Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2016

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución a la Interrogación N° 3

1. Sea A una matriz de $m \times n$.

   a) [2 pts.] Demuestre que $\dim(\text{Col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A^T)) = m$.

   b) [4 pts.] Demuestre que la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ tiene solución para todo vector $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$ si y solo si la ecuación $A^T\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tiene solamente la solución trivial.
   Nota: Aquí puede usar la parte (a) aunque no la haya demostrado.

Solución:

a) Claramente, $\dim(\text{Col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A^T)) = \dim(\text{Fila}(A^T)) + \dim(\text{Nul}(A^T))$.
Por el teorema del rango, sabemos que $\dim(\text{Fila}(A^T)) = \dim(\text{Col}(A^T)) = \text{rango}(A^T)$, y también que $\text{rango}(A^T) + \dim(\text{Nul}(A^T)) = m$ (el número de columnas de A^T).
Así, $\dim(\text{Col}(A)) + \dim(\text{Nul}(A^T)) = m$.

b) Si la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ tiene solución para todo vector $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$, entonces todo vector de $\mathbb{R}^m$ es combinación lineal de las columnas de A, por lo que $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ y por lo tanto $\dim(\text{Col}(A)) = m$.

Pero entonces, por la parte (a), $\dim(\text{Nul}(A^T)) = 0$, de donde $\text{Nul}(A^T) = \left\{\overrightarrow{\mathbf{0}}\right\}$, por lo que la ecuación $A^T\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tiene solamente la solución trivial.
Recíprocamente, si la ecuación $A^T\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tiene solamente la solución trivial, entonces $\text{Nul}(A^T) = \left\{\overrightarrow{\mathbf{0}}\right\}$, de donde $\dim(\text{Nul}(A^T)) = 0$.

Pero entonces, por la parte (a), $\dim(\text{Col}(A)) = m$, por lo que $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$. Así, todo vector de $\mathbb{R}^m$ es combinación lineal de las columnas de A, por lo que la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ tiene solución para todo vector $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$.
Nota: En realidad esta demostración puede ser hecha en un si y solo si, sin recurrir a dos argumentos separados:
La ecuación $A^T\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tiene solamente la solución trivial si y solo si $\text{Nul}(A^T) = \left\{\overrightarrow{\mathbf{0}}\right\}$, de donde $\dim(\text{Nul}(A^T)) = 0$, lo que —por la parte (a)— es equivalente a $\dim(\text{Col}(A)) = m$, que a su vez es equivalente a $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$.
Pero esto último es equivalente a que todo vector de $\mathbb{R}^m$ sea combinación lineal de las columnas de A, lo que finalmente es lo mismo que decir que la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ tiene solución para todo vector $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$.

También podemos escribir esto como

$$
\begin{aligned}
&\text{La ecuación } A^T\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}} \text{ tiene} \\
&\text{solamente la solución trivial} &\iff\quad & \mathrm{Nul}(A^T) = \left\{\overrightarrow{\mathbf{0}}\right\} \\
& &\iff\quad & \dim(\mathrm{Nul}(A^T)) = 0 \\
& &\iff\quad & \dim(\mathrm{Col}(A)) = m \\
& &\iff\quad & \mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m \\
& &\iff\quad & \text{todo vector de } \mathbb{R}^m \text{ es combinación} \\
& & & \text{lineal de las columnas de } A \\
& &\iff\quad & \text{la ecuación } A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}} \text{ tiene solución para todo } \overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m.
\end{aligned}
$$

Puntaje:

a)
- Por llegar a que $\dim(\mathrm{Col}(A)) = \mathrm{rango}(A^T)$, 1 punto.
- Por ocupar el teorema del rango para argumentar que $\mathrm{rango}(A^T)+\dim(\mathrm{Nul}(A^T)) = m$, 1 punto.

b) Si hacen todo en un solo "si y solo si", 0,8 puntos por mencionar y justificar cada una de las equivalencias mostradas más arriba (excepto por la primera, que no recibe puntaje).

