Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2015

MAT1620 ⋆ Cálculo 2

Interrogación N° 3

1. Determine una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta
$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$
y es perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$.

2. Determine la distancia del origen a la recta de ecuaciones $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 2t$.

3. Dadas las curvas
$$\vec{r}_1(t) = (t, 1 - t, 3 + t^2)$$
$$\vec{r}_2(s) = (3 - s, s - 2, s^2)$$
   (a) Determine el punto de intersección entre las curvas.
   (b) Determine el ángulo formado por las tangentes a $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en el punto determinado en (a).

4. Si $u(t) = \vec{r}(t) \cdot \left(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right)$ demuestre que $\dot{u}(t) = \vec{r}(t) \cdot \left(\dot{\vec{r}}(t) \times \dddot{\vec{r}}(t)\right)$

5. Sea $\mathcal{C}$ la curva cuyas ecuaciones son $x = 2 - t^3$, $y = 2t - 1$, $z = \ln(t)$
   (a) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a esta curva en $t = 1$.
   (b) Determine una ecuación del plano osculador de esta curva en $t = 1$.

6. Determine, para todo $t \in \mathbb{R}$, la torsión de la curva $\vec{r}(t) = (t, t^2/2, t^3/3)$.

7. Una hormiga que se encuentra en el origen camina hacia arriba por un alambre de la forma:
$$\vec{r}(t) = \left(t^2 \cos(t), t^2 \operatorname{sen}(t), \frac{t^3}{\sqrt{3}}\right)$$
Si la hormiga ha caminado una distancia $d = 2$ a lo largo del alambre, ¿a que distancia del plano XY se encuentra la hormiga?

8. Sea $\vec{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva con curvatura $k(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$. Denotamos por $\mathbf{N}(t)$ a la normal unitaria de esta curva.
Se define la curva $\vec{\beta}(t) = \vec{\alpha}(t) + \dfrac{1}{k(t)}\mathbf{N}(t)$. Demuestre que $\dot{\vec{\alpha}}(t) \cdot \dot{\vec{\beta}}(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$.

Solución Interrogación N° 3

1. Determine una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$$

y es perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$.

Solución.

La dirección de la recta es perpendicular a la normal de los planos $x - z = 1$, $y + 2z = 3$, luego se puede determinar como

$$\langle 1, 0, -1\rangle \times \langle 0, 1, 2\rangle = \langle 1, -2, 1\rangle \quad (\mathbf{2\ pto})$$

La normal del plano buscado es perpendicular a la normal del plano $x + y - 2z = 1$ y la dirección de la recta, luego se puede determinar como

$$\langle 1, 1, -2\rangle \times \langle 1, -2, 1\rangle = \langle -3, -3, -3\rangle \quad (\mathbf{2\ pto})$$

Un punto cualquiera de la recta pertence al plano buscado, en particular el punto $(0, 5, -1)$, luego la ecuación del plano es $x + y + z - 4 = 0$. (**2 pto**)

2. Determine la distancia del origen a la recta de ecuaciones $x = 1 + t$, $y = 2 - t$, $z = -1 + 2t$.

Solución.

Escogemos un punto cualquiera de la recta en particular $A = (1, 2, -1)$ y trazamos el vector $\overrightarrow{0A} = \langle 1, 2, -1\rangle$, la dirección de la recta es $\overrightarrow{v} = \langle 1, -1, 2\rangle$, luego la distancia esta dada por

$$d = \|\vec{0A}\|\, sen(\theta) = \|\vec{0A}\| \frac{\|\vec{0A} \times \vec{v}\|}{\|\vec{0A}\|\|\vec{v}\|} \quad (\mathbf{3\ pto})$$

donde θ es el ángulo formado por $\vec{0A}$ y $\vec{v}$.Luego $d = \dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{6}}$ (**3 pto**)

3. Dadas las curvas

$$\vec{r}_1(t) = (t, 1 - t, 3 + t^2)$$
$$\vec{r}_2(s) = (3 - s, s - 2, s^2)$$

(a) Determine el punto de intersección entre las curvas.

(b) Determine el ángulo formado por las tangentes a $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ en el punto determinado en (a).

Solución.

