

# Apunte Modelos Probabilísticos EYP1025/EYP1027

Daniel Gálvez - [daniel.glvez@uc.cl](mailto:daniel.glvez@uc.cl)

# Contents

<b>1</b>	<b>Modelos de probabilidad</b>	<b>3</b>
1.1	Conjuntos . . . . .	3
1.1.1	Ejemplos . . . . .	4
1.2	Espacio de probabilidad . . . . .	11
1.2.1	Ejemplos . . . . .	12
1.3	Probabilidades . . . . .	21
1.3.1	Ejemplos . . . . .	23
1.4	Conteo . . . . .	33
1.4.1	Ejemplos . . . . .	35
1.5	Ejercicios del capítulo . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Variables aleatorias</b>	<b>76</b>
2.1	Definiciones . . . . .	76
2.2	Propiedades . . . . .	80
2.3	Ejercicios del capítulo . . . . .	83
<b>3</b>	<b>Distribuciones</b>	<b>111</b>
3.1	Distribuciones discretas . . . . .	112
3.1.1	Ejemplos . . . . .	114
3.2	Distribuciones continuas . . . . .	116
3.3	Reconocer distribuciones . . . . .	121
3.4	Transformación de una v.a . . . . .	124
3.4.1	Ejemplos . . . . .	124
3.5	Ejercicios del capítulo . . . . .	130
<b>4</b>	<b>Vectores aleatorios</b>	<b>163</b>
4.1	Definiciones y propiedades . . . . .	163
4.1.1	Ejemplos . . . . .	168
4.2	Aspectos matriciales y distribuciones multivariadas . . . . .	186
4.2.1	Ejemplos . . . . .	188
4.3	Transformación de vectores aleatorios . . . . .	194
4.3.1	Ejemplos . . . . .	194
4.4	Estadísticos de orden . . . . .	211
4.4.1	Ejemplos . . . . .	211
4.5	Distribuciones condicionales . . . . .	222
4.5.1	Ejemplos . . . . .	223
4.6	Ejercicios del capítulo . . . . .	235
<b>5</b>	<b>Teoría Asintótica</b>	<b>284</b>
5.1	Definiciones y propiedades . . . . .	284
5.2	Ejercicios del capítulo . . . . .	287
<b>A</b>	<b>Resultados útiles</b>	<b>316</b>

# Intro

El siguiente apunte esta basado en las clases del profesor Reinaldo Arellano, y como tal contiene la mayoría de los ejercicios propuestos en sus laminas. En esencia, este apunte contiene todo lo necesario para aprobar el curso sin problema, como se menciono, contiene los ejercicios propuestos del profesor, además de los ejercicios mas importantes del libro guía, junto con los de la bibliografía mínima, a fin de otros libros con ejercicios interesantes. La mayoría de estos ejercicios han sido seleccionados con el fin de lograr entender y aplicar las herramientas mas importantes del curso, y las que mas se suelen ocupar en cursos posteriores. El apunte se estructura de la siguiente forma:

- Resumen de conceptos y formulas

En este apartado se presentan los conceptos, teoremas, formulas y herramientas necesarias para poder comprender la materia de forma sencilla, todo esto con el fin de sintetizar todo lo necesario en un solo lugar, para que de esta manera no se pierda tiempo en buscar algo que a veces es difícil de encontrar en libros o internet.

- Ejemplos

Los ejemplos están pensados para comprender como utilizar las herramientas disponibles y como aplicarlas a cierto tipo de ejercicios, en general son ejemplos sencillos para ilustrar los conceptos.

- Ejercicios del capitulo

Contiene ejercicios de todo lo visto en el capitulo, con principal enfoque en lograr aplicar y usar de manera efectiva lo aprendido. En general en este apartado los ejercicios son mas difíciles y variados, todo esto con el fin de lograr aprender los trucos y desarrollos necesarios que el curso provee.

Se menciono que si se estudia de este apunte se puede pasar el curso sin problemas, esto es, siempre y cuando el estudiante se proponga realizar la mayoría de los ejercicios a **conciencia**.

Como es un apunte no oficial del curso, desarrollado por un estudiante, no se debe considerar como apunte guía, libro guía o similar, mas aun, se recomienda encarecidamente que el estudiante asista siempre a clases y preste atención a estas, además de leer y desarrollar los ejemplos del libro guía. Se recomienda que el estudiante realice los ejercicios de este apunte cuando ya haya logrado aprender y comprender todo lo mostrado en clases, para que de esta forma se beneficie de los ejercicios del capitulo, ya que son los mas importantes y desafiantes.

En cuanto a los ejemplos y ejercicios, se debe destacar que contienen la solución de forma inmediata al enunciado, por lo cual debe ser el estudiante el que deba priorizar la reflexión del problema, antes de ir directamente a la solución. Se sugiere que el estudiante se tome el tiempo de desarrollar y reflexionar el ejercicio, y solo cuando ya haya encontrado la respuesta, o lo haya pensado por mucho tiempo, puede ver la solución.

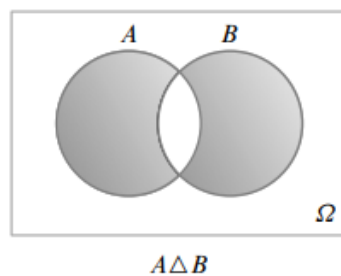
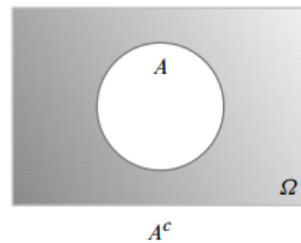
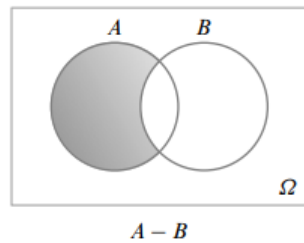
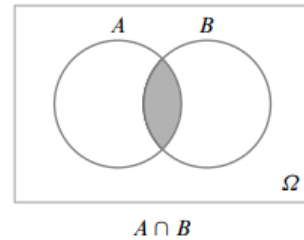
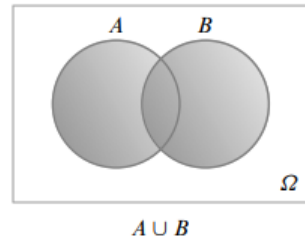
Finalmente destacar que los ejercicios, conceptos y formulas no se suelen enunciar de forma rigurosa, y pueden omitir aspectos mas formales.

Cualquier error o sugerencia favor de enviar un email a [daniel.glvez@uc.cl](mailto:daniel.glvez@uc.cl).

# 1 Modelos de probabilidad

## 1.1 Conjuntos

Los conjuntos en general se puede graficar mediante un diagrama de Venn, lo cual facilita el desarrollo de propiedades y ejercicios. Recordar que  $\Omega$  corresponde al espacio muestral. A continuación se presentan algunas imágenes de los conjuntos básicos



Donde

- $A \cup B$ : es la unión de ambos eventos
- $A \cap B$ : es la intersección de ambos eventos
- $A - B$ : es la diferencia entre  $A$  y  $B$
- $A^c$ : es el complemento
- $A \Delta B$ : es la diferencia simétrica

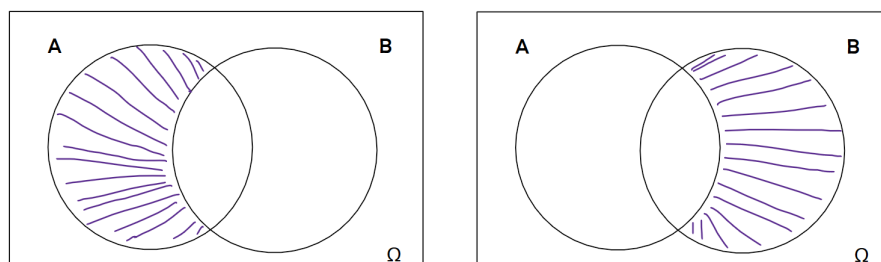
### 1.1.1 Ejemplos

1. Exprese  $A \triangle B$  de dos maneras diferentes en terminos de conjuntos mas simples.

Según la imagen de la pagina anterior esto corresponde a  $A$  y  $B$  sin la intersección de ambos, es decir, nos interesa la unión de ambos conjuntos, sin su intersección.

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

La otra manera es pensando en que nos interesa el conjunto  $A$  sin el  $B$ , mas el conjunto  $B$  sin el  $A$ . Esto se puede ver en la siguiente imagen



Es decir

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

2. Desarrolle las siguientes expresiones

- (a)  $(A \cap B)^c$
- (b)  $(A \cup B)^c$
- (c)  $(A \cup B^c)^c$
- (d)  $(A \cap B^c \cup C^c)^c$

Para esto solo recordamos las leyes de Morgan.

$$\begin{aligned} (A \cap B)^c &= A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c \\ (A \cup B^c)^c &= A^c \cap B \\ (A \cap B^c \cup C^c)^c &= A^c \cup B \cap C \end{aligned}$$

3. Desarrolle las siguientes expresiones

- (a)  $A \cap (B \cup C)$
- (b)  $A \cup (B \cap C)$

Para esto recordamos que aplican las leyes distributivas. Entonces

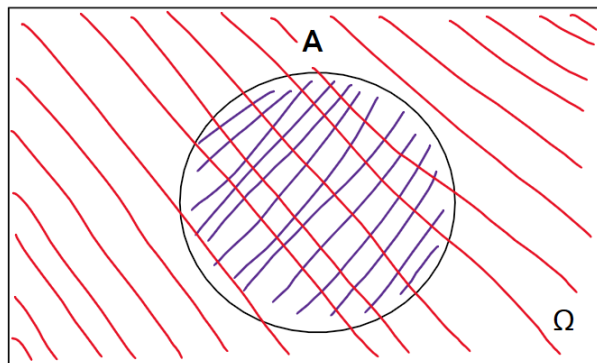
$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

4. Dibuje las siguientes expresiones y descríbalas

- (a)  $A \cap \Omega$
- (b)  $A \cup \Omega$
- (c)  $A \cup A^c$
- (d)  $A \cap A^c$

- $A \cap \Omega$

Corresponde a la intersección entre  $A$  y el espacio muestral. Intuitivamente se puede obtener rápido, pues  $\Omega$  corresponde al todo, y  $A$  corresponde a algo dentro del todo, por lo cual  $A \cap \Omega = A$ . Recordar que la intersección corresponde a donde se “juntan” los eventos, o sus elementos en común. Esto se ve en la siguiente imagen

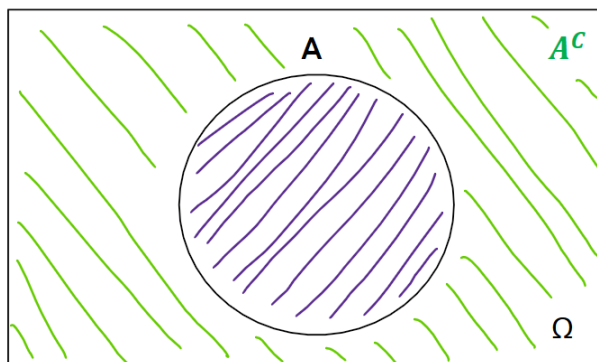


- $A \cup \Omega$

Nuevamente es rápido se obtener, pues es algo dentro del todo, y esta unido con esto, por lo cual es nuevamente el todo. Esto es lo mismo que la imagen anterior, pero nos interesa todo. De modo que  $A \cup \Omega = \Omega$

- $A \cup A^c$

Corresponde a la unión del conjunto  $A$  y su complemento, es decir, el conjunto  $A$ , y todo lo que esta afuera de este. Intuitivamente se puede decir que  $A \cup A^c = \Omega$ . Esto se ve en la siguiente imagen.



- $A \cap A^c$

Corresponde a la intersección entre el conjunto  $A$  y su complemento. Esto corresponde a los elementos que tienen en común ambos conjuntos, pero es fácil notar que  $A \cap A^c = \emptyset$ . Pues ambos no tienen nada en común, pues uno es “el contrario” del otro. En la imagen anterior se ve que ambos colores no se intersectan en ninguna parte.

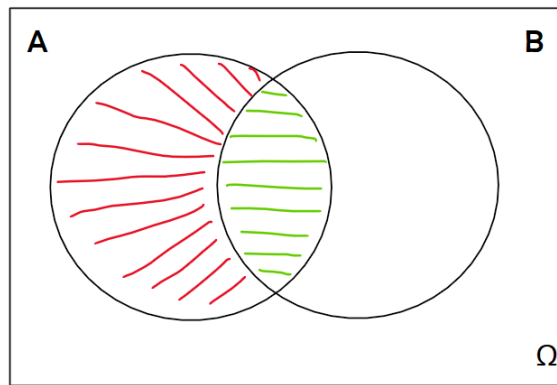
5. Demuestre las siguientes igualdades y dibuje la identidad.

- (a)  $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
- (b)  $A^c - B^c = B - A$
- (c)  $A \cap B^c = A - (A \cap B)$
- (d)  $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$
- (e)  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
- $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$

$$\begin{aligned}
 A &= A \cap \Omega \\
 &= A \cap (B \cup B^c) \\
 &= (A \cap B) \cup (A \cap B^c)
 \end{aligned}$$

A continuación se presenta una imagen de lo anterior. Donde

- ■  $A \cap B$
- ■  $A \cap B^c$



- $A^c - B^c = B - A$

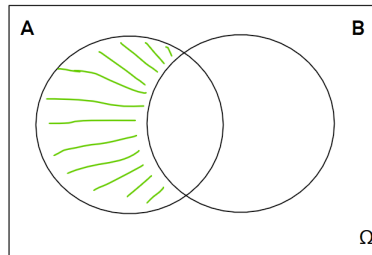
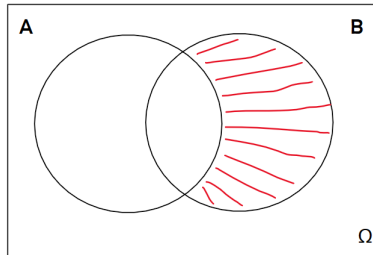
Por definición se tiene  $A - B = A \cap B^c$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 A^c - B^c &= A^c \cap (B^c)^c \\
 &= A^c \cap B \\
 &= B \cap A^c \\
 &= B - A
 \end{aligned}$$

- $A \cap B^c = A - (A \cap B)$

Desarrollamos el lado derecho y usamos la definición igual que antes.

$$\begin{aligned}
 A - (A \cap B) &= A \cap (A \cap B)^c \\
 &= A \cap (A^c \cup B^c) \\
 &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \\
 &= \emptyset \cup (A \cap B^c) \\
 &= A \cap B^c
 \end{aligned}$$



Donde

- ■  $A^c - B^c$
- ■  $A \cap B^c$

- $A \cup B = A \cup (B \cap A^c)$

Desarrollamos el lado derecho

$$\begin{aligned}
 A \cup (B \cap A^c) &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \\
 &= (A \cup B) \cap \Omega \\
 &= (A \cup B)
 \end{aligned}$$

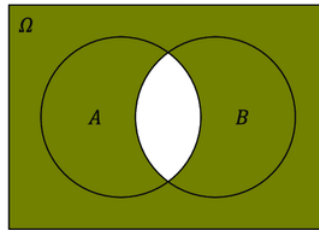
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Desarrollemos el lado izquierdo usando la definición.

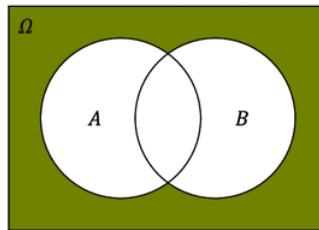
$$\begin{aligned}
 A - (B \cap C) &= A \cap (B \cap C)^c \\
 &= (A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) \\
 &= (A - B) \cup (A - C)
 \end{aligned}$$



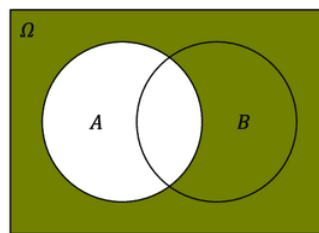
6. Represente cada imagen en terminos de conjuntos



Es todo excepto la intersección entre  $A$  y  $B$ . Corresponde a  $(A \cap B)^c$

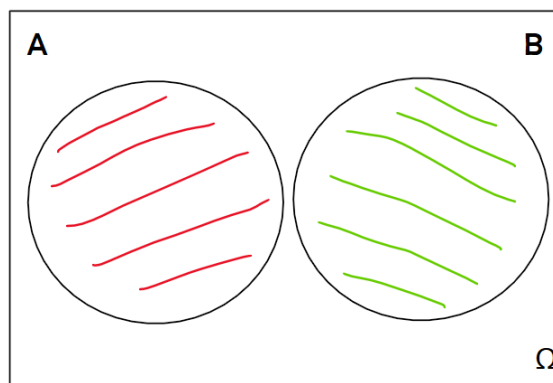


Es todo excepto la unión entre  $A$  y  $B$ . Corresponde a  $(A \cup B)^c$



Es todo excepto  $A$ . Corresponde a  $A^c$

7. ¿Que puede afirmar de la siguiente imagen?



Se puede afirmar que la intersección entre ambos es vacía, pues no comparten nada en común.  
Se tiene que  $A \cap B = \emptyset$

8. Sea  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 4, 5\}$  y  $C = \{1, 5, 6\}$ . Encuentre

- (a)  $A \cap B$
- (b)  $A \cup C$
- (c)  $A \cap B \cap C$
- (d)  $A^c$
- (e)  $A \cup (B \cap C)$
- (f)  $B - A$

En algunos casos se pueden reemplazar los eventos correspondientes para así ver las cosas mas fácil.

- $A \cap B$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{1, 2\} \cap \{2, 4, 5\} \\ &= \{2\} \end{aligned}$$

- $A \cup C$

$$\begin{aligned} A \cup C &= \{1, 2\} \cup \{1, 5, 6\} \\ &= \{1, 2, 5, 6\} \end{aligned}$$

- $A \cap B \cap C$

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= \{1, 2\} \cap \{2, 4, 5\} \cap \{1, 5, 6\} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

- $A^c$

$$\begin{aligned} A^c &= B \cup C \\ &= \{2, 4, 5\} \cup \{1, 5, 6\} \\ &= \{1, 2, 4, 5, 6\} \end{aligned}$$

- $A \cup (B \cap C)$

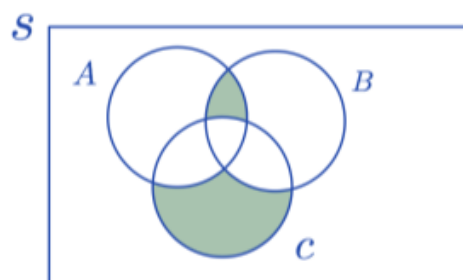
$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= A \cap (\{2, 4, 5\} \cap \{1, 5, 6\}) \\ &= A \cap \{5\} \\ &= \{1, 2\} \cup \{5\} \\ &= \{1, 2, 5\} \end{aligned}$$

9. Sea  $\Omega = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ ,  $A_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$  y  $A_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$ . Determine  $A_1 \cap A_2$  y  $A_1 \cup A_2$ .

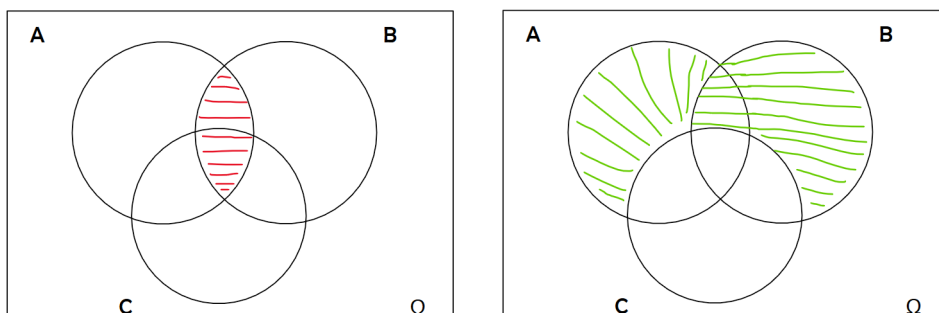
$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\} \cap \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\} \\ &= \{\emptyset, \Omega\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\} \cup \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\} \\ &= \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \Omega\} \end{aligned}$$

10. Represente en terminos de conjuntos la siguiente imagen



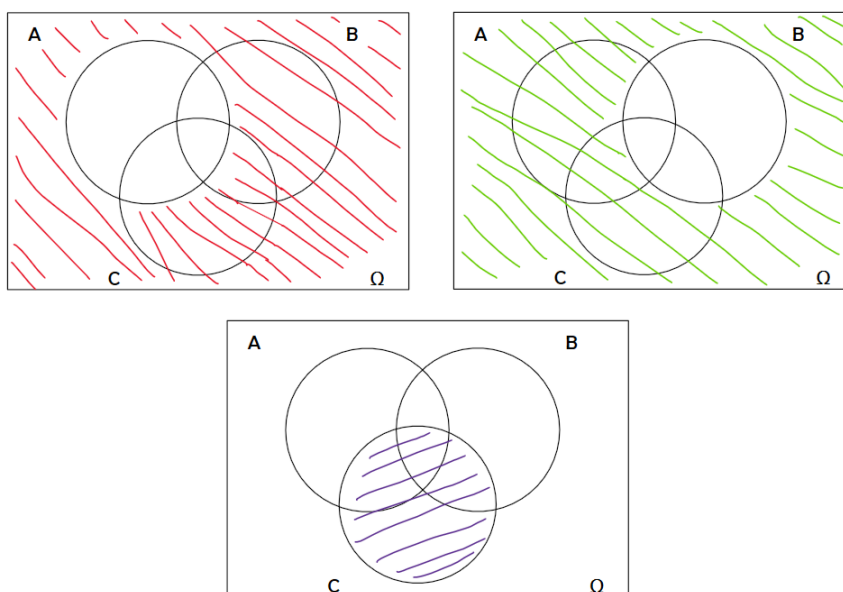
Vayamos por partes. La parte superior corresponde a la intersección entre  $A$ ,  $B$  y  $C^c$ . Esto se ve en las siguientes imágenes



Donde

- ■  $A \cap B$
- ■  $C^c$

Al intersectar ambos resulta la parte superior de interés. Ahora, la parte inferior corresponde a la intersección entre  $A^c$ ,  $B^c$  y  $C$ . Esto se ve en las siguientes imágenes



Se puede apreciar que la parte en común de los tres conjuntos es la parte inferior de interés. Luego, como nos interesa la parte superior e inferior, el evento de interés corresponde a

$$(A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

## 1.2 Espacio de probabilidad

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad

- $\Omega$ : corresponde al espacio muestral, esto es, todos los posibles resultados de nuestro experimento
- $\mathcal{F}$ : corresponde a la sigma-álgebra, esto es una colección de posibles resultados de nuestro experimento, la cual tiene las siguientes propiedades:

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Si  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

- $P$ : corresponde a la medida de probabilidad, esto es, una función que asigna un valor a cada elemento de  $\Omega$ . Esta función tiene las siguientes propiedades denominados Axiomas de Kolmogórov.

1.  $P(\Omega) = 1$
2.  $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$
3. Para una secuencia disjunta de eventos dos a dos ( $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$ ) se tiene:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

A cada elemento de  $\Omega$  lo denotaremos como  $\omega$ . En general no profundizaremos las ideas de sigma álgebra y medida de probabilidad, ya que se necesitan conocimientos sobre teoría de la medida, y el curso no tiene ese enfoque ni requerimientos de esta.

Es útil saber lo siguiente

- Una sigma álgebra comúnmente usada es:

$$\mathcal{F} = \{\text{todos los subconjuntos de } \Omega\} : \mathcal{P}(\Omega) \text{ o } 2^{\Omega}$$

- Se dice que dos eventos  $A$  y  $B$  son excluyentes o disjuntos si

$$A \cap B = \emptyset$$

Básicamente que no tienen elementos en común

- Sea  $\Omega \neq \emptyset$ . Si  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  son  $\sigma$ -álgebras sobre  $\Omega$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$  también es una  $\sigma$ -álgebra sobre  $\Omega$ . Esto nos dice que la intersección de  $\sigma$ -álgebras es una  $\sigma$ -álgebra. En cuanto a la unión de  $\sigma$ -álgebras, hay que verificar las propiedades para concluir.

### 1.2.1 Ejemplos

1. Sea un experimento con  $\Omega = \{1, 2\}$  y  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ . Verificar que  $\mathcal{F}$  es efectivamente una  $\sigma$ -álgebra.

Necesitamos verificar las propiedades.

- $\Omega \in \mathcal{F}$

Es claro que  $\Omega \in \mathcal{F}$ . Corresponde al ultimo elemento.

- Si  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

$A = \emptyset$ , se verifica que  $A^c = \Omega \in \mathcal{F}$

$A = \{1\}$ , se verifica que  $A^c = \{2\} \in \mathcal{F}$

Se verifica la propiedad.

- Si  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Se puede verificar fácilmente. Basta con tomar algún  $A_1 \in \mathcal{F}$  y ver que la unión con cualquier otro elemento también existe en  $\mathcal{F}$ . A modo de ejemplo si se toma  $A_1 = \{2\}$  y  $A_2 = A_3 = \dots = A_{\infty} = \emptyset$  se tiene:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{2\}$$

2. Sea  $\mathcal{F} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$  y  $\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ , donde  $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$  y  $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$  dos  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega = \{1, 2, 3\}$ . ¿Son  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -álgebras de subconjuntos de  $\Omega$ ?

Primero encontremos  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$ .

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\} \cap \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\} = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\} \cup \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \Omega\}$$

Ahora analicemos cada una.  $\mathcal{F}$  es la  $\sigma$ -álgebra trivial

$$\{\emptyset, \Omega\}$$

por lo cual no hace falta demostrar nada. Ahora  $\mathcal{G}$ . Se verifica que  $\Omega \in \mathcal{G}$ . Si  $A = \emptyset$  se tiene  $A^c = \Omega \in \mathcal{G}$ . Si  $A = \{1\}$  se tiene  $A^c = \{2, 3\} \in \mathcal{G}$ . Si  $A = \{3\}$  se tiene  $A^c = \{1, 2\} \in \mathcal{G}$ . Ahora veamos que pasa con las uniones. Tomemos  $A_1 = \{1\}, A_2 = \{3\}$  y  $A_3 = A_4 = \dots = A_{\infty} = \emptyset$ .

Tenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{1, 3\}$$

Pero  $\{1, 3\}$  no se encuentra en  $\mathcal{G}$ . Se tiene que  $\{1, 3\} \notin \mathcal{G}$ .

Se concluye que  $\mathcal{G}$  no es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{F}$  si lo es.

3. Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad. Donde

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, \dots\} \\ \mathcal{F} &= 2^\Omega \\ P(\{k\}) &= \frac{1}{k(k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Un ejemplo de la probabilidad de un evento  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  es:

$$P(\{1, 2, 3, 4\}) = \sum_{k=1}^4 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{4}{5}$$

Demuestre que cada elemento del modelo cumple las respectivas propiedades.

Se puede verificar que corresponde a un espacio de probabilidad, ya que la sigma-álgebra es el conjunto  $\Omega$ , el cual es válido y ya está demostrado en diversos libros que es una sigma-álgebra. Ahora falta verificar la medida de probabilidad. Entonces:

- $P(\Omega) = 1$

Para esto debemos sumar sobre todo el espacio muestral, por lo cual:

$$P(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

Recordar la propiedad telescópica para calcular la serie.

- $P(A) \geq 0$

Es claro que es positiva, pues  $\frac{1}{k(k+1)} > 0, \forall k \geq 1$

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) \\ &= \sum_{k \in A_1 \cup A_2 \cup \dots}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}\end{aligned}$$

Ahora podemos separar la suma mediante la probabilidad de cada evento en particular, de forma tal que

$$\begin{aligned}&= \sum_{k \in A_1 \cup A_2 \cup \dots}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k \in A_1} \frac{k}{k(k+1)} + \sum_{k \in A_2} \frac{k}{k(k+1)} + \dots \\ &= \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

■

4. Sea  $R(A) = \alpha P(A) + (1 - \alpha)Q(A)$ ,  $A \in \mathcal{A}$  donde  $P$  y  $Q$  son medidas de probabilidad en  $(\Omega, \mathcal{A})$  y  $\alpha \in [0, 1]$ . ¿Es  $R(A)$  una medida de probabilidad en  $(\Omega, \mathcal{A})$ ?

Solo necesitamos comprobar los axiomas de Kolmogórov.

- $P(\Omega) = 1$

$$\begin{aligned} R(\Omega) &= \alpha P(\Omega) + (1 - \alpha)Q(\Omega) \\ &= \alpha \cdot 1 + (1 - \alpha) \cdot 1 \\ &= \alpha + 1 - \alpha \\ &= 1 \end{aligned}$$

Notar que  $P(\Omega) = 1$  y  $Q(\Omega) = 1$  ya que por enunciado estas ya son medidas de probabilidad en  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

- $P(A) \geq 0$

$$R(A) = \underbrace{\alpha P(A)}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - \alpha)Q(A)}_{\geq 0}$$

Como todo es positivo, se tiene que  $R(A) \geq 0$ . Recordar que al tener  $\alpha \in [0, 1]$  el lado izquierdo con  $P(A)$  siempre es positivo, y el lado derecho con  $Q(A)$  también, ya que es a lo mas 1, y a lo menos 0.

- $\mathbb{P} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$

$$\begin{aligned} R \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &= \alpha P \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) + (1 - \alpha)Q \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \\ &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) + (1 - \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha P(A_n) + (1 - \alpha)Q(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} Q(A_n) \end{aligned}$$

■

Por enunciado se tiene que  $P$  y  $Q$  son medidas de probabilidad, por eso se pasa de la unión a la suma. Lo anterior con  $A_1, A_2, \dots$  una sucesión disjunta dos a dos en  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

5. Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad. Sean  $a_1, \dots, a_n$  números positivos y  $A_1, \dots, A_n$  una partición de  $\Omega$ . Para todo  $A$  en  $\mathcal{A}$  sea

$$Q(A) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i P(A \cap A_i)}{\sum_{i=1}^n a_i P(A_i)}$$

¿Es  $Q$  una medida de probabilidad ?

Necesitamos corroborar los axiomas de Kolmogorov. Entonces

- $P(\Omega) = 1$

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= Q(\Omega) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i P(\Omega \cap A_i)}{\sum_{i=1}^n a_i P(A_i)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i P(A_i)}{\sum_{i=1}^n a_i P(A_i)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- $P(A) \geq 0$

Claramente se tiene  $Q(A) \geq 0$ , pues los  $a_i$  son números positivos, y las probabilidades están entre  $[0, 1]$ .

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n\right) &= Q\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap A_i\right)}{\sum_{i=1}^n a_i P(A_i)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \cap A_i)}{\sum_{i=1}^n a_i P(A_i)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i P(A_j \cap A_i)}{\sum_{i=1}^n a_i P(A_i)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} Q(A_j) \\
\Rightarrow Q\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_n\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} Q(A_j)
\end{aligned}$$

6. Sea  $\Omega = (0, \infty)$  y  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ . Defina la medida de probabilidad  $P$  como:

$$P(B) = \int_B e^{-x} dx, \quad B \in \mathcal{B}.$$

Verifique que  $P$  es efectivamente una medida de probabilidad.

Debemos corroborar los axioma de Kolmogorov.

- $P(\Omega) = 1$

$$\begin{aligned}
P(\Omega) &= \int_0^{\infty} e^{-x} dx \\
&= -e^{-x} \Big|_0^{\infty} \\
&= 1
\end{aligned}$$

- $P(B) \geq 0$

Esto es claro, pues  $f(x) = e^{-x} > 0$

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j)$

Sea  $B_1, B_2, \dots$  una sucesión de intervalos disjuntos en  $\mathcal{B}$ , entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) &= \int_{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j} e^{-x} dx \\
&= \int_{B_1} e^{-x} dx + \int_{B_2} e^{-x} dx + \dots \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B_j} e^{-x} dx \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j)
\end{aligned}$$

Note que un ejemplo particular de lo ultimo es tomar  $B_1 = (1, 3)$ ,  $B_2 = (4, 7)$  y  $B_3 = (10, \infty)$ , claramente son disjuntos de a pares, entonces corroboremos lo ultimo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^3 B_j\right) &= \int_{\bigcup_j B_j} e^{-x} dx \\
&= \int_{(1,3) \cup (4,7) \cup (10,\infty)} e^{-x} dx \\
&= \int_{(1,3)} e^{-x} dx + \int_{(4,7)} e^{-x} dx + \int_{(10,\infty)} e^{-x} dx \\
&= \sum_{j=1}^3 P(B_j)
\end{aligned}$$

7. Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$ , donde  $\Omega = \{1, 2, \dots\}$  y  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Defina la función

$$P(\{i\}) = a \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots$$

¿Para que valor de  $a$  la función anterior es una medida sobre  $(\Omega, \mathcal{A})$ ?

Claramente es positiva, veamos si suma 1

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \sum_{i=1}^{\infty} a \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \\ &= a \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\ &= a \frac{1}{1 - 1/2} \\ &= 2a \end{aligned}$$

Imponemos la condición

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= 1 \\ 2a &= 1 \\ a &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego, la función anterior es una medida sobre  $(\Omega, \mathcal{A})$  si  $a = 1/2$ . Además es fácil ver que la propiedad de aditividad se cumple.

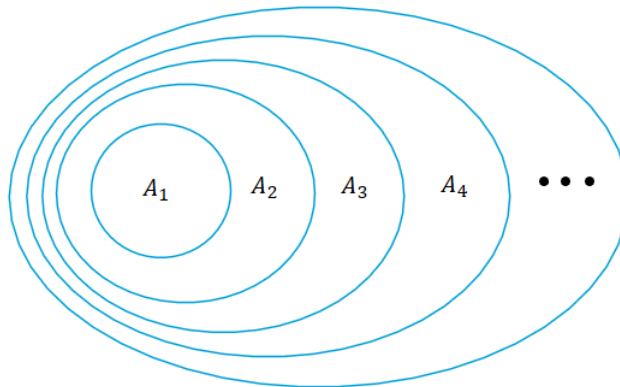
8. Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad demuestre que

(a) Si  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \in \mathcal{A}$ , entonces  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$

(b) Si  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \in \mathcal{A}$ , entonces  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$

Para esto es útil dibujar

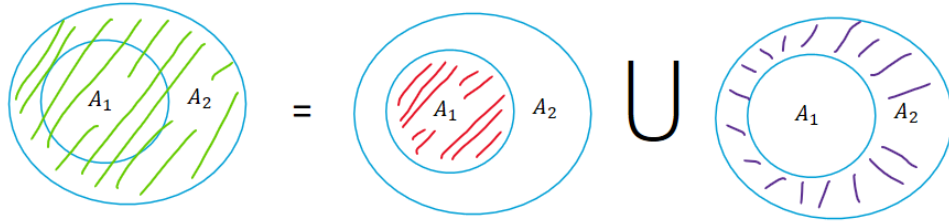
(a) Note que  $A_1 \subset A_2 \subset \dots \in \mathcal{A}$  corresponde a



pues  $A_1$  esta contenido en  $A_2$ ,  $A_2$  esta contenido en  $A_3$  y así sucesivamente. Note entonces que podemos descomponer cosas de forma conveniente, esto de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathbb{P} \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) &= \mathbb{P} (A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \dots) \\
&= \mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i - A_{i-1} \right), \quad \text{con } A_0 = \emptyset \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i - A_{i-1}), \quad \text{Disjuntos} \\
&= P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(A_i - A_{i-1}) \\
&= P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) - P(A_i \cap A_{i-1}) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=2}^n \mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A_{i-1}) \\
&= \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1}), \quad \text{suma telescópica} \\
&= \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1) + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)
\end{aligned}$$

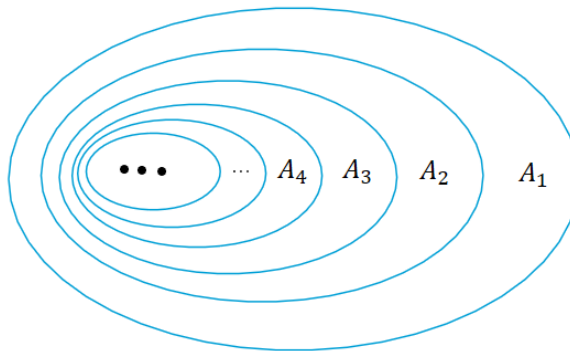
Demostrando así lo pedido.  
Solo había que recordar que



(b) Para esto podemos escribir  $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$  de la siguiente manera

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots = \dots \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1$$

y esto corresponde a



No es difícil convencerse de que  $A_1^c \subset A_2^c \subset A_3^c \subset \dots$ . Teniendo esto en cuenta podemos usar lo demostrado en a).

Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n^c) \\
\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c\right) &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \\
1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \\
\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)
\end{aligned}$$

9. Sea  $\{\mu_n\}_{n \geq 1}$  una secuencia de medidas de probabilidad sobre el espacio  $(\Omega, \mathcal{A})$ . Demuestre que la función

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i(E)}{2^i}$$

es una medida de probabilidad en  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Debemos corroborar los axiomas de Kolmogorov.

•

$$\begin{aligned}
\lambda(\Omega) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i(\Omega)}{2^i} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\
&= \frac{1/2}{1 - 1/2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

- Claramente es positiva, pues  $\mu_i(E)$  de por si son medidas de probabilidad, y la suma es positiva.

•

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_n(E_i)}{2^n} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(E_i)}{2^n} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i)
\end{aligned}$$

10. Sea  $\Omega = \{a, b, c, d\}$ ,  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\}, \{d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, d\}\}$  y  $P$  una medida de probabilidad de  $\mathcal{F}$  en  $[0, 1]$  con  $P(\{a\}) = \frac{2}{7}$ ,  $P(\{b, c\}) = \frac{4}{9}$  y  $P(\{d\}) = \alpha$ .

- (a) Determine el valor de  $\alpha$  tal que  $P$  sea una medida de probabilidad sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

(b) Encuentre  $P(\{a, b, c\})$ ,  $P(\{b, c, d\})$  y  $P(\{a, d\})$ .

(a) Recordemos que las probabilidades deben sumar 1. Usando esto y el argumento de eventos disjuntos tenemos

$$\begin{aligned}
 P(\Omega) &= \mathbb{P}(\{a\}) + \mathbb{P}(\{b\}) + \mathbb{P}(\{c\}) + \mathbb{P}(\{d\}) \\
 &= \frac{2}{7} + \mathbb{P}(\{b\} \cup \{c\}) + \alpha \\
 &= \frac{2}{7} + \mathbb{P}(\{b, c\}) + \alpha \\
 &= \frac{2}{7} + \frac{4}{9} + \alpha \\
 &= \frac{46}{63} + \alpha
 \end{aligned}$$

Imponemos la condición

$$\begin{aligned}
 P(\Omega) &= 1 \\
 \frac{46}{63} + \alpha &= 1 \\
 \Rightarrow \alpha &= \frac{17}{63}
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{a, b, c\}) &= \mathbb{P}(\{a\} \cup \{b, c\}) \\
 &= \mathbb{P}(\{a\}) + \mathbb{P}(\{b, c\}) \\
 &= \frac{2}{7} + \frac{4}{9} \\
 &= \frac{46}{63}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{b, c, d\}) &= \mathbb{P}(\{b, c\} \cup \{d\}) \\
 &= \mathbb{P}(\{b, c\}) + \mathbb{P}(\{d\}) \\
 &= \frac{4}{9} + \frac{17}{63} \\
 &= \frac{5}{7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\{a, d\}) &= \mathbb{P}(\{a\} \cup \{d\}) \\
 &= \frac{2}{7} + \frac{17}{63} \\
 &= \frac{5}{9}
 \end{aligned}$$

### 1.3 Probabilidades

Para calcular la probabilidad de algún evento existen diversas propiedades útiles. A continuación se presentan las necesarias y mas utilizadas. Además de las mas importantes.

- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$
- $A^c$  denota el complemento de  $A$
- $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$
- $A$  y  $B$  son disjuntos si  $A \cap B = \emptyset$
- $A$  y  $B$  son independientes si  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ . Esto implica que
  - ◊  $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$
  - ◊  $\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$
  - ◊  $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$
- Si  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son independientes, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^k A_n\right) = 1 - \prod_{n=1}^k [1 - \mathbb{P}(A_n)] \quad (1)$$

- Si  $A_1, A_2, \dots, A_k$  son independientes, entonces

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^k A_n\right) = \prod_{n=1}^k \mathbb{P}(A_n)$$

- Recordando la sección de eventos, podemos interpretar estos mediante probabilidades. Algunas de estas son
  - ◊ Ocurre por lo menos uno de los tres eventos:  $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$
  - ◊ Ocurre exactamente uno de los tres eventos:

$$\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c) \cup \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C^c) \cup \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C)$$

- ◊ No ocurre ninguno de los tres eventos:  $\mathbb{P}(\overline{ABC}) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C^c)$
- ◊ Ocurren los tres eventos:  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
- Desigualdad de Bonferroni

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B)$$

Mas generalmente

$$\sum_{n=1}^k \mathbb{P}(A_n) - (n - 1) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^k A_n\right) \quad (2)$$

para  $A_1, A_2, \dots, A_k$

- Desigualdad de Boole

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i) \quad (3)$$

para  $A_1, A_2, \dots, A_k$

- Se define la probabilidad condicional de un evento  $A$  dado otro evento  $B$  como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\diamond \mathbb{P}(A^c|B) = 1 - \mathbb{P}(A|B) \quad (4)$$

$$\diamond \mathbb{P}(A|B^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B^c)$$

$$\diamond \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_3|A_2 \cap A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_1) \quad (5)$$

Mas generalmente

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{n=2}^k \mathbb{P}(A_n|A_{n-1} \cap \dots \cap A_1)$$

- Podemos calcular la probabilidad de un evento  $A$  condicionando en algún evento  $B_i$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2)$$

Esto corresponde a la Ley de la probabilidad total. Esta se generaliza de la siguiente manera:

Sea  $B_1, B_2, \dots, B_k$  una partición del espacio muestral. Se tiene:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^k \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)$$

Recordar que  $B_1, \dots, B_k$  es una partición de  $\Omega$  si

$$\bigcup_{i=1}^k B_i = \Omega$$

con  $B_i \cap B_n = \emptyset, \forall i \neq n$

- Teorema de Bayes

Sea  $B_1, B_2, \dots, B_k$  una partición del espacio muestral. Se tiene :

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{n=1}^k \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n)} \quad (6)$$

con  $\mathbb{P}(A|B_j)$  y  $\mathbb{P}(B_j)$  fijo.

### 1.3.1 Ejemplos

- Sean  $A$  y  $B$  dos eventos definidos en  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  tales que  $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$  y  $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ . ¿Son  $A$  y  $B$  eventos independientes? ¿Cual es la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los eventos  $A$  o  $B$ ? ¿Cual es la probabilidad de que algún evento no ocurra?

Para ver si son independientes o no, se debe corroborar  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Entonces

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} P(A)P(B) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Donde claramente se tiene que  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ , por lo cual son independientes. La probabilidad de que ocurra exactamente uno de los eventos corresponde a

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) &= P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La probabilidad de que alguno de estos eventos no ocurra corresponde a

$$\begin{aligned} P(A^c \cup B^c) &= P((A \cap B)^c) \\ &= 1 - P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- Una bolsa contiene 15 monedas. De ellas 7 son normales (tienen cara y sello) y el resto tienen 2 caras. De la bolsa se extrae al azar una moneda y se lanza 10 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener todas caras?. Suponga independencia entre los resultados obtenidos en cada lanzamiento de la moneda.

Tenemos

- 15 monedas
- 7 monedas normales
- 8 monedas con doble cara

Sean los eventos

- $N$  = sale moneda normal
- $D$  = sale moneda con doble cara
- $A$  = se obtiene 10 caras en 10 lanzamientos

Para obtener la probabilidad de obtener todas caras en los 10 lanzamientos podemos condicionar en el tipo de moneda, esto corresponde a

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|N)P(N) + P(A|D)P(D) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \frac{7}{15} + 1 \cdot \frac{8}{15} \\ &= 0.5337 \end{aligned}$$



3. Para los clientes que compran un refrigerador en una tienda de aparatos domésticos, sea  $A$  el evento en que el refrigerador es fabricado en E.E.U.U.,  $B$  el evento en que el refrigerador contaba con una máquina para hacer hielos y  $C$  el evento en que el cliente adquirió una garantía ampliada. Las probabilidades asociadas al problema son las siguientes

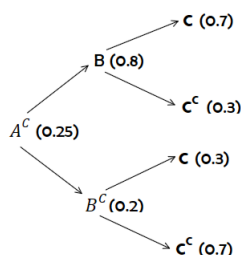
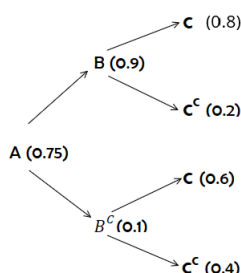
$$P(A) = 0.75; \quad P(B | A) = 0.9; \quad P(B | A^c) = 0.8$$

$$P(C | A \cap B) = 0.8; \quad P(C | A \cap B^c) = 0.6$$

$$P(C | A^c \cap B) = 0.7; \quad P(C | A^c \cap B^c) = 0.3$$

Sabiendo que un cliente compró un refrigerador que venía con una máquina para hacer hielos y que adquirió una garantía ampliada, ¿cuál es la probabilidad de que el refrigerador haya sido fabricado en E.E.U.U?

Se nos pide  $P(A|B \cap C)$ . Si bien llegar y calcular esto es difícil, es mejor obtener todos los datos a partir de un dibujo. Usando las probabilidades dadas, un diagrama de las probabilidades es



De modo que

$$\begin{aligned}
 P(A|B \cap C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{0.75 \cdot 0.9 \cdot 0.8}{P(B \cap C|A)P(A) + P(B \cap C|A^c)P(A^c)} \\
 &= \frac{0.75 \cdot 0.9 \cdot 0.8}{0.75 \cdot 0.9 \cdot 0.8 + 0.25 \cdot 0.8 \cdot 0.7} \\
 &= 0.7941
 \end{aligned}$$

4. Para ganar el campeonato, el City debe vencer al Town y al United. Tienen un 60% de posibilidades de ganarle a Town, un 70% de posibilidades de ganarle al United, y un 80% de posibilidades de al menos una victoria. ¿Cual es el posibilidad de que el City gane el campeonato?

Sean los eventos

- $A$  = Ganarle a Town
- $B$  = Ganarle al United

Con  $P(A) = 0.6$  y  $P(B) = 0.7$ . Nos dicen que hay un 80% de obtener al menos una victoria, esto se traduce como ganarle al Town o al United o a ambos, en terminos de probabilidad, tenemos

que  $P(A \cup B) = 0.8$ . Para ganar el campeonato se debe ganar al Town y al United, es decir, nos interesa  $P(A \cap B)$ . Entonces

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.6 + 0.7 - 0.8 \\ &= 0.5 \end{aligned}$$

5. Suponga que la primera falla de una maquina durante la  $n$ -ésima hora de operación ocurre con probabilidad  $(0.5)^n$ . Si la primera falla de la maquina ocurre durante la  $n$ -ésima hora de operación, ella es reparada dentro de 3 horas con probabilidad  $0.3 + (0.6)^n$ . Calcule la probabilidad de que la primera falla de la maquina sea reparada dentro de 3 horas.

Sean los eventos

- $A$  = se repara en 3 horas
- $B_n$  = la primera falla ocurre durante la  $n$ -ésima hora

Tenemos las siguientes probabilidades

- $P(B_n) = 0.5^n$
- $P(A|B_n) = 0.3 + 0.6^n$

Se pide que la primera falla sea reparada dentro de 3 horas, si pensamos bien, la primera falla puede ocurrir en cualquier momento (hora), por lo cual podemos condicionar en la probabilidad de fallo, entonces

$$\begin{aligned} P(\text{primera falla de la maquina sea reparada dentro de 3 horas}) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (0.3 + 0.6^n)0.5^n \\ &= 0.7285 \end{aligned}$$

6. Dos jugadores  $A$  y  $B$  alternada e independientemente lanzan una moneda y el primer jugador que obtenga cara es el ganador. Si la primera vez la moneda es lanzada por el jugador  $A$ , ¿Cuál es la probabilidad de que  $A$  sea el ganador? Suponga que  $P(\text{cara}) = \pi$ . Definamos los siguientes eventos

- $A_i$  = Le sale cara al jugador  $A$  en la  $i$ -ésima tirada
- $B_i$  = Le sale cara al jugador  $B$  en la  $i$ -ésima tirada
- $G = A$  gana

La probabilidad de interés, que es  $A$  gana, puede pasar de varias formas, puede salir cara en la primera tirada o puede salir en la segunda tirada, o puede salir en la tercera, y así sucesivamente. Además nos interesa que el jugador  $B$  no obtenga cara. Entonces tenemos que lo pedido se calcula como sigue.

$$\begin{aligned} P(G) &= P(A_1) + P(A_1^c \cap B_2^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap B_2^c \cap A_2^c \cap B_3^c \cap A_3) + \dots \\ &= P(A_1) + P(A_1^c)P(B_2^c)P(A_2) + P(A_1^c)P(B_2^c)P(A_2^c)P(B_3^c)P(A_3) + \dots \quad (7) \\ &= \pi + (1 - \pi)^2\pi + (1 - \pi)^4\pi + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \pi)^{2i}\pi \\ &= \pi \sum_{i=0}^{\infty} [(1 - \pi)^2]^i \\ \Rightarrow P(G) &= \pi \frac{1}{1 - (1 - \pi)^2} \end{aligned}$$

Notar que en (7) se utilizó que  $A_i$ ,  $B_i$  son independientes y que las posibles maneras de que gane  $A$  son disjuntas.

7. Una de las máximas preocupaciones de áreas de marketing es poder enviar información a sus clientes sin que estos bloqueen las campañas. Diversos estudios en las principales cuentas de correo muestran que el 45% de los correos que reciben sus usuarios son asociados a algún tipo de campaña publicitaria, un 5% a informaciones importantes, y lo restante a correos normales. Además, 80% de las campañas son seleccionados como spam; aunque también se sabe que el 10% de los correos normales también se clasifican como spam, y este porcentaje disminuye a la mitad en el caso de informaciones importantes.

- ¿Cual es la probabilidad que un correo sea clasificado como spam?
- Dado que el correo fue seleccionado como spam, determine la probabilidad que ese sea una campaña publicitaria.
- Determine la probabilidad de que un correo sea clasificado correctamente, es decir, una campaña clasificada como spam, o bien, un correo normal o importante no clasificado como spam.

Definamos los eventos

- $A$  = Correo asociado a campaña publicitaria
- $B$  = Correo asociado a informaciones importantes
- $C$  = Correo normal
- $S$  = Correo clasificado como Spam

Del enunciado tenemos las siguientes probabilidades

- $P(A) = 0.45$
- $P(B) = 0.05$
- $P(C) = 0.5$
- $P(S|A) = 0.8$
- $P(S|B) = 0.05$
- $P(S|C) = 0.1$

- Se pide la probabilidad de que un correo sea clasificado como spam, para esto podemos usar el teorema de probabilidades totales y condicionar según el tipo de coreo. Entonces

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C) \\ &= 0.8 \cdot 0.45 + 0.05 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.5 \\ &= 0.4125 \end{aligned}$$

- Nos piden  $P(A|S)$ . Usando probabilidad condicional tenemos

$$\begin{aligned} P(A|S) &= \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S \cap A)}{P(S)} \frac{P(A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(S|A)P(A)}{P(S)} \\ &= \frac{0.8 \cdot 0.45}{0.4125} \\ &= 0.8727 \end{aligned}$$

- Para esto ultimo, tenemos las siguientes combinaciones, si el correo es de una campaña publicitaria, debe ser clasificado como spam. Si el correo es de información importante o normal, no debe ser clasificado como spam. Lo anterior corresponde a

$$P([A \cap S] \cup [(B \cup C) \cap S^c])$$

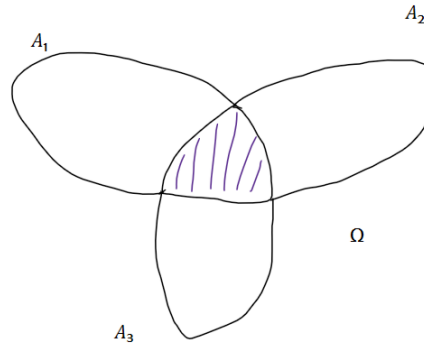
Entonces

$$\begin{aligned}
 P([A \cap S] \cup [(B \cup C) \cap S^c]) &= P(A \cap S) + P((B \cup C) \cap S^c) \\
 &= P(A \cap S) + P(B \cap S^c) + P(C \cap S^c) \\
 &= P(S \cap A) \frac{P(A)}{P(A)} + P(S^c \cap B) \frac{P(B)}{P(B)} + P(S^c \cap C) \frac{P(C)}{P(C)} \\
 &= P(S|A)P(A) + P(S^c|B)P(B) + P(S^c|C)P(C) \quad (8) \\
 &= P(S|A)P(A) + [1 - P(S|B)]P(B) + [1 - P(S|C)]P(C) \\
 &= 0.8575
 \end{aligned}$$

En (8) se uso (4).

8. Sean  $A_1, A_2, A_3$  sucesos tales que  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$  y  $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_3 \cap A_2$ . Sabiendo que  $P(A_1) = 1/4$  y  $P(A_2) = 1/2$ , encuentre  $P(A_3)$  en función de  $P(A_1 \cap A_2)$ .

Para empezar podemos hacer un dibujo de como es lo que tenemos.

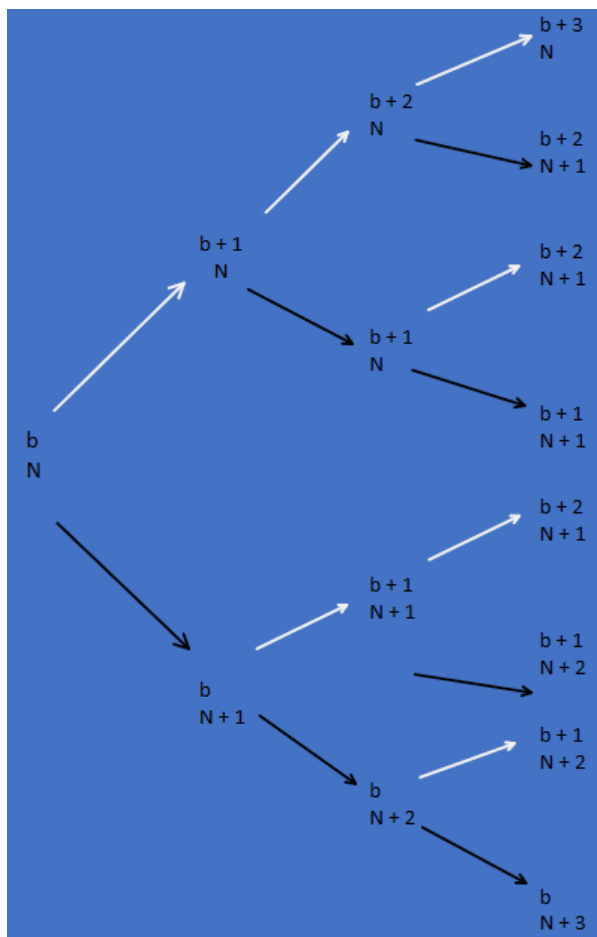


Por enunciado sabemos que  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(\Omega) = 1$ . De la imagen tenemos que

$$\begin{aligned}
 P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - \\
 &\quad P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
 1 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2) \\
 1 &= \frac{3}{4} + P(A_3) - 2P(A_1 \cap A_2) \\
 \Rightarrow P(A_3) &= \frac{1}{4} + 2P(A_1 \cap A_2)
 \end{aligned}$$

Notar que en el segundo paso se utilizó que  $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_3 \cap A_2$ , y también que  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$  es igual a la intersección entre cualquiera de los dos eventos, esto también se ve en la imagen anterior.

9. El siguiente esquema se utiliza como modelo para procesos de contagio: De una urna con  $b$  fichas blancas y  $n$  fichas negras, se extrae una ficha al azar. Se anota el color y se devuelve a la urna, junto con una (01) del mismo color. Se repite el esquema tres (03) veces.
- Determine el espacio muestral del experimento (al finalizar las tres (03) repeticiones del esquema).
  - Calcule la probabilidad de que se extraigan tres fichas negras seguidas.
  - Calcule la probabilidad de obtener exactamente dos fichas negras
  - Para esto podemos hacer un dibujo de la situación



El espacio muestral es

$$\Omega = \{(b+3, N), (b+2, N+1), (b+2, N+1), \dots, (b+1, N+2), (b, N+3)\}$$

Donde  $b$  son las bolitas blancas y  $N$  bolas negras. La flechas representan el color elegido respectivamente.

- Nos interesa que salgan 3 fichas negras seguidas, y esto solo ocurre una vez, como se ve en la imagen. Recordar que estos eventos no son independientes, pues dependen de la extracción anterior. Entonces sea el evento
  - $N_i$  = sale negra en la  $i$ -ésima extracción

Nos piden  $P(N_1 \cap N_2 \cap N_3)$ . Entonces usando (5) tenemos

$$\begin{aligned} P(N_1 \cap N_2 \cap N_3) &= P(N_3|N_2 \cap N_1)P(N_2|N_1)P(N_1) \\ &= \frac{N+2}{N+2+b} \cdot \frac{N+1}{N+B+1} \cdot \frac{N}{N+b} \end{aligned}$$

(c) Se pide obtener exactamente 2 negras. De la imagen, se puede ver que solo hay 3 combinaciones posibles, las cuales son:

- $A_1 = N_1 \cap N_2 \cap b$
- $A_2 = N_1 \cap b \cap N_3$
- $A_3 = b \cap N_2 \cap N_3$

Usando lo mismo que antes tenemos

$$\begin{aligned}
 P(A_1) &= P(N_1 \cap N_2 \cap b) = P(b|N_2 \cap N_1)P(N_2|N_1)P(N_1) \\
 &= \frac{b}{N+2} \cdot \frac{N+1}{N+b+1} \frac{N}{N+b} \\
 P(A_2) &= P(N_1 \cap b \cap N_3) = P(N_3|b \cap N_1)P(b|N_1)P(N_1) \\
 &= \frac{N+1}{N+b+2} \cdot \frac{b}{N+b+1} \frac{N}{N+b} \\
 P(A_3) &= P(b \cap N_2 \cap N_3) = P(N_3|N_2 \cap b)P(N_2|b)P(b) \\
 &= \frac{N+1}{N+b+2} \cdot \frac{N}{N+b+1} \cdot \frac{b}{N+b}
 \end{aligned}$$

10. Es sabido que al ojo humano hay muchas imperfecciones en la creación de materiales que no son detectadas con facilidad. Los inspectores de calidad altamente capacitados son capaces de tener un alto porcentaje de acierto. En cierto experimento se puso a prueba a dos inspectores, donde de 10.000 productos, el primero detectó 724 fallas, mientras que el segundo detectó 751 fallas. Si se sabe que 1159 detecciones fueron consideradas fallas por al menos uno de los inspectores, calcule

- (a) La probabilidad de seleccionar una pieza y que no sea considerada una falla por ninguno
- (b) La probabilidad de seleccionar una pieza que el segundo inspector la considere una falla, pero el primero no

Definamos los siguientes eventos

- $A$  = el inspector 1 encuentra una falla
- $B$  = el inspector 2 encuentra una falla

Por enunciado tenemos las probabilidades anteriores, y además tenemos la probabilidad de fallos que al menos uno de los inspectores detectaron, es decir, o el inspector 1 o el 2 detectaron la falla. Entonces tenemos las siguientes probabilidades

$$\begin{aligned}
 P(A) &= \frac{724}{10000} = 0.0724 \\
 P(B) &= \frac{751}{10000} = 0.0751 \\
 P(A \cup B) &= \frac{1159}{10000} = 0.1159
 \end{aligned}$$

- (a) Nos piden que ningún inspector considere como falla la pieza seleccionada, es decir, nos piden  $P(A^c \cap B^c)$  (el inspector 1 no encuentra falla y el 2 no encuentre falla). Entonces

$$\begin{aligned}
 P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) \\
 &= 1 - P(A \cup B) \\
 &= 1 - 0.1159 \\
 &= 0.8841
 \end{aligned}$$

- (b) Nos piden  $P(A^c \cap B)$ . Entonces

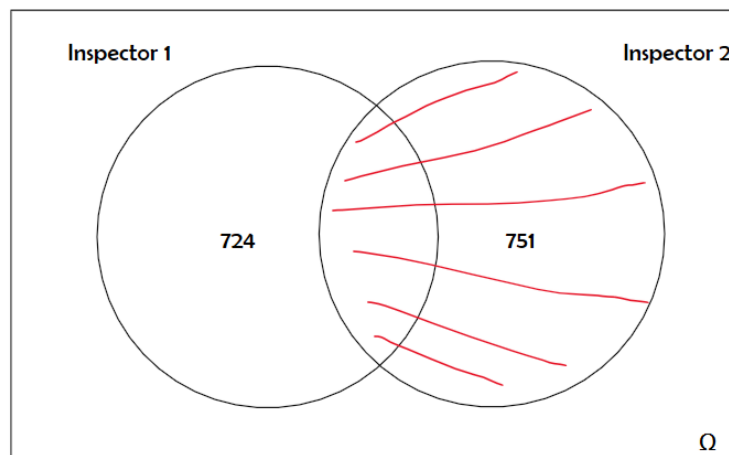
$$\begin{aligned}
 P(A^c \cap B) &= P(A^c) + P(B) - P(A^c \cup B) \\
 &= 1 - P(A) + P(B) - P(A^c \cup B) \\
 &= 1 - 0.0724 + 0.0751 - P(A^c \cup B)
 \end{aligned}$$

Solo nos falta  $P(A^c \cup B)$ . Para obtenerlo podemos hacer un dibujo de los conjuntos. Sabemos que  $\Omega$  corresponde al total de piezas (10.000), y la unión de ambos a 1159.

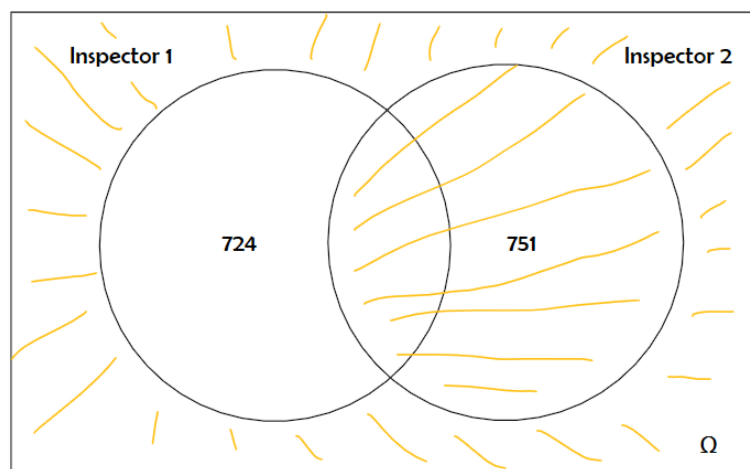
El evento  $A^c$  corresponde a



El evento  $B$  corresponde a



De modo que  $A^c \cup B$  corresponde a



Esto ultimo corresponde a las 10.000 piezas, menos las 1159 piezas, mas las piezas detec-

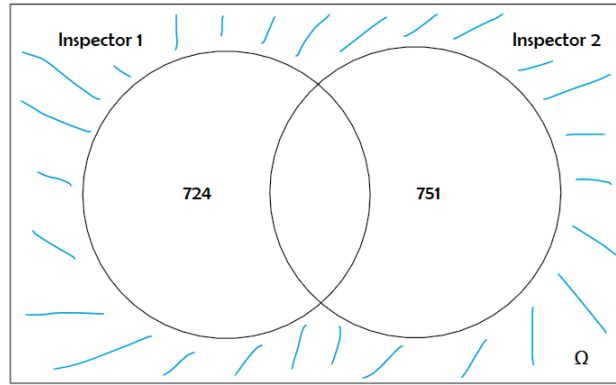
tadas por el inspector 2. Entonces

$$\begin{aligned} P(A^c \cup B) &= [P(\Omega) - P(A \cup B)] + P(B) \\ &= [1 - 0.1159] + 0.0751 \\ &= 0.9592 \end{aligned}$$

Recordando lo que teníamos, la probabilidad pedida corresponde a

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c) + P(B) - P(A^c \cup B) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(A^c \cup B) \\ &= 1 - 0.0724 + 0.0751 - P(A^c \cup B) \\ &= 1 - 0.0724 + 0.0751 - 0.9592 \\ &= 0.0435 \end{aligned}$$

Recordar que  $P(\Omega) - P(A \cup B)$  corresponde a



11. Sean  $A_1, A_2, A_3$  eventos definidos sobre un mismo espacio de probabilidad. Si  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , demuestre que  $P(A_1 \cup A_2 | A_3) = P(A_1 | A_3) + P(A_2 | A_3)$

Por definición

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 | A_3) &= \frac{P([A_1 \cup A_2] \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{P([A_1 \cap A_3] \cup [A_2 \cap A_3])}{P(A_3)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(\emptyset \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap A_3)}{P(A_3)} + \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} \\ &= P(A_1 | A_3) + P(A_2 | A_3) \end{aligned}$$



12. En la urna  $U_1$  hay 2 bolas blancas y 3 bolas negras y en la urna  $U_2$  hay 2 bolas negras. Seleccionamos una urna al azar y extraemos 2 bolas sin reemplazo. Calcule la probabilidad de extraer 0 bolas negras, 1 bola negra, y 2 bolas negras.

Tenemos

- $U_1$  :
  - 2 blancas
  - 3 negras
- $U_2$  :
  - 2 negras

Definamos los eventos

- $A_i$  = se extraen  $i$  bolas negras
- $U_1$  = se elige la urna 1
- $U_2$  = se elige la urna 2

Con respectivas probabilidades  $P(U_1) = 1/2$  y  $P(U_2) = 1/2$ . La probabilidad de extraer 0 bolas negras corresponde a

$$\begin{aligned} P(A_0) &= P(A_0|U_1)P(U_1) + P(A_0|U_2)P(U_2) \\ &= P(\text{Salgan 0 bolas negras} | U_1) \frac{1}{2} + P(\text{Salgan 0 bolas negras} | U_2) \frac{1}{2} \\ &= P(\text{Salgan 1 blanca y luego 1 blanca} | U_1) \frac{1}{2} + P(\text{Salgan 1 blanca y luego 1 blanca} | U_2) \frac{1}{2} \\ &= \left( \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \right) \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

La probabilidad de extraer 1 bola negra corresponde a

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1|U_1)P(U_1) + P(A_1|U_2)P(U_2) \\ &= P(\text{Salga una negra y otra blanca} | U_1) \frac{1}{2} + P(\text{Salga una negra y otra blanca} | U_2) \frac{1}{2} \\ &= P(\text{Salga una negra y luego blanca} \cup \text{Salga una blanca y luego negra} | U_1) \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \left( \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \right) \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

La probabilidad de extraer 2 bolas negras queda de propuesta para el lector.

En la siguiente sección se resuelve este ejercicio de otra manera.

## 1.4 Conteo

Si extraemos una muestra de tamaño  $k$  de una población de  $n$  elementos se tiene

Muestras	con reemplazo	sin reemplazo
con orden	$n^k$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
sin orden	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Para introducir esta sección, derivaremos las formulas anteriores en un ejemplo sencillo. El Loto es un juego de lotería bien famoso en nuestro país, en el cual se deben elegir 6 números de un total de 41.



Nos interesa saber la totalidad de combinaciones posibles que hay. Consideremos las siguientes variaciones del juego:

- Con orden y sin reemplazo:

$$41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36 = \frac{41!}{35!} = \frac{41!}{(41-6)!} = 3,237,399,360$$

Hay 41 números, primero elegimos uno de los 41, para elegir el siguiente solo hay 40 disponibles, y para el siguiente hay 39, y así hasta haber 36 disponibles, y como nos interesa el orden, esta combinación es única.

- Con orden y con reemplazo:

$$41 \times 41 \times 41 \times 41 \times 41 \times 41 = 41^6 = 4,750,104,241$$

Hay 41 números, primero elegimos uno, habiendo 41 opciones, para el siguiente numero igual habrán 41 números (opciones) disponibles, para el siguiente también, y así con los 6 números a elegir.

- Sin orden y sin reemplazo

$$\frac{41 \times 40 \times 39 \times 38 \times 37 \times 36}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{41!}{6!35!} = \frac{41!}{6!(41-6)!} = 7,059,052$$

Hay 41 números, primero elegimos 1 de los 41, y hay 41 números disponibles, para elegir el siguiente numero solo hay 40 disponibles, y para el siguiente hay 39, y así hasta haber 36 disponibles. Ahora hay que dividir por el numero de combinaciones posibles que hay, es decir, nos interesa ver de cuantas maneras se puede formar un grupo de 6, esto corresponde a  $6!$ .

- Sin orden y con reemplazo: Ejercicio para el lector

Para esta sección es útil recordar que si queremos calcular la probabilidad de algún evento, podemos utilizar el clásico

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos totales}} = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (9)$$

Si tenemos un conjunto enumerado de  $n$  elementos, entonces el total de formas de que salgan  $k$  elementos ordenados es

$$n - k + 1 \quad (10)$$

por ejemplo, si lanzamos un dado 6 veces, y queremos ver cuantas formas hay en que salga 3 veces seguidas un 1, esto es

$$6 - 3 + 1 = 4$$

El símbolo  $\#$  corresponde a "numero" o "total" de casos de algún evento.

### 1.4.1 Ejemplos

1. Suponga que se tiene una urna con  $N$  bolas idénticas, excepto porque  $M$  bolas son rojas y el resto verdes. Se seleccionan aleatoriamente  $k$  bolas sin reemplazo. Defina el evento  $A_x$  como  $x$  bolas rojas en la muestra de tamaño  $k$  ¿cuál es la probabilidad de  $A_x$  ?

Podemos plantear  $P(A_x) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}}$ . Del enunciado tenemos

- $N$  bolas
- $M$  bolas rojas
- $N - M$  bolas verdes

Entonces nos interesa

$$\frac{\text{Formas de extraer } x \text{ bolas rojas de } M \text{ bolas rojas y } k - x \text{ bolas verdes de } N - M \text{ bolas verdes}}{\text{Formas de extraer } k \text{ bolas de } N}$$

Como no nos interesa el orden y la muestra es sin reemplazo, podemos plantear lo pedido como

$$P(A_x) = \frac{\binom{M}{x} \binom{N-M}{k-x}}{\binom{N}{k}}$$

2. En la urna  $U_1$  hay 2 bolas blancas y 3 bolas negras y en la urna  $U_2$  hay 2 bolas negras. Seleccionamos una urna al azar y extraemos 2 bolas sin reemplazo. Calcule la probabilidad de extraer 0 bolas negras, 1 bola negra, y 2 bolas negras.

Tenemos

- $U_1$  :
  - 2 blancas
  - 3 negras
- $U_2$  :
  - 2 negras

Definamos los eventos

- $A_i$  = se extraen  $i$  bolas negras
- $U_1$  = se elige la urna 1
- $U_2$  = se elige la urna 2

Con respectivas probabilidades  $P(U_1) = 1/2$  y  $P(U_2) = 1/2$ . La probabilidad de extraer 0 bolas negras se puede pensar de forma análoga a como hicimos en (12), usando totales, pero las probabilidades de elegir negras según la urna lo haremos diferente.

Nos interesa

$$P(A_0) = P(A_0|U_1)P(U_1) + P(A_0|U_2)P(U_2)$$

Sabemos que no se pueden extraer solo 0 bolas negras de la urna 2 (evento imposible). Para elegir 0 bolas negras de la urna 1, podemos hacer lo mismo que en el ejercicio anterior, queremos elegir 0 bolas negras de entre 3 negras y elegir 2 blancas de entre 2 blancas, y vamos a extraer 2 bolas de entre 5. Entonces

$$\begin{aligned} P(A_0) &= P(A_0|U_1)P(U_1) + P(A_0|U_2)P(U_2) \\ &= \frac{\binom{3}{0} \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Ahora nos interesa

$$P(A_1) = P(A_1|U_1)P(U_1) + P(A_1|U_2)P(U_2)$$

Sabemos que no se puede extraer solo 1 bola negra de la urna 2, por lo cual nuevamente es el evento imposible. Ahora para la urna 2, igual que antes, nos interesa extraer 1 bola negra de entre 3, y 1 bola blanca de entre 2, y vamos a extraer 2 bolas de entre 5. Entonces

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1|U_1)P(U_1) + P(A_1|U_2)P(U_2) \\ &= \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Finalmente nos interesa

$$P(A_2) = P(A_2|U_1)P(U_1) + P(A_2|U_2)P(U_2)$$

Procediendo de forma análoga tenemos

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2|U_1)P(U_1) + P(A_2|U_2)P(U_2) \\ &= \frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{13}{20} \end{aligned}$$

3. Para un curso universitario, 8 alumnos deben conformar tres grupos a los cuales se les denominara A, B y C. La conformación de los grupos se realizara de forma aleatoria, para lo cuales se le pide a cada alumno que escoja una letra y prohibiendo la comunicación entre ellos hasta que todos hayan escogido. Si cada alumno elige uno de los grupos con igual probabilidad, determine:

- (a) La probabilidad de que un grupo quede compuesto exactamente por 6 alumnos.
- (b) La probabilidad de que el grupo A quede constituido por 4 alumnos, el grupo B por 3 alumnos y el grupo C por un alumno.
- (a) Podemos usar casos favorables y totales. Tenemos un total de  $3^8$  casos totales, pues hay 3 grupos a elegir y 8 alumnos que van a elegir un grupo. Para los casos favorables podemos pensar de la siguiente manera, los 6 estudiantes pueden quedar en el grupo A, B o C, por lo cual hay 3 casos, y queremos que de los 8 alumnos 6 elijan el mismo grupo, y los 2 alumnos restantes elijan cualquier otro de los 2 grupos. Entonces

$$\frac{6 \text{ alumnos elijan el mismo grupo, } 2 \text{ alumnos elijan } 2 \text{ grupos, total de grupos}}{3^8}$$

$$\frac{\binom{8}{6} \cdot 2^2 \cdot 3}{3^8} = 0.051$$

- (b) Queremos que de 8 alumnos 4 elijan el A, de los 4 restantes 3 elijan el B, y el ultimo elija el C. Entonces

$$\frac{\text{de 8 alumnos 4 elijan A, de 4 alumnos 3 elijan B, el ultimo elije C}}{3^8}$$

$$\frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{4}{3} \cdot \binom{1}{1}}{3^8} = 0.043$$

4. Suponga que en una piscina hay 3 tipos distintos de peces, de los cuales 10 son peces payaso, 6 son peces cirujano y 20 son peces globo. El precio de cada pez es de 20.000, 35.000 y 50.000 cada uno respectivamente.

- (a) ¿Cual es la probabilidad de pescar un pez globo?  
 (b) Si pesco 3 peces, ¿Cual es la probabilidad de que los 3 sean peces payaso?  
 (c) Si pesco 5 peces, ¿cual es la probabilidad de que 3 de los 5 peces cuesten mas de \$30.000 c/u (no es promedio, cada pez debe valer mas de 30.000)?  
 (d) Si viene un comprador por 2 peces, ¿Cual es la probabilidad de que le cuesten mas de \$ 50.000?
- (a) Nuevamente casos favorables y totales.

$$\frac{\text{Peces globo}}{\text{Total de peces}} = \frac{20}{36} = 0.55$$

- (b) Nos piden que los tres sean payasos. Podemos razonar de la siguiente manera, hay 10 peces payaso de un total de 30 peces. Si pescamos uno payaso, ahora la probabilidad de volver a pescar un payaso es de 9 (peces payasos) dividido en 29 (peces que quedan), y así sucesivamente para el tercer pez. Entonces

$$\frac{10}{36} \cdot \frac{9}{35} \cdot \frac{8}{34} = 0.016$$

- (c) Los peces que cumplen la condición son los cirujano y globo, estos son 26 en total. Nos interesa elegir 3 de entre los 26 que cumplen la condición, y 2 de entre los que no cumplen la condición. Y vamos a seleccionar 5 peces de 36. Entonces

$$\frac{\binom{26}{3} \cdot \binom{10}{2}}{\binom{36}{5}} = 0.31$$

- (d) Podemos calcular esto vía complemento del evento  $A$  = le cuestan mas de \$50.000, es decir, calcular la probabilidad de que no le cuesten mas de esto, para así solo considerar los peces payaso, pues 2 de estos payasos valen menos de \$50.000. Entonces

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{10}{36} \cdot \frac{9}{35}$$

5. Dado un grupo de 100 computadoras, 15 de ellas resultan ser defectuosas ¿Cual es la probabilidad de que, tomando dos computadoras al azar, las dos resulten ser defectuosas?

Tenemos

- casos favorables: elegir 2 defectuosas del grupo de las defectuosas, y elegir 0 del grupo de las no defectuosas
- casos totales: elegir 2 de un total de 100

Entonces

$$\frac{\binom{15}{2} \cdot \binom{85}{0}}{\binom{100}{2}} = \frac{7}{330}$$

6. Suponga que en una prueba de un curso hay 2 secciones. Se sabe que  $m$  alumnos tendrán algún problema de salud o fuerza mayor. Si en la sala  $A7$  hay 200 alumnos, y se presentaron a rendir la prueba los 321 que actualmente están inscritos en el curso, ¿cual es la probabilidad que al menos cuatro de estos  $m$  alumnos se encuentre en la sala  $K202$  ? Suponga que los alumnos eligen al azar a que sala asistir.

Para calcular lo pedido podemos calcular el complemento, que resulta mas fácil. Sea  $A$  = al menos cuatro de estos  $m$  alumnos se encuentre en la sala  $K202$ . Nos interesa

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

De modo que  $P(A^c)$  corresponde a la suma de las probabilidades de que hayan al menos  $i$  alumnos en tal sala, para  $i = 0, 1, 2, 3$ , pues el complemento de que hayan al menos cuatro alumnos, es que hayan menos de 4 alumnos. Podemos hacer esto vía favorables dividido en totales. Primero planteemos lo que tenemos

- 321 alumnos rinden la prueba
- Sala  $A7$ 
  - 200 alumnos
- Sala  $K202$ 
  - 121 alumnos
- $m$  tendrán problemas
- $321 - m$  no tendrán problemas

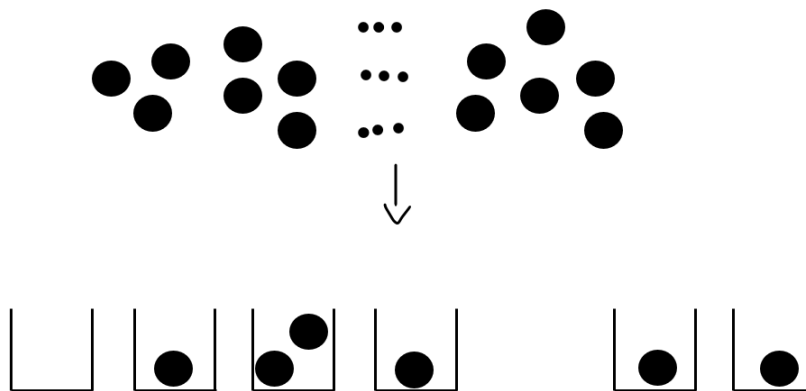
Como nos interesan los alumnos de la sala  $K202$  razonemos de la siguiente manera para los casos favorables, nos interesa seleccionar  $i$  alumnos de  $m$  que tendrán problema, y  $121 - i$  alumnos de  $321 - m$  que no tendrán problemas. Para los casos totales, tenemos 121 posibles alumnos dentro de la sala  $K202$  de un total de 321.

Entonces la probabilidad de interés se calcula como

$$\begin{aligned}
 P(A) &= 1 - P(A^c) \\
 &= 1 - \sum_{i=0}^3 \frac{\binom{m}{i} \binom{321-m}{121-i}}{\binom{321}{121}} \\
 &= 1 - \frac{\binom{m}{0} \binom{321-m}{121-0}}{\binom{321}{121}} - \frac{\binom{m}{1} \binom{321-m}{121-1}}{\binom{321}{121}} - \frac{\binom{m}{2} \binom{321-m}{121-2}}{\binom{321}{121}} - \frac{\binom{m}{3} \binom{321-m}{121-3}}{\binom{321}{121}}
 \end{aligned}$$

7. Si  $n$  bolitas se ponen de manera aleatoria en  $n$  bolsas, encuentre la probabilidad de que exactamente una bolsa quede vacía.

Nos interesa que de  $n$  bolsas, 1 no tenga ninguna bola. De las  $n - 1$  bolsas restantes, una tenga 2 bolitas si o si, y el resto entre de bolas entre en una bolsa cada una. Para los casos totales tenemos  $n$  bolas que pueden ser repartidas en  $n$  bolsas, por lo cual hay  $n^n$  casos totales. (una bola tiene  $n$  opciones, la siguiente bola igual tiene  $n$  opciones, y así sucesivamente...). Una imagen de lo planteado es



Entonces

- Formas de que una bolsa no tenga bolas =  $\binom{n}{1}$ . De  $n$  bolsas solo 1 esta vacía.
- Formas de que una bolsa tenga dos bolas =  $\binom{n}{2}$ . De  $n$  bolas , dos caen en una misma bolsa.
- Formas de que las 2 bolas puedan elegir las bolsas restantes =  $n - 1$ . Una bolsa debe estar vacía, por lo cual hay  $n - 1$  bolsas disponibles.
- Formas de que las  $n - 2$  bolsas restantes tengan una sola bola =  $(n - 2)!$ . Las  $n - 2$  bolitas eligen de entre  $(n - 2)$  bolsas, una bola tiene  $n - 2$  formas de elegir, la siguiente bola tiene  $n - 3$ , y así sucesivamente.
- Los casos totales corresponden a  $n^n$ , pues una bola tiene  $n$  opciones, la siguiente bola igual tiene  $n$  opciones, y así sucesivamente...

Entonces

$$\frac{\binom{n}{1} \cdot \left[ \binom{n}{2} \cdot (n - 1) \right] \cdot (n - 2)!}{n^n} = \frac{\binom{n}{2} \cdot n!}{n^n}$$

8. En un experimento compuesto, primero se lanza un dado honesto, y luego se lanza una moneda honesta de forma independiente tantas veces como el número indicado por el dado.
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?
  - Sabiendo que se han obtenido 3 caras ¿cuál es la probabilidad que el resultado del dado fue 4?
  - Por los datos del problema, podemos usar probabilidades totales. Sea el evento  $A_x$  = sale  $x$  en el dado y  $C$  = salen 3 caras. Podemos condicionar en el numero de caras, y como queremos exactamente 3 caras, en el dado debe salir un numero mayor o igual a 3. Entonces

$$P(C) = \sum_{i=3}^6 P(C|A_i)P(A_i)$$



Claramente  $P(A_i) = 1/6$ . Para encontrar  $P(C|A_i)$  razonemos de la siguiente manera con un caso particular. Si lanzamos 4 veces la moneda, entonces nos interesa que hayan 3 caras y un sello, es decir, en 3 lanzamientos salgan 3 caras, y en  $4 - 3 = 1$  lanzamiento un sello, osea  $(\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2})$ . Además hay que multiplicarlo por las formas distintas en que esto puede ocurrir, pues de 4 lanzamientos, nos interesa que 3 sean iguales, es decir, hay  $\binom{4}{3}$  formas distintas que esto pase (de 4 lanzamientos, 3 sean caras). En la pregunta nos sirve que el dado salga 3 o 4 o 5 o 6. Sea  $i$  el resultado que sale, con  $i = 3, 4, 5, 6$ , entonces las tres caras salen con probabilidad  $(\frac{1}{2})^3$ , y el resto de sellos con probabilidad  $(\frac{1}{2})^{i-3}$ . Entonces la probabilidad pedida corresponde a

$$\begin{aligned} P(C) &= \sum_{i=3}^6 P(C|A_i)P(A_i) \\ &= \sum_{i=3}^6 \binom{i}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{i-3} \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- (b) Nos piden la probabilidad condicional  $P(A_4|C)$ . Lo podemos descomponer de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P(A_4|C) &= \frac{P(A_4 \cap C)}{P(C)} \\ &= \frac{P(C \cap A_4)}{P(C)} \frac{P(A_4)}{P(A_4)} \\ &= \frac{P(C|A_4)P(A_4)}{P(C)} \\ &= \frac{\binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

9. Suponga que un supermercado recibe una partida de 10 cajas con cierto producto alimenticio. Cada caja contiene 10 unidades de dicho producto, de los cuales la mitad están vencidos. Se extraen al azar y sin devolución 4 unidades de la primera caja, 4 de la segunda y así sucesivamente, hasta extraer 4 de la décima caja. En cada muestra, se cuenta el número de unidades vencidas.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar 2 o más unidades vencidas en la inspección de una determinada caja?
- (b) La partida se rechaza si por lo menos en 5 cajas se encuentran 2 o más unidades vencidas. ¿Cuál es la probabilidad de rechazar la partida?

Tenemos lo siguiente

- 10 cajas
  - cada caja tiene:
    - 5 buenos
    - 5 vencidos
- (a) Se pide que en una caja cualquiera, haya dos o mas unidades vencidas. Sea  $A$  = hay al menos 2 unidades vencidas en una caja. Calcularemos esto vía complemento, es decir, 1– la probabilidad de encontrar a lo mas 1 unidad vencida. Para esto, usemos casos favorables y totales. Queremos que de 5 unidades vencidas, extraigamos  $i$  ( $i = 0, 1$ ). Y que de las 5

unidades buenas, salgan el resto de las unidades, o sea  $4 - i$ . Y vamos a sacar una muestra de tamaño 4 de un total de 10 unidades. Entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} - \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{10}{4}} \\ &= 0.738 \end{aligned}$$

- (b) Definamos el evento  $B$  = al menos 5 cajas tienen 2 o mas unidades vencidas. En si, nos piden calcular la probabilidad de las 10 cajas, 5 de ellas tengan 2 o mas unidades vencidas. Notamos que la probabilidad de que en una caja haya al menos 2 unidades vencidas ya la tenemos, pues la calculamos en el item anterior. Ahora, pensando como en el ejercicio anterior, de las 10 cajas, queremos que  $i$  ( $i = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ) cajas tengan la condición necesaria. Cada caja tiene probabilidad 0.738 de cumplir la condición, y queremos que  $i$  de estas la cumplan, y que  $10 - i$  no la cumplan, esto pasa con probabilidad  $(0.738)^i (1 - 0.738)^{10-i}$ , pues queremos una cierta cantidad cumpla la condición, y la otra cantidad no la cumpla. Entonces lo pedido corresponde a

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=5}^{10} \binom{10}{i} (0.738)^i (1 - 0.738)^{10-i} \\ &= 0.972 \end{aligned}$$

10. Una mano de poker consiste en cinco cartas seleccionadas sin reemplazo de una baraja de 52 (sin comodines). Determine la probabilidad de obtener las siguientes combinaciones:

- Escalera de color: las cinco cartas consecutivas y del mismo palo.
  - Escalera de color real:  $(10, J, Q, K, A)$  y del mismo palo
  - Poker: cuatro cartas con la misma numeración.
  - Poker de ases.
  - Full: tres cartas con una numeración y las otras dos con otra.
  - Escalera: las cinco cartas consecutivas (el As puede ir al comienzo o al final).
  - Color: las cinco cartas del mismo palo.
  - Dobles parejas.
  - Trió.
  - Pareja.
- (a) Procedamos por casos favorables y totales.

$$\mathbb{P}(\text{escalera}) = \frac{\text{escalera de color}}{\# \text{ cartas que nos dan}}$$

Tenemos 4 palos distintos, Corazón, Diamante, Trevol y Pica. Cada una de estas tiene 13 cartas. Por lo cual la cantidad de combinaciones que hay por palo de que salga una escalera la podemos obtener usando (10), es decir tenemos

$$13 - 5 + 1 = 9$$

combinaciones. Ahora, tenemos 4 palos diferentes, entonces

$$\text{escalera de color} = 9 \cdot 4 = 36$$

Y para los casos totales, se entregan 5 cartas de un total de 52, luego tenemos

$$\binom{52}{5}$$

combinaciones para entregar las 5 cartas. Finalmente la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}(\text{escalera}) = \frac{36}{\binom{52}{5}} = 0.00001385169$$

- (b) Note que por Palo, hay solo una opción en que se tenga la secuencia  $(10, J, Q, K, A)$ , pues es única y como son 4 palos, tenemos solo  $1 \cdot 4$  formas de obtener esta combinación. Luego, la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}(\text{escalera real}) = \frac{4}{\binom{52}{5}} = 0.000001539077$$

- (c) La probabilidad pedida se obtiene mediante

$$\mathbb{P}(\text{Poker}) = \frac{4 \text{ cartas con la misma numeración y 1 otra carta cualquiera}}{\# \text{ de cartas que nos dan}}$$

Tenemos las siguientes combinaciones disponibles

$$\begin{aligned} &(A\heartsuit, A\spadesuit, A\clubsuit, A\blackspadesuit) \\ &(2\heartsuit, 2\spadesuit, 2\clubsuit, 2\blackspadesuit) \\ &(3\heartsuit, 3\spadesuit, 3\clubsuit, 3\blackspadesuit) \\ &\vdots \\ &(Q\heartsuit, Q\spadesuit, Q\clubsuit, Q\blackspadesuit) \\ &(K\heartsuit, K\spadesuit, K\clubsuit, K\blackspadesuit) \end{aligned}$$

Tenemos entonces 13 maneras de obtener lo pedido, y además, nos falta una carta mas, como ya sacamos 4 cartas, la carta restante tiene  $52 - 4 = 48$  opciones disponibles. Luego, la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}(\text{Poker}) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = 0.000240096$$

- (d) Este es similar al anterior. Ahora tenemos solo una combinación donde se obtienen 4 ases. Y la carta restante tiene  $52 - 4 = 48$  opciones disponibles. Entonces la probabilidad es

$$\mathbb{P}(\text{Poker de ases}) = \frac{1 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = 0.00001846893$$

- (e) La probabilidad pedida se obtiene mediante

$$\mathbb{P}(\text{Full}) = \frac{3 \text{ cartas con la misma numeración y otras 2 con otra}}{\# \text{ de cartas que nos dan}}$$

Note que puede mal entenderse el ejercicio, se pide que sean 3 de la misma numeración, y que las otras 2 también sean iguales, pero diferente a las otras 3.

