Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2023

MAT1203 - ÁLGEBRA LINEAL
Guía Complementaria

El siguiente listado de ejercicios consiste en una selección de problemas propuestos que complementan el trabajo en ayudantía del curso Álgebra Lineal. Todos los ejercicios son extraídos del libro *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones* del autor David Lay. Algunos de estos problemas tienen solución al final de dicho texto (los que en el libro tengan numeración impar). Para poder revisarla debe identificar la pregunta en la sección Ejercicios al final de cada capítulo según el nombre indicado y luego buscarla al final del libro.

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones

a) $$\begin{array}{rcl} x_2 + 5x_3 &=& -4 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 &=& -2 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 &=& -2 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rcl} x_1 - 5x_2 + 4x_3 &=& -3 \\ 2x_1 - 7x_2 + 3x_3 &=& -2 \\ -2x_1 + x_2 + 7x_3 &=& -1 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 6x_3 &=& -8 \\ x_2 + 2x_3 &=& 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 &=& -4 \end{array}$$

2. Determine el valor o los valores de h tales que la matriz se la matriz aumentada de un sistemalineal consistente.

a) $\begin{bmatrix} 1 & h & 4 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & h & -5 \\ 2 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & h & -6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -4 & 12 & h \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix}$

3. Encuentre una ecuación que incluya a g, h y k, y que permita que esta matriz aumen-

tada corresponda a un sistema consistente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{bmatrix}.$$

4. Encuentre las soluciones generales de los sistemas cuyas matrices aumentadas se presentan a continuación:

   a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -5 \\ -3 & 7 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -9 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Determine el valor o los valores de h tales que la matriz sea la matriz aumentada de un sistema lineal consistente.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & h \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ h & 6 & -2 \end{bmatrix}$

6. Suponga que un sistema de ecuaciones lineales tiene una matriz aumentada de 3×5 cuya quinta columna no es una columna pivote. ¿El sistema es consistente? ¿Por qué?

7. Suponga que una matriz de coeficientes de 3×5 para un sistema tiene tres columnas pivote. ¿El sistema es consistente? ¿Por qué?

Ecuaciones vectoriales y ecuaciones matriciales

8. Determine si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$.

   a) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$.

   b) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$.

9. Sean $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}$. ¿Con qué valor (o valores) de h se encuentra $\mathbf{b}$ en el plano generado por $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$?

10. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} h \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$. ¿Para qué valor (o valores) de h se encuentra $\mathbf{y}$ en el plano generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$?

11. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Demuestre que $\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ está en $\text{Gen}\{u, v\}$ para todas las h y k.

12. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. Denote las columnas de A por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, y sea $W = \text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

    a) ¿Está $\mathbf{b}$ en $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$? ¿Cuántos vectores hay en $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$?

    b) ¿Está $\mathbf{b}$ en W? ¿Cuántos vectores hay en W?

    c) Demuestre que a_1 está en W.

13. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ y sea W el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A.

    a) ¿Está $\mathbf{b}$ en W?

    b) Demuestre que la segunda columna de A está en W.

14. Marque cada enunciado como falso o verdadero. Justifique sus respuestas.

    a) Otra notación para el vector $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ es $[-4, 3]$.

    b) Los puntos en el plano que corresponden a $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ están sobre una recta que pasa por el origen.

    c) Un ejemplo de combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es el vector $\frac{1}{2}\mathbf{v}_1$.

    d) El conjunto solución del sistema lineal cuya matriz aumentada es $[\mathbf{a}_1 \;\; \mathbf{a}_2 \;\; \mathbf{a}_3 \;\; \mathbf{b}]$ coincide con el conjunto solución de la ecuación $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}$.

    e) El conjunto $\text{Gen}\{u, v\}$ siempre se visualiza como un plano que pasa por el origen.

    f) Cuando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores diferente de cero, $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ solo contiene la recta que pasa por $\mathbf{u}$ y por el origen, y la recta que pasa por $\mathbf{v}$ y el origen.

    g) Cualquier lista de cinco números reales es un vector en $\mathbb{R}^5$.

    h) Preguntar si el sistema lineal correspondiente a la matriz aumentada $[\mathbf{a}_1 \; \mathbf{a}_2 \; \mathbf{a}_3 \; \mathbf{b}]$ tiene solución equivale a preguntar si el vector $\mathbf{b}$ está en $\text{Gen}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

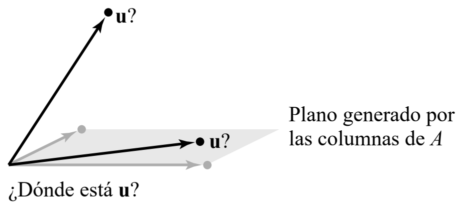
    i) El vector $\mathbf{v}$ resulta cuando un vectgor $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ se suma al vector $\mathbf{v}$.

    j) No todos los pesos $c_1, \ldots, c_p$ en una combinación lineal $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$ pueden ser cero.

15. Considerando A y $\mathbf{b}$, escriba la matriz aumentada para el sistema lineal que corresponde a la ecuación matricial $Ax = \mathbf{b}$. Después, resuelva el sistema y escriba la solución como un vector.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$ *b*) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

16. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en el plano generado por las columnas de A? (Véase la figura). ¿Por qué?



17. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. ¿Está $\mathbf{u}$ en el subconjunto de $\mathbb{R}^3$ generado por las columnas de A? ¿Por qué?

18. Considere las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 9 & 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

a) ¿Cuántas filas de A contienen una posición pivote? ¿La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^4$?

b) ¿Cada vector en $\mathbb{R}^4$ se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de la matriz B? ¿Las columnas de B generan a $\mathbb{R}^3$?

c) ¿Todo vector en $\mathbb{R}^4$ se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de la matriz A anterior? ¿Las columnas de A generan a $\mathbb{R}^4$?

d) ¿Las columnas de B generan a $\mathbb{R}^4$? ¿La ecuación $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tiene solución para cada $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^4$?

19. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. ¿$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ genera a $\mathbb{R}^4$? ¿Por qué?

20. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$. ¿$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ genera $\mathbb{R}^3$? ¿Por qué?

21. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

   a) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se reconoce como una *ecuación vectorial.*

   b) Un vector $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de una matriz A si y solo si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución.

   c) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si la matriz aumentada $[A\,\mathbf{b}]$ tiene una posición pivote en cada fila.

   d) La primera entrada en el producto $A\mathbf{x}$ es una suma de productos.

   e) Si las columnas de una matriz A de $m \times n$ generan a $\mathbf{R}^m$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para cada $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$.

   f) Si A es una matriz de $m \times n$ y si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente para alguna $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$, entonces A no puede tener una posición pivote en cada fila.

   g) Cada ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ corresponde a una ecuación vectorial con el mismo conjunto solución.

   h) Si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, entonces $\mathbf{b}$ está en el conjunto generado por las columnas de A.

   i) Cualquier combinación lineal de vectores siempre se puede escribir en la forma $A\mathbf{x}$ para una matriz A y un vector $\mathbf{x}$ adecuados.

   j) Si la matriz coeficiente A tiene una posición pivote en cada fila, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente.

   k) El conjunto solución de un sistema lineal cuya matriz aumentada es $[\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3\ \mathbf{b}]$ coincide con el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si $A = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \mathbf{a}_3]$.

   l) Si A es una matriz de $m \times n$ cuyas columnas no generan a $\mathbb{R}^m$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$.

