$\mathbb{R}$ es un cuerpo

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1] Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2] LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

7 de marzo de 2022

Axiomas de Cuerpo

Describimos los números reales asumiendo que tienen una colección de propiedades. No construimos los números reales, solo anunciamos qué propiedades deben tener. Dado que las propiedades que desarrollamos son familiares y aceptables y, de hecho, describen los números reales que estamos acostumbrados a usar, este enfoque no debería causar ninguna molestia.
Las siguientes propiedades se denominan axiomas de cuerpo. Cuando estamos realizando manipulaciones algebraicas en el sistema de números reales, lo que realmente estamos usando son los axiomas de cuerpo.
Suponga que el conjunto de números reales $\mathbb{R}$ tiene dos operaciones, llamadas suma "$+$" y multiplicación "$\cdot$" y que estas operaciones satisfacen los axiomas de cuerpo. La operación $a \cdot b$ (multiplicación) se escribe con mayor frecuencia sin el punto como ab.

Axiomas de Cuerpo

A0. **Cierre.** Para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a + b \in \mathbb{R}$ y $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

A1. **Conmutatividad.** Para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$

A2. **Asociatividad.** Para cualquier $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{y} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

A3. **Elemento Neutro.**

1. Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un único número $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = a$.
2. Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un único número $1 \in \mathbb{R}$ tal $a \cdot 1 = a$.

A4. **Distributividad.** Para cualquier $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumple $a(b + c) = ab + ac$.

A5. **Inversos.**

1. Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$.
2. Paar todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Axiomas de Cuerpo

Definición.

La suma $a + (-b)$ se indicará $a - b$ y se llama diferencia entre a y b. Si $b \neq 0$, el producto ab^{-1} también se representará por $\dfrac{a}{b}$ y se llamará cociente entre a y b.

Teorema.

Dado $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot 0 = 0$.

Demostración Notemos que

$$a \cdot 0 + a \cdot 1 = a(0 + 1) = a \cdot 1 = a$$

Sumando $(-a)$ a ambos lados de esta igualdad obtemos

$$a \cdot 0 + a + (-a) = a + (-a) \iff a \cdot 0 = 0\,.$$

Axiomas de Cuerpo

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Teorema. (Regla de los signos)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $-(-a) = a$
2. $(-a) \cdot b = -(ab)$
3. $a \cdot (-b) = -(ab)$
4. $(-a)(-b) = ab$

Demostración

1. Haciendo $c = -a$, por el axioma de inversos existe $-c \in \mathbb{R}$ tal que $c - c = 0$ sustituyendo $c = -a$ la última igualdad equivale a:

$$(-a) - (-a) = 0$$

Sumando a a ambos lados obtenemos

$$a + (-a) - (-a) = a + 0 \Longleftrightarrow -(-a) = a\,.$$

Axiomas de Cuerpo

2. En efecto, considere la suma

$$(-a) \cdot b + ab = (-a + a)b = 0 \cdot b = 0 \Longleftrightarrow (-a) \cdot b + ab = 0$$

   Sumando $-(ab)$ a ambos lados de la igualdad nos da:

$$(-a) \cdot b + ab - (ab) = 0 - (ab) \Longleftrightarrow (-a) \cdot b = -(ab)\,.$$

3. La demostración es similar al caso 2.
4. Usando las propiedades 2 y 3 vemos que

$$(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(ab)) = ab\,.$$

Axiomas de Cuerpo

Teorema.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(a^{-1})^{-1} = a$
2. $a^{-1} \cdot b = (ab^{-1})^{-1}$
3. $a \cdot b^{-1} = (a^{-1}b)^{-1}$
4. $a^{-1} \cdot b^{-1} = (ab)^{-1}$

Axiomas de Cuerpo

Teorema. (Leyes de Cancelación)

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. $a + b = a + c \Longleftrightarrow b = c$
2. $ab = ac, \;\; a \neq 0 \Longleftrightarrow b = c$

Axiomas de Cuerpo

Teorema.

1. Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.
2. Si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$ o $x = -y$.

Demostración

1. Supongamos que $b \neq 0$. Multiplicando por b^{-1} en la igualdad $a \cdot b = 0$ obtenemos

$$a \cdot b \cdot b^{-1} = 0 \cdot b^{-1} \Longleftrightarrow a \cdot 1 = 0 \Longleftrightarrow a = 0\,.$$

   De manera similar si $a \neq 0$ se puede probar que $b = 0$.
2. Si $x^2 = y^2$ entonces

$$x^2 - y^2 = 0 \Longleftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$$

   por el inciso 1 esto implica que $x - y = 0$ o $x + y = 0$ de donde se sigue el teorema.