Para las 3 cartas, es similar a los anteriores, tenemos 13 combinaciones disponibles, y 4 Palos. Para esta ocasión piense de la siguiente manera: tenemos 13 combinaciones, y de los 4 palos disponibles, tienen que salir 3 de estos, por lo cual

$$\#3 \text{ cartas con la misma numeración} = 13 \cdot \binom{4}{3} = 13 \cdot 4 = 52$$

para obtener las otras dos cartas, ahora quedan 12 numeraciones disponibles, pues las primeras tres ya tienen un numero asignado. Ahora, las dos cartas se puede combinar de diferentes maneras,  $(C, D)$ ,  $(D, T)$ ,  $(P, D)$ , y así sucesivamente, por lo cual de los 4 Palos, queremos dos, hay  $\binom{4}{2}$  combinaciones para seleccionar estos pares. Entonces

$$\# \text{ otras 2 con otra numeración} = 12 \cdot \binom{4}{2} = 72$$

Finalmente la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}(\text{Full}) = \frac{52 \cdot 72}{\binom{52}{5}} = 0.001440576$$

(f) La probabilidad pedida se obtiene mediante

$$\mathbb{P}(\text{Escalera}) = \frac{5 \text{ cartas consecutivas}}{\# \text{cartas que nos dan}}$$

El numerador se puede pensar como

formas de obtener 5 cartas consecutivas de un Palo  $\times$  cartas consecutivas diferentes

Entonces, para obtener 5 cartas consecutivas de un Palo, se tiene un total de

$$13 - 5 + 1 = 9$$

pero a esto hay que agregar la combinación  $(J, Q, K, A)$ , entonces hay un total de 10 combinaciones para obtener una escalera de un Palo.

Ahora, para las cartas consecutivas diferentes, las 5 cartas pueden salir de cualquiera de los 4 palos. Entonces hay  $4^5$  combinaciones. Esto se puede ver así

$$\text{Carta } i, \text{ Carta } i + 1, \text{ Carta } i + 2, \text{ Carta } i + 3, \text{ Carta } i + 4$$

con  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ . La primera carta puede salir de 4 colores (Palos) diferentes, la siguiente también, y así sucesivamente. Ahora, note que hay que restar la escalera real, es decir, la combinación con todos los números del mismo Palo, pero esto solo hay 4 combinaciones, pues cada Palo tiene una opción de salir con esta combinación. Entonces hay un total de

$$4^5 - 4$$

combinaciones de elegir 5 cartas consecutivas diferentes, sin contar la real.

Finalmente, la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}(\text{Escalera}) = \frac{10 \cdot (4^5 - 4)}{\binom{52}{5}} = 0.003924647$$

(g) Queremos 5 cartas del mismo Palo, para esto hay un total de  $\binom{10}{5}$  combinaciones. A esto hay que restarle las combinaciones en que salga una escalera de 5, pero en el caso anterior vimos que hay 10 combinaciones en que salga una escalera. Por lo cual hay que restarle estas 10 combinaciones, pues queremos que no hayan escaleras. Tenemos por Palo un total de

$$\binom{10}{5} - 10$$

combinaciones. Finalmente tenemos 4 Palos, por lo cual la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}(\text{Escalera}) = \frac{4 \cdot \left( \binom{13}{5} - 10 \right)}{\binom{52}{5}} = 0.001965402$$

(h) La probabilidad pedida se obtiene mediante

$$\mathbb{P}(\text{Doble pareja}) = \frac{\text{dos parejas, otras dos parejas y carta diferente a estas}}{\# \text{cartas que nos dan}}$$

Obtener dos cartas diferentes de un Palo corresponde a  $\binom{13}{2}$ . Luego, como hay 4 palos diferentes, hay  $\binom{4}{2}$  combinaciones para obtener dos cartas iguales de diferente Palo, y como queremos dos pares diferentes, hay un total de

$$\binom{13}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2}$$

combinaciones. Ahora por la carta restante, hay que seleccionar una de las 11 que quedan, pues dos de las cartas que ya salieron corresponden a la doble pareja. Y hay 4 Palos. Entonces hay

$$\binom{11}{1} \binom{4}{1}$$

maneras de que salga la carta sobrante, sin que se repita con las parejas. Finalmente la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}(\text{Doble pareja}) = \frac{\binom{13}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2} \binom{11}{1} \binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = 0.04753902$$

(i) La probabilidad pedida se obtiene mediante

$$\mathbb{P}(\text{Trio}) = \frac{1 \text{ trio y 2 cartas diferentes a estas}}{\# \text{cartas que nos dan}}$$

Note que para el trio se debe tener el mismo numero, por lo cual la manera de seleccionar un numero es  $\binom{13}{1}$ . Luego, de los 4 Palos pueden salir 3, entonces hay un total de

$$\binom{13}{1} \binom{4}{3}$$

combinaciones de que salga un trío. Para las dos cartas restantes, se seleccionan dos cartas de un total de 12, pues en el trío ya salió un numero. Y cada carta que salga tiene 4 Palos disponibles, por lo cual hay un total de

$$\binom{12}{2} \cdot 4 \cdot 4$$

combinaciones para que salgan dos cartas diferentes a las del trío. Finalmente la probabilidad es

$$\mathbb{P}(\text{Trío}) = \frac{\binom{13}{1} \binom{4}{3} \binom{12}{2} \cdot 4^2}{\binom{52}{5}} = 0.02112845$$

(j) Para la pareja, es análogo al anterior. La manera de seleccionar un numero es  $\binom{13}{1}$ , como hay 4 Palos, y queremos seleccionar dos iguales tenemos un total de

$$\binom{13}{1} \binom{4}{2}$$

combinaciones para elegir el par. Luego, para seleccionar la otras 3 cartas es similar. Queremos 3 cartas diferentes de un total de 12, pues ya se selecciono una en el par, y cada una de estas tiene 4 Palos posibles a salir. Entonces hay un total de

$$\binom{12}{3} \cdot 4^3$$

combinaciones a elegir las 3 cartas restantes. Finalmente la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}(\text{Trío}) = \frac{\binom{13}{1} \binom{4}{2} \binom{12}{3} \cdot 4^3}{\binom{52}{5}} = 0.422569$$

## 1.5 Ejercicios del capítulo

1. Pruebe que:

(a) Si  $P(A) = P(B) = 0$ , entonces  $P(A \cup B) = 0$ ;

(b) Si  $P(A) = P(B) = 1$ , entonces  $P(A \cap B) = 1$ .

(a)

$$\begin{aligned}
 0 &\leq P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\
 P(A \cup B) &\leq P(A) + P(B) \\
 0 &\leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \\
 0 &\leq P(A \cup B) \leq 0 + 0 \\
 0 &\leq P(A \cup B) \leq 0 \\
 &\Rightarrow P(A \cup B) = 0
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 0 &\leq P(A \cap B) \leq 1 \\
 0 &\leq P((A^c \cup B^c)^c) \leq 1 \\
 0 &\leq 1 - P(A^c \cup B^c) \leq 1 \\
 0 &\leq 1 - (P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c)) \leq 1 \\
 0 &\leq 1 - P(A^c) - P(B^c) + P(A^c \cap B^c) \leq 1 \\
 1 - P(A^c) - P(B^c) &\leq 1 - P(A^c) - P(B^c) + P(A^c \cap B^c) \leq 1 \\
 &\Rightarrow 1 - 0 - 0 \leq P(A \cap B) \leq 1 \\
 1 &\leq P(A \cap B) \leq 1 \\
 &\Rightarrow P(A \cap B) = 1
 \end{aligned}$$

Otra forma es usando la desigualdad de Bonferroni, pues

$$\begin{aligned}
 P(A) + P(B) - 1 &\leq P(A \cap B) \leq 1 \\
 1 + 1 - 1 &\leq P(A \cap B) \leq 1 \\
 1 &\leq P(A \cap B) \leq 1 \\
 &\Rightarrow P(A \cap B) = 1
 \end{aligned}$$

Solo había que recordar que las probabilidades están acotadas entre 0 y 1.

2. Un espacio muestral finito  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$  se dice equiprobable si  $P(\omega_i) = c$ . Demuestre que:

(a)  $c = 1/n$

(b) Sea  $A$  un evento asociado a  $\Omega$ , donde  $A$  tiene  $k < n$  elementos ( $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ ), entonces  $P(A) = k/n$

(a) Sabemos que  $\Omega = \bigcup_{i=1}^n \omega_i$ , entonces por Kolmogorov se tiene

$$\begin{aligned}
 P(\Omega) &= 1 \\
 P\left(\bigcup_{i=1}^n \omega_i\right) &= 1 \\
 \sum_{i=1}^n P(\omega_i) &= 1 \\
 \sum_{i=1}^n c &= 1
 \end{aligned}$$

$$nc = 1$$

$$c = \frac{1}{n}$$

Lo anterior asumiendo  $w_i$  disjuntos 2 a 2.

(b) Nos interesa  $P(A)$ . Entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{i=1}^k w_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^k P(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{n} \\ &= \frac{k}{n} \end{aligned}$$

3. Una bola marcada puede estar en la primera o segunda de dos urnas con probabilidades  $p$  y  $1-p$  respectivamente. La probabilidad de sacar la bola marcada de la urna en la que se encuentra es  $P$ , con  $P \neq 1$ . Si extraemos un total de  $n$  bolitas, determine la cantidad necesaria de bolitas a extraer por urna, para que la probabilidad de extraer la bolita marcada sea lo mas alta posible si en cada extracción la bolita se devuelve a la urna correspondiente.

Definamos los siguientes eventos:

- $A$  : se extrae la bolita marcada
- $U_1$  : la bolita marcada está en la urna 1
- $U_2$  : la bolita marcada está en la urna 2

La probabilidad de extraer la bolita marcada la podemos obtener condicionando según la urna en la que este. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(A|U_2)\mathbb{P}(U_2) \\ &= \mathbb{P}(A|U_1)p + \mathbb{P}(A|U_2)(1-p) \end{aligned}$$

Ahora tenemos que calcular  $\mathbb{P}(A|U_1)$  y  $\mathbb{P}(A|U_2)$ . Para esto supongamos que se realizan  $m$  extracciones de la urna 1 y  $n-m$  de la urna 2.

Empecemos por  $\mathbb{P}(A|U_1)$ , vamos a extraer  $m$  bolitas de la urna 1, la bolita marcada puede salir en cualquiera de las  $m$  extracciones, es decir, puede salir en la primera extracción, o puede salir en la segunda, o puede salir a la tercera, y así sucesivamente hasta la  $m$ -ésima extracción. Definamos  $B_i$  : se extrae la bolita marcada en la  $i$ -ésima extracción y  $B_i^c$  : no se extrae la bolita marcada en la  $i$ -ésima extracción, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A|U_1) &= \mathbb{P}(B_1 \cup [B_1^c \cap B_2] \cup [B_1^c \cap B_2^c \cap B_3] \cup \dots \cup [B_1^c \cap \dots \cap B_{m-1}^c \cap B_m]) \\ &= \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_1^c \cap B_2) + \mathbb{P}(B_1^c \cap B_2^c \cap B_3) + \dots + \mathbb{P}(B_1^c \cap \dots \cap B_{m-1}^c \cap B_m) \\ &= P + (1-P)P + (1-P)^2P + \dots + (1-P)^{m-1}P \\ &= \sum_{k=1}^m (1-P)^{k-1}P \\ &= 1 - (1-P)^m \end{aligned}$$

De manera análoga se tiene que

$$\mathbb{P}(A|U_2) = 1 - (1-P)^{n-m}$$

Ahora que ya tenemos todo, reemplazamos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(A|U_2)\mathbb{P}(U_2) \\
&= \mathbb{P}(A|U_1)p + \mathbb{P}(A|U_2)(1-p) \\
&= (1 - (1-P)^m)p + (1 - (1-P)^{n-m})(1-p) \\
\mathbb{P}(A) &= (1 - (1-P)^m)p + (1 - (1-P)^{n-m})(1-p)
\end{aligned}$$

Nos interesa que esta probabilidad sea lo mas alta posible, por lo cual debemos buscar el valor de  $m$ . Esto derivando.

$$\frac{d}{dm}\mathbb{P}(A) = -p(1-P)^m \ln(1-P) + (1-p)(1-P)^{n-m} \ln(1-P)$$

Igualamos a 0 y despejamos  $m$

$$-p(1-P)^m \ln(1-P) + (1-p)(1-P)^{n-m} \ln(1-P) = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{n}{2} + \frac{\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)}{2\ln(1-P)}$$

Luego, el numero de extracciones que maximiza la probabilidad de extraer la bolita marcada es

$$m = \frac{n}{2} + \frac{\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)}{2\ln(1-P)}.$$

4. Si  $P$  es una función de probabilidad, demuestre que:

(a) para toda partición  $C_1, C_2, \dots, C_k$  de  $\Omega$

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A \cap C_i)$$

(b) Deduzca desde a) el teorema de probabilidades totales y el teorema de Bayes.

(a) Para esto iniciaremos de algo conocido. Primero recordamos que  $C_1, C_2, \dots, C_k$  es simplemente  $\Omega$ , es decir,  $\bigcup_{i=1}^k C_i = \Omega$ . Entonces

$$\begin{aligned}
A &= A \\
&= A \cap \Omega \\
&= A \cap \left( \bigcup_{i=1}^k C_i \right) \\
&= \bigcup_{i=1}^k A \cap C_i \\
P(A) &= P\left( \bigcup_{i=1}^k A \cap C_i \right) \\
\Rightarrow P(A) &= \sum_{i=1}^k P(A \cap C_i)
\end{aligned} \tag{11}$$

En (11) se uso el tercer axioma de Kolmogorov.



(b) Para el teorema de probabilidades totales usamos probabilidad condicional, de modo que

$$P(A \cap C_i) = P(A|C_i)P(C_i)$$

$$\sum_{i=1}^k P(A \cap C_i) = \sum_{i=1}^k P(A|C_i)P(C_i) \quad (12)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(A|C_i)P(C_i) \quad (13)$$

En (12) se uso lo obtenido en (11).

Para Bayes, nuevamente para un  $C_j$  fijo cualquiera, se tiene

$$\begin{aligned} P(C_j|A) &= \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(C_j \cap A)}{P(A)} \frac{P(C_j)}{P(C_j)} \\ &= \frac{P(A \cap C_j)}{P(A)} \frac{P(C_j)}{P(C_j)} \\ &= \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{P(A)} \\ P(C_j|A) &= \frac{P(A|C_j)P(C_j)}{\sum_{i=1}^k P(A|C_i)P(C_i)} \end{aligned} \quad (14)$$

En (14) se utilizo lo obtenido en (13).

Para ilustrar una partición, podemos considerar el experimento aleatorio de lanzar un dado. En este caso tenemos

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

y podemos tomar

$$C_1 = \{1\}, \quad C_2 = \{2\}, \quad C_3 = \{3\}$$

$$C_4 = \{4\}, \quad C_5 = \{5\}, \quad C_6 = \{6\}$$

y claramente  $\bigcup_{i=1}^6 C_i = \Omega$ , además de ser disjuntos dos a dos.

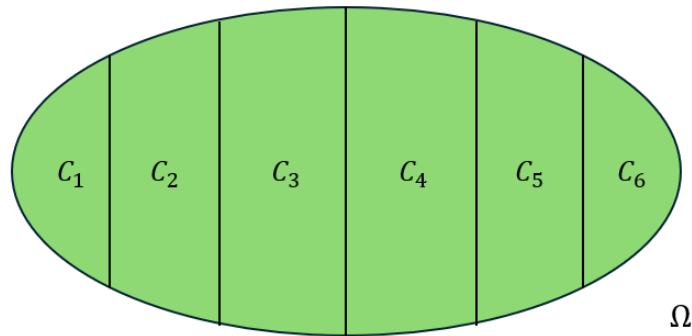


Figure 1: Ejemplo de partición de  $\Omega$

5. Una señal puede ser verde o roja con probabilidad  $4/5$  o  $1/5$ , respectivamente. La probabilidad de que sea recibido correctamente por una estación es  $3/4$ . De las dos estaciones  $A$  y  $B$ , la señal la recibe primero  $A$  y luego la estación  $A$  pasa la señal a la estación  $B$ . Si la señal recibida en la estación  $B$  es verde, entonces encuentre la probabilidad de que la señal original fuera verde.

Definamos los siguientes eventos:

- $V$  : la señal original emitida es verde
- $R$  : la señal original emitida es roja
- $A_v$  : la señal que llega a  $A$  es verde
- $A_r$  : la señal que llega a  $A$  es roja
- $B_v$  : la señal que llega a  $B$  es verde
- $B_r$  : la señal que llega a  $B$  es roja

Nos piden  $\mathbb{P}(V|B_v)$ . Esto se puede calcular vía Bayes

$$\mathbb{P}(V|B_v) = \frac{\mathbb{P}(V \cap B_v)}{\mathbb{P}(B_v)}$$

Calculemos lo necesario.

$$\mathbb{P}(V \cap B_v) = \mathbb{P}(V \cap B_v|A_r)\mathbb{P}(A_r) + \mathbb{P}(V \cap B_v|A_v)\mathbb{P}(A_v)$$

pero esto es algo complicado, por lo cual podemos desarrollar y cancelar un par de terminos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V \cap B_v) &= \mathbb{P}(V \cap B_v|A_r)\mathbb{P}(A_r) + \mathbb{P}(V \cap B_v|A_v)\mathbb{P}(A_v) \\ &= \frac{\mathbb{P}(V \cap B_v \cap A_r)\mathbb{P}(A_r)}{\mathbb{P}(A_r)} + \frac{\mathbb{P}(V \cap B_v \cap A_v)\mathbb{P}(A_v)}{\mathbb{P}(A_v)} \\ &= \mathbb{P}(B_v \cap A_r \cap V) + \mathbb{P}(B_v \cap A_v \cap V) \\ &= \mathbb{P}(B_v|A_r \cap V)\mathbb{P}(A_r|V)\mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(B_v|A_v \cap V)\mathbb{P}(A_v|V)\mathbb{P}(V) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Para calcular  $\mathbb{P}(B_v)$  podemos condicionar en todos los caminos posibles, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_v) &= \mathbb{P}(B_v|A_v \cap V)\mathbb{P}(A_v \cap V) + \mathbb{P}(B_v|A_r \cap V)\mathbb{P}(A_r \cap V) \\ &\quad + \mathbb{P}(B_v|A_v \cap R)\mathbb{P}(A_v \cap R) + \mathbb{P}(B_v|A_r \cap R)\mathbb{P}(A_r \cap R) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{20}{23} \end{aligned}$$

Finalmente reemplazamos

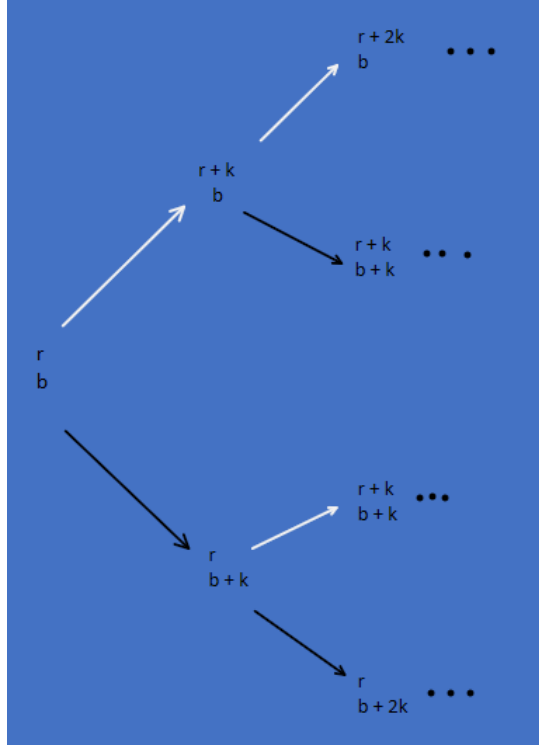
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V|B_v) &= \frac{\mathbb{P}(V \cap B_v)}{\mathbb{P}(B_v)} \\ &= \frac{1/2}{20/23} \\ &= \frac{20}{23} \end{aligned}$$

6. En una urna se tienen  $r$  bolas rojas y  $b$  bolas blancas. Un ensayo consiste en tomar una bola al azar y regresarla a la urna junto con  $k$  bolas del mismo color. Se repite este ensayo varias veces y se define el evento  $R_n$  como aquel en el que se obtiene una bola roja en la  $n$ -ésima extracción. Demuestre que para cada  $n = 1, 2, \dots$

$$(a) \quad P(R_n) = \frac{r}{r+b}$$

$$(b) \quad P(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{r+kc}{r+b+kc}$$

Podemos hacer un diagrama de árbol.



(a) Para esto usaremos inducción.

- $n = 1$

$$P(R_1) = \frac{r}{r+b}$$

- Hipótesis de inducción con  $n = k$

$$P(R_k) = \frac{r}{r+b}$$

- Para  $n = k + 1$ , buscamos demostrar  $P(R_{k+1}) = \frac{r}{r+b}$ . Condicionando en el paso anterior tenemos

$$\begin{aligned} P(R_{k+1}) &= P(R_{k+1}|R_k)P(R_k) + P(R_{k+1}|R_k^c)P(R_k^c) \\ &= \frac{r+k}{r+k+b} \frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+b+k} \frac{b}{r+k} \\ &= \frac{r}{r+b} \left( \frac{r+k}{r+k+b} + \frac{b}{r+k+b} \right) \\ \Rightarrow P(R_{k+1}) &= \frac{r}{r+b} \end{aligned}$$

Notar que para calcular  $P(R_{k+1}|R_k)$  se usó que en la  $k$ -ésima la probabilidad de sacar rojo es  $\frac{r}{r+b}$ , lo cual implica que si sacamos rojo, entonces habrán  $r+k$  rojas, del mismo modo para  $P(R_{k+1}|R_k^c)$ , si en la  $k$ -ésima la probabilidad de sacar blanca es  $\frac{b}{r+k}$ , entonces habrán  $k+b$  blancas. Y  $P(R_k)$  corresponde a la hipótesis de inducción.

(b) Podemos usar (5)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) &= \mathbb{P}(R_n|R_{n-1} \cap \dots \cap R_2 \cap R_1) \mathbb{P}(R_{n-1}|R_{n-2} \cap \dots \cap R_2 \cap R_1) \dots \mathbb{P}(R_1) \\ &= \mathbb{P}(R_1) \dots \mathbb{P}(R_{n-1}|R_{n-2} \cap \dots \cap R_2 \cap R_1) \mathbb{P}(R_n|R_{n-1} \cap \dots \cap R_2 \cap R_1) \end{aligned}$$

Ya que tenemos esto, note que cada probabilidad corresponde simplemente a obtener todas rojas hasta la  $n$ -ésima extracción. Esto lo podemos obtener viendo la imagen anterior.

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \dots \cap R_n) &= \mathbb{P}(R_1) \cdots \mathbb{P}(R_{n-1} | R_{n-2} \cap \dots \cap R_2 \cap R_1) \mathbb{P}(R_n | R_{n-1} \cap \dots \cap R_2 \cap R_1) \\ &= \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r+k}{r+b+k} \cdot \frac{r+2k}{r+b+2k} \cdots \frac{r+(n-1)k}{r+b+(n-1)k} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{r+ik}{r+b+ik}\end{aligned}$$

7. Consideremos 70 estudiantes, de los cuales 40 son varones, y 30 son mujeres. Para cada estudiante, se observa si fue admitido en una determinada universidad, donde se obtiene que 16 varones y 24 mujeres fueron admitidos en dicha universidad. ¿Cual es la proporción de mujeres que fue admitido en la universidad? ¿Cual es la proporción de hombres que fue admitido en la universidad? ¿Cual la proporción de estudiantes admitidos?

Tenemos los siguientes datos

- 70 estudiantes
  - 40 varones
    - \* 16 admitidos
    - \* 24 rechazados
  - 30 mujeres
    - \* 24 admitidas
    - \* 6 rechazadas

Sean los eventos

- $M$  = es mujer
- $V$  = es varón
- $A$  = es admitido
- $R$  = es rechazado

Si bien las preguntas son directas, la ultima la desglosaremos de una forma particular. La proporción de mujeres admitidas es

$$P(A|M) = \frac{24}{30}$$

La proporción de varones admitidos es

$$P(A|V) = \frac{16}{40}$$

La proporción de estudiantes admitidos es

$$\begin{aligned}P(A) &= \frac{40}{70} \\ &= \frac{16+24}{70} \\ &= \frac{16}{70} + \frac{24}{70} \\ &= \frac{16}{40} \frac{40}{70} + \frac{24}{30} \frac{30}{70} \\ &= P(A|V)P(V) + P(A|M)P(M)\end{aligned}$$

8. Considere una muestra con reemplazo de tamaño 2, de un total de 3 elementos. Encuentre los pares resultantes

Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla

Sin orden	$\{1, 1\}$	$\{2, 2\}$	$\{3, 3\}$	$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$
Con orden	$(1, 1)$	$(2, 2)$	$(3, 3)$	$(1, 2), (2, 1)$	$(1, 3), (3, 1)$	$(2, 3), (3, 2)$

9. Sea  $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ . Para cada una de las siguientes secuencias  $A_n; n = 1, 2, \dots$ , encuentre  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$  y  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .

(a)  $A_n = 1, 2, \dots, n$

(b)  $A_n = \mathbb{N} - 1, 2, \dots, n$

Para esto es útil desarrollar las cosas un poco.

- (a) La intersección

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \\ &= \{1\} \cap \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} \cap \cdots \\ &= \{1\}\end{aligned}$$

La unión

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \\ &= \{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \cdots \\ &= \mathbb{N}\end{aligned}$$

- (b) La intersección

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cdots \\ &= \mathbb{N} - \{1\} \cap \mathbb{N} - \{1, 2\} \cap \mathbb{N} - \{1, 2, 3\} \cap \mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4\} \cap \cdots \\ &= \{2, 3, \dots\} \cap \{3, 4, 5, \dots\} \cap \{4, 5, 6, \dots\} \cap \{5, 6, \dots\} \cap \cdots \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

La unión

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cdots \\ &= \mathbb{N} - \{1\} \cup \mathbb{N} - \{1, 2\} \cup \mathbb{N} - \{1, 2, 3\} \cup \mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4\} \cup \cdots \\ &= \{2, 3, \dots\} \cup \{3, 4, 5, \dots\} \cup \{4, 5, 6, \dots\} \cup \{5, 6, \dots\} \cup \cdots \\ &= \mathbb{N} - \{1\}\end{aligned}$$

10. Sean  $A_1, A_2 \subseteq \Omega$  y  $\mathcal{C} = \{A_1, A_2\}$ . Encuentre una  $\sigma$ -álgebra que contenga a  $\mathcal{C}$ .

Podemos tomar

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A_1, A_2, A_1^c, A_2^c, A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2, A_1^c \cap A_2^c, A_1^c \cup A_2^c\}$$

Donde es fácil corroborar que se cumple todo.

11. De entre los números  $\{1, 2, \dots, 50\}$  se escoge uno al azar. Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 o por 8 ?

Definamos los eventos

$A$  = es divisible por 6

$B$  = es divisible por 8

Nos piden  $\mathbb{P}(A \cup B)$ , entonces

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Note que  $A$  y  $B$  corresponden a

$$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$$

$$B = \{8, 16, 24, 32, 40, 48\}$$

Además ambos tienen en común dos elementos. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \frac{8}{50} + \frac{6}{50} - \frac{2}{50} \\ &= \frac{12}{50} \end{aligned}$$

12. De 6 números positivos y 8 negativos, se eligen 4 al azar (sin sustitución) y se multiplican. Cuál es la probabilidad de que el producto sea positivo ?

Tenemos un total de 14 números. Note que para que el resultado sea positivo se deben tener las siguientes opciones

- los cuatro números son positivos
- los cuatro son negativos
- dos son positivos y dos son negativos

Sean los eventos

- $A$  : los cuatro números son positivos
- $B$  : los cuatro son negativos
- $C$  : dos son positivos y dos son negativos

La probabilidad pedida se calcula como

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$$

pues cualquiera de los tres eventos satisface las condiciones. Ahora note que son eventos disjuntos, pues no pueden ocurrir en simultáneo, por lo cual

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$

Podemos proceder usando (9). Para  $A$  queremos obtener 4 del grupo de los positivos, y 0 de los negativos, entonces

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{6}{4} \binom{8}{0}}{\binom{14}{4}}$$

para  $B$  es similar, solo que en el grupo de los negativos

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{6}{0} \binom{8}{4}}{\binom{14}{4}}$$

para  $C$ , queremos que hayan 2 en el grupo de los positivos, y 2 en el de los negativos, entonces

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{6}{2} \binom{8}{2}}{\binom{14}{4}}$$

Finalmente reemplazamos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B \cup C) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ &= \frac{\binom{6}{4} \binom{8}{0}}{\binom{14}{4}} + \frac{\binom{6}{0} \binom{8}{4}}{\binom{14}{4}} + \frac{\binom{6}{2} \binom{8}{2}}{\binom{14}{4}} \\ &= 0.5044955 \end{aligned}$$

Pregunta para el lector: ¿Como cambiaría el problema si ahora es con reemplazo?

13. Un trabajador elabora  $n$  artículos. El evento “El  $i$ -ésimo artículo es defectuoso” será denotado por  $A_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ . Describa los siguientes eventos usando los conjuntos  $A_i$  y las operaciones usuales entre eventos;

- (a)  $B$  = “Al menos un artículo es defectuoso”.
- (b)  $C$  = “Ninguno de los  $n$  artículos es defectuoso”.
- (c)  $D$  = “Exactamente un artículo es defectuoso”.
- (d)  $E$  = “A lo más un artículo es defectuoso”.
- (a) Este evento puede ocurrir de varias maneras. Puede haber un artículo defectuoso, o pueden haber dos artículos defectuosos, o pueden haber tres artículos defectuosos, y así hasta poder haber  $n$  artículos defectuosos. Esto se escribe como

$$B = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

- (b) Este evento es que ninguno sea defectuoso, es decir, su complemento, esto es

$$C = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \dots \cap A_n^c = \bigcap_{i=1}^n A_i^c$$

- (c) Este evento puede pasar de varias maneras, pues puede ser el artículo 1 el que este defectuoso, que sea el artículo 2, o que sea algún artículo, y que los demás no sean defectuosos. Por lo cual esto es

$$(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap \dots \cap A_n^c) \cup (A_2 \cap A_1^c \cap A_3^c \cap \dots \cap A_n^c) \cup \dots \cup (A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{n-1}^c)$$

- (d) Este evento también puede pasar de varias maneras. Primero puede no haber ningún artículo defectuoso, o puede haber 1. Este ultimo es lo mismo que antes, por lo cual

$$E = (A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_n^c) \cup D$$

14. Suponga que el 35% de los estudiantes de una universidad están tomando Inglés, 7% están tomando Alemán y 2% restan tomando ambos Inglés y Alemán.

- (a) Qué % de la población de estudiantes esta tomando Inglés, pero no Alemán ?
- (b) Qué % de la población de estudiantes no esta tomando Inglés, ni Alemán ?

Para este ejercicio trabajaremos con los mismos porcentajes, pero recordar que si se quiere una probabilidad, los porcentajes se deben dividir por 100.

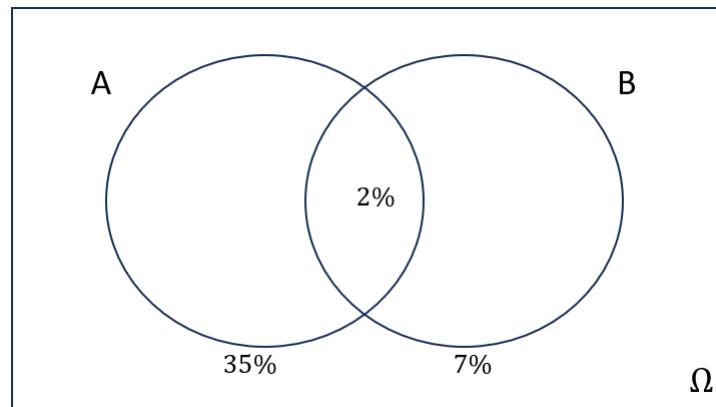
Definamos los siguientes eventos

- $A$  : estudiantes que están tomando Inglés
- $B$  : estudiantes que están tomando Alemán

Note que nos dan los porcentajes de cada uno, y en particular el ultimo porcentaje corresponde a la intersección de ambos. Entonces tenemos

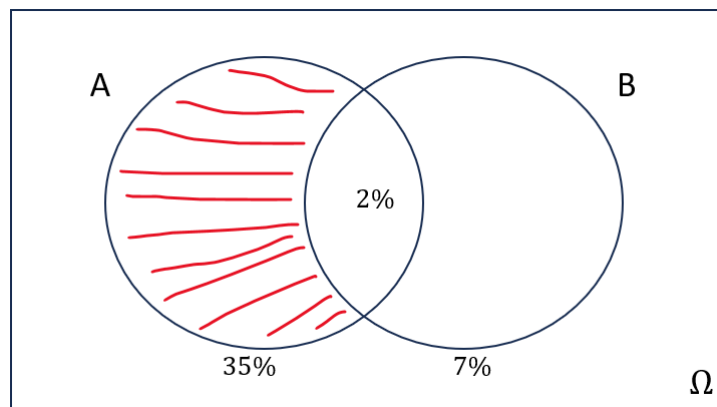
- $A = 35\%$
- $B = 7\%$
- $A \cap B = 2\%$

Podemos hacer un diagrama de Venn



Acá  $\Omega$  representa a todos los estudiantes de la Universidad.

- (a) Los estudiantes que solo están tomando Inglés corresponde a



Esto se puede obtener de diversas maneras. La mas fácil, es restar el evento  $A \cap B$  al evento  $A$ , para así eliminar a los que están tomando Alemán e Inglés y quedarnos solo con los que toman Inglés. Esto es

$$A - (A \cap B) = 35\% - 2\% = 33\%$$

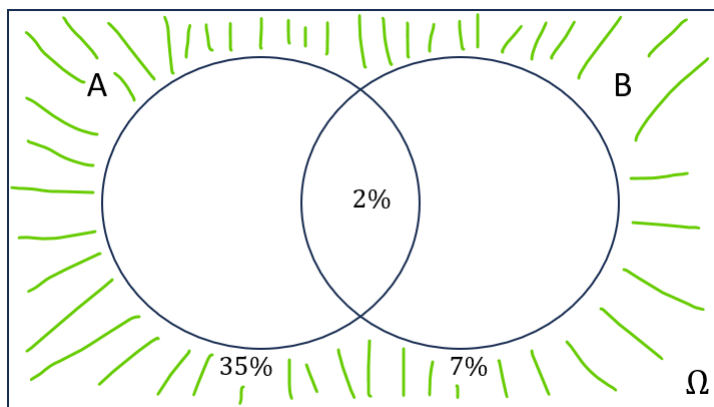
La otra manera, es obtener la unión, y restarle  $B$ . O de forma equivalente

$$\begin{aligned} A \cup B &= A + B - A \cap B \\ A \cup B - B &= A + B - A \cap B - B \\ A \cup B - B &= A - A \cap B \\ &= 35\% - 2\% \\ &= 33\% \end{aligned}$$

La que coincide con lo anterior.



(b) Los estudiantes que no están tomando ninguno de los idiomas corresponde a



Esto es la totalidad de los estudiantes menos la unión de los eventos  $A$  y  $B$ , entonces

$$\begin{aligned}\Omega - (A \cup B) &= 100\% - (A + B - A \cap B) \\ &= 100\% - (35\% + 7\% - 2\%) \\ &= 100\% - 40\% \\ &= 60\%\end{aligned}$$

15. Se lanza al aire una moneda y se pregunta cuál es la probabilidad condicionada de que aparezca cara por primera vez en la  $N$ -ésima tirada, sabiendo que, por lo menos, ha salido cara una vez en las  $M + N$  primeras tiradas.

Note que vamos a realizar  $N + M$  lanzamientos. Definamos los siguientes eventos

- $A$  : sale cara en la  $N$ -ésima tirada
- $B$  : ha salido al menos una cara en las primeras  $N + M$  tiradas.

Se pide  $\mathbb{P}(A|B)$ . Entonces

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Para calcular  $\mathbb{P}(A)$ , note que es equivalente a calcular que salga solo una moneda en  $N$  tiradas, pues solo hay una combinación para tal evento, entonces

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{N-1}}$$

para calcular  $\mathbb{P}(B)$  note que es mejor calcular el complemento, es decir  $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c)$ , esto corresponde a que no salga ninguna cara en las  $N + M$  tiradas, entonces

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{1}{2^{N+M}}$$

Finalmente note que  $\mathbb{P}(B|A)$  corresponde a la probabilidad de que salga al menos una cara en las primeras  $N + M$  tiradas, **dado** que ya salió cara, pero esto es simplemente 1, pues ya salió una cara, por lo cual sale al menos una con seguridad, por lo tanto, tenemos que la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{N-1}}}{1 - \frac{1}{2^{N+M}}}$$

16. En una caja hay 99 monedas honestas y una con doble cara. Suponga que se extrae aleatoriamente una moneda, se lanza  $n$  veces, y resulta cara en todos los lanzamientos. ¿Cuál es el  $n$  más pequeño tal que, dada esta información, la probabilidad que la moneda tiene dos caras es de al menos  $9/10$ ?

Podemos condicionar según la moneda extraída, en particular nos interesa la moneda con doble cara. Sean los eventos

- $A$  = se extrae moneda con doble cara
- $A^c$  = se extrae moneda honesta
- $H_n$  = salen todas caras en  $n$  lanzamientos

Se pide

$$\mathbb{P}(A|H_n)$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|H_n) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap H_n)}{\mathbb{P}(H_n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A \cap H_n)}{\mathbb{P}(H_n)} \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(H_n|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(H_n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(H_n|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(H_n|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(H_n|A^c)\mathbb{P}(A^c)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{1 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{99}{100}}\end{aligned}$$

Nos interesa minimizar  $n$  tal que  $\mathbb{P}(A|H_n) \geq 9/10$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|H_n) &\geq 9/10 \\ \frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{1 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{99}{100}} &\geq 10 \\ \frac{1}{100} &\geq 9 \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{2^n} \\ 2^n &\geq 9 \cdot 99 \\ n &\geq 10\end{aligned}$$

17. Suponga que 5 bolitas se distribuyen en 7 urnas. Asuma que cada bola cae de manera independiente en alguna de las urnas con igual probabilidad. Determine la probabilidad de que haya al menos una urna con mas de una bolita.

Sea  $A$  = al una urna contiene al menos una bolita. Podemos calcular el complemento  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$ . Note que  $\mathbb{P}(A^c)$  corresponde a que ninguna urna contenga mas de una bolita, osea, que las 5 bolitas caigan en urnas diferentes. Podemos aplicar (9). La primera bolita tiene 7 posibilidades donde caer, la segunda bolita tiene 6 posibilidades, y así sucesivamente hasta que la quinta bolita tiene 2 posibilidades donde caer. Claramente  $|\Omega| = 7^5$ . Entonces tenemos

$$P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7^5}$$

Luego, la probabilidad pedida es

$$P(A) = 1 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7^5}$$

18. Para descubrir el cáncer se ha iniciado una prueba que parece prometedora. Se encontró que el 98% de los cancerosos en un hospital reaccionaron positivamente a la prueba, mientras que solamente el 4% de aquellos que no tenían cáncer lo hacían así. Si el 3% de los pacientes del hospital tienen cáncer, cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar, que reacciona positivamente a la prueba, tenga cáncer ?

Definamos los siguientes eventos

- $A$  : el paciente tiene cáncer
- $B$  : el paciente reacciona positivamente a la prueba
- $C$  : el paciente reacciona negativamente a la prueba

por enunciado tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 0.03 \\ \mathbb{P}(B|A^c) &= 0.04 \\ \mathbb{P}(B|A) &= 0.98\end{aligned}$$

Nos piden  $\mathbb{P}(A|B)$ . Usando el Bayes (6), podemos condicionar según la reacción del paciente. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|B) &= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)} \\ &= \frac{0.98 \cdot 0.03}{0.98 \cdot 0.03 + 0.04 \cdot 0.97} \\ &= 0.43108\end{aligned}$$

19. Sean  $A$  y  $B$  dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Suponga que  $\mathbb{P}(A) = 0.4$  mientras que  $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.7$ . Sea  $\mathbb{P}(B) = p$

- (a) Para qué elección de  $p$ ,  $A$  y  $B$  son mutuamente excluyentes?
- (b) Para qué elección de  $p$ ,  $A$  y  $B$  son eventos independientes?

Para esto recordamos que dos eventos  $A$  y  $B$  son excluyentes o disjuntos si  $A \cap B = \emptyset$ . Y dos eventos  $A$  y  $B$  son independientes si  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ .

- (a) Debemos ver para que valor de  $p$  se cumple  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B) \\ &= 0.4 + p - 0.7 \\ &= p - 0.3 \\ &\text{imponemos la condición} \\ 0 &= p - 0.3 \\ \Rightarrow p &= 0.3\end{aligned}$$

- (b) Debemos ver para que valor de  $p$  se cumple que  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ . Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= 0.4 \cdot p \\ \Rightarrow p &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{0.4}\end{aligned}$$

20. Suponga que se lanzan dos dados honestos distinguibles (1 y 2). Considere los siguientes eventos:

$A_1$  = El resultado del dado 1 es un número par  
 $A_2$  = El resultado del dado 2 es un número par  
 $A_3$  = Los dados dan el mismo resultado

Calcule

- (a)  $\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)$
- (b)  $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$
- (c)  $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3^c)$
- (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) &= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \\ &= \frac{3/36}{9/36} \\ &= 1/3\end{aligned}$$

(b)

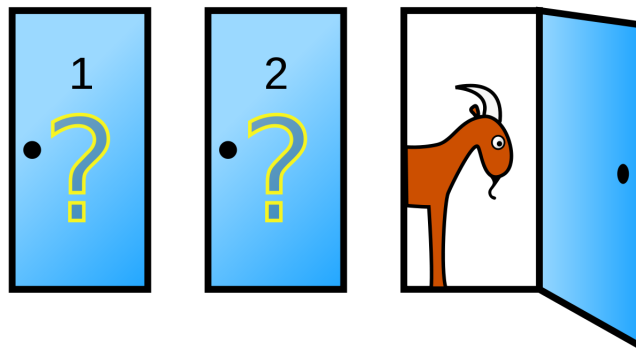
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \mathbb{P}([A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c]^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \\ &= 1 - \frac{3}{36} \\ &= 1 - \frac{1}{9} \\ &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3^c) &= \mathbb{P}([A_1^c \cap A_2^c \cap A_3]^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \\ &= 1 - \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \frac{\mathbb{P}(A_2^c \cap A_1^c)}{\mathbb{P}(A_2^c \cap A_1^c)} \\ &= 1 - \mathbb{P}(A_3 | A_2^c \cap A_1^c) \mathbb{P}(A_2^c \cap A_1^c) \\ &= 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2}{36} \\ &= \frac{11}{12}\end{aligned}$$

21. El Problema de Monty Hall es un problema de probabilidad que está inspirado por el concurso televisivo estadounidense Let's Make a Deal (Hagamos un trato), famoso entre 1963 y 1986. Su nombre proviene del presentador, Monty Hall. En este concurso, el concursante escoge una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra atrás la puerta. Una de ellas oculta un automóvil, y tras las otras dos hay una cabra. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe dónde está el premio del automóvil, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Desde el punto de vista de probabilidades ¿es mejor cambiarse de puerta o mantenerse para ganar el automóvil?

Para esto hay que ser astuto en saber donde condicionar. Para hacernos una idea veamos la siguiente imagen



El truco acá está en asumir un par de cosas y saber donde condicionar.

Lo primero que se hace es seleccionar una puerta, y seleccionar la correcta de entre 3, tiene probabilidad  $1/3$ . Entonces definamos los eventos

$A$  = Se selecciona la puerta con el automóvil

$A^c$  = Se selecciona la puerta con una cabra

tenemos

$$\mathbb{P}(A) = 1/3$$

$$\mathbb{P}(A^c) = 2/3$$

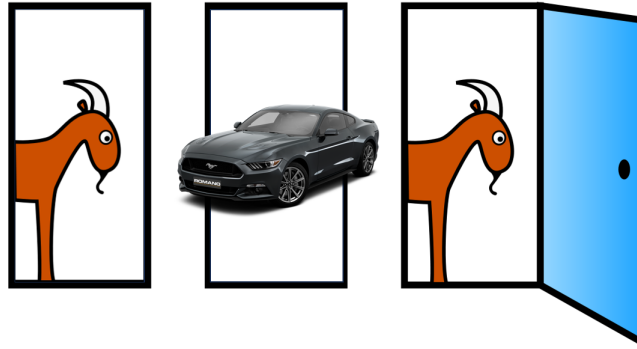
Note entonces que para calcular la probabilidad de ganar el automóvil, podemos condicionar según la puerta que seleccionamos. Entonces

$$\mathbb{P}(\text{Ganar}) = \mathbb{P}(\text{Ganar}|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\text{Ganar}|A^c)\mathbb{P}(A^c)$$

Ahora hay que asumir los dos escenarios. Nos cambiamos de puerta o nos quedamos con la seleccionada inicialmente.

- Nos cambiamos

Veamos la siguiente imagen



Si nos cambiamos, habiendo seleccionado la puerta correcta, entonces no vamos a ganar, por lo cual  $\mathbb{P}(\text{Ganar}|A) = 0$ . Entonces bajo este escenario

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Ganar}) &= \mathbb{P}(\text{Ganar}|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\text{Ganar}|A^c)\mathbb{P}(A^c) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

- Nos quedamos con la puerta inicial

En este caso si nos quedamos con la puerta seleccionada inicialmente, entonces ganamos si nos quedamos, por lo cual  $\mathbb{P}(\text{Ganar}|A) = 1$ . Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Ganar}) &= \mathbb{P}(\text{Ganar}|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\text{Ganar}|A^c)\mathbb{P}(A^c) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

En resumen

- Cambiarse  $\Rightarrow \mathbb{P}(\text{Ganar}) = 1/3$
- No cambiarse  $\Rightarrow \mathbb{P}(\text{Ganar}) = 2/3$

Luego, es mejor quedarse en la puerta seleccionada inicialmente.

22. La paradoja de Bertrand o la paradoja de las tres cajas es un problema similar al anterior. Hay 3 cajas. La primera contiene dos monedas de plata; la segunda, dos monedas de oro; la tercera, una moneda de oro y una de plata. Se elige una caja al azar y, luego, se elige al azar una de las monedas que contiene esa caja. Resulta ser una moneda de oro. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda moneda también sea de oro?

Definamos los siguiente eventos

$A$  = Caja con 2 de oro

$B$  = Caja con 2 de plata

$C$  = Caja con 1 de plata y 1 de oro

$O$  = Se extrajo Oro en la primera extracción

Nos piden  $\mathbb{P}(A|O)$ , pues queremos ver la probabilidad de que nos toque la caja con 2 de oro (la que nos sirve) sabiendo que se extrajo oro en la primera. Para esto podemos usar (6), condicionando en la caja seleccionada.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A|O) &= \frac{\mathbb{P}(O|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(O|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(O|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(O|C)\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{1 \cdot 1/3}{1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3} \\ &= 2/3\end{aligned}$$

23. Suponga el experimento de lanzar una moneda honesta dos veces. Describa  $\Omega$ .

$$\Omega = \{\{C, C\}, \{C, S\}, \{S, S\}, \{S, C\}\}$$

24. Sea una cadena de caracteres de longitud  $w$  sobre un alfabeto dado  $A$  (de tamaño  $|A|$ , incluida la puntuación) se llama cadena  $w$ . Por ejemplo, “banana” es una cadena de 6 caracteres sobre el alfabeto  $\{a, b, n\}$ . Supongamos que a una cantidad de monos se le da una computadora con teclado de  $|A|$  teclas, cada una correspondiente a un carácter diferente. Suponga que el experimento está diseñado de tal manera que cada mono escribirá su cadena  $w$  en un tiempo infinito. En base a lo anterior demuestre el siguiente teorema:



Figure 2: Imagen cómica del problema

Al menos uno de los infinitos monos que escriben cadenas  $w$ , como se describe en el párrafo anterior, producirá casi con seguridad una copia perfecta de una cadena  $w$  objetivo en un tiempo finito.

Para esto definamos el siguiente evento

$$T_w = \text{Un mono escribe el carácter objetivo de largo } w$$

el tipeo de una letra es totalmente aleatorio, lo asumimos equiprobable, y cada tipeo es independiente de los demás. Entonces la probabilidad de que un mono escriba el carácter es

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_w) &= \frac{1}{|A|} \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \frac{1}{|A|} \cdots \frac{1}{|A|} \\ &= \left(\frac{1}{|A|}\right)^w\end{aligned}$$

Cada mono escribe de manera independiente a los demás monos. Asumamos que tenemos  $k$  monos escribiendo y definamos el evento  $T_{w,i}$  como el  $i$ -ésimo mono escribe de forma correcta su carácter,  $i = 1, 2, 3, \dots, k$ . Nos piden la probabilidad de que al menos uno escriba su carácter, esto es

$$\mathbb{P}(T_{w,1} \cup T_{w,2} \cup T_{w,3} \cdots T_{w,k})$$

podemos usar (1). Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_{w,1} \cup T_{w,2} \cup T_{w,3} \cdots T_{w,k}) &= 1 - \prod_{i=1}^k (1 - T_{w,i}) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^k \left(1 - \left(\frac{1}{|A|}\right)^w\right) \\ &= 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{|A|}\right)^w\right)^k \end{aligned}$$

Ahora veamos que pasa si tenemos una cantidad infinita de monos, esto es, hacer tender  $k$  al infinito

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_{w,1} \cup T_{w,2} \cup T_{w,3} \cdots T_{w,k}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{|A|}\right)^w\right)^k \\ &= 1 - 0 \\ \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_{w,1} \cup T_{w,2} \cup T_{w,3} \cdots T_{w,k}) &= 1 \end{aligned}$$

Concluyendo así que si el numero de monos es infinito, entonces al menos uno escribirá su carácter correspondiente de manera correcta.

25. Un examen de oposición consta de 14 temas. Se debe escoger un tema de entre dos tomados al azar. Calcule la probabilidad de que a un alumno que ha preparado 5 temas le toque al menos uno que sabe. ¿Cual es el numero mínimo de temas que debe preparar para que tenga una probabilidad superior a 1/2 de superar el examen?

Definamos el evento

$A$  : Le toca al menos un tema que sabe

Claramente nos piden  $\mathbb{P}(A)$ . Podemos calcular esto vía complemento, lo cual es

$A^c$  : No le toca ningún tema que sabe

Entonces

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c)$$

Procedamos mediante (9). De los 14 temas, se extraen dos al azar, por lo cual

$$|\Omega| = \binom{14}{2}$$

Ahora, queremos que 2 temas pertenezcan al grupo de los temas que no estudio, y que ningún tema seleccionado al azar pertenezca al los que estudio, esto es

$$|A^c| = \binom{5}{0} \binom{9}{2}$$

Finalmente la probabilidad es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) \\ &= 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} \\ &= 1 - \frac{\binom{5}{0} \binom{9}{2}}{\binom{14}{2}} \end{aligned}$$

Ahora queremos que  $\mathbb{P}(A) > 1/2$  en base a la cantidad mínima de temas a estudiar. Definamos el siguiente evento

$E_i$  : Le toca al menos un tema que sabe habiendo estudiado  $i$  temas

Nuevamente

$$\mathbb{P}(E_i) = 1 - \mathbb{P}(E_i^c)$$

Acá  $\Omega$  es el mismo. Para  $|E_i^c|$  tenemos

$$|E_i^c| = \binom{i}{0} \binom{14-i}{2}$$

pues queremos que de los  $i$  temas que estudio, no le toque ninguno  $(14-i)$ , y que del resto que no estudio, salgan los 2. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_i) &= 1 - \mathbb{P}(E_i^c) \\ &= 1 - \frac{\binom{i}{0} \binom{14-i}{2}}{\binom{14}{2}} \end{aligned}$$

Nos interesa encontrar  $i$  tal que  $\mathbb{P}(E_i) > 1/2$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_i) &= 1 - \frac{\binom{i}{0} \binom{14-i}{2}}{\binom{14}{2}} > 1/2 \\ \frac{\binom{i}{0} \binom{14-i}{2}}{\binom{14}{2}} &< 1/2 \\ \frac{(14-i)!}{2!(14-i-2)!} &< 1/2 \\ \frac{14!}{2!(14-2)!} &< 1/2 \\ \frac{(14-i)!}{(12-i)!} \frac{12!}{14!} &< 1/2 \\ \frac{(14-i)(14-i-1)(14-i-2)!}{(12-i)!} \frac{1}{14 \cdot 13} &< 1/2 \\ \frac{(14-i)(13-i)}{14 \cdot 13} &< 1/2 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ultima inecuación se tiene que el alumno debe estudiar aproximadamente 4 temas para tener una probabilidad mayor a  $1/2$  de aprobar el examen.

26. Suponga que en promedio el curso de Modelos Probabilísticos tiene 45 alumnos en el primer semestre de cada año. En base a esto, determine la probabilidad de que al menos dos estudiantes cumplan años el mismo día.

Definamos el siguiente evento

$A$  : Al menos dos alumnos cumplen años el mismo día

El complemento de  $A$  en este contexto es

$A^c$  : Ningún alumno cumple años el mismo día

tenemos

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-44}{365}$$

pues un estudiante puede estar de cumpleaños cualquiera de los 365 días, el siguiente estudiante debe estar un día diferente al ya seleccionado, hay 364 días en los que puede estar de cumpleaños, el siguiente estudiante tiene 363 días, y así sucesivamente.



Entonces la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) \\ &= 1 - \prod_{i=0}^{44} \frac{365-i}{365} \\ &= 0.9409759\end{aligned}$$

27. Bajo el mismo contexto que antes, determine la probabilidad de que alguien comparta fecha de cumpleaños con el profesor Reinaldo.

Podemos proceder igual que antes, la probabilidad de que ningún estudiante comparta fecha de cumpleaños con el profesor es

$$\frac{364^{45}}{365^{45}}$$

pues el profesor esta un día de cumpleaños, y para que no se comparta la fecha de cumpleaños hay 364 días a elegir. Luego, la probabilidad de que alguien comparta fecha de cumpleaños con el profesor Reinaldo es

$$1 - \frac{364^{45}}{365^{45}} = 0.12$$

28. Se lanzan dos monedas de manera independiente, donde cada moneda tiene las siguientes probabilidades de dar cara  $\mathbb{P}(\text{Cara}) = u$  y  $\mathbb{P}(\text{Cara}) = w$ . Defina

$$\begin{aligned}p_0 &= \mathbb{P}(\text{Salen 0 caras}) \\ p_1 &= \mathbb{P}(\text{Salen 1 cara}) \\ p_2 &= \mathbb{P}(\text{Salen 2 caras})\end{aligned}$$

¿Se puede elegir  $u$  y  $w$  tal que  $p_0 = p_1 = p_2$ ?

Encontremos expresiones para  $p_0, p_1, p_2$ .

$$\begin{aligned}p_0 &= \mathbb{P}(\text{Salen 0 caras}) \\ &= \mathbb{P}(\text{sello})\mathbb{P}(\text{sello}) \\ &= (1-u)(1-w) \\ p_1 &= \mathbb{P}(\text{Sale 1 cara}) \\ &= \mathbb{P}(\text{sello})\mathbb{P}(\text{cara}) + \mathbb{P}(\text{cara})\mathbb{P}(\text{sello}) \\ &= (1-u)w + u(1-w) \\ p_2 &= \mathbb{P}(\text{Salen 2 caras}) \\ &= uw\end{aligned}$$

Se busca solucionar entonces

$$\begin{aligned}p_0 &= p_2 \\ p_1 &= p_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1-u)(1-w) &= uw \Rightarrow u+w=1 \\ (1-u)w + u(1-w) &= uw \Rightarrow uw = 1/3\end{aligned}$$

Despejando  $w$  en la primera ecuación y reemplazando en la ultima ecuación, tenemos

$$u(1-u) = 1/3$$

Pero esta ecuación no tiene solución en los reales, por lo cual no existen  $u, w$  tales que satisfagan lo pedido.

29. Demuestre que la intersección de dos  $\sigma$ -álgebra es una  $\sigma$ -álgebra.

Sean  $\mathcal{F}_1$  y  $\mathcal{F}_2$  dos  $\sigma$ -álgebras definidas sobre un espacio muestral  $\Omega$ . Debemos corroborar 1.2. Entonces

- Como  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  contienen al  $\Omega$  por definición, entonces claramente

$$\Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$$

- Sea  $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ , entonces esto significa que  $A \in \mathcal{F}_1$  y  $A \in \mathcal{F}_2$ , por lo cual ambas contienen  $A$  y  $A^c$  por definición de  $\sigma$ -álgebra, lo cual implica que  $A^c \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$
- El argumento es similar al anterior. Sea  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ , entonces  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_1$  y  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}_2$ , pero como son  $\sigma$ -álgebras se tiene que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ . Lo que implica que  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$

30. Encuentre la cantidad de derivadas parciales de orden " $r$ " que tiene una función de  $n$  variables. Recuerde que el orden en que se deriva no importa, por ejemplo

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} f(x, y) = \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} f(x, y)$$

Entonces necesitamos encontrar las combinaciones que hay de " $r$ " elementos con repetición de un total de  $n$  sin importar el orden, es decir, si tenemos 3 números disponibles para elegir, y nosotros vamos a extraer aleatoriamente 4 números, sin importar el orden pero con reemplazo, entonces hay

$$\binom{4+3-1}{3} = 10$$

combinaciones. Lo anterior es de la tabla (1.4). Para los números piense que hay 3 números a elegir, seleccionamos uno al azar, lo anotamos, lo devolvemos, y volvemos a seleccionar aleatoriamente, y así 4 veces. Entonces, para nuestro caso, tenemos  $n$  elementos disponibles a elegir, y vamos a extraer " $r$ " con repetición y sin orden, pues las letras  $x, y, z$  pueden volver a salir.

Luego, para una función de  $n$  variables hay un total

$$\binom{n+r-1}{r}$$

derivadas parciales de orden " $r$ ".

31. Suponga que los números de una lotería corresponden a los días del año, asumiendo que hay 366 días. Determine la probabilidad de que ningún número sea del mes de septiembre, si la lotería sortea 30 números sin reemplazo.

Podemos aplicar (9). Con

$$|\Omega| = \binom{366}{30}$$

Para  $|A|$ , queremos que 30 números queden en los otros días distintos de septiembre, y que 0 queden en septiembre, entonces

$$\binom{366-30}{30} \binom{30}{0}$$

Finalmente, la probabilidad pedida es

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{366-30}{30} \binom{30}{0}}{\binom{366}{30}}$$

32. Dos personas lanzan una moneda  $n$  veces cada una, de manera independiente. Calcule la probabilidad de que ambos obtengan la misma cantidad de caras.

Sea el evento

$$A_i = \text{La primera persona obtiene } i \text{ caras y la segunda obtiene } i \text{ caras, } i = 1, 2, \dots, n$$

Como nos piden que tengan la misma cantidad de caras, hay varias formas, pues pueden tener 0 caras, 1 cara, 2 caras, etc, por lo cual se pide

$$\mathbb{P}(\text{misma cantidad de caras}) = \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(A_i)$$

Ahora, como los lanzamientos entre las personas son independientes, la probabilidad de obtener cierta cantidad de caras es la misma para ambos, por lo cual es la multiplicación de estas. Esto se calcula de la siguiente manera: queremos  $i$  caras, y cada cara sale con probabilidad  $1/2$ , por lo cual si queremos  $i$  caras en  $n$  lanzamientos, esto pasa con probabilidad  $\frac{1}{2^i}$ , y el resto queremos que salgan sellos (que no sean caras), esto pasa con probabilidad  $\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-i}$ , ahora tenemos que ver todas las combinaciones posibles que hay para que salgan  $i$  caras, como no nos importa el orden, y es sin reemplazo, hay un total de  $\binom{n}{i}$  combinaciones. Luego, la probabilidad de obtener  $i$  caras es

$$\binom{n}{i} \frac{1}{2^i} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-i}$$

Entonces como queremos que las dos personas tengan la misma cantidad se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{misma cantidad de caras}) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \frac{1}{2^i} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-i} \cdot \binom{n}{i} \frac{1}{2^i} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-i} \\ &= \frac{1}{4^n} \sum_{i=1}^n \left[ \binom{n}{i} \right]^2 \\ &= \frac{1}{4^n} \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

33. Suponga que una familia tiene 2 bebés. Se sabe que al menos uno de ellos es niño, ¿cual es la probabilidad de que los dos bebés sean niños?

Denotemos por  $M$  si es niño, y  $F$  si es niña. El espacio muestral en este caso es

$$\Omega = \{\{M, M\}, \{M, N\}, \{N, N\}\}$$

Se pide  $\mathbb{P}(\text{ambos sean niños} | \text{al menos uno es niño})$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{ambos sean niños} | \text{al menos uno es niño}) &= \frac{\mathbb{P}(\text{ambos sean niños} \cap \text{al menos uno es niño})}{\mathbb{P}(\text{al menos uno es niño})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{ambos sean niños})}{2/3} \\ &= \frac{1/3}{2/3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

34. Se lanza un dado hasta que aparezca un 6. ¿Cual es la probabilidad de que el dado se tenga que lanzar mas de 5 veces?

Esto es equivalente a calcular que en los 5 primeros lanzamientos no salga un 6. Entonces la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}(\text{tener que lanzar mas de 5 veces}) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$$

Queda como propuesto para el lector calcular la probabilidad vía complemento, el cual se calcula como  $1 - \sum_{i=0}^4 \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^i$

35. Suponga que el 5% de los hombres y el 0.25% de las mujeres son daltónicos. Se selecciona una persona al azar y resulta ser daltónica. ¿Cual es la probabilidad de que sea hombre?

Definamos los siguientes eventos

$H$  : es hombre  
 $M$  : es mujer  
 $D$  : es daltónica

del enunciado tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D|H) &= 0.05 \\ \mathbb{P}(D|M) &= 0.0025\end{aligned}$$

Nos piden  $\mathbb{P}(H|D)$ . Podemos usar Bayes condicionando en si es hombre o mujer, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H|D) &= \frac{\mathbb{P}(D|H)\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(D|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(D|M)\mathbb{P}(M)} \\ &= \frac{0.05 \cdot 1/2}{0.05 \cdot 1/2 + 0.0025 \cdot 1/2} \\ &= 0.9524\end{aligned}$$

Esto asumiendo que la probabilidad de extraer un hombre es la misma que la de una mujer.

36. Animales de una especie particular de roedores han nacido. Existen dos tipos de estos roedores (Tipo I y II) con dos colores de pelaje por tipo. La probabilidad de tener un roedor de pelaje café dado que es del Tipo I es  $2/3$ . La probabilidad de tener un roedor de pelaje gris dado que es del Tipo II es  $2/5$ .

- (a) ¿Cual es la probabilidad de que el animal elegido tenga pelaje de color café si es seleccionado al azar de entre 5 animales del tipo I y 3 animales del tipo II?  
 (b) ¿Cual es la probabilidad de que sea del Tipo I, si se seleccionó un roedor con pelaje café?

Definamos los siguientes eventos

$T1$  : roedor de tipo I  
 $T2$  : roedor de tipo II  
 $C$  : pelaje café  
 $G$  : pelaje gris

por enunciado tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C|T1) &= 2/3 \\ \mathbb{P}(G|T2) &= 2/5\end{aligned}$$

(a) Para esto podemos probabilidades totales (13), entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(C|T1)\mathbb{P}(T1) + \mathbb{P}(C|T2)\mathbb{P}(T2) \\ &= \mathbb{P}(C|T1)\mathbb{P}(T1) + \mathbb{P}(G^c|T2)\mathbb{P}(T2)\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&= \mathbb{P}(C|T1)\mathbb{P}(T1) + (1 - \mathbb{P}(G|T2))\mathbb{P}(T2) \\ &= 2/3 \cdot 5/8 + (1 - 2/5) \cdot 3/8 \\ &= 77/120\end{aligned}\tag{16}$$

Note que en (15) se tiene que  $\mathbb{P}(C|T2)$  es equivalente a calcular  $\mathbb{P}(G^c|T2)$ , pues queremos la probabilidad de que sea de color café dado que es de la especie II, y luego calculamos la probabilidad de que no sea de color Gris ( su complemento), y luego aplicar (4).

(b) Nos piden  $\mathbb{P}(T1|C)$ , usando Bayes tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T1|C) &= \frac{\mathbb{P}(C|T1)\mathbb{P}(T1)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{2/3 \cdot 5/8}{77/120} \\ &= \frac{50}{77}\end{aligned}$$

37. Demuestre que si  $P(\cdot)$  es una medida de probabilidad y  $B$  un evento con  $P(B) > 0$ , entonces  $P(\cdot|B)$  cumple con los axiomas de Kolmogorov.

Es claro que  $P(\cdot|B) \geq 0$ . Veamos si  $P(\Omega|B) = 1$ .

$$\begin{aligned}P(\Omega|B) &= \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(B)}{P(B)} \\ &= 1\end{aligned}$$

se cumple. Ahora sean  $A_1, A_2, \dots$  eventos disjuntos, entonces

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) &= \frac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)\end{aligned}$$

Mostrando así lo pedido.

38. Suponga que van a enviarse cinco jueces federales a cierto Estado. El jefe del senado estatal envía al presidente una lista que contiene los nombres de diez mujeres y cuatro hombres. Si el presidente decide que de los cinco jueces tres deben ser mujeres y dos hombres. ¿Cuál es la probabilidad de que, tomando de la lista una mujer al azar, sea elegida como juez federal?

Podemos usar (9), donde

$$|\Omega| = \binom{10}{1}$$

$$|A| = \binom{3}{1} \binom{7}{0}$$

La probabilidad pedida es

$$\frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{3}{1}\binom{7}{0}}{\binom{10}{1}} = 0.3$$

39. Suponga que la probabilidad de acertar a un objetivo es  $1/5$ . Se realizan 10 disparos independientes.

- (a) ¿Cual es la probabilidad de que se acerte al objetivo al menos dos veces?  
 (b) ¿Cual es la probabilidad condicional de que se acerte al objetivo al menos dos veces dado que se ha acertado al menos una vez?  
 (a) Podemos calcular la probabilidad via complemento

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{acertar al menos dos veces}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{Acertar 0 veces o acertar 1 vez}) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(\text{acertar 0 veces}) + \mathbb{P}(\text{acertar 1 vez})) \\ &= 1 - \left( \left(\frac{4}{5}\right)^{10} + \binom{10}{1} \frac{1}{5} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{10-1} \right) \\ &= 0.6241904\end{aligned}$$

Recordar que podemos acertar en cualquiera de los 10 disparos.

- (b) Podemos aplicar condicional de manera directa e ir desarrollando

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{acertar al menos dos veces} | \text{se acertó al menos una vez}) &= \frac{\mathbb{P}(\text{acertar al menos dos veces} \cap \text{se acertó al menos una vez})}{\mathbb{P}(\text{se acertó al menos una vez})} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{acertar al menos dos veces})}{\mathbb{P}(\text{se acertó al menos una vez})} \\ &= \frac{0.6241904}{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}} \\ &= 0.6992744\end{aligned}$$

40. Supongamos que se han sacado cuatro caras seguidas en 4 lanzamientos independientes de una moneda honesta. Un estudiante asegura lo siguiente

“Si en el siguiente lanzamiento saliese cara, habrían salido cinco consecutivas. La probabilidad de que esto suceda es  $\frac{1}{2^5} = 0,03125$ , por tanto en el siguiente lanzamiento la probabilidad de que salga cara es sólo 1 entre 32.”

¿Está en lo correcto el estudiante? Comente.

El estudiante no esta en lo correcto, pues la probabilidad de dar cara en cualquier lanzamiento es 0.5. Aunque la probabilidad de lograr una serie de cinco caras consecutivas es de sólo 1 en 32 (0,03125), lo es antes de que la moneda se tire por primera vez. Después de los primeros cuatro lanzamientos los resultados ya no son desconocidos, y por tanto no cuentan.

41. Demuestre o de un contraejemplo de lo siguiente:

“Si  $\mathbb{P}(A) = \alpha$  y  $\mathbb{P}(B) = \beta$ , entonces  $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \alpha\beta$ ”

Esto no es cierto, basta con tomar el experimento de lanzar una moneda y tomar  $A = B = \{\text{Cara}\}$ . En este caso se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &\leq \alpha\beta \\ \mathbb{P}(A) &\leq \alpha\beta \\ \frac{1}{2} &\leq \frac{1}{2^2}\end{aligned}$$

pero esto no se cumple.

42. En una fábrica de teléfonos celulares, se sabe que 7 de 1000 celulares presentan algún tipo de falla. Un software para detectar si el celular está fallado da como resultado positivo (es decir, avisa que el celular tiene falla) el 98% de las veces que este efectivamente está fallado y da resultado positivo el 9% de las veces que el celular está bueno. Es decir, el 9% de las veces el software avisa que el celular está fallado cuando éste efectivamente está bueno.

Si se elige al azar un celular de esta fábrica, responda las siguientes preguntas:

- Determine la probabilidad de que el software entregue un resultado positivo, es decir, que el celular esté fallado.
- Determine la probabilidad que el software reporte un resultado correcto.
- Suponga que en una tienda de venta de celulares de la fábrica se ponen a disposición 20 celulares a la venta, de los cuales el vendedor sabe que 5 están fallados y, usted decide comprar 3 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad que al menos uno de los celulares comprado por usted presente fallas?.

Definamos los siguientes eventos

$A$  : Un teléfono presenta falla

$C$  : Un teléfono está bueno

$B$  : Software avisa que el celular está bueno

$F$  : Software avisa que el celular presenta falla

por enunciado tenemos

$$\mathbb{P}(A) = \frac{7}{1000} = 0.007$$

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{993}{1000} = 0.993$$

$$\mathbb{P}(F|A) = 0.98$$

$$\mathbb{P}(F|C) = 0.09$$

- Se pide  $\mathbb{P}(F)$ . Podemos obtener esto condicionando según el teléfono presenta o no una falla, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}(F|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(F|C)\mathbb{P}(C) \\ &= 0.98 \cdot 0.007 + 0.09 \cdot 0.993 \\ &= 0.09623\end{aligned}$$

- En otras palabras nos piden la probabilidad de que el software no se equivoque y detecte el estado correcto del celular. Esto puede pasar de dos maneras, que avise que el celular está bueno cuando realmente está bueno, o que avise que el celular está fallado cuando realmente está fallado, entonces nos piden

$$\mathbb{P}(F \cap A) \cup \mathbb{P}(B \cap C)$$

claramente son disjuntos, entonces desarrollamos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F \cap A) \cup \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(F \cap A) + \mathbb{P}(B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(F \cap A) \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} + \mathbb{P}(B \cap C) \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(F \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}(A) + \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(F|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C) \\ &= 0.98 \cdot 0.007 + (1 - \mathbb{P}(B^c|C)) \cdot 0.993 \\ &= 0.98 \cdot 0.007 + (1 - \mathbb{P}(F|C)) \cdot 0.993 \\ &= 0.98 \cdot 0.007 + (1 - 0.09) \cdot 0.993 \\ &= 0.91049\end{aligned} \tag{17}$$

Note que en (17) se utilizó (4).

(c) Definamos el siguiente evento

$A$  : Al menos un celular comprado presenta falla

podemos obtener  $\mathbb{P}(A)$  vía complemento, con

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{ningún celular presenta falla})\end{aligned}$$

Podemos proceder por (9). Con

$$|\Omega| = \binom{20}{3}$$

y

$$|A^c| = \binom{5}{0} \binom{15}{3}$$

Esto pues queremos que de los tres que vamos a comprar, ninguno caiga dentro del grupo de los fallado, y el resto caiga en el grupo de los buenos. Finalmente la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{ningún celular presenta falla}) \\ &= 1 - \frac{\binom{5}{0} \binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} \\ &= 0.601\end{aligned}$$

43. Suponga que hay 3 monedas en una caja. Una de ellas tiene doble cara, otra es una moneda común, y la tercera es una moneda sesgada con probabilidad de obtener cara igual a 0.75. Suponga que se extrae una moneda al azar, se lanza y resulta cara. ¿Cual es la probabilidad de que la moneda lanzada haya sido la con doble cara?

Definamos los siguientes eventos

$C$  : Se obtiene cara

$M1$  : Se extrae la moneda con doble cara

$M2$  : Se extrae la moneda común

$M3$  : Se extrae la moneda sesgada

Nos piden  $\mathbb{P}(M1|C)$ , usando Bayes y condicionando el la moneda que sale tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M1|C) &= \frac{\mathbb{P}(C|M1)\mathbb{P}(M1)}{\mathbb{P}(C|M1)\mathbb{P}(M1) + \mathbb{P}(C|M2)\mathbb{P}(M2) + \mathbb{P}(C|M3)\mathbb{P}(M3)} \\ &= \frac{1 \cdot 1/3}{1 \cdot 1/3 + 1/2 \cdot 1/3 + 0.75 \cdot 1/3} \\ &= 4/9\end{aligned}$$

44. Demuestre la desigualdad de Boole (3)

Procedamos mediante inducción.

- $n = 1$

$$\mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{P}(A_1)$$

- $n = k$  (H.I)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i)$$



- $n = k + 1$

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(A_i)$$

Debemos demostrar esto ultimo.

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right) &= \mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^k A_i \cup A_{k+1} \right) \\ &= \mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right) + \mathbb{P}(A_{k+1}) - \mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^k A_i \cap A_{k+1} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right) + \mathbb{P}(A_{k+1}) \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^k \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(A_i) \end{aligned} \tag{19}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P} \left( \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{P}(A_i)$$

Probando así lo pedido.

Note que en (19) se utilizo la hipótesis de inducción (H.I).

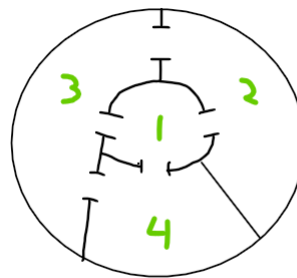
45. Explique con sus palabras los diferentes tipos de extracciones en un ejemplo concreto.

Podemos explicar esto mediante sabores/bolas de helado. Supongamos que vamos a una heladería y vamos a pedir un helado con 3 bolas.



- Con reemplazo y sin orden: Podemos seleccionar una bola de cualquier sabor, la siguiente bola también podemos volver a elegir el mismo sabor pues es con reemplazo, y lo mismo para la tercera bola. No nos importa si la primera y segunda bola va por debajo de la tercera bola como en el dibujo, o en general nos da igual si nos sirven primero la bola de chocolate, luego la de fresa y finalmente la de vainilla, al final los tres sabores estarán ahí.
- Con reemplazo y con orden: En este caso de igual manera podemos volver a seleccionar un sabor las 3 veces, pero ahora, si nos importa como están distribuidas las bolas, ya sea por que nos gusta comer un sabor primero, y luego los demás, o por que nos gusta que el helado se vea de alguna forma especial. En el dibujo, nos importa que vaya primero el de chocolate, luego el de fresa, y arriba el de vainilla, ya sea por que nos gusta primero comer de arriba hacia abajo o por que se ve bonito de esa manera.
- Sin reemplazo y sin orden: Solo podemos tener 1 bola de un sabor en particular, en nuestro caso, solo podemos tener una bola de chocolate, una de fresa, y una de vainilla, ya sea por que no quedaban mas en la heladería, o por que nos gusta que el helado contenga una variedad de sabores. Y no nos importa cual bola va primero.
- Sin reemplazo y con orden: Solo podemos tener 1 bola de un sabor en particular, y si nos importa cual bola va primero.

46. Suponga que un ratón entrenado se coloca en el siguiente laberinto



El ratón al estar en un sector en un instante dado elige una puerta de salida al azar y se cambia de sector. Si el lugar donde inicia el ratón es totalmente aleatorio (equiprobable), ¿Cual es la probabilidad de que en el primero paso se mueva a la puerta 4? Asuma que el ratón siempre se mueve de sector de manera equiprobable según disponibilidad de movimiento.

Note que el truco acá esta en darse cuenta las posibilidades que tiene de pasar de una puerta a otra, y para calcular lo pedido, podemos condicionar según el sector en que esta. Definamos los siguientes eventos

- $S_1$  : El ratón parte en el sector 1
- $S_2$  : El ratón parte en el sector 2
- $S_3$  : El ratón parte en el sector 3
- $S_4$  : El ratón parte en el sector 4
- $A$  : El ratón se mueve a la puerta 4

Para calcular lo pedido, necesitaremos percatarnos de algo, las probabilidades de pasar de un sector a otro dependiendo de donde este el ratón. Si el ratón esta en el sector 2, entonces tiene probabilidad  $1/2$  de pasar al sector 3, y probabilidad  $1/2$  de pasar al sector 1. Si el ratón está en el sector 1, entonces pasa al sector 2 con probabilidad  $1/3$ , al sector 3 con probabilidad  $1/3$  y al cuarto con probabilidad  $1/3$ , y así con los demás sectores. Esto pues elige al azar de manera equiprobable.

Nos piden  $\mathbb{P}(A)$ , entonces usando Totales tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|S1)\mathbb{P}(S1) + \mathbb{P}(A|S2)\mathbb{P}(S2) + \mathbb{P}(A|S3)\mathbb{P}(S3) + \mathbb{P}(A|S4)\mathbb{P}(S4) \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/4 + 1/3 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/4 \\ &= 1/6\end{aligned}$$

47. Suponga que una urna tiene  $N$  bolita,  $i$  de ellas son de color blanco, y el resto de color negro. Se realiza el siguiente experimento: Se lanza una moneda, la cual tiene probabilidad  $0 < p < 1$  de dar cara, si sale cara, entonces se escoge al azar una bolita de la urna y se reemplaza por una bolita blanca; si sale sello, se escoge al azar una bolita de la urna y se reemplaza por una de color negro. ¿Cual es la probabilidad de seguir teniendo  $i$  bolitas blancas en la urna ?

Note que la pregunta contiene algo condicionado, pues debemos seguir teniendo  $i$  bolitas blancas dado que ya tenemos  $i$  blancas. Definamos los siguientes eventos

$A_i$  : tenemos  $i$  bolitas blancas luego de la primera extracción

$B_i$  : Hay  $i$  bolitas blancas inicialmente en la urna

se pide  $\mathbb{P}(A_i|B_i)$ . Esto simplemente lo obtendremos razonando, sin formulas.

Si inicialmente hay  $i$  bolitas blancas, entonces hay  $N - i$  negras. Si lanzamos la moneda y sale cara, se reemplaza por una bolita blanca, para mantener las  $i$  bolitas blancas, la bolita seleccionada debe ser de color blanca, pues si es negra, habrán  $i + 1$  blancas. Si lanzamos la moneda y sale sello, se reemplaza por una bolita negra, para mantener las  $i$  bolitas blancas, la bolita seleccionada debe ser negra, pues en otro caso tendríamos  $N - i + 1$  bolitas negras, y  $i - 1$  blancas. Como lo pedido puede pasar de dos maneras diferentes, y estas son disjuntas, tenemos que

$$\mathbb{P}(A_i|B_i) = p \cdot \frac{i}{N} + (1 - p) \cdot \frac{N - i}{N}$$

48. Se lanzan dos dados de manera simultanea e independiente
- Calcule la probabilidad de que los dos dados tengan al menos una coincidencia en  $n$  lanzamientos.
  - El experimento se detiene si lo dados coinciden o si ellos suman 7. Si el experimento se detiene al quinto lanzamiento, ¿cuál es la probabilidad de que los dados sumen 7?
  - Note que la probabilidad de obtener una coincidencia en el lanzamiento de los dos dados es

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Ahora definamos el evento  $A$  = se obtiene al menos una coincidencia, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(A^c) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{se tienen 0 coincidencias en } n \text{ lanzamientos}) \\ &= 1 - \left(\frac{30}{36}\right)^n\end{aligned}$$

- (b) Definamos los siguientes eventos

$A$  : Los dados coinciden

$B$  : Los dados suman 7

$C$  : El experimento se detiene al quinto lanzamiento

$D$  : El experimento se detiene

Note que  $\mathbb{P}(D) = 12/36$ , pues  $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  pues son disjuntos. Nos piden  $\mathbb{P}(B|C)$ , pero note que los lanzamientos son independientes, por lo cual la probabilidad de que se detenga el juego es siempre la misma en todos los lanzamientos.

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|C) &= \mathbb{P}(B|D) \\ &= \frac{\mathbb{P}(B \cap D)}{\mathbb{P}(D)} \\ &= \frac{6/36}{12/36} \\ &= 1/2\end{aligned}$$

49. Sea  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ . Defina los eventos

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{2, 3\}, \quad C = \{1, 3\}$$

con

$$\mathbb{P}(A) = 1/2, \quad \mathbb{P}(B) = 1/2, \quad \mathbb{P}(C) = 1/2, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/4, \forall \omega \in \Omega$$

¿Son  $A, B, C$  eventos dos a dos independientes y mutuamente independientes?

Recordemos que  $A, B, C$  son dos a dos independientes si

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)\end{aligned}$$

y son mutuamente independientes si se cumple lo anterior y además

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Entonces debemos verificar todo lo anterior.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(\{2\}) = 1/4 \\ \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(\{1\}) = 1/4 \\ \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(\{3\}) = 1/4 \\ \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) &= 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \\ \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) &= 1/2 \cdot 1/2 = 1/4 \\ \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) &= 1/2 \cdot 1/2 = 1/4\end{aligned}$$

Tenemos que  $A, B, C$  son eventos dos a dos independientes. Ahora note que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

pero

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$$

por lo cual no son mutuamente independientes.

50. Describa la diferencia entre los terminos "independientes" y "excluyentes".

La diferencia está en su definición, pues  $A, B$  son independientes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

en cambio  $A, B$  son excluyentes si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0$$

En esencia se dice que  $A, B$  son independientes si  $A, B$  pueden pasar en simultaneo, pero el evento  $A$  no afecta al evento  $B$  en el experimento a realizar. Por otro lado  $A, B$  son excluyentes cuando no pueden ocurrir en simultaneo.

## 2 Variables aleatorias

### 2.1 Definiciones

Informalmente una variable aleatoria corresponde a una función numérica (real valorada)  $X$  definida sobre el espacio muestral  $\Omega$ :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (20)$$

$$\omega \rightarrow X(\omega) \quad (21)$$

Dado esto, las variables aleatorias trabajan con números ( $\in \mathbb{R}$ ), por lo cual cualquier elemento de  $\Omega$  debe ser representado como tal, por ejemplo si lanzamos una moneda 3 veces tenemos

$$\Omega = \{(s, s, s), (s, s, c), (s, c, s), (c, s, s), (s, c, c), (c, s, c), (c, c, s), (c, c, c)\}$$

y supongamos que nos interesa el numero de caras, entonces acá se tiene

$\omega$	(s, s, s)	(s, s, c)	(s, c, s)	(c, s, s)	(s, c, c)	(c, s, c)	(c, c, s)	(c, c, c)
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Note que es importante distinguir que letras mayúsculas  $X, Y, Z$  representan variables aleatorias, y letras minúsculas representan valores particulares.

La función de distribución acumulada (fda) (o acumulativa) o fda de una variable aleatoria  $X$ , denotada por  $F_X(x)$ , se define por

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x)$$

a partir de esto se puede definir los tipos de variables aleatorias. Una variable aleatoria  $X$  es discreta si  $F_X(x)$  es una función escalera de  $x$ . Una variable aleatoria  $X$  es continua si  $F_X(x)$  es una función continua de  $x$ . Y una v.a mixta es una mezcla de ambos casos.

En resumen existen tres tipos de variables aleatorias:

- Discretas
- Continuas
- Mixtas

Para una variable aleatoria discreta  $X$ , la función de masa de probabilidad (*fmp*) está dada por

$$p_X(x) = P_X(X = x) = P(X = x)$$

Para una variable aleatoria continua  $X$ , la función de densidad de probabilidad (*fdp*) está dada por

$$f_X(x) = f(x)$$

Note que podemos usar la *fmp* para calcular probabilidades directamente, por ejemplo, la probabilidad de que la v.a tome el valor 1, se calcula como  $p_X(1) = P(X = 1)$ , pero note que para el caso continuo, estos eventos deben reemplazarse por intervalos. A continuación se presentan dos ejemplos

$$p_X(x) = \begin{cases} (1-p)^{1-x}p & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Note que a partir de esto, en el caso discreto la gráfica de  $p_X$  será con puntitos, y su *fda* será con escalones, mientras que para el caso continuo, tanto como  $f_X(x)$  y  $F_X(x)$  son funciones.

El soporte de una v.a se denota generalmente por  $\mathcal{X}$ , es decir, en donde está definida la v.a. En los casos anteriores se tiene  $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, \dots\}$  y  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^+$  respectivamente.

En general si queremos calcular  $P(a \leq X \leq b)$ , para el caso continuo se deben ocupar integrales, mientras que en el caso discreto se deben ocupar sumas. Lo mencionado se calcula como

$$\text{Discreto: } P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=a}^b p_X(x)$$

$$\text{Continuo: } P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

A continuación se presentan algunas imágenes de los tipos de variables aleatorias.

