EYP1027 Modelos Probabilísticos

Clase 6

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer Semestre 2020

Contenido I

Tipos de Variables Aleatorias o Distribuciones

Variable aleatoria discreta

Como ya vimos, hay básicamente tres tipos de variables aleatorias o distribuciones:

a) Discretas

b) Continuas (o absolutamente continuas)

c) Mixtas

En este curso estudiamos esencialmente el caso discreto y el caso continuo, lo cual permite analizar el caso mixto sin mayor dificultad. Definiciones equivalentes de variables aleatorias discretas y continuas son presentadas a continuación.

Tipos de Variables Aleatorias o Distribuciones

Definiciones equivalentes

Sea X una variable aleatoria definida sobre un modelo de probabilidad $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$.

Definición 1.1

i) Se dice que la variable aleatoria X tiene (o sigue) una **distribución discreta**, o que X es una **variable aleatoria discreta**, si su recorrido, $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} : \exists\, \omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$, es finito o infinito numerable.

En este caso, la función no negativa $f_X(x) = P(X = x)$, $x \in \mathbb{R}$, se llama **función de masa de probabilidad (fmp)**.

Funciones de densidad

ii) Se dice que la variable aleatoria X tiene (o sigue) una **distribución** (absolutamente) **continua**, o que X es una **variable aleatoria** (absolutamente) **continua**, si existe una función no negativa $f_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$, llamada **función de densidad de probabilidad (fdp)**, tal que $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

En este caso, el recorrido $\mathcal{X}$ de X es un conjunto no contable de números reales; $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-) = 0$ para todo x; y $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$ en todos aquellos puntos x donde $F_X(x)$ es diferenciable.

Tipos de Variables Aleatorias o Distribuciones

Definiciones equivalentes

Teorema 1.1

Una función $f_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es la fmp (o la fdp) de una variable aleatoria X si y sólo si:

a) $f_X(x) \geq 0$ para todo x ($f_X(x) > 0$ si $x \in \mathcal{X}$), y
b) $\sum_{x \in \mathcal{X}} f_X(x) = 1$ (fmp); o $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (fdp).

Además, para cualquier conjunto $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, se tiene que

$$P_X(B) = P(X \in B) = \begin{cases} \sum_{x \in B} f_X(x), & \text{en el caso discreto,} \\ \int_B f_X(x)dx, & \text{en el caso continuo.} \end{cases}$$

Nota: Al conjunto $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R} : f_X(x) > 0\}$ también se le llama **soporte** de (la distribución de) X.

Ejemplo 1.1

Una urna contiene dos bolitas blancas y tres rojas. Se saca una muestra aleatoria (m.a.) de tres bolitas simultáneamente. Encontrar la fmp y la fda del número de bolitas rojas en la muestra. Sea $X =$ número de bolitas rojas; entonces $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$. Como la m.a. es sin devolución, entonces la fmp de X está dada por,

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{3}{x}\binom{2}{3-x}}{\binom{5}{3}}, & \text{si } x = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

La fda de X toma la forma,

$$F_X(x) = \sum_{t \leq x} f_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1, \\ .3 & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ .9 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Ejemplo 1.2

Suponga que una variable aleatoria X tiene fdp dada por,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Sean $A = (0, 1/2]$ y $B = [1/3, 1/2]$. Calcular $P_X(B|A)$. Para ello, note que $B \subset A$ y, por la definición de probabilidad condicional, que

$$\begin{aligned} P_X(B|A) &= \frac{P_X(A \cap B)}{P_X(A)} = \frac{P_X(B)}{P_X(A)} \\ &= \frac{P(X \in B)}{P(X \in A)} = \frac{\int_{1/3}^{1/2} 2x dx}{\int_0^{1/2} 2x dx} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Localización y Dispersión de una Distribución

Dos aspectos extremadamente útiles asociados a una variable aleatoria X son la *localización* y *dispersión* de la distribución de X. Tales aspectos corresponden a características numéricas de la distribución de X, y sirven para tener una idea global sobre el punto donde se ubican (concentran) los valores posibles de X y de cuan concentrados (o dispersos) se encuentran dichos valores con respecto a su ubicación.

Aunque existen varias medidas de localización y dispersión de una distribución, en este curso estudiamos sólo algunas de ellas, comenzando con la *esperanza* o *valor esperado* o simplemente *media* de una variable aleatoria o distribución, ya que es la medida de localización más utilizada.

Localización y Dispersión de una Distribución

Esperanza

Sea X una variable aleatoria definida sobre un modelo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definición 2.1

La **esperanza (o valor esperado o media)** de la variable aleatoria X, se define como

$$\mathrm{E}(X) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathcal{X}} x f_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta ,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx & \text{si } X \text{ es continua ,} \end{cases}$$

provisto que la suma o la integral existan. Si la suma o la integral divergen, o no estan definidas, se dice que $\mathrm{E}(X)$ no existe.

