PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I2 MAT1203 - Algebra Lineal
Octubre 9, 2014

1. Dada $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tales que $PA = LU$. Sin encontrar A, A^T ni calcular inversas, determine solamente y nada más que

   a) [**3 pts.**] La primera fila de A^{-1}

   b) [**3 pts.**] El elemento (2,2) de A^{-1}

Sol: a) · La primera fila de A^{-1} es la transpuesta de la solución de $A^T x = \hat{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 0.5 pts

· Hay que resolver $U^T y = \hat{e}_1$, $L^T z = y$, $x = P^T z$ 1.0 pts (método)

· $U^T y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ -1 \end{bmatrix}$ 0.6 pts

· $L^T z = y \Rightarrow z = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 5/4 \\ -1 \end{bmatrix}$ 0.6 pts

· $x = P^T y = \begin{bmatrix} 5/4 \\ -1 \\ -3/4 \end{bmatrix}$ 0,3 pts

b) · $A^{-1}(2,2) = e_2^T A^{-1} e_2$ 0.5

$= e_2^T (P^{-1} L U)^{-1} e_2$

$= e_2^T U^{-1} L^{-1} P e_2$

$= z^T y$ donde $U^T z = e_2$, $Ly = Pe_2$ 1.5 pts (método)

· $U^T z = e_2 \Rightarrow z = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 0,4

· $Ly = Pe_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 0.4

· $A^{-1}(2,2) = z^T y = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2$ 0,2

· Si calculan una columna entera 1 pto
· Si en el método correcto usan inversas 1.5 pts total.

2. *a*) [**3 pts.**] Encuentre los valores del parámetro α para los cuales la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es positiva definida

b) [**3 pts.**] Sea A una matriz de $n \times n$, simétrica y semidefinida negativa y sea B una matriz de $k \times n$ con columnas linealmente independientes. Demuestre que $C = -3A + B^T B$ es simétrica definida positiva.

a) • cada submatriz principal debe tener determinante positivo 0.7 pts (método)

• $|3| > 0$ 0.3

• $\begin{vmatrix} 3 & \alpha \\ \alpha & 3 \end{vmatrix} = 9 - \alpha^2 > 0 \iff \alpha^2 < 9 \iff -3 < \alpha < 3$ 0.6

• $\begin{vmatrix} 3 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 2\alpha^2 > 0 \iff \alpha^2 < 3 \iff -\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$ 0.6

Deben cumplirse i) ii) iii) al mismo tiempo $\iff -\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}$ 0.6

Si aplica sólo iii) 0.5 pts de 3.0

b) • Hay que demostrar que C es simétrica

$$C^T = (-3A + B^T B)^T = (-3A)^T + (B^T B)^T$$
$$= -3A^T + B^T (B^T)^T$$
$$= -3A + B^T B \quad (\text{pues } A^T = A \text{ y } (B^T)^T = B)$$
$$= C$$

$\therefore$ C es simétrica 0.6

• Hay que demostrar que $x^T C x > 0$ para $x \neq \vec{0}$

$$x^T C x = x^T(-3A + B^T B)x = -3x^T A x + x^T B^T B x$$
$$= -3x^T A x + (Bx)^T Bx = -3x^T A x + y^T y \quad \text{con } y = Bx$$ 1 pts
$$= \underbrace{-3\underbrace{x^T A x}_{\leq 0}}_{\geq 0} + \underbrace{y_1^2 + \cdots + y_n^2}_{> 0}$$ 0.5

Pero Columnas de B l.i. $\Rightarrow$ que $y = Bx \neq \vec{0}$ para $x \neq \vec{0}$ 0.6

y por lo tanto $(Bx)^T Bx > 0$

$\therefore \quad x^T C x > 0$

3. a) [**3 pts.**] Sea $A = [u \quad v \quad w]$ una matriz de 3×3 con columnas $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Si $B = [4u + w \quad v - 3u \quad 5w]$ y $det(A) = \pi$, determine $det(B)$.