(a) El punto es $(1, 0, 4)$ que se encuentra con $s = 2$ o $t = 1$ (**2 pto**)

(b) $\dot{\vec{r}}_1(1) = \langle 1, -1, 2\rangle, \dot{\vec{r}}_2(2) = \langle -1, 1, 4\rangle$, (**2 pto**) luego

$$\theta = \arccos\left(\frac{\dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_2}{\|\dot{\vec{r}}_1\|\|\dot{\vec{r}}_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{6}\sqrt{18}}\right) \quad (\mathbf{2\ pto})$$

4. Si $u(t) = \vec{r}(t) \cdot \left(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right)$ demuestre que $\dot{u}(t) = \vec{r}(t) \cdot \left(\dot{\vec{r}}(t) \times \dddot{\vec{r}}(t)\right)$

Solución.

$$\dot{u}(t) = \dot{\vec{r}}(t) \cdot \left(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right) + \vec{r}(t) \cdot \left((\ddot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)) + (\dot{\vec{r}}(t) \times \dddot{\vec{r}}(t))\right) \quad (\textbf{2 pto})$$

Luego como

$$\dot{\vec{r}}(t) \perp \left(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right)$$

tenemos que $\dot{\vec{r}}(t) \cdot \left(\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\right) = 0$ (**2 pto**) y como

$$\ddot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = 0 \quad (\textbf{2 pto})$$

obtenemos que $\dot{u}(t) = \vec{r}(t) \cdot \left(\dot{\vec{r}}(t) \times \dddot{\vec{r}}(t)\right)$

5. Determine, para todo $t \in \mathbb{R}$, la torsión de la curva $\vec{r}(t) = (t, t^2/2, t^3/3)$.

Solución.
Sabemos que

$$\tau = \frac{\dot{\vec{r}}(t) \cdot (\ddot{\vec{r}}(t) \times \dddot{\vec{r}}(t))}{\|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)\|^2}$$

luego

$$\ddot{\vec{r}}(t) \times \dddot{\vec{r}}(t) = (2, 0, 0) \qquad (\textbf{2 pto})$$
$$\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = (t^2, -2t, 1) \qquad (\textbf{2 pto})$$

Como $\dot{\vec{r}}(t) = (1, t, t^2)$, entonces

$$\tau(t) = \frac{2}{t^4 + 4t^2 + 1} \qquad (\textbf{2 pto})$$

6. Sea $\mathcal{C}$ la curva cuyas ecuaciones son $x = 2 - t^3$, $y = 2t - 1$, $z = \ln(t)$

(a) Determine las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a esta curva en $t = 1$.

(b) Determine una ecuación del plano osculador de esta curva en $t = 1$.

Solución.

(a) Si $r(t) = (2 - t^3, 2t - 1, \ln(t))$, entonces $r'(t) = (-3t^2, 2, 1/t)$. La recta tangente debe tener vector director $r'(1) = (-3, 2, 1)$ y debe pasar por el punto $r(1) = (1, 1, 0)$ (1 pt). Por lo tanto la recta tangente es

$$\{(1, 1, 0) + t(-3, 2, 1) : t \in \mathbb{R}\} \quad (1pt)$$

(b) El vector $r' \times r''$ va en la dirección del binormal, por lo tanto debemos calcular $(r' \times r'')(1)$. Notar que $r''(t) = (-6t, 0, -1/t^2)$, por lo tanto $r''(1) = (-6, 0, -1)$. Así,

$$(r' \times r'')(1) = (-2, -9, 12)$$

y entonces el plano osculador tiene ecuación $-2x - 9y + 12z + 11 = 0$.

7. Una hormiga que se encuentra en el origen camina hacia arriba por un alambre de la forma:

$$\vec{r}(t) = \left(t^2\cos(t), t^2\operatorname{sen}(t), \frac{t^3}{\sqrt{3}}\right)$$

Si la hormiga ha caminado una distancia $d = 2$ a lo largo del alambre, ¿a que distancia del plano XY se encuentra la hormiga?

Solución. Inicialmente, la hormiga está en el origen, que corresponde a $t = 0$.

