(s)} = G_{wr}(s) = \frac{K_{w_r}}{(T_{1wr} \cdot s + 1)(T_{2wr} \cdot s + 1)} \quad \frac{\omega_r(s)}{T_L(s)} = G_w(s) = \frac{K_{t_l} \cdot (T_{3w} \cdot s + 1)}{(T_{1wr} \cdot s + 1)(T_{2wr} \cdot s + 1)}$$

Para construir las funciones de transferencia mencionadas, se seleccionan tres puntos igualmente espaciados del tramo transitorio de la curva de velocidad angular (durante el flanco de subida para  $\frac{\omega_r(s)}{U(s)}$ , para no tener en cuenta el efecto del torque, y durante el flanco de bajada para  $\frac{\omega_r(s)}{T_L(s)}$ , para tener en cuenta el efecto del torque). Esta metodología, ya aplicada en el caso de estudio anterior, permite reflejar con mayor precisión la dinámica del sistema.

Los puntos tomados son los que se especifican a continuación:

$$\begin{aligned} X_{1\omega_r} &= (0,1410, 2,5449) & X_{1\omega} &= (0,7200, 6,8564) \\ X_{2\omega_r} &= (0,1810, 4,3332) & X_{2\omega} &= (0,7400, 6,1988) \\ X_{3\omega_r} &= (0,2210, 5,4935) & X_{3\omega} &= (0,7600, 5,6692) \end{aligned}$$

Y la velocidad angular en estado estacionario resulta tener el siguiente valor:

$$\omega_{r_{ss}} = 7,62 \text{ rad/s}$$

Previo al análisis mediante el método de Chen, se realiza un preprocesamiento de las señales muestreadas. En particular, tanto las muestras como la ganancia deben ser escaladas de acuerdo con la amplitud de la tensión de entrada aplicada al sistema, dividiendo por un factor de 2 (por el escalón de 2V a la entrada).

Una vez escaladas las señales de salida, se procede con la aplicación del método de Chen para la obtención de las funciones de transferencia. Como paso preliminar a la validación de los resultados obtenidos —mediante la comparación entre la respuesta del modelo y la respuesta medida— es conveniente verificar la coherencia de la ecuación característica del sistema. Esta verificación permite constatar la correcta captura de la dinámica interna, dado que dicha ecuación es propia del sistema y no depende de las condiciones de entrada o salida.

Las funciones de transferencia estimadas a partir del procedimiento son las siguientes:

$$G_{\omega_r}(s) = \frac{\omega_r(s)}{U(s)} = \frac{3.812}{9.074 \cdot 10^{-4} \cdot s^2 + 1.019 \cdot 10^{-1} \cdot s + 1}$$

$$G_{\omega}(s) = \frac{\omega_r(s)}{T_L(s)} = \frac{3.973 \cdot 10^{-1} \cdot s + 3.316 \cdot 10^1}{9.074 \cdot 10^{-4} \cdot s^2 + 1.019 \cdot 10^{-1} \cdot s + 1}$$

Ahora bien, para el cálculo de los parámetros del motor vamos a tener en cuenta las siguientes igualdades:

$$\frac{\omega_r(s)}{U(s)} = \frac{K_i}{J_m L_a \left( s^2 + \frac{B_m L_a + J_m R_a}{J_m L_a} s + \frac{B_m R_a + K_i K_m}{J_m L_a} \right)} = \frac{K_{1C}}{T_1 T_2 \left( s^2 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} s + \frac{1}{T_1 T_2} \right)}$$

$$\frac{\omega_r(s)}{T_L(s)} = \frac{R_a \left( \frac{L_a s}{R_a} + 1 \right)}{J_m L_a \left( s^2 + \frac{B_m L_a + J_m R_a}{J_m L_a} s + \frac{B_m R_a + K_i K_m}{J_m L_a} \right)} = \frac{K_{2C} (T_3 s + 1)}{T_1 T_2 \left( s^2 + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} s + \frac{1}{T_1 T_2} \right)}$$

