Clase 1

Friday, August 2, 2024 11:55 AM

Algebra Lineal MAT 1203

Profesor: José Verschae

Of: Edificio Hernán Briones 2do piso

Horario de Consulta: Después de cada cátedra.

Info. del Curso: .) Labmat

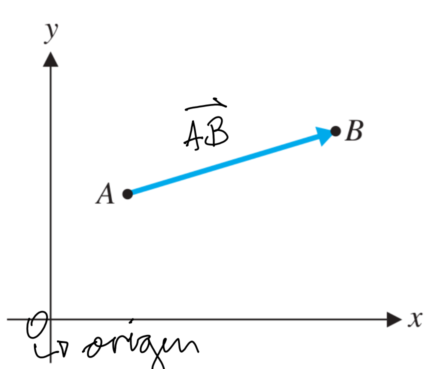
.) Carpeta One Drive (link en Labmat)

LINK ONE DRIVE

Clase 1: Geometría y Álgebra de Vectores en $\mathbb{R}^n$

Vectores en el Plano

Un vector en el plano cartesiano es un desplazamiento desde un punto A hasta un punto B.



A: punto inicial

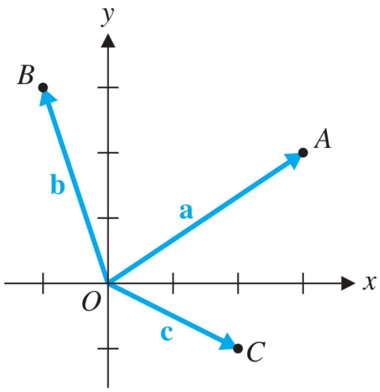
B: " final.

Denotaremos un vector con letras minúsculas, por ejemplo v.

A cada punto A del plano le corresponde el vector a, cuyo punto inicial es el origen O

$$\boxed{a = \vec{OA}}$$

Representamos tales vectores usando coordenadas en el plano cartesiano, por ejemplo,



$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \text{eje } x \\ \to \text{eje } y \end{matrix} = [\underbrace{3}_{\text{eje } x}, \underbrace{2}_{\text{eje } y}]$$

$$b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [-1, 3]$$

$$c = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{vector columna}} = [2, -1]$$

Ojo: Un vector en el plano corresponde a un par ordenado de coordenadas. Es decir el orden importa:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Para que dos vectores sean iguales deben ser iguales coordenada a coordenada, es decir:

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}} \text{ es equivalente a } \begin{matrix} x = x' \\ y = y' \end{matrix}$$

El vector que parte y termina en el origen se llama vector cero

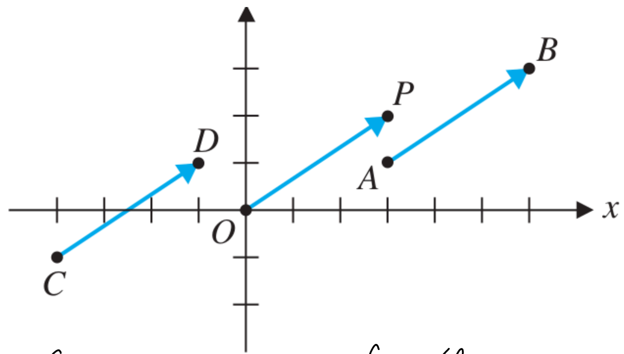
$$\boxed{0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [0, 0]}$$

Denotaremos por $\mathbb{R}$ al conjunto de todos los números reales ($-1, 0, 3, \pi$, etc.).

