Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Examen

1. Sean a, b, c, d números reales positivos y no nulos. Demuestre que, si $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, entonces

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}\,.$$

Solución. Como se trata de números positivos, sabemos que $ad < cb$. Sumando a ambos lados ab obtenemos

$$ab + ad < ab + cb \qquad \Longrightarrow \qquad a(b+d) < b(a+c) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}\,,$$

donde esta última implicancia se obtiene porque los números son positivos.
Si a la desigualdad $ad < cb$ le sumamos a ambos lados dc, obtenemos que

$$dc + ad < dc + cb \qquad \Longrightarrow \qquad d(a+c) < c(b+d) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}\,,$$

donde la última implicancia se obtiene porque los números son positivos.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 3 puntos por mostrar la desigualdad: $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d}$

CC 2. 3 puntos por mostrar la desigualdad: $\dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$

2. Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10} \geq 0\,.$$

Solución. Factorizando la expresión, obtenemos que

$$\frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10} = \frac{(x-3)(x+5)}{(x+2)(x+5)}.$$

Los puntos $x=-5$ y $x=-2$ son restricciones. Si suponemos que $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5,-2\}$, entonces la inecuación se reduce a

$$\frac{x-3}{x+2} \geq 0.$$

La expresión anterior es positiva cuando el numerador y el denominador tienen el mismo signo. Incluimos al punto $x=3$, pues la desigualdad pedida no es estricta, pero debemos quitar las restricciones $x=-5$ y $x=-2$. Por lo tanto, el conjunto solución es

$$(-\infty,-5) \cup (-5,-2) \cup [3,+\infty)\,.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 2 puntos por factorizar el numerador y denominador de la expresión racional.

CC 2. 2 puntos por reducir la expresión racional a $\dfrac{x-3}{x+2} \geqslant 0$.

CC 3. 2 puntos por resolver la inecuación, incluyendo las restricciones $x=-5$ y $x=-2$.

3. Sea f una función a valores reales cuyo dominio es $\mathrm{Dom}(f) = [0, 2]$. Determine el dominio de la siguiente función compuesta:

$$g(x) = f(x^2 - 4x + 5)\ .$$

Solución. Sea $p(x) = x^2 - 4x + 5$. Un $x \in \mathbb{R}$ está en el dominio de g si y solo si $p(x) \in \mathrm{Dom}(f) = [0, 2]$. La función cuadrática $p(x)$ tiene vértice en $(2, 1)$ y este es un mínimo, por lo que su recorrido es $[1, \infty)$. Resolviendo la ecuación $p(x) = 2$ obtenemos dos soluciones: $x = 1$ y $x = 3$. Por lo tanto, tenemos que

$$p(x) \in [0, 2] \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(x) \leq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [1, 3].$$

Concluimos que $\mathrm{Dom}(g) = [1, 3]$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 3.

CC 1. 2 puntos por indicar que $x \in \mathrm{Dom}(g) \Longleftrightarrow p(x) \in \mathrm{Dom}(f)$.

CC 2. 2 puntos por por resolver la ecuación $p(x) = 2$.

CC 3. 2 puntos por obtener el dominio de la función g es $[1, 3]$.

4. En la expansión de la siguiente expresión, encuentre el coeficiente de x^2:

$$\left(\frac{x^3+1}{x}\right)^{10}.$$

Solución. Usando el teorema del binomio, obtenemos que

$$\left(\frac{x^3+1}{x}\right)^{10} = \left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(x^2\right)^{10-k}\left(x^{-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^{20-3k}.$$

Necesitamos el índice k tal que $x^{20-3k} = x^2$, por lo que $k = 6$. El coeficiente correspondiente es

$$\binom{10}{6} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = 10\cdot 3\cdot 7 = 210.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 4.

CC 1. 2 puntos por aplicar el teorema del binomio y obtener que $\left(\frac{x^3+1}{x}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}\left(x^2\right)^{10-k}\left(x^{-1}\right)^k$

CC 2. 1,5 puntos por reducir las expresiones y obtener la expresión $\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}x^{20-3k}$.

CC 3. 1,5 puntoa por hallar el valor de $k = 6$.

CC 4. 1 punto por exhibir el coeficiente de x^2.

5. Considere la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$x_1 = 1 \qquad , \qquad x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} \, .$$

a) Demuestre que la subsucesión (x_{2k}) es decreciente y acotada inferiormente.

b) Demuestre que la subsucesión (x_{2k+1}) es creciente y acotada superiormente.

c) Demuestre que ambas subsucesiones convergen al mismo límite.

Solución. Notemos que

$$x_{n+2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_n}} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n} = 2 - \frac{1}{1+x_n} \, .$$

La subsucesión $a_n = x_{2n}$ verifica entonces

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n + 1} \, .$$

Sabemos que $a_1 = x_2 = 2$ y que $a_2 = x_4 = \frac{5}{3} < 2$. Asumamos inductivamente que $1 \leq a_{n+1} < a_n \leq 2$. Luego tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{a_{n+1}+1} < -\frac{1}{a_n+1} \leq -\frac{1}{3} \quad &\Longrightarrow \quad 2-\frac{1}{2} \leq 2 - \frac{1}{a_{n+1}+1} < 2 - \frac{1}{a_n+1} \leq 2 - \frac{1}{3} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{3}{2} \leq a_{n+2} < a_{n+1} \leq \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

lo que completa la inducción, concluyendo que a_n es decreciente y acotada inferiormente.
La sucesión $b_n = x_{2n+1}$ verifica la misma relación

$$b_{n+1} = 2 - \frac{1}{b_n + 1} \, ,$$

y de manera análoga a a_n, se prueba que es creciente y acotada superiormente. Por lo tanto ambas subsucesiones convergen. Sea $L_a = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $L_b = \lim_{n\to\infty} b_n$. Ambos límites están entre 1 y 2, además satisfacen la ecuación

$$L = 2 - \frac{1}{1+L} \implies L^2 - L - 1 = 0 \, ,$$

cuyas raíces son $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ y $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$. Luego $L_a = L_b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 5.

CC 1. 2 puntos por mostrar el inciso a).

CC 2. 2 puntos por mostrar el inciso b)

CC 3. 2 puntos por concluir que ambas sucesiones son convergentes y calcular el límite.

6. Determine el siguiente límite:
$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n}{\exp(2n)}\right).$$

Solución. Notemos que $\exp(2n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que la expresión está siempre bien definida. Tenemos que

$$\ln\left(\frac{3n}{\exp(2n)}\right) = \ln(3n) - \ln(\exp(2n)) = \ln(3) + \ln(n) - 2n.$$

Como $\ln(n) \leq n-1$, tenemos que

$$\ln\left(\frac{3n}{\exp(2n)}\right) = \ln(3) + \ln(n) - 2n \leq \ln(3) - 1 - n.$$

El lado derecho diverge a $-\infty$, así que el lado izquierdo también lo hará. Luego

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n}{\exp(2n)}\right) = -\infty.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 6.

CC 1. 2 puntos por usar las propiedades del logaritmo y obtener $\ln\left(\frac{3n}{\exp(2n)}\right) = \ln(3) + \ln(n) - 2n$.

CC 2. 2 puntos por usar la propiedad $\ln(n) \leqslant n-1$ y obtener que $\ln\left(\frac{3n}{\exp(2n)}\right) \leqslant \ln(3) - 1 - n$.

CC 3. 2 puntos por usar el teorema del sandwich y concluir que el límite diverge a $-\infty$.