- Caso continuo

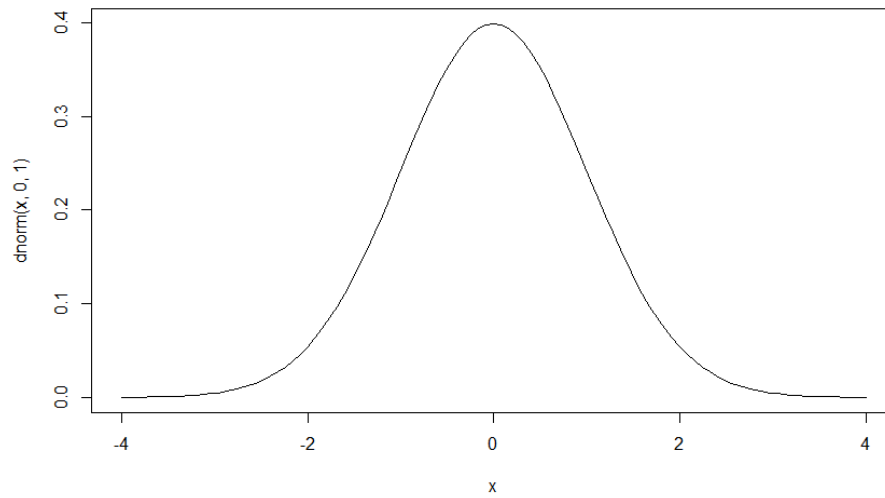


Figure 3:  $f_X(x)$

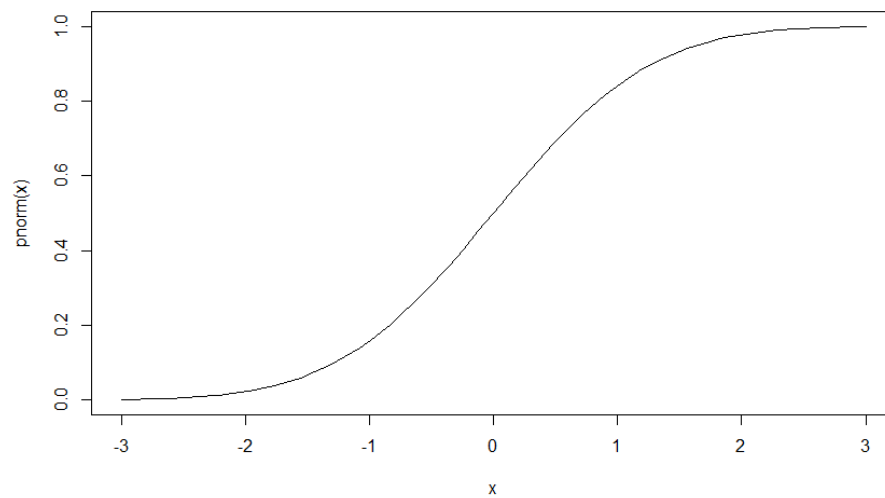


Figure 4:  $F_X(x)$

- Caso discreto

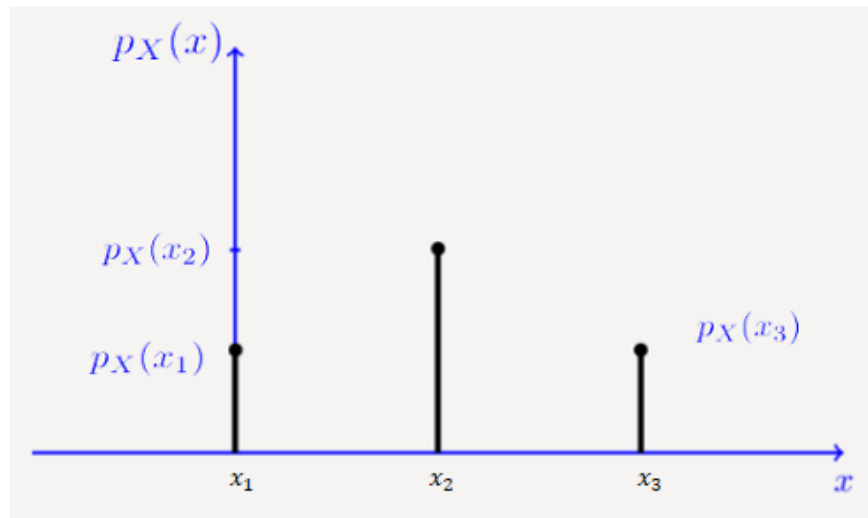


Figure 5:  $p_X(x)$

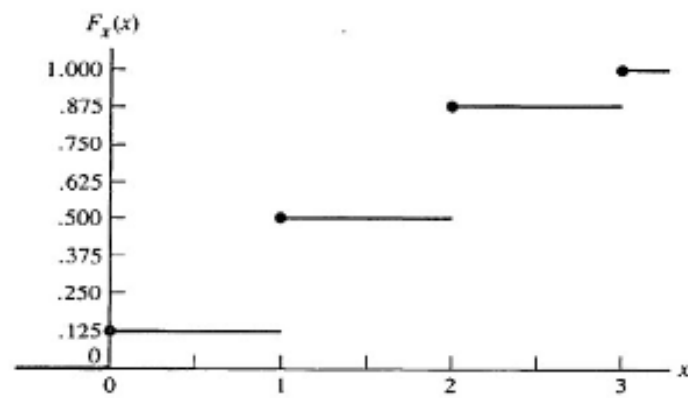


Figure 6:  $F_X(x)$

- Caso mixto

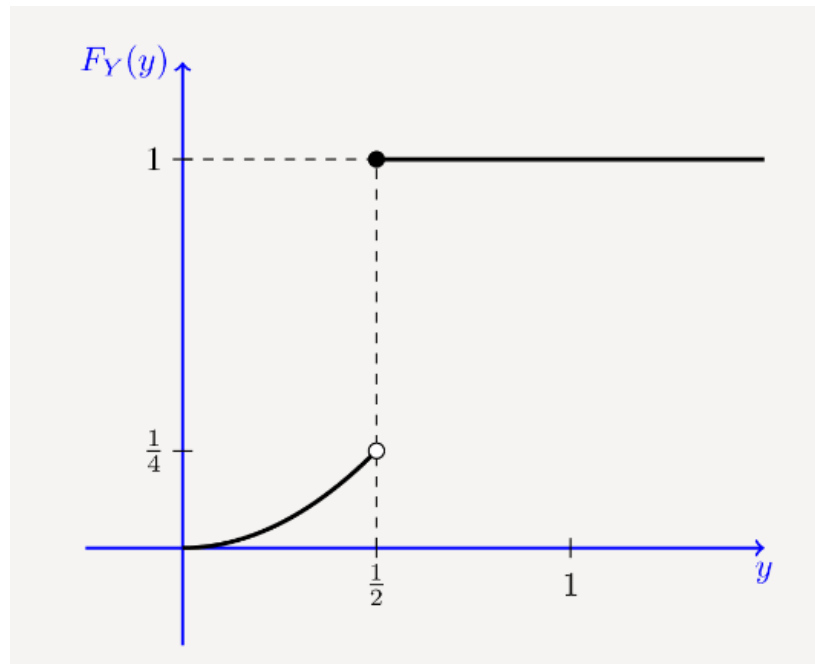


Figure 7:  $F_X(x)$



## 2.2 Propiedades

Sea  $X$  una v.a continua con función de densidad  $f_X(x)$  y recorrido  $\mathcal{X}$ .

Una función  $f_X(x)$  es una fdp (o fmp) de una variable aleatoria  $X$  si y solo si,

- $f_X(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}$
- Para el caso continuo:  $\int_{\mathcal{X}} f_X(x) dx = 1.$

Para el caso discreto:  $\sum_{\mathcal{X}} p_X(x) = 1$

esto nos dice que la función debe ser positiva y debe sumar o integrar 1 en todo su recorrido.

Sea  $F_X(x)$  la fda de una v.a  $X$ , esta debe cumplir que

- $0 \leq F_X(x) \leq 1,$  positiva y acotada
- $F_X(x) \leq F_X(x+1),$  creciente
- $\lim_{h \rightarrow 0^+} F_X(x+h) = F_X(x),$  continua por la derecha
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

Se tiene la siguiente relación entre  $f_X(x)$  y  $F_X(x)$ :

- $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$
- $\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x)$

La fda tiene las siguientes propiedades:

Considere una v.a discreta y  $a, b \in \mathcal{X}$  con  $a < b$ . Se tiene que

- $F_X(x^-) = P(X < x)$
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $P(a \leq X < b) = F(b) - P(X = b) - F(a) + P(X = a)$
- $P(a < X < b) = F(b) - P(X = b) - F(a)$
- 

$$P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-) \quad (22)$$

- $P(X > a) = 1 - F_X(a)$
- $P(X \geq a) = 1 - F_X(a^-)$

Para el caso continuo simplemente se tiene

- $P(a \leq x \leq b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x < b) = P(a < x < b)$
- $P(X \leq x) = 1 - P(X > x)$
- $P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$

Note que las propiedades para las v.a.s discretas también aplican para las mixtas.

La esperanza (o valor esperado o media) de la variable aleatoria  $X$ , se define como

$$\mathbb{E}(X) = \mu_X = \begin{cases} \sum_x x p_X(x) & \text{Discreto} \\ \int_{\mathcal{X}} x f_X(x) dx & \text{Continuo} \end{cases}$$

Note que si la suma o la integral divergen, o no están definidas, se dice que  $\mathbb{E}(X)$  no existe. El operador  $\mathbb{E}(\cdot)$  tiene las siguientes propiedades

- $\mathbb{E}(b) = b$
- $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$
- $\mathbb{E}(X) \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ , linealidad
- 

$$\mathbb{E}(h(X)) = \begin{cases} \sum_x h(x) p_X(x) & \text{Discreto} \\ \int_{\mathcal{X}} h(x) f_X(x) dx & \text{Continuo} \end{cases}$$

En base a la esperanza, surge la desigualdad de Jensen. Sea  $X$  una variable aleatoria con esperanza finita, y  $g$  una función de  $\mathbb{R}$  para  $\mathbb{R}$ :

- Si  $g$  es convexa, entonces  $\mathbb{E}\{g(X)\} \geq g(\mathbb{E}(X))$ .
- Si  $g$  es cóncava, entonces  $\mathbb{E}\{g(X)\} \leq g(\mathbb{E}(X))$ .

Recuerde que una función  $f(x)$  es

$$\begin{cases} \text{Convexa si } f''(x) > 0 \\ \text{Cóncava si } f''(x) < 0 \end{cases}$$

La mediana de una variable aleatoria  $X$  es algún número  $m = \text{med}(X)$  tal que

$$F_X(m) = 1/2 \quad (23)$$

En el caso discreto se debe cumplir

$$P(X \leq m) \geq 1/2 \text{ y } P(X \geq m) \geq 1/2 \quad (24)$$

La medida de dispersión mas común es la varianza de una variable aleatoria  $X$ , la cual mide la dispersión de  $X$  con respecto a su media  $\mu_X$ . La varianza de  $X$  se define como

$$\text{Var}(X) = \sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \begin{cases} \sum_x (x - \mu_X)^2 p_X(x) & \text{Discreto} \\ \int_{\mathcal{X}} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx & \text{Continuo} \end{cases}$$

El operador  $\text{Var}(\cdot)$  tiene las siguientes propiedades

- $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$
- $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(b) = 0$
- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$
- $\text{Var}(X) \geq 0$
- $\text{Var}(g(X)) = \mathbb{E}(g(X)^2) - [\mathbb{E}(g(X))]^2$

Los momentos de una distribución o variable aleatoria son una clase especial de esperanzas. Se definen los siguientes momentos

- El  $k$ -ésimo momento no centrado de  $X$ , el cual se define como

$$\mathbb{E}(X^n) = \begin{cases} \sum_{\mathcal{X}} x^n p_X(x) & \text{Discreto} \\ \int_{\mathcal{X}} x^n f_X(x) & \text{Continuo} \end{cases}$$

- El  $k$ -ésimo momento centrado de  $X$ , el cual se define como

$$\mathbb{E}[(X - \mu_X)^n] = \begin{cases} \sum_{\mathcal{X}} (x - \mu_X)^n p_X(x) & \text{Discreto} \\ \int_{\mathcal{X}} (x - \mu_X)^n f_X(x) & \text{Continuo} \end{cases}$$

Una de las propiedades mas importantes que tiene una variable aleatoria, es su función generadora de momentos, ya que sirve para calcular los momentos de una forma mas sencilla, y además es sumamente importante debido a que caracteriza de forma única a la distribución, por lo cual la generadora de momentos es única. Se define como

$$M_X(t) = \begin{cases} \sum_{\mathcal{X}} e^{tx} p_X(x) & \text{Discreto} \\ \int_{\mathcal{X}} e^{tx} f_X(x) dx & \text{Continuo} \end{cases}$$

A continuación propiedades útiles

- $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(X^k) \frac{t^k}{k!}$
- $\mathbb{E}(X^n) = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t) \Big|_{t=0}$
- $M_{X+a}(t) = e^{at} M_X(t)$
- $M_{aX}(t) = M_X(at)$
- $M_{aX+b}(t) = e^{bt} M_X(at)$
- $M_{\frac{X+a}{b}} = e^{\frac{at}{b}} M_X(t/b)$

En el caso de que la generadora de momentos no exista, se puede definir la función característica, la cual tiene la particularidad de siempre existir. Se define como

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \sum_{\mathcal{X}} e^{itx} p_X(x) & \text{Discreto} \\ \int_{\mathcal{X}} e^{itx} f_X(x) dx & \text{Continuo} \end{cases}$$

Donde  $i$  es la unidad imaginaria. Además, tiene la siguiente propiedad

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{dt^n} \varphi_X(t) \Big|_{t=0}$$

El percentil es una medida útil. Este se define como

Si  $x_p$  es el valor que toma el percentil  $p \times 100\%$ , entonces  $F_X(x_p) = p$ .

A modo de ejemplo el cuartil inferior corresponde a  $x_{0.25}$ . O el caso particular de la mediana es  $x_{0.5}$ . Este ultimo nos indica que el 50% de los datos es menor a  $x_{0.5}$ .

## 2.3 Ejercicios del capítulo

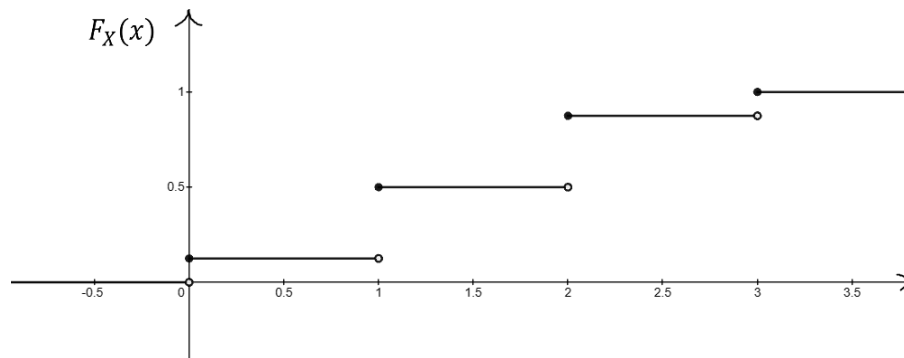
1. Sea  $X$  = número de caras obtenidas en tres lanzamientos de una moneda justa. Entonces, el recorrido de  $X$  es  $X = \{0, 1, 2, 3\}$ , y su fda  $X$  es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

Determine  $F_X(2.5)$  y  $p_X(x)$ .

$$\begin{aligned} F_X(2.5) &= P(X \leq 2.5) \\ &= P(x = 0, \text{ o } 1 \text{ o } 2) \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

Podemos dibujar la  $F_X(x)$ , la cual corresponde a



Luego, como es una escalera, es una v.a discreta. Usando (22) tenemos

$$\begin{aligned} p_X(0) &= F_X(0) - F_X(0^-) \\ &= \frac{1}{8} - 0 \\ &= 1/8 \\ p_X(1) &= F_X(1) - F_X(1^-) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \\ &= 3/8 \\ p_X(2) &= F_X(2) - F_X(2^-) \\ &= \frac{7}{8} - \frac{1}{2} \\ &= 3/8 \\ p_X(3) &= F_X(3) - F_X(3^-) \\ &= 1 - \frac{7}{8} \\ &= 1/8 \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/8 & x = 0, 3 \\ 3/8 & x = 1, 2 \end{cases}$$

2. Lanzar una moneda de forma independiente hasta que aparezca una cara. Sea  $p$ , con  $(0 < p < 1)$ , la probabilidad de que salga cara en cualquier lanzamiento, y defina la variable aleatoria  $X$  = número de lanzamientos necesarios para obtener una cara. Entonces, la probabilidad de requerir  $x$  lanzamientos (independientes) es

$$P(X = x) = P(\{(\underbrace{s, \dots, s}_{x-1 \text{ sellos}}, c)\}) = (1-p)^{x-1}p, \quad x = 1, 2, \dots$$

Determine  $F_X(x)$ , la probabilidad de que el número de lanzamientos necesarios para obtener una cara sea de a lo mas 5, y de a lo menos 3. Y demuestre que efectivamente suma 1 sobre todo el recorrido.

Para lo primero, por definición

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leq x) &= \sum_{k=1}^x (1-p)^{k-1}p \\ &= 1 - (1-p)^x \end{aligned}$$

Para la probabilidad nos interesa  $P(3 \leq X \leq 5)$ . Entonces

$$\begin{aligned} P(3 \leq X \leq 5) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= (1-p)^2p + (1-p)^3p + (1-p)^4p \end{aligned}$$

Para lo ultimo se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^{x-1}p &= p \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x \\ &= p \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. Sea  $X$  una v.a con fmp dada por

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & x = 1, 2, 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Calcule la esperanza de  $X$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + 3 \cdot P(X = 3) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

4. Suponga que  $X$  es una v.a con probabilidad de masa

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & x = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Calcule la generadora de momentos, y con esto la esperanza y la varianza.

Note que  $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , luego,  $X$  es una v.a discreta, por lo cual debemos hacer el calculo de la fgm mediante una serie.

Por definición

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} e^{e^t \lambda} \\
 &= e^{-\lambda + e^t \lambda} \\
 M_X(t) &= e^{-\lambda(1-e^t)}
 \end{aligned}$$

Ahora calculamos  $\mathbb{E}(X)$  y  $\mathbb{E}(X^2)$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \frac{d}{dt} \left( e^{-\lambda(1-e^t)} \right) \Big|_{t=0} \\
 &= e^t \lambda (e^{-\lambda(1-e^t)}) \Big|_{t=0} \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X^2) &= \frac{d^2}{dt^2} \left( e^{-\lambda(1-e^t)} \right) \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \left( e^t \lambda (e^{-\lambda(1-e^t)}) \right) \Big|_{t=0} \\
 &= e^t \lambda (e^{-\lambda(1-e^t)}) + e^{2t} \lambda^2 (e^{-\lambda(1-e^t)}) \Big|_{t=0} \\
 &= \lambda + \lambda^2
 \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \\
 &= \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

5. El tiempo de reparación (en horas)  $T$ , de un artículo se puede modelar a través de la siguiente función de densidad

$$f_T(t) = \begin{cases} te^{-t} & t > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

El costo de reparación de un artículo es  $C = S + kT$ , donde la constante  $k$  es un costo por unidad de tiempo y la variable aleatoria  $S$  toma valores  $s_1$  y  $s_2$  con probabilidades  $p$  y  $1 - p$  respectivamente. Calcule el costo esperado.

Nos interesa  $\mathbb{E}(C)$ . Aplicando propiedades tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(C) &= \mathbb{E}(S + kT) \\
 &= \mathbb{E}(S) + \mathbb{E}(kT) \\
 &= \mathbb{E}(S) + k\mathbb{E}(T)
 \end{aligned}$$

Para esclarecer un poco las cosas, la v.a  $S$  está definida como

$$p_S(s) = \begin{cases} p & S = s_1 \\ 1 - p & S = s_2 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S) &= s_1 P(S = s_1) + s_2 P(S = s_2) \\ &= s_1 p + s_2 (1 - p)\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt \\ &= \int_0^\infty t^{3-1} e^{-t} dt \\ &= \Gamma(3) \\ &= 2\end{aligned}$$

De modo que el costo esperado es

$$\mathbb{E}(C) = s_1 p + s_2 (1 - p) + 2k$$

6. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de distribución acumulada dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1, \\ 1 - p, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ 1 - p + \frac{1}{2}px, & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ 1, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

donde  $0 < p < 1$ .

(a) Calcule  $P(X = -1)$ ,  $P(X = 0)$ ,  $P(-1 < X \leq 0)$ ,  $P(0 < X \leq 1)$  y  $P(X \geq 1)$

(b) Calcule  $\mathbb{E}(X)$

(a) Notamos que es una v.a mixta. Usando las propiedades (2.2) tenemos que

$$\begin{aligned}P(X = -1) &= F_X(-1) - F_X(-1^-) \\ &= 1 - p - 0 \\ &= 1 - p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= F_X(0) - F_X(0^-) \\ &= 1 - p + \frac{p \cdot 0}{2} - (1 - p) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(-1 < X \leq 0) &= F_X(0) - F_X(-1) \\ &= 1 - p + \frac{p \cdot 0}{2} - (1 - p) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(0 < X \leq 1) &= F_X(1) - F_X(0) \\ &= 1 - \frac{p \cdot 1}{2} - \left(1 - p + \frac{p \cdot 0}{2}\right) \\ &= \frac{p}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\
&= 1 - F_X(1^-) \\
&= 1 - \left(1 - p + \frac{p \cdot 1}{2}\right) \\
&= p - \frac{p}{2} \\
&= \frac{p}{2}
\end{aligned}$$

- (b) Para calcular la esperanza, notamos que  $X$  toma valores  $\{-1\} \cup [0, 2)$ . Entonces usando la definición de esperanza

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= -1 \cdot P(X = -1) + \int_0^2 x \left( \frac{d}{dx} \left[ 1 - p + \frac{px}{2} \right] \right) dx \\
&= p - 1 + p \\
&= 2p - 1
\end{aligned}$$

7. Sea  $X$  una v.a con función característica

$$\varphi_X(t) = k + mt + pt^2$$

- (a) Determine los valores de  $k, m, p$  tales que la esperanza de la v.a sea 1, y la varianza 4.  
(b) Obtenga la función característica de la v.a  $2X$   
(c) Obtenga la función característica de la v.a  $Y = 3X + 2$   
(a) Para esto, necesitamos el primer y segundo momento, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{i} \frac{d}{dt} (k + mt + pt^2) = \frac{1}{i} \left( m + 2pt \Big|_{t=0} \right) \\
&= \frac{m}{i}
\end{aligned}$$

Nos interesa que  $\mathbb{E}(X) = 1$ , entonces  $\frac{m}{i} = 1 \Rightarrow m = i$ . Ahora el segundo momento

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{i^2} \frac{d^2}{dt^2} (k + mt + pt^2) = \frac{1}{i^2} \left( 2p \Big|_{t=0} \right) \\
&= -2p
\end{aligned}$$

Entonces la varianza es

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X) &= -2p - \frac{m^2}{i^2} \\
&= -2p - 1
\end{aligned}$$

Nos interesa que  $\text{Var}(X) = 4$ , entonces  $-2p - 1 = 4 \Rightarrow p = -5/2$ . Para obtener el valor de  $k$ , es fácil ver que el momento de orden 0, debe ser 1, por lo cual se obtiene  $k = 1$

- (b) Usamos propiedades

$$\begin{aligned}
\varphi_{2X}(t) &= \varphi_X(2t) \\
&= 1 + i(2t) - \frac{5}{2}(2t)^2 \\
&= 1 + 2it - 10t^2
\end{aligned}$$

- (c) Nuevamente usamos propiedades y la definición

$$\begin{aligned}
\varphi_Y(t) &= \varphi_{3X+2}(t) \\
&= \mathbb{E}(e^{it(3X+2)}) \\
&= e^{2it} \varphi_X(3t) \\
&= e^{2it} \left( 1 + 3it - \frac{45}{2}t^2 \right)
\end{aligned}$$



8. Sea  $X$  una v.a discreta con fmp

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{-p^k}{\ln(1-p)k} & k = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

con  $p \in (0, 1)$ . Calcule  $\mathbb{E}(X)$  y  $M_{X+b}(t)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{-p^k}{\ln(1-p)k} \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{\infty} p^k \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p}{1-p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{X+b}(t) &= \mathbb{E}(e^{t(X+b)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX+tb}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX} e^{tb}) \\ &= e^{tb} \mathbb{E}(e^{tX}) \\ &= e^{tb} \sum_{k=1}^{\infty} -e^{tk} \frac{p^k}{\ln(1-p)k} \\ &= \frac{-e^{tb}}{\ln(1-p)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^t p)^k}{k} \\ &= \frac{e^{tb}}{\ln(1-p)} \ln(1 - e^t p) \end{aligned}$$

Provisto de que  $t < -\ln(p)$ , pues la serie de Taylor de  $f(x) = \ln(1-x)$  en torno a  $x=0$  está definida para  $|x| < 1$ .

9. Sea  $X$  una v.a continua con  $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$  definida para todo  $\mathbb{R}$ . Encuentre la moda y mediana de  $X$ .

Para la moda, nos interesa un  $x$  que maximice la probabilidad. Entonces derivamos.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1+x^2} \right) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

$$x = 0$$

La moda es  $x = 0$ . Ahora para la mediana, buscamos  $m$  tal que

$$\begin{aligned} P(X \leq m) &= 0.5 \\ \int_{-\infty}^m \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} &= 0.5 \\ \frac{\arctan(m)}{\pi} + 0.5 &= 0.5 \\ \arctan(m) &= 0 \\ m &= 0 \end{aligned}$$

La mediana es  $m = 0$

10. El salario mensual, en cientos de miles de pesos, de los trabajadores de una empresa es una variable aleatoria cuya función de densidad está dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 3-x & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Encuentre el salario mínimo del 50% de los trabajadores con mayor salario  
 (b) ¿Cuál es el salario máximo del 10% de los trabajadores que menos gana?  
 (a) Nos piden el salario mínimo del 50% de los trabajadores con mayor salario, por lo cual nos interesa encontrar  $p$  tal que

$$\begin{aligned} \int_p^3 3-x dx &= 0.5 \\ p^2 - 6p - 8 &= 0 \\ (p-4)(p-2) &= 0 \end{aligned}$$

Notar que  $p = 4$  no está en el recorrido de la v.a., por lo cual nos quedamos con  $p = 2$ . Luego, el salario mínimo del 50% de los trabajadores con mayor salario es de \$200,000.

- (b) Ahora nos piden el salario máximo del 10% de los trabajadores que menos gana, esto se calcula como

$$\begin{aligned} \int_1^p x-1 dx &= 0.1 \\ \frac{p^2}{2} - p + \frac{1}{2} &= 0.1 \\ p &\approx 1 \pm 0.45 \end{aligned}$$

Notamos que  $p \approx 0.55$  no nos sirve, por lo cual nos quedamos con  $p \approx 1.45$ . Luego, el salario máximo del 10% de los trabajadores que menos gana es de \$145,000

11. Sea  $W$  una v.a con función de probabilidad

$$f_W(\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin(\pi\omega) & \omega \in (0, 1) \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Defina la variable aleatoria  $Y = \pi W + 2$ . Calcule  $\mathbb{E}(Y)$  y  $Var(Y)$ .

Aplicamos propiedades de la esperanza.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\pi W + 2) \\ &= \mathbb{E}(\pi W) + \mathbb{E}(2) \\ &= \pi \mathbb{E}(W) + 2 \\ &= \pi \int_0^1 \omega \frac{\pi}{2} \sin(\pi\omega) d\omega + 2 \\ &= \frac{\pi}{2} + 2 \\ \Rightarrow \mathbb{E}(Y) &= \frac{\pi}{2} + 2 \end{aligned}$$

Ahora aplicamos propiedades de la varianza

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y) &= \text{Var}(\pi W + 2) \\
 &= \text{Var}(\pi W) + 0 \\
 &= \pi^2 \text{Var}(W) \\
 &= \pi^2 \left( \mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}(W))^2 \right) \\
 &= \pi^2 \left( \int_0^1 \omega^2 \frac{\pi}{2} \sin(\pi \omega) d\omega - \left( \int_0^1 \omega \frac{\pi}{2} \sin(\pi \omega) d\omega \right)^2 \right) \\
 &= \pi^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{2^2} \right) \\
 \Rightarrow \text{Var}(Y) &= \pi^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{1}{2^2} \right)
 \end{aligned}$$

12. Demuestre la identidad  $\text{Var}(g(X)) = \mathbb{E}(g(X)^2) - [\mathbb{E}(g(X))]^2$

Usamos la definición de la varianza y solo desarrollamos.

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(g(X)) &= \mathbb{E}[(g(X) - \mathbb{E}(g(X)))^2] \\
 &= \mathbb{E}[g(X)^2 - 2g(X)\mathbb{E}(g(X)) + [\mathbb{E}(g(X))]^2] \\
 &= \mathbb{E}(g(X)^2) - 2\mathbb{E}[g(X)\mathbb{E}(g(X))] + \mathbb{E}[\mathbb{E}(g(X))^2] \\
 &= \mathbb{E}(g(X)^2) - 2\mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}(g(X)) + \mathbb{E}[\mathbb{E}(g(X))^2] \\
 &= \mathbb{E}(g(X)^2) - 2[\mathbb{E}(g(X))]^2 + \mathbb{E}[g(X)]^2 \\
 &= \mathbb{E}(g(X)^2) - [\mathbb{E}(g(X))]^2
 \end{aligned}$$

13. Sea  $X$  una variable aleatoria continua con fdp  $f(x)$  y fda  $F(x)$ . Para un valor fijo  $x_0$ , defina la función

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{1 - F(x_0)} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

Demuestre que  $g(x)$  es una función de densidad. Asuma  $F(x_0) < 1$ .

Debemos probar que integra 1 en todo su dominio, entonces

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{\infty} \frac{f(x)}{1 - F(x_0)} dx &= \frac{1}{1 - F(x_0)} (F(\infty) - F(x_0)) \\
 &= \frac{1 - F(x_0)}{1 - F(x_0)} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Y como  $f(x)$  es la fdp de la v.a  $X$ , se tiene  $g(x) \geq 0$ , por lo cual  $g(x)$  es una función de densidad.

14. Sea  $X$  una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Determine  $\mathbb{E}(X)$  y  $\text{Var}(X)$ .

Por el valor absoluto, podemos descomponer un poco mas la función de densidad, pues

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - (-x) & -1 < x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-1}^0 x(1+x)dx + \int_0^1 x(1-x)dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

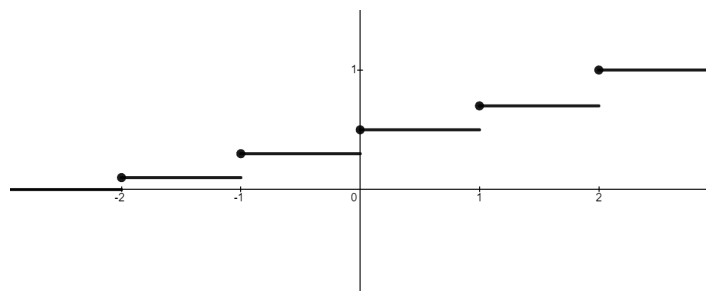
$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-1}^0 (x-0)^2(1+x)dx + \int_0^1 (x-0)^2(1-x)dx \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Notar que  $X$  es simétrica en torno al 0, por eso  $\mathbb{E}(X) = 0$ .

15. Considere la variable aleatoria, discreta,  $X$  con función de distribución acumulada  $F_X(x)$  dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ 0.1 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ 0.3 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0.5 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0.7 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Realice una gráfica de la distribución
- Calcule la función de probabilidad asociada. Grafíquela.
- Sea  $B_a$  la región determinada por  $X^2 - 1 \leq a$ . Calcule  $P(B_0)$
- La gráfica corresponde a



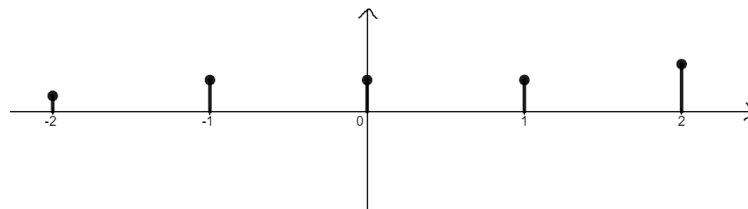
(b) Los valores que toma  $X$  son  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . De la acumulada se obtiene que

$$\begin{aligned}
 P(X = -2) &= 0.1 \\
 P(X = -1) &= F_X(-1) - F_X(-2) \\
 &= 0.3 - 0.1 \\
 &= 0.2 \\
 P(X = 0) &= F_X(0) - F_X(-1) \\
 &= 0.5 - 0.3 \\
 &= 0.2 \\
 P(X = 1) &= F_X(1) - F_X(0) \\
 &= 0.7 - 0.5 \\
 &= 0.2 \\
 P(X = 2) &= 1 - F_X(1) \\
 &= 1 - 0.7 \\
 &= 0.3
 \end{aligned}$$

La probabilidad de masa corresponde a

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.1 & X = -2 \\ 0.2 & X = -1, 0, 1 \\ 0.3 & X = 2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

La gráfica es



(c)

$$\begin{aligned}
 P(B_0 \leq 0) &= P(X^2 - 1 \leq 0) \\
 &= P(X^2 \leq 1) \\
 &= P(|X| \leq \sqrt{1}) \\
 &= P(|X| \leq 1) \\
 &= P(-1 \leq X \leq 1) \\
 &= P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) \\
 &= 0.6
 \end{aligned}$$

16. Suponga que el tiempo de reparación de un cierto artefacto electrónico es una variable aleatoria  $X$  con función de densidad dada por

$$f_X(x) = e^{-x} \cdot \mathbb{I}_{\{x > 0\}}$$

Sea  $Z = \sqrt{\frac{\pi}{X}}$  el factor de depreciación. Calcule la esperanza de  $Z$ .

Acá  $\mathbb{I}_{\{x > 0\}}$  es la función indicatriz, la cual nos indica que el evento ocurre si  $x > 0$ , solo es otra forma de escribir la función de distribución.

Por definición

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}\left(\sqrt{\frac{\pi}{X}}\right) \\
 &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{x}} e^{-x} dx \\
 &= \sqrt{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{x^{1/2}} e^{-x} dx \\
 &= \sqrt{\pi} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx \\
 &= \sqrt{\pi} \Gamma(1/2) \\
 &= \sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\pi} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

17. Sea  $\lambda > 0$ , y  $f$  una función de densidad definida como  $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x}$  si  $x \geq 0$  y  $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x}$  si  $x < 0$ .

- (a) Encuentre  $P(X < t)$
- (b) Encuentre  $\mathbb{E}[nX(X-1)]$ ,  $n \in \mathbb{N}$
- (a) Como la función de densidad esta dividida en dos intervalos, vamos uno por uno. Para  $t < 0$  se tiene

$$\begin{aligned}
 P(X < t) &= \int_{-\infty}^t \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} dx \\
 &= \frac{e^{\lambda t}}{2}
 \end{aligned}$$

Para  $t > 0$  se tiene

$$\begin{aligned}
 P(X < t) &= \int_{-\infty}^t f_X(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} dx + \int_0^t \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx \\
 &= 1 - \frac{e^{-\lambda t}}{2}
 \end{aligned}$$

De modo que se tiene

$$F_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda t}}{2} & t < 0 \\ 1 - \frac{e^{-\lambda t}}{2} & t \geq 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[nX(X-1)] &= \mathbb{E}(nX^2 - nX) \\
 &= n\mathbb{E}(X^2) - n\mathbb{E}(X) \\
 &= n \left( \int_{-\infty}^0 x^2 \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} dx + \int_0^\infty x^2 \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx \right) - n \left( \int_{-\infty}^0 x \frac{\lambda}{2} e^{\lambda x} dx + \int_0^\infty x \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x} dx \right) \\
 &= \frac{2n}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$

18. Considere la variable aleatoria  $X$  con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Determine  $F_X(x)$ .

Podemos separar la v.a como

$$f_X(x) = \begin{cases} -x & -1 \leq x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Entonces, si  $x < 0$  se tiene

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-1}^x -u du \\ &= \frac{1-x^2}{2} \end{aligned}$$

si  $x > 0$  se tiene

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-1}^x f_X(u) du \\ &= \int_{-1}^0 -u du + \int_0^x u du \\ &= \frac{1+x^2}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, se tiene que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ \frac{1-x^2}{2} & -1 \leq x < 0 \\ \frac{1+x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

19. Demuestre que  $F_X(x) = \frac{1}{(1+e^{-x})^2}$  efectivamente es una *fda*.

- Claramente es positiva
- 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^x}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Y es fácil ver que  $f''(x) > 0$ , por lo cual es creciente

20. Sea  $X$  una v.a con fda dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{i+1}} & k \leq x < k+1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

- (a) Calcule  $P(X < 1)$  y  $P(X = k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  y determine la naturaleza de la v.a  
 (b) Demuestre que la probabilidad condicional  $P(X \geq k+m | X \geq m)$ ,  $m, k = 1, 2, \dots$  no depende de  $m$

(a)

$$\begin{aligned} P(X < 1) &= F_X(1^-) \\ &= \frac{1^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ahora, para calcular  $P(X = k)$  hay que tener cuidado, pues note que podríamos directamente haber hecho lo siguiente

$$\begin{aligned} P(X = k) &= F_X(k) - F_X(k^-) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{i+1}} - \frac{k^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2^k - 1}{2^{k+1}} - \frac{k^2}{2} \end{aligned}$$

pero el lector astuto notara que esto es solamente valido para  $k = 1$ , pues para  $k = 2, 3, \dots$ , el salto no lo pega en  $x = 0$ , sino en  $x = k - 1$ , es decir,  $k^- = k - 1$ , por ejemplo si queremos calcular  $P(X = 2)$  se tiene

$$P(X = 2) = F_X(2) - F_X(2^-)$$

por lo cual se debe hacer el calculo para  $k = 2, 3, \dots$ . Entonces

$$\begin{aligned} P(X = k) &= F_X(k) - F_X(k^-) \\ &= F_X(k) - F_X(k-1) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{i+1}} - \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^{i+1}} \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{i+1}} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^{i+1}} \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^{i+1}} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^{i+1}} \\ &= \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned}$$

Es fácil ver que  $P(X = 1) = \frac{1}{4}$ , luego, se tiene que

$$P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Y es claro que la v.a es mixta, pues en  $X = 1$  pega un salto desde una función continua a un escalón.

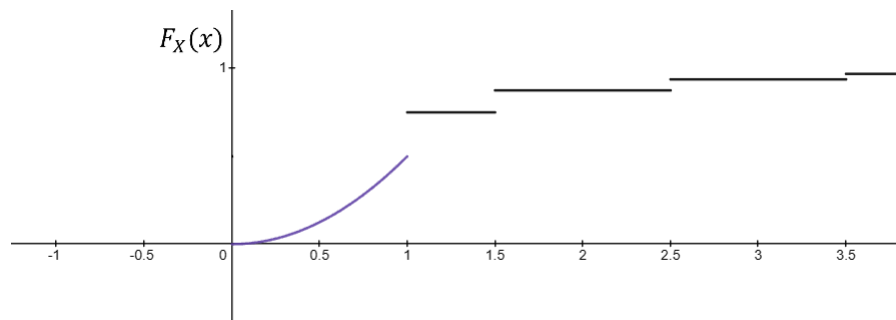


(b)

$$\begin{aligned}
 P(X \geq k+m | X \geq m) &= \frac{P(X \geq k+m \cap X \geq m)}{P(X \geq m)} \\
 &= \frac{P(X \geq k+m)}{P(X \geq m)} \\
 &= \frac{\sum_{x=k+m}^{\infty} P(X=x)}{\sum_{x=m}^{\infty} P(X=x)}, \quad \text{ocupamos lo demostrado anteriormente} \\
 &= \frac{\sum_{x=k+m}^{\infty} \frac{1}{2^{x+1}}}{\sum_{x=m}^{\infty} \frac{1}{2^{x+1}}} \\
 &= \frac{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{2^{x+k+m}}}{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{2^{x+m}}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2^{k+m}} \frac{1}{1-1/2}}{\frac{1}{2^m} \frac{1}{1-1/2}} \\
 &= \frac{1}{2^k}
 \end{aligned}$$

Demostrando así lo pedido.

Podemos ver la  $F_X$  en la siguiente imagen



Note que la forma mas sencilla de ver si una v.a es mixta es viendo su fda  $F_X(x)$ .

21. Sea  $X$  una v.a con fnp dada por

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \binom{2}{x} & x = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Calcule  $\mathbb{E}(X)$  y  $F_X(x)$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2P(X=2) \\
 &= \frac{1}{4} \binom{2}{1} + 2 \cdot \frac{1}{4} \binom{2}{2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Note que  $\mathcal{X} = \{0, 1, 2\}$ , entonces

$$\begin{aligned}P(X \leq 0) &= P(X = 0) = \frac{1}{4} \binom{2}{0} = \frac{1}{4} \\P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} \binom{2}{1} = 3/4 \\P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1\end{aligned}$$

Entonces

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/4 & 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

22. Se extrae una muestra aleatoria (m.a.) de tamaño  $n$  de un lote de  $N$  artículos, de los cuales una fracción  $p$  son defectuosos. Sea  $X$  = número de artículos defectuosos en la m.a. Determine la fmp  $f_X(x) = P(X = x)$  si

- (a) La m.a. es ordenada con devolución.
- (b) La m.a. es ordenada sin devolución.

Suponga que  $N = 100$ ;  $n = 10$  y  $p = 0.1$ , y que el lote se rechaza si más de la mitad de los artículos inspeccionados son defectuosos. Calcule la probabilidad de rechazar el lote en ambos casos, a) y b).

Note que el orden no afecta a la distribución del numero total de artículos defectuosos.

- (a) De los  $n$  artículos que vamos a extraer, nos interesa que  $x$  sean defectuosos, y la probabilidad de obtener un articulo defectuoso es  $p$ , es decir, vamos a extraer un articulo , y vemos si es o no defectuoso, lo devolvemos a la muestra, y volvemos a extraer un articulo, y así sucesivamente, por lo cual hay  $\binom{n}{x}$  maneras en que salga un defectuoso, y luego se multiplica por las respectivas probabilidades, entonces tenemos

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

En el caso particular pedido tenemos

$$P(X = x) = \binom{10}{x} (0.1)^x (1 - 0.1)^{1-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Nos piden  $P(X > 5)$ , entonces

$$\begin{aligned}P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 4) \\&= 1 - \sum_{x=0}^4 \binom{10}{x} 0.1^x 0.9^{10-x} \\&= 0.001634937\end{aligned}$$

- (b) Como es sin devolución, queremos  $x$  artículos defectuosos del grupo de los defectuosos ( $Np$ ), y el resto en los artículos no defectuosos. Como vamos a extraer  $n$  artículos de  $N$ , tenemos entonces

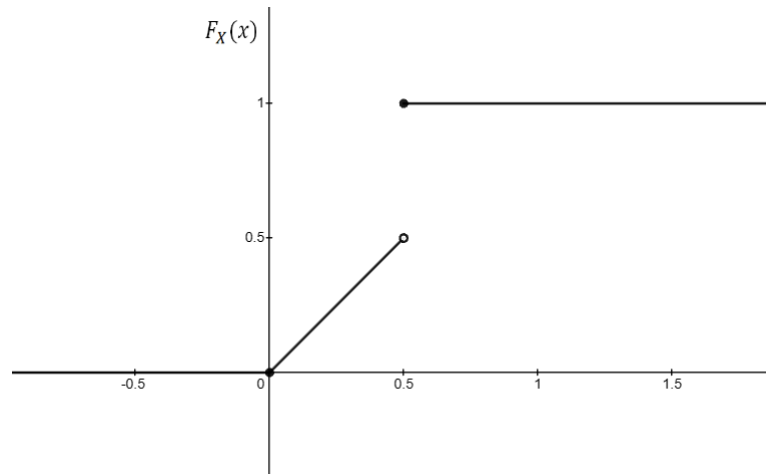
$$P(X = x) = \frac{\binom{Np}{x} \binom{N-Np}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

y se calcula de manera análoga al anterior obteniendo que  $P(X > 5) = 0.00003$

23. Sea  $X$  una variable aleatoria con fda dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1/2 \\ 1 & x \geq 1/2 \end{cases}$$

- (a) Haga un gráfico para esta fda.
  - (b) Verifique que  $F_X(x)$  es efectivamente una fda.
  - (c) Calcule  $P(X < 1/2)$  y  $P(X = 1/2)$ .
  - (d) Identifique la naturaleza de esta fda (continua, discreta u otra?)
- (a) La gráfica es



- (b) Claramente es creciente, positiva y cumple con los límites respectivos. Para chequear que es continua por la derecha, en  $x = 0$  es claro que se cumple, veamos ahora en  $x = 1/2$

$$\begin{aligned} F_X(1/2) &= \lim_{x \rightarrow 1/2^+} F_X(x) \\ &= F_X(1/2^+) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(X < 1/2) &= 1 - P(X \geq 1/2) \\ &= 1 - (1 - F_X(1/2^-)) \\ &= F_X(1/2^-) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1/2) &= F_X(1/2) - F_X(1/2^-) \\ &= 1 - 1/2 \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

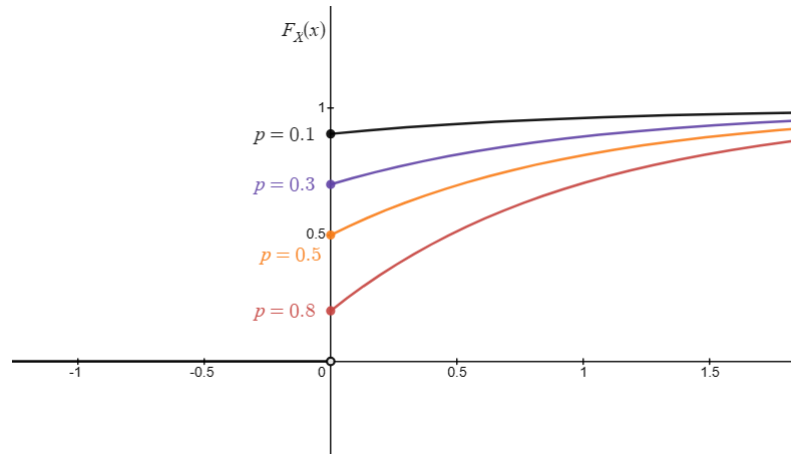
- (d) Es una v.a mixta, ya que pega un salto de una función continua a un punto en  $x = 0.5$

24. Considere la *fda* dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x \\ 1 - pe^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

con  $p \in (0, 1]$ .

- (a) Demuestre que  $F_X(x)$  es una fda
- (b) Calcule  $P(X = 0)$  y  $P(X > 0)$
- (c) Calcule  $\mathbb{E}(X)$
- (a) Veamos la fda gráficamente para diversos valores de  $p$



- Veamos si es creciente

$$f'(x) = pe^{-x}$$

como  $p \in (0, 1]$  se tiene que es creciente

- Claramente es positiva
- Veamos los límites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \text{ claramente}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 - pe^{-x} \\ &= 1 - p \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Veamos si es continua por la derecha, en este caso, el único punto a analizar es  $x = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} F_X(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - pe^{-x} \\ &= 1 - p \end{aligned}$$

donde coincide que  $F_X(0) = 1 - p$

(b)

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= F_X(0) - F_X(0^-) \\ &= 1 - p - 0 \\ &= 1 - p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X > 0) &= 1 - P(X \leq 0) \\ &= 1 - F_X(0) \\ &= 1 - P(X = 0) - F_X(0^-) \\ &= 1 - (1 - p) - 0 \\ &= p \end{aligned}$$

(c) Para esto ultimo, note que  $\text{Rec}(X) = \{0\} \cup (0, \infty)$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \cdot P(X=0) + \int_0^\infty x \left( \frac{d}{dx} F_X(x) \right) dx \\ &= \int_0^\infty x p e^{-x} dx \\ &= p \int_0^\infty x e^{-x} dx \\ &= p\end{aligned}$$

25. Sea  $X$  una v.a con fmp dada por

$$p_X(x) = \binom{n}{x} \frac{1}{2^n}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

calcule  $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$ .

Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \sum_{x=0}^n \frac{1}{1+x} \binom{n}{x} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

pero... como calculamos esto? recordemos el teorema del binomio con  $y = 1$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

para calcular lo pedido, podemos integrar en ambos lados, de modo que

$$\begin{aligned}(1+u)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k \\ \int_0^x (1+u)^n du &= \int_0^x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k du \\ \frac{(1+x)^n - 1}{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} \\ \text{si } x &= 1 \\ \frac{(1+1)^n - 1}{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1^{k+1}}{k+1} \\ \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

pero el lado derecho es justamente lo que queremos calcular, de modo que

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2^n} \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

26. Demuestre que si  $X$  tiene recorrido en los enteros no negativos, entonces podemos calcular la esperanza como

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} P(X \geq x) \quad (25)$$

Note que por definición de esperanza tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} xP(X=x) \\
 &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + \dots \\
 &\text{Expandamos esto y reorganicemos de la siguiente manera} \\
 &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=3) + P(X=3) + \dots \\
 &= (P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + \dots) + (P(X=2) + P(X=3) + \dots) \\
 &= P(X \geq 1) + P(X \geq 2) + P(X \geq 3) + \dots \\
 &= \sum_{x=1}^{\infty} P(X \geq x)
 \end{aligned}$$

27. Sea  $X$  una v.a con fdp dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x\lambda} & x > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Determine  $M_X(t)$ .

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-x\lambda} dx \\
 &= \lambda \int_0^{\infty} e^{-x(\lambda-t)} dx \\
 &= \lambda \frac{1}{\lambda - t}
 \end{aligned}$$

note que la integral converge solo si  $\lambda - t < 0$ , por lo cual

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad \lambda < t$$

28. Un comité de 3 integrantes se forma aleatoriamente seleccionado de entre 4 médicos y 3 enfermeras (se eligen uno a uno las personas y estas no se vuelve a considerar en el siguiente paso). Escriba la función de probabilidad para la variable aleatoria  $X$  que representa el número de médicos en el comité.

$$p_X(x) = \frac{\binom{4}{x} \binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

29. Una tienda de computadoras ha comprado tres de cierto tipo a \$500 cada uno y las venderá a \$1000 cada una. El fabricante ha aceptado volver a comprar en \$200 cualquier computadora que no se haya vendido en un tiempo especificado. Denotemos por  $X$  al número de computadoras vendidas y supongamos que  $p(0) = 0.1$ ,  $p(1) = 0.2$ ,  $p(2) = 0.3$  y  $p(3) = 0.4$ . ¿Cuál será la utilidad esperada de esta tienda al comprar las tres computadoras?

Podemos hacer la variable aleatoria  $U(X)$  = utilidad asociada al vender  $x$  computadoras. De modo que

$$\begin{aligned}
 U(X) &= \text{Ingreso} - \text{Costo} \\
 &= 1000X + 200(3 - X) - 3 \cdot 500 \\
 &= 800X - 900
 \end{aligned}$$

Tomamos esperanza

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U) &= 800\mathbb{E}(X) - 900 \\ &= 800(0 \cdot 0.1 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.4) - 900 \\ &= 700\end{aligned}$$

30. Sea  $M_X(t)$  la función generadora de momentos de  $X$ , se define

$$S(t) = \ln(M_X(t))$$

Muestre que:

$$\left. \frac{d}{dt} S(t) \right|_{t=0} = \mathbb{E}(X) \qquad \left. \frac{d^2}{dt^2} S(t) \right|_{t=0} = \text{Var}(X)$$

Usamos la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} S(t) &= \left. \frac{(M_X(t))'}{M_X(t)} \right|_{t=0} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X)}{\int_{\Omega} x^0 f_X(x) dx} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X)}{\int_{\Omega} f_X(x) dx} \\ &= \mathbb{E}(X)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2} S(t) &= \frac{d}{dt} \left( \frac{(M_X(t))'}{M_X(t)} \right) \\ &= \left. \frac{(M_X(t))'' M_X(t) - ((M_X(t))')^2}{(M_X(t))^2} \right|_{t=0} \\ &= \frac{\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}{1} \\ &= \text{Var}(X)\end{aligned}$$

31. Sea  $X$  una v.a con fdp

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Determine  $\mathbb{E}(X^n)$  y  $P(X > 1/2 | X > 1/3)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^n) &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X > 1/2 | X > 1/3) &= \frac{P(X > 1/2 \cap X > 1/3)}{P(X > 1/3)} \\ &= \frac{P(X > 1/2)}{P(X > 1/3)} \\ &= \frac{\int_{1/2}^1 dx}{\int_{1/3}^1 dx} \\ &= 3/4\end{aligned}$$

32. Muestre que  $Var(X) \geq 0$

Vamos a demostrarlo usando la desigualdad de Jensen, en particular

$$\mathbb{E}(g(X)) \geq g(\mathbb{E}(X))$$

pues si usamos  $g(X) = x^2$ , podemos ver que  $f''(x) = 2 > 0$ , por lo cual es convexa, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &\geq (\mathbb{E}(X))^2 \\ \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 &\geq 0 \\ Var(X) &\geq 0\end{aligned}$$

33. Sea  $X$  una v.a no negativa con esperanza finita, demuestre que

$$\sqrt{1 + (\mathbb{E}(X))^2} \leq \mathbb{E}(\sqrt{1 + X^2})$$

Procedemos de manera similar a antes, tomando  $g(X) = \sqrt{1 + x^2}$ , y tenemos

$$f''(x) = \frac{1}{(1 + x^2)\sqrt{1 + x^2}} > 0$$

por lo cual es convexa, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\sqrt{1 + X^2}) &\geq \sqrt{1 + (\mathbb{E}(X))^2} \\ \Rightarrow \sqrt{1 + (\mathbb{E}(X))^2} &\leq \mathbb{E}(\sqrt{1 + X^2})\end{aligned}$$

34. Sea  $X$  una v.a con fda dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ \frac{1}{2} + \frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{\pi} & -a \leq x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$$

- (a) Determine la probabilidad de que  $X$  se encuentre entre  $(-a/2, a/2)$
- (b) Calcule el cuantil  $x_{0.75}$
- (c) Obtenga  $f_X(x)$
- (d) Obtenga la moda y mediana de  $X$
- (a)

$$\begin{aligned}P(-a/2 < X < a/2) &= P(X < a/2) - P(X < -a/2) \\ &= F_X(a/2) - F_X(-a/2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\arcsin\left(\frac{a/2}{a}\right)}{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{\arcsin\left(\frac{-a/2}{a}\right)}{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin(1/2) \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- (b) Se pide  $P(X \leq x_{0.75}) = 0.75$ , entonces

$$\begin{aligned}P(X \leq x_{0.75}) &= 0.75 \\ \frac{1}{2} + \frac{\arcsin\left(\frac{x_{0.75}}{a}\right)}{\pi} &= 0.75 \\ \Rightarrow x_{0.75} &= \frac{a\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$



(c)

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

de modo que

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad -a < x < a$$

- (d) Note que la función  $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$  solo tiene un mínimo, por lo cual  $X$  no tiene moda. Para obtener la mediana, nos interesa  $x_{0.5}$ , entonces

$$\begin{aligned} P(X \leq x_{0.5}) &= 0.5 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\arcsin\left(\frac{x_{0.5}}{a}\right)}{\pi} &= 0.5 \\ \Rightarrow x_{0.5} &= 0 \end{aligned}$$

35. Se tiene una moneda sesgada tal que  $P(\text{cara}) = 3/7$  y  $P(\text{sello}) = 4/7$ . Suponga que la moneda se lanza 3 veces de manera consecutiva. Defina la v.a  $X$  : numero de caras obtenidas. Encuentre  $p_X(x)$  y  $\mathbb{E}(X)$ .

Se tiene

$$p_X(x) = \binom{3}{x} \left(\frac{3}{7}\right)^x \left(\frac{4}{7}\right)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3$$

Y la esperanza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^3 x \binom{3}{x} \left(\frac{3}{7}\right)^x \left(\frac{4}{7}\right)^{3-x} \\ &= \frac{9}{7} \end{aligned}$$

36. El espacio muestral de un experimento es  $\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$  y cada resultado es equiprobable. Defina la siguiente v.a

$\omega$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$
$X(\omega)$	0	0	1	1	-1	2

Calcule

- (a)  $P(X = 1)$
- (b)  $P(|X - 1| \leq 1)$
- (c)  $P(X \geq 0 \cup X < 2)$

Como es equiprobable es todo casi directo.

(a)

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(X(c)) + P(X(d)) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}P(|X - 1| \leq 1) &= P(-1 \leq X - 1 \leq 1) \\&= P(0 \leq X \leq 2) \\&= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\&= \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \\&= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}P(X \geq 0 \cup X < 2) &= P(X \geq 0) + P(X < 2) - P(X \geq 0 \cap X < 2) \\&= P(X \geq 0) + P(X < 2) - P(0 \leq X < 2) \\&= P(X \geq 0) + P(X < 2) - P(X < 2) - P(X \leq 0) \\&= P(X \geq 0) - P(X \leq 0) \\&= \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \\&= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

37. Sea  $X$  una v.a con densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} c(2-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

(a) Determine el valor de  $c$  tal que efectivamente sea una densidad

(b) Calcule  $P(|X| > 0.3)$

(a) Claramente se debe tener  $c > 0$ . Ahora debemos encontrar el valor de  $c$  tal que integre 1. Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 c(2-x)dx &= 1 \\c \int_0^1 (2-x)dx &= 1 \\c \cdot \frac{3}{2} &= 1 \\c &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}P(|X| > 0.3) &= P(X > 0.3) \\&= \int_{0.3}^1 \frac{2}{3}(2-x)dx \\&= 0.746\end{aligned}$$

38. Un vendedor tiene dos tiendas diferentes donde vende computadoras. La probabilidad de que venda, en un día, una computadora en la primera tienda es 0.4 e independientemente, la probabilidad de que venda, en un día, una computadora en la segunda tienda es 0.7. Además, supongamos que es igualmente probable que él venda una computadora de tipo 1 o tipo 2. Una computadora de tipo 1 cuesta 1800 mientras que la computadora tipo 2, con las mismas especificaciones, cuesta 1000. Sea  $X$  la cantidad, en dólares, que el vendedor vende en un día. Encuentre la distribución de la variable aleatoria  $X$ .

Primero veamos el recorrido. Se pueden vender 0 computadoras, es decir, se gana 0; se puede vender una (de tipo I o II), se gana 1000 o 1800; y finalmente se pueden vender dos, se puede ganar (2000,3600,2800), entonces

$$\mathcal{X} = \{0, 1000, 2000, 1800, 2800, 3200\}$$

note que se pueden vender dos computadoras pues hay dos tiendas. Para lo pedido definamos los siguientes eventos

$A$  : se vende una compu en la primera tienda

$B$  : se vende una compu en la segunda tienda

$TI$  : se vende tipo I

$TII$  : se vende tipo II

por enunciado tenemos

$$P(A) = 0.4$$

$$P(A^c) = 0.6$$

$$P(B) = 0.7$$

$$P(B^c) = 0.3$$

$$P(TI) = 1/2$$

$$P(TII) = 1/2$$

nos interesan los eventos

$$P((A \cap TI \cap B^c) \cup (A^c \cap B \cap TI)), P((A \cap TII \cap B^c) \cup (A^c \cap B \cap TII)),$$

$$P(A \cap T1 \cap B \cap T1), P(A \cap T2 \cap B \cap T2), P((A \cap T1 \cap B \cap T2) \cup (A \cap T2 \cap B \cap T1)),$$

$$P(A^c \cap B^c)$$

entonces

$$\begin{aligned} P((A \cap TI \cap B^c) \cup (A^c \cap B \cap TI)) &= P((A \cap TI \cap B^c)) + P(A^c \cap B \cap TI) \\ &= 0.4 \cdot 1/2 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.7 \cdot 1/2 \\ &= 0.27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P((A \cap TII \cap B^c) \cup (A^c \cap B \cap TII)) &= P((A \cap TII \cap B^c)) + P(A^c \cap B \cap TII) \\ &= 0.4 \cdot 1/2 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.7 \cdot 1/2 \\ &= 0.27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap T1 \cap B \cap T1) &= 0.4 \cdot 1/2 \cdot 0.7 \cdot 1/2 \\ &= 0.07 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap T2 \cap B \cap T2) &= 0.4 \cdot 1/2 \cdot 0.7 \cdot 1/2 \\ &= 0.07 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P((A \cap T1 \cap B \cap T2) \cup (A \cap T2 \cap B \cap T1)) &= P((A \cap T1 \cap B \cap T2)) + P(A \cap T2 \cap B \cap T1) \\ &= 0.4 \cdot 1/2 \cdot 0.7 \cdot 1/2 + 0.4 \cdot 1/2 \cdot 0.7 \cdot 1/2 \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= 0.6 \cdot 0.3 \\ &= 0.18 \end{aligned}$$

Finalmente tenemos

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.27 & x = 1000, 1800 \\ 0.07 & x = 2000, 3200 \\ 0.14 & x = 2800 \\ 0.18 & x = 0 \end{cases}$$

39. Sea  $\xi$  una v.a con fmp dada por

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{(1 + \lambda)^{k+1}}, \quad \lambda > 0, k = 1, 2, 3, \dots$$

calcule  $\mathbb{E}(\xi)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{(1 + \lambda)^{k+1}} \\ &= \frac{1}{(1 + \lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} k \left( \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^k \\ &= \frac{1}{(1 + \lambda)} \sum_{k=1}^{\infty} k \left( \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^{k-1+1} \\ &= \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left( \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^{k-1} \\ &= \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \frac{1}{\left( 1 - \frac{\lambda}{1 + \lambda} \right)^2} \end{aligned}$$

40. Para una empresa de buses de pasajeros es importante mantener una buena frecuencia del servicio. El tiempo de recorrido  $X$  de un bus, medido en minutos, desde su salida del terminal hasta su regreso a el, tiene función densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} e^{-\frac{1}{30}(x-120)} & x \geq 120 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en menos de  $t$  minutos.
- (b) Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en mas de 3 horas.
- (c) Un bus inicia su recorrido y tres horas después aun no ha llegado a su destino. Calcule la probabilidad que el bus se demore a lo menos 15 minutos adicionales

Note que  $X$  está en minutos.

- (a) Si  $x > 120$  entonces

$$\begin{aligned} P(X \leq t) &= \int_{120}^t \frac{1}{30} e^{-\frac{1}{30}(x-120)} dx \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{30}(t-120)} \end{aligned}$$

- (b) Pasemos 3 horas a minutos

$$60 \cdot 3 = 180$$

entonces

$$\begin{aligned} P(X > 180) &= 1 - P(X \leq 180) \\ &= 1 - (1 - e^{-\frac{1}{30}(180-120)}) \\ &= e^{-2} \end{aligned}$$

(c) Nos piden  $P(X \geq 195 | X > 180)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 P(X \geq 195 | X > 180) &= \frac{P(X \geq 195 \cap X > 180)}{P(X > 180)} \\
 &= \frac{P(X \geq 195)}{P(X > 180)} \\
 &= \frac{1 - P(X < 195)}{1 - P(X < 180)} \\
 &= \frac{e^{-\frac{1}{30}(195-120)}}{e^{-\frac{1}{30}(195-180)}} \\
 &= e^{-1/2}
 \end{aligned}$$

41. Formalmente una v.a se define como:

Dado un modelo de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , una variable aleatoria es una función real valorada  $X$  sobre  $\Omega$  tal que, para todo numero real  $x$ , el conjunto  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$  pertenece a  $\mathcal{A}$ .

Básicamente que "cada elemento de la acumulada pertenezca a  $\mathcal{A}$ ". En base a la definición, determine si las siguientes v.a.s son o no una v.a.

(a)  $\Omega = \{a, b, c\}$  y  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$ .

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = b \\ 1 & \omega = a, c \end{cases}$$

(b)  $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}, \{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \Omega\}$

i.  $X(\omega) = \omega + 1, \quad \forall \omega \in \Omega$

ii.  $X(\omega) = \lfloor \omega/2 \rfloor$

iii.  $X(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \leq 1 \\ 1 & 1 < \omega \leq 4 \\ 2 & \omega > 4 \end{cases}$

(a) Tenemos

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset & x < 0 \\ \{b\} & 0 \leq x < 1 \\ \{a, b, c\} & x \geq 1 \end{cases}$$

pero note que  $\{b\} \notin \mathcal{A}$ , por lo cual  $Y$  no es una variable aleatoria.

(b) i. Tenemos

$\omega$	0	1	2	3	4	5
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6

y

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset & x < 1 \\ \{0\} & 1 \leq x < 2 \\ \{0, 1\} & 2 \leq x < 3 \\ \{0, 1, 2\} & 3 \leq x < 4 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

pero  $\{0\} \notin \mathcal{F}$ . Por lo cual no es v.a.

ii. Tenemos

$\omega$	0	1	2	3	4	5
$X(\omega)$	0	0	1	1	2	2

y

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset & x < 0 \\ \{0, 1\} & 0 \leq x < 1 \\ \{0, 1, 2, 3\} & 1 \leq x < 2 \\ \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} & x \geq 2 \end{cases}$$

pero  $\{0, 1, 2, 3\} \notin \mathcal{F}$ . Por lo cual no es v.a.

iii. Tenemos

$\omega$	0	1	2	3	4	5
$X(\omega)$	0	0	1	1	1	2

y

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset & x < 0 \\ \{0, 1\} & 0 \leq x < 1 \\ \{0, 1, 2, 3, 4\} & 1 \leq x < 2 \\ \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} & x \geq 2 \end{cases}$$

Notamos que todo pertenece a  $\mathcal{F}$ , por lo cual si es una v.a.

Se deja como propuesta para el lector verificar todo lo anterior mediante la siguiente definición alternativa

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\} \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{B}.$$

recordando que

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$$

42. Sea  $X$  una v.a con fdp

$$f_X(x) = \frac{k}{1 + (x - \alpha)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Encuentre el valor de  $k$  tal que  $f_X(x)$  sea efectivamente una fdp. Y comente sobre la existencia de  $\mathbb{E}(X)$ .

Para que sea una  $f_X(x)$  debe integrar uno y debe ser positiva. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{1 + (x - \alpha)^2} dx &= 1 \\ k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (x - \alpha)^2} dx &= 1 \\ x = x - \alpha &\Rightarrow dx = dx \\ k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx &= 1 \\ k \left( \lim_{a \rightarrow \infty} \arctan(a) - \lim_{b \rightarrow -\infty} \arctan(b) \right) &= 1 \\ k \cdot \pi &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{\pi}$$

Se deja propuesto al lector reflexionar en torno a la existencia de la esperanza de  $X$ .

43. Sea  $F_X(x)$  la fda de alguna v.a  $X$ , pruebe que  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

Sea  $A_n = \{\omega : X(\omega) \leq n\}$ , entonces  $\{A_n\} \uparrow \Omega$ ; o sea  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ , pues estamos recorriendo todo el espacio muestral, además  $P(A_n) = P(X \leq n) = F_X(n)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(n) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} P(A_n) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= P(\Omega) \\ &= 1 \end{aligned}$$

### 3 Distribuciones

Previamente ya vimos las propiedades de una v.a, en particular conocimos  $f_X(x)$  y  $p_X(x)$ , pero no definimos que representan en particular. En esencia estas funciones se ajustan bien a los datos y representan de buena manera a la probabilidad de estos. A modo de ejemplo tenemos

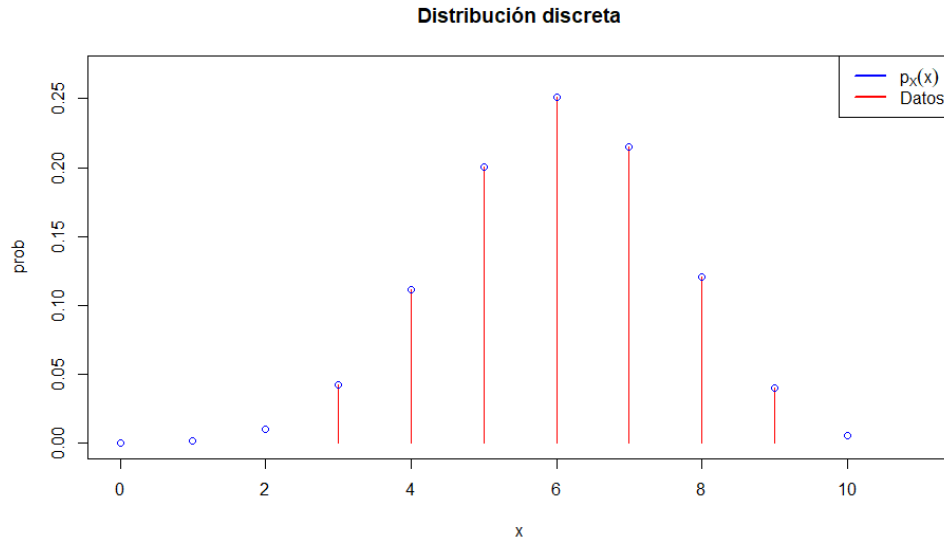


Figure 8: Caso discreto -  $p_X(x)$

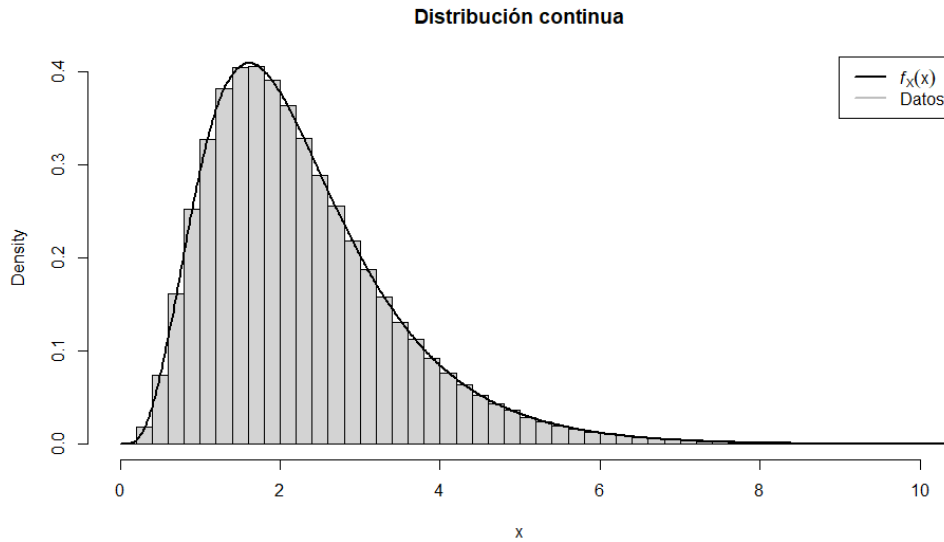


Figure 9: Caso continuo -  $f_X(x)$

Las funciones de densidad y de masa pueden representar una cantidad variada de fenómenos y modelar situaciones de una manera sencilla. A continuación se presentan las distribuciones mas conocidas y frecuentemente utilizadas.

A partir de acá utilizaremos la notación " $\sim$ ", la cual quiere decir distribuye.



### 3.1 Distribuciones discretas

#### 1. Bernoulli

Esta distribución toma valores 1 y 0, por lo cual corresponde al éxito o fracaso del experimento respectivamente. Con probabilidad de éxito  $p$  y fracaso  $1 - p$ .

$$p_X(x) = \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1 - p & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = p$
- $\text{Var}(X) = p(1 - p)$
- $p \in [0, 1]$
- Notación:  $X \sim \text{Bern}(p)$
- $M_X(t) = (1 - p) + pe^t$

#### 2. Binomial

Esta distribución mide el número de éxitos en  $n$  ensayos independientes Bernoulli con probabilidad  $p$ .

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} & x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = np$
- $\text{Var}(X) = np(1 - p)$
- $p \in [0, 1]$
- Notación:  $X \sim \text{Bin}(n, p)$
- Generalmente nos van a pedir la cantidad de  $x$  éxitos en un experimento
- $M_X(t) = [(1 - p) + pe^t]^n$

#### 3. Uniforme discreta

Esta distribución corresponde al caso equiprobable, donde cada resultado tiene la misma probabilidad. Con  $n = b - a + 1$ .

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & x = a, a + 1, \dots, b - 1, b \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{a + b}{2}$
- $\text{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$
- Notación:  $X \sim \text{Unif}\{a, b\}$

#### 4. Binomial negativa

Esta distribución cuenta el número ( $x$ ) de ensayos Bernoulli necesarios para tener  $k$  éxitos.

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{k-1} p^k (1 - p)^{x-k} & x = k, k + 1, \dots \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{k}{p}$

- $Var(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$
- Notación:  $X \sim BinNeg(k, p)$
- $M_X(t) = \left[ \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t} \right]^k$
- Algunos libros la definen de formas diferentes, por lo cual puede variar la forma de la distribución según lo que se este buscando, ya sean éxitos, fracasos, etc. Tener ojo con esto.

## 5. Geométrica

Esta distribución cuenta el numero de ensayos hasta obtener el primer éxito.

$$p_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- Notación:  $X \sim Geo(p)$
- $M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}$
- En algunos libros esta definida de forma  $p(1-p)^x$ , para  $x = 0, 1, \dots$ , en este caso cuenta el numero de fallos hasta el primer éxito.

## 6. Hipergeométrica

Suponga que se tiene una población de  $N$  elementos de los cuales,  $K$  pertenecen a la categoría  $A$  y  $N - K$  pertenecen a la categoría  $B$ . La distribución hipergeométrica mide la probabilidad de obtener  $x$  ( $0 \leq x \leq K$ ) elementos de la categoría  $A$  en una muestra sin reemplazo de  $n$  elementos de la población original.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{N-K}{n-x} \binom{K}{x}}{\binom{N}{n}} & x = 0, 1, 2, \dots, \min(n, K) \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{nK}{N}$
- $N$ : Tamaño de la población
- $n$ : Tamaño de la muestra seleccionada
- $K$ : Número de elementos o individuos en la muestra con cierta característica.
- Notación:  $X \sim Hip(N, K, n)$

## 7. Poisson

Esta distribución mide la probabilidad de ocurrencias.

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = Var(X) = \lambda$
- $M_X(t) = \exp[\lambda(e^t - 1)]$
- Notación:  $X \sim P(\lambda)$

### 3.1.1 Ejemplos

1. En un laberinto en forma de T, a una rata se le dará alimento si gira a la izquierda, de lo contrario recibirá una descarga eléctrica. En la primera prueba, la probabilidad de que la rata gire a la izquierda es la misma de que gire a la derecha, una vez realizada la primera prueba, se observa el comportamiento en una segunda instancia. Del experimento se obtuvo lo siguiente: De las ratas que giraron a la izquierda en la primera prueba, el 68% volvió a girar a la izquierda en la segunda prueba, mientras que de las ratas que giraron a la derecha en la primera prueba, el 84% giró a la izquierda en la segunda prueba.
  - (a) Calcule la probabilidad de tener que realizar el experimento 5 veces para encontrar la tercera rata que en la segunda prueba reciba alimento
  - (b) De 8 ratas que recibieron carga eléctrica en la segunda prueba, calcule probabilidad de que sólo 3 de ellas hayan recibido alimento en la primera prueba

Sea  $I_i$  la rata gira a la izquierda en la  $i$ -ésima prueba. Por el enunciado tenemos

$$\begin{aligned} P(I_1) &= 0.5 ; P(I_1^c) = 0.5 \\ P(I_2|I_1) &= 0.68 ; P(I_2|I_1^c) = 0.84 \end{aligned}$$

- (a) Nos interesa la probabilidad de tener que realizar el experimento 5 veces para tener el tercer éxito, por lo cual esto distribuye binomial negativa, pero nos falta la probabilidad ( $p$ ), esta probabilidad corresponde a la de que un ratón reciba alimento en la segunda prueba. Utilizando el teorema de probabilidades totales y condicionando en si giro a la izquierda o derecha en la primera prueba tenemos

$$\begin{aligned} P(I_2) &= P(I_2|I_1)P(I_1) + P(I_2|I_1^c)P(I_1^c) \\ &= 0.68 \cdot 0.6 + 0.84 \cdot 0.5 \\ &= 0.76 \end{aligned}$$

Ahora si, sea  $X$  = el número de realizaciones del experimento hasta encontrar la tercera rata que en la segunda prueba recibe el alimento, entonces  $X \sim \text{BinNeg}(3, 0.76)$ . Nos interesa la probabilidad de tener que realizar 5 veces el experimento, entonces

$$P(X = 5) = \binom{5-1}{3-1} (0.76)^3 (1 - 0.76)^{5-3} = 0.1517$$

- (b) Nos interesa tener 3 éxitos dentro de 8 ensayos (binomial), es decir, que de 8 ratones que recibieron la carga eléctrica en la segunda prueba, solo 3 de ellas hayan recibido alimento en la primera. Ahora tenemos que encontrar la probabilidad de que la rata reciba alimento en la primera dado que en la segunda prueba recibieron carga eléctrica, entonces

$$\begin{aligned} P(I_1|I_2^c) &= \frac{P(I_2^c|I_1)P(I_1)}{P(I_2^c)} \\ &= \frac{(1 - P(I_2|I_1))P(I_1)}{1 - P(I_2)} \\ &= \frac{(1 - 0.68) \cdot 0.5}{1 - 0.76} \\ &= 0.67 \end{aligned}$$

Ahora si. Sea  $Y$  = el número de ratas que recibieron alimento en la primera prueba, entre 8 ratas que recibieron la descarga eléctrica en la segunda. Entonces  $Y \sim \text{Bin}(8, 0.67)$ . Nos interesa que solo 3 ratas hayan recibido alimento en la primera prueba, entonces

$$P(Y = 3) = \binom{8}{3} (0.67)^3 (1 - 0.67)^{8-3} = 0.06591468$$

2. Un laboratorio que trabaja 24x7 recibe muestras de PCR para su análisis. Suponga que las últimas 1.000 muestras analizadas presentaron una positividad del 8%. ¿Cuál es la probabilidad que al revisar una muestra aleatoria de 20 resultados entre las últimas mil muestras analizadas, al menos  $x$  arrojen PCR positivo? Nota: Una muestra aleatoria por definición es SIN reemplazo, salvo que se indique lo contrario.

Tenemos

- 1.000 muestras
- 8% presenta una positividad, es decir, 80 muestras
- se extrae muestra aleatoria de 20 muestras
- Nos interesa que  $x$  arrojen positivo

Podemos intuir que es una HiperGeométrica, pues tomamos una muestra de tamaño 20, dentro de una población de tamaño 1000, y podemos dividirla en los que tienen positividad y los que no. Entonces sea  $X$  = número de muestras que arrojan positividad, entonces  $X \sim \text{Hip}(20, 1000, 80)$ . Y solo se pide  $P(X \geq x)$ .

3. Se lanzan dos dados de manera independiente 24 veces. Determina la probabilidad de que se obtengan al menos un doble 6.

La probabilidad de obtener un doble 6 es

$$p = 1/36$$

Definamos  $X$  : número de veces que sale doble 6, entonces  $X \sim \text{Bin}(24, 1/36)$ , pues tenemos 24 ensayos, y la probabilidad de éxito es  $1/36$ . Se pide  $P(X \geq 1)$ , entonces

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \binom{24}{0} \left(\frac{1}{36}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{36}\right)^{24-0} \end{aligned}$$

4. Suponga que una bombilla falla un día cualquiera con probabilidad  $p = 0.001$ . Calcule la probabilidad de que la bombilla dure al menos 30 días encendida.

Acá el éxito es que falle la bombilla. Y nos interesa ver que se tenga un éxito en al menos 30 ensayos. Definamos  $X$  : número de días hasta que la bombilla falla, entonces  $X \sim \text{Geo}(0.001)$ . Se pide  $P(X \geq 30)$ , entonces

$$\begin{aligned} P(X \geq 30) &= 1 - P(X < 30) \\ &= 1 - \sum_{x=1}^{29} 0.001(1 - 0.001)^{x-1} \\ &= 0.97 \end{aligned}$$

5. El número de pacientes que acuden diariamente a la sala de urgencias (S.U.) de cierto hospital tiene una distribución de Poisson con media 10. ¿Cuál es la probabilidad de que, durante un día normal, el número de pacientes ingresados en urgencias del hospital será menor o igual a 3?

Tenemos que  $X \sim P(10)$ . Nos piden  $P(X \leq 3)$ , entonces

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= \sum_{x=0}^3 \frac{e^{-10} 10^x}{x!} \\ &= 1.0336 \times 10^{-2} \end{aligned}$$

### 3.2 Distribuciones continuas

Contiene algunas que no se pasan en el curso, pero resultan interesantes de conocer.

#### 1. Uniforme

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$
- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$
- $-\infty < a, b < \infty$
- Notación:  $X \sim U(a, b)$

Para efectos prácticos da lo mismo si es  $U[a, b]$  o  $U(a, b)$ ...

#### 2. Exponencial

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- $M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$
- $\lambda > 0$
- Notación:  $X \sim Exp(\lambda)$

#### 3. Gamma

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} & x > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$
- $Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$
- $M_X(t) = \left( \frac{\beta}{\beta - t} \right)^\alpha$

- $\alpha, \beta > 0$
- Notación:  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$

Algunas propiedades de la función Gamma:

- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
- $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$
- $\Gamma(n) = (n-1)!$
- $\Gamma(n+1) = n!$

#### 4. Beta

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$
- Notación:  $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$
- $\alpha, \beta > 0$
- $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$

#### 5. Normal

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} & -\infty < x < \infty \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \mu$
- $\text{Var}(X) = \sigma$
- $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
- $\mu \in \mathbb{R}$
- $\sigma^2 > 0$
- Notación:  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Se denomina la normal estándar cuando  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = 1$ . En este caso  $X \sim N(0, 1)$  con 
$$f_X(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$
- La acumulada de la normal estándar corresponde a  $\Phi(x)$
- Se tiene la propiedad  $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$
- $\Phi(x)^{-1} = -\Phi(1-x)^{-1}$

## 6. LogNormal

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi\zeta^2}} \exp\left\{-\frac{(\ln(x) - \lambda)^2}{2\zeta^2}\right\} & x > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = e^{\lambda + \frac{\zeta^2}{2}}$
- $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\zeta > 0$
- Notación:  $X \sim \text{LogNormal}(\lambda, \zeta^2)$

## 7. Weibull

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\nu x^{\nu-1} e^{-(x/\lambda)^\nu}}{\lambda^\nu} & x \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-(\frac{x}{\lambda})^\nu} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)$
- $\lambda, \nu > 0$
- Notación:  $X \sim \text{Weibull}(\lambda, \nu)$

## 8. Chi-cuadrado

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} & x > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = n$
- $\text{Var}(X) = 2n$
- $n \in \mathbb{N}$
- $M_X(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{n/2}$
- Notación:  $X \sim \chi^2(n)$
- $n$  denota los grados de libertad

### 9. t-Student

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} & -\infty < x < \infty \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = 0$  ,  $\nu > 1$
- $Var(X) = \frac{\nu}{\nu-2}$  ,  $\nu > 2$
- $n \in \mathbb{R}$
- Notación:  $X \sim t_\nu$
- $\nu$  denota los grados de libertad
- No tiene MGF

### 10. Fisher (F)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\nu_1/2, \nu_2/2)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_1/2} \frac{x^{\nu_1/2-1}}{\left(1 + \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)x\right)^{(\nu_1+\nu_2)/2}} & x \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2-2}$  ,  $\nu_2 > 2$
- $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$
- Notación:  $X \sim F(\nu_1, \nu_2)$
- $\nu_1, \nu_2$  denotan los grados de libertad
- No tiene MGF

### 11. Cauchy

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\gamma} \frac{1}{\left[\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2 + 1\right]} & -\infty < x < \infty \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) =$  indefinida
- $x_0 \in \mathbb{R}$
- $\gamma > 0$
- Notación:  $X \sim Cauchy(x_0, \gamma)$  , o también:  $X \sim C(x_0, \gamma)$
- No tiene MGF



12. Doble exponencial o de Laplace

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-|\frac{x-\mu}{\beta}|}}{2\beta} & -\infty < x < \infty \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{(x-\mu)/\beta}}{2} & x < 0 \\ 1 - \frac{e^{-(x-\mu)/\beta}}{2} & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \mu$
- $Var(X) = 2\beta^2$
- $\mu \in \mathbb{R}$
- $\beta > 0$
- Notación:  $X \sim Laplace(\mu, \beta)$
- $M_X(t) = \frac{e^{\mu t}}{1 - \beta^2 t^2}$

13. Rayleigh

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-(x^2/2\sigma^2)} & x \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(X) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- $\sigma > 0$
- Notación:  $X \sim Rayleigh(\sigma)$

14. Nakagami

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2m^m}{\Gamma(m)\Omega^m} x^{2m-1} e^{-(x^2 m)/\Omega} & x \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\Omega > 0$
- $m > \frac{1}{2}$
- Notación:  $X \sim Nakagami(m, \Omega)$

15. Logística

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-(x-\mu)/s}}{s(1 + e^{-(x-\mu)/s})^2} & x \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $\mu \in \mathbb{R}$
- $s > 0$
- $\mathbb{E}(X) = \mu$
- $Var(X) = \frac{\pi^2}{3}s^2$
- Notación:  $X \sim Logistic(\mu, s)$

### 3.3 Reconocer distribuciones

Algo muy importante para el curso es saber reconocer las distribuciones, es decir, la forma de las distribuciones. A continuación se presentan algunos ejemplos de como se ajusta una  $f_X(x)$  a alguna distribución conocida. Esto ultimo nos sirve para calcular integrales, y así ahorrarnos un montón de tiempo.

1. Determinar como distribuye  $f_X(x) = xe^{-x} \cdot \mathbb{I}_{x>0}$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= xe^{-x} \\ &= \frac{1^2 x^{2-1} e^{-x \cdot 1}}{\Gamma(2)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \sim \text{Gamma}(2, 1)$$

Recordar que  $\Gamma(2) = 1$

2. Con lo anterior determine  $\mathbb{E}(X)$ . Si  $f_X(x) = xe^{-x} \cdot \mathbb{I}_{x>0}$ .

Por el ejemplo anterior sabemos que  $X \sim \text{Gamma}(2, 1)$ , por lo cual la esperanza es 2.

$$\mathbb{E}(X) = 2$$

3. Calcule  $\mathbb{E}(Y)$ , si  $Y \sim \exp(3)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_0^\infty y 3e^{-3y} dy \\ &= 3 \int_0^\infty y e^{-3y} dy \\ &= 3 \frac{3}{3} \int_0^\infty \frac{y^{2-1} e^{-3y}}{\Gamma(2)} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{3^2 y^{2-1} e^{-3y}}{\Gamma(2)} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{3^2 y^{2-1} e^{-3y}}{\Gamma(2)} dy \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \text{Gamma}(2, 3) dy \\ &= \frac{1}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Recordar que  $\int_0^\infty \frac{3^2 y^{2-1} e^{-3y}}{\Gamma(2)} dy = \int_0^\infty f_Y(y) dy = 1$ , ya que se integra en todo el recorrido de la v.a.

4. Determinar como distribuye  $f_X(x) = \frac{1}{3} \cdot I(1 < x < 4)$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{3} \cdot I(1 < x < 4) \\ &= \frac{1}{4-1} \cdot I(1 < x < 4) \\ &\Rightarrow X \sim U(1, 4) \end{aligned}$$

5. Determinar como distribuye  $f_X(x) = n(1-x)^{n-1} \cdot \mathbb{I}_{0 < x < 1}$

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= n(1-x)^{n-1} \\
 &= nx^{1-1}(1-x)^{n-1} \\
 &= \frac{x^{1-1}(1-x)^{n-1}}{\frac{1}{n}} \\
 &= \frac{x^{1-1}(1-x)^{n-1}}{\frac{\Gamma(n)\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)}} \\
 &= \frac{x^{1-1}(1-x)^{n-1}}{B(1, n)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \sim \text{Beta}(1, n)$$

Notar que  $\frac{\Gamma(n)\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{\Gamma(n)}{n\Gamma(n)} = \frac{1}{n}$

6. Calcular  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$

Por la forma, podemos ajustarla a una normal.

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 \cdot 2/2} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{-x^2}{2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^2}} \right\} dx
 \end{aligned}$$

Se tiene que  $\sigma^2 = 1/\sqrt{2}$ , por lo cual debemos tener lo mismo abajo

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi(1/\sqrt{2})^2}}{\sqrt{2\pi(1/\sqrt{2})^2}} e^{\frac{-x^2}{2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^2}}} dx \\
 &= \sqrt{2\pi(1/\sqrt{2})^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-x^2}{2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^2}}}}{\sqrt{2\pi(1/\sqrt{2})^2}} dx \\
 &= \sqrt{2\pi \frac{1}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{-x^2}{2 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^2}}}}{\sqrt{2\pi(1/\sqrt{2})^2}} dx}_{\text{Normal}(0, 1/\sqrt{2})} \\
 &= \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

7. Determinar como distribuye  $f_X(x) = \frac{x^4 e^{-x/2}}{2^5 \Gamma(5)} \cdot \mathbb{I}_{x > 0}$

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \frac{x^4 e^{-x/2}}{2^5 \Gamma(5)} \\
 &= \frac{x^{10/2-1} e^{-x/2}}{2^{10/2} \Gamma(10/2)}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow X \sim \chi^2(10)$$

8. Determinar como distribuye  $p_X(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{x} \cdot \mathbb{I}_{x=0,1,2,\dots,n}$

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{x} \\ &= \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x+x} \\ &= \binom{n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-x} \\ &\Rightarrow X \sim \text{Bin}(n, 1/2) \end{aligned}$$

9. Calcule

$$\int_0^1 x^6(1-x)^{99} dx$$

Podemos hacer esto de dos maneras. La primera es ajustándola a una Beta, o ajustándola a la esperanza de una Beta. Vamos por la primera

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^6(1-x)^{99} dx &= \int_0^1 x^{7-1}(1-x)^{100-1} dx \\ &= \frac{B(7, 100)}{B(7, 100)} \int_0^1 x^{7-1}(1-x)^{100-1} dx \\ &= B(7, 100) \int_0^1 \frac{x^{7-1}(1-x)^{100-1}}{B(7, 100)} dx \\ &= B(7, 100) \int_0^1 \text{Beta}(7, 100) dx \\ &= B(7, 100) \cdot 1 \\ &= B(7, 100) \end{aligned}$$

Vamos por la segunda

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^6(1-x)^{99} dx &= \int_0^1 x x^5(1-x)^{100-1} dx \\ &= \frac{B(6, 100)}{B(6, 100)} \int_0^1 x x^{6-1}(1-x)^{100-1} dx \\ &= B(6, 100) \int_0^1 x \frac{x^{6-1}(1-x)^{100-1}}{B(6, 100)} dx \\ &= B(6, 100) \int_0^1 x \cdot \text{Beta}(6, 100) dx \\ &= B(6, 100) \cdot \mathbb{E}(X), \quad X \sim \text{Beta}(6, 100) \\ &= B(6, 100) \cdot \frac{6}{6+100} \\ &= B(6, 100) \cdot \frac{6}{106} \end{aligned}$$

En general lo único que tenemos que ver es que calze la distribución con su recorrido, pues en el caso anterior, si la integral fuese en otro intervalo, no se puede aplicar lo mostrado, por lo cual se debe tener ojo con eso.

### 3.4 Transformación de una v.a

Si queremos aplicar una transformación  $Y = g(X)$  a una v.a  $X$ , esta se obtiene mediante

$$f_Y(y) = \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| f_X(g^{-1}(y))$$

Si tenemos  $n$  inversas, entonces la transformación está dada por

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{d}{dy} g_i^{-1}(y) \right| f_X(g_i^{-1}(y)) \quad (26)$$

#### 3.4.1 Ejemplos

1. Sea  $X \sim N(0, 1)$ . Encontrar como distribuye  $Y = e^X$

La formula se ve un poco complicada, pero simplemente es calcular la inversa de la transformación, y su derivada, con esto ya estamos listos. Primero calculamos el recorrido. Para esto solo necesitamos evaluar los extremos del recorrido de la v.a en la nueva transformación. Como  $X$  distribuye normal, su recorrido es  $(-\infty, \infty)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} e^x &= \infty \end{aligned}$$

Entonces se tendría que  $Rec(Y) = (0, \infty)$ .

