Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2020

Interrogación 9
MAT1107 - Introducción al Cálculo

(1) Usando la definición de límite, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+n+1} = \frac{1}{2}.$$

(3 puntos)

Solución. Sea $\varepsilon > 0$.

Primero,

$$\begin{aligned} \left|\frac{n^2}{2n^2+n+1} - \frac{1}{2}\right| &= \frac{n+1}{\mathbf{2}(2n^2+n+1)} \quad (\mathbf{0.5puntos}) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{\mathbf{2}(2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}. \end{aligned}$$

Notamos que, para $n \geq 1$,

$$\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \leq \frac{2}{2+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \leq 1.$$

Luego,

$$\left|\frac{n^2}{2n^2+n+1} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{n}. \quad (\mathbf{1punto})$$

Sea $n_0 \geq 1$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. **(1 punto)**

Luego, si $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{n^2}{2n^2+n+1} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \quad (\mathbf{0.5puntos})$$

Obs: -0.3 puntos por no declarar explícitamente $\varepsilon > 0$.

(2) Considere la sucesión dada por

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

(a) Demuestre que $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$. **(0.5 puntos)**

(b) Demuestre que $a_n \geq \sqrt{2}$ para todo $n \geq 2$. **(1 punto)**

(c) Demuestre que $a_n \leq 2$ para todo $n \geq 1$. **(1.5 puntos)**

Solución.

(a) La afirmación es verdadera para $n = 1$. Si $a_n > 0$, entonces el lado derecho en la definición de a_{n+1} es claramente positivo. **(Puntaje: 0 o 0.5 puntos)**

(b) Sea $n \geq 2$. Como $a_{n-1} > 0$, podemos usar la desigualdad PA-PM:

$$2a_n = a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}} \geq 2\sqrt{a_{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{2}{a_{n-1}}} = 2\sqrt{2}.$$

Esto demuestra lo pedido. **(Puntaje: por avance)**

(c) La afirmación es evidentemente verdadera para $n = 1$ y $n = 2$.

Supongamos que $a_k \leq 2$ para algún $k \geq 2$.

Luego,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &\leq \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{a_n}\right) \quad (\mathbf{0.5 puntos}) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(2 + \frac{2}{\sqrt{2}}\right), \quad (\mathbf{0.5 puntos}) \end{aligned}$$

gracias a la parte (b). Luego,

$$a_{k+1} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 2. \quad (\mathbf{0.5 puntos})$$

La afirmación queda demostrada por inducción.

Obs: -0.2 puntos por no plantear el caso $n = 2$ y -0.2 puntos por no plantear la hipótesis de inducción.