PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Solución Ayudantía 6

1. (a) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un modelo de probabilidad. Considere

$$\begin{aligned}
\Omega &= (0,1)\\
\mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, (0,1), (0,1/2), [2/3,1), [1/2,1), (0,2/3)\}\\
\mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, (0,1), (0,1/4), [1/4,1)\}
\end{aligned}$$

¿Son $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ $\sigma-$algebra de subconjuntos de $\mathcal{F}$?
Se deben corroborar las siguientes propiedades

i. $\Omega \in \mathcal{F}$
ii. Si $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
iii. Si $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

Vamos con $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, (0,1), (0,1/2), [2/3,1), [1/2,1), (0,2/3)\}$.

i. Claramente $\Omega \in \mathcal{F}_1$, pues corresponde al segundo elemento.
ii.

$$\begin{aligned}
A = \emptyset \in \mathcal{F}_1 &\Rightarrow A^c = \Omega \quad \checkmark \quad (\Omega \in \mathcal{F}_1)\\
A = (0,1/2) \in \mathcal{F}_1 &\Rightarrow A^c = [1/2,1) \quad \checkmark \quad ([1/2,1) \in \mathcal{F}_1)\\
A = [2/3,1) \in \mathcal{F}_1 &\Rightarrow A^c = (0,2/3) \quad \checkmark \quad ((0,2/3) \in \mathcal{F}_1)
\end{aligned}$$

Se verifica la segunda propiedad

iii. Ahora podemos tomar $A_1 = (0,1/2)$ y $A_2 = (2/3,1)$, y notar que

$$A_1 \cup A_2 = (0,1/2) \cup (2/3,1) \notin \mathcal{F}_1$$

Luego, $\mathcal{F}_1$ no es una $\sigma-$algebra de subconjunto de $\mathcal{F}$.
Por otro lado, $\mathcal{F}_2$ si lo es, pues tiene la forma

$$\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$$

(b) Sea $\Omega = (0,\infty)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ y $f(x) : (0,\infty) \to [0,\infty)$. Defina la medida de probabilidad P como

$$P(B) = \frac{\displaystyle\int_B f(x)dx}{\displaystyle\int_\Omega f(x)dx}, \quad B \in \mathcal{B}$$

Demuestre que P es efectivamente una medida de probabilidad.

Para esto debemos corroborar los tres axiomas de Kolmogorov.

- $P(\Omega) = 1$

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= \frac{\displaystyle\int_\Omega f(x)dx}{\displaystyle\int_\Omega f(x)dx} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- $P(B) \geq 0$
  Claramente se cumple, pues estamos integrando funciones positivas.

- $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$
  Sea $A_1, A_2, ...$ disjuntos dos a dos, entonces

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \frac{\displaystyle\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f(x)dx}{\displaystyle\int_\Omega f(x)dx} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{A_1} f(x)dx + \int_{A_2} f(x)dx + \int_{A_2} f(x)dx + \cdots}{\displaystyle\int_\Omega f(x)dx} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{A_1} f(x)dx}{\displaystyle\int_\Omega f(x)dx} + \frac{\displaystyle\int_{A_2} f(x)dx}{\displaystyle\int_\Omega f(x)dx} + \frac{\displaystyle\int_{A_3} f(x)dx}{\displaystyle\int_\Omega f(x)dx} + \cdots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \\ \Rightarrow \ P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \end{aligned}$$

2. Considere el siguiente experimento. Se dispone de dos dados. El dado A tiene 4 caras rojas y 2 blancas, mientras que el dado B tiene 2 caras rojas y 4 blancas. Se lanza una moneda honesta, y si sale cara, el experimento continua sólo con el dado A, mientras que si sale sello, se continua sólo con el dado B.

