DISCRETAS

• CLASE 1 (INDUCCIÓN)

1 Principio Buen Orden (PBO)

$$\boxed{A \subseteq \mathbb{N},\ A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in A : \forall y \in A\ (x \leq y)}$$

• "Todo subconj de los NATURALES tiene un "MENOR" elemento

2 Principio Inducción Simple (PIS)

• $A \subseteq \mathbb{N}$: si se cumple :

1. $0 \in A$ ⟶ CASO BASE
2. Si $n \in A$, entonces $n+1 \in A$ ⟶ PASO INDUCTIVO

→ ENTONCES $A = \mathbb{N}$

• $n \in A$: H.I
• $n+1 \in A$: T.I

1 Demostrar 0 es el menor $\mathbb{N}$

Sea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \geq 0\}$ Demostraremos con PIS que $A = \mathbb{N}$ $\therefore \forall x \in A$ $x \geq 0$

1. CB : $0 \in A$ ✓ puesto que $0 \in \mathbb{N}$ y cumple $0 \geq 0$
2. HI : Sup $n \in A$, $\therefore n \geq 0$

   T: : PD $n+1 \in A$.

   Por HI sabemos que $n \geq 0 \Leftrightarrow n+1 \geq 1 \geq 0$ $\therefore n+1 \geq 0$
   $\therefore n+1 \in A$

   Por PIS, $A = \mathbb{N}$

3 PIS 2 (Propiedades) : Si P propiedad sobre elementos de $\mathbb{N}$, Sí

1. $P(0)$ es VERDAD (0 cumple P) ⟶ Puede ser 0 o un $n_0 \geq 0$
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ es V, ENTONCES $P(n+1)$ TAMBIEN

→ ENTONCES $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple P ($P(n)$ es Verdad)

2 Inducción fuerte (1°)

- $A \subseteq \mathbb{N}$, Si se cumple que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\{0, 1, \dots, n-1\} \subseteq A \Rightarrow n \in A$$

ENTONCES $A = \mathbb{N}$

2.1 Inducción fuerte (2°)

P propiedad sobre $\mathbb{N}$. Si P cumple que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$P(k)$ es V para TODO $k < n$, ENTONCES $P(n)$ es V

ENTONCES $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ es V

2 Dem $F(n) \leq 2^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

* Fibonacci: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

$P(n) := F(n) \leq 2^n$

1. **CB** $P(0) = 0 \leq 2^0$
   $P(1) = 1 \leq 2^1$

2. **HI** Sup: $F(k) \leq 2^k$ es V $\forall k < n$, ENTONCES:

   TI $P(n)$: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$
   $\leq 2^{n-1} + 2^{n-2}$

   * Como $n-1 < n$ se cumple HI $F(n-1) \leq 2^{n-1}$

$\therefore$ $P(n)$ verdadero $\forall n \in \mathbb{N}$ $\leq 2^{n-1} + 2^{n-1} \leq 2^n$

Ejemplo (Propuesto ★)

Demostremos que la siguiente propiedad se cumple para todo natural $n \geq 2$

$$P(n) := \quad n \text{ tiene un factor primo}$$

1. **CB.** $\mathbf{P(2)}$ es cierto pues 2 es primo, por lo que tiene un factor primo.
2. **HI.** Supongamos que todo $k < n$ tiene un factor primo.
3. **TI.** Consideramos $\mathbf{P(n)}$. Tenemos dos casos:
   - Si n es primo, entonces tiene un factor primo.
   - Si no, existen dos naturales k_1, k_2 tales que $n = k_1 \cdot k_2$ y donde $1 < k_1, k_2 < n$. Como $k_1 < n$, por **HI** tiene un factor primo k_3. Como $n = k_1 \cdot k_2$, entonces k_3 también es factor de n.

Por lo tanto, $P(n)$ **es verdadero para todo** $n \in \mathbb{N}$ **tal que** $n \geq 2$.

- **CLASE 2 (INDUCCIÓN ESTRUCTURAL)**

* **"Def" INDUCTIVA DE $\mathbb{N}$:**

- $\mathbb{N}$ se define según
  1. $0 \in \mathbb{N}$
  2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n+1 \in \mathbb{N}$

* **Def Listas enlazadas:**

- El conj "linked list" $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ es el **menor conj que cumple**
  1. $\emptyset \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$
  2. Si $L \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ y $K \in \mathbb{N}$, entonces $L \to K \in \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$

e $\emptyset$, $\emptyset \to 6$, $\to 6$, $\to 6 \to 5 \to 6$

↳ Para demostrar propiedades de conj inductivos, usamos la:

- **INDUCCIÓN ESTRUCTURAL:**
  - A conj inductivo y P propiedad sobre A. Si se cumple
    1. Todo elemento **BASE** de A cumple P
    2. Para cada **Regla CONSTRUCCIÓN**:

       Si la Regla se aplica a elem de A que cumplen P

       Los elementos **Resultantes** también cumplen P

ENTONCES: **Todos los elem A cumplen P**

- $P(L)$: L Tiene la misma cantidad de FLECHAS como ELEM.

DEMOSTRACIÓN

- **BI** : ÚNICO CB : Lista vacía, no flechas y no elem. $\therefore P(\emptyset) \equiv V$
- **HI** : Sup : CUALQUIER lista L Tiene igual n° flechas y elem
- **TI** : P.D : $P(L \to K) \equiv V$, $K \in \mathbb{N}$

↳ Por HI sabemos que L Tiene mismo n° flechas y elem

Si agregamos 1 elem, tambien añadimos una flecha

$\therefore P(L \to K)$ es V

Por I.E : **TODAS LAS LISTAS EN $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ TIENEN igual n° flech y elem**

- **IGUALDAD LISTAS**

$$L_1 \to K_1 = L_2 \to K_2 \longleftrightarrow L_1 = L_2 \quad y \quad K_1 = K_2$$

- **OPERADORES**

1. **LARGO** : $|\cdot| : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$
   1. $|\emptyset| = 0$
   2. $|L \to K| = |L| + 1$
2. **SUMA** : $sum(\cdot) : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$
   1. $sum(\emptyset) = 0$
   2. $sum(L \to K) = sum(L) + K$
3. **MAXIMO** : $max(\cdot) : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$
   1. $max(\emptyset) = -1$
   2. $max(L \to K) = \begin{cases} max(L) & , max(L) > K \\ K & , \text{otro caso} \end{cases}$
4. **CABEZA** : $head(\cdot) : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} / \{\emptyset\} \to \mathbb{N}$
   1. $head(\to K) = K$
      $head(L \to K) = head(L)$
5. **SUFIJO** : $suf(\cdot) : \mathcal{L}_{\mathbb{N}} / \{\emptyset\} \to \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$
   1. $suf(\to K) = \emptyset$
      $suf(L \to K) = suf(L) \to K$

   ↳ "Entrega la lista SIN el 1er elem."

- **CLASE 3 (Lógica Proposicional)**

- **SINTAXIS**

- **Proposición** :

Es una afirmación que puede ser : 1 VERDAD (1) 2 FALSO (0)

- **Conjunto de proposiciones**

Dado P (conjunto), $\mathcal{L}(P)$ es menor conjunto

1. Si $p \in P$, ENTONCES $p \in \mathcal{L}(P)$
2. Si $\varphi \in \mathcal{L}(P)$, ENTONCES $(\neg \varphi) \in \mathcal{L}(P)$
3. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(P)$ y $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, ENTONCES $(\varphi * \psi) \in \mathcal{L}(P)$

- Definir largo (φ) (VAR, CONECTIVOS y PARENTESIS)

$$\ell(\varphi) : \begin{cases} 1 & : \varphi = p \in P \\ \ell(\psi) + 3 & : \varphi = (\neg \psi),\ \psi \in \mathcal{L}(P) \\ \ell(\psi_1) + \ell(\psi_2) + 3 & : \varphi = (\psi_1 * \psi_2),\ \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P) \end{cases}$$

- Definir VAR (φ) : Numero ocurrencias de VAR prop en φ

$$v(\varphi) : \begin{cases} 1 & \varphi = p \in P \\ v(\psi) & \neg \psi \\ v(\psi_1) + v(\psi_2) & (\psi_1 * \psi_2) \end{cases}$$

3. Demuestre que si φ no contiene el símbolo $\neg$, se cumple que $largo(\varphi) \leq 4 \cdot var(\varphi)^2$.

- ¿Qué pasa si contiene el símbolo $\neg$?

$P(\varphi) :: \quad \ell(\varphi) \leq 4 \cdot v(\varphi)^2$

CB: $\varphi = p \in P$

$\ell(\varphi) = 1 \leq 4 \cdot v(p)^2$

HI: Sup. que la prop. cumple para φ y $\psi \in \mathcal{L}(P)$ tq no hay $\neg$

$\ell(\varphi) \leq 4 \cdot var(\varphi)^2$

$\ell(\psi) \leq 4 \cdot var(\psi)^2$

TI: Demostrar prop cumple para $(\varphi * \psi)$, i.e que

$\ell((\varphi * \psi)) \leq 4 \cdot var((\varphi * \psi))^2$

$\Rightarrow$ Usando definiciones:

$$\begin{aligned}
\ell((\varphi * \psi)) &= 3 + \ell(\varphi) + \ell(\psi) \\
&\overset{H.I}{\leq} 3 + 4 \cdot var(\varphi)^2 + 4 \cdot var(\psi)^2 \\
&= 3 + 4\left(var(\varphi)^2 + var(\psi)^2\right) \\
&= 3 + 4\left((var(\varphi) + var(\psi))^2 - 2\, var\,\varphi\, var\,\psi\right) \\
&= 3 - 8\underbrace{var\,\varphi\, var\,\psi}_{\geq 1} + 4(var\,\varphi + var\,\psi)
\end{aligned}$$

$\therefore 3 - 8\, var\,\varphi\, var\,\psi \leq 0$

$\leq 4\left(var(\varphi) + var(\psi)\right)^2$

Por. I. Estructural, la prop se cumple $\forall \varphi$ (fórmula) que no contiene $\neg$

- **SEMANTICA**: DOTA DE SIGNIFICADO A LA SINTAXIS

- **Valuaciones**:

Sea P conj de var. proposicionales.

LA VALUACIÓN DE VAR DE P ES UNA **FUNCIÓN** $\boxed{\sigma : P \to \{0,1\}}$

* Si $|P| = n$, ENTONCES EXISTEN 2^n VALUACIONES

- **Valuaciones Extendidas**

LA VALUACIÓN EXTENDIDA ES UNA **FUNCIÓN** $\boxed{\hat{\sigma} : \mathcal{L}(P) \to \{0,1\}}$

1. Si $\varphi = p$, $p \in P$. ENTONCES $\hat{\sigma}(\varphi) = \sigma(\varphi)$
2. Si $\varphi = (\neg \psi)$, $\psi \in \mathcal{L}(P)$

$$\boxed{\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\psi) = 0 \\ 0 & \text{si } \sigma(\psi) = 1 \end{cases}}$$

SEMANTICA NEGACIÓN

3. Si $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ PARA $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$

$$\boxed{\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(\psi_1) = 1 \text{ y } \sigma(\psi_2) = 1 \\ 0 & \text{EN OTRO CASO} \end{cases}}$$

SEMANTICA CONJUNCIÓN

4. Si $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ PARA $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$

$$\boxed{\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma(\psi_1) = 0 \text{ y } \sigma(\psi_2) = 0 \\ 1 & \text{EN OTRO CASO} \end{cases}}$$

SEMANTICA DISYUNCIÓN

- **Semántica de la implicancia.** Si $\varphi = (\psi_1 \to \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = 1 \text{ y } \hat{\sigma}(\psi_2) = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- **Semántica de la doble implicancia.** Si $\varphi = (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$ para $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{L}(P)$, entonces

$$\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{\sigma}(\psi_1) = \hat{\sigma}(\psi_2) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

TABLAS DE VERDAD

Consideremos los conectivos básicos y sus tablas de verdad

2^n

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \to q)$	$(p \leftrightarrow q)$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

2^{2^n}

• CLASE 4

1 Equivalencia Lógica :

2 Formulas φ y $\psi \in \mathcal{L}(P)$ son L.Equivalente si $\forall \sigma$ se tiene que $\boxed{\sigma(\varphi) = \sigma(\psi)}$: $\varphi \equiv \psi$

Las fórmulas equivalentes comparten semántica teniendo diferente sintaxis

2 Leyes de Equivalencia : para formulas Prop. $\varphi, \psi, \theta \in \mathcal{L}(P)$

1. **Doble negación**

$$\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$$

2. **Leyes de De Morgan**

$$\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv (\neg\varphi) \vee (\neg\psi)$$
$$\neg(\varphi \vee \psi) \equiv (\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)$$

3. **Conmutatividad**

$$\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$$
$$\varphi \vee \psi \equiv \psi \vee \varphi$$

4. **Asociatividad**

$$\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$$
$$\varphi \vee (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \vee \theta$$

5. **Distributividad**

$$\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$$
$$\varphi \vee (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta)$$

6. **Idempotencia**

$$\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$$
$$\varphi \vee \varphi \equiv \varphi$$

7. **Absorción**

$$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \equiv \varphi$$
$$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \equiv \varphi$$

8. **Implicancia material**

$$\varphi \to \psi \equiv (\neg\varphi) \vee \psi$$

9. **Doble implicancia**

$$\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

- Usaremos operadores generalizados por simplicidad:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n$$
$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$$

¿Por qué es ilegal usar los operadores generalizados con $n = \infty$?

↓

no puede haber una formula Infinita.

Construcción Formulas

p	q	r	φ
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

→ ¿Como construir una formula Equivalente?

Estrategia:

$$\underbrace{((\neg p)\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))}_{\sigma_1}\vee\underbrace{((\neg p)\wedge q\wedge r)}_{\sigma_4}\vee\underbrace{(p\wedge(\neg q)\wedge(\neg r))}_{\sigma_5}\vee\underbrace{(p\wedge q\wedge r)}_{\sigma_8}$$

$\sigma_1 = 1 \vee \sigma_4 = 1 \vee \sigma_5 = 1 \vee \sigma_8 = 1$

Generalización:

$$\varphi = \bigvee_{\substack{j=1\ldots 2^n \\ \sigma_j(\varphi)=1}} \varphi_j = \bigvee_{\substack{j=1\ldots 2^n \\ \sigma_j(\varphi)=1}} \left(\left(\bigwedge_{\substack{i=1\ldots n \\ \sigma_j(p_i)=1}} p_i\right)\wedge\left(\bigwedge_{\substack{i=1\ldots n \\ \sigma_j(p_i)=0}} (\neg p_i)\right)\right)$$

- **Teorema**: Para toda tabla de verdad existe 1 formula φ equivalente

- **Corolario**: Para toda tabla de verdad existe 1 formula φ equivalente que solo usa: $\{\neg, \wedge, \vee\}$

Funcionalmente Completos

→ Es un conjunto de conectivos lógicos que toda formula en $\mathcal{L}(P)$ es l. equivalente a una formula que solo usa sus conectivas

Demostrar que $\{\neg, \rightarrow\}$ es F. completo.

Demostraremos que $\{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.

Como sabemos que $C = \{\neg, \wedge, \vee\}$ es funcionalmente completo, demostraremos por inducción que toda fórmula construida usando sólo los conectivos anteriores es lógicamente equivalente a otra fórmula que solo usa $\neg$ y $\rightarrow$. Con esto, queda demostrado que $C' = \{\neg, \rightarrow\}$ es funcionalmente completo.

- **BI:** Si $\varphi = p$, con $p \in P$, la propiedad se cumple trivialmente.
- **HI:** Supongamos que $\varphi, \psi \in L(P)$, que sólo usan conectivos en C, son tales que $\varphi \equiv \varphi'$ y $\psi \equiv \psi'$, donde φ', ψ' sólo usan conectivos en C'.

Es crucial la dirección. Queremos probar que $C' = \{\neg, \rightarrow\}$ es F.C. por lo que debemos usar los símbolos de C' para expresar los de C

- **TI:** Consideraremos una fórmula θ construida con los pasos inductivos para los operadores en C. Tenemos tres casos que analizar:
  - $\theta = (\neg\varphi)$
  - $\theta = \varphi \wedge \psi$
  - $\theta = \varphi \vee \psi$

- $\theta = (\neg\varphi) \overset{HI}{\equiv} (\neg\varphi')$, y como φ' sólo usa conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

- $\theta = \varphi \wedge \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \wedge \psi'$

  Usando las leyes de doble negación, De Morgan y de implicancia:

  $$\theta \equiv \neg(\neg(\varphi' \wedge \psi')) \equiv \neg((\neg\varphi') \vee (\neg\psi')) \equiv \neg(\varphi' \rightarrow (\neg\psi'))$$

  Y como φ', ψ' sólo usan conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

- $\theta = \varphi \vee \psi \overset{HI}{\equiv} \varphi' \vee \psi'$

  Usando la ley de implicancia:

  $$\theta \equiv (\neg\varphi') \rightarrow \psi'$$

  Y como φ', ψ' sólo usan conectivos en C', θ es equivalente a una fórmula que sólo usa conectivos en C'.

Luego, por inducción estructural se concluye que para toda fórmula con símbolos solo de C, existe una fórmula equivalente con símbolos en C'. $\square$

• CLASE 5

Satisfacibilidad

· φ formula es satisfacible si Existe al menos 1 valuación σ : $\sigma(\varphi) = 1$

e $p \to \neg p$ ✓ $(p \vee q) \to r$ ✓ $p \wedge \neg p$ ✗

↳ $\nexists\ \sigma(\varphi) = 1$

! Problema Satisfacibildad (SAT)

Si φ formula, SAT consiste en DETERMINAR si es satisf.

↳ $\varphi \to \boxed{SAT} \to$ Sí/No

$p \to SAT \to$ Sí

$p \wedge \neg p \to SAT \to$ NO

e Mapa 3 - Coloreable

Sea M un mapa conformado por n países. Decimos que M es 3-coloreable si se pueden pintar todos los países con 3 colores sin que ningún par de países adyacente tenga el mismo color. En otras palabras, los países vecinos deben tener colores distintos.

Dado un mapa M, construya una fórmula $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ tal que M es 3-coloreable si y sólo si φ es satisfacible.

CONSTRUIR $\varphi \in \mathcal{L}(P)$ tal que

Dem: $\boxed{M \text{ es 3 coloreable} \longleftrightarrow \varphi \text{ es satisfac.}}$

Sea M el mapa. Consideremos la lista de países $\{1, 2, \ldots, n\}$ y una lista de pares de países adyacentes $A = \{(i, j), (k, m), \ldots\}$.