Entonces igualando coeficientes entre las funciones de transferencia es que se llega a las siguientes fórmulas para calcular los parámetros del motor (salvo  $R_a$  que se calcula dividiendo la tensión de alimentación por la corriente de armadura máxima que se alcanza durante los primeros instantes de funcionamiento del motor):

$$R_a = \frac{V}{I_{\max}} = 2.4390 \, \Omega$$

$$B_m = 0$$

$$L_a = \frac{R_a \cdot T_{1wr} \cdot T_{2wr}}{T_{1wr} + T_{2wr}} = 2.17 \times 10^{-2} \, \text{H}$$

$$K_i = \frac{K_{1C} \cdot R_a}{K_{2C}} = 2.804 \times 10^{-1}$$

$$J = \frac{T_{1wr} + T_{2wr}}{K_{2C}} = 3.1 \times 10^{-3} \, \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

$$K_m = \frac{1}{K_{1C}} = 2.623 \times 10^{-1}$$

Los parámetros calculados permiten replicar con precisión los valores obtenidos experimentalmente, confirmando la validez del modelo mediante la simulación:

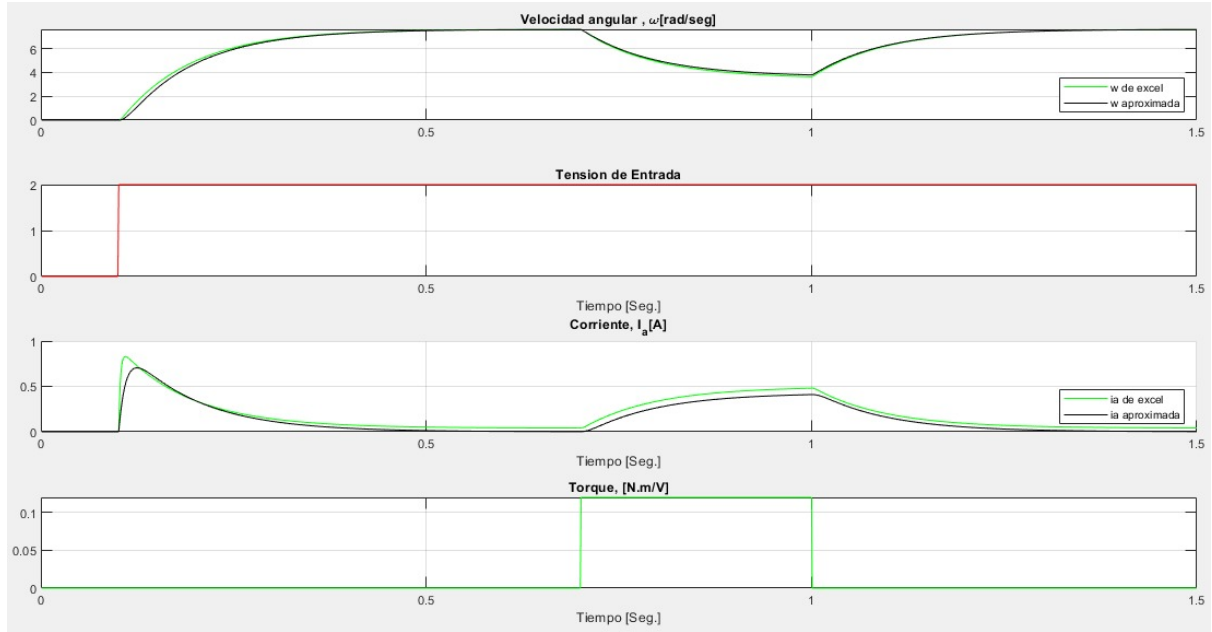


Figure 15: Evolución del comportamiento del sistema según la tabla de datos vs. Simulación mediante parámetros característicos del sistema con método de Euler

### 1.2.3 Item 6

Este ítem consiste en lo siguiente: implementar un PID en tiempo discreto para que el ángulo del motor permanezca en una referencia de 1 radian sometido al torque descrito en la Fig. 1-3.

(Tip: partir de  $K_P = 0.1$ ,  $K_I = 0.01$ ,  $K_D = 5$ )

En este apartado se utiliza el modelo del motor calibrado considerando la perturbación de torque. Para regular su comportamiento, se emplea un controlador PID en tiempo discreto, cuya ley de control se expresa de la siguiente forma:

$$u_k = u_{k-1} + Ae_k + Be_{k-1} + Ce_{k-2}$$

donde:

- $u_k$ : acción de control en el tiempo actual,
- $u_{k-1}$ : acción de control en el tiempo anterior,
- $e_k$ : error en el tiempo actual,
- $e_{k-1}$ : error en el tiempo anterior,
- $e_{k-2}$ : error en dos tiempos anteriores,
- $A = \frac{2K_P T_s + K_I T_s^2 + 2K_D}{2T_s}$ ,
- $B = \frac{-2K_P T_s + K_I T_s^2 - 4K_D}{2T_s}$ ,
- $C = \frac{K_D}{T_s}$ ,
- $K_P, K_I, K_D$ : constantes del PID continuo,
- $T_s$ : período de muestreo.