Ahora busquemos lo necesario para la formula.

$$\begin{aligned} y &= e^x \\ y &= e^x \quad / \ln() \\ \ln(y) &= x \\ g^{-1}(y) &= \ln(y) \\ \frac{d}{dy} g^{-1}(y) &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Ya que tenemos todo, usamos la formula

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| f_X(g^{-1}(y)) \\ &= \left| \frac{1}{y} \right| \frac{e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\ln^2(y)/2}, \quad 0 < y < \infty \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} e^{-\ln^2(y)/2}, \quad 0 < y < \infty \\ \Rightarrow Y = e^X &\sim Lognormal(0, 1) \end{aligned}$$

2. Sea  $X \sim \exp(\lambda)$ . Encontrar como distribuye  $Y = X^2$

Procedamos intuitivamente sin la formula.

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
 &\text{Pero } Y = X^2 \\
 &= P(X^2 \leq y) \\
 &= P(X^2 \leq y) \quad / \sqrt{\phantom{x}} \\
 &= P(|X| \leq \sqrt{y}) \\
 &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\
 &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\
 &= F_X(\sqrt{y}) - 0 \\
 F_Y(y) &= F_X(\sqrt{y}) \quad / \frac{d}{dy} \\
 f_Y(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \lambda e^{-\lambda\sqrt{y}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{y^{\frac{1}{2}-1}}{(\frac{1}{\lambda^2})^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{\lambda^2})^{\frac{1}{2}}}}
 \end{aligned}$$

Finalmente tenemos

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \frac{1}{2} \frac{y^{\frac{1}{2}-1}}{(\frac{1}{\lambda^2})^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \left( \frac{y}{\frac{1}{\lambda^2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}, y > 0 \\
 &\Rightarrow Y = X^2 \sim Weibull(1/2, \lambda)
 \end{aligned}$$

Note que  $F_X(-\sqrt{y}) = 0$  ya que la exponencial solo esta definida para  $x > 0$ , por lo cual cuando  $x < 0$  vale 0. El recorrido de  $Y$  es claro que es  $y > 0$ , pues al evaluar en  $(0, \infty)$  se mantiene igual el recorrido.

3. Encontrar como distribuye  $Y = -\ln(X)$  si  $X \sim U(0, 1)$

Evaluando los extremos, se tiene que  $Rec(Y) = (0, \infty)$ .

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(-\ln(X) \leq y) \\
 &= P(\ln(X) \geq -y) \\
 &= P(X \geq e^{-y}) \\
 &= 1 - P(X \leq e^{-y}) \\
 &= 1 - F_X(e^{-y}) / \frac{d}{dy} \\
 f_Y(y) &= e^{-y} f_X(e^{-y}) \\
 f_Y(y) &= e^{-y}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Y = -\ln(X) \sim \text{Exp}(1) \tag{27}$$

4. Sea  $X \sim Geo(p)$ . Encuentre la distribución de  $Y = X^2$

Para el caso discreto funciona algo diferente, tenemos que evaluar la inversa de  $Y$  en  $p_X(x)$ . Y para el recorrido se evalúa cada punto en la transformación. Entonces

$$y = x^2$$

$$x = \sqrt{y}$$

No queda en valor absoluto ya que  $X$  solo toma valores positivos. Ahora sabemos que el recorrido de  $X$  es  $1, 2, 3, \dots$ , entonces

$$Y = 1^2 = 1$$

$$Y = 2^2 = 4$$

$$Y = 3^2 = 9$$

$$\vdots$$

Entonces la distribución de  $Y$  corresponde a

$$f_Y(y) = \begin{cases} p(1-p)^{\sqrt{y}-1} & y = 1, 4, 9, \dots \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

5. Sea  $X$  una v.a con función de probabilidad de masa

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Determine  $Y = |X|$  y  $Z = X^2$ .

$$\bullet Y = |X|$$

Ahora nos percatamos que al tener valor absoluto, hay valores que tienen la misma imagen, pues  $Y = |1| = |-1| = 1$ , por lo cual hay que sumar estas probabilidades. Entonces

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \frac{1}{2n+1}$$

$$P(Y = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{2}{2n+1}$$

$$P(Y = 2) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{2}{2n+1}$$

$$\vdots$$

El recorrido ahora es  $Y = 0, 1, 2, \dots, n$

Entonces se tiene

$$P(Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & y = 0 \\ \frac{2}{2n+1} & y = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- $Z = X^2$

Es similar al anterior. Primero calculemos el recorrido, es fácil ver que  $Rec(Z) = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots, n^2\}$

$$\begin{aligned} P(Z = 0) &= P(X = 0) = \frac{1}{2n+1} \\ P(Z = 1) &= P(X = 1) + P(X = -1) = \frac{2}{2n+1} \\ P(Z = 4) &= P(X = 2) + P(X = -2) = \frac{2}{2n+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$P(Z = z) = \begin{cases} \frac{1}{2n+1} & z = 0 \\ \frac{2}{2n+1} & z = 1, 4, \dots, n^2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

6. Sea  $X \sim \text{Beta}(\alpha, 1)$ . Determine como distribuye  $Y = -\ln(X)$ .

Recordamos que si  $X \sim \text{Beta}(\alpha, 1)$ , entonces  $f_X(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  para  $x \in (0, 1)$ . Entonces

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(-\ln(X) \leq y) \\ &= P(\ln(X) \geq -y) \\ &= P(X \geq e^{-y}) \\ F_Y(y) &= 1 - P(X < e^{-y}) \\ F_Y(y) &= 1 - F_X(e^{-y}) \\ f_Y(y) &= e^{-y} f_X(e^{-y}) \\ f_Y(y) &= \alpha e^{-\alpha y}, \quad y > 0 \end{aligned}$$

Entonces  $Y = -\ln(X) \sim \text{Exp}(\alpha)$ .

7. Encontrar como distribuye  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$  si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq z\right) \\ &= P(X \leq z\sigma + \mu) \\ F_Z(z) &= F_X(z\sigma + \mu) \\ f_Z(z) &= \sigma f_X(z\sigma + \mu) \\ &= \sigma \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(z\sigma + \mu - \mu)^2 / 2\sigma^2} \\ f_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \end{aligned}$$

El recorrido de  $Z$  es el mismo que el de  $X$ , por lo cual  $Z \sim N(0, 1)$

8. Sea  $X$  una variable aleatoria continua con densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$



Determine  $Y = X^2$ .

Separemos la densidad según caso a caso.

$$f_X(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Ahora usamos lo de siempre.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(|X| \leq \sqrt{y}) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}1 - \sqrt{y} + \frac{1}{2\sqrt{y}}1 + (-\sqrt{y}) \\ &= \frac{1 - \sqrt{y} + 1 - \sqrt{y}}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{2 - 2\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{y}}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \end{aligned}$$

Tenemos que  $\text{Rec}(X) = (-1, 1)$ , y como nos interesa  $Y = X^2$ , el recorrido nuevo es  $\text{Rec}(Y) = (0, 1)$ .

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}} - 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

9. Sea  $X \sim \exp(1)$ . Encontrar como distribuye  $Y = \alpha - \gamma \ln(X)$ . Con  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\gamma > 0$ .

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(\alpha - \gamma \ln(X) \leq y) \\ &= P(-\gamma \ln(X) \leq y - \alpha) \\ &= P(\gamma \ln(X) \geq \alpha - y) \\ &= 1 - P(\gamma \ln(X) \leq \alpha - y) \\ &= 1 - P\left(\ln(X) \leq \frac{\alpha - y}{\gamma}\right) \\ &= 1 - P\left(X \leq e^{(\alpha - y)/\gamma}\right) \\ P(Y \leq y) &= 1 - F_X\left(e^{(\alpha - y)/\gamma}\right) \quad / \frac{d}{dy} \\ f_Y(y) &= \frac{1}{\gamma} f_X\left(e^{(\alpha - y)/\gamma}\right) \\ &= \frac{1}{\gamma} e^{-e^{(\alpha - y)/\gamma}} \end{aligned}$$

Ahora el recorrido.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha - \gamma \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha - \gamma \ln(x) = \infty$$

$$\Rightarrow \text{Rec}(Y) = \mathbb{R}$$

Entonces se tiene que

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\gamma} e^{-e^{(a-y)/\gamma}} & y \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

A esta distribución se le conoce como distribución de Gumbel.

$$\Rightarrow Y = \alpha - \gamma \ln(X) \sim \text{Gumbel}(\alpha, \gamma)$$

10. Encontrar como distribuye  $Z = \lambda X$  si  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$P(Z \leq z) = P(\lambda X \leq z)$$

$$= P(X \leq z/\lambda)$$

$$= 1 - e^{-z\lambda/\lambda}$$

$$F_Z(z) = 1 - e^{-z}$$

$$f_Z(z) = e^{-z}$$

El recorrido es el mismo que el de  $X$ , por lo cual  $Y \sim \text{Exp}(1)$

11. Sea  $X \sim U(0, 1)$ . Encontrar como distribuye  $Z = \sqrt{X}$

De inmediato podemos ver que el recorrido es  $(0, 1)$ . Ahora realicemos la transformación.

$$P(Z \leq z) = P(\sqrt{X} \leq z)$$

$$= P(X \leq z^2)$$

$$= F_X(z^2) / \frac{d}{dz}$$

$$f_Z(z) = 2zf_X(z^2)$$

$$= 2z$$

$$= 2z^{2-1}(1-z)^{1-1}$$

$$= \frac{z^{2-1}(1-z)^{1-1}}{\frac{\Gamma(2)\Gamma(1)}{\Gamma(2+1)}}$$

$$= \frac{z^{2-1}(1-z)^{1-1}}{B(2, 1)}$$

$$Z = \sqrt{X} \sim \text{Beta}(2, 1)$$

### 3.5 Ejercicios del capítulo

1. Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa tal que  $\ln(X) \sim N(0, 1)$ .

- (a) Pruebe que  $F_X(x) = \Phi(\ln(x))$
- (b) Calcule  $P(X > 1)$
- (c) Pruebe que  $\mathbb{E}(X^k) = e^{k^2/2}$
- (d) Calcule  $\mathbb{E}(X)$  y  $\text{Var}(X)$

Solo hay que usar el que  $\ln(X) \sim N(0, 1)$

- (a)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(\ln(X) \leq \ln(x)) \\ &= \Phi(\ln(x)) \end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(\ln(X) \leq \ln(1)) \\ &= 1 - P(\ln(X) \leq 0) \\ &= 1 - \Phi(0) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- (c) Para esto llamemos  $Z = \ln(X)$  de modo que  $Z \sim N(0, 1)$ . Ahora  $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(e^{k \ln(X)}) = \mathbb{E}(e^{kZ})$ . Usamos la definición de esperanza y formamos una normal.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^k) &= \mathbb{E}(e^{kZ}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{kz} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2 + kz/2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{k^2/2 - k^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2 + kz/2} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{k^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2 + kz/2 - k^2/2} dz \\ &= e^{k^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(z-k)^2/2} dz \\ &= e^{k^2/2} \end{aligned}$$

Notar en el ultimo paso estamos integrando una  $N(k, 1)$  en todo su recorrido, por lo cual es valor de la integral es 1.

- (d) Solo hay que evaluar con  $k = 1, 2$  en lo anterior.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= e^{0^2/2} = 1 \\ \mathbb{E}(X^2) &= e^{2^2/2} = e^2 \\ \text{Var}(X) &= e^2 - 1 \end{aligned}$$

2. Un escritor, en promedio, comete un error cada 500 palabras escritas, comúnmente una página contiene 300 palabras. ¿Cuál es la probabilidad de que NO cometa más de dos errores en cinco páginas?

Tenemos lo siguiente

- 1500 palabras en 5 paginas
- 1 error cada 500 paginas, osea  $p = \frac{1}{500} = 0.002$

Nos interesa el numero de errores por paginas, es decir, el numero de éxitos (error) por pagina, por lo cual es binomial. Sea  $X$  = número de errores cometidos en 5 paginas,  $X \sim \text{Bin}(1500, 0.002)$ . Nos interesa la probabilidad de que a lo mas hayan 2 errores en cinco paginas. Entonces

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= \sum_{x=0}^2 \binom{1500}{x} (0.002)^x (1 - 0.002)^{1500-x} \\ &= 0.423 \end{aligned}$$

3. APEX es una casa de cambios que presta el servicio de cambio de cheques en dólares (US\$). Se espera recibir 10 cheques por hora y la probabilidad de que un cheque no tenga fondos es de 0.1.

- (a) ¿Cuál es la probabilidad que el segundo cheque sin fondos se reciba en a lo más en la cuarta recepción?
- (b) Si en una hora se recibe lo esperado ¿Cuál es la probabilidad de que se haya recepcionado al menos dos cheques sin fondos en una hora?

Tenemos

- 10 cheques por hora
- probabilidad de que un cheque no tenga fondos es de 0.1

- (a) Nos interesa la cantidad de ensayos para obtener el segundo éxito (Binomial Negativa), es decir, nos interesa la cantidad de cheques a recibir para encontrar un segundo cheque sin fondos. Sea  $X$  = numero de cheques a recibir hasta encontrar el segundo cheque sin fondos, se tiene  $X \sim \text{BinNeg}(2, 0.1)$ . Se pide

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= \sum_{x=2}^4 \binom{x-1}{2-1} (0.1)^2 (1 - 0.1)^{x-2} \\ &= 0.069 \end{aligned}$$

- (b) Nos interesa que de 10 ensayos, al menos dos sean éxitos (binomial), es decir, que de los 10 cheques recibidos, al menos 2 no tengan fondos. Sea  $X$  = numero de cheques sin fondos, se tiene  $X \sim \text{Bin}(10, 0.01)$ . Nos piden

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 0.2639 \end{aligned}$$

4. Sea  $X$  la variable aleatoria que representa el rendimiento, en toneladas, por hectárea de trigo en un gran terreno. Se sabe que  $X$  puede ser modelada mediante la siguiente función de densidad.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x-1)(3-x) & 1 \leq x < 3 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Sea  $Y$  la ganancia (en millones de pesos) obtenida por la venta de una hectárea, de tal forma que aquellas hectáreas que tienen un rendimiento inferior a 1,2 toneladas, serán vendidas a \$1,5. Aquellas hectáreas con un rendimiento entre 1,2 y 2,1 toneladas serán vendidas a \$2,3 y aquellas hectáreas con un rendimiento superior a 2,1 toneladas serán vendidas a \$3,0. Calcule la ganancia esperada.

Podemos definir  $Y$  como

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1.5 & x < 1.2 \\ 2.3 & 1.2 \leq x \leq 2.1 \\ 3 & x > 2.1 \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= 1.5P(Y = 1.5) + 2.3P(Y = 2.3) + 3P(Y = 3) \\ &= 1.5P(X < 1.2) + 2.3P(1.2 \leq X \leq 2.1) + 3P(X > 2.1) \\ &= 1.5 \cdot \int_1^{1.2} f_X(x)dx + 2.3 \cdot \int_{1.2}^{2.1} f_X(x)dx + 3 \cdot \int_{2.1}^3 f_X(x)dx \\ &= 2.5752 \end{aligned}$$

5. Sea  $X$  una variable aleatoria normal con media 1 y varianza 4, es decir,  $X \sim N(1, 4)$ . Pruebe que  $P(-1 < X < 3) = 2\Phi(1) - 1$ , donde  $\Phi(z)$  es la fda de  $Z \sim N(0, 1)$ .

$$\begin{aligned} P(-1 < X < 3) &= P(-1 - 1 < X - 1 < 3 - 1) \\ &= P\left(\frac{-1-1}{\sqrt{4}} < \frac{X-1}{\sqrt{4}} < \frac{3-1}{\sqrt{4}}\right) \\ &= P(-1 < Z < 1) \\ &= P(Z < 1) - P(Z < -1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) \\ &= 2\Phi(1) - 1 \end{aligned}$$

6. Sea  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . Encuentre la distribución de  $Y = \lceil X \rceil + 1$  y reconozca la distribución.

Usamos la definición de la función techo, de modo que

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(\lceil X \rceil + 1 = k) \\ &= P(\lceil X \rceil = k - 1) \\ &= P(k - 1 \leq X < (k - 1) + 1) \\ &= P(k - 1 \leq X < k) \\ &= \int_{k-1}^k \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-\lambda k} (e^{\lambda} - 1) \\ &= e^{-\lambda k} (e^{\lambda} - 1) \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}} \\ &= e^{-\lambda k + k} (1 - e^{-\lambda}) \\ &= e^{-\lambda(k-1)} (1 - e^{-\lambda}) \\ &= (e^{-\lambda})^{k-1} (1 - e^{-\lambda}) \\ &= p^{k-1} (1 - p) \end{aligned}$$

Notamos que es una geométrica de parámetro  $1 - p = 1 - e^{-\lambda}$ . Ahora calculemos la esperanza usando  $1 - p = 1 - e^{-\lambda}$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \sum_{y=1}^{\infty} y(1-p)p^{y-1} \\
 &= (1-p) \sum_{y=1}^{\infty} yp^{y-1} \\
 &= (1-p) \sum_{y=1}^{\infty} \frac{d}{dp} (p^y) \\
 &= (1-p) \frac{d}{dp} \left( \sum_{y=1}^{\infty} p^y \right) \\
 &= (1-p) \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{1-p} \right) \\
 &= (1-p) \frac{p}{(1-p)^2} \\
 &= \frac{1}{1-p}
 \end{aligned}$$

Luego, la esperanza de  $Y$  es

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}$$

7. Sea  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Encuentre la distribución de  $Y = aX + b$ .

$$\begin{aligned}
 P(Y \leq y) &= P(aX + b \leq y) \\
 &= P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right) \\
 F_Y(y) &= F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\
 f_Y(y) &= \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\
 &= \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y-b-\mu)^2/2a^2\sigma^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 a^2}} e^{-(y-(b+\mu))^2/2a^2\sigma^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma a)^2}} e^{-(y-(b+\mu))^2/2(a\sigma)^2}
 \end{aligned}$$

Luego,  $Y = aX + b \sim N(\mu + b, a^2\sigma^2)$

8. Encuentre la moda de  $X$ , si  $X \sim N(\mu, 1)$ .

Recordamos que la moda es un valor de  $X$  que maximiza la fdp  $f_X(x)$  (o  $p_X(x)$ ). Entonces nos interesa encontrar el máximo.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2} \\
 f'(x) &= -(x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2} \\
 -(x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2} &= 0 \\
 -(x-\mu) &= 0 \\
 x &= \mu
 \end{aligned}$$

La moda de una  $N(\mu, 1)$  es  $\mu$ .

9. Considere la variable aleatoria, discreta,  $X$  con función de distribución acumulada  $F_X(x)$  dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.1 & -2 \leq x < -1 \\ 0.3 & -1 \leq x < 0 \\ 0.5 & 0 \leq x < 1 \\ 0.7 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Defina  $Y = X^2 + 1$ . Encuentre  $F_Y(y)$ .

Calculemos primero  $P(X = x)$ .

Podemos hacer la siguiente tabla

	-2	-1	0	1	2
$F_X(x)$	0.1	0.3	0.5	0.7	1
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3

Encontremos el recorrido de  $Y$

$$x \in \{-2, 2\} \Rightarrow Y = (-2)^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$x = 0 \Rightarrow Y = 0^2 + 1 = 1$$

$$x \in \{-1, 1\} \Rightarrow Y = (-1)^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

De modo que  $\text{Rec}(Y) = \{1, 2, 5\}$ . Ahora encontremos las probabilidades

$$P(Y = 1) = P(X = 0) = 0.2$$

$$P(Y = 2) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0.4$$

$$P(Y = 5) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0.4$$

Haciendo los respectivos cálculos, se llega a que

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 0.2 & 1 \leq y < 2 \\ 0.6 & 2 \leq y < 5 \\ 1 & y \geq 5 \end{cases}$$

10. Calcule el  $n$ -ésimo momento no centrado de una  $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^n) &= \int_0^\infty x^n \frac{x^{\alpha-1} \beta^\alpha e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{(\alpha+n)-1} e^{-x\beta} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{(\alpha+n)-1} e^{-\frac{x}{1/\beta}} dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+n) \frac{1}{\beta^{\alpha+n}} \\ \mathbb{E}(X^n) &= \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\beta^n} \end{aligned}$$

11. El 84.13% de los árboles de un tipo tienen un diámetro a la altura del pecho (DAP) inferior a 11.6 pulg. Suponga que el DAP de este tipo de árbol es una variable aleatoria normalmente distribuida con  $\sigma = 2.8$  pulg. Una cuadrilla avisará al capataz cuando encuentre 3 arboles cuyo diametro a la altura del pencho sea inferior a 6 pulg. Calcule la probabilidad de que la cuadrilla avise al capataz cuando mida el quinto árbol.

Tenemos

- 0.8413 tienen DAP inferior a 11.6 pulg (  $Dap < 11.6$ )
- $DAP \sim N(\mu, 2.8^2)$
- La cuadrilla avisara al capataz cuando encuentre 3 arboles cuyo DAP sea inferior a 6 pulg. ( $DAP < 6$ )

Sea  $X = DAP$ . Para calcular la probabilidad pedida necesitamos  $P(X < 6)$ , pero  $X \sim N(\mu, 2.8^2)$ , nos falta encontrar  $\mu$ , pero por enunciado sabemos que  $P(X < 11.6) = 0.8413$ , entonces podemos encontrar la media de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P(X < 11.6) &= 0.8413 \\ P(X - \mu < 11.6 - \mu) &= \\ P\left(\frac{X - \mu}{2.8} < \frac{11.6 - \mu}{2.8}\right) &= \\ P\left(Z < \frac{11.6 - \mu}{2.8}\right) &= 0.8413 \end{aligned}$$

Buscando en la tabla de la normal estándar, se tiene que  $P(Z < 1) = 0.8413$ , por lo cual

$$\begin{aligned} \frac{11.6 - \mu}{2.8} &= 0.8413 \\ \mu &= 8.8 \end{aligned}$$

Ahora si tenemos que  $X \sim N(8.8, 2.8^2)$ . Calculamos  $P(X < 6)$ .

$$\begin{aligned} P(X < 6) &= P\left(Z < \frac{6 - 8.8}{2.8}\right) \\ &= P(Z < -1) \\ &= \Phi(-1) \\ &= 1 - \Phi(1) \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$

Finalmente nos piden la probabilidad de que la cuadrilla avise al capataz cuando mida el quinto árbol. Nos interesa el numero de ensayos necesarios hasta tener 3 éxitos, es decir, numero de arboles necesarios hasta encontrar 3 con el diámetro especificado, por lo cual  $Y \sim BinNeg(3, 0.158)$ . Y nos piden

$$P(Y = 5) = \binom{5-1}{3-1} (0.158)^3 (1 - 0.158)^{5-3} = 0.0169$$

12. La proporción de tiempo  $Y$  en la que un robot industrial está en operación durante una semana de 40 horas es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2y & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Con la información entregada responda lo siguiente:

- (a) Encuentre  $\mathbb{E}(Y)$  y  $Var(Y)$ .



- (b) Para el robot motivo de estudio, la utilidad  $X$  para una semana está dada por  $X = 200Y - 60$ . Encuentre  $\mathbb{E}(X)$  y  $Var(X)$ .
- (c) ¿Cuál es la utilidad mínima semanal del 20% de las mayores utilidades?.
- (a) Calculamos lo necesario

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int_0^1 2y^2 dy \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= \int_0^1 2y^3 dy \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Var(Y) &= \frac{1}{2} - \frac{2^2}{3^2} \\ &= \frac{1}{18}\end{aligned}$$

- (b) Esto lo podemos hacer de dos formas diferentes, una es usar la definición de esperanza y varianza, y otra es encontrar la fdp de  $X$ , procederemos mediante esta ultima, ya que en la siguiente pregunta necesitamos esto. Entonces

$$\begin{aligned}P(X \leq x) &= P(200Y - 60 \leq x) \\ &= P\left(Y \leq \frac{x+60}{200}\right) \\ F_X(x) &= F_Y\left(\frac{x+60}{200}\right) \\ f_X(x) &= \frac{1}{200} f_Y\left(\frac{x+60}{200}\right) \\ &= \frac{1}{200} \cdot 2 \cdot \left(\frac{x+60}{200}\right) \\ f_X(x) &= \frac{1}{200} \left(\frac{x+60}{100}\right)\end{aligned}$$

Ahora el recorrido

$$\begin{aligned}y = 0 &\Rightarrow X = 200 \cdot 0 - 60 = -60 \\ y = 1 &\Rightarrow X = 200 \cdot 1 - 60 = 140\end{aligned}$$

De modo que  $Rec(Y) = [-60, 140]$ . Entonces la fdp de  $X$  es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x+60}{20000} & -60 \leq x \leq 140 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Ahora calculamos lo pedido.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-60}^{140} x \frac{x+60}{20000} dx \\ &= \frac{220}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_{-60}^{140} x^2 \frac{x+60}{20000} dx \\ &= 7600\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= 7600 - \frac{220^2}{3^2} \\ &= \frac{20000}{9}\end{aligned}$$

(c) La utilidad mínima semanal del 20% de las mayores utilidades corresponde a

$$\begin{aligned}\int_p^{140} \frac{x+60}{20000} dx &= 0.2 \\ -\frac{p^2}{40000} - \frac{3p}{1000} + 0.71 &= 0\end{aligned}$$

De acá se tiene  $p_1 \approx -238.885$  y  $p_2 = 118.885$ . Notamos que  $p_1$  no está en el recorrido de  $X$ , por lo cual la utilidad mínima semanal del 20% de las mayores utilidades es de 118.885.

13. Diversos estudios muestran que los alumnos que rinden la PDT (ex PSU) la desarrollan en forma lineal, donde el tiempo utilizado en cada pregunta se comporta como una variable aleatoria Log-Normal. Suponga que el tiempo medio asignado a cada una de las 10 preguntas de probabilidad y estadística es de 4 min con una desviación estándar de 2 min. Determine la probabilidad que a lo mas en dos de ellas el tiempo utilizado sea superior a 4 min. Asuma que cada pregunta se responde de manera independiente.

Recordamos que si  $T \sim \text{LogNormal}(\lambda, \zeta^2)$ , entonces  $\mathbb{E}(T) = e^{\lambda+\zeta^2/2}$  y  $\text{Var}(T) = (e^{\zeta^2} - 1)(e^{2\lambda} + \zeta^2)$ . Por enunciado tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T) &= 4 \\ \text{Var}(T) &= 2^2\end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{cases} e^{\lambda+\zeta^2/2} = 4 \\ (e^{\zeta^2} - 1)(e^{2\lambda} + \zeta^2) = 2^2 \end{cases}$$

Se tiene  $\lambda \approx 1.0397$  y  $\zeta^2 \approx 0.693$ . Ahora analicemos porque necesitábamos esto. Nos piden que a lo mas en 2 preguntas el tiempo se utilizado sea superior a 4 minutos, es decir, que de 10 preguntas, en 2 se ocupen mas de 4 minutos. Podemos intuir que es una binomial, pues queremos éxitos dentro de 10 ensayos, con  $p = P(T > 4)$ . Calculando se tiene que  $p = P(T > 4) = 0.4066$ . Ahora, sea  $X$  = numero de preguntas en que el tiempo utilizado en estas es superior a 4 minutos, se tiene que  $X \sim \text{Bin}(10, 0.4066)$ . Nos piden  $P(X \leq 2)$ , entonces

$$\begin{aligned}P(X \leq 2) &= 1 - P(X > 2) \\ &= 1 - \sum_{x=3}^{10} \binom{10}{x} (0.4066)^x (1 - 0.4066)^{10-x} \\ &= 0.1568\end{aligned}$$

14. Usted bien sabe que por estos días las Bolsas de Valores están muy volátiles. Es muy difícil predecir si el índice correspondiente del valor de las acciones va a subir o bajar. Asuma que la probabilidad de que en un día determinado cualquiera suba el índice es  $\pi$ . Se asume (parece ser cierto por estos días) que los sucesos asociados al precio de las acciones en días diferentes son independientes.

- (a) ¿Que distribución sigue la variable aleatoria  $X$  = Numero de días hábiles en que el índice sube en un mes (de 22 días hábiles)?
- (b) Casi todos los días están “a la baja”. Por ello, usted espera con ansias un día en que el índice accionario suba. Justificando su planteamiento, ¿Que distribución seguiría la variable aleatoria  $Y$  = Numero de días de espera hasta que sube el índice? Siempre con  $\pi = 0,25$ , determine la probabilidad de que haya al menos 3 días.
- (c) La gente corre apresuradamente para llegar a comprar acciones y se ha detectado que el tiempo que se usa en trasladarse a la Bolsa es Normal con media de 24,6 minutos y desviación estándar de 6 minutos. ¿Que valor de tiempo de traslado produce que solo el 20% de las personas demoren menos que dicho tiempo?

Tenemos

- Probabilidad de que en un día determinado suba el índice =  $\pi$
- (a) Nos interesa el numero de éxitos dentro de 22 ensayos (Binomial), es decir, nos interesa el numero de días en que el índice suba durante un periodo de 22 días. Entonces  $X \sim \text{Bin}(22, \pi)$
- (b) Nos interesa el numero de ensayos hasta obtener el primer éxito (Geométrica), es decir, nos interesa el numero de días a esperar hasta que suba el índice. Entonces  $X \sim \text{Geo}(0.25)$ . Nos piden

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= 1 - P(X < 3) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 0.5625 \end{aligned}$$

- (c) Sea  $X$  = el tiempo que se usa en trasladarse a la bolsa, entonces  $X \sim N(24.6, 6^2)$ . Nos piden  $t$  tal que

$$\begin{aligned} P(X < t) &= 0.2 \\ P(X - 24.6 < t - 24.6) &= \\ P\left(\frac{X - 24.6}{6} < \frac{t - 24.6}{6}\right) &= \\ P\left(Z < \frac{t - 24.6}{6}\right) &= \\ \Phi\left(\frac{t - 24.6}{6}\right) &= 0.2 \\ \frac{t - 24.6}{6} &= \Phi^{-1}(0.2) \\ t &= 6\Phi^{-1}(0.2) + 24.6 \end{aligned}$$

Despejando se tiene  $t = 19.56$ .

15. Considere la variable aleatoria, discreta,  $X$  con función de distribución acumulada  $F_X(x)$  dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.1 & -2 \leq x < -1 \\ 0.3 & -1 \leq x < 0 \\ 0.5 & 0 \leq x < 1 \\ 0.7 & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Defina  $Y = X^2 + 1$ . Encuentre  $F_Y(y)$ .

Calculemos primero  $P(X = x)$ .

Podemos hacer la siguiente tabla

	-2	-1	0	1	2
$F_X(x)$	0.1	0.3	0.5	0.7	1
$P(X = x)$	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3

Encontremos el recorrido de  $Y$

$$x \in \{-2, 2\} \Rightarrow Y = (-2)^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$$x = 0 \Rightarrow Y = 0^2 + 1 = 1$$

$$x \in \{-1, 1\} \Rightarrow Y = (-1)^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$$

De modo que  $\text{Rec}(Y) = \{1, 2, 5\}$ . Ahora encontremos las probabilidades

$$P(Y = 1) = P(X = 0) = 0.2$$

$$P(Y = 2) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0.4$$

$$P(Y = 5) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0.4$$

Haciendo los respectivos cálculos, se llega a que

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 1 \\ 0.2 & 1 \leq y < 2 \\ 0.6 & 2 \leq y < 5 \\ 1 & y \geq 5 \end{cases}$$

16. Encuentre el valor de  $c$  tal que minimiza la expresión  $\mathbb{E}[(X - c)^2]$ , esto es, demostrar

$$\min_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[(X - c)^2] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

Sea  $g(c) = \mathbb{E}[(X - c)^2]$ . Entonces

$$g(c) = \mathbb{E}[(X - c)^2]$$

$$= \mathbb{E}[X^2 - 2Xc + c^2]$$

$$g(c) = \mathbb{E}(X^2) - 2c\mathbb{E}(X) + c^2$$

$$g'(c) = -2\mathbb{E}(X) + 2c$$

Igualemos a 0

$$2c - 2\mathbb{E}(X) = 0$$

$$c = \mathbb{E}(X)$$

corroboramos que es un mínimo

$$g''(c) = 2 > 0$$

Luego,  $g(c)$  tiene un mínimo en  $c = \mathbb{E}(X)$ , por lo cual  $c = \mathbb{E}(X)$  es el argumento que minimiza la expresión, teniéndose así que el mínimo es  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$ .

17. Demuestre que una  $N(\mu, \sigma^2)$  efectivamente integra 1 en todo su recorrido.

Para esto vamos a usar polares.

Primero realicemos el cambio de variable  $x = x - \mu \Rightarrow dx = dx$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
 I &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad / \cdot I \\
 I \cdot I &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \\
 I^2 &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dx dy \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} dx dy \\
 &\text{Aplicamos coordenadas polares} \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \cdot 2\pi \cdot \sigma^2 \\
 &= 1 \\
 I^2 &= 1 \\
 I &= \sqrt{1}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

18. Calcule el  $n$ -ésimo momento centrado en  $\mu$ , de una  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Si empezamos a calcular los momentos de manera directa, notaremos algo particular, que la función a integrar resulta par e impar, por lo cual hay que separar los dos casos, ¿Por qué? note lo siguiente

$$\mathbb{E}[(X - \mu)^{2n+1}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (x - \mu)^{2n+1} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

Ahora consideremos el cambio de variable  $x = (x - \mu) \Rightarrow dx = dx$ . Los límites se quedan iguales. Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[(X - \mu)^{2n+1}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (x - \mu)^{2n+1} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{2n+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{2n+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{2n+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx
 \end{aligned}$$

Ahora para la integral de la izquierda consideremos el cambio de variable  $x = -x \Rightarrow dx = -dx$ , de modo que se tiene

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (-x)^{2n+1} e^{-(-x)^2/2\sigma^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{2n+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\
&= \int_0^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{2n+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{2n+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\
&= - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{2n+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{2n+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{2n+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx - \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{2n+1} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(X - \mu)^{2n+1}] = 0$$

Ahora los momentos pares

$$\mathbb{E}[(X - \mu)^{2n}] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} (x - \mu)^{2n} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx$$

Hacemos  $x = x - \mu \Rightarrow dx = dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} x^{2n} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2/2\sigma^2} dx
\end{aligned}$$

Ahora hacemos  $x = x^{1/2} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} x^{-1/2} dx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^n e^{-x/2\sigma^2} x^{-1/2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\infty} x^{n-1/2} e^{-x/2\sigma^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{\infty} x^{(n-1/2+1)-1} e^{-x/2\sigma^2} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \Gamma(n+1/2) (2\sigma^2)^{n+1/2} \\
&= \frac{2^n \sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n+1/2)
\end{aligned}$$

Luego, los momentos centrados en  $\mu$  de una  $N(\mu, \sigma^2)$  son

$$\mathbb{E}[(X - \mu)^n] = \begin{cases} 0 & n \text{ es impar} \\ \frac{2^n \sigma^{2n}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(n+1/2) & n \text{ es par} \end{cases}$$

\*Lo anterior asumiendo  $n \in \mathbb{N}$

19. Intente generalizar el ejercicio (7), es decir, si  $f_X(x) = f(x - \mu)$  determine  $Z = X - \mu$ , lo mismo si  $f_X(x) = \lambda f(\lambda x)$  determine  $Z = \lambda X$ , y mas aun, si  $f_X(x) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  determine  $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ .

- $f_X(x) = f(x - \mu)$ ,  $Z = X - \mu$

$$\begin{aligned}
p(Z \leq z) &= P(X - \mu \leq z) \\
&= F_X(z + \mu) \\
F_Z(z) &= F_X(z + \mu) \\
f_Z(z) &= f_X(z + \mu) \\
&= f_X(z + \mu - \mu) \\
f_Z(z) &= f_X(z)
\end{aligned}$$

Se deja como ejercicio para el lector hacer las demostraciones de las otras dos transformaciones. Además queda como propuesto reflexionar sobre la interpretación de lo anterior.

20. Considere la densidad definida como

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & 1 < x < \infty \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Calcule  $P([X] = k)$  para  $k = 1, 2, \dots$ . Donde

$$y = [x] = \{y : y \in \mathbb{Z} \wedge x \in \mathbb{R} \wedge y \leq x \leq y + 1\}$$

Esto simplemente lo podemos hacer ocupando la definición anterior. Entonces

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} dx \\
&= \frac{1}{k^2 + k}
\end{aligned}$$

Entonces

$$P(Y = k) = \frac{1}{k^2 + k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

21. Sea  $X \sim U(0, 1)$ . Encuentre la fdp de  $Y = 4X(1 - X)$ .

Note que no podemos despejar directamente  $Y$ , pues

$$\begin{aligned}
y &= 4x(1 - x) \\
4x^2 - 4x + y &= 0
\end{aligned}$$

para despejar usamos la ecuación cuadrática

$$\begin{aligned}
4x^2 - 4x + y &= 0 \\
x &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16y}}{8} \\
x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - y}}{2}
\end{aligned}$$

entonces tenemos dos inversas

$$\begin{aligned}
g_1^{-1}(y) &= \frac{1 + \sqrt{1 - y}}{2} \\
g_2^{-1}(y) &= \frac{1 - \sqrt{1 - y}}{2}
\end{aligned}$$

Por lo cual hay que aplicar (26). Como tenemos  $X \sim U(0, 1)$ , no hay que evaluar en  $f_X(x)$ , pues  $f_X(x) = 1 \cdot I(0 < x < 1)$ .

Entonces

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \left| \frac{d}{dy} \frac{1 + \sqrt{1-y}}{2} \right| \cdot 1 + \left| \frac{d}{dy} \frac{1 - \sqrt{1-y}}{2} \right| \cdot 1 \\
 &= \left| \frac{-1}{4\sqrt{1-y}} \right| + \left| \frac{1}{4\sqrt{1-y}} \right| \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{1-y}} + \frac{1}{4\sqrt{1-y}} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{1-y}}
 \end{aligned}$$

Ahora encontremos el recorrido de  $Y$ . Recordando que  $X \in (0, 1)$ , tenemos

$$\begin{aligned}
 0 &< x < 1 \\
 0 &< \frac{1 \pm \sqrt{1-y}}{2} < 1 \\
 0 &< 1 \pm \sqrt{1-y} < 2 \\
 -1 &< \pm \sqrt{1-y} < 1 \\
 0 &< 1-y < 1^2 \\
 0 &< y < 1
 \end{aligned}$$

Luego,  $Y \in (0, 1)$ . Entonces la fdp es

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-y}} & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

22. Sea  $X$  una v.a con fdp dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2(x+1)}{9} & -1 < x < 2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Encuentre la fdp de  $Y = X^2$ .

Note que este ejercicio es bien particular, pues tenemos que la transformación no es inyectiva en  $(-1, 2)$ , pues es una cuadrática. En base a esto, primero notar que en los siguientes intervalos la transformación mapea de la misma manera

$$\begin{aligned}
 \text{si } x \in (-1, 0) &\Rightarrow y \in (0, 1) \\
 \text{si } x \in (0, 1) &\Rightarrow y \in (0, 1)
 \end{aligned}$$

Mientras que para la otra parte del recorrido si es inyectiva

$$\text{si } x \in (1, 2) \Rightarrow y \in (1, 4)$$

Para encontrar la fdp de  $Y$ , la manera mas sencilla es separar convenientemente la fdp de  $X$  y trabajar caso a caso.

Note que podemos escribir la fdp de  $X$  como

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2(x+1)}{9} & -1 < x < 0 \\ \frac{2(x+1)}{9} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2(x+1)}{9} & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$



Como en  $(-1, 0)$  y  $(0, 1)$  la transformación  $Y = X^2$  mapea a  $(0, 1)$ , tenemos que sumar las inversas y aplicar la formula (26). Entonces

$$y = x^2$$

$$\sqrt{y} = \pm x$$

tenemos dos inversas

$$\text{si } x > 0 \Rightarrow g_1^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$$\text{si } x < 0 \Rightarrow g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

Entonces si  $y \in (0, 1)$  tenemos

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \left| \frac{d}{dy} \sqrt{y} \right| \frac{2(\sqrt{y} + 1)}{9} + \left| \frac{d}{dy} (-\sqrt{y}) \right| \frac{2(-\sqrt{y} + 1)}{9} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{2(\sqrt{y} + 1)}{9} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{2(\sqrt{y} + 1)}{9} \\ &= \frac{2}{9\sqrt{y}} \end{aligned}$$

como en  $x \in (1, 2)$  es inyectiva, y positiva, nos quedamos con  $g_1^{-1}(y)$  en este intervalo. De modo que si  $y \in (1, 4)$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \left| \frac{d}{dy} \sqrt{y} \right| \frac{2(\sqrt{y} + 1)}{9} \\ &= \frac{\sqrt{y} + 1}{9\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Finalmente tenemos

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{9\sqrt{y}} & 0 < y < 1 \\ \frac{\sqrt{y} + 1}{9\sqrt{y}} & 1 \leq y < 4 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

23. En un Banco saben que el tiempo que demora un ejecutivo en atender a los clientes presenta una distribución de probabilidad aproximadamente Normal con media 15 minutos y desviación estándar 5 minutos.

- Determine la probabilidad de que un cliente demore menos de 20 minutos.
- ¿Cual seria el valor de la media si el Banco deseara lograr que en general, de cada 100 clientes atendidos, 95 demoraran menos de 20 minutos? (Asuma que la desviación estándar no cambia)
- Ahora observamos clientes hasta que uno de ellos demore menos de 20 minutos en ser atendido. ¿Que numero de clientes Ud. esperaría atender hasta encontrar uno con atención menor a 20 minutos?, ¿cual es la desviación estándar?
- Definamos  $X$  : tiempo que demora un ejecutivo en atender a los clientes , entonces  $X \sim N(15, 5)$ . Nos piden  $P(X < 20)$ , entonces

$$\begin{aligned} P(X < 20) &= P\left(\frac{X - 15}{5} < \frac{20 - 15}{5}\right) \\ &= \Phi(1) \\ &= 0.8413 \end{aligned}$$

(b) Queremos  $P(X < 20) = 95/100$ , entonces

$$\begin{aligned}
 P(X < 20) &= 0.95 \\
 P\left(\frac{X - \mu}{5} < \frac{20 - \mu}{5}\right) &= 0.95 \\
 \Phi\left(\frac{20 - \mu}{5}\right) &= 0.95 \\
 \frac{20 - \mu}{5} &= \Phi^{-1}(0.95) \\
 \mu &= 20 - 5 \cdot 1.644854 \\
 \mu &= 11.77573
 \end{aligned}$$

(c) Queremos ver el numero de ensayos hasta obtener el primer éxito, con probabilidad de éxito 0.8413. Entonces  $X \sim \text{Geo}(0.8413)$ . Nos piden  $\mu_X$  y  $\sigma_X$ .

$$\begin{aligned}
 \mu_X &= \mathbb{E}(X) = \frac{1}{0.8413} = 1.188637 \\
 \sigma_X &= \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\frac{1 - 0.8413}{0.8413}} = 0.4735192
 \end{aligned}$$

24. Sea  $X \sim U[0, 1]$ . Defina  $Y = \min\{X, 1/2\}$ . Encuentre  $F_Y(y)$  y calcule su esperanza.

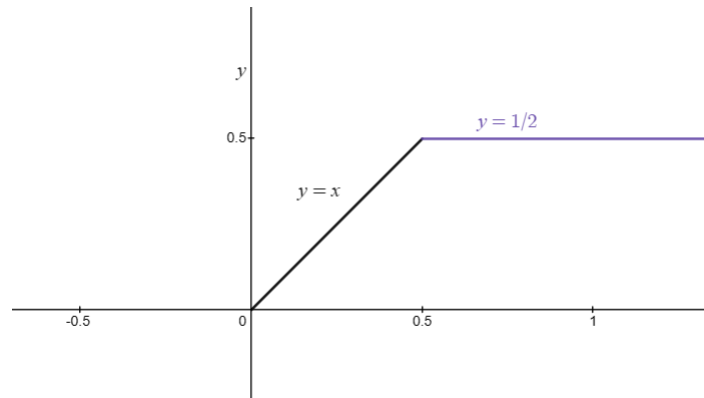
El mínimo se comporta según  $X$ . Como  $X$  es uniforme entre 0 y 1, entonces  $\text{Rec}(X) = [0, 1]$ . El mínimo se basa en ir viendo cual de los dos valores es mas pequeño, y quedarse con ese, en este caso, para  $x \in [0, 1/2]$ , nos quedamos con  $X$ , mientras que para  $x > 1/2$ , nos quedamos con  $1/2$ . Esto se puede escribir como

$$Y = \begin{cases} X & 0 \leq X < 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \leq X \leq 1 \end{cases}$$

Ahora considere la función

$$y = g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1/2 & x \geq 1/2 \end{cases}$$

podemos gráficarla



entonces note que  $y \in [0, 1/2]$ . El procedimiento a seguir en este tipo de variables, debemos ir cuidadosamente tomando los intervalos necesarios, dependiendo de como se comporta  $Y$ .

- Si  $y < 1/2$

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
 &= P(Y < 0) + P(0 \leq Y < y) \\
 &= 0 + P(0 \leq X < y) \\
 &= P(0 \leq X < y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^y 1 dx \\
&= y
\end{aligned}$$

- Si  $y < 0$  claramente vale 0
- Si  $y \leq 1/2$  claramente vale 1, pues estaríamos abarcando todo el recorrido, aun así es posible chequear esto, notando que en  $y = 1/2$  es un valor puntual de masa.

$$\begin{aligned}
P(Y \leq 1/2) &= P(Y < 1/2) + P(Y = 1/2) \\
&= \frac{1}{2} + P(1/2 < X < 1) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

De modo que

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & 0 \leq y < 1/2 \\ 1 & y \geq 1/2 \end{cases}$$

Para la esperanza debemos calcular  $P(X = 1/2)$ .

$$\begin{aligned}
P(X = 1/2) &= F_X(1/2) - F_X(1/2^-) \\
&= 1 - 1/2 \\
&= 1/2
\end{aligned}$$

Entonces

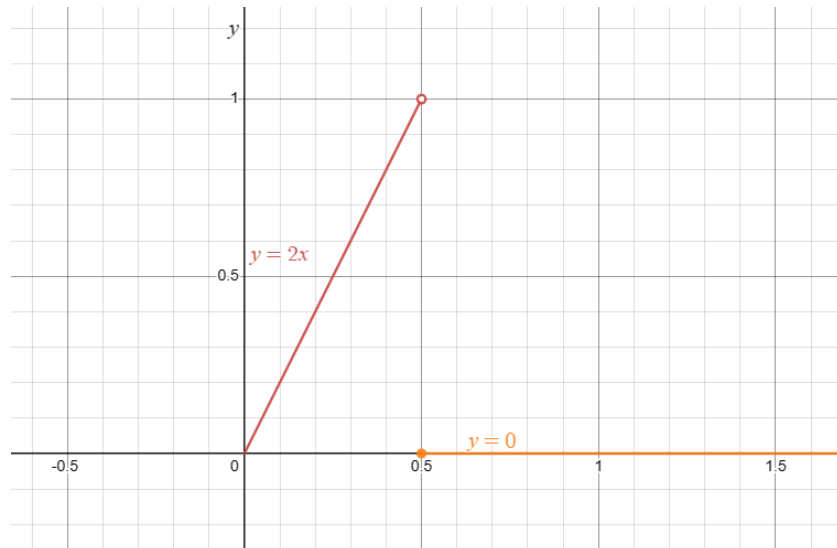
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \int_0^{1/2} y \cdot 1 dy + \frac{1}{2} P(Y = 1/2) \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

25. Sea  $X \sim \text{Exp}(2)$ . Defina

$$Y = \begin{cases} 2X & X < 1/2 \\ 0 & X \geq 1/2 \end{cases}$$

Encuentre  $F_Y(y)$ .

En general el procedimiento es el mismo para este tipo de variables aleatorias. Podemos graficar la función al igual que antes



Tenemos que  $y \in [0, 1)$

- $y < 0$  claramente vale 0
- $y < 1$

Note que si  $y < 1$  entonces puede ser ambas funciones, por lo cual

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
 &= P(Y < 0) + P(0 \leq Y < y) \\
 &= P(0 \leq Y < y) \\
 &= P(Y = 0) + P(0 < Y < y) \\
 &= P(X \geq 1/2) + P(0 < 2X < y) \\
 &= P(X \geq 1/2) + P(0 < X < y/2) \\
 &= 1 - P(X < 1/2) + \int_0^{1/2} 2e^{-2x} dx \\
 &= 1 - (1 - e^{-2 \cdot 1/2}) + 1 - e^{-y} \\
 &= 1 + e^{-1} - e^{-y}
 \end{aligned}$$

- $y \geq 1$  claramente vale 1

Finalmente se tiene

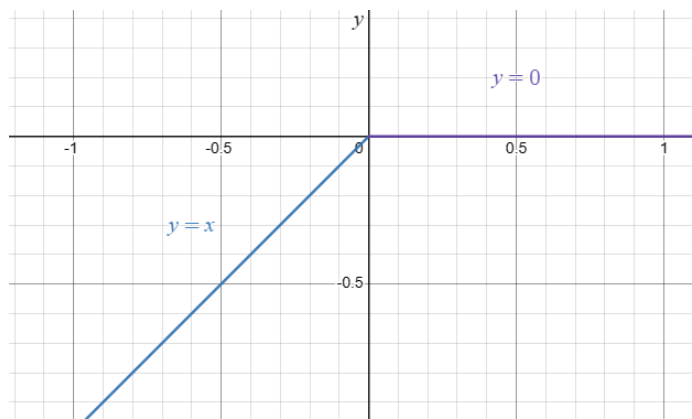
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 + e^{-1} - e^{-y} & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

26. Sea  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Encuentre la acumulada de  $Y = \min\{0, X\}$

En este caso  $Y$  se escribe como

$$Y = \begin{cases} 0 & X \leq 0 \\ X & X > 0 \end{cases}$$

La gráfica es



con  $y \in [0, -\infty)$ . Notando que solo solo se debe analizar  $y < 0$ , se tiene que

$$F_Y(y) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right) & y < 0 \\ 1 & y \geq 0 \end{cases}$$

27. Sea  $X$  una variable aleatoria continua con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Determine  $F_Y(y)$ , donde  $Y = \max\{0, X\}$ .

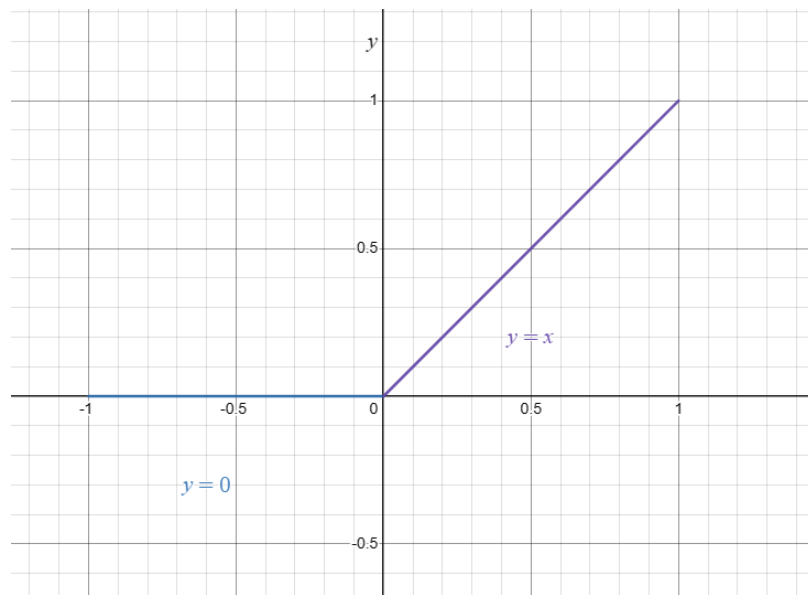
Primero arreglemos la fdp de  $X$ . Tomando en cuenta los valores absolutos ahora nos queda

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Sabemos que  $Y$  se comporta de la forma que si  $X$  toma valores negativos, entonces en tal parte vale 0, y si toma valores positivos, entonces en tal parte vale  $X$ . La variable original  $X$  toma valores entre  $-1$  y  $1$ , por lo cual  $Y$  es de la forma

$$Y = \begin{cases} 0 & -1 \leq X \leq 0 \\ X & 0 < X \leq 1 \end{cases}$$

Podemos graficar



y podemos proceder igual que en los ejercicios anteriores.

- $y < 0$

Para este valor se tiene que  $F_Y(0) = P(Y < 0) = 0$

- $y < 1$

Para esto se tiene

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(Y < 0) + P(Y = 0) + P(0 < Y < y) \\ &= 0 + \int_{-1}^0 1 + x dx + P(0 < Y < y) \\ &= 0 + \frac{1}{2} + P(0 < X < y) \\ &= \frac{1}{2} + y - \frac{y^2}{2} \end{aligned}$$

- $y \geq 1$ , Como es la acumulada, es claro que  $F_Y(y) = 1$ .

Finalmente se tiene que la acumulada corresponde a

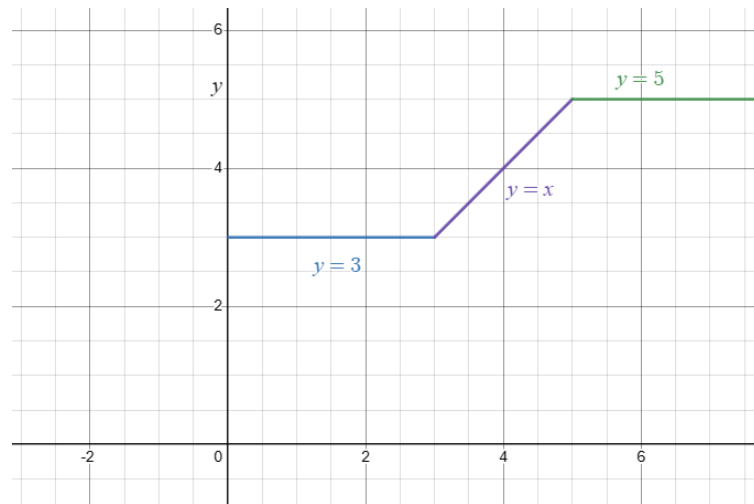
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{2} + y - \frac{y^2}{2} & 0 \leq y < 1 \\ 1 & y \geq 1 \end{cases}$$

28. Sea  $X \sim U[2, 7]$ . Defina

$$Y = \begin{cases} 3 & X < 3 \\ X & 3 \leq X \leq 5 \\ 5 & X > 5 \end{cases}$$

Encuentre  $F_Y(y)$ , calcule  $P(Y = 3)$ ,  $P(Y = 5)$  y calcule  $\mathbb{E}(Y)$ .

Lo mismo que antes. La gráfica es



con  $y \in [3, 5]$ .

Si  $y < 5$

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(Y < 0) + P(Y = 3) + P(3 < Y < y) \\ &= 0 + P(X < 3) + P(3 < X < y) \\ &= \int_2^3 \frac{1}{7-2} dx + \int_3^y \frac{1}{7-2} dx \\ &= \frac{y-2}{5} \end{aligned}$$

Entonces la acumulada es

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 3 \\ \frac{y-2}{5} & 3 \leq y < 5 \\ 1 & y \geq 5 \end{cases}$$

Podemos visualizar la acumulada en la figura (10). En base a esta es fácil calcular y obtener que

$$\begin{aligned} P(Y = 3) &= \frac{1}{5} \\ P(Y = 5) &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

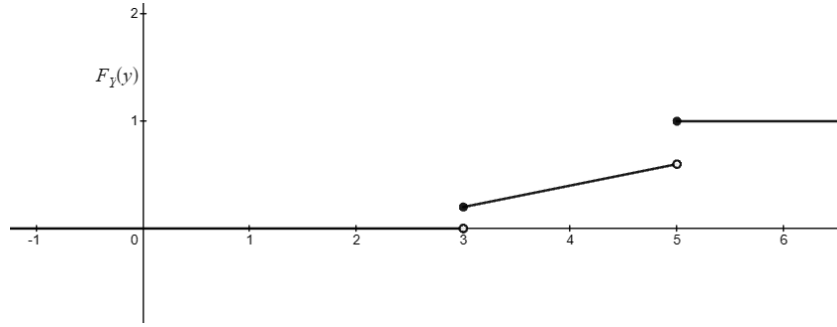


Figure 10:  $F_Y(y)$  - Ejercicio 28

Podemos derivar para obtener la fdp en la parte continua de modo que

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 3 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Calculamos la esperanza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_3^5 \frac{y}{5} dy + 3P(Y=3) + 5P(Y=5) \\ &= \frac{21}{5} \end{aligned}$$

29. Considere  $X \sim \text{Exp}(1)$ . Defina la v.a

$$Y = \begin{cases} X & X \leq 1 \\ \frac{1}{X} & X > 1 \end{cases}$$

Encuentre la fdp de  $Y$ .

Podemos usar probabilidades totales. Entonces

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y | Y = X)P(Y = X) + P\left(Y \leq y | Y = \frac{1}{X}\right)P\left(Y = \frac{1}{X}\right) \\ &= P(X \leq y)P(X \leq 1) + P\left(\frac{1}{X} \leq y\right)P\left(\frac{1}{X} > 1\right) \\ &= F_X(y)(1 - e^{-1}) + P\left(\frac{1}{y} \leq X\right)P(X > 1) \\ &= F_X(y)(1 - e^{-1}) + P(X \geq 1/y)e^{-1} \\ &= F_X(y)(1 - e^{-1}) + (1 - F_X(1/y))e^{-1} \\ F_Y(y) &= (1 - e^{-y})(1 - e^{-1}) - e^{-1/y}e^{-1} \quad / \frac{d}{dy} \\ f_Y(y) &= e^{-y}(1 - e^{-1}) + e^{-1} \frac{1}{y^2} e^{-1/y} \end{aligned}$$

Finalmente

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}(1 - e^{-1}) + e^{-1} \frac{1}{y^2} e^{-1/y} & y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Se sugiere que el lector reflexione en torno a por que se utilizo este procedimiento en particular, y no se procedió como en los ejercicios anteriores.

30. Sea  $X \sim U(-1, 2)$ . Defina la v.a  $Y = |X|$ . Calcule  $\mathbb{E}(Y)$  de manera directa e indirecta.

La manera directa

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(|X|) \\ &= \int_{-1}^2 |x| f_X(x) dx \\ &= \int_{-1}^0 -x \frac{1}{3} dx + \int_0^1 x \frac{1}{3} dx \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

La manera indirecta es encontrando  $f_Y(y)$ . Para esto, note que  $X \in (-1, 2)$ , teniendo el problema de que  $y = g(x) = |x|$  mapea dos veces al mismo intervalo, pues

$$\begin{aligned}x \in (-1, 0) &\Rightarrow y \in (0, 1) \\ x \in (0, 1) &\Rightarrow y \in (0, 1)\end{aligned}$$

mientras que para  $y \in (1, 2)$  no hay problema. Entonces en el caso anterior tenemos dos inversas

$$\begin{aligned}g_1(y) &= -y \\ g_2(y) &= y\end{aligned}$$

Entonces para  $y \in (0, 1)$  tenemos

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= |-1| \cdot f_X(-y) + 1 \cdot f_X(y) \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

para  $y \in (1, 2)$  tenemos

$$f_Y(y) = \frac{1}{3}$$

entonces

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{3} & y \in (0, 1) \\ \frac{1}{3} & y \in [1, 2) \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

calculamos la esperanza

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int_0^1 y \frac{2}{3} dy + \int_1^2 y \frac{1}{3} dy \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

31. Sea  $X \sim N(1, 2)$ . Calcule  $P(X^2 > 1)$  y encuentre como distribuye  $Y = 2X + 1$  mediante generadora de momentos.

$$\begin{aligned}P(X^2 > 1) &= P(|X| > 1) \\ &= 1 - P(|X| < 1) \\ &= 1 - P(-1 < X < 1) \\ &= 1 - \left( \Phi\left(\frac{1-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-1}{2}\right) \right) \\ &= 1 - \Phi(0) - \Phi(-1) \\ &= 0.3413447\end{aligned}$$



Para la generadora de momentos tenemos

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{2X+1}(t) \\ &= e^t M_X(2t) \\ &= e^t e^{2t + \frac{2(2t)^2}{2}} \\ &= e^{3t + \frac{8t^2}{2}} \end{aligned}$$

Esta ultima corresponde a la generadora de momentos de una  $N(3, 8)$ .

32. Demuestre que si  $X \sim F_X(x)$  continua, entonces la v.a  $Y = F_X(X)$  sigue una uniforme continua en  $0, 1$ .

Veamos

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(F_X(X) \leq y) \\ &= P(X \leq F_X^{-1}(y)) \\ &= F_X(F_X^{-1}(y)) \\ &= y \end{aligned}$$

derivando tenemos

$$f_Y(y) = 1, \quad 0 < y < 1$$

Esto nos dice que si queremos encontrar una transformación  $h(Y)$ , con  $Y \sim U(0, 1)$  para llegar a  $F_X(x)$ , entonces debemos resolver para  $X$  de la siguiente manera

$$F_X(X) = y$$

33. Sea  $Y \sim U(0, 1)$ . Encuentre una función  $h(Y)$  tal que  $X = h(Y) \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

Podemos aplicar lo demostrado anteriormente, pues sabemos que la acumulada de una exponencial es  $F_W(w) = 1 - e^{-\lambda w}$ . Entonces

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda X} &= y \\ 1 - y &= e^{-\lambda X} \\ \Rightarrow X &= -\frac{\ln(1 - y)}{\lambda} \end{aligned}$$

luego, se tiene que

$$X = h(Y) = -\frac{\ln(1 - Y)}{\lambda} \sim \text{Exp}(1)$$

34. Repita lo anterior pero ahora buscando  $h(Y) \sim \text{Cauchy}(0, 1)$

La acumulada de una  $\text{Cauchy}(0, 1)$  es

$$F_W(w) = \frac{1}{\pi} \arctan(w) + 1/2$$

entonces

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\pi} \arctan(X) + 1/2 \\ \pi \left( y - \frac{1}{2} \right) &= \arctan(X) \\ \Rightarrow X &= \tan \left( \pi \left( y - \frac{1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

35. Sean  $\mu$  y  $m$  la media y mediana, respectivamente, de una variable aleatoria  $X$ . Pruebe que:

(a)  $\min_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[(X - c)^2] = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$

(b)  $\min_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\{|X - c|\} = \mathbb{E}\{|X - m|\}$

(a) Sea  $g(x) = \mathbb{E}[(X - c)^2]$ . Entonces

$$\begin{aligned} g(c) &= \mathbb{E}[(X - c)^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2 - 2Xc + c^2] \end{aligned}$$

$$g(c) = \mathbb{E}(X^2) - 2c\mathbb{E}(X) + c^2$$

$$g'(c) = -2\mathbb{E}(X) + 2c$$

Igualemos a 0

$$2c - 2\mathbb{E}(X) = 0$$

$$c = \mathbb{E}(X)$$

corroboramos que es un mínimo

$$g''(c) = 2 > 0$$

Luego,  $g(c)$  tiene un mínimo en  $c = \mathbb{E}(X)$ , por lo cual  $c = \mathbb{E}(X)$  es el argumento que minimiza la expresión, teniéndose así que el mínimo es  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$ .

(b) Sin pérdida de generalidad demosetremos esto en el caso continuo.

$$\begin{aligned} h(c) &= \mathbb{E}(|X - c|) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x - c| f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^c -(x - c) f_X(x) dx + \int_c^{\infty} (x - c) f_X(x) dx \end{aligned}$$

Derivamos en ambos lados y aplicamos la regla de Leibniz

$$h'(c) = \int_{-\infty}^c f_X(x) dx - \int_c^{\infty} f_X(x) dx$$

igualamos a 0

$$h'(c) = 0$$

$$\int_{-\infty}^c f_X(x) dx - \int_c^{\infty} f_X(x) dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^c f_X(x) dx = \int_c^{\infty} f_X(x) dx$$

$$P(X \leq c) = P(X \geq c)$$

$$P(X \leq c) = 1 - P(X \leq c)$$

$$2P(X \leq c) = 1$$

$$P(X \leq c) = 1/2$$

pero esta ultima es la definición de la mediana (23). Lo que prueba que

$$\min_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\{|X - c|\} = \mathbb{E}\{|X - m|\}$$

36. Sea  $Z = X^2$  con  $X \sim N(0, 1)$ , encuentre como distribuye  $Z$ .

$$P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y)$$

$$= P(|X| \leq \sqrt{y})$$

$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(\sqrt{y}) + \frac{1}{2\sqrt{y}} f_X(-\sqrt{y})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{e^{-(\sqrt{y})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{e^{-(-\sqrt{y})^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \\
&= \frac{2^{1/2-1}}{\sqrt{2}\sqrt{\pi}} e^{-y/2} \\
&= \frac{2^{1/2-1}}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} e^{-y/2}
\end{aligned}$$

El recorrido en este caso es  $y > 0$ , pues  $x \in (-\infty, \infty)$ . Entonces

$$f_Y(y) = \frac{2^{1/2-1}}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} e^{-y/2}, \quad y > 0$$

Donde se tiene que

$$Z \sim \chi_{(1)}^2 \quad (28)$$

Recordar que  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

37. Diversos estudios muestran que los alumnos que rinden la PDT (ex PSU) la desarrollan en forma lineal, donde el tiempo utilizado en cada pregunta se comporta como una variable aleatoria Log-Normal. Suponga que el tiempo medio asignado a cada una de las 10 preguntas de probabilidad y estadística es de 4 min con una desviación estándar de 2 min. Determine la probabilidad que a lo mas en dos de ellas el tiempo utilizado sea superior a 4 min. Asuma que cada pregunta se responde de manera independiente.

Recordamos que si  $T \sim \text{LogNormal}(\lambda, \zeta^2)$ , entonces  $\mathbb{E}(T) = e^{\lambda+\zeta^2/2}$  y  $\text{Var}(T) = (e^{\zeta^2} - 1)(e^{2\lambda} + \zeta^2)$ . Por enunciado tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= 4 \\
\text{Var}(T) &= 2^2
\end{aligned}$$

Resolviendo

$$\begin{cases} e^{\lambda+\zeta^2/2} = 4 \\ (e^{\zeta^2} - 1)(e^{2\lambda} + \zeta^2) = 2^2 \end{cases}$$

Se tiene  $\lambda \approx 1.0397$  y  $\zeta^2 \approx 0.693$ . Ahora analicemos porque necesitábamos esto. Nos piden que a lo mas en 2 preguntas el tiempo se utilizado sea superior a 4 minutos, es decir, que de 10 preguntas, en 2 se ocupen mas de 4 minutos. Podemos intuir que es una binomial, pues queremos éxitos dentro de 10 ensayos, con  $p = P(T > 4)$ . Calculando se tiene que  $p = P(T > 4) = 0.4066$ . Ahora, sea  $X$  = numero de preguntas en que el tiempo utilizado en estas es superior a 4 minutos, se tiene que  $X \sim \text{Bin}(10, 0.4066)$ . Nos piden  $P(X \leq 2)$ , entonces

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= 1 - P(X > 2) \\
&= 1 - \sum_{x=3}^{10} \binom{10}{x} (0.4066)^x (1 - 0.4066)^{10-x} \\
&= 0.1568
\end{aligned}$$

38. Se lanza una moneda hasta que aparece una cara, cuál es la función de probabilidad del número de tiradas ? Calcule  $\mathbb{E}(X)$  y  $\text{Var}(X)$

Se tiene que  $X \sim \text{Geo}(1/2)$ , por lo cual  $p_X(x) = 1/2(1/2)^{x-1}$ ,  $x = 1, 2, \dots$ . Teniendo así  $\mathbb{E}(X) = 1/(1/2)$  y  $\text{Var}(X) = \frac{1-1/2}{1/4}$

39. Considere una va  $X$  con valores en  $\{1, 2, \dots\}$  y  $p(k) = P(X = k) = \frac{1}{2^k}$ , para  $k = 1, 2, \dots$ . Calcule  $P(X \text{ sea par})$ ;  $P(X \geq 5)$ ,  $P(X \text{ sea divisible por } 3)$ , e indique una mediana.

$$\begin{aligned} P(X = \text{par}) &= P(X = 2k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \\ &= \frac{1/4}{1 - 1/4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= 1 - P(X < 5) \\ &= 1 - \sum_{x=1}^4 \frac{1}{2^x} \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = \text{divisible por } 3) &= P(X = 3k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{8^k} \\ &= \frac{1/8}{1 - 1/8} \end{aligned}$$

para esto se debe cumplir (24), entonces

$$\begin{aligned} P(X \geq m) &= \sum_{x=m}^{\infty} \frac{1}{2^x} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{1}{2^{x+m}} \\ &= \frac{1}{2^m} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2^{m-1}} \end{aligned}$$

Imponemos la condición

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{m-1}} &\geq \frac{1}{2} \\ 4 &\geq 2^m \\ m &\leq 2 \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} P(X \leq m) &= \sum_{x=1}^m \frac{1}{2^x} \\ &= \frac{1}{2^m} \end{aligned}$$

Imponemos la condición

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^m} &\geq \frac{1}{2} \\ 2 &\geq 2^m \\ m &\geq 1\end{aligned}$$

entonces  $m = 1, 2$  son medianas.

40. Sea  $X$  una v.a.c con fdp dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Sea  $-1 < b < 0$ .

- (a) Calcule  $P(X > b | X < b/2)$ .
- (b) Encuentre  $b$  tal que  $P(X > b | X < b/2) = 1/9$ .
- (c) Obtenga y grafique la función de distribución  $F_X(x)$ .
- (d) Obtenga  $E(X)$  y  $Var(X)$

(a)

$$\begin{aligned}P(X > b | X < b/2) &= \frac{P(X > b \cap X < b/2)}{P(X < b/2)} \\ &= \frac{P(b < X < b/2)}{P(X < b/2)} \\ &= \frac{\int_b^{b/2} 3x^2 dx}{\int_{-1}^{b/2} 3x^2 dx} \\ &= -\frac{7b^3}{b^3 + 8}\end{aligned}$$

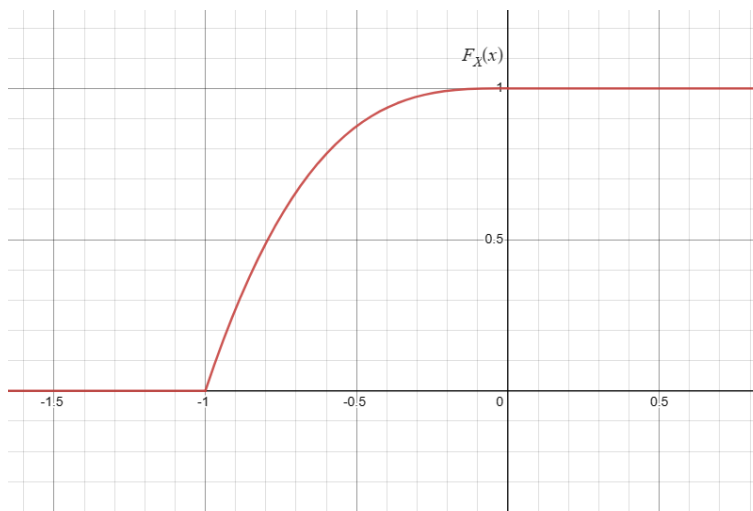
(b) Usamos lo calculado previamente

$$\begin{aligned}-\frac{7b^3}{b^3 + 8} &= \frac{1}{9} \\ b &= -1/2\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-1}^x 3u^2 du \\ &= x^3 + 1\end{aligned}$$

la gráfica es



(d)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-1}^0 3x^3 dx \\ &= \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

para la varianza necesitamos el segundo momento

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-1}^0 3x^5 dx \\ &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} Var(X) &= -\frac{1}{2} + \left(\frac{-3}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

41. Para medir la velocidad del aire, se usa un tubo (conocido como el tubo estático de Pilot) que permite medir la diferencia de presión. Esta diferencia de presión está dada por  $P = \frac{1}{2}dV^2$ , donde  $d$  es la densidad del aire y  $V$  es la velocidad del viento (kph) una va con fdp dada por:

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 10 < v < 20 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

(a) Encuentre la fdp de  $P$

(b) Calcule  $Var(P)$

(a)

$$\begin{aligned} P(P \leq p) &= P\left(\frac{1}{2}dV^2 \leq p\right) \\ &= P(V^2 \leq 2pd) \\ &= P(V \leq \sqrt{2pd}) \\ &= F_V(\sqrt{2pd}) \\ f_P(p) &= \frac{d}{\sqrt{2pd}} f_V(\sqrt{2pd}) \end{aligned}$$

$$f_P(p) = \frac{1}{10} \cdot \frac{d}{\sqrt{2pd}}, \quad \frac{1}{2}d10^2 < p < \frac{1}{2}d20^2$$

(b) Notemos que

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{10} & 10 < v < 20 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} = f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{20-10} & 10 < v < 20 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Se tiene que  $V \sim U(10, 20)$ .Entonces

$$\begin{aligned} Var(P) &= Var\left(\frac{1}{2}dV^2\right) \\ &= \frac{1}{2^2}d^2Var(V^2) \\ &= \frac{1}{4}d^2(E(V^4) - E(V^2)^2) \\ &= \frac{17000}{9}d^2 \end{aligned}$$

42. Sea  $X \sim P(\lambda)$ . Demuestre que  $Var(X) = E(X)$ .

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x(x-1)!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x}{(x-1)!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x+1}}{((x+1)-1)!} \\
 &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \lambda e^{-\lambda} \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

calculemos el segundo momento

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\
 &= \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{(x-1)!} \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} (x+1) \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x+1}}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \left( \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^{x+1}}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x+1}}{x!} \right) \\
 &= e^{-\lambda} \left( \lambda e^{\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x+1}}{x!} \right) \\
 &= e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} E(X) + \lambda e^{\lambda}) \\
 &= e^{-\lambda} (e^{\lambda} \lambda^2 + \lambda e^{\lambda}) \\
 &= \lambda^2 + \lambda
 \end{aligned}$$

reemplazamos todo

$$\begin{aligned}
 Var(X) &= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

donde claramente se tiene  $E(X) = Var(X)$ .

43. Sea  $X \sim N(0, 1)$ . Defina la v.a  $Y = |X|$ .

- (a) Encuentre la fda, la fdp y la fgm de Y
- (b) Calcule  $E(Y)$  y  $Var(Y)$ .
- (c) Muestre que  $E(X^{2k}) = E(Y^{2k})$  para todo  $k \geq 1$
- (a)

$$\begin{aligned}
 P(Y \leq y) &= P(|X| \leq y) \\
 &= P(-y \leq X \leq y) \\
 &= P(X \leq y) - P(X \leq -y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= F_X(y) - F_X(-y) \\
f_Y(y) &= f_X(y) + f_X(-y) \\
&= \frac{e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{e^{-(-y)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \frac{2e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

El recorrido es  $\text{Rec}(Y) = (0, \infty)$ . Entonces

$$f_Y(y) = \frac{2e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}}, \quad y > 0$$

a esta distribución se le conoce como *Half - Normal*.

La acumulada simplemente la podemos expresar como una integral

$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{2e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Calculemos la fgm

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= \int_0^\infty e^{ty} \frac{2e^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= \int_0^\infty \frac{2e^{-y^2/2+ty+\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= e^{t^2/2} \int_0^\infty \frac{2e^{-y^2/2+ty-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= e^{t^2/2} \int_0^\infty \frac{2e^{-\frac{1}{2}(y^2-2ty+t^2)}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= e^{t^2/2} \int_0^\infty \frac{2e^{-\frac{1}{2}(y-t)^2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= 2e^{t^2/2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}(y-t)^2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= 2e^{t^2/2} \int_{-t}^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}y^2}}{\sqrt{2\pi}} dy \\
&= 2e^{t^2/2} P(X > -t), \quad X \sim N(0, 1) \\
&= 2e^{t^2/2} (1 - \Phi(-t)) \\
&= 2e^{t^2/2} \Phi(t)
\end{aligned}$$

Calcular la esperanza, varianza y momentos queda como propuesto para el lector.

44. Nuevamente considere  $X \sim N(0, 1)$ . Defina la siguiente v.a

$$Y = \begin{cases} 1 & X \geq 0 \\ 0 & X < 0 \end{cases}$$

Calcule la fgm y  $E(Y)$ .

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= e^{t \cdot 1} P(Y = 1) + e^{t \cdot 0} P(Y = 0) \\
&= e^t P(X \geq 0) + P(X < 0) \\
&= \frac{1}{2} (e^t + 1)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} E(Y) &= 1 \cdot P(X \geq 0) + 0 \cdot P(X < 0) \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

45. Sea  $X \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ . Encuentre la distribución de las siguientes transformaciones

- (a)  $Y = 1/X$
- (b)  $Y = |X|$
- (c)  $Y = \frac{X}{\sqrt{1+X^2}}$

(a) Primero encontremos el recorrido. Sabemos que  $\text{Rec}(X) = \mathbb{R}$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

el punto problemático es en  $x = 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= \infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty \end{aligned}$$

entonces  $\text{Rec}(Y) = \mathbb{R}$ . Ahora aplicamos lo de siempre

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(1/X \leq y) \\ &= P(1/y \leq X) \\ &= P(X \geq 1/y) \\ &= 1 - P(X < 1/y) \\ &= 1 - F_X(1/y) \\ f_Y(y) &= \frac{1}{y^2} f_X(1/y) \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{y^2}} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{y^2 + 1} \end{aligned}$$

Se tiene

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{y^2 + 1}, \quad y \in \mathbb{R}$$

mas aun,  $Y \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ .

(b) El recorrido es  $\text{Rec}(Y) = (0, \infty)$ . Aplicamos lo mismo de siempre

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(|X| \leq y) \\ &= P(-y \leq X \leq y) \\ &= F_X(y) - F_X(-y) \\ f_Y(y) &= f_X(y) + f_X(-y) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{\pi} \frac{1}{(-y)^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{y^2 + 1} \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{y^2 + 1}, \quad y > 0$$

(c) Tenemos  $Rec(Y) = (-1, 1)$ . Y en este caso tenemos dos inversas

$$g_1^{-1}(y) = \frac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$g_2^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

pero siendo consistentes con la función  $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , nos debemos quedar con  $g_1^{-1}(y)$ , entonces

$$f_Y(y) = \left| \frac{d}{dy} g_1^{-1}(y) \right| f_X(g_1^{-1}(y))$$

$$= \frac{1}{(1-y^2)^{3/2}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\left( \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right)^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-y^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

tenemos entonces

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad -1 < y < 1$$

46. Sea  $X \sim Bin(n, p)$ . Encuentre la distribución de  $Y = n - X$ .

La inversa es  $g^{-1}(y) = n - y$ . Evaluando cada punto tenemos

$$x = 0 \Rightarrow y = n$$

$$x = 1 \Rightarrow y = n - 1$$

$$x = 2 \Rightarrow y = n - 2$$

$$\vdots$$

$$x = n - 1 \Rightarrow y = n - (n - 1) = 1$$

$$x = n \Rightarrow y = n - n = 0$$

el recorrido es el mismo. Ahora

$$P(Y = y) = P(n - X = y)$$

$$= P(X = y - n)$$

$$= \binom{n}{y-n} p^{y-n} (1-p)^{n-(y-n)}$$

$$= \frac{n!}{(y-n)!(n-y+n)!} p^{y-n} (1-p)^n$$

$$= \frac{n!}{(y-n)!y!} p^{y-n} (1-p)^n$$

$$= \binom{n}{y} (1-p)^n p^{y-n}$$

luego,  $Y \sim Bin(n, (1-p))$

47. Sea  $X \sim U(0, 5)$ . Encuentre la probabilidad de que la ecuación en  $u$  dada por

$$4u^2 + 4uX + X + 2 = 0$$

tenga raíces reales.

Para esto, nos interesa que el determinante de la ecuación cuadrática sea positivo, es decir

$$\begin{aligned} 16X^2 - (4 \cdot 4 \cdot (X + 2)) &= 16X^2 - 16X - 32 \geq 0 \\ &= X^2 - X - 2 \geq 0 \end{aligned}$$

entonces nos interesa  $P(X^2 - X - 2 \geq 0)$ . Resolviendo la inecuación, o gráficamente esta función, tenemos

$$\begin{aligned} P(2 \leq X < 5) &= \int_2^5 \frac{1}{5} dx \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

48. Sea  $X$  con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ . Determine

$$\mathbb{E}\left(X^{\frac{X-1}{\ln(X)}}\right)$$

e imponga condiciones sobre  $\lambda$  para que la esperanza exista.

Para esto note que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X^{\frac{X-1}{\ln(X)}}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{\ln\left(X^{\frac{X-1}{\ln(X)}}\right)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{\frac{X-1}{\ln(X)} \ln(X)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{X-1}\right) \\ &= e^{-1} \mathbb{E}\left(e^X\right) \\ &= e^{-1} \int_0^\infty e^x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= e^{-1} \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x + x} dx \\ &= e^{-1} \int_0^\infty \lambda e^{-x(\lambda-1)} dx \\ &= e^{-1} \lambda \int_0^\infty \frac{\lambda-1}{\lambda-1} e^{-x(\lambda-1)} dx \\ &= e^{-1} \frac{\lambda}{\lambda-1} \int_0^\infty (\lambda-1) e^{-x(\lambda-1)} dx \\ &= e^{-1} \frac{\lambda}{\lambda-1} \cdot 1 \\ &= \frac{e^{-1} \lambda}{\lambda-1} \end{aligned}$$

Lo anterior solo es valido si  $\lambda - 1 > 0$ , pues en otro caso la integral diverge, por lo cual se debe tener

$$\lambda > 1$$

para que la esperanza exista.

## 4 Vectores aleatorios

### 4.1 Definiciones y propiedades

La definición de un vector aleatorio es similar a la de (21), solo que ahora se extiende a mas dimensiones, en particular se tiene que un vector aleatorio  $n$ -dimensional es una función  $(X_1, \dots, X_n)$  desde el espacio muestral  $\Omega$  en  $\mathbb{R}^n$ , el espacio Euclidiano  $n$ -dimensional:

$$\begin{aligned}(X_1, \dots, X_n) : \Omega &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \omega &\rightarrow (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))\end{aligned}$$

En general las definiciones y propiedades son similares a las de una dimensión. Por ejemplo la distribución acumulada está dada por

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

se le llama función de distribución conjunta a

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Esta debe cumplir que

$$\begin{aligned}f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq 0 \\ \int \cdots \int_{\mathcal{X}} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_1 &= 1\end{aligned}$$

para el caso  $n = 2$  se tiene

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x, y) &\geq 0 \\ \iint_{\mathcal{X}} f_{X,Y}(x, y) dy dx &= 1\end{aligned}$$

en el caso discreto funciona igual pero reemplazando integrales por sumas. Note que ahora cada v.a  $X_1, X_2, \dots, X_n$  tiene su propio recorrido, por lo cual  $\mathcal{X}$  denota el recorrido conjunto. A partir de lo anterior tenemos

•

$$\frac{\partial^n F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

•

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1, \dots, X_n}(u_1, \dots, u_n) du_n \cdots du_1$$

para el caso  $n = 2$  tenemos

•

$$\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{X,Y}(x, y)$$

•

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(u, v) du dv$$

la función de distribución acumulada debe cumplir lo siguiente (aplicado al caso bivariado)

- $\lim_{x, y \rightarrow \infty} F_{X,Y}(x, y) = 1$ , ambos argumentos.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x, y) = 0$ , para cada valor del otro argumento.
- $F_{X,Y}(x, y)$  es no decreciente en cada uno de sus argumentos.
- $F_{X,Y}(x, y)$  es continua por la derecha en cada uno de sus argumentos.
- Si  $a_1 < b_1$  y  $a_2 < b_2$ , entonces,

$$\underbrace{F_{X,Y}(b_1, b_2) - F_{X,Y}(a_1, b_2) - F_{X,Y}(b_1, a_2) + F_{X,Y}(a_1, a_2)}_{P_{X,Y}\{(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]\} = P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2)} \geq 0$$

Como tenemos  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias, podemos obtener la fdp de estas, la cual se obtiene integrando o sumando por el recorrido de las otras variables, esto es

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_2$$

para el caso discreto

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{Rec(X_2)} \cdots \sum_{Rec(X_n)} p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$$

y en el caso particular  $n = 2$  tenemos

- $f_X(x) = \int_{Rec(Y)} f_{X,Y}(x, y) dy$
- $f_Y(y) = \int_{Rec(X)} f_{X,Y}(x, y) dx$

a estas ultimas se les dominan las distribuciones marginales.

Una definición importante

Si  $(X_1, \dots, X_n)$  es un vector aleatorio (discreto o continuo) con fmp conjunta (c.d.) o fdp conjunta (c.c.)  $f_{X_1, \dots, X_n}$ , y fmp's marginales (c.d.) o fdp's marginales (c.c.)  $f_{X_1}, \dots, f_{X_n}$ , respectivamente. Entonces, las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  se dicen (mutuamente) independientes, ssi:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

para el caso  $n = 2$  tenemos

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

a partir de esto debemos tener en cuenta que

1. Sean  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$  los recorridos conjunto y marginales de  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , respectivamente. Entonces, una condición necesaria (pero no suficiente) para que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sean variables aleatorias (mutuamente) independientes es que  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \cdots \times \mathcal{X}_n$ .
2. Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables aleatorias (mutuamente) independientes, entonces todos los sub-vectores formados con distintas componentes también son independientes.
3. Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son variables aleatorias (absolutamente) continuas (mutuamente) independientes, entonces el vector aleatorio  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  es (absolutamente) continuo.
4. Si  $X_1, \dots, X_n$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid), es decir, todas ellas tienen la misma fda  $F$  (fmp/ fdp  $f$ ), escribimos  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} f$  o  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F$

Las propiedades de la esperanza funcionan de manera similar al caso unidimensional. Tenemos

- $\mathbb{E}(X_1) = \int \cdots \int_{\mathcal{X}} x_1 f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_1$
- $E(h(X_1, \dots, X_n)) = \int \cdots \int_{\mathcal{X}} h(x_1, \dots, x_n) f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_1$
- $E(X) = \iint_{\mathcal{X}} x f_{X,Y}(x, y) dy dx$
- $E(h(X, Y)) = \iint_{\mathcal{X}} h(x, y) f_{X,Y}(x, y) dy dx$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$  solo si  $X$  es independiente de  $Y$

para el caso discreto es lo mismo pero reemplazando la integral por sumas.

A partir de lo anterior tenemos que la esperanza de una función lineal  $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$ , con  $a_i, b$  constantes reales, se calcula como

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(X_i) + b$$

La función generadora de momentos se define de la siguiente manera

$$M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \mathbb{E}(e^{X_1 t_1 + \dots + X_n t_n}) = \int \dots \int_{\mathcal{X}} e^{x_1 t_1 + \dots + x_n t_n} f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \dots dx_1$$

para el caso bidimensional

$$M_{X,Y}(t, s) = \mathbb{E}(e^{tX+sY}) = \iint_{\mathcal{X}} e^{tx+sy} f_{X,Y}(x, y) dy dx$$

y tiene las siguientes propiedades

•

$$\mathbb{E}(X^n Y^k) = \frac{\partial^{n+k} M_{X,Y}(t, s)}{\partial t^n \partial s^k} \Big|_{t=s=0}$$

en el caso general

$$\mathbb{E}(X_1^{k_1} X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}) = \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_n} M_{X_1, X_2, \dots, X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \dots \partial t_n^{k_n}} \Big|_{t_1=t_2=\dots=0}$$

- Si se quiere obtener la función generadora de momentos marginal, es decir, de una componente en particular, entonces

$$M_X(t) = M_{X,Y}(t, 0)$$

en el caso general

$$M_{X_k}(t_k) = M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) \Big|_{t_i=0, \forall i \neq k}$$

- $X_1, \dots, X_n$  son va's independientes si, y sólo si,

$$M_{X_1, X_2, \dots, X_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t_i)$$

para todo  $(t_1, \dots, t_n)$  donde las fgm's existen.

- Si  $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$ , entonces,

$$M_Y(t) = e^{bt} M_{X_1, \dots, X_n}(a_1 t, \dots, a_n t)$$

Así, si  $X_1, \dots, X_n$  son va's independientes, entonces

$$M_Y(t) = e^{bt} \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_i t).$$

En particular, si  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} M(t)$  e  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ , entonces

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \{M(t)\}^n.$$

Esto nos permite encontrar la distribución de una suma, lo cual es sumamente útil, y muy utilizado. Recordar siempre que la generadora de momentos de una distribución es única.

Dos conceptos importantes son la covarianza y correlación de dos variables aleatorias.

