1. 5 bits $-3,3$ a $5V$

$x(t) = 20\,\text{sen}(7t - \pi/2) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$

$\text{sen}(\theta - \pi/2) = -\cos(\theta)$

$x(t) = 20(-\cos(7t)) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$

$x(t) = -20\cos(7t) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$

$x(t) = 2\cos(10t) - 3\cos(5t) - 20\cos(7t)$

$w1 = 10 \quad T1 = 2\pi/w1 = 2\pi/10$

$w2 = 5 \quad T2 = 2\pi/w2 = 2\pi/5$

$w3 = 7 \quad T3 = 2\pi/w3 = 2\pi/7$

$mcm(5,7,10) = 70 = T = \frac{2\pi}{mcd(w)} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

$T_0 = kT_1 = lT_2 = mT_3$ Pero $T_0 = 2\pi$ y $k=10$, $l=5$, $m=7$

$F_0 = 1/T_0 = 1/2\pi$

$F_s \geq 2F_0 = 2/2\pi = 1/\pi$

$F_s \geq 2F_{max} = 2\cdot(10/2\pi) = 10/\pi = 3{,}1830\ Hz$

y Para F_1, F_2, F_3

$F_1 = w_1/2\pi = 10/2\pi = 1/71 = 1{,}59\ Hz$

$F_2 = w_2/2\pi = 5/2\pi = 0{,}795\ Hz$

$F_3 = w_3/2\pi = 7/2\pi = 1{,}11\ Hz$

2. $x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\,sen(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

con f de muestreo $f_s = 5kHz = 5000\,Hz$

$\cos(2\pi f t) \rightarrow$ frecuencia f

$\cos(\omega t) \rightarrow$ frecuencia $f = \omega / 2\pi$

$\cos(1000\pi t) \rightarrow f = 1000\pi / 2\pi = 500\,Hz$

$sen(2000\pi t) \rightarrow f = 2000\pi / 2\pi = 1000\,Hz$

$\cos(11000\pi t) \rightarrow f = 11000\pi / 2\pi = 5500\,Hz$

T. de Nyquist

Una señal puede ser muestreada sin aliasing si $f_s \geq 2 f_{max}$

$$\left. \begin{array}{l} f_{max} = 5500\,Hz \\ f_s = 5000\,Hz \end{array} \right\} \text{Hay aliasing}$$

El muestreo en tiempo se hace como

$$x[n] = x(t)\big|_{t = nT_s} = x(nT_s)$$

$Ts = 1/fs = 1/5000 = 0{,}00025$

Se sustituye en cada termino

$3\cos(1000\pi t) = 3\cos(1000\pi n T_s) = 3\cos(1000\pi n . 0{,}0002)$

$= 3\cos(0{,}2\pi n)$ → Primer término

$5\,\text{sen}(2000\pi t) = 5\,\text{sen}(0{,}4\pi n)$ → Segundo termino

$10\cos(11000\pi t) = 10\cos(2{,}2\pi n)$ → Tercer termino (aliasing)

(Pero como el muestreo no cumple nyquist, esta f se pliega

$fa = |f - kfs|$ (la más cercana al rango $[0, fs/2]$

$f = 5500\,Hz$, $fs = 5000\,Hz$ → $fa = |5500 - 5000| = 500\,Hz$

Entonces

$10\cos(11000\pi t) \rightarrow 10\cos(2\pi . 500t) \rightarrow x[n] = 10\cos(2\pi . 500 . nTs)$

$= 10\cos(0{,}2\pi n)$

Ahora la señal final en tiempo discreto

$x[n] = 3\cos(0{,}2\pi n) + 5\,\text{sen}(0{,}4\pi n) + 10\cos(0{,}2\pi n)$

$= \boxed{13\cos(0{,}2\pi n) + 5\,\text{sen}(0{,}4\pi n)}$

La discretización no es apropiada porque hubo aliasing debido a la componente de 5500 Hz

Para evitar el aliasing

$fs \geq 2 . 5500 = \boxed{11000\,Hz}$ → nueva frecuencia de muestreo. Sin aliasing

3. $d(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt$

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$

$x_1(t) = A\cos(w_0 t)$, $w_0 = \frac{2\pi}{T}$, $T, A \in \mathbb{R}^+$

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq T/4 \\ -1 & \text{si } T/4 \leq t \leq 3T/4 \\ 1 & \text{si } 3T/4 \leq t \leq T \end{cases}$$

