Zoología funcionaria

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

18 de Abril de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Definición. (Función Inyectiva)

Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es **inyectiva** si

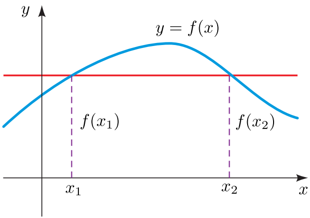
$$(\forall\, x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

Vemos que esta definición es equivalente a

$$(\forall\, x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)\,.$$

Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Si una recta horizontal cruza la gráfica de f en más de un punto, entonces vemos que hay números $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es inyectiva.



Por lo tanto tenemos el siguiente método geométrico para determinar si una función es inyectiva.

Proposición. (Test de la recta horizontal)

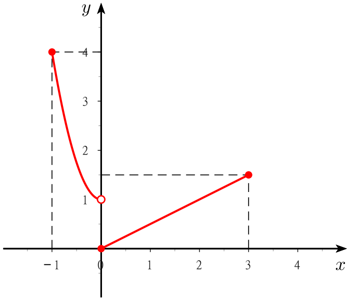
Una función es inyectiva si y solo si no hay recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

EJEMPLO 1 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ \dfrac{x}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

estudiar la inyectividad de f.

Solución El gráfico de la función se muestra a continuación



Se ve que la función no es inyectiva por el test de la recta horizontal.

Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

EJEMPLO 2 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$. Estudiar la inyectividad de f.

Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Definición (Función Sobreyectiva)

Sea $f : A \to B$ una función. Diremos que f es **sobreyectiva** si $\mathrm{Rec}(f) = B$ o equivalentemente

$$(\forall\, y \in B)(\exists\, x \in A)(f(x) = y)\,.$$

En otras palabras, todo elemento del conjunto de llegada admite al menos una pre-imagen. En términos de ecuación, f es sobreyectiva si para todo $y \in B$, la ecuación $f(x) = y$ admite una solución en A. En algunos textos se usa el término epiyectivas para funciones que son sobreyectivas.

Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

EJEMPLO 3 Averigue si la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ es sobreyectiva.

Solución En clases anteriores hemos mostrado que $\text{Rec}(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Vemos que el conjunto de llegada $B = \mathbb{R}$ no coincide con el recorrido de f. Luego f no es sobreyectiva.

Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

EJEMPLO 4 Sea $f : \mathbb{R} \to [-2, \infty[$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 7$. ¿Es f sobreyectiva?

Solución Vamos a calcular el recorrido de la función f.

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Rec}(f) & \iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 - 6x + 7 = y \\ & \iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x^2 - 6x + (7 - y) = 0 \\ & \iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(7 - y)}}{2} \\ & \iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = 3 \pm \sqrt{2 + y} \\ & \iff 2 + y \geqslant 0 \\ & \iff y \geqslant -2 \end{aligned}$$

por lo tanto $\operatorname{Rec}(f) = [-2, \infty[= B$. Por lo tanto f es sobreyectiva.

Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Observaciones

1. Si f no es inyectiva siempre es posible tornar a f inyectiva restringiendo el dominio.
2. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función. Entonces, podemos tornar a f sobreyectiva cambiando su conjunto de llegada $f : A \to B$ donde $B = \text{Rec}(f)$.

Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Definición (Función biyectiva)

Sean $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ y $f : X \to Y$ una función. Diremos que f es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva, o equivalentemente

$$(\forall\, y \in Y)(\exists!\, x \in X)(f(x) = y)$$

O en términos de ecuación para todo $b \in Y$ la ecuación $f(x) = b$ tiene una única solución en A.

Inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

EJEMPLO 5 La función $f :]-\infty, 1] \to]-\infty, 2]$ definida por $f(x) = -x^2 + 4x - 1$, ¿es biyectiva?

EJEMPLO 6 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\sqrt{x^2 + 4}$. ¿Es f biyectiva?