$\mathbb{R}^2$ denota al conjunto de todos los vectores de dos componentes

Geométricamente, dos vectores son iguales si tienen la misma longitud y la misma dirección, aunque sus puntos de origen no coincidan

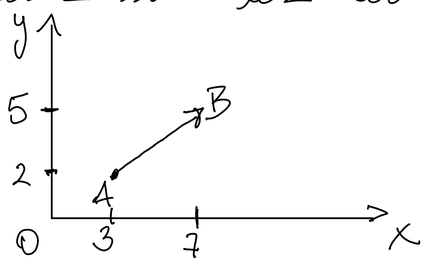
y



ya que representan el mismo desplazamiento

$$\vec{CD} = \vec{OP} = \vec{AB}$$

Ejercicio: ¿ Cuáles son las coordenadas de $\vec{AB}$?



$$\vec{AB} = [7-3, 5-2]$$
$$= [4, 3]$$

Suma de Vectores

Supongamos $u \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2$. La suma

(pertenece)

$u+v$ representa el vector que se obtiene de "seguir" a v después de u.

Ejemplo: $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad v = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

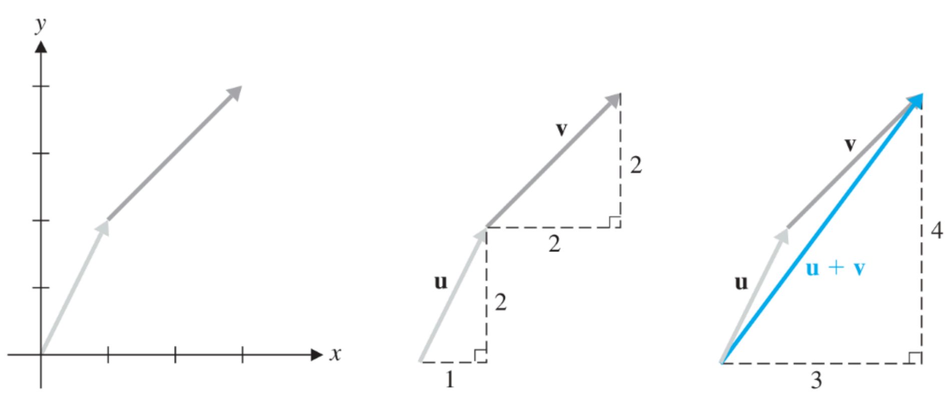


Figura 1.6

Algebráicamente, la suma se define así:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

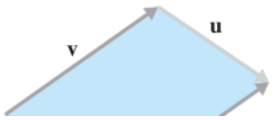
$$\boxed{u+v = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \end{bmatrix}}$$ → suma coordenada a

$$\begin{bmatrix} u_2+v_2 \end{bmatrix}$$

coordenada

La regla punta a origen

Dados los vectores **u** y **v** en $\mathbb{R}^2$, traslade **v** de modo que su origen coincida con la punta de **u**. La ***suma*** **u** + **v** de **u** y **v** es el vector desde el origen de **u** hasta la punta de **v**. (Vea la figura 1.7.)



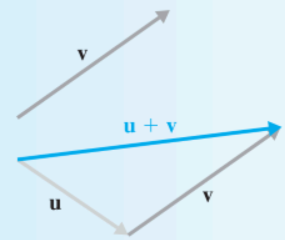


Figura 1.7
La regla punta a origen

La regla del paralelogramo

Dados los vectores **u** y **v** en $\mathbb{R}^2$ (en posición estándar), su ***suma*** **u** + **v** es el vector en posición estándar a lo largo de la diagonal del paralelogramo determinado por **u** y **v**. (Vea la figura 1.9.)

