CUANTIFICADORES

1 Cuantificadores lógicos

DEFINICIÓN (Función proposicional) Una función proposicional $p(x)$ es una expresión que depende de una variable x que al ser reemplazada por elementos de un conjunto de referencia U hacen que p se transforme en una proposición.

EJEMPLO 1

1. $p(x) \iff x-5 \leqslant 0$ es un predicado en el conjunto de los números enteros. En particular, $p(3)$ es verdadera y $p(7)$ es falsa.

2. $p(x,y) \iff x+y+1=0$ es una función proposicional que depende de dos variables x e y que está definida en el conjunto de los números reales. Entonces $p(-2,1)$ es verdadero y $p(1,1)$ es falso.

DEFINICIÓN Definimos los cuantificadores lógicos, sobre proposiciones, como sigue: Dada una proposición p, con dominio U, le asociamos el subconjunto de U donde p es verdadera:

$$A = \{x \in U \mid p(x)\}$$

Se definen las proposiciones

$$\begin{array}{rcl}
(\forall\, x \in U)\, p(x) & \iff & (A = U) \\
(\exists\, x \in U)\, p(x) & \iff & (A \neq \varnothing) \\
(\exists!\, x \in U)\, p(x) & \iff & (A = \{u\})(u \in U)
\end{array}$$

La primera equivalencia dice que la proposición $(\forall\, x \in U)p(x)$ es verdadera si y solo si el conjunto de valores donde p es verdadera coincide con el dominio U. Análogamente, la proposición $(\exists x \in U)p(x)$ es verdadera si y solo si el conjunto de valores donde p es verdadera es no vacío. Obviamente, las proposiciones definidas anteriormente pueden ser verdaderas o falsas, de acuerdo a las características del conjunto A.

1.1 Demostración de afirmaciones con cuantificadores

Un enorme número de resultados de las matemáticas avanzadas se presentan en forma de afirmación de la verdad o falsedad de algún enunciado universal o existencial; éste es uno de los factores que distinguen de las matemáticas elementales y muchos de los resultados de este curso adoptan esta forma.

1. **Demostración de enunciados de la forma $\forall a \in A, p(a)$**
Normalmente demostramos las afirmaciones de esta forma reescribiéndolas en la forma

$$a \in A \Longrightarrow P(a) .$$

EJEMPLO 2 Para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x^2 > 0$.

2. **Demostración de afirmaciones de la forma $\exists\, a \in A, P(a)$**

A menudo demostramos afirmaciones de esta forma simplemente mostrando un elemento particular $a \in A$ para el que $P(a)$ es verdadera.

EJEMPLO 3 Probar $\exists n \in \mathbb{Z}$, $n^2 = 9$.

Solución Obsérvese que $3 \in \mathbb{Z}$ y $3^2 = 9$ y, por tanto, $n = 3$ proporciona un ejemplo que demuestra esta afirmación.

Hay muchas afirmaciones que incluyen ambos cuantificadores.
EJEMPLO 4 Para números enteros n, si n es par entonces n^2 es par.

Se trata de una implicación universal: $(\forall\, n \in \mathbb{Z})(n \text{ es par } \Longrightarrow n^2 \text{ es par})$. Sin embargo, la hipótesis de que n es par es un enunciado de existencia, que puede escribirse

$$(\exists\, q \in \mathbb{Z})(n = 2q) .$$

EJEMPLO 5 Considere $U = \mathbb{N}$ y la proposición

$$p(n) \Longleftrightarrow (n \text{ es par})$$

Así, $A = \{p \in \mathbb{N} \mid p = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, es el conjunto de los números pares. Luego las definiciones anteriores son

$$\begin{aligned}
(\forall\, n \in \mathbb{N})p(x) &\Longleftrightarrow F \\
(\exists\, n \in \mathbb{N})p(x) &\Longleftrightarrow V \\
(\exists!\, n \in \mathbb{N})p(x) &\Longleftrightarrow F
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Otros ejemplos son los siguientes:

- $(\exists\, x \in \mathbb{N})(x \text{ es divisible por } 2)$ es ____________________
- $(\forall\, x \in \mathbb{N})(x \text{ es divisible por } 2)$ es ____________________
- $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x^2 + x = 0)$ es ____________________
- $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x^2 + x = 0)$ es ____________________
- $(\exists!\, x \in \mathbb{R})(x^2 + x = 0)$ es ____________________
- $(\exists\, x \in \mathbb{Z})(x^2 + x^3 = 0)$ es ____________________

2 Proposiciones con más de una variable

Los enunciados que incluyen ambos cuantificadores requieren cierto cuidado, en particular en lo que respecta al orden de los cuantificadores.

