Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2015

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución a la Interrogación N° 3

1. [**Problema 4.4.28 del texto**]
Use vectores de coordenadas para probar la independencia lineal del conjunto de polinomios $\{1-2t^2-t^3, t+2t^3, 1+t-2t^2\}$.

Primera Solución:

Los vectores de coordenaas de estos polinomios (con respecto a la base $\{1,t,t^2,t^3\}$ de $\mathbb{P}_2$) son, respectivamente, $(1,0,-2,-1)$, $(0,1,0,2)$ y $(1,1,-2,0)$.

Tomando estos vectores como las columnas de A, y escalonando A, llegamos a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Claramente, las columnas de A son l.i., por lo que los vectores de coordenadas originales son l.i., lo que a su vez implica que los polinomios son l.i.

Segunda Solución:

Los vectores de coordenaas de estos polinomios (con respecto a la base $\{1,t,t^2,t^3\}$ de $\mathbb{P}_2$) son, respectivamente, $(1,0,-2,-1)$, $(0,1,0,2)$ y $(1,1,-2,0)$.

Tomando estos vectores como las filas de A, y escalonando A, llegamos a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Claramente, las filas de A son l.i., por lo que los vectores de coordenadas originales son l.i., lo que a su vez implica que los polinomios son l.i.

Puntaje:

- Por determinar los vectores de coordenadas correspondientes a los polinomios dados, 1 punto.
- Por formar una matriz que tenga como filas (o columnas) a dichos vectores, 1,5 puntos.
- Por escalonar correctamente la matriz, 1,5 puntos.
- Por mostrar que esta tiene 3 filas (o 3 columnas) independientes, 1 punto.
- Por concluir (o mencionar de antemano) que la independencia de las filas implica la independencia de los vectores, y por lo tanto de los polinomios, 1 punto.

A lo anterior se suma el punto base.

Tercera Solución:

Los vectores de coordenaas de estos polinomios (con respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_2$) son, respectivamente, $(1, 0, -2, -1)$, $(0, 1, 0, 2)$ y $(1, 1, -2, 0)$.

Planteamos la ecuación

$$x_1(1, 0, -2, -1) + x_2(0, 1, 0, 2) + x_3(1, 1, -2, 0) = (0, 0, 0, 0),$$

o equivalentemente

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x_1 & & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & & -2x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +2x_2 & & = & 0 \\ \hline \end{array}\right|$$

Para demostrar que los tres vectores son l.i. debemos probar que el sistema solo tiene la solución trivial, o sea, tiene solución única. Pero esto es equivalente a que no haya variables libres. Esto se hace escalonando la matriz (la misma que en la primera solución).

Puntaje:

- Por determinar los vectores de coordenadas correspondientes a los polinomios dados, 1 punto.
- Por plantear la ecuación correspondiente a una combinación lineal nula de los vectores, 1 punto.
- Por planter el sistema equivalente a la ecuación anterior, 0,5 puntos.
- Por escalonar la matriz y mostrar que esta tiene 3 columnas pivote, 1,5 puntos.
- Por mencionar que esto significa que el sistema tiene solución única, 1 punto.
- Por concluir (o mencionar de antemano) que la unicidad de la solución implica la independencia de los vectores, y por lo tanto de los polinomios, 1 punto.

A lo anterior se suma el punto base.

2. [**Problema 4.6.2 del texto**]

La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & 6 & 0 & -3 \\ 3 & 9 & 3 & 6 & -3 \\ 3 & 9 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ es equivalente por filas a $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Sin calcular ninguna base, determine las dimensiones de $\operatorname{Nul} A$, $\operatorname{Col} A$, $\operatorname{Col} A^T$ y $\operatorname{Nul} A^T$.

Solución:

La matriz R es una matriz escalonada equivalente por filas a A, de donde determinamos que en A hay 3 columnas pivote (la 1^a, la 3^a y la 5^a), por lo que $\dim \operatorname{Col} A = 3$.

La dimensión de $\operatorname{Nul} A$ es la cantidad de variables libres de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, la que en este caso es 2 (x_2 y x_4).

