

# Teorema del Binomio

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

<sup>1</sup>Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

<sup>2</sup>LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

23 de Mayo de 2022



Laboratorio  
Interdisciplinario de  
Estadística Social

Para hallar un patrón en la expansión de  $(a + b)^n$ , observemos que

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

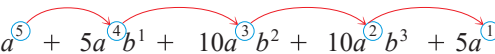
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Los siguientes patrones sencillos emergen para la expresión de  $(a + b)^n$

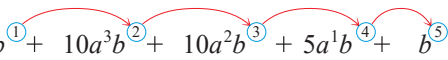
- 1 Hay  $n + 1$  términos, siendo el primero  $a^n$  y el último  $b^n$ .
- 2 Los exponentes de  $a$  disminuyen en 1 de término en término, en tanto que los exponentes de  $b$  aumentan en 1.
- 3 La suma de los exponentes de  $a$  y  $b$  de cada término es  $n$ .

Por ejemplo, observe lo que ocurre con  $(a + b)^5$ .

Los exponentes de  $a$  disminuye

$$(a + b)^5 = a^{\textcircled{5}} + 5a^{\textcircled{4}}b^1 + 10a^{\textcircled{3}}b^2 + 10a^{\textcircled{2}}b^3 + 5a^{\textcircled{1}}b^4 + b^5$$


Los exponentes de  $b$  aumentan:

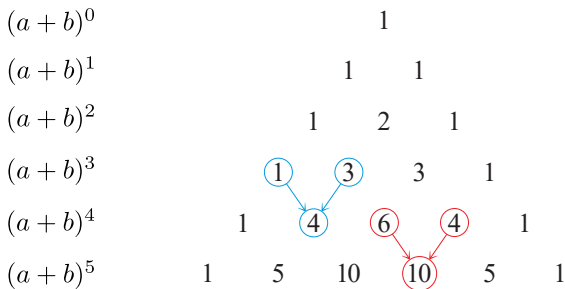
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b^{\textcircled{1}} + 10a^3b^{\textcircled{2}} + 10a^2b^{\textcircled{3}} + 5a^1b^{\textcircled{4}} + b^{\textcircled{5}}$$


Usando los patrones podemos ver cual es la expansión de  $(a + b)^8$  escribiendo un signo de interrogación para los coeficientes faltantes

$$(a + b)^8 = a^8 + ?a^7b + ?a^6b^2 + ?a^5b^3 + ?a^4b^4 + ?a^3b^5 + ?a^2b^6 + ?ab^7 + b^8$$

Para completar la expansión, necesitamos determinar estos coeficientes.

Los coeficientes de la expansión forman un triángulo llamado triángulo de Pascal:



Todo elemento (que no sea 1) es la suma de los dos elementos que están diagonalmente sobre él.

# Triángulo de Pascal

Se puede probar que el triángulo de Pascal está formado por los coeficiente binomiales

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & \\ & & & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\ & & & & & & \\ & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ & & & & & & \\ & \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & \\ & & & & & & \\ & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & \\ & & & & & & \\ & \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \\ & & & & & & \\ \binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6} \end{array}$$

## Definición. (Coeficientes binomiales)

Sean  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  con  $k \leq n$ , se define el coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

**EJEMPLO 1** Calcule  $\binom{5}{2}$ ,  $\binom{n}{n}$  y  $\binom{n}{1}$ .

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{1!(n-1)!} = n$$

## Proposición.

Sean  $n, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  con  $k \leq n$ . Entonces,

$$\textcircled{1} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

$$\textcircled{2} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

## Demostración

$$\textcircled{1} \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

1 Tenemos que

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)![n-(k+1)]!} \\ &= \frac{(k+1)n! + (n-k)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{kn! + n! + nn! - kn!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$



## Teorema. (Teorema del Binomio) [Newton]

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

**Demostración** Demostraremos el teorema usando inducción sobre  $n$ .  
La función proposicional es:

$$P(n) : (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- ① PD:  $P(1)$  es verdadero.

