Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Examen

1. Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es una constante.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 &= k^2 \\ k^2x_1 + k^2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

   a) Determine todos los valores de k para los cuales el sistema tenga como solución un plano, describa este plano.

   b) Determine todos valores de k para los cuales el sistema tenga como solución una recta, describa esta recta.

Solución.

Observe que la matriz ampliada asociada al sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & k & | & k^2 \\ k^2 & k^2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Al escalonar la matriz obtenemos, con $k \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & | & k^2-1 \\ 0 & 0 & 1-k^2 & | & 1-k^2 \end{bmatrix}$$

   a) La cual si y solo si $k = 1$ representa un sistema que posee infinitas soluciones descritas por un plano. Este plano esta descrito por de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ o
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

   b) La cual si y solo si $k = -1$ representa un sistema que posee infinitas soluciones descritas por una recta. Esta recta esta descrita por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

   Al escalonar la matriz con $k = 0$ obtenemos :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

representa un sistema que posee infinitas soluciones descritas por una recta. Esta recta esta descrita por $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Puntaje:

- 0.5 pto por mostrar la matriz ampliada.
- 0.5 ptos llegar a la matriz escalonada
- 1 pto por concluir que el sistema posee infinitas soluciones descritas por un plano si y solo si $k = 1$
- 1 pto por describir la solución del sistema con $k = 1$
- 2 pto por concluir que el sistema posee infinitas soluciones descritas por una recta si y solo si $k = -1$ o $k = 0$ (1 pto por cada condición).
- 0.5 pto por describir la solución del sistema con $k = -1$
- 0.5 pto por describir la solución del sistema con $k = 0$

2. a) Si A y B son matrices de 3×3 tal que $det(A) = 3$ y $det(B) = 2$ determine el valor de

$$det\left(\frac{1}{3}AB^TA^3B^{-1}\right)$$

b) Demuestre que el rango de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 3 \\ x & 3 & 1 \end{bmatrix}$ es 3 para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución.

a) Aplicando propiedades del determinante, tenemos que:

$$det\left(\frac{1}{3}A\right) det\left(B^T\right) det\left(A\right)^3 det\left(B^{-1}\right)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 det\left(A\right) det\left(B^T\right) det\left(A\right)^3 det\left(B^{-1}\right)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 det\left(A\right) det\left(B\right) det\left(A\right)^3 det\left(B^{-1}\right)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 det\left(A\right) det\left(B\right) det\left(A\right)^3 det\left(B\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^3 \frac{1}{2} = 3$$

b) Notamos que el determinante de la matriz es $-x^2 + 4x - 7$. Como $-x^2 + 4x - 7 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces la matriz es invertible para todo valor de x, lo que implica que el rango de la matriz es 3 para todo valor de x.

Puntaje:

- 0.5 ptos por aplicar correctamente cada propiedad de determinante. (2 ptos)
- 1 ptos por llegar al resultado correcto en a)
- 3 ptos por justificar correctamente b)

3. Sean V subespacio de $\mathbb{M}_2$ definido por $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c=0 \right\}$ y $T : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{P}_2$ una transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -ax^2 + (d-b)x + (c+d)$$

   a) Determine una base para V.

   b) Determine la dimensión de la Imagen de V, es decir $T(V) = \{T(v) \mid v \in V\}$.

Solución.

a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+b+c=0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = -b-c \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -b-c & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$.

Luego

$$V = Gen \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y estos tres vectores son linealmente independientes, entonces

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base para V.

b) $T(V) = \{T(v) \mid v \in V\} = \left\{ T(v) \mid v = b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$= \left\{ T\left(b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\}$

$= \left\{ bT\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + cT\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + dT\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ b(x^2-x) + c(x^2+1) + d(x+1) \right\}.$

Luego $T(V) = Gen\,\{(x^2-x), (x^2+1), (x+1)\}$, falta analizar si estos vectores son li, para eso analizamos sus vectores coordenadas en la base canonica $\{x^2, x, 1\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego los dos primeros vectores son linealmente independientes, entonces $\{(x^2-x), (x^2+1)\}$ es una base para $T(V)$ y así la dimensión de $T(V)$es 2.

Puntaje:

- 1 pto por mostrar vectores que generen al subespacio V.
- 1 pto por argumentar que los vectores escogidos para formar la base deben ser li.
- 1 pto mostrar tres vectores que formen una base para V.
- 3 pto por determinar justificadamente que la dimensión de $T(V)$ es 2.(1.5 ptos si solo muestra vectores que generen $T(V)$)

4. Demuestre que si v_1 y v_2 son vectores propios correspondientes a distintos valores propios de una matriz simétrica, entonces

$$\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2.$$

Solución.

$$\|v_1 + v_2\|^2 = (v_1 + v_2) \cdot (v_1 + v_2) = (v_1 \cdot v_1) + (v_1 \cdot v_2) + (v_2 \cdot v_1) + (v_2 \cdot v_2)$$

Luego como v_1, v_2 son vectores propios correspondientes a distintos valores propios de una matriz simetrica, estos vectores son ortogonales lo que implica que el producto punto entre ellos es cero . Así

$$\|v_1 + v_2\|^2 = (v_1 \cdot v_1) + (v_2 \cdot v_2) = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$$

Puntaje:

- 1 pto por aplicar $\|v\|^2 = v \cdot v$
- 1 pto por aplicar que el producto punto es distributivo.
- 2 ptos por argumentar que vectores propios correspondientes a distintos valores propios de una matriz simetrica son ortogonales.
- 1 ptos por aplicar que vectores ortogonales su producto punto es cero.
- 1 pto por concluir la igualdad.

