PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027
Solución Ayudantía 8

1. Muestre que

$$\underset{c\in\mathbb{R}}{min} \quad \mathbb{E}(|X-c|) = \mathbb{E}(|X-m|)$$

donde m es la mediana de X.

Sea $f(c) = \mathbb{E}(|X-c|)$. Para encontrar el mínimo podemos derivar e igualar a 0, pero primero desarrollemos un poco mas.

$$\begin{aligned} f(c) &= \mathbb{E}(|X-c|) \\ &= \int_{\mathcal{X}} |x-c|\, f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{c} -(x-c) f_X(x)dx + \int_{c}^{\infty} (x-c) f_X(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{c} (c-x) f_X(x)dx + \int_{c}^{\infty} (x-c) f_X(x)dx \end{aligned}$$

Para derivar $f(c)$, podemos usar la regla de Leibniz. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dc} f(c) &= \frac{d}{dc}\left(\int_{-\infty}^{c} (c-x) f_X(x)dx + \int_{c}^{\infty} (x-c) f_X(x)dx\right) \\ f'(c) &= \int_{-\infty}^{c} f_X(x)dx - \int_{c}^{\infty} f_X(x)dx \end{aligned}$$

igualamos a 0

$$\begin{aligned} f'(c) &= 0 \\ \int_{-\infty}^{c} f_X(x)dx - \int_{c}^{\infty} f_X(x)dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{c} f_X(x)dx &= \int_{c}^{\infty} f_X(x)dx \\ P(X \leq c) &= P(X > c) \end{aligned}$$

Note que esta ultima igualdad nos dice que la probabilidad de que X sea menor a c, debe ser la misma que X sea mayor a c.

Un dibujo que retrata esto corresponde a la figura 1

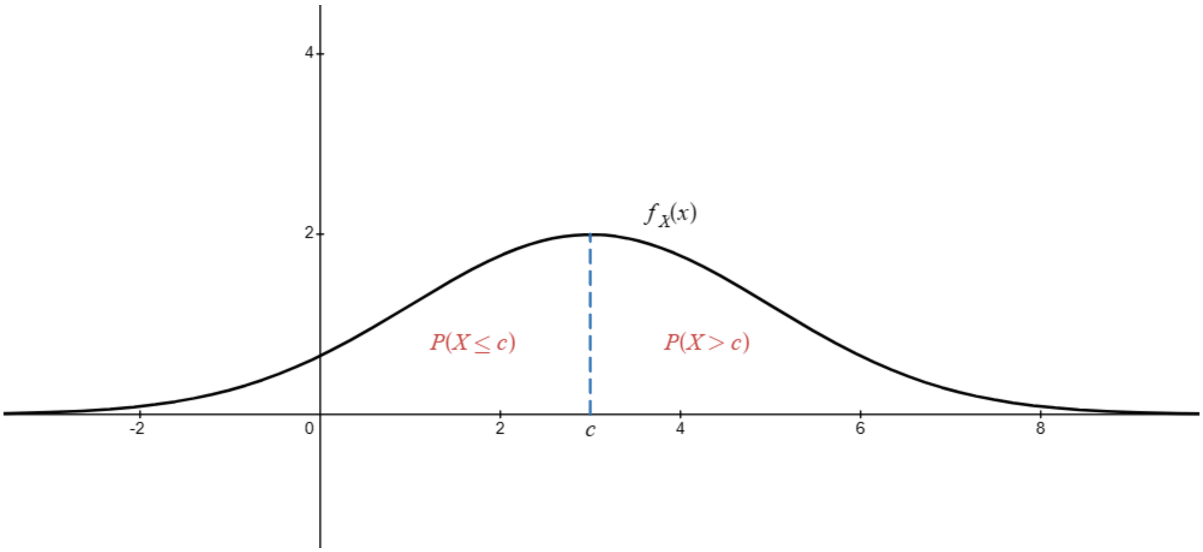

Figure 1: Visualización del ejercicio 1

Esto nos indica que a la izquierda de c se debe tener la misma probabilidad que a la derecha de c, pero esto solo es posible si se tiene 0.5 de probabilidad a la izquierda, y 0.5 de probabilidad a la derecha, es decir, que esto corresponde a la mediana. Mas aun, recuerde que la mediana a de X se define como

$$\int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx = \int_{a}^{\infty} f_X(x)dx$$

y esto es justamente a lo que llegamos. Luego, se tiene que el valor que minimiza $f(c)$ es la mediana de X. Concluyendo así que

$$\underset{c\in\mathbb{R}}{min} \quad \mathbb{E}(|X-c|) = \mathbb{E}(|X-m|)$$

donde m es la mediana de X.

