

**MAT1107 – Introducción al Cálculo**  
**Solución Interrogación N° 6**

1. a) Una comunidad de conejos ha sido liberada en una isla perdida. Se ha estimado que el nivel de crecimiento de dicha población está dado por:

$$N(t) = N_0 e^{0,1t}$$

siendo  $t$  medido en meses y  $N_0$  el número de conejos existentes al ser liberados en la isla. Determine el tiempo transcurrido para que la población se haya triplicado.

- b) Resuelva la ecuación:  $5^x - 25^x = -6$ .

**Solución.**

- a) Debemos hallar  $t$  de modo que

$$3N_0 = N_0 e^{0,1t} \implies 0,1t = \ln(3) \implies t = \frac{\ln(3)}{0,1}.$$

- b) Haciendo  $u = 5^x$  vemos que

$$5^x - 25^x = -6 \iff 5^x - (5^x)^2 = -6 \iff u - u^2 = -6 \iff u^2 - u - 6 = 0 \iff (u - 3)(u + 2) = 0$$

Entonces  $u = 3$  o  $u = -2$  o equivalentemente  $5^x = 3$  o  $5^x = -2$ . La solución  $5^x = -2$  es imposible, por lo tanto

$$5^x = 3 \iff x \ln(5) = \ln(3) \iff x = \frac{\ln(3)}{\ln(5)}.$$

**Puntaje Pregunta 1.**

- 3 puntos por obtener el valor de  $t$ .
- 3 puntos por obtener la solución  $x = \ln(3)/\ln(5)$ .

2. Sea  $\{a_n\}$  es una sucesión que satisface  $\sum_{k=1}^9 a_k = 50$ ,  $\sum_{k=1}^9 a_k^2 = 100$  y  $3 \sum_{k=1}^{10} a_k = 180$ .

a) Determine el valor de  $a_{10}$ .

[2 puntos]

b) Determine el conjunto

$$S = \left\{ c \in \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{10} (2a_k - c)^2 = 1050 \right\}.$$

[4 puntos]

**Solución.**

a) Notemos que

$$3 \sum_{k=1}^{10} a_k = 180 \implies \sum_{k=1}^{10} a_k = 60 \implies \sum_{k=1}^9 a_k + a_{10} = 60 \implies 50 + a_{10} = 60 \implies a_{10} = 10$$

b) Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (2a_k - c)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (4a_k^2 - 4a_k c + c^2) \\ &= 4 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 4c \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} c^2 \\ &= 4 \sum_{k=1}^9 a_k^2 + 4a_{10}^2 - 4c \sum_{k=1}^9 a_k - 4ca_{10} + 10c^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo la información obtenida vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (2a_k - c)^2 = 1050 &\iff 4 \sum_{k=1}^9 a_k^2 + 4a_{10}^2 - 4c \sum_{k=1}^9 a_k - 4ca_{10} + 10c^2 = 1050 \\ &\iff 4 \cdot (100) + 4(10)^2 - 4c(50) - 4c(10) + 10c^2 = 1050 \\ &\iff 800 - 240c + 10c^2 = 1050 \\ &\iff c^2 - 24c - 25 = 0 \\ &\iff (c - 25)(c + 1) = 0 \\ &\iff c = -1 \vee c = 25 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto es  $S = \{-1, 25\}$ .

**Puntaje Pregunta 2.**

■ 2 puntos por determinar el valor de  $a_{10}$

■ 2 puntos por obtener la igualdad  $\sum_{k=1}^{10} (2a_k - c)^2 = 4 \sum_{k=1}^9 a_k^2 + 4a_{10}^2 - 4c \sum_{k=1}^9 a_k - 4ca_{10} + 10c^2$

■ 1 puntos por obtener que la igualdad que define al conjunto  $S$  es equivalente con  $c^2 - 24c - 25 = 0$ .

■ 1 punto por obtener el conjunto  $S$ .