El lado izquierdo de  $P(1)$  es  $(a + b)^1 = a + b$ . El lado izquierdo de  $P(1)$  es

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b$$

Luego,  $P(1)$  es verdadero.

- ②  $P(n) \implies P(n+1)$

Se tiene que

$$P(n+1) : (a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} \cdot b^k .$$

## Corolario.

- 1  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n,$
- 2  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$

## Demostración

- 1  $2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
- 2  $0 = (1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$

**EJEMPLO 2** Escribir el desarrollo de  $\left(y^2 + \frac{1}{y}\right)^6$ .

**Solución** Usando el teorema del binomio

$$\begin{aligned}\left(y^2 + \frac{1}{y}\right)^6 &= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (y^2)^{6-k} \left(\frac{1}{y}\right)^k = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} y^{12-2k} \cdot \frac{1}{y^k} \\&= \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} y^{12-3k} \\&= \binom{6}{0} y^{12} + \binom{6}{1} y^9 + \binom{6}{2} y^6 + \binom{6}{3} y^3 \\&\quad + \binom{6}{4} y^0 + \binom{6}{5} y^{-3} + \binom{6}{6} y^{-6} \\&= y^{12} + 6y^9 + 15y^6 + 20y^3 + 15y^0 + 6y^{-3} + y^{-6}\end{aligned}$$

**EJEMPLO 3** Encontrar el coeficiente de  $x^n$  en  $(1 + x)^{2n}$ .

**Solución** Usando el teorema del binomio

$$(1 + x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^{2n-k} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

¿Para qué valor de  $k$  se cumple que  $x^k = x^n$ ? Respuesta:  $k = n$ . El coeficiente que acompaña a  $x^n$  es

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$$

**EJEMPLO 4** Determine el coeficiente de  $\frac{1}{x^{31}}$  en el desarrollo de  $\left(x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)^{20}$ .

**Solución** Notemos que

$$\begin{aligned}\left(x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)^{20} &= \left(\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2}\right)^{20} = \frac{1}{(x^2)^{20}}(x^3 - x^2 + 1)^{20} \\&= \frac{1}{x^{40}}(x^3 + (1 - x^2))^{20} \\&= \frac{1}{x^{40}} \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (x^3)^{20-k} \cdot (1 - x^2)^k \\&= \frac{1}{x^{40}} \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} x^{60-3k} \cdot (1 - x^2)^k\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\left(x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} x^{20-3k} \cdot (1 - x^2)^k$$

Vamos a aplicar el teorema del binomio a  $(1 - x^2)^k$  obteniendo

$$(1 - x^2)^k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} 1^{k-\ell} (-x^2)^\ell = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (-1)^\ell x^{2\ell}$$

Entonces, obtenemos que

$$\begin{aligned} \left(x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)^{20} &= \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} x^{20-3k} \cdot (1 - x^2)^k \\ &= \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} x^{20-3k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (-1)^\ell x^{2\ell} \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\left(x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)^{20} = \sum_{k=0}^{20} \sum_{\ell=0}^k \binom{20}{k} \binom{k}{\ell} (-1)^\ell x^{20-3k+2\ell}$$

donde  $k \in \{0, 1, \dots, 20\}$  y  $0 \leq \ell \leq k \leq 20$ .

Estamos buscando valores de  $k$  y  $\ell$  tales que

$$\begin{aligned} x^{20-3k+2\ell} = \frac{1}{x^{31}} &\implies 20 - 3k + 2\ell = -31 \\ &\iff -3k + 2\ell = -51 \\ &\iff \ell = \frac{-51 + 3k}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

Realizando una tabla encontramos dos posibles valores  $(k, \ell) = (17, 0)$  y  $(k, \ell) = (19, 3)$  y el coeficiente que acompaña a  $1/x^{31}$  es

$$C = \binom{20}{17} \binom{17}{0} (-1)^0 + \binom{20}{19} \binom{19}{3} (-1)^3 = \binom{20}{17} - 20 \binom{19}{3}.$$