La señal  $u_k$  representa la acción de control aplicada a la planta con el fin de mantener la posición del eje del motor constante en  $\theta = 1$  [radian], incluso ante la presencia de una carga perturbadora.

Para ajustar correctamente los parámetros del controlador PID, se toman como punto de partida los valores sugeridos en la consigna. A partir de ellos, se lleva a cabo una simulación del sistema utilizando el modelo en espacio de estados desarrollado en el inciso 4, junto con los parámetros del motor previamente calculados.

La incorporación del PID al sistema modifica la estructura de entrada del motor, el cual ahora recibe dos señales: la acción de control  $u$  y el torque de carga  $T_L$ .

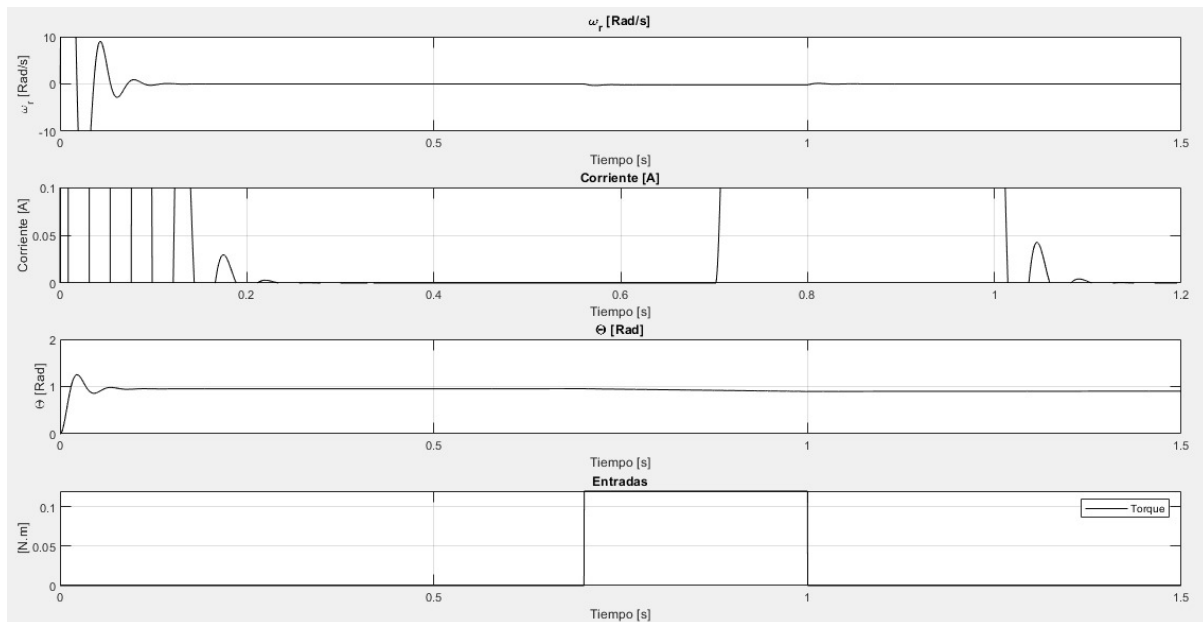


Figure 16: Evolución del comportamiento del sistema para las constantes de control inicialmente propuestas

La respuesta inicial obtenida mediante simulación no cumplía con los criterios de desempeño requeridos para el sistema de control (debido a los excesivos picos experimentados por las magnitudes de corriente y velocidad angular, a pesar de la buena performance del ángulo de rotación). Por ello, se optó por ajustar progresivamente los parámetros hasta alcanzar una respuesta adecuada. Este proceso de sintonización se llevó a cabo considerando los siguientes aspectos:

- La componente proporcional tiene el mayor impacto en la reducción del error.
- La acción integral mejora la velocidad de respuesta y permite eliminar el error en régimen permanente, aunque puede introducir oscilaciones indeseadas.
- La derivativa contribuye a amortiguar esas oscilaciones, aunque presenta sensibilidad al ruido.