Dist. media entre señales

Desarrollo

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T} \int_0^T [x_1(t) - x_2(t)]^2 \, dt$$

$$\frac{1}{T}\Bigg[\underbrace{\int_0^{T/4} (A\cos(w_0 t) - 1)^2 \, dt}_{\text{primera integral}} + \underbrace{\int_{T/4}^{3T/4} (A\cos(w_0 t) + 1)^2 \, dt}_{\text{segunda integral}} + \underbrace{\int_{3T/4}^{T} (A\cos(w_0 t) - 1)^2 \, dt}_{\text{tercera integral}}\Bigg]$$

$$\left.\begin{array}{l} (A\cos(w_0 t) - 1)^2 = A^2\cos^2(w_0 t) - 2A\cos(w_0 t) + 1 \\ (A\cos(w_0 t) + 1)^2 = A^2\cos^2(w_0 t) + 2A\cos(w_0 t) + 1 \end{array}\right\} (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\int \cos^2(w_0 t) \, dt = t/2 + \frac{\text{sen}(2w_0 t)}{4w_0}$$

$$\int \cos(w_0 t) \, dt = \frac{\text{sen}(w_0 t)}{w_0}$$

Primera integral

$$\int_0^{T/4} (A^2\cos^2(w_0 t) - 2A\cos(w_0 t) + 1) \, dt$$

$$I_1 = A^2 \underbrace{\int_0^{T/4} \cos^2(w_0 t) \, dt}_{①} - 2A \underbrace{\int_0^{T/4} \cos(w_0 t) \, dt}_{②} + \underbrace{\int_0^{T/4} dt}_{③}$$

① $\int_0^{T/4} \cos^2(w_0 t)\, dt = \int_0^{T/4} \frac{1+\cos(2w_0 t)}{2}\, dt$

$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{T/4} 1\, dt + \int_0^{T/4} \cos(2w_0 t)\, dt\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{T}{4} + \frac{\operatorname{sen}(2w_0 t)}{2w_0}\Big|_0^{T/4}\right)$

Sabemos que $w_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow 2w_0 = 4\pi/T$

$\frac{\operatorname{sen}(2w_0 t)}{2w_0}\Big|_0^{T/4} = \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{2w_0} - \frac{\operatorname{sen}(0)}{2w_0} = 0$

$\rightarrow \int_0^{T/4} \cos^2(w_0 t)\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{4} = \frac{T}{8}$

② $\int_0^{T/4} \cos(w_0 t)\, dt = \frac{\operatorname{sen}(w_0 t)}{w_0}\Big|_0^{T/4} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/2)}{w_0} - 0 = \frac{1}{w_0}$

$= \frac{1}{2\pi/T} = \frac{T}{2\pi}$

③ $\int_0^{T/4} dt = \frac{T}{4}$

Entonces la primera integral

$I_1 = A2 \cdot \frac{T}{8} - 2A \cdot \frac{T}{2\pi} + \frac{T}{4}$

segunda integral

$\int_{T/4}^{3T/4} (A^2\cos^2(w_0 t) + 2A\cos(w_0 t) + 1)\, dt$

$I_2 = A^2 \cdot \int_{T/4}^{3T/4} \cos^2(w_0 t)\, dt + 2A\int_{T/4}^{3T/4} \cos(w_0 t)\, dt + \int_{T/4}^{3T/4} dt$
① ② ③

① $\int_{T/4}^{3T/4} \cos^2(w_0 t)\, dt = \int_{T/4}^{3T/4} \frac{1+\cos(2w_0 t)}{2}\, dt$

$$= \frac{1}{2}\int_{T/4}^{3T/4} (1+\cos(2w_0t))\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{T/4}^{3T/4} 1\,dt + \int_{T/4}^{3T/4} \cos(2w_0t)\,dt\right]$$

$$\int_{T/4}^{3T/4} 1\,dt = [t]_{T/4}^{3T/4} = \frac{3T}{4} - \frac{T}{4} = \frac{T}{2}$$

$$\int_{T/4}^{3T/4} \cos(2w_0t)\,dt = \left[\frac{\text{sen}(2w_0t)}{2w_0}\right]_{T/4}^{3T/4}$$

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} \to 2w_0 = \frac{4\pi}{T}$$

$$\frac{\text{sen}(2w_0 \cdot \frac{3T}{4}) - \text{sen}(2w_0 \cdot T/4)}{2w_0} = \frac{\text{sen}(3\pi) - \text{sen}(\pi)}{2w_0} = 0$$

$$\int_{T/4}^{3T/4} \cos^2(w_0t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{T}{2} + 0\right) = T/4$$

②

$$\int_{T/4}^{3T/4} \cos(w_0t)\,dt = \left.\frac{\text{sen}(w_0t)}{w_0}\right|_{T/4}^{3T/4} = \frac{\text{sen}(3\pi/2) - \text{sen}(\pi/2)}{w_0}$$

$$= \frac{-1-1}{w_0} = \frac{-2}{w_0} = -\frac{2T}{2\pi} = -\frac{T}{\pi}$$

③ $$\int_{T/4}^{3T/4} dt = \frac{3T}{4} - \frac{T}{4} = \frac{T}{2}$$

$$I_2 = A^2 \cdot \frac{T}{4} - 2A \cdot \frac{T}{\pi} + \frac{T}{2}$$

Tercera integral

$$\int_{3T/4}^{T} (A^2\cos^2(w_0t) - 2A\cos(w_0t) + 1)\,dt$$

como $x_1(t) = A\cos(w_0t)$ es periodica y simetrica significa que su comportamiento es = en T

