Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Departamento de Estadística
Primer Semestre de 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026
Ayudantía 1
14 de Marzo de 2019

1. Sean $\Omega = \{1, \ldots, n\}$, $(\Omega, 2^{\Omega})$ un espacio medible. Indique si las siguientes asignaciones cumplen los axiomas, y por ende, son medidas de probabilidad:

   a) $P(A) = \displaystyle\sum_{k \in A} \frac{2k}{n(n+1)}$.

   b) $P(A) = \displaystyle\prod_{k \in A} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$.

   c) $P(A) = \alpha P_1(A) + (1-\alpha) P_2(A)$, con $\alpha \in [0,1]$ y P_1, P_2 medidas de probabilidad asociadas al espacio medible.

2. Considere el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Muestre que para todo $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ se cumple la desigualdad de Bonferroni, es decir,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1).$$

3. De forma alternada se lanzan una moneda y un dado honesto. Si se comienza con el dado:

   a) ¿Cuál es la probabilidad que en el n-ésimo lanzamiento de la moneda resulte cara, sin que antes haya salido cara en los lanzamientos de la moneda, ni que el dado haya mostrado 5 o 6?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda registre una cara antes que el dado muestre un 5 o 6?

4. Una caja contiene $2n$ helados, n de los cuales son de naranja y el resto de frutilla. De un grupo de $2n$ personas, m prefieren el helado de naranja $(0 < m < n)$, s prefieren el de frutilla $(0 < s < n)$ y el resto no tiene preferencia. Demuestre que si los $2n$ helados se reparten al azar, la probabilidad que todas las preferencias sean respetadas es:

$$\frac{\binom{2n-m-s}{n-m}}{\binom{2n}{n}}.$$

5. Si $n \in \mathbb{N}$ objetos indistinguibles son asignados de maneara aleatoria en n urnas, determine la probabilidad de que exactamente una urna quede vacía.

Propuesto: Se dice que P es:

- **Finitamente aditiva** si para cualquier colección finita de eventos $\{A_1, \dots, A_n\}$ disjuntos a pares

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

- **Continua en el vacío** si para cualquier secuencia de eventos $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ tal que $A_{n+1} \subset A_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Muestre que si P es finitamente aditiva y continua en el vacío, entonces P es aditiva numerable.