CLASE 18 : • EXPONENCIALES Y LOGARITMOS (fin)

• SUCESIONES

• **Obs**: Cambio de base

Sean $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, dos bases

$$x = a^{\log_a x} = b^{\log_b x} \quad / \cdot \log_a$$

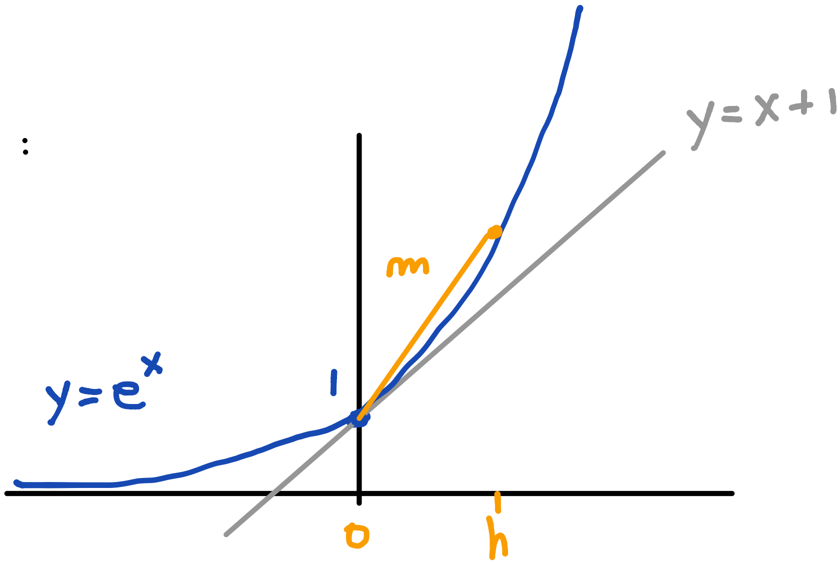
$$\Rightarrow \quad \log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$$

$$\Rightarrow \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

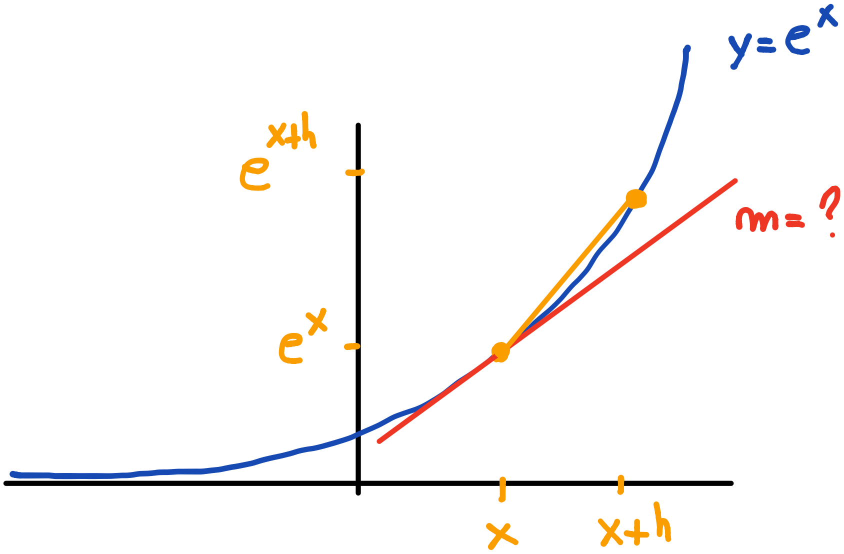
En particular, si $a = e$:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

• <u>Obs</u>:



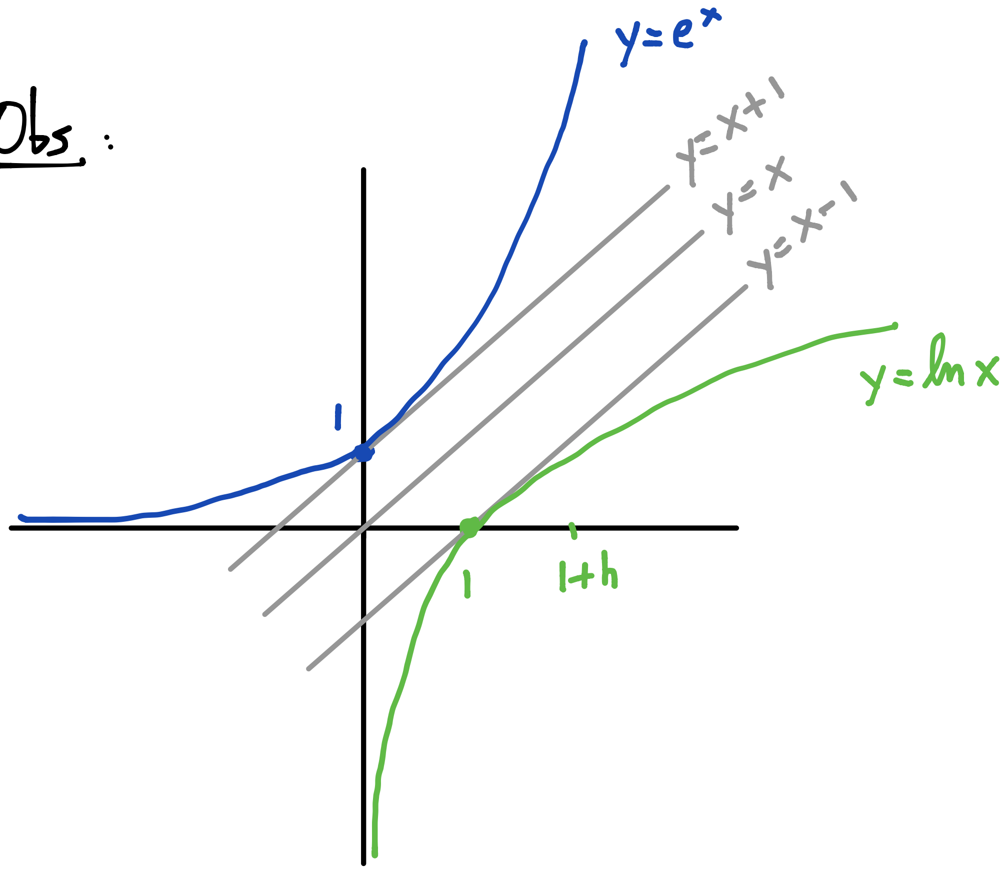
$$m = \frac{e^h - e^0}{h} = \frac{e^h - 1}{h} \simeq 1 \qquad h \simeq 0$$



$$m \simeq \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \, \frac{e^h - 1}{h} \simeq e^x \qquad h \simeq 0$$

Es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva $y=e^x$ coincide con el valor de la función.

• <u>Obs</u>:



Con el mismo argumento que en el caso de la exponencial:

$$\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} \simeq 1 \qquad h \simeq 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\ln(1+h)}{h} \simeq 1 \qquad h \simeq 0$$

$h=\frac{1}{n}$

$$\Rightarrow \quad n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \simeq 1 \qquad n \gg 1$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \simeq 1 \qquad m >> 1$$

$$\overset{\exp}{\Rightarrow} \quad \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \simeq e \qquad m >> 1$$

Luego,

$$e \simeq \left(1+\frac{1}{m}\right)^m, \quad m >> 1$$

• SUCESIONES

• **DEF**: Una sucesión es una función

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

• **Obs**: Escribimos $a_n = f(n)$, $n \geq 1$.

