PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2020

Interrogación 3
MAT1107 - Introducción al Cálculo

(1) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Suponga que $f(0) \neq 0$. Demuestre que

(a) $f(0) = 1$. **(1 punto)**

(b) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. **(2 punto)**

Solución.
(a) Observamos que $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$.

Por lo tanto, $f(0) = 0$ o $f(0) = 1$.

La primera alternativa está descartada por hipótesis. **(1 punto)**

(b) Primero, $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$. **(1 punto)**

En segundo lugar, vemos que $1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x)$.

Por lo tanto $f(-x) = f(x)^{-1}$.

Luego, como $f(-x)$ está bien definida, $f(x)$ no puede ser igual a 0. **(1 punto)**

(2) Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ 2 - x, & x \in (1,2] \end{cases}$$

(a) Grafique f. **(1 punto)**

(b) Grafique $g(x) = 3f(1-2x)$ detallando su razonamiento. **(2 puntos)**