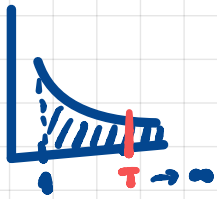
MAT 1620

- **CLASE 1:**

1 **INTEGRAL IMPROPIA**



$f(x) = \frac{1}{x^2}$, Dom $[1, \infty)$

$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

$\int_1^T \frac{1}{x^2}\,dx$

$-\frac{1}{x}\Big|_1^T$

$\lim_{T\to\infty} -\frac{1}{T} + 1$

$= 1$ //

2 $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx =$

$\int_1^T \frac{1}{x}\,dx = \ln x \Big|_1^T = \lim_{T\to\infty} \ln T - \cancel{\ln 1}$

$= \infty$

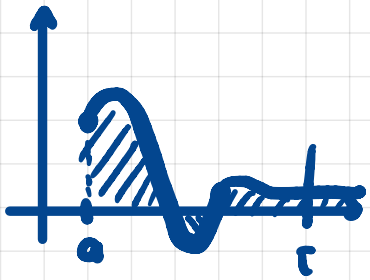
$\downarrow$

$=$ Diverge!

- **CLASE 2:**

INTEGRAL IMPROPIA 1

Tipo 1 : $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ continua

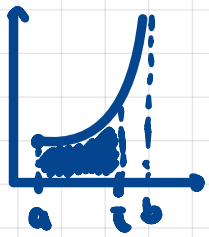


1 $$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty} \int_a^T f(x)\,dx}$$

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}$ $\begin{cases} p > 1 & \text{converge} \\ p \leq 1 & \text{diverge} \end{cases}$

2 $$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{T\to-\infty} \int_T^a f(x)\,dx$$

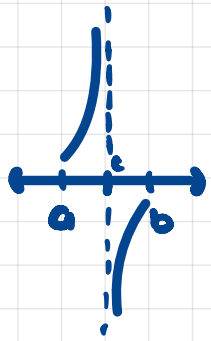
• I. INDEF Tipo 2 : Presencia de DISCONTINUIDADES



$f : [a, b) \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c + \int_c^b$$ → Siendo IMPROPIAS CONVERGENTES

★ **TRABAJO** : $W = F \times D$

$$W = \int_a^b f(x)\,dx$$ ↗ f definida para cierto RECORRIDO

• $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$ $f : (2, 5] \to \mathbb{R}$ (ES IMPROPIA)

$t > 2$ $\int_t^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \int_5^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

↓ CONVERGE! ya vimos que converge → Definida

$$\left.\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_t^5 = 2\sqrt{5-2} - 2\sqrt{t-2}$$

$$\therefore \lim_{t \to 2^+} 2\sqrt{3} - 2\sqrt{t-2} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{0} = 2\sqrt{3}$$

e $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx \quad f\ [0,1)\cup(1,3] \to \mathbb{R}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx + \int_1^3 \frac{1}{x+1}$$

- $\int_0^1 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{T\to 1^-} \int_0^T \frac{1}{x-1}\,dx$

$$= \int_0^T \frac{1}{x-1} = \ln|x-1|\Big|_0^T = \ln(1-x)\Big|_0^T = \underline{\ln(1-T) - \ln 1}$$

ESTAMOS ENTRE 0 Y T Y $T<1$

$0 \le x \le T < 1$

$|x-1| = -$

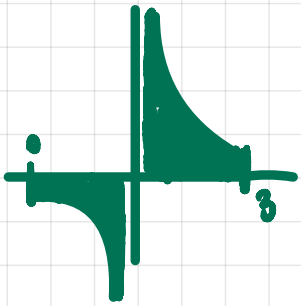
$\int_1^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{T\to 1^+} \int_T^3 \frac{1}{x+1}$

$$= \ln|x-1|\Big|_T^3 = \ln(2) - \ln(T-1)$$

$$\lim_{T\to 1^-} \ln(1-T) - \ln 1 + \lim_{T\to 1^+} \ln(2) - \ln(T-1)$$

$\downarrow$ $-\infty$ DIVIERGE

$\downarrow$ $-(-\infty)$ $+\infty$ DIVIERGE

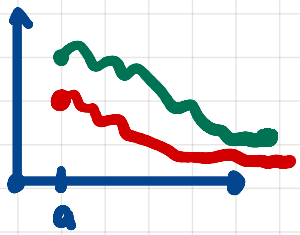


⚠ $\int_0^3 \frac{1}{x-1}\,dx = \ln|x-1|\Big|_0^3 \to$ ERROR: NOS SALTAMOS LA DISCONTIN

$$= \ln|3-1| - \ln$$

TFC solo vale si estoy en bien definida

• CLASE 3



$g > 0$
$f > 0$

Integrales indef al $+\infty$

- Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ DIVERGE $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ TAMBIÉN
- Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ CONVERGE $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ TAMBIÉN

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,dx \geq \int_a^\infty g(x)\,dx}$$

FUNCIÓN TRASCENDENTE

e! Det si $\int_0^\infty e^{-x^2}$ converge!

$\lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-x^2}\,dx \longrightarrow$ No tiene primitiva $\therefore$ USAR CRIT COMPARACIÓN

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$$

Para $x \geq 1$ $\quad e^{-x} \geq e^{-x^2}$

$\therefore$ POR CRIT. COMPARACIÓN $\underbrace{\int_1^\infty e^{-x}\,dx}$ $\geq \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$

$$\lim_{T\to\infty} \int_1^T e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_1^T$$

$$\lim_{T\to\infty} -e^{-T} + e^{-1} =$$

$$\frac{1}{e} - \frac{1}{e^T} = \frac{1}{e} \quad \therefore \text{ FINITO}$$

$\therefore$ como $\int e^{-x}\,dx$ es finito $\Rightarrow \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ TAMBIÉN (CONVERGE)

- $\int_1^{\infty} \frac{1+e^{-x}}{x}\,dx$

$\therefore \quad \frac{1+e^{-x}}{x} > \frac{1}{x} \longrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ DIVERGE!

$\therefore \int_1^{\infty} \frac{1+e^{x}}{x}\,dx$ TAMBIÉN DIVERGE!

- $\int_1^{\infty} \frac{1}{\ln x}\,dx$

$\ln x \leq x \quad \forall n \geq 1$

$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$

$\downarrow$

$\lim \int_1^{\infty}$

· CLASE 4 (PAG 640)

2 SUCESIONES: Secuencia infinitas y ordenadas de Numeros.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a + r \\ a_2 = a + r + r \\ \vdots \\ a_n = a + r \cdot n \end{array}\right\} \quad \boxed{a_{n+1} = a_n + r}$$

* **Sucesion convergentes**: Se van pareciendo a un numero

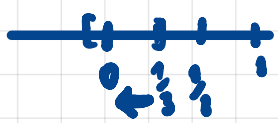
- $a_n = \frac{1}{n}$: $1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \ldots \frac{1}{n}$

* Estas nos interesan para el CALCULO

· CONVERGENCIA de SUCESIONES

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, y un numero $L \in \mathbb{R}$, decimos que "a_n converge a L" cuando se cumple

- $a_n = \frac{1}{n}$



- $a_n = \frac{n}{n+1} \longrightarrow 1$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1$$

$$1 \qquad 0$$

* **NOTACIÓN**: $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = L}$

- **Leyes límites**

1. $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

2. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n$

3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$, si $\lim b_n \neq 0$

4. $\lim_{n\to\infty} a_n^p = (\lim a_n)^p$, $p > 0$, $a_n > 0$

- Calcule:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \cdot \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0 \,//$$

- Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $a_n = f(n)$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(x)}$$

- $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{x} = 0$

c $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

$0 < \dfrac{n!}{n^n}$ * $\dfrac{n!}{n^n} = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}{\underbrace{n}_{} \; \underbrace{n \; n \; n \cdots n}_{\leq 1}}$

$\therefore \quad 0 < \dfrac{n!}{n^n} < \dfrac{1}{n}$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$0 \qquad 0 \qquad 0$

POR TEOREMA SANDWICH

- **DIVERGENCIA AL ∞**

$a_n \to +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$

Cuando a_n es mayor que cualquier constante a partir de cierto índice

- **CLASE 5**

LIMITE FUNCIÓN CONTÍNUA

TEOREMA: Si f es CONTINUA, $a_n \to L$

ENTONCES $f(a_n) \to f(L)$

$$\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$$

- $\lim \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\right) = \operatorname{sen} 0 = 0$ //

- $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ $\quad f(1) = 0$

$\lim f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ $\neq$ PQ es DISCONTINUA

- $a_1 = 5$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$

$a_2 = \frac{1}{2}(5+6) = 5.5$

$a_3 = \frac{1}{2}(5.5+6) = 5.75$

$a_4 = \frac{1}{2}(5.75+6) = 5.875$

a_n es CRECIENTE ($a_{n+1} \geq a_n$)

- **SUCESIÓN CRECIENTE**: $a_{n+1} \geq a_n$
- **SUCESIÓN DECRECIENTE**: $a_{n+1} \leq a_n$

} **MONOTONA** → CONVERGENTE

SSI NO SE VA A ∞

• Dem: $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$, $a_1 = 5$ **ES CRECIENTE**

1. $a_n < 6 \ \forall n$ "INDUCCIÓN"

Si $a_n < 6$ entonces

$a_n + 6 < 12$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(a_n + 6)}_{a_{n+1}} < 6$$

2. $a_n < 6 \ / + a_n$

$$\frac{a_n + a_n}{2} < \frac{6 + a_n}{2}$$

$a_n < a_{n+1}$] $\therefore$ DEM CRECIENTE

4. **TEOREMA**

Si $\{a_n\}$ es CRECIENTE, entonces se tienen solo 2 posibil.

i) $a_n \to +\infty$

ii) a_n converge $\leftrightarrow$ a_n es ACOTADA SUPERIORMENTE

• PASO 1: Comprobar límite

DEMOSTRAR CONVERGENCIA

CRECE ACOTADA

DECRECE ACOTADA

• PASO 2: $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$

$L = \frac{1}{2}(L + 6)$

$2L = L + 6$

$L = 6$

c) Demuestre que

$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\dots}}}$ CONVERGE y calcule el límite

$a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ → esa es la recurrencia

$a_1 = 1 \quad a_2 = \sqrt{2} \quad a_3 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$

1) $a_2 > a_1 \;/ +1$

$a_2 + 1 > a_1 + 1 \;/ \sqrt{\ }$

$\sqrt{a_2+1} > \sqrt{a_1+1}$

$a_3 > a_2$

$a_n > a_{n-1} \;/ +1, \sqrt{\ }$

$\sqrt{a_n+1} > \sqrt{a_{n-1}+1}$

$a_{n+1} > a_n \;\therefore$ es creciente

2) Probar que es ACOTADA

PROBAR cualquier cota SUPERIOR (de preferencia grande)

$a_n < 10 \;/ +1 \sqrt{\ }$

$a_2 < \sqrt{11} < 10$

$a_2 < 10 \;/ +1, \sqrt{\ }$

$a_3 < \sqrt{11} < 10$

$a_n < 10 \Rightarrow \underbrace{\sqrt{1+a_n}}_{a_{n+1}} < \sqrt{11} < 10 \quad \therefore$ ACOTADA

3) $a_{n+1} = \sqrt{a_n+1}$

$L = \sqrt{L+1} \;/ (\ )^2$

$L^2 - L + 1 = 0$

$L_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ✓✓

$\cancel{L_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

$$\boxed{a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

• CLASE 6 :

1 SERIES : SUMA inf de TERMINOS, dada una SECUENCIA $\{a_n\}_{n \geq 0}$

- $a_n = 1$ $\quad 1 + 1 + 1 \ldots \rightarrow$ NO TIENE SENTIDO
- $a_n = (-1)^n$ $\quad 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ TAMPOCO
- $a_n = 3 + 0{,}1 + 0{,}04 + 0{,}001 + 0{,}0005 + \ldots$

$\pi \overset{\text{"="}}{=} \sum \frac{a_n}{10^n}$, a_n SON SUS DIGITOS

• Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $\left\langle \begin{array}{l} \text{diverge} \\ \text{converge} \end{array} \right\}$ $\boxed{\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} a_n}$ $\left\langle \begin{array}{l} \text{DIV} \\ \text{CONV} \end{array} \right.$

! SUMAS PARCIALES

$$\boxed{S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i}$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2 \longrightarrow$

- $0{,}9999\ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{9}{10^i} = 1$

- $a_n = r^n \quad , \ |r| < 1$

$$\sum_{n=1}^{N} r^n$$

$$S_n = 1 + \cancel{r} + \cancel{r^2} + \dots + \cancel{r^N} \quad / \quad \text{TRUCO DE GAUSS}$$

$$S_n \cdot r = r + r^2 + \dots + r^N + r^{N+1} \quad / \cdot -1$$

$$-S_n \cdot r = \cancel{-r} - \cancel{r^2} - \dots \cancel{-r^N} - r^{N+1}$$

$$S_n - rS_n = 1 - r^{N+1}$$

$$S_n(1-r) = 1 - r^{N+1}$$

$$\boxed{S_n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}}$$

$\therefore$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n} = \lim_{N \to \infty} S_n = \lim_{N \to \infty} \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} = \boxed{\frac{1}{1-r}} \ //$$

- **TEOREMA** : **ARITMETICA de SERIES**

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ CONVERGE, ENTONCES :

1. $\sum_{n=0}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ⚠ $\sum \frac{a_n}{b_n}$, $\sum a_n \cdot b_n$ ✗

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} :$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Big\} \text{ PROP. TELESCOPICA}$$

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} \cdots =$$

$$= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\cdots} \quad \cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}$$

$$= S_n = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \to \infty} 1$$

Estudie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$* \quad \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \Rightarrow \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} < \underbrace{\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)}}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \underbrace{1 - \frac{1}{N}}_{\sum_{n=2}} + \underbrace{1}_{\sum_{n=1}}$$

$$= 2 - \frac{1}{N}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{N} < 2$$

$\therefore$ S_n es ACOTADA SUP.

$\cdot$ $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2} > S_n$ $\therefore$ CRECIENTE

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ CONVERGE !}$$

Observación

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$$

Teorema:

$$\boxed{\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es } \underline{\text{CONVERGENTE}} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} a_N = 0}$$

$$\boxed{\text{Si } \lim_{N\to\infty} a_N \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ es } \underline{\text{DIVERGENTE}}}$$

Estudie: Serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \text{DIVERGE!!!}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$$

$$> \downarrow$$

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{8}}$$

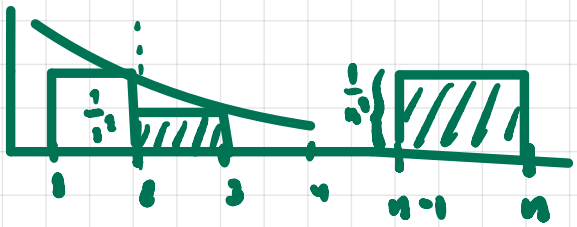
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \ldots$$

$\therefore$ DIVERGE!!

- **CLASE 7**

- **TEORÍA COMPARACIÓN CON INTEGRAL**

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

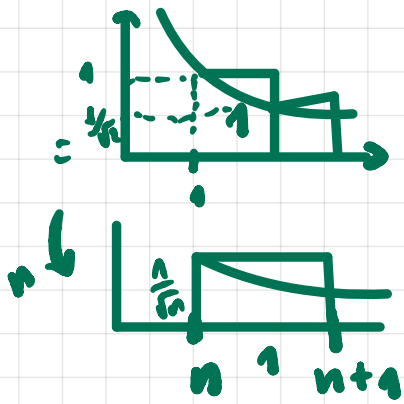


$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$\therefore$ **CONCLUSIÓN** pero $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < \infty$ ES FINITA

$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ CONVERGE!

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ Pensemos en $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ =

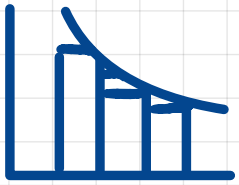


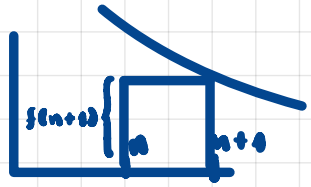
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} > \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \infty$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ no le queda mas que **DIVERGIR**

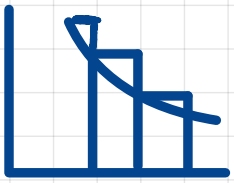
- **TEOREMA**: Si f es DECRECIENTE y CONTINUA: ENTONCES

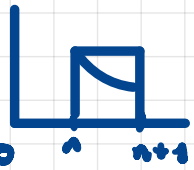
  - La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ CONVERGE $\longleftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ CONVERGE





$$\int_1^\infty f(x) < \infty \Rightarrow \sum^\infty f(n) < \infty$$





$$f(n) > \int_n^{n+1} f$$

$$\int f(x) = \infty \Rightarrow \sum^\infty f(n) = \infty$$

- **PROP**: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$

  1. DIVERGE CUANDO $p \leq 1$
  2. CONVERGE CUANDO $p > 1$

Dem: Aplicar teorema a $f(x) = \frac{1}{x^p}$

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ | $\frac{1}{n \ln(n)} < \frac{1}{n}$ | $\sum \frac{1}{n^{1,00001}}$

- **RESIDUOS**:

$$\sum_1^\infty a_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n}_{S_n} + \underbrace{(a_{N+1} + a_{N+2} + \dots)}_{R_N}$$

$$S = S_n + R_N \rightarrow \text{Residuo}$$

$$\boxed{|S - S_n| = R_N}$$

- $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$? VALOR APROX

HALLAR : $\left| \sum_{1}^{N} \frac{1}{n^2} - \sum^{\infty} \frac{1}{n^2} \right| < \frac{1}{1000}$

- **CLASE 8**

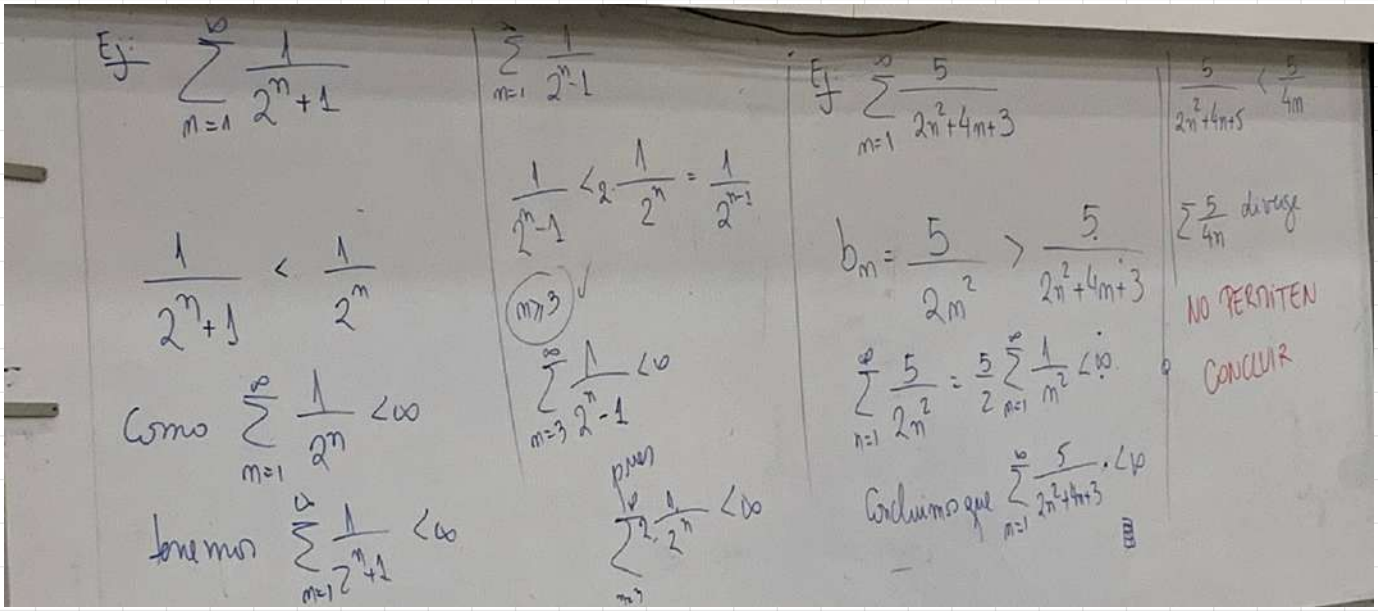
1 CRITERIO COMPARACIÓN

2 secuencias $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ de TERMINOS POSITIVOS y $a_n \leq b_n$ entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ CONVERGE CUANDO } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ CONVERGE},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ DIVERGE CUANDO } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ DIVERGE}$$