La distancia que camina desde el origen a un punto $\vec{r}(t)$ (con $t > 0$) es

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{r}'(u)\| \, du = \int_0^t \left\|(2u\cos u - u^2\operatorname{sen} u, 2u\operatorname{sen} u + u^2\cos u, \sqrt{3}\,u^2)\right\| \, du. \qquad (\star)$$

Tras simplificar, llegamos a

$$s(t) = \int_0^t 2\sqrt{u^2(u^2+1)}\, du = \int_0^t 2\,|u|\,\sqrt{u^2+1}\, du.$$

Pero $t > 0$, por lo que

$$s(t) = \int_0^t 2u\sqrt{u^2+1}\, du. \qquad (\star)$$

Esta integral se calcula fácilmente (sustituyendo $z = u^2 + 1$ queda $\displaystyle\int_1^{t^2+1} \sqrt{z}\, dz$), lo que da

$$s(t) = \frac{2}{3}\left((t^2+1)^{3/2} - 1\right). \qquad (\star)$$

Así, que la hormiga haya caminado una distancia d significa que

$$d = s(t) = \frac{2}{3}\left((t^2+1)^{3/2} - 1\right),$$

de donde

$$\frac{3d}{2} + 1 = (t^2+1)^{3/2},$$

$$\left(\frac{3d}{2} + 1\right)^2 = (t^2+1)^3,$$

$$t^2 + 1 = \sqrt[3]{\left(\frac{3d}{2}+1\right)^2},$$

o sea,

$$t = \sqrt{\sqrt[3]{\left(\frac{3d}{2}+1\right)^2} - 1}. \qquad (\star)$$

Así, finalmente, su distancia al plano XY (dada por su coordenada z) es

$$z = \frac{t^3}{\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{3d}{2}+1\right)^2} - 1\right)^{3/2}}{\sqrt{3}}, \qquad (\star)$$

por lo que si $d = 2$ entonces

$$z = \frac{\left(\sqrt[3]{(3+1)^2} - 1\right)^{3/2}}{\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt[3]{16} - 1\right)^{3/2}}{\sqrt{3}}. \qquad (\star)$$

Puntaje:

Por llegar a cada una de las ecuaciones marcadas con $(\star)$, 1 pto.

8. Sea $\vec{\alpha} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva con curvatura $k(t) \neq 0$, para todo $t \in [a, b]$. Denotamos por $\mathbf{N}(t)$ a la normal unitaria de esta curva.

   Se define la curva $\vec{\beta}(t) = \vec{\alpha}(t) + \dfrac{1}{k(t)}\mathbf{N}(t)$. Demuestre que $\dot{\vec{\alpha}}(t) \cdot \dot{\vec{\beta}}(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$.

   Solución.

   Solución1 : Debemos suponer que la curva $\vec{\alpha}$ esta arcoparametrizada, en tal caso, $\dot{\vec{\alpha}} = T$, donde T es el vector tangente unitario (1 pt). Derivando la curva $\vec{\beta}$ respecto al parametro de α tenemos

$$\dot{\vec{\beta}} = \dot{\vec{\alpha}} + \frac{1}{\kappa}N' - \frac{\kappa'}{\kappa^2}N \quad (1pt)$$

   Por las fórmulas de Frenet- Serret tenemos que $N' = -\kappa T + \tau B$ (1 pt), donde τ, B son la torsión y el vector binormal respectivamente. Reemplazando tenemos que

$$\dot{\vec{\beta}} = \frac{\tau}{\kappa}B - \frac{\kappa'}{\kappa^2}N, \quad (1pt)$$

   Por lo tanto,

$$\dot{\vec{\beta}} \cdot \dot{\vec{\alpha}} = \dot{\vec{\beta}} \cdot T = \frac{\tau}{\kappa}(B \cdot T) - \frac{\kappa'}{\kappa^2}(N \cdot T) = 0 \quad (2pt)$$

   Solución 2: Derivando la curva $\vec{\beta}$ respecto al parametro de α tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\vec{\beta}} &= \dot{\vec{\alpha}} + \frac{1}{\kappa}\frac{dN}{dt} - \frac{\kappa'}{\kappa^2}N \quad (2pt) \\ &= \dot{\vec{\alpha}} - |\dot{\vec{\alpha}}|T + \frac{|\dot{\vec{\alpha}}|\tau}{\kappa}B - \frac{\kappa'}{\kappa^2}N \quad (2pt) \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\dot{\vec{\beta}} \cdot \dot{\vec{\alpha}} = |\dot{\vec{\alpha}}|^2 - |\dot{\vec{\alpha}}|(T \cdot \dot{\vec{\alpha}}) + \frac{|\dot{\vec{\alpha}}|\tau}{\kappa}(B \cdot \dot{\vec{\alpha}}) - \frac{\kappa'}{\kappa^2}(N \cdot \dot{\vec{\alpha}}) = 0 \quad (2pt)$$