

# EYP 1027 Métodos Probabilísticos

## Clase 16

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística  
Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2020



# Contenido I

- 1 Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos
  - Caso biunívoco
  - Ejemplos
  - Ejemplo: Convolución continua
  - Caso no-biunívoco
  - Ejemplos importantes
  
- 2 Transformación de variables aleatorias independientes
  - Ejemplos

## Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

Suponga que  $(X_1, \dots, X_n)$  es un vector aleatorio continuo, y considere una transformación  $(Y_1, \dots, Y_n) = (g_1(X_1, \dots, X_n), \dots, g_n(X_1, \dots, X_n))$  de modo que  $(Y_1, \dots, Y_n)$  también sea un vector aleatorio continuo.

Si  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$  es la fdp de  $(X_1, \dots, X_n)$ , suponga que se desea determinar la fdp  $f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n)$  de  $(Y_1, \dots, Y_n)$ .

Sea  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) > 0\}$  el soporte de  $(X_1, \dots, X_n)$ . Escribiendo  $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ , donde  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$ , entonces el recorrido de  $(Y_1, \dots, Y_n)$  queda determinado por,

$$\mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \text{ para algún } \mathbf{x} \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Suponga que  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$  son regiones abiertas, y que se distinguen dos casos según si la transformación  $\mathbf{g} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  establece o no una correspondencia biunívoca (biyección) entre  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$ .

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Caso biunívoco

Suponga que  $\mathbf{g} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$  es una biyección entre  $\mathcal{X}$  y  $\mathcal{Y}$ , donde

$$\mathbf{g}(x_1, \dots, x_n) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n(x_1, \dots, x_n)) = (y_1, \dots, y_n).$$

Entonces, existe una función inversa  $\mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1}$  en  $\mathcal{Y}$ , donde

$$x_1 = h_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n = h_n(y_1, \dots, y_n).$$

Suponga también que existen las derivadas

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial h_i(y_1, \dots, y_n)}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

y que ellas sean continuas en  $\mathcal{Y}$ .

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

Defina el *Jacobiano* (de la transformación)  $J$  como el determinante:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

el cual es una función de  $(y_1, \dots, y_n)$ . Suponga, finalmente, que  $J \neq 0$  para todo  $(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{Y}$ .

## Teorema 1.1

Sobre las condiciones dadas arriba, la fdp conjunta de  $Y_1, \dots, Y_n$  es,

$$\begin{aligned} & f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) \\ &= \begin{cases} |J| f_{X_1, \dots, X_n}(h_1(y_1, \dots, y_n), \dots, h_n(y_1, \dots, y_n)), & \text{si } (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{Y}, \\ 0, & \text{si } (y_1, \dots, y_n) \notin \mathcal{Y}. \end{cases} \end{aligned}$$

## Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

*Idea de la demostración:* Sea  $\mathbf{h}(B) = \mathbf{g}^{-1}(B) = \{\mathbf{x} : \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in B\}$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$ .  
Entonces,

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{Y}}(B) &= P(\mathbf{Y} \in B) \\ &= P(\mathbf{g}(\mathbf{X}) \in B) \\ &= P(\mathbf{X} \in \mathbf{g}^{-1}(B)) \\ &= P(\mathbf{X} \in \mathbf{h}(B)) \\ &= \int_{\mathbf{h}(B)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \implies \mathbf{x} = \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{h}(\mathbf{y})) \\ &= \int_B f_{\mathbf{X}}(\mathbf{h}(\mathbf{y})) |J| d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in \mathbf{h}(B) \implies \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \in B), \end{aligned}$$

de acuerdo con la formula para cambio de variables en integrales múltiples.

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

El resultado se obtiene al aplicar el siguiente lema:

**Lema:** Sea  $\mathbf{Y}$  un vector aleatoria continuo de dimensión  $n$ . Si para cada  $B \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$P_{\mathbf{Y}}(B) = P(\mathbf{Y} \in B) = \int_B f(\mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

entonces  $f(\mathbf{y}) = f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ , es decir, la fdp de  $\mathbf{Y}$ .

