PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Ayudantía 12

1. Considere la siguiente función de probabilidad conjunta

$$P(X=x,Y=y)=\begin{cases}1/3, & x=0,y=0\\ 1/3, & x=1,y=1\\ 1/3, & x=2,y=0\end{cases}$$

   (a) Calcule la correlación entre X, Y
   (b) ¿Son X, Y independientes?
   (c) ¿Que concluye en base a lo anterior?
   (d) Calcule $P(X=1|Y=1)$. ¿El valor obtenido tiene sentido?

   (a) Podemos hacer la siguiente tabla

X/Y	0	1	X
0	1/3	0	1/3
1	0	1/3	1/3
2	1/3	0	1/3
Y	2/3	1/3	

Ahora recordamos que

$$\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}=\frac{\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Calculamos lo necesario

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY)&=\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{1}xyP(X=x,Y=y)\\&=\sum_{x=0}^{2}x\cdot 0\cdot P(X=x,Y=0)+x\cdot 1\cdot P(X=x,Y=1)\\&=0\cdot 0\cdot P(X=0,Y=0)+0\cdot 1\cdot P(X=0,Y=0)+1\cdot 0\cdot P(X=1,Y=0)+\\&1\cdot 1\cdot P(X=1,Y=1)+2\cdot 0\cdot P(X=2,Y=0)+2\cdot 1\cdot P(X=2,Y=1)\\&=1/3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) \\
&= 0 + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= 0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) \\
&= 1/3
\end{aligned}
$$

Reemplazamos en la covarianza

$$Cov(X,Y) = 1/3 - 1 \cdot 1/3 = 0$$

por lo que se tiene

$$\rho = 0$$

(b) Si X, Y fueran independientes se debe cumplir que

$$P(X = X, Y = y) = P(X = x)P(Y = y), \quad \forall x, y$$

pero note que

$$
\begin{gathered}
P(X=0, Y=0) = P(X=0)P(Y=0) \\
\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \\
1/3 \neq 2/9
\end{gathered}
$$

Luego, X, Y no son independientes.

(c) En resumen tentemos

$$\rho = 0, \quad X \not\perp\!\!\!\perp Y$$

Es decir, tenemos correlación nula entre X, Y y además no son independientes. En base a esto se puede concluir que en general correlación 0 no implica independencia. Mas aun, independencia si implica correlación 0, pero el reciproco no es cierto.

(d)

$$
\begin{aligned}
P(X=1|Y=1) &= \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} \\
&= \frac{1/3}{1/3} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Esto tiene sentido, pues si Y tomó el valor 1, entonces el único valor que puede tomar con probabilidad 1 es el 1, en cualquier otro caso la probabilidad es 0.

2. Sea $(X,Y)'$ un vector aleatorio con

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{ln(2)}e^{-xy}, \quad x > 0, 1 < y < 2$$

Calcule $Var(aX+Y+c)$, el vector de medias y la matriz de varianza-covarianza.

Para esto aplicamos propiedades y calculamos lo necesario

$$\begin{aligned} Var(aX+Y+c) &= Var(aX+Y) \\ &= Var(aX) + Var(Y) + 2Cov(aX,Y) \\ &= a^2Var(X) + Var(Y) + 2aCov(X,Y) \end{aligned}$$

con $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Ahora calculamos todo.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \int_1^2 \int_0^\infty xy\frac{1}{ln(2)}e^{-xy}dxdy \\ &= \frac{1}{ln(2)}\int_1^2 \frac{1}{y}dy \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_1^2 \int_0^\infty x\frac{1}{ln(2)}e^{-xy}dxdy \\ &= \frac{1}{ln(4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_1^2 \int_0^\infty y\frac{1}{ln(2)}e^{-xy}dxdy \\ &= \frac{1}{ln(2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_1^2 \int_0^\infty x^2\frac{1}{ln(2)}e^{-xy}dxdy \\ &= \frac{3}{ln(16)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^2) &= \int_1^2 \int_0^\infty y^2\frac{1}{ln(2)}e^{-xy}dxdy \\ &= \frac{3}{ln(4)} \end{aligned}$$

De acá se tiene que

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{3}{ln(16)} - \frac{1}{[ln(4)]^2} \\ Var(Y) &= \frac{3}{ln(4)} - \frac{1}{[ln(2)]^2} \end{aligned}$$

