



Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

EYP1026 - MODELOS PROBABILÍSTICOS
Ayudantía N°10

Profesor: Guido del Pino
Ayudante: José Quinlan
Fecha: 19 de Octubre - 2016

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \exp\{-y\} \mathbb{I}((x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y).$$

- a) Determine la distribución condicional $X | Y = y : y \in \mathbb{R}^+$.
- b) Calcule $g(y) = E[X | Y = y] : y \in \mathbb{R}^+$.
- c) Encuentre la densidad de $g(Y)$.

2. Considere el modelo jerárquico

$$Y | X = x \sim \text{Poisson}(x) \\ X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$$

Calcule $E[Y]$, $\text{Var}[Y]$ y $\text{Cov}[X, Y]$.

3. Sean X, Y, Z variables aleatorias con matriz de covarianzas

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcule $\text{Var}[X + Y + Z]$.
- b) Muestre que $X - Y$, $X + Z$ y $2Y - Z$ no están correlacionadas.

4. Considere la forma cuadrática

$$Q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 10y + 26 : (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Sea (X, Y) vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = C \exp \left\{ -\frac{Q(x, y)}{2} \right\} \mathbb{I}((x, y) \in \mathbb{R}^2)$$

donde $C \in \mathbb{R}^+$ es la constante de normalización respectiva.

- a) Identifique la distribución de (X, Y) .
- b) Encuentre el mejor predictor lineal de X basado en Y junto con su respectiva varianza.