Nota: Esta definición presupone que X es *absolutamente integrable*, es decir, se cumple que $\mathrm{E}(|X|) := \sum_{x \in \mathcal{X}} |x| f_X(x) < \infty$ (caso discreto), o $\mathrm{E}(|X|) := \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) < \infty$ (caso continuo), ya que $|\mathrm{E}(X)| \leq \mathrm{E}(|X|)$

Notas:

1. Es bastante común usar la notación $\mu_X = \mathrm{E}(X)$ para referirse a la media de X.
2. En el caso discreto, si $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ es el recorrido de X, entonces

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_X(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i),$$

provisto que la serie converga.
3. Si X es una variable aleatoria arbitraria, entonces su esperanza se puede calcular como

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x)dx, \quad (*)$$

provisto que ambas integrales existan.

Ejemplo 2.1

Sea X una variable aleatoria discreta con fmp dada por,

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{3^x \mathrm{e}^{-3}}{x!}, & \text{si } x = 0, 1, 2, \cdots, \\ 0 & \text{eoc.} \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{3^x \mathrm{e}^{-3}}{x!} = \mathrm{e}^{-3} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{3^x}{(x-1)!} \\ &= \mathrm{e}^{-3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{3^{j+1}}{j!} = 3\mathrm{e}^{-3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{3^j}{j!} \\ &= 3\mathrm{e}^{-3}\mathrm{e}^{3} = 3. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2

Sea X una variable aleatoria continua con fdp dada por,

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_0^1 2x^2 dx \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3

Sea X una variable aleatoria con fda dada por,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En este caso, X es una variable aleatoria mixta ya que $P(X = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ y $P(X = x) = 0$ para todo $x \neq \frac{1}{2}$. Además, en la parte continua,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Luego, al mezclar las definiciones de esperanza, se tiene que,

$$\mathrm{E}(X) = \underbrace{\frac{1}{2}P(X = \frac{1}{2})}_{\text{parte discreta}} + \underbrace{\int_0^{1/2} x dx}_{\text{parte continua}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Alternativamente, la formula $(*)$ (ver Nota 3.) también permite calcular esta esperanza; en efecto, primero note que,

$$\text{si} \;\; x \geq 0 \implies 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Luego,

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{1/2} (1-x)dx + \int_{1/2}^{0} 0dx - \int_{-\infty}^{0} 0dx = (x - \frac{x^2}{2}) \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Algunas propiedades básicas del operador esperanza se resumen a continuación:

Teorema 2.1

Sean a, b y c constantes, y sean X e Y variables aleatorias cuyas esperanza existen. Entonces,

E1) Si $X(\omega) = c$ (constante) para todo ω, es decir, la variable aleatoria X es degenera en c ($P(X = c) = 1$), entonces $\mathrm{E}(X) = c$

E2) Si $X(\omega) \geq 0$ para todo ω, es decir, la variable aleatoria X es no negativa, entonces $\mathrm{E}(X) \geq 0$.
Además, de la formula general de esperanza dada en $(*)$, sigue que,

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))dx = \int_0^\infty P(X > x)dx.$$

En particular, si X es una variable aleatoria discreta con recorrido $\mathcal{X} = \mathbb{Z}_+$ (enteros no negativos), entonces

$$\mathsf{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X > x) = \sum_{x=1}^{\infty} P(X \geq x). \quad (**)$$

E3) Si $X(\omega) \geq Y(\omega)$ para todo ω, entonces $\mathrm{E}(X) \geq \mathrm{E}(Y)$

E4) Si $a \leq X(\omega) \leq b$ para todo ω, entonces $a \leq \mathrm{E}(X) \leq b$.

E5) $\mathsf{E}(aX + b) = a\,\mathsf{E}(X) + b$ (linealidad del operador $\mathsf{E}(\cdot)$).

Tarea: Demuestre $(**)$ usando la definición de esperanza de una variable aleatoria discreta. *Idea:* Sea $p_i = P(X = i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$; luego aplique la definición de $\mathsf{E}(X)$ para el caso discreto.

Demostración 2.1

Daremos los detalles solo para E5) y solo para el caso continuo, el caso discreto es similar. Por definición,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(aX+b) &= \int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f_X(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} axf_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} bf_X(x)dx \\
&= a\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx \\
&= a\,\mathrm{E}(X)+b.
\end{aligned}
$$

Las otras propiedades se prueban de manera similar.