Entonces la tercera integral y la primera integral al tener la misma expresión tendrán igual resultado

$$I_3 = I_1 = A^2 \cdot \frac{T}{8} - 2A \cdot \frac{T}{2\pi} + \frac{T}{4}$$

Entonces la integral completa es

$$I_{TOT} = 2\left(A^2 \cdot T/8 - 2A \cdot \frac{T}{2\pi} + \frac{T}{4}\right) + \left(A^2 \cdot \frac{T}{4} - 2A \cdot \frac{T}{\pi} + \frac{T}{2}\right)$$

$$I_{TOT} = A^2 \cdot \frac{T}{2} - 4A \cdot \frac{T}{\pi} + T$$

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T} \cdot I_{TOT} = \frac{1}{T}\left(A^2 \cdot \frac{T}{2} - 4A \cdot \frac{T}{\pi} + T\right) = \boxed{\frac{A^2}{2} - \frac{4A}{\pi} + 1}$$

4. Demostración

Para llegar a $C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)\, n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt$

$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_i}^{t_f} x(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt$ donde $T = t_f - t_i$ $w_0 = \frac{2\pi}{T}$

Integración por partes

$\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt$ $\quad u = e^{-jnw_0t}$, $dv = x''(t)\,dt$

$du = -jnw_0 e^{-jnw_0t}\, dt$, $v = x'(t)$

$x'(t)\, e^{-jnw_0t} \Big|_{t_i}^{t_f} - \int x'(t)\left(-jnw_0 e^{-jnw_0t}\right) dt$

Nuevamente Integración por partes.

$u = e^{-jnw_0t}$, $dv = x'(t)\,dt$

$du = -jnw_0\, e^{-jnw_0t}\, dt$, $v = x(t)$

$\int x'(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt = x(t)\, e^{-jnw_0t} \Big|_{t_i}^{t_f} - \int x(t)\left(-jnw_0 e^{-jnw_0t}\right) dt$

$= x(t)\, e^{-jnw_0t} \Big|_{t_i}^{t_f} + jnw_0 \int x(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt$

$\int x''(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt = x'(t)\, e^{-jnw_0t} \Big|_{t_i}^{t_f} + jnw_0 \Big(x(t)\, e^{-jnw_0} \Big|_{t_i}^{t_f} + jnw_0 \Big(\rightarrow$

$\rightarrow \int x(t)\, e^{-jnw_0t}\, dt \Big)$

Como estamos con series de Fourier, la señal debe ser periodica, entonces se asume que sus derivadas son iguales al inicio y al final del intervalo, esto garantiza que la señal se siga repitiendo sin saltos ni discontinuidades.

Por ende: $\cancel{x'(t)\, e^{-jnw_0t}} \Big|_{t_i}^{t_f} = 0$, $\cancel{x(t)\, e^{-jnw_0}} \Big|_{t_i}^{t_f} = 0$

Entonces queda

$$0 + jnw_0 \left(0 + jnw_0 \int_{ti}^{tf} x(t) e^{-jnw_0 t} dt \right.$$

$$= -(nw_0)^2 \int_{ti}^{tf} x(t) e^{-jnw_0 t} dt \quad \text{ya que } (j)^2 = -1$$

Por ende se reemplaza C_n

$$\frac{1}{T} \int_{ti}^{tf} x(t) e^{-jnw_0 t} dt \longrightarrow -\frac{1}{n^2 w_0^2 T} \int_{ti}^{tf} x''(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

$$C_n = \frac{1}{(ti - tf) n^2 w_0^2} \int_{ti}^{tf} x''(t) e^{-jnw_0 t} dt$$

Ahora para a_n y b_n del sis. trigo. de Fourier

$a_n = 2 \operatorname{Re}[C_n]$, $b_n = -2 \operatorname{Im}[C_n]$

Se expande la función compleja de $e^{-jnw_0 t}$ de C_n con:

$$x(t) = e^{(\sigma + jw)t} = e^{\sigma t} \cos(wt) + j e^{\sigma t} \operatorname{sen}(wt)$$

entonces

$$C_n = \frac{1}{(ti - tf) n^2 w_0^2} \left(\underbrace{\int_{ti}^{tf} x''(t) \cos(nw_0 t) \, dt}_{\text{Parte Real}} - j \underbrace{\int_{ti}^{tf} x''(t) \operatorname{sen}(nw_0 t) \, dt}_{\text{Parte imaginaria}} \right)$$

$a_n = 2 \operatorname{Re}[C_n]$

$$a_n = \frac{2}{(ti - tf) n^2 w_0^2} \int_{ti}^{tf} x''(t) \cos(nw_0 t) \, dt$$

$b_n = (-) 2 \operatorname{Im}[C_n]$

$$\cancel{b_n = (-)(-) \frac{2}{(ti - tf) n^2 w_0^2} \int_{ti}^{tf} x''(t) \operatorname{sen}(nw_0 t) \, dt} = 0 \rightarrow \text{ya que estamos tratando con una función par}$$