Si lo hacen en dos partes separadas, 2 puntos por cada parte (dando 0,4 puntos cada condicional correspondiente a las equivalencias de arriba, salvo por las correspondientes a la primera equivalencia de más arriba.

A lo anterior se le suma el punto base.

2. Sean $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Encuentre una base $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2\right\}$ para $\mathbb{R}^2$ tal que P es la matriz de cambio de coordenadas de $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2\right\}$ a la base $\left\{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2\right\}$.

   Ayuda: Pregúntese qué representan las columnas de $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}}$

   Solución:

   Sean $\mathcal{B} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}_1, \overrightarrow{\mathbf{u}}_2\right\}$ y $\mathcal{C} = \left\{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \overrightarrow{\mathbf{v}}_2\right\}$.

   La matriz $P = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}} = \left[\ \left[\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_1\ \right]_{\mathcal{C}} \quad \left[\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_2\ \right]_{\mathcal{C}}\ \right]$.

   Pero dado cualquier $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$, se tiene $\left[\ \overrightarrow{\mathbf{u}}\ \right]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}}^{-1}\overrightarrow{\mathbf{u}}$, donde $P_{\mathcal{C}} = \left[\ \overrightarrow{\mathbf{v}}_1 \quad \overrightarrow{\mathbf{v}}_2\ \right] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

   Así, $P = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{\mathcal{P}} = \left[\ \left[\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_1\ \right]_{\mathcal{C}} \quad \left[\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_2\ \right]_{\mathcal{C}}\ \right] = \left[\ P_{\mathcal{C}}^{-1}\overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \quad P_{\mathcal{C}}^{-1}\overrightarrow{\mathbf{u}}_2\ \right] = P_{\mathcal{C}}^{-1}\left[\ \overrightarrow{\mathbf{u}}_1 \quad \overrightarrow{\mathbf{u}}_2\ \right] = P_{\mathcal{C}}^{-1}P_{\mathcal{B}}$, por lo que $P_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C}}P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$.

   Puntaje:

   - Por mencionar que $P = P_{\mathcal{C}}^{-1}P_{\mathcal{B}}$, 2 puntos.
   - Por despejar $P_{\mathcal{B}}$ en lo anterior, 2 puntos.
   - Por calcular correctamente $P_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{C}}P$, 2 puntos.

   A lo anterior se le suma el punto base.

3. Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita, $T : V \to W$ una transformación lineal, y H un subespacio de V.

   Demuestre que la dimensión de $T(H) = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in H\}$ (que es subespacio de W) es menor o igual a la dimensión de H. No es necesario que demuestre que T(H) es subespacio de W.

   Solución:

   Sea n la dimensión de H. Distinguiremos dos casos: $n = 0$, o $n > 0$.

   Si $n = 0$, $H = \{\mathbf{0}\}$, por lo que $T(H) = \{T(\mathbf{0})\} = \{\mathbf{0}\}$, de donde $\dim(T(H)) = 0 = \dim(H)$.

   Si $n > 0$, sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de H.

   Como $\mathcal{B}$ genera H, $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ genera $T(H)$.

   Si $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ es l.i., entonces $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ es una base de $T(H)$, por lo que $\dim(T(H)) = n = \dim(H)$.

   Si, por el contrario, $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ es l.d., entonces $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$ contiene un subconjunto l.i. (con $k < n$ vectores) que genera (y por lo tanto es base de) $T(H)$.

   Pero en este caso $\dim(T(H)) = k < n = \dim(H)$.

   Puntaje:

   En cualquiera de las soluciones (u otras *correctas* que se les ocurran a los alumnos):

   - Por plantear una demostración correctamente estructurada, 1,5 puntos.
   - Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 2 puntos.
   - Por justificar adecuadamente los argumentos, 2 puntos.
   - Los 0,5 puntos restantes se dan si manejan correctamente el caso de que $H = \{\mathbf{0}\}$ (donde $\dim H = 0$).