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

Formalización para  $n = 2$ :

## Teorema 1.2

Sea  $(X_1, X_2)$  un vector aleatorio continuo con fdp conjunta  $f_{(X_1, X_2)}$ . Sean,  $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) : f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ . Suponga que,

- i)  $y_1 = g_1(x_1, x_2)$  e  $y_2 = g_2(x_1, x_2)$  definen una transformación uno a uno de  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y} = \{(y_1, y_2) : y_1 = g_1(x_1, x_2), y_2 = g_2(x_1, x_2) \text{ para algún } (x_1, x_2) \in \mathcal{X}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ .
- ii) Las derivadas parciales de la transformación inversa  $x_1 = h_1(y_1, y_2)$  y  $x_2 = h_2(y_1, y_2)$  son continuas sobre  $\mathcal{Y}$ .
- iii) El jacobiano de la transformación

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \text{ es } \neq 0 \text{ para } (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}.$$

Entonces la fdp conjunta de  $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$  y  $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$ , está dada por,

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} |J| f_{X_1, X_2}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)), & \text{si } (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}, \\ 0, & \text{si } (y_1, y_2) \notin \mathcal{Y}. \end{cases}$$



# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Ejemplos

Por ejemplo, para  $n = 2$ , la transformación,

$$y_1 = x_1 + x_2 \longrightarrow g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$y_2 = x_1 - x_2 \longrightarrow g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

es uno-a-uno sobre todo  $\mathbb{R}^2$ . La transformación inversa es,

$$x_1 = (y_1 + y_2)/2 \longrightarrow h_1(x_1, x_2) = (y_1 + y_2)/2$$

$$x_2 = (y_1 - y_2)/2 \longrightarrow h_2(x_1, x_2) = (y_1 - y_2)/2,$$

y el *Jacobiano de la transformación* es,

$$J = \det \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial y_1 & \partial x_1 / \partial y_2 \\ \partial x_2 / \partial y_1 & \partial x_2 / \partial y_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -1/2$$

$\implies |J| = +1/2$ . Así,

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{X_1, X_2}((y_1 + y_2)/2, (y_1 - y_2)/2), & \text{si } (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Aplicaciones:

1) Sean  $X_1, X_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \exp(1)$ , es decir,

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} e^{-x_1}e^{-x_2}, & \text{si } x_1 > 0, x_2 > 0, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Queremos la fdp de  $(Y_1, Y_2) = (X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ . Note que  $x_1, x_2 > 0 \implies y_1 = x_1 + x_2 > 0$ . Luego,

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y_1+y_2}{2}}e^{-\frac{y_1-y_2}{2}}, & \text{si } \frac{y_1+y_2}{2} > 0, \frac{y_1-y_2}{2} > 0, \\ 0, & \text{eoc,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y_1}, & \text{si } y_2 > y_1, y_2 < -y_1, y_1 > 0, \\ 0, & \text{eoc,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-y_1}, & \text{si } |y_2| < y_1, y_1 > 0, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases} \end{aligned}$$

## Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

2) Sean  $X_1, X_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, 1)$ , es decir,

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Entonces, la fdp de  $(Y_1, Y_2) = (X_1 + X_2, X_1 - X_2)$  es,

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } 0 < \frac{y_1 + y_2}{2} < 1, 0 < \frac{y_1 - y_2}{2} < 1, \\ 0, & \text{eoc,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } -y_1 < y_2 < 2 - y_1, 0 < y_1 < 1, \\ & -(2 - y_1) < y_2 < y_1, 1 < y_1 < 2, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases} \end{aligned}$$

**Tarea:** En 1) y 2), bosqueje los recorridos  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ , y determine las distribuciones marginales de  $Y_1$  e  $Y_2$ .

## Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

3) Sean  $X_1, X_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ , es decir, con fdp's marginales

$$f_{X_1}(x) = f_{X_2}(x) = \phi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

y fdp conjunta,

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \phi(x_1)\phi(x_2) = (2\pi)^{-1} e^{-(x_1^2 + x_2^2)/2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces,

$$Y_1 = X_1 + X_2 \sim N(0, 2), \quad f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{y_1}{\sqrt{2}}\right), \quad y_1 \in \mathbb{R},$$

$$Y_2 = X_1 - X_2 \sim N(0, 2), \quad f_{Y_2}(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi\left(\frac{y_2}{\sqrt{2}}\right), \quad y_2 \in \mathbb{R}.$$

Bosqueje los recorridos en este caso. Obtenga la fdp conjunta de  $Y_1$  e  $Y_2$ . Son  $Y_1$  e  $Y_2$  variables aleatorias independientes? Justifique.

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Ejemplo: Convolución continua

### Ejemplo 1.1

Sean  $X_1$  e  $X_2$  variables aleatorias continuas independientes. Se desea la fdp de  $X_1 + X_2$ .

*Paso 1:* Sean  $Y_1 = X_1 + X_2$  (variable de interés) e  $Y_2 = X_2$  (variable auxiliar arbitraria). Entonces,  $y_1 = g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$  e  $y_2 = g_2(x_1, x_2) = x_2$ , con inversos  $x_1 = h_1(y_1, y_2) = y_1 - y_2$  y  $x_2 = h_2(y_1, y_2) = y_2$ . Luego,

$$J = \begin{pmatrix} \partial x_1 / \partial y_1 & \partial x_1 / \partial y_2 \\ \partial x_2 / \partial y_1 & \partial x_2 / \partial y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

y

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(y_1 - y_2, y_2) = f_{X_1}(y_1 - y_2) f_{X_2}(y_2).$$

*Paso 2:*  $f_{Y_1}(y_1) = \int_{\{y_2: (y_1 - y_2, y_2) \in \mathcal{X}\}} f_{X_1}(y_1 - y_2) f_{X_2}(y_2) dy_2$ .

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

Por ejemplo, si  $Y = X_1 + X_2$ , donde  $X_1, X_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$ , entonces

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \begin{cases} \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda(y-z+z)} dz & \text{si } y > 0, \\ 0, & \text{eoc,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0, \\ 0, & \text{eoc,} \end{cases} \end{aligned}$$

es decir,  $Y = X_1 + X_2 \sim \text{Gama}(2, \lambda)$

**Extensión:** Si  $X_i \sim \text{Gama}(\alpha_i, \lambda)$ ,  $i = 1, \dots, n$  son va's independientes, entonces  $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gama}(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \lambda)$ .

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Caso no-biunívoco

En muchos casos donde  $\mathbf{g} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$  no es uno-a-uno, también podemos determinar la distribución de  $\mathbf{Y} = \mathbf{g}(\mathbf{X})$  mediante el método del jacobiano descrito anteriormente.

Para hacer esto, es suficiente que  $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)$  sea uno-a-uno cuando se restringe a cada una de  $k$  regiones (abiertas) disjuntas cuya unión contenga el valor de  $\mathbf{X}$  con probabilidad 1.

A continuación, se ilustra el procedimiento en el caso bivariado.

## Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

Considere el caso bivariado con  $n = 2$ ; la extensión para  $n > 2$  es similar.

Si la transformación no es uno-a-uno, sea  $\{B_0, B_1, \dots, B_k\}$  una partición de  $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) : f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) > 0\}$ .

Suponga que:

- a) El conjunto  $B_0$  (posiblemente vacío) satisface  $P((X_1, X_2) \in B_0) = 0$ .
- b) Para cada  $i = 1, \dots, k$ , la transformación

$$(y_1, y_2) = (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)),$$

es uno-a-uno desde  $B_i$  sobre  $\mathcal{Y}$ .

Entonces, para cada  $i = 1, \dots, k$ , se existe la transformación inversa desde  $\mathcal{Y}$  a  $B_i$ ; denote la  $i$ -ésima transformación inversa por,

$$(x_{1i}, x_{2i}) = (h_{1i}(y_1, y_2), h_{2i}(y_1, y_2)) \quad i = 1, \dots, k.$$



# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

Sea  $J_i$  el jacobiano calculado desde la  $i$ -ésima inversa, es decir,

$$J_i = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{1i}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{1i}}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_{2i}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{2i}}{\partial y_2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, k.$$

Suponga, fialmente, que estos jacobianos no son cero en  $\mathcal{Y}$ .

