Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Enero 2023

MAT1620 $\star$ Cálculo II

Pauta Interrogación 2

1. Obtenga un desarrollo en serie de potencias para la función

$$f(x) = \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}.$$

Solución: Sabemos (serie geométrica) que si $|x|<1$, entonces

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Podemos integrar esta serie para obtener que

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} + C$$

Evaluando en $x=0$ podemos determinar que la constante de integración es 0. Reemplazando x por x^2, obtenemos que

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+2}.$$

Finalmente, como $2n+2>0$ para todo $n \geq 0$, podemos dividir la serie por x para obtener

$$\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+1}.$$

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por la serie geométrica que representa a $\frac{1}{1+x}$. Si escribe algunos términos correctos seguidos de puntos suspensivos, la mitad del puntaje.
- (2 pts.) Por integrar la serie término a término. Si lo hace con puntos suspensivos, mitad de puntaje.
- (1 pto.) Por notar la necesidad de una constante de integración.
- (0.5 pts.) Por determinar que la constante de integración es 0.
- (0.5 pts.) Por asegurarse de que puede dividir la serie por x pues no tiene término constante.
- (1 pto.) Por escribir la serie final correctamente.

2. *a*) Determine si existe o no un vector $\mathbf{v}$ tal que

$$\langle 2, -1, 2\rangle \times \mathbf{v} = \langle 1, 3, 2\rangle$$

   b) Calcule el ángulo entre las rectas:

$$\ell_1(t) = \langle 5, -1, 2\rangle + t\langle 2, 3, 4\rangle$$
$$\ell_1(t) = \langle 5, -8, 0\rangle + t\langle -1, 2, -1\rangle$$

Solución:

a) Si calculamos el producto punto con $\langle 2, -1, 2\rangle$ a ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$\langle 2, -1, 2\rangle \cdot (\langle 2, -1, 2\rangle \times \mathbf{v}) = \langle 2, -1, 2\rangle \cdot \langle 1, 3, 2\rangle = 2 - 3 + 4 = 3$$

pero el lado izquierdo vale 0 pues el producto cruz de dos vectores es perpendicular a cada uno de ellos. Esta contradicción nos dice que no existe tal vector $\mathbf{v}$.

Asignación de Puntaje:

- (3 pts.) Por argumentar correctamente que el producto cruz debe ser perpendicular al vector $\langle 2, -1, 2\rangle$ pero que el producto punto al lado derecho no es 0.

b) Denotemos por θ el ángulo entre las rectas. Este es también el ángulo entre sus vectores directores. Por el teorema sobre el producto punto, sabemos que

$$\cos(\theta) = \frac{\langle 2,3,4\rangle \cdot \langle -1,2,-1\rangle}{|\langle 2,3,4\rangle||\langle -1,2,-1\rangle|} = 0$$

Concluimos que las rectas son perpendiculares.

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por calcular el producto punto entre los vectores directores.
- (2 pts.) Por argumentar que entonces las rectas son perpendiculares.

3. Considere los planos:

$$\Pi_1 : x + y - z = 1, \quad \Pi_2 : x + 2y + z = 1.$$

a) Encuentre la ecuación vectorial de la recta de intersección de los planos Π_1, Π_2

b) Encuentre la ecuación del plano que contiene a la recta encontrada en *a)* y que pasa por el punto $P = (3, 1, 1)$.

Solución:

a) Para encontrar la ecuación de la recta resolvemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Luego realizando operaciones elementales de filas tenemos que:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Si $z = t$ tendriamos $x = 3t + 1,\ y = -2t.$, de donde la recta buscada es:

$$L : \langle x, y, z\rangle = \langle 1, 0, 0\rangle + t\langle 3. - 2, 1\rangle.$$

Asignación de Puntaje:

- (1.5 pts.) Por resolver el sistema correctamente.
- (1.5 pts.) Por escribir correctamente la ecuación vectorial de la recta.

b) Para encontrar la ecuación del plano que contienen a $P = (3, 1, 1)$ necesitamos un vector normal al plano, para determinar dicho vector hagamos lo siguiente:

Consideremos $P_0 = (1, 0, 0)$ y formemos el vector

$$\overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = \langle 2, 1, 1 \rangle$$

y por lo tanto nuestro vector normal será:

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{P_0P} X \overrightarrow{d}$, donde este último es el vector director de la recta

Así

$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \langle 3, 1, -7 \rangle.$$

Finalmente la ecuación del plano es dada por:

$$\langle x - 3, y - 1, z - 1 \rangle \cdot \langle 3, 1, -7 \rangle = 0 \iff 3x + y - 7z - 3 = 0.$$

Asignación de Puntaje:

- (1.5 pts.) Por encontrar correctamente el vector normal al plano.
- (1.5 pts.) Por determinar correctamente la ecuación del plano.

