Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo Semestre del 2020

Modelos Probabilísticos (EYP1027)
Ayudantía 6

Camilo González Rojas

1. En cada caso encuentre la densidad de Y. Muestre que la densidad integra 1.

   a) $Y = X^3, \quad f_X(x) = 42x^5(1-x), \quad 0 < x < 1$

   b) $Y = 4X + 3, \quad f_X(x) = 7e^{-7x}, \quad 0 < x < \infty$

   c) $Y = X^2, \quad f_X(x) = 30x^2(1-x)^2, \quad 0 < x < 1$

2. Suponga que X tiene distribución geométrica con función de masa $f_X(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^x, x = 0, 1, 2, \ldots$. Determine la función de masa de $Y = X/(X+1)$.

3. Encuentre la densidad de Y y muestre que integra 1.

   a) $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty; \quad Y = |X|^3$

   b) $f_X(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2, \quad -1 < x < 1; \quad Y = 1 - X^2$

   c) $f_X(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2, \quad -1 < x < 1; \quad Y = 1 - X^2$ si $X \leq 0$ y $Y = 1 - X$ si $X > 0$

4. Suponga que la densidad $f_X(x)$ de una variable aleatoria X es una función par. ($f_X(x)$ es una función par si $f_X(x) = f_X(-x)$ para todo x). Muestre que:

   a) X y $-X$ son idénticamente distribuidas

   b) $M_X(t)$ es simétrica al rededor del 0.

Solución

1. En cada caso encuentre la densidad de Y. Muestre que la densidad integra 1.

   a) $Y = X^3, \quad f_X(x) = 42x^5(1-x), \quad 0 < x < 1$

   b) $Y = 4X + 3, \quad f_X(x) = 7e^{-7x}, \quad 0 < x < \infty$

   c) $Y = X^2, \quad f_X(x) = 30x^2(1-x)^2, \quad 0 < x < 1$

a) $g(X) = X^3$ es fun. monotona $\quad \mathcal{Y} = (0,1)$

Se usa el teo. de transf.

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}}{dy}(y) \right| \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$$

$$g^{-1}(y) = y^{1/3} \longrightarrow f_X(g^{-1}(y)) = 42\, y^{5/3}(1 - y^{1/3})$$

$$\frac{dg^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{3} y^{-2/3}$$

$$f_Y(y) = 42 y^{5/3}(1 - y^{1/3}) \cdot \left| \frac{1}{3} y^{-2/3} \right|$$

$$= 14\, y (1 - y^{1/3}) \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}$$

Finalmente

$$\int_0^1 14y(1 - y^{1/3})\, dy = \int_0^1 14y - 14y^{4/3}\, dy$$

$$= \frac{14y^2}{2}\Big|_0^1 - 14\, y^{7/3} \cdot \frac{3}{7}\Big|_0^1$$

$$= 7 - 6 = 1 \,//$$

b) $Y = 4X+3 \longrightarrow X = \frac{Y-3}{4} \xrightarrow{\partial/\partial y} \frac{1}{4}$

$f_X(x) = 7\exp\{-7x\}$

$f_Y(y) = 7\exp\left\{\frac{-7}{4}(y-3)\right\} \left|\frac{1}{4}\right| \mathbb{1}_{(3,\infty)}$

$= \frac{7}{4}\exp\left\{-\frac{7}{4}(y-3)\right\}$

$\int_3^\infty f_Y(y)\,dy = -\exp\left\{-\frac{7}{4}(y-3)\right\}\Big|_3^\infty$

$= \exp\left\{-\frac{7}{4}(3-3)\right\} = 1$

c) $Y = X^2 \longrightarrow X = Y^{1/2} \xrightarrow{\partial/\partial y} \frac{1}{2}Y^{-\frac{1}{2}}$

$f_X(x) = 30x^2(1-x)^2 \qquad y = (0,1)$

$f_Y(y) = 30y(1-y^{1/2})^2 \left|\frac{1}{2}y^{-1/2}\right| \mathbb{1}_{(0,1)}$

$= 15y^{1/2}(1-y^{1/2})^2 \mathbb{1}_{(0,1)}$

$\int_0^1 f_Y(y)\,dy = \int_0^1 15y^{1/2} - 30y + 15y^{3/2}\,dy$

$= 15\cdot\frac{2}{3}y^{3/2} - 30\cdot\frac{1}{2}y^2 + 15\cdot\frac{2}{5}y^{5/3}\Big|_0^1$

$= 10 - 15 + 6 = -5 + 6 = 1$ //

2. Suponga que X tiene distribución geométrica con función de masa $f_X(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^x, x = 0, 1, 2, \ldots$. Determine la función de masa de $Y = X/(X+1)$.

$$P(Y = y) = P\left(\frac{X}{X+1} = y\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{X}{X+1} = y \\ &X = y(X+1) \\ &X = yX + y \\ &X - yX = y \\ &X = \frac{y}{1-y} \end{aligned}}$$

$$= P(X = y/(1-y))$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{y/(1-y)} \qquad y = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$$

3. Encuentre la densidad de Y y muestre que integra 1.

a) $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty; \quad Y = |X|^3$

b) $f_X(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2, \quad -1 < x < 1; \quad Y = 1 - X^2$

c) $f_X(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2, \quad -1 < x < 1; \quad Y = 1 - X^2$ si $X \leq 0$ y $Y = 1 - X$ si $X > 0$