   (a) Pruebe que la probabilidad de obtener cara roja en cualquier lanzamiento del dado es 1/2
   Definamos los siguientes eventos

$$\begin{aligned} C &= \text{sale cara roja} \\ H &= \text{sale cara en la moneda} \\ H^c &= \text{sale sello en la moneda} \end{aligned}$$

   Anotemos los datos

   - Dado A
     - 4 caras rojas
     - 2 caras blancas
   - Dadp B
     - 2 caras rojas
     - 4 caras blancas

   Note que $P(H) = P(H^c) = 1/2$. Se pide $P(C)$, el dado a lanzar depende del resultado que salga en la moneda, por lo que podemos usar probabilidad total condicionando según lo que salga en la moneda, entonces

$$P(C) = P(C|H)P(H) + P(C|H^c)P(H^c) \tag{1}$$

   Encontremos las probabilidades correspondientes.

   - $P(C|H)$
     Esto corresponde a la probabilidad de obtener cara roja en el dado A, pues salió cara en la moneda, y hay 4 caras rojas en el dado A, entonces

$$P(C|H) = 4/6$$

   - $P(C|H^c)$
     Esto corresponde a la probabilidad de obtener cara roja en el dado B, pues salió sello en la moneda, y hay 2 caras rojas en el dado B, entonces

$$P(C|H^c) = 2/6$$

   Finalmente reemplazamos en (1)

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C|H)P(H) + P(C|H^c)P(H^c) \\ &= \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

   Probando así lo pedido.

(b) Suponga que se lanza el dado seleccionado n veces, independientemente. Si todos ellos resultaron en cara roja, ¿cual es la probabilidad de que el dado seleccionado haya sido el A?

Definamos los siguientes eventos

$$\begin{aligned} C_i &= \text{sale cara roja en el dado en el } i\text{−esimo lanzamiento}, \quad i = 1, 2, ..., n \\ H &= \text{sale el dado } A \text{ (sale cara en la moneda)} \\ H^c &= \text{sale el dado } B \text{ (sale sello en la moneda)} \end{aligned}$$

Nos piden

$$P(H|C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1)$$

pues queremos que en los n lanzamientos salga cara roja. Entonces

$$P(H|C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1) = \frac{P(C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1|H)P(H)}{P(C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1|H)P(H) + P(C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1|H^c)P(H^c)}$$

Encontremos las probabilidades correspondientes.

- $P(C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1|H)$
  Corresponde a que salga cara roja en n lanzamientos del dado A, pues este dado resultó seleccionado. Hay 4 caras rojas, y como los lanzamientos son independientes, tenemos que

$$\begin{aligned} P(C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1|H) &= \frac{4}{6} \times \cdots \times \frac{4}{6} \times \frac{4}{6} \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^n \end{aligned}$$

- $P(C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1|H^c)$
  Corresponde a que salga cara roja en n lanzamientos del dado B, pues este dado resultó seleccionado. Hay 2 caras rojas, y como los lanzamientos son independientes, tenemos que

$$\begin{aligned} P(C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1|H) &= \frac{2}{6} \times \cdots \times \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} \\ &= \left(\frac{2}{6}\right)^n \end{aligned}$$

Reemplazamos todo

$$\begin{aligned} P(H|C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1) &= \frac{P(C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1|H)P(H)}{P(C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1|H)P(H) + P(C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1|H^c)P(H^c)} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{6}\right)^n \cdot 1/2}{\left(\frac{4}{6}\right)^n \cdot 1/2 + \left(\frac{2}{6}\right)^n \cdot 1/2} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{6}\right)^n}{\left(\frac{4}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n} \\ &= \frac{2^n}{2^n + 1} \end{aligned}$$

(c) Si, como en (a), los primeros n lanzamientos del dado resultaron en cara roja, ¿cual es la probabilidad de que el siguiente también resulte en cara roja?

