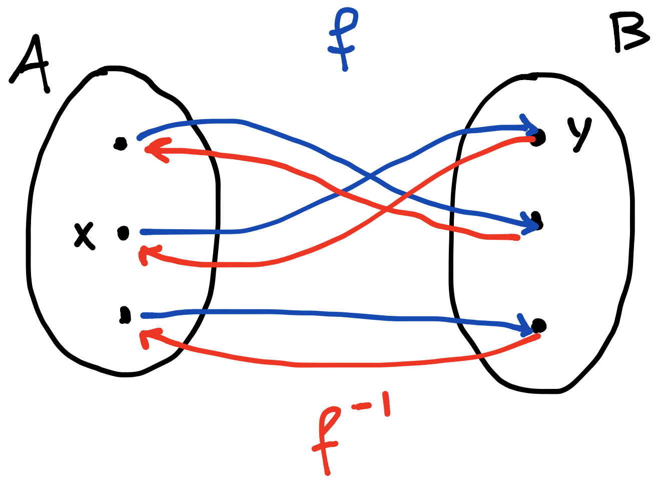
CLASE 21: FUNCIÓN INVERSA

- Recordemos:



Sea $f: A \longrightarrow B$ una función biyectiva.

Definimos su <u>función inversa</u> como la función $f^{-1}: B \longrightarrow A$ tal que

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

• **Ej**: Sea $f(x) = 2x+1$, $x \in \mathbb{R}$.

Calcular f^{-1}.

Sol:

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$$

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = 2x+1 \\ &\iff y-1 = 2x \\ &\iff \frac{y-1}{2} = x \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(y) = \dfrac{y-1}{2}$, $y \in \mathbb{R}$

• **Obs**: si consideramos

$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\longrightarrow [1,\infty) \\ x &\longmapsto 2x+1 \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} f^{-1} : [1,\infty) &\longrightarrow [0,\infty) \\ y &\longmapsto \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

- **Obs.**: $f : A \longrightarrow B$ función biyectiva

$$\Rightarrow f^{-1} : B \longrightarrow A$$

Es decir, $\text{Dom } f^{-1} = \text{Rec } f$

$\text{Rec } f^{-1} = \text{Dom } f$

- **Ej.**: $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$

$$x \longmapsto x^2$$

$$f^{-1} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x) = x^2$$

Por lo tanto, $f^{-1}(y) = \sqrt{x}$

- **Ejercicio**: Calcular la inversa de

$$f : (-\infty, 0] \longrightarrow [0,\infty)$$

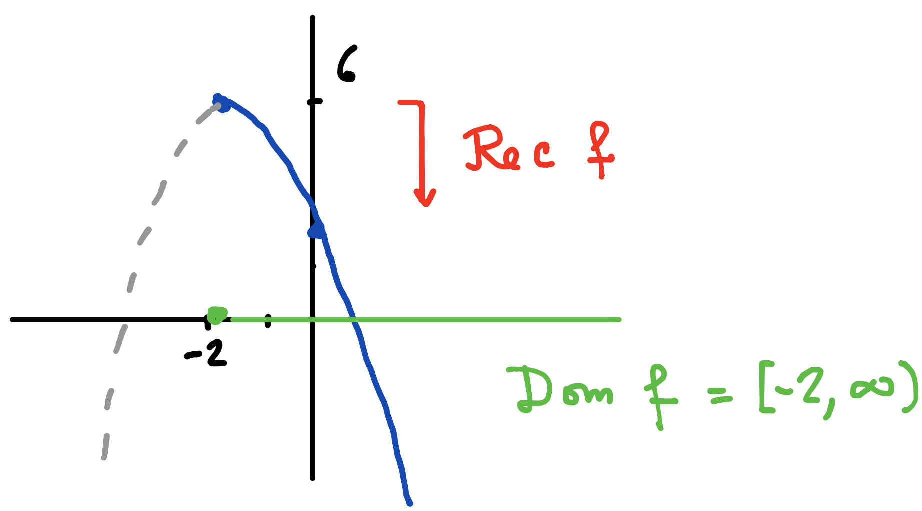
$$x \longmapsto x^2$$

• Ej: $f(x) = -x^2 - 4x + 2$

Encontrar un dominio tal que f sea invertible y calcular la inversa.

