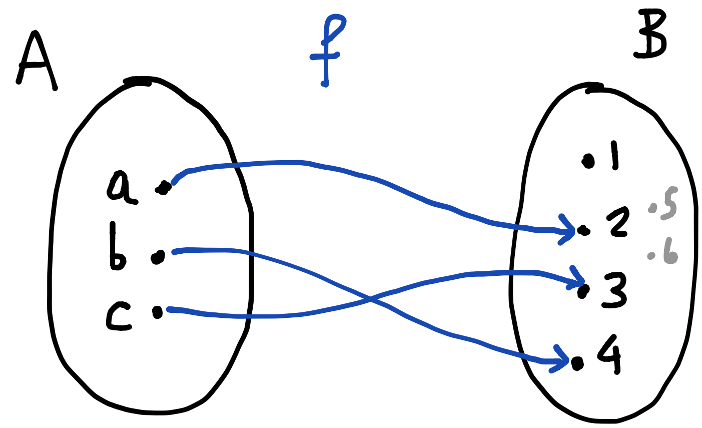
CLASE 8: RELACIONES Y FUNCIONES

- Informalmente, una función entre dos conjuntos A y B es una regla que asocia un único elemento de B a cada elemento de A.

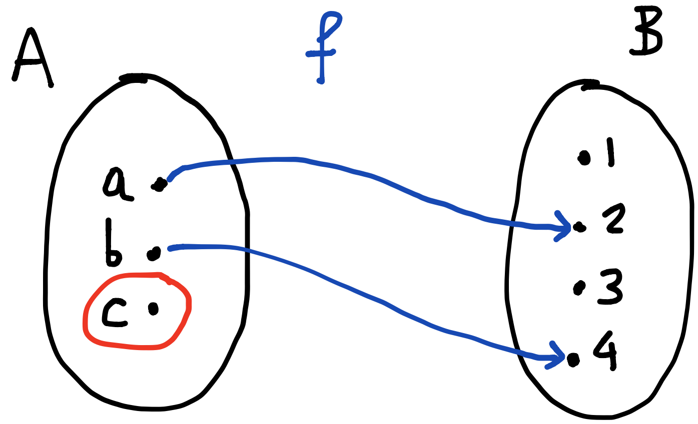
- Ej:



$f(a) = 2$, $f(b) = 4$, $f(c) = 3$

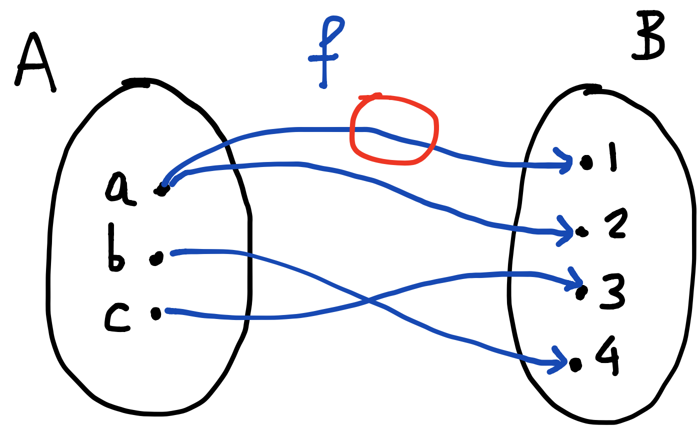
f es una función

• Ej:



f no es función: $c \in A$ no está asociado a ningún elemento de B

• Ej:



f no es función: $a \in A$ está asociado a más de un elemento de B

- A se conoce como el <u>dominio</u> de f
- El conjunto $\{f(x) : x \in A\} \subseteq B$ se conoce como <u>recorrido</u> de f (o rango o imagen)

- <u>Obs</u>: una función asocia elementos de A con elementos de B:

  x asociado a $y \iff y = f(x)$

  El conjunto

  $$R = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

  "codifica" esta asociación o relación.

