

## Ejercicios 4: EYP1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle    Ayudante: Camilo I. González

**Ejercicio 1:** Sea  $X \sim N(0, 1)$ .

a) Encuentre la fda, la fdp y la fgm de  $Y = |X|$ .

i) Encuentre la fda, la fdp y la fgm de  $Y$

ii) Calcule  $E(Y)$  y  $\text{Var}(Y)$ .

iii) Muestre que  $E(X^{2k}) = E(Y^{2k})$  para todo  $k \geq 1$

b) Sea  $Y = \exp(X)$ .

i) Encuentre la fdp de  $Y$ . Existe la fgm de  $Y$ ?

ii) Calcule  $E(Y)$  y  $\text{Var}(Y)$

iii) Cómo distribuye  $\log Y$ ? Calcule  $P(1 < Y < e^2)$

iv) Como distribuye  $Z = 1/Y$  ?

c) Sea  $Y = \max\{0, X\} = \begin{cases} X, & \text{si } X > 0, \\ 0 & \text{si } X \leq 0. \end{cases}$

i) Encuentre la fda de  $Y$ .

ii) Calcule  $E(Y)$  y  $\text{Var}(Y)$

c) Sea  $Y = I_{(0, \infty)}(X) = \begin{cases} 1, & \text{si } X > 0, \\ 0 & \text{si } X \leq 0. \end{cases}$

i) Encuentre la fmp y la fmg de  $Y$ .

ii) Calcule  $E(Y)$  y  $\text{Var}(Y)$

**Ejercicio 2:** Sea  $X \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ , es decir,  $X$  es una va continua con fdp dada por  $f_X(x) = (1 + x^2)^{-1}/\pi$  para  $-\infty < x < \infty$

i) Existe la fmg de  $Y$ ? Discuta.

ii) Cómo distribuye  $1/X$ ?

iii) Encuentre la fdp de  $Y = |X|$

iv) Encuentre la fdp de  $Y = X/\sqrt{1 + X^2}$  e indique su distribución. Existen los momentos de  $Y$ ? Discuta.

**Ejercicio 3:** Sea  $X$  una va con fmp

$$f_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^x, & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{eoc,} \end{cases}$$

donde  $0 < p < 1$ .

(a) Obtenga la fgm de  $X$ ,  $E(X)$  y  $\text{Var}(X)$ .

(b) Calcule  $P(X > 6 | X > 3)$ .

(c) Sea  $Y = X+1$ . Asumiendo  $p = 1/2$ , calcule  $P(Y \text{ sea par})$ ;  $P(Y \geq 5)$ ,  $P(Y \text{ sea divisible por } 3)$ , e indique una mediana para  $Y$ .

**Ejercicio 4:** Sea  $X$  una va continua con fdp dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } -1 < x \leq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Obtenga la dfp de  $Y = -X$ .

(b) Muestre que  $X$  y  $Y$  tienen los mismos momentos pares.

(c) Obtenga la fdp de  $Y = X^3$  e indique su distribución.

(d) Obtenga  $E(X^3)$  y  $\text{Var}(X^3)$ .

**Ejercicio 5:** Sea  $X$  una va continua con fda dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde  $\lambda > 0$ .

(a) Encuentre la fgm de  $X$ .

(b) Obtenga la dfp de  $Y = \lambda X$ .

(c) Asumiendo  $\lambda = 1$ , obtenga la fdp de  $Y = e^{-X}$ , e indique su media y su varianza.

**Ejercicio 6:** Para medir la velocidad del aire, se usa un tubo (conocido como el tubo estático de Pilot) que permite medir la diferencia de presión. Esta diferencia de presión está dada por  $P = \frac{1}{2}dV^2$ , donde  $d$  es la densidad del aire y  $V$  es la velocidad del viento (kph) una va con fdp dada por:

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{si } 10 < v < 20, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Encuentre la fdp de  $P$ .

(b) Encuentre la media y la varianza de  $P$ .