Diseño Digital Moderno

Álgebra booleana y compuertas lógicas

M.I. Bryan Emmanuel Alvarez Serna

Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

"Lo que con mucho trabajo se adquiere, más se ama"

Aristóteles

Álgebra booleana

Axioma

Propiedad dentro de un conjunto que se asume como cierta sin probarse.

Por lo tanto, $\mathscr{S}$ es un conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$.
El conjunto $\mathscr{S}$ tiene los siguientes axiomas, considerando que $\forall\ A, B \in \mathscr{S}$.

1. Es cerrado si, y sólo si $A + B$ y $A \cdot B \in \mathscr{S}$.
2. Si $A = 0 \iff A \neq 1$.
3. Si $A = 0$, su valor negado sería $\overline{A} = 1$.
4. Si $A = B = 1 \implies A \cdot B = 1$, en caso contrario $A \cdot B = 0$.
5. Si $A = B = 0 \implies A + B = 0$, en caso contrario $A + B = 1$.

Nota

De estos axiomas surgen las tres operaciones básicas suma (AND), multiplicación (OR) y negación (NOT).

Álgebra booleana

Teorema

Proposición matemática que no es completamente obvia y debe ser demostrable a partir de los axiomas u otros teoremas ya demostrados.

Considerado que $A \in \mathscr{S}$.

- $A \cdot 0 = 0$
- $A + 1 = 1$
- $A \cdot 1 = \mathrm{A}$
- $A + 0 = \mathrm{A}$
- $A \cdot A = A$
- $A + A = \mathrm{A}$
- $A \cdot \overline{A} = 0$
- $A + \overline{A} = 1$
- $\overline{\overline{A}} = A$

Nota

Estos teoremas también se conocen como teoremas de una sola variable.

Principio de dualidad

Es una propiedad que nos permite transformar cualquier teorema a un segundo teorema únicamente cambiando (+) por (·) y 0 por 1.

Nombre	Teorema	Dual
Conmutatividad	$A + B = B + A$	$A \cdot B = B \cdot A$
Asociatividad	$(A + B) + C = A + (B + C)$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Distributividad	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Absorción	$A + (A \cdot B) = A$	$A \cdot (A + B) = A$
Combinación	$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$	$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$
Cancelación	$A + \overline{A} \cdot B = A + B$	$A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$
Consenso	$A \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$	$A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \overline{A} \cdot C$
De Morgan	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

Prioridad de operadores

() → NOT → AND → OR

Demostración

Ejemplo

Demostrar el teorema de absorción $A + (AB) = A$.

$A + (AB) = A(1 + B)$	Distribución
$\Rightarrow A + AB = A(1)$	Identidad
$\therefore A + AB = A$	
Por dualidad	$A(A + B) = A$

Con tabla de verdad.

A	B	AB	$A + (AB)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Funciones booleanas

Una función booleana o lógica se define como

$$f(A,B,C)=f \quad \forall A,B,C \in \mathscr{S}.$$

Estas funciones f se pueden expresar de tres formas diferentes.

1. Forma algebraica.
2. Tablas de verdad.
3. Forma canónica.
   - Mintérminos.
   - Maxtérminos.

Funciones booleanas

Ejemplo

Simplificar la función $f = AB + A\overline{B} + \overline{A}B$, y obtener su tabla de verdad.

$$f = A(B + \overline{B}) + \overline{A}B \qquad \text{Distributiva y complemento}$$
$$f = A + \overline{A}B \qquad \text{Identidad}$$

$$f = AB + A\overline{B} + \overline{A}B = A + \overline{A}B$$

A	B	$\overline{A}B$	f
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	0	1

Funciones booleanas

Ejemplo

Simplificar la función $f = \overline{(A+\overline{B})}(A+B)$ y obtener su tabla de verdad.