  $$R \subseteq \,?$$

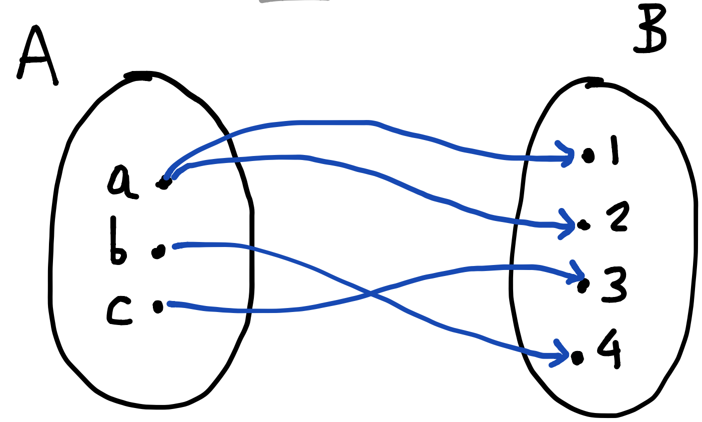
- <u>DEF</u>: Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Un <u>par ordenado</u> es un objeto del tipo (a,b) donde $a \in A$, $b \in B$.

  El <u>producto cartesiano</u> de A y B, $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados.

  Una <u>relación</u> es un subconjunto de $A \times B$.

  <u>Obs</u>: $A \times B$ es una relación

- <u>Ej</u>:



$R = \{(a,1),(a,2),(b,4),(c,3)$

es una relación.

- **Notación**: sea $R \subseteq A \times B$ una relación.

$aRb \iff a$ se relaciona con $b \iff (a,b) \in R$

- **Obs**: $(a,b) \neq \{a,b\}$

par ordenado — conjunto

$$(a,b) \neq (b,a)$$
$$\{a,b\} = \{b,a\}$$

- **Ej**: $A = \{a,b,c\}$, $B = \{1,2,3,4\}$

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,1),(c,2),(c,3),(c,4)\}$$

$$R = \{(a,1),(a,2),(b,4),(c,3)\} \subseteq A \times B$$

- Ej: $A = B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$x \mathcal{R} y \iff x + y \leq 5$$

$$\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

- Ej: $A = B = \mathbb{R}$

$$x \mathcal{R} y \iff y = x^2$$

$$\mathcal{R} = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y = x^2\} \subseteq \underline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$$