     Esto puede ser hecho explícitamente (como en la solución mostrada) o con una demostración más general, donde el caso $H = \{\mathbf{0}\}$ sea uno más.

   A lo anterior se le suma el punto base.

4. Sea A una matriz invertible, y sea λ un valor propio de A. Demuestre que $\lambda \neq 0$ y que $\frac{1}{\lambda}$ es un valor propio de A^{-1}.

   Ayuda: Suponga que $\overrightarrow{\mathbf{x}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ satisface $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}}$.

   Solución:

   Sea a λ un valor propio de A, y sea $\overrightarrow{\mathbf{x}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ un vector propio de A correspondiente al valor propio λ (o sea, $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \lambda\overrightarrow{\mathbf{x}}$).

   Si $\lambda = 0$, entonces la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tiene una solución no trivial, lo que es imposible ya que A es invertible.

   Además, $A^{-1}\overrightarrow{\mathbf{x}} = A^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}(\lambda\overrightarrow{\mathbf{x}})\right) = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(\lambda\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\lambda}A^{-1}(A\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\lambda}\left(A^{-1}(A\overrightarrow{\mathbf{x}})\right) = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{\mathbf{x}}$, por lo que $\frac{1}{\lambda}$ es valor propio de A^{-1} (con vector propio $\overrightarrow{\mathbf{x}}$).

   Puntaje:

   - Por demostrar que $\lambda \neq 0$, 2 puntos.
   - Por darse cuenta de que un vector propio de A correspondiente al valor propio λ es también vector propio de A^{-1}, 2 puntos.
   - Por mostrar que el valor propio de A^{-1} correspondiente al vector propio recién mencionado es $\frac{1}{\lambda}$, 2 puntos.

   A lo anterior se le suma el punto base.

5. Diagonalice la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

sabiendo que $\lambda = 5$ es un valor propio de A.

Solución:

El polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 20 - 24\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 = (5-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

Así, $\lambda = 2$ (con multiplicidad 2) y $\lambda = 5$ (con multiplicidad 1) son los valores propios de A.

Para saber si A es o no diagonalizable, debemos verificar si la dimensión de cada espacio propio es igual a la multiplicidad algebraica del valor propio correspondiente.

Como la multiplicidad del valor propio $\lambda = 5$ es 1, la única posibilidad de que A no sea diagonalizable es que la dimensión del espacio propio correspondiente a $\lambda = 2$ sea 1.

Así, buscamos los vectores propios correspondientes a $\lambda = 2$. Para ello, resolvemos la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = 2\overrightarrow{\mathbf{x}}$ o —equivalentemente— $(A - 2I)\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, lo que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz ampliada escalonada reducida por filas es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, por lo que el sistema queda equivalente a $x_1 = -x_2 - x_3$.

Así, una base para este espacio propio está dado por las elecciones $(x_2, x_3) = (1, 0)$ y $(x_2, x_3) = (0, 1)$, que corresponde a los vectores propios $(-1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$. Así, la dimensión de este espacio propio es 2, por lo que la matriz A es diagonalizable.

Para el valor propio $\lambda = 5$, debemos resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz ampliada escalonada reducida por filas es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, por lo que el sistema queda equivalente a $x_1 = x_2 = x_3$.

Así, un vector propio correspondiente a $\lambda = 5$ es $(1, 1, 1)$.

De todo lo anterior llegamos a que la matriz A puede ser diagonalizada como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Puntaje:

- Por calcular y factorizar correctamente el polinomio característico: 1 punto.
- Por indicar que la condición para que A sea diagonalizable es que la dimensión del espacio propio correspondiente a $\lambda = 2$ sea 2 (o, equivalentemente, que haya dos vectores propios l.i. correspondientes a $\lambda = 2$): 1 punto.
- Por encontrar dos vectores propios l.i. correspondientes a $\lambda = 2$ (que no necesariamente deben ser los aquí mostrados): 2 puntos (1 por cada vector).
- Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = 5$: 1 punto.
- Por escribir A correctamente en la forma $A = PDP^{-1}$: 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, y defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = A\overrightarrow{\mathbf{x}}$.