La covarianza indica que tanto varia  $X, Y$  respecto a sus medias, y se define como,

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \iint_{\mathcal{X}} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{X,Y}(x, y) dy dx$$

donde  $\mu_X, \mu_Y$  corresponden a las esperanzas de  $X, Y$  respectivamente. Se tienen las siguientes propiedades

- $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$
- $\text{Cov}(aX, Y) = a\text{Cov}(X, Y)$  ,  $\text{Cov}(X, aY) = a\text{Cov}(X, Y)$
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$
- $\text{Cov}(X, a) = 0$
- Si  $X, Y$  son independientes, entonces  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ . El recíproco en general es falso,  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  no implica independencia.
- $\text{Cov}(aX + b, Y) = a\text{Cov}(X, Y)$  y  $\text{Cov}(aX + b, X) = a\text{Var}(X)$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes
- $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$  (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

A partir de la covarianza, podemos definir el coeficiente de correlación  $\rho$  como,

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}}$$

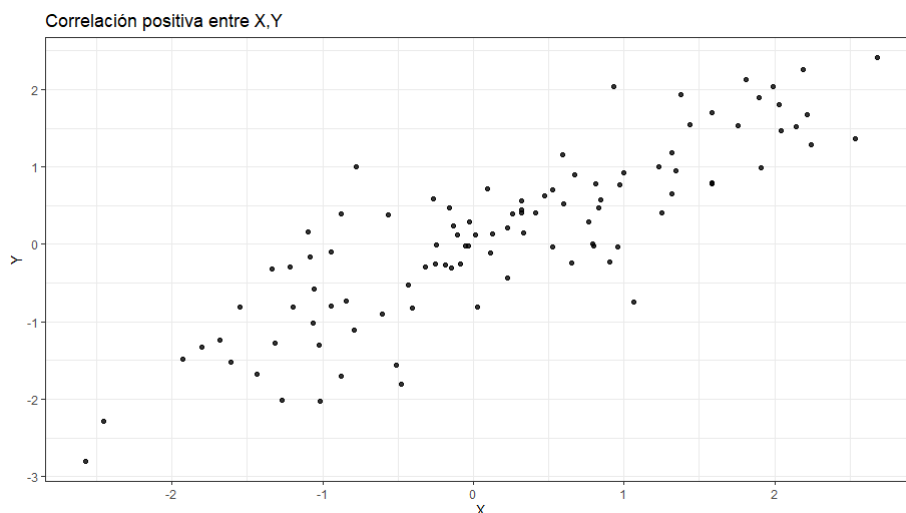
teniendo  $|\rho| \leq 1$ . En esencia el coeficiente de correlación nos indica que tan relacionadas están las dos variables aleatorias. Teniendo que

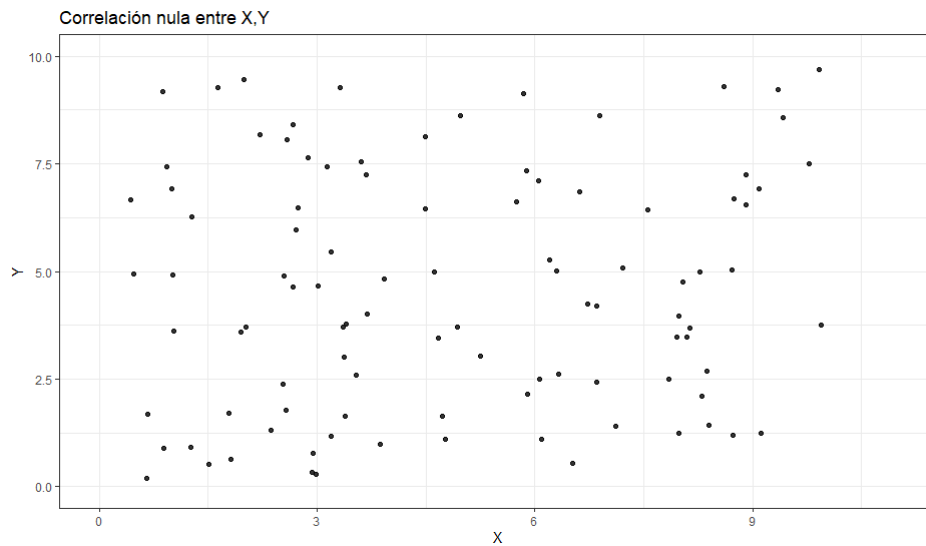
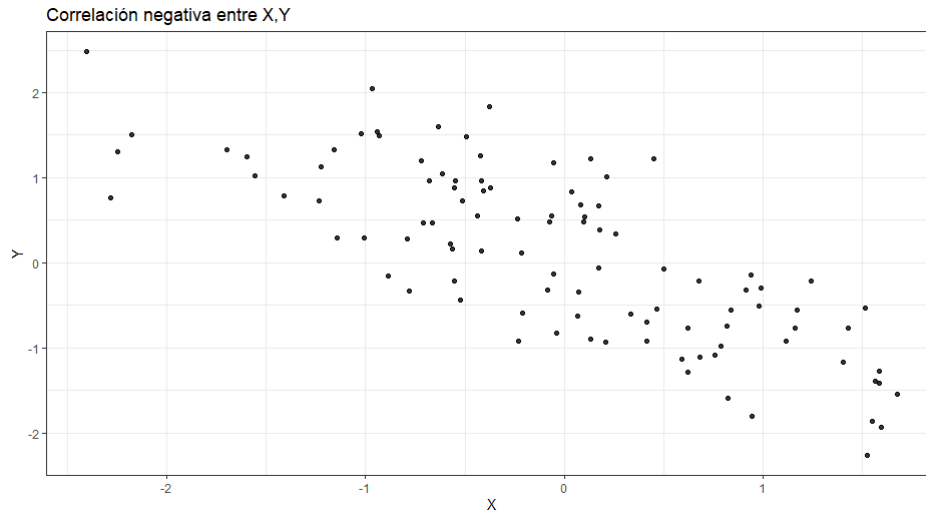
$$\rho > 0 \implies \text{asociación} +$$

$$\rho < 0 \implies \text{asociación} -$$

$$\rho = 0 \implies \text{no hay asociación lineal.}$$

en los casos extremos  $\rho = 1$  o  $\rho = -1$  indica relación lineal perfecta. Notar que para que la covarianza y correlación existan, se debe tener que  $0 < \sigma_X^2, \sigma_Y^2 < \infty$ , es decir, que las varianzas sean finitas. La relaciones se pueden ver a continuación





Finalmente nos falta definir la varianza. Consideremos la función lineal  $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$ , con  $a_i, b$  constantes, tenemos que

$$Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i) + 2 \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} a_i a_j Cov(X_i, X_j)$$

en el caso de que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sean independientes, se tiene que

$$Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 Var(X_i)$$

para el caso bidimensional se tiene

- $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y) \pm 2Cov(X, Y)$
- Si  $X, Y$  son independientes, entonces  $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$

Algo importante a mencionar, la notación

$\overset{iid}{\sim}$

significa variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas



#### 4.1.1 Ejemplos

1. Al lanzar una moneda justa tres veces consecutivas, defina las variables aleatorias

$X$  = Número de caras obtenidas en los primeros dos lanzamientos

$Y$  = Número de caras obtenidas en los últimos dos lanzamientos.

encuentre  $p_{X,Y}(x, y)$  y calcule  $E(XY)$ .

Acá  $p_{X,Y}(x, y)$  representa la conjunta. Podemos identificar el recorrido conjunto, el cual es

$$\mathcal{X} = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}$$

podemos calcular la probabilidad de estos eventos

$$p_{X,Y}(0, 0) = P(X = 0, Y = 0) = P((s, s, s)) = \frac{1}{8},$$

$$p_{X,Y}(0, 1) = P(X = 0, Y = 1) = P((s, s, c)) = \frac{1}{8},$$

$$p_{X,Y}(1, 0) = P(X = 1, Y = 0) = P((c, s, s)) = \frac{1}{8},$$

$$p_{X,Y}(1, 1) = P(X = 1, Y = 1) = P(\{(c, s, c), (s, c, s)\}) = \frac{1}{4},$$

$$p_{X,Y}(1, 2) = P(X = 1, Y = 2) = P((s, c, c)) = \frac{1}{8},$$

$$p_{X,Y}(2, 1) = P(X = 2, Y = 1) = P((c, c, s)) = \frac{1}{8},$$

$$p_{X,Y}(2, 2) = P(X = 2, Y = 2) = P((c, c, c)) = \frac{1}{8},$$

esta información la podemos guardar en una tabla de contingencia

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

o también

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & x = 0, y = 0, 1 \\ \frac{1}{8} & x = 1, y = 0 \\ \frac{1}{4} & x = 1, y = 1 \\ \frac{1}{8} & x = 1, y = 1, 2 \\ \frac{1}{8} & x = 2, y = 2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

ahora calculamos  $\mathbb{E}(XY)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 xy P(X = x, Y = y) \\ &= \sum_{x=0}^2 x (0 \cdot P(X = x, Y = 0) + 1 \cdot P(X = x, Y = 1) + 2 \cdot P(X = x, Y = 2)) \\ &= 0 \cdot (0 \cdot P(X = 0, Y = 0) + 1 \cdot P(X = 0, Y = 1) + 2 \cdot P(X = 0, Y = 2)) \\ &\quad + 1 \cdot (0 \cdot P(X = 1, Y = 0) + 1 \cdot P(X = 1, Y = 1) + 2 \cdot P(X = 1, Y = 2)) \\ &\quad + 2 \cdot (0 \cdot P(X = 2, Y = 0) + 1 \cdot P(X = 2, Y = 1) + 2 \cdot P(X = 2, Y = 2)) \end{aligned}$$

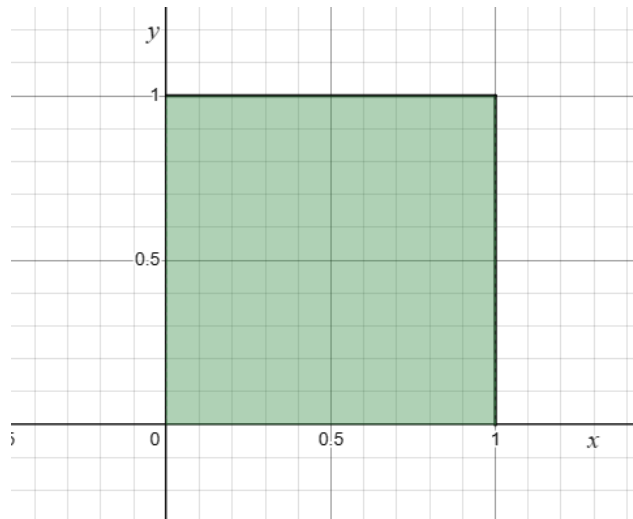
$$\begin{aligned}
&= P(X = 1, Y = 1) + 2 \cdot P(X = 1, Y = 2) + 2 \cdot P(X = 2, Y = 1) + 4 \cdot P(X = 2, Y = 2) \\
&= \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{8} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias con fdp conjunta dada por,

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 6xy^2 & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Calcule

- (a) Gráfique el recorrido conjunto de  $X, Y$
- (b)  $P(1/2 < X \leq 3/4, 0 < Y \leq 1/3)$
- (c)  $P(1/2 < X \leq 3/4)$
- (d)  $P(X + Y > 1)$
- (a) El recorrido es



(b) tenemos que

$$P(1/2 < X \leq 3/4, 0 < Y \leq 1/3) = \int_{1/2}^{3/4} \int_0^{1/3} 6xy^2 dy dx = 1.1574 \cdot 10^{-2}$$

(c) En este caso debemos integrar por todo el recorrido de  $Y$  para obtener lo pedido.

$$\begin{aligned}
P(1/2 < X \leq 3/4) &= \int_{1/2}^{3/4} \int_0^1 6xy^2 dy dx \\
&= 0.3125
\end{aligned}$$

(d) para esto podemos hacer lo siguiente

$$\begin{aligned}
x + y &> 1 \\
y &> 1 - x
\end{aligned}$$

en la figura 11 se puede ver la región a integrar. Entonces tenemos que

$$P(X + Y > 1) = \int_0^1 \int_{1-x}^1 6xy^2 dy dx = \frac{9}{10}$$

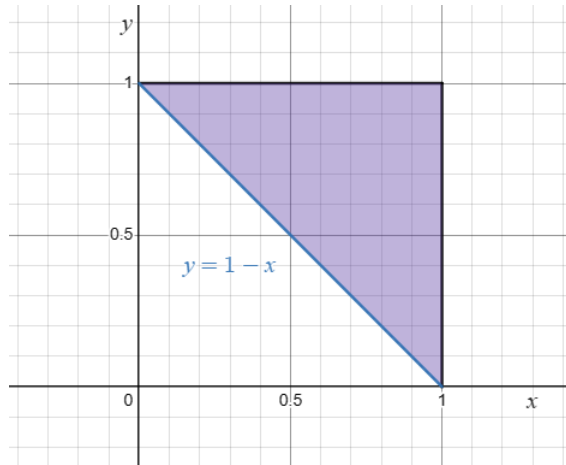


Figure 11: Región a integrar

3. Sea  $X_1, X_2 \dots X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ , exprese la distribución conjunta.  
como son *iid* tenemos

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i}, \quad x_i > 0, \forall i$$

4. Sean  $X, Y$  v.a.s con función de distribución acumulada

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}) & x, y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

¿Son  $X, Y$  variables aleatorias independientes? Reconozca como distribuye  $X$  e  $Y$ .

Note que

$$\frac{\partial F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} e^{-x} e^{-y} & x, y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

mas aun

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} f_X(x) f_Y(y) & x, y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Como el recorrido es  $(0, \infty) \times (0, \infty)$ , tenemos que  $X, Y \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(1)$ .

5. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} c(|x| + |y|) & \text{si } |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & \text{eoc.} \end{cases}$$

- Para qué valores de la constante  $c$ ,  $f(x, y)$  es una fdp bivariada?
- Calcule  $P((X; Y) \in \{(x, y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\})$ .
- Encuentre las fdp's marginales  $f_X$  y  $f_Y$ .
- Son  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes? Justifique.

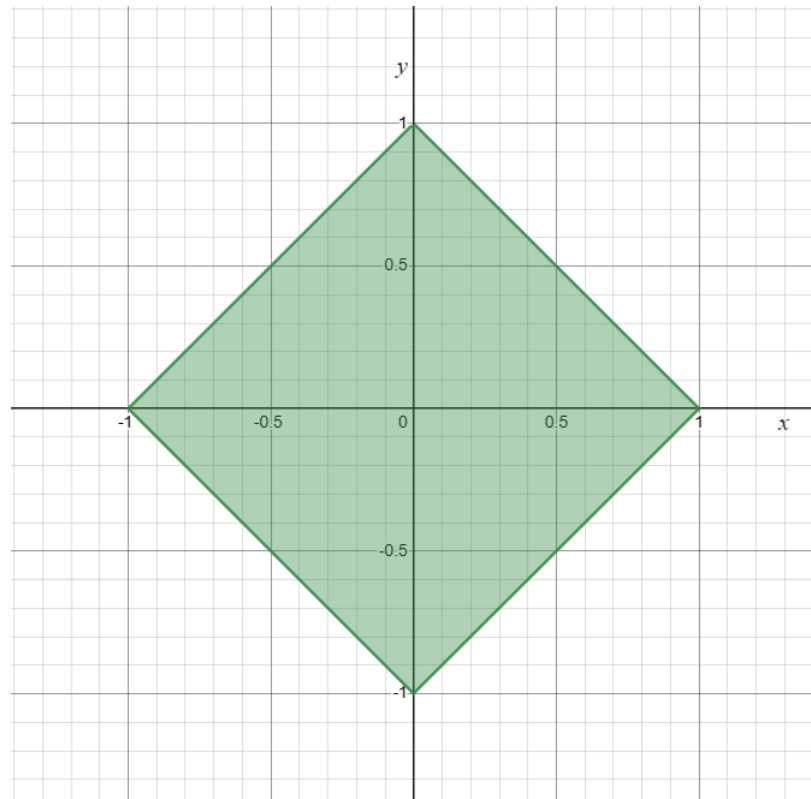
(a) La respectiva integral se calcula como sigue

$$\begin{aligned}\iint_{|x|+|y|\leq 1} c(|x|+|y|)dydx &= \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} c(-x+y)dydx + \int_0^1 \int_0^{1-x} c(x+y)dydx + \\ &+ \int_{-1}^0 \int_{-1-x}^0 c(-x-y)dydx + \int_0^1 \int_{-1+x}^0 c(x-y)dydx \\ &= \frac{4c}{3}\end{aligned}$$

imponemos la condición

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{X}} f_{X,Y}(x,y) &= 1 \\ \frac{4c}{3} &= 1 \\ c &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

note que el recorrido conjunto corresponde a



(b) La probabilidad pedida se calcula como

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{3}{4}(|x|+|y|)dydx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{3}{4}(x+y)dydx \\ &= 1/4\end{aligned}$$

(c) Para esto podemos notar que

$$\begin{aligned}\text{si } x \in (0,1) &\Rightarrow x-1 < y < 1-x \\ \text{si } x \in (-1,0) &\Rightarrow -1-x < y < 1+x\end{aligned}$$

por otro lado tenemos

$$\text{si } y \in (0, 1) \Rightarrow y - 1 < x < 1 - y$$

$$\text{si } y \in (-1, 0) \Rightarrow -1 + y < x < 1 + y$$

nos interesa tener esto ya que las distribuciones marginales de  $X, Y$  deben tener recorrido numérico. Entonces

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{x-1}^{1-x} \frac{3}{4}(|x| + |y|) dy \\ &= \int_{x-1}^0 \frac{3}{4}(x - y) dy + \int_0^{1-x} \frac{3}{4}(x + y) dy \\ &= \frac{3}{4}(1 - x^2), \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-1-x}^{1+x} \frac{3}{4}(|x| + |y|) dy \\ &= \int_{-1-x}^0 \frac{3}{4}(-x - y) dy + \int_0^{1+x} \frac{3}{4}(-x + y) dy \\ &= \frac{3}{4}(1 - x^2) \end{aligned}$$

tenemos entonces

$$f_X(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2), \quad -1 < x < 1$$

de forma análoga podemos obtener

$$f_Y(y) = \frac{3}{4}(1 - y^2), \quad -1 < y < 1$$

- (d) Es fácil ver que no son independientes, pues el producto cartesiano del recorrido de las marginales no calza con el de la conjunta.

$$(-1, 1) \times (-1, 1) \neq |x| + |y| \leq 1$$

6. Determinar como distribuye  $Z = X + Y$ , si  $X, Y \stackrel{iid}{\sim} \text{Bin}(n, p)$

Recordamos que la generadora de momentos de una binomial es

$$M_X(t) = [(1 - p) + pe^t]^n$$

Entonces:

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(e^{t(X+Y)}) \stackrel{\perp}{=} \mathbb{E}(e^{tX})\mathbb{E}(e^{tY}) = M_X(t)M_Y(t) \\ &= [(1 - p) + pe^t]^n [(1 - p) + pe^t]^n \\ &= [(1 - p) + pe^t]^{2n} \end{aligned}$$

$$Z \sim \text{Bin}(2n, p)$$

Ahora generalicemos para  $Z^* = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_k = \sum_{i=1}^k X_i$ , con  $X_i \sim \text{Bin}(n, p)$ .

$$\begin{aligned} M_{Z^*}(t) &= M_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) = \mathbb{E}(e^{t \sum_{i=1}^k X_i}) = \mathbb{E}(e^{tX_1 + tX_2 + \dots + tX_k}) \\ &= \mathbb{E}(e^{tX_1})\mathbb{E}(e^{tX_2}) \dots \mathbb{E}(e^{tX_k}) \\ &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_k}(t) \\ &= [(1 - p) + pe^t]^n [(1 - p) + pe^t]^n \dots [(1 - p) + pe^t]^n \\ &= [(1 - p) + pe^t]^{n+n+\dots+n} \\ &= [(1 - p) + pe^t]^{kn} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la suma de  $k$  binomiales  $(n, p)$  es binomial  $(kn, p)$

$$Z^* = \sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Bin}(kn, p)$$

7. Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Bern}(p)$ . Encuentre la distribución de  $\sum_{i=1}^n X_i$

Podemos utilizar generadora de momentos, y como son iid, sale fácil. Entonces

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = ((1 - p + pe^t))^n = ((1 - p) + pe^t)^n$$

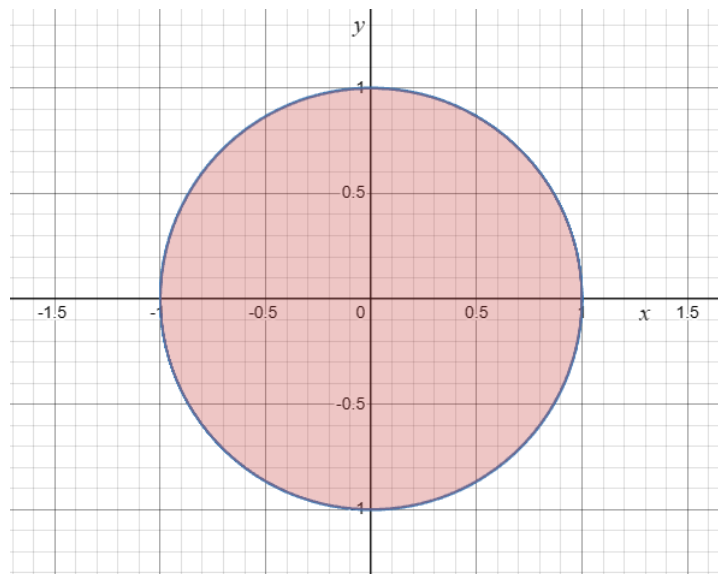
pero esta ultima es la generadora de momentos de una Binomial de parámetros  $n, p$ , por lo cual tenemos que

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p)$$

8. Suponga que  $X, Y$  tienen densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Encuentre las distribución marginales de  $X$  e  $Y$
- (b) Calcule  $\text{Cov}(X, Y)$ . ¿Son  $X$  e  $Y$  independientes?
- (a) Primero reconozcamos el recorrido de  $X, Y$ . Esto es



Esto corresponde a  $x \in [-1, 1]$  e  $y \in [-\sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-x^2}]$ . Entonces

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy \\ &= \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Para  $y$  es de forma análoga, teniendo  $y \in [-1, 1]$  y  $x \in [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]$ . Entonces

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{\pi} dx \\ &= \frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, y \in [-1, 1] \end{aligned}$$

(b) Recordamos que  $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{xy}{\pi} dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{xy}{\pi} dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{x}{\pi} \left( y^2 \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-1}^1 \frac{2x}{\pi} \sqrt{1-x^2} dx \\ &= 0\end{aligned}$$

Para  $Y$  es lo mismo, por lo cual  $\mathbb{E}(Y)$ . Reemplazamos todo

$$\begin{aligned}Cov(X, Y) &= 0 - 0 \cdot 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

Para ver si son independientes debemos corroborar  $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ . Entonces

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x, y) &= f_X(x)f_Y(y) \\ \frac{1}{\pi} &= \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-y^2} \\ f_{X,Y}(x, y) &\neq f_X(x)f_Y(y)\end{aligned}$$

Por lo cual  $X, Y$  no son independientes.

9. Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con función de probabilidad

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8} & (x, y) \in \{(-1, -1), (-1, 1), (1, 1), (1, -1)\} \\ \frac{1}{2} & (x, y) = (0, 0) \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Determine  $p_X(x)$  y  $p_Y(y)$ .

Para los casos discretos es útil hacer una tabla.

		Y		
		-1	0	1
X	-1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
	0	0	$\frac{1}{2}$	0
	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$

Y ahora debemos sumar hacia abajo para las probabilidades marginales de  $Y$ , y hacia al lado para las de  $X$ .

		$Y$			
		-1	0	1	$P(X = x)$
$X$	-1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$P(Y = y)$		$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{8}$	

En resumen tenemos

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{8} & y = -1, 1 \\ \frac{1}{2} & y = 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

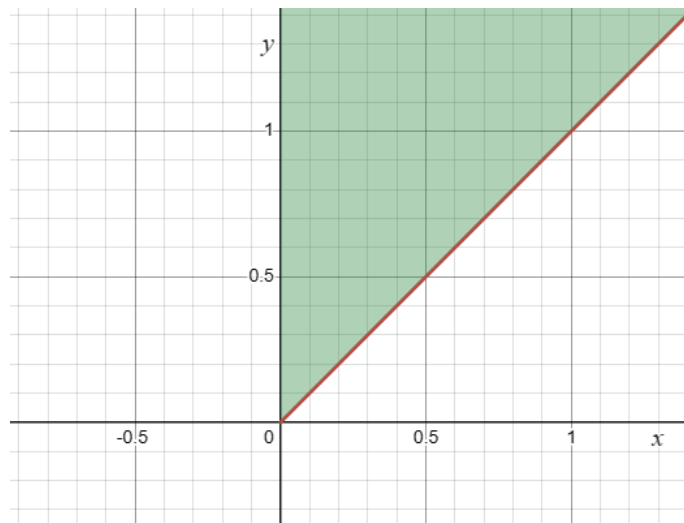
$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{8} & x = -1, 1 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

10. Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & 0 \leq x \leq y; \lambda > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Encuentre  $f_X(x)$  y  $f_Y(y)$
- (b) Calcule  $\text{Cov}(X, Y)$

Primero visualicemos el recorrido



Pues tenemos que  $0 \leq x$  y  $x \leq y \Rightarrow y \geq x$ . Por lo cual se tiene  $x \in [0, \infty)$  y  $y \in [x, \infty)$

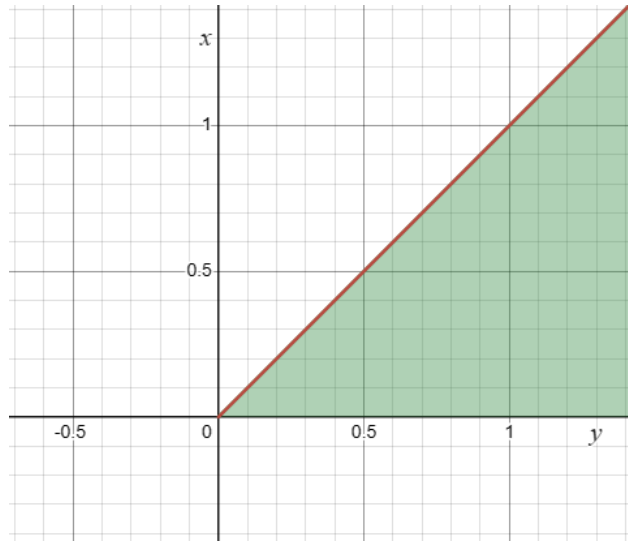


(a) Primero calculemos la marginal de  $X$ . Tenemos que  $y \in [x, \infty)$ , entonces

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &= \int_x^\infty \lambda^2 e^{-\lambda y} dy \\
 &= \lambda \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y} dy \\
 &= \lambda P(W > x) \\
 &= \lambda(1 - P(W \leq x)) \\
 &= \lambda(1 - (1 - e^{-\lambda x})) \\
 &= \lambda e^{-\lambda x}
 \end{aligned} \tag{29}$$

Notar que en (29) nos aprovechamos de que la integral corresponde a  $P(W > x)$  con  $W \sim \text{Exp}(\lambda)$ , por lo cual podemos evitarnos un poco de cálculos. Tenemos así que  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

Para encontrar la marginal de  $Y$  tenemos que cambiar los límites. Damos vuelta el plano  $XY$  de modo que tenemos la siguiente región



Ahora tenemos  $y \in [0, \infty)$  y  $x \in [0, y]$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y} dx \\
 &= \lambda^2 y e^{-\lambda y} \\
 &= \frac{\lambda^2 y^{2-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(2)}
 \end{aligned}$$

Tenemos que  $Y \sim \text{Gamma}(2, \lambda)$

(b) La esperanza de  $X$  e  $Y$  es directa, pues ya sabemos como distribuyen. Ahora calculemos  $\mathbb{E}(XY)$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(XY) &= \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda^2 x y e^{-\lambda y} dy dx \\
 &= \frac{3}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, Y) &= \frac{3}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{2}{\lambda} \\
 &= \frac{1}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$

11. Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con función de densidad dada por

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{36} & x, y = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Analice si  $X$  e  $Y$  son v.a.s independientes
- (b) Calcule  $\mathbb{E}(X - Y)$  y  $Var(X - Y)$
- (c) Calcule  $P(X = Y)$
- (a) Debemos corroborar si se cumple  $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ . Entonces

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_{y=1}^3 \frac{xy}{36} \\ &= \frac{x}{36}(1 + 2 + 3) \\ &= \frac{x}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \sum_{x=1}^3 \frac{xy}{36} \\ &= \frac{y}{36}(1 + 2 + 3) \\ &= \frac{y}{6} \end{aligned}$$

Donde claramente se tiene que  $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$ , por lo cual son v.a.s independientes

- (b) Notar que la fmp de  $X$  e  $Y$  son iguales, por lo cual podemos ahorrarnos unos cálculos.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X - Y) &= \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{3}{6} - \mathbb{E}(Y) \\ &= \frac{14}{6} - \mathbb{E}(Y) \\ &= \frac{14}{6} - \frac{14}{6} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para la varianza debemos calcular la covarianza, pero  $X, Y$  son independientes, por lo cual  $Cov(X, Y) = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} Var(X - Y) &= Var(X) + Var(Y) - 0 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 + Var(Y) \\ &= 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{2}{6} + 3^2 \cdot \frac{3}{6} - \frac{14^2}{6^2} + Var(Y) \\ &= \frac{20}{36} + Var(Y) \\ &= \frac{20}{36} + \frac{20}{36} \\ &= \frac{40}{36} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{9}{36} \\ &= \frac{14}{36} \end{aligned}$$

12. Determinar como distribuye  $Z = \sum_{i=1}^n X_i^2$ , si  $X_i \sim N(0, 1)$

Por el resultado del ejercicio 28, sabemos que  $Y = X^2 \sim \chi^2_{(1)}$ , entonces solo nos delimitamos a buscar  $Z = \sum_{i=1}^n Y_i$ , con  $Y_i \stackrel{iid}{\sim} \chi^2(1)$ .

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_{Y_1}(t) M_{Y_2}(t) \cdots M_{Y_n}(t) \\ &= \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{1/2} \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{1/2} \cdots \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{1/2} \\ &= \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{n/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n) \quad (30)$$

13. Sea  $X_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ . Determinar como distribuye  $Z = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t) \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda-t} \right) \left( \frac{\lambda}{\lambda-t} \right) \cdots \left( \frac{\lambda}{\lambda-t} \right) \\ &= \left( \frac{\lambda}{\lambda-t} \right)^n \\ &\Rightarrow Z \sim \text{Gamma}(n, \lambda) \end{aligned}$$

14. Sea  $X_i \stackrel{iid}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ . Demuestre que

$$\begin{aligned} \bullet Y &= \sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2) \\ \bullet \bar{X} &= \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \sim N(\mu, \sigma^2/n) \end{aligned}$$

Usamos generadora de momentos

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) \\ &= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t) \\ &= e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} \cdots e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}} \\ &= e^{n(\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2})} \\ &= e^{n\mu t + \frac{nt^2 \sigma^2}{2}} \\ &= e^{(n\mu)t + \frac{t^2(n\sigma^2)}{2}} \end{aligned}$$

Esta ultima es la generadora de momentos de una normal  $N(n\mu, n\sigma^2)$ . Ahora el promedio

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{X}}(t) &= M_{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}}(t) \\
 &= M_{\sum_{i=1}^n x_i}(t/n) \\
 &= M_{X_1}(t/n) M_{X_2}(t/n) \cdots M_{X_n}(t/n) \\
 &= e^{\mu(t/n) + \frac{(t/n)^2 \sigma^2}{2}} e^{\mu(t/n) + \frac{(t/n)^2 \sigma^2}{2}} \dots e^{\mu(t/n) + \frac{(t/n)^2 \sigma^2}{2}} \\
 &= e^{n(\mu(t/n) + \frac{(t/n)^2 \sigma^2}{2})} \\
 &= e^{\mu t + \frac{t^2/n \sigma^2}{2}} \\
 &= e^{\mu t + \frac{t^2(\sigma^2/n)}{2}}
 \end{aligned}$$

Esta ultima es la generadora de momentos de una normal  $N(\mu, \sigma^2/n)$ .

\*Para encontrar la suma de variables aleatorias es muy útil usar la generadora de momentos, y siempre es preferible usar este método.

15. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con distribución  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Encuentre como distribuye  $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ .

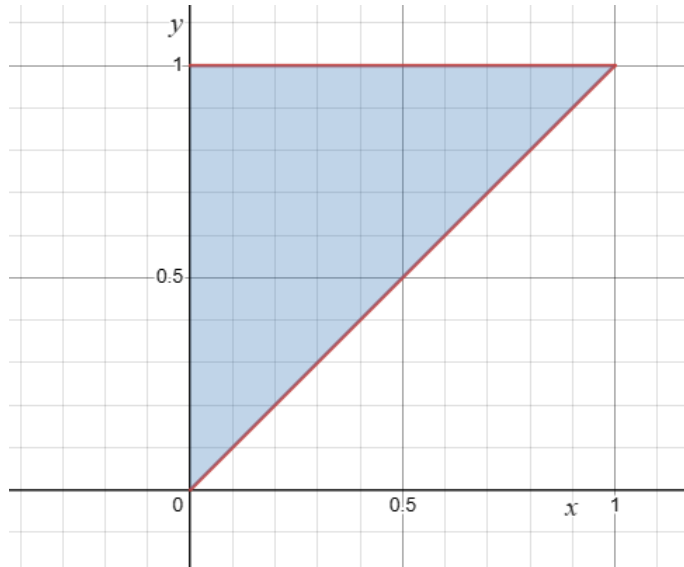
$$\begin{aligned}
 M_Z(t) &= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t) \\
 &= e^{\mu_1 t + t^2 \sigma_1^2 / 2} e^{\mu_2 t + t^2 \sigma_2^2 / 2} \dots e^{\mu_n t + t^2 \sigma_n^2 / 2} \\
 &= e^{\mu_1 t + t^2 \sigma_1^2 / 2 + \mu_2 t + t^2 \sigma_2^2 / 2 + \dots + \mu_n t + t^2 \sigma_n^2 / 2} \\
 &= e^{t \sum_{i=1}^n \mu_i + t^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 / 2}
 \end{aligned}$$

Se tiene que  $Z \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$

16. La Superintendencia de Seguridad Social (SUSESO) dispone de estadísticas respecto a las licencias médicas que se presentan a las instituciones de salud previsional (Isapres). Hay dos atributos relevantes que pueden ser modelados estadísticamente. Del total de licencias recibidas por una Isapre, se definen:  $X$  como la proporción de licencias apeladas ante la Comisión Médica Preventiva y de Invalidez (COMPIN) del Servicio de Salud que corresponda, e  $Y$  como la proporción de licencias médicas rechazadas por una Isapre. Un especialista determina que el mejor modelo que describe el comportamiento de este vector aleatorio tiene función de densidad conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k e^{-y} & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- Grafique comportamiento conjunto de  $X$  e  $Y$
- Determine el valor de la constante  $k$
- Para una Isapre dada, determine la probabilidad de que la proporción de licencias apeladas sea superior a  $2/3$  de la proporción de licencias rechazadas.
- Tenemos que  $x \in (0, 1)$  y  $y \in (x, 1)$ . La gráfica es



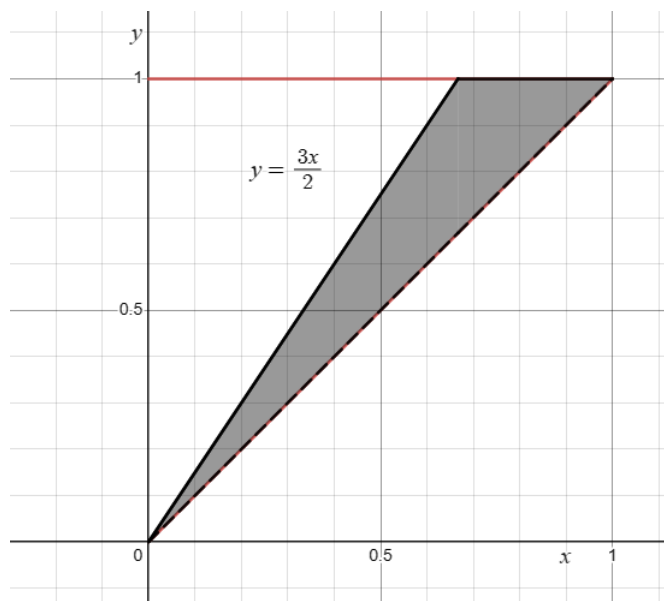
(b) Debemos buscar  $k$  tal que

$$\begin{aligned}
 k \int_0^1 \int_x^1 e^{-y} dy dx &= 1 \\
 k \frac{e}{e-2} &= 1 \\
 k &= \frac{e}{e-2}
 \end{aligned}$$

(c) Nos piden  $P(X > 2/3Y)$ . Primero encontremos la región de integración.

$$\begin{aligned}
 x &> \frac{2}{3}y \\
 \frac{3x}{2} &> y \\
 y &< \frac{3x}{2}
 \end{aligned}$$

La región corresponde a



Entonces la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(X > 2/3Y) &= \int_0^{\frac{2}{3}} \int_x^{\frac{3}{2}x} \frac{e}{e-2} e^{-y} dy dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \int_x^1 \frac{e}{e-2} e^{-y} dy dx \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

17. Suponga que en un servidor web informático dedicado al funcionamiento de los servicios WEB de una pyme, se analizan dos tiempos que son aleatorios, el primer tiempo  $Y_1$  corresponde al tiempo del vida útil de servidor (en horas), el segundo tiempo  $Y_2$  corresponde al tiempo de reparación del servidor web cuando este falla (en horas). Una vez que el sistema es reparado, este vuelve a funcionar como nuevo y se renueva el ciclo de vida y reparo. Suponga que ambos tiempos (el ciclo de vida y reparo) tiene la siguiente función de densidad:

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-y_1/y_2} e^{-y_2} & y_1, y_2 > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Encuentre la marginal de  $Y_1$  y su distribución. Con esto reporte la esperanza y varianza. Calculamos lo pedido

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_0^\infty e^{-y_2/y_1} e^{-y_2} dy_2 \\ &= e^{-y_1} \int_0^\infty e^{-y_2/y_1} dy_2 \\ &= e^{-y_1} y_1 \int_0^\infty \frac{1}{y_1} e^{-y_2/y_1} dy_2 \\ &= e^{-y_1} y_1 \int_0^\infty \text{Exp}(1/y_1) dy_2 \\ &= y_1 e^{-y_1} \cdot 1 \end{aligned}$$

Luego,

$$f_{Y_1}(y_1) = y_1 e^{-y_1}, \quad 0 < y_1 < \infty$$

Mas aun note que

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1^2 y_1^{2-1} e^{-y_1 \cdot 1}}{\Gamma(2)}, \quad 0 < y_1 < \infty$$

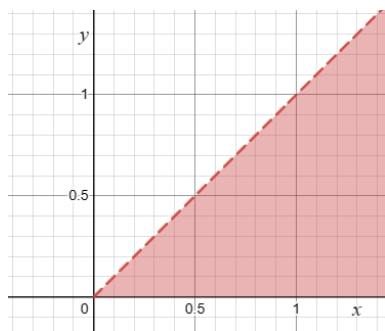
Luego,  $Y_1 \sim \text{Gamma}(2, 1)$ . Su varianza y esperanza es conocida, por lo cual  $E(Y_1) = 2$  y  $Var(Y_1) = 2$

- (b) Encuentre una expresión en integral para calcular  $P(Y_2 < Y_1 | Y_2 < 1)$ .

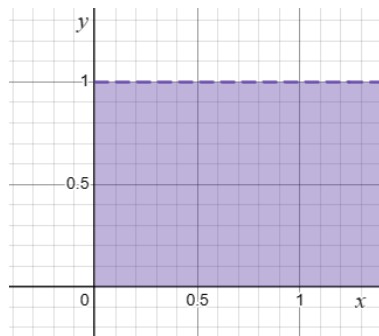
Usamos la definición

$$P(Y_2 < Y_1 | Y_2 < 1) = \frac{P(Y_2 < Y_1 \cap Y_2 < 1)}{P(Y_2 < 1)}$$

Podemos dibujar las dos condiciones del numerador.

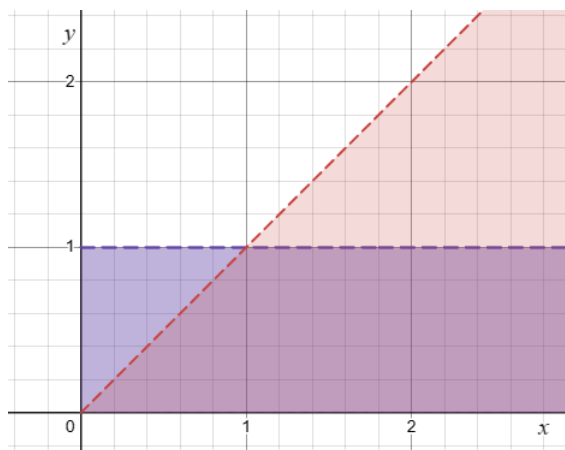


(a)  $P(Y_1 < Y_2)$

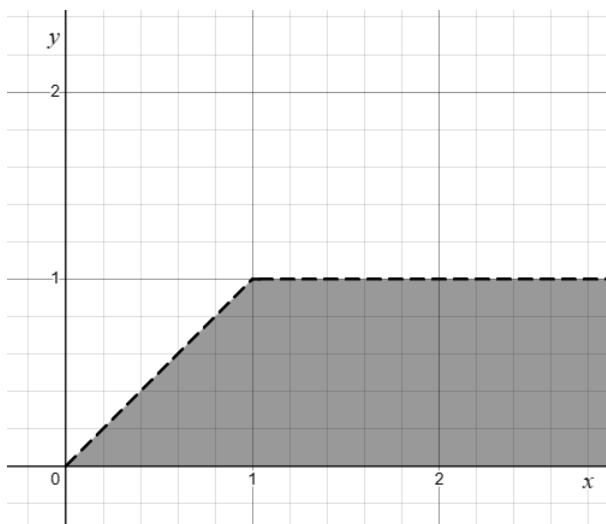


(b)  $P(Y_1 < 1)$

Veamos ambas condiciones en conjunto



Se puede ver que ambas se intersectan en



Entonces podemos expresar la probabilidad pedida como

$$\begin{aligned}
 P(Y_2 < Y_1 | Y_2 < 1) &= \frac{P(Y_2 < Y_1 \cap Y_2 < 1)}{P(Y_2 < 1)} \\
 &= \frac{\int_0^1 \int_0^{y_1} e^{-y_1/y_2} e^{-y_2} dy_2 dy_1 + \int_1^\infty \int_0^1 e^{-y_1/y_2} e^{-y_2} dy_2 dy_1}{\int_0^1 \int_0^\infty e^{-y_1/y_2} e^{-y_2} dy_1 dy_2}
 \end{aligned}$$

18. Sea un vector aleatorio  $(X, Y)$  con distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1, x < y < x+1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Encuentre el coeficiente de correlación entre  $X$  e  $Y$
- (b) Encuentre como distribuye  $X$
- (a) Necesitamos calcular todo lo necesario

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^1 \int_x^{x+1} x dy dx \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_0^1 \int_x^{x+1} y dy dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(XY) &= \int_0^1 \int_x^{x+1} xy dy dx \\ &= 7/12 \end{aligned}$$

para la varianza podemos obtener lo necesario de manera directa

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] \\ &= \int_0^1 \int_x^{x+1} (x - 1/2)^2 dy dx \\ &= 1/12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(Y) &= \mathbb{E}[(Y - \mu_Y)^2] \\ &= \int_0^1 \int_x^{x+1} (y - 1)^2 dy dx \\ &= 1/6 \end{aligned}$$

tenemos entonces

$$\rho_{XY} = \frac{7/12 - 1 \cdot 1/2}{\sqrt{1/12} \cdot \sqrt{1/6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- (b)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^{x+1} 1 dy dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

tenemos

$$f_X(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

en particular se tiene que  $X \sim U(0, 1)$

19. Suponga que una mujer sale de su casa entre las 8 AM y 8:30 AM y le toma entre 40 y 50 minutos en llegar a su destino. Defina las variables aleatorias

$X$  : Tiempo que se demora la mujer en salir de su casa

$Y$  : Tiempo que le toma a la mujer en llegar a su destino

Asuma que  $X, Y$  son independientes y uniformemente distribuidas, encuentre la probabilidad de que la mujer llegue a su destino antes de las 9AM.



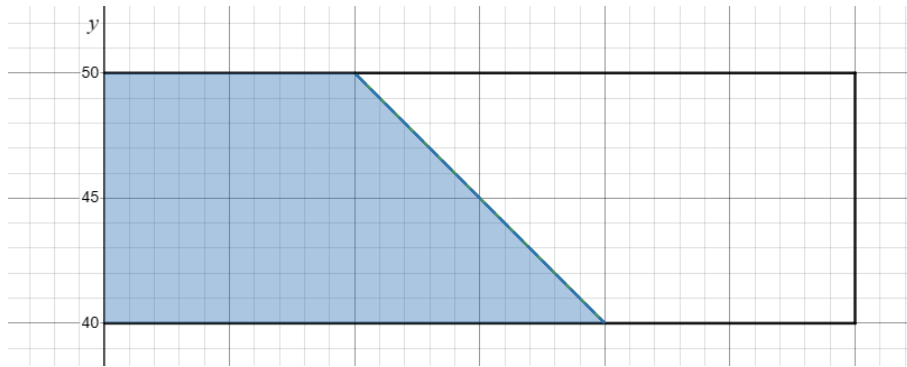
Note que el tiempo que se demora en salir es una uniforme en el intervalo  $(0, 30)$ , en minutos. Mientras que el tiempo que se demora en llegar a su destino es una uniforme en el intervalo  $(40, 50)$ , en minutos. Luego, como son independientes, tenemos que

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{30-0} \cdot \frac{1}{50-40} & 0 < x < 30, 40 < y < 50 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nos piden  $P(X + Y < 60)$ , pues queremos que la suma de estos tiempos no sea mayor a la de 60 minutos. Entonces

$$\begin{aligned} P(X + Y < 60) &= P(X < 60 - Y) \\ &= \int_{40}^{50} \int_0^{60-y} \frac{1}{30-0} \cdot \frac{1}{50-40} dx dy \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

Note que la región de integración es



podríamos de igual modo haber calculado la probabilidad como

$$\int_0^{10} \int_{40}^{50} \frac{1}{30-0} \cdot \frac{1}{50-40} dy dx + \int_{10}^{20} \int_{40}^{60-x} \frac{1}{30-0} \cdot \frac{1}{50-40} dy dx$$

20. Suponga que  $X, Y \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ . Encuentre  $P(X^2 + Y^2 < 1)$ .

Podemos desarrollar un poco la expresión

$$P(X^2 + Y^2 < 1) = P(Y^2 < 1 - X^2) = P(|Y| < \sqrt{1 - X^2}) = P(-\sqrt{1 - X^2} < Y < \sqrt{1 - X^2})$$

esta región corresponde a un círculo de radio 1. Para calcular esto podemos usar coordenadas polares.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) \left( \int_0^1 e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

21. Sean  $X \sim N(0, 1)$  e  $Y \sim N(1, 1)$  va's independientes. Obtenga las fgm's conjunta y marginales de  $X + Y$  y  $X - Y$ .

$$\begin{aligned} M_{X+Y, X-Y}(t_1, t_2) &= \mathbb{E} \left( e^{t_1(X+Y) + t_2(X-Y)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{X(t_1+t_2) + Y(t_1-t_2)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{X(t_1+t_2)} \right) \mathbb{E} \left( e^{Y(t_1-t_2)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M_X(t_1 + t_2)M_Y(t_1 - t_2) \\
&= e^{\frac{(t_1+t_2)^2}{2}} e^{(t_1-t_2)+\frac{(t_1-t_2)^2}{2}} \\
&= e^{t_1^2+t_2^2+t_1-t_2} \\
&= e^{t_1^2+t_2^2+t_1-t_2} \\
&= e^{t_1^2+t_1} e^{t_2^2-t_2} \\
&= e^{t_1^2+1 \cdot t_1} e^{t_2^2-1 \cdot t_2}
\end{aligned}$$

Esto corresponde al producto de dos generadora de momentos de una  $N(1, 2)$  y otra  $N(-1, 2)$ . Luego, como es factorizable, son independientes. Además

$$\begin{aligned}
M_{X+Y}(t_1) &= M_{X+Y, X-Y}(t_1, 0) \\
&= e^{t_1^2+1 \cdot t_1}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
M_{X-Y}(t_2) &= M_{X+Y, X-Y}(0, t_2) \\
&= e^{t_2^2-1 \cdot t_2}
\end{aligned}$$

22. Sean  $X \sim \exp(1)$  e  $Y \sim \exp(1)$  va's independientes. Las va's  $X+Y$  y  $X-Y$  son independientes?

Procedemos igual que antes

$$\begin{aligned}
M_{X+Y, X-Y}(t_1, t_2) &= \mathbb{E} \left( e^{t_1(X+Y)+t_2(X-Y)} \right) \\
&= \mathbb{E} \left( e^{X(t_1+t_2)+Y(t_1-t_2)} \right) \\
&= \mathbb{E} \left( e^{X(t_1+t_2)} \right) \mathbb{E} \left( e^{Y(t_1-t_2)} \right) \\
&= M_X(t_1 + t_2)M_Y(t_1 - t_2) \\
&= \frac{1}{1 - (t_1 + t_2)} \frac{1}{1 - (t_1 - t_2)} \\
&= \frac{1}{(1 - t)^2 - s^2}
\end{aligned}$$

claramente no es factorizable, por lo cual no son independientes.

23. Sea  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  y  $Y \sim \text{Exp}(\mu)$  independientes. Calcule  $P(Y < X)$ .

Como son independientes la conjunta es

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y} & x, y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

entonces

$$\begin{aligned}
P(Y < X) &= \int_0^\infty \int_0^x \lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y} dy dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dy dx \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} P(Y < x) dx \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\mu x}) dx \\
&= \frac{\mu}{\mu + \lambda}
\end{aligned}$$

## 4.2 Aspectos matriciales y distribuciones multivariadas

Como ya vimos, ahora estamos trabajando en  $\mathbb{R}^n$ , por lo cual tenemos muchas dimensiones. Para lidiar con esto, es útil guardar toda la información en un vector o matriz. Si bien no es necesario profundizar en las propiedades y definiciones que se listan a continuación, es útil saber y comprender como podemos definir las cosas de manera matricial. En esta sección utilizaremos  $\cdot$  como el producto punto. Podemos definir un vector aleatorio de la siguiente manera

$$\underset{\sim}{X} = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

La esperanza de  $\mathbf{X}$ , llamado vector de medias o vector esperado, esta dado por:

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}(\underset{\sim}{X}) = \mathbb{E}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1) \\ \mathbb{E}(X_2) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(X_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

La varianza de  $\mathbf{X}$ , se denomina ahora como matriz de varianza-covarianza, donde esta tiene la información de las varianzas y covarianzas. Esta dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} &= \text{Var}(\underset{\sim}{X}) = \text{Var}(\mathbf{X}) \\ &= \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))^T] \\ &= \begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1, X_2) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{Cov}(X_1, X_n) \\ \text{Cov}(X_2, X_1) & \text{Var}(X_2) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{Cov}(X_2, X_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{Cov}(X_n, X_1) & \text{Cov}(X_n, X_2) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de manera similar podemos definir la matriz de covarianza

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{Y} - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))^T] \\ &= \begin{pmatrix} \text{Cov}(X_1, Y_1) & \text{Cov}(X_1, Y_2) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{Cov}(X_1, Y_n) \\ \text{Cov}(X_2, Y_1) & \text{Cov}(X_2, Y_2) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{Cov}(X_2, Y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{Cov}(X_n, Y_1) & \text{Cov}(X_n, Y_2) & \cdot & \cdot & \cdot & \text{Cov}(X_n, Y_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y la matriz de correlación

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{X_1, Y_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{X_1, Y_n} \\ \rho_{X_2, Y_1} & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{X_2, Y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{X_n, Y_1} & \rho_{X_n, Y_2} & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de todo lo anterior se tienen las siguientes propiedades, teniendo en cuenta que  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  son vectores aleatorios.

- $\mathbb{E}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}\mathbb{E}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}$
- $\text{Var}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}) = \mathbf{A} \text{Var}(\mathbf{X}) \mathbf{A}^T$

- $\Sigma = \text{Var}(\mathbf{X})$  es una matriz simétrica,  $\Sigma = \Sigma^\top$
- $\Sigma = \text{Var}(\mathbf{X})$  es una matriz semidefinida positiva (s.d.p.), es decir,  $\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0 \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
- $\Sigma = \text{Var}(\mathbf{X})$  es una matriz definida positiva (d.p.), es decir,  $\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a} \geq 0 \quad \forall \mathbf{a} \neq 0 \iff X_1, \dots, X_n$  son linealmente independientes.
- $\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbb{E}(\mathbf{X}\mathbf{Y}^\top) - \mathbb{E}(\mathbf{X})\mathbb{E}(\mathbf{Y})^\top$
- $\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \text{Var}(\mathbf{X})$
- $\text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{C}, \mathbf{B}\mathbf{Y} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mathbf{B}^\top$
- Note que  $\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})^\top$ , de modo que

$$\text{Var}(\mathbf{X} \pm \mathbf{Y}) = \text{Var}(\mathbf{X}) + \text{Var}(\mathbf{Y}) \pm \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \pm \text{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$$

Una distribución multivariante interesante es la Multinomial. Se dice que un vector aleatorio discreto  $(X_1, \dots, X_k)$  tiene distribución multinomial con parámetros  $n$  y  $(p_1, \dots, p_k)$ , si las variables aleatorias  $X_1, \dots, X_k$  tienen fmp conjunta dada por

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k}, \quad (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{X}$$

donde  $\mathcal{X} = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i = 1, \dots, n, \sum_i x_i = n\}$ . Esta distribución se denota por

$$X_1, \dots, X_n \sim \text{Mult}(n, p_1, \dots, p_k)$$

Una distribución multivariante importante es la Normal Multivariada. Se dice que un vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top$  tiene distribución normal  $n$ -variada con vector de medias  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^\top$  y matriz de varianza-covarianza  $\Sigma$ , lo cual se escribe como  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ , ssi

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \boldsymbol{\mu}$$

donde  $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \Sigma$  y  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_m)^\top \sim \mathcal{N}_m(0, \mathbf{I}_m)$ .

Equivalentemente, se dice que el vector aleatorio  $\mathbf{X}$  de dimensión  $k \times 1$  tiene distribución Normal Multivariada ssi,  $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ , la variable aleatoria

$$\alpha_1 X_1 + \cdots + \alpha_k X_k = \boldsymbol{\alpha}^\top \mathbf{X}$$

con  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ , sigue una distribución Normal univariada.

Además se tiene que

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{|\Sigma|^{-1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n, \quad \Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Esta cuenta con las siguientes propiedades

- Sea  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ . Si definimos  $\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{d}$ , con  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rango  $m$  y  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ , entonces

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_m(\mathbf{Y}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{d}, \mathbf{C}\Sigma\mathbf{C}^\top) \quad (31)$$

- Si  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$  y  $\mathbf{A}$  es simétrica de rango  $r$ , entonces

$$\mathbf{Y}^\top \mathbf{A} \mathbf{Y} \sim \chi_{(r)}^2 \quad (32)$$

si y solo si  $\mathbf{A}$  es idempotente.

- Si  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  y  $\Sigma > 0$ , entonces

$$(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\mathbf{Y} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi_{(n)}^2$$

- Sea  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , entonces  $X_i$  es independiente de  $X_j$ ,  $i \neq j$ , ssi se tiene que  $\Sigma_{ij} = 0$ . Esto solo aplica al caso normal, es decir, para una normal multivariada tenemos que

$$\rho_{X_i, X_j} = 0 \iff X_i, X_j \text{ son independientes}$$

En resumen, si tenemos la matriz de covarianzas de una normal multivariada, y una componente  $(i, j)$  fuera de la diagonal es 0, entonces  $X_i$  es independiente de  $X_j$

- Para el caso bivariado tenemos que

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right]\right)$$

con  $-\infty < x, y < \infty$

- Para constantes cualquiera  $a$  y  $b$ , la distribución de  $aX + bY$  es

$$N(a\mu_X + b\mu_Y, a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y) \quad (33)$$

- Podemos escribir

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_2\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$$

para denotar que  $X, Y$  siguen una distribución conjunta normal bivariada

- Cualquier combinación lineal de normales (conjuntamente distribuidas) es normal

#### 4.2.1 Ejemplos

1. Si  $X_1, X_2$  destruyen conjuntamente normal estándar, encuentre el vector de medias y la matriz de varianza.

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}} &= \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} &= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \text{Cov}(X_1, X_2) \\ \text{Cov}(X_1, X_2) & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego, podemos expresar la conjunta como

$$\underset{\sim}{X} \sim \mathcal{N}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{\mu}}, \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}\right)$$

O también

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$$

O matricialmente

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right)$$

2. Sea el vector aleatorio  $\mathbf{Z}$  con distribución conjunta  $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_{n \times n})$ . Defina  $\mathbf{X} = \mathbf{AZ} + \mathbf{b}$ , donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  invertible, y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ . Encuentre la distribución de  $\mathbf{Z}$  y sus parámetros.

Sabemos que cada  $Z_i$  es normal, y estamos aplicando una transformación lineal, por lo cual el vector  $\mathbf{X}$  seguirá siendo normal. Calculemos lo necesario.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{X}) &= \mathbb{E}(\mathbf{AZ} + \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{A}\mathbb{E}(\mathbf{Z}) + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{A}\vec{0} + \mathbf{b} \\ &= \mathbf{b}\end{aligned}$$

Ahora la matriz de covarianza

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathbb{E}(\mathbf{X}))^T] &= \mathbb{E}[(\mathbf{AZ} + \mathbf{b} - \mathbf{b})(\mathbf{AZ} + \mathbf{b} - \mathbf{b})^T] \\ &= \mathbb{E}[(\mathbf{AZ})(\mathbf{AZ})^T] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{AZZ}^T\mathbf{A}^T] \\ &= \mathbf{A}\mathbb{E}[\mathbf{ZZ}^T]\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\mathbb{E}[(\mathbf{Z} - \vec{0})(\mathbf{Z} - \vec{0})^T]\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\mathbb{E}[(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{Z} - \boldsymbol{\mu})^T]\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\mathbf{I}_{n \times n}\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{AA}^T\end{aligned}$$

Luego,  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{b}, \mathbf{AA}^T)$

3. Considerando la pregunta anterior, que pasaría si  $\mathbf{AA}^T = \mathbf{I}_{n \times n}$

Dado que estamos con una normal multivariada, tendríamos

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = 0, \forall i \neq j$$

Teniendo así  $\rho = 0$ , lo cual implica que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son independientes y normalmente distribuidas.

4. Suponga que  $\mathbb{E}(X_1) = 1$ ,  $\mathbb{E}(X_2) = 0$ ,  $\text{Var}(X_1) = 2$ ,  $\text{Var}(X_2) = 4$  y  $\text{Cov}(X_1, X_2) = 1$ . Defina  $Y_1 = X_1 + X_2$  y  $Y_2 = X_1 + aX_2$ . Encuentre el vector de medias, la matriz de covarianzas y encuentre  $a$  tal que  $Y_1$  y  $Y_2$  no estén correlacionadas.

Calculemos todo de forma matricial. Nuestra matriz  $\mathbf{A}$  es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

pues

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_1 + X_2 \\ X_1 + aX_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{AX}\end{aligned}$$

El vector de medias es

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de covarianzas es

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Entonces definamos  $\mathbf{Y}$  como el vector con las nuevas transformaciones. Calculemos lo correspondiente.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{A}\mathbb{E}(\mathbf{X}) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathbf{Y}} &= \mathbf{A}\Sigma_{\mathbf{X}}\mathbf{A}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 3+5a \\ 3+5a & 2+2a+4a^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_2 \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 3+5a \\ 3+5a & 2+2a+4a^2 \end{bmatrix} \right)$$

Para que  $Y_1$  e  $Y_2$  no estén correlacionadas, se debe cumplir que

$$\begin{aligned}3+5a &= 0 \\ a &= -\frac{3}{5}\end{aligned}$$

Luego,  $Y_1$  e  $Y_2$  no están correlacionadas si  $a = -\frac{3}{5}$ .

5. Sea  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_3(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , con  $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}^T$  y  $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

- (a) Encuentre la distribución de  $Y = 3X_1 - 2X_2 + X_3$
- (b) Encuentre un vector  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$  tal que  $X_2$  y  $X_2 - \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$  sean independientes
- (a) Notar que esto se puede hacer de forma directa calculando lo correspondiente, pues la suma y resta de normales es normal, pero procedamos de forma matricial. Tenemos que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$\mu = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 14$$

$$\sigma^2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 9$$

Luego,  $Y \sim N(14, 9)$

(b) Sea  $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2]^T$  e  $Y = X_2 - \mathbf{a}^T \begin{bmatrix} X_1 \\ X_3 \end{bmatrix}$ . De acá tenemos

$$Y = -a_1 X_1 + X_2 - a_2 X_3$$

Nuestra matriz  $\mathbf{A}$  es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}$$

Como solo nos interesa que sean independientes, calculemos  $\Sigma$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -a_1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -a_1 - 2a_2 + 3 \\ -a_1 - 2a_2 + 3 & a_1^2 - 2a_1 - 4a_2 + 2a_1a_2 + 2a_2^2 + 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego, para que  $X_2$  e  $Y$  sean independientes, se debe cumplir que  $-a_1 - 2a_2 + 3 = 0$

6. Sea  $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$ . Encuentre la generadora de momentos de  $\mathbf{Y} = \mathbf{AZ} + \boldsymbol{\mu}$  sabiendo que  $M_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) = e^{-\frac{1}{2}\mathbf{t}^T\mathbf{t}}$ .

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) &= \mathbb{E}(e^{\mathbf{t}^T\mathbf{Y}}) \\ &= \mathbb{E}(e^{\mathbf{t}^T(\mathbf{AZ} + \boldsymbol{\mu})}) \\ &= e^{\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu}} \mathbb{E}(e^{\mathbf{t}^T\mathbf{AZ}}) \\ &= e^{\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu}} \mathbb{E}(e^{(\mathbf{A}^T\mathbf{t})^T\mathbf{Z}}) \\ &= e^{\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu}} M_{\mathbf{Z}}(\mathbf{A}^T\mathbf{t}) \\ &= e^{\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{A}^T\mathbf{t})^T(\mathbf{A}^T\mathbf{t})} \\ &= e^{\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{t}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{t})} \\ &= e^{\mathbf{t}^T\boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\mathbf{t}} \end{aligned}$$

7. A un mes de que llegue la Navidad, los centros comerciales y grandes tiendas se preparan ya que el periodo navideño representa un porcentaje importante de los ingresos del comercio de todo el año. El comportamiento anual de las ventas en el mes de diciembre esta altamente correlacionado y suponga que en una cierta tienda de retail, a las ventas de diciembre del año 2020 y 2021 las denotan por  $X_1$  y  $X_2$ , las cuales dependen de otras variables  $Y_1$  e  $Y_2$  las cuales son independientes entre si y distribuyen Normal con media y varianza  $\mu_1$ ,  $\sigma_1^2$  y  $\mu_2$  y  $\sigma_2^2$  respectivamente.

A partir de lo anterior, se definen las ventas diciembre del 2020 y 2021 por

$$X_1 = \frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}, \quad X_2 = \alpha X_1 + Y_2$$

donde  $0 \leq \alpha < 1$ . Interesa estimar si las ventas navideñas de este año serán mayores que el año pasado. Para ello,

- Calcule el valor esperado y varianza de  $X_2 - X_1$ .
- Si  $\alpha = 0.5$ ,  $\mu_1 = 40$ ,  $\mu_2 = 30$  y  $\sigma_1 = 30$ ,  $\sigma_2 = 25$ . Calcule la probabilidad de que las ventas navideñas de este año sean mayor que el año pasado.

Para el problema, es bueno recordar que si  $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$  para  $i = 1, 2$ , entonces  $aX_1 + bX_2 \sim N(\mu_1a + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$  y para la resta  $aX_1 - bX_2 \sim N(\mu_1a - b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$ .



(a) Calculamos la esperanza

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_2 - X_1) &= \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_1) \\
 &= \mathbb{E}(\alpha X_1 + Y_2) - \mathbb{E}\left(\frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}\right) \\
 &= \alpha \mathbb{E}\left(\frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}\right) + \mathbb{E}(Y_2) - \frac{1}{\alpha^2 - 1} \mathbb{E}(Y_1) \\
 &= \alpha \frac{\mu_1}{\alpha^2 - 1} + \mu_2 - \frac{\mu_1}{\alpha^2 - 1} \\
 &= \frac{\mu_1}{1 + \alpha} + \mu_2
 \end{aligned}$$

Calculamos la varianza

$$\begin{aligned}
 Var(X_2 - X_1) &= Var(X_1) + Var(X_2) - 2Cov(X_1, X_2) \\
 &= Var\left(\frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}\right) + Var(\alpha X_1 + Y_2) - 2Cov\left(\frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}, \alpha X_1 + Y_2\right) \\
 &= \frac{\sigma_1^2}{(\alpha^2 - 1)^2} + Var\left(\frac{\alpha Y_1}{\alpha^2 - 1} + Y_2\right) - 2Cov\left(\frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}, \frac{\alpha Y_1}{\alpha^2 - 1} + Y_2\right) \\
 &= \frac{\sigma_1^2}{(\alpha^2 - 1)} + Var\left(\frac{\alpha Y_1}{\alpha^2 - 1}\right) + Var(Y_2) + 2Cov\left(\frac{\alpha Y_1}{\alpha^2 - 1}, Y_2\right) - \\
 &\quad 2Cov\left(\frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}, \frac{\alpha Y_1}{\alpha^2 - 1}\right) - 2Cov\left(\frac{Y_1}{\alpha^2 - 1}, Y_2\right) \\
 &= \frac{\sigma_1^2}{(\alpha^2 - 1)} + \frac{\alpha^2 \sigma_1^2}{(\alpha^2 - 1)^2} + \sigma_2^2 - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} Cov(Y_1, Y_1) - 0 \\
 &= \frac{\sigma_1^2}{(\alpha^2 - 1)} + \frac{\alpha^2 \sigma_1^2}{(\alpha^2 - 1)^2} + \sigma_2^2 - \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1} \sigma_1^2 \\
 &= \frac{\sigma_1^2}{(\alpha + 1)^2} + \sigma_2^2
 \end{aligned}$$

(b) Nos interesa  $P(X_2 > X_1)$ . Sea  $Z = X_2 - X_1$ , como  $X_1$  y  $X_2$  son normales podemos aplicar la resta de ellas, resultando ser una normal con los parámetros ya calculados anteriormente, donde tenemos que

$$Z = X_2 - X_1 \sim N\left(\frac{\mu_1}{1 + \alpha} + \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{(\alpha + 1)^2} + \sigma_2^2\right)$$

Reemplazamos con los datos

$$Z \sim N(56.67, 1025)$$

Ahora si calculamos la probabilidad pedida.

$$\begin{aligned}
 P(X_2 > X_1) &= P(X_2 - X_1 > 0) \\
 &= P(Z > 0) \\
 &= 1 - P(Z < 0) \\
 &= 1 - P\left(\frac{Z - 56.67}{\sqrt{1025}} < \frac{-56.67}{\sqrt{10.25}}\right) \\
 &= 1 - P\left(\frac{Z - 56.67}{\sqrt{1025}} < -1.77\right) \\
 &= 1 - \Phi(-1.77) \\
 &= 0.96163
 \end{aligned}$$

8. Sea un vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X, Y)^T$  con fdp

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Encuentre el vector de medias, matriz de covarianzas y correlacion.

Calculamos todo lo necesario

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 \int_0^y 2x dx dy \\ &= 1/3 \\ \mathbb{E}(Y) &= \int_0^1 \int_0^y 2y dx dy \\ &= 2/3 \\ \text{Var}(X) &= \int_0^1 \int_0^y 2(x - 1/3)^2 dx dy \\ &= 1/18 \\ \text{Var}(Y) &= \int_0^1 \int_0^y 2(y - 2/3)^2 dx dy \\ &= 1/18 \\ E(XY) &= \int_0^1 \int_0^y 2xy dx dy \\ &= 1/4 \\ \text{Cov}(X, Y) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \\ &= 1/36\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\mu = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 1/18 & 1/36 \\ 1/36 & 1/18 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Suponga que se selecciona al azar una pareja formada por un hombre y una mujer de una determinada población. Sea  $X$  la altura de la mujer e  $Y$  la altura del hombre, ambas medidas en pulgadas. Se sabe que la distribución conjunta de  $X$  e  $Y$  es normal bivariada con medias  $\mu_X = 66.8$  y  $\mu_Y = 70$ , desviaciones estándar  $\sigma_X = \sigma_Y = 2$ , y correlación  $\rho_{XY} = 0.68$ . Calcule la probabilidad de que la mujer sea más alta que el hombre, es decir,  $P(X > Y)$ .

Nos interesa

$$P(X > Y) = P(X - Y > 0)$$

definamos  $Z = X - Y$ , entonces por (33) tenemos que

$$\begin{aligned}Z = X - Y &\sim N(1 \cdot 66.8 - 1 \cdot 70, 1^2 \cdot 2^2 + (-1)^2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 0.68 \cdot 2 \cdot 2) \\ Z &\sim N(-3.2, 2.56)\end{aligned}$$

ahora podemos calcular lo pedido

$$\begin{aligned}P(X - Y > 0) &= P(Z > 0) \\ &= 1 - P(Z < 0) \\ &= 1 - P\left(\frac{Z - (-3.2)}{\sqrt{2.56}} < \frac{0 - (-3.2)}{\sqrt{2.56}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{3.2}{\sqrt{2.56}}\right) \\ &= 0.02275013\end{aligned}$$

### 4.3 Transformación de vectores aleatorios

Al igual que en el caso unidimensional, nos interesan ciertas transformaciones de v.a.s, ahora podemos hacer lo mismo, pero con mas posibilidades, pues podemos multiplicar, dividir y hacer diversas transformaciones.

Para encontrar transformaciones, siempre es útil utilizar una variable auxiliar.

En el caso discreto, si queremos encontrar la conjunta de  $(U, V)$ , con  $u = g_1(x, y)$  y  $v = g_2(x, y)$ . Consideremos  $A_{uv} = \{(x, y) \in \mathcal{A} : g_1(x, y) = u \text{ \& } g_2(x, y) = v\}$ , entonces tenemos que

$$p_{U,V}(u, v) = P((X, Y) \in A_{uv}) = \sum_{(x,y) \in (A_{uv})} p_{X,Y}(x, y)$$

donde  $\mathcal{A}$  corresponde al recorrido conjunto de  $X, Y$ . También de forma resumida y no tan formal se tiene

$$p_{U,V}(u, v) = p_{X,Y}(g_1^{-1}(u, v), g_2^{-1}(u, v))$$

Para el caso continuo, sea  $Z = z(X, Y)$  una función inyectiva, la cual es de interés realizar la transformación, se usa una función auxiliar  $W = w(X, Y)$  conveniente. Sean  $h_1(z, w)$  y  $h_2(z, w)$  las funciones que resultan al despejar  $X$  e  $Y$  respectivamente, la función de densidad de la transformación esta dado por:

$$f_{Z,W}(z, w) = |J| f_{X,Y}(h_1(z, w), h_2(z, w))$$

Donde

$$|J| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial z} \\ \frac{\partial h_1}{\partial w} & \frac{\partial h_2}{\partial w} \end{pmatrix}$$

para el caso donde existan  $k$  inversas tenemos que

$$f_{Z,W}(z, w) = \sum_{i=1}^k |J_i| f_{X,Y}(h_{1i}(z, w), h_{2i}(z, w)) \quad (34)$$

Donde

$$|J_i| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial h_{1i}}{\partial z} & \frac{\partial h_{2i}}{\partial z} \\ \frac{\partial h_{1i}}{\partial w} & \frac{\partial h_{2i}}{\partial w} \end{pmatrix}$$

Notar que para el caso continuo, es similar o casi igual al teorema de cambio de variable en integrales dobles.

#### 4.3.1 Ejemplos

1. Sea  $X$  e  $Y$  variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x} e^{-y/x} & x, y > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Usando las transformaciones

$$U = \frac{Y}{X}, \quad V = X$$

Demuestre que  $U, V \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(1)$

Tenemos que encontrar las inversas. La mas facil es  $V = X$ , pues

$$X = V$$

ahora podemos reemplazar esto en  $U$ , de modo que

$$U = \frac{Y}{X}$$

$$U = \frac{Y}{V}$$

$$Y = UV$$

Teniendo entonces

$$Y = UV$$

$$X = V$$

El jacobiano es

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} uv & \frac{\partial}{\partial v} uv \\ \frac{\partial}{\partial u} v & \frac{\partial}{\partial v} v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |v|$$

antes de reemplazar todo, encontremos el recorrido de  $U, V$ . Para esto note que

$$x > 0$$

$$v > 0$$

$$\Rightarrow v > 0$$

$$y > 0$$

$$y/x > 0$$

$$u > 0$$

$$\Rightarrow u > 0$$

como  $u, v > 0$  entonces  $|J| = |v| = v$ . Ahora, la conjunta es

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} v \frac{e^{-v}}{v} e^{-uv/v} & u, v > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} e^{-v} e^{-u} & u, v > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Donde claramente  $U, V \stackrel{iid}{\sim} Exp(1)$ .

2. Sea  $X \sim \text{Gamma}(r, 1)$  e  $Y \sim \text{Gamma}(s, 1)$  independientes. Encontrar como distribuye  $Z = X+Y$  y  $W = \frac{X}{X+Y}$ .

Primero, tenemos que despejar  $X$  e  $Y$ . Sabemos que  $Z = X + Y$ , reemplazando esto en  $W$  se tiene

$$W = \frac{X}{X+Y}$$

$$W = \frac{X}{Z}$$

$$\Rightarrow X = WZ$$

Ahora es fácil despejar  $Y$ , pues reemplazando  $Z = WZ$  en  $Z = X + Y$  se tiene

$$\begin{aligned} Z &= X + Y \\ Z &= WZ + Y \\ \Rightarrow Y &= Z - WZ \end{aligned}$$

Entonces se tendría

$$\begin{aligned} x &= wz \\ y &= z - wz \end{aligned}$$

Antes de calcular el Jacobiano  $|J|$ , debemos encontrar el recorrido de  $Z$  y  $W$ . Sabemos que  $X$  e  $Y$  distribuyen Gamma, por lo cual el recorrido conjunto es  $(0, \infty)^2$ . Entonces tendríamos que

$$\begin{aligned} 0 < x < \infty & \quad 0 < y < \infty \\ \text{Reemplazando con } x = wz \text{ y } y = z - wz & \\ 0 < wz < \infty & \quad 0 < z - wz < \infty \\ 0 < wz < \infty & \quad 0 < z(1 - w) < \infty \end{aligned}$$

En el lado derecho se debe tener todo positivo, pero esto solo pasa si  $0 < w < 1$ , ya que si  $w > 1$  no se cumple la desigualdad. Otra forma de encontrar el recorrido es

$$\begin{aligned} x &> 0 \\ x + y &> y \\ x + y &> y > 0 \\ z &> y > 0 \\ z &> 0 \\ \Rightarrow z &> 0 \\ \\ y &> 0 \\ x + y &> x \\ \frac{1}{x} &> \frac{1}{x + y} > 0 \\ \frac{x}{x} &> \frac{x}{x + y} > 0 \\ 1 &> w > 0 \\ \Rightarrow 0 &< w < 1 \end{aligned}$$

Teniéndose así que los recorridos son:

$$\text{Rec}(Z) = (0, \infty) \quad \text{Rec}(W) = (0, 1)$$

Ahora calculamos el Jacobiano, donde  $x = wz$  y  $y = z - wz$ .

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z}(wz) & \frac{\partial}{\partial z}(z - wz) \\ \frac{\partial}{\partial w}(wz) & \frac{\partial}{\partial w}(z - wz) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & 1 - w \\ z & -z \end{vmatrix} = |-wz - z(1 - w)| = |-z| = z$$

Entonces se tendría que la conjunta de  $W$  y  $Z$  esta dada por:

$$f_{Z,W}(z, w) = |J| f_{X,Y}(wz, z - wz), \quad 0 < z < \infty, 0 < w < 1$$

Pero por enunciado son independientes, por lo cual se tiene

$$f_{Z,W}(z, w) = |J| f_X(wz) f_Y(z - wz), \quad z \in (0, \infty), w \in (0, 1)$$

Recordando la distribución Gamma y los parámetros con los cuales distribuye  $X$  e  $Y$  se tiene

$$\begin{aligned} f_{Z,W}(z, w) &= z \frac{(wz)^{r-1} e^{-(wz)}}{\Gamma(r)} \frac{(z - wz)^{s-1} e^{-(z-wz)}}{\Gamma(s)} \\ &= z \frac{w^{r-1} z^{r-1} e^{-wz} (z(1-w))^{s-1} e^{-z+wz}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \\ &= z \frac{w^{r-1} z^{r-1} e^{-wz} z^{s-1} (1-w)^{s-1} e^{-z+wz}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \end{aligned}$$

Luego de cancelar los términos correspondientes en el numerador, nos queda

$$\begin{aligned} &= \frac{z^{r+s-1} e^{-z} w^{r-1} (1-w)^{s-1}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \\ &= z^{(r+s)-1} e^{-z} \frac{w^{r-1} (1-w)^{s-1}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \\ &= \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r+s)} z^{(r+s)-1} e^{-z} \frac{w^{r-1} (1-w)^{s-1}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \\ &= \frac{z^{(r+s)-1} e^{-z}}{\Gamma(r+s)} \frac{\Gamma(r+s) w^{r-1} (1-w)^{s-1}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \\ &= \frac{z^{(r+s)-1} e^{-z}}{\Gamma(r+s)} \frac{\Gamma(r+s) w^{r-1} (1-w)^{s-1}}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \\ &= \frac{1^{r+s} z^{(r+s)-1} e^{-z \cdot 1}}{\Gamma(r+s)} \cdot \frac{w^{r-1} (1-w)^{s-1}}{B(r, s)} \end{aligned}$$

Donde claramente se tiene que

$$Z \sim \text{Gamma}(r+s, 1), \quad W \sim \text{Beta}(r, s)$$

3. Sea  $X \sim \chi^2(u), Y \sim \chi^2(v)$ , ambas independientes. Demostrar que

$$Z = \frac{X/u}{Y/v} \sim F(u, v)$$

Usando la variable auxiliar  $W = Y$ , se tiene

$$Y = W$$

ahora  $X$

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X/u}{Y/v} \\ \frac{uZ}{v} &= \frac{X}{Y} \\ \frac{uZ}{v} &= \frac{X}{W} \\ X &= \frac{u}{v} WZ \end{aligned}$$

El jacobiano resulta  $|J| = \frac{uW}{v}$ . El recorrido conjunto es  $w, v > 0$ . Ahora reemplazamos todo para la conjunta.

$$\begin{aligned}
f_{Z,W}(z, w) &= \left| \frac{uW}{v} \right| f_{X,Y} \left( \frac{u}{v} wz, w \right) \\
&= \frac{uW}{v} \left( \frac{zWu}{v} \right)^{u/2-1} \frac{e^{-zWu/2v}}{2^{u/2}\Gamma(u/2)} \frac{w^{v/2-1}e^{-w/2}}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} \\
&= \frac{uW}{v} \frac{z^{u/2-1}W^{u/2-1}u^{u/2-1}}{v^{u/2-1}} \frac{w^{v/2-1}e^{-w[(zu+v)/2v]}}{2^{u/2}2^{v/2}\Gamma(u/2)\Gamma(v/2)} \\
&= \frac{u}{v} \frac{z^{u/2-1}u^{u/2-1}}{v^{u/2-1}} \frac{wW^{u/2-1}w^{v/2-1}e^{-w[zu+v/2v]}}{2^{u/2}2^{v/2}\Gamma(u/2)\Gamma(v/2)} \\
&= \frac{u}{v} \frac{z^{u/2-1}u^{u/2-1}}{v^{u/2-1}} \frac{w^{v/2+u/2-1}e^{-w[(zu+v)/2v]}}{2^{u/2}2^{v/2}\Gamma(u/2)\Gamma(v/2)}
\end{aligned}$$

No es factorizable, por lo cual buscamos la marginal de  $Z$  a mano.

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty \frac{u}{v} \frac{z^{u/2-1}u^{u/2-1}}{v^{u/2-1}} \frac{w^{v/2+u/2-1}e^{-w[(zu+v)/2v]}}{2^{u/2}2^{v/2}\Gamma(u/2)\Gamma(v/2)} dw \\
&= \frac{u}{v} \frac{z^{u/2-1}u^{u/2-1}}{v^{u/2-1}} \int_0^\infty \frac{w^{v/2+u/2-1}e^{-w[(zu+v)/2v]}}{2^{u/2}2^{v/2}\Gamma(u/2)\Gamma(v/2)} dw \\
&= \frac{u}{v} \frac{z^{u/2-1}u^{u/2-1}}{v^{u/2-1}} \frac{1}{2^{u/2}2^{v/2}\Gamma(u/2)\Gamma(v/2)} \int_0^\infty w^{v/2+u/2-1}e^{-w[(zu+v)/2v]} dw \\
&= \frac{u}{v} \frac{z^{u/2-1}u^{u/2-1}}{v^{u/2-1}} \frac{\Gamma(v/2 + u/2)}{2^{u/2}2^{v/2}\Gamma(u/2)\Gamma(v/2)} \int_0^\infty \frac{w^{v/2+u/2-1}e^{-w[(zu+v)/2v]}}{\Gamma(v/2 + u/2)} dw \\
&= \frac{u}{v} z^{u/2-1} \left( \frac{u}{v} \right)^{u/2-1} \frac{1}{2^{u/2}2^{v/2}B(u/2, v/2)} \int_0^\infty \frac{w^{v/2+u/2-1}e^{-w[(zu+v)/2v]}}{\Gamma(v/2 + u/2)} dw \\
&= \frac{u}{v} z^{u/2-1} \left( \frac{u}{v} \right)^{u/2-1} \frac{1/[(zu+v)/2v]^{v/2+u/2}}{2^{u/2}2^{v/2}B(u/2, v/2)} \int_0^\infty \frac{[(zu+v)/2v]^{v/2+u/2}w^{v/2+u/2-1}e^{-w[(zu+v)/2v]}}{\Gamma(v/2 + u/2)} dw \\
&= \frac{u}{v} z^{u/2-1} \left( \frac{u}{v} \right)^{u/2-1} \frac{1/[(zu+v)/2v]^{v/2+u/2}}{2^{u/2}2^{v/2}B(u/2, v/2)} \cdot 1 \\
&= \frac{1}{B(u/2, v/2)} \left( \frac{u}{v} \right)^{u/2-1} z^{u/2-1} \frac{1}{2^{u/2}2^{v/2}} \frac{1}{\frac{[(zu+v)/v]^{v/2+u/2}}{2^{v/2+u/2}}} \frac{u}{v} \\
&= \frac{1}{B(u/2, v/2)} \frac{u}{v} \left( \frac{u}{v} \right)^{u/2-1} z^{u/2-1} \frac{1}{2^{u/2+v/2}} \frac{1}{\frac{[(zu+v)/v]^{v/2+u/2}}{2^{v/2+u/2}}} \\
&= \frac{1}{B(u/2, v/2)} \frac{u}{v} \left( \frac{u}{v} \right)^{u/2-1} z^{u/2-1} \frac{1}{[(zu+v)/v]^{v/2+u/2}} \\
&= \frac{1}{B(u/2, v/2)} \left( \frac{u}{v} \right)^{u/2} \frac{v}{u} z^{u/2-1} \frac{1}{[(zu+v)/v]^{v/2+u/2}} \\
&= \frac{1}{B(u/2, v/2)} \left( \frac{u}{v} \right)^{u/2} z^{u/2-1} \frac{1}{(1+z\frac{u}{v})^{v/2+u/2}} \\
&= \frac{1}{B(u/2, v/2)} \left( \frac{u}{v} \right)^{u/2} \frac{z^{u/2-2/2}}{(1+z(\frac{u}{v}))^{(u+v)/2}} \\
f_Z(z) &= \frac{1}{B(u/2, v/2)} \left( \frac{u}{v} \right)^{u/2} \frac{z^{(u-2)/2}}{(1+z(\frac{u}{v}))^{(u+v)/2}}, \quad z \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow Z \sim F(u, v)$$

Notar que  $\int_0^\infty \frac{[(zu + v)/2v]^{v/2+u/2} w^{v/2+u/2-1} e^{-w[(zu+v)/2v]}}{\Gamma(v/2 + u/2)} dw$  corresponde a la integral de una Gamma  $\left(v/2 + u/2, [(zu + v)/2v]^{v/2+u/2}\right)$ .

4. Sea  $X, Y \stackrel{iid}{\sim} \text{HalfCauchy}(0, 1)$ , esto es

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \frac{2}{\pi} \frac{1}{1+y^2} & x, y \in (0, \infty)^2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Encuentre la distribución de  $Z = \frac{X}{Y}$ .

Usamos la variable auxiliar  $W = Y$ . De modo que

$$\begin{aligned} X &= ZW \\ Y &= W \end{aligned}$$

Calculamos el Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} z & w \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = |w| = w$$

Tenemos que el recorrido conjunto corresponde a  $(0, \infty) \times (0, \infty)$ , de modo que la distribución conjunta esta dada por

$$f_{Z,W}(z, w) = \begin{cases} \frac{4w}{\pi^2} \frac{1}{1+w^2 z^2} \frac{1}{1+w^2} & w, z \in (0, \infty)^2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Ahora buscamos la marginal de  $Z$

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^\infty f_{Z,W}(z, w) dw \\ &= \int_0^\infty \frac{4w}{\pi^2} \frac{1}{1+w^2 z^2} \frac{1}{1+w^2} dw \\ &= \int_0^\infty \frac{4}{\pi^2} \left( \frac{w}{(w^2+1)(1-z^2)} - \frac{wz^2}{(w^2 z^2+1)(1-z^2)} \right) dw \\ &= \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln(z)}{z^2-1} \end{aligned}$$

Luego, la marginal de  $Z$  es

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln(z)}{z^2-1} & z > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

**Propuesta para el lector:** Encuentre  $P(X < Y)$  usando el resultado anterior y concluya acerca del valor de alguna serie conocida. Hint: Expresé la integral resultante en forma de serie.



5. Sea un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2} & \text{si } x, y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Encuentre la fdp de  $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ .

Procederemos mediante dos formas diferentes, pero primero notemos lo siguiente:

$$f_{X,Y}(x, y) = 4xye^{-x^2-y^2} = 2xe^{-x^2} 2ye^{-y^2} = \underbrace{\frac{x}{(\sqrt{2})^2} e^{\frac{-x^2}{2(\sqrt{2})^2}}}_{\text{Rayleigh}(1/\sqrt{2})} \underbrace{\frac{y}{(\sqrt{2})^2} e^{\frac{-y^2}{2(\sqrt{2})^2}}}_{\text{Rayleigh}(1/\sqrt{2})}$$

También notamos que  $\text{Rec}(X) = (0, \infty)$ ,  $\text{Rec}(Y) = (0, \infty)$ , y se corrobora que  $\text{Rec}(X) \times \text{Rec}(Y) = \text{Rec}(X, Y)$ , pues  $(0, \infty) \times (0, \infty) = (0, \infty)^2$ , verificando que es el recorrido del la fdp.

Dado lo anterior, se tiene  $X, Y \stackrel{iid}{\sim} \text{Rayleigh}(1/\sqrt{2})$ . Ahora empecemos con la transformación. Primero procedamos mediante cambio de variables. Ocupamos la variable auxiliar  $W = X$ .

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{X^2 + Y^2} \\ Y^2 &= Z^2 - X^2 \\ Y &= \sqrt{Z^2 - X^2} \\ Y &= \sqrt{Z^2 - W^2} \end{aligned}$$

Y claramente

$$X = W$$

Notar que  $Y$  no queda en valor absoluto ya que el recorrido es  $y > 0$ . Ahora el Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} w & \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{z^2 - w^2} \\ \frac{\partial}{\partial w} w & \frac{\partial}{\partial w} \sqrt{z^2 - w^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{z}{\sqrt{z^2 - w^2}} \\ 1 & \frac{-w}{\sqrt{z^2 - w^2}} \end{vmatrix} = \left| \frac{-z}{z^2 - w^2} \right| = \frac{z}{\sqrt{z^2 - w^2}}$$

Ahora necesitamos ver el recorrido de  $Z$  y  $W$ .

$$\begin{aligned} y &> 0 \\ y^2 &> 0 \\ y^2 + x^2 &> x^2 > 0 \\ \sqrt{y^2 + x^2} &> x > 0 \\ z &> w > 0 \end{aligned}$$

lo que implica que

$$0 < w < z$$

y

$$z > 0$$

Se tiene que  $Rec(Z) = (0, \infty)$  y  $Rec(W) = (0, z)$ . Ahora la marginal de  $Z, W$  nos queda como:

$$\begin{aligned}
 f_{Z,W}(z, w) &= \frac{z}{\sqrt{z^2 - w^2}} f_{X,Y}(w, \sqrt{z^2 - w^2}) \\
 &\text{Recordamos que } X, Y \text{ son independientes} \\
 &= \frac{z}{\sqrt{z^2 - w^2}} f_X(w) f_Y(\sqrt{z^2 - w^2}) \\
 &= \frac{z}{\sqrt{z^2 - w^2}} 2w e^{-w^2} 2\sqrt{z^2 - w^2} e^{-(\sqrt{z^2 - w^2})^2} \\
 &= 4wz e^{-w^2} e^{-z^2 + w^2} \\
 &= 4wz e^{-z^2} \\
 f_{Z,W}(z, w) &= 4wz e^{-z^2}, \quad z > 0, z > w > 0
 \end{aligned}$$

Ahora calculamos la marginal de interés, que es  $Z$ .