Definamos los siguientes eventos

$$\begin{aligned} C_i &= \text{sale cara roja en el dado}, \quad i = 1, 2, ..., n \\ H &= \text{sale el dado } A \text{ (sale cara en la moneda)} \\ H^c &= \text{sale el dado } B \text{ (sale sello en la moneda)} \end{aligned}$$

Se pide

$$P(D_{n+1}|D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1)$$

Note que intuitivamente podríamos llegar y aplicar Bayes, peeero no es conveniente, vamos hacer lo siguiente

$$P(D_{n+1}|D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1) = \frac{P(D_{n+1} \cap D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1)}{P(D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1)}$$

Esto ultimo se puede calcular condicionando segun el dado que salió, entonces

$$\begin{aligned} P(D_{n+1} \cap D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1) &= P(D_{n+1} \cap D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1|H)P(H)+ \\ &\quad P(D_{n+1} \cap D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1|H^c)P(H^c) \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^{n+1} \cdot 1/2 + \left(\frac{2}{6}\right)^{n+1} \cdot 1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1) &= P(D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1|H)P(H)+ \\ &\quad P(D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1|H^c)P(H^c) \\ &= \left(\frac{4}{6}\right)^{n} \cdot 1/2 + \left(\frac{2}{6}\right)^{n} \cdot 1/2 \end{aligned}$$

Reemplazamos todo

$$\begin{aligned} P(D_{n+1}|D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1) &= \frac{P(D_{n+1} \cap D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1)}{P(D_n \cap \cdots \cap D_2 \cap D_1)} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{6}\right)^{n+1} \cdot 1/2 + \left(\frac{2}{6}\right)^{n+1} \cdot 1/2}{\left(\frac{4}{6}\right)^{n} \cdot 1/2 + \left(\frac{2}{6}\right)^{n} \cdot 1/2} \\ &= \frac{2^{n+1}+1}{3(2^n+1)} \end{aligned}$$

(d) Suponga que en (b), una persona decide lanzar el dado una gran cantidad de veces ($n \to ?$). ¿Que sucede con la probabilidad obtenida?

Si se lanza el dado una gran cantidad de veces, entonces $n \to \infty$, por lo que debemos tomar el limite a al probabilidad.

$$\begin{aligned} P(H|C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1) &= \frac{2^n}{2^n+1} \\ \lim_{n\to\infty} P(H|C_n \cap \cdots \cap C_2 \cap C_1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego, en el limite, la probabilidad de que el dado lanzado haya sido el A, dado que salio rojo en una gran cantidad de lanzamientos del dado, es aproxidamamente 1.

3. Sea X una v.a con fda dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{(x+1)^2}{2}, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{e^{-2}}{2}\displaystyle\sum_{i=0}^{x} \dfrac{2^i}{i!}, & \text{si } x = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

(a) Calcule $P(X < 0)$, $P(X = 0)$, $P(X = 2)$ y $P(-1 < X \leq 0)$

Usando las propiedades vistas en clases tenemos

$$\begin{aligned} P(X < 0) &= F_X(0^-) \\ &= \frac{(0+1)^2}{2} \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= F_X(0) - F_X(0^-) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{2}\sum_{i=0}^{0} \frac{2^i}{i!} - \frac{(0+1)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{2}\sum_{i=0}^{0} \frac{2^i}{i!} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^{-2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= F_X(2) - F_X(2^-) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{2}\sum_{i=0}^{2} \frac{2^i}{i!} - \left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{2}\sum_{i=0}^{1} \frac{2^i}{i!}\right) \\ &= e^{-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-1 < X \leq 0) &= F_X(0) - F_X(-1) \\ &= [P(X = 0) + F_X(0^-)] - \frac{(-1+1)^2}{2} \\ &= P(X = 0) + F_X(0^-) \\ &= \frac{e^{-2}}{2} + \frac{(0+1)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-2} + 1\right) \end{aligned}$$

(b) Verifique que $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ **Hint:** $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}$

Note que en el limite, la acumulada va a simplemente ser la parte discreta $x = 0, 1, 2, ...$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F_X(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{2} \sum_{i=0}^{x} \frac{2^i}{i!} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{2} \lim_{x\to\infty} \sum_{i=0}^{x} \frac{2^i}{i!} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!} \\
&\text{aplicamos el hint con } x = 2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{2} e^2 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

En la figura (1) se aprecia la fda.