   Encuentre una base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^2$ con la propiedad de que la matriz de T en la base $\mathcal{B}$ (lo que el texto llama la $\mathcal{B}$-matriz para T) es una matriz diagonal.

   Solución:

   Buscamos una base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de A. El polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -6 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 2) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1).$$

   Así. los valores propios son 1 y 2, por lo que buscamos vectores propios correspondientes a estos valores propios:

   - Para $\lambda = 1$,
$$\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
     tiene por solución $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   - Para $\lambda = 2$,
$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
     tiene por solución $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   Así, una posible base que cumple con las condiciones pedidas es $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (y en realidad cualquier base formada por ponderados de estos vectores).

   Puntaje:

   - Por calcular y factorizar correctamente el polinomio característico: 1 punto.
   - Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = 2$: 2 puntos.
   - Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = 1$: 2 puntos.
   - Por escribir la base encontrada (no es necesario diagonalizar la matriz): 1 punto.

   A lo anterior se le suma el punto base.

7. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ actúa sobre $\mathbb{C}^2$. Determine los valores propios y una base para cada espacio propio en $\mathbb{C}^2$.

Solución:

El polinomio característico de A es

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)+2 = \lambda^2-4\lambda+5 = (\lambda-(2+i))(\lambda-(2-i)).$$

Así. los valores propios son $2+i$ y $2-i$, por lo que buscamos vectores propios correspondientes a estos valores propios:

- Para $\lambda = 2+i$,
$$\begin{bmatrix} -1-i & -2 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
tiene por solución $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix}$.
- Para $\lambda = 2-i$,
$$\begin{bmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
tiene por solución $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix}$.

Así, las bases de los espacios propios son:

- Para $\lambda = 2+i$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
- Para $\lambda = 2-i$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1+i \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Puntaje:

- Por calcular y factorizar correctamente el polinomio característico: 2 puntos.
- Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = 2+i$ (y por ende la base del espacio propio respectivo): 2 puntos.
- Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = 2-i$ (y por ende la base del espacio propio respectivo): 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) La suma de dos vectores propios de una matriz A también es vector propio de esta.

   b) Toda matriz de $n \times n$ con n vectores propios linealmente independientes es invertible.

   c) Si A es diagonalizable, entonces A tiene n valores propios distintos.

Solución:

a) **FALSO**

Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Claramente, los vectores $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ son vectores propios de A (con valores propios 1 y 2 respectivamente).

Sin embargo, $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ no es vector propio de A, ya que

$$A(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

que no es múltiplo de $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}$.

b) **FALSO**

Sea 0_n la matriz de $n \times n$ con cero en todas sus entradas, y sea $\{\overrightarrow{\mathbf{v}}_1, \ldots, \overrightarrow{\mathbf{v}}_n\}$ una base cualquiera de $\mathbb{R}^n$. Estos n vectores son linealmente independientes, y todos ellos son vectores propios de la matriz 0_n, con valor propio 0.

Pero claramente la matriz 0_n no es invertible.

Nota: en lugar de un contraejemplo "genérico" de $n \times n$, puede darse un contraejemplo concreto, v.g., los vectores $(1, 3)$ y $(-2, 5)$ (que forman un conjunto l.i.) son vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, que no es invertible.

c) **FALSO**

La matriz identidad I_n que es claramente diagonalizable (y de hecho es diagonal) tiene solo un valor propio ($\lambda = 1$).

Nota: Aquí también puede darse un contraejemplo concreto, por ejemplo $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que es diagonalizable y para la que todo vector $\neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ es vector propio con valor propio $\lambda = 1$.

Puntaje:

En cada parte, por dar un buen contraejemplo (específico o genérico, como los mostrados más arriba), 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.