b) [**3 pts.**] Para la matriz tridiagonal simétrica de $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} A_{i,i} = -2 \text{ si } i = j \\ A_{i,j} = 1 \text{ si } |i - j| = 1 \\ A_{i,j} = 0 \text{ si } |i - j| > 1 \end{array}$$

determine la factorización $A = LU$ y clasifique la forma cuadrática $F(x) = x^T Ax$.

a) Hay varias maneras de resolver el problema

I) $B = [u\ v\ w] \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = |A| \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 2 pts

Pero $|A| = \pi$, $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 20 \therefore |B| = 20\pi$ 1 pto

II) $|B| = |4u+w \quad v-3u \quad 5w| \overset{0.6}{=} 5\,|4u+w \quad v-3u \quad w|$

$\overset{0.6}{=} 5\,|4u \quad v-3u \quad w| \overset{0.6}{=} 5 \cdot 4\,|u \quad v-3u \quad w|$

$\overset{0.6}{=} 20\,|u\ v\ w| = 20|A| = 20\pi$ 0.6

b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + \frac{1}{2}F_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ -1/2 & -3/2 & 1 & & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + \frac{2}{3}F_2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ -1/2 & -3/2 & 1 & & \\ 0 & -2/3 & -4/3 & 1 & \\ \vdots & \vdots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \cdots\cdots \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ -1/2 & -3/2 & 1 & & & \\ 0 & -2/3 & -4/3 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & -3/4 & -5/4 & 1 & \\ & & & \ddots & -\frac{n}{n-1} & \\ 0 & 0 & & & -\frac{n-1}{n} & -\frac{n+1}{n} \end{bmatrix}$

$\therefore L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1/2 & 1 & & & \\ & -2/3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{n-1}{n} & 1 \end{bmatrix}$ 1 pts $\quad U = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ & -3/2 & 1 & & \\ & & -4/3 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \\ & & & & -\frac{n+1}{n} \end{bmatrix}$ 1 pto

Como los pivotes son todos negativos, A es negativa definida (1 pto)

Si resuelven correctamente una de 5x5 (1.5 pts)

4. Determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA y justifique su respuesta (El indicar correctamente si es V o F sin una demostración no tiene puntos)

   a) [**1.5 pts.**] Si $det(A) = 0$ entonces al menos uno de sus cofactores debe ser igual a cero.

   b) [**1.5 pts.**] Si A es simétrica invertible entonces A^2 es simétrica definida positiva.

   c) [**1.5 pts.**] Si la matriz de cofactores de A no tiene inversa entonces A no tiene inversa.

   d) [**1.5 pts.**] Si B es 4×5 entonces $det(B^T B) = 0$

a) FALSO: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $Cof(A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ Todos los cofactores de A son distintos de cero y $|A| = 0$ 1.5 pts

(Por el contraejemplo)

b) VERDADERO: $C = A^2$

- C es simetrica: $C^T = (A^2)^T = (AA)^T = A^T A^T = A \cdot A = A^2 = C$ 0.3 pts
- $x^T C x = x^T A x = x^T A A x = x^T A^T A x$ 1 pts
  $= (Ax)^T (Ax) = y^T y = y_1^2 + \cdots + y_n^2$

Como A es invertible $x \neq 0 \Rightarrow y = Ax \neq 0 \therefore x^T C x > 0$ 0.2

c) Verdadero:

- $A \cdot Adj(A) = det(A) \cdot I$ (0.8 pts)
  $\Downarrow$
  $|A| \cdot |Adj(A)| = (det(A))^n \cdot 1$ (0.4 pts)
- Matriz de cofactores no tiene inversa $\Rightarrow$
  $|Adj(A)| = 0$ 0.3

d)

- B de 4×5 $\Rightarrow$ B tiene columnas ld 0.6
- $\therefore$ existe $x \neq 0$ tq $Bx = 0$ 0.3
  $\Rightarrow$ $B^T B x = 0$
- Por lo tanto $B^T B$ No tiene inversa 0.4
- $\therefore$ $|B^T B| = 0$ 0.2

~~no~~ (cols ld)

Si usan el método erróneo: $|B^T B| = |B^T| |B| = 0$

otorgar 0.8 pts