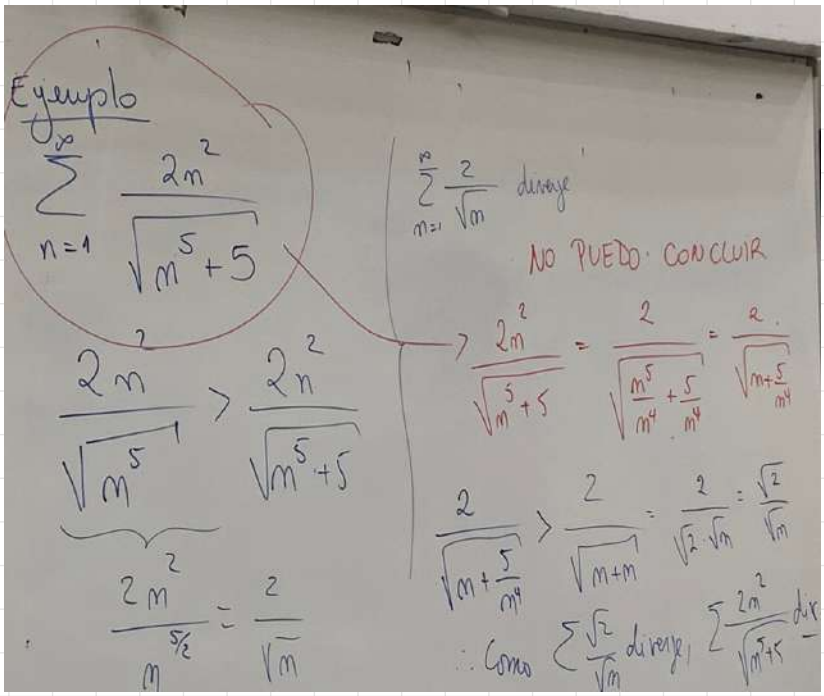
e



La prueba por comparación Supongamos que Σa_n y Σb_n son series con términos positivos.

i) Si Σb_n es convergente y $a_n \leqslant b_n$ para toda n, entonces Σa_n también es convergente.

ii) Si Σb_n es divergente y $a_n \geqslant b_n$ para toda n, entonces Σa_n también es divergente.



• TEOREMA COMPARACIÓN LÍMITE

Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son SERIES con terminos +

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \Rightarrow \begin{cases} \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ Divergen} \\ \sum a_n \text{ y } \sum b_n \text{ CONVERGEN} \end{cases}}$$

• c finito, $c > 0 \rightarrow (c \neq 0)$

• $\frac{2n^2}{\sqrt{n^5+5}} = a_n$

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{5}{n^5}}} \rightarrow \underbrace{2 > 0}$

↳ ∴ COMO $\sum b_n$ Diverge

$\sum a_n$ DIVERGE

c) $\sum_{k \geq 1} \frac{\ln(k)}{k}$

sol: $\ln(k) \geq 1$ para $k \geq 3$

$\therefore \frac{\ln(k)}{k} > \frac{1}{k} \Rightarrow$ diverge

$\therefore$ por lo tanto la serie $\sum \frac{\ln(k)}{k}$ diverge

Sol "2":

$a_n = \frac{\ln(k)}{k}$

$b_n = \frac{1}{k}$

$\frac{\frac{\ln(k)}{k}}{\frac{1}{k}} = \ln(k) \rightarrow$ no es c diverge!!

NO SIRVE

- **CLASE 9:**

1. **SERIES ALTERNANTES:**

$(b_n)_{n\geq 1}$ Secuencia positiva y Decreciente

$a_n = (-1)^{n+1} b_n$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serie ALTERNANTE

$b_n = |a_n|$ $\quad S = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6$

CRITERIO (LEIBNIZ)

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ **CONVERGE**

1. ALTERNADO
2. MONOTONO $\rightarrow b_n > b_{n+1}$
3. $\lim b_n = 0$

2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$ CONVERGE

2. $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$

$= -\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$ $\therefore$ CONVERGE

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$

1. ALTERNADO? $\rightarrow$ Si $(-1)^{n+1}$

2. MONOTONA: $f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$

$f'(x) = \frac{2x(x^3+1) - 3x^2 \cdot x^2}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^4 + 2x}{(x^3+1)^2}$

a partir de $x > \sqrt[3]{2}$ es negativa

$\rightarrow \oplus$

$\therefore$ Sec. Decreciente 1 ✓

3. $\lim b_n \rightarrow 0$ ✓✓

· Estimación de Series Alternantes.

Teorema de estimación para series alternantes Si $s = \Sigma(-1)^{n-1}b_n$ es la suma de una serie alternante que cumple con

$$\text{i) } b_{n+1} \leq b_n \quad \text{y} \quad \text{ii) } \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

entonces

$$|R_n| = |s - s_n| \leq b_{n+1}$$

Residuo

"el Resto, siempre es mas pequeño que el Termino siguiente

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ ¿hasta que valor debo sumar para cometer un error menor que 0,001?

  "1/e

- ¿Es alternante, monótona y $\lim b_n = 0$ ∴ converge

$$|s_n - s| < b_{n+1}$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$$

$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$
$5! = 120$
$6! = 720$
$7! = 5040$

$$\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} \approx 0{,}0002$$

∴ hasta el $\underline{6}$

CIAGE 10

1 Convergencia Absoluta :

Una serie $\sum a_n$ es **ABS. CONVERGENTE** si la serie de valores absolutos $\sum |a_n|$ es **CONVERGENTE**

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ es Abs convergente pues:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \longrightarrow \text{CONVERGE}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ NO es Abs convergente pues:

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \frac{1}{n} \longrightarrow \text{DIVERGE}$$

Sin embargo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ CONVERGE

SERIE ARMONICA

2 : Convergencia Condicional :

Cuando una serie es **convergente** pero **NO ABSOLUTA**.

3 : Teorema

Si $\sum a_n$ es Abs. converg $\Rightarrow$ $\sum a_n$ converge

No necesariamente al mismo numero.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ conv. Abs ???

$$\downarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n)|}{n^2}$$: converge por prueba de comparación

$$\downarrow$$

$$\frac{|\cos(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \rightarrow \text{converge}$$

- **Prueba de la Razón**

↳ Si $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

a. Si $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Absol. Convergente

b. Si $L > 1$ ó $L = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Divergente

c. Si $L = 1$ No concluye NADA

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$ ABS. convergente ?

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{3^n}}\right| = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \xrightarrow{\infty} \frac{1}{3} < 1$$

$\therefore$ ABS. CONV ✓

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ABS. convergente ?

3 Prueba de la Raíz

↳ Si $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

a) Si $L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Absol. Convergente

b) Si $L > 1$ ó $L = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Divergente

c) Si $L = 1$ No concluye NADA

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$???

$$\downarrow$$

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n\right|} = \frac{2n+3}{3n+2} \xrightarrow{\infty} \frac{2}{3} < 1$$

$\therefore$ ABS. CONVERG!

- **CLASE 11 (741-748)**

- **SERIE POTENCIAS**: es una expresión de la forma:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n}$$

, a_n SUCES. son los coef de la SERIE

c es el CENTRO

Esta expresión define la función:

$$\boxed{\begin{aligned} f &: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \end{aligned}}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \in \mathbb{R} \right\}$$

! ESTAS SERIES CONVERGEN PARA CIERTOS x Y DIVERGEN PARA OTROS

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots$ ✓✓

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(x^n) = a_0 \cos(1) + a_1 \cos + \dots$ ✗✗ NO ES

- ¿Para que valores x $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$ es CONVERGEN?

CENTRO: 0

R: IDEA: CRITERIO CUOCIENTE

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{n!\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x|$$

$$|x| \lim_{n\to\infty} n+1 = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ +\infty, & x \neq 0 \end{cases}$$

LA SERIE SOLO CONVERGE PARA $x = 0$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ PARA ¿x? CONVERGE

• <u>Crit. cuociente</u> :

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left| \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1} \right|}{\left| \frac{(x-3)^n}{n} \right|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} |x-3| \left(\frac{n}{n+1} \right) = |x-3|$$

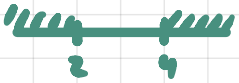
Por el CRITERIO: Si $|x-3| < 1$ ⇒ CONVERGE ABSOLUT.

$\Updownarrow$

$-1 < x-3 < 1$

$2 < x < 4$

Si $|x-3| > 1$ ⇒ DIVERGE



Si $|x-3| = 1$ ⇒ NO se puede ASUMIR

↳ $\underline{x=2}$, $\underline{x=4}$

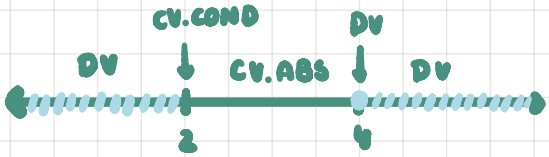
Eval Extremos:

$\underline{x=2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-3)^n}{n}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ → SERIE ALTERNANT. → CONVERGE condicion.

$\underline{x=4}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n}$ → ARMONICA → DIVERGE

$D \subseteq \mathbb{R}$:



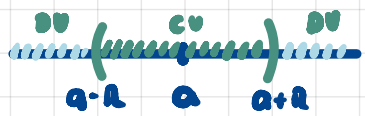
∴ LA SERIE CONVERGE $x \in [2,4)$

• TEOREMA (S. POT)

• Para $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$ solo hay 3 CASOS:

1. Converge solo cuando $x = a \longrightarrow R = 0$
2. Converge para toda $x \longrightarrow R = \infty$
3. Hay un Radio R de converg. : $|x-a| < R$

Solo se cumple una



• Det intervalo y radio de converg. de:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$$

Crit cuoc: $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-3)^{n+1} x^{n+1}}{\sqrt{n+2}}}{\frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \left| (-3)x \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}}_{\to 1} \right|$

$\lim_{n\to\infty} 3|x|$

$= 3|x|$

$3|x| < 1 \Rightarrow$ CONV. ABS

$|x| < \frac{1}{3}$

$R = \frac{1}{3}$

$|x| = \frac{1}{3}$

1. $x = \frac{1}{3}$ $\quad \sum \frac{(-3)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ CONV
2. $x = -\frac{1}{3} \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ DIVERG

CRIT LEIBNIZ: $\sum_{1}^{\infty} a_n (-1)^n$ $\longrightarrow$ CONVERGE

$a_n \geq 0$
$\lim = 0$
$a_{n+1} \leq a_n$

$\longrightarrow$ intervalo: $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$

CLASE 12 (746 - 751)

REPRESENT. FUNCIONES

esta serie converge para $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \quad , \quad |-x^2| < 1$$

RAZÓN

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad , \quad x^2 < 1$$

$$|x| < 1$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \dots \qquad -1 < x < 1$$

REPRESENTACIÓN válida solo en $x \in (-1, 1)$

Represente $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ como potencia en torno a 0 y 1 ($c=0$, $c=1$)

1. $$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum \frac{(-1)^n x^n}{2^n} \quad , \quad \left|-\frac{x}{2}\right| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} \quad , \quad |x| < 2$$

$(-2, 2)$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8}$$

Representación valida entre -2 y 2

EN TORNO a 1

2. $$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3 + (x-1)}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\left(\frac{1-x}{3}\right)}\right) = \frac{1}{3} \sum \left(\frac{1-x}{3}\right)^n \quad , \quad \left|\frac{1-x}{3}\right| < 1$$

$$= \sum \frac{(-1)^n (x-1)^n}{3^{n+1}}$$

$$, \ |1-x| < 3$$

$$|x-1| < 3$$

$$-3 < x-1 < 3$$

$$-2 < x < 4$$

TEOREMA

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ tiene RADIO CONV. $R>0$

ENTONCES:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ es DERIVABLE CONTÍNUA y INTEGRABLE sobre int: $(a-R, a+R)$

1. $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot c_n (x-a)^{n-1}$

2. $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$

EJEMPLO 6 Determine una representación como serie de potencias para $\ln(1+x)$ y su radio de convergencia.

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \qquad |x|<1 \longrightarrow$ RADIO $= 1$

$\int \frac{1}{1+x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n dx$

$\ln(x+1) + C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ //

$x=0 \rightarrow \ln(1) + C = 0$

$C = 0$

- **CLASE 13** (763-794) TAYLOR

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots \quad , \quad |x-a| < R$$

$$f(a) = c_0$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \dots \quad , \quad |x-a| < R$$

$$f'(a) = c_1$$

$$f''(a) = 2c_2$$

$$f'''(a) = 2 \cdot 3c_3 = 3!\,c_3$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a) = n!\,c_n \longrightarrow \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = c_n$$

- **TEOREMA 1** (COEFICIENTES)

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad |x-a| < R$

Entonces: $\boxed{c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}$

- **SERIE TAYLOR**: $f(x)$ derivable inf en un intervalo $|x-a|<R$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}_{c_n} \cdot (x-a)^n} = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

CENTRADA EN a

- **SERIE MACLAURIN**:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x)^n}$$

CENTRADA EN 0

- **POLINOMIO TAYLOR** : SUMA PARCIAL :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(c)}{k!}(x-c)^k$$

- **RESIDUO TAYLOR** : "lo que le falta al polinomio para ser f"

$$R_n(x) = \underset{\sum^{\infty}}{f(x)} - \underset{\sum^{n}}{T_n(x)}$$

- **TEOREMA (forma Lagrange)**

Existe $z \in (x, a)$ tq:

$$\boxed{|R_n(x)| = \left| \frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right|}$$

"la usaremos asumiendo que trabajamos con funciones cuyas DERIVADAS son ACOTADAS"

- **DESIGUALDAD DE TAYLOR**

Si $|f^{n+1}(x)| \leq M$ para $|x-a| \leq d$

→ **ENTONCES**:

$$\boxed{|R_n(x)| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}}$$, para $|x-a| \leq d$

5. Taylor de e^x centrada en 0

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f^{(n)}(x) = e^x$

$f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!}(x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Por crit. cuoc.

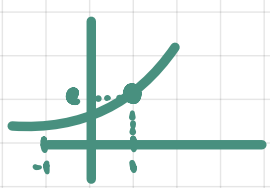
$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La serie converge para todo $\mathbb{R}$.

- ¿La serie aproxima a la función?

$f^{n}(x) = e^x$

$I^{*} = (-1, 1)$



$|f^{n}(x)| = e^x \leq e$ cuando $x \in (-1,1)$

Por teorema Residuo:

$$|R_n(x)| \leq e\,\frac{|x-0|^{n+1}}{n+1!} = e\,\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

y $\lim_{n\to\infty} \frac{e\,|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ ya que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ converge

criterio cuocient.

¡Paso final!

$$\lim |e^x - T_n(x)| = \lim |R_n(x)| \leq \lim \frac{e|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

$$\therefore e^x = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

- $$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0}$$

- $$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x}$$

~ ¿CENTRADA? $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n \quad \forall x$

- $$\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$$

$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$	$f^{(4)}(0) = 0$

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- $$\boxed{\operatorname{Sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

- $$\boxed{\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}}$$

EJEMPLO 6 Determine la serie de Maclaurin para la función $f(x) = x \cos x$.

SOLUCIÓN En lugar de calcular las derivadas y sustituir en la ecuación 7, es más fácil multiplicar la serie para $\cos x$, ecuación 16, por x:

$$x \cos x = x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$$

- Taylor $\ln(x)$ centrado en 1

$f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad f''(1) = -1$

$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$ $\quad f'''(1) = 2$

$f''''(x) = -\frac{2\cdot 3}{x^4}$ $\quad f^{4}(1) = -2\cdot 3$

$f^{5}(x) = \frac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$ $\quad f^{5}(1) = 2\cdot 3\cdot 4$

$f^{n}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)!$

SERIE TAYLOR:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(n)!} \cdot (x-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

TABLAS SERIES NOTABLES

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$\ln(1+x)$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n \quad / \int$$

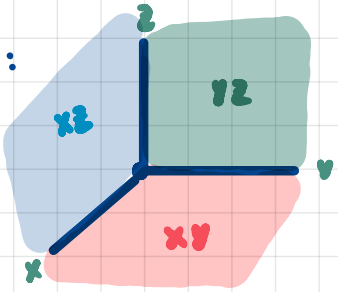
$$\ln(1+x) = \frac{(-x)^{n+1}}{n+1}$$

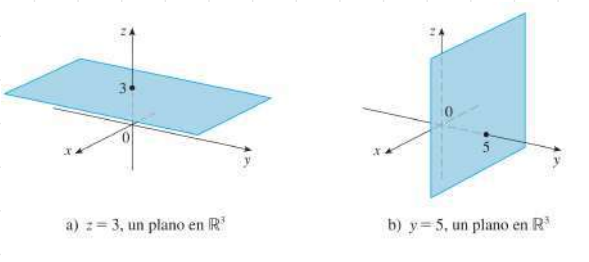
CLASE 14 (786-789 / 791-798)

DISTANCIA PTOS : $P_1(x_1, y_1, z_1)$ $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

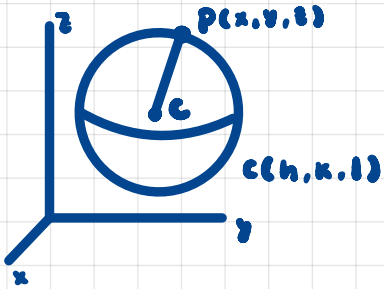
PLANOS :





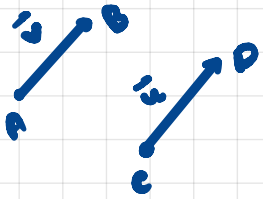
a) $z = 3$, un plano en $\mathbb{R}^3$ b) $y = 5$, un plano en $\mathbb{R}^3$

ESFERA



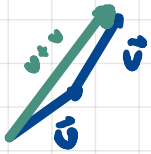
$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2}$$

VECTORES



$\vec{u} = \vec{v} \leftrightarrow$ igual Dirección y Longitud

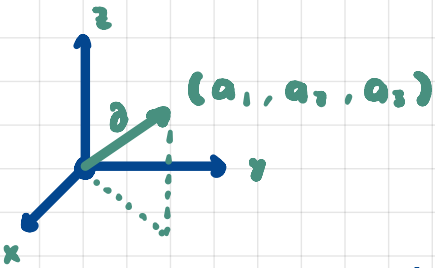
- **SUMA** : $\vec{u} + \vec{v}$:



- **Mult Escalar** : $\vec{v}$ vector y c escalar :

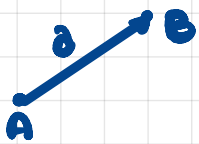
$c > 0$ MISMA DIR
$c < 0$ OPUESTA DIR

- **COMPONENTES** :



$$\boxed{a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle}$$

$A(x_1, y_1, z_1)$
$B(x_2, y_2, z_2)$



$$\boxed{a = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle}$$

- **Longitud** : $\boxed{|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle$$

$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle$$

De manera similar, para vectores en tres dimensiones,

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle - \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