Por estar R escalonada, sus filas no nulas forman una base del espacio fila de B, que es el mismo que el espacio fila de A, y que es igual al espacio $\operatorname{Col} A^T$.

Así, $\dim \operatorname{Col} A^T = 3$.

Finalmente, $\dim \operatorname{Nul} A^T$ es el número de variables libres en la ecuación $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$, la que en este caso es 1 (ya que $\dim \operatorname{Col} A^T = 3$, A^T tiene 3 columnas pivote y por lo tanto 1 columna correspondiente a una variable libre).

Puntaje:

Para cada uno de los espacios dados:

- Por una *buena* justificación, 1 punto.
  (si la justificación es poco convincente, se dan 0,5 puntos por ella).
- Por dar correctamente la dimensión del espacio, 0,5 puntos SI HAY AL MENOS UN INTENTO DE JUSTIFICACIÓN.
  La dimensión correcta del espacio, sin ninguna justificación, recibe 0 puntos.

A lo anterior se suma el punto base.

3. [**Problema 5.3.18 del texto**]
Diagonalice la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución:

El polinomio característico de A es

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda)^2.$$

Así, los valores propios de A son 3 (con multiplicidad 2) y 2 (con multiplicidad 1).

Para determinar los vectores propios, debemos encontrar las soluciones de $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $(A-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Para $\lambda = 2$, calculamos $A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, la que tras ser escalonada queda $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, y vemos que la solución de $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $x_3 = 0$, $x_1 = -x_2 - 2x_3 = -x_2$, por lo que la dimensión del espacio propio correspondiente al valor propio $\lambda = 2$ es 1, ya que hay solo una variable libre, a saber x_2. Asignando el valor 1 a dicha variable libre obtenemos el vector propio $(-1, 1, 0)$, por lo que una base de dicho espacio propio es $\{(-1, 1, 0)\}$.

Para $\lambda = 3$, calculamos $A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, la que tras ser escalonada queda $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, de donde la solución de $(A-3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $x_1 = -2x_3$, por lo que la dimensión del espacio propio correspondiente al valor propio $\lambda = 3$ es 2, ya que hay dos variables libres. Para determinar una base de dicho espacio propio, asignamos los valores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ a (x_2, x_3), obteniendo los vectores $(0, 1, 0)$ y $(-2, 0, 1)$.

Con los vectores propios como columnas (agrupadas por valor propio) generamos la matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz D es la matriz que en la diagonal tiene los valores propios, *en el orden correspondiente a los vectores propios que son columnas de* A:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Puntaje:

- Por calcular el polinomio característico de A: 1 punto.
- Por determinar los valores propios de A: 0,5 puntos.
- Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = 2$: 1 punto.
- Por encontrar dos vectores propios independientes, correspondientes a $\lambda = 3$: 2 puntos.
- Por escribir la matriz P: 1 punto.
- Por escribir A como PDP^{-1}: 0,5 puntos.

A lo anterior se suma el punto base.

Note que No es necesario calcular P^{-1}.

4. **[Problema 5.2.18 del texto]**

La matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ tiene como valor propio a $\lambda = 4$, con multiplicidad algebraica 2.

Determine el valor que debe tener h para que el espacio propio para $\lambda = 4$ tenga dimensión 2.

Solución:

El espacio propio para un valor propio λ de una matriz de $n \times n$ es $\operatorname{Nul}(A - \lambda I)$, y su dimensión es $n - \dim \operatorname{Col}(A - \lambda I)$. En este caso, $\lambda = 4$, y

$$A - \lambda I = A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Para que $\dim \operatorname{Nul}(A-4I) = 2$ necesitamos que $4 - \dim \operatorname{Col}(A-4I) = 2$, o sea, que $\dim \operatorname{Col}(A-4I) = 2$.

Escalonando $A - 4I$, obtenemos

$$A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & h+3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & h+3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Si $h = -3$, $A - 4I \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ donde la segunda y tercera columnas son linealmente dependientes, por lo que $\dim \operatorname{Col}(A-4I) = 2$.