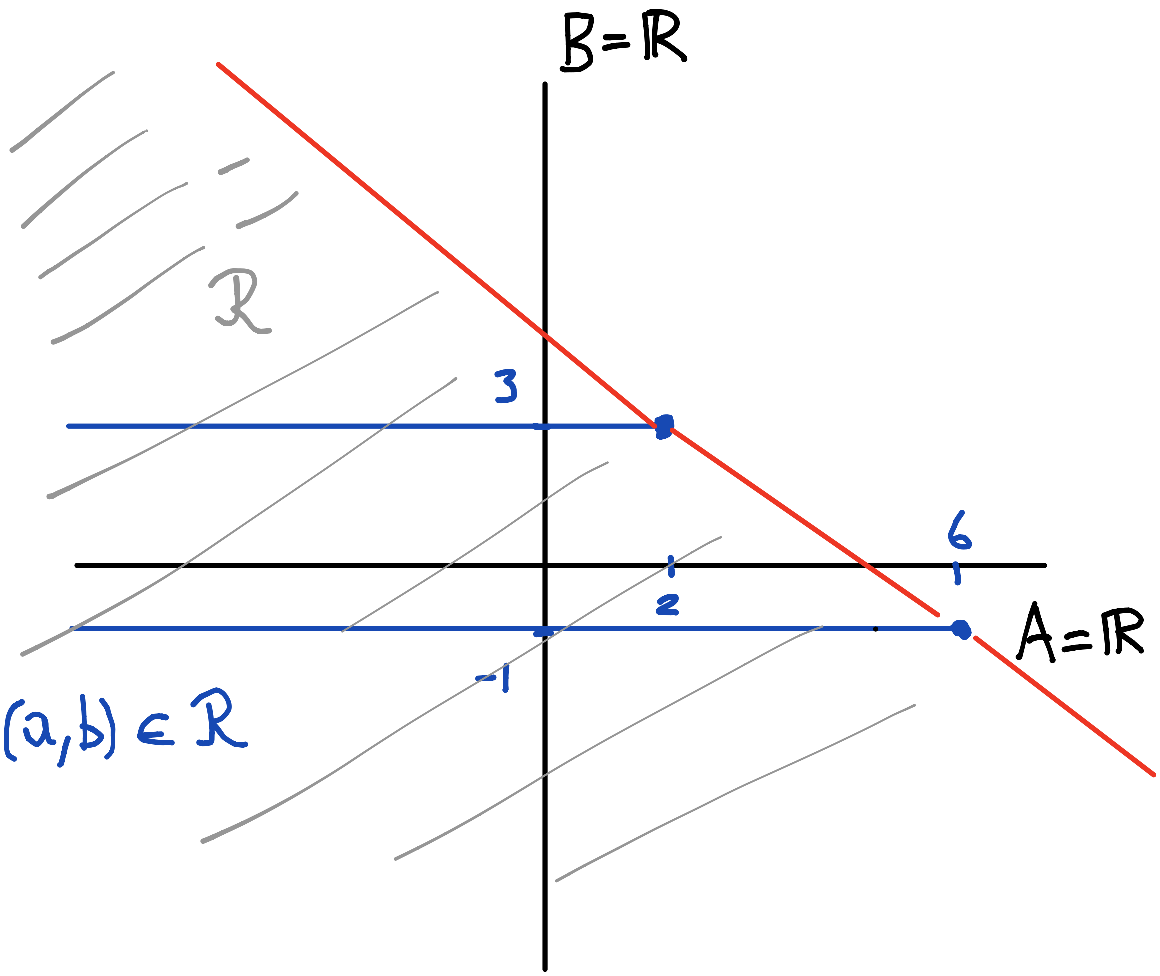
$(1,1), (2,4), (7,49) \in \mathcal{R}$

$(3,-1) \notin \mathcal{R}$

Si $y < 0$, $(x,y) \notin \mathcal{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

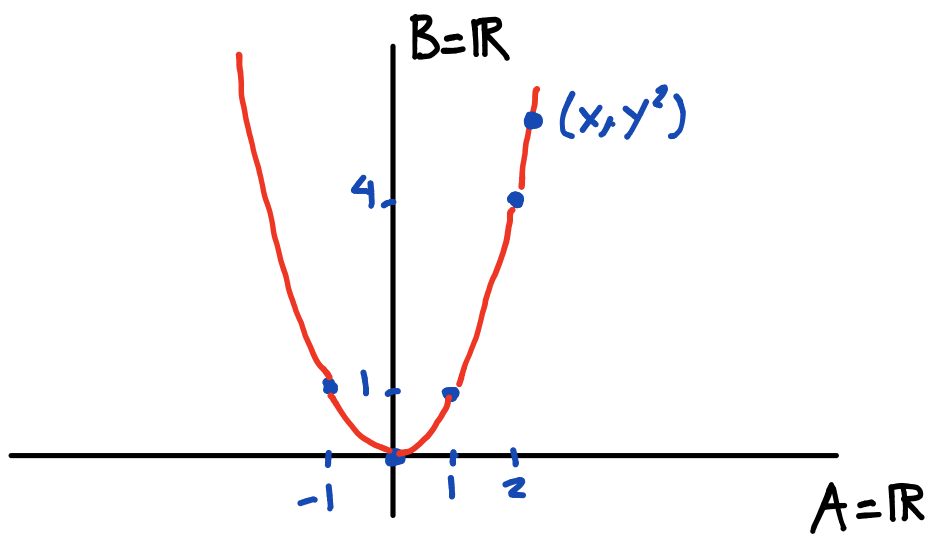
- **DEF**: El conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se conoce como <u>plano cartesiano</u>.

- Ej: $A = B = \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \iff x + y \le 5$