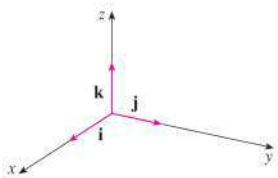
$$c\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$$

Propiedades de vectores Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores en V_n y c y d son escalares, entonces

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$
6. $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$
7. $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$
8. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

- **VECTORES ESTANDAR** :

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$



Si $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, entonces se puede escribir

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_3 \rangle$$

$$= a_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + a_2 \langle 0, 1, 0 \rangle + a_3 \langle 0, 0, 1 \rangle$$

$$\boxed{2} \qquad \mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$$

- **VECTOR UNITARIO** : $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ SON VECT UNIT

VECTOR UNITARIO CON MISMA DIRECCION QUE $\vec{a}$ ES

$$\boxed{u = \frac{a}{|a|}}$$

- **CLASE 15** (800-803 / 808-812)

- **PRODUCTO PUNTO** : $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$
  $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$$\boxed{a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

- **PROPIEDADES**

2 Propiedades del producto punto Si **a**, **b** y **c** son vectores en V_3 y c es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
4. $(c\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (c\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = 0$

- **TEOREMA** : Si θ es ángulo entre vect. a y b :

$$\boxed{a \cdot b = |a||b| \cos\theta}$$

- **VECT ORTOGONALES** : $a \cdot b = |a||b| \cancel{\cos(90)}^{\,0}$

  (Perpendiculares)

$$\boxed{a \cdot b = 0}$$

- **PRODUCTO CRUZ** : $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$
  $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$$\boxed{a \times b = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2 \,,\; a_3 b_1 - a_1 b_3 \,,\; a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle}$$

$a \times b = c = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ **c ES ORTOGONAL A a y b**

• DETERMINANTES (OTRA FORMA ESCRIBIR)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \qquad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

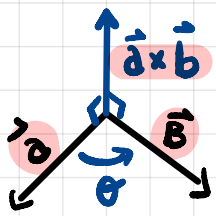
V EJEMPLO 1 Si $\mathbf{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (-15 - 28)\mathbf{i} - (-5 - 8)\mathbf{j} + (7 - 6)\mathbf{k} = -43\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

• TEOREMA: VECTOR $a \times b$ es ORTOGONAL a a y a b

→ $a \cdot (a \times b) = 0$
→ $b \cdot (a \times b) = 0$

• REGLA MANO DERECHA: DIRECCIÓN $a \times b$



1)

2)

• TEOREMA: θ ángulo entre a y b, $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\boxed{|a \times b| = |a||b| \operatorname{sen} \theta}$$

$\theta = 0 \rightarrow a \times b = 0$
$\operatorname{sen}(0) = 0$

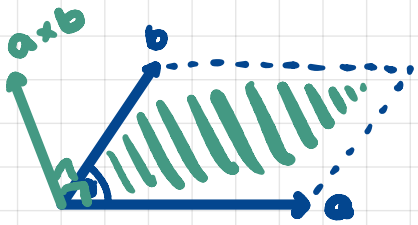
• COROLARIO: $\boxed{a \times b = 0 \leftrightarrow a \text{ y } b \text{ son PARALELOS}}$

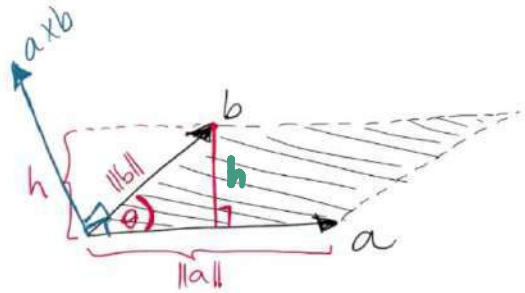
PROPIEDADES

11 Teorema Si **a**, **b** y **c** son vectores y c es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
2. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (c\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
5. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

$\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ = AREA PARALELOGRAMO DET POR a y b

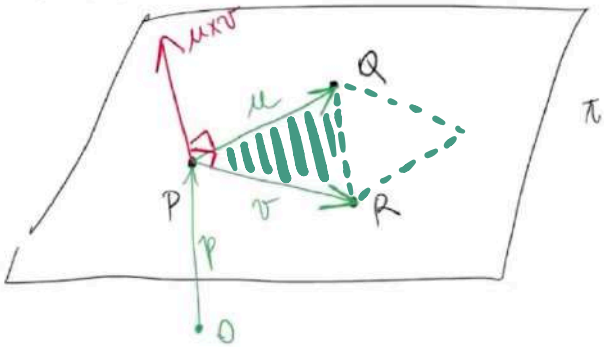




ÁREA = BASE × ALTURA $= \|a\| \cdot h = \|a\| \cdot \|b\| \operatorname{sen} \theta$
$= \|a \times b\|$.

EJEMPLO 3 Encuentre un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.

EJEMPLO 4 Encuentre el área del triángulo con vértices $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ y $R(1, -1, 1)$.



$\pi = \{\vec{p} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\}$.

(3) $u = Q - P = (-2,5,-1) - (1,4,6) = (-3,1,-7)$

$v = R - P = (1,-1,1) - (1,4,6) = (0,-5,-5)$

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & k \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-5-35, -15, 15)$$

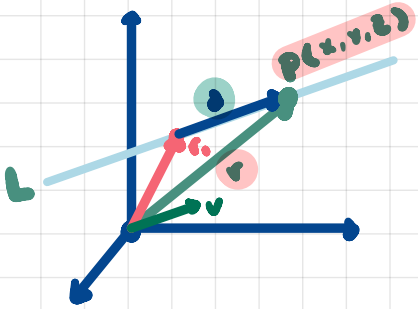
$= (-40, -15, 15)$.

(4) ÁREA TRIÁNGULO $= \frac{1}{2}\|u \times v\|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{1600 + 225 + 225}$

CLASE 16 (816 - 822)

EC. VECTORIAL :



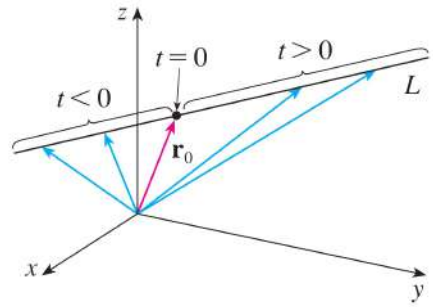
$r = r_0 + \vec{a}$ $\quad \vec{a} = t \cdot \vec{v}$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}}$$

$r_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

$tv = \langle ta, tb, tc \rangle$

VALORES DE T



$$\boxed{r = \langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle}$$

→ **EC. PARAMETRICAS** :

$$x = x_0 + at \qquad y = y_0 + bt \qquad z = z_0 + ct$$

de la RECTA L que

$L \parallel \vec{v}$

EC. SIMETRICAS :

$a, b, c = \vec{d}$

$P = (x_0, y_0, z_0)$

$$\boxed{L : (x_0, y_0, z_0) + t\langle a, b, c \rangle}$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

→ Despejar t de las PARAMETRICAS

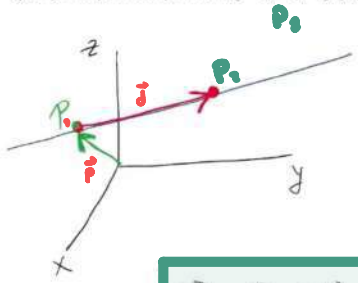
Si a, b o c = 0 se elimina a t

Si a = 0

⇒ $x = x_0 \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ → L vive en el plano $x = x_0$

Determine la ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos (−8, 1, 4) y (3, −2, 4).

$P_2 \quad P_1 \quad d = \overrightarrow{P_2P_1}$



$d = (-8,1,4) - (3,-2,4)$

$\vec{d} = (-11, 3, 0)$

$\vec{p} = (3, -2, 4)$.

$$\boxed{\vec{r} = (3,-2,4) + \alpha(-11,3,0)}$$

EC. VECTORIAL.

$$\boxed{x = 3 - 11\alpha, \quad y = -2 + 3\alpha, \quad z = 4}$$

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

$$\boxed{\frac{3-x}{11} = \frac{y+2}{3}, \quad z = 4}$$

ECUACIONES SIMÉTRICAS.

a) Encuentre la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto (5, 1, 3) y es paralela al vector $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

a) Aquí $\mathbf{r}_0 = \langle 5, 1, 3\rangle = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, así que la ecuación vectorial $\boxed{1}$ se convierte en

$$\mathbf{r} = (5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

o bien,

$$\mathbf{r} = (5 + t)\mathbf{i} + (1 + 4t)\mathbf{j} + (3 - 2t)\mathbf{k}$$

Las ecuaciones paramétricas son

$$x = 5 + t \qquad y = 1 + 4t \qquad z = 3 - 2t$$

En la figura 3 se muestra la recta L del ejemplo 1 y su relación con el punto dado y con el vector que da su dirección.

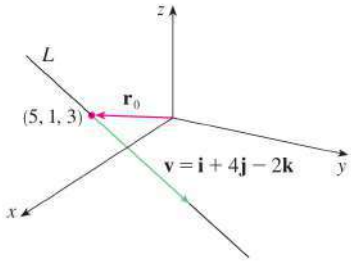


FIGURA 3

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta que pasa a través de los puntos $A(2, 4, -3)$ y $B(3, -1, 1)$.

a) No se da de manera explícita un vector paralelo a la recta, pero observe que el vector $\mathbf{v}$ con representación $\overrightarrow{AB}$ es paralelo a la recta y

$$\mathbf{v} = \langle 3 - 2, -1 - 4, 1 - (-3)\rangle = \langle 1, -5, 4\rangle$$

Así, los números directores son $a = 1$, $b = -5$ y $c = 4$. Si se toma el punto $(2, 4, -3)$ como P_0, se ve que las ecuaciones paramétricas $\boxed{2}$ son

$$x = 2 + t \qquad y = 4 - 5t \qquad z = -3 + 4t$$

y las ecuaciones simétricas $\boxed{3}$ son

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}$$

¿Donde intersecta al plano xy!

b) La recta interseca el plano xy cuando $z = 0$, así que se pone $z = 0$ en las ecuaciones simétricas y se obtiene

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{3}{4}$$

Esto da $x = \frac{11}{4}$ y $y = \frac{1}{4}$, así que la recta interseca al plano xy en el punto $\left(\frac{11}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

V EJEMPLO 3 Demuestre que las rectas L_1 y L_2 con ecuaciones paramétricas

$$x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$
$$x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

son **rectas oblicuas**; es decir, no se intersecan y no son paralelas (y, por tanto, no pertenecen al mismo plano).

SOLUCIÓN Las rectas no son paralelas porque los vectores correspondientes $\langle 1, 3, -1\rangle$ y $\langle 2, 1, 4\rangle$ no son paralelos. (Sus componentes no son proporcionales.) Si L_1 y L_2 tuvieran un punto de intersección, habría valores de t y s tales que

$$1 + t = 2s$$
$$-2 + 3t = 3 + s$$
$$4 - t = -3 + 4s$$

Pero si se resuelven las dos primeras ecuaciones, se obtiene $t = \frac{11}{5}$ y $s = \frac{8}{5}$, y estos valores no satisfacen la tercera ecuación. Por tanto, no hay valores de t y de s que satisfagan simultáneamente las tres ecuaciones. Así, L_1 y L_2 no se intersecan. En consecuencia, L_1 y L_2 son rectas oblicuas.

RECTAS OBLICUAS

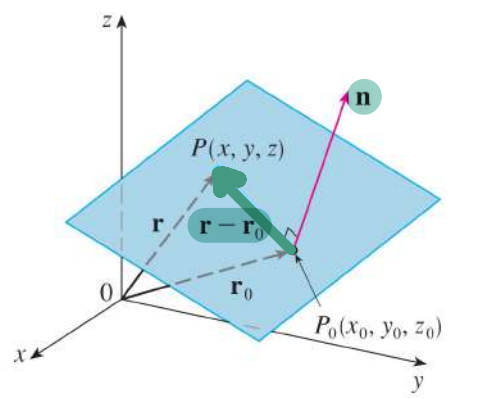
↳ NO SE INTERSECAN Y NO SON PARALELAS

- **PLANOS**: Se det. por un $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un $\vec{n}$ ORTOGONAL al PLANO

$P(x,y,z)$ arbitrario en el PLANO, r y r_0 vectores posición de P y P_0

$r - r_0$ representa $\overrightarrow{P_0P}$

n ortogonal a $r - r_0$



EC. VECTORIAL PLANO

$$\boxed{n \cdot (r - r_0) = 0}$$

$n = \langle a, b, c \rangle$ $r = \langle x, y, z \rangle$ $r_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

EC. ESCALAR PLANO

que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$ con **VECTOR NORMAL** $N = \langle a, b, c \rangle$

- 2 PLANOS son PARALELOS si sus VECT. NORMALES $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$ son PARALELOS

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

ECUACIÓN ESCALAR DEL PLANO.

$$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$$

$$ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_{d} = 0$$

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

ECUACIÓN LINEAL DEL PLANO.

↳ Nos permite calcular valores del PLANO

↳ $\vec{N} = \langle a, b, c \rangle$

V EJEMPLO 4 Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(2, 4, -1)$ con vector normal $\mathbf{n} = \langle 2, 3, 4 \rangle$. Determine las intersecciones con los ejes y bosqueje el plano.

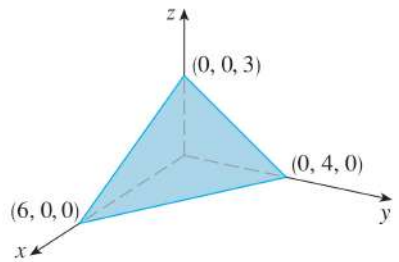
SOLUCIÓN Si se escribe $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ y $z_0 = -1$ en la ecuación 7, se ve que una ecuación del plano es

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0$$

o bien,

$$2x + 3y + 4z = 12$$

Para hallar la intersección con el eje x, se establece que $y = z = 0$ en esta ecuación y se obtiene $x = 6$. De manera similar, la intersección con el eje y es 4 y la intersección con el eje z es 3. Esto permite bosquejar la porción del plano que yace en el primer octante (véase la figura 7).



EJEMPLO 6 Encuentre el punto en el cual la recta con ecuaciones paramétricas $x = 2 + 3t$, $y = -4t$, $z = 5 + t$ interseca al plano $4x + 5y - 2z = 18$.

SOLUCIÓN Se sustituyen las expresiones para x, y y z de las ecuaciones paramétricas en la ecuación del plano:

$$4(2 + 3t) + 5(-4t) - 2(5 + t) = 18$$

Esto se simplifica a $-10t = 20$, así que $t = -2$. Por tanto, el punto de intersección ocurre cuando el valor del parámetro es $t = -2$. Entonces $x = 2 + 3(-2) = -4$, $y = -4(-2) = 8$, $z = 5 - 2 = 3$ y, por consiguiente, el punto de intersección es $(-4, 8, 3)$.

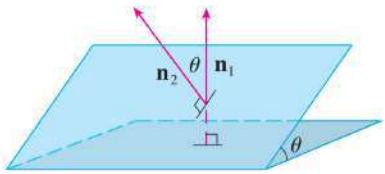


FIGURA 9

Dos planos son **paralelos** si sus vectores normales son paralelos. Por ejemplo, los planos $x + 2y - 3z = 4$ y $2x + 4y - 6z = 3$ son paralelos porque sus vectores normales son $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 2, -3 \rangle$ y $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 4, -6 \rangle$ y $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$. Si dos planos no son paralelos, entonces se intersecan en una recta y el ángulo entre los dos planos se define como el ángulo agudo entre sus vectores normales (véase el ángulo θ en la figura 9).

PLANOS: $x + 2y - 3z = 4$ y
$2x + 4y - 6z = 3$
SON PARALELOS
$n_1 = (1, 2, -3) \Rightarrow 2n_1 = (2, 4, -6) = n_2$

V EJEMPLO 7

a) Encuentre el ángulo entre los planos $x + y + z = 1$ y $x - 2y + 3z = 1$.
b) Obtenga las ecuaciones simétricas para la recta de intersección L de estos dos planos.

SOLUCIÓN

a) Los vectores normales de estos planos son

$$\mathbf{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle \qquad \mathbf{n}_2 = \langle 1, -2, 3 \rangle$$

y, por tanto, si θ es el ángulo entre los planos, el corolario 12.3.6 da

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1(1) + 1(-2) + 1(3)}{\sqrt{1 + 1 + 1}\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) \approx 72°$$

b) Primero se necesita hallar un punto sobre L. Por ejemplo, se puede hallar el punto donde la recta interseca al plano xy poniendo $z = 0$ en las ecuaciones de ambos planos.

Esto da las ecuaciones $x + y = 1$ y $x - 2y = 1$, cuya solución es $x = 1$, $y = 0$. Por tanto, el punto $(1, 0, 0)$ pertenece a la recta L.

Ahora se observa que, puesto que L yace en ambos planos, es perpendicular a los dos vectores normales. Así, un vector $\mathbf{v}$ paralelo a L está dado por el producto cruz

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

y, por tanto, las ecuaciones simétricas de L se pueden escribir como

$$\frac{x - 1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

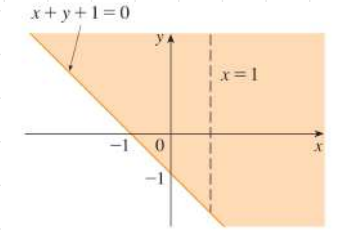
- **CLASE 17 (878 - 882)**

- **FUNCIÓN 2 VAR**: Es una regla que asigno a cada PAR (x,y) de un conj D (Dominio) un único real $f(x,y)$

$\{ f(x,y) \mid (x,y) \in D \}$

- $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ $\qquad D = \{ (x,y) \mid x+y+1 \geq 0,\ x \neq 1 \}$

$f(3,2) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$



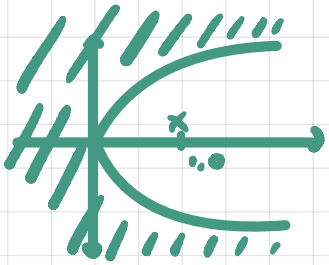
- $f(x,y) = x \ln(y^2 - x)$

Dom: $\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underline{f(x,y) \in \mathbb{R}} \}$

$y^2 - x > 0$

$y^2 > x$

$0 > 1 \quad x$



- DET Dom y Rango $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$D = \{ (x,y) \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \}$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 9$

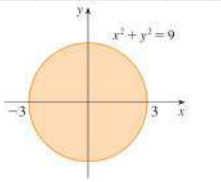


FIGURA 4
Dominio de $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$\therefore$ Rang $= \{ z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\ (x,y) \in D \}$

vei que $z \geq 0$

ademas $9 - x^2 - y^2 \leq 9$ $\quad$ cota maxima

$\Leftrightarrow \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$

$\therefore$ Rango $= \{ z \mid 0 \leq z \leq 3 \} = [0, 3]$

EJEMPLO 5 Grafique la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

$3x + 2y + z = 6$

SOLUCIÓN La gráfica de f tiene la ecuación $z = 6 - 3x - 2y$, o $3x + 2y + z = 6$, que representa un plano. Para graficar el plano, primero obtenemos las intersecciones con los ejes. Hacemos $y = z = 0$ en la ecuación y obtenemos $x = 2$ como la intersección con el eje x. Con el mismo procedimiento obtenemos la intersección con el eje y, que es 3, y la del eje z, que es 6. Ya con esto puede trazar la parte de la gráfica que está en el primer octante (véase figura 6).

