Inecuaciones con valor absoluto

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1] Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2] LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

28 de Marzo de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

EJEMPLO 1 Resuelva la siguiente inecuación con valor absoluto

$$2|x| < |x-1| \, .$$

Solución Hay varias formas de resolver este tipo de inecuaciones, se pueden usar al menos tres métodos alternativos.

Método 1. (Uso de las propiedades de las desigualdades)

Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leqslant 2|x| < |x-1| \quad &\Longleftrightarrow \quad 4|x|^2 < |x-1|^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4x^2 < (x-1)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4x^2 < x^2 - 2x + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 < -3x^2 - 2x + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 < (x+1)(-3x+1) \, . \end{aligned}$$

- Puntos críticos: $x = -1$, $x = \dfrac{1}{3}$:

Inecuaciones

- Tabla de signos

	$-\infty$	-1	$1/3$	∞
$-3x+1$	$+$	$+$	$-$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	
	$-$	$+$	$-$	

- Conjunto solución: $S = \left]-1, \dfrac{1}{3}\right[$.

Método 2. (Uso de las propiedades del valor absoluto) Esta técnica se usa del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
2|x| < |x-1| \quad &\Longleftrightarrow \quad -|x-1| < 2x < |x-1| \\
&\Longleftrightarrow \quad (-2x < |x-1|) \wedge (|x-1| > 2x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad (x-1 < 2x \vee x-2 > -2x) \wedge (x-1 < -2x \vee x-2 > 2x) \\
&\Longleftrightarrow \quad (x > -1 \vee 3x > 1) \wedge (3x < 1 \vee x < -1) \\
&\Longleftrightarrow \quad (x > -1) \wedge (x < \frac{1}{3}) \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right) \; .
\end{aligned}$$

Método 3. (Uso de los puntos críticos)

Esta método comienza buscando todos los puntos en los cuales los factores bajo los valores absolutos cambian de signo.

Si miramos la expresión

$$2|x| < |x-1|\,,$$

vemos claramente que los puntos críticos son el 0 para el primer valor abosluto y el 1 para el segundo. Estos puntos críticos se ordenan de menor a mayor y con ellos se forman los intervalos $(-\infty, 0]$, $(0, 1]$ y $(1, +\infty)$.

- Caso 1. $x \in (-\infty, 0]$, los factores x y $x-1$ son ambos menores o iguales a cero, por lo que

$$\begin{aligned} 2|x| < |x-1| &\iff -2x < -(x-1) \\ &\iff 2x > x-1 \\ &\iff x > -1\,. \end{aligned}$$

  Por lo tanto en este intervalo la solución es $S_1 = (-1, 0]$.

Inecuaciones

- Caso 2. $x \in (0, 1]$, el factor x es positivo y el factor $x - 1$ es negativo, entonces

$$\begin{aligned} 2|x| < |x-1| &\iff 2x < -(x-1) \\ &\iff 3x < 1 \\ &\iff x < \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Luego en este intervalo la solución es $S_2 = \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$.

Inecuaciones

- Caso 3. $x \in (1, \infty)$, los factores x y $x - 1$ son ambos positivos, entonces

$$\begin{aligned} 2|x| < |x-1| \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x < -(x-1) \\ &\Longleftrightarrow \quad x < -1\,. \end{aligned}$$

Esta inecuación tiene solución $(-\infty, -1)$ en $\mathbb{R}$, pero como lo estamos resolviendo en el intervalo $(1, \infty)$, se deduce que la solución es $S_3 = \varnothing$.
En consecuencia la solución final es

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-1, 0] \cup \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \varnothing = \left(-1, \frac{1}{3}\right)\,.$$

EJEMPLO 2 La posición del guardia en su ronda nocturna, sobre una recta imaginaria paralela a la fachada, tomando como origen de la recta el punto de ella que está más cerca de la (parte central de la) entrada principal a la mansión, está dada por la fórmula

$$x = \frac{40t}{t^2 + 16}$$

siendo t el tiempo, medido en horas desde la medianoche, y x la posición sobre la recta, medida en metros (con valores positivos para las posiciones hacia la derecha y valores negativos para las posiciones hacia la izquierda). Una persona, ubicada en la posición $x = 1$, recibió un impacto de bala entre las 4:00 y las 7:00 a.m. El perito forense declara que el o la culpable se encontraba a no más de tres metros de la víctima al momento de disparar. Ayude al guardia a demostrar su inocencia.

