# $\mathbb{R}$ es ordenado

**Introducción al Cálculo - MAT1107**

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

14 de Marzo de 2022

# Axiomas de Orden



**Teorema**

1. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a^2 \geqslant 0$
2. Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$
3. Si $a < 0$ entonces $a^{-1} < 0$
4. Si $a \cdot b > 0$ si y sólo si $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

# Axiomas de Orden



## Demostración

1. Por el axioma de tricotomia separamos la demostración en 3 casos:
   - Caso 1: $a > 0$.
     Como $\mathbb{R}^+$ es cerrado entonces $a \cdot a > 0 \Longleftrightarrow a^2 > 0$.
   - Caso 2. $a = 0$.
     Entonces $a^2 = 0$ lo que implica que $a^2 \geqslant 0$.
   - Caso 3. $a < 0$
     Entonces $-a > 0$ y como $\mathbb{R}^+$ es cerrado entonces

$$(-a) \cdot (-a) > 0 \Longleftrightarrow a^2 > 0 \, .$$

2. Por contradicción, supongamos que $a^{-1} < 0$. Por el inciso 1 del teorema sabemos que $a^2 > 0$ si $a \neq 0$. Entonces,

$$a^2 \cdot a^{-1} < 0 \Longleftrightarrow a < 0 \, .$$

   Lo cual es una contradicción con la hipótesis $a > 0$.

# Axiomas de Orden



3. Similar al inciso 2.
4. ( $\Longrightarrow$ ) Si $a \cdot b > 0$ se sigue que $a \neq 0$, $b \neq 0$.
   - Caso 1. $a > 0$
     Por inciso 2, obtenemos que $a^{-1} > 0$ entonces
     $$ab \cdot a^{-1} > 0 \Longleftrightarrow b > 0\,.$$
   - Caso 2. $a < 0$
     Por el inciso 3, obtenemos que $a^{-1} < 0$ entonces
     $$ab \cdot a^{-1} < 0 \Longleftrightarrow b < 0\,.$$

   ($\Longleftarrow$)
   - Caso 1. $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b > 0$ ya que $\mathbb{R}^+$ es cerrado.
   - Caso 2. $a < 0$ y $b < 0$ entonces $-a > 0$ y $-b > 0$ lo que implica que $(-a) \cdot (-b) > 0 \Longleftrightarrow a \cdot b > 0$

# Axiomas de Orden



**EJEMPLO 1** Demuestre que si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

**Solución** Si $a < b$ entonces $b - a > 0$.
Por hipótesis $a > 0$ y $b > 0$ luego $a + b > 0$. (Ya que $\mathbb{R}^+$ es cerrado)
Como $b - a > 0$ y $b + a > 0$ entonces $(b - a)(b + a) > 0$. (Ya que $\mathbb{R}^+$ es cerrado).
La última desigualdad es equivalente a $b^2 - a^2 > 0$ es decir $b^2 > a^2$ como queríamos probar.

# Axiomas de Orden



**EJEMPLO 2** Pruebe la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $b > 0$.

**Solución** Por contradicción, supongamos que $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$.

Note que $a + b > 0$ ya que $a$ y $b$ son positivos, luego $\dfrac{a+b}{2} > 0$.
Aplicando lo demostrado en el ejemplo 1 obtenemos

$$0 < \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \Longrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} < ab$$

Desarrollando los términos obtenemos

$$a^2 + 2ab + b^2 < 4ab \Longleftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Longleftrightarrow (a-b)^2 < 0$$

lo cual es una contradicción.

# Axiomas de Orden

**EJEMPLO 3** Demuestre que si $a$, $b$ y $c$ son positivos y no todos iguales, entonces

$$(a+b+c)(bc+ca+ab) > 9abc\,.$$

**Solución** Por demostrar que $(a+b+c)(bc+ca+ab) - 9abc > 0$. En efecto, tenemos que

$$(a+b+c)(bc+ca+ab) - 9abc$$

$$\begin{aligned}
&= abc + ca^2 + a^2b + b^2c + abc + ab^2 + bc^2 + c^2a + abc - 9abc \\
&= ca^2 + a^2b + b^2c + ab^2 + bc^2 + c^2a - 6abc \\
&= c(a^2+b^2) + b(a^2+c^2) + a(b^2+c^2) - 6abc \\
&= c(a^2-2ab+b^2) + b(a^2-2ac+c^2) + a(b^2-2bc+c^2) \\
&= c(a-b)^2 + b(a-c)^2 + a(b-c)^2
\end{aligned}$$

# Axiomas de Orden

Como los números al cuadrado son positivos ya que los números son distintos (hipótesis) y positivos, entonces

$$c(a-b)^2 > 0\,, \quad b(a-c)^2 > 0\,, \quad a(b-c)^2 > 0$$

se sigue que la suma de estos tres números positivos es positivo, es decir

$$c(a-b)^2 + b(a-c)^2 + a(b-c)^2 > 0$$

lo que equivale a que

$$(a+b+c)(bc+ca+ab) - 9abc > 0$$

como queríamos probar.

# Axiomas de Orden



**EJERCICIO 1** Demuestre que si $x > 0$ entonces $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.