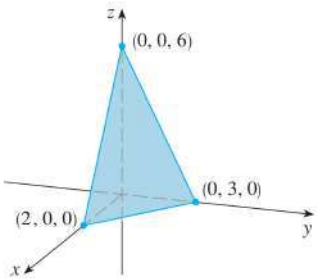


FIGURA 6

La función del ejemplo 5 es un caso especial de la función

$$f(x, y) = ax + by + c$$

que se llama **función lineal**. La gráfica de dicha función tiene por ecuación

$$z = ax + by + c \qquad \text{o} \qquad ax + by - z + c = 0$$

por lo que es un plano. Así como las funciones lineales de una sola variable son importantes en el cálculo de una variable, veremos que las funciones lineales de dos variables desempeñan un papel fundamental en el cálculo de varias variables.

Grafique la función $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.

$z = 6 - 3x - 2y$

$x = 0$ (PLANO YZ)

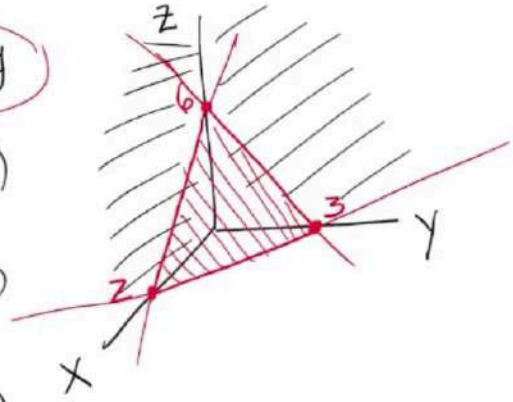
$z = 6 - 2y$

$y = 0$ (PLANO XZ)

$z = 6 - 3x$

$z = 0$ (PLANO XY)

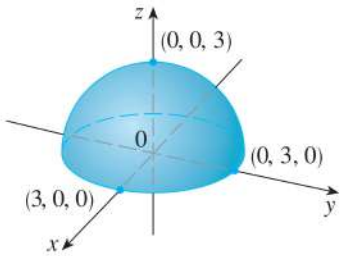
$3x + 2y = 3$



$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad , z \geq 0$

V **EJEMPLO 6** Trace la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

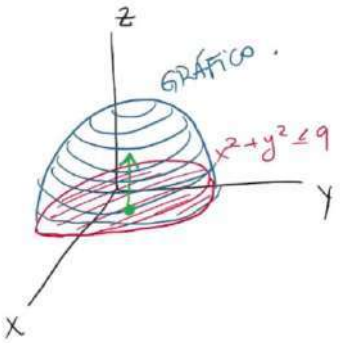
SOLUCIÓN La ecuación de la gráfica es $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Al elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación obtiene $z^2 = 9 - x^2 - y^2$, es decir $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, que se reconoce como la ecuación de la esfera con centro en el origen y radio 3. Pero como $z \geqslant 0$, la gráfica de g es sólo la parte superior de esta esfera (véase figura 7).



NOTA No toda esfera puede ser representada por una sola función de x y y. Como se vio en el ejemplo 6, el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ está representado por la función $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. El hemisferio inferior está representado por la función $h(x, y) = -\sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \iff x^2 + y^2 \leq 9$ CÍRCULO DE RADIO 3 RELLENO

GRÁFICO.



$x^2 + y^2 \leq 9$ (DOMINIO)

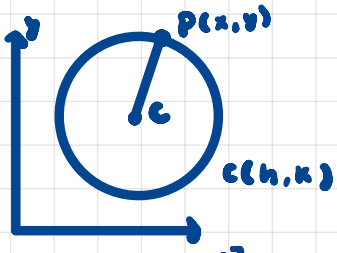
$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = 3^2}$, $z > 0$.

Funciones Conocidas (Conicas)

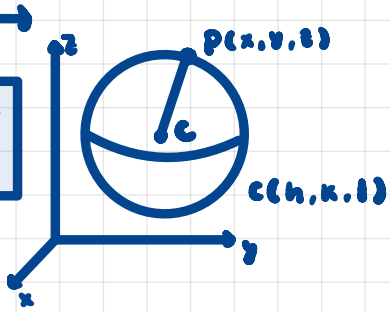
Circunf:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



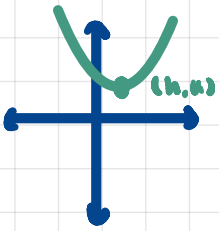
Esfera

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2$$

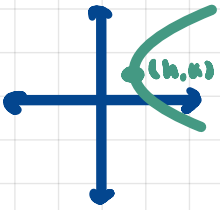


Parabola:

$$(y-k) = (x-h)^2$$

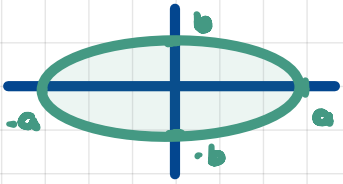


$$(y-k)^2 = (x-h)$$



Elipse:

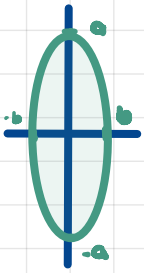
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



* $a > b$

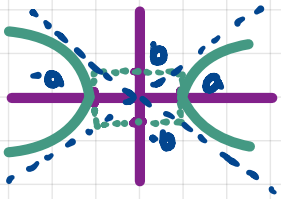
a es el mayor divisor

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

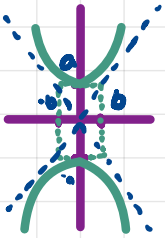


Hiperbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$



- **CLASE 18 (833 - 837)**

- **CURVAS DE NIVEL**: CURVAS CUYAS ECUACIONES SON

$$\boxed{f(x,y) = K}$$, K CONST. EN EL RANGO de f

Ejemplo: $z = +\sqrt{1-x^2-y^2}$ (SEMIESFERA SUP. DE RADIO 1).

CURVAS DE NIVEL: $\sqrt{1-x^2-y^2} = K \iff x^2+y^2 = 1-K^2$

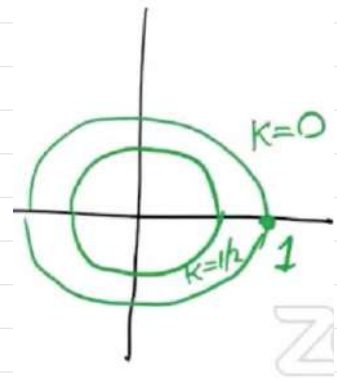
$K=0$: $x^2+y^2=1$

$K=\frac{1}{2}$: $x^2+y^2=\frac{3}{4}$

$K=1$

$K=2$

⋮



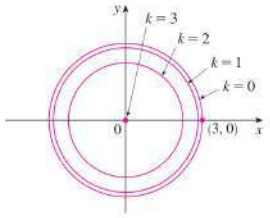
V EJEMPLO 11 Grafique las curvas de nivel de la función

$$g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

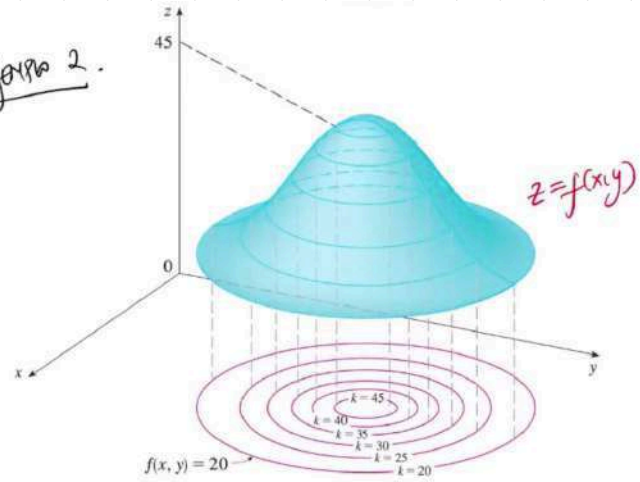
SOLUCIÓN Las curvas de nivel son

$$\sqrt{9 - x^2 - y^2} = k \qquad \text{o bien} \qquad x^2 + y^2 = 9 - k^2$$

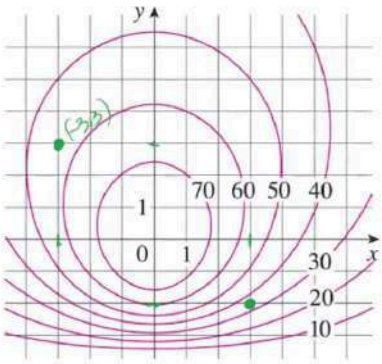
Ésta es una familia de circunferencias concéntricas con centro (0, 0) y radio $\sqrt{9-k^2}$. Los casos $k = 0, 1, 2, 3$ se ilustran en la figura 16. Intente imaginar estas curvas de nivel elevadas desde la superficie, y compare con la gráfica de g (un hemisferio) de la figura 7. (Véase TEC Visual 14.1A.)



Ejemplo 2.



Se proporciona un mapa de contorno para una función f. Con éste estime los valores de $f(-3, 3)$ y $f(3, -2)$. ¿Qué puede decir respecto a la forma de la gráfica?



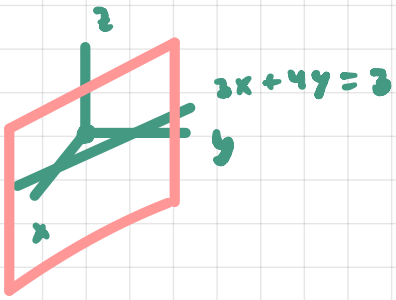
$f(-3,3) \approx 57.$

$f(3,-2) \approx 35.$

2D

Haga un mapa de contorno de las siguientes funciones:

1) $3x + 4y = 3$ ⟶ PLANO



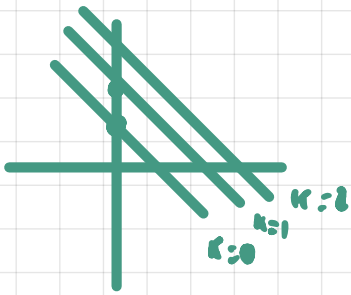
2) $3x + 4y = 3 + z$

$z = 3x + 4y - 3$

$k = 0 \Rightarrow 0 = 3x + 4y - 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}x$

$k = 1 \Rightarrow 1 = 3x + 4y \Leftrightarrow y = 1 - \frac{3}{4}x$

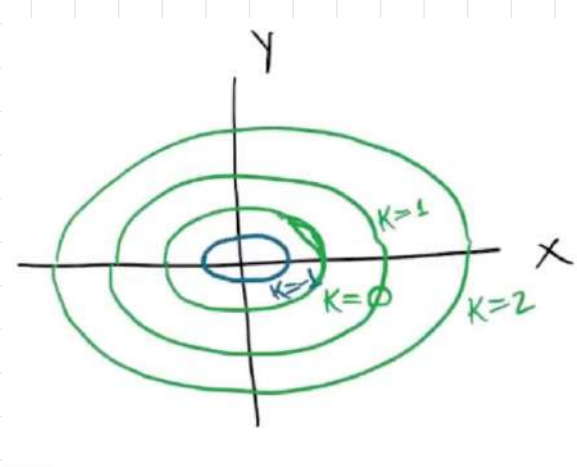
$k = 2 \Rightarrow 2 = \quad \vdots \qquad \vdots$

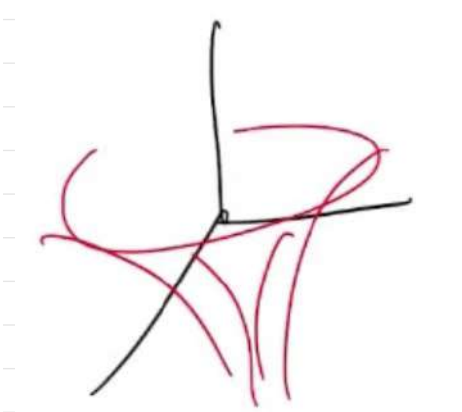


3) $f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2)$ $\quad Dom(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

$\ln(x^2 + 4y^2) = k$ CONSTANTE

$x^2 + 4y^2 = e^k \Leftrightarrow \frac{x^2}{e^k} + \frac{y^2}{\left(\frac{e^k}{4}\right)} = 1$.





CLASE 19 (892 - 896)

LIMITE f DOS VARIABLES : f de 2 VAR, D Dom contiene puntos cercanos a (a,b)

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L}$$

Si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tq: Si $(x,y) \in D$ y $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$

ENTONCES $|f(x,y) - L| < \varepsilon$

- PARA 1 VAR : $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x) \Rightarrow$ LIM NO EXISTE
- PARA 2 VAR : Existen infinitos direcciones desde las que (x,y) tiendo a (a,b)

- Si $f(x,y) \to L_1$ cuando $(x,y) \to (a,b)$ con trayectoria C_1
  y $f(x,y) \to L_2$ cuando $(x,y) \to (a,b)$ con trayectoria C_2
  Si $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ LIM NO EXISTE

V EJEMPLO 1 Demuestre que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no existe.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Primero nos aproximamos a (0, 0) por el eje x. Entonces $y = 0$ da $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para toda $x \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } x$$

Ahora nos aproximamos por el eje y haciendo $x = 0$. Entonces $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ para toda $y \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to -1 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } y$$

EJEMPLO 2 Si $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$, ¿existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$?

SOLUCIÓN Si $y = 0$, entonces $f(x, 0) = 0/x^2 = 0$. Por lo tanto,

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } x$$

Si $x = 0$, entonces $f(0, y) = 0/y^2 = 0$, así que

$$f(x, y) \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } y$$

Aunque hemos obtenido límites idénticos a lo largo de los ejes, eso no demuestra que el límite dado sea 0. Aproximémonos a (0, 0) a lo largo de otra recta, digamos, $y = x$. Para toda $x \neq 0$.

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto $\quad f(x, y) \to \frac{1}{2} \quad$ cuando $\quad (x, y) \to (0, 0)$ por $y = x$

(Véase figura 5.) Puesto que hemos obtenido distintos límites en distintas trayectorias, el límite dado no existe.

• PROPIEDADES

Se cumplen las propiedades de limit. en 1 VAR (SUMA, multip...)

1. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$
2. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c$

1) Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, EL LÍMITE ES ÚNICO.

2) Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ EXISTE, ENTONCES

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right).$$

4. TEOREMA SANDWICH TAMBIEN SE CUMPLE

3) ACOTAMIENTO: (SANDWICH).

Si $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$

PARA (x,y) CERCA DE (a,b) y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = L$$

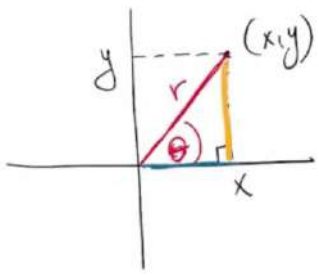
ENTONCES $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = L.$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x+y)}{x+3y}$$ NO EXISTE.

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+3y} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+3y} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y)}{3y} = \frac{1}{3}.$$

• COORDENADAS POLARES



$x = r\cos\theta$

$y = r\operatorname{sen}\theta$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad r^2 = x^2 + y^2$

$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$, $x \neq 0$.

$(x,y) \longrightarrow (0,0) \iff \|(x,y)\| \to 0$

$\iff r \longrightarrow 0.$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen}(r^2)}{r^2} = 1$$

- **CLASE 20 (896 - 899)**

- **Continuidad :**

f de 2 VAR es CONTINUA en (a, b) si

$$\boxed{\lim_{x,y \to a,b} f(x,y) = f(a,b)}$$

"f continua sobre D si continua en todos (a, b) en D"

- $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ Donde es contiua?

R: f es DISCONTINUA en (0,0) por ser f: RACIONAL

$\therefore$ $D = \{(x,y) \mid (x,y) \neq (0,0)\}$

EJEMPLO 7 Sea

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Aquí g se define en (0, 0) pero g es discontinua ahí porque $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ no existe (véase ejemplo 1).

V EJEMPLO 1 Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ no existe.

SOLUCIÓN Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$. Primero nos aproximamos a (0, 0) por el eje x. Entonces $y = 0$ da $f(x, 0) = x^2/x^2 = 1$ para toda $x \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to 1 \quad \text{cuando} \quad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } x$$

Ahora nos aproximamos por el eje y haciendo $x = 0$. Entonces $f(0, y) = \dfrac{-y^2}{y^2} = -1$ para toda $y \neq 0$, de modo que

$$f(x, y) \to -1 \quad \text{cuando} \quad (x, y) \to (0, 0) \text{ por el eje } y$$

$\therefore$ NO Existe

- Donde continua $h(x,y) = \arctan(x,y)$?

$f(x,y)$ es racional y $\therefore$ continua excepto donde $x=0$

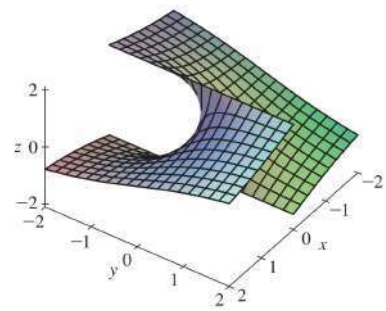


FIGURA 9
La función $h(x, y) = \arctan(y/x)$ es discontinua donde $x = 0$.

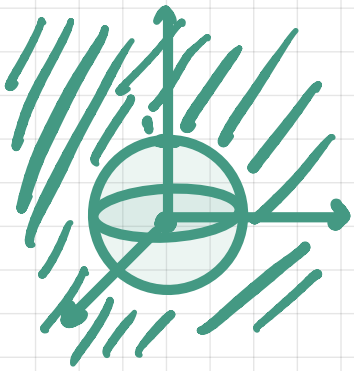
- f continua en (a,b,c) si

$$\boxed{\lim_{x,y,z \to a,b,c} f(x,y,z) = f(a,b,c)}$$

- $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$

será continua en $a,b,c \in \mathbb{R}^3$ excepto $x^2+y^2+z^2=1$

$\therefore$ es discontinua sobre esfera radio 1 centrada en origen



- **CLASE 21 (900 - 906)**

Si f es de 2 VAR, x e y, si x VARÍA e y esta FIJA llamemos $y = b$, con b constante.

$\Rightarrow g(x) = f(x, b)$.

Si g tiene derivada en a la llamamos

DERIVADA PARCIAL de f respecto a x en (a, b)

$$\boxed{f_x(a,b) = g'(a)}, \quad g(x) = f(x, b)$$

$$g'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$\boxed{f_x(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h}}$$

$$\boxed{f_y(a,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a,b)}{h}}$$

4 Si f es una función de dos variables, sus **derivadas parciales** son las funciones f_x y f_y, definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

- **Notaciones** $z = f(x,y)$

$$\boxed{f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f_1 = D_x f}$$

$$\boxed{f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f_1 = D_y f}$$

- **Regla para DET. d. parciales $z = f(x,y)$**

1. Para DET. f_x = CONSERVAR Y CONSTANTE
   Derivar $f(x,y)$ respecto a x

2. Para DET. f_y = CONSERVAR X CONSTANTE
   Derivar $f(x,y)$ respecto a y

- $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, det: $f_x(2,1)$ y $f_y(2,1)$

$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$

$f_x(2,1) = 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2\cdot 1^3 = 16$ //

$f_y(x,y) = x^2 3y^2 - 4y$

$f_y(2,1) = 2^2 3\cdot 1^2 - 4\cdot 1 = 8$ //

- $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{1+y}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \left(\frac{1}{1+y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{(1+y)^2}\right)$$

- <u>DERIVADAS IMPLICITAS Y PARCIALES</u>

Det $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1 \quad / \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

?

