• AXIOMAS DE ORDEN

Tricotomía (de números positivos)	Dado cualquier número a se tiene que a es positivo, $a = 0$ ó bien $-a$ es positivo. Solo una de las tres afirmaciones puede ser cierta.
Clausura con respecto a la suma	Al sumar dos números positivos se obtiene nuevamente un número positivo.
Clausura con respecto al producto.	Al multiplicar dos números positivos se obtiene nuevamente un número positivo.

DEF:

- Decimos que un número es negativo si su inverso aditivo es positivo.
- Escribimos $a<b$ si $b-a$ es positivo.
- Escribimos $a>b$ si $b<a$.
- Escribimos $a\leq b$ si $a<b$ o $a=b$.
- Escribimos $a\geq b$ si $b\leq a$.

• Obs: 0 no es ni positivo ni negativo

- **Lema**: Al multiplicar un número real por -1, su signo cambia.

DEM: Sabemos que

$$(-1) \cdot a = -a$$

- Si a es negativo entonces, por definición, $-a$ es positivo.
- Si a es positivo: Sabemos que

$$-(-a) = a$$

Luego, el inverso aditivo de $-a$ es positivo.

Luego, por definición, $-a$ es negativo

$\square$

• <u>Lema</u>: El producto de un número positivo y un número negativo es un número negativo.

<u>DEM</u>: Sean a, b reales, $a > 0$, $b < 0$.

Tenemos que demostrar que

$-ab$ es positivo.

Pero:

$$-ab = (-1)\cdot(ab)$$
$$= a\cdot(-b) > 0$$

ya que a y $-b$ son positivos $\square$

<u>Ejercicio</u>: El producto de dos números negativos es positivo.

• **Lema**: El cuadrado de cualquier número real es un número no negativo, es decir,

$$a^2 \geq 0 \,, \; \forall a \in \mathbb{R}$$

DEM:

• Si a es positivo, entonces $a^2 = a \cdot a > 0$ por la propiedad de clausura con respecto al producto.

• Si $a = 0$, entonces $a^2 = 0 \geq 0$.

• Si a es negativo, entonces $a^2 > 0$ por el ejercicio anterior.

$\square$

- **Algunas propiedades** :

i)	*Tricotomía (extendida)*	Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $b < a$ o $a = b$ y solo una de las tres se cumple.
ii)	*Transitividad*	Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
iii)	*Suma*	Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.
iv)	*Producto*	Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$.
		Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$.
v)	*Cuadrados*	$a^2 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$
vi)	*Potencias*	Si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$.
		Sean $a, b > 0$. Si $a^2 < b^2$ entonces $a < b$.
vii)	*Recíprocos*	Si $0 < a < b$ entonces $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.
		Si $a < b < 0$ entonces $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$.

DEM :

i) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Usamos la tricotomía para $b-a$:

- Si $b-a>0 \Rightarrow a<b$
- Si $b-a=0 \Rightarrow a=b$
- Si $b-a<0 \Rightarrow -(b-a)=a-b>0$
$$\Rightarrow b<a$$
$$\Rightarrow a>b$$

Estas tres posibilidades son excluyentes.

ii) $a<b \Rightarrow b-a>0$

$b<c \Rightarrow c-b>0$

Por clausura bajo suma,

$(b-a)+(c-b)>0$

$\Rightarrow \quad c-a>0$

$\Rightarrow \quad a<c$

iii) Supongamos que

$a<b \Leftrightarrow b-a>0$

$c<d \Leftrightarrow d-c>0$

Por clausura bajo suma,

$0<(b-a)+(d-c)=(b+d)-(a+c)$

$\Rightarrow \; a+c<b+d.$

iv) Supongamos que

$$a < b \quad y \quad c > 0$$

$$\Rightarrow b - a > 0 \quad y \quad c > 0$$

$\Rightarrow bc - ac = (b-a)\cdot c > 0$ gracias a la clausura bajo producto.

La segunda parte se deja de ejercicio.

v) ✓

vi) Supongamos que $0 < a < b$.

Tenemos que demostrar que $a^2 < b^2$.

$$a^2 < b^2 \iff b^2 - a^2 > 0$$

$$\iff (b+a)(b-a) > 0$$

- Clausura bajo suma : $b + a > 0$
- $a < b$: $b - a > 0$
- Clausura bajo producto : $(b+a)(b-a) > 0$

$$\left.\begin{array}{l} a<b,\ a>0 \Rightarrow a^2 < ba \\ a<b,\ b>0 \Rightarrow ab < b^2 \end{array}\right] \overset{\text{trans.}}{\Longrightarrow} a^2 < b^2$$

La segunda parte se deja de ejercicio.

vii) Supongamos que $a<b$.

Tenemos que demostrar que $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Primero, demostremos que $0 < \frac{1}{b}$.

- Si $\frac{1}{b} = 0$, entonces

$$1 = \frac{1}{b} \cdot b = 0 \cdot b = 0 \quad \times$$

- Si $\frac{1}{b} < 0$, entonces

$1 = \frac{1}{b} \cdot b < 0$ por uno de los lemas anteriores

$\times$

Ahora demostramos que

$$0<a<b \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{b}<\frac{1}{a} \iff \frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$$

$$\iff \frac{b-a}{ab}>0$$

$$\iff (b-a)\cdot\frac{1}{ab}>0$$

- $a<b \Rightarrow b-a>0$
- $0<a<b \Rightarrow a>0,\ b>0$ (transitividad)

$\Rightarrow ab>0$ (clausura de producto)

$\Rightarrow \frac{1}{ab}>0$ (se acabó de demostrar)

$\Rightarrow (b-a)\cdot\frac{1}{ab}>0$ por clausura con respecto al producto

La segunda parte se deja de ejercicio

$\square$

Sup. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b} \overset{\cdot ab}{\Longrightarrow} b<a \;\cancel{\rightarrow}$

- Ejercicio: Supongamos que

$$a<b \quad y \quad c<d.$$

Demostrar que

$$ad+bc<ac+bd$$

Sol:

$$ad+bc<ac+bd$$

$$\Leftrightarrow \quad 0<ac+bd-ad-bc$$

$$\Leftrightarrow \quad 0<(b-a)(d-c)$$

Esto es verdad gracias a la clausura bajo el producto

• <u>Ejercicio:</u>

$$x>0 \Longrightarrow x+\frac{1}{x}\geq 2$$

<u>Sol:</u>

Basta demostrar que

$$x+\frac{1}{x}-2\geq 0$$

Ahora,

$$x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}\geq 0$$

//