$$f = \overline{A}\,\overline{\overline{B}}(A+B) = \overline{A}B(A+B)$$
$$f = (\overline{A}BA) + (\overline{A}BB) = (\overline{A}AB) + (\overline{A}BB)$$
$$f = \overline{A}\,B$$

De Morgan

$\overline{A} \cdot A = 0$ y $B \cdot B = B$

$$f = \overline{(A+\overline{B})}(A+B) = \overline{A}\,B$$

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Funciones booleanas

Ejemplo

Obtener la función $\overline{f}$ de la función $f = \overline{(A+\overline{B})}(A+B)$.

$$
\begin{aligned}
f &= \overline{(A+\overline{B})}(A+B) \\
f &= \overline{A}B(A+B) \\
f &= \overline{A}BA + \overline{A}BB \\
f &= A\overline{B} \\
\overline{f} &= \overline{A\overline{B}} = A + \overline{B}
\end{aligned}
$$

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

$$\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$$

$$\overline{f} = A + \overline{B}$$

A	B	f	$\overline{f}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	1

Funciones booleanas

Ejemplo

Obtener la función f a partir de la tabla de verdad y simplificarla.

A	B	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B}$$

$$f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B}$$
$$f = \overline{A}(\overline{B} + B) + A\overline{B}$$
$$f = \overline{A}(\overline{B} + B) + A\overline{B} \qquad \overline{B} + \mathrm{B} = 1$$
$$f = \overline{A} + A\overline{B}$$

$$f = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B} = \overline{A} + A\overline{B}$$

Funciones booleanas

Ejemplo con 3 variables

Reducir la función $f=\overline{A+B}\,\overline{A+C}+BC$.

$$f=\overline{A+B}\,\overline{A+C}+BC \qquad \text{De Morgan}$$
$$f=\bar{A}\bar{B}\bar{A}\bar{C}+BC$$
$$f=\bar{A}\bar{A}\bar{B}\bar{C}+BC \qquad A\cdot A=A$$
$$f=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+BC$$

$$f=\bar{A}\bar{B}\bar{C}+BC$$

Funciones booleanas

Ejemplo con 4 variables

Reducir la función $f = ADBC + AD\overline{B}C + ADB\overline{C} + AD\overline{B}\overline{C}$

$$f = ABCD + A\overline{B}CD + AB\overline{C}D + A\overline{B}\overline{C}D$$

$$f = ACD(B + \overline{B}) + A\overline{C}D(B + \overline{B})$$

$$f = AD(C + \overline{C}) = AD$$

$$f = \mathrm{AD}$$

Funciones booleanas

Ejemplo con 4 variables

Simplificar la función $f = ABCD + ABC\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BCD$

$$f = AC + BCD$$

Funciones booleanas

Ejemplo con 4 variables

Simplificar la función $f = ABCD + ABC\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BCD$

$$f = ABCD + ABC\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BCD$$

$$f = ABCD + ABC\overline{D} + A\overline{B}CD + A\overline{B}C\overline{D} + \overline{A}BCD + ABCD \quad \text{para aplicar } A + A = A$$

$$f = ABC(D + \overline{D}) + A\overline{B}C(D + \overline{D}) + BCD(A + \overline{A})$$

$$f = ABC + A\overline{B}C + BCD$$

$$f = AC(B + \overline{B}) + BCD = AC + BCD$$

$$f = AC + BCD$$

Funciones booleanas

Otra forma de expresar funciones u obtener funciones es por mintérminos (m_i) y maxitérminos (M_i).

- Los m_i son una SOP de las salidas que valen 1.
- Los M_i son un POS de las salidas que valen 0.
- Suma de productos (SOP, siglas de *sum of products*) $f = AB + \ldots + \bar{A}\bar{B}$.
- Producto de sumas (POS, siglas en inglés de *product of sums*) $f = (A + B)\ldots(\bar{A} + \bar{B})$.