$\vdots$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy} \quad \text{o} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

- $f_x \cdot f_y \cdot f_z$ si $f(x,y,z) = e^{xy} \ln z$

$f_x = y \cdot e^{xy} \ln z$

$f_y = x e^{xy} \ln z$

$f_z = \frac{e^{xy}}{z}$

DERIVADAS ORDEN SUPERIOR

- $(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

- $(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

$(f_y)_y = \cdots \qquad \cdots = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

- DET 2ª DERIVADAS PARCIALES

$f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$

$\therefore \quad f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3$

$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$

$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2$

$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$

- **CLASE 22 (906-908)**

- **TEOREMA CLAIRUT**: Suponiendo que f esta sobre un DISCO D, que contiene a $P(a,b)$,

$$\boxed{\text{Si } f_{xy} \text{ y } f_{yx} \text{ son CONTINUAS} \Rightarrow f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)}$$

en D

- **Ø 3er ORDEN**: $f_{xyy} = (f_{xy})_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \dfrac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$

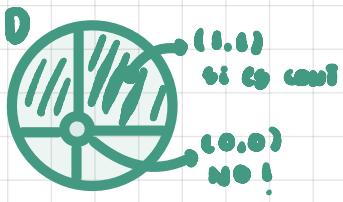
  - Por Teo. Clairut: $\boxed{f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}}$

- f_{xxyz} si $f(x,y,z) = \operatorname{sen}(3x + yz)$

  - $f_x = \cos(3x+yz)\cdot 3$
  - $f_{xx} = -3\cdot 3 \operatorname{sen}(3x+yz) = -9\operatorname{sen}(3x+yz)$
  - $f_{xxy} = -9z\cos(3x+yz)$
  - $f_{xxyz} = 9zy\cos(3x+yz)$ //

- **DET: NO CONTINUIDAD**: Si $f_{xy}(a,b) \neq f_{yx}(a,b) \Rightarrow$ NO CONTINUAS (Alguna de las 2)

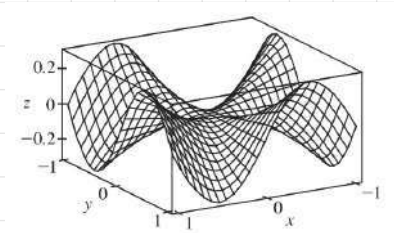
- Si $f_{xy} = f_{yx}$ en algun punto NO implica que sean continuas en todo punto de un DISCO D.



e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = 0 \end{cases}$

DEF CONTINUIDAD EN (0,0)

1) GRAFICAR :



2) ENCONTRAR $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ CUANDO $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x(x,y): \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y): \frac{\partial}{\partial y} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2+y^2) - (x^3y - xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2}$$

3) CALCULAR $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$

¡NO NOS QUEDA OTRA DE HACERLO POR DEFINICIÓN!

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0/h^2 - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

4) $f_{xy} = f_{yx}$? $\longrightarrow$ TEOREMA CLAIRUT !

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y} f_x = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - \cancel{f_x(0,0)}^{\,0}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-h^5/h^4 - 0}{h} = -\frac{h}{h} = -1$$

$$f_{yx}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - \cancel{f_y(0,0)}^{\,0}}{h} = \frac{h^5/h^4}{h} = 1$$

$\neq$

$\Downarrow$

$\therefore$ CLAIRUT NO CONTINUA

- **CLASE 23 (915-919)**

- **PLANOS TANGENTES**

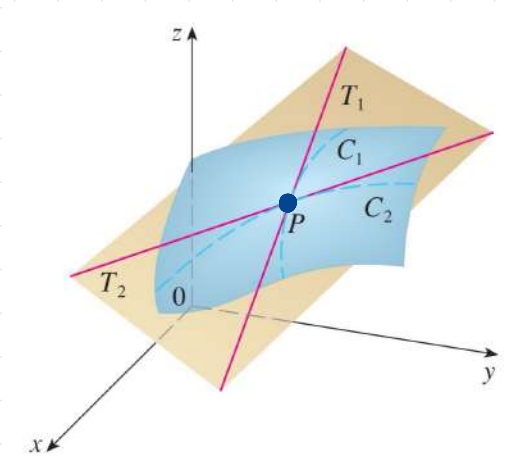
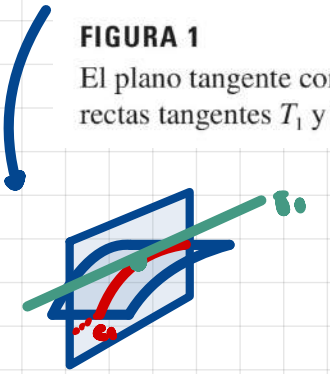


FIGURA 1
El plano tangente contiene las rectas tangentes T_1 y T_2.



SUPERFICIE S tiene Ec. $z = f(x,y)$

las primeras derivadas parciales son **CONTINUAS**

$P(x_0, y_0, z_0)$ que está en S

C_1 y C_2 son CURVAS obtenidas de **intersectar** planos VERTICALES

$x = x_0$ y $y = y_0$

con la superficie S

T_1 y T_2 **RECTAS TANGENTES** a C_1 y C_2

→ **PLANO TANGENTE**: a S en el punto P es el plano que contiene a T_1 y T_2

Ec. Plano $P(x_0,y_0,z_0)$: $\pi : A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$

$\Rightarrow z - z_0 = a(x-x_0) + b(y-y_0)$

PENDIENTES

$T_1 : y = y_0 \Rightarrow \boxed{T_1 : z - z_0 = a(x-x_0)}$

$T_2 : x = x_0 \Rightarrow \boxed{T_1 : z - z_0 = b(y-y_0)}$

$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ f_x

$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ f_y

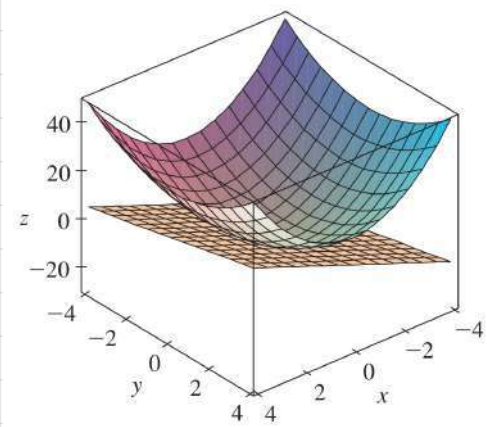
En conclusión: $\pi : \boxed{z - z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$

V **EJEMPLO 1** Calcule el plano tangente al paraboloide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1, 3)$.

$z = f(x,y) = 2x^2 + y^2$

$f_x(x,y) = 4x \longrightarrow f_x(1,1) = 4 \}\ a$

$f_y(x,y) = 2y \longrightarrow f_y(1,1) = 2 \}\ b$



$x_0 = 1$ $\quad f_x(x_0, y_0) = 4$

$y_0 = 1$

$z_0 = 3$ $\quad f_y(x_0, y_0) = 2$

$\pi : z - 3 = 4(x-1) + 2(y-1)$ //

$z = 4x - 4 + 2y - 2 + 3$

$z = 4x + 2y - 3$

- **Aproximación Lineal**: (PLANO TANGENTE)

Si $z = f(x,y)$ es una SUPERFICIE, la LINEAL de f en (x_0, y_0) es el PLANO TANGENTE:

$$f(x,y) \approx \boxed{L(x,y) = \underbrace{z_0}_{f(x_0,y_0)} + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

- **Diferenciable**: Si $z = f(x,y)$

f es DIFERENCIABLE en (a,b) si Δz se puede expresar:

$$\boxed{\Delta z = f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ CUANDO $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

La definición 7 establece que una función diferenciable es una para la cual la aproximación lineal $\boxed{4}$ es una buena aproximación cuando (x, y) está cerca de (a, b). En otras palabras, el plano tangente se aproxima a la gráfica de f muy cerca al punto de tangencia.

Algunas veces es difícil aplicar directamente la definición 7 para comprobar la diferenciabilidad de una función, pero el teorema siguiente proporciona una condición suficiente y práctica para la diferenciabilidad.

- **TEOREMA**: Si f_x y f_y Existen cerca de (a,b) y Si f_x y f_y son CONTINUAS en (a,b)

Entonces f es DIFERENCIABLE en (a,b)

V **EJEMPLO 2** Demuestre que $f(x, y) = xe^{xy}$ es diferenciable en $(1, 0)$ y determine su linealización ahí. Luego úsela para aproximar $f(1.1, -0.1)$.

a) $f_x(x,y) = e^{xy} + x \cdot ye^{xy}$ $\qquad f_x(1,0) = 1$

$f_y(x,y) = \underbrace{\cancel{\frac{d}{dy}} \cdot e^{xy}}_{0} + x \cdot \frac{de^{yx}}{dy}$ $\qquad f_y(1,0) = 1$

$+ \; x^2 e^{yx}$

como f_x y f_y son continuas

Por teorema f es Diferenciable

b) La <u>linealizacion</u> es.

$L(x,y) = f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0)$

$L(x,y) = 1 + (x-1) + y$

$L(x,y) = x + y$

$xe^{xy} \approx x + y$

c) $\therefore \; f(1{,}1, -0{,}1) \approx 1.1 - 0{,}1 = 1$ //

CLASE 24 y 25 (924 - 930)

Recordar: $y = f(x)$ y $x = g(x)$, con f y g derivable

"y es indirectamente una función derivable de t"

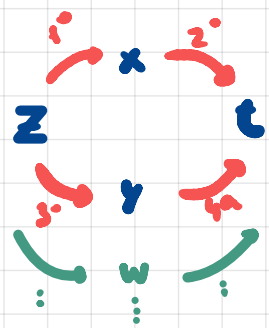
$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}}$$

Regla cadena (Tipo 1)

Sup. $z = f(x,y)$ es derivable de x y y

$x = g(t)$ $y = h(t)$ diferenciables de t

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}}$$



- $z = x^2y + 3xy^4$ $x = \operatorname{sen} 2t$ $y = \cos t$

$\frac{dz}{dt}$ cuando $t = 0$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = (2xy + 3y^4)(2\cos t) + (x^2 + 12xy^3)(-\operatorname{sen} t)$$

si $t = 0$ $x = \operatorname{sen} 0 = 0$ $y = \cos 0 = 1$

$$\Rightarrow \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = (0+3)(2\cos 0) + (0+0)(-\operatorname{sen} 0) = 6$$

Regla CADENA (Tipo 2)

Sup. $z = f(x,y)$ es DERIVABLE de x y y

$x = g(s,t)$ y $= h(s,t)$ derivables de s y t

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}} \qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}}$$

- $z = e^x \operatorname{sen} y \qquad x = st^2 \quad y = s^2 t$

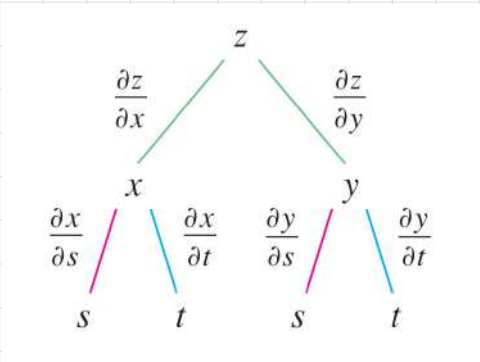
CALCULAR $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$

$$\frac{d(\operatorname{sen} y)}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y + e^x \cdot 0)(t^2) + (0 \cdot \operatorname{sen} y + e^x \cos y)(2st)$$

$$= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}(s^2 t) + 2st\, e^{st^2} \cos(s^2 t)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \text{SAME}$$



R. CADENA (GENERAL)

u función derivable de n variables $x_1, x_2, \dots x_n$ y cada x_j es una función derivable de $t_1, t_2, \dots t_m$.

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}}$$

V EJEMPLO 4 Exprese la regla de la cadena para el caso donde $w = f(x, y, z, t)$ y $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, y $t = t(u, v)$.

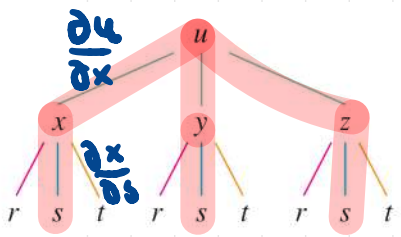
SOLUCIÓN Utilice el teorema 4 con $n = 4$ y $m = 2$. La figura 3 muestra el diagrama de árbol. Aunque no ha escrito las derivadas en las ramas, se sobreentiende que si una rama va desde y a u, entonces la derivada parcial para esa rama es $\partial y/\partial u$. Con la ayuda del diagrama de árbol, podemos escribir las expresiones necesarias:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial v}$$

V EJEMPLO 5 Si $u = x^4y + y^2z^3$, donde $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$, y $z = r^2s \operatorname{sen} t$, determine el valor de $\partial u/\partial s$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$.

SOLUCIÓN Con la ayuda del diagrama de árbol de la figura 4, tenemos



$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$= (4x^3y)(re^t) + (x^4 + 2yz^3)(2rse^{-t}) + (3y^2z^2)(r^2 \operatorname{sen} t)$$

Cuando $r = 2$, $s = 1$, y $t = 0$, tenemos $x = 2$, $y = 2$ y $z = 0$, de modo que

$$\frac{\partial u}{\partial s} = (64)(2) + (16)(4) + (0)(0) = 192$$

EJEMPLO 7 Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$, calcule a) $\partial z/\partial r$ y b) $\partial^2 z/\partial r^2$.

SOLUCIÓN

a) La regla de la cadena da

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)$$

b) Al aplicar la regla del producto a la expresión en el inciso a) obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left(2s\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \boxed{5}$$

Pero al aplicar la regla de la cadena una vez más (véase figura 5), llegamos a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2s)$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación 5 y usar la igualdad de las derivadas de segundo orden combinadas, obtenemos

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

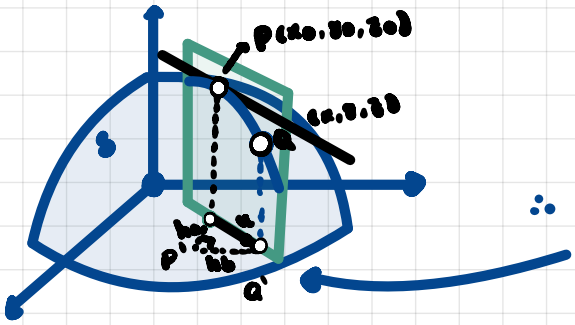
$$= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

- **DERIVACIÓN IMPLICITA** (928 - 930)

- **CLASE 26 (933 - 941)**

Si $z = f(x,y)$ $f_x(x_0,y_0)$ representa el valor de cambio de z en la <u>dirección</u> de x (lo mismo f_y con y)

Ahora quiero encontrar en la Dirección de $u = \langle a, b \rangle$



$$\overrightarrow{P'Q'} = hu = \langle ha, hb \rangle$$

$$\therefore \quad x - x_0 = ha$$
$$y - y_0 = hb$$

$$\frac{\Delta z}{h} = \frac{z - z_0}{h} = \frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

- **DERIVADA DIRECCIONAL**: de f en dirección de $\vec{u} = \langle a, b \rangle$

$$\boxed{D_u f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha,\ y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}}$$

- $f_x = D_i f$ si $u = i = \langle 1, 0 \rangle$
  $f_y = D_j f$ si $u = j = \langle 0, 1 \rangle$ } CASOS PARTICULARES

- **TEOREMA**: Si f DERIVABLE de x y de y, ENTONCES: f TIENE UNA DERIVADA DIRECCIONAL en la DIRECCIÓN de cualquier vector unitario $\vec{u} = \langle a, b \rangle$

$$\boxed{D_u f(x,y) = f_x(x,y)\,a + f_y(x,y)\,b}$$

- **VECTOR GRADIENTE** :

* **NOTAR** : la Derivada direccional de una f derivable se puede escribir como PROD. PUNTO :

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$
$$= \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle \cdot \underbrace{\langle a,b\rangle}_{u}$$

↳ **GRADIENTE** : $\boxed{\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle}$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j}$$

Funciones de tres variables

Para funciones de tres variables podemos definir las derivadas direccionales de una manera similar. Otra vez, $D_{\mathbf{u}} f(x, y, z)$ puede interpretarse como la razón de cambio de la función en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u}$.

10 Definición La **derivada direccional** de f en (x_0, y_0, z_0) en la dirección de un vector unitario $\mathbf{u} = \langle a, b, c\rangle$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb, z_0 + hc) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

si este límite existe.

$$\nabla f = \langle f_x, f_y, f_z\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

- **TEOREMA (MAXIMIZACIÓN)**

¿Cual es la maxima razón de cambio de f en cualq Dir?

Si f función derivable de 2 o 3 variables

> El MAX de la Deriv Direccional $D_u f(x)$ es $|\nabla f(x)|$ y esta cuando $\vec{u}$ tiene la misma Dirección que el vector. Grad $\nabla f(x)$

- **PLANO TANG a SUPERF de NIVEL**

$$f(x(t), y(t), z(t)) = K$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\boxed{F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x \ldots)(z - z_0) = 0}$$

• CLASE 27 (946 - 951) y 28

1 Definición Una función de dos variables tiene un **máximo local** en (a, b) si $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b). [Esto significa que $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todos los puntos (x, y) en algún disco con centro (a, b).] El número $f(a, b)$ recibe el nombre de **valor máximo local**. Si $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ cuando (x, y) está cerca de (a, b), entonces f tiene un **mínimo local** en (a, b) y $f(a, b)$ es un **valor mínimo local**.

2 Teorema Si f tiene un máximo local o un mínimo local en (a, b) y las derivadas parciales de primer orden de f existen ahí, entonces $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

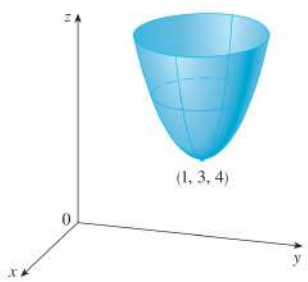
EJEMPLO 1 Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Entonces,

$$f_x(x, y) = 2x - 2 \qquad f_y(x, y) = 2y - 6$$

Estas derivadas parciales son iguales a 0 cuando $x = 1$ y $y = 3$, de modo que el único punto crítico es $(1, 3)$. Al completar el cuadrado, se encuentra que

$$f(x, y) = 4 + (x - 1)^2 + (y - 3)^2$$

Puesto que $(x - 1)^2 \geqslant 0$ y $(y - 3)^2 \geqslant 0$, tenemos que $f(x, y) \geqslant 4$ para todos los valores de x y y. Por lo tanto, $f(1, 3) = 4$ es un mínimo local y, de hecho, es el mínimo absoluto de f.



3 Prueba de la segunda derivada Supongamos que las segundas derivadas parciales de f son continuas sobre un disco de centro (a, b), y supongamos que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, es decir, (a, b) es un punto crítico de f. Sea

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.

b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.

c) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un máximo local ni un mínimo local.

NOTA 1 En caso de c) el punto (a, b) se llama **punto silla** de f y la gráfica de f cruza el plano tangente en (a, b).

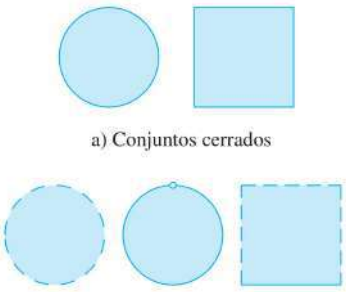
NOTA 2 Si $D = 0$, la prueba no proporciona información: f podría tener un máximo local o un mínimo local en (a, b), o bien, en (a, b) podría haber un punto silla de f.

NOTA 3 Para recordar la fórmula de D es útil escribirla como un determinante:

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

CLASE 29 (951 - 953)

8 **Teorema del valor extremo para funciones de dos variables** Si f es continua sobre un conjunto D cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ en algunos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D.



a) Conjuntos cerrados

b) Conjuntos que no son cerrados

9 Para encontrar los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua f sobre un conjunto cerrado y acotado D:

1. Se calculan los valores de f en los puntos críticos de f en D.
2. Se determinan los valores extremos de f sobre la frontera de D.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el valor máximo absoluto; el más pequeño de estos valores es el valor mínimo absoluto.

