Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2016

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 2

1. De todos los rectángulos que tienen diagonal que mide $2\sqrt{2}\,cm$, determine las dimensiones del que tiene perímetro máximo.

Solución

Sea x e y los lados del rectángulo, entonces su perímetro es

$$P = 2x + 2y$$

Dado que $y = \sqrt{8 - x^2}$ entonces

$$P = 2x + 2\sqrt{8 - x^2}, 0 \leq x \leq 2\sqrt{2}$$

1,0 pts.
Luego $P' = 2 - \dfrac{2x}{\sqrt{8 - x^2}} = \dfrac{2\sqrt{8 - x^2} - 2x}{\sqrt{8 - x^2}}$.
2,5 pts.
Por lo tanto

$$P' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{8 - x^2} \leftrightarrow x = 2 \,\mathrm{e}\, y = 2$$

Dado que $P(x = 2) = 8$ y $P(x = 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}, P(x = 0) = 4\sqrt{2}$ y esos son los puntos críticos, obtenemos que el máximo perímetro se produce con el cuadrado de lado $2\,cm$.
2,5 pts.

2. Haga un estudio completo de la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Indique intervalos de crecimiento y decrecimiento, asíntotas,extremos locales, concavidad y convexidad, puntos de inflexión y gráfico.

Solución

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$ y la función es impar, por lo tanto basta con estudiarla en $\mathbb{R}^+$.
Además el $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \infty$, y $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$,con lo cual el eje Y es asíntota vertical y no tiene asíntota horizontal.
1,0 pts.
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ por lo tanto

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1$$

Es decir:

a) f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
0,5 pts.

b) f es decreciente en $(-1, 0) \cup (0, 1)$.
0,5 pts.

c) Los puntos críticos son $\{-1, 1\}$ y dado que a la izquierda de $x = -1$ la función crece y luego decrece, en $x = -1$ hay un máximo local.
0,5 pts.

d) Dado que a la izquierda de $x = 1$ la función decrece y luego crece, en $x = 1$ hay un mínimo local.
0,5 pts.

Además:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

entonces

e) f es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$
0,5 pts.

f) f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$
0,5 pts.

g) y como 0 no está en el dominio de la función, entonces no hay punto de inflexión.
1,0 pts.

1,0 pts. por el gráfico correcto.

3. *a*) Demuestre que la función $f(x) = x^3 - 3x + b$ no puede tener dos raíces en el intervalo $[-1, 1]$ para cualquier valor de b.

Solución

Si $f(x) = x^3 - 3x + b$ tuviera dos raíces en $[-1, 1]$, entonces existiría $c \in (-1, 1)$, tal que $f'(c) = 0$, por el teorema de Rolle.
2,0 pts.
Pero $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$, y en $(-1, 1)$ la función derivada es negativa, es decir

$$\forall x \in (-1, 1)(f'(x) < 0)$$

por lo tanto no existe tal c para todo b real.
1,0 pts.

b) Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$

Solución
El límite $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{e^{-x}}$ es de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$, por lo tanto aplicando L'Hospital ese límite si existe debe ser igual a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/2\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}e^x} = 0$$

1,0 pts.

2) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot(x) - \dfrac{1}{x}\right)$

Solución
El límite $\lim\limits_{x\to 0} \left(\cot(x) - \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x\operatorname{sen}(x)}$ que es de la forma $\dfrac{0}{0}$ y por lo tanto podemos usar L'Hospital: Si el límite existe es igual a:

$$\lim_{x\to 0} -\frac{x\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x) + x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}(x)}{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} + \cos(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

3) f función continua en $\mathbb{R}$ con $f(1) = 1$ y $f'(1) = 2$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Solución
El límite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{f(x)} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ es de la forma $\dfrac{0}{0}$ por lo que podemos usar L'Hospital. Si es límite existe, entonces es igual a:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{(x)}f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$$

Dado que no se sabe si $f'(x)$ es continua en $x = 1$, entonces este límite no se puede calcular. **1,0 pts.**

4. Determine los valores de a, b y c de manera que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tenga un punto de inflexión en $(1, -1)$ y la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en ese punto sea 2.

   Solución
   $f(x) = 5ax^3 + bx^2 + c$ entonces $f^{'}(x) = 3ax^2 + 2bx$.
   La condición de la recta tangente nos dice que $f'(1) = 2$ es decir

   $$3a + 2b = 2$$

   2,0 pts.
   Además
   $f''(x) = 6ax + 2b$ y $f'''(x) = 6a$, entonces requerimos que $a \neq 0$ y que

   $$3a + b = 0$$

   2,0 pts.
   De las dos ecuaciones , obtenemos que

   $$a = -\frac{2}{3},\ b = 2$$

   1,0 pts.
   Adems el punto de inflexión debe estar en la curva, por lo tanto

   $$a + b + c = -1$$

   Es decir

   $$c = -\frac{7}{3}$$

   1,0