PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
TEMPORADA VERANO 2019

# MAT 1203 – Álgebra lineal

## Solución Interrogación 3

1. Sea $T : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(h(x)) = \begin{pmatrix} h(2) \\ h(0) \end{pmatrix}$$

   *a*) Encuentre la matriz $[T]$ de transformación respecto a las bases $B_1 = \{1-t, 1+t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y $B_2 = \{(1,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

   *b*) Encuentre una base para el núcleo de $T$.

**Solución.**

*a*) $[T] = [[T(1-t)]_{B_2}\ [T(1+t)]_{B_2}\ [T(t^2)]_{B_2}] = \left[ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \right] = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

*b*) Para encontrar el núcleo de $T$, primero buscaremos la $Nul(A)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to Nul(A) = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego una base para núcleo de $T$ es $\{1(1-t) - 1(1+t) + 1(t^2))\} = \{-2t + t^2\}$

**Puntaje:**

- 1 pto argumentar que $[T] = [[T(1-t)]_{B_2}\ [T(1+t)]_{B_2}\ [T(t^2)]_{B_2}]$
- 1 pto por determinar que $[T] = \left[ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{B_2} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}_{B_2} \right]$.
- 1 punto por encontrar correctamente $[T]$.
- 1 punto por encontrar el $Nul(A)$.
- 2 punto por encontrar una base para el núcleo de $T$.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   *a*) Encuentre una matriz $P$ invertible y una matriz $C$ de la forma $\begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ tal que $A = PCP^{-1}$.

   *b*) Describa geometricamente el actuar de la transformación asociada a la matriz $C$.

**Solución.**

*a*) Primero calculamos los valores propios de la matriz

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \to \lambda = 2 \pm i$$

Ahora calculamos un vector propio asociado a $\lambda = 2 - i$

$$\begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ i-1 \end{pmatrix}$$

Asi $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

*b*) La transformación asociada a $C$ es la composición de una rotación y de un escalamiento. Donde el ángulo de la rotación es el argumento de $\lambda = 2 + i$ es decir $\tan(\phi) = \dfrac{1}{2}$ y el factor de escala $r = \|\lambda\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

**Puntaje:**

- 1 pto por calcular los valores propios de la matriz $A$.
- 1 pto por calcular un vector propio de la matriz $A$.
- 1 pto por calcular la matriz $P$.(existen muchas matrices que cumplen lo pedido y se encuentran de la misma forma que en la pauta)
- 1 pto por calcular la matriz $C$.
- 1 pto por encontrar $\tan(\phi)$.
- 1 pto por encontrar $r$.

3. Sea $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - z = 0 \ \wedge \ x - y = 0\}$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   *a*) **[4ptos]** Determine una base ortogonal para $W^{\perp}$.

   *b*) **[2 ptos]** Encuentre $Proy_{W^{\perp}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Solución.**

*a*) Primero buscaremos una base para $W$, $B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, luego

$$W^{\perp} = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \cdot c(1, 1, 4) = 0\} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aplicamos el proceso de Gram-Schimdt al conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$$v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego una base ortogonal para $W^{\perp}$ es $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

*b*) $$Proy_{W^{\perp}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \|^2} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{18} \\ \frac{13}{18} \\ \frac{-1}{9} \end{pmatrix}$$

**Puntaje:**

- 1 pto encontrar una base para $W$.
- 1 pto por describir $W^{\perp}$.
- 1 pto por encontar una base para $W^{\perp}$.
- 1 pto por encontar una base ortogonal para $W^{\perp}$.

- 1 pto por plantear la formula para determinar $Proy_{W^\perp}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 1 pto por encontrar correctamente $Proy_{W^\perp}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Encuentre una matriz $P$ ortogonal y una matriz $D$ diagonal tal que la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ se pueda descomponer como $A = PDP^t$.

**Solución.**
En primer lugar, calculamos los valores propios de $A$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ -4 & 5-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ -(\lambda-1)^2(\lambda-10) &= 0 \end{aligned}$$

Para $\lambda = 1$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

, de lo cual $c = 2a - 2b$, por lo que $E_1 = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Para $\lambda = 10$:

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ -4 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0,$$

de lo cual $E_{10} = Gen\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Ahora, para formar la matriz $P$, las columnas deben ser ortonormales. Sabemos que valores propios distintos generan vectores propios ortogonales, pero no necesariamente si corresponden a un mismo valor propio. En este caso, los generadores de $E_1$ no son ortogonales, por lo cual utilizamos Gram-Schmidt para obtener dos vectores ortogonales que generen el mismo espacio:

$$\begin{aligned} w_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ w_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 1 \\ -2/5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De este modo, normalizando cada vector obtenemos que $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & -2/3 \\ 0 & \sqrt{5}/3 & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} & 1/3 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

**Puntaje:**

- 2 puntos por calcular correctamente los valores propios.
- 2 puntos por calcular los vectores propios.
- 1 punto por utilizar Gram-Schmidt (o proyección ortogonal) en $E_1$.
- 1 punto por escribir las matrices $P$ y $D$.

