Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
14 de noviembre de 2023

MAT 1107 Introduccción al Cálculo - Pauta Interrogación 3

Tiempo: 2:00 horas

1. Resuelva,

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0.$$

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned} e^{2x} - e^x - 6 = 0 &\quad \text{ssi} \\ (e^x)^2 - e^x - 6 = 0 &\quad \text{ssi} \\ (e^x - 3)(e^x + 2) = 0. & \end{aligned}$$

Por lo tanto $e^x - 3 = 0$ o $e^x + 2 = 0$. Es decir,

$$e^x = 3 \quad \text{o} \quad e^x = -2.$$

La ecuación $e^x = -2$ no tiene solución ya que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $e^x > 0$. La ecuación $e^x = 3$ tiene por solución $x = \ln 3$. Luego, la única solución a la ecuación es $x = \ln 3$.

2. Resuelva los siguientes problemas

a) Calcule

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

Solución. Notemos que

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} =$$
$$n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = n2^{n-1}.$$

b) Si el primer, el segundo y el último término de una progresión artimética son $5, 9, 101$ respectivamente. Determine el número total de términos.

Solución. Notemos que el primer término es $a = 5$. La diferencia viene dada por $d = 4 = 9 - 5$. Así e término general es $a_n = a + (n-1)d$. Luego,

$$a_m = 101 = 5 + (m-1)4.$$

Por lo tanto, $m = 25$.

3. Resuelva los siguientes problemas

    a) Calcule

    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}.$$

    Solución. Problema anulado. Notemos que

    $$\frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} - \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}.$$

    Así por la propiedad telescópica tenemos que

    $$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} - \frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}} \right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{1-1}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}.$$

    b) La razón en una progresión geométrica es $3/2$ y el quinto término es 1. Determine el tercer término.

    Solución. Notemos que la razón es $r = 3/2$. El término general es $a_n = ar^{n-1}$. Así,

    $$1 = a_5 = a\left(\frac{3}{2}\right)^{5-1} = a\left(\frac{3}{2}\right)^{4}.$$

    Es decir, $a = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}$. Por lo tanto,

    $$a_3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4}\left(\frac{3}{2}\right)^{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}.$$

4. Recuerde que $\log := \log_{10}$. Resuelva,

    $$\log(x+1) - \log(x-1) = 2.$$

    Solución. Notemos que

    $$\log(x+1) - \log(x-1) = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2.$$

    Es decir,

    $$\frac{x+1}{x-1} = 10^2 = 100.$$

    Por lo tanto

    $$x + 1 = 100(x-1) = 100x - 100$$

    Así,

    $$101 = 99x$$

    Luego, $x = \frac{101}{99}$.