Inecuaciones con valor absoluto

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Solución El guardia es culpable si su distancia x a la posición $x = 1$ es menor o igual a 3 metros, es decir

$$d(x,1) \leqslant 3 \Longleftrightarrow |x-1| \leqslant 3 \Longleftrightarrow \left|\frac{40t}{t^2+16} - 1\right| \leqslant 3\,.$$

Usando las propiedades del valor absoluto obtenemos que

$$-3 \leqslant \frac{40t - t^2 - 16}{t^2+16} \leqslant 3\,.$$

La solución de la inecuación $-3 \leqslant \dfrac{40t - t^2 - 16}{t^2+16}$ es el conjunto

$$]-\infty, -10-\sqrt{84}[\cup]-10+\sqrt{84}, \infty[$$

Como $t \geqslant 0$ se sigue que $S_1 = [0, \infty[$.

Inecuaciones con valor absoluto

La solución de $\dfrac{40t - t^2 - 16}{t^2 + 16} \leqslant 3$ es el conjunto

$$]-\infty, 2] \cup [8, \infty[\,.$$

Como $t \geqslant 0$ entonces las soluciones admisibles son $S_2 = [0, 2] \cup [8, \infty[$.
Dado que las dos inecuaciones deben satisfacerse, el conjunto de valores de t para los cuales $|x - 1| \leqslant 3$ es $S = S_1 \cap S_2$, es decir

$$\{t \;:\; |x - 1| \leqslant 3\} = [0, 2] \cup [8, \infty[\,.$$

Por lo tanto, el guardia se encontraba a distancia menor igual a 3 del punto $x = 1$ entre los horarios $00:00$ am a las 02:00 a.m. y desde las 08:00 a.m. en adelante. Como el impacto de la bala se produjo entre las 4:00 y las 7:00 a.m. concluimos que el guardia es inocente.

EJEMPLO 3 Resolver la inecuación $\sqrt{x^2+x-2}-2\sqrt{x^2-1}\geqslant 0$.

Solución La inecuación está definida si $x^2+x-2\geqslant 0$ y $x^2-1\geqslant 0$.

1. $x^2+x-2\geqslant 0 \Longleftrightarrow x\in]-\infty,-5/2]\cup[1/2.\infty[$
2. $x^2-1\geqslant 0 \Longleftrightarrow x\in]-\infty,-1]\cup[1,\infty[$.

De i) y ii) se tiene que la inecuación está definida si $x\in]-\infty,-5/2]\cup[1,\infty[$. Además, se tiene que

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x-2}-2\sqrt{x^2-1}\geqslant 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2+x-2}\geqslant 2\sqrt{x^2-1}\\ &\Longleftrightarrow \quad x^2+x-2\geqslant 4x^2-4\\ &\Longleftrightarrow \quad 3x^2-x-2\leqslant 0\\ &\Longleftrightarrow \quad x\in[-2/3,1].\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $S=\{1\}$.

EJEMPLO 4 Resolver la inecuación

$$2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x}\,.$$

Solución Notemos que la expresión está definida si $x^2 - 3x \geqslant 0$ lo cual es equivalente a

$$x(x-3) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 3 \vee x \leqslant 0\,,$$

entonces cualquier solución deberá cumplir está última condición. Además, $2x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Si $x > \frac{1}{2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} 2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x} \quad &\Longleftrightarrow \quad (2x-1)^2 > x^2 - 3x \\ &\Longleftrightarrow \quad 4x^2 - 4x + 1 > x^2 - 3x \\ &\Longleftrightarrow \quad 3x^2 - x + 1 > 0 \end{aligned}$$

Note que el discriminate del término cuadrático es $\triangle = -11 < 0$ por lo que $3x^2 - x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Inecuaciones

Luego la solución para este caso es

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > \frac{1}{2} \wedge (x \geqslant 3 \vee x \leqslant 0)\} =]3, \infty[\,.$$

Si $x \leqslant \frac{1}{2}$, entonces $2x - 1 \leqslant 0$ y por lo tanto $2x - 1 \leqslant \sqrt{x^2 - 3x}$ es decir x no es solución.
Por lo tanto, la solución de esta inecuación es S_1.