Solución de sistemas lineales

22. Describa todas las soluciones de $A\mathbf{x} = 0$ en forma vectorial paramétrica, donde A es equivalente por filas a la matriz dada

   a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & -2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

23. Suponga que el conjunto solución de un cierto sistema de ecuaciones lineales se describe como $x_1 = 5+4x_3$, $x_2 = -2-7x_3$, con x_3 libre. Use vectores para describir este conjunto como una recta en $\mathbb{R}^3$.

24. Suponga que el conjunto solución de un cierto sistema de ecuaciones lineales se describe como $x_1 = 5x_4$, $x_2 = 3-2x_4$, $x_3 = 2+5x_4$, con x_4 libre. Utilice vectores para describir este conjunto como una "recta" en $\mathbb{R}^4$.

25. Encuentre la ecuación paramétrica de la recta que pasa por $\mathbf{a}$ y es paralela a $\mathbf{b}$.

    a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

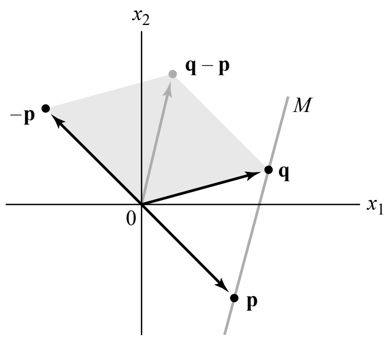
    b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \end{bmatrix}$

26. Obtenga una ecuación paramétrica de la recta M que pasa a través de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.

    a) $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

    b) $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $q = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$.

    [Sugerencia. M es paralela al vector $\mathbf{q}-\mathbf{p}$. Véase la figura que aparece más abajo].



27. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

    a) Una ecuacion homogénea es consistente.

    b) La ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene la solución trivial si y solo si la ecuación tiene al menos una variable libre.

    c) La ecuación $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ describe una recta que pasa por $\mathbf{v}$ y es paralela a $\mathbf{p}$.

    d) El conjunto solución $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el conjunto de todos los vectores de la forma $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ donde $\mathbf{v}_h$ es cualquier solución de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

    e) Un sistema homogéneo de ecuaciones puede ser inconsistente.

    f) Si $\mathbf{x}$ es una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces cada entrada en $\mathbf{x}$ es distinta de cero.

g) El efecto de sumar $\mathbf{p}$ a un vector es mover a dicho vector en una dirección paralela a $\mathbf{p}$.

h) La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es homogénea si el vector cero es una solución.

i) Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, entonces el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se obtiene por traslación del conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

28. Construya una matriz A de 2×2 tal que el conjunto solución de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sea la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa a través de $(4, 1)$ y el origen. Luego, encuentre un vector $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sea una recta en $\mathbb{R}^2$ paralalela al conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ¿Por qué esto no contradice al teorema 6 de la página 46 del libro guía?

29. Suponga que A es una matriz de 3×3 y $\mathbf{b}$ es un vector en $\mathbb{R}^3$ tales que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución. ¿Existe un vector $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ tiene una solución única? Justifique su respuesta.

Independencia lineal

30. Determine si los vectores son linealmente independientes. Justifique cada respuesta.

a) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}.$

31. Determine si las columnas de la matriz forman un conjunto linealmente independiente. Justifique sus respuestas.

a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -5 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -4 & -5 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

32. Considere los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ h \end{bmatrix}.$$

a) ¿Para qué valores de h está v_3 en Gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$?

b) ¿Para qué valores de h el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente?

33. Considere los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}.$$

a) ¿Para qué valores de h está v_3 en Gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$?

b) ¿Para qué valores de h el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente?

34. A partir de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, observe que la tercera columna es la suma de las dos primeras. Encuentre una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

35. A partir de $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$, observe que la primera columna menos la segunda columna multiplicada por 3 es igual a la tercera columna. Determine una solución no triavial de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

36. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique cada respuesta.

a) Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ están en $\mathbb{R}^4$, y $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente dependiente.

b) Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ está en $\mathbb{R}^4$ y $\mathbf{v}_2$ no es un múltiplo escalar de $\mathbf{v}_1$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente independiente.

c) Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$ están en $\mathbb{R}^5$ y $\mathbf{v}_3 = 0$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ es linealmente dependiente.

d) Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ están en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{v}_3$ no es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente.

e) Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$ están en $\mathbb{R}^4$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente dependiente, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ también es linealmente dependiente.

f) Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^4$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ también es linealmente independiente.

Transformaciones lineales

37. Considere la transformación lineal T definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, encuentre un vector $\mathbf{x}$ cuya imagen bajo T sea $\mathbf{b}$, y analice si $\mathbf{x}$ es único.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -7 \\ -4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

38. Encuentre todos los vectores $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^4$ que son mapeados en el vector cero por la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. ¿$\mathbf{b}$ está en el rango de la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$? ¿Por qué?

39. Encuentre todos los vectores $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^4$ que son mapeados en el vector cero por la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 10 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

Sea $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. ¿$\mathbf{b}$ está en el rango de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$? ¿Por qué?

40. Sean $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que mapea $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{y}_1$, y $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{y}_2$. Encuentre las imágenes de $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

41. Sean $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que mapea $\mathbf{x}$ en $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2$. Encuentre una matriz A tal que $T(\mathbf{x})$ sea $A\mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x}$.

42. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^4$. Explique por qué el conjunto $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_n)\}$ es linealmente dependiente.

43. Demuestre que la transformación T definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2|x_2|, x_1 - 4x_2)$ no es lineal.

44. Demuestre que la transformación T definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, x_1 - 3, 2x_1 - 5x_2)$ no es lineal.

45. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Supong que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es un conjunto linealmente independiente, pero $\{T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\}$ es un conjunto linealmente dependiente. Demuestre que $T(\mathbf{x}) = 0$ tiene una solución no trivial.

46. Suponga que T es una transformación lineal. Encuentre la matriz estándar de T.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{e}_1) = (3, 1, 3, 1)$ y $T(\mathbf{e}_3) = (-5, 2, 0, 0)$, donde $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación de trasquilado vertical que mapea $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2$, pero deja inalterado a $\mathbf{e}_2$.

   c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hace girar a los puntos (en torno al origen) a través de un ángulo de $\pi/2$ radianes (en sentido horario).

d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ primero hace girar puntos a través de $-3\pi/4$ radianes (en el sentido horario) y después los refleja a través del eje horizontal x_1. [*Sugerencia.* Considere que $T(\mathbf{e}_1) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.]

e) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ primero refleja los puntos a través del eje horizontal x_1 y luego los hace girar $-\pi/2$ radianes.

47. Llene las entradas faltantes de la matriz, suponiendo que la ecuación es válida para todos los valores de las variables

a) $\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 \\ x_1 - x_3 \\ -x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

48. Demuestre T es una transformación lineal encontrando una matriz que implemente el mapeo. Observe que $x_1, x_2, \ldots$ no son vectores, sino entradas en vectores.

a) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2, 0, 2x_2 + x_4, x_2 - x_4)$

b) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3)$

49. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 4x_1 + 5x_2)$. Encuentre $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = (3, 8)$.