Seguiremos la siguiente estrategia para resolver el problema

1. Definición de variables proposicionales
   - Variables predefinidas por el problema
   - Variables que hay que asignar
2. Construcción de restricciones a través de fórmulas proposicionales
3. Demostración de que φ cumple lo pedido (si y solo si)

1 Primero, definimos las variables proposicionales. Usamos dos tipos de variables:

a ■ Para $1 \leq i, j \leq n$ definimos

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es adyacente con } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Observamos que cada p_{ij} se conoce de antemano una vez que conocemos el mapa M. Debemos **inicializarlas**.

b ■ Análogamente, para $1 \leq i \leq n$ definimos

$$r_i \quad b_i \quad g_i$$

que valen 1 si el país i es pintado rojo, azul o verde respectivamente, y 0 en caso contrario. Estas variables deben ser **determinadas** para resolver el problema.

2 Restricciones

Para representar el problema vamos a definir φ como la conjunción de las siguientes fórmulas.

- "*Cada país tiene uno y solo un color*"

$$\varphi_C = \bigwedge_{i=1}^{n} \Big(\big(r_i \vee b_i \vee g_i\big) \wedge \big(r_i \to (\neg b_i \wedge \neg g_i)\big) \wedge \big(b_i \to (\neg r_i \wedge \neg g_i)\big) \wedge \big(g_i \to (\neg r_i \wedge \neg b_i)\big) \Big)$$

al menos 1 color

si es r → no es ni b ni g

- "*Países adyacentes deben tener colores distintos*"

Para todo par de vecinos

si son vecinos entonces

no tiene mismo color

$$\varphi_D = \bigwedge_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{n} \Big(p_{ij} \to \big((r_i \to \neg r_j) \wedge (b_i \to \neg b_j) \wedge (g_i \to \neg g_j)\big) \Big)$$

! INICIALIZAR

A : conj adyac.

Ejercicio (mapa 3-coloreable)

- Inicializamos las variables conocidas por la instancia M del problema

$$\varphi_M = \bigwedge_{(i,j)\in A} p_{ij} \wedge \bigwedge_{(i,j)\notin A} \neg p_{ij}$$

fijate en los vecinos!

↳ Que sea verdad para los que son vecinos, y falso para los que no

Entonces, nuestra fórmula será la conjunción de las fórmulas anteriores:

$$\varphi = \varphi_C \wedge \varphi_D \wedge \varphi_M$$

Ahora demostraremos que M es 3-coloreable si y sólo si φ es satisfacible.

! ⇒ ! CONSTRUIR VALUACIONES

(⇒) **P.D.** Si M es 3-coloreable, entonces φ es satisfacible.

Supongamos que M es 3-coloreable. Luego, existe una coloración válida para M.Construimos una valuación σ según

$$\sigma(p_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i,j \text{ son adyacentes en } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\sigma(r_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es rojo en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\sigma(b_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es azul en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\sigma(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ es verde en la coloración de } M \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1 Demostrar que esas valuaciones satisfacen a las formulas!

(⇒) (continuación) Ahora verificamos que $\sigma(\varphi) = 1$:

(chamullo)

φ_C

- $\sigma(\varphi_C)$: para cada país i, se debe cumplir que $\sigma(r_i) = 1$, o que $\sigma(g_i) = 1$, o que $\sigma(b_i) = 1$, y solo una de estas, por construcción de σ. Luego, es claro que $\sigma(\varphi_C) = 1$.

φ_D

- $\sigma(\varphi_D)$: para cada combinación de países i, j, sabemos que $\sigma(p_{ij}) = 1$ solo cuando los países son adyacentes. Entonces, como en φ_D tenemos una implicancia, solo nos preocuparemos de los pares de países adyacentes. En el consecuente de la implicancia, sabemos que si por ejemplo $\sigma(r_i) = 1$, se debe cumplir que $\sigma(r_j) = 0$, dado que construimos σ a partir de una 3-coloración. Para las otras dos implicancias, sabemos que el lado izquierdo va a ser falso (por la fórmula φ_C), y por lo tanto todo el lado derecho se hace verdadero, y entonces $\sigma(\varphi_D) = 1$. El análisis para cuando i es de otro color es análogo.

φ_M

- $\sigma(\varphi_M)$: por construcción de σ es claro que $\sigma(\varphi_M) = 1$, dado que la construimos precisamente como esta fórmula, asignando 1 a pares de países adyacentes y 0 a los que no.

Finalmente, como φ es la conjunción de las fórmulas anteriores, concluimos que $\sigma(\varphi) = 1$, y entonces φ es satisfacible.

⇐ Esta dem es más facil

(⇐) **P.D.** Si φ es satisfacible, entonces M es 3-coloreable.

Supongamos que φ es satisfacible. Luego, existe una valuación σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$, y por construcción $\sigma(\varphi_C) = \sigma(\varphi_D) = \sigma(\varphi_M) = 1$. Usaremos esta valuación para colorear el mapa.

En primer lugar, como $\sigma(\varphi_C) = 1$, sabemos que para cada i, $\sigma(r_i \vee g_i \vee b_i) = 1$, y por lo tanto cada país tiene asignado al menos un color. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\sigma(r_k) = 1$, es decir, pintamos el país k rojo. Como también se cumple que $\sigma(r_k \to (\neg g_k \wedge \neg b_k)) = 1$, necesariamente $\sigma(g_k) = 0$ y $\sigma(b_k) = 0$, y por lo tanto cada país tiene un único color.

Esta dirección busca deducir la **existencia** de una coloración a partir de la valuación

!!!

($\Leftarrow$) (continuación)

En segundo lugar, como $\sigma(\varphi_M) = 1$, sabemos que si i, j son adyacentes en M, $\sigma(p_{ij}) = 1$, y si no lo son, $\sigma(p_{ij}) = 0$. Ahora, en $\sigma(\varphi_D) = 1$, solo nos interesa el primer caso (dado que en el segundo no podemos concluir nada de la implicancia). Tomemos entonces i, j adyacentes, y sin pérdida de generalidad supongamos que $\sigma(r_i) = 1$. Como $\sigma(r_i \to \neg r_j) = 1$ para todo j adyacente a i, necesariamente $\sigma(r_j) = 0$, y entonces los países adyacentes no pueden estar pintados del mismo color.

Concluimos que usando los colores asignados por φ a través de r_i, g_i, b_i, podemos 3-colorear M.

! **Contradicción** : si φ no es satisfacible : $\boxed{\forall\, \sigma(\varphi) = 0}$

! **Tautología** : si $\forall\, \sigma$ de φ, $\boxed{\sigma(\varphi) = 1}$

T **Teorema** : φ y ψ formulas $\in \mathcal{L}(P)$ son log. equiv si $\varphi \leftrightarrow \psi$ es tautología

- **Formas Normales**

  - **Literal** : es una var. prop. o su negación

- **DNF** (Forma Normal Disyuntiva)

  ↳ Es la disyunción de conjunción de literales.

$$\boxed{B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n \quad : \quad B_i = (L_{i_1} \wedge \ldots \wedge L_{i_{k_i}})}$$

- **CNF** (Forma Normal Conjuntiva)

  ↳ Es la conjunción de disyunción de literales.

$$\boxed{C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n \quad : \quad C_i = (L_{i_1} \vee \ldots \vee L_{i_{k_i}})}$$

CLASE 6

Conjunto satisfacible

Conjunto de formulas Σ en $\mathcal{L}(P)$, σ SATISFACE Σ :

$\sigma(\Sigma) = 1$ si $\forall$ formula $\varphi \in \Sigma$ se tiene $\sigma(\varphi) = 1$

Σ es SAT si Existe 1 VAI σ : $\sigma(\Sigma) = 1$
Σ es INCONCIST.

$\Sigma : \{P, \neg P\}$ es INCONSISTENTE

Consec. Lógica

ψ es CONSEC. LOGICA de Σ, si para cada σ tq :

$\sigma(\Sigma) = 1 \rightarrow \sigma(\psi) = 1$

$\Sigma \models \psi \iff \forall \sigma : \sigma(\Sigma) = 1 \Rightarrow \sigma(\psi) = 1$

$\models \equiv \rightarrow$

$\models \underbrace{P \vee \neg P}$

siempre es consec logica.

La regla de inferencia llamada **Modus ponens** es $\{p, p \to q\} \models q$

	p	q	p	$p \to q$	q	$\neg p$
σ_0	0	0	0	1	0	1
σ_1	0	1	0	1	1	1
σ_2	1	0	1	0	0	0
σ_3	1	1	1	1	1	0

$\sigma(\Sigma) \models q$ $\qquad$ $\not\models \neg p$

$\sigma(\Sigma) = \sigma(p) \wedge \sigma(p \to q)$

- **Modus Ponens** : $\{p, p \to q\} \models q$
- **Modus Tollens** : $\{\neg q, p \to q\} \models \neg p$
- **Dem. por partes** : $\{p \vee q \vee r, p \to s, q \to s, r \to s\} \models s$

! **TEOREMA** : $\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsiste

Demostración : ① **Por contradicción** :

$\Rightarrow$] Sea $\Sigma \models \varphi$ supongamos que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es satisfac

Existe σ tq: $\sigma(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) = 1$

$\Rightarrow \sigma(\Sigma) = 1 \wedge \sigma(\{\neg\varphi\}) = 1$

$\sigma(\varphi) = 0$

Por def $\Sigma \models \varphi$: Por conseg logica

$\sigma(\varphi) = 1$ por lo tanto

lo que asumí estaba erroneo

$\therefore$ $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ era inconsistem

$\Leftarrow$] Sup $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ es inconsist : Pd: $\Sigma \models \varphi$

$\sigma(\Sigma) = 1 \Rightarrow \sigma(\varphi) = 1$

Sup $\sigma(\Sigma) = 1$

y como $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ incon : $\sigma(\Sigma \cup \{\neg\varphi\}) = 0$

$\underset{1}{\underset{\shortparallel}{\sigma(\Sigma)}} \wedge \sigma(\{\neg\varphi\}) = 0$

$\therefore \sigma(\{\neg\varphi\}) = 0 \Rightarrow \sigma(\varphi) = 1$ ■

- **TEOREMA**: Un conj de formulas

↳ $\boxed{\Sigma \text{ INCONSISTENTE} \Leftrightarrow \Sigma \models \square}$

CLAUSULA VACIA
↑
CON $\square$ CUALQUIER CONTRADICCIÓN.

- **Equivalencia Formulas**:

Σ_1 y Σ_2 SON LOGIC. EQUIVALENTE ($\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$) si:

$\forall \sigma$ se tiene: $\sigma(\Sigma_1) = \sigma(\Sigma_2)$

- **observación**: $\forall \Sigma$ se cumple: $\boxed{\Sigma \equiv \bigwedge_{\varphi \in \Sigma} \varphi}$

↳ $\Sigma = \{p, p \to q\} \equiv (p) \wedge (p \to q)$

- **TEOREMA**: Todo Σ es equivalente a un conj. CLAUSULAS
↓
DISYUNCIONES

Ejemplo

Pasando las fórmulas de un conjunto Σ a CNF, podemos separar sus cláusulas

$$\{p, q \to (p \to r), \neg(q \to r)\} \equiv \{p, \neg q \vee \neg p \vee r, q, \neg r\}$$

obteniendo un **conjunto de cláusulas** que es equivalente al original.

$\boxed{\text{DEMOSTRAR } \Sigma \models \varphi \equiv \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \longrightarrow \text{INCONSISTENTE}}$

MUNDO: CONSEC. LOGICA

MUNDO: SATISF.

- **Regla Resolución** :

$$\frac{C_1 \vee \ell \vee C_2 \qquad C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4}{C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4}$$

$$\frac{\ell \qquad \neg \ell}{\square}$$

- La regla es **correcta**: $\{C_1 \vee \ell \vee C_2,\ C_3 \vee \bar{\ell} \vee C_4\} \models C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4$

- **Regla Factorización**

$$\frac{C_1 \vee \ell \vee \ell \vee C_2}{C_1 \vee \ell \vee C_2}$$

- La regla es **correcta**: $\{C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee \ell \vee C_3\} \models C_1 \vee \ell \vee C_2 \vee C_3$

- e

Ejemplo

$$\Sigma = \{p \vee q \vee r, \neg p \vee s, \neg q \vee s, \neg r \vee s, \neg s\}$$

(1)	$p \vee q \vee r$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg p \vee s$	$\in \Sigma$
(3)	$s \vee q \vee r$	resolución de (1), (2)
(4)	$\neg q \vee s$	$\in \Sigma$
(5)	$s \vee s \vee r$	resolución de (3), (4)
(6)	$s \vee r$	factorización de (5)
(7)	$\neg r \vee s$	$\in \Sigma$
(8)	$s \vee s$	resolución de (6), (7)
(9)	s	factorización de (8)
(10)	$\neg s$	$\in \Sigma$
(11)	$\square$	resolución de (9), (10)

Es decir, existe una demostración por resolución de que Σ es inconsistente

- **Teorema**

1. **Correctitud** : Si $\Sigma \vdash \square \Rightarrow \Sigma \models \square$
2. **Completitud** : Si $\Sigma \models \square \Rightarrow \Sigma \vdash \square$

Corolario

Si Σ es un conjunto de cláusulas, entonces $\Sigma \models \square$ si y sólo si $\Sigma \vdash \square$.

Corolario (forma alternativa)

Un conjunto de cláusulas Σ es inconsistente si y sólo si existe una demostración por resolución de que es inconsistente.

Corolario

Dados un conjunto de fórmulas Σ y una fórmula φ cualesquiera,

$$\Sigma \vDash \varphi \text{ si y sólo si } \Sigma' \vdash \square$$

donde Σ' es un conjunto de cláusulas tal que $\Sigma \cup \{\neg\varphi\} \equiv \Sigma'$.

Este procedimiento nos permite determinar consecuencia lógica

$$\boxed{\Sigma \vDash \varphi \longleftrightarrow \Sigma' \vdash \square}$$

e Demostremos que $\{p, q \to (p \to r)\} \vDash q \to r$.

Por corolario: $\Sigma \vDash \varphi \leftrightarrow \Sigma' \vdash \square$

siendo $\Sigma' = \{p, q \to (p \to r)\} \cup \neg\{q \to r\}$

pasar form a Claus.:
1. p
2. $\neg q \vee (\neg p \vee r)$
3. $\neg(\neg q \vee r) = q \wedge \neg r = \{q, \neg r\}$

Dem que Σ' es INCONSIST por resol:

(1)	p	$\in \Sigma'$
(2)	$\neg q \vee \neg p \vee r$	$\in \Sigma'$
(3)	$\neg q \vee r$	resol (1) y (2)
(4)	q	$\in \Sigma'$
(5)	r	resol (3) y (4)
(6)	$\neg r$	$\in \Sigma'$
(7)	$\square$	

//

· Clase 7 (LOG. PREDICADOS)

1. **Predicado** : · $P(x)$ es una **AFIRMACION ABIERTA**
   · El valor de verdad depende del objeto a evaluar

   - $P(x) :=$ x es par
   - $R(x) :=$ x es primo

2. **Valuación** : Es el valor VERDAD de $P(x)$ en $a \rightarrow$ valor

   - $P(x) :=$ x es par $\longrightarrow$ $P(2) = 1$
     $P(3) = 0$

3. **Predicado n-ario** : $P(x_1, \dots, x_n)$ y valores $a_1, \dots, a_n$

   ↳ **Valuacion $P(a_1, \dots, a_n)$** : $O(x, y) :=$ $x \leq y$

   valor v de P en $a_1, \dots, a_n$

   $O(1,2) = 1 \leq 2 : 1$
   $O(2,1) = 2 \leq 1 : 0$

! **Dominio** : Todos los predicados están restringidos a un DOM de evaluación

Ejemplos

$O(x,y) := x \leq y$, $S(x,y,z) := x + y = z$, $Padre(x,y) :=$ x es padre de y

$O(x,y)$	$:= x \leq y$	sobre $\mathbb{N}$
$S(x,y,z)$	$:= x + y = z$	sobre $\mathbb{Q}$
$Padre(x)$	$:=$ x es padre de y	sobre el conjunto de todas las personas

! $P(x_1, \dots, x_n)$: **VARIABLES LIBRES** : $x_1, \dots, x_n$

4 **Predicado 0-Ario**: No variables, valor ved 1 o 0 sin importar valuación

"Propiedades de un dominio"

5 **Predicado Compuesto**:

1. Es predicado
2. Es negación ($\neg$) de un P. compuesto
3. $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ de predicados sobre el mismo dominio
4. Cuantif. universal ($\forall$) y existencial ($\exists$) de un predicado compuesto

6 Ejemplos

$P(x) := x$ es par y $O(x,y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $P'(x) := \neg P(x)$
- $O'(x,y,z) := O(x,y) \wedge O(y,z)$
- $P''(x,y) := (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x,y)$
- $P'(4) = 0$

1 **Cuantificador Universal**: "for y un if" $\rightarrow$ $\forall$ es $\forall$

$P(x, y_1, \dots, y_n)$ un Predicado compuesto con dominio D

$\forall :=$ $P'(y_1, \dots, y_n) = \forall x (P(x, y_1, \dots, y_n))$

x variable cuantif, $y_1, \dots, y_n$ var libres

↳ **Valuación**: Para $b_1, \dots, b_n \in D$,

$P'(b_1, \dots, b_n) = 1 \longleftrightarrow$ Para todo $a \in D$ $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$

2 Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x,y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \forall x(O(x,y))$ ⋯ $O'(2) = \forall x(O(x,2))$ F
- $O''(x) := \forall y(O(x,y))$ ⋯ $O''(0) = \forall y(O(0,y))$ V 1,4 F
- $P_0 := \forall x(P(x))$ F $\longrightarrow$ 0-ario
- $P_0' := \forall x(P(x) \vee \neg P(x))$ $\longrightarrow$ V

2 Cuantificador Existencial: "for y un if + Break" → ∀ es V

$P(x, y_1, \dots, y_n)$ un Predicado compuesto con Dominio D

$\exists :=$ $P'(y_1, \dots, y_n) = \exists x (P(x, y_1, \dots, y_n))$

x variable cuantif , $y_1, \dots, y_n$ VAR libres

↳ **Valuación**: Para $b_1, \dots, b_n \in D$,

$$P'(b_1, \dots, b_n) = 1 \longleftrightarrow \text{Existe } a \in D \; P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$$

c

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \exists x(O(x, y))$ ⋯ $O'(2) = \exists x(O(x, 2))$
- $O''(x) := \exists y(O(x, y))$ ⋯ $O''(0) = \exists y(O(0, y))$
- $O'''(x, y) := \exists z(O(x, z) \wedge O(z, y) \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$ ⋯ $O'''(1, 2)$
- $P_0 := \exists x(P(x))$

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{Z}$:

- $\forall x(\forall y(O(x, y)))$
- $\exists x(\exists y(O(x, y)))$
- $\forall x(\exists y(O(x, y)))$
- $\exists x(\forall y(O(x, y)))$
- $\forall x(P(x) \to \exists y(O(x, y)))$

• SEMANTICA PREDICADOS

¿ $\forall x(\exists y(x \leq y)) \equiv \exists x(\forall y(x \leq y))$? $\longrightarrow$ DEPENDE

Dom interp.