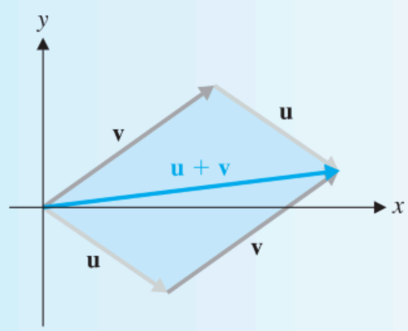


Figura 1.9
La regla del paralelogramo

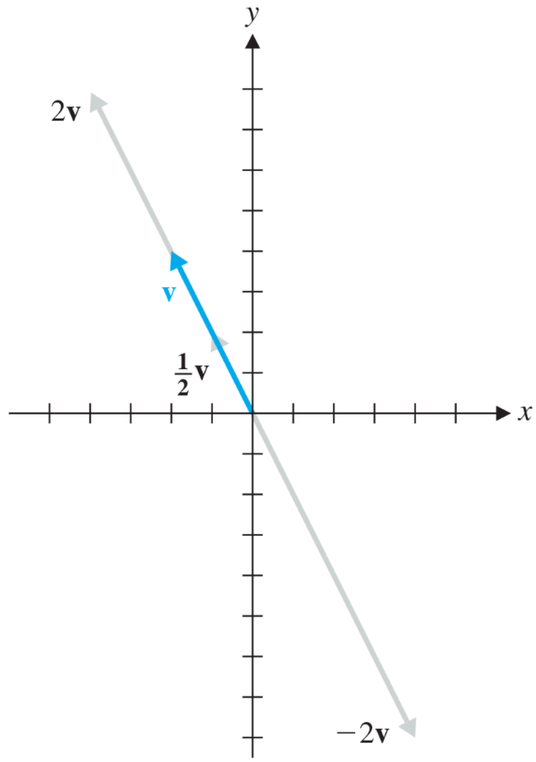
Multiplicación por Escalar

La segunda operación básica corresponde a multiplicar un escalar (es decir un número real) con un vector.

$$\boxed{c \in \mathbb{R}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \qquad c \cdot v = \begin{bmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \end{bmatrix}}$$

Ojo: Se multiplica coordenada a coordenada

Geométricamente $c \cdot v$ mantiene la dirección de v pero cambia su longitud. Si $c<0$ entonces $c \cdot v$ apunta en dirección contraria.



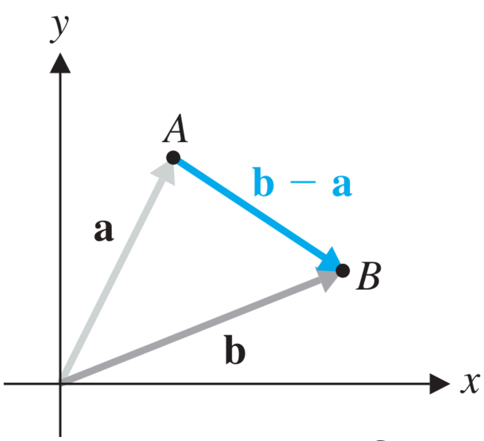
Denotamos al vector

$$\boxed{(-1) \cdot v = -v}$$

Ej: $-\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Resta: $$\boxed{u - v = u + (-1) \cdot v = \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \end{bmatrix}}$$

Geométricamente:



Observamos que

$$a + (b-a) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cancel{a_1} + b_1 - \cancel{a_1} \\ \cancel{a_2} + b_2 - \cancel{a_2} \end{bmatrix} = b$$

Es decir: $(b-a)$ es el vector que si se lo sumamos al vector a, nos da b.

