PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2018

Interrogación 1 - MAT1610

1. Determine las asíntotas horizontales y verticales de

$$f(x) = \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x} - 1)}{x^2 - 3x + 2}.$$

Solución:

Observamos que f es una función continua en todo su dominio por lo tanto las únicas posibles asíntotas verticales son las rectas $x = 1$ y $x = 2$, para determinar si estas rectas son asíntotas calculamos los siguienets límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x} - 1)}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x\to 1} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{(x-1)(x-2)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x^{2/3}(x - 1)}{(x-1)(x-2)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

por lo tanto la recta $x = 1$ no es asíntota.

Calculemos ahora

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x} - 1)}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x} - 1)}{(x-1)(x-2)} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

por lo tanto la recta $x = 2$ es una asíntota.

Para determinar si hay asíntotas horizontales debemos estudiar los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to \infty} \frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x} - 1)}{x^2 - 3x + 2} &= \lim_{x\to \infty} \frac{x(1 - 1/x^{1/3})}{x^2(1 - 3/x + 2/x^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

análogamente tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{2/3}(\sqrt[3]{x}-1)}{x^2-3x+2} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x(1-1/x^{1/3})}{x^2(1-3/x+2/x^2)}\\ &= 0\end{aligned}$$

de lo anterior tenemos que la recta $y=0$ es la única asíntota horizontal.

Distribución de puntaje

- (1 punto) Por determinar justificadamente los candidatos a asíntotas verticales.
- (1 punto) Por calcular adecuadamente que $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 1/3$ y concluir que la recta $x = 1$ no es asíntota.
- (1 punto) Por calcular correctamente $\lim\limits_{x\to2*} f(x) = -\infty$ o el otro y concluir que la recta $x = 2$ es asíntota.
- (1 punto) Por determinar correctamente que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.
- (1 punto) Por determinar correctamente que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
- (1 punto) por concluir que la recta $y = 0$ es la única asíntota horizontal.

2. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}(\pi x)}{\operatorname{sen}(ex)-\operatorname{sen}(4x)}$.

Solución:
Notar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+\sin(\pi x)}{\sin(ex)-\sin(4x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{\sin(2x)}{2x}+\pi\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}}{e\dfrac{\sin(ex)}{ex}-4\dfrac{\sin(4x)}{4x}}.$$

Luego, por álgebra de límites tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)+\sin(\pi x)}{\sin(ex)-\sin(4x)} = \frac{2+\pi}{e-4}$$

Distribución de puntaje

- (1 punto) Por hacer cambios algebraicos para obtener límites fundamentales.
- (1 punto) Por usar correctamente el álgebra de límites.
- (1 punto) Por obtener el valor del límite

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\ln(x)}{|x-1|}$.

Solución 1:
Observamos que la función $f(x) = \dfrac{(x-1)}{|x-1|}$ en una función acotada en $\mathbb{R}-\{1\}$ y que $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x) = 0$ por lo tanto del Teorema del Sandwich tenemos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\ln(x)}{|x-1|} = 0$$

Solución 2:

Calculando límites laterales tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\ln(x)}{|x-1|} &= \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)\ln(x)}{(x-1)}\\
&= \lim_{x\to 1^+}\ln(x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\ln(x)}{|x-1|} &= \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\ln(x)}{-(x-1)}\\
&= \lim_{x\to 1^-}-\ln(x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

por lo tanto $\lim_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\ln(x)}{|x-1|} = 0$

Distribución de puntaje

- (1 punto) Por decir que la función $f(x) = \dfrac{(x-1)}{|x-1|}$ es acotada.
- (1 punto) Por decir que $\lim_{x\to 0} \ln(x) = 0$
- (1 punto) Por concluir que el resultado es cero.

Distribución de puntaje

- (1 punto) Por cada límite lateral.
- (1 punto) Por concluir que el resultado es cero.

3. Determine los valores de las constantes $a,\ b$ de manera que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x + a\,\mathrm{sen}(x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + 3\,\mathrm{sen}(x) + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sea derivable en $x = 0$.

