Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2022

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 2

1. Considere la función racional $R(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-x-6}$.

   a) Determine las asíntotas de la función R.

   b) Determine signos de la función R mediante una tabla de signos.

   c) Realice el esbozo de la gráfica de R indicando las intersecciones con los ejes coordenados.

Solución.

a) Notemos que

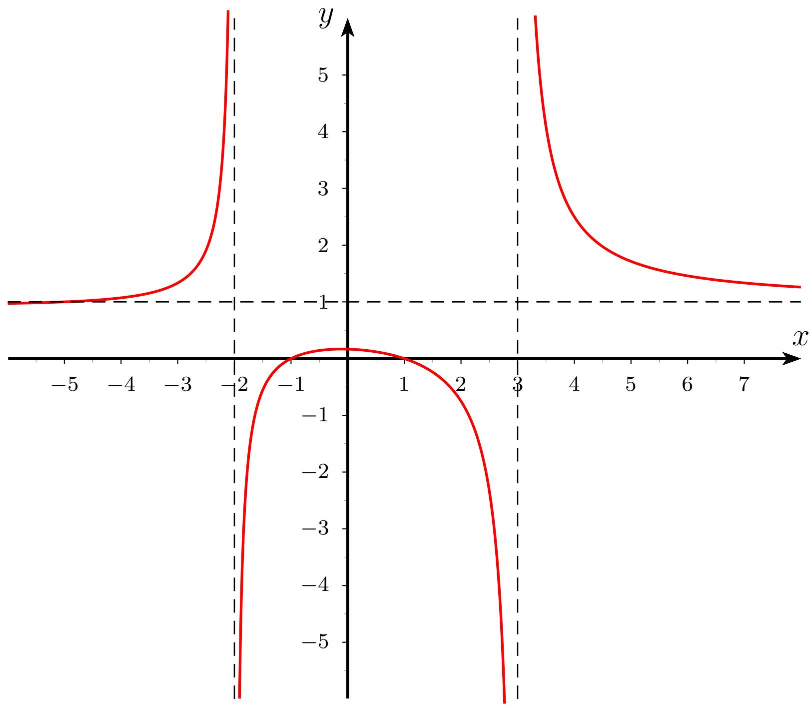
$$R(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x-6} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+2)}\,.$$

Se sigue que R tiene asíntotas verticales en $x=3$ y $x=-2$. Como la función racional R es el cociente de dos polinomios de grado 2, entonces tiene una asíntota horizontal en $y = \dfrac{a_2}{b_2} = 1$.

b) A continuación se presenta una tabla de signos para la función R.

	$-\infty$ a -2	-2 a -1	-1 a 1	1 a 3	3 a ∞
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$c)$ El gráfico de la función R se presenta a continuación



Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por encontrar las asíntotas de R.
- 2 puntos por la tabla de signos.
- 2 puntos por la gráfica de R.

2. Considere la función definida por

$$g(x) = \begin{cases} -|x| - 1 & \text{si } |x| < 1 \\ (1-x)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$$

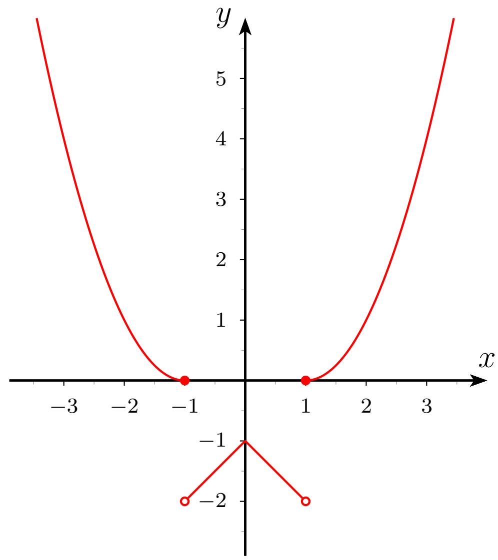
a) Realice el gráfico de la función g.

b) Utilice el gráfico para determinar el recorrido de la función g y decida si g es una función inyectiva.

c) Determine a través del gráfico, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función, e indique si son estrictos o no.