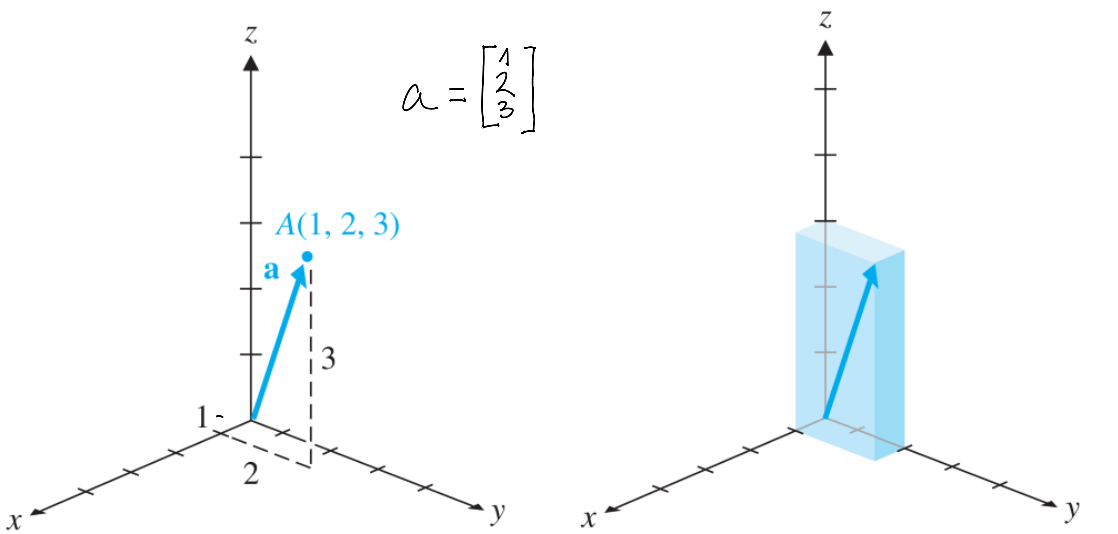
Vectores en $\mathbb{R}^3$

Un vector en el espacio es una triplela ordenada de números reales:

$$\boxed{v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = [v_1, v_2, v_3]}$$

coord. x. coord y coord z

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$



La suma, multiplicación por escalar y resta se definen de manera análoga al caso de $\mathbb{R}^2$.

Vectores en $\mathbb{R}^n$

De manera análoga, un vector n-dimensional es una n-tupla de números reales

$$\boxed{v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [v_1, \dots, v_n]}$$

donde v_i es la i-ésima coordenada de v.

La suma, multiplicación por escalar y resta se define de manera análoga a los casos anteriores

$$v + u = \begin{bmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ \vdots \\ v_n + u_n \end{bmatrix} \qquad c \cdot v = \begin{bmatrix} c \cdot v_1 \\ c \cdot v_2 \\ \vdots \\ c \cdot v_n \end{bmatrix}$$

donde $u, v \in \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$

Además el vector cero (o origen) es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad u - v = u + (-1) \cdot v.$$

En $\mathbb{R}^4$ en adelante, no podemos dibujar vectores, pero la intuición en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ resulta muy útil para imaginarnos qué es lo que está pasando.

Ya que no podemos dibujar, hacer cálculos es en particular relevante. Las siguientes propiedades serán de gran utilidad.

Teorema 1.1 **Propiedades algebraicas de los vectores en $\mathbb{R}^n$**

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y sean c y d escalares. Entonces

a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ — Commutatividad
b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ — Asociatividad
c. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
d. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
e. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ — Distributividad
f. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ — Distributividad
g. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
h. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

Obs: Las propiedades e y f significan que se puede factorizar factores comunes (ya sean escalares o vectores comunes).

Nota: De b, observamos que podemos escribir sin ambigüedad $u+v+w$ (sin paréntesis). Más generalmente, por el mismo razonamiento podemos sumar cualquier número de vectores en cualquier orden. De igual manera, omitimos los paréntesis

$$v^{(1)} + v^{(2)} + v^{(3)} + \dots + v^{(k)}$$

Ejemplo: Simplifique la expresión

$v + 3(2v - w) + (6w - 2v)$

Combinaciones Lineales

Definición Un vector $\mathbf{v}$ es una ***combinación lineal*** de vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ si existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tales que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$. Los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ se llaman ***coeficientes*** de la combinación lineal.