Entonces, bajo las condiciones anteriores, la fdp de  $(Y_1, Y_2)$  esta dada por,

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) \\ = \begin{cases} \sum_{i=1}^k |J_i| f_{X_1, X_2}(h_{1i}(y_1, y_2), h_{2i}(y_1, y_2)), & \text{si } (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}, \\ 0, & \text{si } (y_1, y_2) \notin \mathcal{Y}. \end{cases} \end{aligned}$$

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Ejemplo 1.2

Sean  $X_1, X_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ . Considere la transformación

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_2} \quad \text{y} \quad Y_2 = |X_2|.$$

Esta es una transformación desde  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  a  $\mathcal{Y} = \{(y_1, y_2) : y_2 > 0\} \subset \mathbb{R}^2$  que no es uno-a-uno, ya que los puntos  $(x_1, x_2)$  y  $(-x_1, -x_2)$  de  $\mathcal{X}$  son ambos mapeado en el mismo punto  $(y_1, y_2)$  de  $\mathcal{Y}$ .

Pero si nos restringimos a los valores positivos o negativos de  $x_2$ , entonces la transformación restringida es uno-a-uno en cada caso.

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

Sean  $B_0 = \{(x_1, x_2) : x_2 = 0\}$ ,  $B_1 = \{(x_1, x_2) : x_2 > 0\}$  y  $B_2 = \{(x_1, x_2) : x_2 < 0\}$ .

Entonces,  $B_0$ ,  $B_1$  y  $B_2$  forman una partición de  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  tal que

a)  $P((X_1, X_2) \in B_0) = P(X_2 = 0) = 0$

b)  $\mathcal{Y} = \{(y_1, y_2) : y_2 > 0\}$  es la imagen tanto de  $B_1$  como de  $B_2$  bajo la transformación  $(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)) = (x_1/x_2, |x_2|)$ .

## Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

Además, las transformaciones inversas de  $\mathcal{Y}$  a  $B_1$  e  $\mathcal{Y}$  a  $B_2$  están dadas por

$$\mathbf{h}_1 : \mathcal{Y} \rightarrow B_1 \implies x_{11} = h_{11}(y_1, y_2) = y_1 y_2, \quad x_{21} = h_{21}(y_1, y_2) = y_2,$$

$$\mathbf{h}_2 : \mathcal{Y} \rightarrow B_1 \implies x_{12} = h_{12}(y_1, y_2) = -y_1 y_2, \quad x_{22} = h_{22}(y_1, y_2) = -y_2.$$

Note que el primer inverso produce valores positivos de  $x_2$  mientras que el segundo inverso da valores negativos de  $x_2$ .

Note también que los jacobianos de las dos transformaciones inversas son  $|J_1| = |J_2| = y_2$  para todo  $(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}$ .

## Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

Luego, usando que  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \phi(x_1)\phi(x_2) = (2\pi)^{-1}e^{-x_1^2/2}e^{-x_2^2/2}$ , para  $-\infty < x_1 < \infty$  y  $-\infty < x_2 < \infty$ , se obtiene que,

$$\begin{aligned} f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) &= \begin{cases} \frac{|y_2|}{2\pi} e^{-(y_1 y_2)^2/2} e^{-y_2^2/2} + \frac{|y_2|}{2\pi} e^{-(-y_1 y_2)^2/2} e^{-(-y_2)^2/2}, \\ \quad \text{si } -\infty < y_1 < \infty, \quad 0 < y_2 < \infty, \\ 0, \end{cases} \quad \text{eoc,} \\ &= \begin{cases} \frac{y_2}{\pi} e^{-(1+y_1^2)y_2^2/2}, & \text{si } -\infty < y_1 < \infty, \quad 0 < y_2 < \infty \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases} \end{aligned}$$

## Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

La fdp marginal de  $Y_1$  puede calcularse como,

$$\begin{aligned}f_{Y_1}(y_1) &= \int_0^\infty \frac{y_2}{\pi} e^{-(1+y_1^2)y_2^2/2} dy_2 \\&= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-(1+y_1^2)z/2} dz \\&= \frac{1}{\pi(1+y_1^2)}, \quad -\infty < y_1 < \infty.\end{aligned}$$

De aquí, se concluye que la razón de dos variables aleatorias normales estándar independientes, es una variable aleatoria con distribución de Cauchy.