Notación

Desde ahora, para un dominio D diremos que:

- $P(x_1, \ldots, x_n)$ es un símbolo de predicado y
- $P^D(x_1, \ldots, x_n)$ es el predicado sobre D.

1 INTERPRETACION :

Sean $P_1, \ldots, P_m$ Simbolos de Pred.

$\mathcal{I}$ para $P_1, \ldots P_m$ esta compuesta por :

1. **Dominio** : $\mathcal{I}(dom)$
2. **Predicado P_i^0** : $\mathcal{I}(P_i)$ para cada simbolo P_i $\{P_1 \ldots P_m\}$

Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$?

$\mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N}$	$\mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z}$
$\mathcal{I}_1(P) := x \neq 1$	$\mathcal{I}_2(P) := x < 0$
$\mathcal{I}_1(O) :=$ y es múltiplo de x	$\mathcal{I}_2(O) := x + y = 0$

2 SATISFAC. PREDICADOS :

Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una formula, $\mathcal{I}$ interpretación de Simbolos en φ

$\mathcal{I}$ SAT φ sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$

$$\boxed{\mathcal{I} \models \varphi(a_1 \ldots a_n) \longleftrightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_n) \text{ es } V \text{ al INTERPRETAR cada SIMB en } \varphi}$$

Ejemplos

¿Cuáles pueden ser posibles interpretaciones para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$?

$\mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N}$	$\mathcal{I}_2(dom) := \mathbb{Z}$
$\mathcal{I}_1(P) := x \neq 1$	$\mathcal{I}_2(P) := x < 0$
$\mathcal{I}_1(O) :=$ y es múltiplo de x	$\mathcal{I}_2(O) := x + y = 0$

- $\mathcal{I}_1 \models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$
- $\mathcal{I}_2 \not\models \forall x(\exists y(P(y) \wedge O(x, y)))$

= EQUIVAL. PREDICADOS :

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$ y $\psi(x_1, \dots, x_n)$ 2 formulas en Log. Pred

$\boxed{\varphi \equiv \psi}$ $\longleftrightarrow$ Para Todo $\mathcal{I}$ y para TODO $a_1 \dots a_n \in \mathcal{I}(\text{dom})$

$$\boxed{\mathcal{I} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Leftrightarrow \mathcal{I} \models \psi(a_1, \dots, a_n)}$$

Caso especial

Si φ y ψ son oraciones (no tienen variables libres) equivalentes, entonces para toda interpretación $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} \models \varphi \text{ si y sólo si } \mathcal{I} \models \psi$$

≡ EQUIVAL. LOGICAS :

1. **Conmutatividad:** $\varphi \wedge \psi \equiv \psi \wedge \varphi$
2. **Asociatividad:** $\varphi \wedge (\psi \wedge \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \theta$
3. **Idempotencia:** $\varphi \wedge \varphi \equiv \varphi$
4. **Doble negación:** $\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$
5. **Distributividad:** $\varphi \wedge (\psi \vee \theta) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta)$
6. **De Morgan:** $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$

a) $\neg\forall x(\varphi(x)) \equiv \exists x(\neg\varphi(x))$

a) Sea $\mathcal{I}$ un interpretación cualquiera.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \neg\forall x(\varphi(x)) &\Leftrightarrow \mathcal{I} \not\models \forall x(\varphi(x)) \\
&\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \not\models \varphi(a) \\
&\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \neg\varphi(a) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\neg\varphi(x))
\end{aligned}$$

b) $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))$

Sea $\mathcal{I}$ un interpretación cualquiera.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) &\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a) \vee \psi(a) \\
&\Leftrightarrow \text{existe } a \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \varphi(a), \text{ o} \\
&\quad\ \text{existe } b \text{ en } \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models \psi(b) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x)) \text{ o } \mathcal{I} \models \exists x(\psi(x)) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))
\end{aligned}$$

1. $\boxed{\forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee R(x))}$
2. $\boxed{\forall x(P(x)) \rightarrow \exists y(R(y)) \equiv \neg\exists y(R(y)) \rightarrow \neg\forall x(P(x))}$

• TEOREMA :

1. $\neg\forall x(\varphi(x)) \equiv \exists x(\neg\varphi(x))$
2. $\neg\exists x(\varphi(x)) \equiv \forall x(\neg\varphi(x))$
3. $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))$
4. $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x(\varphi(x)) \vee \exists x(\psi(x))$

! ADVERTENCIA! ($\not\equiv$)

1. $\forall x(\exists y(\varphi(x,y))) \not\equiv \exists x(\forall y(\varphi(x,y)))$
2. $\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \not\equiv \forall x(\varphi(x)) \vee \forall x(\psi(x))$
3. $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \not\equiv \exists x(\varphi(x)) \wedge \exists x(\psi(x))$

Para probar no-equivalencia basta con proporcionar una interpretación que satisface solo a una de las fórmulas comparadas

3 CONSEC. LÓGICA PREDICADOS:

1 SATISFAC:

Σ conj. Formulas: $\mathcal{I}$ SAT Σ sobre $a_1,\dots,a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$

Si:

$$\boxed{\mathcal{I} \models \varphi(a_1,\dots,a_n) \quad \forall \varphi \in \Sigma}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{I} \models \Sigma(a_1,\dots,a_n)}$$

2 CONSEC. LÓGICA:

φ es cons. log de un Σ ($\Sigma \models \varphi$)

Si $\forall\ \mathcal{I}$ y $a_1,\dots,a_n \in \mathcal{I}(dom)$ se cumple

$$\boxed{\Sigma \models \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{I} \models \Sigma(a_1,\dots,a_n) \Rightarrow \mathcal{I} \models \varphi(a_1,\dots,a_n)}$$

$$\boxed{\Sigma \models \varphi \longleftrightarrow \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \text{ INCONSIST}}$$

Ejemplos

¿Cuáles son consecuencias lógicas válidas?

- $\{\forall x(\varphi(x)) \wedge \forall x(\psi(x))\} \models \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$ ✓
- $\{\exists x(\varphi(x)) \wedge \exists x(\psi(x))\} \models \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$ ✗
- $\{\forall x(\varphi(x))\} \models \exists x(\varphi(x))$ ✓
- $\{\forall x(\exists y(\varphi(x,y)))\} \models \exists x(\forall y(\varphi(x,y)))$ ✗

A Reglas inferencia

1. **Especif. Universal**:

$$\frac{\forall x\,(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para cualquier } a}$$

2. **Generaliz. Universal**:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para } a \text{ arbitrario}}{\forall x\,(\varphi(x))}$$

1. **Especif. Existencial**:

$$\frac{\exists x\,(\varphi(x))}{\varphi(a) \text{ para algún } a}$$

2. **Generaliz. Existencial**:

$$\frac{\varphi(a) \text{ para algún } a}{\exists x\,(\varphi(x))}$$

Ejercicio

Consideremos los siguientes predicados:

- $P(x) := x$ es persona
- $M(x) := x$ es mortal

Podemos modelar el problema de la siguiente forma:

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x(P(x) \to M(x)) \\ P(s)\end{array}}{M(s)}$$

Debemos mostrar que

$$\{\forall x(P(x) \to M(x)), P(s)\} \vDash M(s)$$

por regla de implicancia esto es equivalente a

$$\{\forall x(\neg P(x) \vee M(x)), P(s)\} \vDash M(s)$$

Consideremos $\Sigma = \{\forall x(\neg P(x) \vee M(x)), P(s), \neg M(s)\}$:

(1)	$\forall x(\neg P(x) \vee M(x))$	$\in \Sigma$
(2)	$\neg P(s) \vee M(s)$	especificación universal de (1)
(3)	$P(s)$	$\in \Sigma$
(4)	$M(s)$	resolución de (2), (3)
(5)	$\neg M(s)$	$\in \Sigma$
(6)	$\square$	resolución de (4), (5)

• CLASE 8 (METODOS DEMOSTRACIÓN)

Un **axioma** es una afirmación matemática que se considera evidente y se acepta sin requerir demostración previa.

Definición

Un **lema** es un resultado menor cuyo fin es ayudar en la demostración de un teorema.

Definición

Una **proposición** es un resultado interesante, pero de menor importancia que un teorema.

Definición

Un **corolario** es una afirmación matemática cuya demostración se deriva casi directamente de un teorema.

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

- Directa
- Contrapositivo
- Contradicción
- Por análisis de casos
- Otros tipos de demostración

Método directo

Suponemos que $P(n)$ es verdadero para un n arbitrario y demostramos que $Q(n)$ también es verdadero.

Método por contrapositivo

Suponemos que $Q(n)$ es falso para un n arbitrario y demostramos que $P(n)$ también es falso.

Método por contradicción

Suponemos que existe un n tal que $P(n)$ es verdadero y $Q(n)$ es falso e inferimos una contradicción.

Por demostrar:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

Dividimos el dominio de la interpretación $\mathcal{I}$ con que trabajamos en una cantidad finita de casos $C_1, \ldots, C_n$, tal que:

$$\mathcal{I}(dom) = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$

Método por casos

Para cada subdominio $C_1, \ldots, C_n$ demostramos que:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

Ejercicio

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Demuestre que $n^2 \geq n$.

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Tenemos 3 casos:

1. $n = 0$: es claro que se cumple la propiedad.
2. $n > 0$: como $n \in \mathbb{Z}$ tenemos que $n \geq 1$.
   Si multiplicamos por n a ambos lados, obtenemos que $n^2 \geq n$.
3. $n < 0$: si multiplicamos por n (negativo) a ambos lados:
   $n^2 > 0 \Rightarrow n^2 > n \Rightarrow n^2 \geq n$.

Ya que no existen más casos, concluimos que la propiedad se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}$. □

• CLASE 9 (CONJUNTOS) I2

1. **Conjuntos** : Colección de Objetos (elementos) PERTENECEN a el

   • $A = \{1,2\}$ $B = \{1, \{1,2\}\}$

   $2 \in A$ / $2 \notin B$

2. **Subconjunto** : $\forall x.$ si $x \in A \rightarrow x \in B$

   si NO $\longrightarrow$ TRIVIAL subconj

   • $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3\}$

   $\{1,\{2\}\} \nsubseteq \{1,2\}$

   ★ $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$

   d Si $(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in C)$

   $x \in A \wedge \neg x \in B \wedge x \in B \wedge \neg x \in C$

   $x \in A \wedge \neg x \in C$

   $x \in A \rightarrow x \in C$

   $\therefore A \subseteq C$

3. **Igualdad** : $A = B \longleftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

   • $\{1,1,2\} = \{1,2\}$ ✓

   $\{1,2\} = \{2,1\}$ ✓

   $\{1,2\} \neq \{\{1,2\}\}$ ✗

   ¿ $A = A$?

   d $\forall x.\ x \in A \rightarrow x \in A$ ≡ TAUTOLOGÍA

   * No orden y no duplicados

   ★ $A \nsubseteq B \longleftrightarrow \exists x (x \in A \wedge x \notin B)$

   ★ $A \neq B \longleftrightarrow A \nsubseteq B \vee B \nsubseteq A$

4. • **Axioma Extensión** : 2 CONJ son IGUALES si poseen Mismos Elementos

   $\{1,1\} = \{1\}$

   • **Axioma del VACÍO** : $\exists X$ tq $\forall x, x \notin X$: Vacío : $\emptyset$

· Propiedades del vacío (TEOREMA)

1. $\forall$ conj A se tiene : $\emptyset \subseteq A$
2. $\exists!$ conj vacío → d Para demostrar una ÚNICA Existencia → CONTRADICCIÓN → • ASUMIR QUE Existe otro!

d

Demostración

Aplicando la definición de subconjunto, debemos demostrar que $\forall x, x \in \emptyset \to x \in A$. Como no existe ningún elemento que pertenezca al conjunto vacío, la propiedad se cumple trivialmente, y luego $\emptyset \subseteq A$.

d

Demostración

Formalmente, debemos demostrar que

$$\forall A \forall B (A \text{ es vacío} \wedge B \text{ es vacío} \to A = B)$$

Por demostración directa, supongamos que tenemos conjuntos A y B vacíos. Por la propiedad demostrada anteriormente, y dado que A y B son conjuntos, tenemos que $A \subseteq B$, ya que estamos suponiendo que A es vacío. Recíprocamente, se tiene que $B \subseteq A$. Entonces, tenemos que

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

de donde se concluye que $A = B$. □

5. **Axioma Abstracción** (MUY PROBLEMATICO) → PERMISIVO

Si φ propiedad, $A = \{x \mid \varphi(x)\}$ es conj

* A es conjunto de todos los que cumplen φ :

$x \in A \longleftrightarrow \varphi(x)$

∴ ¡A CUALQUIER! Propiedad le corresponde UN CONJUNTO

* Paradoja RUSSELL : $S = \{B \mid \overbrace{B \notin B}^{\varphi}\}$

¿ $S \in S$? → Por def : NO → PARADOJA

6. **Axioma Separación** :

Si φ prop y C : "conj sano", ⇒ $A = \{x \mid x \in C \wedge \varphi(x)\}$

"No definido por ABSTRACCIÓN"

$C =$ "$\mathcal{U}$" → UNIVERSAL SANO

7 Operaciones

1. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
3. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
4. $P(A) = \{X \mid X \subseteq A\} \longrightarrow$ Conj: de todos los Subconjuntos
5. $A^c = \{x \mid x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A\}$

Observaciones
- $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
- $A \in \mathcal{P}(A)$
- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$

Conjunto Potencia

$P(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$

1. $A = \{1, 2, 3, 4\}$

¿ $2 \in P(A)$? $\longrightarrow$ No : $2 \nsubseteq A$; $2 \in A$ ✓

¿ $\{1,2\} \in P(A)$? $\rightarrow$ Si : $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3,4\}$ ✓✓

¿ $A \in P(A)$? $\rightarrow$ Si : $A \subseteq A$ ✓✓

¿ $\emptyset \in P(A)$? $\rightarrow$ Si : $\emptyset \subseteq A$ ✓✓✓ : AXIOMA

¿ $\cup P(A)$?

$\hookrightarrow \cup P(A) = A$

$\cap P(A) = \emptyset$

- $P(\{1,2\}) = \{1\} \uparrow \{2\}$: $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

  $\{1,2\}$, $\emptyset$

- $P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

Cardinalidad

$|A|$ = nº elementos del conj / $\underline{|P(A)| = 2^n}$; $n = |A|$

- $|\emptyset| = 0$ $\quad |\{\emptyset\}| = 1$

  $|\{1,2\}| = 2$

  $|\{1,2,3,\dots\}| = \infty$

CONSTRUCCIÓN NATURALES

oper: SUCESOR: $\delta(x) = x \cup \{x\}$

$0 = \emptyset$

$1 = \delta(0) = \delta(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

$2 = \delta(1) = \delta(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

3 $\quad \vdots$

NUM. NATURAL

1. $\emptyset \in \mathbb{N}$
2. Si $n \in \mathbb{N}$, ENTONCES $\delta(n) \in \mathbb{N}$

Suma: la sum de 2 naturales:

1. $\text{sum}(m, 0) = m$
2. $\text{sum}(m, \delta(n)) = \delta(\text{sum}(m, n))$

Ejercicio

Muestre que $sum(3,4) = 7$.

$$\begin{aligned}
sum(3,4) &= sum(3,\delta(3)) \\
&= \delta(sum(3,3)) \\
&= \delta(sum(3,\delta(2))) \\
&= \delta(\delta(sum(3,2))) \\
&= \delta(\delta(sum(3,\delta(1)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(sum(3,1)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(sum(3,\delta(0))))) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(sum(3,0))))) \\
&= \delta(\delta(\delta(\delta(3)))) \\
&= \delta(\delta(\delta(4))) \\
&= \delta(\delta(5)) \\
&= \delta(6) \\
&= 7
\end{aligned}$$

MULTIPLICACIÓN

1. $mult(m,0) = 0$
2. $mult(m,\delta(n)) = sum(m, mult(m,n))$

$$\begin{aligned}
mult(3,2) &= mult(3,\delta(1)) \\
&= sum(3, mult(3,1)) \\
&= sum(3, mult(3,\delta(0))) \\
&= sum(3, sum(3, mult(3,0))) \\
&= sum(3, sum(3,0)) \\
&= sum(3,3) \\
&\vdots \\
&= 6
\end{aligned}$$

Ejercicio

Demostraremos que la suma es asociativa.

Debemos demostrar que

$$sum(sum(a,b),c) = sum(a, sum(b,c))$$

Lo haremos por inducción estructural sobre c:

BI: $sum(sum(a,b),0) = sum(a,b) = sum(a, sum(b,0))$.

HI: Supongamos que se cumple que $sum(sum(a,b),c) = sum(a, sum(b,c))$ para un natural c.