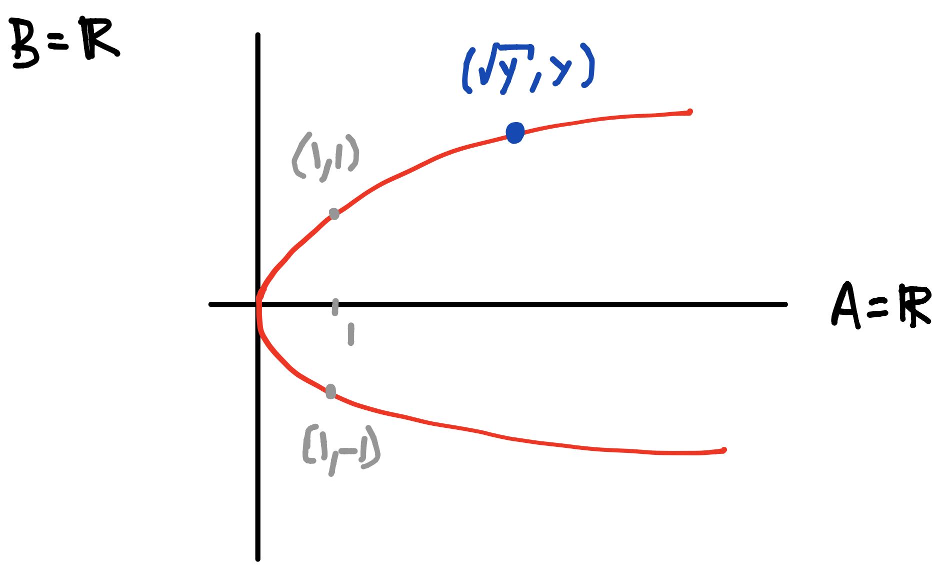


- $(a,b) \in \mathcal{R}$

• Ej: $A = B = \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \iff y = x^2$



• Ej: $A = B = \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \iff x = y^2$



- **DEF**: Sean A y B dos conjuntos no vacíos y $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ una relación. Decimos que $\mathcal{R}$ es una función si

$$\forall x \in A, \exists! y \in B : (x,y) \in \mathcal{R}$$

- **Ej**: $A = B = \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \iff x^2 = y$

$\mathcal{R}$ es una función: $(x, x^2) \in \mathcal{R}$

$(x,y) \in \mathcal{R} \iff y = x^2$

- **Ej**: $A = B = \mathbb{R}$, $x \mathcal{R} y \iff x = y^2$

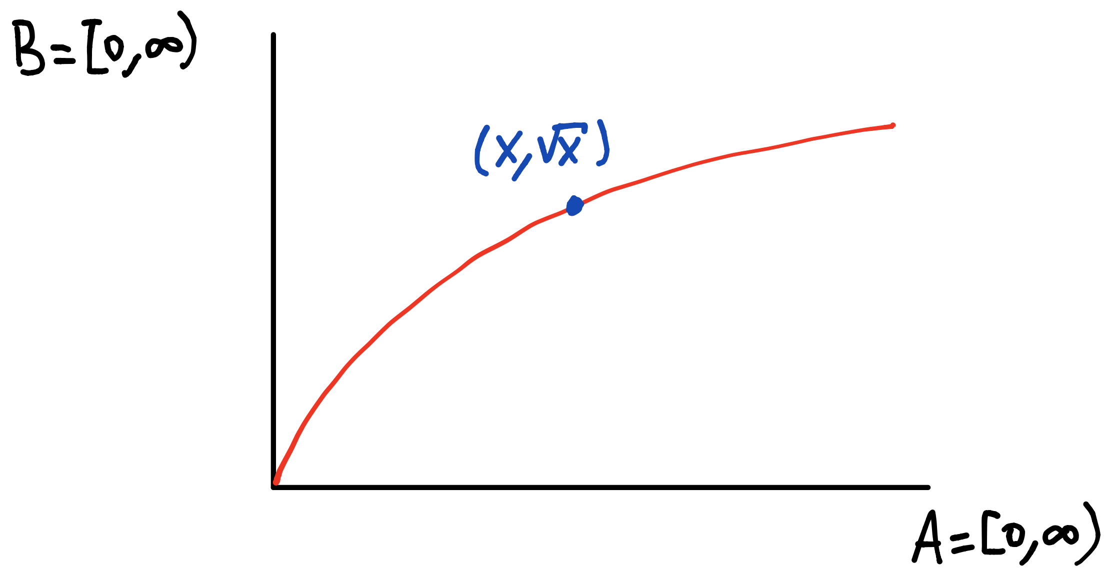
$\mathcal{R}$ no es una función: $(1,1) \in \mathcal{R}$
$(1,-1) \in \mathcal{R}$

Más aún, si $x < 0$, $(x,y) \notin \mathcal{R}, \forall y \in \mathbb{R}$

• $\underline{\text{Ej}}$: $A=[0,\infty)$, $B=[0,\infty)$

$$x \mathcal{R} y \iff x=y^2$$

$\mathcal{R}$ es una función: si $x\in A$ $(x\geq 0)$, entonces $y=\sqrt{x}$ es el único elemento de B tq $(x,y)\in\mathcal{R}$.



- Notación: Sea $R \subseteq A \times B$ una función.

