PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Temporada Académica de Verano 2022

MAT1620 ⋆ Cálculo 2
Solución Interrogación 1

1. Determine si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$

   Solución 1:

   a) Por definición, tenemos que:

$$\boxed{\begin{array}{ll} u=\ln(x) & du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx & v=2\sqrt{x}\end{array}}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx \\ &= \lim_{t\to 0^+}\left(2\ln(x)\sqrt{x}\Big|_t^1 - \int_t^1 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(-2\ln(t)\sqrt{t}-4+4\sqrt{t}\right) \\ &= -4-2\lim_{t\to 0^+}\frac{\ln(t)}{\frac{1}{\sqrt{t}}} \overset{\text{L'H}}{=} -4-2\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{t}}{\frac{-\frac{1}{2\sqrt{t}}}{t}} = -4+4\lim_{t\to 0^+}\sqrt{t} = -4\end{aligned}$$

   Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ es convergente.

   b) Notemos que para $x\geq 1$:

$$0<\frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}<\frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4}\leq\frac{\sqrt{x^5+3x^5+5x^5}}{x^4}=\frac{3\sqrt{x^5}}{x^4}=3\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

   Luego, dado que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ es convergente, concluimos por el criterio de comparación que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ también converge.

   Por otra parte, notamos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ no es impropia y, por lo tanto, converge (por ser la integral definida de una función continua).

   Finalmente, concluimos que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ es convergente.

Solución 2:

a) Consideremos $f(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ y $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$. Tanto $f(x)$ como $g(x)$ son continuas y positivas para $x \in (0,1)$. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^3}}{1} = -\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\sqrt[4]{x} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\dfrac{1}{x^{\frac{1}{4}}}} \overset{\text{L'H}}{=} -\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\dfrac{-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{x\to 0^+} 4x^{\frac{1}{4}} = 0
\end{aligned}$$

Luego, como $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$ converge, concluimos por el criterio de comparación en el límite que $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ es convergente y, por lo tanto, también lo es $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$.

b) Consideremos $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+2x^2+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$. Claramente, $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y positivas para $x \geq 1$. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+2x^2+1} \cdot \frac{\sqrt{x^3}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^8+3x^6+5x^4}}{x^4+3x^2+1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4}}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = 1
\end{aligned}$$

Luego, dado que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ es convergente, concluimos por el criterio de comparación en el límite que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ también converge.

Por otra parte, notamos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ no es impropia y, por lo tanto, converge (por ser la integral definida de una función continua).

Finalmente, concluimos que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ es convergente.

2. Demuestre que $\displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ converge si $m,n > 0$ y diverge en caso contrario.

Solución: Es claro que si $m,n \geq 1$ entonces la integral no es impropia y, por lo tanto, es convergente. Por otra parte, consideremos las integrales $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ e $I_2 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$. Sean $f(x) = x^{m-1}(1-x)^{n-1}$, $g_1(x) = x^{m-1}$ y $g_2(x) = (1-x)^{n-1}$. Notenemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g_1(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{x^{m-1}} = \lim_{x\to 0^+} (1-x)^{n-1} = 1$$

Además, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{1-m}}\,dx$ converge para $1-m<1$ y diverge para $1-m\leq 1$. Luego, por el criterio de comparación en el límite, se cumple que I_1 es convergente para $m>0$ y divergente para $m\leq 0$. Análogamente, tenemos que:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{(1-x)^{n-1}} = \lim_{x\to 1^-} x^{m-1} = 1$$

Además, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-x)^{n-1}\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{(1-x)^{1-n}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y^{1-n}}\,dy$ es convergente para $1-n<1$ y divergente para $1-n\leq 1$. Luego, por el criterio de comparación en el límite, se cumple que I_2 converge para $n>0$ y diverge para $n\leq 0$.

Finalmente, para que $\displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$ sea convergente, se debe cumplir que tanto I_1 como I_2 sean (ambas) convergentes. En resumen, tenemos que si $m,n>0$ la integral dada converge y en cualquier otro caso diverge.