TI: Por demostrar: $sum(sum(a,b),\delta(c)) = sum(a, sum(b,\delta(c)))$.
Desarrollamos el lado izquierdo: $sum(sum(a,b),\delta(c)) = \delta(sum(sum(a,b),c)) \overset{HI}{=} \delta(sum(a, sum(b,c))) = sum(a,\delta(sum(b,c))) = sum(a, sum(b,\delta(c)))$ $\square$

- **TEOREMA**

Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

Idempotencia

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

Absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

Elemento neutro

$$A \cup \varnothing = A$$
$$A \cap \mathcal{U} = A$$

Distributividad

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leyes de De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Elemento inverso

$$A \cup A^c = \mathcal{U}$$
$$A \cap A^c = \varnothing$$

Dominación

$$A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing$$

8 Operaciones Generalizadas

1. $\bigcup S = \{x \mid \exists A.\ A \in S \wedge x \in A\}$
2. $\bigcap S = \{x \mid \forall A.\ A \in S \rightarrow x \in A\}$

- $S = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$
  $\bigcup S = \{1,2,3,4\}$
  $\bigcap S = \{2\}$

- $\bigcup \emptyset = \emptyset$
- $\bigcap \emptyset = \mathcal{U} \longrightarrow$ * $\bigcap \emptyset = \{x \mid \forall A.\ \underbrace{A \in \emptyset}_{F:\ \text{No hay elem}} \rightarrow x \in A\}$ $\therefore$ se cumple para TODOS $\longrightarrow \mathcal{U}$

Notación alternativa

$$\bigcup \mathcal{S} = \bigcup_{A \in \mathcal{S}} A$$

$$\bigcap \mathcal{S} = \bigcap_{A \in \mathcal{S}} A$$

Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\}$ (una colección indexada de conjuntos), usaremos:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} = \bigcap_{i=0}^{n-1} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i, 0 \leq i < n \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i, 0 \leq i < n \text{ se tiene que } x \in A_i$$

Podemos extender lo anterior al caso infinito.
Si $\mathcal{S} = \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n, \ldots\}$:

$$\bigcup \mathcal{S} = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_{n-1} \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$$

$$\bigcap \mathcal{S} = A_0 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$$

Es decir:

$$x \in \bigcup \mathcal{S} \leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \in A_i$$

$$x \in \bigcap \mathcal{S} \leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } x \in A_i$$

• CLASE 10 (RELACIONES)

1 PAR ORDENADO

$$\boxed{(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}} \longrightarrow \text{TUPLA}$$

2 IGUALDAD TUPLAS

$$(a,b) = (c,d) \longleftrightarrow (a=c) \wedge (b=d)$$

d ⇐ Si $a=c \wedge b=d \Rightarrow \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \therefore (a,b)=(c,d)$

⇒ 1 Si $\underline{a=b} \longrightarrow (a,b) = \{\{a\},\{a,a\}\}$

$\{\{a\},\{a\}\}$ — AXIOMA EXTENSION

$\{\{a\}\}$ — AXIOMA EXTENSION

Hi: $\{\{a\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\} \longleftarrow \{\{a\}\}$

↳ $\{a\} = \{c\} \wedge \{a\} = \{c,d\}$

↓ por AXIOMA EXTENSIÓN:

$\{\{a\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ → $c=d$

1 elem — 1 elem también por el Axioma de EXT — $a=c$

$a=c \therefore \{c\} = \{c,d\}$ Y Por A.Extensión $c=d$

$\therefore$ Si $a=b$, $a=c$ y $c=d \rightarrow b=d$

• **TRÍO ORDENADO**: $(a,b,c) = ((a,b),c)$

• **n-Tupla**: $(a_1,\dots,a_n) = ((a_1,\dots,a_{n-1}),a_n)$

3 Producto cartesiano

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

e $A = (1,2)$, $B = (x,y)$ $\Big\}$ $A \times B = \{(1,x),(1,y),(2,x),(2,y)\}$

* $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1,\dots,a_n) \mid a_1 \in A_1 \wedge \dots \wedge a_n \in A_n\}$

↳ RECURSIVAMENTE $= (A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

1 Relaciones : Es SUBCONJUNTO del PRODUCTO CARTESIANO de conj.

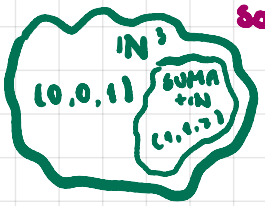
- $R \subseteq A \times B \longrightarrow$ R : Relación Binaria sobre A y B / si $A = B \longrightarrow$ Relación Binaria sobre A
- $R \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$

Ejercicio

Defina la suma sobre los naturales como una relación sobre $\mathbb{N}, \mathbb{N}, \mathbb{N}$.

$$+_{\mathbb{N}} = \{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid sum(n_1, n_2) = n_3\}$$

$$(3,4,7) \in +_{\mathbb{N}} \qquad (0,0,1) \notin +_{\mathbb{N}}$$



- $A = \{a, b, c, d, e\}$

$R_2 = \{(a,b), (b,c), (d,a)\}$

¿ $(d,a) \in R_2$? $\longrightarrow$ ✓ : "d está RELACIONADO con a en R_2"

★ En Relaciones
- No hay orden
- No hay repetidos

2 Relacion Binaria : Dado conj A, R es Relación Binaria sobre A si :

$$\boxed{R \subseteq A \times A \quad ó \quad R \subseteq A^2}$$

- Relación Binaria menor que :

$< \subseteq \mathbb{N}^2 \longrightarrow (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

Def: sean $m, n \in \mathbb{N}$

$(m,n) \in < \longleftrightarrow \underline{m \in n}$ → Def IN

- $(1,3) \in <$
  $(3,1) \notin <$
  $(1,1) \notin <$

¿Posibles Relaciones? Binarias

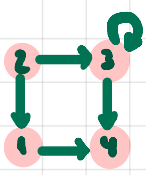
★ $|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|}$
$= 2^{|A| \cdot |B|}$

★ Notaciones :
1. $(a,b) \in R$
   - $(a,b) \notin R$
2. $a R b$
   - $a \not R b$

★ Representación

1. Grafo

- $V = \{1, 2, 3, 4\}$



$R \subseteq V^2$

$R = \{(1,4), (2,1), (2,3), (3,3), (3,4)\}$

- **R "Divide a"** sobre $\mathbb{N}$ sin 0

$a \mid b \longleftrightarrow \exists K \in \mathbb{N}$ tq $b = K \cdot a$

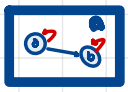
- $3 \mid 9$ $\quad 12 \mid 72$ $\quad 7 \nmid 9$

- **R "modulo n"** sobre $\mathbb{N}$

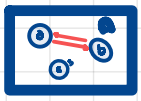
$a \equiv_n b \longleftrightarrow \exists K \in \mathbb{N}$ tq $|a-b| = K \cdot n$

- $8 \equiv_7 1$ $\quad 19 \not\equiv_3 4$

2 Propiedades Relaciones (R sobre A)

1. **Refleja** : $\forall x \in A$, $(x,x) \in R$  2 3 1

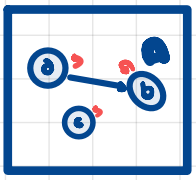
1.1 **Irrefleja** : $\forall x \in A$, $(x,x) \notin R$ 4

2. **Simetrica** : $\forall x,y \in A$, Si $(x,y) \in R \longrightarrow (y,x) \in R$ 

2.1 **Asimetrica** : $\forall x,y \in A$, Si $(x,y) \in R \longrightarrow (y,x) \notin R$

2.1 **Antisimetrica** : $\forall x,y \in A$:

Si $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$



3. **Transitiva** : $\forall x,y,z \in A$

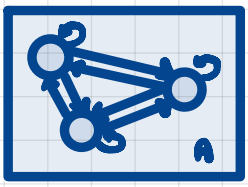
Si $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

4. **Conexa** : $\forall x,y \in A$: $(x,y) \in R \vee (y,x) \in R$

· CLASE 11 (R. EQUIVALENCIAS)

1 Relación de Equivalencia : (~)

Es una Relación :



1. **Refleja** : $x, x \in R$
2. **Simetrica** : $x, y \in R \rightarrow y, x \in R$
3. **Transitiva** : $x, y \in R \wedge y, z \in R \rightarrow x, z \in R$

Ejercicio

Demuestre que $\equiv_n$ es una relación de equivalencia.

Dem Reflej. (1), Simet (2), Transitiva (3).

Demostración

1 Reflexividad: Debemos demostrar que para todo $x \in \mathbb{N}$, $x \equiv_n x$. Por definición, debemos mostrar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x - x| = k \cdot n$. Como $x - x = 0$ para todo natural, podemos tomar $k = 0$ y luego se cumple la igualdad anterior, con lo que mostramos que $x \equiv_n x$.

2 Simetría: Debemos demostrar que si $x \equiv_n y$, entonces $y \equiv_n x$. Por definición, sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $|x - y| = k \cdot n$. Como $|x - y| = |y - x|$, tenemos que $|y - x| = k \cdot n$, y luego por definición de equivalencia módulo n, se cumple que $y \equiv_n x$.

3 Transitividad: Dados x, y, z tales que $x \equiv_n y$ e $y \equiv_n z$, debemos demostrar que $x \equiv_n z$. Usando la definición, esto es equivalente a demostrar que si $|x - y| = k_1 \cdot n$ y $|y - z| = k_2 \cdot n$, entonces $|x - z| = k \cdot n$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Asumiremos que $x \neq y \neq z$ (el resultado es trivial de otra manera). Supongamos ahora que $x - y > 0$ e $y - z > 0$ (los demás casos son análogos). Entonces, podemos escribir

$$x - y = k_1 \cdot n$$
$$y - z = k_2 \cdot n$$

y sumando ambas igualdades, obtenemos que $x - z = k_1 \cdot n + k_2 \cdot n$. Notemos que $x - z > 0$ también. Por lo tanto, si tomamos $k = k_1 + k_2$, tenemos que $|x - z| = k \cdot n$, concluyendo entonces que $x \equiv_n z$. □

2 Clases Equivalencia (X bajo ~ : Relación de Equivalencia)

$x \in A$ y $\sim$: R sobre A ⟶ TUPLAS de TAMAÑO 2, vivan en A

$$[x]_\sim = \{ y \in A \mid x \sim y \}$$

$(x, y) \in \sim$

$[x]_\sim$ es el Conj de todos los elem de A que Están RELACIONADOS con X ⟶ (x, y) o $x R y$

3 Teorema

$\sim$ R. Equiv. sobre A

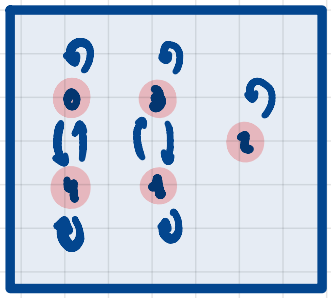
1. $\forall x \in A.\ x \in [x]$ ⟶ 1 $\sim$ es Refleja : $\therefore (x, x) \in A \rightarrow \boxed{x \in [x]}$
2. $x \sim y \longleftrightarrow [x] = [y]$
3. Si $[x] \neq [y] \rightarrow [x] \cap [y] = \emptyset$
   DISJUNT ó $[x] \cap [y] \neq \emptyset \rightarrow [x] = [y]$ ⟶ si tiene int. SON IGUALES

6 $[x]_\sim \subseteq A$

: $[x]_\sim = A$! ⟶ Pero relación equivalencia

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(0,0), (0,4), (1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3), (4,0), (4,4)\}$



$[0] = \{0, 4\} \longrightarrow \{x \in A \mid xR0\} : (0,x) \in R$

$(x,0)$

Teorema (1)

$0 \in [0]$

$1 \in [1]$

$\vdots$

$[1] = \{1, 3\}$

$[2] = \{2\}$

$[3] = \{1, 3\}$

$[4] = \{0, 4\}$

- $1 \sim 3 \longleftrightarrow [1] = [3]$ } Teorema (2)

$(1,3) - (3,1)$

- $[0] \neq [1] \longrightarrow [0] \cap [1] = \{0,4\} \cap \{1,3\} = \emptyset$ ✓

Teorema (3)

$A/R = \{[0], [1], [2]\}$

4 **Conjunto Cuociente** : (DIVISION DEL CONJ) → PARTICIÓN!

Es el conjunto de Todas las **CLASES EQUIVALENCIAS** existentes dentro de un CONJ A.

$$A/\sim = \{[x] \mid x \in A\}$$

- **Indice** : $|A/\sim|$ (n° elem)

- $N/_{\equiv_4} = \{[0], [1], [2], [3]\}$

$\therefore [4] = [0]$

$[5] = [1]$

$\vdots$

indice $= 4 \rightarrow |N/_{\equiv_4}| = 4$

Ejemplo

Determinemos $\mathbb{N}/\equiv_4$. Las clases de equivalencia son

$$
\begin{aligned}
[0]_{\equiv_4} &= \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k = b\} &&= \{0, 4, 8, 12, \ldots, -4, -8, -12, \ldots\} \\
[1]_{\equiv_4} &= \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 1 = b\} &&= \{1, 5, 9, 13, \ldots, -3, -7, -11, \ldots\} \\
[2]_{\equiv_4} &= \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 2 = b\} &&= \{2, 6, 10, 14, \ldots, -2, -6, -10, \ldots\} \\
[3]_{\equiv_4} &= \{b \mid \exists k.\ 4 \cdot k + 3 = b\} &&= \{3, 7, 11, 15, \ldots, -1, -5, -9, \ldots\}
\end{aligned}
$$

Podemos visualizar $\mathbb{N}/\equiv_4$ de la siguiente forma

$$\mathbb{N}/\equiv_4 = \{[0], [1], [2], [3]\}$$

CLASE 12

Particiones

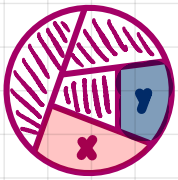
1. A Conjunto
2. S Subconjuntos de A

$\Big\}$ $S \subseteq P(A)$

$\downarrow$

S **PARTICIÓN** si:

1. $\forall X \in S,\ X \neq \emptyset$
2. $\cup S = A$
3. $\forall X, Y \in S,\ X \neq Y \longrightarrow X \cap Y = \emptyset$



1. No hay vacíos
2. La union GRAL es el Todo
3. No comparten elementos

Teorema:

Si $\sim$ es R.E en $A \longrightarrow A/\sim$ es una **PARTICIÓN** de A

d) $A/\sim \ = \{[x] \mid x \in A\}$ es una partición

Partición cumple 3 prop.

1) $\forall X \in A/\sim,\ X \neq \emptyset$

Sabemos que $\forall x \in A,\ x \in [x] \longrightarrow$ Teorema

y como todos los elem de $A/\sim$ son CLASES EQUIV, es claro que son todos NO VACÍOS!

2) $\cup A/\sim = A$

a) $\cup A/\sim \subseteq A$: para un $x \in \cup A/\sim$: $x \in [y]$ para $y \in A$
como las C.Equiv solo tienen elem de un conj def $\rightarrow x \in A$

✓ b) $A \subseteq \cup A/\sim$: Para un $x \in A$, sabemos $x \in [x]$, y $[x] \in A/\sim$ ($A/\sim$ son todos las clases)
$\therefore x \in \cup A/\sim$

3) $\forall X, Y \in A/\sim$ si $X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \emptyset$ $\Big\}$ todos los X de $A/\sim$ son clases Equiv, por teorema (2) $[x] \cap [y] = \emptyset$ Se cumple

$x \in X$
$y \in X$ $\rightarrow x \sim y$

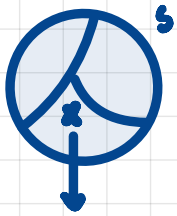
Teorema

LA RELACIÓN

Si S es PARTICIÓN de A $\longrightarrow$ $x \sim y \longleftrightarrow \exists X \in S$ tq $\{x, y\} \subseteq X$

es una RELAC. EQUIVALENCIA

↳ EN CHILENO :



x estará Relacionado con y si $\in$ al mismo X de la partición S

d 3 cosas

1] **Reflexividad** :
- $x \in A$, sabemos que $x \in X$ para $X \in S$, pues S es part A
- $\{x\} \subseteq X$ y por extensión $\{x, x\} \subseteq X$
- Por def de $\sim$, $x \sim x$ $\therefore$ ES REFLEJA

2] **Simetría** :
- $x, y \in A$ tales que $x \sim y$
- por def de $\sim$, existe $X \in S$ tq $\{x, y\} \subseteq X$
- por extensión : $\{y, x\} \subseteq X$
- por def $\sim$ concluimos que $y \sim x$ $\therefore$ ES REFLEJA

3] **Transitiva** :
- $x, y, z \in A$ tales que $x \sim y$ y $y \sim z$
- por def de $\sim$ Existen $X_1, X_2 \in S$ tq $\{x, y\} \subseteq X_1$
  $\{y, z\} \subseteq X_2$
- COMO $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ y COMO S es PARTICION
  ↳ Necesariamente $X_1 = X_2$
- luego $\{x, y\} \subseteq X_2$, entonces $\{x, z\} \subseteq X_2$
- Finalmente por def de $\sim$, $x \sim z$ (estan relacion)

$\therefore$ ES TRANSITIVA

CONSTRUCCIÓN CONJUNTOS

1 CONJ. NATURALES MODULO 4 : Será el cuociente de $\mathbb{N}$ respecto a la Relación $\equiv_4$

$$\mathbb{N}_4 = \mathbb{N}/_{\equiv_4} = \{[0],[1],[2],[3]\}$$

- **OPERACIONES** :

Definimos la suma módulo 4 según

$$[i] +_4 [j] = [i+j]$$

Ejemplos

$[3] +_4 [2] = [3+2] = [5] = [1]$ $\qquad$ $[1] +_4 [3] = [1+3] = [4] = [0]$

Podríamos renombrar los elementos de $\mathbb{N}_4$:

$$[0] \leftrightarrow 0 \quad [1] \leftrightarrow 1 \quad [2] \leftrightarrow 2 \quad [3] \leftrightarrow 3$$

Y ocupar simplemente $+$ y $\cdot$, obteniendo un nuevo conjunto con operadores bien definidos:

$$\mathbb{N}_4 = \{0,1,2,3\} \text{ con operadores } + \text{ y } \cdot$$

tal que, por ejemplo, $1+1=2$, $3+3=2$, $3\cdot 3=1$, etc.

2 $\downarrow$ es RELACIÓN sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se define como:

$$(m,n) \downarrow (r,s) \longleftrightarrow m+r = n+s \quad (m-n = r-s)$$

d Dem: $\downarrow$ es Rel. Equiv :

Reflexividad: Dado un par (m,n), es claro que $m+n=m+n$, y luego por definición de $\downarrow$ se cumple que $(m,n)\downarrow(m,n)$.

Simetría: Dados dos pares tales que $(m,n)\downarrow(r,s)$, por definición de $\downarrow$ se tiene que $m+s=n+r$. Es claro que $r+n=s+m$, y luego por definición de $\downarrow$ se cumple que $(r,s)\downarrow(m,n)$.

Transitividad: Dados tres pares tales que $(m,n)\downarrow(r,s)$ y $(r,s)\downarrow(t,u)$, debemos demostrar que $(m,n)\downarrow(t,u)$. Por definición de $\downarrow$, tenemos que $m+s=n+r$ (1) y $r+u=s+t$ (2). Despejando r en (2), obtenemos que $r=s+t-u$, y reemplazando esto último en (1), se tiene que $m+s=n+s+t-u$. Reordenando, obtenemos que $m+u=n+t$, y por definición de $\downarrow$, concluimos que $(m,n)\downarrow(t,u)$. Por lo tanto, la relación es transitiva.

