CLASE 26: LÍMITES

(Algunos teoremas importantes)

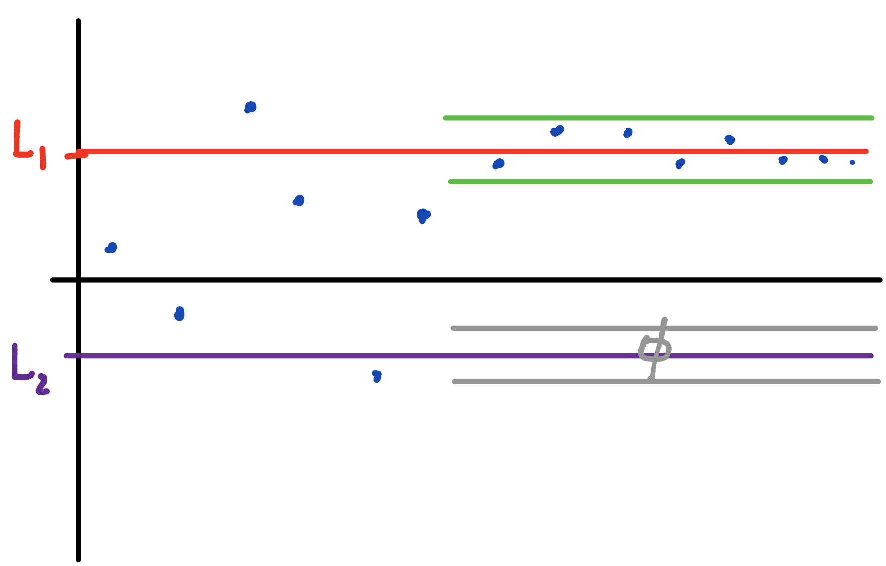
- **TEOREMA**: Si $(a_n)_n$ converge entonces $(a_n)_n$ es acotada.

- **TEOREMA**: El límite es único, es decir, si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L_2$$

entonces $L_1 = L_2$

DEM.:



$(a_n)_n$ no converge a L:

$\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall n_0 \geq 1$ $\exists n \geq n_0$ tq $|a_n - L| \geq \varepsilon$

- Supongamos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_2$

- Supongamos que $L_1 \neq L_2$. De hecho, supongamos que $L_1 > L_2$

- Sea $D = |L_1 - L_2| = L_1 - L_2$ y sea $0 < \varepsilon < \frac{D}{2}$.

De este modo:

$$L_2 < L_2 + \varepsilon < L_1 - \varepsilon < L_1$$

- Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, $\exists n_1 \geq 1$ tq

$\forall n \geq n_0$, $|a_n - L_1| < \varepsilon$

- En particular,

$$a_n > L_1 - \varepsilon > L_2 + \varepsilon$$

- Luego, $\forall n \geq n_1$ se tiene que

$$|a_n - L_2| > \varepsilon$$

- Sea $n_0 \geq 1$. Sea $n \geq n_0$ y $n \geq n_1$.

Luego, $|a_n - L_2| > \varepsilon$

- Luego, $(a_n)_n$ no converge a L_2 $\longrightarrow\!\!\!\times$

- Por lo tanto, $L_1 = L_2$

$\square$

- <u>TEOREMA</u> (Álgebra de límites)

Sean $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ con

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

y $c \in \mathbb{R}$. Luego,

1.- $\lim_{n\to\infty} c a_n = cA$.

2.- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

3.- $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

4.- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ si $B \neq 0$

5.- $\lim_{n\to\infty} a_n^p = A^p$ si $p>0$ y $a_n \geq 0$

DEM:

1.- p.d. $\lim_{n\to\infty} c a_n = cA$

$$|ca_n - cA| = |c||a_n - A| \overset{?}{<} \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\exists n_0 \geq 1$ tq

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|c|}, \quad \forall n \geq n_0$$

Luego, si $n \geq n_0$

$$|ca_n - cA| = |c||a_n - A| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

2.- $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$

$$|(a_n+b_n)-(A+B)| = |(a_n-A)+(b_n-B)|$$
$$\leq \underbrace{|a_n-A|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|b_n-B|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} \overset{?}{<} \varepsilon$$

Sea $\varepsilon>0$.