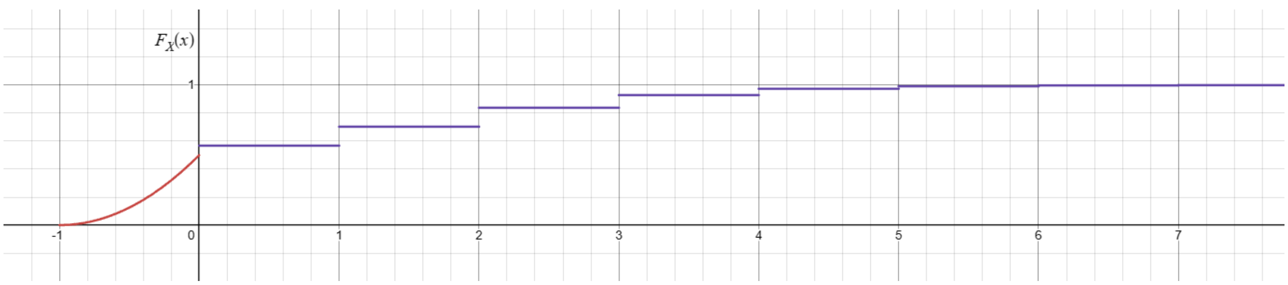

Figure 1: $F_X(x)$

4. (a) Suponga que en un cierto curso, el profesor seleccionará 40 ejercicios del libro guía para la $I2$, de los cuales solamente 5 se evaluarán en la prueba. Un estudiante decide estudiar solamente 25 ejercicios del total. ¿Cual es la probabilidad de que en la prueba sepa resolver 4 de las 5 preguntas?

Anotemos los datos.

- 40 ejercicios
- 25 son estudiados
- 15 no son estudiados
- 5 se eligen al azar

Primero note que esto corresponde a "extracciones" sin reemplazo y sin orden, pues los ejercicios no se repiten ni en el libro ni en la prueba (por ej, no pueden haber 2 ejercicios iguales), y además no importa el orden en que fueron estudiados.
Teniendo lo anterior en consideración, nos interesa que 4 ejercicios caigan en el grupo de los que fueron estudiados, y el otro ejercicio caiga dentro de los que no fueron estudiados. Esto corresponde al modelo Hipergeometrico. Defina el evento

$$A = \text{el estudiante sabe resolver 4 de los 5 ejercicios}$$

entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\binom{25}{4}\binom{15}{1}}{\binom{40}{5}} \\ &= 0.2883704 \end{aligned}$$

(b) Bajo el mismo contexto que antes, el estudiante decide resolver 7 pruebas de semestres anteriores del profesor. ¿Cual es la probabilidad de que en 3 pruebas sepa resolver 4 de las preguntas?

Note que la probabilidad de resolver 4 de las 5 preguntas es $P(A) = 0.2883704$. Nos interesa que de las 7 pruebas, en 3 de ellas se cumpla lo pedido (7 ensayos y 3 éxitos), por lo que esto corresponde al modelo binomial con $p = 0.2883704$. Defina el evento

$$B = \text{El estudiante en 3 pruebas sabe resolver 4 de las preguntas, en un total de 7 pruebas}$$

entonces

$$\begin{aligned} P(B) &= \binom{7}{3} 0.2883704^3 (1 - 0.2883704)^{7-3} \\ &= 0.2152465 \end{aligned}$$

Indicación: 1 Asuma que todas las pruebas del profesor se basan en el procedimiento mencionado en a) y que el estudiante las resuelve de forma independiente.

Indicación 2: Intente asociar las preguntas a algún modelo conocido.