Clases equivalencia $\downarrow$?

$$
\begin{aligned}
[(0,0)] &= \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\}\\
[(0,1)] &= \{(0,1),(1,2),(2,3),\ldots\}\\
[(1,0)] &= \{(1,0),(2,1),(3,2),\ldots\}\\
[(0,2)] &= \{(0,2),(1,3),(2,4),\ldots\}\\
[(2,0)] &= \{(2,0),(3,1),(4,2),\ldots\}\\
&\vdots\\
[(0,n)] &= \{(0,n),(1,n+1),(2,n+2),\ldots\}\\
[(n,0)] &= \{(n,0),(n+1,1),(n+2,2),\ldots\}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$(0,4)$	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$\cdots$
$(0,3)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$\cdots$
$(0,2)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$\cdots$
$(0,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$\cdots$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(4,0)$	$\cdots$

Conj. Enteros

El conjunto de los **números enteros** $\mathbb{Z}$ se define como el conjunto cuociente de $\mathbb{N}^2$ respecto a $\downarrow$:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^2/\downarrow = \{[(0,0)],[(0,1)],[(1,0)],[(0,2)],[(2,0)],\ldots\}.$$

$$
\begin{aligned}
[(0,0)] &\leftrightarrow 0\\
[(0,1)] &\leftrightarrow 1\\
[(1,0)] &\leftrightarrow -1\\
[(0,2)] &\leftrightarrow 2\\
[(2,0)] &\leftrightarrow -2\\
&\vdots\\
[(0,i)] &\leftrightarrow i\\
[(i,0)] &\leftrightarrow -i\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Y obtenemos entonces el conjunto de los números enteros

$$\mathbb{Z} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\ldots\}.$$

Definición

$[(m,n)] +_\downarrow [(r,s)] = [(m+r, n+s)]$

Ejercicio

Calcule $7 +_\downarrow -5$, $-18 +_\downarrow 4$ y $-3 +_\downarrow -6$.

Definición

$[(m,n)] \cdot_\downarrow [(r,s)] = [(m\cdot s + n\cdot r, m\cdot r + n\cdot s)]$

Ejercicio

Calcule $-3 \cdot_\downarrow -4$ y $3 \cdot_\downarrow 3$.

• CLASE 13

• **R. ORDEN PARCIAL**: Relación R sobre A es orden parcial si:

1. Refleja
2. Antisimetrica
3. Transitiva

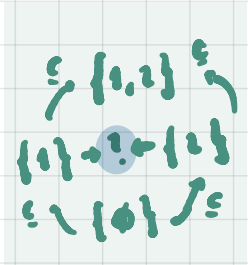
→ $(x, y) \in \leq$ ó $x \leq y$

* NOTACIÓN: $(A, \leq)$ es un ORDEN PARCIAL

- $(\mathbb{N}, \leq)$ → ORDEN PARCIAL y TOTAL
- $(\mathbb{Z}, \leq)$ ↗
- $(\mathbb{R}, \leq)$ ↗

↓

?



- $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es ORDEN PARCIAL y NO TOTAL

• **ORDEN TOTAL**: $\leq$ sobre A es TOTAL si es

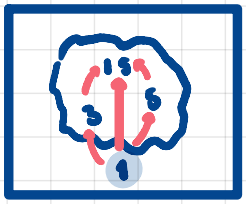
1. ORDEN PARCIAL
2. CONVEXA

Para todo par $x, y \in A$, se tiene que $x \leq y$ o $y \leq x$

> "En O. TOTAL se pueden comparar todos los elem, en el parcial solo algunos"

- Sea $(A, \preceq)$ ORD. PARCIAL, $S \subseteq A$, y $x \in A$:

1. **COTA INFERIOR** : x es COTA de S, si $\forall\, y \in S$



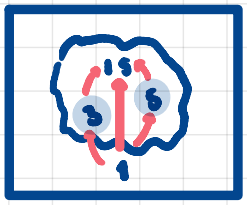
$A = \mathbb{N} / \{0\}$

$\preceq \; = \; |$

$x \preceq y$ (NO obliga a $x \in S$)

1 es COTA INF. NO HAY ∞

2. **MINIMAL** : x es minimal de S, si $x \in S$ y $\forall\, y \in S$



$y \preceq x \Rightarrow y = x$

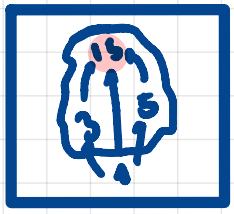
"NADIE dentro de S es menor al minimal

3 y 5 minimales
NINGUNO es mínimo

3. **Mínimo** : x es Mínimo de S, si $x \in S$ y es COTA.

"El menor de S"

4. Def de COTA SUPERIOR, MAXIMAL y MAXIMO SON ANALOGOS



15 es COTA SUP, pero EXISTEN ∞

15 es un MAXIMAL

15 es el MAXIMO

- **TEOREMA** : Si $(A, \preceq)$ es O. PARCIAL y $S \subseteq A$ no vacío

Si S tiene un MÍNIMO $\Rightarrow$ ES ÚNICO

- **INFIMO**: Si $(A, \leq)$ es O.PARCIAL y $S \subseteq A$

s es INFIMO de S si es:
1. COTA INFERIOR
2. para otra cota s': $s' \leq s$

"LA MAYOR COTA INFERIOR"

- **SUPREMO**: "la menor COTA SUPERIOR"

- $S = (0, \infty) \longrightarrow$ NO TIENE SUPREMO
  $\longrightarrow$ 0 es INFIMO

COTAS INF: $0, -0{,}1, -1, -2 \ldots$

mayor cota inf

+ COTA NO NECESARIA $\in S$

Ejercicio

Dé ejemplos de conjuntos que no tengan mínimo pero sí ínfimo, y lo análogo para máximo y supremo.

Un ejemplo típico son los intervalos abiertos en el orden $(\mathbb{R}, \leq)$. Por ejemplo, $(0, 1)$ no tiene mínimo pero sí infimo, 0; y no tiene máximo pero sí supremo, 1.

$(0, 1)$ No tiene minimo $(\mathbb{R}, \leq)$

pero 0 es la mayor cota inf: INFIMO

1 es la menor cota sup: SUPREMO

$[0, 1]$ si tiene minimo y maximo el 0 y el 1

- **TEOREMA**: Si $(A, \leq)$ es O.PARCIAL y $S \subseteq A$

Si S tiene un SUPREMO ó UNICO $\Rightarrow$ ES ÚNICO

- **Superior Completo** : Si para cada $S \subseteq A$ no vacío si S tiene cota sup. Entonces tiene supremo

  * $(A, \leq)$ orden parcial

- **Inferior Completo** : Si para cada $S \subseteq A$ no vacío si S tiene cota inf. Entonces tiene ínfimo

- **TEOREMA** :

$$\boxed{(A, \leq) \text{ es sup. completo} \longleftrightarrow \text{es inf. completo}}$$

d $\Rightarrow$: sup. comp $\longrightarrow$ inf. comp

sup. comp $\equiv$ $\forall S \subseteq A$ no vacío, si S esta acotado sup. tiene supremo

Sea $S \subseteq A$ no vacío, supongamos que está acotado inf, P.D.: Tiene infimo.

Como está acotado inf, tiene al menos 1 cota inf

$S_{ci} = \{ a \in A \mid a \text{ es cota inf de } S \}$ conj de todas cotas inf

Por def de cota inf : $\forall x \in S_{ci} \quad \forall y \in S \quad x \leq y$

Es claro que S_{ci} esta acotado super. por todo elem de S

Como $(A, \leq)$ es sup. completo, S_{ci} tiene supremo

el que por def, es cota superior de S_{ci}

$\forall y \in S \quad \sup(S_{ci}) \leq y$ puesto que el sup es la menor cota sup.

De esto deducimos que $\sup(S_{ci})$ es una cota inf de S.

y como es una cota sup de S_{ci}, es la mayor cota inf de S

$\therefore \inf(S) = \sup(S_{ci}) \Rightarrow (A, \leq)$ es inf completo

CLASE 14 (FUNCIONES)

$f : A \to B$

f : Relación Binaria de A en B : $f \subseteq A \times B$

1. **Función** : f es FUNCIÓN si cualquier $a \in A$, Si Existe un $b \in B$ tq $a f b$ ó $(a,b) \in f$ ENTONCES **b es ÚNICO**

IMAGENES UNICAS

$$\boxed{a f b \wedge a f c \Rightarrow b = c}$$

$f(a) = b \wedge f(a) = c$

* a es preimagen de b
* b es imagen de a

2. **Total** : f es TOTAL si todo elem en A tiene IMAGEN

$$\boxed{\forall a \in A \ \exists b \in B : f(a) = b}$$

"Todo elem del dominio tiene imagen en Recorrido"

* Si NO es TOTAL, es PARCIAL

3. **INYECTIVA** : f es INY si $\forall x, y \in A$

$$\boxed{f(x) = f(y) \Rightarrow x = y}$$

"NO EXISTEN 2 elem de A CON MISMA IMAGEN"

BIYECTIVA

4. **SOBREYECT** : f es SOBRE si cada $b \in B$ tiene PREIMAGEN

$$\boxed{\forall b \in B \ \exists a \in A : b = f(a)}$$

- **Relación Inversa**

  - R relación de A en B

$$\boxed{R^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \mid aRb\}}$$

- **Función Inversa** : f de A en B es INVERTIBLE si su **Relación Inversa f^{-1} es FUNCIÓN**

- **Composición** : $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$

$$\boxed{S \circ R = \{(a,c) \in A \times C \mid \exists b \in B : aRb \wedge bSc\}}$$

- **En funciones** : $f : A \to B$ y $g : B \to C$

$$\boxed{g \circ f : A \to C}$$

Dadas funciones f de A en B y g de B en C, la **composición** $g \circ f$ es una función de A en C.

1. $g \circ f$ es función: supongamos que

$$(g \circ f)(x) = z_1 \text{ y } (g \circ f)(x) = z_2, \text{ con } x \in A, z_1, z_2 \in C.$$

Por definición de composición:

$$g(f(x)) = z_1 \text{ y } g(f(x)) = z_2, \text{ con } x \in A, z_1, z_2 \in C.$$

Como f es función, existe un único $y \in B$ tal que $y = f(x)$, y luego

$$g(y) = z_1 \text{ y } g(y) = z_2, \text{ con } x \in A, y \in B, z_1, z_2 \in C$$

y como g también es función, $z_1 = z_2$. Concluimos que $g \circ f$ es función.

2. $g \circ f$ es total: sea $x \in A$.
Como f es función total, $\exists y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.
Similarmente, como g es función total, $\exists z \in C$ tal que $(y, z) \in g$.
Luego, $(x, z) \in g \circ f$.
Como para cada $x \in A$ existe $z \in C$ tal que $z = (g \circ f)(x)$, $g \circ f$ es total.

- **TEOREMA**: Si $f: A \to B$ es BIYECTIVA

ENTONCES $f^{-1}: B \to A$ es BIYECTIVA

$\Rightarrow$

d) 1) **FUNCIÓN**:

Me doy 1 preimagen con 2 imágenes

la inversa serán 2 preimagenes iguales

Suponemos $y f^{-1} x_1$ y $y f^{-1} x_2$

con $y \in B$, y $x_1, x_2 \in A$.

Es equivalente a $x_1 f y$ $x_2 f y$

como f es Biyectiva $\Rightarrow$ INYECTIVA

$x_1 = x_2 \longrightarrow y f^{-1} x_1 \wedge y f^{-1} x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f^{-1}$ es FUNCIÓN

2) **TOTAL**:

como f es SOBREYECT

$\forall y \in B \ \exists x \in A : y = f(x)$

$\Leftrightarrow$

$\forall y \in B \ \exists x \in A : x = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}$ es TOTAL

3) **INYECT**:

Me doy 2 preima con 1 imagen

Supongamos $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x$

Por def de RELACIÓN INVERSA

$f(x) = y_1$ y $f(x) = y_2$

Y como f es FUNCIÓN:

$x f y_1 \wedge x f y_2 \Rightarrow y_1 = y_2$

$\rightarrow x = f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ $\therefore f^{-1}$ INYEC

4) **SOBRE**:

como f es TOTAL: $\forall x \in A, \exists y \in b \ f(x) = y$

Luego $\forall x \in A \ \exists y \in B : f^{-1}(y) = x$

$\therefore f^{-1}$ es SOBREY.

- **TEOREMA**: $f: A \to B$ $g: B \to C$

1. Si f y g son INYECTIVAS, ENTONCES $g \circ f$ INYECTIVA
2. Si f y g son SOBREYECT, ENTONCES $g \circ f$ SOBREYECT

∴ Si f y g son BIYECTIVAS, ENTONCES $g \circ f$ BIYECTIVAS

DEMOSTRACIÓN

Dadas dos funciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$:

1. Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.
2. Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ también lo es.

1. Supongamos que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$, con $x_1, x_2 \in A$. Por definición de composición, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Como g es inyectiva, se tiene que $f(x_1) = f(x_2)$, y como f también es inyectiva, $x_1 = x_2$. Por lo tanto, $g \circ f$ es inyectiva.
2. Sea $z \in C$. Como g es sobre, sabemos que existe $y \in B$ tal que $z = g(y)$. Similarmente, como f es sobre, sabemos que existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Entonces, tenemos que $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, y por lo tanto para cada $z \in C$ existe $x \in A$ tal que $z = (g \circ f)(x)$. Concluimos que $g \circ f$ es sobre.

- **PRINCIPIO PALOMAR**: (m PALOMAS, n PALOMARES)

1. $f: \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$: $m > n$ $\Rightarrow$ f NO INYECTIVA
2. $f: \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$: $m < n$ $\Rightarrow$ f NO SOBREYECT

∴ $f: \mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$: BIYECTIVAS $\Rightarrow$ $m = n$

CLASE 15 (CARDINALIDAD)

- **Equinumeroso**: A, B CONJUNTOS,

(MISMO TAMAÑO)

$$\boxed{A \approx B}$$

A es EQUINUMEROSO con B

Si EXISTE UNA f BIYECTIVA $f: A \to B$

> A y B tienen el mismo tamaño si los elementos de A se pueden poner en correspondencia con los de B.

- **TEOREMA**: $\approx$ es una R. Equivalencia
  - 1 Refleja
  - 2 Simetrica
  - 3 Transitiva

dem

1. **Refleja**: $\forall$ conj A existe $f: A \to A$: $f(a) = a$ $\forall a \in A$, la cual es BIYECTIVA, $\therefore A \approx A$

2. **Simetric**: Sean A, B conj,
   si $A \approx B \Rightarrow$ Existe $f: A \to B$ BIYECTIVA,
   Así $f^{-1}: B \to A$ es BIYECTIVA, $\therefore B \approx A$

3. **Transitiva**: Sean A, B, C conj
   si $A \approx B$ y $B \approx C \Rightarrow$ Existen $f: A \to B$ y $g: B \to C$ Biyectivas.
   Existe $f \circ g: A \to C$ y es BIYECT por teorema
   $\therefore A \approx C$

- **Cardinalidad**: de un A conj, es su clase equivalencia bajo $\approx$

$$|A| = [A]_{\approx}$$

- $A = \{a, b, c, d, e, f\}$?

$$A \approx \{[0], [1], [2], [3], [4], [5]\}$$

$$|A| = [A]_{\approx} = [\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}]$$

$$|A| = [6]_{\approx}$$

- **Conj. FINITO**: A es Finito si $A \approx n$, $n \in \mathbb{N}$

$\equiv$ EXISTE f BIYECTIVA:

$$f : A \to n = \{0, \dots, n-1\}$$

$$\therefore |A| = [n]_{\approx} \longrightarrow \boxed{|A| = n}$$

- **LEMA**: A, B FINITOS y $A \cap B = \emptyset$

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B|}$$

dem: Sup $|A| = n$ y $|B| = m$ así $A \approx \{0, \dots, n-1\}$, $B \approx \{0, \dots, m-1\}$

$A \xrightarrow{f} \{\}^n$ luego $f : A \to \{0, \dots, n-1\}$ y $g : B \to \{0, \dots, m-1\}$

$B \xrightarrow{g} \{\}^m$ Sea $h : A \cup B \to \{0, \dots, n, n+1, \dots, n+m-1\}$ Tq:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x) + n, & x \in B \end{cases}$$

↳ para no repetir

Primero se debe notar que h está bien definida como función ya que no existe un x que pertenezca simultáneamente a A y B.

- Sobreyectividad: Sea $k \in \{0, \dots, n, n+1, \dots, n+m-1\}$, lo demostraremos por casos. Si $k < n$ entonces dado que f es sobreyectiva en $\{0, \dots, n+1\}$ sabemos que existe un $x \in A$ tal que $k = f(x) = h(x)$. Si $n \leq k < n+m$ entonces dado que g es sobreyectiva en $\{0, \dots, m-1\}$ sabemos que existe en $x \in B$ tal que $g(x) = k - n$ y por lo tanto $k = n + g(x) = h(x)$, finalmente h es sobreyectiva en $k \in \{0, \dots, n, n+1, \dots, n+m-1\}$.
- Inyectividad: Otra vez por casos, si $h(x) = h(y) < n$ entonces necesariamente $h(x) = f(x) = h(y) = f(y)$ de donde se concluye que $f(x) = f(y)$ y dado que f es inyectiva obtenemos que $x = y$. Si en cambio $n \leq h(x) = h(y) < n+m$, sabemos que $h(x) = n + g(x) = h(y) = n + g(y)$ de donde se concluye que $g(x) = g(y)$ y dado que g es inyectiva obtenemos que $x = y$, finalmente h es inyectiva.

- **TEOREMA**: A conj FINITO: $\boxed{|P(A)| = 2^{|A|}}$

  ↳ Leer DEMOSTRACIÓN (INDUCCIÓN)

  ∴ $|A| < |P(A)|$

- **ENUMERABLE**: A es Enumerable si $|A| = |\mathbb{N}|$

- $\mathbb{P} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (Numeros Pares)

  $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$ Porque podemos tomar

  $f: \mathbb{N} \to \mathbb{P} : f(n) = 2n$, como es BIYECTIVA $|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}|$

- Dem que $\mathbb{Z}$ es ENUMERABLE:

$[\ ]_{\downarrow}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$
$[(0,0)] \to$	$0 \longleftrightarrow$	0
$[(1,0)] \to$	$1 \longleftrightarrow$	1
$[(0,1)] \to$	$-1 \longleftrightarrow$	2
$[(2,0)] \to$	$2 \longleftrightarrow$	3
$\vdots$	-2	$\vdots$
	$\vdots$	

la Biyección: El orden en que recorro los elementos

Podemos tomar $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ -\left(\frac{n+1}{2}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

la cual es claramente biyectiva (se deja como ejercicio), y entonces $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

- **TEOREMA** : (LISTA INFINITA)

A es **ENUMERABLE** si se puede escribir en una LISTA ∞

$(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$ → SUCESIÓN INFINITA

1. Todos los elem de A ESTÁN en la lista : SOBREYECT
2. No hay elem REPETIDOS en la lista : INYECTIVA

Hay una biyección implícita entre índices y elementos de la lista:
$f : A \to \mathbb{N}$ con $f(a_i) = i$

Demuestre que:

- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.