Luego, $\forall x \in A, \exists! \, y \in B$ tq $(x,y) \in R$.

Para $x \in A$, denotamos por $f(x)$ al único elemento de B tal que $(x, f(x)) \in R$.

Esquematizamos esto como:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- DEF:
  - A : dominio de f
  - $\{f(x) : x \in A\}$: recorrido de f (o rango o imagen)

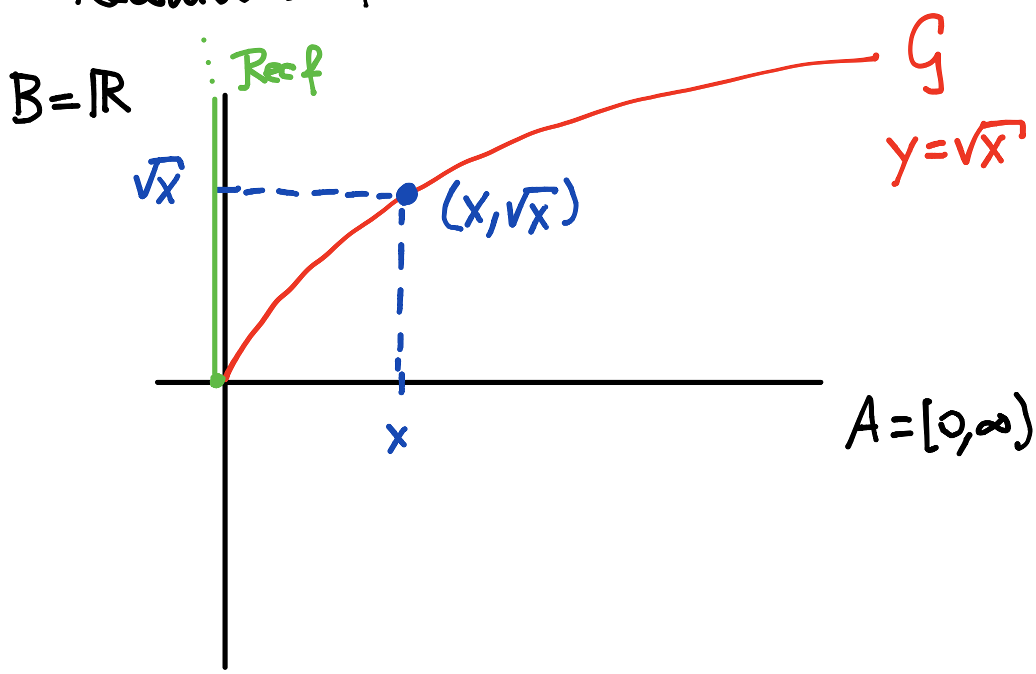
    $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$
  - $y = f(x)$: imagen de x
  - $G = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq A \times B$: gráfica de f

• **Ej**: $A = [0,\infty)$, $B = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sqrt{x} \end{aligned}$$

Dominio de f = Dom f = $[0,\infty)$

Recorrido de f = Rec f = ? $[0,\infty)$ (*)



(*) : demostremos que Rec $f = [0,\infty)$

$$y \in \text{Rec } f \iff \exists x \text{ tq } y = \sqrt{x}$$

$$\iff y \geq 0$$

Con más cuidado:

$[0,\infty) = \text{Rec } f \Leftrightarrow [0,\infty) \subseteq \text{Rec } f$ y $[0,\infty) \supseteq \text{Rec } f$

i) $[0,\infty) \subseteq \text{Rec } f$:

Sea $y \in [0,\infty)$ y sea $x = y^2 \in [0,\infty)$

Luego, $y = \sqrt{x}$, es decir, $y \in \text{Rec } f$

ii) $[0,\infty) \supseteq \text{Rec } f$:

Demostremos que si $y \notin [0,\infty)$, entonces, $y \notin \text{Rec } f$. Es decir,

$$[0,\infty)^c \subseteq (\text{Rec } f)^c$$

$\Leftrightarrow (-\infty, 0) \subseteq (\text{Rec } f)^c$

Sea $y \in (-\infty, 0)$.

Sabemos que $\forall x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$ (por definición).

Luego, $\nexists x \in [0,\infty)$ tq $y = \sqrt{x}$.

$\Rightarrow y \notin \text{Rec } f \Rightarrow y \in (\text{Rec } f)^c$