Teniendo en cuenta estos principios y tomando como referencia valores típicos empleados en sistemas similares, se determinaron los parámetros finales del controlador PID:

$$K_P = 6 \quad ; \quad K_I = 1 \quad ; \quad K_D = 0.2$$

Entonces, una vez ajustados los parámetros del controlador, el comportamiento observado fue el siguiente:

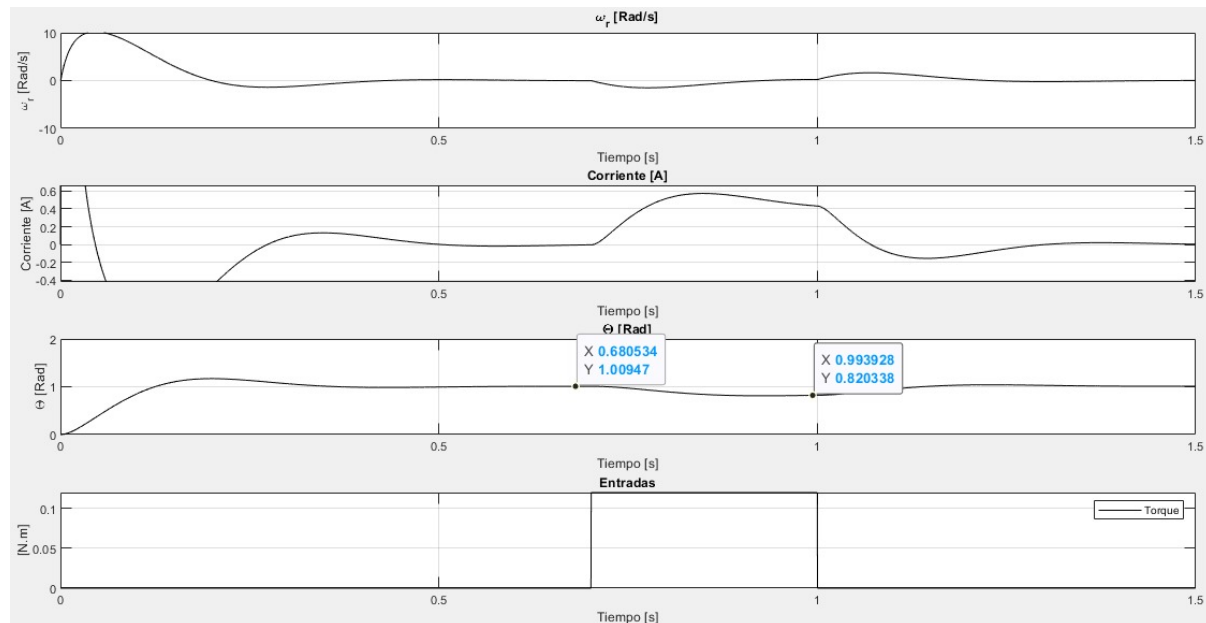


Figure 17: Evolución del comportamiento del sistema para las constantes de control ya ajustadas

Luego de evaluar múltiples combinaciones de parámetros para el controlador PID, se seleccionaron los valores finales por ofrecer la respuesta transitoria más rápida y eficiente. Si bien se ensayaron otras configuraciones con el objetivo de mitigar la caída de  $\theta$  ante la aplicación del torque, los resultados obtenidos con los parámetros adoptados representan la mejor aproximación posible a la referencia deseada dentro de los márgenes aceptables del sistema.

### 1.2.4 Desafíos enfrentados y lecciones aprendidas

A continuación se enumeran los desafíos enfrentados durante la resolución de esta segunda mitad del trabajo práctico:

- **Tratamiento de sistemas multivariables:** El modelo propuesto para un sistema con dos entradas presentó dificultades al ajustar los parámetros correspondientes. La tarea consistió en adecuar los valores para que el modelo simulado replicara correctamente los datos obtenidos de las mediciones del sistema real, un proceso que resultó ser más complejo de lo inicialmente esperado.
- **Familiarización con nuevos conceptos:** La incorporación de las variables de estado en la práctica fue particularmente desafiante. Hasta ese momento, este concepto no había sido parte del repertorio habitual de trabajo, lo que requirió un esfuerzo significativo para su integración y aplicación adecuada dentro del contexto del sistema bajo estudio.
- **Interpretación de los resultados obtenidos:** La interpretación de los resultados de las simulaciones se vio complicada por la falta de experiencia práctica en sistemas físicos, específicamente motores. Algunos de los resultados obtenidos no se ajustaban de inmediato a las expectativas, lo que obligó a realizar un análisis más exhaustivo para asegurar que los mismos estuvieran alineados con el comportamiento de un sistema físico real.

Por otro lado, a continuación se enumeran las lecciones aprendidas durante la resolución de esta segunda mitad del trabajo práctico:

- **Fortalecimiento del uso del método de Chen:** Se consolidó el empleo del método de Chen para modelar sistemas de segundo orden, aprovechando la respuesta al escalón del proceso. Este enfoque demostró ser eficaz para estimar parámetros del sistema, mejorando la precisión del modelo dinámico del sistema real.