50. Sea T la transformación lineal cuya matriz estándar se presenta.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & -5 \\ 8 & 3 & -3 \\ 2 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & -7 & 3 & 7 \\ 6 & -8 & 5 & 12 \\ -7 & 10 & -8 & -9 \\ 3 & -5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Determine:

a) Si T es un mapeo uno a uno.

b) Si T es un mapeo sobreyectivo.

Operaciones de matrices

51. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, calcule $3I_2 - A$ y $(3I_2)A$.

52. Calcule $A - 5I_3$ y $(5I_3)A$, donde $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -6 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

53. Si A es una matriz de 5×3 y el producto AB es 5×7, ¿cuál es el tamaño de B?

54. ¿Cuántas filas tiene B si BC es una matriz de 5×4?

55. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & k \end{bmatrix}$. ¿Qué valor(es) de k, si los hay, harán que $AB = BA$?

56. Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Compruebe que $AB = AC$ y, sin embargo, $B \neq C$.

57. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ y $AB = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 17 \end{bmatrix}$, determine la primera y segunda columnas de B.

58. Considere los vectores en $\mathbb{R}^n$ como matrices de $n \times 1$. Para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$, el producto de matrices $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ es una matriz de 1×1, que se llama **producto escalar**, o **producto interno**, de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. El producto de matrices $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ es una matriz de $n \times n$ que se llama **producto exterior** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

    Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Calcule $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$, $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ y $\mathbf{v}\mathbf{u}^T$.

Inversa de una matriz

59. Encuentre la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ y utilícela para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 &= 2 \\ 5x_1 + 4x_2 &= -1 \end{aligned}$$

60. Encuentre la inversa de la matriz $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ y utilícela para resolver el sistema

$$\begin{aligned} 7x_1 + 3x_2 &= -9 \\ -6x_1 - 3x_2 &= 4 \end{aligned}$$

61. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

    a) Determine A^{-1} utilícela para resolver las ecuaciones

    $$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1\,, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2\,, \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3\,, \quad A\mathbf{x} =?\mathbf{b}_4\,.$$

    b) Las cuatro ecuaciones del inciso *a*) se pueden resolver con el mismo conjunto de operaciones fila, ya que la matriz de coeficientes es la misma en cada caso. Resuelva las cuatro ecuaciones del inciso *a*) mediante la redución por filas de la matriz aumentada $[A\ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3\ \mathbf{b}_4]$.

62. Suponga que P es invertible y $A = PBP^{-1}$. Determine B en términos de A.

63. Si A, B y C son matrices invertibles de $n \times n$, ¿la ecuación

$$C^{-1}(A+X)B^{-1} = I_n$$

tiene solución, X? Si es así, encuéntrela.

64. Suponga que A, B y X so matrices de $n \times n$ con A, X y $A - AX$ invertibles, y suponga que

$$(A - AX)^{-1} = X^{-1}B \tag{1}$$

   a) Explique por qué B es invertible.

   b) Despeje X en la ecuación (1). Si se necesita invertir una matriz, explique por qué esta matriz es invertible.

65. Use el algoritmo de reducción por filas para encontrar las inversas de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sea A la matriz de $n \times n$ correspondiente, y sea B su inversa. Infiera la forma de B, y después demuestre que $AB = I$.

66. Repita la estrategia del ejercicio anterior para inferir la inversa de B de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$$

Demuestre que $AB = I$.

67. Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 2 & 15 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. Encuentre la tercera columna de A^{-1} sin calcular las otras columnas.

Caracterizaciones de matrices invertibles

68. Una **matriz triangular superior** de $m \times n$ es aquella cuyas entradas debajo de la diagonal principal son ceros. ¿Cuándo es invertible una matriz triangular superior cuadrada?. Justifique su respuesta.

69. Una **matriz triangular inferior** de $m \times n$ es aquella cuyas entradas arriba de la diagonal principal son ceros. ¿Cuándo es invertible una matriz triangular inferior cuadrada?. Justifique su respuesta.

70. ¿Puede ser invertible una matriz de 4×4, cuando sus columnas no generan a $\mathbb{R}^4$? ¿Por qué?

71. Si una matriz A de $n \times n$ es invertible, entonces las columnas de A^T son linealmente independientes. Explique por qué.

72. ¿Puede una matriz cuadrada con dos filas idénticas ser invertible? ¿Por qué?

73. Sean A y B matrices de $n \times n$. Demuestre que si AB es invertible, también lo es A. [*Sugerencia.* Existe una matriz W tal que $ABW = I$. ¿Por qué?]

74. Si A es una matriz de 5×5 y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^5$, ¿es posible que, para alguna $\mathbf{b}$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tenga más de una solución? ¿Por qué?

75. Si la ecuación $C\mathbf{u} = \mathbf{v}$ tiene más de una solución para alguna $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$, ¿pueden las columnas de la matriz C de $n \times n$ generar a $\mathbb{R}^n$n? ¿Por qué?

76. Si las matrices E y F de $n \times n$ tienen la propiedad de que $EF = I$, entonces E y F conmutan. Explique por qué.

77. Suponga que F es una matriz de $n \times n$. Si la ecuación $F\mathbf{x} = \mathbf{y}$ es inconsistente para alguna $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$, ¿qué se puede decir acerca de la ecuación $F\mathbf{x} = \mathbf{0}$? ¿Por qué?

78. Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal dada por

    a) $T(x_1, x_2) = (-5x_1 + 9x_2, 4x_1 - 7x_2)$
    b) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 8x_2, -2x_1 + 7x_2)$

    Demuestre que T es invertible y encuentre una fórmula para T^{-1}.

Factorización ALU y PALU

79. Encuentre la matriz triangular inferior L con unos en la diagonal y una matriz triangular superior U tal que $A = LU$.

    a) $\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -56 & 73 \end{bmatrix}$

    b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

    c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -0 & 3 \end{bmatrix}$

    d) $\begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 \\ 20 & 24 & -30 \\ -20 & -24 & 22 \end{bmatrix}$

    e) $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 6 & -3 & 8 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

    f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

80. Resuelva el sistema dada usando la factorización LU. Esto es, resuelva $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 6 & -14 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 18 & -19 & 17 \\ -27 & 36 & -39 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 9 \\ 12 & 15 & 26 \\ -36 & -48 & -101 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -7 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 4 & -10 & -8 & -8 \\ 24 & -52 & -53 & -43 \\ 20 & -18 & -63 & -28 \\ 32 & -128 & -34 & -91 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$

81. Encuentre una matriz de permutación P y matrices triangulares inferior y superior L y U tales que $PA = LU$; b) utilice el resultado del inciso a) para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$.

e) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

f) $A = \begin{bmatrix} 8 & 10 & -9 & 0 \\ 48 & 72 & -42 & -17 \\ 40 & 54 & -41 & -8 \\ 0 & 0 & -10 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}$.

82. Demuestre que $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}$ tiene más de una factorización LU.

83. Realice el mismo procedimiento con la matriz $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -6 & 0 \\ 5 & -2 & -4 & 5 \\ 1 & -4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$

84. Encuentre una factorizacion LU para cada matriz singular:

a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 13 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & -2 \\ -6 & -13 & 1 & 10 \\ 2 & -24 & 2 & 20 \end{bmatrix}$

85. Encuentre una factorización LU para cada matriz no cuadrada.

a) $\begin{bmatrix} -2 & -7 & -2 & 2 \\ -8 & -35 & -17 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

Determinantes

86. Calcule los determinantes mediante desarrollo por cofactores. En cada caso, seleccione una fila o columna que implique la menor cantidad de operaciones

a) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 8 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -6 & 4 & -8 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

87. Calcule los determinantes de las matrices elementales dadas.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

88. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Escriba $5A$. ¿$\det(5A) = 5\det(A)$?

