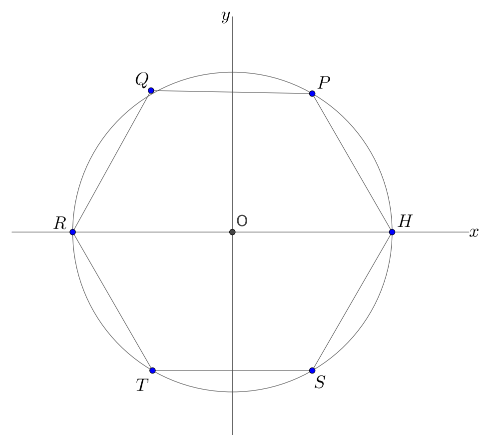
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2018

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 1

1. El hexágono regular de la figura está inscrito en una circunferencia de radio 1, por lo cual

$$\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$



a) Encontrar α y β tal que $\overrightarrow{RT} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

b) Demuestre que $\overrightarrow{HP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SH} = 0$

Solución.

a) Notamos que $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{PH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. Luego $\alpha = 1$ y $\beta = -1$.

b) Notamos que $\overrightarrow{HP} = -\overrightarrow{RT}$, $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{TS}$, $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{SH}$. Luego

$$\overrightarrow{HP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SH} = -\overrightarrow{RT} + -\overrightarrow{TS} + -\overrightarrow{SH} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SH} = 0$$

Puntaje:

- 1.5 pts por encontrar α.
- 1.5 pts por encontrar β.
- 0.5 por determinar que $\overrightarrow{HP} = -\overrightarrow{RT}$
- 0.5 por determinar que $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{TS}$
- 0.5 por determinar que $\overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{SH}$
- 1.5 por concluir que $\overrightarrow{HP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SH} = 0$

2. *a*) Encuentre el producto punto de dos vectores u, v tales que $\|u\| = 3, \|v\| = 5$ y el ángulo formado entre ellos es $\frac{\pi}{3}$.

b) Dados u y $v \in \mathbb{R}^3$, tal que u es un vector unitario y v es un vector ortogonal a u. Demuestre (justificando cada paso) que

$$u \times (u - (u \times v)) = v$$

Ayuda: si a, b y $c \in \mathbb{R}^3$, $a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$.

Solución.

a) De lo visto en clases $u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta$ donde θ es el ángulo formado por los dos vectores, luego $u \cdot v = 15 \cos\frac{\pi}{3} = \frac{15}{2}$.

b) Aplicando las propiedades de producto cruz y producto punto:

$$\begin{aligned}
u \times (u - (u \times v)) = \;& (u \times u) - (u \times (u \times v)) && \text{el producto cruz es distributivo} \\
& 0 - (u \times (u \times v)) && \text{el producto cruz de vectores paralelos es 0} \\
& (u \cdot v)u - (u \cdot u)v && \text{aplicando la ayuda} \\
& 0 - (u \cdot u)v && \text{vectores perpendiculares su producto punto es 0} \\
& \|u\|^2 v && \text{propiedad del producto punto} \\
& v && \text{el vector u es unitario}
\end{aligned}$$

Puntaje:

- 2 pto por enunciar que $u \cdot v = \|u\|\|v\| \cos\theta$
- 1 pts por evaluar la formula con los datos dados.
- 0.5 pts por cada paso justificado del item b)(0.3 si aplica el paso sin justificar)

3. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0 = (1, -1, 1)$ y que contiene a la recta de ecuaciones $x = t$,$y = \frac{t}{2}$ y $z = \frac{t}{3}$.

Solución.

