Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Departamento de Estadística
Primer Semestre de 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026
Guía 1

28 de Marzo de 2019

1. Pruebe que si $P(A \mid E) \geqslant P(B \mid E)$ y $P(A \mid E^c) \geqslant P(B \mid E^c)$ entonces $P(A) \geqslant P(B)$.

2. Si $P(A) > 0$, $P(B) > 0$ y $P(A \mid B) > P(A)$, ¿ se puede afirmar que $P(B \mid A) > P(B)$?

3. Si B es un evento tal que $P(B) > 0$, pruebe que la función $Q(A) = P(A \mid B)$ satisface los axiomas de probabilidad. Con esto, deduzca que

$$P(A \cup C \mid B) = P(A \mid B) + P(B \mid C) - P(A \cap C \mid B).$$

4. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio medible, $a_1, \ldots, a_n$ números positivos y $A_1, \ldots, A_n$ una partición de Ω. Para todo $A \in \mathcal{F}$ considere

$$Q(A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i P(A \cap A_i)}{\sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i)}.$$

¿Es Q una medida de probabilidad?

5. (I1-2015) Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio medible, $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$. Demuestre las siguientes afirmaciones

   a) Si $P(A_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ entonces

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_i^c\right) = 1.$$

   b) Si $A_1, A_2, \ldots$ son independientes entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)].$$

   c) Si $A_1, A_2, \ldots$ son independientes y $P(A_i) = 1 - e^{-i} \ \forall i \in \mathbb{N}$ entonces

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1$$

   d) Si los A_i son independientes y $P(A_i) = e^{-\ln(i)}$. Demuestre que con probabilidad 1 ocurren una cantidad infinita de eventos A_i.

6. Sean A_1, A_2, A_3 eventos definidos sobre un mismo espacio de probabilidad. Si $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, demuestre que

$$P(A_1 \cup A_2 \mid A_3) = P(A_1 \mid A_2) + P(A_2 \mid A_3).$$

7. Sean A_1, A_2, A_3 eventos definidos sobre un mismo espacio de probabilidad tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ y $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3$. Asumiendo que $P(A_1) = 1/4$, $P(A_2) = 1/2$ y $P(A_1 \cap A_2) = 1/4$, encuentre $P(A_3)$.

8. Demuestre que si A y B son independientes, entonces se cumple que

   a) A y B^c son independientes.

   b) A^c y B son independientes.

   c) A^c y B^c son independientes.

9. Si A es independiente de B y B es independiente de C. ¿Son independientes A y C?

10. Sean A, B y C mutuamente independientes. Demuestre que A es independiente de $B \cup C$. ¿Qué puede decir, en términos de independencia, acerca de A y $B^c \cap C^c$?

11. Una persona lanza repetidamente dos dados y gana si saca una suma igual a 8 antes de obtener un 7. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

12. Suponga que r banderas de diferentes colores serán ubicadas en n mastiles diferentes. Suponiendo que en cada mástil se puede ubicar más de una bandera.

    a) ¿De cuántas maneras se puede realizar esto?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que solo un mástil quede sin banderas?

13. Se sabe que el $70\,\%$ de los aviones ligeros que desaparecen mientras vuelan en cierto país son descubiertos después. De las aeronaves descubiertas, el $60\,\%$ tienen localizador de emergencia, mientras que el $90\,\%$ de las no descubiertas no tienen localizador. Suponga que desaparece un avión ligero.

    a) Si tiene localizador de emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que el avión no sea descubierto?

    b) Si no tiene localizador de emergencia, ¿cuál es la probabilidad de que el avión sea descubierto?

14. Dos dados honestos han sido lanzados y la suma de ellos es 6. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un dado haya sido 3?

15. Responda la pregunta anterior asumiendo que la suma de los dados es ahora menor que 6.

16. (I1-2015) Una caja contiene 6 bolitas verdes y 9 rojas. Se realiza el experimento de sacar una bolita de la caja, observar su color y luego retirarla 3 veces seguidas.

    a) Calcule la probabilidad de que la tercera bolita extraída sea verde.

    b) Si la tercera bolita extraída fue verde, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda haya sido roja?

    c) Si la segunda bolita fue roja, ¿cual es la probabilidad de que la tercera bolita sea verde?

    d) Describa la función de probabilidad y la función de distribución del número de bolitas rojas obtenidas en 3 extracciones.

17. (I1-2016) Se dispone dos dados. El dado A tiene 4 caras rojas y 2 blancas, mientras que el dado B tiene caras rojas y 4 blancas. Se lanza una moneda honesta, y si sale cara, el experimento continúa sólo con el dado A, mientras que si sale sello, se continúa sólo con el dado B.

   a) Pruebe que la probabilidad de obtener cara roja en cualquier lanzamiento del dado es $\frac{1}{2}$.

   b) Suponga que se lanza el dado seleccionado n veces, independientemente. Si todos ellos resultaron en cara roja, ¿cuál es la probabilidad de que el dado seleccionado haya sido el A?

   c) Si, como en a), los primeros n lanzamientos del dado resultaron en cara roja, ¿cuál es la probabilidad de que el siguiente también resulte en cara roja?

18. Considere una secuencia de días y sea R_i el evento que denota que el día i llueve. Suponga que $P(R_i \mid R_{i-1}) = \alpha$ y $P(R_i^c \mid R_{i-1}^c) = \beta$. Suponga además que el clima del día i depende solo del clima del día $i-1$, esto es:

$$P(R_i \mid R_{i-1} \cap R_{i-2} \cap \cdots \cap R_0) = P(R_i \mid R_{i-1}).$$

   Si la probabilidad de que llueva hoy es p,

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva mañana?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que llueva pasado mañana?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que en n días despues de hoy llueva?

   d) ¿Qué pasa cuando n tiende a infinito?