89. Encuentre los determinantes por reducción de filas a una forma escalonada

a) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -6 \\ -1 & -4 & 4 \\ -2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

90. Calcule los determinantes, sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7\,.$$

a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 5g & 5h & 5i \end{vmatrix}$ *b*) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$ *c*) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d+a & 2e+b & 2f+c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

91. Use determinantes para saber si la matriz es invertible

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ *b*) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

92. Utilice determinantes para saber si el conjunto de vectores es linealmente independiente.

a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$ *b*) $\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$

93. Calcule $\det(B^5)$, donde $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

94. Sean A y P matrices cuadradas, con P invertible. Demuestre que $\det(PAP^{-1}) = \det(A)$.

95. Sea U una matriz cuadrada tal que $U^TU = I$. Demuestre que $\det(U) = \pm 1$.

96. Sean A y B matrices de 3×3, con $\det(A) = 4$ y $\det(B) = -3$. Con base en propiedades de determinantes, calcule:

a) $\det(AB)$ *b*) $\det(5A)$ *c*) $\det(B^T)$ *d*) $\det(A^{-1})$ *e*) $\det(A^3)$

Regla de Cramer y matriz adjunta

97. Utilice la regla de Cramer para calcular las soluciones de los sistemas

a) $\left.\begin{array}{rcl} 4x_1 + x_2 & = & 6 \\ 5x_1 + 2x_2 & = & 7 \end{array}\right|$

b) $\left.\begin{array}{rcl} -5x_1 + 3x_2 & = & 9 \\ 3x_1 - x_2 & = & -5 \end{array}\right|$

c) $\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 4 \\ -x_1 + 2x_3 & = & 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 & = & -2 \end{array}\right|$

98. Calcule la adjunta de la matriz dada, y utilicela para dar la inversa de la matriz

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

99. Demuestre que si A es invertible, entonces adj$A$ es invertible, y

$$(\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A\,.$$

Aplicaciones de determinantes

100. Encuentre el volumen del paralelepípedo con un vértice en el origen y vértices adyacentes en $(1, 0, -2)$, $(1, 2, 4)$ y $(7, 1, 0)$.

101. Sea S el paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, y sea $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule el área de la imagen de S bajo el mapeo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

102. Sea S el paralelogramo determinado por los vectores $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, y sea $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule el área de la imagen de S bajo el mapeo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

103. Encuentre una fórmula para el área del triángulo cuyos vértices son $\mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en $\mathbb{R}^2$.

104. Sea R el triángulo con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Demuestre que el área del triángulo A es

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Espacios y Subespacios Vectoriales

105. Determine si el conjunto dado es un subespacio de $\mathbb{P}_n$ para un valor adecuado de n. Justifique sus respuestas.

    a) Todos los polinomios de la forma $\mathbf{p}(t) = at^2$, donde a se encuentra en $\mathbb{R}$.

    b) Todos los polinomios de la forma $\mathbf{p}(t) = a + t^2$, donde a se encuentra en $\mathbb{R}$.

    c) Todos los polinomios de grado 3 como máximo, con números enteros como coeficientes.

    d) Todos los polinomios en $\mathbb{P}_n$ tales que $\mathbf{p}(0) = 0$.

106. Sea H el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} -2t \\ 5t \\ 3t \end{bmatrix}$. Encuentre un vector $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $H = \text{Gen}\{\mathbf{v}\}$. ¿Por qué esto demuestra que H es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

107. Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} 2b + 3c \\ -b \\ 2c \end{bmatrix}$, donde b y c son arbitrarios. Encuentre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tales que $W = \text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. ¿Por qué esto demuestra que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

108. Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} 2s + 4t \\ 2s \\ 2s - 3t \\ 5t \end{bmatrix}$, donde s y t son números reales. Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

109. Sea W el conjunto de los vectores de la forma indicada, donde a, b y c representan números reales arbitrarios. En cada caso, encuentre un conjunto S de vectores que genere W o dé un ejemplo para demostrar que W no es un espacio vectorial.

    a) $\begin{bmatrix} 2a + 3b \\ -1 \\ 2a - 5b \end{bmatrix}$

    b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3a - 5b \\ 3b + 2a \end{bmatrix}$

    c) $\begin{bmatrix} 2a - b \\ 3b - c \\ 3c - a \\ 3b \end{bmatrix}$

110. Determine si el conjunto H de todas las matrices de la forma $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ es un subespacio de las matrices de 2×2.

111. Sea F una matriz fija de 3×2 y sea H el conjunto de todas las matrices A en $M_{2\times 4}$ con la propiedad de que $FA = \mathbf{0}$ (la matriz cero en $M_{3\times 4}$). Determine si H es un subespacio de $M_{2\times 4}$.

Espacios nulos, espacios columnas y transformaciones lineales

112. Encuentre una descripción de Nul$A$, haciendo una lista de vectores que generan el espacio nulo.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

113. Utilice un teorema adecuado para demostrar que el conjunto dado, W, es un espacio vectorial, o bien, encuentre un ejemplo específico de lo contrario.

a) $W = \left\{ \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} : 3r - 2 = 3s + t \right\}$

b) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} : \begin{array}{rcl} 3a + b & = & c \\ a + b + 2c & = & 2d \end{array} \right\}$

c) $W = \left\{ \begin{bmatrix} 3p - 5q \\ 4q \\ p \\ q + 1 \end{bmatrix} : p, q \text{ reales} \right\}$

d) $W = \left\{ \begin{bmatrix} -s + 3t \\ s - 2t \\ 5s - t \end{bmatrix} : s, t \text{ reales} \right\}$

114. Encuentre A tal que el conjunto dado sea Col$A$

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 2s + t \\ r - s + 2t \\ 3r + s \\ 2r - s - t \end{bmatrix} : r, s, t \text{ reales} \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} b - c \\ 2b + 3d \\ b + 3c - 3d \\ c + d \end{bmatrix} : b, c, d \text{ reales} \right\}$

115. Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Determine si $\mathbf{w}$ está en Col A. ¿Está $\mathbf{w}$ en Nul A.

116. Defina una transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ mediante $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(0) \end{bmatrix}$. Determine los polinomios $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ en $\mathbb{P}_2$ que generan el núcleo de T, y describa el rango de T.

Conjuntos linealmente independientes y bases

117. Determine si los vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$. De los vectores que no formen una base, determine cuáles son linealmente independientes y cuáles generan a $\mathbb{R}^3$. Justifique sus respuestas.

a) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-8\\5\\4\end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix}1\\2\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\3\\6\end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}.$

118. Encuentre las bases para los espacios nulos de las matrices dadas.

a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & -2\\0 & 1 & 1 & 4\\3 & -1 & -7 & 3\end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 5\\0 & 1 & 0 & -1 & -2\\0 & 0 & -8 & 0 & 16\end{bmatrix}$

119. Encuentre una base para el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ en la recta $y = -3x$.

120. Suponga que A es equivalente por filas a B. Encuentre las bases de espacio nulo y espacio columna de A.

a) $A = \begin{bmatrix}-2 & 4 & -2 & -4\\2 & -6 & -3 & 1\\-3 & 8 & 2 & -3\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 6 & 5\\0 & 2 & 5 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & -4 & 8\\1 & 2 & 0 & 2 & 8\\2 & 4 & -3 & 10 & 9\\3 & 6 & 0 & 6 & 9\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 2 & 5\\0 & 0 & 3 & -6 & 3\\0 & 0 & 0 & 0 & -7\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

121. Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}4\\-3\\7\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\9\\-2\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}7\\11\\6\end{bmatrix}$, y también sea $H = \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Es posible comprobar que $4\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 = 0$. Utilice esta información para encontrar una base para H. Hay más de una respuesta.

122. Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}3\\4\\-2\\-5\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}4\\3\\2\\4\end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}2\\5\\-6\\-14\end{bmatrix}$. Es posible comprobar que $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = 0$. Utilice esta información para encontrar una base para $H = \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

123. Sean V y W espacios vectoriales, sea $T : V \to W$ una transformación lineal, y sea $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ un subconjunto de V.

   a) Demuestre que si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es linealmente dependiente en V, entonces el conjunto de imágenes $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)\}$ es linealmente dependiente en W.

   b) Suponga que T es una transformación uno a uno, de modo que la ecuación $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ siempre implica que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Demuestre que si el conjunto de imágenes $\{T(\mathbf{v}_1), \ldots, T(\mathbf{v}_p)\}$ es linealmente dependiente, entonces $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$. es linealmente dependiente. (*Este hecho muestra que una transformación lineal uno a uno mapea un conjunto linealmente independiente sobre un conjunto linealmente independiente*)

Sistemas de coordenadas

124. Encuentre el vector $\mathbf{x}$ determinado por el vector de coordenadas $\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}}$ y la base $\mathcal{B}$.

   a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$, $\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

   b) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

125. Encuentre el vector de coordenadas $\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}}$ de $\mathbf{x}$ respecto de la base $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$.

   a) $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   b) $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$.

126. Encuentre la matriz cambio de coordenadas de $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ a la base estándar en $\mathbb{R}^n$.

127. Utilice una matriz inversa para encontrar $\left[\mathbf{x}\right]_{\mathcal{B}}$ para $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$.

128. El conjunto $\mathcal{B} = \{1 + t^2, t + t^2, 1 + 2t + t^2\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$. Encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{p}(t) = 1 + 4t + 7t^2$ respecto de $\mathcal{B}$.

129. Utilice los vectores de coordenadas para probar la independencia lineal de los conjuntos de polinomios.

   a) $1 + 2t^3$, $2 + t - 3t^2$, $-t + 2t^2 - t^3$.

   b) $(1 - t)^2$, $t - 2t^2 + t^3$, $(1 - t)^3$.

130. Utilice los vectores de coordenadas para comprobar si los siguientes conjuntos de polinomios generan a $\mathbb{P}_2$. Justifique sus conclusiones.

   a) $1 - 3t + 5t^2$, $-3 + 5t - 7t^2$, $-4 + 5t - 6t^2$, $1 - t^2$.

   b) $5t + t^2$, $1 - 8t - 2t^2$, $-3 + 4t + 2t^2$, $2 - 3t$.

131. Sean $\mathbf{p}_1(t) = 1 + t^2$, $\mathbf{p}_2(t) = t - 3t^2$, $\mathbf{p}_3(t) = 1 + t - 3t^2$.

   a) Utilice vectores de coordenadas para demostrar que estos polinomios forman una base para $\mathbb{P}_2$.

   b) Considere la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ para $\mathbb{P}_2$. Encuentre $\mathbf{q}$ en $\mathbb{P}_2$, considerando que $\left[\mathbf{q}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Dimensión de un espacio vectorial

132. Para cada subespacio encuentre una base para el subespacio y indique la dimensión.D

   a) $\left\{ \begin{bmatrix} s - 2t \\ s + t \\ 3t \end{bmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$

   b) $\left\{ \begin{bmatrix} 2c \\ a - b \\ b - 3c \\ a + 2b \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

   c) $\left\{ \begin{bmatrix} p - 2q \\ 2p + 5r \\ -2q + 2r \\ -3p + 6r \end{bmatrix} : p, q, r \in \mathbb{R} \right\}$

   d) $\{(a, b, c) : a - 3b = c = 0, b - 2c = 0, 2b - c = 0\}$

133. Encuentre la dimensión del subespacio de todos los vectores en $\mathbb{R}^3$ cuyas entradas primera y tercera son iguales.

134. Encuentre la dimensión del subespacio generado por los vectores dados.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

135. Determine las dimensiones del espacio nulo A y el espacio columna de las matrices que se muestran a continuación:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 9 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$b)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$c)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

136. Los primeros cuatro polinomios de Hermite son 1, $2t$, $-2 + 4t^2$, y $-12t + 8t^3$. Estos polinomios surgen de forma natural en el estudio de ciertas ecuaciones diferenciales importantes en física matemática.

    $a)$ Demuestre que los primeros cuatro polinomios de Hermite forman una base de $\mathbb{P}_3$.

    $b)$ Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{P}_3$ que consta de los polinomios de Hermite y sea $\mathbf{p}(t) = -1 + 8t^2 + 8t^3$. Encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{p}$ con respecto de $\mathcal{B}$.

Rango

137. Suponga que la matriz A es equivalente por filas a B. Sin hacer cálculos, liste el rango de A y la dimensión del espacio nulo de A. Luego encuentre las bases para $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Fila}(A)$ y $\mathrm{Nul}(A)$.

    $a)$ $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

    $b)$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 & 6 & 3 & 6 \\ -2 & -3 & 6 & -3 & 0 & -6 \\ 4 & 9 & -12 & 9 & 3 & 12 \\ -2 & 3 & 6 & 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

138. Si una matriz A de 4×7 tiene rango 3, determine $\dim(\mathrm{Nul}(A))$, $\dim(\mathrm{Fila}(A))$ y el rango de A^T.

139. Si una matriz A de 7×5 tiene rango 2, determine $\dim(\mathrm{Nul}(A))$, $\dim(\mathrm{Fila}(A))$ y el rango de A^T.

140. Suponga que una matriz A de 4×7 tiene cuatro columnas pivote. ¿Es $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^4$? ¿Es $\mathrm{Nul}(A) = \mathbb{R}^3$? Explique sus respuestas.

141. Supongamos que una matriz A de 6×8 tiene cuatro columnas pivote. ¿Cuál es la $\dim(\mathrm{Nul}(A))$? ¿Es $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^4$? ¿Por qué?

142. Si el espacio nulo de una matriz A de 4×6 es de dimensión 3, ¿cuál es la dimensión del espacio columna de A? ¿Es $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^3$? ¿Por qué?

143. Si el espacio nulo de una matriz A de 8×7 es de dimensión 5, ¿cuál es la dimensión del espacio columna de A?

144. Si el espacio nulo de una matriz A de 8×5 es de dimensión 3, ¿cuál es la dimensión del espacio fila de A?

145. Si el espacio nulo de una matriz A de 5×4 es de dimensión 2, ¿cuál es la dimensión del espacio fila de A?

146. Si A es una matriz de 7×5, ¿cuál es el mayor rango posible de A? Si A es una matriz de 5×7, ¿cuál es el mayor rango posible de A? Explique sus respuestas.

