Funciones reales

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

29 de Marzo de 2023

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Funciones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Definición.

Una función $f : A \to B$ consta de tres partes:

1. un conjunto A llamado el **dominio** de la función (o el conjunto donde la función está definida),
2. un conjunto B llamado el **codominio** de la función (o el conjunto donde la función toma valores) y
3. una regla que permite asociar de modo bien determinado, a cada elemento $x \in A$, un único elemento $f(x) \in B$, llamado el valor que la función asume en x.

En símbolos, $f : A \to B$ es función si y solo si

$$(\forall\, x \in A)(\exists! y \in B)(y = f(x))\,.$$

Funciones

Observación

- $y = f(x)$ se llama **imagen** de x por f o variable dependiente.
- x se llama **variable** de la función o variable independiente.

Definición.

Dos funciones $f : A \to B$ y $g : A' \to B'$ son iguales si y solo si $A = A'$, $B = B'$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

O sea que dos funciones son iguales cuando tienen el mismo dominio, el mismo recorrido y la misma regla de asignación.

EJEMPLO 1 Consideremos las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \quad \text{y} \quad g(x) = x + 2\,.$$

Aunque a primera vista ambas funciones nos parecen iguales, esto no es así. Ya que no poseen el mismo dominio.

Funciones

Definición.

El gráfico de una función $f : A \to B$ es el subconjunto $G(f)$ del producto cartesiano $A \times B$ formado por los pares ordenados $(x, f(x))$ donde $x \in A$ es arbitrario. Es decir,

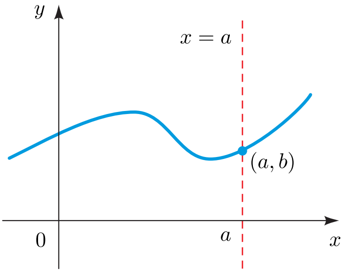
$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\} .$$

Se sigue de la definición de igualdad de funciones que dos funciones son iguales si y solo si poseen el mismo gráfico.
El gráfico es una curva que está contenida en $\mathbb{R}^2$.

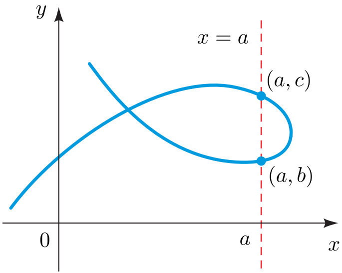
Observación Una curva en el plano de coordenadas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.

EJEMPLO 2 Gráfica de curvas que no son funciones

.



Gráfica de una función



No es la gráfica de una función

Funciones

Observación Una función puede especificarse dando sólo la ley $y = f(x)$ que permite calcular la imagen de x. Cuando esto suceda, entenderemos que el dominio de la función es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la ley es aplicable para calcular $f(x)$, es decir

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \in \mathbb{R}\}\,.$$

EJEMPLO 3

1. Si $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ entonces

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \infty[\,.$$

2. Si $f(x) = \sqrt{x}$ entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty[$.

EJEMPLO 4 Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x^2-1}}\,.$$

Encontrar el dominio de la función real f.

Solución Tenemos que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \Longleftrightarrow f(x) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{2x-3}{x^2-1} \geqslant 0 \ \wedge \ (x^2 - 1 \neq 0)$$

Note que $x^2 - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \pm 1$. Resolviendo la inecuación racional se ve que

$$\frac{2x-3}{x^2-1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \in]-1, 1[\cup [3/2, \infty[\,.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(f) =]-1, 1[\cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$.

Funciones

Observación Una función puede especificarse dando la ley $y = f(x)$ que permite calcular la imagen de x y su dominio sin especificar el conjunto donde la función toma valores, es decir sin indicar su codominio. Cuando esto suceda, entenderemos que el codominio de la función es el menor subconjunto B de $\mathbb{R}$ en donde se cumpla que para todo $y \in B$ exista $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Es decir, asumiremos que el codominio es su recorrido.

Definición. (Recorrido)

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Definimos el recorrido de f como el conjunto

$$\mathrm{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{existe } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tal que } y = f(x)\} .$$

EJEMPLO 5 Sea $f : [1, \infty[\to B$, $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$. Hallar el recorrido de f.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned} y \in \mathrm{Rec}(f) &\iff \text{existe } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tal que } f(x) = y \\ &\iff \text{existe } x,\ x \geqslant 1 \text{ tal que } \sqrt{x-1} + 3 = y \end{aligned}$$

De $\sqrt{x-1} + 3 = y$ se obtiene que $x = (y-3)^2 + 1$. Vemos que $x \geqslant 1$, por lo tanto $x \in \mathrm{Dom}(f)$, además este x debe ser tal que $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f((y-3)^2+1) = \sqrt{(y-3)^2 + 1 - 1} + 3 = \sqrt{(y-3)^2} + 3 \\ &= |y-3| + 3 \end{aligned}$$

para que esto resulte igual a y, debe ser necesariamente $y \geqslant 3$. Luego, $\mathrm{Rec}(f) = [3, \infty[$.

EJEMPLO 6 Determine el recorrido de la función $f : \mathbb{R} \to B$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned}
y \in \mathrm{Rec}(f) &\iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = \frac{x}{x^2+1} \\
&\iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \\
&\iff 1 - 4y^2 \geqslant 0 \wedge y \neq 0 \\
&\iff -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \wedge y \neq 0
\end{aligned}$$

Notemos que $f(0) = 0$ por lo tanto $0 \in \mathrm{Rec}(f)$, por lo tanto

$$B = \mathrm{Rec}(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] .$$