PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Temporada Académica de Verano 2022

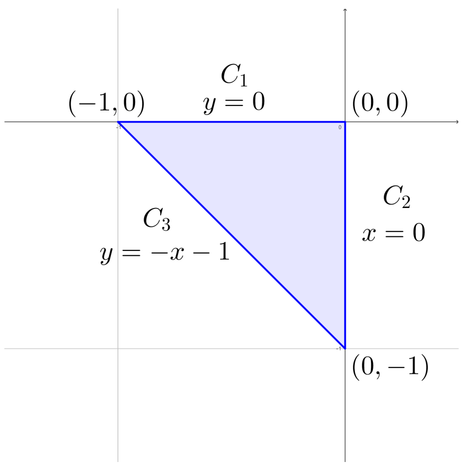
MAT1620 ⋆ Cálculo 2
Solución Interrogación 3

1. Resuelva los siguientes problemas de máximos y mínimos:

   a) Encuentre el máximo y mínimo absoluto de $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ sobre la región acotada por el rombo $\{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$ en el tercer cuadrante.

   b) Encuentre el punto de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ donde $f(x, y, z) = 3x - 2y + z$ alcanza su máximo valor.

Solución:

a) 

Notemos que como la función f es continua y la región es cerrada y acotada, entonces f alcanza sus extremos absolutos en la región.

Buscamos ahora los candidatos a extremos. Primero determinamos si existen puntos críticos al interior de la región. Derivando, tenemos que:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x - y \\ f_y(x, y) &= 2y - x \end{aligned}$$

Vemos que $(f_x, f_y) = (0, 0)$ sólo en el punto $(0, 0)$ y que este punto se encuentra en el borde de la región, por lo tanto, es candidato a valor extremo de la función f. Por otra parte, analizamos ahora lo que ocurre en la frontera de la región, tenemos 3 casos:

Caso 1: $y = 0$, $-1 \leq x \leq 0$. Veamos que $g_1(x) = f(x, 0) = x^2$ es tal que $g_1'(x) = 2x$. En este caso obtenemos 2 puntos candidatos a extremos de la función f, estos puntos son $(0, 0)$ y $(-1, 0)$.

Caso 2: $x = 0$, $-1 \leq y \leq 0$. Veamos que $g_2(y) = f(0, y) = y^2$ es tal que $g_2'(y) = 2y$. En este caso obtenemos 2 puntos candidatos a extremos de la función f, estos puntos son $(0, 0)$ y $(0, -1)$.

Caso 3: $y = -x - 1$, $-1 \leq x \leq 0$. Veamos que $g_3(x) = f(x, -x-1) = 3x^2 + 3x + 1$ es tal que $g_3'(x) = 6x + 3$ y que $g_3'(x) = 0$ si $x = -\frac{1}{2}$. Por lo tanto, en este caso obtenemos 3 puntos candidatos a extremos de la función f, estos puntos son $(-1, 0)$, $(0, -1)$ y $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Notamos que hay puntos candidatos a extremos de f que se repiten en los distintos casos y que estos puntos coinciden con los vértices de la región. En total tenemos 4 puntos candidatos a extremos de f. Veamos que:

$$f(0,0) = 0 \quad , \quad f(-1,0) = 1 \quad , \quad f(0,-1) = 1 \quad , \quad f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto f alcanza su mínimo absoluto en el punto $(0, 0)$ y su valor mínimo absluto es $f(0, 0) = 0$. Por otra parte, f alcanza su máximo absoluto en los puntos $(-1, 0)$ y $(0, -1)$ y su valor máximo absoluto es $f(-1, 0) = f(0, -1) = 1$.

b) Queremos encontrar el máximo de la función $f(x, y, z) = 2x - 2y + z$ con la restricción $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 14$. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3 = 2x\lambda & (1) \\ -2 = 2y\lambda & (2) \\ 1 = 2z\lambda & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 & (4) \end{cases}$$