A	B	m_i	M_i
0	0	$\bar{A}\bar{B}$	$A + B$
0	1	$\bar{A}B$	$A + \bar{B}$
1	0	$A\bar{B}$	$\bar{A} + B$
1	1	AB	$\bar{A} + \bar{B}$

Condiciones

- En los m_i se niegan los 0.
- En los M_i se niegan los 1.
- Los m_i se representan $\sum(m_0, \ldots, m_x)$.
- Los M_i se representan $\prod(M_0, \ldots, M_x)$.

Funciones booleanas

Ejemplo

Obtener la función simplificada de la siguiente tabla de verdad usando minitérminos y maxtérminos.

A	B	f
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$f = \sum(1,3) = \bar{A}B + AB$$
$$f = B(\bar{A} + A) = B$$

$$f = \prod(0,2) = (A+B)(\bar{A}+B)$$
$$f = B \quad \text{por combinación}$$

$$f = B$$

Funciones booleanas

Ejemplo

Obtener la f simplificada con la siguiente tabla de verdad.

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f = \sum(1,3,5,7) = \overline{A}\overline{B}C + \overline{A}BC + A\overline{B}C + ABC$$

$$f = \overline{B}C(\overline{A} + A) + BC(\overline{A} + A)$$

$$f = \overline{B}C + BC = C(\overline{B} + B)$$

$$f = C$$

Ejercicio Obtener la función por maxitérminos.

Funciones booleanas

Ejemplo

Obtener la f simplificada con la siguiente tabla de verdad.

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$f = \prod(0, 2, 4, 6)$$

$$f = (A + B + C)(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)(\overline{A} + \overline{B} + C)$$

$$f = \ldots$$ 😨

Funciones booleanas

Ejemplo

Obtener la tabla de verdad de la función $f(A,B,C) = AB + C$.

$$f = AB(C+\overline{C}) + C(A+\overline{A})(B+\overline{B})$$

$$f = ABC + AB\overline{C} + ABC + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C$$

$$f = ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}C$$

$$f = \sum(1,3,5,6,7)$$

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Funciones booleanas

Ejemplo

Obtener la tabla de verdad de la función $f(A,B,C) = (A+C)(\overline{B}+A)(B+C)$.

$$f = (A+C)(\overline{B}+A)(B+C)$$

$$f = (A+C+0)(\overline{B}+A+0)(B+C+0)$$

$$f = (A+C+B\overline{B})(\overline{B}+A+C\overline{C})(B+C+A\overline{A})$$

$$f = (A+B+C)(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+C)\ldots$$

$$\ldots(A+\overline{B}+\overline{C})(A+B+C)(\overline{A}+B+C)$$

$$f = (A+B+C)(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)$$

$$f = \prod(0,2,3,4)$$

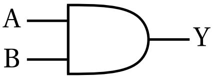
A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Compuertas básica

Las compuertas son dispositivos electrónicos construidos a partir de transistores y su función es realizar operaciones booleanas.

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

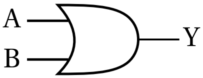
$$\boxed{Y = A \cdot B}$$



AND

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

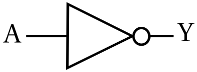
$$\boxed{Y = A + B}$$



OR

A	Y
0	1
1	0

$$\boxed{Y = \bar{A}}$$



NOT

Compuertas básicas

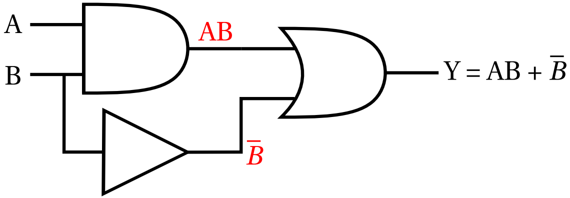
Ejemplo

Representar con compuertas la función $Y = AB + \overline{B}$.

Compuertas básicas

Ejemplo

Representar con compuertas la función $Y = AB + \overline{B}$.