- (una solución) Como dicho plano contiene a la recta, entonces contiene a cualquiera dos puntos de ella, en particular $P_1 = (0, 0, 0)$ y $P_2 = (6, 3, 2)$. Luego un vector ortogonal al plano está dado por el producto cruz entre los vectores $P_1P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $P_1P_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, el cual resulta
  $n = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$. Por lo tanto la ecuación del plano está dada por

  $$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -5x + 4y + 9z = 0.$$

- (otra solución) Como dicho plano contiene a la recta, entonces el vector director de la recta d es paralelo al plano y cualquier punto de la recta pertenece al plano, en particular $P_1 = (0, 0, 0)$. Luego un vector ortogonal al plano está dado por el producto cruz entre los vectores $P_1P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $d = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, el cual resulta $n = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Por lo tanto la ecuación del plano está dada por

  $$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -\frac{5}{6}x + \frac{2}{3}y + \frac{3}{2}z = 0.$$

Puntaje:

- 3 ptos por determinar la normal del plano.(1.5 pts si hay un error de calculos)
- 3 ptos por determinar la ecuación del plano.(1.5 pts si hay un error de calculos)

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{pmatrix}$.

a) Determine la matriz A tal que $T(x) = Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Encuentre la transformación inversa de T si es que existe.

Solución.

a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Para encontrar la transformación inversa, encontraremos primero la matriz inversa de A.Trabajamos con A aumentada con la matriz identidad

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Luego A posee inversa y es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Así la transformación inversa esta dada por $T^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

Puntaje:

- 1 pto por determinar cada columna de A.
- 2 ptos por determinar la inversa de A (1 punto si hay un error numerico)
- 1 pto por determinar la transformación inversa.

Continua en la siguiente página.

5. Considere el siguiente sistema de ecuaciones en variables x, y, z y w

$$\begin{aligned} x + y + az + w &= 0 \\ y + z + aw &= 2 \\ ax + y + az + aw &= 0 \\ x + y + z + (a^2 - 1)w &= a \end{aligned}$$

Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que:

a) El sistema no tiene solución.

b) El sistema tiene solución única.

c) El sistema tiene infinitas soluciones.

Solución.

Observe que la matriz ampliada asociada al sistema es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & | & 2 \\ a & 1 & a & a & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & (a^2-1) & | & a \end{bmatrix}$$

Al intentar escalonar la matriz obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & | & 2 \\ 0 & 1-a & a-a^2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & (a^2-2) & | & a \end{bmatrix}$$

Observe que si $a = 1$ entonces la matriz queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Que corresponde a la matriz ampliada de un sistema con infinitas soluciones.

Si $a \neq 1$ entonces la tercera fila podemos dividirla por $1 - a$ obteniendo la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & | & 2 \\ 0 & 1 & a & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & (a^2-2) & | & a \end{bmatrix}$$

Si realizamos la operación $F_3 \to F_3 - F_2$ obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & | & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -a & | & -2 \\ 0 & 0 & 1-a & (a^2-2) & | & a \end{bmatrix}$$

Ahora haciendo $F_4 \to F_4 + F_3$ queda la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & a & | & 2 \\ 0 & 0 & a-1 & -a & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & (a-2)(a+1) & | & a-2 \end{bmatrix}$$

Como estamos en el caso $a \neq 1$ la matriz anterior tendrá cuatro pivotes, que corresponde a un sistema con solución única, si y sólo si $a \neq 2$ y $a \neq -1$.

Si $a = 2$ la matriz queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

que representa un sistema con infinitas soluciones.

Si $a = -1$ la matriz queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & -3 \end{bmatrix}$$

que corresponde a un sistema inconsistente.

En resumen:

a) el sistema no tiene solución si y sólo si $a = -1$

b) el sistema tiene solución única si y solo si $a \neq -1$, $a \neq 1$, $a \neq 2$

c) el sistema tiene infinitas soluciones si y solo si $a = 1$ o $a = 2$

Puntaje:

- 0.5 pto por mostrar la matriz ampliada
- 2 ptos llegar a la matriz escalonada
- 1 pto por concluir que el sistema no tiene solución si y sólo si $a = -1$
- 1.5 ptos por concluir que el sistema tiene solución única si y solo si $a \neq -1$, $a \neq 1$, $a \neq 2$ (0.5 por cada condición)
- 1 pto por concluir que el sistema tiene infinitas soluciones si y solo si $a = 1$ o $a = 2$ (0.5 por cada condición)

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Sea W el conjunto de todas las combinaciones lineales de las columnas de A. Determine si el vector $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$.

   b) Utilice tantas columnas de A como sea posible para construir una matriz B tal que la ecuación $Bx = 0$ sólo tenga la solución trivial.