Reemplazamos todo

$$a^2Var(X) + Var(Y) + 2aCov(X,Y) = a^2\left(\frac{3}{ln(16)} - \frac{1}{[ln(4)]^2}\right) + \left(\frac{3}{ln(4)} - \frac{1}{[ln(2)]^2}\right) + 2a\left(1 - \frac{1}{ln(4)}\frac{1}{ln(2)}\right)$$

Por otra parte, el vector de medias y matriz de varianza covarianza ya esta lista, pues ya hemos calculado todo lo necesario. Entonces

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{ln(4)} \\ \frac{1}{ln(2)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{3}{ln(16)} - \frac{1}{[ln(4)]^2} & 1 - \frac{1}{ln(4)}\frac{1}{ln(2)} \\ 1 - \frac{1}{ln(4)}\frac{1}{ln(2)} & \frac{3}{ln(4)} - \frac{1}{[ln(2)]^2} \end{pmatrix}$$

3. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias con función densidad conjunta dada por

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}, \quad x_i > 0$$

(a) ¿Son $X_1, ..., X_n$ iid?

(b) Defina

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

Encuentre la distribución de S_n

(c) **Propuesto:** Muestre que $2\lambda S_n \sim \chi^2_{(2n)}$

(a) Note que podemos escribir la conjunta de la siguiente manera

$$\begin{aligned} f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)} \\ &= \lambda \times \cdots \times \lambda \cdot e^{-\lambda x_1 - \lambda x_2 - \cdots - \lambda x_n} \\ &= \lambda e^{-\lambda x_1} \times \lambda e^{-\lambda x_2} \times \cdots \times \lambda e^{-\lambda x_n} \\ &= f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

En particular $X_i \sim Exp(\lambda)$. Luego, como la conjunta se puede factorizar son independientes, y además como cada X_i tienen la misma distribución, se tiene que

$$X_1, ..., X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$$

(b) Para esto vamos a usar función generadora de momentos. Recuerde que la fgm de una exponencial λ esta dada por

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

y como cada X_i tiene la misma distribución, entonces tienen la misma fgm. Entonces

$$\begin{aligned} M_{S_n}(t) &= M_{X_1+X_2+\cdots+X_n}(t) \\ &= \mathbb{E}(e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX_1})\mathbb{E}(e^{tX_2}) \cdots \mathbb{E}(e^{tX_n}) \\ &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t}\frac{\lambda}{\lambda - t} \cdots \frac{\lambda}{\lambda - t} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \end{aligned}$$

Esta ultima corresponde a la función generadora de momentos de una Gamma, por lo que

$$S_n \sim Gamma(n, \lambda)$$

4. Muestre que si X, Y son independientes entonces

$$\mathbb{E}[h(X)g(Y)] = \mathbb{E}[h(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$$

Sin perdida de generalidad demostrémoslo en el caso continuo.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[h(X)g(Y)] &= \iint_{\Omega} h(x)g(y)f_{X,Y}(x,y)dydx \\
&= \iint_{\Omega} h(x)g(y)f_X(x)f_Y(y)dydx \\
&= \left(\int_{\mathcal{X}} h(x)f_X(x)dx\right)\left(\int_{\mathcal{Y}} g(y)f_Y(y)dy\right) \\
&= \mathbb{E}[h(X)]\mathbb{E}[g(Y)]
\end{aligned}$$

5. Sea $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$ un vector aleatorio con fgm conjunta dada por

$$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = e^{\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{t}}$$

con $\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & \cdots & \mu \end{pmatrix}^T$ y $\sigma^2 > 0$.

(a) Encuentre las fgm marginales para cada X_i y determine la distribución de las mismas

(b) Defina las siguientes variables aleatorias

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad W = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

Encuentre la distribución de Y y W

(c) Repita (b) pero ahora teniendo

$$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = e^{\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}}$$

con $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}^T$ y $\boldsymbol{\Sigma} = diag(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2)$

(d) **Propuesto:** Considere $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Encuentre la distribución de $T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i$, con $a_i > 0$ y $b_i \in \mathbb{R}$

(a) Note que la función generadora de momentos se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) &= e^{\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{t}} \\
&= M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = e^{(t_1 + \cdots + t_n)\mu + \frac{\sigma^2}{2}(t_1^2 + \cdots + t_n^2)}
\end{aligned}$$

