Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
TAV 2022

MAT1610-Cálculo I
Pauta Interrogación 2

1. Encuentre todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que la función

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2\cos(\pi x) - 2a|a| & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

sea continua y derivable en todo su dominio, justifique su respuesta. Determine además $f'(x)$ para dicho(s) valor(es) de a.

Solución:

Notar que $f(x)$ satisface ser continua para $x > 2$ y para $x < 2$, pues en ambas ramas es un polinomio.

Para garantizar continuidad en $x = 2$, calculamos los limites laterales

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^-} f(x) &= \lim_{x \to 2^-} a^2 x \\ &= 2a^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2^+} f(x) &= \lim_{x \to 2^+} x^2 - 3x + 2\cos(\pi x) - 2a|a| \\ &= 4 - 6 + 2 - 2a|a| \\ &= -2|a|a. \end{aligned}$$

De esta forma, para que f sea continua se debe tener que $a^2 = -a|a|$, es decir, $a \leq 0$.

Veamos ahora la derivada de f, tenemos que si $x \in (-\infty, 2)$ la función $f(x) = a^2 x$ derivable y su derivada en ese intervalo es a^2.

Si $x > 2$, $f(x) = x^2 - 3x + 2\cos(\pi x) + 2a^2$ es derivable y su derivada es $2x - 3 - 2\pi \sin(\pi x)$.

Solo nos resta estudiar el caso $x = 2$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{a^2(2+h)-a^2\cdot 2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{a^2 h}{h} = a^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2-3(2+h)+2\cos(\pi(2+h))+2a^2-a^2\cdot 2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{4+4h+h^2-6-3h+2\cos(\pi h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{h+h^2-2(1-\cos(\pi h))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} (1+h) - 2\pi \lim_{h\to 0^+} \frac{(1-\cos(\pi h))}{\pi h} = 1 - 2\pi\cdot 0 = 1.
\end{aligned}$$

Por tanto, para que f sea derivable en $x = 2$ se debe tener que $a = -1$.

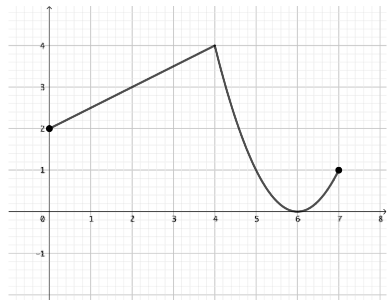
Si tomamos $a = -1$ obtenemos que:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 - 2\pi\sin(\pi x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por justificar continuidad para $x \neq 2$.
- (1 punto) Por justificar continuidad en $x = 2$ y llegar a que $a \leq 0$.
- (1 punto) Por determinar que f es derivable en $x \neq 2$
- (1 punto) Por calcular los limites laterales de $f'(0)$
- (1 punto) por concluir que $a = -1$.
- (1 punto) Por determinar $g'(x)$ con $a = -1$.

2. a) Sea f la función cuya gráfica es el de la figura adjunta y g la función definida por $g(x) = \dfrac{xf(x)}{x^2 + 2f(x)}$.



Determine $g'(2)$.

Solución:

Usando las reglas algebraicas de derivación tenemos que:

$$g'(x) = \frac{(f(x) + xf'(x))(x^2 + 2f(x)) - (2x + 2f'(x))xf(x)}{(x^2 + 2f(x))^2}$$

por lo tanto

$$g'(2) = \frac{(f(2) + 2f'(2))(4 + 2f(2)) - (4 + 2f'(2))2f(2)}{(4 + 2f(2))^2}$$

del gráfico sabemos que $f(2) = 3$ y que $f'(2) = \dfrac{1}{2}$, obteniendo que

$$g'(2) = \frac{(3 + 1)(4 + 6) - (4 + 1)6}{(4 + 6)^2} = \frac{1}{10}.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por realizar correctamente la regla del cociente.
- (1 punto) Por determinar correctamente $g'(x)$.
- (1 punto) Por determinar el valor de $g'(2)$.

b) Sea $h(x) = \arctan\big((f(x))^2 + x\big)$ donde f es una función tal que $f(1) = f(2) = -2$, $f'(1) = 5$ y $f'(2) = 3$. Determine $h'(2)$.

Solución:

Usando la regla de la cadena tenemos que:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1+\left((f(x))^2+x\right)^2}\cdot((f(x))^2+x)' \\ &= \frac{1}{1+\left((f(x))^2+x\right)^2}\cdot(2f(x)f'(x)+1) \end{aligned}$$

reemplazando en $x=2$ tenemos que

$$h'(2)=\frac{1}{1+\left((f(2))^2+2\right)^2}\cdot(2f(2)f'(2)+1)=-\frac{11}{37}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por realizar correctamente la primera regla de la cadena.
- (1 punto) Por determinar correctamente la derivada de $(f(x))^2+x$.
- (1 punto) Por determinar el valor de $h'(2)$.

3. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2x^2+x^3\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)=2$ en el punto $(1,1)$.

   Solución:

   Derivando implicitamente tenemos que:

   $$2yy'x^2+y^2(2x)+3x^2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)+x^3\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)y'\cdot\frac{\pi}{2}=0,$$

   luego

   $$y'(x,y)=\frac{-2xy^2-3x^2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)}{2yx^2+x^3\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\cdot\frac{\pi}{2}}.$$

   Evaluando en $x=1, y=1$ tenemos que $y'(1,1)=-\dfrac{5}{2}$.

   Por lo tanto la recta tangente es

   $$y-1=-\frac{5}{2}(x-1).$$

   Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por derivar impliciitamente de manera correcta.
- (1 punto) Por calcular $y'(x, y)$.
- (1 punto) Por calcular $y'(1, 1)$.
- (2 puntos) Encontrar correctamente la recta tangente.

4. Un camión vierte arena para una construcción a una razón de $30m^3/min$ formando un cono cuya altura es siempre el doble de su radio . Determine la velocidad con la que varía la altura del cono cuando el radio de la base mida $9m$.

   Solución:

   Observe que, de los dados, tenemos que si $r(t)$ corresponde al radio de la base del cono que se forma entonces la altura es $h(t) = 2r(t)$ y de esta forma el volumen del cono es $v(t) = \frac{2}{3}\pi r^3(t)$. como el camión vierte arena a razón $30m^3/min$ tenemos que $v'(t) = 2\pi r^2(t)r'(t) = 30$, obteniendo que, cuando el radio mide $9m$, el radio varía a razón $r'(t) = \dfrac{15}{81\pi}$ por lo tanto la altura varía a velocidad de $\dfrac{30}{81\pi}$.

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por determinar la formula del volumen.
   - (1 punto) Por determinar correctamente la derivada del volumen.
   - (2 punto) Por reconocer que la derivada del volumen es 30.
   - (1 punto) Por determinar la derivada del radio en el instante indicado.
   - (1 punto) Por determinar la derivada de la altura en el instante indicado.