Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2016

MAT 1620 – Cálculo II

Solución Interrogación 2

1. Considere las rectas

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1} \\ L_2 &: \quad x-2 = 6-y = \frac{z+2}{3} \end{aligned}$$

Determine si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, oblicuas o se cortan. Si se intersectan, determine el punto de intersección.

Solución. Los vectores paralelos a las rectas son $(2, 2, -1)$ y $(1, -1, 3)$ los cuales no son paralelos ya que uno no es un múltiplo del otro. Las ecuaciones paramétricas de las rectas son

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad x = 2 + 2t, \;\; y = 3 + 2t, \;\; z = 2 - t \\ L_2 &: \quad x = 2 + s, \;\; y = 6 - s, \;\; z = -2 + 3s\,. \end{aligned}$$

Si las rectas se intersectan deben satisfacer las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl|} 2+2t &=& 2+s \\ 3+2t &=& 6-s \\ 2-t &=& -2+3s \\ \hline \end{array}$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones se obtiene $t = \dfrac{3}{4}$, $s = \dfrac{3}{2}$ y estos valores no satisfacen la tercera ecuación. Entonces las rectas no se intersectan y por lo tanto son oblicuas.

2. Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^4+4y^2}$. *b*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$.

Solución.

a) Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2ye^y}{x^4+4y^2}$. Si $y=0$, entonces $f(x,0)=0$. Por lo tanto, $f(x,y)\to 0$ cuando $(x,y)\to(0,0)$ por el eje X. Ahora bien, usando la curva $y=x^2$ se tiene

$$f(x,x^2) = \frac{x^2x^2e^{x^2}}{x^2+4(x^2)^2} = \frac{x^4e^{x^2}}{5x^4} = \frac{e^{x^2}}{5}$$

para $x\neq 0$, luego $f(x,y)\to\frac{1}{5}$ cuando $(x,y)\to(0,0)$ a lo largo de la parábola $y=x^2$. Se sigue que el límite no existe.

b) Factorizando el numerador, obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-y^2) = 0\,.$$

3. Hallar las ecuaciones de los planos tangentes a la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ que sean paralelos al plano $x + 4y + 6z = 0$.

Solución. El elipsoide es una superficie de nivel de la función $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, luego un vector normal a la superficie en (x_0, y_0, z_0) es $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 4y_0, 6z_0)$. Un vector normal al plano $x + 4y + 6z = 0$ es $(1, 4, 6)$. Para que dos planos sean paralelos, es necesario que sus vectores normales lo sean, es decir

$$(2x_0, 4y_0, 6z_0) = k(1, 4, 6) \Longrightarrow x_0 = \frac{k}{2},\ \ y_0 = k,\ \ z = k\ .$$

Como $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 21 \Longrightarrow \dfrac{k^2}{4} + 2k^2 + 3k^2 = 21 \Longrightarrow \dfrac{21}{4}k^2 = 21 \Longrightarrow k = \pm 2$.
Por lo tanto, tenemos los puntos $(x_0, y_0, z_0) = (\pm 1, \pm 2, \pm 2)$ en donde los planos tangentes al elipsoide son paralelos al plano dado y las ecuaciones de los planos tangentes son

$$\begin{aligned} T_1 &: \quad 2(x-1) + 8(y-2) + 12(z-2) = 0 \Longleftrightarrow x + 4y + 6z = 21 \\ T_2 &: \quad -2(x+1) - 8(y+2) - 12(z+2) = 0 \Longleftrightarrow x + 4y + 6z = -21 \end{aligned}$$

4. Sea f una función diferenciable tal que sus derivadas direccionales en el punto $(1,2)$ en las direcciones de los vectores $(1,1)$ y $(1,-3)$ son $\sqrt{2}$ y $\sqrt{10}$, respectivamente. Hallar el valor de las derivadas parciales $f_x(1,2)$ y $f_y(1,2)$.

Solución. Sean $u=(1,1)$ y $v=(1,-3)$ y sus vectores unitarios

$$\hat{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{y} \quad \hat{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}}\right).$$

Tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcl} D_uf(1,2) &=& \sqrt{2} \\ D_vf(1,2) &=& \sqrt{10} \end{array}\right\rfloor \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \nabla f(1,2)\cdot\hat{u} &=& \sqrt{2} \\ \nabla f(1,2)\cdot\hat{v} &=& \sqrt{10} \end{array}\right\rfloor \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} f_x(1,2)+f_y(1,2) &=& 2 \\ f_x(1,2)-3f_y(1,2) &=& 10 \end{array}\right\rfloor$$

Resolviendo este último sistema se obtiene que $f_x(1,2)=4$ y $f_y(1,2)=-2$.