- **Modelado de sistemas multivariables en espacio de estados:** El trabajo con sistemas multivariables en espacio de estados reveló el enorme potencial de este enfoque, especialmente en el análisis de sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output). Este método permitió una comprensión más profunda del comportamiento y la interacción entre las múltiples entradas y salidas del sistema.
- **Diseño de controladores PID discretos:** Se logró diseñar controladores PID en su versión discreta a partir de su equivalente continuo, identificando los ajustes necesarios en las constantes de proporcionalidad ( $K_p$ ), integral ( $K_i$ ) y derivativa ( $K_d$ ). Estos ajustes se realizaron con base en la respuesta del sistema a perturbaciones, lo que permitió una mejora significativa en la estabilidad y el rendimiento del sistema de control.

### 1.2.5 Identificación de logros

A continuación se enumeran los logros alcanzados durante la resolución de esta segunda mitad del trabajo práctico:

- ID1.1.1.1 Analiza la factibilidad de controlar un proceso real conociendo su modelo.
- ID1.1.1.2 Expresa el modelo lineal multivariable de un proceso real en un punto de operación.
- ID1.1.1.4 Selecciona las variables de estado de un proceso lineal para generar una expresión matricial lineal.
- ID1.1.1.5 Infiere la evolución temporal de procesos reales representados en variables de estado.

## 2 Conclusiones

A partir del desarrollo del trabajo, se reconoce que la representación en espacio de estados constituye una herramienta particularmente robusta para el análisis y modelado de sistemas dinámicos, especialmente en aquellos con múltiples variables de entrada y salida. Esta formulación no solo permite incorporar condiciones iniciales distintas de cero de manera directa, sino que además habilita un tratamiento integral del sistema, facilitando el estudio simultáneo de diversas trayectorias de entrada y la evaluación de la respuesta del sistema en el dominio temporal sin requerir la obtención de una función de transferencia específica para cada variable.

Asimismo, el método propuesto por Chen demuestra ser de gran utilidad en la identificación de parámetros en sistemas reales. Su aplicación resulta especialmente valiosa en contextos donde la modelación analítica a partir de primeros principios se ve limitada por la complejidad estructural del sistema o por restricciones en la disponibilidad de datos internos. Mediante el ajuste a partir de mediciones experimentales, el método permite aproximar modelos dinámicos que reflejan con buena fidelidad el comportamiento operativo del sistema bajo estudio, constituyéndose en una alternativa eficaz para fines de simulación, análisis y control.

### 3 Bibliografía

#### References

- [1] Pucheta, J. A. *Apuntes – Sistemas de Control II*. 2024. FCEFyN - UNC.
- [2] Chen, L., Li, J., Ding, R. Identification for the second-order systems based on the step response. *International Conference on Intelligent Control and Information Processing (ICICIP)*, 2010. IEEE.
- [3] Kuo, B. C. *Sistemas de Control Automático*. 7<sup>a</sup> Edición. 1996. Prentice Hall.
- [4] Ogata, K. *Modern Control Engineering*. 5<sup>a</sup> Edición. 2010. Prentice Hall.
- [5] Nise, N. S. *Control Systems Engineering*. 8<sup>a</sup> Edición. 2020. Wiley.
- [6] Åström, K. J., Murray, R. M. *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. 2010. Princeton University Press.
- [7] Chen, L., Li, J., Ding, R. Improved Method for Second-Order System Parameter Identification Based on Step Response. *Journal of Computers*, vol. 6, no. 8, 2011.

#### 4 Sitios Web

- **MathWorks – MATLAB y Simulink** <https://www.mathworks.com> Documentación oficial de MATLAB y Simulink, herramientas ampliamente utilizadas para modelado, simulación y análisis de sistemas dinámicos.
- **Control Tutorials for MATLAB and Simulink – University of Michigan** <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS> Sitio educativo con tutoriales paso a paso sobre modelado, diseño y simulación de sistemas de control.
- **IEEE Xplore Digital Library** <https://ieeexplore.ieee.org> Biblioteca digital con artículos académicos y conferencias especializadas en ingeniería eléctrica, sistemas de control, identificación de sistemas, entre otros.

#### 5 Repositorio GitHub

El código fuente y la documentación complementaria del trabajo práctico se encuentran disponibles en el siguiente enlace:

<https://github.com/Esteban3003/SistC2-Esteban-Suarez/tree/main/TP1>