$(0,0)^0$	$(1,0)^1$	$(2,0)^3$	
$(0,1)^2$	$(1,1)^4$	$(2,1)^7$	... INI
$(0,2)^5$	$(1,2)^8$		.... INI
⋮	⋮		
INI	INI		

→ Intución : los **RACIONALES** $\approx \mathbb{N}$

$(0,1) = \frac{0}{1}$

$(1,2) = 1/2$

⋮ ⋮

Las columnas no terminan → No podemos contar en vertical → Nunca acabaríamos de contar las columnas → No podríamos recorrer todos los elem → La forma correcta de contar es en **diagonal**!!!

- $\mathbb{N}^n$ es enumerable.

↳ INDUCCIÓN : CB : $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

- **TEOREMA CSB** (Cantor + Schroder-Bernstein): Demostrar Enumerabilidad sin encontrar una f Biyectiva

$$\boxed{A \approx B \longleftrightarrow \exists\ f: A \to B,\ g: B \to A \quad \text{INYECTIVAS}}$$

* Es mas facil darse 2 funciones inyectivas

* Numerable: $f: A \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \to A$

Ejemplo

Demuestre que $A = \{2^i \cdot 3^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ es enumerable.

Tomamos las siguientes funciones:

- $f: A \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = x$, la cual es claramente inyectiva.
- $g: \mathbb{N} \to A$ dada por $g(x) = 2^x \cdot 3^x = 6^x$.
  $g(x) = g(y) \Rightarrow 6^x = 6^y \Rightarrow x = y$, y por lo tanto es inyectiva.

Por teorema de CSB, concluimos que $|A| = |\mathbb{N}|$.

- **CONJUNTOS NO NUMERABLES**

- **TEOREMA**: El intervalo $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ es **INFINITO NO ENUMERABLE**

Dem: (Problema de Prueba) $\longrightarrow$ **CONTRADICCIÓN + Diagonalizac.**

ASUMIR que $(0,1)$ Si es Numerable
Entonces puedo ponerlos en una lista $(r_0, r_1, r_2, r_3 \ldots)$

$r_i = 0, d_{i0}\, d_{i1}\, d_{i2} \ldots$, $d_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

Reales	Representación decimal						
r_0	$0,$	d_{00}	d_{01}	d_{02}	d_{03}	d_{04}	$\cdots$
r_1	$0,$	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	$\cdots$
r_2	$0,$	d_{20}	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	$\cdots$
r_3	$0,$	d_{30}	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	$\cdots$
r_4	$0,$	d_{40}	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	$\cdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1, & d_{ii} < 9 \\ 0, & d_{ii} = 9 \end{cases}$$

Modificamos la diagonal !!!

¿Aparece r en la lista?

- ¿$r = r_0$? No, porque difieren en el primer dígito decimal.
- ¿$r = r_1$? No, porque difieren en el segundo dígito decimal.
- ...
- ¿$r = r_i$? No, porque el i-ésimo digito de r es distinto al de r_i:

$$d_i \neq d_{ii}$$

Sea $r \in \mathbb{R}$: $r = 0, d_0\, d_1\, d_2\, d_3\, d_4 \ldots$

r NO esta en la lista $\rightarrow\leftarrow$

$\therefore$ Como $(0,1)$ no puede escribirse en lista $\rightarrow$ NO NUMERABLE

- **TEOREMA:** $\boxed{(0,1) \approx \mathbb{R} \approx P(\mathbb{N})}$

- **Cardinalidad ($\preceq$)**

$$\boxed{A \preceq B \longleftrightarrow \exists\, f: A \to B \text{ INYECTIVA}}$$

↳ "A NO es MAS grande que B"

$$\boxed{A \preceq B \equiv |A| \leq |B|}$$

$$\boxed{A \prec B \equiv A \preceq B \text{ pero } A \not\approx B \equiv |A| < |B|}$$

$f: A \to B$ INYECT : al menos $A \preceq B$

y f : SOBREYE : Equinumeroso $A \approx B$

$\preceq$ es Rel. ORDEN? $\longrightarrow$ NO!

* Antisimetría : Si $A \preceq B$ y $B \preceq A \Rightarrow A = B$

$\updownarrow$ $\updownarrow$

$f: A \to B$ $g: B \to A$ INYECTIVAS

$\therefore$ por CSB : $A \approx B$ (No $A = B$)!

- $\mathbb{N}$ es menos numeroso que $\mathbb{R}$

$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

- **TEOREMA CANTOR**

A es menos numeroso que $P(A)$

$$\boxed{|A| < |P(A)|}$$

- $|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$

- Leer demostración

- **Hipotesis** (Continuo)

No Existe A tq $|\mathbb{N}| < |A| < |\mathbb{R}|$

$\therefore$ Irracion $\approx \mathbb{R}$

dem

Importante!

esto produce

Sea $f : A \to \mathcal{P}(A)$ BIYECCION $\qquad \bar{D} \subseteq A$

$$\bar{D} = \{ a \in A \mid a \notin f(a) \} \in \mathcal{P}(A)$$

$$D = \{ a \in A \mid a \in f(a) \}$$

	a_0	a_1	a_2	$\cdots$
$f(a_0)$	1			
$f(a_1)$		0		
$f(a_2)$			1	

COMO f es BIYECTIVA todo imagen tiene preimag

sea $a^* \in A$

si $f(a^*) = \bar{D}$

¿$a^* \in \bar{D}$?

Si $a^* \in \bar{D} \Rightarrow a^* \notin f(a^*)$
$\Rightarrow a^* \notin \bar{D}$ } CONTRAD

Si $a^* \in \bar{D} \Rightarrow a^* \in f(a^*)$
$\Rightarrow a^* \in \bar{D}$ } CONTRAD

$\therefore a^*$ NO EXISTE

$\therefore$ NO EXISTE una preimagen a^*

$\therefore$ NO es SOBREYEC

$\therefore A < \mathcal{P}(A)$

CLASE 16 (Algoritmos)

Corrección de Algoritmos:

Un algoritmo es CORRECTO; si $\forall$ INPUT VÁLIDO, El algoritmo TERMINA y entrega un OUTPUT VÁLIDO.

- DEMOSTRACION:
  1. CORRECION PARCIAL
  2. TERMINACIÓN

1 ALGORITMOS ITERATIVOS

Para Dem Correc. Parcial, buscamos un INVARIANTE $\mathcal{I}(k)$ para los loops:

- $\mathcal{I}$ propiedad es V en cada iteración k
- Relaciona variables del algoritmo
- Asegura postcondiciones se cumplan (cuando termine)

- while (G) $\longrightarrow$ G no puede ser invariante
  ⋮
  ↳ si no, no terminaría

Dem. Corrección Loop:

- **Base:** las precondiciones deben implicar que $\mathcal{I}(0)$ es verdadero.
- **Inducción:** para todo natural $k > 0$, si G e $\mathcal{I}(k)$ son verdaderos antes de la iteración, entonces $\mathcal{I}(k+1)$ es verdadero después de la iteración.
- **Corrección:** inmediatamente después de terminado el loop (i.e. cuando G es falso), si $k = N$ e $\mathcal{I}(N)$ es verdadero, entonces la postcondiciones se cumplen.

Dem. Terminación: Mostrar que $\exists$ K para el cual $G \equiv F$

2 Escribir Algoritmo multip z $n \in \mathbb{N}$ si usas mult

- PRECOND : $n, m \in \mathbb{N}$
- POSTCOND : $p = n \cdot m$

Dem correctitud algoritmo

$M(x, y)$ $\quad x = a$, $y = b$

```
1  z = 0
2  w = y
3  while w ≠ 0 :
4      z = z + x
5      w = w - 1
6  return z
```

* Notar que $0 \leq w \leq y$

es un invariante pero no dice nada sobre x o z

debemos centrarnos en buscar propiedades que tengan que ver con lo que queremos que el algoritmo haga

Veamos una tabla donde analicemos variables por iteraciones

variables	0	1	2	3	4	...	b
x	a	a	a	a	a	$\cdots$	a
y	b	b	b	b	b	$\cdots$	b
z	0	a	$2a$	$3a$	$4a$	$\cdots$	$b \cdot a$
w	b	$b-1$	$b-2$	$b-3$	$b-4$	$\cdots$	0

iteraciones

la siguiente expresión es cierta despues de cada iteracion

$z = (y - w)x$

$\therefore$ si Dem la exp es un invariante $\Rightarrow$ Aseguramos que despues de la ultima iteración $z = (y-w)x$. Y como el loop se detiene ssi $w = 0$

$z = y \cdot x$ ■ output correcto

Dem con inducción simple

$P(i)$:= al termino de cada iter i, se cumple $z_i = (y - w_i)x$

CB : $P(0)$: $z_0 = (y - w_0)x$
$(b - b)a = 0$ ✓

Hi : Asum $P(i)$

Ti : PD $P(i+1)$

Por codigo := $z_{i+1} = z_i + x$ → Linea 4
$= (y - w_i)x + x$ → H.I
$= x(y - w_i + 1)$
$= x(y - (w_i - 1))$ → Linea 5
$= x(y - w_{i+1})$ ■

$\therefore$ **Dem cob. parcial**

3 Dem terminación : chamullo →

Observemos que el bloque **while** termina cuando $w = 0$. En la iteración 0, $w = m$ natural y en cada iteración se reduce en 1. Es decir, los valores de w forman una sucesión decreciente de naturales, que en m iteraciones llega a $w = 0$. Por lo tanto, el algoritmo termina.

8 ALGORITMOS RECURSIVOS

↳ No necesita corr. parcial y terminación.

Solo se DEM. propiedad con **INDUCCIÓN**.
(corrección)

Se hace generalm. sobre el TAMAÑO del INPUT

La hip´otesis de inducci´on siempre dir´a algo como "si el algoritmo se ejecuta con un input de taman˜o i entonces es correcto3", y a partir de esa hip´otesis intentamos demostrar que "si el algoritmo se ejecuta con un input de taman˜o i + 1 tambi´en ser´a correcto". Obviamente el argumento tambi´en se puede plantear por inducci´on por curso de valores: como hip´otesis tomaremos que "si el algoritmo se ejecuta con un input de taman˜o menor que i entonces es correcto" y a partir de ella intentamos demostrar que "si el algoritmo se ejecuta con un input de taman˜o i tambi´en ser´a correcto". En cualquier caso siempre se tendr´a que tomar en cuenta el caso base por separado.

2 Escribir Algorit. RECURSIVO que encuentre el MAXIMO elemento de un arreglo.

PRE: $A = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$, y $n \in \mathbb{N}$ (LARGO)
POST: $m = \max(A)$

```
RecMax(A, n):

if n = 1 then
    RETURN a0
else
    K = RecMax(A, n-1)
    if a_{n-1} ≥ K then
        RETURN a_{n-1}
    else
        RETURN K
```

* OBS: Llamado a RecMax(A, i) solo toma los primeros i elementos de A

$[a_0, \dots, a_{i-1}]$

DEM. corrección del Algoritmo con el siguiente invariante:

$P(i)$:= El valor ret por RECMAX(A, i) siempre cumple

$\text{RecMax}(A, i) \geq a_0, a_1, \dots, a_{i-1}$

CB: $P(1)$ considero tramo $[a_0]$ y su retorno $a_0 \geq a_0$ ✓

HI: Asum $P(i)$ es cierta

TI: PD := $P(i+1)$ es cierta $\equiv \text{RecMax}(A, i+1) \geq a_0, \dots, a_i$

Demostración

- **TI:** Demostraremos que $P(i+1)$ es cierta, i.e.

$$\texttt{RecMax}(A, i+1) \geq a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i$$

Supongamos que se ejecutó $\texttt{RecMax}(A, i+1)$. Dado que el número de elementos es estrictamente mayor a 1, no estamos en el caso base y se hace un llamado a $\texttt{RecMax}(A, i)$.

Por **HI** dicho llamado es correcto y queda guardado en k, i.e.

$$k \geq a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}$$

Este valor puede cumplir uno de dos casos en el **if** de la línea 5:

- Cumple $a_i \geq k$. Luego, por transitividad, $a_i \geq a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i$ y $\texttt{RecMax}(A, i+1)$ sería el máximo de A.
- Cumple $a_i < k$. En tal caso, $k \geq a_0, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i$ y el retorno $\texttt{RecMax}(A, i+1)$ sería el máximo de A.

Con lo anterior, se prueba que $\texttt{RecMax}(A, i)$ es correcto. □

```
RecMax(A, n):
1   if n = 1 then
2       return a_0
3   else
4       k ← RecMax(A, n − 1)
5       if a_{n−1} ≥ k then
6           return a_{n−1}
7       else
8           return k
```

• NOTACIÓN ASINTOTICA

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

1 BIG O:

factor — punto inicio

$$O(f) = \{ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ g(n) \leq c f(n) \}$$

"$g \in O(f)$ es **a lo mas** del orden de f"

↳ $\boxed{\text{Si } g \in O(f) \Rightarrow \text{"}g \text{ crece mas lento/igual que } f\text{"}}$

1 BIG OMEGA:

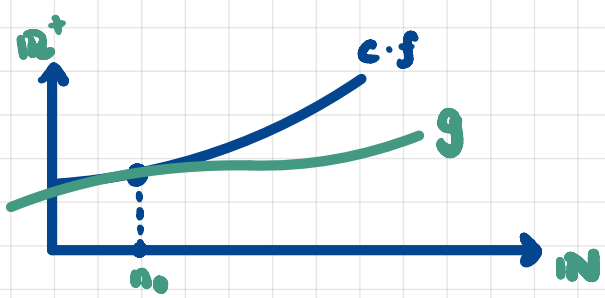
factor — punto inicio

$$\Omega(f) = \{ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ g(n) \geq c f(n) \}$$

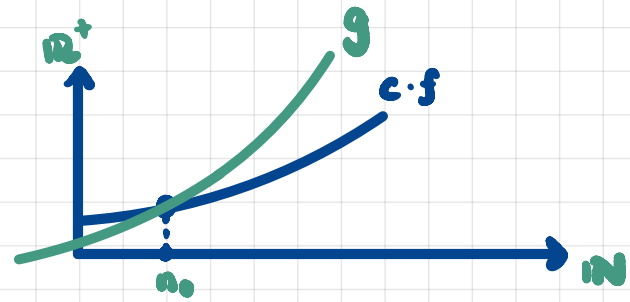
"$g \in \Omega(f)$ es **al menos** del orden de f"

↳ $\boxed{\text{Si } g \in \Omega(f) \Rightarrow \text{"}g \text{ crece mas Rapido/igual que } f\text{"}}$

$g \in O(f)$



$g \in \Omega(f)$



3 BIG THETA: $\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$

"$g \in \Theta(f)$ es **EXACTAM.** del orden de f"

↳ $\boxed{\text{Si } g \in O(f) \Rightarrow \text{"}g \text{ crece mas igual que } f\text{"}}$

Ejercicio

Demuestre que $g \in \Theta(f)$ si y sólo si existen $c, d \in \mathbb{R}^+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\forall n \geq n_0$: $c \cdot f(n) \leq g(n) \leq d \cdot f(n)$.

$$
\begin{aligned}
& g \in \Theta(f) \\
\Leftrightarrow \quad & g \in \mathcal{O}(f) \wedge g \in \Omega(f) \\
\Leftrightarrow \quad & (\exists d \in \mathbb{R}^+)(\exists n_1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_1)(g(n) \leq d \cdot f(n) \\
& \wedge (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_2 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_2)(g(n) \geq c \cdot f(n)) \\
& \text{Tomamos } n_0 = max\{n_1, n_2\} \\
\Leftrightarrow \quad & (\exists d \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(g(n) \leq d \cdot f(n) \\
& \wedge (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(g(n) \geq c \cdot f(n)) \\
\Leftrightarrow \quad & (\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists d \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(c \cdot f(n) \leq g(n) \leq d \cdot f(n)
\end{aligned}
$$

Dem: $f(n) = 60n^2 + 5n + 1 \in \Theta(n^2)$

PARA DEM NECESITAMOS 2 DEM: 1 $f(n) \in O(n^2)$ A LA VEZ
2 $f(n) \in \Omega(n^2)$

1 $f(n) \in O(n^2)$: NECESITAMOS ENCONTRAR UN c Y UN n_0: $\forall n > n_0$ $f(n) \leq c \cdot n^2$

$\forall n \geq 1$, $f(n) = 60n^2 + 5n + 1 \leq 60n^2 + 5n^2 + 1n^2 = 66n^2$

Si $c = 66$ y $n_0 = 1$: $n^2 \geq n \geq 1$ $\forall n \geq 1$

$f(n) \in O(n^2)$ PQ CUMPLE LAS CONDICIONES

2 $f(n) \in \Omega(n^2)$: " " c y n_0: $\forall n > n_0$ $f(n) \geq c \cdot n^2$

$\forall n \geq 0$, $f(n) = 60n^2 + 5n + 1 \leq 60n^2 + 0n + 0 = 60n^2$

Si $c = 60$ y $n_0 = 0$: $1 \geq 0$ y $5n \geq 0$ $\forall n \geq 0$

$f(n) \in \Omega(n^2)$

- $f(n) = \log_2(n) \in \Theta(\underline{\log_3(n)})$

- Truco: $x = \log_2(n)$ $\quad y = \log_3(n)$

$$n = 2^x = 3^y$$

$$\therefore x = \log_2(3)^y = y \cdot \log_2(3)$$

$$\boxed{\log_2(n) = \log_2(3) \cdot \log_3(n)}$$

$$\forall n > 1 \quad \log_2(n) \leq \underbrace{\log_2(3)}_{c} \cdot \log_3(n)$$

$$\forall n > 1 \quad \log_2(n) \geq \log_2(3) \log_3(n)$$

$\therefore$ Si $n_0 = 1$ y $c = \log_2(3)$ $\quad f(n)$ cumple con O y Ω

$$\therefore f(n) \in \Theta(\log_3(n))$$

- **TEOREMA**: $f(n) = a_k \cdot n^k + a_{k-1} \cdot n^{k-1} + \dots + a_1 \cdot n + a_0$

con $a_i \in \mathbb{R}$ y $a_k > 0$

$$\boxed{f \in \Theta(n^k)}$$

Notación	Nombre
$\Theta(1)$	Constante
$\Theta(\log n)$	Logarítmico
$\Theta(n)$	Lineal
$\Theta(n \log n)$	$n \log n$
$\Theta(n^2)$	Cuadrático
$\Theta(n^3)$	Cúbico
$\Theta(n^k)$	Polinomial
$\Theta(m^n)$	Exponencial
$\Theta(n!)$	Factorial

CLASE 17 (COMPLEJIDAD ALGORITMOS)

Queremos encontrar una función $T(n)$ que modele el tiempo de ejecución de un algoritmo.