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= \int_0^z 4wz e^{-z^2} dw \\
 &= 2z^3 e^{-z^2} \\
 f_Z(z) &= \begin{cases} 2z^3 e^{-z^2} & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ahora reconozcamos la distribución.

$$\begin{aligned}
 f_Z(z) &= 2z^3 e^{-z^2} \\
 &= 2z^{2 \cdot 2 - 1} e^{-z^2} \\
 &= 2z^{2 \cdot 2 - 1} e^{-z^2 \cdot 2/2} \\
 &= \frac{2 \cdot 2^2 z^{2 \cdot 2 - 1} e^{-z^2 \cdot \frac{2}{2}}}{\Gamma(2) 2^2} \\
 \Rightarrow Z &= \sqrt{X^2 + Y^2} \sim \text{Nakagami}(2, 2)
 \end{aligned}$$

Ahora procedamos de una forma mas sencilla pero que nos dificulta encontrar el recorrido. Iniciemos por  $F_Z(z)$ .

$$\begin{aligned}
 F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\
 &= P(\sqrt{X^2 + Y^2} \leq z) \\
 &= P(X^2 + Y^2 \leq z^2) \\
 &= P(Y^2 \leq z^2 - x^2) \\
 &= P(Y \leq \sqrt{z^2 - x^2}) \\
 &= \int_0^z \int_0^{\sqrt{z^2 - x^2}} 4xy e^{-x^2 - y^2} dy dx \\
 &= 1 - e^{-z^2} (z^2 + 1) \\
 F_Z(z) &= 1 - e^{-z^2} (z^2 + 1) / \frac{d}{dz} \\
 f_Z(z) &= 2z^3 e^{-z^2}
 \end{aligned}$$

Como la región a integrar es un círculo, se debe tener radio  $r > 0$ , en nuestro caso  $z > 0$ , por lo cual se tiene  $f_Z(z) = 2z^3 e^{-z^2} \cdot I(z > 0)$ .

6. Sea  $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$ . Encuentre como distribuye  $U = X + Y$ .

Para esto podemos usar la variable auxiliar  $V = Y$ . Buscamos las inversas

$$\begin{aligned} Y &= V \\ U &= X + Y \\ U &= X + V \\ X &= U - V \end{aligned}$$

ahora el recorrido, es claro que

$$v = 0, 1, 2, \dots$$

para  $U = X + Y$  note que

$$\begin{aligned} U &= X + V \\ u &= x + v \end{aligned}$$

reemplazando los valores que toma  $x$  tenemos

$$\begin{aligned} u &= 0 + v = v \\ u &= 1 + v \\ u &= 2 + v \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

entonces  $u = v, 1 + v, 2 + v, \dots$ . La conjunta es

$$\begin{aligned} p_{U,V}(u, v) &= p_{X,Y}(u - v, v) \\ &= p_X(u - v) p_Y(v) \\ &= \frac{\lambda_1^{(u-v)} e^{-\lambda_1}}{(u - v)!} \cdot \frac{\lambda_2^v e^{-\lambda_2}}{v!} \end{aligned}$$

así tenemos que

$$p_{U,V}(u, v) = \begin{cases} \frac{\lambda_1^{(u-v)} e^{-\lambda_1}}{(u - v)!} \cdot \frac{\lambda_2^v e^{-\lambda_2}}{v!} & v = 0, 1, 2, \dots, u = v, v + 1, \dots \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

para encontrar la marginal de  $U$  debemos sumar por todos los valores de  $V$ . Uno pensaría que se debe calcular

$$p_U(u) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{(u-v)} e^{-\lambda_1}}{(u - v)!} \cdot \frac{\lambda_2^v e^{-\lambda_2}}{v!}$$

pero note que la suma solo puede llegar hasta  $u$ , pues en otro caso  $(u - v)!$  no estaría definido, por lo cual

$$\begin{aligned} p_U(u) &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{(u-v)} e^{-\lambda_1}}{(u - v)!} \cdot \frac{\lambda_2^v e^{-\lambda_2}}{v!} \\ &= \sum_{v=0}^u \frac{\lambda_1^{(u-v)} e^{-\lambda_1}}{(u - v)!} \cdot \frac{\lambda_2^v e^{-\lambda_2}}{v!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \sum_{v=0}^u \frac{\lambda_1^{(u-v)}}{(u - v)!} \cdot \frac{\lambda_2^v}{v!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{u!} \sum_{v=0}^u u! \frac{\lambda_1^{(u-v)}}{(u - v)!} \cdot \frac{\lambda_2^v}{v!} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{u!} \sum_{v=0}^u \binom{u}{v} \lambda_1^{(u-v)} \lambda_2^v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{u!} (\lambda_1 + \lambda_2)^{u-v+v} \\
&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{1}{u!} (\lambda_1 + \lambda_2)^u \\
&= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^u e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}}{u!}
\end{aligned}$$

Se tiene que  $U \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ .

7. Sea  $X, Y \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1)$ . Encuentre la distribución conjunta de  $(Z, W)$ , donde  $Z = X/Y$  y  $W = Y$

La transformación ya la hemos visto varias veces. Se tiene que  $|J| = w$ . Ahora, el recorrido es un poco mas complicado. Las inversas son

$$\begin{aligned}
Y &= W \\
X &= ZW
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
0 &< y < 1 \\
0 &< w < 1
\end{aligned}$$

ahora

$$\begin{aligned}
x &> 0 \\
x/y &> 0 \\
z &> 0 \\
x &< 1 \\
x/y &< 1/y \\
z &< 1/w
\end{aligned}$$

teniendo así que  $w \in (0, 1)$  y  $z \in (0, 1/w)$ . Como no hay en que evaluar en la fdp de una uniforme, tenemos que

$$f_{Z,W}(z, w) = w, \quad 0 < w < 1, 0 < z < 1/w$$

8. Sean  $X_1$  e  $X_2$  variables aleatorias con fmp conjunta dada por

$X_1/X_2$	0	1
-1	1/7	1/7
0	2/7	1/7
1	1/7	1/7

encuentre la conjunta de  $Y_1 = X_1 + X_2$  y  $Y_2 = X_1 X_2$ .

Cuando tengamos una tabla de contingencia, es mejor proceder de una manera mas sencilla. Primero encontremos el recorrido de cada una. Para esto podemos evaluar en todos los valores que toma  $X_1$  y  $X_2$ .

$$\begin{aligned}
Y_1 &= -1 + 0 = -1 \\
Y_1 &= -1 + 1 = 0 \\
Y_1 &= 0 + 0 = 0 \\
Y_1 &= 0 + 1 = 1 \\
Y_1 &= 1 + 0 = 1 \\
Y_1 &= 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

ahora

$$\begin{aligned} Y_2 &= -1 \cdot 0 = 0 \\ Y_2 &= -1 \cdot 1 = -1 \\ Y_2 &= 0 \cdot 0 = 0 \\ Y_2 &= 0 \cdot 1 = 0 \\ Y_2 &= 1 \cdot 0 = 1 \\ Y_2 &= 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

En resumen tenemos

$$\begin{aligned} \text{Rec}(Y_1) &= \{-1, 0, 1, 2\} \\ \text{Re}(Y_2) &= \{-1, 0, 1\} \end{aligned}$$

para encontrar las probabilidades solo debemos ver los pares ordenados en la tabla de contingencia original, entonces

$$P(Y_1 = -1, Y_2 = -1) = P(X_1 + X_2 = -1, X_1 X_2 = -1) = 0$$

esto ya que no hay ningún par  $(x_1, x_2)$  tal que cumpla las dos condiciones  $X_1 + X_2 = -1$  y  $X_1 X_2 = -1$ .

$$P(Y_1 = -1, Y_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = -1, X_1 X_2 = 0) = P(X_1 = -1, X_2 = 0) = 1/7$$

$$P(Y_1 = -1, Y_2 = 1) = P(X_1 + X_2 = -1, X_1 X_2 = 1) = 0$$

$$P(Y_1 = 0, Y_2 = -1) = P(X_1 + X_2 = 0, X_1 X_2 = -1) = P(X_1 = -1, X_2 = 1) = 1/7$$

$$P(Y_1 = 0, Y_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 0, X_1 X_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 2/7$$

$$P(Y_1 = 0, Y_2 = 1) = P(X_1 + X_2 = 0, X_1 X_2 = 1) = 0$$

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = -1) = P(X_1 + X_2 = 1, X_1 X_2 = -1) = 0$$

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 1, X_1 X_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 2/7$$

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 1) = P(X_1 + X_2 = 1, X_1 X_2 = 1) = 0$$

$$P(Y_1 = 2, Y_2 = -1) = P(X_1 + X_2 = 2, X_1 X_2 = -1) = 0$$

$$P(Y_1 = 2, Y_2 = 0) = P(X_1 + X_2 = 2, X_1 X_2 = 0) = 0$$

$$P(Y_1 = 2, Y_2 = 1) = P(X_1 + X_2 = 2, X_1 X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 1/7$$

de modo que la conjunta buscada es

$Y_1/Y_2$	-1	0	1
-1	0	1/7	0
0	1/7	2/7	0
1	0	2/7	0
2	0	0	1/7

9. Sea  $X, Y \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1)$ . Encuentre la conjunta de  $(X + Y, X - Y)$ .

Este ejercicio tiene sus pillerías y no resulta trivial. Definamos

$$Z = X + Y$$

$$W = X - Y$$

Las inversas son

$$\begin{aligned} X &= \frac{W + Z}{2} \\ Y &= \frac{Z - W}{2} \end{aligned}$$

el jacobiano es

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z} \frac{w+z}{2} & \frac{\partial}{\partial z} \frac{z-w}{2} \\ \frac{\partial}{\partial w} \frac{w+z}{2} & \frac{\partial}{\partial w} \frac{z-w}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = |-1/2| = 1/2$$

encontremos el recorrido. Primero despejemos  $w$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 0 &< x < 1 \\ 0 &< \frac{w+z}{2} < 1 \\ 0 &< w+z < 2 \\ -z &< w < 2-z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &< y < 1 \\ 0 &< \frac{z-w}{2} < 1 \\ 0 &< z-w < 2 \\ -z &< -w < 2-z \\ z &> w > z-2 \end{aligned}$$

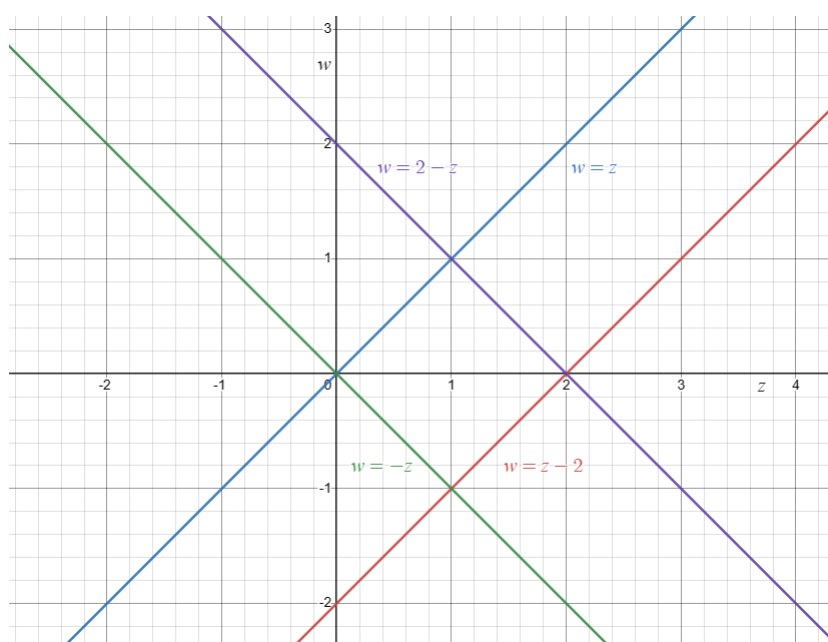
ahora para encontrar el recorrido de  $z$  hacemos esto

$$\begin{aligned} 0 &< x < 1 \\ y &< x+y < 1+x \\ 0 &< y < z < 1+x \\ 0 &< z < 1+x \end{aligned}$$

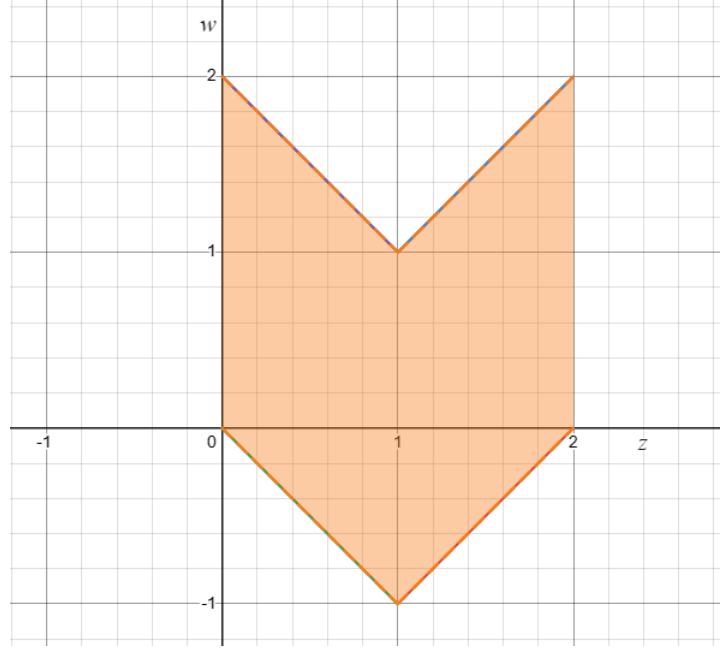
Ahora, note que la variable aleatoria  $U = 1 + X$  es una uniforme en el intervalo  $(1, 2)$ , por lo cual es a lo mas 2, de modo que

$$\begin{aligned} 0 &< z < 1+x \\ 0 &< z < 1+x < 2 \\ 0 &< z < 2 \end{aligned}$$

ahora para encontrar todo podemos gráficar



Considerando  $z \in (0, 2)$  y  $w \in (-z, 2 - z)$ ,  $w \in (z - 2, z)$  el recorrido corresponde a a



Recordando que no hay que evaluar las inversas en la uniforme, tenemos que la conjunta pedida se escribe como

$$f_{Z,W}(z, w) = \begin{cases} 1/2 & -z < w < 2 - z, 0 < z < 1 \\ 1/2 & z - 2 < w < z, 1 < z < 2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

10. Sea  $R \sim \text{Exp}(1/2)$  y  $\theta \sim U(0, 2\pi)$  independientes. Defina las transformaciones

$$\begin{aligned} X &= \cos(\theta)\sqrt{R} \\ Y &= \sin(\theta)\sqrt{R} \end{aligned}$$

Demuestre que la conjunta de estas transformaciones corresponde a una normal bivariada independiente.

Para este ejercicio utilizaremos una definición alternativa del jacobiano, la cual dice que podemos calcular el jacobiano sin calcular las inversas de las transformaciones  $Z(X, Y)$  y  $W(X, Y)$  vía

$$|J| = |J^*|^{-1}$$

con

$$|J^*| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} & \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

en nuestro caso

$$|J^*| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x(\theta, r)}{\partial \theta} & \frac{\partial y(\theta, r)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x(\theta, r)}{\partial r} & \frac{\partial y(\theta, r)}{\partial r} \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned}
 |J^*| &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \cos(\theta) \sqrt{r} & \frac{\partial}{\partial \theta} \sin(\theta) \sqrt{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} \cos(\theta) \sqrt{r} & \frac{\partial}{\partial r} \sin(\theta) \sqrt{r} \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \sqrt{r} & \cos(\theta) \sqrt{r} \\ \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos(\theta) & \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= \left| -\frac{1}{2} (\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) \right| \\
 &= 1/2
 \end{aligned}$$

de modo que

$$|J| = |J^*|^{-1} = (1/2)^{-1} = 2$$

Ahora debemos encontrar las inversas. Pero note que solo debemos buscar la inversa de  $R$ , pues la inversa de  $\theta$  no es necesario, ya que  $\theta$  es uniforme, y no hay que evaluar en nada. Entonces

$$\begin{aligned}
 X &= \cos(\theta) \sqrt{R} \\
 Y &= \sin(\theta) \sqrt{R}
 \end{aligned}$$

elevamos al cuadrado

$$\begin{aligned}
 X^2 &= \cos^2(\theta) R \\
 Y^2 &= \sin^2(\theta) R
 \end{aligned}$$

sumamos hacia abajo

$$\begin{aligned}
 X^2 + Y^2 &= R(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) \\
 \Rightarrow R &= X^2 + Y^2
 \end{aligned}$$

el recorrido es fácil, pues

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq \sin(\theta) \leq 1 \\
 -\sqrt{r} &\leq \sin(\theta) \sqrt{r} \leq \sqrt{r} \\
 0 &\leq |\sin(\theta) \sqrt{r}| \leq \sqrt{r} \\
 0 &\leq |\sin(\theta) \sqrt{r}| \leq \sqrt{r} < \infty \\
 |\sin(\theta) \sqrt{r}| &< \infty \\
 -\infty &< \sin(\theta) \sqrt{r} < \infty \\
 -\infty &< y < \infty
 \end{aligned}$$

y de forma análoga se obtiene que  $-\infty < x < \infty$ . Entonces reemplazamos todo lo necesario en la conjunta

$$\begin{aligned}
 f_{X,Y}(x, y) &= 2 \cdot f_R(x^2 + y^2) f_\theta(\theta(x, y)) \\
 &= 2 \frac{1}{2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \cdot \frac{1}{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}
 \end{aligned}$$

teniendo así que

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}}{2\pi}, \quad -\infty < x, y < \infty$$

donde es fácil ver que se puede factorizar de forma tal que sean dos normales independientes (normales estándar).



11. Sea  $X \sim N(0, 1)$  e  $Y \sim N(0, 1)$  independientes. Demostrar que  $W = \frac{X}{X+Y}$  es Cauchy e identificar sus parámetros.

Como solo nos entregan una transformación, usamos una variable auxiliar conveniente, en este caso podemos tomar  $Z = X + Y$ . Reemplazando  $Z = X + Y$  en  $W$ , y procediendo de forma análoga a todo lo visto, tenemos que

$$X = WZ \quad Y = Z - WZ$$

Haciendo lo necesario se obtiene que  $|J| = |z|$ . Es fácil ver que  $-\infty < w, z < \infty$ . Note que ahora el jacobiano va en valor absoluto, pues tenemos valores negativos y positivos, en los ejemplos anteriores siempre se tomaba la parte positiva ya que el recorrido era positivo.

La conjunta de  $W$  y  $Z$  esta dada por

$$f_{Z,W}(z, w) = |J| f_X(wz) f_Y(z - wz)$$

reemplazamos todo lo necesario

$$\begin{aligned} f_{Z,W}(z, w) &= |z| \frac{e^{-\frac{(wz)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{(z-wz)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \\ &\quad \frac{-z^2 - 2w^2z^2 + 2wz^2}{2} \\ &= |z| \frac{e^{\frac{-z^2(1+2w^2-2w)}{2}}}{2\pi} \end{aligned}$$

Nos es factorizable, por lo cual no son independientes. Entonces

$$f_W(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |z| e^{\frac{-z^2(1+2w^2-2w)}{2}} dz = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\infty} z e^{\frac{-z^2(1+2w^2-2w)}{2}} dz$$

Para esta integral, hacemos

$$u = \frac{-z^2(1+2w^2-2w)}{2} \Rightarrow \frac{du}{1+2w^2-2w} = -z dz$$

Teniendo así

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \frac{1}{\pi(1+2w^2-2w)} \int_{-\infty}^0 e^u du \\ &= \frac{1}{\pi(1+2w^2-2w)} \\ &= \frac{1}{\pi[2(w - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}]} \\ &= \frac{1}{\pi \frac{1}{2} [4(w - \frac{1}{2})^2 + 1]} \\ &= \frac{1}{\pi \frac{1}{2} [(\frac{1}{2})^2 (w - \frac{1}{2})^2 + 1]} \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{2} \left[ \left( \frac{w - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \right)^2 + 1 \right]} \end{aligned}$$

Luego,  $W \sim \text{Cauchy}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

12. Sea  $X, Y \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ . Encuentre la conjunta de las siguientes transformaciones

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_2}, \quad Y_2 = |X_2|$$

Note que la transformación  $Y_2 = |X_2|$  no es inyectiva, por lo cual debemos usar 34. Con

$$\begin{aligned} g_{1,1}(x_1, x_2) = Y_1 = \frac{X_1}{X_2}, \quad Y_2 = g_{2,1}(x_1, x_2) = X_2 \\ g_{1,2}(x_1, x_2) = Y_1 = \frac{X_1}{X_2}, \quad Y_2 = g_{2,2}(x_1, x_2) = -X_2 \end{aligned}$$

haciendo los despejes respectivos tenemos

$$\begin{aligned} h_{1,1} = Y_1 Y_2, \quad h_{1,2} = Y_2 \\ h_{2,1} = -Y_1 Y_2, \quad h_{2,2} = -Y_2 \end{aligned}$$

calculamos los dos jacobianos correspondientes

$$\begin{aligned} |J_1| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} y_1 y_2 & \frac{\partial}{\partial y_1} y_2 \\ \frac{\partial}{\partial y_2} y_1 y_2 & \frac{\partial}{\partial y_2} y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & 0 \\ y_1 & 1 \end{vmatrix} = |y_2| \\ |J_2| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} -y_1 y_2 & \frac{\partial}{\partial y_1} -y_2 \\ \frac{\partial}{\partial y_2} -y_1 y_2 & \frac{\partial}{\partial y_2} -y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -y_2 & 0 \\ -y_1 & -1 \end{vmatrix} = |-y_2| \end{aligned}$$

la conjunta está dada por

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = |y_2| f_{X,Y}(y_1 y_2, y_2) + |-y_2| f_{X,Y}(-y_1 y_2, -y_2)$$

antes de seguir reemplazando, debemos encontrar el recorrido, para así saber si efectivamente aplica o no el valor absoluto. Para  $Y_1$  tenemos

$$\begin{aligned} -\infty &< x_1 < \infty \\ -\infty &< x_1/x_2 < \infty \\ -\infty &< y_1 < \infty \end{aligned}$$

ahora  $Y_2$

$$\begin{aligned} -\infty &< x_2 < \infty \\ |x_2| &< \infty \\ 0 &< y_2 < \infty \end{aligned}$$

como  $y_2 > 0$ , el jacobiano es positivo y son iguales. Entonces

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= |y_2| f_{X,Y}(y_1 y_2, y_2) + |-y_2| f_{X,Y}(-y_1 y_2, -y_2) \\ &= y_2 f_{X,Y}(y_1 y_2, y_2) + y_2 f_{X,Y}(-y_1 y_2, -y_2) \\ &= y_2 f_X(y_1 y_2) f_Y(y_2) + y_2 f_X(-y_1 y_2) f_Y(-y_2) \\ &= y_2 \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(y_1 y_2)^2}{2}} e^{-\frac{(y_2)^2}{2}} + y_2 \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(-y_1 y_2)^2}{2}} e^{-\frac{(-y_2)^2}{2}} \\ &= \frac{y_2}{\pi} e^{-(y_1 y_2)^2} e^{-y_2^2} \\ f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{y_2}{\pi} e^{-(y_1 y_2)^2} e^{-y_2^2}, \quad y_1 \in \mathbb{R}, y_2 > 0 \end{aligned}$$

13. Sean  $U_1, U_2$  y  $U_3$  variables aleatorias independientes, con distribución  $Uniforme[0, 1]$ . Sean  $V_1 = U_1$ ,  $V_2 = U_1 U_2$  y  $V_3 = U_1 U_2 U_3$ . Obtenga la densidad conjunta de  $V_1, V_2$  y  $V_3$  y la marginal de  $V_3$ .

Las inversas son

$$U_1 = V_1, \quad U_2 = \frac{V_2}{V_1}, \quad U_3 = \frac{V_3}{V_2}$$

el jacobiano se calcula como sigue

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial v_1} v_1 & \frac{\partial}{\partial v_1} v_2/v_1 & \frac{\partial}{\partial v_1} v_3/v_2 \\ \frac{\partial}{\partial v_2} v_1 & \frac{\partial}{\partial v_2} v_2/v_1 & \frac{\partial}{\partial v_2} v_3/v_2 \\ \frac{\partial}{\partial v_3} v_1 & \frac{\partial}{\partial v_3} v_2/v_1 & \frac{\partial}{\partial v_3} v_3/v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -v_2/v_1^2 & 0 \\ 0 & 1/v_1 & -v_3/v_2^2 \\ 0 & 0 & 1/v_2 \end{vmatrix} = \left| \frac{1}{v_1 v_2} \right| = \frac{1}{v_1 v_2}$$

ahora el recorrido

$$0 < u_1 < 1$$

$$0 < v_1 < 1$$

$$0 < u_2 < 1$$

$$0 < u_2 u_1 < u_1$$

$$0 < v_2 < u_1$$

$$0 < u_3 < 1$$

$$0 < u_3 u_2 u_1 < u_2 u_1$$

$$0 < v_3 < v_2$$

juntando todo tenemos que

$$0 < v_1 < 1, \quad v_3 < v_2 < v_1$$

lo que implica

$$0 < v_3 < v_2 < v_1 < 1$$

en la conjunta no hay que reemplazar nada, entonces

$$f_{V_1, V_2, V_3}(v_1, v_2, v_3) = \begin{cases} \frac{1}{v_1 v_2} & 0 < v_3 < v_2 < v_1 < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

para obtener la marginal de  $V_3$ , dentemos integrar respecto de  $v_1$  y  $v_2$ , para esto notemos que

$$0 < v_3 < 1, \quad v_2 < v_1 < 1, \quad v_3 < v_2 < 1$$

entonces

$$\begin{aligned} f_{V_3}(v_3) &= \int_{v_3}^1 \int_{v_2}^1 \frac{1}{v_1 v_2} dv_1 dv_2 \\ &= \frac{(\ln(v_3))^2}{2} \end{aligned}$$

así tenemos

$$f_{V_3}(v_3) = \frac{(\ln(v_3))^2}{2}, \quad 0 < v_3 < 1$$

## 4.4 Estadísticos de orden

Para  $n$  variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$ , todas ellas definidas sobre un mismo espacio de probabilidad, defina

$$X_{(k)} = k - \text{ésimo menor de } X_1, \dots, X_n$$

así tenemos

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

El vector aleatorio  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  se llama estadístico de orden, donde  $X_{(k)}$  es el  $k$ -ésimo orden, y los ordenes extremos son

$$X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}, \quad X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$$

Sean  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F$ . Entonces, para  $k = 1, \dots, n$ , se tiene que

$$\begin{aligned} F_{X_{(k)}}(x) &= \sum_{m=1}^k \binom{n}{m} (F(x))^m (1 - F(x))^{n-m} \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)} \int_0^{F(x)} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy \end{aligned}$$

para el caso del mínimo y del máximo tenemos

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - F_X(x)]^n \quad (35)$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F_X(x)]^n \quad (36)$$

Si  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} F$ , entonces la distribución conjunta de  $X_{(1)}$  y  $X_{(n)}$  esta dada por,

$$f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) = \begin{cases} n(n-1)(F(y) - F(x))^{n-2} f(y) f(x) & x < y \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (37)$$

La distribución conjunta de  $X_{(i)}$ ,  $X_{(j)}$ , con  $1 \leq i < j \leq n$ , para el caso continuo está dada por

$$f_{X_{(i)}, X_{(j)}}(u, v) = \frac{n!}{(i-1)!(j-1-i)!(n-j)!} f_X(u) f_X(v) [F_X(u)]^{i-1} [F_X(v) - F_X(u)]^{j-i-1} [1 - F_X(v)]^{n-j}$$

A partir de estos resultados, se define el rango y punto medio respectivamente como

$$R_n = X_{(n)} - X_{(1)}, \quad M_n = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$$

### 4.4.1 Ejemplos

1. Sea  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} U(0, \theta)$ ,  $\theta > 0$ . Encuentre la fdp del mínimo y del máximo. Si  $\theta = 1$ , ¿Que distribución reconoce?

Usando (35) y (36) tenemos que

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= 1 - \left[1 - \frac{x}{\theta}\right]^n \\ \frac{d}{dx} F_{X_{(1)}}(x) &= \frac{n}{\theta} \left[1 - \frac{x}{\theta}\right]^{n-1} \\ \Rightarrow f_{X_{(1)}}(x) &= \frac{n}{\theta} \left[1 - \frac{x}{\theta}\right]^{n-1}, \quad 0 < x < \theta \\ F_{X_{(n)}}(x) &= \left[\frac{x}{\theta}\right]^n \\ \frac{d}{dx} F_{X_{(n)}}(x) &= \frac{n}{\theta} \left[\frac{x}{\theta}\right]^{n-1} \\ \Rightarrow F_{(n)}(x) &= \frac{n}{\theta} \left[\frac{x}{\theta}\right]^{n-1}, \quad 0 < x < \theta \end{aligned}$$

Note que el recorrido, es el mismo que la v.a original. Ahora, si  $\theta = 1$  tenemos que

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1-x)^{n-1}, \quad 0 < x < 1$$

reorganicemos los terminos

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(x) &= n(1-x)^{n-1} \\ &= nx^{1-1}(1-x)^{n-1} \\ &= \frac{x^{1-1}(1-x)^{n-1}}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{x^{1-1}(1-x)^{n-1}}{\frac{\Gamma(n)\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)}} \\ &= \frac{x^{1-1}(1-x)^{n-1}}{B(1, n)} \end{aligned}$$

Luego,  $X_{(1)} \sim \text{Beta}(1, n)$ .

Ahora el máximo

$$f_{X_{(n)}}(x) = nx^{n-1}, \quad 0 < x < 1$$

reorganicemos los terminos

$$\begin{aligned} f_{X_{(n)}}(x) &= nx^{n-1} \\ &= nx^{n-1}(1-x)^{1-1} \\ &= \frac{x^{n-1}(1-x)^{1-1}}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{x^{n-1}(1-x)^{1-n}}{\frac{\Gamma(n)\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)}} \\ &= \frac{x^{n-1}(1-x)^{1-1}}{B(n, 1)} \end{aligned}$$

Luego,  $X_{(n)} \sim \text{Beta}(n, 1)$ .

2. Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(1)$ . Determine la fdp del máximo. Y calcule su esperanza y varianza.

Usando (36), tenemos que

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= [1 - e^{-x}]^n \\ \frac{d}{dx} F_{X_{(n)}}(x) &= n [1 - e^{-x}]^{n-1} e^{-x} \\ \Rightarrow f_{X_{(n)}}(x) &= n [1 - e^{-x}]^{n-1} e^{-x}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Para calcular la esperanza, vamos a usar la formula (25), pero aplicada al mundo continuo. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{(n)}) &= \int_0^\infty 1 - (1 - e^{-x})^n dx \\ &= \int_0^\infty 1 - \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (e^{-x})^j (-1)^{n+j} dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (e^{-x})^j (-1)^{j-1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} \int_0^\infty e^{-xj} dx \\
&= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} \frac{1}{j}
\end{aligned}$$

lamentablemente esta expresión no tiene forma cerrada. Para la varianza utilizaremos la siguiente formula

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^\infty 2x(1 - P(X > x))dx$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^\infty 2x(1 - (1 - e^{-x})^n)dx \\
&\text{hacemos } u = 1 - e^{-x} \\
x &= -\ln(1 - u), dx = (1 - u)^{-1} du \\
&= \int_0^1 -2\ln(1 - u)(1 - u)^n(1 - u)^{-1} du \\
&= -2 \int_0^1 \ln(1 - u)(1 - u)^{n-1} du \\
&= -2 \int_0^1 \ln(1 - u) \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 1^{n-1-j} (-u)^j du \\
&= -2 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \int_0^1 \ln(1 - u)(-u)^j du \\
&= -2 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^1 \ln(1 - u) u^j du \\
&= -2 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^1 \sum_{i=1}^\infty \frac{u^i}{i} u^j du \\
&= 2 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \sum_{i=1}^\infty \frac{(-1)^j}{i} \int_0^1 u^{i+j} du \\
&= 2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^\infty \binom{n-1}{j} \frac{(-1)^j}{i} \frac{1}{i+j+1}
\end{aligned}$$

nuevamente esto no tiene una forma cerrada. Reemplazando todo tenemos que

$$\text{Var}(X_{(n)}) = 2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=1}^\infty \binom{n-1}{j} \frac{(-1)^j}{i} \frac{1}{i+j+1} - \left( \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} \frac{1}{j} \right)^2$$

3. Siguiendo con el ejercicio anterior, calcule el rango y punto medio esperado.

Nos piden  $\mathbb{E}(X_{(n)} - X_{(1)})$  y  $\mathbb{E}\left(\frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}\right)$ . Del ejercicio anterior ya tenemos la esperanza del máximo. Nos falta el mínimo. Entonces

$$\begin{aligned}
F_{X_{(1)}}(x) &= 1 - [1 - (1 - e^{-x})]^n \\
&= 1 - e^{-nx} \\
\frac{d}{dx} F_{X_{(1)}}(x) &= ne^{-nx} \\
f_{X_{(1)}}(x) &= ne^{-nx}, \quad x > 0
\end{aligned}$$

note que  $X_{(1)} \sim \text{Exp}(n)$ , por lo cual  $\mathbb{E}(X_{(1)}) = 1/n$ . Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{(n)} - X_{(1)}) &= \mathbb{E}(X_{(n)}) - \mathbb{E}(X_{(1)}) \\ &= \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} \frac{1}{j} - 1/n\end{aligned}$$

el punto medio esperado

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}\right) &= \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X_{(n)}) + \mathbb{E}(X_{(1)})) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} (-1)^{j-1} \frac{1}{j} + 1/n\right)\end{aligned}$$

4. Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias continuas independientes e idénticamente distribuidas. Defina  $X_{(1)} = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$  y  $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Encuentre la función de distribución acumulada de  $X_{(1)}$  y  $X_{(n)}$ , así como también su función de densidad.

$$\begin{aligned}F_{X_{(1)}}(x) &= P(X_{(1)} \leq x) \\ &= P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x) \\ &= 1 - P(\min(X_1, X_2, \dots, X_n) > x) \\ \text{Si el mínimo es mayor que } x, \\ \text{entonces todos los } x_i \text{ son } > x \\ &= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) \\ &= 1 - [P(X_1 > x)]^n \\ &= 1 - [1 - P(X_1 \leq x)]^n \\ F_{X_{(1)}}(x) &= 1 - [1 - F_{X_1}(x)]^n \\ f_{X_{(1)}}(x) &= n[1 - F_{X_1}(x)]^{n-1} f_{X_1}(x)\end{aligned}$$

Recordar que son iid, por lo cual da igual si se toma  $X_1$  o  $X_i$ . Ahora la distribución del máximo.

$$\begin{aligned}F_{X_{(n)}}(x) &= P(X_{(n)} \leq x) \\ &= P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq x) \\ \text{Si el máximo es menor que } x, \\ \text{entonces todos los } x_i \text{ son } < x \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) \\ F_{X_{(n)}}(x) &= [F_{X_1}(x)]^n \\ f_{X_{(n)}}(x) &= n[F_{X_1}(x)]^{n-1} f_{X_1}(x)\end{aligned}$$

5. Encuentre la conjunta de  $X_{(1)}, X_{(n)}$ . Hint:  $F_{X,Y}(x, y) = F_Y(y) - P(X > x, Y \leq y)$

Para esto pensemos lo siguiente, si  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim F$  son v.a.s continuas iid, entonces al menos un  $X_i$  es mayor o igual al mínimo, y al menos un  $X_i$  es igual o menor al máximo, entonces sea  $X = X_{(1)}$  y  $Y = X_{(n)}$ , usando el Hint tenemos

$$\begin{aligned}F_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) &= F_{X_{(n)}}(y) - P(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y) \\ &= F_{X_{(n)}}(y) - P(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y)\end{aligned}$$

acá tenemos dos casos. Si  $x \leq y$ , entonces el máximo no es mas chico que  $y$ , por lo cual

$$F_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) = F_{X_{(n)}}(y) - 0 = (F(y))^n$$

en otro caso, si  $x < y$ , entonces efectivamente el mínimo es mas grande que  $x$ , y el máximo es mas pequeño que  $y$

$$\begin{aligned}
 F_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) &= F_{X_{(n)}}(y) - P(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y) \\
 &= F_{X_{(n)}}(y) - P(x < X_1 < y, x < X_2 < y, \dots, x < X_n < y) \\
 &= (F(y))^n - \prod_{i=1}^n P(x < X_i < y) \\
 &= (F(y))^n - \prod_{i=1}^n (F(y) - F(x)) \\
 &= (F(y))^n - (F(y) - F(x))^n
 \end{aligned}$$

de modo que la acumulada es

$$F_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) = \begin{cases} (F(y))^n - (F(y) - F(x))^n & x < y \\ (F(y))^n & x \geq y \end{cases}$$

derivando obtenemos

$$f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) = \begin{cases} n(n-1)(F(y) - F(x))^{n-2} f(y) f(x) & x < y \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

6. Suponga una muestra aleatoria de tamaño  $n$  desde  $X \sim U(0, 1)$ . Obtenga la distribución conjunta de  $R$  (rango) y  $M$  (rango medio).

Utilizando el ejercicio anterior y considerando  $X_1, \dots, X_n \sim U(0, 1)$  tenemos que la conjunta de  $X_{(n)}, X_{(1)}$  es

$$f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x_{(1)}, x_{(n)}) = \begin{cases} n(n-1)[x_{(n)} - x_{(1)}]^{n-2} & 0 < x_{(1)} < x_{(n)} < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

recordar que al tener una uniforme(0, 1) tenemos que  $F = F_X(x) = x$  y  $f = f_X(x) = 1$  para  $0 < x < 1$ .

Ahora, nos interesa la transformación  $R = X_{(n)} - X_{(1)}$  y  $M = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$ . Despejamos lo correspondiente

$$\begin{aligned}
 R &= X_{(n)} - X_{(1)} \\
 2M &= X_{(n)} + X_{(1)}
 \end{aligned}$$

Si sumamos hacia abajo y despejamos todo, tenemos que

$$\begin{aligned}
 X_{(n)} &= \frac{R + 2M}{2} \\
 X_{(1)} &= \frac{2M - R}{2}
 \end{aligned}$$

El jacobiano es

$$|J| = \begin{vmatrix} -1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = |1| = 1$$

Ahora necesitamos el recorrido. Sea  $r = X_{(n)} - X_{(1)}$  y  $m = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$ .

Sabemos que  $x_{(n)} < x_{(1)}$ ,  $x_{(n)} < 1$  y  $x_{(1)} > 0$ , entonces

$$\begin{aligned}
 x_{(1)} &> 0 \\
 -x_{(1)} &< 0 \\
 x_{(n)} - x_{(1)} &< x_{(n)} \\
 0 &< x_{(n)} - x_{(1)} < x_{(n)} < 1 \\
 0 &< x_{(n)} - x_{(1)} < 1 \\
 0 &< r < 1
 \end{aligned}$$



Ahora

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{x_{(n)} + x_{(1)}}{2} \\
 &= \frac{x_{(n)} + x_{(1)} + x_{(1)} - x_{(1)}}{2} \\
 &= \frac{x_{(n)} - x_{(1)} + x_{(1)} + x_{(1)}}{2} \\
 &= \frac{r + 2x_{(1)}}{2}
 \end{aligned}$$

recordando lo que tenemos se tiene

$$\begin{aligned}
 0 &< x_{(1)} \\
 0 &< 2x_{(1)} \\
 r &< r + 2x_{(1)} \\
 \frac{r}{2} &< \frac{r + 2x_{(1)}}{2} \\
 \frac{r}{2} &< m
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{x_{(n)} + x_{(1)}}{2} \\
 &= \frac{x_{(n)} + x_{(1)} + x_{(n)} - x_{(n)}}{2} \\
 &= \frac{x_{(n)} + x_{(n)} - (x_{(n)} - x_{(1)})}{2} \\
 &= \frac{2x_{(n)} - r}{2}
 \end{aligned}$$

nuevamente recordando lo que tenemos se tiene

$$\begin{aligned}
 x_{(n)} &< 1 \\
 2x_{(n)} &< 2 \\
 2x_{(n)} - r &< 2 - r \\
 \frac{2x_{(n)} - r}{2} &< \frac{2 - r}{2} \\
 m &< 1 - \frac{r}{2}
 \end{aligned}$$

Teniendo así

$$\frac{r}{2} < m < 1 - \frac{r}{2}$$

Entonces la conjunta esta dada por

$$f_{R,M}(r, m) = \begin{cases} n(n-1) \left[ \frac{r+2m}{2} - \frac{2m-r}{2} \right]^{n-2} & 0 < r < 1, \frac{r}{2} < m < 1 - \frac{r}{2} \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

7. Encuentre la distribución marginal del rango y rango medio en el ejercicio anterior

Para el rango tenemos

$$\begin{aligned}
 f_R(r) &= \int_{r/2}^{1-r/2} n(n-1) \left[ \frac{r+2m}{2} - \frac{2m-r}{2} \right]^{n-2} dm \\
 &= n(n-1)r^{n-2} \int_{r/2}^{1-r/2} dm \\
 &= n(n-1)r^{n-2}(1-r) \\
 &= \frac{r^{(n-1)-1}(1-r)^{2-1}}{\frac{1}{n(n-1)}} \\
 &= \frac{r^{(n-1)-1}(1-r)^{2-1}}{\frac{\Gamma(n-1)\Gamma(2)}{\Gamma(n+1)}} \\
 &= \frac{r^{(n-1)-1}(1-r)^{2-1}}{B(n-1, 2)}
 \end{aligned}$$

Luego,  $R \sim \text{Beta}(n-1, 2)$ .

Para encontrar la marginal de  $M$ , debemos dar vuelta los intervalos, de modo que se tiene

$$f_{R,M}(r, m) = \begin{cases} n(n-1) \left[ \frac{r+2m}{2} - \frac{2m-r}{2} \right]^{n-2} & 0 < m < 1/2, 0 < r < 2m \\ n(n-1) \left[ \frac{r+2m}{2} - \frac{2m-r}{2} \right]^{n-2} & 1/2 < m < 1, 0 < r < 2-2m \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

de modo que si  $m \in (0, 1/2)$  tenemos

$$\begin{aligned}
 f_M(m) &= \int_0^{2m} n(n-1)r^{n-2} dr \\
 &= n(2m)^{n-1}
 \end{aligned}$$

si  $m \in (1/2, 1)$  tenemos

$$\begin{aligned}
 f_M(m) &= \int_0^{2-2m} n(n-1)r^{n-2} dr \\
 &= n(2-2m)^{n-1}
 \end{aligned}$$

tenemos entonces

$$f_M(m) = \begin{cases} n(2m)^{n-1} & 0 < m < 1/2 \\ n(2-2m)^{n-1} & 1/2 < m < 1 \end{cases}$$

8. Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria (iid) de una distribución con fdp dada por

$$f_X(x) = e^{-(x-\theta)}, \quad x > \theta$$

con  $\theta > 0$ . Muestre que  $Y = 2n(X_{(1)} - \theta) \sim \chi_{(2)}^2$ .

Para esto podemos ir desarrollando poco a poco. Primero encontremos la fdp de  $X_{(1)}$ . Podemos usar (35), pero primero debemos encontrar la acumulada, entonces

$$F_X(x) = \int_{\theta}^x e^{-(u-\theta)} du = 1 - e^{\theta-x}$$

reemplazamos

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}} &= 1 - [1 - (1 - e^{\theta-x})]^n \\ &= 1 - e^{n(\theta-x)} \\ f_{X_{(1)}}(x) &= ne^{n(\theta-x)}, x > \theta \end{aligned}$$

ahora si podemos hacer la transformación pedida. Entonces

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(2n(X_{(1)} - \theta) \leq y) \\ &= P\left(X_{(1)} \leq \frac{y + 2n\theta}{2n}\right) \\ F_Y(y) &= F_{X_{(1)}}\left(\frac{y + 2n\theta}{2n}\right) \\ f_Y(y) &= \frac{1}{2n} f_{X_{(1)}}\left(\frac{y + 2n\theta}{2n}\right) \\ &= \frac{n}{2n} e^{n(\theta - \frac{y+2n\theta}{2n})} \\ &= \frac{1}{2} e^{y/2} \\ &= \frac{1}{2^{2/2}\Gamma(2/2)} y^{2/2-1} e^{-y/2} \end{aligned}$$

para el recorrido, tenemos que  $x_{(1)} \in (\theta, \infty)$ , entonces

$$\begin{aligned} Y &= 2n(\theta - \theta) = 0 \\ Y &= \lim_{x_{(1)} \rightarrow \infty} 2n(x_{(1)} - \theta) = \infty \end{aligned}$$

luego,  $y > 0$ . Finalmente tenemos

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^{2/2}\Gamma(2/2)} y^{2/2-1} e^{-y/2}, \quad y > 0$$

donde claramente  $Y \sim \chi_{(2)}^2$ .

9. Sean  $X_1, X_2$  variables aleatorias con fdp conjunta dada por

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2 & 0 < x_1, x_2 < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Sea  $R = X_{(2)} - X_{(1)}$ , donde  $X_{(2)} = \max\{X_1, X_2\}$  y  $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2\}$ . Calcule  $\mathbb{E}(R)$
- (b) Sea  $Y_1 = -\ln(X_1)$ ,  $Y_2 = -\ln(X_2)$ . Encuentre la fdp conjunta de  $Y_1, Y_2$
- (c) En (b), pruebe que  $-\ln(X_1X_2) \sim \text{Gamma}(2, 2)$

Primero calculemos las marginales.

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_0^1 4x_1x_2 dx_2 \\ &= 2x_1 \\ f_{X_2}(x_2) &= \int_0^1 4x_1x_2 dx_1 \\ &= 2x_2 \end{aligned}$$

Notamos que son independientes e idénticamente distribuidas.

- (a) Usamos propiedades de esperanza

$$\mathbb{E}(X_{(2)} - X_{(1)}) = \mathbb{E}(X_{(2)}) - \mathbb{E}(X_{(1)})$$

Esto recae en calcular la esperanza del máximo y del mínimo. Recordando la formula de estos, calculamos directamente. (Por notación usemos  $Z = X_{(1)}$  y  $W = X_{(2)}$ ).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \int_0^1 4z(1-z^2)z dz \\ &= \frac{8}{15} \\ \mathbb{E}(W) &= \int_0^1 4zz^3 dz \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{(2)} - X_{(1)}) &= \mathbb{E}(X_{(2)}) - \mathbb{E}(X_{(1)}) \\ &= \frac{4}{5} - \frac{8}{15} \\ &= \frac{20}{15}\end{aligned}$$

- (b) Como  $X_1, X_2$  son iid, podemos hacer la transformación por separado. Basta con encontrar la distribución de  $Y_1$ , pues la de  $Y_2$  sera la misma, entonces

$$\begin{aligned}P(Y_1 < y_1) &= P(-\ln(X_1) < y_1) \\ &= P(X_1 > e^{-y_1}) \\ &= 1 - P(X_1 < e^{-y_1}) \\ F_{Y_1}(y_1) &= 1 - F_{X_1}(e^{-y_1}) \\ f_{Y_1}(y_1) &= e^{-y_1} f_{X_1}(e^{-y_1}) \\ &= 2e^{-2y_1}\end{aligned}$$

Luego, la conjunta de  $Y_1, Y_2$  es

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 2e^{-y_1} 2e^{-y_2} & 0 < y_1, y_2 < \infty \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Tenemos que  $Y_1, Y_2 \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(2)$ .

- (c) Definamos  $Z = -\ln(X_1 X_2)$ . Note que

$$\begin{aligned}Z &= -\ln(X_1) - \ln(X_2) \\ &= -\ln(X_1) + -\ln(X_2) \\ &= Y_1 + Y_2\end{aligned}$$

Pero  $Y_i \sim \text{Exp}(2)$ , por lo cual  $Z \sim \text{Gamma}(2, 2)$ .

10. Sea  $X_1, X_2 \stackrel{iid}{\sim} \text{Geo}(p)$ , pruebe que el rango y el mínimo son independientes.

Para esto definamos las v.a.s

$$U = \min(X_1, X_2), \quad V = X_1 - X_2$$

es claro que el recorrido de  $U$  es  $u = 1, 2, 3, \dots$ , mientras que el de  $V$  es  $v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . A partir de esto, tenemos tres casos. Vamos analizando cada uno

- $V > 0$ , es decir,  $X_1 > X_2$

En base a esto, note que  $U$  va ir cambiando, en este caso el mínimo es  $X_2$ , entonces

$$\begin{aligned} p_{U,V}(u, v) &= P(U = u, V = v) \\ &= P(X_2 = u, X_1 - X_2 = v) \\ &= P(X_2 = u, X_1 - u = v) \\ &= P(X_2 = u, X_1 = v + u) \\ &= P(X_2 = u)P(X_1 = v + u) \\ &= p(1 - p)^{u-1}p(1 - p)^{v+u-1} \\ &= p^2(1 - p)^{2u+v-2} \end{aligned}$$

- $V < 0$ , es decir,  $X_1 < X_2$

En este caso tenemos que el mínimo es  $X_1$ , entonces

$$\begin{aligned} p_{U,V}(u, v) &= P(U = u, V = v) \\ &= P(X_1 = u, X_1 - X_2 = v) \\ &= P(X_1 = u, u - X_2 = v) \\ &= P(X_1 = u, X_2 = u - v) \\ &= P(X_1 = u)P(X_2 = u - v) \\ &= p(1 - p)^{u-1}p(1 - p)^{u-v-1} \\ &= p^2(1 - p)^{2u-v-2} \end{aligned}$$

- $V = 0$ , esto es que  $X_1 = X_2$ , osea

$$\begin{aligned} p_{U,V}(u, 0) &= P(U = u, V = 0) \\ &= P(X_1 = u, X_2 = u) \\ &= P(X_1 = u)P(X_2 = u) \\ &= p(1 - p)^{u-1}p(1 - p)^{u-1} \\ &= p^2(1 - p)^{2u-2} \end{aligned}$$

teniendo en cuenta todo lo anterior, podemos escribir la conjunta como

$$f_{U,V}(u, v) = p^2(1 - p)^{2u+|v|-2}, \quad u = 1, 2, 3, \dots; v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

note que

$$f_{U,V}(u, v) = p^2(1 - p)^{2u} \cdot (1 - p)^{|v|-2}, \quad u = 1, 2, 3, \dots; v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

luego, como es factorizable, y el producto cartesiano de los recorridos calza, se tiene que  $U, V$  son independientes.

11. Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$  Encuentre la distribución del mínimo.

Usando (35) tenemos

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}} &= n\lambda e^{-\lambda x} (1 - (1 - e^{-\lambda x}))^{n-1} \\ &= n\lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda x(n-1)} \\ f_{X_{(1)}} &= n\lambda e^{-\lambda n x}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Luego,  $X_{(1)} \sim \text{Exp}(n\lambda)$

12. Ahora considere  $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$  y  $X_2 \sim \text{Exp}(\mu)$  independientes. Encuentre la distribución del mínimo.

Para esto procederemos de forma intuitiva, como en el ejercicio 4.

$$\begin{aligned}
 F_{X_{(1)}}(x) &= P(X_{(1)} \leq x) \\
 &= P(\min(X_1, X_2) \leq x) \\
 &= 1 - P(P(\min(X_1, X_2) > x)) \\
 &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \\
 &= 1 - (1 - P(X_1 < x))(1 - P(X_2 < x)) \\
 &= 1 - e^{-\lambda x}e^{-\mu x} \\
 f_{X_{(1)}}(x) &= (\lambda + \mu)e^{-x(\lambda + \mu)}, \quad x > 0
 \end{aligned}$$

Luego,  $X_{(1)} \sim \text{Exp}(\lambda + \mu)$ .

Queda como propuesta para el lector ver el caso general, es decir, encontrar la distribución del mínimo cuando  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Esto es cuando cada v.a tiene un parámetro diferente.

13. Sea  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(1)$ . Muestre que el rango y el mínimo son independientes.

Para esto podemos usar (37), con  $i = 1$  y  $j = n$ , ya que nos interesa el rango y el mínimo. Reemplazando todo lo necesario tenemos que

$$f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) = n(n-1)e^{-x}e^{-y}(e^{-x} - e^{-y})^{n-2}, \quad 0 < x < y < \infty$$

Nos interesa las transformaciones

$$U = X_{(n)} - X_{(1)}, \quad V = X_{(1)}$$

las inversas son

$$\begin{aligned}
 X_{(1)} &= V \\
 X_{(n)} &= U + V
 \end{aligned}$$

el jacobiano es  $|J| = 1$ . El lector puede darse cuenta fácilmente de que

$$U \in (0, \infty), \quad V \in (0, \infty)$$

reemplazando todo en la conjunta tenemos

$$\begin{aligned}
 f_{U,V}(u, v) &= f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(v, u + v) \\
 &= n(n-1)e^{-v}e^{-(u+v)}(e^{-v} - e^{-(u+v)})^{n-2} \\
 &= n(n-1)e^{-2v-u}e^{-v(n-2)}(1 - e^{-u})^{n-2} \\
 &= n(n-1)e^{-u-vn}(1 - e^{-u})^{n-2} \\
 f_{U,V}(u, v) &= (n-1)e^{-u}(1 - e^{-u})^{n-2}ne^{-vn}, \quad u, v > 0
 \end{aligned}$$

calculamos las marginales

$$\begin{aligned}
 f_U(u) &= \int_0^\infty (n-1)e^{-u}(1 - e^{-u})^{n-2}ne^{-vn}dv = (n-1)e^{-u}(1 - e^{-u})^{n-2} \\
 f_V(v) &= \int_0^\infty (n-1)e^{-u}(1 - e^{-u})^{n-2}ne^{-vn}du = ne^{-nv}
 \end{aligned}$$

donde claramente se tiene que  $f_{U,V}(u, v) = f_U(u)f_V(v)$ , por lo cual son independientes.

## 4.5 Distribuciones condicionales

Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio discreto o continuo, con fmp (c.d.) o fdp (c.c.) conjunta  $f_{X,Y}(x, y)$  y fmp's (c.d.) o fdp's (c.c.) marginales  $f_X(x)$  y  $f_Y(y)$ . La fmp (c.d.) o fdp (c.c.) condicional de  $Y$  dado  $X = x$  se define como

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} & f_X(x) > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

de manera análoga se tiene que la condicional de  $X$  dado  $Y = y$  es

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} & f_Y(y) > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

en algunos casos se utiliza la notación  $f(y|x)$  o  $f(x|y)$  respectivamente.

En base a la definición se tiene que

- $f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X=x}(y)f_X(x)$
- $f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y=y}(x)f_Y(y)$
- Si  $X, Y$  son independientes, entonces  $f_{Y|X=x}(y) = f_Y(y)$  y  $f_{X|Y=y}(x) = f_X(x)$
- $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_x \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_x \mathbb{P}(Y|X = x)\mathbb{P}(X = x)$
- $\mathbb{P}(X = x) = \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_y \mathbb{P}(X|Y = y)\mathbb{P}(Y = y)$

La esperanza condicional de  $Y$  dado  $X = x$ , provisto que exista, se define como

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \begin{cases} \sum_{y \in \mathbb{R}} y p_{Y|X}(x, y) & \text{caso discreto} \\ \int_{\text{Rec}(Y)} y p_{Y|X}(x, y) dy & \text{caso continuo} \end{cases} \quad (38)$$

en general tenemos

$$\mathbb{E}(g(Y)|X = x) = \begin{cases} \sum_{y \in \mathbb{R}} g(y) p_{Y|X}(x, y) & \text{caso discreto} \\ \int_{\text{Rec}(Y)} g(y) p_{Y|X}(x, y) dy & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Una propiedad muy importante es la esperanza iterada, la cual se define como

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y = y)]$$

La esperanza condicional posee (condicionalmente) todas las propiedades de la esperanza ordinaria, ya que es la media de la distribución condicional. A continuación se enuncian sólo algunas de estas propiedades

- $\mathbb{E}(aY + b|X = x) = a\mathbb{E}(Y|X = x) + b$
- $\mathbb{E}(g(X, Y)|X = x) = \mathbb{E}(g(x, Y)|X = x)$
- $\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}[g(X)\mathbb{E}(h(Y)|X)]$
- Si  $X, Y$  son independientes entonces  $\mathbb{E}(X|Y = y) = \mathbb{E}(X)$  y  $\mathbb{E}(Y|X = x) = \mathbb{E}(Y)$

Tal como la media condicional, la varianza condicional es simplemente la varianza de la distribución condicional como se define a continuación; por ende también satisface todas las propiedades de la varianza ordinaria

$$\text{Var}(Y|X=x) = \begin{cases} \sum_{y \in \mathbb{R}} (y - \mathbb{E}(Y|X=x))^2 p_{Y|X}(x, y) & \text{caso discreto} \\ \int_{\text{Rec}(Y)} (y - \mathbb{E}(Y|X=x))^2 p_{Y|X}(x, y) dy & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Otra propiedad importante es la varianza iterada, la cual se define como

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[\text{Var}(X|Y=y)] + \text{Var}[\mathbb{E}(X|Y=y)]$$

#### 4.5.1 Ejemplos

1. Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias continuas con fdp conjunta dada por,

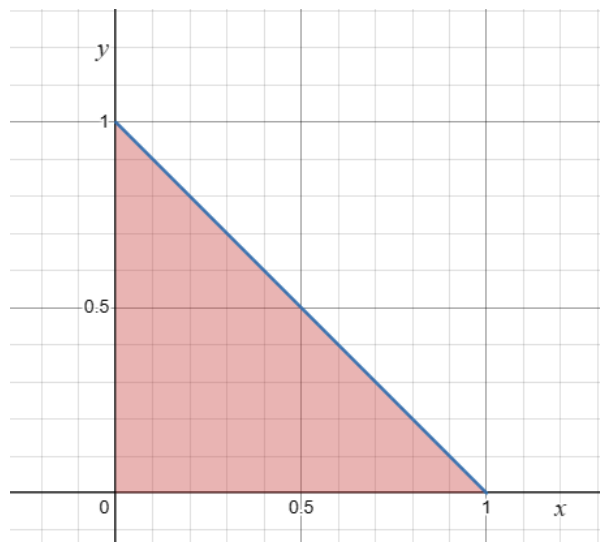
$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2 & x, y > 0; x + y < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Encuentre las distribuciones condicionales  $Y|X=x$  y  $X|Y=y$ .

Para esto es muy importante tener cuidado con los recorridos. Primero calculemos  $f_{Y|X=x}(y)$ . Para esto necesitamos  $f_X(x)$ , pues

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

de la conjunta tenemos que  $x + y < 1$ , es decir,  $y < 1 - x$  y  $x, y > 0$ , esta región corresponde a



así tenemos  $x \in (0, 1)$  y  $y \in (0, 1 - x)$ , de modo que la marginal de  $X$  es

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2 dy = 2(1-x)$$

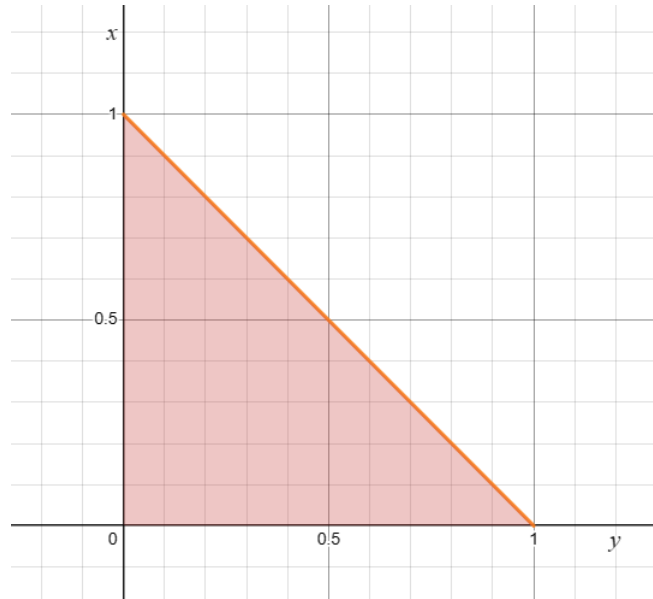
entonces la condicional es

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{2}{2(1-x)} = \frac{1}{1-x}, \quad 0 < y < 1-x$$

acá  $x \in (0, 1)$ . Note que  $Y|X=x \sim U(0, 1-x)$ .



Para la condicional  $f_{X|Y=y}(x)$  necesitamos la marginal de  $Y$ . Podemos graficar nuevamente el recorrido, teniendo



teniendo así  $y \in (0, 1)$  y  $x \in (0, 1 - y)$ , de modo que la marginal de  $y$  es

$$f_Y(y) = \int_0^{1-y} 2dx = 2(1-y)$$

la condicional es

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{2}{2(1-y)} = \frac{1}{1-y}, \quad 0 < x < 1-y$$

acá  $y \in (0, 1)$ . Note que  $X|Y = y \sim U(0, 1-y)$ .

- En los casos anteriores calcule las esperanzas de las distribuciones condicionales.

Note que como ya sabemos su distribución esto es fácil. Usando este argumento tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X = x) &= \frac{1-x}{2} \\ \mathbb{E}(X|Y = y) &= \frac{1-y}{2} \end{aligned}$$

usando la definición (38) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X = x) &= \int_0^{1-x} y \frac{1}{1-x} dy = \frac{1-x}{2} \\ \mathbb{E}(X|Y = y) &= \int_0^{1-y} x \frac{1}{1-y} dy = \frac{1-y}{2} \end{aligned}$$

- Sea  $X|Y = y \sim \text{Bin}(y, p)$ . Determine  $E(X|Y = y)$  y  $\text{Var}(X|Y = y)$

Como sabemos que  $X|Y = y \sim \text{Bin}(y, p)$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|Y = y) &= yp \\ \text{Var}(X|Y = y) &= yp(1-p) \end{aligned}$$

4. Muestre que  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y = y)]$ .

Para esto vamos a usar un par de trucos. Vamos a demostrarlo en el caso continuo.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x) f_Y(y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X|Y = y) f_Y(y) dy \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Y = y)]\end{aligned}$$

5. Sea  $X|P \sim \text{Bin}(n, P)$  y  $P \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ . Calcular la esperanza y varianza de  $X$ .

Para esto usamos esperanza y varianza iterada.

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|P)] = \mathbb{E}(nP) = n\mathbb{E}(P) = n \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

ahora la varianza

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \mathbb{E}(\text{Var}(X|P)) + \text{Var}(\mathbb{E}(X|P)) \\ &= \mathbb{E}(nP(1-P)) + \text{Var}(nP) \\ &= \mathbb{E}(nP - nP^2) + n^2 \text{Var}(P) \\ &= n(\mathbb{E}(P) - \mathbb{E}(P^2)) + n^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\ &= n \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - [\text{Var}(P) + \mathbb{E}(P)^2] \right) + n^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \\ &= n \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} - \left( \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)^2 \right) + n^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}\end{aligned}$$

6. Sea,  $X, Y$  variables aleatorias. Suponga que se sabe que  $Y|X = x \sim \text{Bin}(x, p)$  y  $X \sim P(\lambda)$ . Muestre que

$$\frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \sqrt{p}$$

Solo buscamos lo necesario.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) \\ &= \mathbb{E}(pX) \\ &= p\mathbb{E}(X) \\ &= p\lambda \\ &= \lambda p\end{aligned}$$

ahora la varianza

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= \mathbb{E}(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y|X)) \\ &= \mathbb{E}(Xp(1-p)) + \text{Var}(Xp) \\ &= p(1-p)\mathbb{E}(X) + p^2\lambda \\ &= p(1-p)\lambda + p^2\lambda \\ &= \lambda p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X)) \\
&= \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|X)) \\
&= \mathbb{E}(XXp) \\
&= p\mathbb{E}(X^2) \\
&= p(\text{Var}(X) + E(X)^2) \\
&= p(\lambda + \lambda^2)
\end{aligned}$$

Ahora reemplazamos todo.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} &= \frac{p(\lambda + \lambda^2) - \lambda\lambda p}{\sqrt{\lambda(\lambda p)}} \\
&= \frac{p\lambda + p\lambda^2 - \lambda^2 p}{\sqrt{\lambda^2 p}} \\
&= \frac{p\lambda}{\lambda\sqrt{p}} \\
&= \frac{p}{\sqrt{p}} \\
&= \sqrt{p}
\end{aligned}$$

7. El número de personas ( $N$ ) por día que entra a un supermercado distribuye  $P(\lambda)$ . Sean  $X_1, \dots, X_N$  las cantidades gastadas por cada una de las  $N$  personas que ingreso al supermercado durante un determinado día, las cuales distribuyen  $U(0, \theta)$ ,  $\theta > 0$ . Suponga que  $N$  y  $X_1, \dots, X_N$  son variables aleatorias independientes. Encuentre la media y la varianza del ingreso total del supermercado durante un día.

Definamos  $Y$  la v.a del ingreso total del supermercado durante un día. Note que el gasto de una persona corresponde a  $X_i$ , y como nos interesa los gastos de las  $N$  personas, debemos sumar. Además note que esta suma esta condicionada según el numero de clientes que llego al supermercado. Esto es

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i$$

con  $N \sim P(\lambda)$  y  $X_i \sim U(0, \theta)$ . Ahora calculamos lo pedido

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|N = n)) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N X_i | N = n\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\right) \\
&= \mathbb{E}(n\mathbb{E}(X_1)) \\
&= \mathbb{E}(n\theta/2) \\
&= \frac{\theta}{2}\mathbb{E}(N) \\
&= \frac{\theta\lambda}{2}
\end{aligned}$$

note que teníamos  $N = n$ , por eso la suma llega hasta  $n$ , y luego pasa a ser una v.a.

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y) &= \mathbb{E}(\text{Var}(Y|N=n)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y|N=n)) \\
&= \mathbb{E} \left( \text{Var} \left( \sum_{i=1}^N X_i | N=n \right) \right) + \text{Var} \left( n \frac{\theta}{2} \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) \right) + \text{Var} \left( n \frac{\theta}{2} \right) \\
&= \mathbb{E}(n \text{Var}(X_1)) + \frac{\theta^2}{2^2} \text{Var}(N) \\
&= \mathbb{E} \left( n \frac{\theta^2}{12} \right) + \frac{\theta^2}{2^2} \text{Var}(N) \\
&= \frac{\theta^2}{12} \mathbb{E}(N) + \frac{\theta^2}{2^2} \text{Var}(N) \\
&= \frac{\theta^2}{12} \lambda + \frac{\theta^2}{2^2} \lambda
\end{aligned}$$

8. Sea  $X, Y \sim \mathcal{N}_2 \left( \begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho \\ \rho & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \right)$ . Encuentre la distribución condicional de  $Y|X=x$ .

Este ejemplo puede salir directo usando la definición de distribución condicional, pero vamos a proceder de una manera un tanto mas sencilla, pero truquero. Es posible mostrar que existen  $Z_1, Z_2$  normales estandar v.a independientes tales que

$$\begin{aligned}
X &= \sigma_X Z_1 + \mu_X \\
Y &= \sigma_Y (\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2) + \mu_Y
\end{aligned}$$

teniendo esto en consideración, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y|X=x) &= \mathbb{E}(\sigma_Y(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2) + \mu_Y | X=x) \\
&= \mathbb{E} \left( \sigma_Y \left( \rho \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} + \sqrt{1-\rho^2} Z_2 \right) + \mu_Y | X=x \right) \\
&= \mathbb{E} \left( \sigma_Y \left( \rho \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} + \sqrt{1-\rho^2} Z_2 \right) + \mu_Y \right) \\
&= \sigma_Y \rho \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} + \sqrt{1-\rho^2} \mathbb{E}(Z_2) + \mu_Y \\
&= \sigma_Y \rho \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} + \mu_Y
\end{aligned}$$

ahora la varianza

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y|X=x) &= \text{Var}(\sigma_Y(\rho Z_1 + \sqrt{1-\rho^2} Z_2) + \mu_Y | X=x) \\
&= \text{Var} \left( \sigma_Y \left( \rho \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} + \sqrt{1-\rho^2} Z_2 \right) + \mu_Y | X=x \right) \\
&= \text{Var} \left( \sigma_Y \left( \rho \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} + \sqrt{1-\rho^2} Z_2 \right) + \mu_Y \right) \\
&= \sigma_Y^2 (\sqrt{1-\rho^2})^2 \text{Var}(Z_2) \\
&= \sigma_Y^2 (1-\rho^2)
\end{aligned}$$

Luego, tenemos que  $Y|X=x \sim \mathcal{N}(\sigma_Y \rho \frac{x - \mu_X}{\sigma_X} + \mu_Y, \sigma_Y^2 (1-\rho^2))$

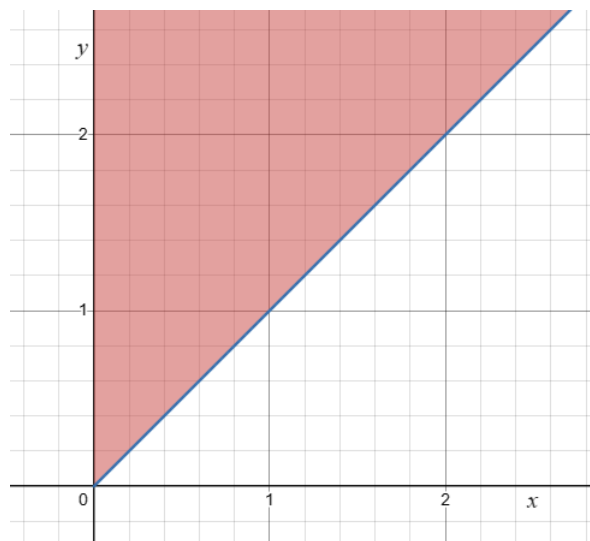
9. Sean  $X, Y$  variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-y} & x > 0, y > x \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Calcule  $P(X > 1 | Y = 1.5)$
- (b) Calcule  $\mathbb{E}(e^{-X})$
- (c) Calcule  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{-X} | Y))$
- (a) Para esto debemos encontrar la condicional  $f(X | Y = 1.5)$ , entonces

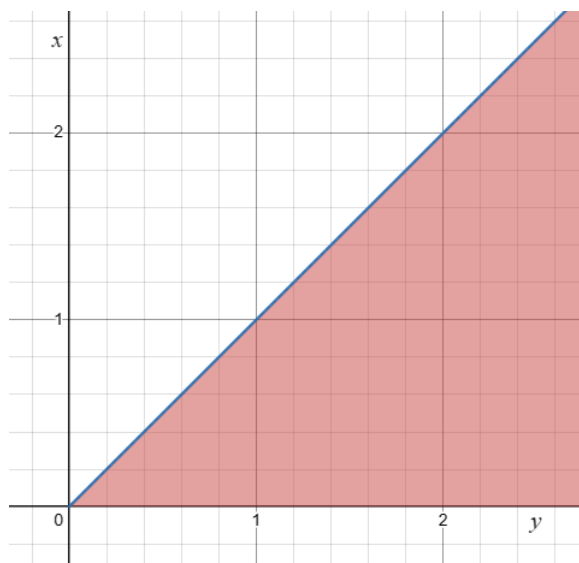
$$f(X | Y = 1.5) = \frac{f_{X,Y}(x, 1.5)}{f_Y(1.5)}$$

Note que para encontrar  $f_Y(y)$  debemos voltear el intervalo, pues el recorrido original tenemos  $y > x$ , El recorrido conjunto es



Calculamos la inversa de  $y = x$ , obteniendo  $x = y$ .

Dibujamos la nueva región



De modo que  $y \in (0, \infty)$  y  $x \in (0, y)$ , entonces

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^y 2e^{-x-y} dx \\ &= 2(-e^{-2y} + e^{-y}) \end{aligned}$$

Luego,

$$f_Y(y) = 2(-e^{-2y} + e^{-y}), 0 < y < \infty$$

Ahora si podemos calcular la condicional, entonces

$$\begin{aligned} f(X|Y=1.5) &= \frac{f_{X,Y}(x, 1.5)}{f_Y(1.5)} \\ &= \frac{2e^{-x-1.5}}{2(-e^{-2 \cdot 1.5} + e^{-1.5})} \\ &= \frac{e^{-x-1.5}}{(-e^{-3} + e^{-1.5})} \end{aligned}$$

Tenemos entonces

$$f(X|Y=1.5) = \frac{e^{-x-1.5}}{(-e^{-3} + e^{-1.5})}, \quad 0 < x < 1.5$$

Ahora si podemos calcular lo pedido

$$\begin{aligned} P(X > 1|Y=1.5) &= \int_1^{1.5} \frac{e^{-x-1.5}}{(-e^{-3} + e^{-1.5})} dx \\ &= 0.18629 \end{aligned}$$

(b) Esto se puede hacer de dos maneras.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-X}) &= \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-x} 2e^{-x-y} dy dx \\ &= \int_0^\infty 2e^{-2x} e^{-x} dx \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-3x} dx \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

La otra manera es marginalizando  $X$ , de modo que al tener  $f_X(x)$  calcular la esperanza es directo. Queda como propuesto chequear esto.

(c) Note que por esperanza iterada tenemos

$$\mathbb{E}(e^{-X}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{-X}|Y))$$

Por lo cual

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{-X}|Y)) = \frac{2}{3}$$

Otra manera es calcular de adentro hacia afuera

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-X}|Y) &= \int_x^\infty e^{-x} f(X|Y) dx \\ &= \int_0^y e^{-x} \frac{2e^{-x-y}}{2(-e^{-2y} + e^{-y})} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{2y} - 1}{2e^y(e^y - 1)} \\
&= \frac{e^y + 1}{2e^y} \\
\mathbb{E}(e^{-X}|Y) &= \frac{e^y + 1}{2e^y} \\
\mathbb{E}(\mathbb{E}(e^{-X}|Y)) &= \mathbb{E}\left(\frac{e^Y + 1}{2e^Y}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{e^Y + 1}{2e^Y}\right) \\
&= \int_0^\infty \frac{e^y + 1}{2e^y} 2(-e^{-2y} + e^{-y}) dy \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

10. Sea  $X_1, X_2$  variables aleatorias tales que

$$X_1 \sim N(0, 1) \text{ y } X_2|X_1 = x_1 \sim N(\rho x_1, 1 - \rho^2), \text{ donde } |\rho| \leq 1$$

Encuentre la media y varianza de  $X_2$ . ¿Se puede determinar la correlación entre  $X_1$  y  $X_2$ ?

La esperanza

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_2) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_2|X_1)] \\
&= \mathbb{E}(\rho X_1) \\
&= \rho \mathbb{E}(X_1) \\
&= \rho \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ahora la varianza

$$\begin{aligned}
Var(X_2) &= Var(\mathbb{E}(X_2|X_1) + \mathbb{E}(Var(X_2|X_1))) \\
&= Var(\rho X_1) + \mathbb{E}(1 - \rho^2) \\
&= \rho^2 Var(X_1) + 1 - \rho^2 \\
&= \rho^2 \cdot 1 + 1 - \rho^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ahora veamos si se puede determinar la correlación. Para esto basta con encontrar la covarianza, pues las varianzas ya las tenemos.

$$\begin{aligned}
Cov(X_1, X_2) &= \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_1 X_2|X_1)) - 0 \cdot 0 \\
&= \mathbb{E}(X_1 \mathbb{E}(X_2|X_1)) \\
&= \mathbb{E}(X_1 \rho X_1) \\
&= \mathbb{E}(\rho X_1^2) \\
&= \rho \mathbb{E}(X_1^2) \\
&= \rho (Var(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2) \\
&= \rho \cdot 1 \\
&= \rho
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si se puede determinar la correlación entre  $X_1$  y  $X_2$ .

11. Sea  $X|Y \sim \text{Bin}(n, Y)$ , donde  $Y \sim U[0, 1]$ . Encuentre como distribuye  $X$ .

Esto se calcula como sigue

$$\begin{aligned}
 f_{X|Y}(x, y) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \\
 f_Y(y)f_{X|Y}(x, y) &= f_{X,Y}(x, y) \\
 f_{X,Y}(x, y) &= f_Y(y)f_{X|Y}(x, y) \\
 \int_{\text{Rec}(Y)} f_{X,Y}(x, y) dy &= \int_{\text{Rec}(Y)} f_Y(y)f_{X|Y}(x, y) dy \\
 f_X(x) &= \int_0^1 1 \cdot \binom{n}{x} y^x (1-y)^{n-x} dy \\
 &= \binom{n}{x} \int_0^1 y^x (1-y)^{n-x} dy \\
 &= \binom{n}{x} \int_0^1 y^{(x+1)-1} (1-y)^{(n-x+1)-1} dy \\
 &= \binom{n}{x} B(x+1, n-x+1), x = 0, 1, 2, \dots, n \\
 &= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(x+1+n-x+1)} \\
 &= \frac{n!}{x!(n-x)!} \frac{(x+1-1)!(n-x+1-1)!}{(n+2-1)!} \\
 &= \frac{1}{n+1}, x = 0, 1, \dots, n \\
 X &\sim \text{Unif}\{0, 1, \dots, n\}
 \end{aligned}$$

12. Sea  $X, Y$  variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente. Calcule  $P(X > Y)$ .

Esto se puede calcular de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 P(X > Y|Y = y) &= \frac{P(X > Y, Y = y)}{P(Y = y)} \\
 P(X > Y, Y = y) &= P(X > Y|Y = y)P(Y = y) \\
 \int_{\text{Rec}(Y)} P(X > Y, Y = y) dy &= \int_{\text{Rec}(Y)} P(X > Y|Y = y)P(Y = y) dy \\
 P(X > Y) &= \int_0^\infty P(X > Y|Y = y)f_Y(y) dy \\
 X, Y &\text{ son independientes} \\
 &= \int_0^\infty P(X > y)f_Y(y) dy \\
 &= \int_0^\infty e^{-y\lambda} \mu e^{-\mu y} dy \\
 &= \mu \int_0^\infty e^{-y(\lambda+\mu)} dy \\
 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \int_0^\infty (\lambda + \mu) e^{-y(\lambda+\mu)} dy \\
 &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}
 \end{aligned}$$



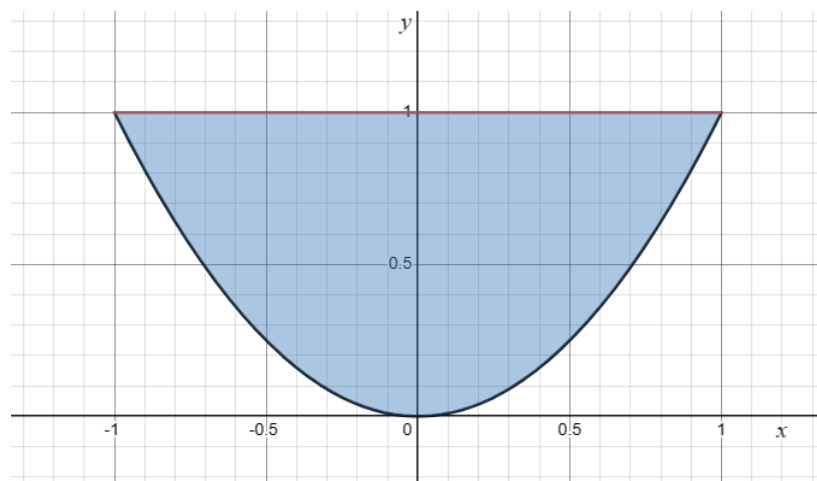
13. Suponga que la cantidad de tornillos fundidos por una fabrica  $X$  y la temperatura a cual se funden  $Y$  es una variable aleatoria bivariada con distribución conjunta

$$f(x, y) = \frac{21}{4}x^2y, \quad \text{si } x^2 \leq y \leq 1$$

- (a) Calcule las distribuciones marginales de los tornillos fundidos y la temperatura a cual se funden
- (b) Encuentre la distribución de la cantidad de tornillos fundidos dado que la temperatura a la cual se funden es fija
- (c) Calcule  $\mathbb{E}(X^2|Y = 1/2)$
- (a) Nos piden encontrar  $f_X(x)$  y  $f_Y(y)$ . Primero dibujemos el recorrido de las v.a.s. Note que tenemos

$$x^2 \leq y \leq 1$$

Podemos dibujar las dos funciones, y así encontrar el recorrido de  $X$ .



de acá tenemos que  $x \in [-1, 1]$ . Entonces note que el intervalo numérico es  $x$ , por lo cual primero podemos calcular  $f_X(x)$ , ya que para calcular  $f_Y(y)$  debemos tener el intervalo numérico en  $y$ . Note que calcularemos  $f_X(x)$ , por lo cual debemos integrar respecto de  $y$ , e  $y$  va entre las funciones dibujadas. Entonces

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{x^2}^1 \frac{21}{4}x^2y dy \\ &= \frac{21}{8}x^2(1 - x^4) \end{aligned}$$

Luego,

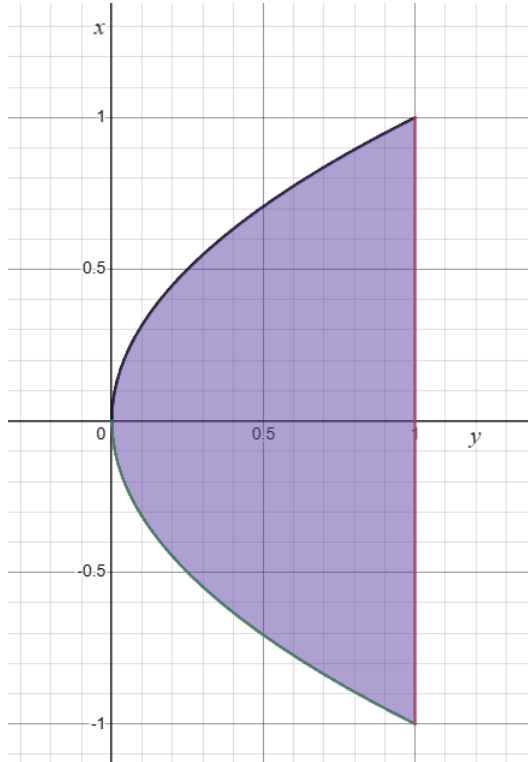
$$f_X(x) = \frac{21}{8}x^2(1 - x^4), \quad \text{si } -1 \leq x \leq 1$$

Ahora, queremos encontrar  $f_Y(y)$ , para esto  $x$  debe variar entre funciones, lo que es equivalente a dar vuelta el intervalo anterior (el de la imagen).

Para hacer esto calculamos las inversas de las funciones

$$\begin{aligned} y = 1 &\Rightarrow y = 1 \\ y = x^2 &\Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \end{aligned}$$

Dibujamos estas funciones, y recordamos el área del dibujo anterior, de modo que ahora tenemos los ejes volteados de la siguiente manera



De acá tenemos que  $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$  e  $y \in [0, 1]$ . Entonces

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4} x^2 y dx \\ &= \frac{7}{2} y^{5/2} \end{aligned}$$

Luego,

$$f_Y(y) = \frac{7}{2} y^{5/2}, \quad \text{si } 0 \leq y \leq 1$$

(b) Nos piden  $f(X|Y = y)$ . Por definición

$$\begin{aligned} f(X|Y = y) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{\frac{21}{4} x^2 y}{\frac{7}{2} y^{5/2}} \\ &= \frac{3x^2}{2y^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Luego,

$$f(X|Y = y) = \frac{3x^2}{2y^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{si } -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$$

(c) Podemos utilizar lo anterior

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2|Y = 1/2) &= \int x^2 f(X|Y = 1/2) dx \\ &= \int_{-\sqrt{1/2}}^{\sqrt{1/2}} x^2 \frac{3x^2}{2 \cdot (1/2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

14. El número de bacterias  $Y$  por  $m^3$  en un estanque decantador sigue una distribución de  $Poisson(X)$ , donde  $X$  corresponde a la tasa de descarga de un emisario. Registros históricos indican que la tasa,  $X$ , se comporta de manera aleatoria regida por una distribución  $Gamma(k, \nu)$  con  $\nu > 0$  y  $k \in \mathbb{N}$ .

- (a) Determine la función de distribución de probabilidad del número de bacterias por  $m^3$ . ¿Qué modelo reconoce? Identifique sus parámetros
- (b) Determine la distribución condicional de la tasa de descarga condicional al número de bacterias por  $m^3$ . ¿Qué modelo reconoce? Identifique sus parámetros

Del enunciado tenemos que  $Y|X \sim P(X)$ , con  $X \sim Gamma(k, \nu)$

- (a) Esto se calcula como sigue

$$\begin{aligned}
 f_{Y|X}(x, y) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} \\
 f_{X,Y}(x, y) &= f_{Y|X}(x, y) f_Y(y) \\
 \int_{Rec(X)} f_{X,Y}(x, y) dx &= \int_{Rec(X)} f_{Y|X}(x, y) f_Y(y) dx \\
 P(Y = y) &= \int_0^\infty \frac{x^y e^{-x}}{y!} \frac{\nu^k x^{k-1} e^{-\nu x}}{\Gamma(k)} dx \\
 &= \frac{\nu^k}{y! \Gamma(k)} \int_0^\infty x^{y+k-1} e^{-x(\nu+1)} dx \\
 &= \frac{\nu^k}{y! \Gamma(k)} \Gamma(y+k) \frac{1}{(\nu+1)^{y+k}} \\
 &= \frac{\nu^k (y+k-1)!}{y! (k-1)!} \frac{1}{(\nu+1)^{y+k}} \\
 &= \binom{y+k-1}{k-1} \frac{\nu^k}{(\nu+1)^{y+k}} \\
 &= \binom{y+k-1}{k-1} \left( \frac{\nu}{\nu+1} \right)^k \left( \frac{1}{\nu+1} \right)^y \\
 &= \binom{y+k-1}{k-1} \left( \frac{\nu}{\nu+1} \right)^k \left( 1 - \frac{\nu}{\nu+1} \right)^y
 \end{aligned}$$

Luego,  $Y \sim BinNeg\left(k, \frac{\nu}{\nu+1}\right)$

- (b) Para esto solo reemplazamos

$$\begin{aligned}
 f_{X|Y}(x, y) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \\
 &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \frac{f_X(x)}{f_X(x)} \\
 &= \frac{f_{Y|X}(x, y) f_X(x)}{f_Y(y)} \\
 &= \frac{\frac{e^{-x} x^y}{y!} \frac{\nu^k x^{k-1} e^{-\nu x}}{\Gamma(k)}}{\binom{y+k-1}{k-1} \left( \frac{\nu}{\nu+1} \right)^k \left( 1 - \frac{\nu}{\nu+1} \right)^y} \\
 &= \frac{\nu^k x^{y+k-1} e^{-x(\nu+1)}}{\Gamma(y+k)} \\
 &= \frac{(\nu+1)^{y+k} x^{y+k-1} e^{-x(\nu+1)}}{\Gamma(y+k)}
 \end{aligned}$$

Luego,  $X|Y = y \sim Gamma(y+k, \nu+1)$

## 4.6 Ejercicios del capítulo

1. Sea  $X, Y$  v.a con función de densidad dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = cxy^3, \quad 0 < x < 1, 0 < y < x^{1/4}$$

Encuentre el valor de  $c$ , la distribución condicional de  $X|Y = y$  y su fda.

