PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2023

Ayudantía 10 - MAT1610

1. Considere la función $y = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ y determine, si existen: valores críticos, intervalos donde es creciente, intervalos donde es decreciente, mínimos locales, máximos locales, intervalos donde es cóncava hacia arriba, intervalos donde es cóncava hacia abajo, puntos de inflexión, asíntotas. A partir de la información obtenida, grafique la curva asociada.
Dominio: $\mathbb{R}$
Solución:
Derivada: (el cálculo se muestra al final de l ejercicio)

$$f'(x) = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}$$

Valores críticos:
Valores donde $f'(x) = 0$: $x = 4$
Valores del dominio donde $f'(x)$ no existe: $x = 0$ y $x = 6$.

Estudio signo de la derivada
$(6-x)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{6-x}\right)^2 \geq 0$, no define signo de $f'(x)$.
$x^{\frac{1}{3}}$ tiene el mismo signo de x.

Intervalo	$x^{\frac{1}{3}}$	$4-x$	f'	f
$(-\infty, 0)$	-	$+$	-	decreciente
$(0, 4)$	$+$	$+$	$+$	creciente
$(4, 6)$	$+$	-	-	decreciente
$(6, \infty)$	$+$	-	-	decreciente

Intervalos donde f es creciente: $(0, 4)$
Intervalos donde f es decreciente: $(-\infty, 0)$, $(4, 6)$ y $(6, \infty)$
$f(0) = 0$ es un mínimo local de f.
$f(4) = 2\sqrt[3]{4}$ es un máximo local de f.
Nota: En $x = 6$, no hay cambio de monotonía, no se alcanza valor extremo. (En $(6, 0)$ la recta tangente es vertical)

Estudio signo de la segunda derivada
$f''(x) = \dfrac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$ (el cálculo se muestra al final de l ejercicio)
$x^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^4 \geq 0$, no define signo de $f'(x)$.

$(6-x)^{\frac{5}{3}}$ tiene el mismo signo de $6-x$.

Intervalo	-8	$(6-x)^{\frac{5}{3}}$	f''	f
$(-\infty, 0)$	-	$+$	-	cóncava hacia abajo
$(0, 4)$	-	$+$	-	cóncava hacia abajo
$(4, 6)$	-	$+$	-	cóncava hacia abajo
$(6, \infty)$	-	-	$+$	cóncava hacia arriba

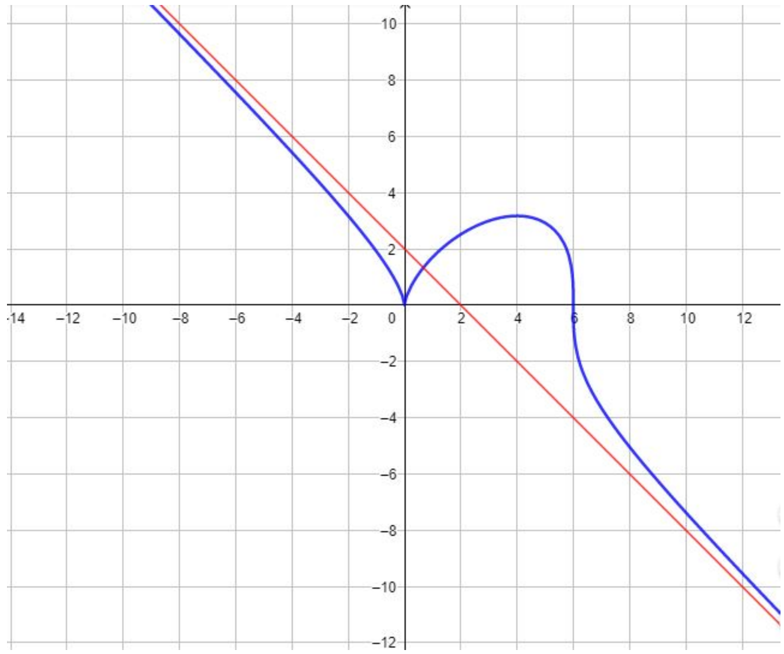
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $(6, \infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ y $(4, 6)$
Punto inflexión: $(6, 0)$