Por otro lado, si $h + 3 \neq 0$, $A - 4I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & h+3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & h+3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ donde hay tres columnas independientes (la segunda, la tercera y la cuarta), y por lo tanto $\dim \operatorname{Col}(A-4I) = 3$.

Así, el valor buscado es $h = -3$.

Puntaje:

- Por escribir la matriz $A - 4I$, 1 punto.
- Por mencionar que se requiere que $\dim \operatorname{Col}(A-4I) = 2$ (o, equivalentemente, que $\dim \operatorname{Fil}(A-4I) = 2$), 1 punto.
- Por escalonar correctamente $A - 4I$, 2 puntos.
- Por concluir que si $h = -3$ la matriz tiene dos filas (o dos columnas) l.i., que es lo que se desea, 1 punto.
- Por mencionar que ningún valor de $h \neq -3$ cumple lo deseado, 1 punto.

A lo anterior se suma el punto base.

5. **[Problema 5.4.20 del texto]**
Sean A y B dos matrices cuadradas. Demuestre que si A es similar a B entonces A^2 es similar a B^2.

Solución:

Si A es similar a B, entonces existe una matriz invertible P tal que $A = PBP^{-1}$, por lo que

$$\begin{aligned} A^2 &= (PBP^{-1})^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB(P^{-1}P)BP^{-1}) \\ &= (PB)I(BP^{-1}) = (PB)(BP^{-1}) = PB^2P^{-1}, \end{aligned}$$

de donde A^2 es similar a B^2.

Puntaje:

- Por indicar que $A \sim B$ significa que existe P invertible tal que $A = PBP^{-1}$, 2 puntos.
- Por escribir A^2 como producto $PBP^{-1}PBP^{-1}$, 2 puntos.
- Por simplificar lo anterior y llegar a B^2, 2 puntos.

A lo anterior se suma el punto base.

6. **[Problema 5.5.3 del texto]**

Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$, actuando sobre $\mathbb{C}^2$. Determine los valores propios de A y una base (en $\mathbb{C}^2$) para cada espacio propio.

Solución:

Para determinar los valores propios de A, debemos resolver la ecuación $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, o sea, $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$, de donde los valores propios son $\lambda_1 = 3+2i$ y $\lambda_2 = 3-2i$.

Para encontrar los vectores propios, debemos encontrar soluciones no triviales de los sistemas de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 5-(3+2i) & 1 \\ -8 & 1-(3+2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} 5-(3-2i) & 1 \\ -8 & 1-(3-2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sea

$$\begin{bmatrix} 2-2i & 1 \\ -8 & -2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} 2+2i & 1 \\ -8 & -2+2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando las matrices, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2-2i & 1 \\ -8 & -2-2i \end{bmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\sim} \begin{bmatrix} -8 & -2-2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix} \underset{f_1 \leftarrow \frac{-1}{8} \cdot f_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix} \underset{f_2 \leftarrow f_2 + (-2+2i) \cdot f_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2+2i & 1 \\ -8 & -2+2i \end{bmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\sim} \begin{bmatrix} -8 & -2+2i \\ 2+2i & 1 \end{bmatrix} \underset{f_1 \leftarrow \frac{-1}{8} \cdot f_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \\ 2+2i & 1 \end{bmatrix} \underset{f_2 \leftarrow f_2 + (-2-2i) \cdot f_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las soluciones de estos sistemas son, respectivamente, $x_1 = -\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)x_2$, $x_1 = -\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i\right)x_2$.

Así, una solución no trivial de cada uno es, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Estos dos son vectores propios, correspondientes a cada uno de los valores propios de la matriz, o sea, dos bases de los espacios propios son

$$\mathcal{B}_{3+2i} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_{3-2i} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Amplificando estos vectores por -4 (para eliminar las fracciones) se encuentran las bases

$$\mathcal{B}'_{3+2i} = \left\{ \begin{bmatrix} 1+i \\ -4 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}'_{3-2i} = \left\{ \begin{bmatrix} 1-i \\ -4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Puntaje:

- Por calcular el polinomio característico de A, 1 punto.
- Por encontrar los valores propios de A, 1 punto.
- Por encontrar el vector propio correspondiente a $\lambda = 3+2i$, 1,5 puntos.
- Por encontrar el vector propio correspondiente a $\lambda = 3-2i$, 1,5 puntos.
- Por indicar que cada vector propio forma por sí solo la base de su espacio propio, 1 punto.