Ejemplo:

$w = -u + 2v$

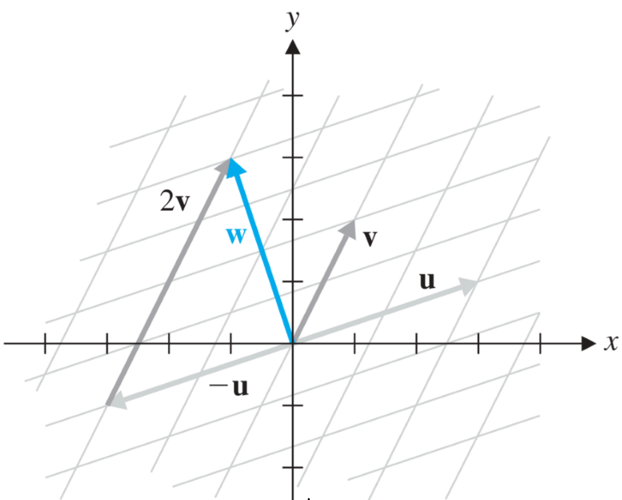
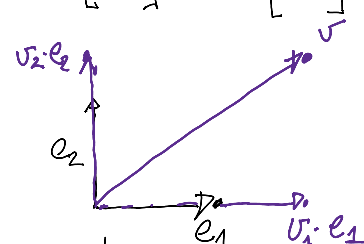


Fig ☆

Observe que las coordenadas usuales en el plano cartesiano se pueden interpretar como los coeficientes de una combinación lineal de los vectores $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = v_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Mas generalmente, si u y v son dos vectores en $\mathbb{R}^2$ (*), estos generan una cuadrícula coordenada, como en la Figura ☆ más arriba.

Si $w = -u + 2v$, decimos que las coordenadas de w con respecto a u y v son -1 y 2.

(*) Obs: No cualquier par de vectores sirven para generar una cuadrícula coordenada en $\mathbb{R}^2$.

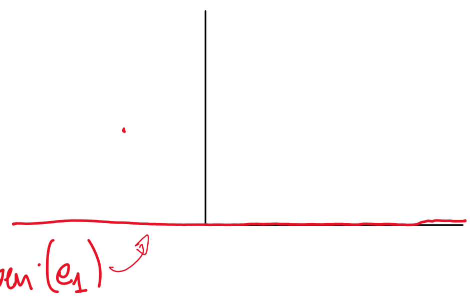
¿Qué pasa si v es un múltiplo de v?
(por ejemplo $u = 3v$)

Definición: Si $v_1, v_2, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$, el conjunto de todas las combinaciones lineales de $v_1, \dots, v_p$ se llama el conjunto generado por $v_1, \dots, v_p$, y se denota

$$\text{Gen}(v_1, \dots, v_p) = \{c_1 v_1 + \dots + c_p v_p : c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplos:

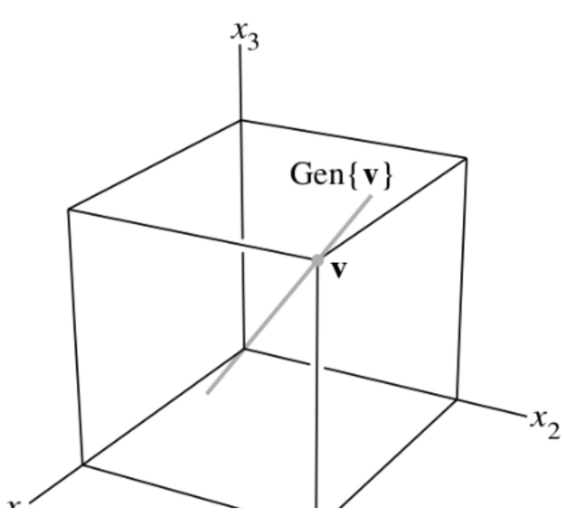
i) $\text{Gen}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$ es el conjunto de todos los múltiplos de $e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$



ii) Si $v = 0 \in \mathbb{R}^3$ entonces

$$\text{Gen}(v) = \{0\}$$

iii) Si $v \in \mathbb{R}^3$ con $v = 0$ entonces $\text{Gen}(v)$ es la única recta que pasa per v y per 0



iv) Si $u, v \in \mathbb{R}^3$ son vectores distintos del 0 y v no es múltiplo de u, entonces $\text{Gen}(u, v)$ es el plano que contiene a u, v y 0.