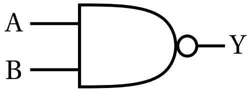


Compuertas complementarias

Combinan las operaciones AND y OR con NOT.

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

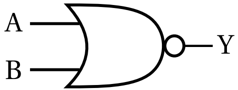
$$\boxed{Y = \overline{A \cdot B}}$$



NAND

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$\boxed{Y = \overline{A + B}}$$



NOR

Compuerta suplementaria

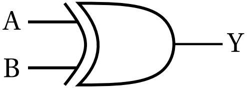
Existe una compuerta suplementaria XOR u OR exclusiva y su complemento XNOR.

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

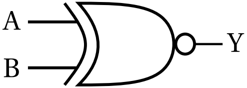
A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{Y} = \mathrm{A} \oplus \mathrm{B} \\ \mathrm{Y} = \bar{A}B + A\bar{B}\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\mathrm{Y} = \mathrm{A} \ominus \mathrm{B} \\ \mathrm{Y} = \bar{A}\bar{B} + AB\end{gathered}}$$



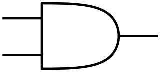
XOR



XNOR

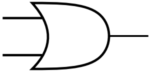
En resumen

AND



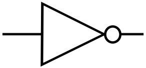
$$Y = A \cdot B$$

OR



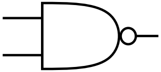
$$Y = A + B$$

NOT



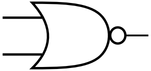
$$Y = \bar{A}$$

NAND



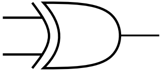
$$Y = \overline{A \cdot B}$$

NOR



$$Y = \overline{A + B}$$

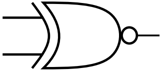
XOR



$$Y = A \oplus B$$

$$Y = \bar{A}B + A\bar{B}$$

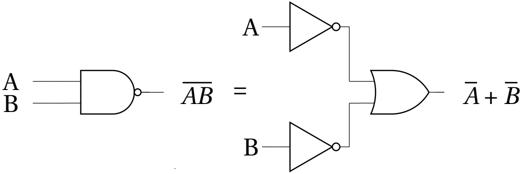