Solución.

a) Sean v_1, v_2, v_3, v_4 las columnas de A, luego para que b pertenezca a W, el vector b debe ser una combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3, v_4, lo que implica que la ecuación vectorial

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = b$$

debe tener solución. Una forma de solucionar esta ecuación esta dada por

$$(v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4 \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Como nos encontramos con una fila $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$ implica que la ecuación vectorial no tiene solución, luego b no es combinación lineal de las columnas de W, es decir, $b \notin W$

b) Para que el sistema $Bx = 0$ tenga únicamente la solución trivial las columnas de la matriz B deben ser linealmente independientes, luego para construir B debemos encontrar la mayor cantidad de columnas linealmente independientes de A, una forma de encontralas es

$$(v_1 \;\; v_2 \;\; v_3 \;\; v_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ -3 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como las primeras 3 columnas de A que conforman un conjunto linelmente independiente, tenemos que $B = [v_1 \;\; v_2 \;\; v_3]$ y así la ecuación $Bx = 0$ tiene únicamente la solución trivial.

Puntaje:

- 1 pto por plantear la ecuación vectorial que se debe intentar solucionar, puede plantear directamente la matriz ampliada.
- 1 pto por determinar que la ecuación no tiene solución.
- 1 pto por justificadamente determinar que $b \notin W$
- 1 pto por argumentar que debe escoger las columnas linealmente independientes de A.
- 1 pto por encontrar justificadamente las columnas linealmente independientes de A.
- 1 pto por encontrar B.

7. Sea $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^9$ una transformación lineal. Suponga que el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^7$ pero $\{T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\}$ es linealmente dependiente. Demuestre que la ecuación $T(\mathbf{x}) = 0$ admite soluciones no triviales.

Solución.

Como el conjunto $\{T(u), T(v)\}$ es linealmente dependiente, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, no ambos cero, tales que

$$\alpha T(u) + \beta T(v) = 0,$$

de aquí se tiene que, usando la linealidad de la transformación T

$$T(\alpha u + \beta v) = 0.$$

Por otro lado como $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente independiente y $\alpha, \beta \neq 0$ el vector $\alpha u + \beta v$ no es el vector cero. Luego se concluye que $\alpha u + \beta v$ es una solución no trivial de $T(x) = 0$.

Puntaje:

- 2 ptos por argumentar que existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, no ambos cero, tales que $\alpha T(u) + \beta T(v) = 0$
- 2 ptos por usar las propiedades de la transformación lineal.
- 2 ptos por argumentar que el vector encontrado es distinto de cero.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas demuestrelas y si son falsas de un contraejemplo.

   a) Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto linealmente dependiente de vectores en $\mathbb{R}^3$ entonces el conjunto $\{v_1, v_2\}$ también es linealmente dependiente.

   b) Si A es una matriz de 3×3 entonces la imagen del plano $x+y+z=0$ bajo la transformación $T(x) = Ax$ es un plano.

   c) Si $A_{2\times 2} = (a_{ij}), \quad B_{2\times 3} = (b_{ij}), \quad AB = C = (c_{ij})$ tal que

$$a_{ij} = (-2)^{i+j}, \quad b_{ij} = (-3)^{i-j},$$

   entonces $c_{23} = \dfrac{-56}{9}$.

Solución.

   a) **Falso**. Un contraejemplo puede ser $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ claramente este conjunto es linealmente dependiente ya que contiene al vector cero, pero el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente.

   b) **Falso**. Un contraejemplo es tomar la matriz cero que la imagen de cualquier conjunto bajo esta matriz es el 0.

   c) **Verdadero**. c_{23} es la entrada de la matriz C formado por el producto punto de la segunda fila de la matriz A y la tercera columna de la matriz B.

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -8 \cdot \frac{1}{9} + 16 \cdot -\frac{1}{3} = -\frac{56}{9}$$

Puntaje:

- 2 ptos por mostrar un contraejemplo en a)
- 2 ptos por mostrar un contraejemplo en b)
- 1 pto por argumentar que c_{23} es la entrada de la matriz C formado por el producto punto de la segunda fila de la matriz A y la tercera columna de la matriz B.
- 1 pto por concluir el valor de c_{23}