Asíntotas:
Vertical: No tiene
Horizontal: No tiene, ya que
$\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to\infty} x^2(6-x)} = -\infty$ (no finito)
$\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to-\infty} x^2(6-x)} = \infty$ (no finito)
Oblicua: $y = mx + b$
$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2(6-x)}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{6x^2-x^3}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6}{x} - 1} = -1$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to\infty} f(x) - mx \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} - (-1)x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2(6-x) + x^3)}{\left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)^2 - x\sqrt[3]{x^2(6-x)} + x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{\left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)^2 - x\sqrt[3]{x^2(6-x)} + x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\frac{\sqrt[3]{36x^4-12x^5+x^6}}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{x} + 1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{\frac{36}{x^2} - \frac{12}{x} + 1} - \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} + 1} \\
&= \frac{6}{1-(-1)+1} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Ecuación: $y = -x + 2$
Nota: La asíntota oblicua hacia $-\infty$ tambi[en es la recta $y = -x + 2$ (dejar de ejercicio a los estudiantes)

Cálculo primera derivada



$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)' \\
&= \frac{1}{3}\left(x^2(6-x)\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2(6-x)\right)' \\
&= \frac{2x(6-x)-x^2}{3\left(x^2(6-x)\right)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{x(4-x)}{\left(x^2(6-x)\right)^{\frac{2}{3}}} \\
&= \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}
\end{aligned}
$$

Cálculo Segunda derivada:

Sea $w = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}$

Entonces,

$\ln(w) = \ln(4-x) - \frac{1}{3}\ln(x) - \frac{2}{3}\ln(6-x)$

Así

$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{4-x} - \frac{1}{3x} + \frac{2}{3(6-x)} = \frac{-3x(6-x)-(4-x)(6-x)+2x(4-x)}{3x(4-x)(6-x)} = \frac{-3x(6-x)+3(4-x)(x-2)}{3x(4-x)(6-x)}$

es decir,

$\frac{w'}{w} = \frac{-x(6-x)-(4-x)(x-2)}{x(4-x)(6-x)} = \frac{-8}{x(4-x)(6-x)}$

o

$w' = w\left(\frac{-8}{x(4-x)(6-x)}\right) = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}\frac{-8}{x(4-x)(6-x)} = \frac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$

2. Considere al señor Fantasmita, un fantasma cuya función de felicidad depende de la masa de dulces que roba en la noche de Halloween. Se define la función de felicidad como:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

donde x es la masa de dulces que consigue.
¿Qué masa de dulces debe conseguir para que su felicidad sea máxima? ¿Qué ocurre con la función f cuando la masa de dulces tiende a cero? ¿Qué ocurre con la función f cuando la masa de dulces tiende a infinito?
Solución:
Al tener logaritmo natural y al estar dividida por x^2 el dominio son los reales mayores que 0.

Asíntotas:
Al no estar definida en $x = 0$, conviene analizar el comportamiento de la función cerca de ese punto.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty \tag{1}$$

Luego hacemos el análisis de $f(x)$ al infinito:
Notamos que es una forma indeterminada del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por lo que podemos utilizar la regla de L'Hopital y así:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{d}{dx} \ln x}{\frac{d}{dx} x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \tag{2}$$

Entonces la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y una horizontal en $y = 0$.
Entonces, cuando la masa de dulces tiende a cero la función f tiende a $-\infty$ y cuando la masa de dulces tiende a infinito la función f tiende a 0.

Máximos / mínimos
Primero debemos calcular $f'(x)$ y encontrar donde es creciente y donde es decreciente.