XNOR

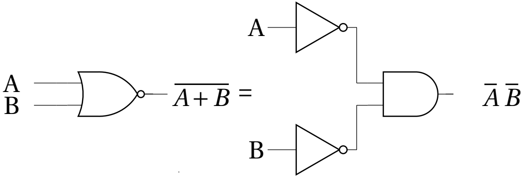


$$Y = A \ominus B$$

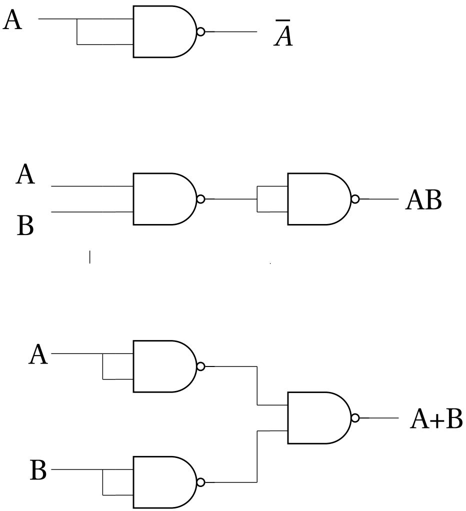
$$Y = \bar{A}\bar{B} + AB$$

Teoremas de De Morgan

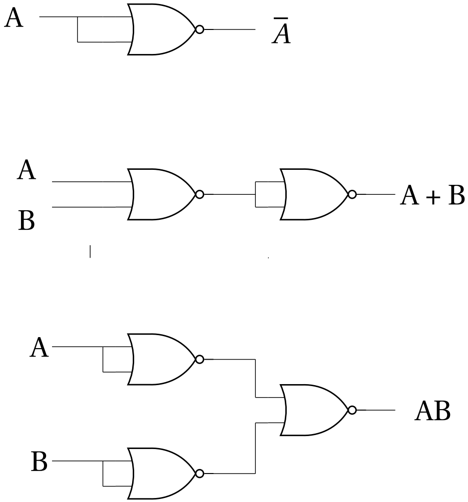




Universalidad de NAND

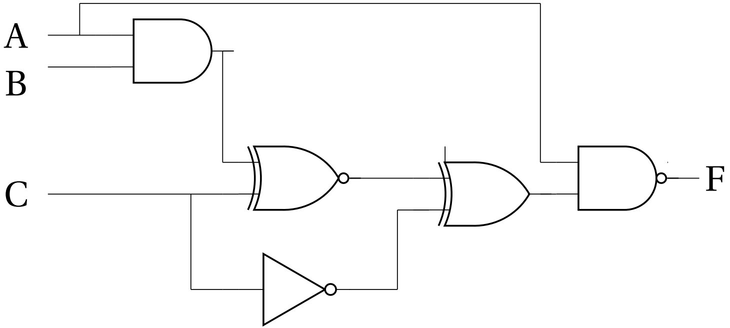


Universalidad de NOR



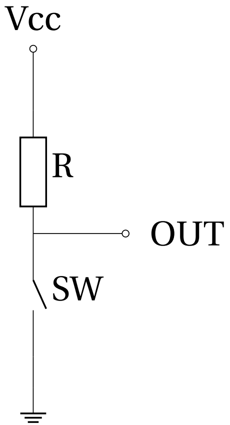
Ejercicio

Obtener la función F y simplificarla si es posible.

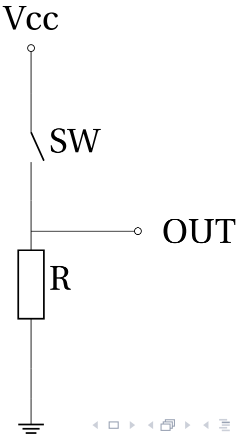


Entradas

Pull up

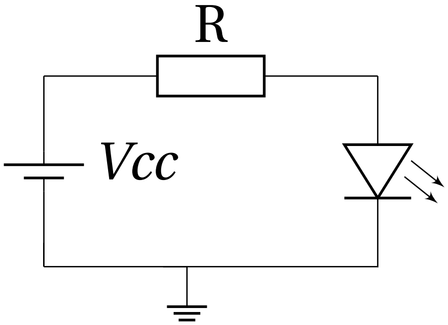


Pull down



Salidas

Resistencia para LED.



$$Vcc = V_R + V_{LED}$$

$$V_R = Vcc - V_{LED}$$

$$V_R = IR$$

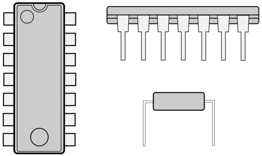
$$\therefore R = \frac{Vcc - V_{LED}}{I}$$

Circuito integrados

Los circuitos integrados (IC) son un sistema que combina elementos pasivos y activos (transistores) para realizar operaciones booleanas con señales digitales. Los IC integran sus elementos en una capa semiconductora dentro de un encapsulado.

Las tecnologías de IC más usadas son:

- TTL: Transistor-Transistor Logic y se identifican con combinación de números y letras empezando con 74.
- CMOS: Complementary Metal-Oxid Semiconductor y se identifican con la familia 4000.



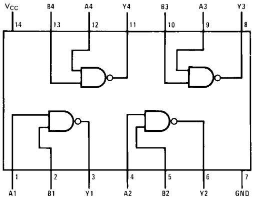
Datasheet

DM7400
Quad 2-Input NAND Gates

General Description

This device contains four independent gates each of which performs the logic NAND function.

