Sol Ay 11

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Profesor: Alejandra Schild
Ayudante: Gustavo Blanco

Ayudantía 11 – MAT1107
Primer Semestre 2024

Pregunta 1

Se tiene la sucesión recursiva definida por:

$$a_1 = 1 \qquad 2a_{n+1} = \sqrt{7a_n + 2}$$

Demuestre que la sucesión es creciente y acotada. Tras esto encuentre el limite.

$\lim \exists$

Pregunta 2

Se tiene la sucesión recursiva definida por:

$$a_2 = 1 \qquad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$$

Asuma que el limite converge y calcule su valor. ¿Tiene sentido el resultado?

Pregunta 3

Demuestre que el siguiente limite no existe.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 Cos(\pi n)}{n^2 + 1}$$

Pregunta 1

Se tiene la sucesión recursiva definida por:

$$a_1 = 1 \qquad \frac{2a_{n+1}}{2} = \frac{\sqrt{7a_n + 2}}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Demuestre que la sucesión es creciente y acotada. Tras esto encuentre el limite.

↳ a_n ↳ a_n

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{7a_n + 2}}{2}$$

→ Demostración a_n creciente.

→ $a_n < a_{n+1}$

→ $a_1 = 1 \qquad a_2 = \frac{\sqrt{7\cdot 1 + 2}}{2} = \frac{\sqrt{9}}{2} = \frac{3}{2}$

$\therefore\ a_1 < a_2$ ✓

↳ H I

$a_k < a_{k+1}$

↳ PD

$a_{k+1} < a_{k+2}$

$7a_k < 7a_{k+1}$

↳ $7a_k + 2 < 7a_{k+1} + 2 \quad / \sqrt{\ }$

$\sqrt{7a_k + 2} < \sqrt{7a_{k+1} + 2}$

$\cancel{2}a_{k+1} < \cancel{2}a_{k+2}$

$a_{k+1} < a_{k+2}$

$\therefore\ a_n < a_{n+1}$ → La sucesión es creciente.

Demostración a_n acotada superiormente por 2.

$$a_n < b$$
$$b = 2$$

-> Caso base

$$a_1 = 1 < 2$$

-> HI PD

$a_k < 2$ $a_{k+1} < 2$

$$7a_k < 14$$
$$7a_k + 2 < 16 \quad / \sqrt{}$$

$$\sqrt{7a_k + 2} < 4$$

$$2a_{k+1} < 4$$

$$\therefore \; a_{k+1} < 2$$

$$\Rightarrow \; a_n < 2$$

→ Sucesión acotada y creciente → Límite existe
∴ podemos afirmar

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$ → afirmación cierta

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$$ → mismo límite

$$2a_{n+1} = \sqrt{7a_n + 2} \quad / \lim_{n\to\infty}$$

$$\lim_{n\to\infty} 2a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{7a_n + 2}$$

$$2L = \sqrt{\lim_{n\to\infty}(7a_n + 2)}$$

$$= \sqrt{\lim_{n\to\infty}(7a_n) + 2}$$

$$2L = \sqrt{7L + 2}$$

$$4L^2 = 7L + 2$$

$$\therefore 4L^2 - 7L - 2 = 0$$

$$\frac{7 \pm \sqrt{49 - 4\cdot(-2\cdot 4)}}{2\cdot 4} \to 2$$

$$\to -\frac{1}{4}$$ → no tiene sentido ya que la sucesión es creciente y parte en 1

$$L = 2$$

$$\to \lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

*

$$\lim_{n\to\infty} 2a_{n+1}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} a_{n+1}$$

$$= 2L$$

$$\lim \sqrt{b_n} = \sqrt{\lim b_n}$$

Pregunta 2

Se tiene la sucesión recursiva definida por:

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$$

Asuma que el limite converge y calcule su valor. ¿Tiene sentido el resultado?

a_n definida por

$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \cancel{\lim_{n\to\infty} a_n = L} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$$

Falso: pero para el ejercicio lo asumimos verdadero

$$a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \quad / \lim$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n^2 + \frac{1}{4}$$

$$L = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$L = L^2 + \frac{1}{4}$$

$$L^2 - L + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(L - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$L = \frac{1}{2}$$

→ no tiene sentido que el limite de a_n sea $\frac{1}{2}$, cuando a_n parte en 2 y después se le aplican funciones que solo aumentan su valor.

→ Esto sucede ya que el limite no converge ∴ esta mal asumir $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Pregunta 3

Demuestre que el siguiente limite no existe.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 Cos(\pi n)}{n^2+1}$$

→ Para esto utilizamos subsuceciones. Sabemos que si el limite de a_n existe entonces el limite de las subsuceciones también existen y son iguales a $\lim a_n$

↳ Si tomamos las subsuceciones definidas por $2n$ y $2n+1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^2 \overbrace{Cos(\pi\cdot 2n)}^{1}}{(2n)^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{4n^2+1} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^2 \overbrace{Cos(\pi(2n+1))}^{-1}}{(2n+1)^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(4n^2+4n+1)}{4n^2+4n+2} = -1$$

↳ Como las subsuceciones no tienen el mismo limite entonces el limite a_n no puede existir.