EJEMPLO 7 Determine los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ sobre el rectángulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

SOLUCIÓN Puesto que f es una polinomial, es continua sobre el rectángulo cerrado y acotado D, de modo que el teorema 8 establece que hay tanto un máximo absoluto como un mínimo absoluto. De acuerdo con el paso 1 de [9], primero calculamos los puntos críticos. Estos puntos ocurren cuando

$$f_x = 2x - 2y = 0 \qquad f_y = -2x + 2 = 0$$

de modo que el único punto crítico es $(1, 1)$, y el valor de f ahí es $f(1, 1) = 1$.

En el paso 2 observamos los valores de f en la frontera de D, que consisten en los cuatro segmentos rectilíneos L_1, L_2, L_3 y L_4 mostrados en la figura 12. Sobre L_1 tenemos $y = 0$ y

$$f(x, 0) = x^2 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Ésta es una función creciente de x, de modo que su valor mínimo es $f(0, 0) = 0$ y su valor máximo es $f(3, 0) = 9$. Sobre L_2 tenemos $x = 3$ y

$$f(3, y) = 9 - 4y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

Ésta es una función creciente de y, de modo que su valor máximo es $f(3, 0) = 9$ y su valor mínimo es $f(3, 2) = 1$. Sobre L_3 tenemos $y = 2$, y

$$f(x, 2) = x^2 - 4x + 4 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3$$

Mediante estos métodos del capítulo 4, o bien, simplemente observando que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, vemos que el valor mínimo de esta función es $f(2, 2) = 0$ y que el valor máximo es $f(0, 2) = 4$. Para finalizar, sobre L_4 tenemos $x = 0$ y

$$f(0, y) = 2y \qquad 0 \leqslant y \leqslant 2$$

con valor máximo $f(0, 2) = 4$ y valor mínimo $f(0, 0) = 0$. Por lo tanto, sobre la frontera, el valor mínimo de f es 0 y el máximo es 9.

En el paso 3 de [9], comparamos estos valores con el valor $f(1, 1) = 1$ en el punto crítico y concluimos que el valor máximo absoluto de f en D es $f(3, 0) = 9$ y el valor mínimo absoluto es $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$. En la figura 13 se ilustra la gráfica de f.

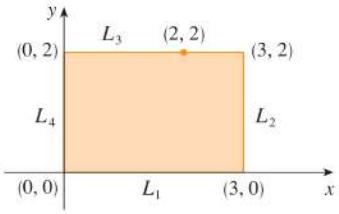


FIGURA 12

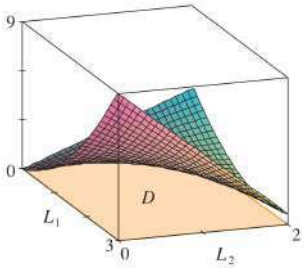


FIGURA 13
$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$

CLASE 30 (957 - 960)

- Para encontrar valores Extremos Absolutos (MAX y MIN) de $f(x,y,z)$, sujeto a una CONDICIÓN $g(x,y,z) = K$

↓

MULTIPLICADORES de LAGRANGE : (λ)

1. DET todos los valores x, y, z y λ tq:

$$\boxed{\nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z)}$$

2. Evaluar f en todos los puntos (x,y,z) resultantes
   - \+ El mas GRANDE es el **MAXIMO** de f
   - \- El mas PEQUEÑO es el **MINIMO** de f

6. Una caja rectangular SIN TAPA se hace con $42 m^2$ de cartón. Calcular Vol MAXIMO

$V = xyz$ $\qquad$ $g(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy = 42$

restricción $\qquad$ ↳ NO TAPA

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \lambda g_x \\ V_y &= \lambda g_y \\ V_z &= \lambda g_z \\ 2xz + 2yz + xy &= 42 \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} yz &= \lambda(2z + y) \\ xz &= \lambda(2z + x) \\ xy &= \lambda(2x + 2y) \\ 2xz + 2yz + xy &= 42 \end{aligned}}$$

$$xyz = \lambda(2xz + xy) \quad \cdot x$$

$$xyz = \lambda(2yz + xy)$$

$$xyz = \lambda(2xz + 2yz)$$

→ CONTINUA en el LIBRO (PAG 960)

V **EJEMPLO 2** Determine los valores extremos de la función $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Se pide calcular los valores extremos de f sujetos a la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 = 1$. Mediante los multiplicadores de Lagrange, resolvemos las ecuaciones $\nabla f = \lambda \nabla g$ y $g(x, y) = 1$, lo que se puede escribir como

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad g(x, y) = 1$$

o bien, como

$$\boxed{9} \qquad 2x = 2x\lambda$$

$$\boxed{10} \qquad 4y = 2y\lambda$$

$$\boxed{11} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

De acuerdo con $\boxed{9}$ tenemos $x = 0$, o bien, $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces $\boxed{11}$ da $y = \pm 1$. Si $\lambda = 1$, entonces $y = 0$ de acuerdo con $\boxed{10}$, de modo que $\boxed{11}$ da $x = \pm 1$. Por lo tanto, f tiene posibles valores extremos en los puntos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Al evaluar f en estos cuatro puntos encontramos que

$$f(0, 1) = 2 \qquad f(0, -1) = 2 \qquad f(1, 0) = 1 \qquad f(-1, 0) = 1$$

Por lo tanto, el valor máximo de f en la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ es $f(0, \pm 1) = 2$ y el valor mínimo es $f(\pm 1, 0) = 1$. Al verificar en la figura 2, estos valores parecen razonables.

CLASE 31 (960 - 962) CONTINUACIÓN

EJEMPLO 3 Calcule los valores extremos $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

SOLUCIÓN De acuerdo con el procedimiento en (14.7.9), comparamos los valores de f en los puntos críticos con valores en los puntos en la frontera. Puesto que $f_x = 2x$ y $f_y = 4y$, el único punto crítico es $(0, 0)$. Comparamos el valor de f en ese punto con los valores extremos en la frontera del ejemplo 2:

$$f(0, 0) = 0 \qquad f(\pm 1, 0) = 1 \qquad f(0, \pm 1) = 2$$

Por lo tanto, el valor máximo de f sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ es $f(0, \pm 1) = 2$ y el valor mínimo es $f(0, 0) = 0$.

EJEMPLO 4 Determine los puntos sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están más cercanos y más lejanos al punto $(3, 1, -1)$.

SOLUCIÓN La distancia desde un punto (x, y, z) al punto $(3, 1, -1)$ es $\quad d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$

pero los pasos algebraicos son más sencillos si maximizamos y minimizamos el cuadrado de la distancia:

$$d^2 = f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$$

La restricción es que el punto (x, y, z) está sobre la esfera, es decir,

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

De acuerdo con el método de los multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla f = \lambda \nabla g$, $g = 4$. Esto da

$$\boxed{12} \qquad 2(x-3) = 2x\lambda$$

$$\boxed{13} \qquad 2(y-1) = 2y\lambda$$

$$\boxed{14} \qquad 2(z+1) = 2z\lambda$$

$$\boxed{15} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

La manera más sencilla de resolver estas ecuaciones es expresar x, y y z en términos de λ a partir de $\boxed{12}$, $\boxed{13}$ y $\boxed{14}$, y luego sustituir estos valores en $\boxed{15}$. Según $\boxed{12}$ se tiene

$$x - 3 = x\lambda \quad \text{o bien} \quad x(1-\lambda) = 3 \quad \text{o bien} \quad x = \frac{3}{1-\lambda}$$

[Observe que $1 - \lambda \neq 0$ porque $\lambda = 1$ es imposible según $\boxed{12}$.] De la misma manera, con $\boxed{13}$ y $\boxed{14}$ se obtiene

$$y = \frac{1}{1-\lambda} \qquad z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

Por lo tanto, a partir de $\boxed{15}$, tenemos

$$\frac{3^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{1^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{(-1)^2}{(1-\lambda)^2} = 4$$

lo cual da $(1-\lambda)^2 = \frac{11}{4}$, $1 - \lambda = \pm\sqrt{11}/2$, de modo que

$$\lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$$

Estos valores de λ proporcionan los puntos correspondientes (x, y, z):

$$\left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right)$$

Es fácil ver que f tiene un valor más pequeño en el primero de estos puntos, de modo que el punto más cercano es $(6/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11})$ y el más lejano es $(-6/\sqrt{11}, -2/\sqrt{11}, 2/\sqrt{11})$.

2 RESTRICCIONES

$$\boxed{\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)}$$

1 $f_x = \lambda g_x + \mu h_x$

2 $f_y = \lambda g_y + \mu h_y$

3 $f_z = \lambda g_z + \mu h_z$

4 $g(x, y, z) = k$

5 $h(x, y, z) = c$

V EJEMPLO 5 Determine el valor máximo de la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sobre la curva de intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

SOLUCIÓN Maximizamos la función $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeta a las restricciones $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ y $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. La condición de Lagrange es $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que hay que resolver las ecuaciones

$$\boxed{17} \qquad 1 = \lambda + 2x\mu$$

$$\boxed{18} \qquad 2 = -\lambda + 2y\mu$$

$$\boxed{19} \qquad 3 = \lambda$$

$$\boxed{20} \qquad x - y + z = 1$$

$$\boxed{21} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

Haciendo $\lambda = 3$ [de $\boxed{19}$] en $\boxed{17}$, obtenemos $2x\mu = -2$, de modo que $x = -1/\mu$. De manera similar, $\boxed{18}$ da $y = 5/(2\mu)$. Al sustituir en $\boxed{21}$ tenemos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

y entonces $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Luego, $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$, y, de acuerdo con $\boxed{20}$, $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Los valores correspondientes de f son

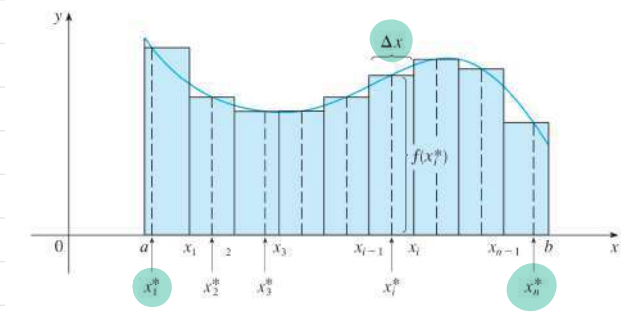
$$\mp\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Por lo tanto, el valor máximo de f sobre la curva dada es $3 + \sqrt{29}$.

CLASE 32 (974-981 / 982-987)

Recordar

- **Suma de Riemann**: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$



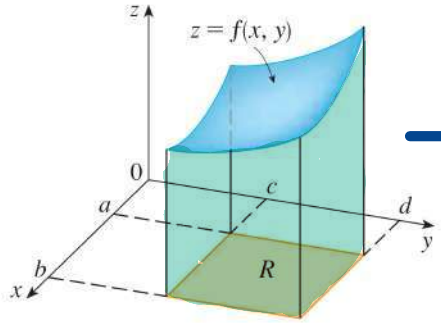
- **INTEGRAL DEFINIDA**: $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x}$

Volumenes e INTEGRALES 2

$[a,b]\times[c,d]$

$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$; $f(x,y) \geq 0$

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq f(x,y)\}$



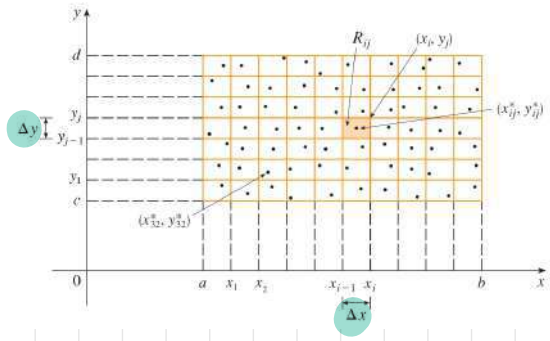
¿Volumen?

$\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$

$$\boxed{V \approx \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\,\Delta A}$$

$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \{(x,y) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i,\ y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$

cada uno con un área $\Delta A = \Delta x\,\Delta y$.



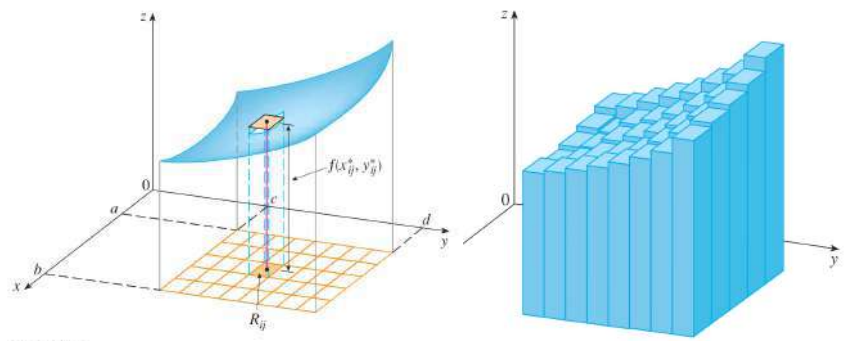


FIGURA 4

INTEGRAL DOBLE sobre R :

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\,\Delta A}$$

$$\left| \iint_R f(x,y)\,dA - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\,\Delta A \right| < \varepsilon$$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N$ tq: ↑

Para todos m y $n > N$ y para cualquier punto muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*)

Se puede elegir que el punto muestra (x_{ij}^*, y_{ij}^*) sea cualquier punto en el subrectángulo R_{ij}, pero si se elige que sea la esquina superior derecha de R_{ij} [a saber, (x_i, y_i), véase la figura 3], entonces la expresión para la integral doble parece simplificarse:

6
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta A$$

Si $f(x, y) \geqslant 0$, entonces el volumen V del sólido que está arriba del rectángulo R y debajo de la superficie $z = f(x, y)$ es

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$

V EJEMPLO 1 Estime el volumen del sólido que está arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$ y debajo del paraboloide elíptico $z = 16 - x^2 - 2y^2$. Divida R en cuatro cuadrados iguales y elija el punto muestra como la esquina superior derecha de cada cuadrado R_{ij}. Bosqueje el sólido y las cajas rectangulares de aproximación.

SOLUCIÓN Los cuadrados se muestran en la figura 6. El paraboloide es la gráfica de $f(x, y) = 16 - x^2 - 2y^2$ y el área de cada cuadrado es $\Delta A = 1$. Al aproximar el volumen mediante la suma de Riemann con $m = n = 2$, se tiene

$$V \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j)\,\Delta A$$

$$= f(1,1)\,\Delta A + f(1,2)\,\Delta A + f(2,1)\,\Delta A + f(2,2)\,\Delta A$$

$$= 13(1) + 7(1) + 10(1) + 4(1) = 34$$

Éste es el volumen de las cajas rectangulares de aproximación mostradas en la figura 7.

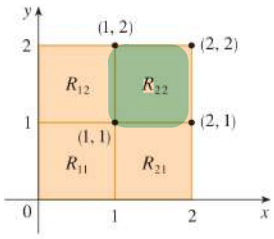


FIGURA 6

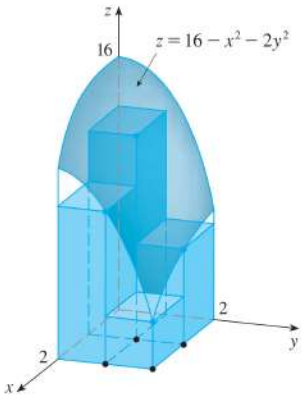
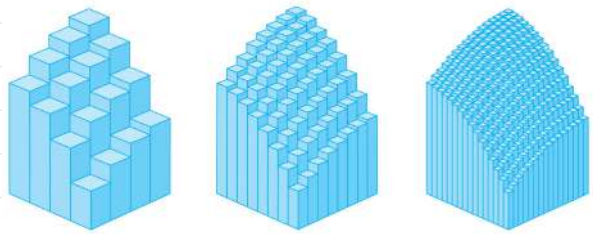


FIGURA 7

NOTAR: + CUADRA + APROXIMACIONES



a) $m = n = 4$, $V \approx 41.5$ b) $m = n = 8$, $V \approx 44.875$ c) $m = n = 16$, $V \approx 46.46875$

- **REGLA DEL PUNTO MEDIO** :

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(\overline{x}_i, \overline{y}_j)\,\Delta A}$$

$\overline{x}_i$ PTO MEDIO $[x_{i-1}, x_i]$ y_j lo mism

- **PROPIEDADES**

1. $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$

2. $\iint_R c\, f(x,y)\,dA = c \iint_R f(x,y)$

3. $f(x,y) \geq g(x,y) \quad \forall (x,y)$ en R

$$\iint_R f(x,y)\,dA \geq \iint_R g(x,y)\,dA$$

- **INTEGRALES ITERADAS** : Sea $A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$

$$\boxed{\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx}$$

- $\int_0^3 \int_1^2 x^2 y\,dy\,dx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y\,dy\right] dx$

$$= \int_0^3 x^2 \left[\underbrace{\int_1^2 y\,dy}_{\frac{y^2}{2}\Big|_1^2}\right] dx$$

$$= \int_0^3 x^2 \left(2 - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^3 x^2\,dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^3\right.$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{27}{3}\right) = \frac{27}{2} \;//$$

- $$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y\,dx\,dy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y\,dx\right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y\right]_{x=0}^{x=3} dy$$

$$= \int_1^2 9y\,dy = 9\,\frac{y^2}{2}\Big]_1^2 = \frac{27}{2}$$

- **TEOREMA (Fubini)** : f continua en RECTANGULO R

$R = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \ , \ c \leq y \leq d\}$ ENTONCES :

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy}$$

- $\iint_R (x-3y^2)\,dA$, donde $R = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2 \ , \ 1 \leq y \leq 2\}$

Por Teorema Fubini :

$$\iint_R (x-3y^2)\,dA = \int_0^2\int_1^2 (x-3y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^2 \left[\int_1^2 x-3y^2\,dy\right]dx$$

$$= xy - y^3 \Big|_1^2$$

$$= (2x-8)-(x-1) = \int_0^2 x-7\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 7x \Big|_0^2 \quad 2-14 = -12$$

- $\iint_R y\,\text{sen}(xy)\,dA$, $R = [1,2]\times[0,\pi]$

$$\int_0^\pi\int_1^2 y\,\text{sen}(xy)\,dx\,dy = \int_0^\pi\left[\int_1^2 y\cdot\text{sen}(xy)\,dx\right]dy$$

$$\int_1^2 y\cdot\text{sen}(xy)\,dx = \int_0^\pi \cos y - \cos 2y\,dy$$

$$\left[-\cos xy\right]\Big|_1^2 \qquad \left(\text{sen}\,y - \frac{1}{2}\text{sen}\,2y\right|_0^\pi$$

$$\cos y - \cos 2y$$

$$\underset{0}{\text{sen}\,\pi} - \frac{1}{2}\underset{0}{\text{sen}\,2\pi} = 0 \ //$$

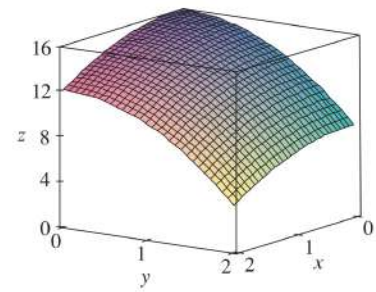
V **EJEMPLO 4** Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, los planos $x = 2$ y $y = 2$ y los tres planos coordenados.