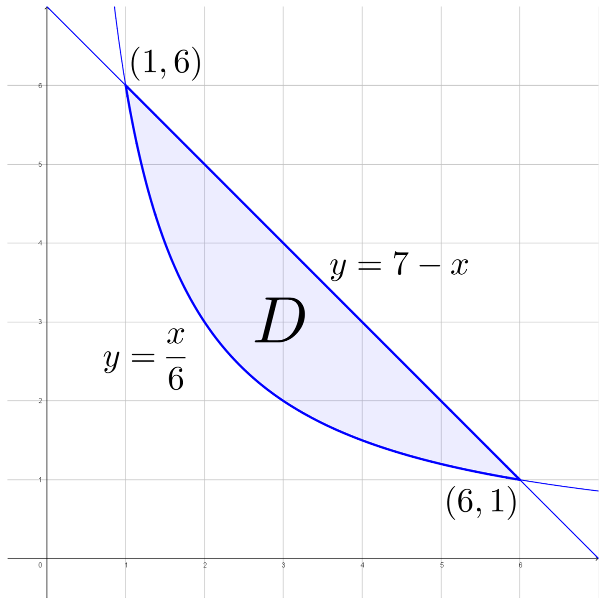
De (1), (2) y (3) es claro que $\lambda \neq 0$ y entonces podemos escribir $x = \dfrac{3}{2\lambda}$, $y = -\dfrac{1}{\lambda}$, $z = \dfrac{1}{2\lambda}$. Luego, al reemplazar en (4) y resolver, obtenemos que $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$. De esta manera, tenemos dos puntos candidatos a extremos de la función f, estos son $P_1 = (3, -2, 1)$ y $P_2 = (-3, 2, -1)$. Evaluando, obtenemos que $f(P_1) = 14$ y $f(P_2) = -14$. Por lo tanto, la función alcanza su máximo valor en el punto P_1 y dicho valor es $f(P_1) = 14$.

2. a) Calcule $\displaystyle\iint_D (x+y)\,dA$, donde D es la región en el primer cuadrante, acotada por las curvas $xy = 6$ y $x + y = 7$.

b) Escriba la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos x} x\,dydx$ como una integral en $dxdy$ y luego calcule su valor utilizando el orden de integración más conveniente.

Solución:

a) La región de integración es:



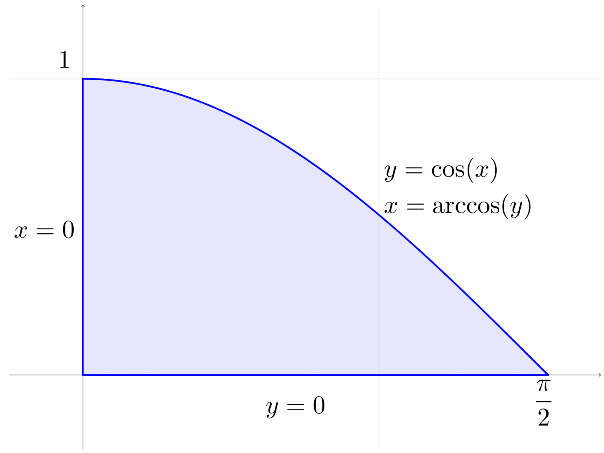
Si consideramos a D como una región de tipo I, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y)\,dA &= \int_1^6 \int_{\frac{6}{x}}^{7-x} (x+y)\,dydx = \int_1^6 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=\frac{6}{x}}^{y=7-x} dx \\
&= \int_1^6 \left(7x - x^2 + \frac{49}{2} - 7x + \frac{x^2}{2} - 6 - \frac{18}{x^2}\right) dx = \int_1^6 \frac{37}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{18}{x^2}\,dx \\
&= \left(\frac{37x}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{18}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=6} = 111 - 36 + 3 - \frac{37}{2} + \frac{1}{6} - 18 = \frac{125}{3}
\end{aligned}$$