Sol:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 - 4x + 2 \\ &= -(x^2 + 4x) + 2 \\ &= -(x^2 + 4x + 4) + 2 + 4 \\ &= -(x+2)^2 + 6 \end{aligned}$$



Luego, en principio,

$$f^{-1} : (-\infty, 6] \longrightarrow [-2, \infty)$$

Calculemos la inversa:

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &\iff y = -(x+2)^2 + 6 \\
&\iff y - 6 = -(x+2)^2 \qquad (y \leq 6) \\
&\iff 6 - y = (x+2)^2 \\
&\iff \sqrt{6-y} = |x+2| \qquad (x \geq -2) \\
&\iff \sqrt{6-y} = x + 2 \\
&\iff \sqrt{6-y} - 2 = x
\end{aligned}
$$

Luego, $f^{-1}(y) = \sqrt{6-y} - 2$.

- <u>Obs</u>: Otra forma:

$$
\begin{aligned}
y = f(x) &\iff y = -x^2 - 4x + 2 \\
&\iff x^2 + 4x + y - 2 = 0 \\
&\iff x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(y-2)}}{2} \\
& = -2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{24 - 4y} \\
& = -2 \pm \sqrt{6-y}
\end{aligned}
$$

$$\overset{(x\geq -2)}{=} -2+\sqrt{6-y}$$

• <u>Obs</u>: Sea $f: A \longrightarrow B$ una función biyectiva y $f^{-1}: B \longrightarrow A$ su inversa.

Luego: i) $f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \in A$

ii) $f(f^{-1}(y)) = y, \forall y \in B$

En términos de composición:

i) $f^{-1} \circ f(x) = x, \forall x \in A$

ii) $f \circ f^{-1}(y) = y, \forall y \in B$

• <u>Lema</u>: Sean $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow A$ dos funciones tales que:

i) $g \circ f(x) = x, \forall x \in A$

ii) $f \circ g(y) = y, \forall y \in B$

Luego, f es biyectiva y $g = f^{-1}$.

DEM:

- f es inyectiva:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \overset{i)}{\Rightarrow} x_1 = x_2$$

- f es sobre:

Sea $y \in B$. Buscamos $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Sea $x = g(y) \overset{ii)}{\Longrightarrow} f(x) = f(g(y)) = y$

- $g = f^{-1}$:

Tenemos que demostrar

$$g(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

Efectivamente,

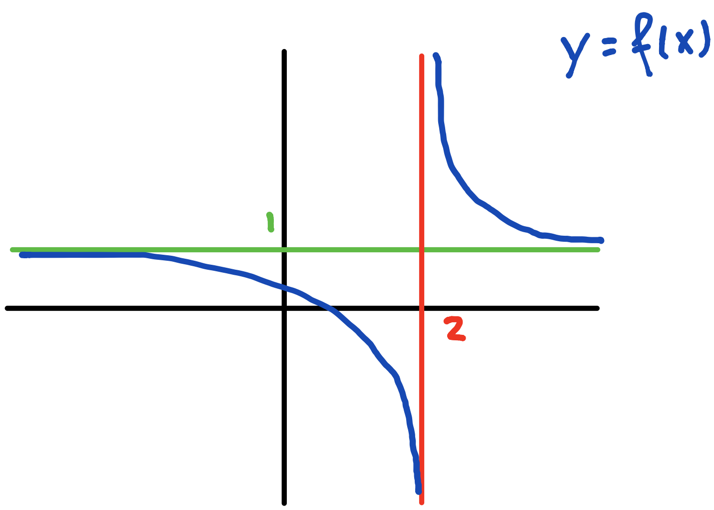
$$g(y) = x \Rightarrow f(g(y)) = f(x) \overset{ii)}{\Rightarrow} y = f(x)$$

$$y = f(x) \Rightarrow g(y) = g(f(x)) \overset{i)}{\Rightarrow} g(y) = x$$

$\square$

- <u>Moraleja</u>: Sea $f: A \longrightarrow B$.
  Si encontremos $g: B \longrightarrow A$ como en el lema, entonces:
  - f es biyectiva
  - $g = f^{-1}$

- <u>Ej</u>: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$



Sea $x \neq 2$.

$$y = f(x) \iff y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\underset{(x\neq -2)}{\iff} \quad y(x-2) = x+1$$

$$\iff \quad yx - 2y = x+1$$

$$\iff \quad yx - x = 2y+1$$

$$\iff \quad (y-1)x = 2y+1$$

$$\underset{(y\neq 1)}{\iff} \quad x = \frac{2y+1}{y-1}$$

Sea $g : \mathbb{R}\setminus\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longmapsto \frac{2y+1}{y-1}$$

Calculamos:

- Sea $x \neq 2$,

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$= \frac{2\left(\frac{x+1}{x-2}\right)+1}{\frac{x+1}{x-2} - 1} = \ldots = x$$

• Sea $y \neq 1$,

$$f \circ g(y) = f\left(\frac{2y+1}{y-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{2y+1}{y-1} + 1}{\frac{2y+1}{y-1} - 2} = \cdots = y$$

<u>Conclusión</u>:

1.- $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ es biyectiva

2.- $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$

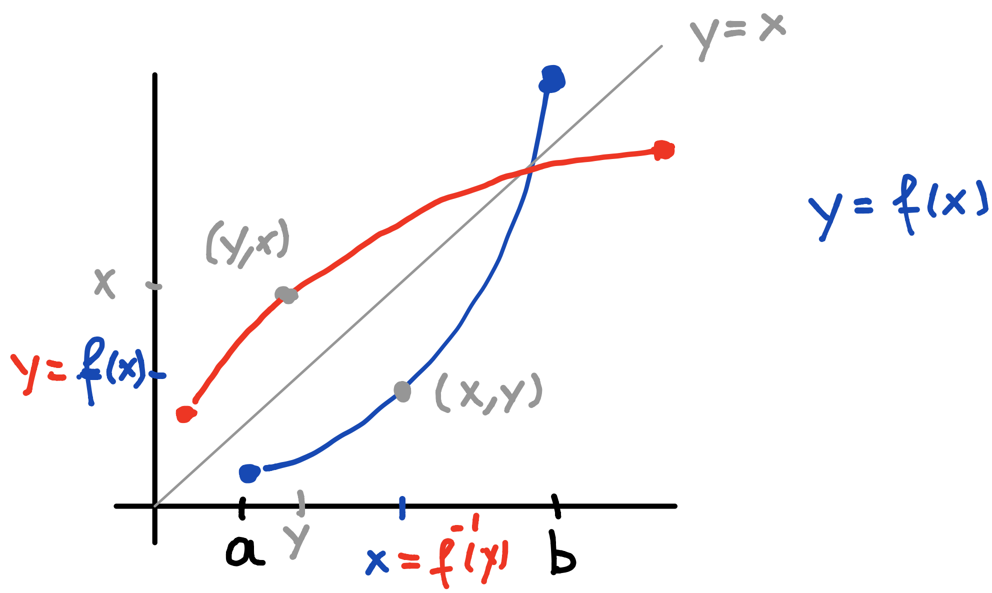
3.- $f^{-1} = g$

• <u>Obs</u>: i) $g = f^{-1} \Leftrightarrow g^{-1} = f$

ii) f^{-1} es biyectiva

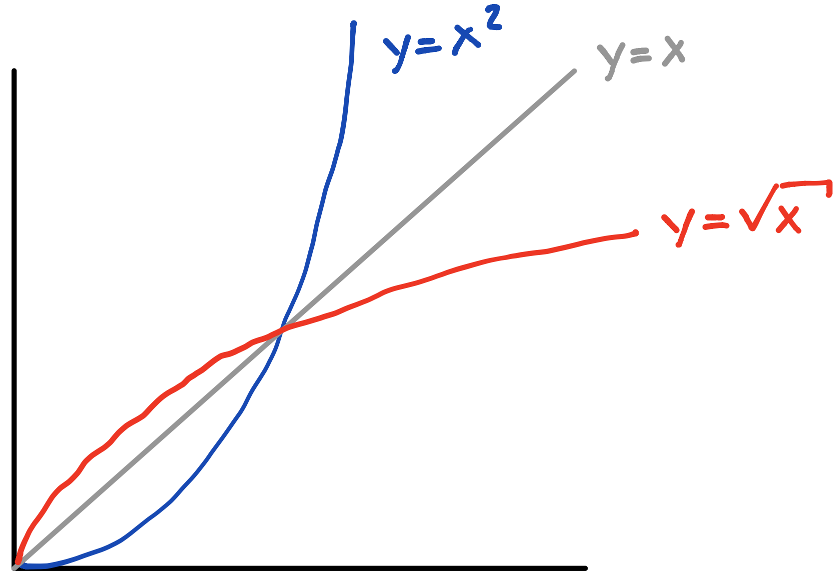
iii) $(f^{-1})^{-1} = f$

- <u>Gráfica de la función inversa.</u>



Para obtener la gráfica de f^{-1}, basta reflejar la gráfica de f con respecto a la recta $y=x$

- Ej: $f(x) = x^2$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$



- Ej: $f(x) = x^3$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$