5. Dada la forma cuadrática $Q(x) = x^2 + y^2 + z^2 + 9xy + 12yz$, determine si es definida positiva.

**Solución.**
Escribimos la forma cuadrática de forma matricial:

$$Q(x) = (x \;\; y \;\; z) \begin{pmatrix} 1 & 9/2 & 0 \\ 9/2 & 1 & 6 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos los valores propios de la matriz simétrica que define esta forma cuadrática:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 9/2 & 0 \\ 9/2 & 1-\lambda & 6 \\ 0 & 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)(\lambda + 13/2)(\lambda - 17/2) &= 0 \end{aligned}$$

Como no todos los valores propios tienen el mismo signo, la matriz es indefinida.

**Puntaje:**

- 2 pountos por escribir la forma cuadrática de forma adecuada (con una matriz simétrica).
- 2 puntos por calcular correctamente sus valores propios.
- 2 puntos por argumentar sobre los signos de los valores propios para concluir que la matriz no es definida positiva.

6. Demuestre que el conjunto de todas las soluciones de mínimos cuadrados del sistema

$$x - y + z = 1$$

$$x - y + z = 2$$

es el plano de ecuación $x - y + z = \dfrac{3}{2}$.

**Solución.**
En primer lugar escribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Como el sistema es inconsistente, procedemos a calcular su solución de mínimos cuadrados resolviendo las ecuaciones normales $(A^T A)x = A^T b$, donde $A$ es la matriz de los coeficientes y $b$ es el vector de resultados. Así, el sistema a resolver queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Por último, la solución de este sistema viene dada por $2x - 2y + 2z = 3$, que es equivalente a $x - y + z = 3/2$.

**Puntaje:**

- 3 puntos por plantear el sistema (ecuaciones normales).
- 3 puntos por dar la solución.

7. Encuentre la descomposición en valores singulares de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**Solución.**

Para encontrar la DVS primero debemos calcular los valores propios de $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, que por ser matriz diagonal sus valores propios son 2 y 3. Así, $\sigma_1 = \sqrt{3}$ y $\sigma_2 = \sqrt{2}$. La matriz $V$ viene dada por los vectores propios de $A^T A$ normalizados.
Para $\lambda = 3$, $v_1 = (0,1)^T$ y para $\lambda = 2$, $v_2 = (1,0)^T$, de modo que

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz $U$ de la descomposición la obtenemos calculando los vectores:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ u_2 &= \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como $U$ debe ser $3 \times 3$, debemos encontrar $u_3$ de modo que las columnas de $U$ formen una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Cabe destacar que $u_3$ podemos calcularlo usando producto cruz y luego normalizando o directamente resolviendo que $u_1 \cdot u_3 = u_2 \cdot u_3 = 0$ y $u_3 \cdot u_3 = 0$. Así, se tiene que $u_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$. De este modo,

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Por último, la matriz $\Sigma$ es una matriz $3 \times 2$ que contiene a la matriz diagonal $2 \times 2$ con los valores singulares no nulos de $A$, es decir, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por último, se tiene que $A = U \Sigma V^T$.

**Puntaje:**

- 1 punto por plantear la matriz $A^T A$ y sus valores propios.
- 1 punto por encontrar los vectores propios de $A^T A$ y 1 punto por encontrar la matriz $V$
- 1 punto por encontrar los vectores $u_1$ y $u_2$.
- 1 punto por completar la base y obtener $u_3$.
- 1 punto por encontrar la matriz $\Sigma$.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas demúestrelas y si son falsas de un contraejemplo.

   *a*) Sea $A$ una matriz de $m \times n$, si $v \in (Col(A^T))^{\perp}$ entonces $v \in Nul(A)$

   *b*) Si $A$ es una matriz ortogonal de orden $n$ y $\{v_1, v_2\}$ un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$ entonces $\{Av_1, Av_2\}$ es un conjunto ortogonal de $\mathbb{R}^n$.

   *c*) Sea A una matriz cuadrada. Entonces $A + A^t$ es diagonalizable ortogonalmente.

**Solución.**

*a*) Verdadero.

Si $v \in (Col(A^T))^{\perp}$ entonces $v \in (Fil(A))^{\perp} f_i \cdot v = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} v = Av = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$ luego $v \in Nul(A)$.

*b*) Falso

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz ortogonal, el conjunto $\{(1,1),(0,1)\}$ es linealmente independiente,pero $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ no es ortogonal.

*c*) Verdadero.

La matriz $(A + A^t)^t = A + A^t$ es simetrica por lo cual es digonalizable ortogonalmente.

**Puntaje:**

- 2 ptos por cada ítem.