Ayudantía 4 — Martes 5/04/06.
Intro a Estadística.

① $p = 0{,}05$

p es prob. que no llegue un mail

a) X = nº de mails enviados de un total de 8 mails.

$X \sim \text{Binomial}(n=8, p=0{,}05)$

$$\mathbb{P}(X \le 2) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)$$
$$= \binom{8}{0}(0{,}05)^0(0{,}95)^8 + \binom{8}{1}(0{,}05)^1(0{,}95)^7 + \binom{8}{2}(0{,}05)^2(0{,}95)^6$$
$$= 0{,}9942$$

b) Y: nº de encuestas enviados hasta el 1º no-recepción.

$Y \sim \text{geométrica}(p=0{,}05)$

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}05} = 20$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Y} y \cdot \mathbb{P}(Y=y)$$
$$= \sum_{y=1}^{\infty} y \cdot (1-p)^{y-1} p = \sum_{y=1}^{\infty} y(1-p)^{y-1} \cdot p \ldots$$

② a) $p = \frac{4 \text{ sismos}}{25 \text{ años}} = 0{,}16$

$X \sim \text{Binomial}(n, p)$

Suponiendo que no puede ocurrir + de un mega sismo al año y que la ocurrencia de estos es independiente.

X: # mega-sismos en 5 años

$X \sim \text{Binomial}(5, 0{,}16)$

Nos piden

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X=0)$$
$$= 1 - \binom{5}{0} 0{,}16^{0}\, 0{,}84^{5} = 0{,}5817881\ldots$$

b) Y: cant. de años hasta que ocurra un mega-sismo

$$Y \sim \text{Geométrica}(p = 0{,}16)$$

$$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}16} = 6{,}25 \text{ años} \simeq 7 \text{ años.}$$

binomial definida en enteros.

Z: mega-sismos ocurridos en 7 años

$$Z \sim \text{binomial}(n=7,\, p=0{,}16)$$

$$P(Z=1) = \binom{7}{1}(0{,}16)^1(0{,}84)^6 = 0{,}394.$$

$$\star\ P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0)$$

3

X	-2	-1	0	1	2
F(X)	0,1	0,3	0,5	0,7	1

a)
$$\mathbb{P}(X=-2) = F(-2) = 0{,}1$$
$$\mathbb{P}(X=-1) = F(-1) - F(-2) = 0{,}2$$
$$\mathbb{P}(X=0) = F(0) - F(-1) = 0{,}2$$
$$\mathbb{P}(X=1) = F(1) - F(0) = 0{,}2$$
$$\mathbb{P}(X=2) = F(2) - F(1) = 0{,}3$$

Finalmente

$$\mathbb{P}(X=x) = \begin{cases} 0{,}1 & x = -2 \\ 0{,}2 & x = \{-1, 0, 1\} \\ 0{,}3 & x = 2 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

d) $\mathbb{E}(x) = \sum x \cdot \mathbb{P}(X=x)$

$= (-2)(0,1) + (-1)(0.2) + 0)(0.2) + (1)(0,2) + 2)(0,3) = 0.4.$

$Var(x) = \sum (x - E(x)) \mathbb{P}(X=x)$ $\quad E[(X-E(x))^2] = E(x^2) - E(x)$

$= (-2-0,4)\cdot 0,1 + (-1-0,4)\cdot 0,2 + (0-0,4)\cdot 0,2 + (1-0.4)\cdot 0.2 +$

$(2-0,4)\cdot 0,3 = 0$

4) $\Omega = \{0,1,2,3,4,5\}$

$F = \{\emptyset, \{0,1\}, \{2,3,4\}, \{5\}, \{0,1,2,3,4\}, \{0,1,5\}, \{2,3,4,5\}, \Omega\}$

y $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{15} \sum_{\omega \in A} \omega \quad \forall A \in F$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

a) $X : \{w \in \mathbb{R} : X(w) \leq x\} \in \mathbb{F}$

$\{w \in \Omega : X(w) \in B\} \in \mathbb{F}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

- $X(w) = w+1$ $\quad X^{-1}(1) = \{0\} \notin F$, $X^{-1}(2) = \{1\} \notin F$ $\}$ X no es variable aleatoria.

  $w = \{0,1,2,3,4,5\}$

  $X(w) = \{1,2,3,4,5,6\}$

- $X = \lfloor w/2 \rfloor$

w	0	1	2	3	4	5
$x(w)$	0	0	1	1	2	2

$X^{-1}(0) = \{0,1\} \in F$

$X^{-1}(1) = \{2,3\} \notin F \to$ X no er variable aleatoria.