Continúa en la siguiente página.

5. Considere la forma cuadrática.

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2axy + y^2 + 2yz + z^2.$$

a) Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que Q es definida positiva.

b) Sea $a = \dfrac{1}{2}$. Utilice la descomposición de Cholesky (LDL^T) de la matriz A asociada a la forma cuadrática para eliminar los productos cruzados de Q.

Solución.

a) La matriz que representa a la forma cuadrática Q es $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Luego para que la forma cuadratica Q sea definida positiva se necesita que los vectores propios de A sean positivos.

$$P_A(\lambda) = \mid A - \lambda I \mid = \begin{pmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ a & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - a^2)$$

Luego los valores propios son $1, 1+\sqrt{1+a^2}, 1-\sqrt{1+a^2}$ como el tercer valor propio para cualquier valor de a es menor o igual que cero tenemos que no existe valor de a tal que Q sea definida positiva.

b) Sea $Q(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + 2yz + z^2$, la matriz que representa a la forma cuadrática Q es $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuya descomposición de Cholesky es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego si tomamos el cambio de variable $\vec{y} = L^T\vec{x}$ Así

$$Q(x,y,z) = x^2 + xy + y^2 + 2yz + z^2 = x^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}x + y\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}y + z\right)^2$$

Puntaje:

- 0.5 ptos por determinar la matriz A.
- 0.5 ptos por argumentar que los valores propios deben ser positivos.
- 1 pto determinar correctamente los 3 valores propios.
- 1 pto por concluir que no existe valor de a.
- 1 ptos por determinar correctamente la matriz L.

- 1 ptos por determinar correctamente la matriz D.
- 1 ptos por mostrar la forma Q sin productos cruzados (utilizando la factorización).

6. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalice la matriz A y determine una matriz P ortogonal tal que PAP^T sea diagonal. (Ayuda: $P_A(\lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$)

Solución.

La matriz A es real simétrica entonces es diagonalizable. Su polinomio caractéristico es $P_A(\lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3)$ de manera que -3 y 3 son los valores propios de A.

Determinamos los espacios propios asociados

$$E_{-3} = \mathrm{Nul}(A + 3I) = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_3 = \mathrm{Nul}(A - 3I) = \mathrm{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

una base ortononormal es $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$.

Luego obtenemos $A = PDP^t$ donde

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Puntaje:

- 1.5 pto por determinar el espacio propio asociado a 3.
- 1.5 pto por determinar el espacio propio asociado a -3.
- 2 ptos por aplicar gram-scmidt y encontrar una base de vectores propios ortonormal.
- 0.5 por mostrar D.
- 0.5 por mostrar P.

7. Dada la descomposición en valores singulares de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \vec{u_1} & \vec{u_2} & \vec{u_3} & \vec{u_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} \end{pmatrix}^T .$$

Determine

a) Una base ortogonal para $Col(A)$.

b) Una base ortogonal para $Nul\left(A^T\right)$.

c) $(A^T A)\vec{v_1}$, $A\vec{v_2}$.

Solución.

a) $\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$.

b) $\{\vec{u_3}, \vec{u_4}\}$.

c) $(A^T A)\vec{v_1} = 9\vec{v_1}$, $A\vec{v_2} = 2\vec{u_2}$

Puntaje:

- 2 ptos por cada item.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

   a) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal tal que $T(1,2,3) = T(0,0,1) - T(0,2,1)$. Si A es la matriz asociada a T entonces existen soluciones no triviales del sistema $Ax = 0$.

   b) La recta de ecuación $y = x$ es la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajusta a los puntos $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,2)$

   c) Si A es una matriz arbitraria y P una matriz ortogonal entonces $P(AA^T)P^{-1}$ es ortogonalmente diagonalizable.

Solución.

a) Verdadero.
Ya que

$$T(1,2,3) - T(0,0,1) + T(0,2,1) = T((1,2,3) - (0,0,1) + (0,2,1)) = T(1,4,3) = \vec{0}$$

Luego $(1,4,3)$ es una solución no trivial.

b) Falso.
Debemos encontrar la solución de mínimos cuadrados del sistema inconsistente $X\beta = y$

$$y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

Para la solución de mínimos cuadrados de $X\beta = y$, obtenga las ecuaciones normales:

$$X^T X\beta = X^T y.$$

Calculamos

$$X^T X = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad X^T y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\beta = (X^T X)^{-1}(X^T y) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Así la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajusta a los puntos es $\frac{-5}{24} + \frac{3}{24}x = y$

c) Verdadero.
Sabemos que toda matriz simétrica es ortogonalmente diagonalizable, y como

$$\left(P(AA^T)P^{-1}\right)^T = \left(P(AA^T)P^T\right)^T = (P^T)^T(A^T)^T A^T P^T = PAA^T P^T$$

es una matriz simétrica es ortogonalmente diagonalizable.

Puntaje:

2 ptos por cada item contestado correctamente y justificado.