El principio de inducción

1 Introducción

En esta semana se discute una técnica de demostración especial que es particularmente útil para demostrar afirmaciones sobre los números naturales.

Supongamos que queremos demostrar que alguna propiedad es válida para todos los números naturales $1, 2, 3, 4, \ldots$. Esto es difícil, o incluso imposible, demostrar tales afirmaciones simplemente a partir de las reglas básicas de la aritmética. Lo que estas reglas no captan el hecho de que los números naturales vienen en una secuencia con cualquier número que se puede obtener partiendo del número 1 y sumándole 1 suficientes veces. El número natural $n+1$ se llama el sucesor del número natural n. Así, si empezamos con el número entero 1 y formamos su sucesor, y luego su sucesor, y así sucesivamente, entonces dado cualquier número entero positivo eventualmente se alcanzará.

2 La técnica de demostración por inducción

El principio de inducción es la base de un método para demostrar teoremas sobre números naturales, conocido como el método de inducción (o recurrencia), que funciona así: "si una propiedad P es válida para el número 1 y si, suponiendo P válida para el número k, como consecuencia se tiene que P también es válida para su sucesor, entonces P es válida para todos los números naturales". Esta idea se puede formularse de forma más precisa como sigue.

Axioma 1 **(El principio de inducción)** Suponga que $P(n)$ es una afirmación que involucra al número natural n. Entonces $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$ si

(i) $P(1)$ es verdadero, y

(ii) $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ para todo natural k.

Antes de seguir discutiendo el principio de inducción, he aquí un ejemplo de cómo se utiliza.

EJEMPLO 1 Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene la desigualdad $n \leqslant 2^n$

La idea de la inducción es que, como $P(1)$ es verdadera (comprobada explícitamente) y también $P(1) \Longrightarrow P(2)$ (caso especial de paso inductivo), sabemos que $P(2)$ es verdadera, y ahora como $P(2) \Longrightarrow P(3)$ sabemos que $P(3)$ es verdadera, y así sucesivamente: $P(3) \Longrightarrow P(4) \Longrightarrow P(5) \Longrightarrow \ldots$. Finalmente, este proceso llegará a $P(n)$ para cualquier número entero positivo n especificado.

Se podría pensar que esto es "obvio" y en cierto modo lo es. Pero esto se debe a que nuestras ideas intuitivas sobre lo que son los números enteros incluyen algo más que el hecho de que se puedan sumar, multiplicar y comparar en tamaño. El principio de inducción no es más que una formulación de "algo" que damos por sentado sobre los números enteros: que podemos llegar a cualquier número entero positivo partiendo de 1 y añadiendo repetidamente 1.

Supongamos que pensamos en los números enteros alineados como fichas de dominó. El paso inductivo nos dice que están lo suficientemente cerca como para que cada ficha de dominó derribe a la siguiente, el caso base nos dice que la primera ficha cae, la conclusión es que todas caen.

Formalmente, el principio de inducción es otro axioma sobre los enteros, además de los axiomas algebraicos y de axiomas de orden. Es importante darse cuenta de que no podemos demostrar un resultado como el Ejemplo 1 considerando cada caso por separado. Para cualquier valor concreto de n podemos comprobar el resultado mediante un cálculo. Por ejemplo, consideremos $n = 8$: como $2^8 = 256$ y $8 \leqslant 256$, la afirmación $P(8)$ es verdadera. Pero por muchos casos individuales que comprobáramos numéricamente, no sabríamos que el resultado se mantiene siempre.

Al escribir demostraciones por inducción es importante dejar claro que es el método que se utiliza y tener absolutamente claro cuál es el enunciado $P(n)$ que se está demostrando.

3 Una plantilla para las pruebas por inducción

Es conveniente que las demostraciones sigan un patrón estándar. Primero identifique el enunciado $P(n)$ y tenga claro qué dice cada una de las afirmaciones $P(1)$, $P(k)$, $P(k+1)$. A continuación, cuando escriba la prueba formal utiliza la siguiente plantilla.

Demostración Utilizamos la inducción sobre n.

Caso base: [Demostrar el enunciado $P(1)$]
Paso inductivo: Supongamos ahora como hipótesis inductiva que [$P(k)$ es verdadera] para algún número natural k. Entonces [deduzca que $P(k+1)$ es verdadera]. Esto demuestra el paso inductivo.
Conclusión: Por lo tanto, por inducción, [$P(n)$ es verdadera] para todos los números naturales n.