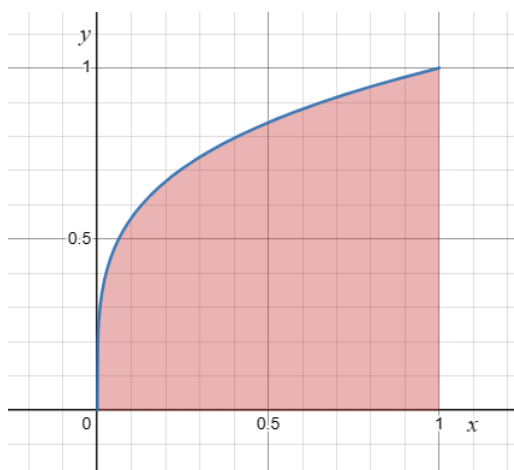
El valor de  $c$  es fácil, pues buscamos que integre 1 en todo el recorrido. Entonces

$$\int_0^1 \int_0^{x^{1/4}} cxy^3 dy dx = \frac{c}{12}$$

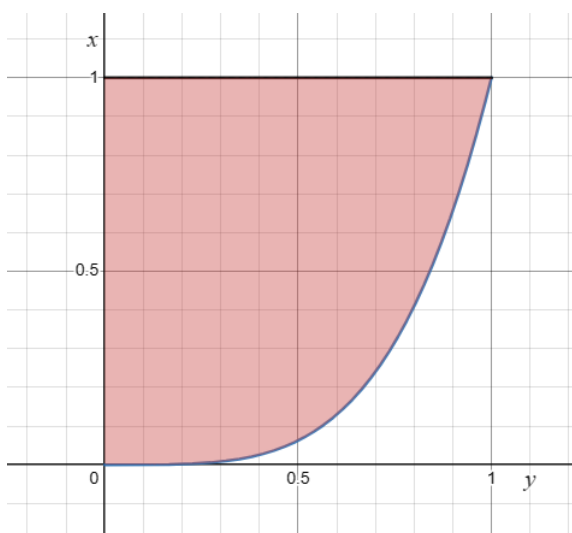
como esto debe ser igual a 1 tenemos que

$$c = 12$$

Para la condicional, note que necesitamos la marginal de  $Y$ , pero originalmente  $Y$  va entre funciones, por lo cual debemos arreglar esto. El recorrido original es



cambiando el orden tenemos que  $y \in (0, 1)$  y  $x \in (y^4, 1)$ . Esto es



Calculamos la marginal de  $Y$

$$f_Y(y) = \int_{y^4}^1 12xy^3 dx$$

$$f_Y(y) = -6y^3(y^8 - 1), \quad 0 < y < 1$$

Ahora la condicional

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{12xy^3}{-6y^3(y^8 - 1)}$$

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{2x}{1 - y^8}, \quad y^4 < x < 1$$

Finalmente la acumulada

$$F_{X|Y=y}(x) = \int_{y^4}^x \frac{2u}{1 - y^8} du$$

$$= \frac{x^2 - y^8}{1 - y^8}$$

2. Sea  $X, Y$  dos v.a.s tales que  $Y|X = x \sim \text{Exp}(x)$  y  $X \sim \text{Exp}(2)$ .

- (a) Encuentre la fdp de  $Y$
- (b) Calcule  $P(Y \leq X)$
- (c) Calcule la generadora de momentos de  $Z = XY$  y deduzca su distribución
- (a) Esto se obtiene de la siguiente manera

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_{Y|X=x}(y)$$

$$\int_{\text{Rec}(X)} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_{\text{Rec}(X)} f_X(x)f_{Y|X=x}(y) dx$$

$$f_Y(y) = \int_0^\infty 2e^{-2x}xe^{-xy} dx$$

$$= 2 \int_0^\infty xe^{-x(2+y)} dx$$

$$= 2 \frac{1}{2+y} \int_0^\infty x(2+y)e^{-x(2+y)} dx$$

$$= 2 \frac{1}{2+y} \mathbb{E}(\text{Exp}(2+y))$$

$$= 2 \frac{1}{2+y} \frac{1}{(2+y)}$$

$$= \frac{2}{(2+y)^2}$$

así tenemos que

$$f_Y(y) = \frac{2}{(2+y)^2}, \quad y > 0$$

- (b) Esto es directo

$$P(Y \leq X) = \int_0^\infty \int_0^x 2xe^{-x(y+2)} dy dx$$

$$= \int_0^\infty 2e^{-2x} - 2e^{-x^2-2x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - 2 \int_0^\infty e^{-x^2-2x} dx \\
&= 1 - 2e \int_0^\infty e^{-x^2-2x-1} dx \\
&= 1 - 2e \int_0^\infty e^{-(x+1)^2} dx \\
&= 1 - 2e \int_0^\infty e^{-\frac{(x+1)^2}{2/2}} dx \\
&= 1 - 2e \int_0^\infty e^{-\frac{(x+1)^2}{2 \cdot (1/\sqrt{2})^2}} dx \\
&= 1 - 2e \sqrt{2\pi(1/\sqrt{2})^2} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi(1/\sqrt{2})^2}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2 \cdot (1/\sqrt{2})^2}} dx \\
&= 1 - 2e\sqrt{\pi}P(W > 0), \quad W \sim N(-1, (1/\sqrt{2})^2) \\
&= 1 - 2e\sqrt{\pi}P\left(\frac{W - (-1)}{1/\sqrt{2}} > \frac{0 - (-1)}{1/\sqrt{2}}\right) \\
&= 1 - 2e\sqrt{\pi}(1 - \Phi(\sqrt{2})) \\
&= 0.2421278
\end{aligned}$$

(c) Para esto vamos a usar esperanza condicional.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{tXY}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}[e^{tXY}|X = x]) \\
&= \mathbb{E}(\mathbb{E}[e^{txY}]) \\
&= \mathbb{E}(M_Y(tx)) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{x}{x - tx}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\frac{1}{1 - t}\right) \\
&= \frac{1}{1 - t}
\end{aligned}$$

esta ultima es la función generadora de momentos de una exponencial de parámetro 1, por lo cual

$$XY \sim \text{Exp}(1)$$

3. Datos de la Encuesta Nacional de Salud, muestran que en Hombres, la edad  $X$  (en años) y el nivel de colesterol  $Y$  (en  $mg/dL$ ) se comportan según una

$$\mathcal{N}_2(\mu_X = 42, \mu_Y = 191, \sigma_X^2 = 182, \sigma_Y^2 = 452, \rho = 0.36)$$

¿Cual es la probabilidad que un Hombre de 40 años tenga un nivel de colesterol mayor a los 190  $mg/dL$ ?

Nos piden  $P(Y > 190|X = 40)$ . Por el ejemplo (8) tenemos

$$Y|X = 40 \sim N(189.2, 1762.56)$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P(Y > 190|X = 40) &= 1 - P(Y \leq 190|X = 40) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{190 - 189.2}{\sqrt{1762.56}}\right) \\
&= 0.5019005
\end{aligned}$$

4. Según el informe publicado por la Superintendencia de Pensiones, el 87% de los afiliados al sistema de AFP han retirado el 10% de sus fondos de pensiones. El senado el segundo retiro de 10% AFP. Al consultarle a un experto en encuestas, este señala que la intención de un afiliado a realizar el segundo retiro, es una variable aleatoria  $Y$ , cuya distribución varía dependiendo de si retiro o no en la primera instancia. Mas específicamente, establece que si  $X$  es una variable aleatoria Bernoulli, que representa si el afiliado realizó o no el primer retiro del 10% de AFP, entonces la densidad de  $Y$  condicionada al valor  $X = x$ , puede ser modelada por

$$f_{Y|X}(x, y) = (x + 1)(x + 2)y^x(1 - y), \quad 0 \leq y \leq 1$$

- (a) Si un afiliado realizó el primer retiro del 10%. Calcule la probabilidad de que la intención de realizar un segundo retiro sea mayor a un 80%.
- (b) Calcule el valor esperado de  $Y$

Tenemos que  $X$  es Bernoulli, en este caso es un si, si el afiliado realizó el primer retiro ( $x = 1$ ), y un no, si no realizó el primer retiro ( $x = 0$ ).

- (a) Nos piden  $P(Y > 0.8|X = 1)$ . Reemplazando con  $x = 1$  en la condicional, tenemos que

$$\begin{aligned} P(Y > 0.8|X = 1) &= \int_{0.8}^1 (1 + 1)(1 + 2)y(1 - y)dy \\ &= 0.104 \end{aligned}$$

- (b) Usamos esperanza iterada

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$$

Calculamos lo de adentro primero

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X) &= \int_0^1 y(x + 1)(x + 2)y^x(1 - y)dy \\ &= (x + 1)(x + 2) \int_0^1 y^{x+1}(1 - y)dy \\ &= (x + 1)(x + 2) \int_0^1 y^{(x+2)-1}(1 - y)^{2-1}dy \\ &= (x + 1)(x + 2)B(x + 2, 2) \\ &= (x + 1)(x + 2) \frac{\Gamma(x + 2)\Gamma(2)}{\Gamma(x + 4)} \\ &= \frac{x + 1}{x + 3} \end{aligned}$$

Ahora, del enunciado tenemos que  $X \sim \text{Bernoulli}(0.87)$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{X + 1}{X + 3}\right) \\ &= \sum_{x=0}^1 \frac{x + 1}{x + 3} (0.87)^x (1 - 0.87)^{x-1} \\ &= 0.355 \end{aligned}$$

5. Sea  $p$  ( $0 \leq p \leq 1$ ) la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda al aire. Sea  $X$  el número de caras en  $n$  lanzamientos independientes de esta moneda. Dado  $X = x$ , la misma moneda se lanza  $n$  veces en forma independiente. Sea  $Y$  el número de caras obtenidas en este segundo proceso, y sea  $Z$  el número (total) de caras obtenidas en ambos procesos.

Obtenga la distribución del número total de caras al final de este experimento.

Sea  $X$  e  $Y$  el número de caras obtenidas en el primer y segundo lanzamiento respectivamente. En base al enunciado tenemos que  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  y  $Y|X = x \sim \text{Bin}(n - x, p)$ . Lo anterior pues en el primer lanzamiento, de las  $n$  monedas,  $x$  salieron cara, y luego nos quedan  $n - x$  que volvemos a lanzar en el segundo proceso. Podemos calcular lo pedido de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 p_Z(z) &= P(Z = z) \\
 &= P(X + Y = z) \\
 &= P(Y = z - x) \\
 &= \sum_{k=0}^z P(X = k, Y = z - k) \\
 &= \sum_{k=0}^z P(X = k, Y = z - k) \frac{P(X = k)}{P(X = k)} \\
 &= \sum_{k=0}^z P(Y = z - k | X = k) P(X = k) \\
 &= \sum_{k=0}^z \binom{n-k}{z-k} p^{z-k} (1-p)^{n-z} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \binom{n}{z} p^z (1-p)^{2n-z} \sum_{k=0}^z \binom{z}{k} (1-p)^{-k} \\
 &= \vdots \\
 &= \binom{n}{z} (p(2-p))^z ((1-p)^2)^{n-z}
 \end{aligned}$$

Luego,  $Z \sim \text{Bin}(n, p(2-p))$

6. Sea  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ . Defina las siguientes v.as

$$W = \sum_{i=1}^n X_i, \quad Z = \sum_{i=1}^{n-1} e^{-X_i \lambda}, \quad \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1} - X_i$$

Encuentre la esperanza de cada una de las v.as.

Como son iid esto es fácil.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(W) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) \\
 &= \mathbb{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\
 &= n\mathbb{E}(X_1) \\
 &= n \frac{1}{\lambda} \\
 &= \frac{n}{\lambda}
 \end{aligned}$$

recuerde que al ser igualmente destruidas, todas tienen la misma esperanza.



$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n e^{-X_i \lambda} \right)$$

Para esto vamos a usar dos cosas. La primera es un teorema, el cual trata de que si  $X_1, \dots, X_n$  son independientes, entonces cualquier transformación  $g(X_1), \dots, g(X_n)$  también es independiente. Usando esto, podemos encontrar la distribución de  $Y_i = e^{-X_i}$ . Entonces

$$\begin{aligned} P(Y_i \leq y) &= P(e^{-X_i \lambda} \leq y) \\ &= P(X_i \geq -\ln(y)/\lambda) \\ &= 1 - P(X_i \leq -\ln(y)/\lambda) \\ f_Y(y) &= \frac{\lambda}{y\lambda} e^{\lambda \cdot \frac{\ln(y)}{\lambda}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

teniendo así  $Y_i \sim U(0, 1)$ . Ahora si calculamos lo pedido

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n e^{-X_i \lambda} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n Y_i \right) \\ &= n\mathbb{E}(Y_1) \\ &= \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Para la ultima, podemos expandir la suma

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1} - X_i \\ &= \frac{1}{n} (X_2 - X_1 + X_3 - X_2 + \dots + X_{n-1} - X_{n-2} + X_n - X_{n-1}) \\ &= \frac{1}{n} (X_n - X_1) \end{aligned}$$

aplicamos esperanza

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{X}) &= \mathbb{E} \left( \frac{1}{n} (X_n - X_1) \right) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(X_n - X_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

7. Encuentre la fdp de  $Z = \prod_{i=1}^n X_i$ , si  $X_i \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1)$ . Hint:  $\ln()$

Para esto vamos a utilizar un par de trucos y el hint, ya que de forma directa resulta muy complejo.

$$\begin{aligned} Z &= X_1 X_2 X_3 \cdots X_n \\ -\ln(Z) &= -\ln(X_1 X_2 X_3 \cdots X_n) \\ -\ln(Z) &= -\ln(X_1) - \ln(X_2) - \ln(X_3) - \cdots - \ln(X_n) \\ -\ln(Z) &= -\ln(X_1) + -\ln(X_2) + -\ln(X_3) + \cdots + -\ln(X_n) \end{aligned}$$

Ahora recordamos que en el ejercicio (27) se demostró que si  $X \sim U(0, 1)$ , entonces  $Y = -\ln(X) \sim \text{Exp}(1)$ . De modo que lo anterior se reduce a una suma de exponenciales de parámetro  $\lambda = 1$ . Sea  $Y_i = -\ln(X_i)$ , se tiene:

$$-\ln(Z) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$$

Pero ya demostramos en 13 que la suma de  $n$  exponenciales de parámetro  $\lambda$  es Gamma de parámetros  $n, \lambda$ . Por lo cual

$$-\ln(Z) \sim \text{Gamma}(n, 1)$$

Ahora para revertir el logaritmo y así obtener la transformación de interés, tomamos la transformación  $e^{-(-\ln(Z))}$ .

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) \\ &= P(e^{-(-\ln(Z))} \leq \ln(z)) \\ &= P(-\ln(Z) \geq -\ln(z)) \\ &= 1 - f_{-\ln(Z)}(-\ln(z)) \\ f_Z(z) &= \frac{1}{z} f_{-\ln(Z)}(-\ln(z)) \\ &= \frac{1}{z} \frac{(-\ln(z))^{n-1} e^{-(-\ln(z))}}{\Gamma(n)} \\ &= \frac{1}{z} \frac{(-\ln(z))^{n-1} z}{\Gamma(n)} \\ \Rightarrow f_Z(z) &= \frac{(-\ln(z))^{n-1}}{\Gamma(n)} \cdot I(0 < x < 1) \end{aligned}$$

8. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con distribución  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ . Encuentre como distribuye  $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ .

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t) \\ &= e^{\mu_1 t + t^2 \sigma_1^2 / 2} e^{\mu_2 t + t^2 \sigma_2^2 / 2} \cdots e^{\mu_n t + t^2 \sigma_n^2 / 2} \\ &= e^{\mu_1 t + t^2 \sigma_1^2 / 2 + \mu_2 t + t^2 \sigma_2^2 / 2 + \cdots + \mu_n t + t^2 \sigma_n^2 / 2} \\ &= e^{t \sum_{i=1}^n \mu_i + t^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 / 2} \end{aligned}$$

Se tiene que  $Z \sim N\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$

9. Sea  $X$  e  $Y$  variables aleatorias con función generadora de momentos conjunta dada por

$$M_{X,Y}(t, s) = e^{\frac{1}{2}(t^2 + 2\rho ts + s^2)}, (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

donde  $|\rho| < 1$ .

(a) Pruebe que  $\mathbb{E}(XY) = \rho$

(b) Obtenga las funciones generadoras de momentos marginales de  $X$  e  $Y$

(c) Pruebe que  $X$  e  $Y$  son independientes si y solo si  $\rho = 0$

(a)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} (M_{X,Y}(t, s)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left( (\rho t + s) e^{\frac{1}{2}(t^2 + 2\rho ts + s^2)} \right) \\ &= \rho e^{\frac{1}{2}(t^2 + 2\rho ts + s^2)} + (\rho t + s)(t + 2\rho s) e^{\frac{1}{2}(t^2 + 2\rho ts + s^2)} \Big|_{(t,s)=(0,0)} \\ &= \rho\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}M_X(t) &= M_{X,Y}(t, s) \Big|_{s=0} \\ &= e^{\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_Y(s) &= M_{X,Y}(t, s) \Big|_{t=0} \\ &= e^{\frac{s^2}{2}}\end{aligned}$$

Se tiene que  $X, Y \sim N(0, 1)$ .

(c) Vamos con la demostración

- Si  $X$  e  $Y$  independientes  $\Rightarrow \rho = 0$

Si  $X$  e  $Y$  son independientes, entonces podemos factorizar la generadora de momentos marginal de forma tal que

$$\begin{aligned}M_{X,Y}(t, s) &= M_X(t)M_Y(s) \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} e^{\frac{s^2}{2}} \\ &= e^{\frac{t^2}{2} + 0 + \frac{s^2}{2}} \\ &\Rightarrow \rho = 0\end{aligned}$$

- Si  $\rho = 0 \Rightarrow$  entonces  $X$  e  $Y$  son independientes

Si  $\rho = 0$  nos permite hacer lo siguiente

$$\begin{aligned}M_{X,Y}(t, s) &= e^{\frac{t^2}{2} + \frac{s^2}{2}} \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} e^{\frac{s^2}{2}} \\ &= M_X(t)M_Y(s)\end{aligned}$$

Así  $X$  e  $Y$  son independientes  $\iff \rho = 0$

10. Sean  $n$  cintas de transporte cuya vida útil es una variable aleatoria  $U(0, 1)$ . Si las  $n$  cintas son i.i.d ¿Cuál es la distribución del tiempo hasta que falle la primera cinta?

Nos interesa saber la distribución del mínimo de todas las variables. Usando (35) tenemos

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(x) &= n(1-x)^{n-1} \\ &= nx^{1-1}(1-x)^{n-1} \\ &= \frac{x^{1-1}(1-x)^{n-1}}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{x^{1-1}(1-x)^{n-1}}{\frac{\Gamma(n)\Gamma(1)}{\Gamma(n+1)}} \\ &= \frac{x^{1-1}(1-x)^{n-1}}{B(1, n)} \end{aligned}$$

Luego, la distribución del tiempo hasta que falle la primera cinta es  $Beta(1, n)$

11. Suponga que  $X$  e  $Y$  distribuyen conjuntamente de manera  $Multinomial(n, p_X, p_Y)$ . Calcule la correlación entre  $(aX)$  y  $(bY)$ .

Sabemos que si  $X$  e  $Y$  distribuyen conjuntamente  $Multinomial(n, p_X, p_Y)$  tenemos que

- $X \sim Bin(n, p_X)$
- $Y \sim Bin(n, p_Y)$
- $X + Y = n$
- $p_X + p_Y = 1$

Para calcular la correlación ( $\rho$ ) debemos calcular  $Cov(aX, bY)$ , entonces

$$Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$$

Calculamos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Var(X + Y) &= Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y) \\ Var(X + Y) &= np_X(1 - p_X) + np_Y(1 - p_Y) + 2Cov(X, Y) \\ n(1 - p_X - p_Y)(p_X + p_Y) &= np_X(1 - p_X) + np_Y(1 - p_Y) + 2Cov(X, Y) \\ -2np_Xp_Y &= 2Cov(X, Y) \\ \Rightarrow abCov(X, Y) &= -np_Xp_Yab \end{aligned}$$

Notar que  $Var(X + Y) = Var(Z)$ , donde  $Z \sim Bin(n, p_X + p_Y)$ , pues es la suma de dos binomiales.

Ahora reemplazamos todo

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{-np_Xp_Yab}{\sqrt{na^2p_X(1 - p_X)nb^2p_Y(1 - p_Y)}} \\ &= \frac{-p_Xp_Yab}{|a||b|\sqrt{p_X(1 - p_X)p_Y(1 - p_Y)}} \\ \rho &= \frac{-ab}{|a||b|}\sqrt{\frac{p_Xp_Y}{(1 - p_X)(1 - p_Y)}} \end{aligned}$$

12. Sea  $X_i \stackrel{iid}{\sim} \text{Bern}(p)$ . Defina las v.as

$$T = X_1 X_2, \quad S = \sum_{i=1}^n X_i$$

Encuentre  $P(T = 1 | S = s)$ .

Primero, sabemos que  $S \sim \text{Bin}(n, p)$ . Entonces

$$\begin{aligned} P(T = 1 | S = s) &= \frac{P(X_1 X_2 = 1, S = s)}{P(S = s)} \\ &= \frac{P(X_1 X_2 = 1, \sum_{i=1}^n X_i = s)}{P(\sum_{i=1}^n X_i = s)} \\ &= \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1, \sum_{i=1}^n X_i = s)}{\sum_{i=1}^n X_i = s} \\ &= \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1, \sum_{i=1}^n X_i - X_1 - X_2 = s - 1 - 1)}{P(\sum_{i=1}^n X_i = s)} \\ &= \frac{P(X_1 = 1, X_2 = 1, \sum_{i=3}^n X_i = s - 2)}{P(\sum_{i=1}^n X_i = s)} \end{aligned}$$

la suma no depende de  $X_1, X_2$

$$= \frac{P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(\sum_{i=3}^n X_i = s - 2)}{P(\sum_{i=1}^n X_i = s)}$$

la suma de la derecha es  $\text{Bin}(n - 2, p)$

$$\begin{aligned} &= \frac{p^2 \binom{n-2}{s-2} p^{s-2} (1-p)^{n-s}}{\binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}} \\ &= \frac{\binom{n-2}{s-2}}{\binom{n}{s}} \end{aligned}$$

13. Sea  $G$  una partición de  $B$ , un evento de interés. Defina la variable aleatoria

$$I_{\{G=i\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = i \\ 0 & \omega \neq i \end{cases}$$

Para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Entonces sabemos que

$$P(B|G) = \sum_{i=1}^n P(B|G = i) I_{\{G=i\}}$$

Encuentre  $\mathbb{E}(P(B|G))$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(P(B|G)) &= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n P(B|G = i) I_{\{G=i\}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B|G = i) \mathbb{E}(I_{\{G=i\}}) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B|G = i) P(G = i) \\ &= P(B) \end{aligned}$$

14. Sea  $X, Y$  v.as independientes. Demuestre que  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ .

Para esto es solo usar la definición de independencia.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \right) dx \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \right) \\ &= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

15. Sean  $X_1, X_2$  y  $X_3$  variables aleatorias independientes cada una con la misma densidad

$$f_X(x) = 5x^4, \quad 0 < x < 1$$

- (a) Encuentre el vector de medias y la matriz de varianza-covarianza de  $(X_1, X_2, X_3)$ .  
 (b) Encuentre la fdp condicional de  $(X_1, X_2)$  dado  $X_3 = x_3$ .  
 (c) Encuentre la fdp y la función de distribución de  $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$   
 (a) Como son iid basta con calcular una esperanza.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1) &= \int_0^1 x \cdot 5x^4 dx \\ &= 5/6\end{aligned}$$

nuevamente como son *iid* tenemos covarianza 0, por lo cual solo calculamos las varianzas respectivas.

$$\begin{aligned}Var(X_1) &= \int_0^1 (x - 5/6)^2 5x^4 dx \\ &= 5/252\end{aligned}$$

así tenemos que

$$\mu = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 5/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 5/252 & 0 & 0 \\ 0 & 5/252 & 0 \\ 0 & 0 & 5/252 \end{pmatrix}$$

- (b) Esto es directo.

$$f_{X_1, X_2 | X_3 = x_3}(x_1, x_2) = \frac{5^3 x_1^4 x_2^4 x_3^4}{5x_3^4} = 25x_1^4 x_2^4$$

- (c) Primero encontremos la acumulada de  $X$

$$F_X(x) = \int_0^x 5u^4 du = x^5$$

ahora usamos (36).

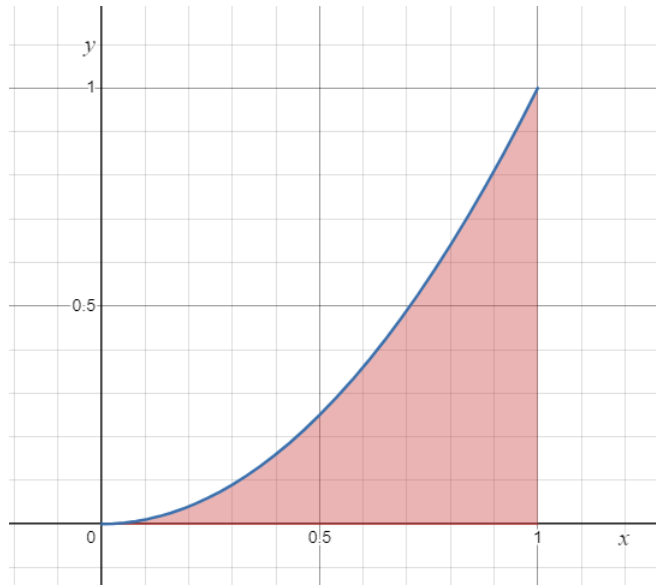
$$\begin{aligned}F_Y(y) &= (y^5)^3 = y^{15} \\ f_Y(y) &= 15y^{14}, \quad 0 < y < 1\end{aligned}$$

16. Suponga que  $(X, Y)$  es un vector aleatorio absolutamente continuo, cuya función densidad de probabilidad conjunta esta dada por:

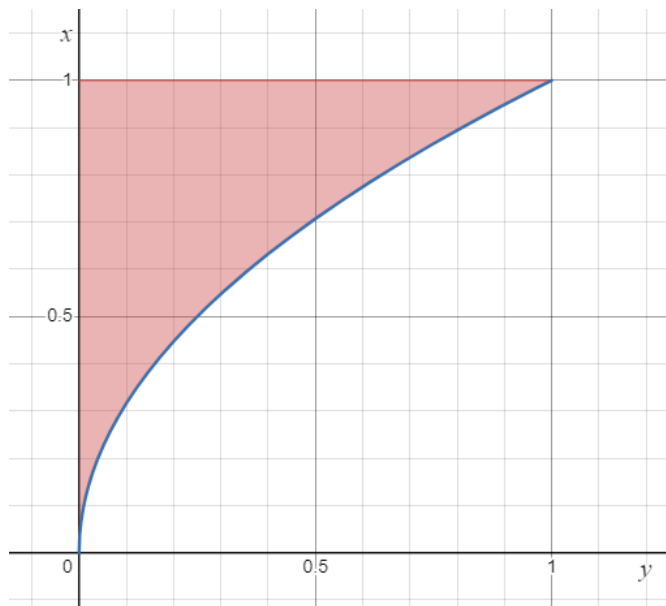
$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 6xy + 5y & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \notin D \end{cases}$$

con  $D = \{(x, y); 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ .

- (a) Encuentre la función densidad de probabilidad marginal de  $Y$
- (b) Obtenga la función de distribución acumulada  $F_{X,Y}$  evaluada en un punto  $(x_0, y_0)$  cuando:
- $(x_0, y_0) \in D$
  - $0 \leq x_0 \leq 1, y_0 > x_0^2$
  - $x_0 > 1, y_0 > 1$
- (a) Para esto debemos re escribir el recorrido, ya que  $y$  no está en un intervalo numérico. Originalmente tenemos



re escribiendo el intervalo tenemos que  $y \in (0, 1)$  y  $x \in (\sqrt{y}, 1)$ . Esto corresponde a

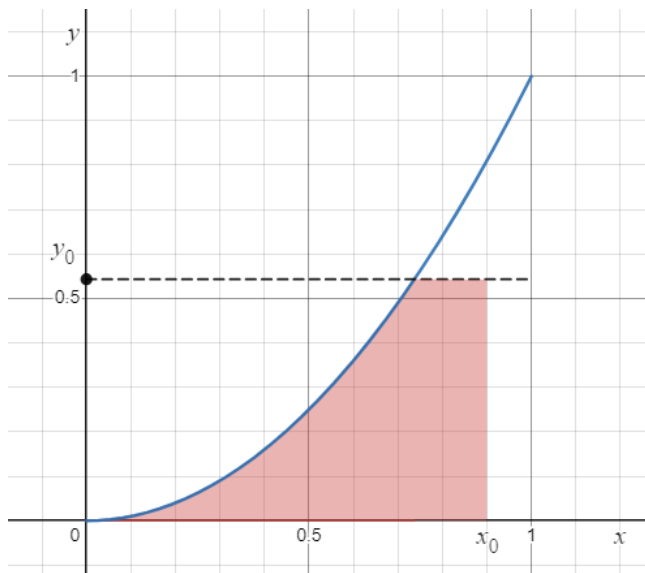


Ahora si podemos calcular la marginal de  $Y$ .

$$f_Y(y) = \int_{\sqrt{y}}^1 6xy + 5y dx$$

$$f_Y(y) = 3y(1 - y) + 5y(1 - \sqrt{y}), \quad 0 < y < 1$$

- (b) i. Cuando  $(x_0, y_0) \in D$  hay que tener cuidado. Es útil ver lo que nos piden mediante un gráfico



entonces la acumulada es

$$F_{X,Y}(x_0, y_0) = \int_0^{\sqrt{y_0}} \int_0^{x^2} 6xy + 5y dy dx + \int_{\sqrt{y_0}}^{x_0} \int_0^{y_0} 6xy + 5y dy dx$$

- ii. Acá tenemos

$$F_{X,Y}(x_0, y_0) = \int_0^{x_0} \int_0^{x^2} 6xy + 5y dy dx$$

- iii. Es fácil ver que

$$F_{X,Y}(x_0, y_0) = 1$$

17. Sea  $X_1, X_2$  variables aleatorias con distribución doble exponencial estándar. Esto es

$$f_X(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Encuentre la distribución de  $Y = |X_1| + |X_2|$ .

Hay varias maneras de hacer esto. Una de ellas es encontrar la transformación individual de  $|X_i|$  y reconocer la distribución, o usar propiedades de generadora de momentos. Vamos a proceder mediante esta ultima.

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{|X_1|+|X_2|}(t) \\ &= \mathbb{E}(e^{t(|X_1|+|X_2|)}) \\ &= \mathbb{E}(e^{\sharp X_1 + \sharp X_2}) \\ &= \mathbb{E}(e^{\sharp X_1} e^{\sharp X_2}) \\ &= \mathbb{E}(e^{\sharp X_1}) \mathbb{E}(e^{\sharp X_2}) \\ &= M_{|X_1|}(t) M_{|X_2|}(t) \end{aligned}$$

como tienen la misma distribución basta con calcular una generadora de momentos.



$$\begin{aligned}
M_{|X|}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-|x|}}{2} dx \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^0 e^{-xt} e^x dx + \int_0^{\infty} e^{xt} e^{-x} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^0 e^{x(1-t)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(1-t)} dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1-t} \right) \\
&= \frac{1}{1-t}
\end{aligned}$$

ahora reemplazamos en las generadoras de momentos

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= M_{|X_1|}(t) M_{|X_2|}(t) \\
&= \frac{1}{1-t} \frac{1}{1-t} \\
&= \left( \frac{1}{1-t} \right)^2
\end{aligned}$$

Tenemos que  $Y \sim \text{Gamma}(2, 1)$ .

18. Considere una placa rectangular, cuyo largo ( $X$ ) y ancho ( $Y$ ) son v.a. con función de densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k(x+y) & 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Muestre que  $k = 1/3$ . ¿Son el largo y el ancho independientes? Justifique.
- (b) Calcule la probabilidad de que el ancho de la placa no exceda la mitad de su largo.
- (c) Encuentre la densidad del vector  $(U, V)$ , donde  $U$  y  $V$  son el área y el largo de la placa, respectivamente.
- (a) Nos interesa que integre 1, entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^1 k(x+y) dy dx &= k \int_0^2 \int_0^1 x+y dy dx \\
&= 3k
\end{aligned}$$

entonces

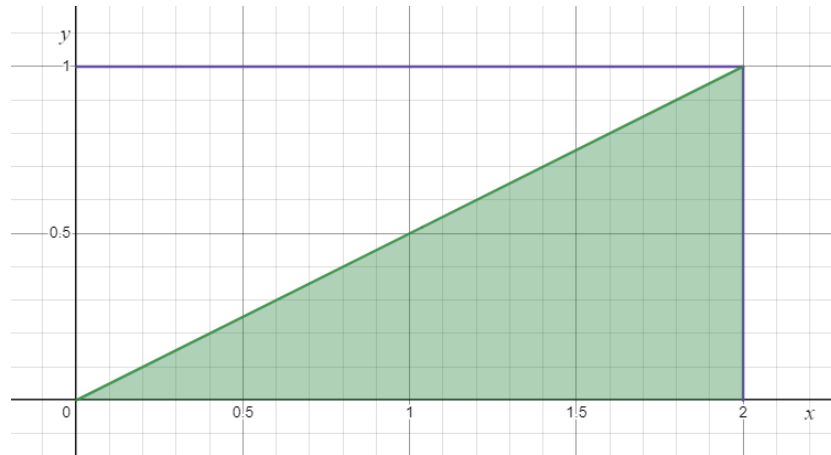
$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^1 k(x+y) dy dx &= 1 \\
3k &= 1 \\
k &= 1/3
\end{aligned}$$

Para encontrar la fdp del largo y del ancho es fácil, pues

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= 1/3 \int_0^1 x+y dy = \frac{x}{3} + \frac{1}{6} \\
f_Y(y) &= 1/3 \int_0^2 x+y dx = \frac{2}{3}(y+1)
\end{aligned}$$

Es fácil ver que  $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ , por lo cual no son independientes.

(b) Nos piden  $P(Y \leq X/2)$ . Esta región corresponde a



entonces

$$P(Y \leq X/2) = \frac{1}{3} \int_0^2 \int_0^{x/2} x + y \, dy \, dx = 5/9$$

(c) Las transformaciones que se piden son

$$U = XY, \quad V = X$$

las inversas son

$$X = V \\ Y = U/V$$

el jacobiano es

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & \frac{1}{v} \end{vmatrix} = |1/v| = 1/v$$

ahora el recorrido

$$0 < x < 1 \\ 0 < v < 1$$

$$0 < y < 1 \\ 0 < xy < x \\ 0 < u < v$$

ahora reemplazamos en la conjunta

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{v} f_{X,Y}(v, u/v) \\ = \frac{1}{3v} \left( v + \frac{u}{v} \right)$$

finalmente tenemos

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{u}{v^2} \right), \quad 0 < v < 2, 0 < u < v$$

19. Sea  $X_1, X_2 \stackrel{iid}{\sim} U(-1/2, 1/2)$ . Encuentre la densidad de  $Y_1 = X_1 + X_2$ .

Definamos la v.a auxiliar  $Y_2 = X_2$ . Las inversas son

$$X_1 = Y_1 - Y_2$$

$$X_2 = Y_2$$

el jacobiano es

$$|J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = |-1| = 1$$

ahora el recorrido

$$-1/2 < x_2 < 1/2$$

$$-1/2 < y_2 < 1/2$$

$$-1/2 < x_1 < 1/2$$

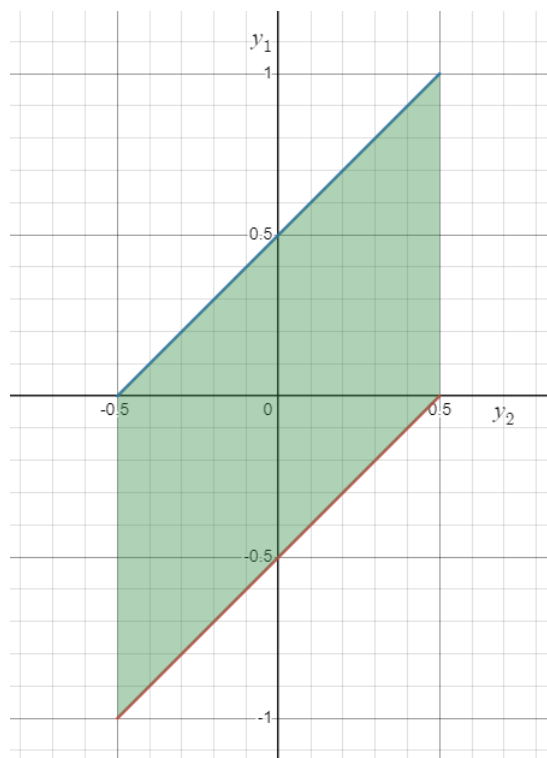
$$x_2 - 1/2 < x_1 + x_2 < 1/2 + x_2$$

$$y_2 - 1/2 < y_1 < 1/2 + y_2$$

reemplazando todo lo necesario se tiene que la conjunta es

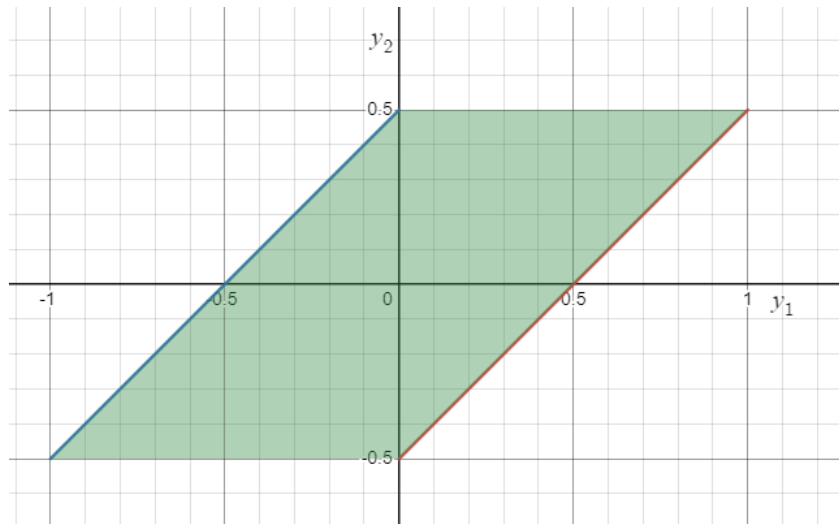
$$f_{U,V}(u, v) = 1, \quad -1/2 < y_2 < 1/2, y_2 - 1/2 < y_1 < 1/2 + y_2$$

el recorrido corresponde a



para encontrar la marginal de  $Y_1$  debemos dar vuelta el intervalo, ya que nos interesa que  $y_1$  vaya entre valores numéricos y no entre funciones.

Re escribiendo el intervalo tenemos que



esto es

$$\begin{aligned} -1/2 < y_2 < 1/2 + y_1, & \text{ si } -1 < y_1 < 0 \\ 1/2 - y_1 < y_2 < 1/2, & \text{ si } 0 < y_1 < 1 \end{aligned}$$

ya que tenemos todo esto podemos calcular la marginal de  $Y_1$ .

- Si  $-1 < y_1 < 0$

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_{-1/2}^{1/2+y_1} dy_2 \\ &= y_1 + 1 \end{aligned}$$

- Si  $0 < y_1 < 1$

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_{y_1-1/2}^{1/2} dy_2 \\ &= 1 - y_1 \end{aligned}$$

Finalmente tenemos que la margina de  $Y_1$  es

$$f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} y_1 + 1 & -1/2 < y_1 < 0 \\ 1 - y_1 & 0 < y_1 < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

esto lo podemos escribir de manera compacta como

$$f_{Y_1}(y_1) = (1 - |y_1|) \cdot I(-1 < y_1 < 1)$$

20. Considere  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria  $Normal(\mu, \sigma^2)$ . Defina la v.a

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Encuentre la distribución de  $S^2$ , su varianza y  $E(\sqrt{S})$ . Asuma que  $\bar{X}$  es independiente de  $S^2$ .

Para esto vamos a utilizar un par de trucos.

Note que podemos expresar  $S^2$  de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\
(n-1)S^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n\frac{X_i}{n}\bar{X} + \bar{X}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X}\bar{X} + \bar{X}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 + n\mu^2 - n\mu^2 + 2X_i\mu - 2X_i\mu \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2X_i\mu + n\mu^2 - n\bar{X}^2 - n\mu^2 + 2X_i\mu \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2X_i\mu + n\mu^2 - n\bar{X}^2 - n\mu^2 + n2\frac{X_i}{n}\mu \\
&= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2X_i\mu + n\mu^2 - n\bar{X}^2 - n\mu^2 + n2\bar{X}\mu \\
&= \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 - n(\bar{X} - \mu)^2 \\
\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} - n\frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 - \left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/n} \right)^2 \\
S^* &= \sum_{i=1}^n Z_i^2 - W \\
S^* + W &= \sum_{i=1}^n Z_i^2
\end{aligned}$$

acá tenemos que  $S^* = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ ,  $Z_i = \left( \frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)$ , donde  $Z_i \sim N(0, 1)$ , por lo cual  $Z_i^2 \sim \chi_{(1)}^2$  y  $W = \left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/n} \right)^2$ , donde  $W \sim N(0, 1)$ , por lo cual  $W^2 \sim \chi_{(1)}^2$ . Ahora por enunciado, tenemos que  $S^*$  es independiente de  $W$ , por lo cual podemos sumar sin problema. Para encontrar la

distribución vamos a usar generadora de momentos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 M_{S^*}(t)M_W(t) &= M_{\sum_{i=1}^n Z_i^2}(y) \\
 M_{S^*}(t) \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{1/2} &= \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{n/2} \\
 M_{S^*}(t) &= \frac{\left( \frac{1}{1-2t} \right)^{n/2}}{\left( \frac{1}{1-2t} \right)^{1/2}} \\
 M_{S^*}(t) &= \left( \frac{1}{1-2t} \right)^{(n-1)/2}
 \end{aligned}$$

esta ultima es la generadora de momentos de una chi cuadrado con  $n-1$  grados de libertad. Entonces

$$\begin{aligned}
 S^* &\sim \chi_{(n-1)}^2 \\
 \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{(n-1)}^2 \\
 S^2 &\sim \frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{(n-1)}^2
 \end{aligned}$$

La varianza es fácil, pues ya conocemos la distribución.

$$\begin{aligned}
 Var(S^2) &= Var\left(\frac{\sigma^2}{n-1} \chi_{(n-1)}^2\right) \\
 &= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} Var(\chi_{(n-1)}^2) \\
 &= \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} 2(n-1) \\
 &= \frac{2\sigma^4}{(n-1)}
 \end{aligned}$$

para la esperanza se calcula usando la definición de esperanza

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\sqrt{S}) &= \int_0^\infty \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \sqrt{y} \frac{1}{2^{(n-1)/2} \Gamma((n-1)/2)} y^{(n-1)/2-1} e^{-y/2} dy \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \int_0^\infty \frac{1}{2^{(n-1)/2} \Gamma((n-1)/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2} dy \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \frac{2^n \Gamma(n/2)}{2^{(n-1)/2} \Gamma((n-1)/2)} \int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2} dy \\
 &= \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} \frac{2^n \Gamma(n/2)}{2^{(n-1)/2} \Gamma((n-1)/2)} \cdot 1 \\
 &= \frac{\sigma \sqrt{2} \Gamma(n/2)}{\sqrt{n-1} \Gamma((n-1)/2)}
 \end{aligned}$$

21. Sea  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$  e  $Y|X = x \sim N(0, 1/x)$ .

- (a) Calcule  $\mathbb{E}(Y)$ ,  $Var(Y)$  y  $Cov(X, Y)$
- (b) Encuentre como distribuye  $X|Y = y$
- (c) Calcule  $P(\sqrt{XY} > 1)$
- (a) Usamos esperanza y varianza iterada

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X = x)) \\
&= \mathbb{E}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y) &= \text{Var}(\mathbb{E}(Y|X = x)) + \mathbb{E}(\text{Var}(Y|X = x)) \\
&= \text{Var}(0) + \mathbb{E}(1/x) \\
&= \mathbb{E}(1/x) \\
&= \mathbb{E}(1/X) \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-2} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-2} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-x\beta} dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{(\alpha-1)-1} e^{-x\beta} dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\beta^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

para la covarianza note que  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X))$ , entonces

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(XY) \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\beta^{\alpha-1}} - \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X)) \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\beta^{\alpha-1}} - \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|X)) \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\beta^{\alpha-1}} - \mathbb{E}(X \cdot 0) \\
&= \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\beta^{\alpha-1}}
\end{aligned}$$

(b) Esto se calcula como sigue

$$\begin{aligned}
f_{Y|X=x}(y) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} \\
f_{Y|X=x}(y) &= \frac{f_{X|Y=y}(y) 1 f_Y(y)}{f_X(x)}
\end{aligned}$$

necesitamos calcular la marginal de  $Y$ , entonces

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x, y) &= f_X(x) f_{Y|X=x}(y) \\
\int_{\text{Rec}(X)} f_{X,Y}(x, y) dx &= \int_{\text{Rec}(X)} f_X(x) f_{Y|X=x}(y) dx \\
f_Y(y) &= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\sqrt{x} e^{-\frac{xy^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha) \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{\alpha+1/2-1} e^{-x\beta - \frac{xy}{2}} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x^{(\alpha+1/2)-1} e^{-x(\beta+\frac{y^2}{2})} dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(\alpha+1/2)}{(\beta+\frac{y^2}{2})^{\alpha+1/2}}
\end{aligned}$$

ahora si reemplazamos todo

$$\begin{aligned}
f_{Y|X=x}(y) &= \frac{f_{X|Y=y}(y)f_Y(y)}{f_X(x)} \\
\frac{\sqrt{x}e^{-\frac{xy^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} &= \frac{f_{X|Y=y}(y)\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(\alpha+1/2)}{(\beta+\frac{y^2}{2})^{\alpha+1/2}}}{\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)}} \\
f_{X|Y=y}(x) &= \frac{\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)\sqrt{2\pi}}\frac{\Gamma(\alpha+1/2)}{(\beta+\frac{y^2}{2})^{\alpha+1/2}}}{\frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)}\frac{\sqrt{x}e^{-\frac{xy^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}} \\
&= \frac{(\beta+\frac{y^2}{2})^{\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha+1/2)} x^{(\alpha+1/2)-1} e^{-x(\beta+\frac{y^2}{2})}
\end{aligned}$$

se tiene que  $X|Y=y \sim \text{Gamma}\left(\alpha+1/2, \beta+\frac{y^2}{2}\right)$

(c)

$$\begin{aligned}
P(\sqrt{XY} > 1) &= P(Y > 1/\sqrt{X}) \\
&= \int_0^\infty \int_{1/\sqrt{x}}^\infty f_{X,Y}(x,y) dy dx \\
&= \int_0^\infty \int_{1/\sqrt{x}}^\infty f_X(x) f_{Y|X=x} dy dx \\
&= \int_0^\infty \int_{1/\sqrt{x}}^\infty \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} \frac{e^{-\frac{xy^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}1/x} dy dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_{1/\sqrt{x}}^\infty \frac{e^{-\frac{xy^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}1/x} dy dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} P(Y > 1/\sqrt{x}) dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} P\left(\frac{Y-0}{1/\sqrt{x}} > \frac{1/\sqrt{x}-0}{1/\sqrt{x}}\right) dx \\
&= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} dx \\
&= (1 - \Phi(1)) \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} dx \\
&= (1 - \Phi(1)) \cdot 1 \\
&= (1 - \Phi(1))
\end{aligned}$$

22. Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad -\infty < x, y < \infty$$

Calcule  $\text{Cov}(X+Y, X-Y)$ .

Primero note que

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(x,y) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}
\end{aligned}$$



por lo cual  $X, Y$  son normales estándar independientes. Ahora

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X + Y, X - Y) &= \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, -Y) + \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Y, -Y) \\ &= \text{Var}(X) - \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(X, Y) - \text{Var}(Y) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

23. Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 24 \frac{x^2}{y^3}, & 0 < x < 1, y > 2 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Calcule  $P(X < 1/2 | Y > 6)$
  - (b) Encuentre las funciones de densidad marginales de  $X$  e  $Y$
  - (c) ¿Son  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes ?
- (a) Esto es

$$\begin{aligned} P(X < 1/2 | Y > 6) &= \frac{P(X < 1/2 \cap Y > 6)}{P(Y > 6)} \\ &= \frac{\int_0^{1/2} \int_6^\infty 24 \frac{x^2}{y^3} dy dx}{\int_0^1 \int_6^\infty 24 \frac{x^2}{y^3} dy dx} \\ &= 1/8 \end{aligned}$$

- (b) La marginal de  $X$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_2^\infty 24 \frac{x^2}{y^3} dy \\ &= \frac{24}{8} x^2 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

La marginal de  $Y$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 24 \frac{x^2}{y^3} dx \\ &= \frac{24}{8} x^2 \\ &= \frac{8}{y^3} \end{aligned}$$

- (c) Note que

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= f_X(x) f_Y(y) \\ 24 \frac{x^2}{y^3} &= 3x^2 \cdot \frac{8}{y^3} \\ &= 24 \frac{x^2}{y^3} \end{aligned}$$

Se concluye que  $X, Y$  son independientes.

24. Sea  $X$  y  $T_1, \dots, T_n$  variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro  $\lambda_X$  y  $\lambda_T$  respectivamente. Defina

$$W = \frac{nX}{\sum_{i=1}^n T_i}$$

Encuentre la fdp de  $W$ .

Primero notemos que

$$\sum_{i=1}^n T_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda_T)$$

a esta ultima llamémosla  $T^*$ . Para obtener la acumulada de  $W$  vamos a proceder de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P(W \leq w) &= P\left(\frac{nX}{T^*} \leq w\right) \\ &= P\left(X \leq \frac{wT^*}{n}\right) \\ &= P\left(X \leq \frac{wt^*}{n}\right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^{wt^*/n} f_{X,T^*}(x, t^*) dx dt^* \\ &= \int_0^\infty \int_0^{wt^*/n} f_X(x) f_{T^*}(t^*) dx dt^* \\ &= \int_0^\infty \int_0^{wt^*/n} \lambda_X e^{-\lambda_X x} \frac{\lambda_T^n (t^*)^{n-1} e^{-\lambda_T t^*}}{\Gamma(n)} dx dt^* \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda_T^n (t^*)^{n-1} e^{-\lambda_T t^*}}{\Gamma(n)} (1 - e^{-\lambda_X wt^*/n}) dt^* \\ &= 1 - \int_0^\infty \frac{\lambda_T^n (t^*)^{n-1} e^{-\lambda_T t^*}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda_X wt^*/n} dt^* \\ &= 1 - \int_0^\infty \frac{\lambda_T^n (t^*)^{n-1} e^{-t^*(\lambda_T + \lambda_X w/n)}}{\Gamma(n)} dt^* \\ F_W(w) &= 1 - \frac{\lambda_T^n}{\Gamma(n)} \frac{\Gamma(n)}{(\lambda_T + \lambda_X w/n)^n} \\ f_W(w) &= \lambda_T^n \lambda_X \left( \frac{1}{\lambda_T + \lambda_X w/n} \right)^{n+1} \\ f_W(w) &= \left( \frac{n\lambda_T}{\lambda_X} \right)^n n \left( \frac{1}{\frac{n\lambda_T}{\lambda_X} + w} \right)^{n+1}, \quad w > 0 \end{aligned}$$

Esta distribución recibe el nombre de Lomax distribution.

25. Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias tales que  $Y|X = x \sim \text{Bin}(x, p)$  y  $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .

- (a) Calcule  $\mathbb{E}(Y)$  y  $\text{Var}(Y)$  usando las propiedades de la esperanza condicional.
- (b) Calcule  $\mathbb{E}(XY)$  y  $\text{Cov}(X, Y)$  usando las propiedades de la esperanza condicional.
- (c) Obtenga la distribución marginal de  $Y$

(a) Usamos esperanza y varianza iterada

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) \\
 &= \mathbb{E}(Xp) \\
 &= p\mathbb{E}(X) \\
 &= p\lambda \\
 \text{Var}(Y) &= \mathbb{E}(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y|X)) \\
 &= \mathbb{E}(Xp(1-p)) + \text{Var}(pX) \\
 &= p(1-p)\mathbb{E}(X) + p^2\text{Var}(X) \\
 &= p(1-p)\lambda + p^2\lambda \\
 &= p\lambda
 \end{aligned}$$

(b) Lo pedido se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X)) \\
 &= \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|X)) \\
 &= \mathbb{E}(XXp) \\
 &= p\mathbb{E}(X^2) \\
 &= p(\text{Var}(X) + \mathbb{E}(X)^2) \\
 &= p(\lambda + \lambda^2) \\
 \text{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
 &= p(\lambda + \lambda^2) - p\lambda \\
 &= p\lambda + p\lambda^2 - p\lambda^2 \\
 &= p\lambda
 \end{aligned}$$

Otra forma de calcula la covarianza es

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(X, Y) &= \text{Cov}(X, \mathbb{E}(Y|X)) \\
 &= \text{Cov}(X, Xp) \\
 &= p\text{Cov}(X, X) \\
 &= p\text{Var}(X) \\
 &= p\lambda
 \end{aligned}$$

(c) Procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 P(Y = y) &= \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x, Y = y) \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} P(X = x, Y = y) \frac{P(X = x)}{P(X = x)} \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} P(Y|X = x)P(X = x) \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
 \text{si } y > x \text{ entonces } \binom{x}{y} &= 0, \text{ por lo cual} \\
 &= \sum_{x=y}^{\infty} \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \\
 &= \frac{p^y}{y!} e^{-\lambda} \sum_{x=y}^{\infty} \frac{(1-p)^{x-y} \lambda^x}{(x-y)!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p^y}{y!} e^{-\lambda} \lambda^y \sum_{x=y}^{\infty} \frac{(1-p)^{x-y} \lambda^{x-y}}{(x-y)!} \\
&= \frac{p^y}{y!} e^{-\lambda} \lambda^y \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(1-p)^u \lambda^u}{u!} \\
&= \frac{p^y}{y!} e^{-\lambda} \lambda^y \sum_{u=0}^{\infty} \frac{((1-p)\lambda)^u}{u!} \\
&= \frac{p^y}{y!} e^{-\lambda} \lambda^y e^{(1-p)\lambda} \\
&= \frac{(p\lambda)^y e^{-p\lambda}}{y!}
\end{aligned}$$

Luego,  $Y \sim \text{Poisson}(p\lambda)$

26. Si  $f_{X|Y=y}(x) = 3\frac{x^2}{y^3}$ , para  $0 < x < y$ , y  $f_Y(y) = 5y^4$ , para  $0 < y < 1$ , encuentre  $P(X > 1/2)$

$$\begin{aligned}
P(X > 1/2) &= \int_0^1 \int_{1/2}^1 f_{X,Y}(x,y) dx dy \\
&= \int_0^1 \int_{1/2}^1 f_{X,Y}(x,y) \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} dx dy \\
&= \int_0^1 \int_{1/2}^y f_{X|Y=y}(x) f_Y(y) dx dy \\
&= \int_0^1 \int_{1/2}^y 3\frac{x^2}{y^3} 5y^4 dx dy \\
&= 11/16
\end{aligned}$$

27. Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias iid con densidad dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \geq 1$$

- (a) Sea  $Y = \sum_{i=1}^n \ln(X_i)$ . Calcule  $\mathbb{E}(Y)$  y  $\text{Var}(Y)$   
(b) Sea  $Z = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ . Encuentre  $F_Z(z)$  y  $f_Z(z)$   
(c) Encuentre  $\mathbb{E}(Z)$  y  $\text{Var}(Z)$   
(a) Como son iid tenemos

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right) = n\mathbb{E}(\ln(X_1))$$

podemos calcular esto de forma directa, o encontrar la transformación  $Y_i = \ln(X_i)$ . Por esta vez procederemos de forma directa.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_i) &= \mathbb{E}(\ln(X_i)) \\
&= \int_1^{\infty} \ln(x) \frac{1}{x^2} dx \\
x = e^u &\Rightarrow dx = e^u du \\
&= \int_0^{\infty} u e^{-2u} e^u du \\
&= \int_0^{\infty} u e^{-u} du \\
&= 1
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right) &= n\mathbb{E}(\ln(X_1)) \\ &= n \cdot 1 \\ &= n\end{aligned}$$

ahora la varianza

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right) \\ &= n\text{Var}(\ln(X_1)) \\ &= n\left(\mathbb{E}(\ln(x)^2) - \mathbb{E}(\ln(x))^2\right) \\ &= n\left(\int_1^\infty \ln(x)^2 \frac{1}{x} dx - 1\right) \\ x = e^u &\Rightarrow dx = e^u du \\ &= n\left(\int_0^\infty u^2 e^{-2u} e^u dx - 1\right) \\ &= n\left(\int_0^\infty u^2 e^{-u} dx - 1\right) \\ &= n\left(\int_0^\infty u^{3-1} e^{-u} dx - 1\right) \\ &= n(\Gamma(3) - 1) \\ &= n(2 - 1) \\ &= n\end{aligned}$$

(b) Procedamos intuitivamente para recordar cosas.

$$\begin{aligned}P(Z \leq z) &= 1 - P(Z > z) \\ \text{si } z &\text{ es el m\u00ednimo entonces } X_i > z \\ &= 1 - P(X_1, \dots, X_n > z) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > z) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \int_z^\infty \frac{1}{x^2} dx \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \frac{1}{z} \\ F_Z(z) &= 1 - \frac{1}{z^n} \\ f_Z(z) &= \frac{n}{z^{n+1}}, \quad z \geq 1\end{aligned}$$

(c) La distribuci\u00f3n de  $Z$  corresponde a una *Pareto*( $n, 1$ ). Por lo cual

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z) &= \frac{n}{n-1}, \quad n > 1 \\ \text{Var}(Z) &= \frac{n}{(n-1)^2(n-2)}, \quad n > 2\end{aligned}$$

Se invita al lector a verificar estos resultados.

28. Sea  $\mathbf{W} = (X^T X)^{-1} X^T \mathbf{Y}$ , con  $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_n(XA, \sigma^2 \mathbf{I})$ , con  $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{p \times 1}$  Encuentre como distribuye  $\mathbf{W}$ .

Como  $\mathbf{Y}$  es normal multivariada, entonces  $\mathbf{W}$  también lo es. Ahora solo debemos calcular su vector de medias y matriz de varianza covarianza.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbf{W}) &= \mathbb{E}((X^T X)^{-1} X^T \mathbf{Y}) \\ &= (X^T X)^{-1} X^T \mathbb{E}(\mathbf{Y}) \\ &= (X^T X)^{-1} X^T A\end{aligned}$$

ahora la matriz de varianza covarianza

$$\begin{aligned}\text{Var}(\mathbf{W}) &= \text{Var}((X^T X)^{-1} X^T \mathbf{Y}) \\ &= ((X^T X)^{-1} X^T) \text{Var}(\mathbf{Y}) ((X^T X)^{-1} X^T)^T \\ &= ((X^T X)^{-1} X^T) \sigma^2 \mathbf{I} X ((X^T X)^{-1})^T \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} X^T X ((X^T X)^{-1})^T \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1} (X^T X) ((X^T X)^{-1})^T \\ &= \sigma^2 ((X^T X)^T)^{-1} \\ &= \sigma^2 (X^T X)^{-1}\end{aligned}$$

Luego, tenemos que

$$\mathbf{W} \sim \mathcal{N}_p((X^T X)^{-1} X^T A, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$$

29. Sea  $X_1$  y  $X_2$  con densidad conjunta

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right] \left[1 - \frac{x_1 x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\right], -\infty < x_1, x_2 < \infty.$$

Demuestre que  $X_1$  y  $X_2$  tienen distribución normal estándar. (Joshi [1970])

Calculemos las marginales

$$\begin{aligned}f_{X_1}(x_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right] \left[1 - \frac{x_1 x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\right] dx_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right] dx_2 - \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right] \left[\frac{x_1 x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}\right] dx_2\end{aligned}$$

Note que la integral de la derecha es impar, por lo cual

$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right] dx_2 - 0 \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-x_1^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2} \cdot 1 \\ \Rightarrow f_{X_1}(x_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_1^2/2}\end{aligned}$$

De forma análoga se obtiene que

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_2^2/2}$$

Demostrando así lo pedido.

30. Suponga que  $Y_1, \dots, Y_n \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ . Encuentre la función generadora de momentos del vector

$$(\bar{Y}, Y_1 - \bar{Y}, Y_2 - \bar{Y}, \dots, Y_n - \bar{Y})$$

y muestre que  $\bar{Y}$  es independiente de  $\sum_i^n (Y_i - \bar{Y})^2$ . (Hogg and Craig [1970])

Podemos encontrar la distribución conjunta de ambos y ver si la fgm es factorizable

$$\begin{aligned} M_{\bar{Y}, Y_1 - \bar{Y}, \dots, Y_n - \bar{Y}}(s, t_1, \dots, t_n) &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( s\bar{Y} + \sum_{i=1}^n t_i (Y_i - \bar{Y}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( s\bar{Y} + \sum_{i=1}^n t_i Y_i - t_i \bar{Y} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( s\bar{Y} + \sum_{i=1}^n t_i Y_i - n \frac{t_i}{n} \bar{Y} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( s\bar{Y} + \sum_{i=1}^n t_i Y_i - n \bar{t} \bar{Y} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( s \frac{\sum_i^n Y_i}{n} + \sum_{i=1}^n t_i Y_i - n \bar{t} \frac{\sum_i^n Y_i}{n} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( \sum_{i=1}^n Y_i \left( \frac{s}{n} + t_i - \bar{t} \right) \right) \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ \left( \frac{s}{n} + t_i - \bar{t} \right) Y_i \right\} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n M_{Y_i} \left( \left( \frac{s}{n} + t_i - \bar{t} \right) \right) \end{aligned}$$

por enunciado  $Y_i$  son iid normales  
lo de arriba es la fgm de una normal(0,1)

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^n \exp \left[ \frac{1}{2} \left( t_i - \bar{t} + \frac{s}{n} \right)^2 \right] \\ &= \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 + \frac{s^2}{2n} \right) \\ &= \exp \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \right) \exp \left( \frac{s^2}{2n} \right) \end{aligned}$$

Luego, como las fgm se pueden separar, son independientes, mostrando así lo pedido.

31. Sea  $X, Y$  variables aleatorias con distribución conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 4 & 0 < x < 1/2, 0 < y < x \\ 4 & 1/2 < x < 1, 0 < y < 1 - x \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Encuentre  $f_{Y|X=x}(y)$
- (b) Encuentre  $\mathbb{E}(Y^2|X = 1/3)$
- (c) Encuentre  $\mathbb{E}(X|Y = 1/4)$
- (a) Por definición

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$

Debemos encontrar  $f_X(x)$ . Para esto note que su conjunta estará dividida en dos, pues tenemos que para  $x \in (0, 1/2)$  tiene un recorrido asociado de  $y$  diferente al que tiene  $x \in (1/2, 1)$ , entonces

si  $x \in (0, 1/2)$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^x 4dy \\ &= 4x \end{aligned}$$

si  $x \in (1/2, 1)$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^{1-x} 4dy \\ &= 4(1 - x) \end{aligned}$$

Luego,

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x & 0 < x < 1/2 \\ 4(1 - x) & 1/2 < x < 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Entonces para  $f_{Y|X=x}$  hay que reemplazar según donde nos encontremos, esto queda así

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{4}{4x} & 0 < y < x \\ \frac{4}{4(1-x)} & 0 < y < 1 - x \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

O de forma equivalente

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < y < x \\ \frac{1}{(1-x)} & 0 < y < 1 - x \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

con  $x \in (0, 1/2)$  y  $x \in (1/2, 1)$  respectivamente.



- (b) Podemos primero fijar  $X = 1/3$  en la condicional, note que es la misma condicional que antes, por lo cual

$$f_{Y|X=1/3}(y) = \begin{cases} \frac{1}{1/3} & 0 < y < 1/3 \\ \frac{1}{(1-1/3)} & 0 < y < 1-1/3 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

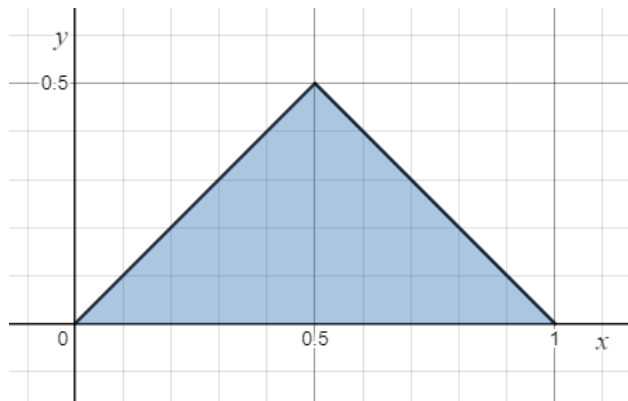
Ahora si podemos calcular lo pedido, esto se calcula como sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y^2|X=1/3) &= \int_0^{1/2} y^2 \frac{1}{1/3} dy + \int_0^{1-1/3} y^2 \frac{1}{(1-1/3)} dy \\ &= \frac{59}{216} \end{aligned}$$

- (c) Para obtener esto, primero tenemos que encontrar  $f(X|Y=1/4)$ , entonces

$$f(X|Y=2) = \frac{f_{X,Y}(x,2)}{f_Y(2)}$$

Necesitamos encontrar  $f_Y(y)$ , para esto note que los intervalos originales tienen a  $y \in (0, x)$  y  $y \in (0, 1-x)$ , por lo cual debemos cambiar esto, ya que ahora  $y$  debe estar en un intervalo numérico, y  $x$  en un intervalo entre funciones. Note que la región original de  $X, Y$  es



Debemos voltear entonces la región. Calculamos las inversas

$$\begin{aligned} y = x &\Rightarrow x = y \\ y = 1 - x &\Rightarrow x = 1 - y \end{aligned}$$

Note que la región está pegada al eje  $x$ , la nueva región se visualiza en la figura (13). Lo cual corresponde a  $y \in (0, 1/2)$  y  $x \in (y, 1-y)$ , de modo que la marginal de  $Y$  es

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^{1-y} 4 dy \\ &= 4 - 8y \end{aligned}$$

Luego,

$$f_Y(y) = 4 - 8y, \quad 0 < y < 1/2$$

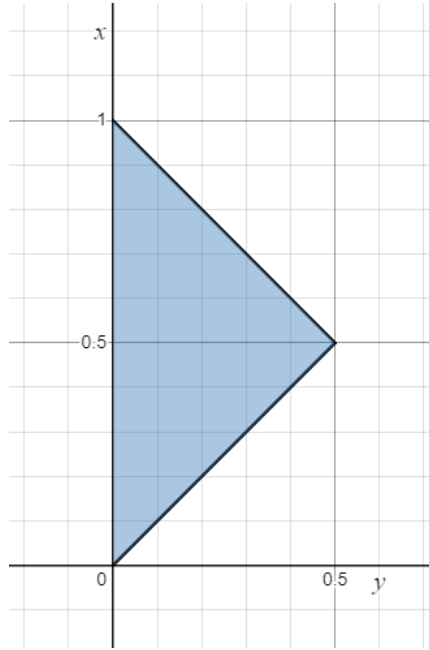


Figure 13: Región equivalente

Ahora calculemos la condicional  $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$ .

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{4}{4 - 8 \cdot y} \\ &= \frac{1}{1 - 2y} \end{aligned}$$

Luego,

$$f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 - 2y} & y < x < 1 - y \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Ahora simplemente reemplazamos para obtener  $f_{X|Y=1/4}(x)$

$$f_{X|Y=1/4}(x) = \begin{cases} 2 & 1/4 < x < 1 - 1/4 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

La esperanza  $\mathbb{E}(X|Y = 1/4)$  se calcula como sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|Y = 1/4) &= \int_{1/4}^{1-1/4} x \cdot 2 dx \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

32. Sean  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ . Para  $n \geq 2$  defina  $S = \sum_{i=2}^n X_i$  y  $T = \sum_{i=1}^n X_i$ .

- (a) Obtenga las distribuciones de  $S$  y  $T$
- (b) Pruebe que la fdp condicional de  $T$  dado  $X_1 = x_1$  es tal que

$$f_{T|X_1=x_1}(t) = f_S(t - x_1), \quad \forall 0 < x_1 < t$$

- (c) Encuentre la fdp condicional de  $X_1$  dado  $T = t$  y calcule  $\mathbb{E}(X_1|T = t)$ .
- (a) Es claro que  $S \sim \text{Gamma}(n-1, \lambda)$  y  $T \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$
- (b) Para esto, notemos que  $X_1$  es independiente de  $S$  y que podemos escribir  $T = X_1 + S$ . Entonces podemos probar lo pedido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} F_{T|X_1=x_1} &= P(T \leq t | X_1 = x_1) \\ &= P(X_1 + S \leq t | X_1 = x_1) \\ &= P(S \leq t - x_1 | X_1 = x_1) \\ &\quad S \text{ independiente de } X_1 \\ &= P(S \leq t - x_1) \\ F_{T|X_1=x_1} &= F_S(t - x_1) \\ f_{T|X_1=x_1}(t) &= f_S(t - x_1) \end{aligned}$$

para  $t - x_1 > 0$ .

- (c) Usando el item anterior tenemos

$$\begin{aligned} f_{X_1|T=t}(x_1) &= \frac{f_{T|X_1=x_1} f_{X_1}(x_1)}{f_T(t)} \\ &= \frac{f_S(t - x_1) f_{X_1}(x_1)}{f_T(t)}, \quad 0 < x_1 < t \end{aligned}$$

Reemplazando las distribuciones correspondientes se tiene que

$$f_{X_1|T=t}(x_1) = (n-1) \frac{1}{t} \left(1 - \frac{x_1}{t}\right)^{n-2}, \quad 0 < x_1 < t$$

Entonces la esperanza condicional se calcula como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1|T = t) &= \int_0^t x_1 (n-1) \frac{1}{t} \left(1 - \frac{x_1}{t}\right)^{n-2} dx_1 \\ &= (n-1)t \int_0^1 u(1-u)^{n-2} du \\ &= (n-1)t \int_0^1 u^{2-1} (1-u)^{(n-1)-1} du \\ &= t(n-1)B(2, n-1) \\ &= \frac{t}{n} \end{aligned}$$

33. Se lanza una moneda honesta repetidas veces. Sea  $X$  = numero de intentos para obtener la primera cara y  $Y$  = numero de intentos para obtener dos caras. ¿Son  $X, Y$  independientes?

Suponga que nos interesan que en dos lanzamientos ocurra  $X$  e  $Y$ . Entonces  $X \sim \text{Geo}(1/2)$ . Nos interesa calcular

$$P(X = 2, Y = 2)$$

note que esto corresponde a que la primera cara sale en el segundo intento, y en dos intentos se tienen dos caras, esto no es posible, por lo cual

$$P(X = 2, Y = 2) = 0$$

Ahora, note que  $P(X = 2) = 1/4$ , y que  $P(Y = 2) = 1/4$ . Veamos que pasa si reemplazamos en lo que debemos chequear

$$\begin{aligned} P(X = 2, Y = 2) &= P(X = 2)P(Y = 2) \\ 0 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \end{aligned}$$

claramente no son independientes.

34. En el ejercicio anterior encuentre la conjunta de  $X, Y$  y muestre que efectivamente suma 1.

Es claro que  $X \sim \text{Geo}(1/2)$ . Ahora, piense que los lanzamientos hasta que salga la segunda cara depende de cuando salió la primera cara, es decir, si nos interesa que se tengan que hacer  $X$  intentos, y para que salga la segunda cara se deban hacer  $Y$  intentos, entonces la segunda cara debe salir en  $Y - X$  lanzamientos, por lo cual  $Y$  esta condicionado según cuando salga la primera cara. Note que  $Y|X \sim \text{Geo}(1/2)$ . Tenemos entonces que

$$p_{Y|X}(y) = \frac{1}{2^{y-x}}, \quad y = x + 1, x + 2, \dots$$

Ahora podemos reemplazar lo que tenemos

$$\begin{aligned} p_{Y|X}(y) &= \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_X(x)} \\ \frac{1}{2^{y-x}} &= \frac{p_{X,Y}(x, y)}{\frac{1}{2^x}} \\ p_{X,Y}(x, y) &= \frac{1}{2^y} \end{aligned}$$

teniendo así que la conjunta de  $X, Y$  es

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2^y} & x = 1, 2, \dots; y = x + 1, x + 2, \dots \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

Mostremos que suma 1.

$$\begin{aligned} \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=x+1}^{\infty} \frac{1}{2^y} &= \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{2^{y+x}} \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} \sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{2^y} \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} \frac{1/2}{1 - 1/2} \\ &= \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{2^x} \cdot 1 \\ &= \frac{1/2}{1 - 1/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

35. Sea  $X \sim P(\theta)$  y  $Y \sim P(\lambda)$  independientes. Encuentre la distribución de  $X|X+Y$  y  $Y|X+Y$ .

Por el ejercicio (6) sabemos que  $X+Y \sim P(\theta+\lambda)$ . Denotemos por  $Z$  la distribución de la suma. Entonces

$$\begin{aligned} P(X|X+Y) &= \frac{P(X=x, X+Y=k)}{P(X+Y=k)} \\ &= \frac{P(X=x, X+Y=k)}{P(Z=k)} \\ &= \frac{P(X=x, x+Y=k)}{P(Z=k)} \\ &= \frac{P(X=x, Y=k-x)}{P(Z=k)} \\ &= \frac{P(X=x)P(Y=k-x)}{P(Z=k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta} \frac{\lambda^{k-x}}{(k-x)!} e^{-\lambda}}{\frac{(\theta+\lambda)^k}{k!} e^{-(\theta+\lambda)}} \\
&= \frac{k!}{x!(k-x)!} \theta^x \lambda^{k-x} e^{-\theta} e^{-\lambda} \frac{1}{(\theta+\lambda)^k e^{-(\theta+\lambda)}} \\
&= \binom{k}{x} \theta^x \lambda^{k-x} \frac{1}{(\theta+\lambda)^k} \\
&= \binom{k}{x} \theta^x \lambda^{k-x} \frac{1}{(\theta+\lambda)^{k-x+x}} \\
&= \binom{k}{x} \theta^x \lambda^{k-x} \frac{1}{(\theta+\lambda)^{k-x}} \frac{1}{(\theta+\lambda)^x} \\
&= \binom{k}{x} \left( \frac{\theta}{\theta+\lambda} \right)^x \left( \frac{\lambda}{\lambda+\theta} \right)^{k-x} \\
&= \binom{k}{x} \left( \frac{\theta}{\theta+\lambda} \right)^x \left( \frac{\lambda+\theta-\theta}{\lambda+\theta} \right)^{k-x} \\
&= \binom{k}{x} \left( \frac{\theta}{\theta+\lambda} \right)^x \left( \frac{\lambda+\theta}{\lambda+\theta} - \frac{\theta}{\lambda+\theta} \right)^{k-x} \\
&= \binom{k}{x} \left( \frac{\theta}{\theta+\lambda} \right)^x \left( 1 - \frac{\theta}{\lambda+\theta} \right)^{k-x}
\end{aligned}$$

Luego,  $X|X+Y \sim \text{Bin}\left(k, \frac{\theta}{\lambda+\theta}\right)$ . Para la distribución de  $Y|X+Y$  es análogo al anterior, y no es difícil llegar a que  $Y|X+Y \sim \text{Bin}\left(k, \frac{\lambda}{\lambda+\theta}\right)$

36. Sea  $X, Y$  variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros  $\lambda$  y  $\mu$  respectivamente. Defina

$$Z = \min\{X, Y\}, \quad W = \begin{cases} 1 & , \text{si } Z = X \\ 0 & , \text{si } Z = Y \end{cases}$$

- (a) Encuentre la distribución de  $Z$  y  $W$   
(b) Demuestre que  $Z, W$  son independientes.  
(a) La distribución de  $Z$  fue encontrada en el ejercicio (12), donde se tiene que  $Z \sim \text{Exp}(\mu+\lambda)$ . Para la fdp de  $W$  note que es discreta, entonces

$$\begin{aligned}
P(W = 1) &= P(Z = X) \\
&= P(Y > X) \\
&= \int_0^\infty \int_x^\infty f_{X,Y}(x, y) dy dx \\
&= \int_0^\infty \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dy dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(W = 0) &= P(Z = Y) \\
&= P(X > Y) \\
&= \int_0^\infty \int_0^x f_{X,Y}(x, y) dy dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dy dx \\
&= \frac{\mu}{\lambda + \mu}
\end{aligned}$$

Note que  $W \sim \text{Bern}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

(b) Para ver si son independientes debemos encontrar la conjunta

$$\begin{aligned} P(Z \leq z, W = 0) &= P(Y \leq z, X > Y) \\ &= \int_0^z \int_y^\infty f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_0^z \int_y^\infty \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dx dy \\ &= \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(1 - e^{-z(\mu+\lambda)}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z \leq z, W = 1) &= P(X \leq z, Y > X) \\ &= \int_0^z \int_x^\infty f_{X,Y}(x, y) dy dx \\ &= \int_0^z \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dy dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left(1 - e^{-z(\mu+\lambda)}\right) \end{aligned}$$

Ahora debemos corroborar que

$$P(Z \leq z, W = i) = P(Z \leq z)P(W = i), \quad \text{para } i = 0, 1$$

vamos reemplazando

$$\begin{aligned} P(Z \leq z, W = 0) &= P(Z \leq z)P(W = 0) \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu} \left(1 - e^{-z(\mu+\lambda)}\right) &= \left(1 - e^{-z(\lambda+\mu)}\right) \frac{\mu}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z \leq z, W = 1) &= P(Z \leq z)P(W = 1) \\ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \left(1 - e^{-z(\mu+\lambda)}\right) &= \left(1 - e^{-z(\lambda+\mu)}\right) \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

donde claramente son iguales, por lo cual  $Z, W$  son independientes.

37. Suponga que se disparan balas al origen de  $(x, y)$ , y cada punto  $(X, Y)$  es una variable aleatoria. Asuma que  $X, Y$  son iid normales estándar. Si se disparan dos balas de manera independiente, determine la distribución de la distancia entre las dos balas.

Sea  $(X_1, Y_1)$  y  $(X_2, Y_2)$  las posiciones donde terminan las balas, entonces nos interesa la distribución de

$$Z = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

note que  $X_2 - X_1 \sim N(0, 2)$  y  $Y_2 - Y_1 \sim N(0, 2)$ , teniendo esto en cuenta podemos estandarizar estas variables y así tener una normal estándar, de modo que el cuadrado de estas sea una chi cuadrado.

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}^2} ((X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2)} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{\left(\frac{X_2 - X_1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{Y_2 - Y_1}{\sqrt{2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{2} \sqrt{R} \end{aligned}$$

tenemos que  $R \sim \chi_{(2)}^2$ , pues es la suma de dos chi cuadrado con 1 grado de libertad.

Ahora para encontrar la fdp de  $Z = \sqrt{2R}$  hacemos lo habitual.

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(\sqrt{2R} \leq z) \\ &= P(R \leq z^2/2) \\ f_Z(z) &= z f_R(z^2/2) \\ &= z e^{-z^2/2} \end{aligned}$$

Luego, tenemos que  $Z \sim \text{Rayleigh}(1)$

38. Sea  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un vector aleatorio. Demuestre que

$$\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Sea  $\mu_i = \mathbb{E}(X_i)$ .

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) &= \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) \\ &= \mathbb{E} \left( [(X_1 + X_2 + \dots + X_n) - (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)]^2 \right) \\ &= \mathbb{E}([(X_1 - \mu_1) + (X_2 - \mu_2) + \dots + (X_n - \mu_n)]^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)^2] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{E}[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

39. Una generalización de la distribución Beta es la distribución de Dirichlet. En su versión bivariada adopta la siguiente forma

$$f_{X,Y}(x, y) = C x^{a-1} y^{b-1} (1-x-y)^{c-1}, \quad 0 < x < 1; 0 < y < 1-x$$

con  $a, b, c > 0$ .

- Encuentre el valor de  $C$
- Demuestre que las marginales de  $X, Y$  son Beta
- Encuentre la distribución condicional  $Y|X = x$  y muestre que  $\frac{Y|X=x}{1-x}$  es  $\text{Beta}(b, c)$
- Calcule  $\mathbb{E}(XY)$
- Para esto debemos corroborar que integre 1.

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{1-x} C x^{a-1} y^{b-1} (1-x-y)^{c-1} dy dx \\ &y = (1-x)u \Rightarrow dy = (1-x)du \\ &= C \int_0^1 \int_0^1 x^{a-1} ((1-x)u)^{b-1} (1-x-(1-x)u)^{c-1} (1-x) du dx \\ &= C \int_0^1 \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^b u^{b-1} (1-x)^{c-1} (1-u)^{c-1} du dx \\ &= C \int_0^1 \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{c+b-1} u^{b-1} (1-u)^{c-1} du dx \\ &= C \left( \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{c+b-1} dx \right) \left( \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-1} du \right) \\ &= C \left( \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{c+b-1} dx \right) \left( \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-1} du \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= CB(a, c + b)B(b, c) \\
&= C \frac{\Gamma(a)\Gamma(b+c)}{\Gamma(a+b+c)} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)} \\
&= C \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}
\end{aligned}$$

imponiendo la condición tenemos que

$$C = \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}$$

(b) La marginal de  $X$

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \int_0^{1-x} x^{a-1} y^{b-1} (1-x-y)^{c-1} dy \\
&= \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \int_0^1 x^{a-1} ((1-x)u)^{b-1} (1-x-(1-x)u)^{c-1} (1-x) du \\
&= \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} x^{a-1} (1-x)^{c+b-1} \int_0^1 u^{b-1} (1-u)^{c-1} du \\
&= \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} x^{a-1} (1-x)^{c+b-1} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)} \\
&= \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b+c)} x^{a-1} (1-x)^{c+b-1} \\
&= \frac{x^{a-1} (1-x)^{c+b-1}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b+c)}{\Gamma(a+b+c)}} \\
f_X(x) &= \frac{x^{a-1} (1-x)^{c+b-1}}{B(a, b+c)}, \quad 0 < x < 1
\end{aligned}$$

Se tiene que  $X \sim \text{Beta}(a, b+c)$ .

La marginal de  $Y$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \int_0^{1-y} x^{a-1} y^{b-1} (1-x-y)^{c-1} dx \\
&= \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} \int_0^1 y^{b-1} ((1-y)u)^{a-1} (1-y-(1-y)u)^{c-1} (1-y) du \\
&= \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} y^{b-1} (1-y)^{a+c-1} \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{c-1} du \\
&= \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} y^{b-1} (1-y)^{a+c-1} \frac{\Gamma(a)\Gamma(c)}{\Gamma(a+c)} \\
&= \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(b)\Gamma(a+c)} y^{b-1} (1-y)^{a+c-1} \\
&= \frac{y^{b-1} (1-y)^{a+c-1}}{\frac{\Gamma(b)\Gamma(a+c)}{\Gamma(b+a+c)}} \\
f_Y(y) &= \frac{y^{b-1} (1-y)^{a+c-1}}{B(b, a+c)}, \quad 0 < y < 1
\end{aligned}$$

Se tiene que  $Y \sim \text{Beta}(b, a+c)$ .

(c) Tenemos todo para la condicional. Entonces

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} x^{a-1} y^{b-1} (1-x-y)^{c-1}}{\frac{x^{a-1}(1-x)^{c+b-1}}{B(a,b+c)}} \\
&= \frac{\Gamma(b+c)}{\Gamma(b)\Gamma(c)} \frac{y^{b-1}(1-x-y)^{c-1}}{(1-x)^{c+b-1}} \\
&= \frac{y^{b-1}(1-x-y)^{c-1}}{B(b,c)(1-x)^{c+b-1}}
\end{aligned}$$

tenemos entonces

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{y^{b-1}(1-x-y)^{c-1}}{B(b,c)(1-x)^{c+b-1}}, \quad 0 < y < 1-x$$

para encontrar  $\frac{f_{Y|X=x}(y)}{1-x}$  procedemos como si buscáramos una transformación común de una v.a. Entonces

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{Y|X=x}{1-x} \leq y\right) &= P(Y|X=x \leq y(1-x)) \\
&= F_{Y|X=x}(y(1-x)) \\
f_{\frac{Y|X=x}{1-x}}(y) &= (1-x)f_{Y|X=x}(y(1-x)) \\
&= (1-x) \frac{(y(1-x))^{b-1}(1-x-y(1-x))^{c-1}}{B(b,c)(1-x)^{c+b-1}} \\
&= \frac{(1-x)^b(1-x)^{c-1}y^{b-1}(1-y)^{c-1}}{B(b,c)(1-x)^{c+b-1}} \\
&= \frac{y^{b-1}(1-y)^{c-1}}{B(b,c)}
\end{aligned}$$

Note que el recorrido es  $0 < y < 1$ , pues

$$\begin{aligned}
y = 0 &\Rightarrow \frac{y}{1-x} = 0 \\
y = 1-x &\Rightarrow \frac{y}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1
\end{aligned}$$

La fdp es

$$f_{\frac{Y|X=x}{1-x}}(y) = \frac{y^{b-1}(1-y)^{c-1}}{B(b,c)}, \quad 0 < y < 1$$

Se tiene que  $\frac{Y|X=x}{1-x} \sim \text{Beta}(b, c)$

- (d) Para esto usamos esperanza iterada, pues acabamos de calcular la condicional y sale mas rápido de esta manera.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(XY|X)) \\
&= \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|X)) \\
&= \mathbb{E}\left((1-X)X\mathbb{E}\left(\frac{Y|X}{1-X}\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left((1-X)X\frac{b}{b+c}\right) \\
&= \frac{b}{b+c}\mathbb{E}((1-X)X) \\
&= \frac{b}{b+c} \int_0^1 (1-x)x \frac{x^{a-1}(1-x)^{c+b-1}}{B(a,b+c)} dx \\
&= \frac{b}{b+c} \int_0^1 \frac{x^{(a+1)-1}(1-x)^{(c+b+1)-1}}{B(a,b+c)} dx \\
&= \frac{b}{b+c} \frac{B(a+1, c+b+1)}{B(a,b+c)}
\end{aligned}$$

40. D. G. Morrison (1978) ofrece un modelo para elecciones binarias forzadas. Una elección binaria forzada ocurre cuando una persona se ve obligada a elegir entre dos alternativas, como en una prueba de sabor. Puede que una persona no pueda realmente discriminar entre las dos opciones (¿se puede distinguir entre Coca-Cola y Pepsi?), pero la configuración del experimento es tal que se debe tomar una decisión. Por tanto, existe una confusión entre discriminar correctamente y adivinar correctamente. Morrison modeló esto definiendo los siguientes parámetros:

$p$  = probabilidad de que una persona realmente pueda discriminar  
 $c$  = probabilidad de que una persona discrimine correctamente

Entonces

$$c = \frac{1}{2}(1 + p), \quad \frac{1}{2} < c < 1$$

y  $\frac{1}{2}(1 - p)$  es la probabilidad de que una persona discrimine correctamente. Ahora ejecutamos el experimento y observamos  $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bern}(c)$ , entonces

$$P\left(\sum_i^n X_i = k\right) = \binom{n}{k} c^k (1 - c)^{n-k}$$

Suponga que  $p$  no es constante de persona en persona, y se le asigna una distribución a este valor. En este caso se tiene

$$P \sim \text{Beta}(a, b)$$

- (a) Encuentre la fmp de  $\sum_{i=1}^n X_i$   
 (b) Calcule la esperanza y varianza de  $\sum_{i=1}^n X_i$

Definamos  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

- (a) Para esto note que  $Y|P = p \sim \text{Bin}\left(n, c = \frac{1}{2}(1 + p)\right)$ , entonces

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \int_0^1 p_{Y|P=p}(y) f_P(p) dp \\ &= \int_0^1 \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}(1 + p)\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}(1 + p)\right)^{n-k} \frac{p^{a-1}(1-p)^{b-1}}{B(a, b)} dp \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{2^k B(a, b)} \int_0^1 (1 + p)^k \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)^{n-k} p^{a-1}(1-p)^{b-1} dp \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{2^n B(a, b)} \int_0^1 (1 + p)^k (1 - p)^{n-k} p^{a-1}(1-p)^{b-1} dp \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{2^n B(a, b)} \int_0^1 \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} p^j 1^{k-j} p^{a-1}(1-p)^{n-k+b-1} dp \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{2^n B(a, b)} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \int_0^1 p^{a+k-1}(1-p)^{n-k+b-1} dp \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{2^n B(a, b)} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} B(a + k, n - k + b) \\ &= \binom{n}{k} \frac{1}{2^n B(a, b)} B(a + k, n - k + b) 2^k \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} \frac{1}{2^n B(a, b)} B(a + k, n - k + b) 2^k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(b) La esperanza

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|P)) \\ &= \mathbb{E}\left(n\frac{1}{2}(1+P)\right) \\ &= \frac{n}{2}\left(1 + \frac{a}{a+b}\right)\end{aligned}$$

La varianza

$$\begin{aligned}Var(Y) &= Var(\mathbb{E}(Y|P)) + \mathbb{E}(Var(Y|P)) \\ &= Var\left(n\frac{1}{2}(1+P)\right) + \mathbb{E}\left(n\frac{1}{2}(1+P)(1 - \frac{1}{2}(1+P))\right) \\ &= \frac{n^2}{4}Var(P) + \frac{n}{4}\mathbb{E}((1+P)(1-P)) \\ &= \frac{n^2}{4}\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} + \frac{n}{4}\left(1 - \mathbb{E}(P^2)\right) \\ &= \frac{n^2}{4}\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} + \frac{n}{4}\left(1 - Var(P) - \mathbb{E}(P)^2\right) \\ &= \frac{n^2}{4}\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} + \frac{n}{4}\left(1 - \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2}\right)\end{aligned}$$

41. Sea  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ . Encuentre como distribuye  $Z$  si

$$Z = \frac{\xi_0\sqrt{n}}{\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}}$$

Para esto note que podemos reorganizar un poco las cosas

$$\begin{aligned}Z &= \frac{\xi_0\sqrt{n}}{\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}} \\ &= \frac{\xi_0}{\frac{\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{n}}}\end{aligned}$$

note que  $\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$  es la suma de normales estándar, pero ya demostramos en el ejercicio (30) que esto es una  $\chi_{(n)}^2$ . Definamos  $Y = \chi_{(n)}^2$ , entonces  $Y \sim \chi_{(n)}^2$ , además  $\xi_0$  es independiente de  $Y$ . Entonces nos interesa simplemente

$$Z = \frac{\xi_0}{\sqrt{Y/n}}$$

usamos la variable auxiliar  $W = \sqrt{Y}$ . Las respectivas inversas son

$$\xi_0 = \frac{ZW}{\sqrt{n}}, \quad Y = W^2$$

El jacobiano es

$$|J| = \begin{vmatrix} w/\sqrt{n} & z/\sqrt{n} \\ 0 & 2w \end{vmatrix} = \left| \frac{2}{\sqrt{n}} w^2 \right| = \frac{2}{\sqrt{n}} w^2$$

Ahora el recorrido

$$\begin{aligned}
-\infty &< \xi_0 < \infty \\
-\infty &< \frac{\xi_0}{\sqrt{y/n}} < \infty \\
-\infty &< z < \infty \\
0 &< y < \infty \\
0 &< \sqrt{y} < \infty \\
0 &< W < \infty
\end{aligned}$$

Reemplazamos todo lo necesario en la conjunta

$$\begin{aligned}
f_{Z,W}(z, w) &= \frac{2}{\sqrt{n}} w^2 f_{\xi_0, Y}(zw/\sqrt{n}, w^2) \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} w^2 f_{\xi_0}(zw/\sqrt{n}) f_Y(w^2) \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} w^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(zw/\sqrt{n})^2}{2}} \frac{(w^2)^{k/2-1} e^{-w^2/2}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} w^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2} \left(\frac{z^2}{n} + 1\right)} \frac{(w^2)^{k/2-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)}
\end{aligned}$$

Nos interesa la marginal de  $Z$ , por lo cual integramos respecto de  $w$  para obtenerla

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{n}} w^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{w^2}{2} \left(\frac{z^2}{n} + 1\right)} \frac{(w^2)^{k/2-1}}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} dw \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^\infty w^2 (w^2)^{k/2-1} e^{-\frac{w^2}{2} \left(\frac{z^2}{n} + 1\right)} dw \\
w = u^{1/2} &\Rightarrow dw = \frac{1}{2} u^{-1/2} du \\
&= \frac{2}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^\infty u u^{k/2-1} e^{-\frac{u}{2} \left(\frac{z^2}{n} + 1\right)} \frac{u^{-1/2}}{2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^\infty u^{k/2-1/2} e^{-\frac{u}{2} \left(\frac{z^2}{n} + 1\right)} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^\infty u^{(k/2-1/2+1)-1} e^{-\frac{u}{2} \left(\frac{z^2}{n} + 1\right)} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(n/2 + 1/2)}{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{n} + 1\right)\right]^{n/2+1/2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}
\end{aligned}$$

tenemos entonces

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi n} \Gamma(n/2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Note que  $Z \sim t_{(n)}$ . De acá se concluye que si  $X$  es normal estándar y  $Y$  es una chi cuadrado con  $n$  grados de libertad, entonces

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_{(n)}$$

42. Suponga que la conjunta de  $X, Y$  es

$$P(X = i, Y = j) = \binom{j}{i} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}, \quad i = 0, 1, \dots; j = i, i+1, \dots$$

- (a) Encuentre la fmp de  $X$  y de  $Y$   
 (b) Encuentre la fmp de  $Z = Y - X$   
 (a)

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=i}^{\infty} p_{X,Y}(i, j) \\ &= \sum_{j=i}^{\infty} \binom{j}{i} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \sum_{j=i}^{\infty} \frac{j!}{i!(j-i)!} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \frac{1}{i!} e^{-2\lambda} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{(j-i)!} \lambda^j \\ &= \frac{1}{i!} e^{-2\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j+i-i)!} \lambda^{j+i} \\ &= \frac{1}{i!} e^{-2\lambda} \lambda^i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \lambda^j \\ &= \frac{1}{i!} e^{-2\lambda} \lambda^i e^{\lambda} \\ &= \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} \end{aligned}$$

Luego,

$$p_X(x) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Note que  $X \sim P(\lambda)$ .