- Donde n es el tamaño del input.
- No queremos valores exactos de T para cada n, sino que una notación asintótica para ella.
- Para encontrar T, contamos las instrucciones ejecutadas por el algoritmo. → **CONTAR !**
- A veces contaremos cierto tipo de instrucciones que son relevantes para un algoritmo particular.

Ejercicio

Considere el siguiente trozo de código:

```
1 x ← 0
2 for i = 1 to n do
3     for j = 1 to i do
4         x ← x + 1
```

Encuentre una notación asintótica para la cantidad de veces que se ejecuta la instrucción 4 en función de n.

```
1  for i := 1 to n
2      for j := 1 to i
3          x := x + 1
```

Nos interesa encontrar una notación asintótica para el número de veces que se ejecuta la línea 3 en función de n, digamos que esta cantidad es $T(n)$. Si fijamos el valor de i, las veces que se ejecuta línea 3 está ligada sólo al ciclo que comienza en la línea 2, y es tal que, si $i = 1$ se ejecuta una vez, si $i = 2$ se ejecuta dos veces,... si $i = k$ se ejecuta k veces. Entonces, dado que el valore de i va incrementándose desde 1 hasta n, obtenemos la expresión

$$T(n) = 1 + 2 + 3 \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

∴ La cantidad de veces que se ejecuta la línea 4 es $\Theta(n^2)$

```
1 x ← 0
2 j ← n
3 while j ≥ 1 do
4     for i = 1 to j do
5         x ← x + 1
6     j ← ⌊j/2⌋
```

Nos interesa encontrar una notación asintótica para el número de veces que se ejecuta la línea 4 en función de n, digamos que esta cantidad es $T(n)$. En este caso no resulta tan simple el cálculo. Primero notemos que para un j fijo, las veces que se ejecuta la línea 4 está solamente ligada al ciclo **for** que comienza en la línea 3. Ahora cada vez se termina una iteración del ciclo **while** de la línea 2 el valor de j se disminuye en la mitad. Supongamos ahora que el ciclo **while** se ejecuta k veces, obtenemos entonces la siguiente expresión para la cantidad de veces que se ejecuta la línea 4:

$$T(n) = n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \cdots + \frac{n}{2^{k-1}} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n}{2^i}.$$

Necesitamos una expresión para esta última sumatoria. Podemos reescribirla y usar la fórmula para la serie geométrica para obtener

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{n}{2^i} = n \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = n \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} = 2n \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right).$$

Ahora, dado que $1 - (\frac{1}{2})^k \leq 1$ obtenemos que

$$\forall n > 1, \quad T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{n}{2^i} \leq 2n,$$

y por lo tanto la cantidad de veces que se ejecuta la línea 4 es $O(n)$. Dado que inicialmente para el valor $j = n$ la línea 4 se ejecuta n veces, concluimos que $T(n) \geq n$ y por lo tanto es $\Omega(n)$. Sumado este último resultado al resultado anterior obtenemos que la cantidad de veces que se ejecuta la línea 4 es $\Theta(n)$.

¿Que instrucciones se cuentan?

Busqueda (A , n , k)

```
for i = 0 to n-1 do
    if a_i = k then
        return i
return -1
```

$A = [a_1, a_2 \dots a_{n-1}]$
n : largo
k : entero a encontrar en A

Estas instrucciones NO son representativ → No se cuentan

- **Comparaciones**: son las que tipicamente se cuentan

∴ Buscar Θ para cantidad de veces que se ejecuta 2 $T(n)$

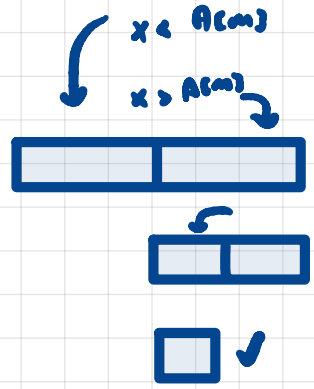
- Mejor caso: $a_0 = k$ $T(n)$ es $\Theta(1)$
- Peor caso: $k \notin A$ $T(n)$ es $\Theta(n)$

∴ Busqueda tiene COMPLEJIDAD $\Theta(n)$ en el peor caso o const $\Theta(1)$ en el mejor.

CLASE 18 (Complejidad Recursiva)

input : Arreglo ordenado $A[0,\ldots,n-1]$, elemento x, índices i, f
output: Índice $m \in \{0,\ldots,n-1\}$ o -1

```
BinarySearch(A, x, i, f):
1   if i > f then
2       return −1
3   else if i = f then
4       if A[i] = a then
5           return i
6       else
7           return −1
8   else
9       m ← ⌊(i + f)/2⌋
10      if A[m] < x then
11          return BinarySearch(A, x, m + 1, f)
12      else if A[m] > x then
13          return BinarySearch(A, x, i, m − 1)
14      else
15          if A[m] = x then return m
```



Ejercicio

Encuentre una función $T(n)$ para la cantidad de comparaciones que realiza el algoritmo `BinarySearch` en el peor caso, en función del tamaño del arreglo.

Respuesta:

$$T(n) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 4 & n > 1 \end{cases}$$

→ COMPARACIONES CB

Esta es una ecuación de recurrencia.

Contaremos las comparaciones. Dividiremos el análisis del peor caso:

- Si el arreglo tiene largo 1, entramos en la instrucción 3 y luego hay una comparación $\Rightarrow T(n) = 3$, con $n = 1$.
- Si el arreglo tiene largo mayor a 1, el peor caso es entrar en el else de 8 y luego en la segunda llamada recursiva. En tal caso, se hacen las comparaciones de las líneas $1, 3, 10, 12$ a lo que sumamos las comparaciones que haga la llamada recursiva, que serán $T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$.

Entonces, nuestra función $T(n)$ será:

$$T(n) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 4 & n > 1 \end{cases}$$

Necesitamos *resolver* esta ecuación de recurrencia.

- Es decir, encontrar una expresión que no dependa de T, sólo de n.
- Técnica básica: sustitución de variables.

¿Cuál sustitución para n nos serviría en el caso anterior?

$$T(n) = \begin{cases} 3 & n = 1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 4 & n > 1 \end{cases}$$

Ejercicio

Resuelva la ecuación ocupando la sustitución $n = 2^k$.

Respuesta: $T(n) = 4 \cdot \log_2(n) + 3$, con n potencia de 2.

$n = 2^k$

$n = 1 \rightarrow k = 0$

1. $$T(2^k) = \begin{cases} 3 & k = 0 \\ T(2^{k-1}) + 4 & k > 0 \end{cases}$$

2. Expandir caso Recursivo :

$$T(2^k) = T(2^{k-1}) + 4$$
$$= (T(2^{k-2}) + 4) + 4$$
$$= (T(2^{k-3}) + 4) + 4) + 4$$

$\vdots$ $\quad -3 \quad 3 \cdot 4$

i $\quad i$

$$\underline{T(2^k) = T(2^{k-i}) + 4i}, \quad k - i \geq 0$$

3. $\underline{i = k}$ $\rightarrow$ hacer aparecer $T(1)$

$$T(2^k) = T(2^{k-k}) + 4k = T(1) + 4k$$
$$= 3 + 4k$$
$$= 4 \log_2(n) + 3 \quad //$$

$n = 2^k \quad / \log_2(\,)$

$\log_2(n) = k$

¡¡ Solo valido para pot. 2 !! $\leftarrow$

$n = 2^k$

Notación Asintótica Condicional

$P \subseteq \mathbb{N}$

$$O(f|P) = \{ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid (\exists c \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0)(n \in P \to g(n) \leq c \cdot f(n)) \}$$

* Ω y Θ lo mismo.

Del ejemplo anterior

Si $POT2 = \{ 2^i \mid i \in \mathbb{N} \}$ $\qquad T(n) = 4\log_2(n) + 3$

la complejid. de T : $T \in \Theta(\log_2(n) \mid POT2)$

Ejercicio

Demuestre que si $T \in O(\log_2(n) \mid POTENCIA_2)$, entonces $T \in O(\log n)$.

- Demostraremos que $(\exists c \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(T(n) \leq c \cdot \log_2(n))$.

Veamos los primeros valores de $T(n)$ para estimar c y n_0: → 1°

$$T(1) = 3$$
$$T(2) = T(1) + 4 = 7$$
$$T(3) = T(1) + 4 = 7$$
$$T(4) = T(2) + 4 = 11$$

Podríamos tomar $c = 7$ y $n_0 = 2$, pues con $n = 1$:

$$T(1) = 3 \not\leq 7 \cdot \log_2(1) = 0$$

y con $n = 2$

$$T(2) = 7 \leq 7 \cdot \log_2(2) = 7$$

La intuición nos dice $n_0 = 2$ y $c = 7$... lo demostraremos → 2° (inducción)

PD: $\forall n \geq 2$, $T(n) \leq 7 \cdot \log_2(n)$. Por inducción fuerte:

BI: Además de $n = 2$, debemos mostrar la base para $n = 3$, puesto que depende de $T(1)$ que no está incluido en el resultado que estamos mostrando.

$$T(2) = 7 = 7 \cdot \log_2(2)$$
$$T(3) = 7 < 7 \cdot \log_2(3) \text{ pues el logaritmo es creciente}$$

HI: Supongamos que con $n \geq 4$, $\forall k \in \{2, \cdots, n-1\}$ se cumple que $T(k) \leq 7 \cdot \log_2(k)$.

TI: Como $n \geq 4$:

$$\begin{aligned}
T(n) &= T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 4 && \text{/ HI} \\
&\leq 7 \cdot \log_2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 4 && \text{/ log es creciente, sacamos el piso} \\
&\leq 7 \cdot \log_2\left(\frac{n}{2}\right) + 4 && \text{/ log de división} \\
&= 7(\log_2(n) - \log_2(2)) + 4 \\
&= 7 \cdot \log_2(n) - 7 + 4 \\
&= 7 \cdot \log_2(n) - 3 \\
&< 7 \cdot \log_2(n) \square
\end{aligned}$$

- **FUNC. ARMONICAS**

  1. **f ASINT. NO DECREC** : $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

     $(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(f(n) \leq f(n+1))$

     - $\log_2(n)$, n, n^k y 2^n

  2. **b-ARMONICA** : dado $b > 0$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

     $(\exists b > 0)(f(b \cdot n) \in O(f))$

     - $\log_2(n)$, n, n^k son b-ARMONICAS
     - 2^n NO es 2-ARMONICA $\longrightarrow$ $2^{2n} \notin O(2^n)$

       DEMOSTRACIÓN :

       Por contradicción, si $2^{2n} \in O(2^n)$ esto significa que

       $$\begin{aligned} \exists n_0, \exists c, \forall n \geq n_0 \quad 2^{2n} &\leq c \cdot 2^n \\ 2^{n+n} &\leq c \cdot 2^n \\ 2^n \cdot 2^n &\leq c \cdot 2^n \\ 2^n &\leq c \end{aligned}$$

       Como c es una constante, no importa qué tan grande sea, siempre podemos tomar un n lo suficientemente grande.

- **TEOREMA** : f y g ASINT NO DEC, g es b-ARMONICA y $f \in O(g \text{ POT } b)$

  "NOS AHORRA BUSCAR n_0 Y c"

  $\Rightarrow$ ENTONCES $f \in O(g)$

TEOREMA MAESTRO

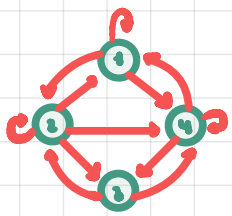
CLASE 19 (GRAFOS)

- **GRAFO DIRIGIDO**: $G = (V, E)$
  - V es conjunto (NODOS)
  - E es Rel. Binaria sobre V

$E \subseteq V \times V$ ← sus elem son ARISTAS

↳ "las aristas tienen flechas"

- $G = (V, E)$: $V = \{1, 2, 3, 4\}$



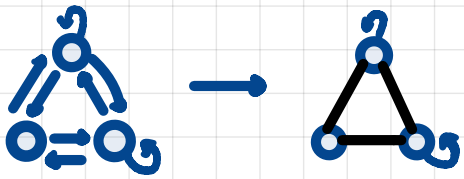
$E = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1), (4,3), (4,4)\}$

- **VECINO** (ADYACENTE): x e y son VEC si $(x, y) \in E$

- **RULO** (loop) es una ARISTA (x, y) ; $x = y$

- **PARALELAS**: (x, y) y (z, w) son PARALELAS si $x = w$ y $y = z$

- **GRAFO NO DIRIGIDO**: $G = (V, E)$ si TODA ARISTA tiene una PARALELA

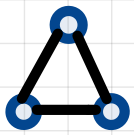


∴ E es **SIMETRICA**

↳ $\forall\, x, y \in V$

Si $(x, y) \in E \rightarrow (y, x) \in E$

- **GRAFO SIMPLE**: No tiene Rulos



$\therefore$ $G = (V, E)$: E es **IRREFLEJA**

$\nexists\ x, x \in E$

a !! Para efectos del curso, **GRAFO**, serán:
1. Simples
2. No dirigidos
3. No vacíos
4. Finitos

- **GRAFOS ISOMORFOS**: $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorf si $\exists$ f BIYECT

$$\boxed{f : V_1 \to V_2 : (x, y) \in E_1 \longleftrightarrow (f(x), f(y)) \in E_2}$$

1. f es un isomorfismo entre G_1 y G_2
2. $G_1 \cong G_2$

c

- **TEOREMA**: $\cong$ es una **R. EQUIVALENCIA**

Demostración:

- **Refleja:** Sea $G(V, E)$ tomemos la función $f : V \to V$ dada por $f(x) = x$. Luego, de manera trivial podemos inferir que $G \cong G$.
- **Simétrica:** Sean $G_1(V_1, E_1)$ y $G_2(V_2, E_2)$ tales que $G_1 \cong G_2$. Por definición existe $f : V_1 \to V_2$ biyectiva tal que todo $(u, v) \in E_1$ si y sólo si $(f(u), f(v)) \in E_2$ (*). Además, como f es biyectiva, sabemos que es invertible. Ahora mostraremos que f^{-1} cumple la definición de isomorfismo.

  ($\Rightarrow$) Sea $(u_2, v_2) \in E_2$ como f es biyectiva podemos expresarlo como $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$ con $u_1, v_1 \in V_1$. Luego, por (*) obtenemos $(u_1, v_1) \in E_1$. Como f^{-1} es inversa obtenemos que $(f^{-1}(u_2), f^{-1}(v_2)) \in E_1$.

  ($\Leftarrow$) Sea $(f^{-1}(u_2), f^{-1}(v_2)) \in E_1$, podemos reescribirlo como $(u_1, v_1) \in E_1$ con $u_1, v_1 \in V_1$. Luego por (*) obtenemos $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$ lo que es equivalente a $(u_1), f(v_1)) \in E_2$

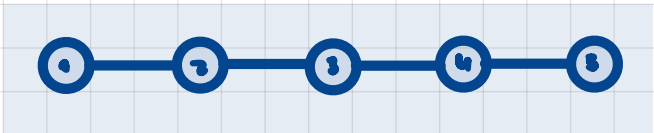
- **Transitiva:** Sean $G_1(V_1, E_1)$, $G_2(V_2, E_2)$ y $G_3(V_3, E_3)$ tales que $G_1 \cong G_2$ y $G_2 \cong G_3$. Por definición, sabemos que existen $f : V_1 \to V_2$ y $g : V_2 \to V_3$ biyectivas tales que

$$(u_1, v_1) \in E_1 \text{ si y sólo si } (f(u_1), f(v_1)) \in E_2 \text{ (i)}$$
$$(u_2, v_2) \in E_2 \text{ si y sólo si } (g(u_2), g(v_2)) \in E_3 \text{ (ii)}$$

Sea $u_1, v_1 \in V_1$ tales que $(u_1, v_1) \in E_1$, por (i) sabemos que $(f(u_1), f(v_1)) \in E_2$. Luego, si aplicamos (ii) obtenemos $(g(f(u_1)), g(f(v_1))) \in E_3$. Por lo tanto, podemos utilizar $g \circ f$ como función biyectiva y concluimos que $G_1 \cong G_3$.

- **CAMINOS**: "Grafo cuyos vertices pueden dibujarse en una linea"

  2 vertic son VECINOS $\leftrightarrow$ son consecutivos



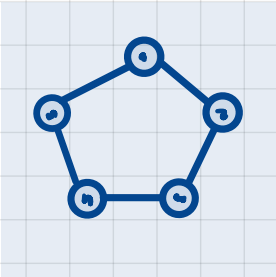
- **DEF FORMAL**: $G_n^P = (V_n^P, E_n^P)$; $V_n^P = \{v_1, \dots, v_n\}$

  $E_n^P = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \dots, n-1\} \text{ y } j = i+1\}$

  Un **CAMINO** (n vertices) es un grafo **isomorfo a G_n^P**

  * P_n será la CLASE.EQUIV. $[G_n^P]_{\cong}$

- **CICLO**: "Un camino que puede dibujarse como circulo"



- **DEF FORMAL**: $G_n^C = (V_n^C, E_n^C)$

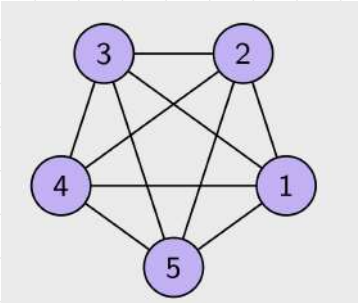
  - $V_n^C = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$
  - $E_n^C = \{(v_i, v_j) \mid i \in \{1, \dots, n-1\}, j = i+1\} \cup \{(v_n, v_1)\}$

  "cierre de la cola"

  Un **CICLO** (n vertices) es un grafo **isomorfo a G_n^C**

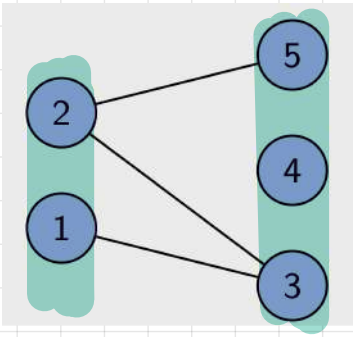
  * C_n será la CLASE.EQUIV. $[G_n^C]_{\cong}$

- **GRAFO COMPLETO**: Todos los pares de VERTICES son ADYACENTES



* K_n := CLASE.EQUIVAL. de los GRAF COMPL. de n vertices.

