PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Examen MAT1203 - Algebra Lineal
Noviembre, 2017

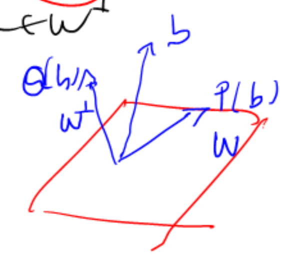
PROBLEMAS CUADERNILLO 1

1. Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \quad 2x + y - z = 0 \right\}$. Determine $W^\perp$ y luego determine los vectores $u \in W$ y $v \in W^\perp$ tal que $(1 \;\; 1 \;\; 1)^T = u + v$

Solución:

- $W = Nul(A)$ donde $A = (2 \;\; 1 \; -1)$ es matriz de 1×3 1pto
- Puesto que $(Nul(A))^\perp = fil(A)$ tenemos que $W^\perp = Fil(A) = \langle (2 \;\; 1 \; -1)^T \rangle$ 1pto

Para expresar $(1 \;\; 1 \;\; 1)^T = u + v$, $u \in W$, $v \in W^\perp$



Alternativa 1:

- La proyección de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $W^\perp$ es

$$Q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ 1.5 pts.

La proyección de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en W es

$$P\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$ (1.5 pts)

Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}}_{\in W} + \underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}}_{\in W^\perp}$$ 2pto

2. *a*) [**3 pts.**] ¿Cuál es la proyeccíón de $2b$ en $Gen\{b\}$?. Justifique.

b) [**3 pts.**] ¿Cual es la proyección de la primera fila de A en $Nul(A)$?, Justifique.

a) Puesto que en general $P_W(\vec{x}) = \vec{x}$ para $\vec{x} \in W$ (1 pto)

y $2b \in Gen\{b\}$, tenemos que $P_W(2b) = 2b$ [1.0 pto]

(1 pto)

b) Puesto que $P_W(\vec{x}) = \vec{0}$ para $\vec{x} \in W^{\perp}$ [1 pto]

y $Nul(A) = (Fil(A))^{\perp}$, tenemos que $P_W(\text{Fila } 1) = \vec{0}$ [1. pto]

(1 pto)

3. *a*) [**3 pts.**] Determine la solución de mínimos cuadrados del sistema inconsistente $Ax = b$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) [**3 pts.**] Determine la recta $y = mx + n$ de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los datos $(-1, -3)$, $(1, -1)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$

a) $A^TA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (1 pto por método)

$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix}$ (1 pto)

$A^TA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^T\vec{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 11 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $x = 2$, $y = 1$ (1 pto)

La solución de mínimos cuadrados de $A\vec{x} = \vec{b}$ es $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) La recta $y = mx + n$ de mínimos cuadrados es la solución de mínimos cuadrados del sistema $y_i = mx_i + n$ $i = 1, \dots, 4$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{b}$$ (1 pto por método)

$A^TA = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $A^Tb = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ (1 pto)

$A^TA\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = A^Tb \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $m = 1$, $n = -2$

La recta de mínimos cuadrados es $y = x - 2$ (1 pto)

PROBLEMAS CUADERNILLO 2

4. Considere la forma cuadrática $Q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$

   a) [**4 pts.**] Determine un cambio de variable ortogonal $x = Py$ tal que $Q(x) = y^T D\, y$, donde D es matriz diagonal y clasifique la forma cuadrática.

   b) [**2 pts.**] Determine la forma espectral de la matriz de la forma quadrática $Q(x)$.

a) $Qx = x^T A x$ donde $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $A^T = A$. (0.5 pts)

El polinomio característico de A es

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda(-\lambda^2 + 7\lambda - 10) = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-5)$$

Por lo tanto los valores propios de A son $0, 2, 5$. (1 pts)

Pues sus valores propios son mayores o iguales a cero la matriz A es semipositiva definida (0.5 pts)

Vectores propios unitarios

$\lambda_1 = 0$ $\quad Nul(A - 0I) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \therefore v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (0.4 pts)

$\lambda_2 = 2$ $\quad Nul(A - 2I) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \therefore v_2 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ (0.4 pts)

$\lambda_3 = 5$ $\quad Nul(A - 5I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \therefore v_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ (0.4 pts)

Una posibilidad para las matrices P, D es

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(0.6 pts) (0.4 pts)

Otras posibilidades se obtienen al intercambiar de orden las columnas de P, D.

La descomposición espectral de A es

$$A = \cancel{\lambda_1}^{\,2} \overset{0}{v_1} v_1^T + \lambda_2 \, v_2 v_2^T + \lambda_3 \, v_3 \, v_3^T$$ 1 pto.

$$= 2 \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right)$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 4/6 & -2/6 & -2/6 \\ -2/6 & 1/6 & 1/6 \\ -2/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$ 1 pto.

5. *a*) [**3 pts.**] Determine los valores singulares de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) [**3 pts.**] Sea $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$. Escriba A en la forma $A = LDL^T$. ¿Para qué valores de α la matriz A es positiva definida?

$\alpha \neq 0$.

a) Los valores singulares de A son las raíces cuadradas de los valores propios de A^TA: 1 pto (por método)

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de A^TA son $2, 3$ 1 pto (por cálculo)

$\therefore$ Los valores singulares de A son $\sqrt{2}, \sqrt{3}$. 1 pto. (por cálculo)

b) Si $\alpha \neq 0$ podemos encontrar la factorización $A = LDL^T$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - \frac{F_1}{\alpha}]{F_2 - \frac{F_1}{\alpha}} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & \frac{\alpha^2-1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

$1 - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha}$; $\alpha - \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha^2-1}{\alpha}$

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & \frac{\alpha-1}{\alpha} \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\alpha^2-1}{\alpha} - \frac{\alpha-1}{\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha}(\alpha+1-1) = \alpha-1$$

$\therefore A = LDL^T$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 1 pto. $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{bmatrix}$ 1 pto.

La matriz A es positiva definida cuando la diagonal de D es positiva: $\alpha > 0$, $\frac{\alpha-1}{\alpha} > 0$, $\alpha - 1 > 0$ $\therefore$ $\alpha > 1$ 1 pto.

6. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justicación adecuada no tiene puntos):

   a) [**2 pts.**] Si z es ortogonal a u_1 y a u_2, y si W =Gen$\{u_1, u_2\}$, entonces z debe estar en $W^{\perp}$

   b) [**2 pts.**] Si una matriz U de $n \times p$, tiene columnas ortonormales, entonces $UU^T x = x$ para toda x en $\mathbb{R}^n$.

   c) [**2 pts.**] Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, entonces el conjunto del los vectores x en $\mathbb{R}^2$ tales que $x^T Ax = 1$ es una elipse.

a) Verdadero: $z \cdot u_1 = 0$, $z \cdot u_2 = 0 \Rightarrow z \cdot (\alpha u_1 + \beta u_2)$

$= \alpha \, z \cdot u_1 + \beta \, z \cdot u_2$

$= 0$

$\therefore$ $z \perp$ Gen$\{u_1, u_2\}$ 2pts

b) Falso $U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow UU^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y

$UU^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(x+y) \\ \frac{1}{2}(x+y) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 2pts

c) Verdadero

$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$

Con la sustitución $x = Py$, P matriz de vectores propios ortonormales de A, se tiene

$x^T A x = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = y_1^2 + 9 y_2^2 = 1$

$\therefore$ $x^T A x = 1$ es una elipse con semiejes de longitudes 1, $\frac{1}{3}$ con ejes en la dirección de los vectores propios.

2pts