Hay muchas variantes de este esquema. En particular, a menudo se omite la línea de la conclusión y incluir las palabras "caso base", "paso inductivo" y "conclusión" no es habitual. Sin embargo, al empezar a aplicar el método inductivo, el uso de esta plantilla ayuda a enfatizar lo que implica una prueba de este tipo. Las dos primeras partes (caso base y paso inductivo) se ocupan de verificar las condiciones del Axioma 1 y la última parte (conclusión) invoca el axioma.

EJEMPLO 2 Para todo $n \in \mathbb{N}$ el número $n^2 + n$ es par.

4 Cambiar el caso base

El principio de inducción se utiliza para demostrar un enunciado sobre números enteros positivos demostrando primero el para el natural 1 como caso base y luego demostrando que si es válida para algún natural entonces se cumple necesariamente para su sucesor. Sin embargo, la misma idea puede utilizarse partiendo de cualquier número entero como caso base. Supongamos que n_0 es un número entero, positivo, negativo o cero. Se puede utilizar la inducción para demostrar que un enunciado $P(n)$ es verdadero para todos los enteros n tales que $n \geqslant n_0$. El caso base es ahora $P(n_0)$ y el paso inductivo es $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ (para $k \geqslant n_0$). El modelo básico dado anteriormente se convierte en el siguiente.

Demostración Utilizamos la inducción sobre n.

Caso base: [Demostrar el enunciado $P(n_0)$]
Paso inductivo: Supongamos ahora como hipótesis inductiva que [$P(k)$ es verdadera] para algún número natural k tal que $k \geqslant n_0$. Entonces [deduzca que $P(k+1)$ es verdadera]. Esto demuestra el paso inductivo.
Conclusión: Por lo tanto, por inducción, [$P(n)$ es verdadera] para todos los números naturales $n \geqslant n_0$.

EJEMPLO 3 Para todo natural n tal que $n \geqslant 4$, se tiene la desigualdad $n^2 \leqslant 2^n$.

5 Definiciones por inducción

DEFINICIÓN Dada una sucesión de números $a_1, a_2, \ldots$, los números $\sum_{k=1}^{n} a_k$ para enteros positivos n son definidos inductivamente por

(i) $\sum_{\ell=1}^{1} a_\ell = a_1$

(ii) $\sum_{\ell=1}^{k+1} a_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} a_k + a_{k+1}$ para $k \geqslant 1$.

De nuevo tenemos un caso base que nos dice lo que significa la notación en el caso n = 1 y un paso inductivo que nos dice lo que significa para n = k + 1 en términos de lo que significa para n = k. Para cualquier valor específico de valor de n podemos evaluar la expresión mediante el uso repetido del paso inductivo. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{3} a_\ell &= \sum_{\ell=1}^{2} a_k + a_3 && \text{(por (ii) para } k=2) \\
&= \sum_{\ell=1}^{1} a_\ell + a_2 + a_3 && \text{(por (ii) para } k=1) \\
&= a_1 + a_2 + a_3 && \text{(por (i))}
\end{aligned}$$

Dada la sucesión de números $a_1, a_2, \ldots$, entonces

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \, .$$

se llama la suma de los primeros n números de la sucesión.

EJEMPLO 4 Para enteros positivos n,

$$\sum_{\ell=1}^{n} \ell = \frac{n(n+1)}{2} \, .$$

6 Guía de Ejercicios

1. Pruebe por inducción sobre n, para todo natural n, $n^3 - n$ es divisible por 3.
2. Demuestre que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por 9.
3. Pruebe por inducción sobre m que $m^3 \leqslant 2^m$ para $m \geqslant 10$.
4. Demuestre que $n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para todo $n \geqslant 3$.
5. Demuestre usando inducción que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$.
$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} \, .$$
6. Demuestre usando inducción que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$.
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1} \, .$$
7. Demuestre usando inducción que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$.
$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \, .$$
8. Demuestre usando inducción que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

9. Demuestre usando inducción que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$, $10^n + 3 \cdot 4^{n+1} + 5$ es divisible por 9.

10. Pruebe por inducción sobre n que, para cualquier número real $x \neq 1$ y todo entero $n \geqslant 0$
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} .$$

11. Pruebe que, para cualquier números reales a y b y para enteros $n \geqslant 0$,
$$\sum_{k=0}^{n} (a + kb) = \frac{1}{2}(n+1)(2a + nb) .$$

12. Para enteros no negativos n definimos el número u_n inductivamente como sigue
$$\begin{aligned} u_0 &= 0 , \\ u_{k+1} &= 3u_k + 3^k \qquad \text{para } k \geqslant 0 \end{aligned}$$
Pruebe que $u_n = n3^{n-1}$ para todo entero no negativo n.