El concepto de esperanza puede extenderse a funciones de una variable aleatoria X. De hecho, como veremos más tarde, si X esta definidad en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y g es una función con dominio y recorrido en los reales, entonces $Y = g(X)$ también es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ya que para cada $\omega \in \Omega$, se tiene que $Y(\omega) = g(X(\omega)) \in \mathbb{R}$. Así, el siguiente resultado puede usarse como definición general de esperanza o bien como una propiedad del valor esperado de una variable aleatoria

E5) Sean X una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y $g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, una función tal que la variable aleatoria $g(X)$ tenga esperanza finita. Entonces,

$$\mathrm{E}\{g(X)\} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx & \text{si } X \text{ es continua} \\ \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x) f_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta .} \end{cases}$$

De este último resultado se deducen otras propiedades del operador esperanza.

E6) (Aditividad) Sean X es una variable aleatoria en $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$, y sean $g_1(x), g_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$, funciones tales que las variables aleatorias $g_1(X)$ y $g_2(X)$ tienen esperanza finita. Entonces,

$$\mathsf{E}\{a\, g_1(X) + b\, g_2(X) + c\} = a\, \mathsf{E}\{g_1(X)\} + b\, \mathsf{E}\{g_1(X)\} + c,$$

donde a, b, c son constantes reales.

E7) (Desigualdad de Jensen) Sea X una variable aleatoria con esperanza finita, y g una función de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$:
i) Si g es convexa, entonces $\mathsf{E}\{g(X)\} \geq g(\mathsf{E}(X))$.
ii) Si g es cóncava, entonces $\mathsf{E}\{g(X)\} \leq g(\mathsf{E}(X))$.

Ejemplo 2.4

a) $g(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, es convexa $\Longrightarrow \mathrm{E}(|X|)| \geq |\mathrm{E}(X)|$

b) $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, es convexa $\Longrightarrow \mathrm{E}(X^2)| \geq \mathrm{E}(X)$

c) $g(x) = \log x$, $x > 0$, es cóncava; en este caso, si $P(X > 0) = 1 \Longrightarrow \mathrm{E}(\log X) \leq \log \mathrm{E}(X)$

Otra medidad de localización de una variable aleatoria o distribución es la *mediana*:

Definición 2.2

La **mediana** de una variable aleatoria X es algún número $m = \mathrm{med}(X)$ tal que

$$P(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}.$$

La principal desventaja de la media $\mu_X = \mathsf{E}(X)$ como medida de localización de la variable aleatoria X es que no siempre existe; mientras que la mediana de X siempre existe. Sin embargo, la desventaja de la mediana es que no siempre es única; mientras que la media cuando existe, es única.

Notas:

a) Si X es una variable aleatoria con media finita y distribución simétrica, entonces $\mu_X = \mathsf{E}(X)$ es una mediana

b) Si X tiene distribución asimétrica (o simétrica de colas pesadas), la mediana de X puede ser una "mejor" medida localización.

Tarea: Sean μ y m la media y mediana, respectivamente, de una variable aleatoria X. Pruebe que:

i) $\mathsf{E}\{(X-\mu)^2\} = \text{mín}_{c\in\mathbb{R}} \mathsf{E}\{(X-c)^2\}$

ii) $\mathsf{E}\{|X-m|\} = \text{mín}_{c\in\mathbb{R}} \mathsf{E}\{|X-c|\}$

Dos variables aleatorias pueden tener la misma localización, y ser muy diferentes. O sea, también hay que tomar en cuenta la *dispersión* de la variable aleatoria, para darse una idea de cuan homegénea (menor dispersión) o heterogénea (mayor dispersión) es la distribución de sus valores. La medida de dispersión más común es la *varianza* de una variable aleatoria X, la cual mide la dispersión de X con respecto a su media μ_X.

Definición 2.3

Sea X una variable aleatoria y sea $\mu_X = \mathrm{E}(X)$. La varianza de X se define como, $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\{(X - \mu_X)^2\}$, es decir,

$$\mathrm{Var}(X) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \\ \sum_{x \in \mathcal{X}} (x-\mu_X)^2 f_X(x) & \text{si } X \text{ es discreta .} \end{cases}$$

La raíz cuadrada positiva de $\mathrm{Var}(X)$ es la desviación estándar de X.

También es común usar la notación $\sigma_X^2 := \mathrm{Var}(X)$ y $\sigma_X := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Algunas propiedades importantes de la varianza de una variable aleatoria son dadas a continuación. Las demostraciones quedan de ejercio (ver Casella & Berger (2002)).

