Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
09/Abril/2014

MAT 1610 - Cálculo 1.
Interrogación 1

1. Calcule

   a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-x-2)}{x+1}$

   Solución:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-x-2)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}\Big((x-2)(x+1)\Big)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{\operatorname{sen}\Big((x-2)(x+1)\Big)}{(x+1)(x-2)} \cdot (x-2)$$

$$= \lim_{\substack{x\to -1\\ x+1\to 0}} \frac{\operatorname{sen}\Big((x-2)(x+1)\Big)}{(x+1)(x-2)} \cdot (x-2) = 1 \cdot -3 = -3$$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/3}+1}{x^{5/3}+x\,\cos^2(x)}$

   Solución:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/3}+1}{x^{5/3}+x\,\cos^2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^{5/3}}}{1+\dfrac{\cos^2(x)}{x^{2/3}}}$$

   Como $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\cos^2(x)}{x^{2/3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{2/3}} \cos^2(x) = 0$, pues corresponde al límite de una función acotada por otra que tiende a cero. Luego:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{5/3}+1}{x^{5/3}+x\,\cos^2(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\dfrac{1}{x^{5/3}}}{1+\dfrac{\cos^2(x)}{x^{2/3}}} = \frac{1+0}{1+0} = 1$$

2. *a*) Considere

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - [x]} + x & , \text{ si } \quad x > 1 \\ \\ x - [x] & , \text{ si } \quad x < 1 \end{cases}$$

¿es posible definirla en $x = 1$, de modo que sea continua en dicho punto?

Solución:

Para poder definir f en $x = 1$, es necesario que exista $\lim_{x\to 1} f(x)$. Ahora:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x - [x]} + x = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x - 1} + x = 1$$

y

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x - [x] = \lim_{x\to 1^-} x - 0 = 1$$

Como:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \Longrightarrow \text{ existe } \lim_{x\to 1} f(x)$$

Luego es posible definir f en $x = 1$, para que sea continua ahí. En particular $f(1) = 1$

b) Demuestre que las curvas definidas por $f(x) = 10x^3 - x^2 + 5x - 11$ y $g(x) = 2x^3 + 9x^2 + 10$, se intersectan en algún punto $x_0 > 0$

Solución:

Consideremos la función

$$h(x) = f(x) - g(x) = 8x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

h es continua en $\mathbb{R}$, pues es un polinomio, por lo tanto, en particular es continua en $[0\,,\,1]$ (u otro intervalo de la forma $[0\,,\,a]$ con $a \geq 1$), por otra parte:

$$h(0) = -1 < 0 \quad \text{y} \quad h(1) = 2 > 0$$

Por lo tanto por el Teorema del Valor Intermedio (o el Teorema de Bolzano) existe $x_0 \in (0\,,\,1)$ tal que $h(x_0) = 0$, así

$$h(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Longrightarrow f(x_0) = g(x_0)$$

De donde se obtiene que existe un punto intersección $x_0 > 0$, de f y g.

3. *a*) Sea f una función tal que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}.$$

Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

b) Sea $f(x) = \operatorname{sen}(x)(x^4 + \operatorname{cotg}(x))$. Determine $f'(x)$

Solución:

a) En este caso tenemos que,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10e^x - 21}{2e^x} < \lim_{x\to\infty} f(x) < \lim_{x\to\infty} \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}.$$

En el límite de la izquierda,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10e^x - 21}{2e^x} = \lim_{x\to\infty} 5 - \frac{21}{e^x} = 5,$$

Por otro lado en el límite de la derecha,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = 5.$$

Se conclue por el Teorema del Sandwich, que el límite pedido es 5.

b) Haciendo uso de las reglas de derivación, tenemos que

$$f'(x) = \cos(x)(x^4 + \operatorname{cotg}(x)) + \operatorname{sen}(x)(4x^3 - \operatorname{cosec}^2(x)).$$

4. *a*) Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b). Sea $x_0 \in (a, b)$ fijo. Se define

$$g(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

Calcule $\lim_{h\to 0} g(h)$

b) Dada la curva $\mathcal{C}$ de ecuación:

$$\mathcal{C} : y = f(x) = -x^2 + 2x - 4$$

i) Determine la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en un punto $x = x_0$

ii) Determine $x_0 \in \mathbb{R}$ de modo que la recta tangente pase por el origen.

Solución:

a) Notemos que el límite pedido lo podemos escribir como:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} &= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \qquad (\star) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \\
&= \frac{f'(x_0)}{2} + \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \\
&= f'(x_0).
\end{aligned}$$

OBS: Los alumnos deben mencionar que los límites en $(\star)$ existen dado que la función es derivable en x_0.

b) Para determinar la ecuación de la recta tangente calculamos, en primer lugar, la pendiente en $(x_0, f(x_0))$,

$$f'(x_0) = -2x_0 + 2.$$

De donde la ecuación de la recta tangente será,

$$y - f(x_0) = (-2x_0 + 2)(x - x_0)$$

o bien

$$y = x(-2x_0 + 2) + 2x_0^2 - 2x_0 + f(x_0).$$

Finalmente si deseamos que la recta tangente pase por el origen, el coeficiente libre debe ser igual a cero, en este caso

$$2x_0^2 - 2x_0 + f(x_0) = 0, \quad \text{de donde}\, x_0 = \pm 2$$

Tiempo: 120 minutos
Sin Consultas.