



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PROFESOR: REINALDO ARELLANO
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ
PRIMER SEMESTRE 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Ayudantía 9

1. Sea X una v.a discreta con fmp dada por

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{\ln(x)}}{[\ln(x)]!}, \quad x = 1, e, e^2, \dots$$

- (a) Muestre que $Y = \ln(X) \sim \text{Poisson}(\lambda)$
 - (b) Calcule $\mathbb{E}(\ln(X))$ y $\text{Var}(\ln(X))$
 - (c) Encuentre $P(\ln(X) = k | \ln(X) > 0)$
2. La velocidad de un gas noble a una temperatura determinada suele seguir una distribución de Maxwell-Boltzmann, la que es bastante recurrente en mecánica estadística. Esta distribución adopta la siguiente forma

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 \left(\sqrt{\frac{m}{kT}} \right)^3 e^{-\frac{mx^2}{2kT}}, \quad x > 0$$

donde m es la masa de la partícula, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura termodinámica.

- (a) Calcule $\mathbb{E}(X^n)$
- (b) Muestre que

$$M_X(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) (2a^2)^{n/2}$$

$$\text{con } a = \sqrt{kT/m}$$

- (c) Calcule $\mathbb{E}(X)$ usando los dos resultados anteriores.

Hint: Si $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, entonces

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0$$

con $\Gamma(z)$ la función gamma.

3. Si $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$M_Z(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Suponga que X, Y tienen las siguientes funciones generadoras de momentos

- $M_X(t) = e^{2t+4t^2}$
- $M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

¿Que puede afirmar sobre la distribución de X y Y ?

4. Sea X una v.a con fdp dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{3}, & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{9}(1+x), & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{3}e^{-(x-1)}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Verifique que $f_X(x)$ efectivamente es una fdp.
- Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}(|X|)$
- Calcule $M_{X+b}(t)$
- Calcule $Var(2X + 1)$ usando la función generadora de momentos
- Propuesto:** Encuentre $F_X(x)$

5. Sea X una v.a con fda dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{4}, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{3-x}, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- ¿Que tipo de v.a es X ?
- Calcule $Var(3X)$
- Calcule $\mathbb{E}(e^{atX})$
- Propuesto:** Calcule $\mathbb{E}(\ln(X - 3) \cdot I(X \geq 3))$