PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027
Solución Ayudantía 1

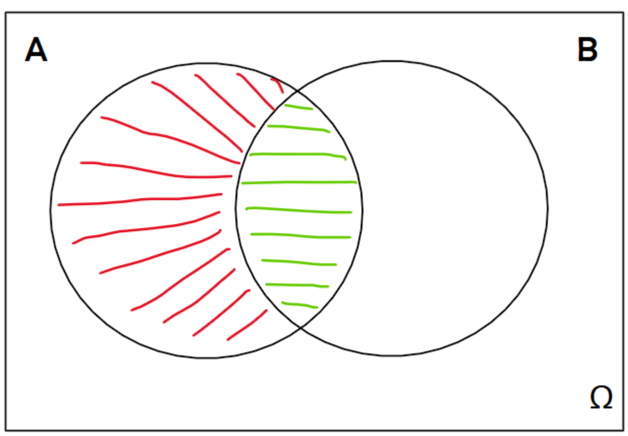
1. Demuestre las siguientes igualdades.

   (a) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
   Para esto vamos a utilizar que $A \cap \Omega = A$ y $B \cup B^c = \Omega$. Entonces

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega \\ &= A \cap (B \cup B^c) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \end{aligned}$$

   A continuación se presenta una imagen de lo anterior. Donde

   - 🟩 $A \cap B$
   - 🟥 $A \cap B^c$

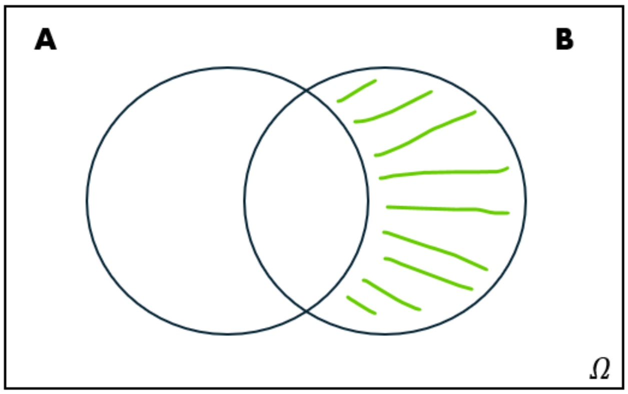


(b) $A^c - B^c = B - A$

Recuerde que por definición $A - B = A \cap B^c$. Entonces

$$\begin{aligned} A^c - B^c &= A^c \cap (B^c)^c \\ &= A^c \cap B \\ &= B \cap A^c \\ &= B - A \end{aligned}$$

A continuación se presenta una imagen de lo anterior.

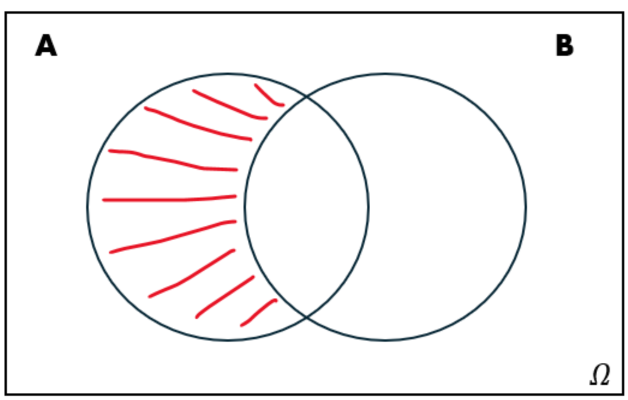


(c) $A \cap B^c = A - (A \cap B)$

En este ocasión vamos a empezar del lado derecho. Si aplicamos la definición al igual que antes tenemos que

$$\begin{aligned} A - (A \cap B) &= A \cap (A \cap B)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B^c) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B^c) \\ &= A \cap B^c \end{aligned}$$

A continuación se presenta una imagen de lo anterior.



(d) $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$

Desarrollamos el lado derecho

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap A^c) &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \\ &= (A \cup B) \cap \Omega \\ &= A \cup B \end{aligned}$$

(e) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Desarrollamos el lado izquierdo.

$$\begin{aligned} A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^c \\ &= A \cap (B^c \cup C^c) \\ &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\ &= (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$

Queda propuesto el como representar esta propiedad en diagramas de Venn.

