PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027
Ayudantía 1

1. Demuestre las siguientes igualdades.
   (a) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
   (b) $A^c - B^c = B - A$
   (c) $A \cap B^c = A - (A \cap B)$
   (d) $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$
   (e) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

2. Un trabajador elabora n artículos. El evento "El i-ésimo artículo es defectuoso" será denotado por A_i , con $i = 1, ..., n$. Describa los siguientes eventos usando los conjuntos A_i y las operaciones usuales entre eventos;
   (a) $B =$ "Al menos un artículo es defectuoso".
   (b) $C =$ "Ninguno de los n artículos es defectuoso".
   (c) $D =$ "Exactamente un artículo es defectuoso".
   (d) $E =$ "A lo más un artículo es defectuoso".

3. Sean A y B pertenecientes a una $\sigma-$algebra $\mathcal{F}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ contiene los conjuntos $A \cap B$, $A \backslash B$ y $A \triangle B$.

4. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos σ-álgebras definidos sobre un mismo espacio muestral, Ω. Demuestre que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ también corresponde a un σ-álgebra. Ahora defina $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. ¿Es $\mathcal{F}^*$ también una $\sigma-$algebra? Para esto considere los siguientes casos
$$\Omega = \{a, b, c\}, \quad \mathcal{F}_1 = \{\{a\}, \{b, c\}, \emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{\{b\}, \{a, c\}, \emptyset, \Omega\}$$
y
$$\Omega = \{1, 2\}, \quad \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \Omega\}$$

5. Demuestre las siguientes propiedades generales de una medida de probabilidad: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, entonces:
   (a) Monotonía: Si $A \subseteq B$, tal que $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
   (b) Subaditividad: Si $A_1, A_2, \ldots A_k \in \mathcal{A}$, entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{k} P(A_n)$.