PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO SEMESTRE DE 2016

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 1

1. Calcular los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|x+1|(1-\cos(x))}{x^2}$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x-10} - \sqrt{x^2-2x+1}\right)$

   Solución

   a) $$\lim_{x\to 0} \frac{|x+1|(1-\cos(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{|x+1|(1-\cos^2(x))}{x^2(1+\cos(x))}$$
   $$= \lim_{x\to 0} \frac{|x+1|\operatorname{sen}^2(x)}{x^2(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0} |x+1|\left(\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)^2 \frac{1}{(1+\cos(x))} = \frac{1}{2}$$

   b) $$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x-10} - \sqrt{x^2-2x+1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-11}{\left(\sqrt{x^2+x-10} + \sqrt{x^2-2x+1}\right)}$$
   $$= \lim_{x\to\infty} \frac{3-\dfrac{11}{x}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{10}{x^2}} + \sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\right)} = \frac{3}{2}$$

2. Determinar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que la función f definida por:

   $$f(x) = \begin{cases} ax^2+b, & \text{si } x<1 \\ c+b & \text{si } x=1 \\ 6x^3+a, & \text{si } x>1 \end{cases}$$

   sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

   Solución
   Dado que f es derivable en $(-\infty,\, 1)$ y en $(1,\, \infty)$ por ser polinomios, entonces solo falta imponer que sea derivable en $x=1$.
   Para ello se requieren dos condiciones:
   (I) f continua en $x=1$ es decir

   $$\lim_{x\to 1^{-1}} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = c+b$$

   Es decir
   $$a+b = 6+a = c+b$$

Por lo tanto tenemos que

$$a = c\, b = 6$$

Además
(II) requerimos que:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Esto nos dá la condición

$$a = 9$$

Por lo tanto:

$$a \,=\, c \,= 9 \,\text{y}\, b = \, 6$$

3. Encuentre los puntos de la curva con ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 8(x^2 - y^2)$, en los cuales las rectas tangentes son horizontales.

Solución
Derivando implícitamente ambos lados de la ecuación, obtenemos:

$$2(x^2 + y^2)\Big(2x + 2y\frac{dy}{dx}\Big) \;=\; 8\Big(2x - 2y\frac{dy}{dx}\Big)$$

Dado que buscamos tangentes horizontales, debemos tener que

$$\frac{dy}{dx} \;=\; 0$$

Por lo tanto, nos queda:

$$4x(x^2 + y^2) \;=\; 16x$$

Dado que $x \neq 0$ porque al acercarnos al punto $(0, 0)$ tenemos que $\dfrac{dy}{dx} \neq 0$. es decir

$$x^2 + y^2 \;=\; 4$$

Reemplazando en la ecuación de la curva, se obtiene

$$x^2 - y^2 \;=\; 2$$

Y con estas dos ecuaciones nos queda

$$x^2 \;=\; 3, y^2 \;=\; 1$$

Lo que nos dá los sigientes cuatro puntos como solución:

$$\Big(\sqrt{3},\, 1\Big),\, \Big(\sqrt{3},\, -1\Big),\, \Big(-\sqrt{3},\, 1\Big),\, \Big(-\sqrt{3},\, -1\Big).$$

4. a) Un carabinero está parado a 30m de distancia de una carretera recta. Con su radar portátil determina que un auto que se está desplazando por la carretera, acercándose a el carabinero, en el momento en que está a 50m de él, la distancia disminuye a una tasa de variación instatánea de 70Km/h. ¿Cuál es la velocidad del auto (en Km/h)?

Solución

Sean $x = x(t)$ y $z = z(t)$ las distancias como en el dibujo:

Por Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + (30m)^2$$

Derivando con respecto al tiempo t:

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

Es decir

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z}{x}\frac{dz}{dt}$$

Reemplazando los valores dados:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{50m}{40m}(-70km/h) = -87,5km/h$$

b) Encuentre la derivada de la función

$$f(x) = (x\ln(x))^{\cos(x)}$$

Solución

Sea $y = f(x)$, entonces

$$\ln(y) \;=\; \cos(x)\ln(x\ln(x))$$

Por lo tanto, derivando ambos lados de la ecuación, se obtiene:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} \;=\; -\operatorname{sen}(x)(\ln(x\ln(x))) + \cos(x)\frac{(\ln(x)+1)}{x\ln(x)}$$

Con lo cual:

$$f'(x) = (x\ln(x))^{\cos(x)}\left(\frac{\cos(x)(\ln(x)+1)}{x\ln(x)} - \operatorname{sen}(x)(\ln(x\ln(x)))\right)$$