Solución:

En primer lugar se debe tener que f sea continua en 0, ya que de otro modo no seŕa derivable en ese punto:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} f(x) \\ \lim_{x\to 0^-} 3x^2 + 2x + a\sin(x) &= \lim_{x\to 0^+} x^3 + 3\sin(x) + b \\ 0 &= b \end{aligned}$$

luego $b = 0$ y como se tiene que $f(0) = b$, se tendrá la continuidad.

Ahora debemos ver la condición de derivabilidad en 0, que es que el límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ exista. Como esta función está definida por tramos debemos ver que los límites laterales sean iguales:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ \lim_{h\to 0^-} \frac{3h^2 + 2h + a\sin(h)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3 + 3\sin(h)}{h} \\ \lim_{h\to 0^-} 3h + 2 + a\frac{\sin(h)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} h^2 + 3\frac{\sin(h)}{h} \\ 2 + a &= 3 \end{aligned}$$

luego $a = 1$.

Distribución de puntaje

- (1 punto) Por determinar justificadamente el valor de b.
- (2 punto) Por cada límite lateral.
- (1 punto) Por deetrminar el valor de a

4. a) Derive la función $g(x) = \dfrac{xe^{3x}}{1+x^2}$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{(xe^{3x})'(1+x^2) - (1+x^2)'xe^{3x}}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{(e^{3x} + 3xe^{3x})(1+x^2) - 2x(xe^{3x})}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{e^{3x}(3x^3 - x^2 + 3x + 1)}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}
$$

Distribución de puntaje

- (1 punto) Por usar bien la regla del producto.
- (1 punto) Por usar bien la regla del cociente
- (1 punto) Por usar bien la regla de la cadena.

b) Si $h(x) = f(xf(x))$, donde $f(1) = 2$, $f'(1) = 4$ y $f'(2) = 5$, encuentre $h'(1)$.

Solución:

Por regla de la cadena tenemos que

$$h'(x) = f'(xf(x))(xf(x))' = f'(xf(x))(f(x) + xf'(x))$$

reemplazando en $x = 1$ obtenemos que

$$h'(1) = f'(f(1))(f(1) + f'(1)) = f'(2)(2+4) = 30$$

Distribución de puntaje

- (1 punto) Por usar bien la regla del producto.
- (1 punto) Por usar bien la regla de la cadena
- (1 punto) Por realizar bien el reemplazo.

5. a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva definida por la ecuación

$$\arctan(x+y) \,+\, y \,=\, \frac{\pi}{4}$$

en el punto (1, 0).

Solución:

La ecuación de la recta tangente pedida es

$$y \;=\; y'(1,\,0)\cdot(x-1).$$

Derivando implícitamente la ecuación de la curva tenemos que

$$\frac{1}{1\,+\,(x+y)^2}\;\cdot\;(1+y')\,+\,y' \;=\; 0.$$

Evaluando tenemos que

$$\frac{1}{1\,+\,(1+0)^2}\;\cdot\;(1+y'(1,\,0))\,+\,y'(1,0) \;=\; 0$$

por lo tanto $y'(1,\,0) \;=\; -\dfrac{1}{3}$.

Así, la ecuación de la recta tangente es $y = -\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}$.

Distribución de puntaje

- (1 punto) Por encontrar y'.
- (1 punto) Por encontrar $y'(1,0)$
- (1 punto) Por la ecuación de la recta.

b) Se sabe que la función $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ es una función invertible con inversa f^{-1}. Determine $(f^{-1})'(1)$.

Solución:

Sabemos que $\left(f^{-1}\right)'(1) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)}$.

Por otra parte $f(x) = 1$ si y solo si $x = 0$, por lo que $f^{-1}(1) = 0$, además $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$ por lo tanto

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

Distribución de puntaje

- (1 punto) Por encontrar $f^{-1}(1)$.
- (1 punto) Por conocer que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$
- (1 punto) Por encontrar $(f^{-1})'(1)$.