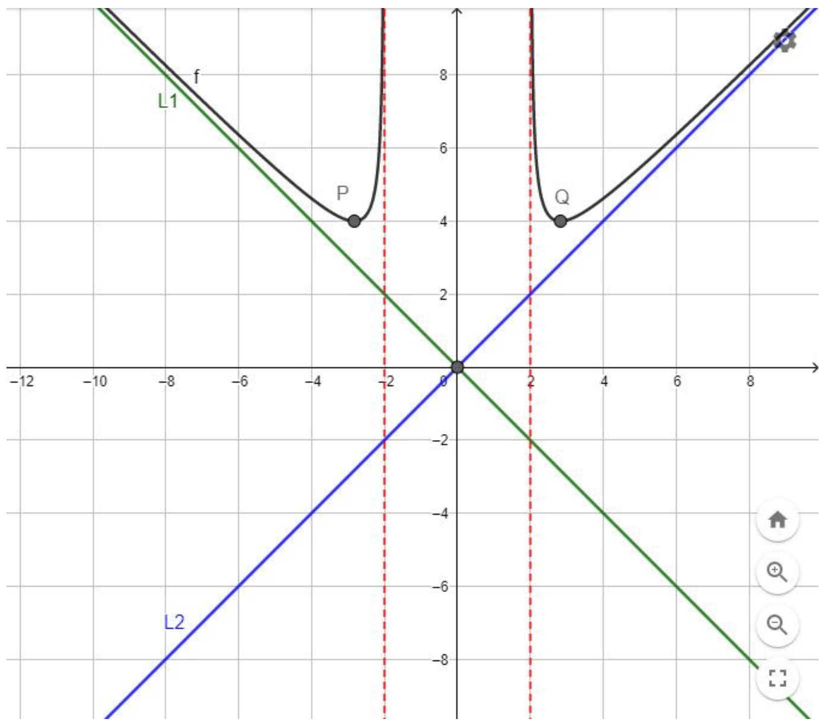
$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{\frac{1}{x} x^2 - \ln x * 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} \tag{3}$$

Conviene analizar los puntos donde la derivada sea 0, por lo que llegamos a:
$1 - 2\ln x = 0 \to x = \sqrt{e}$
Entonces, hay que analizar la derivada de la función el comportamiento de la función en los intervalos $(0, \sqrt{e})$ y $(\sqrt{e}, \infty)$.
En $x = 1 \to f'(1) > 0$ y en $x = e \to f'(e) < 0$ Finalmente, al ser continua y no haber más puntos donde cambia el signo de $f'(x)$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento son:
crecimiento $\to (0, \sqrt{e})$
decrecimiento $\to (\sqrt{e}, \infty)$

El único punto crítico es $x = \sqrt{e}$ y como $f'(x) > 0$ con $x < \sqrt{e}$ y $f'(x) < 0$ con $x > \sqrt{e}$, $x = \sqrt{e}$ es un máximo local. Finalmente, la máxima felicidad, como calculamos antes, se obtiene cuando el fantasma roba $\sqrt{e}$ en masa de dulces. Y en ese punto su felicidad es de $\frac{1}{2e}$

3. Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, cuya gráfica se muestra en la figura. En base al gráfico, la función es simétrica respecto al eje y, tiene valor del mínimo 4 y como asíntotas las rectas mostradas. Muestre que la información indicada es verdadera y exhiba las coordenadas de los puntos P y Q. Se tiene que $f'(x) = \frac{x^3-8x}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$.

Solución:



Dominio de f: $(\infty, -2) \bigcup (2, \infty)$.
Simétrica respecto al eje y:
Se tiene que $f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)^2-4}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = f(x)$, es decir, f es una función par.

Mínimo:
Dado que $f'(x) = \frac{x^3-8x}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x(x^2-8)}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$, se tiene que:
Valores donde $f'(x) = 0$: $x = \pm 2\sqrt{2}$
Valores del dominio donde $f'(x)$ no existe: No hay

Se estudia el signo de la derivada solo en $(2, \infty)$ y luego se usa que f es par.

Si $x > 2$, entonces $x > 0$, $(x^2-4)^{\frac{3}{2}} > 0$ y el signo de f' lo define el signo de $x^2 - 8$. Así,
Si $2 < x < 2\sqrt{2}$, $f'(x) < 0$ y si $x > 2\sqrt{2}$ entonces $f'(x) > 0$ por lo que, en $x = 2\sqrt{2}$ se alcanza el mínimo $f\left(2\sqrt{2}\right) = 4$. $P(2\sqrt{2}, 4)$ y, como f es par, se tiene que $Q(-2\sqrt{2}, 4)$.

Asíntotas:
Oblicuas:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = 1$$

$$
\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to\infty} f(x) - mx \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} - x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \left(x - \sqrt{x^2-4}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x+\sqrt{x^2-4}} \\
&= 1 \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Así, $y = x + 0 = x$ (L1) y por la simetría respecto a al eje y, para L2 se tiene que $y = -x$

Verticales: $y = -2$ e $y = 2$
$\lim\limits_{x\to -2^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = \infty$