147. Si A es una matriz de 5×4, ¿cuál es la mayor dimensión posible del espacio fila de A? Si A es una matriz de 4×5, ¿cuál es la máxima dimensión posible del espacio fila de A? Explique sus respuestas.

148. Si A es una matriz de 3×7, ¿cuál es la menor dimensión posible de $\mathrm{Nul}(A)$?

149. Si A es una matriz de 7×5, ¿cuál es la menor dimensión posible de $\mathrm{Nul}(A)$?

150. Suponga que todas las soluciones de un sistema homogéneo de cinco ecuaciones lineales con seis incógnitas son múltiplos de una solución diferente de cero. ¿El sistema necesariamente tendrá una solución para cada posible elección de las constantes en el lado derecho de las ecuaciones? Explique su respuesta.

151. Suponga que un sistema no homogéneo de nueve ecuaciones lineales con 10 incógnitas tiene una solución para todas las posibles constantes de los miembros derechos de las ecuaciones. ¿Es posible encontrar dos soluciones diferentes de cero del sistema homogéneo asociado que no sean múltiplos una de la otra? Analice.

152. Un sistema homogéneo de 12 ecuaciones lineales con ocho incógnitas tiene dos soluciones fijas que no son múltiplos una de la otra, y todas las demás soluciones son combinaciones lineales de estas dos soluciones. ¿Puede describirse el conjunto de todas las soluciones con menos de 12 ecuaciones lineales homogéneas? Si es así, ¿con cuántas? Analice.

153. Un científico resuelve un sistema no homogéneo de 10 ecuaciones lineales con 12 incógnitas y encuentra que tres de las incógnitas son variables libres. ¿Puede el científico estar seguro de que, si se cambia el lado derecho de las ecuaciones, el nuevo sistema no homogéneo tendrá una solución? Analice.

154. ¿Cuál de los subespacios $\mathrm{Fila}(A)$, $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Nul}(A)$, $\mathrm{Fila}(A^T)$, $\mathrm{Col}(A^T)$ y $\mathrm{Nul}(A^T)$ están en $\mathbb{R}^m$ y cuáles están en $\mathbb{R}^n$? ¿Cuántos subespacios distintos están en esta lista?

155. Justifique las siguientes igualdades:

    a) $\dim(\mathrm{Fila}(A)) + \dim(\mathrm{Nul}(A)) = n$ (Número de columnas de A)

    b) $\dim(\mathrm{Col}(A)) + \dim(\mathrm{Nul}(A^T)) = m$ (Número de filas de A)

156. Con base en el ejercicio anterior, explique por qué la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución para toda $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^m$ si y solo si la ecuación $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.

157. Suponga que A es $m \times n$ y $\mathbf{b}$ está en $\mathbb{R}^m$. ¿Qué tiene que ser verdad acerca del rango de $\begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix}$ y el rango A para que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea coherente?

Cambio de base

158. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bases para un espacio vectorial V y suponga que $\mathbf{b}_1 = 6\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2$ y $\mathbf{b}_2 = 9\mathbf{c}_1 - 4\mathbf{c}_2$.

    a) Encuentre la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

    b) Encuentre $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ para $\mathbf{x} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$. (Utilice el inciso a).

159. Sean $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bases para V, y sea P una matriz cuyas columnas son $[\mathbf{u}_1]_{\mathcal{W}}$ y $[\mathbf{u}_2]_{\mathcal{W}}$. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones satisface P para toda $\mathbf{x}$ en V?

    a) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{U}} = P\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{W}}$

    b) $[\mathbf{x}]_{\mathcal{W}} = P\,[\mathbf{x}]_{\mathcal{U}}$

160. Sean $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ bases para un espacio vectorial V, y suponga que $\mathbf{a}_1 = 4\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$, y $\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_3$.

    a) Encuentre la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$.

    b) Determine $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ para $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$.

161. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ bases para $\mathbb{R}^2$. En cada ejercicio, encuentre la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ y la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

    a) $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}-3\\-1\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix}1\\-5\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$.

    b) $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$.

162. En $\mathbb{P}_2$, encuentre la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B} = \{1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2\}$ a la base estándar de $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$. Luego, encuentre el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas para $-1 + 2t$.

Vectores propios, valores propios y espacios propios

163. ¿Es $\lambda = -2$ un valor propio de $\begin{bmatrix}3 & 2\\3 & 8\end{bmatrix}$? ¿Por qué?

164. ¿Es $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ un vector propio de $\begin{bmatrix}1 & -1\\6 & -4\end{bmatrix}$? Si lo es, encuentre el valor propio.

165. ¿Es $\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$ un vector propio de $\begin{bmatrix}-4 & 3 & 3\\2-3 & -2 & \\-1 & 0 & -2\end{bmatrix}$? En caso afirmativo, determine el valor propio.

166. ¿Es $\lambda = 4$ un valor propio de $\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\2 & 3 & 1\\-3 & 4 & 5\end{bmatrix}$? Si es así, determine un vector propio correspondiente.

167. Determine una base para el espacio propio asociado con cada valor propio indicado.

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1, 3$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, $\lambda = -1, 7$.

c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1, 2, 3$-

d) $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $\lambda = -5$.

168. Determine los valores propios de las matrices

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

169. Sea λ un valor propio de una matriz A invertible. Demuestre que λ^{-1} es un valor propio de A^{-1}.

170. Demuestre que si A^2 es la matriz cero, entonces el único valor propio de A es 0.

171. Demuestre que λ es un valor propio de A si y solo si λ es un valor propio de A^T.

Ecuación Característica

172. Encuentre el polinomio característico y los valores propios reales de las matrices dada

a) $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

173. Determine el polinomio característico de cada matriz

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

174. Se puede demostrar que la multiplicidad algebraica de un valor propio λ es siempre mayor o igual que la dimensión del espacio propio correspondiente a λ. Determine h en la matriz A de abajo, tal que el espacio propio para $\lambda = 4$ sea bidimensional:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

175. Demuestre que si A y B son similares, entonces $\det(A) = \det(B)$.

Diagonalización

176. Sea $A = PDP^{-1}$ y calcule A^4

a) $P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

177. Use la factorización $A = PDP^{-1}$ para calcular A^k, donde k representa un entero positivo arbitrario

a) $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 2(a-b) & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

178. La matriz A se factoriza en la forma PDP^{-1}. Utilice el teorema de diagonalización para encontrar los valores propios de A y una base para cada espacio propio.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

179. Diagonalice las matrices, si es posible.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

180. A es una matriz de 5×5 con dos valores propios. Un espacio propio es tridimensional y el otro espacio propio es bidimensional. ¿A es diagonalizable? ¿Por qué?

181. A es una matriz de 3×3 con dos valores propios. Cada espacio propio es unidimensional. ¿A es diagonalizable? ¿Por qué?

182. A es una matriz de 4×4 con tres valores propios. Un espacio propio es unidimensional, y uno de los otros espacios propios es bidimensional. ¿Es posible que A no sea diagonalizable? Justifique su respuesta.

183. A es una matriz de 7×7 con tres valores propios. Un espacio propio es bidimensional, y uno de los otros espacios propios es tridimensional. ¿Es posible que A no sea diagonalizable? Justifique su respuesta.