- $\lim_{n\to\infty} a_n = A$: $\exists n_1 \geq 1$ tq $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_1$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = B$: $\exists n_2 \geq 1$ tq $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq n_2$

Sea $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Luego, si $n \geq n_0$,

entonces $n \geq n_1$, $n \geq n_2$ y

$$|(a_n+b_n)-(A+B)| = |(a_n-A)+(b_n-B)|$$
$$\leq |a_n-A| + |b_n-B|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3.- p.d. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB|$$
$$\leq |a_n b_n - Ab_n| + |Ab_n - AB|$$
$$\leq |a_n - A|\,|b_n| + |A|\,|b_n - B|$$
$$\leq \underbrace{|a_n - A|}_{<\frac{\varepsilon}{2K}}\,K + |A|\,\underbrace{|b_n - B|}_{<\frac{\varepsilon}{2|A|}} \overset{?}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\varepsilon > 0$ y sea $K > 0$ tq $|b_n| \leq K$ $\forall n \geq 1$

- $\lim_{n\to\infty} a_n = A$: $\exists n_1 \geq 1$ tq $|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2K}$ $\forall n \geq n_1$
- $\lim_{n\to\infty} b_n = B$: $\exists n_2 \geq 1$ tq $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$ $\forall n \geq n_2$

Sea $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$. Luego, si $n \geq n_0$, entonces

$n \geq n_1$, $n \geq n_2$ y

$$|a_n b_n - AB| \leq |a_n - A|\,K + |A|\,|b_n - B|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + |A| \cdot \frac{\varepsilon}{2|A|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

4.- p.d. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ si $B>0$

<u>Obs</u>: Como $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B>0$, $\exists\, \bar{n}\geq 1$ tq

$$|b_n - B| < \frac{B}{2} \quad \forall n\geq \bar{n}$$

En particular, $b_n > \frac{B}{2} > 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$

y, por lo tanto, $b_n \neq 0 \quad \forall n\geq \bar{n}$.

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|B|}$$

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_nB - Ab_n}{b_nB}\right|$$

$$= \frac{1}{|b_nB|}\,|a_nB - AB + AB - Ab_n|$$

$$\leq \frac{1}{|b_n||B|}\cdot|a_n - A|\cdot|B| + \frac{1}{|b_n||B|}\cdot|A|\cdot|B-b_n|$$

$$< \frac{2}{|B|}\cdot\underbrace{|a_n - A|}_{<\frac{\varepsilon|B|}{4}} + \frac{2|A|}{|B|^2}\cdot\underbrace{|B-b_n|}_{<\frac{|B|^2}{4|A|}\varepsilon} \overset{?}{<} \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\varepsilon>0$. Sean $m_1 \geq 1$ y $m_2 \geq 1$ tq

- $|a_m - A| < \frac{\varepsilon |B|}{4} \quad \forall m \geq m_1$
- $|b_m - B| < \frac{|B|^2}{4|A|}\varepsilon \quad \forall m \geq m_2$

Sea $m_0 = \max\{m_1, m_2, \bar{m}\}$. Luego, si $m \geq m_0$

$$\left|\frac{a_m}{b_m} - \frac{A}{B}\right| \leq \frac{2}{|B|}|a_m - A| + \frac{2|A|}{|B|^2}|b_m - B|$$

$$< \frac{2}{|B|} \cdot \frac{\varepsilon|B|}{4} + \frac{2|A|}{|B|^2} \cdot \frac{|B^2|\varepsilon}{4|A|}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

5.- p.d. $\lim\limits_{m\to\infty} a_m^p = A^p \quad (p>0, a_m>0)$

Demostramos esto para $p=2$.

$$|a_m^2 - A^2| = |(a_m - A)(a_m + A)|$$

$$= |a_m - A||a_m + A|$$

$$\leq |a_n - A| \cdot (|a_n| + |A|)$$

$$\leq \underbrace{|a_n - A|}_{< \frac{\varepsilon}{K+|A|}} \cdot (K + |A|) < \varepsilon$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $K > 0$ tq $|a_n| < K \;\; \forall n \geq 1$.

Sea $n_0 \geq 1$ tq $|a_n - A| < \dfrac{\varepsilon}{K+|a|} \;\; \forall n \geq n_0$

Luego, si $n \geq n_0$, entonces

$$|a_n^2 - A^2| \leq |a_n - A| \cdot (K + |A|)$$

$$< \frac{\varepsilon}{K+|A|} \cdot (K + |A|) = \varepsilon$$

$\square$

• <u>Obs</u>: Sean $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \frac{2}{n}$.

Luego, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y no podemos usar álgebra de límites para $\frac{a_n}{b_n}$.

Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- **Obs**: Sean $a_n = (-1)^n$ y $b_n = (-1)^{n+1}$

Luego, los límites de $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ no existen

Sin embargo,

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} \left((-1)^n + (-1)^{n+1} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$