SOLUCIÓN Primero se observa que S es el sólido que yace debajo de la superficie $z = 16 - x^2 - 2y^2$ y arriba del cuadrado $R = [0, 2] \times [0, 2]$. (Véase la figura 5.) Este sólido se consideró en el ejemplo 1 de la sección 15.1, pero ahora se está en posición de evaluar la integral doble por medio del teorema de Fubini. Por tanto,

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\, dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 \left[16x - \tfrac{1}{3}x^3 - 2y^2x\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\tfrac{88}{3} - 4y^2\right) dy = \left[\tfrac{88}{3}y - \tfrac{4}{3}y^3\right]_0^2 = 48$$



- **PRODUCTO INTEGRALES** :

Si $f(x,y) = g(x)\,h(y)$ y $R = [a,b] \times [c,d]$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b g(x)\,h(y)\,dx\,dy \quad ; \; h(y) \text{ CONST en } dx$$

$$= \int_c^d h(y) \left[\int_a^b g(x)\,dx \right] dy$$

$$= \int_c^d h(y)\,dy \cdot \int_a^b g(x)\,dx \quad //$$

- $$\boxed{\iint_R g(x)\,h(y)\,dA = \int_a^b g(x)\,dx \int_c^d h(y)\,dy}$$

$$\boxed{R = [a,b] \times [c,d]}$$

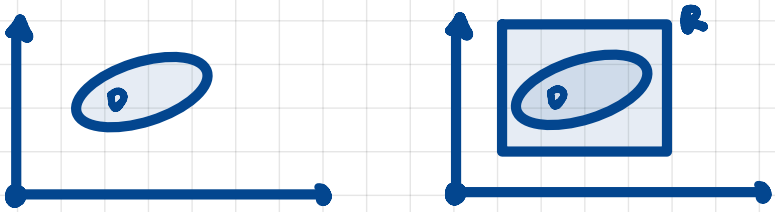
c) $\iint_R \operatorname{sen} x \cos y \, dA \; ; \; R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\iint_R \operatorname{sen} x \cos y \, dA = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx \cdot \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy$$

$$= -\cos x \Big|_0^{\pi/2} \cdot \operatorname{sen} y \Big|_0^{\pi/2}$$

$$(0 - -1) \cdot (1 - 0) = 1 \;//$$

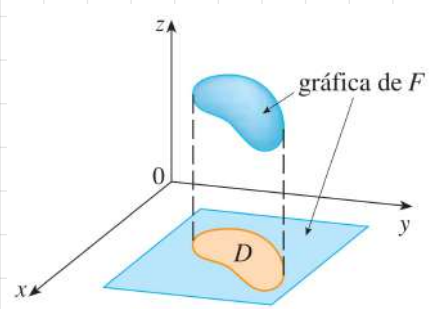
- **CLASE 33 (988 - 995)**



$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , \text{ si } (x,y) \in D \\ 0 & , \text{ si } (x,y) \notin D \end{cases}$$

- **INTEGRAL DOBLE f sobre D**:

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_R F(x,y)\, dA$$

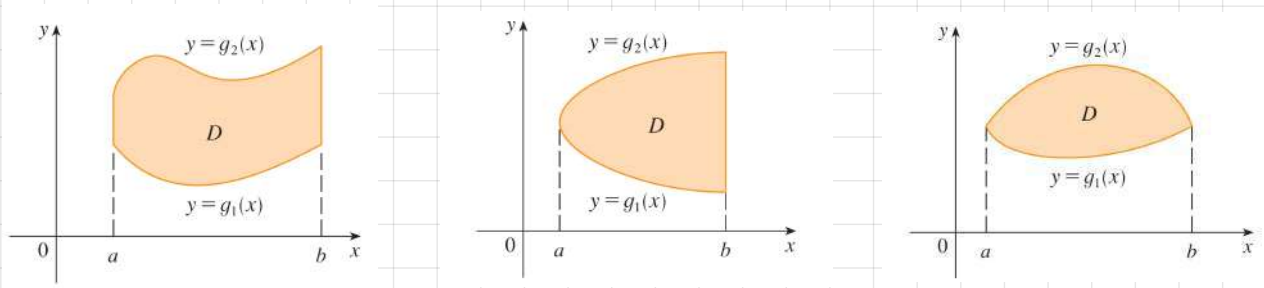


* $F(x,y) = 0$ cuando no está en D

Por lo que no aporta a la integral

- **TIPO 1**: Region D Tipo 1 si está entre 2 f de x f continuas

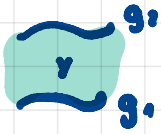
$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$



$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_R F(x,y)\, dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\, dy\, dx$$

~ Tipo 1

$$\int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dy\,dx \quad , \quad F(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad \begin{matrix} y < g_1(x) \\ y > g_2(x) \end{matrix}$$



$$\int_c^d F(x,y)\,dy = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,dy$$

- **TEOREMA**: Si f continua en D Tipo 1:

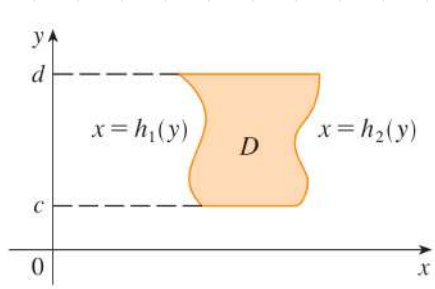
$$D_1 = \{ (x,y) \mid a \leq x \leq b \ \wedge \ g_1 \leq y \leq g_2 \}$$

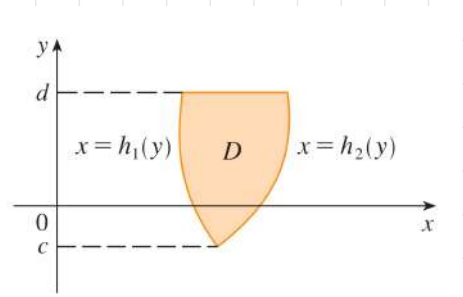
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx}$$

~ Tipo 2:

$$D_2 = \{ (x,y) \mid h_1 \leq x \leq h_2 \ \wedge \ c \leq y \leq d \}$$

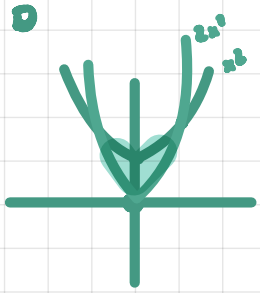
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy}$$





- $\iint_D x + 2y \, dA$; D Región acotada por

$y = 2x^2$, $y = 1 + x^2$



$D = \{(x,y) \mid -1 \leq x \leq 1 \ , \ 2x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$

$\rightsquigarrow \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} x + 2y \, dy \, dx$

$= \int_{-1}^{1} [\, xy + y^2 \,] \Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx$

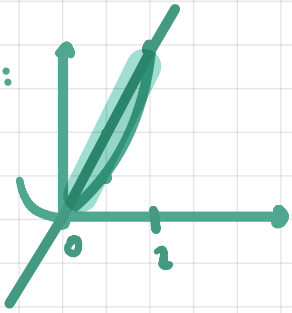
$= \int_{-1}^{1} (x + x^3 + 1 + 2x^2 + x^4) - (2x^3 + 4x^4)) \, dx$

$= \int_{-1}^{1} -3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1 \, dx$

$-3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^{1} = \frac{32}{15}$

- Volumen del sólido que yace bajo $z = x^2 + y^2$ y arriba de D en el plano xy acotado por $y = 2x$ y $y = x^2$

- Diag :



$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 2 \ \wedge \ x^2 < y < 2x\}$

$\iint_D z \, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} x^2 + y^2 \, dy \, dx$

$= \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{x^2}^{2x} dx$

$= \int_0^2 \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3}\right) - \left(x^4 + \frac{x^6}{3}\right) dx$

$\int_0^2 \frac{14}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3} \, dx$

$-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{14}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{216}{35}$ //

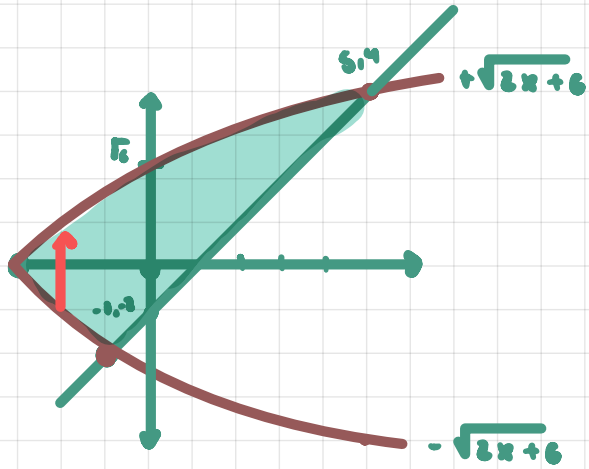
! Tipo 1 y 2

$0 \leq x \leq 2$
$x^2 \leq y \leq 2x$

$0 \leq y \leq 4$
$\frac{x}{2} \leq x \leq \sqrt{y}$

c) $\iint_D xy \, dA$ D acotado por $y = x - 1$ y $y^2 = 2x + 6$ $/\sqrt{\ }$

$y = \pm\sqrt{2x+6}$



$x - 1 = \sqrt{2x+6}$ $/(\ )^2$

$x^2 - 2x + 1 = 2x + 6$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$(x-5)(x+1) = 0$

$x = 5 \longrightarrow (5,4)$

$x = -1 \longrightarrow (-1,-2)$

Tipo 1 y 2 a la vez!

$f(x)$

Tipo 1:

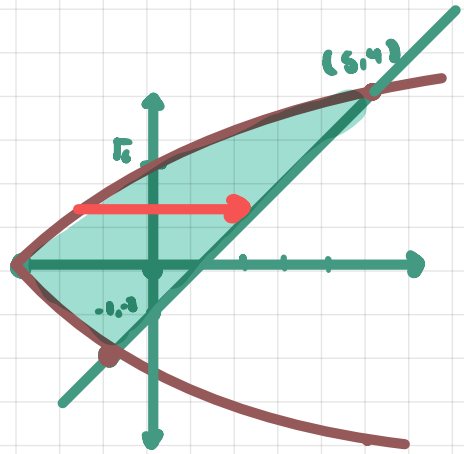
$D_a = \{ (x,y) \mid (-3 < x < -1 \,,\, -\sqrt{2x+6} < y < +\sqrt{2x+6}) \}$

$D_b = \{ (x,y) \mid (-1 < x < 5 \,,\, x - 1 < y < \sqrt{2x+6}) \}$

$f^{-1}(x)$

Tipo 2:

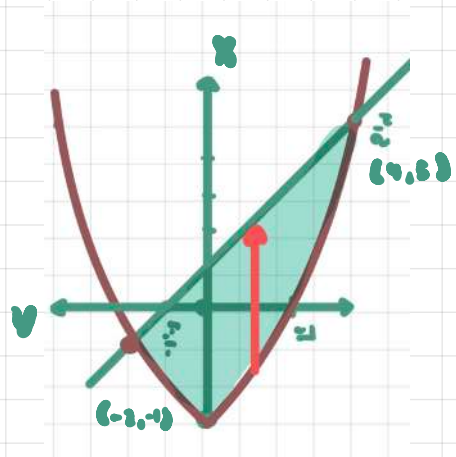
Facil



$x = y + 1$

$\frac{y^2 - 6}{2} = x$

f^{-1}



Tipo 2 (dx dy) $D = \{ (x,y) \mid \frac{y^2-6}{2} \leq x \leq y + 1 \,,\, -2 < y < 4 \}$

$$\iint_D xy = \int_{-2}^{4} \int_{\frac{y^2-6}{2}}^{y+1} xy \, dx \, dy$$

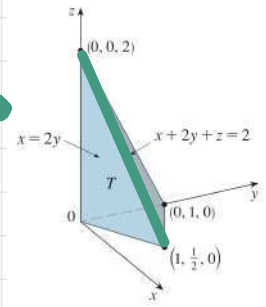
$$\int_{-2}^{4} \left(\frac{y(y+1)^2}{2} - \frac{y(y^2-6)^2}{8} \right) dy$$

$$\int_{-2}^{4} \left(\frac{yx^2}{2} \Big|_{\frac{y^2-6}{2}}^{y+1} \right) dy =$$

$$= 36 \quad //$$

EJEMPLO 4 Encuentre el volumen del tetraedro acotado por los planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$ y $z = 0$.

SOLUCIÓN En una pregunta como ésta, es aconsejable dibujar dos diagramas: una del sólido tridimensional y otra de la región plana D sobre la cual yace. En la figura 13 se muestra el tetraedro T acotado por los planos coordenados $x = 0$, $z = 0$, el plano vertical $x = 2y$ y el plano $x + 2y + z = 2$. Puesto que el plano $x + 2y + z = 2$ corta al plano xy (cuya ecuación es $z = 0$) en la recta $x + 2y = 2$, se ve que T está arriba de la región triangular D en el plano xy acotado por las rectas $x = 2y$, $x + 2y = 2$ y $x = 0$. (Véase la figura 14).



El plano $x + 2y + z = 2$ se puede escribir como $z = 2 - x - 2y$, así que el volumen requerido se localiza debajo de la gráfica de la función $z = 2 - x - 2y$ y arriba de

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x/2 \leqslant y \leqslant 1 - x/2\}$$

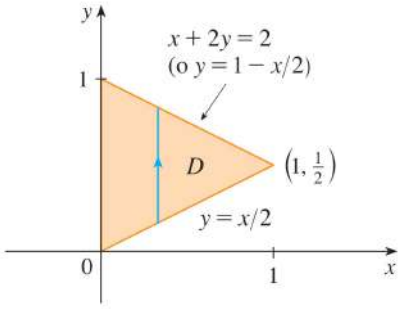


FIGURA 14

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (2 - x - 2y)\, dA \\
&= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=x/2}^{y=1-x/2} dx \\
&= \int_0^1 \left[2 - x - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2 - x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right] dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x \Big]_0^1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

CLASE 34 (988 - 995)

CAMBIO ORDEN INTEGRACIÓN

- $\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx$

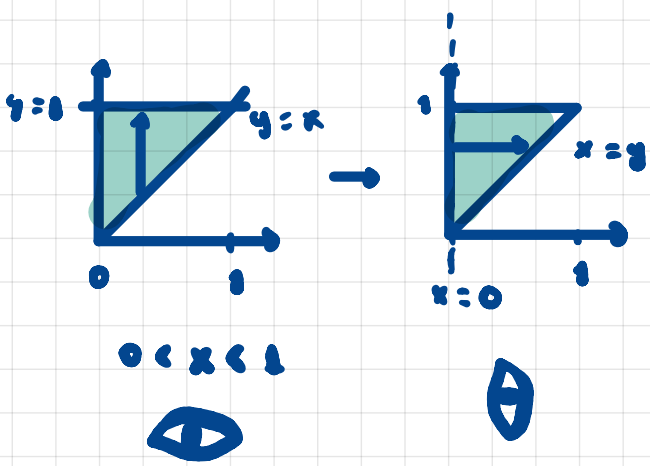
- Al primero evaluar $\int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy$ Es imposible en Terminos finitos dado que $\int \operatorname{sen}(y^2)$ NO es Elemen

"NUNCA podremos evaluarlas"

ESTAMOS obligados a:

→ **CAMBIO de ORDEN**:

$$\int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx = \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA \quad ; \quad D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ x \leq y \leq 1\}$$



$$\Rightarrow D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1 \ , \ 0 \leq x \leq y\}$$

$$\therefore \int_0^1 \int_x^1 \operatorname{sen}(y^2)\, dy\, dx = \iint_D \operatorname{sen}(y^2)\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^y \operatorname{sen}(y^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[x \cdot \operatorname{sen}(y^2) \right]\Big|_0^y \Big]\, dy$$

$$= \int_0^1 y \operatorname{sen}(y^2)\, dy$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(y^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1-\cos 1)$$

FUNC NO ELEM: $\int \frac{e^x}{x}\, dx$ $\quad \int \operatorname{sen}(x^2)\, dx$ $\quad \int \cos(e^x)\, dx$

$\int \sqrt{x^3+1}\, dx$ $\quad \int \frac{1}{\ln x}\, dx$ $\quad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$

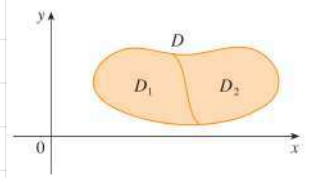
PROPIEDADES

1. $\iint_D f(x,y) + g(x,y)\, dA = \iint_D f(x,y)\, dA + \iint_D g(x,y)\, dA$

2. $\iint_D c\, f(x,y)\, dA = c \cdot \iint_D f(x,y)\, dA$

3. $f(x,y) \geq g(x,y) \longrightarrow \iint f(x,y) \geq \iint g(x,y)$

4. Si $D = D_1 \cup D_2$ y $D_1 \cap D_2 = \phi \Rightarrow$



$$\iint_D f(x,y)\, dA = \iint_{D_1} f(x,y)\, dA + \iint_{D_2} f(x,y)\, dA$$

5. $\iint_D 1\, dA = A(D) \longrightarrow f(x,y) = 1$ $\iint$ es el area D

6. Si $m \leq f(x,y) \leq M \quad \forall (x,y) \in D$

$$\Rightarrow m A(D) \leq \iint_D f(x,y)\, dA \leq M A(D)$$

7. $\iint_D e^{\operatorname{sen} x \cos y}\, dA$ $\quad D$ = Disco Radio = 2, Centro = (0,0)

Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ y $-1 \leq \cos y \leq 1$

$-1 \leq \operatorname{sen} x \cos y \leq 1$

$\therefore e^{-1} \leq e^{\operatorname{sen} x \cos y} \leq e$

$m = e^{-1}$ y $M = e$ $\quad A(D) = \pi r^2 = 4\pi$

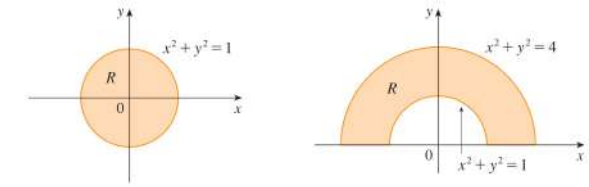
$$\frac{4\pi}{e} \leq \iint \leq 4\pi e$$

//

- **CLASE 35 (997 - 1001)**

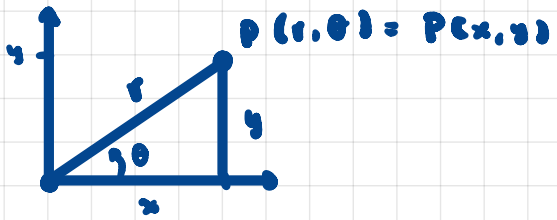
Si R es una región circular :

R es difícil de describir con coordenadas rectangulares



a) $R=\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ b) $R=\{(r,\theta) \mid 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \pi\}$

~ COORDENADAS POLARES :



$$\boxed{\begin{aligned} r^2 &= x^2+y^2 \\ x &= r\cos\theta \\ y &= r\,\text{sen}\,\theta \end{aligned}}$$

$$\boxed{R = \{(r,\theta) \mid a < r < b \,,\ \alpha < \theta < \beta\}}$$

- **CAMBIO VAR. POLARES** : Si f cont en R polar :

R : $0 \le a \le r \le b$, $\alpha \le \theta \le \beta$, $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$

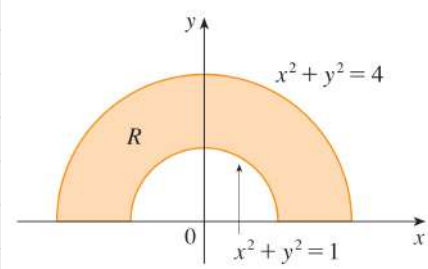
$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\, r\, dr\, d\theta}$$

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta}$$

- $\iint_R (3+4y^2)\,dA$, R region semiplano sup acotado por $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$

$R = \{(x,y) \mid y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$

<u>EN COORDEN POLARES</u> :