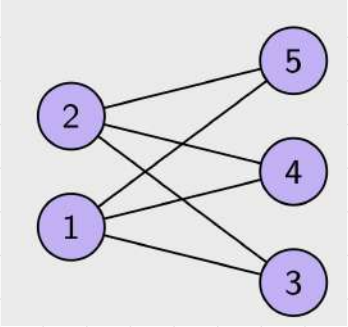
- **GRAFO BIPARTITO**: $G = (V, E)$ si V se puede PARTICIONAR en 2 conj V_1 y V_2: TODA ARISTA $(x, y) \in E$, $x \in V_1$ y $\in V_2$



o VICEVERSA

* $V = V_1 \cup V_2$
* $\emptyset = V_1 \cap V_2$
* CADA ARISTA UNE 2 vert EN conj DISTINTOS de la part.

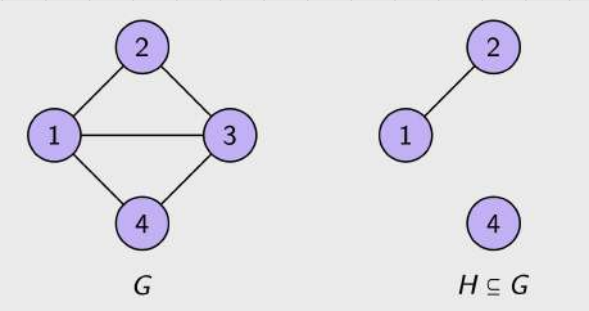
- **GRAFO BIPARTITO COMPLETO**



* Es UN GRAFO BIPARTITO, y CADA vertice es ADYACENTE a TODOS

Llamaremos $K_{n,m}$ a la clase de los grafos bipartitos completos, donde n y m son los tamaños de las particiones.

- **SUBGRAFO**: $H = (V_H, E_H)$ es un subgrafo de G ($H \subseteq G$) si $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$, E_H solo contiene aristas entre vert de V_H

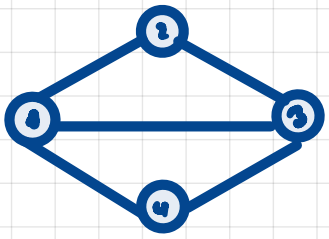


* Dado $G = (V_G, E_G)$

- **CLIQUE**: Es un conjunto de vertices $K \subseteq V_G$ tq: $\forall\, v_1, v_2 \in K$, $(v_1, v_2) \in E_G$

- **CONJ INDEP**: Es un conj de vertices $K \subseteq V_G$ tq: $\forall\, u, v \in K$, $(u, v) \notin E_G$

G



$K = \{1, 2, 3\}$ es **CLIQUE** en G

$K' = \{2, 4\}$ es **CONJ. INDEP** en G

- **COMPLEMENTO**: $\overline{G} = (V_G, \overline{E_G})$ donde $(u, v) \in E_G \leftrightarrow (u, v) \notin E_G$

- **AUTOCOMPLEMENTARIO**: G es autocomp si $G \cong \overline{G}$

- **TEOREMA**: $G = (V, E)$, un conj $V' \subseteq V$ es un clique en G si solo si es un conj indep de $\overline{G}$

- **CLASE 20 (CAMINOS)**

- **REPRESENTACIÓN MATRICIAL** : (**MATRIZ ADYACENCIA**)

$G(V,E)$ $\quad V = \{1,2,3,4\}$ $\quad E = \{(1,2),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$

$$M_G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- **GRADO** : El grado de v (VERTICE) ($\delta_G(v)$) es la **CANTIDAD de ARISTAS** que inciden en v

- **VECINDAD** : de v es el conj de vecinos de v :

$$N_G(v) = \{ u \mid (v,u) \in E \}$$

En un grafo simple, $\delta_G(v) = |N_G(v)|$

- **TEOREMA** : (HANDSHACKING)

Si $G = (V,E)$ un Grafo sin Rulos $\Rightarrow$ $\boxed{\sum_{v \in V} \delta_G(v) = 2|E|}$

"la suma de los GRADOS de los vertices es 2 veces la cantidad de ARISTAS".

- **COROLARIO**: En un Grafo sin Rulos, siempre hay una cantidad PAR de vert. de grado impar

- **CAMINATA**: En un Grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vertices $(v_0, v_1, \dots, v_k)$, con $v_0, \dots, v_k \in V$ tq $(v_{i-1}, v_i) \in E$, con i entre 1 y k

- **CAMINATA CERRADA**: Es una caminata que empieza y termina en el mismo vertice: $v_0 = v_k$

- **CAMINO**: caminata que no repite aristas

- **CICLO**: caminata cerrada que no repite aristas

- **LARGO**: cantidad de aristas que componen a la caminata, camino o ciclo
  - 1 vertice (0 aristas) $\longrightarrow$ largo 0

- **CONECTIVIDAD**: x e y vertices en un Grafo G están conectados si existe un camino en G que empieza en x y termina en y

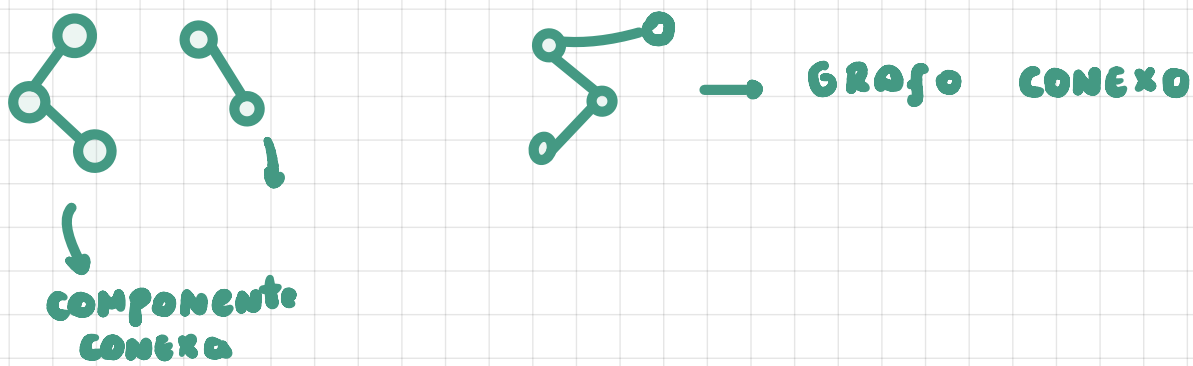
- La **C. Equivalencia** de un vertice bajo la Relación "CONECTADOS" es una **COMPONENTE CONEXA** de G

* La comp. conexa tambien contiene a las aristas entre los vertices de ella.

- **GRAFO CONEXO**: Grafo si todo par de vertices $x, y \in V$ esta conectado

  * En otro caso G es **DISCONEXO**

! Un **Grafo conexo** solo tiene un única **COMPONENTE CONEXA**

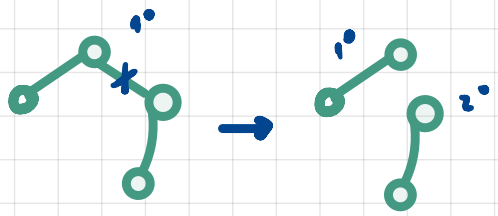


- **TEOREMA**: Un Grafo G con **n-vertices** y **k-aristas** tienen **AL MENOS n − k COMP. CONEXAS**

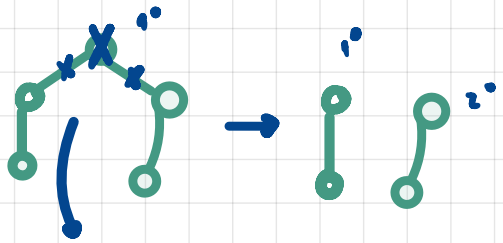
$G = (V, E)$ $V = \{1, 2, 3\}$ $E = \{(1, 2)\}$ al menos 2 comp conexas

- **COROLARIO**: G con **N VERTICES** es **CONEXO** tienen **AL MENOS n − 1 ARISTAS**

- **ARISTA DE CORTE**: Arista tal que al **Eliminarla** → **AUMENTAN** cantidad de: **COMP. CONEXAS**



- **VERTICE CORTE**: Vertice tal que al **Eliminarlo** → **AUMENTAN** cantidad de: **COMP. CONEXAS**



* Elimina tambien aristas incidentes

- **TEOREMA**: Una **arista** en G es de **corte** sssi no **no pertenece** a un **ciclo** en G

- **LEMA**: En un **grafo simple** G, toda **caminata cerrada** de **largo impar** contiene un **ciclo** de **largo impar**

- **CLASE 21**: (CICLOS)

- **TEOREMA**: Un Grafo Simple conexo G es **BIPARTITO** ssi **No tiene ciclos de LARGO IMPAR**

- **MULTIGRAFO**

Sea V conj de Vertices, E conj de ARISTAS

$S \subseteq \mathcal{P}(V)$:

$$S = \{ \{u,v\} \mid u \in V \wedge v \in V \}$$

MULTIGRAFO: $G = (V, E, f)$ es un trío ordenado

$f : E \to S$ es una función que asigna un par de vertices a cada arista en E

- $G = (V, E, f)$

$V = \{1,2,3\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3\}$

$f = \{ (e_1, \{1,2\}), (e_2, \{2,3\}), (e_3, \{2,3\}) \}$

- **CICLO EULERIANO**: en un (multi)grafo G es un **ciclo** que contiene a **todas las aristas** y **vertices de G**

  - Es ciclo → no repite aristas
  - Pueden repetirse vertices
  - G es **grafo euleriano** si contiene un **ciclo euleriano**

- **TEOREMA**: Un (multi)grafo **sin rulos** es **euleriano** ssi es **conexo** y **todos sus vertices** tienen **grado par**

• DEMOSTRACIÓN :

($\Rightarrow$) Supongamos que G es un (multi)grafo sin rulos y Euleriano.
Por demostrar: G es conexo y todos sus vértices tienen grado par.

Como G es Euleriano, tiene un ciclo C que contiene a todas las aristas y vértices. Se deduce directamente que G es conexo, pues dentro de C se pueden encontrar caminos entre todos los pares de vértices de G.

Ahora, supongamos que C empieza y termina en un vértice particular v. C necesita una arista para "salir" inicialmente y otra para "llegar" finalmente a v, y cada vez que v aparezca nuevamente en C, necesita dos aristas distintas más para entrar y salir:

Figure: Un vértice v particular del ciclo Euleriano C y sus aristas incidentes. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Esto implica que $\delta(v)$ es necesariamente par, pues todas las aristas que lo inciden deben aparecer en C una vez cada una. El ciclo C se puede representar comenzando y terminando en cualquier vértice de G, y entonces por el mismo argumento, todos los vértices tienen grado par.

($\Leftarrow$) Supongamos que G es un (multi)grafo sin rulos conexo y tal que todos sus vértices tienen grado par. Por demostrar: G es tiene un ciclo Euleriano. Se hará por inducción en la cantidad de aristas de G.

BI: Queremos tomar el grafo con el menor número de aristas que sea conexo y cuyos vértices tengan todos grado par. Si nos fijamos en el número de vértices, tenemos que el único grafo con un vértice que cumple con todas las condiciones es un vértice solo, el cual tiene un ciclo Euleriano compuesto por él mismo. El grafo más pequeño con más de un vértice que cumple con las condiciones es un grafo con dos vértices y dos aristas, el cual claramente tiene un ciclo Euleriano.

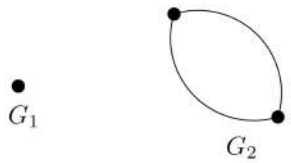


Figure: Los grafos más pequeños conexos tales que sus vértices tienen grado par. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

BI: Notemos además que cualquier grafo conexo con dos vértices de grado par tendrá un ciclo Euleriano.

HI: Supongamos que cualquier grafo conexo con vértices de grado par y que tiene menos de n aristas tiene un ciclo Euleriano.

TI: Sea G un (multi)grafo sin rulos conexo cuyos vértices tienen grado par y con exactamente n aristas.
Por demostrar: G tiene un ciclo Euleriano.

En la BI ya demostramos la propiedad para grafos con 1 o 2 vértices, por lo que podemos asumir que G tiene al menos 3 vértices. Como G es conexo y tiene al menos 3 vértices, debe existir un camino de largo 2 con aristas e_1, e_2 y que contiene 3 vértices v_1, v_2, v_3:

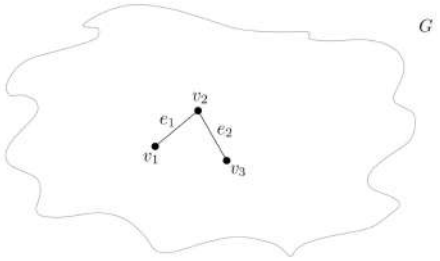


Figure: Camino de largo 2 en un grafo con al menos 3 vértices. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

TI: Creamos un nuevo grafo G' sacando e_1 y e_2 y agregando una nueva arista e entre v_1 y v_3:

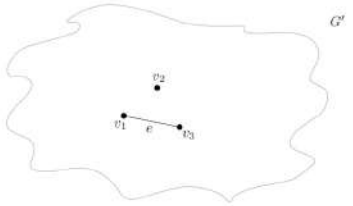


Figure: Creación de G' a partir de la eliminación de e_1 y e_2 y la inserción de e. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Notemos que G' tiene estrictamente menos aristas que G. Por otro lado, sólo v_1, v_2, v_3 pudieron ver afectados sus grados: v_1 y v_3 mantienen su grado en G', y v_2 lo redujo en 2, por lo que todos los vértices de G' tienen grado par. Sólo nos falta que G' sea conexo para aplicar la HI.

Nos pondremos entonces en dos casos:

1. G' es conexo: en este caso G' cumple con la HI, y por lo tanto tiene un ciclo Euleriano C'. Como C' contiene a todas las aristas de G', se cumple que $C' = (\ldots, v_1, e, v_3, \ldots)$. Si reemplazamos de vuelta e_1 y e_2, obtenemos un ciclo $C = (\ldots, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, \ldots)$, el cual es un ciclo Euleriano en G.

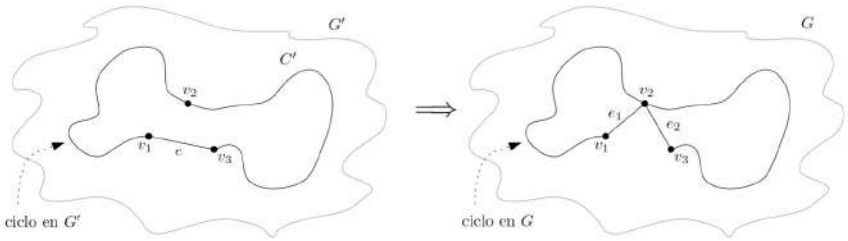


Figure: Construcción de un ciclo Euleriano para G a partir de uno para G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

2. G' no es conexo: como G es conexo, G' tiene dos componentes conexas: una contiene a v_2 y la otra a v_1 y v_3. A cada una de estas podemos aplicarle la HI: existe un ciclo C' que empieza y termina en v_2 que contiene a todos los vértices y aristas de la primera componente: $C' = (v_2, \ldots, v_2)$; y existe otro ciclo C'' que contiene a todas las aristas de la otra componente: $C'' = (\ldots, v_1, e, v_3, \ldots)$.

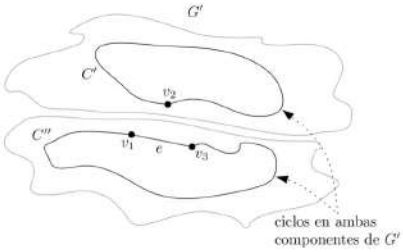


Figure: Ciclos en las dos componentes de G'.

Creamos un ciclo Euleriano para G "insertando" C' en C'' entre v_1 y v_3 añadiendo de vuelta e_1 y e_2: $C = (\ldots, v_1, e_1, v_2, \ldots, v_2, e_2, e_3, \ldots)$:

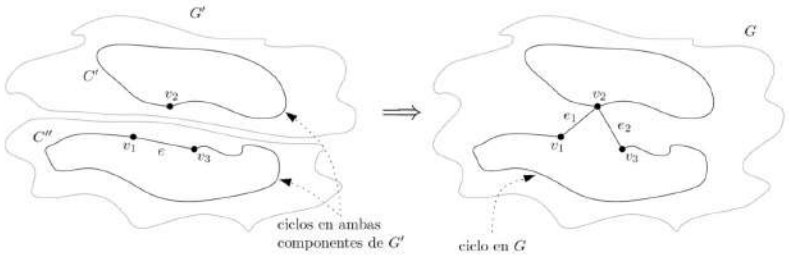


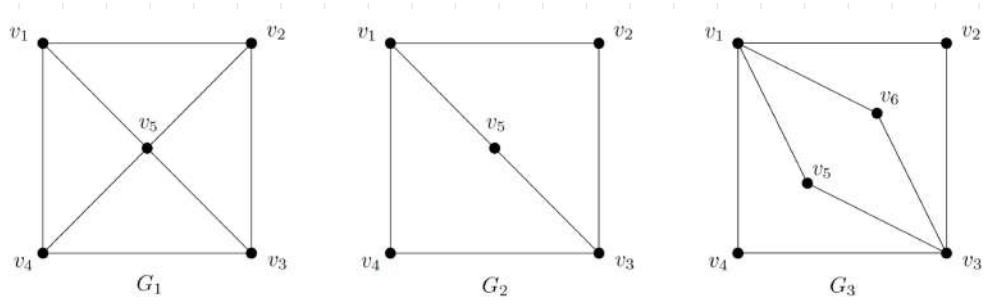
Figure: Construcción de un ciclo Euleriano para G a partir los ciclos en las dos componentes de G'. (Fuente: Apuntes Jorge Pérez).

Entonces, por inducción se concluye que cualquier (multi)grafo sin rulos conexo cuyos vértices tienen todos grado par es Euleriano.

- **CAMINO EULERIANO**: EN UN (MULTI)GRAFO ES UN **CAMINO NO CERRADO** QUE CONTIENE A **TODAS** LAS **ARISTAS** Y **VERTICES** DE G

- **TEOREMA**: UN (MULTI)GRAFO TIENE UN **CAMINO EULERIANO** ⟷ **ES CONEXO** Y CONTIENE **2 VERTICES GRADO IMPAR**

- **CICLO HAMILTONEANO**: EN UN grafo G es UN Ciclo que contiene a todos sus VERTICES una ÚNICA vez (excepto inicio y final)

- **GRAFO HAMILTONEANO**: CONTIENE UN **CICLO HAMILT.**

- ¿Hay alguna relación entre grafos Eulerianos y Hamiltonianos?
  - No: G_1 es Hamiltoniano pero no Euleriano; G_2 no es Hamiltoniano ni Euleriano; y G_3 es Euleriano pero no Hamiltoniano.