Análogamente, si consideramos a D como una región de tipo II, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y)\,dA &= \int_1^6 \int_{\frac{6}{y}}^{7-y} (x+y)\,dxdy = \int_1^6 \left(\frac{x^2}{2} + xy\right)\Bigg|_{x=\frac{6}{y}}^{x=7-y} dy \\
&= \int_1^6 \left(\frac{49}{2} - 7y + \frac{y^2}{2} + 7y - y^2 - \frac{18}{y^2} - 6\right) dy = \int_1^6 \frac{37}{2} - \frac{y^2}{2} - \frac{18}{y^2}\,dy \\
&= \left(\frac{37y}{2} - \frac{y^3}{6} + \frac{18}{y}\right)\Bigg|_{y=1}^{y=6} = 111 - 36 + 3 - \frac{37}{2} + \frac{1}{6} - 18 = \frac{125}{3}
\end{aligned}$$

b) La región de integración es:



Luego, podemos escribir :

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos(x)} x\,dydx = \int_0^1\int_0^{\arccos(y)} x\,dxdy$$

El primer orden de integración es el más conveniente, veamos que:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos(x)} x\,dydx = \int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx \qquad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos(x)\,dx & v = \operatorname{sen}(x)\end{array}}$$

$$= x\operatorname{sen}(x)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{\pi}{2} + \cos(x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Por otra parte, si eligiésemos el segundo orden de integración, tendríamos que:

$$\int_0^1\int_0^{\arccos(y)} x\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 \arccos^2(y)\,dy \qquad \boxed{\begin{array}{ll} u = \arccos^2(y) & du = -\dfrac{2\arccos(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \\ dv = dy & v = y\end{array}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(y\arccos(y)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2y\arccos(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{y\arccos(y)}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \qquad \boxed{\begin{array}{ll} t = \arccos(y) & dt = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\end{array}}$$

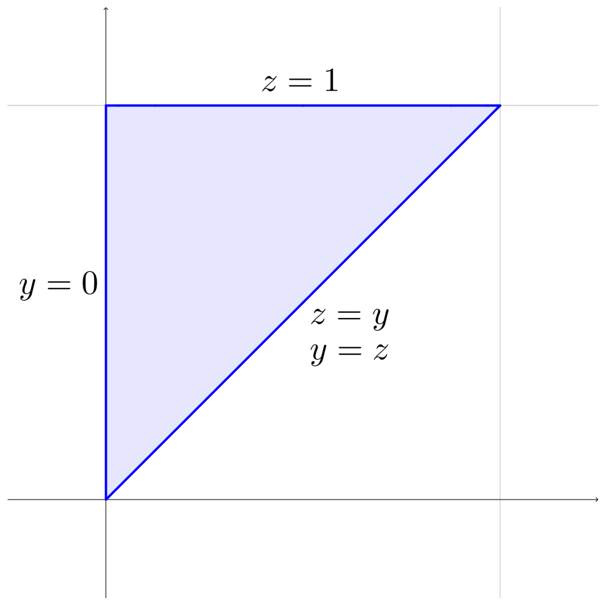
$$= \int_{\pi/2}^0 -t\cos(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} t\cos(t)\,dt = \frac{\pi}{2} - 1$$

3. a) Escriba la integral triple $\int_0^1 \int_0^z \int_{y^2}^1 f(x,y,z)\, dxdydz$ como una integral de la forma $\iiint f(x,y,z)dxdzdy$

b) Calcule el volumen de la región E, usando una integral triple, si E es la región bajo el plano $z = 8 - y$ y sobre la región en el plano xy acotada por las rectas $y = 0$, $y = 2x$ y $x = 3$.