Theorem 2.1.8 *Let X have pdf $f_X(x)$, let $Y = g(X)$, and define the sample space $\mathcal{X}$ as in (2.1.7). Suppose there exists a partition, $A_0, A_1, \ldots, A_k$, of $\mathcal{X}$ such that $P(X \in A_0) = 0$ and $f_X(x)$ is continuous on each A_i. Further, suppose there exist functions $g_1(x), \ldots, g_k(x)$, defined on $A_1, \ldots, A_k$, respectively, satisfying*

i. *$g(x) = g_i(x)$, for $x \in A_i$,*

ii. *$g_i(x)$ is monotone on A_i,*

iii. *the set $\mathcal{Y} = \{y\colon\ y = g_i(x)$ for some $x \in A_i\}$ is the same for each $i = 1, \ldots, k$, and*

iv. *$g_i^{-1}(y)$ has a continuous derivative on $\mathcal{Y}$, for each $i = 1, \ldots, k$.*

Then

$$f_Y(y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k} f_X\left(g_i^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g_i^{-1}(y)\right| & y \in \mathcal{Y} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

a) $A_0 = \{0\}$, $A_1 = (-\infty, 0)$, $A_2 = (0, \infty)$

$g_1(x) = -x^3 \qquad g_2(x) = x^3$

$g_1^{-1}(y) = (-y)^{1/3} \qquad g_2^{-1}(y) = y^{1/3}$

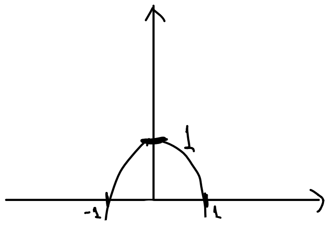
$\frac{\partial g^{-1}}{\partial y}(y) = \frac{1}{3}y^{-2/3} \qquad g_2^{-1}(y) = \frac{1}{3}y^{-2/3}$

$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$

$f_Y(y) = \frac{1}{2}e^{(-y)^{1/3}} \cdot \frac{1}{3}y^{-2/3} + \frac{1}{2}e^{-y^{1/3}} \cdot \frac{1}{3}y^{-2/3}$

$= \frac{1}{3}e^{-y^{1/3}}y^{-2/3}\,\mathbb{1}_{(0,\infty)}$

b)



$$A_0 = \{0\}$$

$$A_1 = (-1, 0)$$

$$A_2 = (0, 1)$$

$$g_1(x) = 1 - x^2 \qquad g_1^{-1}(y) = -(1-y)^{1/2}$$

$$g_2(x) = 1 - x^2 \qquad g_2^{-1}(y) = (1-y)^{1/2}$$

$$\xrightarrow{\left|\partial/\partial y\right|} \frac{1}{2}(1-y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_X(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2$$

$$f_Y(y) = \frac{3}{16}\frac{\left(1-\sqrt{1-y}\right)^2}{\sqrt{1-y}} + \frac{3}{16}\frac{\left(1+\sqrt{1-y}\right)^2}{\sqrt{1-y}}$$

$$= \frac{3}{16\sqrt{1-y}}\left(1 - 2\sqrt{1-y} + 1 - y + 1 + 2\sqrt{1-y} + 1 - y\right)$$

$$= \frac{3}{16\sqrt{1-y}}(4 - 2y) = \frac{3(2-y)}{8\sqrt{1-y}}$$

c) Igual a la anterior pero

$$g_1(x) = 1 - x^2 \longrightarrow g_1^{-1}(y) = -\sqrt{1-y}$$

$$g_2(x) = 1 - x \qquad g_2^{-1}(y) = 1 - y$$

4. Suponga que la densidad $f_X(x)$ de una variable aleatoria X es una función par. ($f_X(x)$ es una función par si $f_X(x) = f_X(-x)$ para todo x). Muestre que:

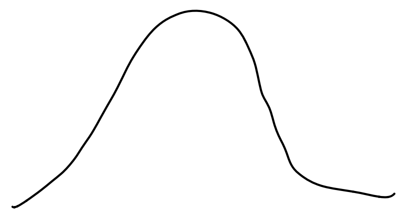
   a) X y $-X$ son idénticamente distribuidas

   b) $M_X(t)$ es simétrica al rededor del 0.

a) $Y = g(X) = -X \longrightarrow g^{-1}(y) = -y \xrightarrow{|\partial/\partial y|} 1$

$$f_Y(y) = f_X(-y) \cdot 1 = f_X(y)$$

$$f_{-X}(x) = f_X(x)$$



dist. normal

ej. de uso simular una normal a través de 2 $\underbrace{\text{half-normal}}$ a través de una exp. $\underbrace{}$ a través de una uniforme

b) $M_X(t)$ es simétrica al rededor del 0 si $M_X(0-\varepsilon) = M_X(0+\varepsilon) \quad \forall \varepsilon$

$$M_X(-\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x} f(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon x} f(-x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon x} f(-x)\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\varepsilon x} f(-x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{\varepsilon x} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} e^{\varepsilon x} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{\varepsilon x} f(x) = M_X(\varepsilon)$$

$\therefore$ M_X es sim. al rededor del 0.