Ademas, es fácil ver que  $f_{Y_2}(y_2) = 2\phi(y_2)$  para  $y_2 > 0$ ; es decir, si  $X_2 \sim N(0, 1)$  entonces  $Y_2 = |X_2| \sim HN(0, 1)$  (half-normal).

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Ejemplos importantes

### Ejemplo 1.3

Asumiendo nuevamente que  $X_1, X_2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ , pruebe que

$$Y_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \sim N(0, 1/2)$$

$$Y_2 = \frac{(X_1 - X_2)^2}{2} \sim \chi_1^2 := \text{Gama}(1/2, 1/2),$$

y que  $Y_1$  e  $Y_2$  son variables aleatorias independientes.

## Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

**Extensión:** Sean  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ . Entonces, la media muestral,

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

y la varianza muestral,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

son variables aleatorias independientes, con

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{y} \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

para cada  $n \geq 2$ .



# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Ejemplo 1.4

Suponga que  $X_1 \sim N(0, 1)$  y  $X_2 \sim \chi_\nu^2$  ( $\nu > 0$ ) son independientes. Entonces, la distribución de la variable aleatoria

$$Y = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/\nu}},$$

se llama  $t$  (de Student) con  $\nu$  grados de libertad, y se denota como  $Y \sim t_\nu := t(0, 1, \nu)$ .

**Tarea:** Pruebe que

$$f_Y(y) = \frac{\Gamma[(\nu + 1)/2]}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{y^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad -\infty < y < \infty.$$

**Nota:**  $P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y f_Y(z)dz$  se encuentra tabulada para varios valores de  $y$  y  $\nu$ .

## Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

**Aplicación:** Sean  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$ . Vimos que  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  y  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  son variables aleatorias independientes, con

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad \text{y} \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Es decir,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad \text{y} \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2,$$

y son independientes. Luego,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)/\sigma}{\sqrt{(n-1)S^2/(n-1)\sigma^2}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}.$$

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Ejemplo 1.5

Sean  $X_1 \sim \chi_r^2$  y  $X_2 \sim \chi_s^2$  ( $r, s > 0$ ) variables aleatorias independientes. La distribución de la variable aleatoria

$$Y = \frac{X_1/r}{X_2/s},$$

se llama  $F$  (de Fisher) con  $r$  y  $s$  grados de libertad, y se denota como  $Y \sim F_{r,s}$ . Note que  $Y^{-1} \sim F_{s,r}$ .

**Tarea:** Pruebe que

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma[(r+s)/2]}{\Gamma(r/2)\Gamma(s/2)} \left(\frac{r}{s}\right)^{r/2} y^{(r/2)-1} \left(1 + \frac{r}{s} y\right)^{-(r+s)/2}, & \text{si } y > 0, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

**Nota:**  $P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y f_Y(z) dz$  se encuentra tabulada para varios valores de  $y, r$  y  $s$ .

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

**Aplicación:** Suponga que

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu_X, \sigma^2)$$

e

$$Y_1, \dots, Y_m \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu_Y, \sigma^2),$$

donde los  $X_i$ 's son independientes de los  $Y_i$ 's. Entonces,

$$(n-1)S_X^2/\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/\sigma^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

y

$$(m-1)S_Y^2/\sigma^2 = \sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2/\sigma^2 \sim \chi_{m-1}^2,$$

y son variables aleatorias independientes. Luego,

$$\frac{S_X^2}{S_Y^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/(n-1)}{\sum_{i=1}^m (Y_i - \bar{Y})^2/(m-1)} \sim F_{n-1, m-1}.$$

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Ejemplo 1.6

Sean  $X_1 \sim \text{Gama}(\alpha_1, \lambda)$  y  $X_2 \sim \text{Gama}(\alpha_2, \lambda)$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \lambda > 0$ ) variables aleatorias independientes. La distribución de la variable aleatoria

$$Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2},$$

se llama beta con parámetros  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , y se denota como  $Y \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)$ .

