Inecuaciones

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

21 de Marzo de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Gráfico de subconjuntos de $\mathbb{R}$

En virtud de la relación menor o igual definida en $\mathbb{R}$ se puede pensar en ordenar esquemáticamente los números reales de menor a mayor. Los números reales se representan sobre una recta horizontal tal que a cada x en $\mathbb{R}$ se le asocia un punto sobre la recta siguiendo las siguientes convenciones:

1. Si $x < y$ entonces x está a la izquierda de y.
2. Si $x < y$ entonces $m = \dfrac{x+y}{2}$ es punto medio del trazo $\overline{xy}$.

Gráfico de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definición. (Intervalos)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leqslant b$. Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ se llaman intervalos:

1. Intervalo abierto a coma b:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}.$$

2. Intervalo cerrado a coma b:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leqslant x \leqslant b\}.$$

3. Intervalo a coma b cerrado por la derecha y abierto por la izquierda:

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leqslant b\}.$$

Gráfico de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definición. (continuación)

4. Intervalo a coma b cerrado por la izquierda y abierto por la derecha:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x < b\} \, .$$

5. Intervalos no acotados:

$$\begin{aligned}
(-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant a\} \, , \\
(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < a\} \, , \\
[a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x\} \, , \\
(a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\} \, .
\end{aligned}$$

Gráfico de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Observación

1. Para denotar un intervalo abierto (a, b) también se puede ocupar los paréntesis $]a, b[$.
2. Se puede anotar el conjunto $\mathbb{R}$ como el intervalo no acotado $(-\infty, \infty)$.
3. Si $a = b$ entonces $(a, b) = (a, a] = [a, a) = \varnothing$ y $[a, a] = \{a\}$.

Definición. (Inecuación)

Una **inecuación de una incógnita** es una desigualdad que puede ser verdadera o falsa dependiendo del valor asignado a la incógnita. Resolver una inecuación de una incógnita consiste en determinar todos los números reales para los cuales la inecuación es verdadera.

Inecuaciones

Enunciaremos un método para resolver algunas inecuaciones del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0\,,$$

donde el signo $<$ puede ser también > 0, $\leqslant$ o $\geqslant$.
Nos concentraremos en el caso en que $P(x)$ y $Q(x)$ son productos de factores lineales de primer orden del tipo $(ax + b)$. Diremos que el $x = -b/a$ es un punto crítico para este factor y corresponde al valor en el cual el factor es cero.

Resolución de Inecuaciones

El método para resolver estas inecuaciones es:

1. Determinar todos los puntos críticos de los factores lineales involucrados.
2. Ordenar los puntos críticos de menor a mayor y formar los intervalos encerrados entre ellos.
3. Mediante una tabla de signos determinar el signo de la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en los intervalos dados por el paso 2.
4. Escoger los intervalos para los cuales se satisface la inecuación dada.

Inecuaciones

EJEMPLO 1 Resuelva las siguientes inecuaciones

1. $x^2 + x > 2$
2. $\dfrac{2x+1}{x+2} < 1$
3. $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x-4} < 0$
4. $3 + \dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{2x+1}$

EJEMPLO 2 Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto

1. $2|x| < |x-1|$
2. $|x^2 - |3+2x|| < 4$