Solución.

a) El gráfico de la función g es:



b) A partir del gráfico, vemos que Rec $(g) =]-2, -1] \cup [0, +\infty[$.
Además, g no es inyectiva, en efecto $g(2) = 1 = g(-2)$ pero $2 \neq -2$.

c) La función g es estrictamente creciente en $]-1, 0] \cup [1, +\infty[$ y es estrictamente decreciente en $]-\infty, -1] \cup [0, 1[$.

Puntaje Pregunta 2.

- 1.a) 1 punto por cada rama correctamente gráficada (3 puntos en total).
- 1.b) 0,7 puntos por determinar el recorrido y 0,8 puntos por justificar que f no es inyectiva.
- 1.c) 0,5 puntos por determinar el intervalo de crecimiento, 0,5 puntos por determinar el intervalo de decrecimiento y 0,5 puntos por indicar que el crecimiento es estricto.

3. Considere la función $h : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to B$ definida por

$$h(x) = \frac{x^3}{1+x^3}\,.$$

a) Pruebe que h es una función inyectiva.

b) Encuentre la inversa de la función h.

c) ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

Solución.

a) Supongamos que $h(x_1) = h(x_2)$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{x_1^3}{1+x_1^3} = \frac{x_2^3}{1+x_2^3} \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1^3(1+x_2^3) = x_2^3(1+x_1^3) \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1^3 + x_1^3x_2^3 = x_2^3 + x_1^3x_2^3 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1^3 = x_2^3 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

por lo que h es una función inyectiva.

b) Tenemos que si $y = f(x)$ entonces

$$\begin{aligned} y = \frac{x^3}{1+x^3} \quad &\Longleftrightarrow \quad y(1+x^3) = x^3 \\ &\Longleftrightarrow \quad y + yx^3 = x^3 \\ &\Longleftrightarrow \quad y = x^3(1-y) \\ &\Longleftrightarrow \quad x^3 = \frac{y}{1-y} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{y}{1-y}} \end{aligned}$$

Entonces, la función inversa de f es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1-x}}$.

c) Observe que el dominio de la función f^{-1} corresponde a los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $1 - x \neq 0$ lo que equivale a que $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por demostrar la inyectividad.
- 2 puntos por determinar la función inversa.
- 2 puntos por determinar el dominio de la función inversa.

4. Sean $f : (-\infty, 5) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ y $g : [6, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Defina la función compuesta $g \circ f$ indicando cuál es el dominio de la composición.

   Solución. Se tiene que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2+4}) = 2\sqrt{x^2+4} + 3\,.$$

   Ahora vamos a determinar el dominio de la función $g \circ f$. Sabemos que

$$x \in \mathrm{Dom}(g \circ f) \iff (x \in \mathrm{Dom}(f)) \wedge (f(x) \in \mathrm{Dom}(g)) \iff (x \in (-\infty, 5)) \wedge (f(x) \in [6, \infty))$$

   Notemos que

$$f(x) \geqslant 6 \iff \sqrt{x^2+4} \geqslant 6 \iff x^2 + 4 \geqslant 36 \iff x^2 - 32 \geqslant 0 \iff x \in \left(-\infty, -\sqrt{32}\right] \bigcup \left[\sqrt{32}, \infty\right)\,.$$

   Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \left(-\infty, -\sqrt{32}\right]$.

Puntaje Pregunta 4.

- 2 puntos por determinar una fórmula para $g \circ f$.
- 2 puntos por obtener que $x \in \mathrm{Dom}(g \circ f) \iff (x \in (-\infty, 5)) \wedge (f(x) \in [6, \infty))$.
- 2 puntos por obtener correctamente el dominio de $g \circ f$.