Para obtener la fgm marginal de X_i, entonces hay que evaluar en 0 para todo t diferente de i, entonces

$$\begin{aligned}
M_{X_i}(t_i) = M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) &= e^{(t_1 + \cdots + t_n)\mu + \frac{\sigma^2}{2}(t_1^2 + \cdots + t_n^2)}\Big|_{t_j = 0, \forall j \neq i} \\
&= e^{(0 + \cdots + t_i + \cdots + 0)\mu + \frac{\sigma^2}{2}(0 + \cdots + t_i^2 + \cdots + 0)} \\
&= e^{\mu t_i + \frac{\sigma^2}{2}t_i^2}
\end{aligned}$$

Esta ultima es la generadora de momentos de una normal, por lo que

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Mas aun, note que la fgm se puede factorizar de la forma

$$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = M_{X_1}(t_1)M_{X_2}(t_2)\cdots M_{X_n}(t_n)$$

por lo que los X_i son independientes. Teniendo así que

$$X_i \overset{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$$

(b) Podemos usar función generadora de momentos. Entonces

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) \\ &= \left(M_{X_i}(t)\right)^n \\ &= \left(e^{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}t^2}\right)^n \\ &= e^{n\mu t + n\frac{\sigma^2}{2}t^2} \\ &= e^{(n\mu)t + \frac{(n\sigma^2)}{2}t^2} \end{aligned}$$

Esta ultima es la fgm de una normal de parámetros $n\mu$ y $n\sigma^2$, por lo que

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

El promedio funciona de manera similar.

$$\begin{aligned} M_W(t) &= \mathbb{E}(e^{t(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}) \\ &= \mathbb{E}(e^{t/n(\sum_{i=1}^n X_i)}) \\ &= M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t/n) \\ &= e^{(n\mu)t/n + \frac{(n\sigma^2)}{2}(t/n)^2} \\ &= e^{\mu t + \frac{\sigma^2/n}{2}t^2} \end{aligned}$$

Esta ultima es la fgm de una normal de parámetros $n\mu$ y $n\sigma^2$, por lo que

$$W = \overline{X} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

(c) Nuevamente podemos hacer lo mismo que antes, pero en este caso la función generadora de momentos queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) &= e^{\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}} \\ &= e^{t_1\mu_1 + \cdots + t_n\mu_n + \frac{\sigma_1^2}{2}t_1^2 + \cdots + \frac{\sigma_n^2}{2}t_n^2} \end{aligned}$$

para obtener la marginal hacemos lo mismo que antes, evaluamos en 0 en todos los valores de t_j a excepción de t_i. Entonces

$$\begin{aligned} M_{X_i}(t_i) &= e^{\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}} \\ &= e^{t_1\mu_1 + \cdots + t_n\mu_n + \frac{\sigma_1^2}{2}t_1^2 + \cdots + \frac{\sigma_n^2}{2}t_n^2}\Big|_{t_j=0, \forall j\neq i} \\ &= e^{0 + \cdots + t_i\mu_i + \cdots 0 + \frac{\sigma_n^2}{2}0^2 + \cdots + \frac{\sigma_i^2}{2}t_i^2 + \cdots + \frac{\sigma_n^2}{2}0^2} \\ &= e^{\mu_i t_i + \frac{\sigma_i^2}{2}t_i^2} \end{aligned}$$

Bajo el mismo argumento que antes, ahora se tiene

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

Note que ahora los X_i son independientes, pero no igualmente distribuidos. Para encontrar la distribución de Y y W procedemos mediante fgm.

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{tY}) \\
&= \mathbb{E}(e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}) \\
&= \mathbb{E}(e^{tX_1})\mathbb{E}(e^{tX_2})\cdots\mathbb{E}(e^{tX_n}) \\
&= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t) \\
&= e^{\mu_1 t+\frac{\sigma_1^2}{2}t^2}e^{\mu_2 t+\frac{\sigma_2^2}{2}t^2}\cdots e^{\mu_n t+\frac{\sigma_n^2}{2}t^2} \\
&= e^{t\sum_{i=1}^n \mu_i+\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2}{2}t^2}
\end{aligned}$$

Esta ultima es la fgm de una normal, en particular se tiene

$$Y \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$

Para la fgm de W, note que

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{n}Y$$

y por propiedades de la normal se tiene que

$$W \sim N\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i, \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$$