4. *a*) Describa (puede ser con un esbozo) las curvas de nivel de la función:

$$g(x, y) = y^2 - 2x^2.$$

b) Determine si el límite existe, y en caso de existir determine su valor.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

c) Considere la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^a}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Determine los valores $a\in\mathbb{R}$ de modo que $f(x,y)$ sea continua en $\mathbb{R}^2$.

Solución:

a) Para encontrar las curvas de nivel debemos analizar:

$$y^2-2x^2=k, k\in\mathbb{R}.$$

Primero consideremos $k=0$

$$y^2=2x^2 \quad\Rightarrow\quad y=\pm\sqrt{2}x$$

Aquí obtenemos 2 rectas que pasan por el origen: $y=\sqrt{2}x$ e $y=-\sqrt{2}x$

Si $k>0$: podemos escribir nuestra ecuación de la forma:

$$\frac{y^2}{k}-\frac{2x^2}{k}=1$$

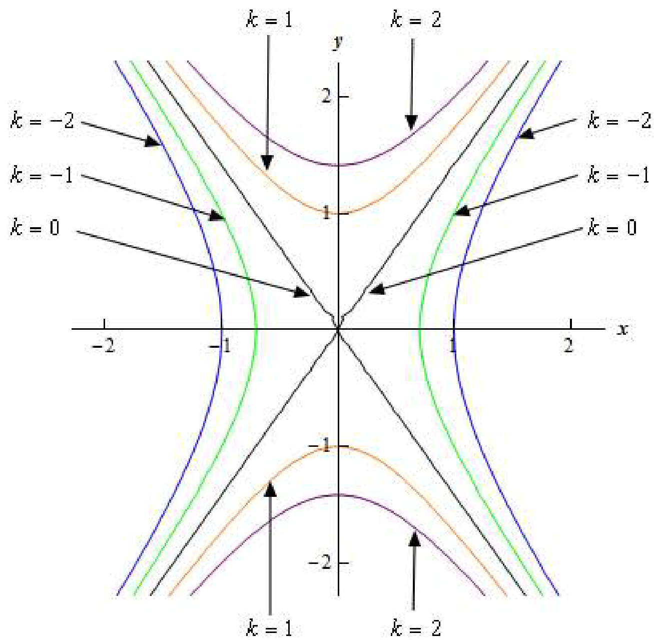
La cuál es una hipérbola que se abre hacia arriba y hacia abajo.

Si $k<0$: podemos escribir nuestra ecuación de la forma:

$$-\frac{2x^2}{k}+\frac{y^2}{k}=1$$

La cuál es una hipérbola que se abre hacia la derecha y hacia la izquierda.

En resumen las curvas de nivel de la función $g(x,y)$ son de la forma:



Asignación de Puntaje:

- (0.5 pts.) Por determinar correctamente las rectas cuando $k = 0$.
- (0.5 pts.) Por identificar correctamente las hipérbolas.
- (1 pto.) Por bosquejar correctamente las hipérbolas y las rectas.

b) Para calcular este límite consideremos algunos caminos:

Si consideramos $y = x$ obtenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 x}{x^6 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^6 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^4 + 1} = 0$$

Ahora consideremos $y = x^3$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 x^3}{x^6 + (x^3)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{2x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Puesto que para caminos distintos obtenemos límites distintos concluimos que el límite no existe.

Asignación de Puntaje:

- (0.75 pts.) Por calcular el limite en el camino $y = x$ (u otro similar).
- (0.75 pts.) Por calcular el limite en el camino $y = x^3$ (u otro similar).
- (0.5 pts.) Por concluir de los límites anteriores que el limite no existe.

c) Analicemos que ocurre con la función en $(x, y) = (0, 0)$.

Veamos que:

- $f(0,0) = 0$, por lo que f está definida en $(0,0)$.
- $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a}{x^2+y^2}.$$

  Para analizar este límite usemos coordenadas polares:
  $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$.
  De donde tenemos que:

  $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^a \cos^a\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^{a-2}\cos^a\theta.$$

  Este último límite existe y es igual a cero sí y solamente si $a > 2$.
- Considerando $a > 2$ tenemos que
  $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$
  Por lo tanto f será continua en $(0,0)$ siempre que $a > 2$.

Notemos que si $(x,y) \neq (0,0)$ y $a > 2$ la función $f(x,y)$ está bien definida y es continua.

Por lo tanto si $a > 2$ la función $f(x,y)$ será continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por concluir correctamente que el límite en $(0,0)$ existirá sí y sólo si $a > 2$.

- (0.5 pts.) Por afirmar que f será continua en $(0,0)$ para $a > 2$.
- (0.5 pts.) Por justificar que f es continua para $(x,y) \neq (0,0)$ y $a > 2$.