

# Zoología funcionaria

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

<sup>1</sup>Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

<sup>2</sup>LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

19 de Abril de 2022



Laboratorio  
Interdisciplinario de  
Estadística Social

## Definición. (Función Inyectiva)

Sea  $f : A \rightarrow B$  una función. Diremos que  $f$  es **inyectiva** si

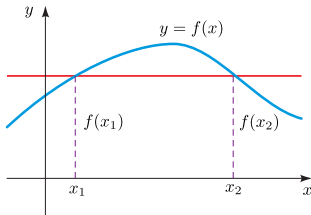
$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$$

Vemos que esta definición es equivalente a

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2) .$$

# Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Si una recta horizontal cruza la gráfica de  $f$  en más de un punto, entonces vemos que hay números  $x_1 \neq x_2$  tales que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Esto significa que  $f$  no es inyectiva.



Por lo tanto tenemos el siguiente método geométrico para determinar si una función es inyectiva.

## Proposición. (Test de la recta horizontal)

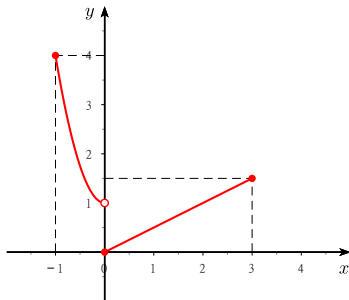
Una función es inyectiva si y solo si no hay recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

**EJEMPLO 1** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

estudiar la inyectividad de  $f$ .

**Solución** El gráfico de la función se muestra a continuación



Se ve que la función no es inyectiva por el test de la recta horizontal.

**EJEMPLO 2** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ . Estudiar la inyectividad de  $f$ .

## Definición (Función Sobreyectiva)

Sea  $f : A \rightarrow B$  una función. Diremos que  $f$  es **sobreyectiva** si  $\text{Rec}(f) = B$  o equivalentemente

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(f(x) = y).$$

En otras palabras, todo elemento del conjunto de llegada admite al menos una pre-imagen. En términos de ecuación,  $f$  es sobreyectiva si para todo  $y \in B$ , la ecuación  $f(x) = y$  admite una solución en  $A$ . En algunos textos se usa el término epiyectivas para funciones que son sobreyectivas.

**EJEMPLO 3** Averigüe si la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  es sobreyectiva.

**Solución** En clases anteriores hemos mostrado que  $\text{Rec}(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ . Vemos que el conjunto de llegada  $B = \mathbb{R}$  no coincide con el recorrido de  $f$ . Luego  $f$  no es sobreyectiva.

**EJEMPLO 4** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow [-2, \infty[$  definida por  $f(x) = x^2 - 6x + 7$ .  
Es  $f$  sobreyectiva?

**Solución** Vamos a calcular el recorrido de la función  $f$ .

$$\begin{aligned}y \in \text{Rec}(f) &\iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 - 6x + 7 = y \\&\iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 - 6x + (7 - y) = 0 \\&\iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(7 - y)}}{2} \\&\iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = 3 \pm \sqrt{2 + y} \\&\iff 2 + y \geq 0 \\&\iff y \geq -2\end{aligned}$$

por lo tanto  $\text{Rec}(f) = [-2, \infty[ = B$ . Por lo tanto  $f$  es sobreyectiva.



## Observaciones

- 1 Si  $f$  no es inyectiva siempre es posible tornar a  $f$  inyectiva restringiendo el dominio.
- 2 Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Entonces, podemos tornar a  $f$  sobreyectiva cambiando su conjunto de llegada  $f : A \rightarrow B$  donde  $B = \text{Rec}(f)$ .

## Definición (Función biyectiva)

Sean  $X, Y \subseteq \mathbb{R}$  y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Diremos que  $f$  es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva, o equivalentemente

$$(\forall y \in Y)(\exists! x \in X)(f(x) = y)$$

O en términos de ecuación para todo  $b \in Y$  la ecuación  $f(x) = b$  tiene una única solución en  $A$ .

**EJEMPLO 5** La función  $f : ] - \infty, 1] \rightarrow ] - \infty, 2]$  definida por  $f(x) = -x^2 + 4x - 1$ , es biyectiva?

**EJEMPLO 6** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -\sqrt{x^2 + 4}$ . Es  $f$  biyectiva?