EJEMPLO 7 Consideremos por ejemplo, la función proposicional $p(n, m) \Longleftrightarrow m < n$, que incluye los números naturales n y m

1. $(\forall\, m \in \mathbb{N})(\exists\, n \in \mathbb{N})(m < n)$
2. $(\exists\, n \in \mathbb{N})(\forall\, m \in \mathbb{N})(m < n)$
3. $(\forall\, n \in \mathbb{N})(\exists\, m \in \mathbb{N})(m < n)$
4. $(\exists\, m \in \mathbb{N})(\forall\, n \in \mathbb{N})(m < n)$

Solución

1. Esta afirmación es equivalente con $\{m \in \mathbb{N} \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\,, m < n\} = \mathbb{N}$ La proposición es verdadera, ya que dado un $m \in \mathbb{N}$, si tomamos $n = m + 1$ entonces $n \in \mathbb{N}$ y $m < n$.
2. Esta afirmación es equivalente a que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} \mid \forall\, m \in \mathbb{N}, m < n\} \neq \varnothing$. Esta afirmación es falsa.
3. Esta afirmación equivale a $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists\, m \in \mathbb{N}\,, m < n\} = \mathbb{N}$. Esta afirmación es falsa y un contraejemplo es $n = 1$ ya que m no es menor que 1 para todo $m \in \mathbb{N}$.
4. Esta afirmación es equivalente a que el conjunto $\{m \in \mathbb{N} \mid \forall\, n \in \mathbb{N}, m < n\} \neq \varnothing$. Para que m este en este conjunto, debe ser menor que todos los números naturales. Pero ciertamente no es más pequeño que él mismo, por lo que el enunciado es falso mediante el contraejemplo $n = m$.

EJEMPLO 8

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})(\exists\, y \in \mathbb{R})(x + y = 0)$$

Traducido dice: "para todo número real, existe un número real y tal que $x + y = 0$". En otras palabras, la proposición anterior no es más que una versión simbólica de uno de los axiomas de cuerpo de los números reales. Observe que la proposición más fuerte

$$(\exists\, y \in \mathbb{R})(\forall\, x \in \mathbb{R})(x + y = 0)$$

es falsa, pues no existe ningún número real y que sirva como inverso aditivo para el conjunto completo de los números reales.

EJEMPLO 9

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})(\forall\, y \in \mathbb{R})(x^2 - y^2 = (x + y)(x - y))\,.$$
$$(\forall\, y \in \mathbb{R})(\forall\, x \in \mathbb{R})(x^2 - y^2 = (x + y)(x - y))\,.$$

Ambas proposiciones afirman lo mismo, a saber, que la ecuación

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

es válida para todos los números reales x e y.

EJEMPLO 10 Considere las afirmaciones

$$(\exists\, x \in S)(\forall\, y \in S)(x \geqslant y)$$
$$(\forall\, x \in S)(\exists\, y \in S)(x \geqslant y)\ ,$$

donde S es un subconjunto de los números reales. La primera sostiene que en S hay un número mayor que todos los otros. Por tanto, es verdadera para $S = [-3, 7]$, pero falsa para $S = [-3, 7)$. La segunda declaración es mucho más débil que la primera, y resulta verdadera.

PROPOSICIÓN 1 Sea $p(x, y)$ una función proposicional con conjunto referencial U. Se cumplen las siguientes equivalencias:

1. $(\forall\, x \in U)(\forall\, y \in U)\, p(x, y) \Longleftrightarrow (\forall\, y \in U)(\forall\, x \in U)\, p(x, y)$
2. $(\exists\, x \in U)(\exists\, y \in U)\, p(x, y) \Longleftrightarrow (\exists\, y \in U)(\exists\, x \in U)\, p(x, y)$
3. $(\exists\, x \in U)(\forall\, y \in U)\, p(x, y) \Longrightarrow (\forall\, y \in U)(\exists\, x \in U)\, p(x, y)$

Notar que no se tiene el recíproco de la última implicación de la Proposición. Es decir, no necesariamente se cumple que

$$(\forall\, y \in U)(\exists\, x \in U)\ P(x, y) \Longrightarrow (\exists\, x \in U)(\forall\, y \in U)\ P(x, y)\ .$$

Para probarlo necesitamos dar un contraejemplo. Tomemos $U = \mathbb{N}$ y $p(x, y) \Longleftrightarrow x > y$. Para $y \in \mathbb{N}$ arbitrario, $x = y+1$ es tal que $x > y$. Luego, se cumple que $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})(x > y)$. No obstante, no es cierto que $(\exists\, x \in \mathbb{N})(\forall\, y \in \mathbb{N})(x > y)$ porque ningún entero es mayor que todos los números naturales.