3. Estudie la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2^n}{n^2}$

Solución:

a) Notemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4}{e^{(n+1)^2}}\cdot\frac{e^{n^2}}{n^4}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{n^4}\cdot\frac{e^{n^2}}{e^{n^2+2n+1}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{e^{2n+1}} = 0\end{aligned}$$

Luego, por el criterio de la razón, la serie es absolutamente convergente.

b) Sea $b_n = \dfrac{2^n}{n^2}$ y $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2}$, notemos que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^2} \overset{\text{L'H}}{=} \frac{2^x\ln(2)}{2x} \overset{\text{L'H}}{=} \frac{2^x\ln^2(2)}{2} = \infty$$

Luego, como $f(n)=b_n$ para todo n natural, se cumple que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}=\infty$ y entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{n^2}$ no existe. Por lo tanto, concluimos que la serie es divergente por el criterio de la divergencia.

Solución 2:

a) Notemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \;=\; \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^4}{e^{n^2}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{e^{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{4}{n}}}{e^n} = 0$$

Luego, por el criterio de la raíz, la serie es absolutamente convergente.

Solución 3:

a) Consideremos $a_n = \dfrac{n^4}{e^{n^2}}$ y $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Notemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{e^{n^2}} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6}{e^{n^2}} = 0$$

Luego, dado que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, concluimos por el criterio de comparación en el límite que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ también converge.

4. En algunos casos, cuando el criterio de la razón no entrega información sobre la convergencia o divergencia de una serie, es posible usar como alternativa el criterio de Raabe, el cual establece que si $\sum a_n$ es una serie de términos no nulos y $\rho = \displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$, entonces se cumple que:

- Si $\rho > 1$, la serie converge absolutamente.
- Si $\rho < 1$, la serie diverge o es condicionalmente convergente.
- Si $\rho = 1$, el criterio no es concluyente.

a) [4 puntos] Pruebe que el criterio de la razón falla al analizar la convergencia de la serie:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 4}{3\cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 6\cdot 9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}\right)^2 + \cdots$$

b) [2 puntos] Usando el criterio de Raabe, analice la convergencia de la serie anterior.

Solución:

a) Notemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)(3n+1)}{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)(3n+3)}\right)^2\cdot\left(\frac{3\cdot 6\cdot 9\cdots(3n)}{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-2)}\right)^2\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^2 = 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, el criterio de la razón no nos entrega información sobre la convergencia o divergencia de la serie.

b) En este caso, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1-\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(3n+3)^2-(3n+1)^2}{(3n+3)^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{12n+8}{9n^2+18n+9}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{12+\frac{8}{n}}{9+\frac{18}{n}+\frac{9}{n^2}}\right) = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} > 1$$

Luego, por el criterio de Raabe, la serie es absolutamente convergente.

5. a) Calcule el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)}$.

b) Encuentre el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada en a).

c) Sea $f(x) = (x+1)^{\frac{3}{2}}$. Suponga que f tiene una representación en serie de potencias en torno a cero con radio de convergencia $R = 1$. Calcule los 4 primeros términos de la serie de Taylor de f en torno a $x = 0$.

Solución:

a) Notemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{2^{n+1}(3n+2)}\cdot\frac{2^n(3n-1)}{n(x-1)^n}\right| \\ &= |x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3n-1)}{2n(3n+2)} \\ &= \frac{|x-1|}{2}\end{aligned}$$

Luego, por el criterio de la razón, concluimos que la serie es absolutamente convergente si $|x-1| < 2$ y divergente si $|x-1| > 2$. De lo anterior, es claro que el radio de convergencia es $R = 2$.

b) Para determinar el intervalo de convergencia de la serie, debemos analizar los casos $x = -1$ y $x = 3$.

- Si $x = -1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-2)^n}{2^n(3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{3n-1}$. Luego, como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{3n-1}$ no existe, concluimos que la serie es divergente.
- Si $x = 3$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{2^n(3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2)^n}{2^n(3n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n-1}$. En este caso, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0$ y, por el criterio de la divergencia, la serie diverge.

Por lo tanto, el intervalo de convergencia de la serie es $(-1, 3)$.

c) Dado que f tiene una representación en serie de potencias en torno a cero con radio de convergencia $R = 1$, podemos escribir $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, con $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Veamos que:

$$f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} \qquad a_0 = f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{3(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2} \qquad a_1 = f'(0) = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}(1+x)^{-\frac{1}{2}} \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2} = \frac{3}{8}$$

$$f'''(x) = -\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{1}{16}$$

Luego, $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \dots$