5. Si $z = f(x, y)$, donde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r \partial s}$.

Solución. Usando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}2s + \frac{\partial z}{\partial y}2r\ .$$

Entonces, aplicando la regla del producto y la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial s} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}2s\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}2r\right) \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r}2s + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r}2s + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}(2s) \\
&\quad + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}2r + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r}2r + \frac{\partial z}{\partial y}2 \\
&= 4rs\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}4s^2 + 4rs\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}4r^2 + 2\frac{\partial z}{\partial y} \\
&= 4rs\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4rs\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (4r^2 + 4s^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial z}{\partial y}\ .
\end{aligned}$$

6. Si $\cos(xyz) = 1 + x^2y^2 + z^2$, encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución. Derivando la ecuación implícitamente con respecto a x obtenemos

$$-\operatorname{sen}(xyz)y\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2xy^2 + 2z\frac{\partial z}{\partial x}$$

Despejando $\partial z/\partial x$ resulta

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy^2 + yz\operatorname{sen}(xyz)}{2z + xy\operatorname{sen}(xyz)}\,.$$

Similarmente, derivando la ecuación implicitamente con respecto a y y despejando se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yx^2 + xz\operatorname{sen}(xyz)}{2z + xy\operatorname{sen}(xyz)}\,.$$

7. Encuentre y clasifique los puntos críticos de $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Solución. Las derivadas parciales de primer orden son

$$f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15 \qquad f_y = 6xy - 12\,.$$

Al igualar a estas derivadas parciales a 0, se obtienen las ecuaciones

$$x^2 + y^2 - 5 = 0 \quad \text{y} \quad xy - 2 = 0\,.$$

Para resolver estas ecuaciones, sustituya $y = 2/x$ de la segunda ecuación en la primera y se obtiene

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \Longleftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Longleftrightarrow (x^2-4)(x^2-1) = 0 \Longleftrightarrow (x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0.$$

de modo que hay cuatro raíces reales: $x = 2, -2, 1, -1$. Luego f tiene cuatro puntos críticos $(2,1)$, $(-2,-1)$, $(1,2)$ y $(-1,-2)$. Tenemos que $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 6y$, $f_{yy} = 6x$, entonces

$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 36x^2 - 36y^2\,.$$

a) $D(2,1) = 108 > 0$ y $f_{xx}(2,1) = 12 > 0$ entonces $f(2,1) = -28$ es un mínimo relativo.

b) $D(-2,-1) = 108 > 0$ y $f_{xx}(-2,-1) = -12 < 0$ entonces $f(-2,-1) = 28$ es un máximo relativo.

c) $D(1,2) = -108 < 0$ entonces $f(1,2) = -26$ es un punto silla.

d) $D(-1,-2) = -108 < 0$ entonces $f(-1,-2) = 26$ es un punto silla.

8. La intersección del plano $x + y + 2z = 2$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$ forma una elipse. Encuentre los puntos de la elipse que son los más cercanos y los más lejanos al origen.

Solución. Definimos las función $g(x, y, z) = x + y + 2z$ y la función $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$. Buscaremos los extremos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a las restricciones $g(x, y, z) = 2$ y $h(x, y, z) = 0$. Usando el método de multiplicadores de Lagrange basta determinar las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y,z) & = & \lambda_1 \nabla g(x,y,z) + \lambda_2 \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) & = & 2 \\ h(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} 2x & = & 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 2y & = & 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2z & = & -\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{array}\right|$$

Restando las dos primeras ecuaciones obtenemos

$$2x - 2y = 2\lambda_1 x - 2\lambda_1 y \Longleftrightarrow x - y = \lambda_1(x - y) \Longleftrightarrow (x - y)(\lambda_1 - 1) = 0$$

Si $\lambda_1 = 1$ entonces de la primera ecuación se obtiene

$$2x = 2\underbrace{\lambda_1}_{1} x + \lambda_2 \Longleftrightarrow 2x = 2x + \lambda_2 \Longleftrightarrow \lambda_2 = 0$$

y de la tercera ecuación obtenemos que

$$2z = -\underbrace{\lambda_1}_{1} + 2\underbrace{\lambda_2}_{0} \Longleftrightarrow 2z = -1 \Longleftrightarrow \boxed{z = -\frac{1}{2}}$$

y sustituyendo este valor en la segunda restricción resulta

$$h(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - z = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = -\frac{1}{2}$$

lo cual es absurdo.
Luego, necesariamente se tiene que $\boxed{x = y}$. Sustituyendo esta relación en la segunda restricción obtenemos

$$h(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - z = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - z = 0 \Longleftrightarrow \boxed{z = 2x^2}$$

Por último, usando estas dos últimas relaciones en la primera restricción obtenemos

$$g(x, y, z) = 2 \Longleftrightarrow x + y + 2z = 2 \Longleftrightarrow x + x + 2(2x^2) = 2 \Longleftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática obtenemos que las soluciones son $x = \dfrac{1}{2}$ o $x = -1$ y como $x = y$ y $z = 2x^2$ obtenemos que $y = \dfrac{1}{2}$ o $y = -1$ y $z = \frac{1}{2}$ o $z = 2$. Por lo tanto, los puntos máximos y mínimos son:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad (-1, -1, 2)\,.$$