- $X(w) \begin{cases} 0 & w \leq 1 \\ 1 & 1 < w \leq 4 \\ 2 & w > 4 \end{cases}$

w	0	1	2	3	4	5
$X(w)$	0	0	1	1	1	2

$X^{-1}(0) = \{0,1\} \in F$

$X^{-1}(1) = \{2,3,4\} \in F$

$X^{-1}(2) = \{5\} \in F$

$\therefore$ si es variable aleatoria.

b) $P_x(\{x\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{x\})) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}_x(\{1,2\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(\{1,2\}))$$
$$= \mathbb{P}(\{2,3,4,5\})$$

Como $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{15} \cdot \sum_{w \in A} w$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\{2,3,4,5\}) = \frac{2+3+4+5}{15} = \frac{14}{15} //$$

5 I = "mail enviado de partido I"
D = " " " " " D"
C = " " " " " C"
R = " " respondido por la empresa"
A = "empresa aportó dinero ilegalmente"

$\mathbb{P}(D) = 0,5$
$\mathbb{P}(C) = 0,3$
$\mathbb{P}(I) = 0,2$
$\mathbb{P}(R|D) = 0,4 \Rightarrow \mathbb{P}(R^c|D) = 0,6$
$\mathbb{P}(R|C) = 0,3 \Rightarrow \mathbb{P}(R^c|C) = 0,7$
$\mathbb{P}(R|I) = 0,1 \Rightarrow \mathbb{P}(R^c|I) = 0,9$
$\mathbb{P}(A|R\cap D) = 0,8 \Rightarrow \mathbb{P}(A^c|R\cap D) = 0,2$
$\mathbb{P}(A|R\cap C) = 0,4 \Rightarrow \mathbb{P}(A^c|R\cap C) = 0,6$
$\mathbb{P}(A|R\cap I) = 0,2 \Rightarrow \mathbb{P}(A^c|R\cap C) = 0,8$
$\mathbb{P}(A|R^c) = 0$

a) $\mathbb{P}(R\cap A\cap D) = \mathbb{P}(A|R\cap D)\cdot \mathbb{P}(R|D)\cdot \mathbb{P}(D)$
$= 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5 = 0,16 //$

b) $\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(A^c \cap R \cap I) + \mathbb{P}(A^c \cap R^c \cap I) + \mathbb{P}(A^c \cap R \cap C) + \mathbb{P}(A^c \cap R^c \cap C) +$
$\mathbb{P}(A^c \cap R \cap D) + \mathbb{P}(A^c \cap R^c \cap D)$
$= \mathbb{P}(A^c|R\cap I)\cdot \mathbb{P}(R|I)\cdot \mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(A^c|R^c\cap I)\cdot \mathbb{P}(R^c|I)\cdot \mathbb{P}(I) + \ldots$
$= 0,8\cdot 0,2 \cdot 0,2 + 1\cdot 0,8 + 0,2 + 0,6\cdot 0,3\cdot 0,3 + 1\cdot 0,7\cdot 0,3 + 0,2\cdot 0,4\, 0,5 +$
$1\cdot 0,6\cdot 0,5 = 0,796 //$

c) $\mathbb{P}(A^c \mid R) = \dfrac{\mathbb{P}(A^c \cap R)}{\mathbb{P}(R)}$

$=$

* $\mathbb{P}(A^c \cap R) = \mathbb{P}(A^c \cap R \cap I) + \mathbb{P}(A^c \cap R \cap C) + \mathbb{P}(A^c \cap R \cap D)$

$= \mathbb{P}(A^c \mid R \cap I) \cdot \mathbb{P}(R \mid I) \cdot \mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(A^c \mid R \cap C) \cdot \mathbb{P}(R \mid C) \cdot \mathbb{P}(C)$

$+ \mathbb{P}(A^c \mid R \cap D) \cdot \mathbb{P}(R \mid D) \cdot \mathbb{P}(D)$

$= 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5$

$= 0{,}126.$

* $\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \cap I) + \mathbb{P}(R \cap D) + \mathbb{P}(R \cap C)$

$= \mathbb{P}(R \mid I) \cdot \mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(R \mid D) \cdot \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(R \mid C) \cdot \mathbb{P}(C)$

$= 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 0{,}3$

$= 0{,}33$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A^c \mid R) = 0{,}3818182$