Esto nos permite entender una sucesión como una colección ordenada de números:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

• **Notación**: $(a_n)_{n\geq 1}$ $\{a_n : n \geq 1\}$

Obs: $(a_n)_{n\geq 1} = (a_j)_{j\geq 1} = (a_k)_{k\geq 1} = (a_i)_{i\geq 1}$

- **Ejemplos:**

i) Sucesión constante: $c, c, c, c, \dots$

$\rightarrow \; a_n = c, \; \forall n \geq 1$

ii) $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

$\rightarrow \; a_n = n, \; n \geq 1$

$3, 4, 5, 6, \dots$

$\rightarrow \; a_n = n + 2, \; n \geq 1$

iii) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

$\rightarrow \; a_n = 2n, \; n \geq 1$

iv) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

$\rightarrow \; a_n = 2n - 1, \; n \geq 1$

Obs: $b_n = 2n + 1, \; n \geq 0$

v) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

$\longrightarrow \quad a_m = \frac{1}{2^{m-1}} \quad , m \geq 1$

O también, $b_m = \frac{1}{2^m} \quad , m \geq 0$

vi) $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

$\longrightarrow \quad a_m = (-1)^m, \ m \geq 1$

$= \cos(m\pi)$

v) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{10}, \frac{7}{17}, \frac{9}{26}, \ldots$

$\longrightarrow \quad a_m = \frac{2m-1}{m^2+1}, \quad m \geq 1$

• <u>Obs</u>: $a_n = n,\ n \geq 1$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \underset{+1}{\curvearrowright} 5 \quad 6 \quad \dots$$

$a_1 = 1$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 1, \ n \geq 2 \end{cases}$$

Esto es un ejemplo de sucesión definida por <u>recurrencia</u>:

- punto de partida
- regla para pasar de un término al siguiente

El punto de partida es muy importante:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 2, \ n \geq 2 \end{cases} \qquad 1, 3, 5, 7, \dots$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 2, \ n \geq 2 \end{cases} \qquad 2, 4, 6, 8, \dots$$

• Ejemplo: $\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 3 \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Recordemos (guía de inducción):

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\rightarrow F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

• Recordemos que dos cantidades $a, b > 0$ están en proporción áurea si

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

Se define la sección áurea como

$$\varphi = \frac{a}{b}$$

Tomemos $b=1 \rightsquigarrow \varphi = a$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\varphi+1}{\varphi} \Rightarrow \varphi^2 = \varphi + 1$$

Resolvamos $x^2 - x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \begin{cases} \nearrow \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \searrow \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

- $\varphi^2 = \varphi + 1 \quad / \cdot \varphi^{n-2}$

$\rightarrow \varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$

$\rightarrow$ La sucesión $a_n = \varphi^n$ satisface la recursión de Fibonacci.

(También la sucesión $b_n = \psi^n$)

• $F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$ $\qquad \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

$2 < \sqrt{5} < 3 \rightarrow \quad 1 < \sqrt{5} - 1 < 2$

$\rightarrow |\psi| = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$

• $[x]$ = entero más cercano a x

$\lfloor x \rfloor$ = parte entera de x

Lema: $F_n = \left[\dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right]$

$F_n = \left\lfloor \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$

DEM:

$|\psi| < 1 \rightarrow |\psi|^n < 1 \rightarrow \dfrac{|\psi|^n}{\sqrt{5}} < \dfrac{1}{2}$

$\left| F_n - \dfrac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| -\dfrac{\psi^n}{\sqrt{5}} \right| < \dfrac{1}{2}$

→ F_n es el entero más cercano a $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$

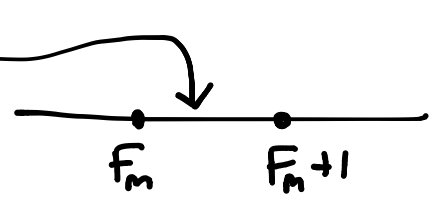
$$F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} - \frac{\psi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}$$

$$> \left(\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right) - 1$$

También: $F_n < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}$ ya que

$$-\frac{\psi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} < 0$$

$$\rightarrow \underbrace{\left(\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right)}\, - 1 < F_n < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}$$



$$\rightarrow F_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$\square$