2. Un trabajador elabora n artículos. El evento “El i-ésimo artículo es defectuoso” será denotado por A_i , con $i = 1, ..., n$. Describa los siguientes eventos usando los conjuntos A_i y las operaciones usuales entre eventos;

(a) $B =$ “Al menos un artículo es defectuoso”.

Cuando se habla de al menos un evento ocurre, esto corresponde a la unión, pues recordar que todos los posibles resultados de $A \cup B$ están en A, B o en $A \cap B$, es decir, o ocurre A, o ocurre B o ocurren ambos. Generalizando y aplicando esto a lo que nos piden, tenemos que

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Esto cobrara mayor sentido cuando apliquemos esto a probabilidades.

(b) $C =$ “Ninguno de los n artículos es defectuoso”.

Esto es que ninguno articulo sea defectuoso, por lo cual nos interesa el complemento de todos los eventos, y que todos ocurran en simultaneo, esto es

$$C = A_1^2 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \cdots \cap A_n^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$

(c) $D =$ “Exactamente un artículo es defectuoso”.

Esto puede pasar de varias maneras, pues puede ser el primer articulo el defectuoso y el resto no lo son, o puede ser el segundo articulo el defectuoso y el resto no, y así sucesivamente, entonces lo pedido corresponde a

$$\begin{aligned} D &= (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \cdots \cap A_n^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap \cdots \cap A_n^c) \cup \cdots \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \cdots \cap A_n) \\ &= \bigcup_{j=1}^{n} \bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} (A_i \cap A_j^c) \end{aligned}$$

(d) $E =$ "A lo más un artículo es defectuoso".

Esto puede pasar de dos formas, que no haya ningún articulo defectuoso, o que haya un articulo defectuoso. Note que esto ya lo expresamos anteriormente, por lo cual lo pedido corresponde a

$$E = C \cup D$$

3. Sean A y B pertenecientes a una $\sigma-$algebra $\mathcal{F}$. Demuestre que $\mathcal{F}$ contiene los conjuntos $A \cap B$, $A \backslash B$ y $A \triangle B$.

Para esto vamos a usar las propiedades de una $\sigma-$algebra. Para esto recuerde que

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- Si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
- Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Vamos por $A \cap B$.

$$\text{Si } A, B \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A^c, B^c \in \mathcal{F}$$

$$\text{Si } A^c, B^c \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$$

$$\text{pero si } A^c \cup B^c \in \mathcal{F}, \text{ entonces } (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$$

note que esto ultimo corresponde a $(A^c \cup B^c)^c = A \cap B$, mostrando así que $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Vamos por $A \backslash B$, recordar que $A \backslash B = A - B = A \cap B^c$.

$$\text{Si } A \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A^c \in \mathcal{F}$$

$$\text{Si } B \in \mathcal{F}, \text{ entonces } B^c \in \mathcal{F}$$

$$\text{Como } A^c, B \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A^c \cup B \in \mathcal{F}$$

$$\text{pero si } (A^c \cup B) \in \mathcal{F}, \text{ entonces } (A^c \cup B)^c \in \mathcal{F}$$

note que esto ultimo corresponde a $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c$, mostrando así que $A \backslash B \in \mathcal{F}$.

Vamos por $A \triangle B$, recordar que $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$. Para esto note que $(A \cap B^c) \in \mathcal{F}$, pues ya lo demostramos, y como la unión de cualquier evento debe estar en $\mathcal{F}$, basta demostrar que $B \cap A^c \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\text{Si } A \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A^c \in \mathcal{F}$$

$$\text{Si } B \in \mathcal{F}, \text{ entonces } B^c \in \mathcal{F}$$

$$\text{Como } A, B^c \in \mathcal{F}, \text{ entonces } A \cup B^c \in \mathcal{F}$$

$$\text{pero si } (A \cup B^c) \in \mathcal{F}, \text{ entonces } (A \cup B^c)^c \in \mathcal{F}$$

note que esto ultimo corresponde a $(A \cup B^c)^c = A^c \cap B = B \cap A^c$, mostrando así que $A \backslash B \in \mathcal{F}$, y finalmente, como $(A \cap B^c)$, $(B \cap A^c) \in \mathcal{F}$, entonces por propiedad de sigma álgebra se tiene que $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = A \triangle B \in \mathcal{F}$.

4. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos σ-álgebras definidos sobre un mismo espacio muestral, Ω. Demuestre que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ también corresponde a un σ-álgebra. Ahora defina $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$. ¿Es $\mathcal{F}^*$ también una $\sigma-$algebra? Para esto considere los siguientes casos

$$\Omega = \{a, b, c\}, \quad \mathcal{F}_1 = \{\{a\}, \{b, c\}, \emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{\{b\}, \{a, c\}, \emptyset, \Omega\}$$

y

$$\Omega = \{1, 2\}, \quad \mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \Omega\}$$

Para esto nuevamente es solo recordar las propiedades de una $\sigma-$algebra.

- Por definición de $\sigma-$algebra $\Omega \in \mathcal{F}_1$ y $\Omega \in \mathcal{F}_2$, por lo cual $\Omega \in \mathcal{F}$. Cumpliéndose así la primera propiedad.
- Si $A \in \mathcal{F}$, esto significa que $A \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, pero como $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ son $\sigma-$algebra, se tiene que $A^c \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, lo que implica que $A^c \in \mathcal{F}$.
- Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, esto significa que $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, pero como estas son $\sigma-$algebra, se tiene que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, lo que implica que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Mostrando así que la intersección de dos $\sigma-$algebra también es una $\sigma-$algebra. En cuanto a la union, en el primer caso tenemos que

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$$

ahora, si tomamos $A_1 = \{a\}$ y $A_2 = \{b\}$, la unión no esta en $\mathcal{F}^*$, pues

$$A_1 \cup A_2 = \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{F}^*$$

implicando que no se cumple la tercera propiedad. En el caso de $\Omega = \{a, b, c\}$, se tiene que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no es una $\sigma-$algebra. Para el otro caso hay que verificar las propiedades. Veamos que sucede.

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}\}$$

- Claramente $\Omega \in \mathcal{F}^*$. Se cumple la primera propiedad.
- Hay que tomar elementos en $\mathcal{F}^*$ e ir verificando si el complemento existe.
  - $$A = \emptyset, A^c = \Omega$$

    esto se cumple, pues ambos elementos están en $\mathcal{F}^*$
  - $$A = \{1\}, A^c = \{2\}$$

    esto se cumple, pues ambos elementos están en $\mathcal{F}^*$

  Se cumple la segunda propiedad.
- Hay que ver las uniones.

– $$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\} \Rightarrow A_1 \cup A_2 = \{1, 2\}$$

  esto se cumple, pues este ultimo elemento está en $\mathcal{F}^*$

– para las otras uniones ocurre lo mismo, por ejemplo

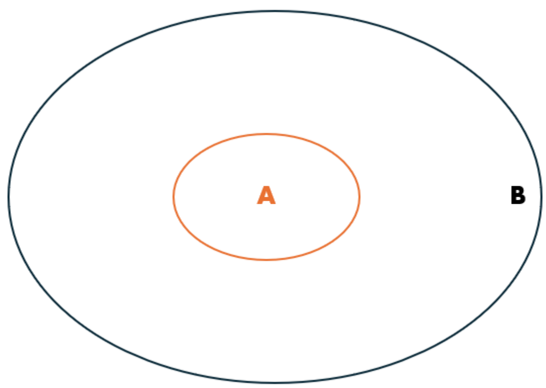
$$A_1 = \{1\}, A_2 = \Omega \Rightarrow A_1 \cup A_2 = \Omega$$

Se cumple la tercera propiedad.

El lector puede fácilmente verificar que todas las posibles uniones pertenecen a $\mathcal{F}^*$, por lo cual en este caso $\mathcal{F}^*$ si es una $\sigma-$algebra.
En base a todo esto se puede concluir que en general la unión de sigmas algebras no es una sigma algebra, y que para afirmarlo hay que verificar todas las propiedades.