A lo anterior se suma el punto base.

7. En $\mathbb{P}_2$, si $\mathcal{B} = \{-x, 1+x^2, x+x^2\}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es tal que para todo $p \in \mathbb{P}_2$, $P[p]_{\mathcal{B}} = [p]_{\mathcal{C}}$, determine la base $\mathcal{C}$.

Ayuda:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Representemos por $\mathcal{E}$ a la base canónica $\{1, t, t^2\}$. Buscamos las coordenadas de los vectores de $\mathcal{C}$ en la base $\mathcal{E}$, o sea, $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = [[\mathbf{c}_1]_{\mathcal{E}}\ [\mathbf{c}_2]_{\mathcal{E}}\ [\mathbf{c}_3]_{\mathcal{E}}]$.

Ya que para todo $p \in \mathbb{P}_2$ se tiene $P[p]_{\mathcal{B}} = [p]_{\mathcal{C}}$, la matriz P es $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}}\ [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{C}}]$. Así,

$$P^{-1} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = [[\mathbf{c}_1]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{c}_2]_{\mathcal{B}}\ [\mathbf{c}_3]_{\mathcal{B}}]\,,$$

por lo que $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\ \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\ P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Así, los elementos de la base $\mathcal{C}$ tienen por vectores de coordenadas (en la base $\mathcal{E}$) respectivamente a $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, o sea,

$$\mathcal{C} = \left\{-3x+2, x^2+3x-1, x-1\right\}.$$

Puntaje:

- Por identificar P como $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$, 1 punto.
- Por indicar que P^{-1} es $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$, 1 punto.
- Por indicar que la matriz que tiene los vectores (canónicos) de coordenadas de los elementos de $\mathcal{C}$ es $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$, 1 punto.
- Por calcular $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ como $\underset{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\ \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$, 2 puntos.
- Por dar en forma explícita los vectores de $\mathcal{C}$, 1 punto.

A lo anterior se suma el punto base.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) **[Problema 4.5.29c del texto]**
   Si V es un espacio de dimensión p, entonces existe un conjunto linealmente independiente de $p+1$ vectores de V que genera V.

   b) **[Problema 5.1.21b del texto]**
   Una matriz A es no invertible si y solo si 0 es un valor propio de A.

Solución:

a) **Falso**. Si V es un espacio de dimensión p, entonces todo conjunto l.i. de p vectores es una base de V, por lo que genera V.

Si hubiera un conjunto l.i. S de $p+1$ vectores en V, eliminando cualquier vector —digamos $\mathbf{u}$— de S, se obtiene un conjunto $S - \{\mathbf{u}\}$ de p vectores que es l.i. y —por lo anterior— genera V.

En particular, $\mathbf{u}$ puede ser expresado como combinación lineal de los elementos de $S - \{\mathbf{u}\}$, y por lo tanto el conjunto $S = (S - \{\mathbf{u}\}) \cup \{\mathbf{u}\}$ es linealmente dependiente, lo que contradice la hipótesis de que S es l.i.

b) **Verdadero**. Si A es no invertible, entonces existe $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{v} = \mathbf{0} = 0\mathbf{v}$, por lo que $\mathbf{v}$ es un vector propio de A con valor propio 0.

Recíprocamente, si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A con valor propio 0 entonces $A\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, por lo que A no es invertible.

Puntaje:

a)
- Por indicar (o dar a entender) alguno de los significados de $\dim V = p$ (que toda base tiene dimensión p, o que todo conjunto de p vectores l.i. genera V, etc.) 1 punto.
- Por usar ese significado de $\dim V = p$ para probar lo pedido, 2 puntos.

b)
- Por cada dirección de la demostración, 1,5 puntos.

A lo anterior se suma el punto base.