184. Demuestre que si A es diagonalizable e invertible, entonces también lo es A^{-1}.

Vectores propios y transformaciones lineales

185. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ y $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ las bases de los espacios vectoriales V y W, respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{d}_1 - 5\mathbf{d}_2\,, \quad T(\mathbf{b}_2) = -\mathbf{d}_1 + 6\mathbf{d}_2\,, \quad T(\mathbf{b}_3) = 4\mathbf{d}_2\,.$$

Determine la matriz para T respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$.

186. Sean $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ las bases para los espacios vectoriales V y W, respectivamente. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(\mathbf{d}_1) = 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2\,, \quad T(\mathbf{d}_2) = -2\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2\,.$$

Determine la matriz para T respecto a $\mathcal{D}$ y $\mathcal{B}$.

187. Sean $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base estándar para $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base para un espacio vectorial V, y $T : \mathbb{R}^3 \to V$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_3 - x_2)\mathbf{b}_1 - (2x_2)\mathbf{b}_2 + (x_1 + 3x_3)\mathbf{b}_3\,.$$

a) Calcule $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$ y $T(\mathbf{e}_3)$.

b) Obtenga $\big[T(\mathbf{e}_1)\big]_{\mathcal{B}}$, $\big[T(\mathbf{e}_2)\big]_{\mathcal{B}}$ y $\big[T(\mathbf{e}_3)\big]_{\mathcal{B}}$.

c) Determine la matriz para T respecto a $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$.

188. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base para un espacio vectorial V y $T : V \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 5x_3 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz para T respecto a $\mathcal{B}$ y la base estándar para $\mathbb{R}^2$.

189. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ la transformación que mapea un polinomio $\mathbf{p}(t)$ en el polinomio $(t+3)\mathbf{p}(t)$.

a) Encuentre la imagen de $\mathbf{p}(t) = 3 - 2t + t^2$.

b) Demuestre que T es una transformación lineal.

c) Obtenga la matriz para T respecto a las bases $\{1, t, t^2\}$ y $\{1, t, t^2, t^3\}$.

190. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_4$ la transformación que mapea un polinomio $\mathbf{p}(t)$ en el polinomio $\mathbf{p}(t) + 2t^2\mathbf{p}(t)$.

a) Determine la imagen de $\mathbf{p}(t) = 3 - 2t + t^2$.

b) Demuestre que T es una transformación lineal.

c) Encuentre la matriz para T respecto a las bases $\{1, t, t^2\}$ y $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.

191. Suponga que el mapeo $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ definido por

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = 3a_0 + (5a_0 - 2a_1)t + (4a_1 + a_2)t^2$$

es lineal. Obtenga la representación matricial de T respecto a la base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

192. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base para un espacio vectorial V. Encuentre $T(4\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2)$ cuando T es una transformación lineal de V a V cuya matriz respecto a $\mathcal{B}$ es

$$\big[T\big]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

193. Defina $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ por $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(-1) \\ \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix}$.

   a) Encuentre la imagen bajo T de $\mathbf{p}(t) = 5 + 3t$.

   b) Pruebe que T es una transformación lineal.

   c) Obtenga la matriz para T respecto a la base $\{1, t, t^2\}$ para $\mathbb{P}_2$ y la base estándar para $\mathbb{R}^3$.

194. Defina $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{R}^4$ por $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(-2) \\ \mathbf{p}(3) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(0) \end{bmatrix}$.

   a) Demuestre que Y es una transformación lineal.

   b) Encuentre la matriz para T respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$ para $\mathbf{P}_3$ y la base estándar para $\mathbb{R}^4$.

195. Determine la $\mathcal{B}$-matriz para la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ donde $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

   a) $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   b) $A = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

196. Defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Determina una base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^2$ con la propiedad de que $\left[T\right]_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

   a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

   c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

   d) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

197. Sean $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ para $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

   a) Compruebe que $\mathbf{b}_1$ es un vector propio de A, pero que A no es diagonalizable.

   b) Encuentre la $\mathcal{B}$-matriz para T.

Valores propios complejos

198. Cada matriz actúa sobre $\mathbb{C}^2$. Determine los valores propios y una base para cada espacio propio en $\mathbb{C}^2$.

a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

199. Encuentre una matriz P invertible y una matriz C de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ tal que la matriz dada tenga la forma $A = PCP^{-1}$.

a) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

Producto interior, longitud y ortogonalidad

200. Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Explique por qué $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geqslant 0$. ¿Cuándo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$?

201. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$. Calcule y compare $\mathbf{u} \cdot v$, $\|\mathbf{u}\|^2$, $\|\mathbf{v}\|^2$ y $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$. No utilice el teorema de Pitágoras.

202. Comprueba la ley del paralelogramo para vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2 .$$

203. Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Describa el conjunto H de vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que son ortogonales a $\mathbf{v}$.

204. Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$, y W el conjunto de todas las $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$. ¿Qué teorema se puede utilizar para demostrar que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$? Describa a W en lenguaje geométrico.

205. Suponga que un vector $\mathbf{y}$ que es ortogonal a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Demuestre que $\mathbf{y}$ es ortogonal al vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

206. Suponga que $\mathbf{y}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Demuestre que $\mathbf{y}$ es ortogonal a cada $\mathbf{w}$ en $\text{Gen}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$.

207. Sea $W = \text{Gen}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$. Demuestre que si $\mathbf{x}$ es ortogonal a cada $\mathbf{v}_j$, para $1 \leqslant j \leqslant p$, entonces $\mathbf{x}$ es ortogonal a todo vector en W.

208. Sean W un subespacio de $\mathbb{R}^n$, y $W^\perp$ el conjunto de todos los vectores ortogonales a W. Demuestre que $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, considerando los siguientes pasos.

   a) Tome $\mathbf{z}$ en $W^\perp$, y sea $\mathbf{u}$ cualquier elemento de W. Entonces $\mathbf{z} \cdot \mathbf{u} = 0$. Tome cualquier escalar c y demuestre que $c\mathbf{z}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$. (Puesto que $\mathbf{u}$ era un elemento arbitrario de W, esto demostrará que $c\mathbf{z}$ está en $W^\perp$).

   b) Tome $\mathbf{z}_1$ y $\mathbf{z}_2$ en $W^\perp$, y sea $\mathbf{u}$ cualquier elemento de W. Demuestre que $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$ es ortogonal a $\mathbf{u}$. ¿Qué se puede concluir acerca de $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$? ¿Por qué?

   c) Termine la demostración de que $W^\perp$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

209. Demuestre que si $\mathbf{x}$ está en W y $W^\perp$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Conjuntos ortogonales

210. Determine qué conjuntos de vectores son ortogonales

   a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

211. Demuestre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ o $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ son una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Después exprese $\mathbf{x}$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{u}$.

   a) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

   b) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

212. Calcule la proyección ortogonal de $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sobre la recta que pasa por $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y por el origen.

213. Sean $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$. Escriba $\mathbf{y}$ como la suma de un vector en Gen$\{\mathbf{u}\}$ y un vector ortogonal a $\mathbf{u}$.

214. Sean $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Calcule la distancia de $\mathbf{y}$ a la recta que pasa por $\mathbf{u}$ y el origen.