2. Sea X una v.a con fdp dada por

$$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}(\alpha-1)!}, \quad x > 0$$

con $\alpha \in \mathbb{N},\ \beta > 0$.

(a) Suponga que $g(x)$ es una función suave con buen comportamiento. Muestre que

$$\mathbb{E}[g(X)(X-\alpha\beta)] = \beta\mathbb{E}[Xg'(X)]$$

(b) Considere el caso de $\beta = 1$. Calcule $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X} + X\right)$ y $Var(3X+\pi)$.

(a) Para esto vamos a usar integración por partes.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X)(X-\alpha\beta)] &= \int_0^\infty g(x)(x-\alpha\beta)\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}dx \\
&= \int_0^\infty g(x)x\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha(\alpha-1)!} - \alpha\beta g(x)\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}dx \\
&= \frac{1}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}\int_0^\infty g(x)x^\alpha e^{-x/\beta}dx - \frac{\alpha\beta}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}\int_0^\infty g(x)x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx
\end{aligned}
$$

Si aplicamos vaca en la integral de la izquierda con $u = g(x)x^\alpha$ y $dv = e^{-x/\beta}dx$, se tiene

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}\int_0^\infty (g'(x)x^\alpha + \alpha g(x)x^{\alpha-1})\beta e^{-x/\beta}dx - \frac{\alpha\beta}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}\int_0^\infty g(x)x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx \\
&= \beta\int_0^\infty g'(x)\frac{x^\alpha e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}dx + \alpha\beta\int_0^\infty g(x)\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}dx - \alpha\beta\int_0^\infty g(x)\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}dx \\
&= \beta\int_0^\infty g'(x)\frac{x^\alpha e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}dx \\
&= \beta\int_0^\infty g'(x)\frac{x^{\alpha-1+1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}dx \\
&= \beta\int_0^\infty g'(x)x\frac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha(\alpha-1)!}dx \\
&= \beta\int_0^\infty g'(x)xf_X(x)dx \\
&= \beta\mathbb{E}[g'(X)X]
\end{aligned}
$$

(b) Con $\beta = 1$ tenemos

$$
f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{(\alpha-1)!}, \quad x > 0
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{X} + X\right) &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} + x\right)\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{(\alpha-1)!}dx \\
&= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-2}e^{-x}}{(\alpha-1)!}dx + \int_0^\infty \frac{x^\alpha e^{-x}}{(\alpha-1)!}dx \\
&= \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-2}e^{-x}}{(\alpha-1)!}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^\alpha e^{-x}}{(\alpha-1)!}dx}_{I_2}
\end{aligned}
$$

para calcular I_1 usamos vaca con $u = e^{-x}$ y $dv = x^{\alpha-2}dx$, de modo que

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{(\alpha-1)!}\left(e^{-x}\frac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)}e^{-x}dx\right) \\
&= 0 + \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(\alpha-1)!}e^{-x}dx \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}e^{-x}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha-1}\int_0^\infty f_X(x)dx \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\cdot 1 \\
\Rightarrow\ I_1 &= \frac{1}{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

Ahora vamos con I_2. Donde nuevamente usamos vaca, pero ahora con $u = x^\alpha$ y $dv = e^{-x}dx$. Entonces

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{(\alpha-1)!}\left(-x^{\alpha-1}e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha x^{\alpha-1}e^{-x}dx\right) \\
&= \alpha\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{(\alpha-1)!}dx \\
&= \alpha\int_0^\infty f_X(x)dx \\
&= \alpha\cdot 1 \\
\Rightarrow\ I_2 &= \alpha
\end{aligned}
$$

Reemplazamos todo, de modo que se tiene

$$
\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}+X\right) = I_1 + I_2 = \frac{1}{\alpha-1}+\alpha
$$

Para la varianza se tiene lo siguiente

$$
\begin{aligned}
Var(3X+\pi) &= Var(3X)+0 \\
&= 3^2 Var(X) \\
&= 9[E(X^2)-(E(X))^2]
\end{aligned}
$$

para calcular $\mathbb{E}(X^2)$ se procede de manera similar a lo anterior. Luego de resolver la respectiva integral, se tiene que

$$
\begin{aligned}
Var(3X+\pi) &= 9[(\alpha+1)\alpha-(\alpha)^2] \\
&= 9\alpha
\end{aligned}
$$

3. Sea X con distribución exponencial de parámetro λ, esto es

$$
f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x>0
$$

(a) Calcule $\mathbb{E}(I_{\{x>5\}})$. Con I la función indicatriz.

