Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 7

1. Determine el coeficiente de x^{20} en la expansión de
$$\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{10}.$$

Solución. Usando el teorema del binomio, obtenemos que
$$\begin{aligned}\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{10} &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left(x^3\right)^{10-k} \left(\frac{-2}{x^2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-2)^k x^{30-3k} x^{-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-2)^k x^{30-5k}.\end{aligned}$$

Necesitamos $x^{30-5k} = x^{20}$, por lo que $30 - 5k = 20$ y $k = 2$. El coeficiente correspondiente en la expansión es
$$\binom{10}{2}(-2)^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 4 = \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 4 = 180.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 2 puntos por usar el teorema del binomio y obtener
$$\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} \left(x^3\right)^{10-k} \left(\frac{-2}{x^2}\right)^k.$$

CC 2. 2 puntos por simplificar las expresiones y obtener que
$$\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-2)^k x^{30-5k}$$

CC 3. 2 puntos por obtener el valor de $k = 2$ y el coeficiente 180.

2. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente y tal que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq 0.$$

Sugerencia: Suponga lo contrario y deduzca una contradicción.

Solución. Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Supongamos por contradicción que $L < 0$. Si aplicamos la definición de límite para $\epsilon = -L > 0$, obtendremos un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ se cumple que

$$\begin{aligned} & |a_n - L| < \epsilon = -L \\ \iff \quad & -(-L) < a_n - L < -L \\ \iff \quad & L < a_n - L < -L \\ \iff \quad & 2L < a_n < 0. \end{aligned}$$

En particular, esto nos dice que $a_n < 0$ para todo $n > N$. Pero eso es absurdo, pues por hipótesis sabemos que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por contradicción, concluimos que $L \geq 0$.

Observación: El mismo argumento funciona para cualquier $\epsilon \in (0, -L]$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 2 puntos por realizar la demostración por contradicción y dar la definición de convergencia.

CC 2. 2 puntos por elegir $\varepsilon = -L$ o cualquier $\varepsilon \in (0, -L)$.

CC 3. 2 puntos por llegar a una contradicción.