Teorema 2.2

Sea X una variable aleatoria cuya varianza existe, y sean a, b, c constantes reales. Entonces,

V1) $\mathrm{Var}(X) \geq 0$ y $\mathrm{Var}(X) = 0$ si y sólo si $X \equiv c$

V2) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$

V3) $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$

Nota: V1)+ V2) $\Longrightarrow \mathsf{E}(X^2) \geq \{\mathsf{E}(X)\}^2$. Luego, si $\mathsf{E}(X^2) < \infty$, entonces $\mathrm{Var}(X) < \infty$.

Localización y Dispersión de una Distribución

Ejemplos

Ejemplo 2.5

Sea X = número de caras en tres tiradas de una moneda honesta. Aquí, $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$ y

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{si } x = 0, 3, \\ \frac{1}{8} & \text{si } x = 1, 2, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \mathrm{E}(X) &= 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}, \\ \Longrightarrow \mathrm{Var}(X) &= \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{3}{8} + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Nota: La simetría de $f_X(\cdot) \Longrightarrow m =E(X) = 1.5$ es una mediana de X

Ejemplo 2.6

Sea X una variable aleatoria continua con fdp dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{16}, & \text{si } |x| \leq 4 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \ \mathrm{E}(X) &= \int_{|x|>4} x \times 0 dx + \int_{|x|\leq 4} x \times \frac{|x|}{16} dx = -\int_{-4}^{0} \frac{x^2}{16} dx + \int_{0}^{4} \frac{x^2}{16} dx = 0, \\ \Longrightarrow \ \mathrm{Var}(X) &= \int_{|x|\leq 4} (x-0)^2 \times \frac{|x|}{16} dx = 8 \quad (Tarea!) \end{aligned}$$

Nota: $f_X(-x) = f_X(x)\ \forall\, x \iff -X \stackrel{d}{=} X \iff$ la distribución de X es simétrica con respecto al origen. En tal caso, si existe, $\mathsf{E}(X) = 0$. Además, $m =$E$(X) = 0$ y es única.

Ejemplo 2.7

Sea X una variable aleatoria continua con fdp de Cauchy, es decir,

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Note que $f_X(-x) = f_X(x)$ para todo x, es decir, X tiene distribución simétrica en torno al cero. En este caso, es fácil ver que la mediana de X es $m = 0$, y es única; mientras que la media de X no existe. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{0} x f_X(x) dx + \int_{0}^{\infty} x f_x(x) dx \end{aligned}$$

Localización y Dispersión de una Distribución

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \ \mathsf{E}(X) &= \underbrace{\int_{\infty}^{0} y f_x(-y) dy}_{y=-x} + \int_{0}^{\infty} f_x(x) dx \\
&= -\int_0^{\infty} y f_X(y) dy + \int_0^{\infty} x f_X(x) dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{y}{1+y^2} dy + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\log(1+y^2)\,|_0^{\infty} + \frac{1}{2\pi}\log(1+x^2)\,|_0^{\infty} \\
&= -\frac{1}{2\pi}\log(1+\infty^2) + \frac{1}{2\pi}\log(1+\infty^2) \\
&= -\infty + \infty \longrightarrow \text{indeterminado!} \ \Longrightarrow \ \mathsf{E}(X) \text{ no existe!.}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.8

Sea A un evento en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con $P(A) = p$ y por lo tanto $P(A^c) = 1 - p$, $0 \leq p \leq 1$. Suponga que usted gana \$1 si A ocurre y \$0 si A^c ocurre. Sea X = ganancia obtenida en un intento. Entonces, $\mathcal{X} = \{0, 1\}$ y la ganancia esperada es

$$\mathrm{E}(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$$

Iterpretación: Sean $X_1, \ldots, X_n$ las ganancias obtenidas en n intentos independientes de este juego. Entonces,

$$\Longrightarrow \bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{n(A)}{n} = f_n(A) \to p = P(A), \quad \text{cuando } n \to \infty$$

$\therefore p = \mathrm{E}(X)$ representa la ganancia promedio en el largo plazo.

Ejemplo 2.9

Se lanza una moneda honesta hasta obtenre cara. Si la primera cara ocurre en el k-ésimo intento, usted gana \$ 2^k. Sea $X =$ ganancia obtenida. Entonces, $\mathcal{X} = \{2, 2^2, 2^3, \ldots\}$, y

$$\begin{aligned} P(X = 2^k) &= \text{Pr(de obtener cara en el } k-\text{ésimo intento)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \times \frac{1}{2^k} = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty$$

Aquí, aunque $E(X)$ diverge para $+\infty$, ella no esta indeterminada

References

Blanco, L., Arunachalam, V. y Dharmaraja, S. (2012). *Introduction to Probability and Stochastic Processes.* John Wiley, New Jersey.

Casella, G. y Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference.* Second Edition. Duxbury, California.