Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2020

Examen
MAT1107 - Introducción al Cálculo

(1) Resuelva la inecuación

$$\frac{x^2-4}{x-4} > 1.$$

(6 puntos)

Solución.

Reescribimos la inecuación como

$$\frac{x^2-4}{x-4} - 1 > 0,$$

que es equivalente a

$$\frac{x^2-x}{x-4} = \frac{x(x-1)}{x-4} > 0. \quad (\textbf{3 puntos})$$

Mediante tabla de signo **(2 puntos)**, vemos que el conjunto solución corresponde a $(0,1) \cup (4,\infty)$. **(1 punto)**

(2) Para todo $n \geq 1$, sea $a_n \geq 0$. Demuestre que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 \geq \sum_{j=1}^{n} a_j^2,$$

para todo $n \geq 1$. **(6 puntos)**

Solución.

La desigualdad se verifica para $n = 1$: $a_1^2 \geq a_1^2$. **(1 punto)**
Supongamos que

$$\left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)^2 \geq \sum_{j=1}^{k} a_j^2,$$

para algún $k \geq 1$. **(1 punto)**

Luego,

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{k+1} a_j\right)^2 &= \left(\sum_{j=1}^{k} a_j + a_{k+1}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{j=1}^{k} a_j\right)^2 + 2a_{k+1}\sum_{j=1}^{k} a_j + a_{k+1}^2 \\
&\geq \sum_{j=1}^{k} a_j^2 + 2a_{k+1}\sum_{j=1}^{k} a_j + a_{k+1}^2 \quad (\mathbf{1.5\,puntos}) \\
&\geq \sum_{j=1}^{k} a_j^2 + a_{k+1}^2 \quad (\mathbf{1.5\,puntos}) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} a_j^2.
\end{aligned}
$$

Se concluye por inducción. **(1 punto)**

(3) Esboce la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|^3 - x^3}{x+1}.$$

(6 puntos)

Solución.

Observamos que $f(x) = 0$ si $x \geq 0$. **(1 punto)**
Si $x < 0$, tenemos que

$$f(x) = \frac{-2x^3}{x+1}. \quad (\mathbf{1\,punto})$$

Vemos que f tiene una asíntota vertical en $x = -1$ con

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^+} f(x) &= +\infty, \quad (\mathbf{1\,punto}) \\
\lim_{x\to -1^-} f(x) &= -\infty. \quad (\mathbf{1\,punto})
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty. \quad (\mathbf{1\,punto})$$

Juntar todos los elementos en el gráfico: **(1 punto)**.

(4) (a) Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere la sucesión dada por

$$
\begin{aligned}
a_1 &= a, \\
a_{n+1} &= a_n + a^{n+1}, \quad n \geq 1.
\end{aligned}
$$

Calcule a_{100}. **(3 puntos)**

(b) Calcule el coeficiente que acompaña a x^{-30} en la expansión de

$$\left(2+\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{54}\right)^2.$$

(3 puntos)

Solución.

(a) Notamos que

$$a_n=\sum_{j=1}^{n} a^j. \quad (\mathbf{2\,puntos}) \tag{1}$$

Por lo tanto, si $a\neq 1$,

$$a_{100}=\frac{a^{101}-a}{a-1}. \quad (\mathbf{0.5\,puntos}) \tag{2}$$

Si $a=1$,

$$a_{100}=100. \quad (\mathbf{0.5\,puntos}) \tag{3}$$

(b) Primero,

$$\begin{aligned}\left(2+\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{54}\right)^2 &= 4+4\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{54}+\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{108}\\ &= 4+4\sum_{j=0}^{54}\binom{54}{j}x^{2j}x^{-(54-j)}+\sum_{k=0}^{108}\binom{108}{k}x^{2k}x^{-(108-k)}\\ &= 4+4\sum_{j=0}^{54}\binom{54}{j}x^{3j-54}+\sum_{k=0}^{108}\binom{108}{k}x^{3k-108}.\\ &\quad (\mathbf{2\,puntos})\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que escoger $j=8$ y $k=26$. **(0.5 puntos)**

Luego, el coeficiente buscado es

$$4\binom{54}{8}+\binom{108}{26}. \quad (\mathbf{0.5\,puntos})$$

(5) (a) Usando la definición, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor n+1\rfloor^3}{n^2+1}=\infty.$$

(3 puntos)

(b) Demuestre que el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\cos(\pi n)}{n^2+1}$$

no existe. **(3 puntos)**

Solución.

(a) Usando $\lfloor n+1 \rfloor \geq n$, se obtiene

$$\frac{\lfloor n+1 \rfloor^3}{n^2+1} \geq \frac{n^3}{n^2+1} = n \cdot \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Vemos que

$$\frac{n^2}{n^2+1} \geq \frac{1}{2}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Luego,

$$\frac{\lfloor n+1 \rfloor^3}{n^2+1} \geq \frac{n}{2}. \quad (\mathbf{2\,puntos})$$

Sea $M > 0$ y sea $n_0 \geq 1$ tal que $n_0 \geq 2M$. **(0.5 puntos)**

Luego, si $n \geq n_0$,

$$\frac{\lfloor n+1 \rfloor^3}{n^2+1} \geq \frac{n}{2} \geq \frac{n_0}{2} \geq M. \quad (\mathbf{0.5\,puntos})$$

(b) Usamos subsucesiones. Sea

$$a_n = \frac{n^2 \cos(\pi n)}{n^2+1}.$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1. \quad (\mathbf{1.5\,puntos})$$

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = -1. \quad (\mathbf{1.5\,puntos})$$

Luego, el límite no puede existir.