Ahora vamos con  $Y$

$$\begin{aligned} P(Y = j) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j}{i} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \\ \text{Si } i > j \text{ entonces } \binom{j}{i} &= 0 \\ &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \\ &= \frac{e^{-2\lambda}}{j!} \lambda^j \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} 1^i 1^{j-i} \\ &= \frac{e^{-2\lambda}}{j!} \lambda^j (1+1)^j \\ &= \frac{e^{-2\lambda}}{j!} \lambda^j 2^j \\ &= \frac{(2\lambda)^j e^{-2\lambda}}{j!} \end{aligned}$$

Luego,

$$p_Y(j) = \frac{(2\lambda)^j e^{-2\lambda}}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Note que  $Y \sim P(2\lambda)$ .

Note que  $X, Y$  no son independientes.

(b)

$$\begin{aligned} P(Z = z) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k, Z = z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k, Y - X = z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k, Y = z + k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z+k}{k} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^{z+k}}{(z+k)!} \\ &= e^{-2\lambda} \lambda^z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+k)!}{k!z!} \frac{\lambda^k}{(z+k)!} \\ &= \frac{e^{-2\lambda} \lambda^z}{z!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{z!} \\ &= \frac{e^{-2\lambda} \lambda^z}{z!} e^{\lambda} \\ &= \frac{e^{-\lambda} \lambda^z}{z!} \end{aligned}$$

Luego,

$$p_Z(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Note que  $Y \sim P(\lambda)$ .

43. Una caja contiene 5 bolas rojas y 3 verdes. Se extraen dos bolas al azar sin reemplazo. Defina

$$X = \begin{cases} 1 & \text{la primera bola extraída es roja} \\ 0 & \text{la primera bola extraída es verde} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{la segunda bola extraída es roja} \\ 0 & \text{la segunda bola extraída es verde} \end{cases}$$

(a) Encuentre la conjunta de  $X, Y$

(b) Encuentre  $p_{X|Y}$

(c) Calcule  $\mathbb{E}(X|Y = y)$

(a)

$$\begin{aligned} P(X = 0, Y = 0) &= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{6}{56} \\ P(X = 1, Y = 1) &= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{56} \\ P(X = 0, Y = 1) &= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56} \\ P(X = 1, Y = 0) &= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56} \end{aligned}$$

Luego podemos reunir todo en una tablita

$X/Y$	0	1
0	$\frac{6}{56}$	$\frac{15}{56}$
1	$\frac{15}{56}$	$\frac{20}{56}$

(b) Por definición

$$p_{X|Y}(x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

note que va a depender del valor de  $Y$  que tomemos. Si  $Y = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x) &= \frac{p_{X,Y}(x, 0)}{p_Y(0)} \\ &= \frac{p_{X,Y}(x, 0)}{\frac{6}{56} + \frac{15}{56}} \end{aligned}$$

reemplazamos con los valores de  $X$

$$\begin{aligned} \frac{p_{X,Y}(0, 0)}{\frac{21}{56}} &= \frac{2}{7} \\ \frac{p_{X,Y}(1, 0)}{\frac{21}{56}} &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

si  $Y = 1$  tenemos

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x) &= \frac{p_{X,Y}(x, 1)}{p_Y(1)} \\ &= \frac{p_{X,Y}(x, 1)}{\frac{15}{56} + \frac{20}{56}} \end{aligned}$$

reemplazamos con los valores de  $X$

$$\begin{aligned} \frac{p_{X,Y}(0, 1)}{\frac{35}{56}} &= \frac{3}{7} \\ \frac{p_{X,Y}(1, 1)}{\frac{35}{56}} &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

de esta forma tenemos

$$\begin{aligned} p_{X|Y=0}(x) &= \begin{cases} \frac{2}{7} & \text{si } x = 0 \\ \frac{5}{7} & \text{si } x = 1 \end{cases} \\ p_{X|Y=1}(x) &= \begin{cases} \frac{3}{7} & \text{si } x = 0 \\ \frac{4}{7} & \text{si } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) La esperanza nuevamente va a depender del valor de  $Y$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X|Y=0) &= 0 \cdot \frac{2}{7} + 1 \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \\ \mathbb{E}(X|Y=1) &= 0 \cdot \frac{3}{7} + 1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

44. Sea  $X, Y, Z$  variables aleatorias independientes con distribución  $U(0, 1)$ . Calcule

$$P(X > Y | Y > Z)$$

Para esto podemos usar la definición y usar la conjunta, ya que son iid.

$$\begin{aligned} P(X > Y | Y > Z) &= \frac{P(X > Y, Y > Z)}{P(Y > Z)} \\ &= \frac{P(Y < X, Z < Y)}{P(Z < Y)} \\ &= \frac{\int_0^1 \int_0^x \int_0^y 1 dz dy dx}{\int_0^1 \int_0^1 \int_0^y 1 dz dy dx} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

45. Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con fmp dada por

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{x+y}{21} & x = 1, 2; y = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Calcule  $P(|Y - X| \leq 1)$  y  $P(|Y - X| < 1)$
- (b) Calcule la esperanza de  $Y - X$
- (a) Para esto primero vamos a definir  $Z = X - Y$ , para que de este modo encontremos todo mas fácil. Veamos todos los valores que puede tomar  $Z$

$$Z = 1 - 1 = 0$$

$$Z = 1 - 2 = -1$$

$$Z = 2 - 1 = 1$$

$$Z = 2 - 2 = 0$$

$$Z = 3 - 1 = 2$$

$$Z = 3 - 2 = 1$$

Tenemos que  $\text{Rec}(Z) = \{-1, 0, 1, 2\}$ . Calculamos las probabilidades respectivas

$$P(Z = -1) = P(X = 2, Y = 1) = \frac{2+1}{21} = \frac{3}{21}$$

$$P(Z = 0) = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 2, Y = 2) = \frac{1+1}{21} + \frac{2+2}{21} = \frac{6}{21}$$

$$P(Z = 1) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3) = \frac{1+2}{21} + \frac{2+3}{21} = \frac{8}{21}$$

$$P(Z = 2) = P(X = 1, Y = 3) = \frac{3+1}{21} = \frac{4}{21}$$

Ahora si calculamos lo pedido

$$\begin{aligned} P(|Y - X| \leq 1) &= P(|Z| \leq 1) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= P(Z = -1) + P(Z = 0) + P(Z = 1) \\ &= \frac{17}{21} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
P(|Y - X| < 1) &= P(|Z| < 1) \\
&= P(-1 < Z < 1) \\
&= P(Z = 0) \\
&= \frac{6}{21}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y - X) &= \mathbb{E}(Z) \\
&= -1 \cdot \frac{3}{21} + 0 \cdot \frac{6}{21} + 1 \cdot \frac{8}{21} + 2 \cdot \frac{4}{21} \\
&= \frac{13}{21}
\end{aligned}$$

46. Sea  $X, Y \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ . Encuentre  $\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right)$  sin calcular una integral.

Para esto vamos a usar un truco y un argumento. Note que por simetría tenemos que

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right) \\
\mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right) - \mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) &= 0 \\
\mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y} - \frac{X}{X+Y}\right) &= 0 \\
\mathbb{E}\left(\frac{Y-X}{X+Y}\right) &= 0 \\
\mathbb{E}\left(\frac{Y-X+X-X}{X+Y}\right) &= 0 \\
\mathbb{E}\left(\frac{X+Y}{X+Y} - \frac{2X}{X+Y}\right) &= 0 \\
\mathbb{E}(1) - 2\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) &= 0 \\
2\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) &= 1 \\
\Rightarrow \mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

47. Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias continuas con distribución conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} a^2 e^{-ay} & 0 < x \leq y; y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

con  $a > 0$ . Encuentre la fdp de  $X/Y$ .

Sea  $Z = X/Y$ . Usamos la v.a auxiliar  $W = Y$ . Las inversas son

$$Y = W, \quad X = ZW$$

El jacobiano es  $J = w$ .

Ahora el recorrido

$$\begin{aligned} 0 < y < \infty \\ 0 < w < \infty \\ 0 < x < y \\ 0 < x/y < 1 \\ 0 < z < 1 \end{aligned}$$

Reemplazamos todo en la conjunta

$$\begin{aligned} f_{Z,W}(z, w) &= wf_{X,Y}(zw, w) \\ f_{Z,W}(z, w) &= wa^2 e^{-aw}, \quad 0 < z < 1, w > 0 \end{aligned}$$

Integramos respecto de  $W$  para encontrar la fdp de  $Z$ .

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^\infty a^2 w e^{-aw} dw \\ &= \int_0^\infty a^2 w^{2-1} e^{-aw} dw \\ &= \int_0^\infty \frac{a^2 w^{2-1} e^{-aw}}{\Gamma(2)} dw \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego,

$$f_Z(z) = 1, \quad 0 < z < 1$$

tenemos que  $Z \sim U(0, 1)$

48. Suponga que  $X \sim N(0, 1)$  y  $Y|X = x \sim N(e^x, \cos^2(x))$ . Encuentre  $\mathbb{E}(Y)$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) \\ &= \mathbb{E}(e^X) \\ &= \mathbb{E}(\log\text{-normal}(0, 1)) \\ &= e^{1/2} \end{aligned}$$

49. Sea  $X, Y \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ . Encuentre la matriz de varianza-covarianza de  $(X + Y, X - Y)$  y deduzca si son independientes.

Para esto basta con utilizar (31) y solo calcular  $\Sigma$ . En nuestro caso la transformación de interés es

$$\begin{pmatrix} X + Y \\ X - Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

como la diagonal secundaria es 0, entonces son independientes.

50. Sea  $X, Y \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$ . Sabiendo que la generadora de momentos de una Variance-gamma distribution es

$$M_{V.G.(\lambda, \alpha, \beta, \mu)}(t) = e^{\mu t} \left( \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + t)^2} \right)^\lambda$$

Encuentre la distribución de  $Z = XY$  sin utilizar el teorema de transformaciones ni calcular integrales.

Para esto vamos a utilizar un truco bien rebuscado. Note que podemos escribir  $XY$  como

$$\begin{aligned} Z &= XY \\ &= X^2 - X^2 + Y^2 - Y^2 + XY \\ &= \frac{X^2 - X^2 + Y^2 - Y^2}{4} + \frac{2XY}{4} + \frac{2XY}{4} \\ &= \frac{X^2 + 2XY + Y^2}{4} - \frac{X^2 - 2XY + Y^2}{4} \\ &= \frac{(X + Y)^2}{4} - \frac{(X - Y)^2}{4} \\ &= \left( \frac{X + Y}{2} \right)^2 - \left( \frac{X - Y}{2} \right)^2 \\ &= W_1^2 - W_2^2 \end{aligned}$$

Note que  $W_i \sim N(0, 1)$  y en particular son independientes por lo mostrado en el ejercicio anterior, también por (28) sabemos que  $W_i^2$  son chi cuadrado. Ahora usamos generadora de momentos

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_{W_1^2 - W_2^2}(t) \\ &= M_{W_1^2}(t) M_{W_2^2}(-t) \\ &= \left( \frac{1}{1 - 2t} \right)^{n/2} \left( \frac{1}{1 + 2t} \right)^{n/2} \\ &= \left( \frac{1}{1 - 4t^2} \right)^{n/2} \end{aligned}$$

Si la arreglamos un poco tenemos

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \left( \frac{1}{1 - 4t^2} \right)^{n/2} \\ &= \left( \frac{1/4}{1/4 - t^2} \right)^{n/2} \\ &= e^{0 \cdot t} \left( \frac{1/2^2 - 0^2}{1/2^2 - (0 - t)^2} \right)^{n/2} \end{aligned}$$

Esta ultima es la generadora de momentos de la Variance-gamma. Entonces se concluye que

$$Z = XY \sim \text{Variance} - \text{gamma}(n/2, 1/2, 0, 0)$$

51. Suponga que se tienen las v.as  $X_1, W, T$ , donde  $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $W \sim F$ . Donde  $X_1, W$  no son independientes. Con

$$T = \frac{X_1}{W}$$

Si  $W|T \sim N(2, T)$ . Encuentre  $\mathbb{E}(T)$ .

Para esto necesitamos darnos cuenta de un par de cosas.

Lo pedido se calcula como sigue

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{X_1}{W} \\
 TW &= X_1 \\
 \mathbb{E}(TW) &= \mathbb{E}(X_1) \\
 \mathbb{E}(\mathbb{E}(TW|T)) &= \lambda \\
 \mathbb{E}(T\mathbb{E}(W|T)) &= \lambda \\
 \mathbb{E}(2T) &= \lambda \\
 \mathbb{E}(T) &= \frac{\lambda}{2}
 \end{aligned}$$

52. Muestre que  $|\rho| \leq 1$ .

Para esto vamos a utilizar Cauchy-Schwarz. Sea  $\mu_X$  y  $\mu_Y$  la media de  $X, Y$ .

$$\begin{aligned}
 |\text{Cov}(X, Y)| &= |\mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]| \\
 &\leq \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mu_X)^2]} \sqrt{\mathbb{E}[(Y - \mu_Y)^2]} \\
 |\text{Cov}(X, Y)| &\leq \sqrt{\text{Var}(X)} \sqrt{\text{Var}(Y)} \\
 \frac{|\text{Cov}(X, Y)|}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} &\leq 1 \\
 \left| \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} \right| &\leq 1
 \end{aligned}$$

53. Decida si la siguiente igualdad es verdadera

$$\mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{\mathbb{E}(Y)}{\mathbb{E}(X)}$$

No es verdadera, pues sea  $X, Y \sim U(0, 1)$  independientes. Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{x} dy dx \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2}$$

lo que implica

$$\mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{\mathbb{E}(Y)}{\mathbb{E}(X)} = \frac{1/2}{1/2} = 1$$

donde claramente los resultados no coinciden.

## 5 Teoría Asintótica

### 5.1 Definiciones y propiedades

El principal objetivo de este tópico, es estudiar el comportamiento estocástico de una secuencia de variables (o vectores) aleatorias  $\{Z_n; n \geq 1\}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . La secuencia  $Z_n$  puede estar asociada a un estadístico muestral o alguna función de dicho estadístico que tenga algún interés inferencial, en cuyo caso el subíndice  $n$  representa el tamaño muestral. A pesar que la noción de un tamaño de muestra infinito es un concepto teórico, el sentido práctico es obtener aproximaciones útiles en el contexto de muestras finitas, ya que generalmente las expresiones se simplifican en el límite.

Algunas desigualdades importantes para este capítulo son

- Markov's inequality:

$$\mathbb{P}(X \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{c}$$

- Chebyshev's inequality:

$$\mathbb{P}(|X - \alpha| \geq k) \leq \frac{\mathbb{E}[(X - \alpha)^2]}{k^2}$$

Si  $\alpha = \mathbb{E}(X)$ , se tiene:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq k) \leq \frac{\text{Var}(X)}{k^2} \quad (39)$$

Ahora definimos los tipos/modos de convergencia de secuencia de v.as. Sea  $\{Z_n; n \geq 1\}$  una secuencia de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , y sea  $\theta \in \mathbb{R}$ .

- Se dice que  $Z_n$  converge en probabilidad para  $\theta$  si  $\forall \epsilon > 0$  se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - \theta| \geq \epsilon) = 0$$

o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - \theta| \leq \epsilon) = 1$$

Se utiliza la notación  $Z_n \xrightarrow{P} \theta$ .

- Se dice que  $Z_n$  converge en media cuadrática (mc) para una constante  $\theta$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(Z_n - \theta)^2] = 0$$

Se utiliza la notación  $Z_n \xrightarrow{mc} \theta$

- Se dice que  $Z_n$  converge en media de orden  $r$  para una constante  $\theta$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(Z_n - \theta)^r] = 0$$

Se utiliza la notación  $Z_n \xrightarrow{mr} \theta$

- Se dice que  $Z_n$  converge casi seguramente (cs) para  $\theta$  si  $\forall \epsilon > 0$  se cumple

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |Z_n - \theta| < \epsilon\right) = 1$$

Se utiliza la notación  $Z_n \xrightarrow{cs} \theta$ .

- Sea  $Z$  cualquier variable aleatoria cuya distribución no depende de  $n$ . Se dice que  $Z_n$  converge en distribución para  $Z$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = F_Z(z) \quad (40)$$

para todo  $z$  donde  $F_Z$  es continua (es decir,  $\forall z$  tal que  $P(Z = z) = 0$ ). Se utiliza la notación  $Z_n \xrightarrow{D} \theta$ . Este tipo de convergencia es sumamente importante, ya que da pie a uno de los teoremas mas importantes de la Estadística.

Para el caso discreto se tiene que una condición suficiente para que  $Z_n \xrightarrow{D}$  esta dada por,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n = z) = P(Z = z), \quad \forall z = 0, 1, 2, \dots$$

A partir de lo anterior surgen los siguientes teoremas y propiedades

- Si  $Z_n \xrightarrow{mc} \theta$  entonces  $Z_n \xrightarrow{P} \theta$
- Si tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n) = \theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Var(Z_n) = 0$$

entonces

$$Z_n \xrightarrow{P} \theta \quad (41)$$

- Ley débil de los grandes números.

Sea  $X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias iid, con  $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ . Entonces,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu = E(X_1)$$

- Si  $Z_n \xrightarrow{P} \theta$  y  $g(\cdot)$  una función continua, entonces

$$g(Z_n) \xrightarrow{P} g(\theta) \quad (42)$$

- Ley fuerte de los grandes números.

Sea  $X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias iid, con  $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$ . Entonces,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{cs} \mu = E(X_1)$$

- Si  $Z_n \xrightarrow{cs} \theta$  entonces  $Z_n \xrightarrow{P} \theta$

•

$$Z_n \xrightarrow{D} Z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t) \quad (43)$$

para todo  $t$  en algún intervalo que contenga el 0 y donde las fgm's existen.

•

$$Z_n \xrightarrow{D} Z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi_Z(t) \quad (44)$$

para todo  $t$ , donde  $\varphi_{Z_n}(t)$  es la f.c. de  $Z_n$ ,  $n \geq 1$ , y  $\varphi_Z(t)$  es la f.c. de  $Z$ .

- Si  $Z_n \xrightarrow{D} Z$  y  $g(\cdot)$  una función continua, entonces se tiene

$$g(Z_n) \xrightarrow{D} g(Z) \quad (45)$$

- Si  $Z_n \xrightarrow{P} Z$  entonces  $Z_n \xrightarrow{D} Z$

- Si  $Z_n \xrightarrow{P} \theta$  entonces  $Z_n \xrightarrow{D} \theta$

Ahora extendamos lo visto a dos secuencias de v.as.

- Teorema de Slutsky.

Sean  $\{X_n; n \geq 1\}$  e  $\{Y_n; n \geq 1\}$  secuencias de variables aleatorias tales que  $X_n \xrightarrow{D} X$  e  $Y_n \xrightarrow{P} b$  ( $b$  constante). Entonces, para cualquier función continua  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se tiene que

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{D} g(X, b)$$

A partir de esto se tiene que

1.  $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + b$
2.  $Y_n X_n \xrightarrow{D} bX$
3.  $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{D} \frac{X}{b}$ , siempre que  $b \neq 0$

- Sean  $\{X_n; n \geq 1\}$  e  $\{Y_n; n \geq 1\}$  secuencias de variables aleatorias tales que  $X_n \xrightarrow{P} a$  e  $Y_n \xrightarrow{P} b$  ( $a, b$  constantes). Entonces, para cualquier función continua  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se tiene que

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b) \quad (46)$$

- Sean  $\{a_n; n \geq 1\}$  una secuencia de números reales y  $\{Z_n; n \geq 1\}$  una secuencia de variables aleatorias, tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad a_n(Z_n - \theta) \xrightarrow{D} X \quad (47)$$

para alguna constante  $\theta$  y variable aleatoria  $X$ . Entonces

$$Z_n \xrightarrow{P} \theta$$

- Sean  $\{a_n; n \geq 1\}$  una secuencia de números reales y  $\{Z_n; n \geq 1\}$  una secuencia de variables aleatorias, tales que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad a_n(Z_n - \theta) \xrightarrow{D} X$$

para alguna constante  $\theta$  y variable aleatoria  $X$ . Si  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua y diferenciable en  $\theta$ , entonces,

$$a_n[g(Z_n) - g(\theta)] \xrightarrow{D} g'(\theta)X$$

donde  $g'$  es la derivada de  $g$ .

Teorema del limite central

Sea  $X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias iid con media  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  y varianza finita, es decir,  $0 < \text{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$ . Entonces,

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} Z \sim N(0, 1)$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ . En forma de limite se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

En otras palabras se tiene que

$$P(\bar{X}_n \leq x) \simeq \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(x - \mu)}{\sigma}\right)$$

para  $n$  suficientemente grande.

Una herramienta útil es el Método delta. Suponga que  $\sqrt{n}(Z_n - \mu) \xrightarrow{D} Z \sim N(0, \sigma^2)$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ , y sea  $g$  una función continua y diferenciable en  $\mu$ . Entonces

$$\sqrt{n}[g(Z_n) - g(\mu)] \xrightarrow{D} Z \sim N(0, [g'(\mu)]^2 \sigma^2) \quad (48)$$

## 5.2 Ejercicios del capítulo

1. Sea  $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ , con  $X_i \stackrel{iid}{\sim} Ber(p)$ . Muestre que  $Z_n \xrightarrow{P} p$ .

Debemos mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - p| \geq \epsilon) = 0$$

Para esto podemos usar Chebyshev. Calculemos la esperanza y varianza de  $Z_n$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n} \cdot n\mathbb{E}(X_1) \\ &= p \\ \text{Var}(Z_n) &= \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot n\text{Var}(X_1) \\ &= \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

Aplicamos (39)

$$\begin{aligned} 0 &\leq P(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(Z_n)}{\epsilon^2} \\ 0 &\leq P(|Z_n - p| \geq \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - p| \geq \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \\ 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - p| \geq \epsilon) \leq 0 \end{aligned}$$

Teniendo así que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - p| \geq \epsilon) = 0$$

Done se concluye que  $Z_n \xrightarrow{P} p$ .

2. Sea  $Y_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i - p}{n}$ , con  $X_i \stackrel{iid}{\sim} Bin(1, p)$ . Muestre que  $Z_n \xrightarrow{P} 0$ .

Podemos hacer lo mismo que antes.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i - p}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i - np\right) \\ &= \frac{1}{n} (n\mathbb{E}(X_1) - np) \\ &= \frac{1}{n} (np - np) \\ &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
Var(Y_n) &= Var\left(\sum_{i=1}^n \frac{X_i - p}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^n X_i - p\right) \\
&= \frac{1}{n^2} (n Var(X_1)) \\
&= \frac{1}{n^2} (np(1-p)) \\
&= \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}$$

Reemplazamos en (39)

$$\begin{aligned}
0 \leq P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \epsilon) &\leq \frac{Var(Y_n)}{\epsilon^2} \\
0 \leq P(|Y_n - 0| \geq \epsilon) &\leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \\
0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - 0| \geq \epsilon) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \\
0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - 0| \geq \epsilon) &\leq 0
\end{aligned}$$

Se concluye que  $Z_n \xrightarrow{P} 0$ .

3. Suponga que  $P(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n}$  y  $P(Z_n = \theta + n^2) = \frac{1}{n}$  para  $n \geq 1$ . Muestre que  $Z_n \xrightarrow{P} \theta$ .

Por enunciado tenemos que  $Rec(Z_n) = \{\theta, \theta + n^2\}$ . Y tenemos

$$P(Z_n = z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n} & z = \theta \\ \frac{1}{n} & z = \theta + n^2 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
P(|Z_n - \theta| \geq \epsilon) &= 1 - P(|Z_n - \theta| < \epsilon) \\
&= 1 - P(\epsilon < Z_n - \theta < \epsilon) \\
&= 1 - P(\epsilon + \theta < Z_n < \epsilon + \theta) \\
&= 1 - P(Z_n = \theta) \\
&= 1 - (1 - 1/n) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

aplicamos limite

$$\begin{aligned}
P(|Z_n - \theta| \geq \epsilon) &= \frac{1}{n} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - \theta| \geq \epsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye que  $Z_n \xrightarrow{P} \theta$ .

4. Sea  $X_1, X_2, X_3, \dots$  una secuencia de variables aleatorias que converge en probabilidad a una constante  $a$ . Suponga que  $P(X_i > 0) = 1$ , para todos los  $i$ . Verifique que la secuencia definida por  $Y_i = a/X_i$  también converja en probabilidad.

Por el teorema (42), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{X_n} &\xrightarrow{P} \frac{1}{a} \\ \Rightarrow \frac{a}{X_n} &\xrightarrow{P} 1 \end{aligned}$$

Verifiquemos esto ultimo. Sea  $\epsilon > 0$ , usando la definición tenemos

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{a}{X_n} - 1\right| \leq \epsilon\right) &= P\left(-\epsilon \leq \frac{a}{X_n} - 1 \leq \epsilon\right) \\ &= P\left(1 - \epsilon \leq \frac{a}{X_n} \leq \epsilon + 1\right) \\ &= P\left(\frac{1 - \epsilon}{a} \leq \frac{1}{X_n} \leq \frac{\epsilon + 1}{a}\right) \\ &= P\left(\frac{a}{\epsilon + 1} \leq X_n \leq \frac{a}{1 - \epsilon}\right) \\ &= P\left(\frac{a + a\epsilon - a\epsilon}{\epsilon + 1} \leq X_n \leq \frac{a + a\epsilon - a\epsilon}{1 - \epsilon}\right) \\ &= P\left(a - \frac{a\epsilon}{\epsilon + 1} \leq X_n \leq a + \frac{a\epsilon}{1 - \epsilon}\right) \\ &\geq P\left(a - \frac{a\epsilon}{\epsilon + 1} \leq X_n \leq a + \frac{a\epsilon}{1 + \epsilon}\right) \\ &= P\left(-\frac{a\epsilon}{\epsilon + 1} \leq X_n - a \leq \frac{a\epsilon}{1 + \epsilon}\right) \\ &= P\left(|X_n - a| \leq \frac{a\epsilon}{1 + \epsilon}\right) \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} 1 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{a}{X_n} - 1\right| \leq \epsilon\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(|X_n - a| \leq \frac{a\epsilon}{1 + \epsilon}\right) \\ 1 &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{a}{X_n} - 1\right| \leq \epsilon\right) \geq 1 \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{a}{X_n} - 1\right| \leq \epsilon\right) &= 1 \end{aligned} \tag{49}$$

Note que en (49) el limite es 1 ya que  $X_n$  converge en probabilidad a  $a$ .

5. Sea  $Z_n \sim \text{Bin}(n, p)$ . Muestre que  $\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) \xrightarrow{P} p(1 - p)$ .

Sabemos que por la Ley de los grandes números  $\bar{X}_n \xrightarrow{P} p$ . Aplicando (42) con  $g(x) = x(1 - x)$  tenemos

$$g(\bar{X}_n) = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) \xrightarrow{P} p(1 - p)$$

6. Sea  $X$  una v.a, defina  $X_n = X + Y_n$ , donde

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n}, \text{ Var}(Y_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

con  $\sigma > 0$  constante. Demuestre que  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

Para esto, recordemos la desigualdad triangular  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . Usando  $a = Y_n - \mathbb{E}(Y_n)$  y  $b = \mathbb{E}(Y_n)$  tenemos

$$\begin{aligned} |Y_n - \mathbb{E}(Y_n) + \mathbb{E}(Y_n)| &\leq |Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| + |\mathbb{E}(Y_n)| \\ &= |Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Además notemos que  $X_n = X + Y_n \Rightarrow Y_n = X_n - X$ .

El porqué de esto, se aprecia en el siguiente desarrollo. Usamos la definición, sea  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| \geq \epsilon) &= P(|Y_n| \geq \epsilon) \\ &= P(|Y_n| - \mathbb{E}(Y_n) + \mathbb{E}(Y_n) \geq \epsilon) \\ &\leq P\left(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| + \frac{1}{n} \geq \epsilon\right) \end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned} &= P\left(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \epsilon - \frac{1}{n}\right) \\ &\leq \frac{\text{Var}(Y_n)}{(\epsilon - 1/n)^2} \end{aligned} \tag{51}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sigma^2}{n(\epsilon - 1/n)^2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n(\epsilon - 1/n)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se puede concluir que  $X_n \xrightarrow{P} X$ .

En (50) se utilizó la desigualdad triangular anterior expuesta, y en (51) se utilizó Chebyshev.

7. Sea  $Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  donde  $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, 1)$

(a) Calcule  $\mathbb{E}(Y_n)$  y  $\text{Var}(Y_n)$

(b) Pruebe que  $Y_n \xrightarrow{P} 1$

(c) Pruebe que  $n(1 - Y_n) \xrightarrow{D} Z \sim \text{Exp}(1)$

Recordando (36) tenemos que  $f_{Y_n}(y) = ny^{n-1} \cdot I(0 < y < 1)$ .

(a) Podemos hacer dos cosas, reconocer que  $Y_n \sim \text{Beta}(n, 1)$  o calcular la esperanza y varianza de forma directa. Procederemos por esta última.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \int_0^1 yny^{n-1} dy = \int_0^1 ny^n dy \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Para la varianza usaremos la fórmula  $\text{Var}(Y_n) = \mathbb{E}(Y_n^2) - [\mathbb{E}(Y_n)]^2$ . Entonces calculamos lo faltante.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n^2) &= \int_0^1 y^2ny^{n-1} dy = \int_0^1 ny^{n+1} dy \\ &= \frac{n}{n+2} \end{aligned}$$

Finalmente se tiene

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{n}{n+1}$$

$$\text{Var}(Y_n) = \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

- (b) Para probar la convergencia en probabilidad recordamos el teorema (41). Solo nos falta calcular los límites respectivos.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 0 - 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(Y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 0 - 0 = 0$$

En base al teorema podemos afirmar y concluir que  $Y_n \xrightarrow{P} 1$ .

También se hubiese podido hacer con la definición formal, y aplicar la desigualdad de Markov.

- (c) Podemos tomar  $Z_n = n(1 - Y_n)$  y recordar que  $f_{Y_n}(y) = ny^{n-1}$ . Ahora buscamos la fdp de  $Z_n$ .

Primero el intervalo. Como el intervalo de  $Y_n$  es  $(0, 1)$  se tiene

$$n(1 - Y_n) = n(1 - 0) = n$$

$$n(1 - Y_n)n(1 - 1) = 0$$

El recorrido de  $Z_n$  es  $(0, n)$ . Ahora la respectiva transformación.

$$P(Z_n \leq z) = P(n(1 - Y_n) \leq z)$$

$$= P\left(1 - Y_n \leq \frac{z}{n}\right)$$

$$= P\left(-Y_n \leq \frac{z}{n} - 1\right)$$

$$= P\left(Y_n \geq 1 - \frac{z}{n}\right)$$

$$= 1 - P\left(Y_n \leq 1 - \frac{z}{n}\right)$$

$$F_{Z_n}(z) = 1 - F_{Y_n}\left(1 - \frac{z}{n}\right)$$

$$f_{Z_n}(z) = \frac{1}{n} f_{Y_n}\left(1 - \frac{z}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} n \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1}$$

$$f_{Z_n}(z) = \left(1 - \frac{z}{n}\right)^{n-1}$$

Ahora calculamos la acumulada

$$P(Z_n \leq z) = \int_0^z \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = 1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n$$

Lo anterior para  $z \in (0, n)$  de modo que la acumulada esta dada por:

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n & 0 \leq z < n \end{cases}$$

Ahora calculamos el limite respectivo en base a (40).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n & 0 \leq z < \infty \end{cases}$$

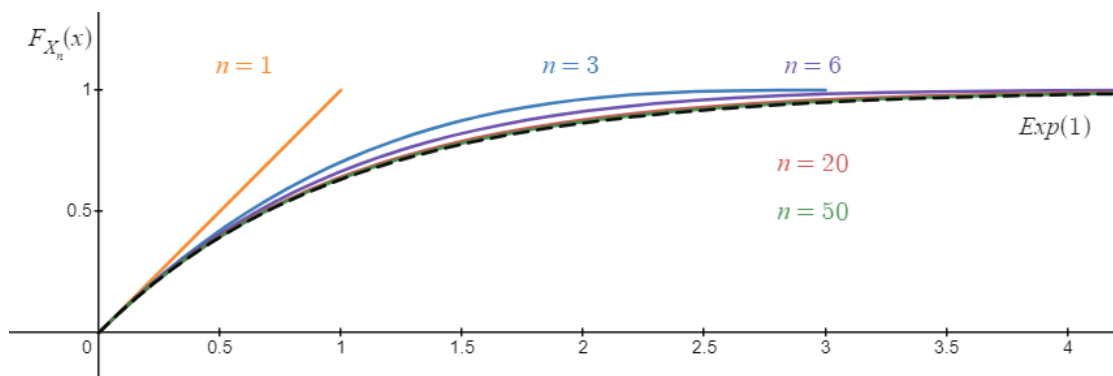
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(1 + \frac{-z}{n}\right)^n \\ &= 1 - e^{-z} \end{aligned}$$

Entonces la acumulada de  $Z$  esta dada por

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1 - e^{-z} & 0 \leq z < \infty \end{cases}$$

Donde claramente es la acumulada de una exponencial de parámetro 1.

Veamos esto ultimo en la siguiente imagen



Note que a partir de  $n = 20$  ya se empieza a parecer bastante a una exponencial de parámetro 1.

8. Demuestre la Ley débil de los grandes números.

Sea  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$  y  $Var(X_i) = \sigma^2$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) &= \mu \\ Var\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) &= \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

Aplicando Chebyshev tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| \leq \epsilon\right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ .

9. Sea  $Z_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$ , donde  $np_n = \lambda > 0$ , para  $i = 1, 2, \dots$ . Muestre que  $Z_n \xrightarrow{D} P(\lambda)$ .

Para esto podemos usar el teorema (43). Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p_n + p_n e^t)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + p_n(e^t - 1))^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda}{n}(e^t - 1)\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}\right)^n \\ &= e^{\lambda(e^t - 1)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Esta ultima es la generadora de momentos de una  $P(\lambda)$ . Luego, se concluye que  $Z_n \xrightarrow{D} P(\lambda)$ .

10. Sea  $X_n \sim P(n)$ . La fgm de  $X_n$  está dada por:

$$M_{X_n}(t) = \exp\{n(e^t - 1)\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- (a) Sea  $Y_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$ . Muestre que  $M_{Y_n}(t) = e^{-t\sqrt{n}} M_{X_n}(t/\sqrt{n})$
- (b) Muestre que  $\ln(M_{Y_n}(t)) = -t\sqrt{n} + n(e^{t/\sqrt{n}} - 1) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!n^{1/2}} + \dots$ ; y que  $\ln(M_{Y_n}(t)) \rightarrow \frac{t^2}{2}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Osea  $M_{Y_n}(t) \rightarrow e^{t^2/2}$  cuando  $n \rightarrow \infty$
- (c) Muestre que  $Y_n \xrightarrow{D} Y$ , donde  $Y \sim N(0, 1)$  cuando  $n \rightarrow \infty$
- (a) Usando la definición de la función generadora de momentos se tiene:

$$\begin{aligned}M_{Y_n}(t) &= \mathbb{E} \left( e^{t \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{\frac{tX_n}{\sqrt{n}} - t\sqrt{n}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{\frac{tX_n}{\sqrt{n}}} \right) e^{-t\sqrt{n}} \\ &= \mathbb{E} \left( e^{\frac{t}{\sqrt{n}} X_n} \right) e^{-t\sqrt{n}} \\ &\Rightarrow M_{Y_n}(t) = e^{-t\sqrt{n}} M_{X_n}(t/\sqrt{n})\end{aligned}$$

(b) Del enunciado y de (a) tenemos:

$$M_{Y_n}(t) = \exp[n(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} - 1)] \exp[-t\sqrt{n}]$$

Tomando logaritmo y aplicamos propiedades

$$\begin{aligned} \ln(M_{Y_n}(t)) &= n(e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} - 1) - t\sqrt{n} \\ &= ne^{\frac{t}{\sqrt{n}}} - n - t\sqrt{n} \end{aligned}$$

Expandimos la exponencial en serie de Taylor

$$\begin{aligned} &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t/\sqrt{n})^k}{k!} - n - t\sqrt{n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k n^{1-\frac{k}{2}}}{k!} - n - t\sqrt{n} \\ &= \left( n + t\sqrt{n} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!\sqrt{n}} + \frac{4!t^4}{n} + \dots \right) - n - t\sqrt{n} \\ &= n - n + t\sqrt{n} - t\sqrt{n} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!\sqrt{n}} + \frac{t^4}{4!n} + \dots \\ \Rightarrow \ln(M_{Y_n}(t)) &= \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!\sqrt{n}} + \frac{t^4}{4!n} + \dots \end{aligned}$$

Ahora tomamos limite

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(M_{Y_n}(t)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{\sqrt{n}3!} + \frac{t^4}{n4!} + \dots \right) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(M_{Y_n}(t)) &= \frac{t^2}{2} \end{aligned}$$

Tomando exponencial en ambos lados se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Y_n}(t) = e^{t^2/2}$$

(c) Mostramos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Y_n}(t) = e^{t^2/2}$ , y esta ultima es la generadora de momentos de una  $N(0, 1)$ , por lo cual se concluye que

$$Y_n \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

11. Si  $Z_n \sim \chi_{(n)}^2$ ,  $n \geq 1$ , demuestre que  $Y_n = \frac{Z_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{D} N(0, 1)$  y  $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{P} 1$ .

Procedemos de manera análoga al ejercicio anterior.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} M_{Y_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-t\sqrt{\frac{n}{2}}} M_{Z_n} \left( t \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-t\sqrt{\frac{n}{2}}} \left( \frac{1}{1 - \frac{2t}{\sqrt{2n}}} \right)^{n/2} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(M_{Y_n}(t)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} -t\sqrt{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{2t}{\sqrt{2n}}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -t\sqrt{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \ln \left( \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{n}}} \right) \end{aligned}$$

expandimos el logaritmo en serie de Taylor

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} -t\sqrt{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}t/\sqrt{n})^k}{k}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} -t \sqrt{\frac{n}{2}} + \frac{n}{2} \frac{2t}{\sqrt{n}} + \frac{n}{2} \frac{2t^2}{2n} + \frac{n}{2} \frac{2^{3/2} t^3}{3n^{3/2}} + \frac{n}{2} \frac{2^2 t^4}{4n^2} + \dots \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^2}{2} + \frac{n}{2} \frac{2^{3/2} t^3}{3n^{3/2}} + \frac{n}{2} \frac{2^2 t^4}{4n^2} + \dots \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^2}{2} + \frac{2^{3/2} t^3}{6n^{1/2}} + \frac{2^2 t^4}{8n} + \dots \\
&= \frac{t^2}{2} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(M_{Y_n}(t)) &= \frac{t^2}{2} \\
\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} M_{Y_n}(t) &= e^{\frac{t^2}{2}}
\end{aligned}$$

Esta ultima es la generadora de momentos de una normal estándar, por lo cual

$$Y_n \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

Para probar lo ultimo es fácil, pues podemos aplicar (41), entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right) &= \frac{1}{n} \mathbb{E}(Z_n) \\
&= \frac{n}{n} \\
&= 1 \\
\text{Var}\left(\frac{Z_n}{n}\right) &= \frac{1}{n^2} \text{Var}(Z_n) \\
&= \frac{2n}{n^2} \\
&= \frac{2}{n}
\end{aligned}$$

Ahora tomamos limite

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}\left(\frac{Z_n}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0
\end{aligned}$$

Luego, por (41) se concluye que  $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{P} 1$

12. Si  $Z_n \xrightarrow{D} Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Determine la convergencia en distribución de  $Y_n = \left(\frac{Z_n - \mu}{\sigma}\right)^2$ .

Podemos usar (45), pues se tiene que

$$\frac{Z_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{D} N(0, 1)$$

ahora, usando  $g(x) = x^2$ , podemos recordar (28). Donde se deduce que

$$\left(\frac{Z_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow{D} \left(\frac{Z - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_{(1)}^2$$

Recuerde que  $\frac{Z - \mu}{\sigma}$  es simplemente una normal estandar, y su cuadrado es una chi cuadrado con 1 grado de libertad.



13. El tiempo que pasa, en horas, antes que una pieza importante de un equipo electrónico que se utiliza para fabricar un reproductor de DVD empiece a fallar sigue una distribución exponencial donde el 86,47% de las piezas fallan antes de 1000 horas. En una muestra aleatoria de 100 equipos electrónicos, calcule la probabilidad aproximada de que el tiempo medio que pasa antes de que la pieza importante falle se encuentre entre 450 y 550 horas.

Sea  $X$  el tiempo de falla, tenemos que  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , por lo cual necesitamos encontrar el valor del parámetro, pues no nos lo dan. Entonces con la información entregada tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{1000} \lambda e^{-\lambda x} dx &= 0.8647 \\ 1 - e^{-1000\lambda} &= 0.8647 \\ \lambda &= 0.002\end{aligned}$$

Nos piden  $P(450 \leq \bar{X} \leq 550)$ . Necesitamos la esperanza y varianza. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{0.002} = 500 \\ \text{Var}(X) &= \frac{1}{0.002^2} = \frac{1}{250000}\end{aligned}$$

Nuestra muestra es de tamaño  $n = 100$ . Entonces aplicando TLC tenemos

$$\begin{aligned}P(450 \leq \bar{X} \leq 550) &= P\left(\frac{450 - 500}{\sqrt{\frac{1}{250000 \cdot 100}}} \leq \frac{\bar{X} - 500}{\sqrt{\frac{1}{250000 \cdot 100}}} \leq \frac{550 - 500}{\sqrt{\frac{1}{250000 \cdot 100}}}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= 0.6826\end{aligned}$$

14. Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes con idéntica distribución, la cual está determinada por la siguiente función de probabilidad:

$$p_X(x) = \begin{cases} 2/3, & \text{si } x = 0.8 \\ 1/3, & \text{si } x = 3 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Determine el valor esperado y varianza de  $X_i$ , con  $i = 1, \dots, n$ .
- Proponga una distribución aproximada para la variable aleatoria  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  y calcule la probabilidad que  $S_{31}$  sea menor o igual a 56.
- Defina la variable aleatoria:  $T_n = \prod_{i=1}^n X_i$ . Calcule aproximadamente la probabilidad que  $T_{31}$  sea menor o igual a 100. (Hint: aplicar logaritmo)
- Cada  $X_i$  tiene la misma distribución, por lo cual basta con calcular el caso particular  $X$ . Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_i) &= \mathbb{E}(X) \\ &= 0.8 \cdot \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 1.533\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(X_i) &= \text{Var}(X) \\
&= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] \\
&= \mathbb{E}[(X - 1.533)^2] \\
&= (0.8 - 1.533)^2 \frac{2}{3} + (3 - 1.533)^2 \frac{1}{3} \\
&= 1.075556
\end{aligned}$$

(b) Nos piden  $P\left(\sum_{i=1}^{31} X_i \leq 56\right)$ , podemos usar *TLC*. Definamos

$$Y = \sum_{i=1}^{31} X_i$$

entonces

$$\begin{aligned}
Y &\sim_A N(n\mathbb{E}(X_i), n\text{Var}(X_i)) \\
Y &\sim_A N(31 \cdot 1.533, 31 \cdot 1.075556) \\
Y &\sim_A N(47.523, 33.34224)
\end{aligned}$$

Ahora calculamos, recordando que es una distribución discreta, por lo cual hay que usar corrección por continuidad, entonces

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_{i=1}^{31} X_i \leq 56\right) &\approx P(Y \leq 56 + 0.5) \\
&\approx P(Y \leq 56.5) \\
&\approx \Phi\left(\frac{56.5 - 47.523}{\sqrt{33.34224}}\right) \\
&\approx \Phi(1.554654) \\
&\approx 0.9399858
\end{aligned}$$

(c) Nos piden  $P\left(\prod_{i=1}^{31} X_i \leq 100\right)$ , note que si aplicamos logaritmo tenemos

$$\begin{aligned}
P\left(\prod_{i=1}^{31} X_i \leq 100\right) &= P\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{31} X_i\right) \leq \ln(100)\right) \\
&= P\left(\sum_{i=1}^{31} \ln(X_i) \leq \ln(100)\right)
\end{aligned}$$

Ahora definamos  $Z_i = \ln(X_i)$ , necesitamos encontrar la esperanza y varianza de  $Z_i$  para aplicar *TLC*, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_i) &= \mathbb{E}(\ln(X_i)) \\
&= \mathbb{E}(\ln(X)) \\
&= \ln(0.8) \cdot \frac{2}{3} + \ln(3) \cdot \frac{1}{3} \\
&= 0.2174417 \\
\text{Var}(Z_i) &= \text{Var}(\ln(X_i)) \\
&= \mathbb{E}[(\ln(X_i) - \mathbb{E}(\ln(X_i)))^2] \\
&= \mathbb{E}[(\ln(X_i) - 0.2174417)^2] \\
&= [\ln(0.8) - 0.2174417]^2 \cdot \frac{2}{3} + [\ln(3) - 0.2174417]^2 \cdot \frac{1}{3} \\
&= 0.3882308
\end{aligned}$$

Ahora si tenemos todo.

Definamos

$$Y = \sum_{i=1}^{31} \ln(X_i)$$

entonces

$$Y \sim_A N(31 \cdot 0.2174417, 31 \cdot 0.3882308)$$

$$Y \sim_A N(6.740693, 12.03515)$$

Calculamos

$$\begin{aligned} P\left(\prod_{i=1}^{31} X_i \leq 100\right) &= P\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{31} X_i\right) \leq \ln(100)\right) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{31} \ln(X_i) \leq \ln(100)\right) \\ &\approx P(Y \leq \ln(100) + 0.5) \\ &\approx \Phi\left(\frac{\ln(100) + 0.5 - 6.740693}{\sqrt{12.03515}}\right) \\ &\approx \Phi(-0.4714449) \\ &\approx 0.3186615 \end{aligned}$$

La notación  $\sim_A$  corresponde a que distribuye asintoticamente normal.

15. Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Cauchy}(0, 1)$ . Demuestre que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{D} \text{Cauchy}(0, 1)$$

Para esto podemos usar la función característica, pues la función generadora de momentos no existe. Podemos usar el teorema(44). Entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i}(t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t/n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_{X_1}(t/n))^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-|t/n|}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{1}{n}|t|}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-|t|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-|t|} \\ &= e^{-|t|} \end{aligned}$$

Y esta ultima es la función característica de una  $\text{Cauchy}(0, 1)$ , lo cual prueba lo pedido.

Es posible demostrar que si  $X \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ , entonces

$$\varphi_X(t) = e^{-|t|}$$

16. Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$$

A primera vista parece que de forma directa no se puede calcular. Pero vayamos expresando cosas de manera familiar. Sea  $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} P(1)$ , entonces  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim P(n)$ , es decir,

$P(Y_n = k) = \frac{n^k e^{-n}}{k!}$ , pero esto es lo mismo que tenemos arriba, y en particular, estamos sumando hasta  $n$ , es decir

$$e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{n^k e^{-n}}{k!} = P(Y_n \leq n)$$

Nos piden entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq n)$$

Definamos  $\bar{Y}_n = \frac{Y_n}{n}$ . Calculemos la media y varianza

$$\mathbb{E}(\bar{Y}_n) = 1, \quad \text{Var}(\bar{Y}_n) = \frac{1}{n}$$

Aplicamos TLC

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_n}{n} \leq 1\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{Y}_n \leq 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{Y}_n - 1}{\sqrt{1/n}} \leq \frac{1 - 1}{\sqrt{1/n}}\right) \\ &= \Phi(0) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego,  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$ .

17. Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias independientes con  $X_1 = 0$  y para  $j \geq 2$ ,

$$P(X_j = k) = \frac{1}{j^3} \mathbb{I}_{\{k=\pm 1, \pm 2, \dots, \pm j\}} + \frac{j^3 - 2}{j^3} \mathbb{I}_{\{k=0\}}$$

Pruebe que si  $\alpha > 1/2$ , entonces

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n^\alpha} \xrightarrow{P} 0$$

Para esto necesitamos calcular la esperanza y varianza, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_j) &= \sum_{k=1}^j (-k) \frac{1}{j^3} + \sum_{k=1}^j k \frac{1}{j^3} + 0 \cdot \frac{j^3 - 2}{j^3} \\ &= -\sum_{k=1}^j k \frac{1}{j^3} + \sum_{k=1}^j k \frac{1}{j^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X_j) &= \sum_{k=1}^j (-k)^2 \frac{1}{j^3} + \sum_{k=1}^j k^2 \frac{1}{j^3} + 0^2 \cdot \frac{j^3 - 2}{j^3} \\
&= \frac{2}{j^3} \sum_{k=1}^j k^2 \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{j} + \frac{1}{3j^2}
\end{aligned}$$

Mostraremos lo pedido usando la definición formal y Chebyshev. Entonces, sea  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n^\alpha} - 0\right| \geq \epsilon\right) &= P\left(\left|\sum_{j=1}^n X_j - 0\right| \geq n^\alpha \epsilon\right) \\
&= P\left(\left|\sum_{j=1}^n X_j - \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)\right| \geq n^\alpha \epsilon\right) \\
&\leq \frac{\mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n X_j - \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)\right)^2\right]}{n^{2\alpha} \epsilon^2} \\
&= \frac{Var\left(\sum_{j=1}^n X_j\right)}{n^{2\alpha} \epsilon^2} \\
&\leq \frac{2n}{n^{2\alpha} \epsilon^2} \\
&= \frac{2}{\epsilon^2} \frac{1}{n^{2\alpha-1}} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n^\alpha} - 0\right| \geq \epsilon\right) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\epsilon^2} \frac{1}{n^{2\alpha-1}}
\end{aligned} \tag{52}$$

El limite de la derecha es igual a 0, solo si  $2\alpha - 1 < 0$ , por lo cual se debe tener  $\alpha > 1/2$ . Por lo cual

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n^\alpha} \xrightarrow{P} 0 \iff \alpha > 1/2$$

En (52) acoto con  $2n$ , ya que  $Var(X_j)$  siempre es menor a 2, es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} + \frac{1}{j} + \frac{1}{3j^2} &\leq 2 \\
Var(X_j) &\leq 2
\end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$\begin{aligned}
Var\left(\sum_{j=1}^n X_j\right) &= \sum_{j=1}^n Var(X_j) \\
&\leq \sum_{j=1}^n 2 \\
&= 2n
\end{aligned}$$

18. Muestre que si  $\sqrt{n}(Y_n - \mu) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$ , entonces  $Y_n \xrightarrow{P} \mu$ .

Usamos la definición, sea  $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \mu| \leq \epsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt{n}|Y_n - \mu| \leq \epsilon\sqrt{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\sqrt{n}(Y_n - \mu)| \leq \epsilon\sqrt{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z| \leq \epsilon\sqrt{n}) \\ &= P(|Z| < \infty) \\ &= P(-\infty < Z < \infty) \\ &= 1 \end{aligned}$$

19. Se define la aproximación de Stirling como

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}$$

Sea  $X_1, X_2, \dots \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(1)$ . Utilizando TLC, y derivando la acumulada de la normal, obtenga la aproximación anterior expuesta.

Sabemos que  $\mathbb{E}(X_1) = 1$  y  $\text{Var}(X_1) = 1$ . Por TLC tenemos

$$P\left(\frac{\overline{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) \approx P(Z \leq x)$$

Con  $Z \sim N(0, 1)$ . Ahora, podemos ir desarrollando cosas del lado izquierdo

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\overline{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) &\approx P(Z \leq x) \\ P\left(\overline{X}_n - 1 \leq \frac{x}{\sqrt{n}}\right) &\approx \\ P\left(\overline{X}_n \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right) &\approx \\ P\left(\sum_{i=1}^n X_i \leq \sqrt{n}x + n\right) &\approx \\ \text{La suma de } \text{Exp}(1) & \\ \text{es } W \sim \text{Gamma}(n, 1) & \\ F_W(\sqrt{n}x + n) &\approx F_Z(x) \\ \sqrt{n}f_W(\sqrt{n}x + n) &\approx f_Z(x) \\ \sqrt{n} \frac{(\sqrt{n}x + n)^{n-1} e^{-(\sqrt{n}x + n)}}{\Gamma(n)} &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \end{aligned}$$

Si  $x = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \frac{n^{n-1} e^{-n}}{\Gamma(n)} &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} &\approx n\Gamma(n) \\ \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} &\approx n(n-1)! \\ \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} &\approx n! \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}$$

20. Sean  $X_1, \dots, X_n \sim \chi_{(1)}^2$  y  $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Pruebe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}} dx = \frac{1}{2}$$

Primero debemos buscar como distribuye  $Y_n$ , pero es sencillo demostrar que distribuye  $\chi^2(n)$ , por lo cual  $\mu_{Y_n} = n$  y  $\sigma_{Y_n}^2 = 2n$ .

Para resolver lo pedido, podemos usar una nueva sucesión y aplicar TLC. Notando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Y_n \leq n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq 1\right)$$

con  $Y_n \sim \chi_{(n)}^2$ .

Sea  $\bar{Y}_n = \frac{Y_n}{n}$ . Buscamos su esperanza y varianza.

$$\mathbb{E}(\bar{Y}_n) = \mathbb{E}\left(\frac{Y_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n} n = 1$$

$$\text{Var}(\bar{Y}_n) = \text{Var}\left(\frac{Y_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(Y_n) = \frac{1}{n^2} 2n = \frac{2}{n}$$

Por TLC, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \leq 1\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bar{Y}_n \leq 1\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{\bar{Y}_n - 1}{\sqrt{\frac{2}{n}}} \leq \frac{1-1}{\sqrt{\frac{2}{n}}}\right) \\ &= \Phi(0) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{x^{n/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}} dx = \frac{1}{2}$$

21. Sea  $X_1, X_2, \dots$  una secuencia iid de variables aleatorias con  $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ . Defina

$$Y_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n jX_j$$

Muestre que  $Y_n \xrightarrow{P} \mu$ .

Usamos Chebyshev. Calculemos la esperanza y varianza de  $Y_n$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n jX_j\right) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(jX_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j \mathbb{E}(X_j) \\
&= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j \mu \\
&= \mu \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \mu \\
\text{Var}(Y_n) &= \text{Var} \left( \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j X_j \right) \\
&= \frac{2^2}{n^2(n+1)^2} \sum_{j=1}^n \text{Var}(j X_j) \\
&= \frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{j=1}^n j^2 \text{Var}(X_j) \\
&= \frac{4}{n^2(n+1)^2} \sum_{j=1}^n j^2 \sigma^2 \\
&= \sigma^2 \frac{4}{n^2(n+1)^2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \sigma^2 \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}
\end{aligned}$$

Usamos Chebyshev

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)| \geq \epsilon) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(Y_n)}{\epsilon^2} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(2n+1)}{3\epsilon^2 n(n+1)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|Y_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

Donde se concluye que  $Y_n \xrightarrow{P} \mu$ .

22. Sea  $X_1, X_2, \dots \stackrel{iid}{\sim} U(0, \theta)$ , y defina  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Encuentre la distribución límite de

$$\sqrt{n}[\ln(2\bar{X}_n) - \ln(\theta)]$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Podemos usar el método Delta, ya que

$$\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \frac{\theta}{2}, \quad \text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{\theta^2}{12n}$$

por TLC se tiene

$$\begin{aligned}
\bar{X}_n &\xrightarrow{D} N\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta^2}{12n}\right) \\
\bar{X}_n - \frac{\theta}{2} &\xrightarrow{D} N\left(0, \frac{\theta^2}{12n}\right) \\
\sqrt{n}(\bar{X}_n - \frac{\theta}{2}) &\xrightarrow{D} N\left(0, \frac{\theta^2}{12}\right)
\end{aligned}$$



usando  $g(x) = \ln(2x)$ , por (48) tenemos que

$$\sqrt{n} \left( g(\bar{X}_n) - g\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \xrightarrow{D} N \left( 0, \left[ g'\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 \frac{\theta^2}{12} \right)$$

la derivada de  $g(x)$  es  $g'(x) = 1/x$ , entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \left( g(\bar{X}_n) - g\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) &\xrightarrow{D} N \left( 0, \left[ g'\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 \frac{\theta^2}{12} \right) \\ \sqrt{n} (2\bar{X}_n - \theta) &\xrightarrow{D} N \left( 0, \left[ \frac{1}{\frac{\theta}{2}} \right]^2 \frac{\theta^2}{12} \right) \\ \sqrt{n} (2\bar{X}_n - \theta) &\xrightarrow{D} N \left( 0, \frac{4}{\theta^2} \frac{\theta^2}{12} \right) \\ \sqrt{n} (2\bar{X}_n - \theta) &\xrightarrow{D} N \left( 0, \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

23. Encuentre la distribución asintótica de  $Z_n = \bar{X}_n e^{-\bar{X}_n}$ , si  $X_1, X_2, \dots \stackrel{iid}{\sim} P(\lambda)$ .

Podemos usar el método Delta con  $g(x) = xe^{-x}$ , para que de este modo solo calculemos la esperanza y varianza de  $\bar{X}_n$ . Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\bar{X}_n) &= \lambda \\ \text{Var}(\bar{X}_n) &= \frac{\lambda}{n} \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \bar{X}_n &\xrightarrow{D} N(\lambda, \lambda/n) \\ (\bar{X}_n - \lambda) &\xrightarrow{D} N(0, \lambda/n) \\ \sqrt{n}(\bar{X}_n - \lambda) &\xrightarrow{D} N(0, \lambda) \end{aligned}$$

la derivada de  $g(x)$  es  $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) &\stackrel{D}{\sim} N(0, [g'(\mu)]^2 \sigma^2) \\ \sqrt{n}(\bar{X}_n e^{-\bar{X}_n} - \lambda e^{-\lambda}) &\stackrel{D}{\sim} N(0, [e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}]^2 \lambda) \end{aligned}$$

24. Sea  $X_1, X_2, \dots \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1)$ . Defina

$$Y_n = \frac{1}{\prod_{i=1}^n X_i^{1/n}}$$

Encuentre la distribución asintótica de  $Y_n$ . Hint: Tome logaritmo y use  $g(x)$  conveniente.

Usando el hint tenemos

$$\begin{aligned} Y_n &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n X_i^{1/n}} \\ \ln(Y_n) &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \end{aligned}$$

Usando (27) tenemos que  $-\ln(X_i) \sim \text{Exp}(1)$ . Entonces podemos encontrar la distribución asintótica de  $\ln(Y_n)$  y luego usar alguna función  $g(x)$ . Calculamos esperanza y varianza

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\ln(Y_n)) &= \mathbb{E}\left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right) \\ &= \mathbb{E}(-\ln(X_i)) \\ &= 1 \\ \mathbb{E}(\ln(Y_n)) &= \text{Var}\left(-\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i)\right) \\ &= \frac{1}{n} \text{Var}(-\ln(X_i)) \\ &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\ln(Y_n) &\xrightarrow{D} N(1, 1/n) \\ \ln(Y_n) - 1 &\xrightarrow{D} N(0, 1/n) \\ \sqrt{n}(\ln(Y_n) - 1) &\xrightarrow{D} N(0, 1)\end{aligned}$$

Usando la función  $g(x) = e^x$  tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(g(\ln(Y_n)) - g(1)) &\xrightarrow{D} N(0, [g'(1)]^2 1) \\ \sqrt{n}(e^{\ln(Y_n)} - e^1) &\xrightarrow{D} N(0, [e^1]^2 1) \\ \sqrt{n}(Y_n - e) &\xrightarrow{D} N(0, e^2)\end{aligned}$$

Note que en este tipo de ejercicios no se despeja  $Y_n$ , pero el resultado es equivalente a que si lo despejamos. En este caso despejemos  $Y_n$

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(Y_n - e) &\xrightarrow{D} N(0, e^2) \\ Y_n - e &\xrightarrow{D} N(0, e^2/n) \\ Y_n &\xrightarrow{D} N(e, e^2/n)\end{aligned}$$

Todos los resultados obtenidos en ejercicios anteriores son equivalentes.

25. Sea  $X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias iid con media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  (finita). Muestre usando Slutsky que

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{P} \mu$$

Note que

$$\begin{aligned}a_n &= \sqrt{n} \rightarrow \infty \\ \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} &\xrightarrow{D} N(0, 1)\end{aligned}$$

Luego, por el teorema (47), se concluye que

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

26. Sea  $X_1, X_2, \dots \stackrel{iid}{\sim} \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ . Muestre que

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{cs} \frac{\alpha + \alpha^2}{\beta^2}$$

Por la Ley fuerte de los grandes números tenemos que

$$Z_n \xrightarrow{cs} \mathbb{E}(X^2)$$

Esto último corresponde a

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ \mathbb{E}(X^2) &= \text{Var}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \\ \mathbb{E}(X^2) &= \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \\ \mathbb{E}(X^2) &= \frac{\alpha + \alpha^2}{\beta^2} \end{aligned}$$

Mostrando así lo pedido.

Si bien no se enuncia el teorema en la parte de definiciones, se utilizó que

$$Z_n \xrightarrow{cs} X \Rightarrow h(Z_n) \xrightarrow{cs} h(X)$$

con  $h(x)$  continua.

En nuestro caso se utilizó  $h(x) = x^2$ .

27. Sea  $X_1, X_2, \dots \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(1/\theta)$ . Muestre que

$$S_n = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)}{\sqrt{n} \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}}$$

converge en distribución a  $W$ . Reconozca  $W$ .

Para esto vamos a re escribir  $S_n$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \theta)}{\sqrt{n} \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n}} \\ &= \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)}{\sqrt{n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2} \end{aligned}$$

Ahora vamos a usar Slutsky. Pues note que en el numerador tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i &\xrightarrow{D} N(\theta, \theta^2/n) \\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta) &\xrightarrow{D} N(0, \theta^2/n) \\ \sqrt{n} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta) &\xrightarrow{D} N(0, \theta^2) \end{aligned}$$

Usando la Ley débil de los grandes números y (42) tenemos en el denominador

$$\frac{1}{n} \sum_i^n X_i^2 \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X^2)$$

Esto ultimo corresponde a

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ \mathbb{E}(X^2) &= \text{Var}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \\ \mathbb{E}(X^2) &= \theta^2 + \theta^2 \\ \mathbb{E}(X^2) &= 2\theta^2 \end{aligned}$$

Luego, por Slutsky tenemos que

$$S_n = \sqrt{n} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2} \xrightarrow{D} \frac{X}{2\theta^2} = \frac{1}{2\theta^2} N(0, \theta^2)$$

28. Sea  $X_1, X_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias positivas e independientes, con primer y segundo momento finito y mayor a 0. Y sea  $Y_1, Y_2, \dots$  una secuencia de variables aleatorias independientes, con  $0 < \text{Var}(Y_1) < \infty$  e independientes de  $X_i$ . Encuentre la distribución limite de

$$W_n = \sqrt{n} \left( \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i} - \mathbb{E}(Y_1) \right)$$

Para esto podemos re organizar la expresión de la siguiente forma

$$\begin{aligned} W_n &= \sqrt{n} \left( \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i} - \mathbb{E}(Y_1) \right) \\ &= \sqrt{n} \left( \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - \mathbb{E}(Y_1) \sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n X_i} \right) \\ &= \sqrt{n} \left( \frac{\sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \mathbb{E}(Y_1))}{\sum_{i=1}^n X_i} \right) \\ &= n^{1-1/2} \left( \frac{\sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \mathbb{E}(Y_1))}{\sum_{i=1}^n X_i} \right) \\ &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} \left( \frac{\sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \mathbb{E}(Y_1))}{\sqrt{n}} \right) \end{aligned}$$

Podemos aplicar Slutsky con

$$A_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i}, \quad B_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \mathbb{E}(Y_1))}{\sqrt{n}}$$

Por la Ley débil de los grandes números tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i &\xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_1) \\ \Rightarrow \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} &\xrightarrow{P} \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)} \end{aligned}$$

esto usando  $g(x) = 1/x$ .

Ahora, para  $B_n$ , por TLC sabemos que converge a una Normal. Veamos sus parámetros

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_n) &= \mathbb{E} \left( \frac{\sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \mathbb{E}(Y_1))}{\sqrt{n}} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \mathbb{E}(Y_1)) \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} (n \mathbb{E}(X_1(Y_1 - \mathbb{E}(Y_1)))) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} (n \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(Y_1 - \mathbb{E}(Y_1))) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} (n \mathbb{E}(X_1) \mathbb{E}(Y_1) - \mathbb{E}(Y_1)) \\
&= 0 \\
\text{Var}(B_n) &= \text{Var} \left( \frac{\sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \mathbb{E}(Y_1))}{\sqrt{n}} \right) \\
&= \frac{1}{n} \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n X_i(Y_i - \mathbb{E}(Y_1)) \right) \\
&= \frac{1}{n} (n \text{Var}(X_1(Y_1 - \mathbb{E}(Y_1)))) \\
&= \frac{1}{n} (n \text{Var}(X_1) \text{Var}(Y_1 - \mathbb{E}(Y_1))) \\
&= \frac{1}{n} (n \text{Var}(X_1) [\mathbb{E}((Y_1 - \mathbb{E}(Y_1) - \mathbb{E}(Y_1))^2)]) \\
&= \text{Var}(X_1) \mathbb{E}(Y_1^2)
\end{aligned}$$

Luego,  $B_n \sim N(0, \text{Var}(X_1) \mathbb{E}(Y_1^2))$ . Aplicando Slutsky a

$$W_n = A_n B_n$$

tenemos que

$$W_n \xrightarrow{D} \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)} N(0, \text{Var}(X_1) \mathbb{E}(Y_1^2))$$

29. Sea  $X_1, X_2, \dots \stackrel{iid}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$ , Pruebe que

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} \xrightarrow{P} \lambda, \quad \sqrt{n} \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} - \lambda \right) \xrightarrow{D} N(0, \lambda^2)$$

Por la Ley débil de los grandes números tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i &\xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{\lambda} \\
\Rightarrow \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} &\xrightarrow{P} \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)} = \lambda
\end{aligned}$$

esto usando  $g(x) = 1/x$ .

Para la distribución asintótica podemos usar el método Delta con  $g(x) = 1/x$ . Su derivada es  $g'(x) = -1/x^2$ . Entonces

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \xrightarrow{D} N(1/\lambda, 1/n\lambda^2)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} - \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{D} N(0, 1/n\lambda^2) \\
& \sqrt{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} - \frac{1}{\lambda} \right) \xrightarrow{D} N(0, 1/\lambda^2) \\
& \text{usamos } g(x) = 1/x \\
& \sqrt{n} \left( g \left( \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n} \right) - g \left( \frac{1}{\lambda} \right) \right) \xrightarrow{D} N(0, [g'(1/\lambda)]^2 1/\lambda^2) \\
& \sqrt{n} \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} - \lambda \right) \xrightarrow{D} N(0, [-\lambda^2]^2 / \lambda^2) \\
& \sqrt{n} \left( \frac{n}{\sum_{i=1}^n X_i} - \lambda \right) \xrightarrow{D} N(0, \lambda^2)
\end{aligned}$$

Mostrando así lo pedido.

30. Sea  $X_1, X_2, \dots \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1)$ . Defina las secuencias

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ y } Z_n = \max\{X_1, X_2, \dots\}, \quad n \geq 1$$

- (a) Pruebe que  $2Y_n Z_n \xrightarrow{P} 1$   
(b) Calcule aproximadamente  $P(2Y_n \leq 1)$   
(a) Recordemos que en el ejercicio (7) mostramos que  $Z_n \xrightarrow{P} 1$ . Y usando la Ley débil de los grandes números tenemos que  $Y_n \xrightarrow{P} 1/2$ . Luego, aplicando (46) con  $g(x, y) = 2xy$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
Y_n Z_n & \xrightarrow{P} 1 \cdot \frac{1}{2} \\
2Y_n Z_n & \xrightarrow{P} 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Concluyendo así que  $2Y_n Z_n \xrightarrow{P} 1$ .

- (b) Podemos aplicar *TLC*, sabiendo que  $\mathbb{E}(Y_n) = 1/2$  y  $\text{Var}(Y_n) = \frac{1}{12n}$ , entonces

$$\begin{aligned}
P(2Y_n \leq 1) &= P(Y_n \leq 1/2) \\
&= P \left( \frac{Y_n - 1/2}{\sqrt{\frac{1}{12n}}} \leq \frac{1/2 - 1/2}{\sqrt{\frac{1}{12n}}} \right) \\
&\simeq \Phi(0) \\
&\simeq 1/2
\end{aligned}$$

31. Sea  $X_1, X_2, \dots$  iid con  $P(X = -a) = P(X = a) = 1/2$ , con  $a > 0$ . Muestre que

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{2^i} \xrightarrow{D} U(-a, a)$$

Hint:

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{2^i}} + e^{-\frac{x}{2^i}}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$$

Para esto vamos a usar (43). Sea  $Y_n = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{2^i}$ .

$$\begin{aligned}
 M_{Y_n}(t) &= \mathbb{E} \left( e^{\sum_{i=1}^n \frac{X_i}{2^i}} \right) \\
 &= \mathbb{E} \left( e^{\frac{tX_1}{2}} + e^{\frac{tX_2}{2^2}} + \dots + e^{\frac{tX_n}{2^n}} \right) \\
 &= M_{X_1}(t/2) M_{X_2}(t/2^2) \dots M_{X_n}(t/2^n) \\
 &= \left( e^{-at/2} \cdot \frac{1}{2} + e^{at/2} \cdot \frac{1}{2} \right) \left( e^{-at/2^2} \cdot \frac{1}{2} + e^{at/2^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \dots \left( e^{-at/2^n} \cdot \frac{1}{2} + e^{at/2^n} \cdot \frac{1}{2} \right) \\
 &= \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{at}{2^i}} + e^{\frac{at}{2^i}}}{2}
 \end{aligned}$$

Ahora tomamos limite

$$\begin{aligned}
 M_{Y_n}(t) &= \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{at}{2^i}} + e^{\frac{at}{2^i}}}{2} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} M_{Y_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{at}{2^i}} + e^{\frac{at}{2^i}}}{2} \\
 &= \prod_{i=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{at}{2^i}} + e^{\frac{at}{2^i}}}{2} \\
 &\text{aplicamos el hint} \\
 &= \frac{e^{ta} - e^{-ta}}{2at} \\
 &= \frac{e^{ta} - e^{-ta}}{t(a - (-a))}
 \end{aligned}$$

Esta ultima es la función generadora de momentos de una  $U(-a, a)$ . Lo cual muestra lo pedido.

32. Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra con función de distribución  $F$  y sea  $F_n$  la función de distribución empírica de la muestra, es decir

$$F_n(x) = \frac{\text{Nro de observaciones} \leq x}{n}$$

Muestre que para cada valor fijo de  $X$  se tiene que

- (a)  $F_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$
- (b)  $\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2(x))$ . Encuentre  $\sigma^2(x)$
- (c)  $F_n(x) \xrightarrow{cs} F(x)$

Sea

$$I_k(x) = \begin{cases} 1 & X_k \leq x \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

- (a) Por la Ley débil de los grandes números tenemos que

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_i(x) \xrightarrow{P} \mathbb{E}(I_1)$$

pero

$$\mathbb{E}(I_1) = 1 \cdot P(X_1 \leq x) = F(x)$$

(b) Aplicamos TLC, pero solo nos falta encontrar la varianza.

$$\begin{aligned}\sigma^2(x) &= \text{Var}(I_1) \\ &= \mathbb{E}(I_1^2) - \mathbb{E}(I_1)^2 \\ &= F(x) - F(x)^2 \\ &= F(x)(1 - F(x))\end{aligned}$$

Luego,

$$\sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \xrightarrow{D} N(0, F(x)(1 - F(x)))$$

(c) Por la Ley fuerte de los grandes números se tiene que

$$F_n(x) \xrightarrow{\text{cs}} F(x)$$

33. Sean  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias iid con

$$P(X_1 = -1/4) = 1/2, \quad P(X = 1/4) = 1/2$$

Muestre que

$$M_n = \prod_{k=1}^n (1 + X_k) \xrightarrow{\text{cs}} 0$$

Para esto vamos a invocar la Ley fuerte de los grandes números. Para esto necesitamos calcular la esperanza de  $M_1$  y aplicar un par de trucos.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_n) &= \mathbb{E} \left( \prod_{k=1}^n (1 + X_k) \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{\ln(\prod_{k=1}^n (1 + X_k))} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{\sum_{k=1}^n \ln(1 + X_k)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln(1 + X_k)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left( e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln([1 + X_k]^n)} \right)\end{aligned}$$

Necesitamos calcular  $\mathbb{E}(\ln(1 + X_k)^n)$ , entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\ln(1 + X_k)^n) &= \ln([1 + -1/4]^n) \cdot 1/2 + \ln([1 + 1/4]^n) \cdot 1/2 \\ &= \frac{1}{2} (\ln([3/4]^n) + \ln([5/4]^n)) \\ &= \frac{1}{2} \ln([15/16]^n)\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln([1 + X_k]^n) &\xrightarrow{\text{cs}} \frac{1}{2} \ln([15/16]^n) \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln([1 + X_k]^n) &\xrightarrow{\text{cs}} \frac{n}{2} \ln([15/16]) \\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln([1 + X_k]^n) &\xrightarrow{\text{cs}} -\infty \\ e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln([1 + X_k]^n)} &\xrightarrow{\text{cs}} e^{-\infty} \\ e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln([1 + X_k]^n)} &\xrightarrow{\text{cs}} 0 \\ M_n &\xrightarrow{\text{cs}} 0\end{aligned}$$

mostrando así lo pedido. Recordar que la convergencia casi segura es un límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , y también notar que  $\ln(15/16) \approx -0.028 < 0$ .



34. Sea  $X_k \sim \text{Exp}(k)$ , muestre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( -\ln(n) + \sum_{k=1}^n X_k \right) \sim \text{Gumbel}(0, 1)$$

Hint:

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{z/k}}{1 + z/k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) = \gamma$$

Para esto vamos a usar función generadora de momentos, es decir, aplicar el teorema (43). De manera directa pareciera no poder hacerse nada, pero vamos a aplicar un par de trucos. Note que

$$\begin{aligned} Y_n &= \left( -\ln(n) + \sum_{k=1}^n X_k \right) \\ &= \left( -\ln(n) + \sum_{k=1}^n X_k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) + \left( \sum_{k=1}^n X_k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) + \left( \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

Calculamos la generadora de momentos

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(t) &= \mathbb{E} \left( e^{t \left[ \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) + \left( \sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{k} \right) \right]} \right) \\ &= e^{t \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)} e^{-\frac{t}{k}} M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) \\ &= e^{t \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)} e^{-\frac{t}{k}} M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t) \\ &= e^{t \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)} e^{-\frac{t}{k}} \prod_{k=1}^n \frac{k}{k-t} \\ &= e^{t \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)} \prod_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{t}{k}}}{1 - \frac{t}{k}} \end{aligned}$$

Aplicamos limite y usamos los hints

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(t) &= e^{t \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)} \prod_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{t}{k}}}{1 - \frac{t}{k}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} M_{Y_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{t \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)} \prod_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{t}{k}}}{1 - \frac{t}{k}} \\ &= e^{t \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)} \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{e^{-\frac{t}{k}}}{1 - \frac{t}{k}} \\ &= e^{t\gamma} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{k}}}{1 - \frac{t}{k}} \\ &= e^{-(-t\gamma)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{(-t)}{k}}}{1 + \frac{(-t)}{k}} \\ &= -t\Gamma(-t) \\ &= \Gamma(1-t) \end{aligned}$$

Esta ultima es la función generadora de momentos de una  $Gumbell(0, 1)$ , lo cual prueba lo pedido. A continuación se calcula esta función y como evoluciona la secuencia a medida que el tamaño de la muestra aumenta.

Recordemos que

$$X \sim Gumbell(0, 1) \iff f_X(x) = e^{-(x+e^{-x})}, x \in \mathbb{R}$$

entonces

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-(x+e^{-x})} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x} e^{-e^{-x}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-x})^{-t} e^{-x} e^{-e^{-x}} dx \\ u &= e^{-x} \Rightarrow du = -e^x dx \\ &= \int_0^{\infty} u^{-t} e^{-u} du \\ &= \int_0^{\infty} u^{(-t+1)-1} e^{-u} du \\ &= \Gamma(1-t), \quad t < 1 \end{aligned}$$

Para ver como evoluciona  $Y_n$ , tomaremos  $n = 10^4$ , note que este  $n$  es bastante grande. Ahora, los siguientes gráficos representan el numero de repeticiones que se evaluó  $Y_{10^4}$ . Por ejemplo, en 14, se calculó  $Y_{10^4}$  10 veces. Para entender esto, se simulan  $10^4$  exponenciales de parámetro  $1/k$ , para  $k = 1, 2, \dots, 10^4$ , y se evalúa esto en  $Y_{10^4}$ , y lo repetimos 10 veces para obtener 14.

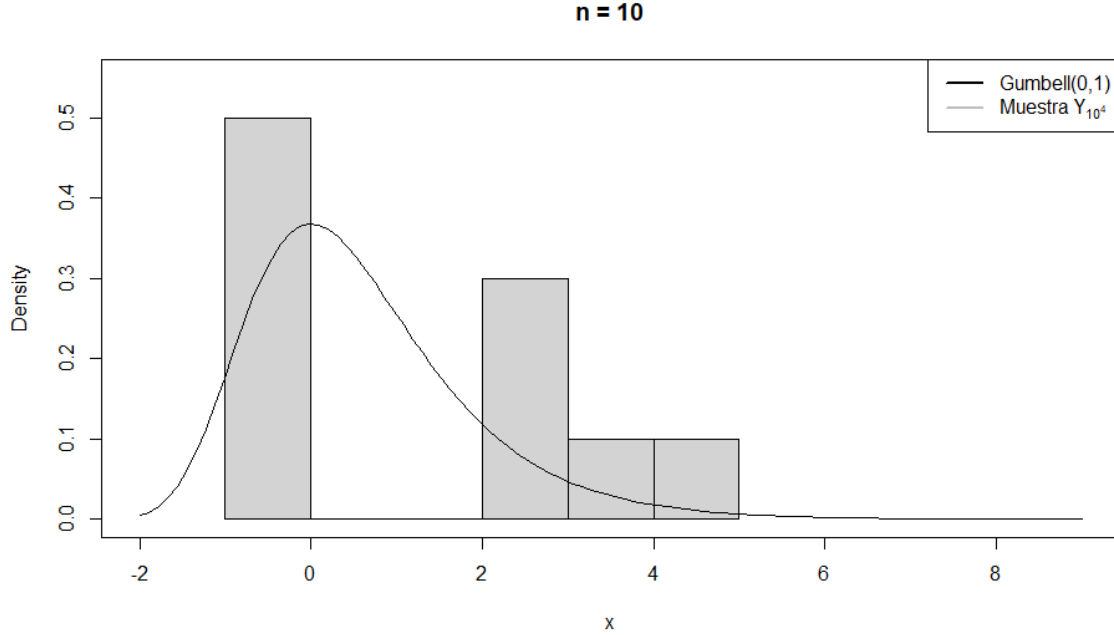
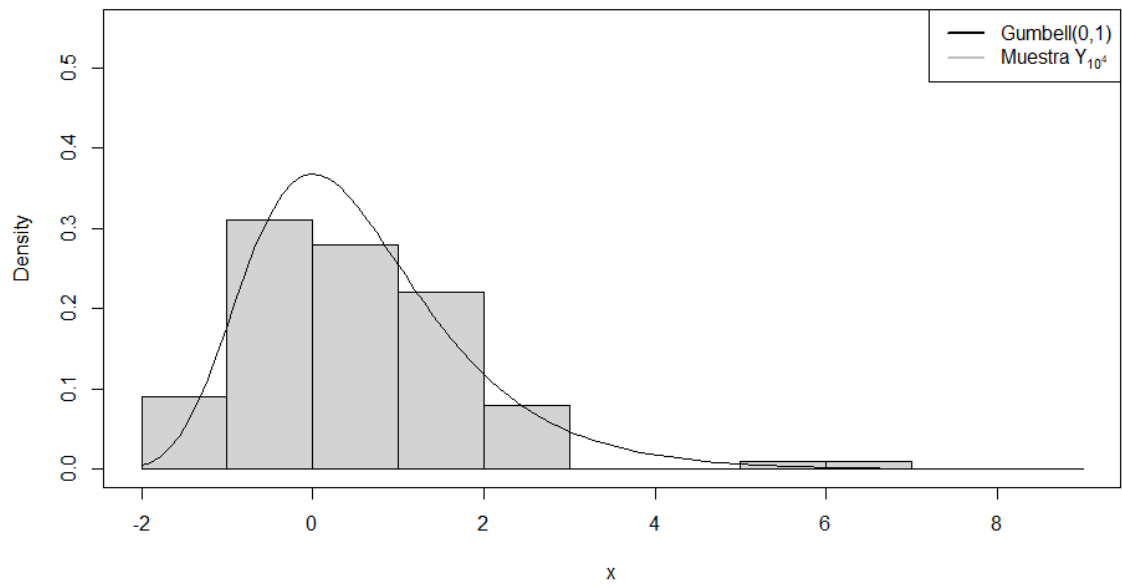
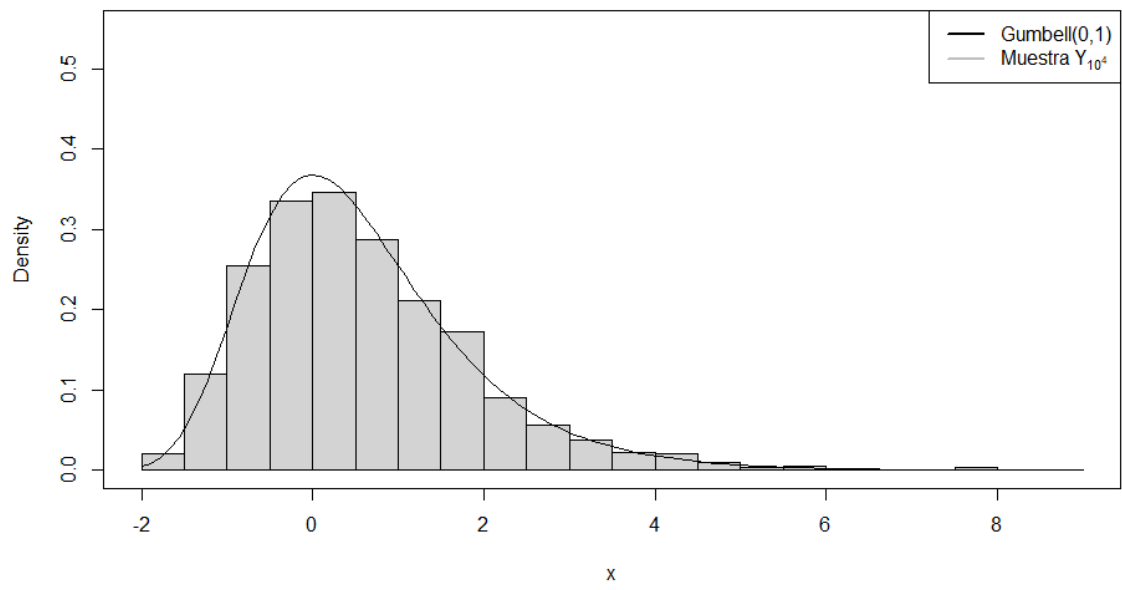


Figure 14

**n = 100**



**n = 1000**



35. Sea  $X_1, X_2, \dots \stackrel{iid}{\sim} U(0, 1)$ . Muestre que

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2} \xrightarrow{P} \frac{3}{2}$$

Usamos (46) con  $g(x, y) = x/y$ . Primero arreglamos un poco las cosas

$$\begin{aligned} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2} &= \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2} \frac{1/n}{1/n} \\ &= \frac{\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}}{\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n}} \end{aligned}$$

Por la ley débil de los grandes números tenemos que

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X_1^2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2^2} = 1/3$$

Luego, por Slutsky tenemos que

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2} \xrightarrow{P} \frac{1/2}{1/3} = \frac{3}{2}$$

Mostrando así lo pedido.

36. Sea  $X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nn}$  variables aleatorias independientes con fmp dada por

$$P(X_{nk} = 0) = 1 - 1/n - 1/n^2, \quad P(X_{nk} = 1) = 1/n, \quad P(X_{nk} = 2) = 1/n^2$$

para  $k = 1, 2, \dots, n$  y  $n = 2, 3, \dots$ . Defina

$$S_n = X_{n1} + X_{n2} + \dots + X_{nn}$$

para  $n \geq 2$ . Muestre que  $S_n \xrightarrow{D} \text{Poisson}(1)$ . Hint: Sea  $a, b \in \mathbb{R}$ , si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = 0$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{b}{c} + \frac{\psi(n)}{n} \right)^{cn} = e^{bc}$$

Primero calculemos la función generadora de momentos.

$$\begin{aligned} M_{X_{n1}} &= e^{t \cdot 0} P(X = 0) + e^{t \cdot 1} P(X = 1) + e^{t \cdot 2} P(X = 2) \\ &= 1 + \frac{e^t - 1}{n} + \frac{e^{2t} - 1}{n^2} \end{aligned}$$

Ahora calculamos la función generadora de momentos de  $S_n$  y tomamos limite

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(t) &= M_{t \sum_{k=1}^n X_{nk}} \\ &= M_{X_{n1}}(t) M_{X_{n2}}(t) \cdots M_{X_{nn}}(t) \\ &= \left( 1 + \frac{e^t - 1}{n} + \frac{e^{2t} - 1}{n^2} \right) \left( 1 + \frac{e^t - 1}{n} + \frac{e^{2t} - 1}{n^2} \right) \cdots \left( 1 + \frac{e^t - 1}{n} + \frac{e^{2t} - 1}{n^2} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{e^t - 1}{n} + \frac{e^{2t} - 1}{n^2} \right)^n \\ &= \left( 1 + \frac{e^t - 1}{n} + \frac{(e^{2t} - 1)/n}{n} \right)^n \end{aligned}$$

Note que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{2t} - 1)/n = 0$ , de modo que si aplicamos el hint tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Y_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{e^t - 1}{n} + \frac{(e^{2t} - 1)/n}{n} \right)^n = e^{(e^t - 1)}$$

Y esta ultima es la función generadora de momentos de una Poisson de parámetro 1.

## A Resultados útiles

1.

$$(x+y)^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

2.

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} = \Gamma(\alpha) \beta^{\alpha}, \quad \alpha, \beta > 0$$

3.

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} = \Gamma(\alpha) \frac{1}{\beta^{\alpha}}, \quad \alpha, \beta > 0$$

4.

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} = B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a, b > 0$$

5.

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$$

6.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

7.

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

8.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad |x| < 1$$

9.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

10.

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

11.

$$\frac{1-x^{k+1}}{1-x} = \sum_{n=0}^k x^n, \quad |x| < 1$$

12.

$$\frac{x-x^{k+1}}{1-x} = \sum_{n=1}^k x^n, \quad |x| < 1$$

13.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

14.

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}$$