215. Determine cuáles conjuntos de vectores son ortonormales. Si un conjunto solamente es ortogonal, normalice los vectores para obtener un conjunto ortonormal.

a) $\left\{ \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{20} \\ 3/\sqrt{20} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{20} \\ -1/\sqrt{20} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$

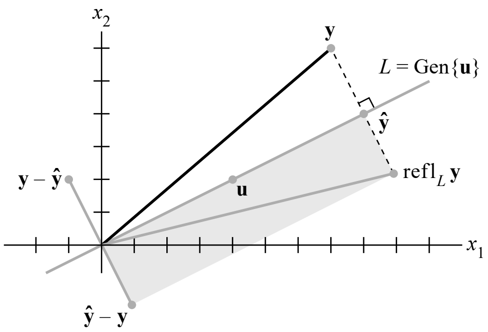
c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \right\}$

216. Dado $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$, sea $L = \text{Gen}\{\mathbf{u}\}$. Demuestre que el mapeo $\mathbf{x} \mapsto \text{proy}_L\mathbf{x}$ es una transformación lineal.

217. Dado $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$, sea $L = \text{Gen}\{\mathbf{u}\}$. Para $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$, la reflexión de $\mathbf{y}$ en L es el punto $\text{Refl}_L\mathbf{y}$ definido por

$$\text{refl}_L\mathbf{y} = 2 \cdot \text{proy}_L\mathbf{y} - \mathbf{y}\,.$$

Véase la figura, que indica que $\text{refl}_L\mathbf{y}$ es la suma de $\widehat{\mathbf{y}} = \text{proy}_L\mathbf{y}$ y $\widehat{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$. Demuestre que el mapeo $\mathbf{y} \mapsto \text{refl}_L$ es una transformación lineal.



La reflexión de **y** en una recta que pasa por el origen.

Proyecciones ortogonales

218. Compruebe que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es un conjunto ortogonal, y luego encuentre la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre Gen$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

a) $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

219. Sea W el subespacio generado por los vectores $\mathbf{u}$, y escriba $\mathbf{y}$ como la suma de un vector en W y un vector ortogonal a W.

a) $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

220. Determine el punto már cercano a $\mathbf{y}$ en el subespacio W generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

a) $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

b) $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

221. Calcule la mejor aproximación a $\mathbf{z}$ con vectores de la forma $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ donde $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

222. Sean $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuentre la distancia de $\mathbf{y}$ al plano en $\mathbb{R}^3$ generado por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.

223. Sean $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$ y $W = \mathrm{Gen}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

a) Sea $U = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$. Calcule U^TU y UU^T.

b) Calcule $\text{proy}_W\mathbf{y}$ y $(UU^T)\mathbf{y}$.

Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

224. El conjunto dado es una base para un subespacio W. Utilice el proceso de Gram-Schmidt con la finalidad de obtener una base ortogonal para W.

a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}.$

b) $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 14 \\ -7 \end{bmatrix}.$

c) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 9 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix}.$

225. Obtenga una base ortonormal del subespacio generado por los vectores del ejercicio anterior ítem a)

226. Obtenga una base ortonormal del subespacio generado por los vectores del ejercicio anterior ítem b)

227. Determine una base ortogonal para el espacio columna de cada matriz

a) $\begin{bmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

228. Sean $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$ una base ortogonal para un subespacio W de $\mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $T(\mathbf{x}) = \text{proy}_W\mathbf{x}$. Demuestre que T es una transformación lineal.

Problemas de mínimos cuadrados

229. Encuentre una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mediante a) la construcción de las ecuaciones normales para $\hat{\mathbf{x}}$ y b) el despeje de $\hat{\mathbf{x}}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -5 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}.$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

230. Describa todas las soluciones de mínimos cuadradps de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

231. Calcule el error de mínimos cuadrados asociado con la solución de mínimos cuadrados que encontró en el ejercicio 1.a)

232. Calcule el error de mínimos cuadrados asociado con la solución de mínimos cuadrados que encontró en el ejercicio 1.b)

233. Encuentre a) la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\mathrm{Col}(A)$ y b) una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$

234. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$. Determine $A\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, compárelos con $\mathbf{b}$. ¿Es posible que al menos uno de los dos entre $\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$ sea una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$? (Responda sin obtener una solución de mínimos cuadrados).

Aplicaciones de problemas mínimos cuadrados a modelos lineales

235. Encuentre la ecuación $y = \beta_0 + \beta_1 x$ de la recta de mínimos cuadradps que mejor se ajuste a los puntos de datos indicados.

   a) $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(3, 2)$.
   b) $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 2)$ y $(5, 3)$.
   c) $(-1, 1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 4)$.
   d) $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(4, 2)$ y $(5, 3)$.

236. Sea X la matriz de diseño empleada para determinar la recta de mínimos cuadrados que se ajusta a los datos $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Demuestre que las ecuaciones normales tienen solución única si y solo si los datos incluyen al menos dos puntos de datos con diferente coordenada x.

Diagonalización de matrices simétricas

237. Determine qué matrices son ortogonales. Si alguna es ortogonal, encuentre su inversa.

a) $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \\ \sqrt{5}/3 & -4/\sqrt{45} & -2/\sqrt{45} \end{bmatrix}$

238. Diagonalice ortogonalmente las matrices, dando una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & -36 & 0 \\ -36 & -23 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

239. Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Compruebe que 2 es un valor propio de A y $\mathbf{v}$ un vector propio. Después, diagonalice A ortogonalmente.

Formas cuadráticas

240. Calcule la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, cuando $A = \begin{bmatrix} 5 & 1/3 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}$ y

a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

241. Encuentre la matriz de la forma cuadrática. Suponga que $\mathbf{x}$ está en $\mathbb{R}^2$.

    a) $10x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2$

    b) $5x_2^2 + 3x_1x_2$

242. Obtenga la matriz de la forma cuadrática. Suponga que $\mathbf{x}$ está en $\mathbb{R}^3$

    a) $8x_1^2 + 7x_2^2 - 3x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$

    b) $4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 8x_2x_3$

243. Sea A la matriz de la forma cuadrática

$$9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3$$

Es posible demostrar que los valores propios de A son 3, 9 y 15. Encuentre una matriz ortogonal P tal que el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transforme $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ en una forma cuadrática sin productos cruzados. Determine P y la nueva forma cuadrática.

244. Clasifique las formas cuadráticas. Después realice un cambio de variable, $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, que convierta la forma cuadrática en una que no incluya productos cruzados. Escriba la nueva forma cuadrática. Construya P.

    a) $3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2$

    b) $9x_1^2 - 8x_1x_2 + 3x_2^2$

    c) $2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2$

    d) $-5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2$

    e) $x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2$

    f) $8x_1^2 + 6x_1x_2$

Descomposición en valores singulares

245. Obtenga los valores singulares de las matrices

    a) $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

    b) $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

246. Encuentre una DVS para cada matriz

    a) $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

    b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

    c) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

247. Encuentre la DVS de $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

248. Suponga que la siguiente factorización es una DVS de una matriz A, con las entradas en U y V redondeadas a dos decimales.

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}40 & -0{,}78 & 0{,}47 \\ 0{,}37 & -0{,}33 & 0{,}87 \\ 0{,}84 & -0{,}52 & 0{,}16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}30 & -0{,}51 & 0{,}81 \\ 0{,}76 & -0{,}64 & 0{,}12 \\ 0{,}58 & -0{,}58 & 0{,}58 \end{bmatrix}$$

a) ¿Cuál es el rango de A?

b) Utilice esta descomposición de A, sin hacer cálculos, y escriba una base para $\mathrm{Col}(A)$ y una base para $\mathrm{Nul}(A)$.