Connection Diagram



Function Table

$Y = \overline{AB}$

Inputs		Output
A	B	Y
L	L	H
L	H	H
H	L	H
H	H	L

H = HIGH Logic Level
L = LOW Logic Level

Recommended Operating Conditions

Symbol	Parameter	Min	Nom	Max	Units
V_{CC}	Supply Voltage	4.75	5	5.25	V
V_{IH}	HIGH Level Input Voltage	2			V
V_{IL}	LOW Level Input Voltage			0.8	V
I_{OH}	HIGH Level Output Current			−0.4	mA
I_{OL}	LOW Level Output Current			16	mA
T_A	Free Air Operating Temperature	0		70	°C

Electrical Characteristics

over recommended operating free air temperature range (unless otherwise noted)

Switching Characteristics

at $V_{CC} = 5V$ and $T_A = 25°C$

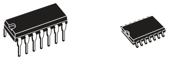
Symbol	Parameter	Conditions	Min	Max	Units
t_{PLH}	Propagation Delay Time LOW-to-HIGH Level Output	$C_L = 15$ pF, $R_L = 400\Omega$		22	ns
t_{PHL}	Propagation Delay Time HIGH-to-LOW Level Output			15	ns

Datasheet

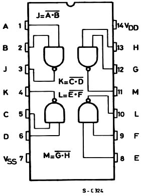
HCF4011B

QUAD 2 INPUT NAND GATE

- PROPAGATION DELAY TIME
  t_{PD} = 60ns (Typ.) at V_{DD} = 10V
- BUFFERED INPUTS AND OUTPUTS
- STANDARDIZED SYMMETRICAL OUTPUT CHARACTERISTICS
- QUIESCENT CURRENT SPECIFIED UP TO 20V
- 5V, 10V AND 15V PARAMETRIC RATINGS
- INPUT LEAKAGE CURRENT
  I_I = 100nA (MAX) AT V_{DD} = 18V T_A = 25°C
- 100% TESTED FOR QUIESCENT CURRENT
- MEETS ALL REQUIREMENTS OF JEDEC JESD13B " STANDARD SPECIFICATIONS FOR DESCRIPTION OF B SERIES CMOS DEVICES"



DIP SOP



DESCRIPTION

The HCF4011B is a monolithic integrated circuit fabricated in Metal Oxide Semiconductor technology available in DIP and SOP packages.
The HCF4011B QUAD 2 INPUT NAND GATE provides the system designer with direct implementation of the NAND function and supplement the existing family of CMOS gates. All inputs and outputs are buffered.

RECOMMENDED OPERATING CONDITIONS

Symbol	Parameter	Value	Unit
V_{DD}	Supply Voltage	3 to 20	V
V_I	Input Voltage	0 to V_{DD}	V
T_{op}	Operating Temperature	-55 to 125	°C

DYNAMIC ELECTRICAL CHARACTERISTICS (T_{amb} = 25°C, C_L = 50pF, R_L = 200KΩ, $t_r = t_f$ = 20 ns)

Symbol	Parameter	Test Condition		Value (*)			Unit
		V_{DD} (V)		Min.	Typ.	Max.	
t_{PLH} t_{PHL}	Propagation Delay Time	5			125	250	ns
		10			60	120	
		15			45	90	
t_{TLH} t_{THL}	Output Transition Time	5			100	200	ns
		10			50	100	
		15			40	80	

(*) Typical temperature coefficient for all V_{DD} value is 0.3 %/°C.

Tarea 2

Resolver los siguientes ejercicios.

1. Simplificar la función $f = ABC + \ldots$ $\ldots + AB\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$.
2. Obtener la función simplificada de $f(A, B, C) = \sum(0, 4, 7)$ y su tabla de verdad.
3. Representar la tabla de verdad de la función $f = A\overline{C} + BC$.
4. Usando compuertas básicas, representar las compuertas XOR y XNOR.
5. Obtener f por medio de mintérminos y maxitérminos a partir de la siguiente tabla de verdad.

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1