5. Demuestre las siguientes propiedades generales de una medida de probabilidad: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, entonces:

   (a) Monotonía: Si $A \subseteq B$, tal que $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
   Para esto podemos dibujar lo que tenemos. Nos dicen que $A \subseteq B$, esto es



   Note entonces que B lo podemos escribir como sigue

$$B = (B - A) \cup A$$

   Como $(B - A) \cap A = \emptyset$, podemos aplicar el axioma tres de una medida de probabilidad, teniendo que

$$P((B - A) \cup A) = P(B - A) + P(A)$$

   como las probabilidades son positivas tenemos que

$$\begin{aligned} P(B - A) &\geq 0 \\ P(B) - P(A) &\geq 0 \\ P(B) &\geq P(A) \end{aligned}$$

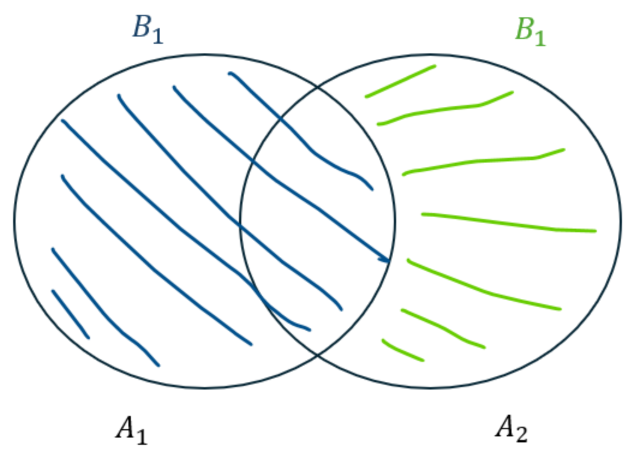
   mostrando así que $P(A) \leq P(B)$. Recuerde que $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$, en nuestro caso $A \cap B = A$.

(b) Subaditividad: Si $A_1, A_2, \ldots A_k \in \mathcal{A}$, entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{k} P\left(A_n\right)$.

Para esto vamos a definir una secuencia bien conveniente. Si tenemos $A_1, A_2, ..., A_k$, note que podemos escribir los conjuntos de la siguiente forma para el caso A_1, A_2

$$
\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \\
B_2 &= A_2 - A_1
\end{aligned}
$$

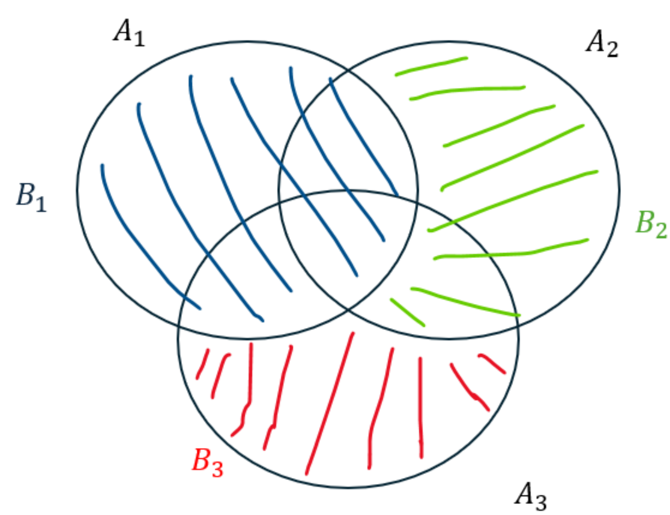
y claramente $B_1 \cup B_2 = A_1 \cup A_2$, pues



Siguiendo la idea tendríamos

$$B_3 = A_3 - (A_1 \cup A_2)$$

teniendo que $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.
Lo anterior corresponde a



En general se tiene que

$$B_n = A_n - (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1})$$

y

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$$

Lo anterior es importante, pues tenemos que $B_i \subseteq A_i$. Ahora, en base a la secuencia definida, se tiene que en el caso general

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$$

con $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Ahora aplicamos función de probabilidad.

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{n} A_i &= \bigcup_{i=1}^{n} B_i \\
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \qquad (1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(B_i), \quad \text{Axioma 3}
\end{aligned}$$

Luego, como $B_i \subseteq A_i$, se cumple la propiedad de monotonía ya demostrada, entonces

$$\begin{gathered}
P(B_1) \leq P(A_1) \\
P(B_2) \leq P(A_2) \\
\vdots \leq \vdots \\
P(B_n) \leq P(A_n) \\
\text{sumamos todo hacia abajo} \\
\Rightarrow \; P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \\
\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)
\end{gathered}$$

Aplicando (1) tenemos que

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \\
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)
\end{aligned}$$

Mostrando lo pedido.