Solución:

a) Notamos que en el plano YZ tenemos la siguiente región:



Luego:

$$\int_0^1 \int_0^z \int_{y^2}^1 f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^1 \int_y^1 \int_{y^2}^1 f(x,y,z)\, dxdzdy$$

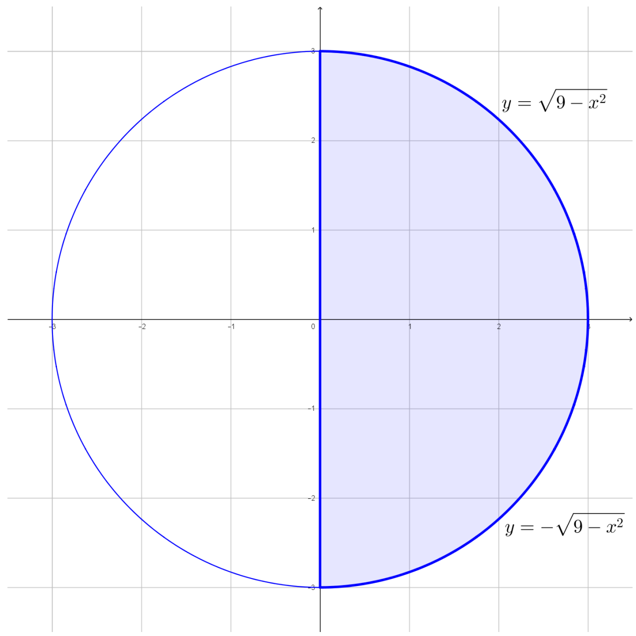
b) Una expresión para el volumen de E es:

$$\begin{aligned}
V(E) = \iiint_E 1\, dV &= \int_0^3 \int_0^{2x} \int_0^{8-y} 1\, dzdydx \\
&= \int_0^3 \int_0^{2x} (8-y)\, dydx = \int_0^3 \left(8y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2x} dx \\
&= \int_0^3 \left(16x - 2x^2\right)\, dx = \left(8x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3} = 72 - 18 = 54
\end{aligned}$$

4. Calcule la siguiente integral, transformándola primero a una integral en coordenadas cilíndricas

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{-\sqrt{2x^2+2y^2}}^{6+x^2+y^2} 15z \; dz\, dy\, dx$$

Solución: Notamos que en el plano XY tenemos la siguiente región:



Luego, usamos la transformación $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$, $z = z$ y entonces:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{-\sqrt{2x^2+2y^2}}^{6+x^2+y^2} 15z \; dz\, dy\, dx &= 15\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_{-\sqrt{2}r}^{6+r^2} zr\, dz dr d\theta \\
&= \frac{15\pi}{2}\int_0^3 \left(z^2 r\right)\Big|_{z=-\sqrt{2}r}^{z=6+r^2} dr \\
&= \frac{15\pi}{2}\int_0^3 \left(36r + 12r^3 + r^5 - 2r^3\right)\, dr \\
&= \frac{15\pi}{2}\left(18r^2 + \frac{5r^4}{2} + \frac{r^6}{6}\right)\Big|_{r=0}^{r=3} \\
&= \frac{135\pi}{2}\left(18 + \frac{45}{2} + \frac{27}{2}\right) = 3645\pi
\end{aligned}$$

5. Marcia y Neke venden helados en cono en el estadio. El Helado de Marcia se puede modelar como el sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, mientras que el de Neke, se puede modelar como el sólido acotado superiormente por $z = 2 - x^2 - y^2$ e inferiormente por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

   a) Escriba una integral triple en coordenadas esféricas que represente el volumen del helado de Marcia.

   b) Escriba una integral triple en coordenadas cilíndricas que represente el volumen del helado de Neke.

   c) ¿Cuál de los dos helados tiene mayor volumen?

   Solución:

   a) Una integral triple en coordenadas esféricas que representa el volumen del helado de Marcia es:

   $$V_M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)\, d\rho d\theta d\varphi$$

   b) Una integral triple en coordenadas cilíndricas que representa el volumen del helado de Neke es:

   $$V_N = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{2-r^2} r\, dz dr d\theta$$

   c) Veamos ahora que:

   $$V_M = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)\, d\rho d\theta d\varphi = \frac{16\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}(\varphi)\, d\varphi = \frac{8\pi}{3} \left(2 - \sqrt{2}\right)$$

   $$V_N = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^{2-r^2} r\, dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 \left(2r - r^3 - r^2\right)\, dr = 2\pi \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

   Luego, el helado de Marcia tiene mayor volumen que el helado de Neke.