(b) Encuentre $f_X(X|X>5)$

(c) En clases se vio que si X es continua con $\mathcal{X} = \mathbb{R}^+$, entonces

$$
\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}^+}[1-F_X(x)]dx \tag{1}
$$

En base a esto encuentre una expresión similar para calcular $\mathbb{E}(X|X>5)$ y verifique que el resultado coincide con el calculo usual de la esperanza. Note que el resultado visto en clases solo aplica para $x>0$, y nosotros tenemos $x>5$. ¿Cree que la formula 1 cambia en algo?

(d) Generalice el resultado en (b), es decir, si X es una v.a continua, encuentre una expresión para $f_X(X|X>a)$.

(a) La función indicatriz o indicadora corresponde a

$$I_{\{x>5\}} = \begin{cases} 1, & X>5 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(I_{\{x>5\}}) &= 1 \cdot P(X>5) \\
&= \int_5^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= e^{-5\lambda}
\end{aligned}$$

(b) Para esto vamos a usar la acumulada. Si $x>5$ entonces

$$\begin{aligned}
P(X \leq x|X>5) &= \frac{P(X \leq x \cap X>5)}{P(X>5)} \\
&= \frac{P(5 \leq X < x)}{1-F_X(5)} \\
&= \frac{P(X \leq x) - P(X<5)}{1-F_X(5)} \\
P(X \leq x|X>5) &= \frac{F_X(x) - P(X<5)}{1-F_X(5)}, \quad \Big/ \frac{d}{dx} \\
f_X(X|X>5) &= \frac{f_X(x)}{1-F_X(5)}
\end{aligned}$$

luego de calcular el denominador, se tiene que

$$f_X(X|X>5) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-5\lambda}}, \quad x>5$$

(c) Vamos a generalizarlo y luego reemplazar con los valores que tenemos. Suponga que X tiene recorrido $\mathcal{X} = (a, \infty)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_a^\infty x f_X(x) dx \\
&= \int_a^\infty \int_0^x f_X(x) dy dx \\
&\text{damos vuelta el diferencial} \\
&= \int_0^a \int_a^\infty f_X(x) dx dy + \int_a^\infty \int_y^\infty f_X(x) dx dy \\
&= \int_0^a P(X \geq a) dy + \int_a^\infty P(X>y) dy \\
&= a \cdot 1 + \int_a^\infty P(X>y) dy \\
&= a + \int_a^\infty [1 - P(X \leq y)] dy \\
&= a + \int_a^\infty [1 - F_X(y)] dy
\end{aligned}$$

teniendo así

$$\mathbb{E}(X) = a + \int_a^{\infty} [1 - F_X(x)]dx \tag{2}$$

Note que X es cualquier variable aleatoria con recorrido (a, ∞), en nuestro caso, la variable aleatoria es $X|X > 5$, por lo que es solo reemplazar el caso que tenemos. Calculemos primero la acumulada

$$\begin{aligned} F_{X|X>5}(x) &= \int_5^x \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-5\lambda}} dx \\ &= 1 - e^{-\lambda(x-5)} \end{aligned}$$

ahora si reemplazamos todo en la formula (2).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|X > 5) &= 5 + \int_5^{\infty} [1 - F_{X|X>5}(x)]dx \\ &= 5 + \int_5^{\infty} [1 - (1 - e^{-\lambda(x-5)})]dx \\ &= 5 + \int_5^{\infty} e^{-\lambda(x-5)} dx \\ &= 5 + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

ahora corroboremos mediante el calculo usual y directo de la esperanza.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|X > 5) &= \int_5^{\infty} x \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-5\lambda}} dx \\ &= 5 + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

donde claramente los valores coinciden.