**Tarea:** Pruebe que

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} y^{\alpha_1 - 1} (1 - y)^{\alpha_2 - 1}, & \text{si } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

**Tarea:** Pruebe que  $Y_1 = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$  e  $Y_2 = X_1 + X_2$  son independientes.

## Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

**Extensión:** Si  $X_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{Gama}(\alpha_i, \lambda)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , entonces,

$$\frac{X_1 + \dots + X_m}{X_1 + \dots + X_m + X_{m+1} + \dots + X_n} \sim \text{Beta}(\alpha_1 + \dots + \alpha_m, \alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n),$$

donde hay que recordar que  $\sum_{i=1}^k X_i \sim \text{Gama}\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i, \lambda\right)$  para cada  $k = 1, \dots, n$ .

**Nota:** La función beta se define como,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

# Transformación de variables aleatorias independientes

**Nota:** Si  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes (arbitrarias), entonces funciones de subvectores disjuntos de los  $X_i$ 's también son independientes. Por ejemplo,  $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ ,  $Y_2 = (X_5 - X_4)^2$ ,  $Y_3 = \max\{X_6, X_7\}$  e  $Y_4 = e^{-Y_8}$ , son variables aleatorias independientes.

Para ilustrar el procedimiento, se probará el siguiente caso especial mediante la fda conjunta.

## Teorema 2.1

Sean  $X_1, \dots, X_n$  variables aleatorias independientes. Para cada  $i = 1, \dots, n$ , suponga que  $g_i(x_i)$  es una función solo de  $x_i$ . Entonces, las transformaciones  $Y_1 = g_1(X_1), \dots, Y_n = g_n(X_n)$  también son variables aleatorias independientes.

# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Demostración 2.1

La fda conjunta de  $Y_1 = g_1(X_1), \dots, Y_n = g_n(X_n)$  es

$$\begin{aligned} F_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) &= P(Y_1 \leq y_1, \dots, Y_n \leq y_n) \\ &= P\{g_1(X_1) \leq y_1, \dots, g_n(X_n) \leq y_n\} \\ &= P\{g_1(X_1) \in (-\infty, y_1], \dots, g_n(X_n) \in (-\infty, y_n]\} \\ &= P\{X_1 \in g_1^{-1}((-\infty, y_1]), \dots, X_n \in g_n^{-1}((-\infty, y_n])\} \\ &= P\{X_1 \in g_1^{-1}((-\infty, y_1])\} \times \dots \times P\{X_n \in g_n^{-1}((-\infty, y_n])\} \\ &= P\{g_1(X_1) \in (-\infty, y_1]\} \times \dots \times P\{g_n(X_n) \in (-\infty, y_n]\} \\ &= P\{g_1(X_1) \leq y_1\} \times \dots \times P\{g_n(X_n) \leq y_n\} \\ &= P\{Y_1 \leq y_1\} \times \dots \times P\{Y_n \leq y_n\} \\ &= F_{Y_1}(y_1) \times \dots \times F_{Y_n}(y_n). \end{aligned}$$



# Distribución de funciones de vectores aleatorios continuos

## Ejemplos

### Ejemplo 2.1

Sean  $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1)$ . Entonces:

1)  $X_1^2, \dots, X_n^2 \stackrel{\text{iid}}{\sim} \chi_1^2$ ; lo que permite probar también (tarea) que  $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$ .

2)  $I_{(0,\infty)}(X_1), \dots, I_{(0,\infty)}(X_n) \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Ber}(1/2)$ , donde

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \text{ ocurre,} \\ 0 & \text{si } x \in A^c \text{ ocurre.} \end{cases}$$

3)  $\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_n) \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, 1)$ , donde  $\Phi(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , es la fda de la distribución  $N(0, 1)$ .