3 Negación de cuantificadores

Dada una proposición p con dominio U, las negaciones de los cuantificadores universal y existencial son las siguientes:

PROPOSICIÓN 2 Sea $p(x)$ una función proposicional. Entonces, independientemente del universo de significados, se cumplen las equivalencias

$$\begin{array}{ccc} \overline{[(\forall\, x \in U)\ p(x)]} & \Longleftrightarrow & (\exists\, x \in U)\overline{p(x)} \\ \overline{[(\exists\, x \in U)\ p(x)]} & \Longleftrightarrow & (\forall\, x \in U)\overline{p(x)} \end{array}$$

EJEMPLO 11 Sea la proposición (sobre el universo $\mathbb{R}$)

$$(\forall\, x \in \mathbb{R})(\forall\, y \in \mathbb{R})(\exists\, z \in \mathbb{R})(x < z < y)\ .$$

Construimos la negación de esta proposición como sigue:

$$\begin{aligned}\overline{(\forall\, x\in\mathbb{R})(\forall\, y\in\mathbb{R})(\exists\, z\in\mathbb{R})(x<z<y)} &\iff (\exists\, x\in\mathbb{R})\overline{(\forall\, y\in\mathbb{R})(\exists\, z\in\mathbb{R})(x<z<y)}\\ &\iff (\exists\, x\in\mathbb{R})(\exists\, y\in\mathbb{R})\overline{(\exists\, z\in\mathbb{R})(x<z<y)}\\ &\iff (\exists\, x\in\mathbb{R})(\exists\, y\in\mathbb{R})(\forall\, z\in\mathbb{R})\overline{(x<z<y)}\end{aligned}$$

Notemos que

$$(x<z<y)\iff(x<z)\wedge(z<y)$$

Por lo tanto,

$$\overline{(x<z<y)}\iff\overline{(x<z)\wedge(z<y)}\iff\overline{(x<z)}\vee\overline{(z<y)}\iff(x\geqslant z)\vee(z\geqslant y)\,.$$

Se sigue que

$$\overline{(\forall\, x\in\mathbb{R})(\forall\, y\in\mathbb{R})(\exists\, z\in\mathbb{R})(x<z<y)}\iff(\exists x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})(\forall z\in\mathbb{R})[(x\geqslant z)\vee(z\geqslant y)].$$

4 Guía de Ejercicios

1. Considerando el conjunto $A=\{1,2,3\}$ determine si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Escriba la negación de cada una de ellas.

   a) $(\forall\, B\in\mathcal{P}(A))(\exists\, x\in A)(x\in B)$
   b) $(\exists\, x\in A)(\forall\, y\in A)(|x-y|\in A)$
   c) $(\forall\, B\subseteq A)(B\neq\varnothing\Longrightarrow\exists\, x\in A,|B|=x)$

2. Considere el conjunto $M=\{0,1,2,3\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

   a) $\forall\, x\in M,\exists\, y\in M\ :\ (x^2-y^2<10)\vee(x^2<y+1)$.
   b) $\forall\, x\in M,\forall\, y\in M\ :\ (x^2-y^2>-10)\wedge(x^2>y+1)$.

3. Considere el conjunto $A=\{0,\varnothing,\{0\}\}$ y su conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$, el conjunto de todos los subconjuntos de A y considere la proposición cuantificada

$$\forall\, B\in\mathcal{P}(A)\,,\exists\, C\subseteq A,|B\cup C|=|A|\,.$$

   a) Exprese en lenguaje natural la proposición cuantificada.
   b) Determine la negación de la proposición cuantificada.
   c) Determine el valor de verdad de la proposición cuantificada.
   d) ¿Cambia el valor de verdad de la proposición cuantificada si la proposición $|B\cup C|=|A|$ se cambia por la proposición $|B\cup C|\geqslant|A|$?

4. Traduzca al lenguaje matemático la siguiente frase:

   "Los números naturales tienen un menor elemento, pero no tienen un mayor elemento."

luego niegue la proposición matemática.

5. Determine si son verdaderas o falsas las proposiciones:

   a) $(\exists\, x \in \mathbb{R})(x^3 = 1)$
   b) $(\forall\, x \in \mathbb{R})(x^2 = 0)$
   c) $(\exists!\, x \in \mathbb{R})(x - 1 = 0)$

6. Discuta los valores de verdad de:

   a) $(\forall\, \alpha \in \{a, b, c, \ldots, x, y, z\})(\alpha = x)$.
   b) $(\forall\, \alpha \in \{a, b, c, \ldots, x, y, z\})(\alpha \neq x)$.
   c) $(\exists\, \alpha \in \{a, b, c, \ldots, x, y, z\})(\alpha \neq x)$.
   d) $(\exists\, \alpha \in \{a, b, c, \ldots, x, y, z\})(\alpha = x)$.
   e) $(\exists\, \alpha \in \{a, b, c, \ldots, x, y, z\})(\alpha = u)$.
   f) $(\exists!\, \alpha \in \{a, b, c, \ldots, x, y, z\})(\alpha = a)$.

7. Niegue las proposiciones

   a) $(\forall\, a \in \mathbb{N})(\forall\, b \in \mathbb{N})(\exists\, p \in \mathbb{Z})(\exists\, y \in \mathbb{Z})(ax + by = 1)$
   b) $(\forall\, \beta > 0)(\exists\, m \in \mathbb{R})(\forall\, x < \beta, m > x) \wedge (\forall\, x > \beta\,, m \leqslant x)$.

8. ¿Cuál es la negación de $(\exists\, !x \in U)\, p(x)$?

9. Niegue la proposición: $(\forall\, y \in \mathbb{R}^+)(\exists!\, x \in \mathbb{R}^+)(x^2 = y)$.