$R = \{(r,\theta) \mid 1 \leq r \leq 2 \ \wedge$
$0 \leq \theta \leq \pi\}$

$$\iint_R (3+4y^2)\,dA = \int_0^\pi \int_1^2 (3r\cos\theta + 4r^2\,\text{sen}^2\theta)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^\pi \left[\int_1^2 3r^2\cos\theta + 4r^3\,\text{sen}^2\theta \ dr\right] d\theta$$

$$= \int_0^\pi r^3\cos\theta + r^4\,\text{sen}^2\theta \Big|_1^2 \ d\theta$$

$$= \int_0^\pi 8\cos\theta + 16\,\text{sen}^2\theta - \cos\theta - \text{sen}^2$$

$$\boxed{\text{sen}^2 = \frac{1-\cos^2}{2}}$$

$$= \int_0^\pi 7\cos\theta + 15\,\text{sen}^2\theta \ d\theta$$

$$= \int_0^\pi 7\cos\theta + \frac{15}{2}(1-\cos 2\theta)\ d\theta$$

$$= 7\,\text{sen}\,\theta + \frac{15}{2}\theta - \frac{15}{2}\cdot\frac{\text{sen}\,2\theta}{2}\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{15\pi}{2} \quad //$$

- **TEOREMA**: Si f es CONT sobre R polar:

$$D = \{(r,\theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

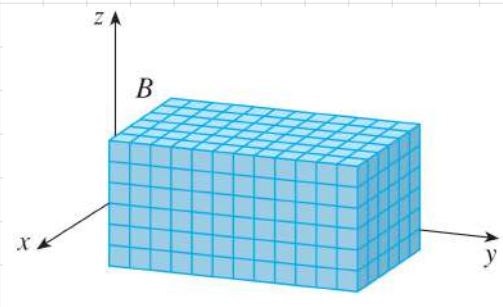
$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta}$$

- En particular ..... (1000 STEWART)

- **CLASE 36 (1017 - 1021)**

INTEGRALES TRIPLES :

$$B = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ r \leq z \leq s\}$$



$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta V$$

$$\Delta V = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dV = \lim_{l,m,n \to \infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}) \Delta V$$

TEOREMA FUBINI (2.0)

$$B = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$$

$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z)\, dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz}$$

ORDEN

$$= \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x,y,z)\, dy\, dz\, dx$$

- $\iiint_B xyz^2\, dV \quad B = [0,1] \times [-1,2] \times [0,3]$

cualquier orden : $\int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2\, dx\, dy\, dz$

$$= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{yz}{2}\, dy\, dz \quad \cdots \quad = 27/4 \ //$$

~ Tipo 1 :

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA}$$

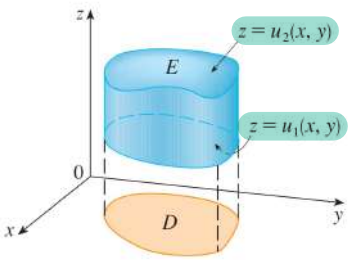


FIGURA 2
Una región sólida tipo 1

- **Tipo 1.1** : Si la proyección D de E sobre xy es una región Tipo 1

$$E = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x),\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} \int_{u_1}^{u_2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx}$$

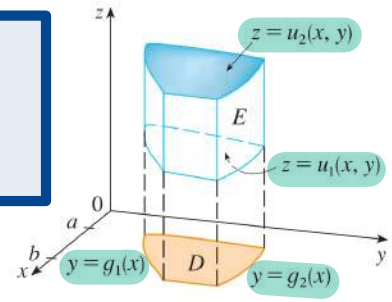
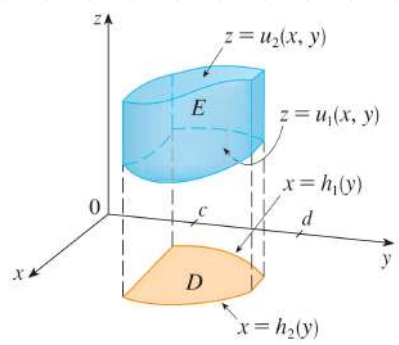


FIGURA 3
Una región sólida tipo I, donde la proyección D es una región plana tipo 1

- **Tipo 2.1** : Si la proy D es de Tipo 2

$$E = \{(x,y,z) \mid h_1(y) \le x \le h_2(y),\ c \le y \le d,\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

$$\boxed{\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_c^d \int_{h_1}^{h_2} \int_{u_1}^{u_2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy}$$



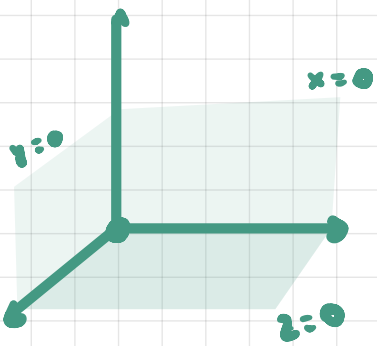
c) $\iiint_E z\,dV$, E es el TETRAEDRO ACOTADO por $x=0$, $y=0$, $z=0$

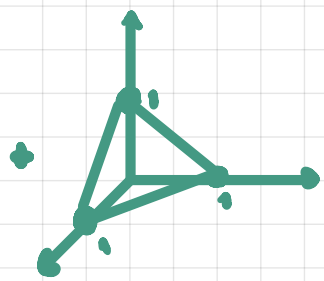
$x+y+z=1$

$x=1 \to y=0,\ z=0$ $\quad x+y+z=1$

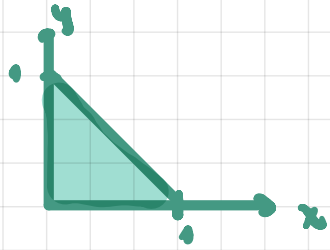
$y=1 \to x=0,\ z=0$

$z=1 \to x=0,\ y=0$ $\quad z=1-x-y$





REGION D :



$D=\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$

$\int_0^1\int_0^{-x}$

$\therefore\ E=\{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y\}$

Tipo 1.1 $= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx$

$= \int_0^1\int_0^{1-x}\left(\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x-y} dy\,dx$

$= \int_0^1\int_0^{1-x}\frac{(1-x-y)^2}{2}\,dy\,dx$ $\qquad 1-x-(1-x)$

$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\frac{(1-x-y)^3}{3}\right)\Big|_0^{1-x} dx$

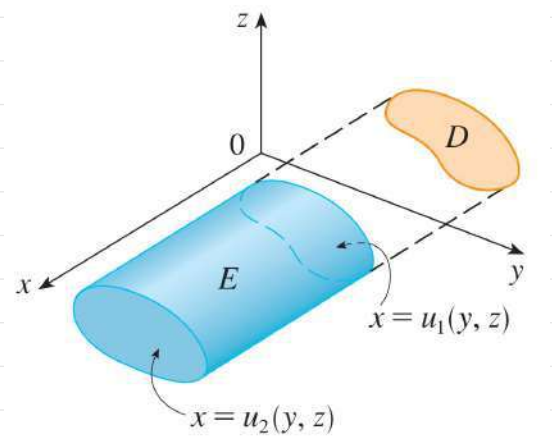
$= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(0-\frac{(1-x)^3}{3}\right)$

$= -\frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{1}{6}\left(\frac{(1-x)^4}{4}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{6}\left(0-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{24}$

~ Tipo 2 :

$$E = \{ (x,y,z) \mid u_1(y,z) \leq x \leq u_2(y,z) \,,\ (y,z) \in D \}$$

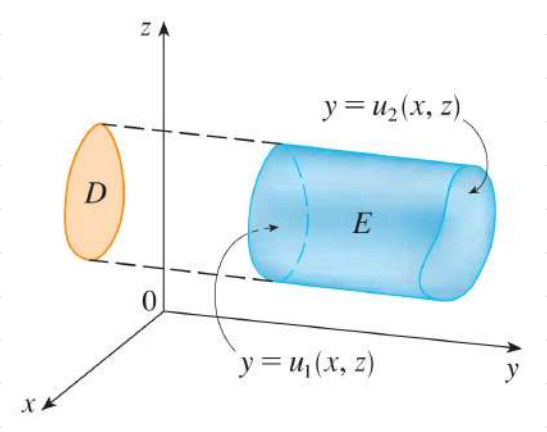
$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_1}^{u_2} f(x,y,z)\, dx \right] dA$$



~ Tipo 3 :

$$E = \{ (x,y,z) \mid (x,z) \in D \,,\ u_1(x,z) \leq y \leq u_2(x,z) \}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \iint_D \left[\int_{u_2}^{u_1} f(x,y,z)\, dy \right] dA$$

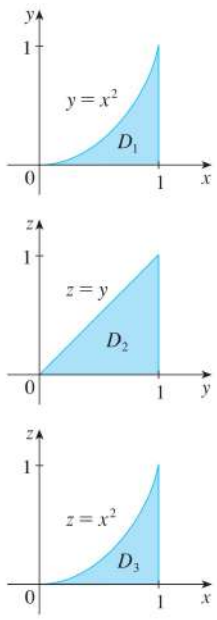


Expresar $\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$ como integral triple

$$\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^{y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx = \iiint_E f(x,y,z)\,dV$$

con $E = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2,\ 0 \le z \le y\}$

Esta descripción de E nos permite escribir las proyecciones



sobre plano xy: $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$

$= \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ \sqrt{y} \le x \le 1\}$

sobre plano yz: $D_2 = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le y\}$

sobre plano xz: $D_3 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le x^2\}$

Si integramos respecto a x, luego z y despues y

$$E = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le y,\ \sqrt{y} \le x \le 1\}$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \int_0^1\int_0^{y}\int_{\sqrt{y}}^{1} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

- **CLASE 37 (1022 - 1024 / 1023 - 1030)**

→ **INTERPRETACIÓN**: $\int_a^b f(x)$ Representa el Area bajo $f(x)$

$\iint_D f(x,y)\,dA$ Repres. el Volumen bajo $z = f(x,y)$

$\iiint_E f(x,y,z)\,dV$? → ¿Hipervolumen?

- Si $\boxed{f(x,y,z) = 1 \Rightarrow \iiint_E dV = V(E)}$

REPRESENTA el VOLUMEN de E

$$\iiint_E 1\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} dz\right] dA = \iint_D [u_2(x,y) - u_1(x,y)]\,dA$$

y de la sección 15.3 se sabe que esto representa el volumen localizado entre las superficies $z = u_1(x,y)$ y $z = u_2(x,y)$.

- Usar INTeg TRIPLE para hallar volumen del TETRAEDRO T ACOTADO por $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$

0,0,2

$2y = 2$

$y = 1$

$z = 0$

xy

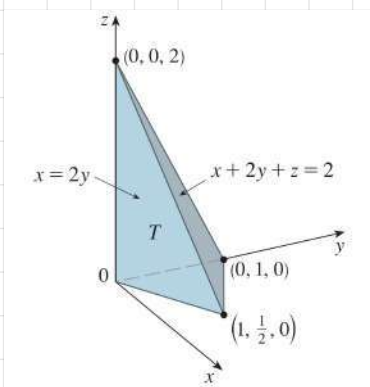
↓

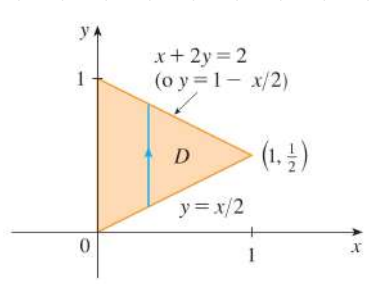
$x + 2y + 0 = 2$

$2y + 2y = 2$

$y = \frac{1}{2}$

$x = 1$ $P(1, \frac{1}{2}, 0)$



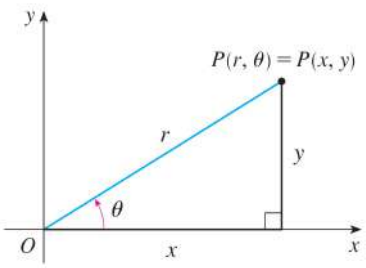


$$V(T) = \iiint_T dV = \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} \int_0^{2-x-2y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \int_{x/2}^{1-x/2} (2 - x - 2y)\,dy\,dx = 1/3 \;//$$

INT TRIPLES COORD CILÍNDRICAS :

Recordar :



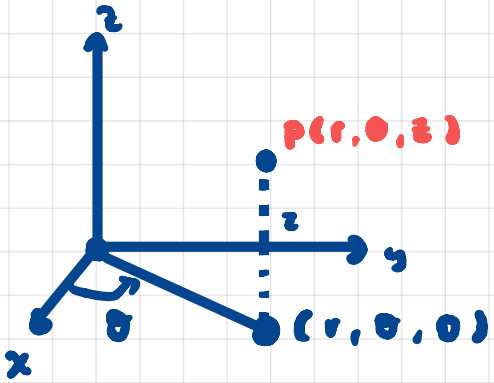
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

COORDENADAS CILÍNDRICAS : $P \rightarrow (r, \theta, z)$

$x = r\cos\theta \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta \qquad z = z \rightarrow$ **CONVERCIÓN**

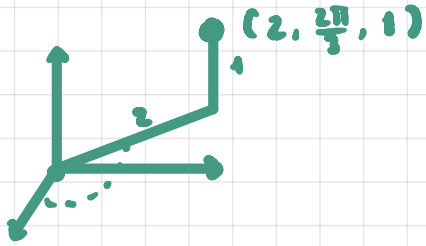
Cilind → Rectang



$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad z = z \rightarrow$ **CONVERCIÓN**

Rectang → Cilind

- Graf punto con c. cilind $(2, \frac{2\pi}{3}, 1)$
  Encuentre sus C. Rectangulares



$$x = 2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$$

$$y = 2\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2 = \sqrt{3}$$

$$z = 1$$

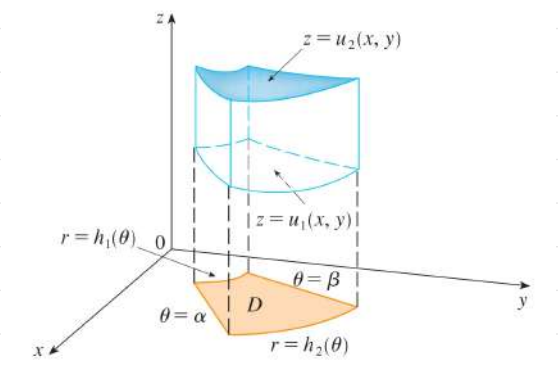
$$P(-1, \sqrt{3}, 1)$$

• ∫ TRIPLES CON COORD. CILIND:

$$E = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

D esta dada con coordenadas POLARES

$$D = \{(r,\theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta,\ h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$



$$\iiint_E f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

$$\boxed{\iiint_E = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta,\, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\cdot r\,dz\,dr\,d\theta}$$

fórmula para la triple integración en coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 4 Evalúe $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx$.

SOLUCIÓN Esta integral iterada es una integral triple sobre la región sólida

$$E = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2,\ -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2\}$$

y la proyección de E sobre el plano xy es el disco $x^2 + y^2 \leq 4$. La superficie inferior de E es el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y la superficie superior es el plano $z = 2$. (Véase la figura 9.) Esta región tiene una descripción mucho más simple en coordenadas cilíndricas:

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 2,\ r \leq z \leq 2\}$$

Por tanto, tenemos

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\,dy\,dx = \iiint_E (x^2+y^2)\,dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^2 r^2 r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3(2-r)\,dr$$

$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}r^4 - \tfrac{1}{5}r^5\right]_0^2 = \tfrac{16}{5}\pi$$

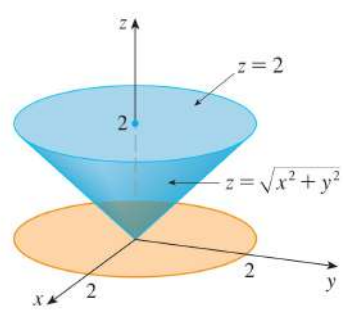


FIGURA 9

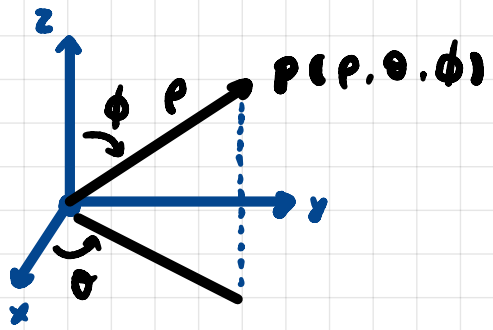
CLASE 38 (1033 - 1037)

COORDENADAS ESFERICAS : $P \longrightarrow (\rho, \theta, \phi)$

$\rho = |OP| \longrightarrow$ distancia de P al origen

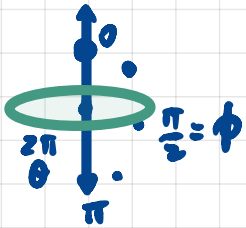
$\theta \longrightarrow$ Mismo angulo en xy

$\phi \longrightarrow$ Angulo entre z y recta OP



RESTRICCIONES

1. $\rho \geq 0$
2. $0 \leq \phi \leq \pi$
3. $0 \leq \theta \leq 2\pi$



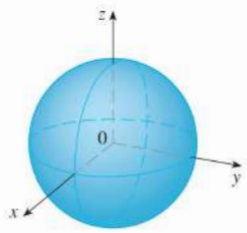


FIGURA 2 $\rho = c$, una esfera

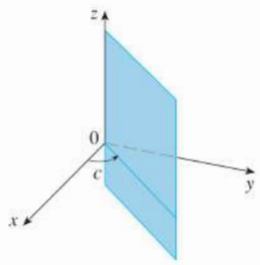


FIGURA 3 $\theta = c$, un semiplano

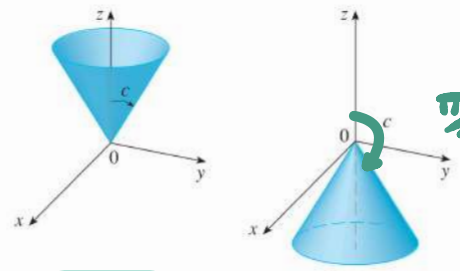


FIGURA 4 $\phi = c$, un semicono

$\frac{\pi}{2} < c < \pi$

$0 < c < \pi/2$

TRANSF COORDENADAS

$z = \rho \cos\phi \qquad r = \rho \operatorname{sen}\phi$, y como $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$

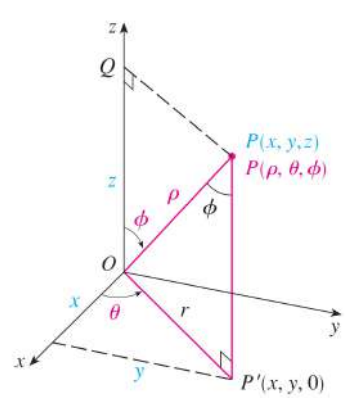
1. ESFERICAS → RECT :

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}}$$

2. RECT → Esfericas

$$\boxed{\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2}$$

form. DISTANCIA



$\rho\ \theta\ \phi$

EJEMPLO 1 El punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ está dado en coordenadas esféricas. Localice el punto y encuentre sus coordenadas rectangulares.

SOLUCIÓN Localizamos el punto en la figura 6. De las ecuaciones 1 tenemos

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta = 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta = 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos\phi = 2 \cos\frac{\pi}{3} = 2\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1$$

Entonces el punto $(2, \pi/4, \pi/3)$ es $\left(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1\right)$ en coordenadas rectangulares.

EJEMPLO 2 El punto $\left(0, 2\sqrt{3}, -2\right)$ está dado en coordenadas rectangulares. Encuentre coordenadas esféricas para este punto.

SOLUCIÓN De la ecuación 2 tenemos

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

y entonces las ecuaciones 1 dan

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho \operatorname{sen}\phi} = 0 \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(Observe que $\theta \neq 3\pi/2$ porque $y = 2\sqrt{3} > 0$.) Por tanto, las coordenadas esféricas del punto dado son $(4, \pi/2, 2\pi/3)$.

~ TRIPLES CORD. ESFERICAS :

$$E = \{(\rho, \theta, \phi) \mid a \leq \rho \leq b,\ \alpha \leq \theta \leq \beta,\ c \leq \phi\ d\}$$

$$\boxed{\iiint_E f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi}$$

$$dV = \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$