(d) Para generalizar lo pedido tomamos un a cualquiera. Entonces, si $x > a$

$$\begin{aligned} P(X \le x | X > a) &= \frac{P(X \le x \cap X > a)}{P(X > 5)} \\ &= \frac{P(a \le X < x)}{1 - F_X(5)} \\ &= \frac{P(X \le x) - P(X < a)}{1 - F_X(a)} \\ P(X \le x | X > a) &= \frac{F_X(x) - P(X < a)}{1 - F_X(5)}, \quad \Big/ \frac{d}{dx} \\ f_X(X | X > a) &= \frac{f_X(x)}{1 - F_X(a)}, \quad x > a \end{aligned}$$

Nota: si desea corroborar los resultados o investigar mas, puede visitar el siguiente link.

4. Si X es una v.a con densidad $f_X(x)$ y recorrido $\mathcal{X}$, muestre que

$$\exp\left\{\int_{\mathcal{X}} x f_X(x)dx\right\} \leq \int_{\mathcal{X}} e^x f_X(x)dx$$

Note dos cosas

$$\int_{\mathcal{X}} x f_X(x)dx = \mathbb{E}(X)$$
$$\int_{\mathcal{X}} e^x f_X(x)dx = \mathbb{E}\left(e^X\right)$$

por lo que la desigualdad se reduce a probar que

$$e^{\mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}\left(e^X\right)$$

para esto podamos usar la desigualdad de Jensen, que nos dice que si $\phi(x)$ es convexa, entonces se cumple que

$$\phi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\phi(X))$$

en nuestro caso $\phi(x) = e^x$, y se tiene que $\phi''(x) = e^x > 0$, por lo que $\phi(x)$ es convexa. Luego, por la desigualdad de Jensen, se cumple que

$$e^{\mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}\left(e^X\right)$$

provando asi lo pedido.

5. Sea X una v.a con fdp dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} kx^2, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{e.o.c} \end{cases}$$

(a) Encuentre el valor de k tal que $f_X(x)$ sea efectivamente una fdp.
(b) Calcule $\mathbb{E}(X)$ e interprete este resultado.
(c) Calcule $\mathbb{E}(X^{2n+1})$
(d) **Propuesto:** Calcule $M_X(t)$ y con esto $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ y $Var(X)$.

(a) Debe ser positiva y debe integrar 1. Entonces

$$\int_{|x|<1} kx^2dx = 1$$
$$k\int_{-1}^{1} x^2dx = 1$$
$$k\frac{2}{3}dx1$$
$$\Rightarrow\ k = \frac{3}{2}$$

de modo que

$$f_X(x) = \frac{3}{2}x^2, \quad -1 < x < 1$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-1}^{1} x\frac{3}{2}x^2 dx \\
&= \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^3 dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Este valor tiene sentido, ya que la fdp es simétrica en torno al 0. La figura 2 representa $f_X(x)$.

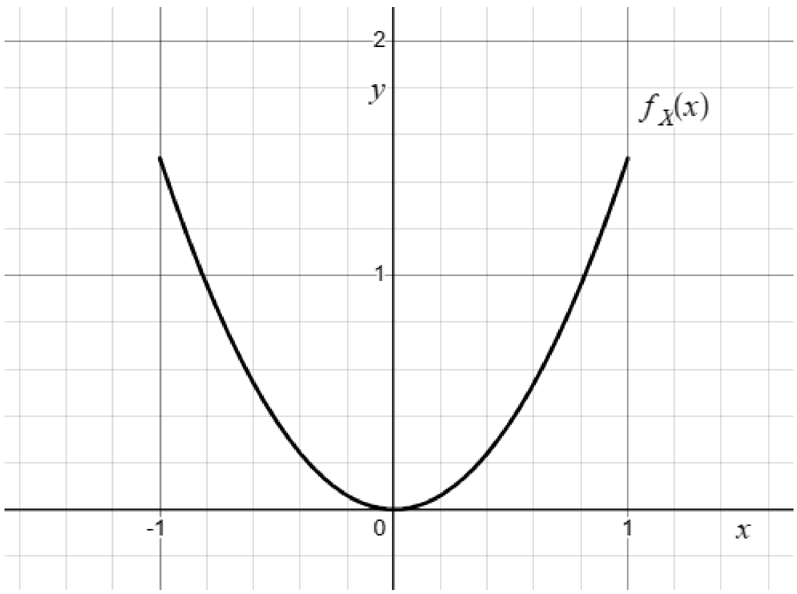

Figure 2: $f_X(x)$

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^{2n+1}) &= \int_{-1}^{1} x^{2n+1}\frac{3}{2}x^2 dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$