PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV2024

Pauta Interrogación 1 - MAT1620

1. Determine si cada una de las siguientes integrales es convergente o divergente. En caso de ser convergente, calcule dicha integral.

   a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{4w}{\sqrt[3]{w^2-4}}dw.$

   b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{w^2+1}{w^3\left(\cos^2(w)+1\right)}dw.$

   Solución:

   a) Observemos que esta integral, es una integral impropia de tipo II, pues la función del integrando posee una asíntota en $w=2$, de este modo:

   $$\int_1^2 \frac{4w}{\sqrt[3]{w^2-4}}dw = \lim_{t\to 2^-}\int_1^t \frac{4w}{\sqrt[3]{w^2-4}}dw.$$

   De este modo calculando la integral tenemos que:

   $$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{4w}{\sqrt[3]{w^2-4}}dw = \lim_{t\to 2^-}\left(3\left(w^2-4\right)^{\frac{2}{3}}\right)\Big|_1^t &= \lim_{t\to 2^-}\left(3\left(t^2-4\right)^{\frac{2}{3}} - 3(-3)^{\frac{2}{3}}\right)\\ &= -3(-3)^{\frac{2}{3}} = (-3)^{\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

   Y por lo tanto la integral impropia es convergente.
   Asignación de Puntaje:

   - (1 pto.) Por identificar la integral impropia como tipo II y por escribir la definición de esta.
   - (1 pto.) Por calcular correctamente la antiderivada de la integral.
   - (1 pto.) Por calcular la integral y concluir que la integral es convergente.

   b) Esta integral, es una integral impropia de tipo I, para analizar convergencia apliquemos para esta integral el criterio de comparación y notemos que:

   $$\begin{aligned}&w^2+1 > w^2, \text{ y portanto tenemos que:}\\ &\frac{w^2+1}{w^3\left(\cos^2(w)+1\right)} > \frac{w^2}{w^3\left(\cos^2(w)+1\right)} = \frac{1}{w\left(\cos^2(w)+1\right)}\end{aligned}$$

Además notemos que: $0 \leq \cos^2(w) \leq 1$, y de este modo:,

$$\cos^2(w) + 1 < 1 + 1 = 2$$

Por lo tanto tenemos que:

$$\frac{1}{w\left(\cos^2(w) + 1\right)} > \frac{1}{w(2)} = \frac{1}{2w}.$$

En resumen tenemos que:

$$\frac{w^2 + 1}{w^3\left(\cos^2(w) + 1\right)} > \frac{1}{2w}$$

Y puesto que la integral

$$\int_1^\infty \frac{1}{2w} dw = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{1}{w} dw$$

Es divergente por el criterio de la integral p, con $p = 1$, tenemos que

$$\int_1^\infty \frac{w^2 + 1}{w^3\left(\cos^2(w) + 1\right)} dw$$

También es divergente.

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por comparar correctamente con $g(w) = \dfrac{1}{w}$.
- (1 pto.) Por concluir que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{w} dw$ es divergente
- (1 pto.) Por concluir correctamente apartir del criterio de comparación que la integral es divergente.

2. Considere la sucesión recursiva definida por

$$a_1 = 5 \; ; \; a_{n+1} = \frac{a_n + 7}{2}$$

a) Demuestre que $a_n < 7$.

Solución:

Usaremos inducción para demostrar lo pedido, para eso verificamos que

$$5 = a_1 < 7$$

ahora, si suponemos que $a_k < 7$, tenemos que $a_k + 7 < 14$ y por lo tanto

$$a_{k+1} = \frac{a_k + 7}{2} < 14$$

con esto tenemos que para todo n natural se tiene que $a_n < 7$. **Asignación de Puntaje:**

- (0.5 ptos.) Por verificar que la cota se cumple para a_1.
- (1 pto.) Por demostrar correctamente el paso inductivo.
- (0.5 ptos.) Por concluir.

b) Demuestre que a_n es creciente.

Solución:

Observe que $a_{k+1} > a_k$ si y solo si $\dfrac{a_k + 7}{2} > a_k$ es decir si $a_k + 7 > 2a_k$, lo que es cierto ya que, del punto anterior, tenemos que $a_k < 7$. **Asignación de Puntaje:**

- (0.5 ptos.) Por plantear correctamente una estrategia de demostración.
- (1.5 ptos.) Por realizar la demostración (múltiples formas).

c) Demuestre que a_n converge y calcule el límite.

Solución:

De los puntos anteriores tenemos que a_n es monótona y acotada por lo tanto es convergente. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, tenemos que, de la definición se debe cumplir que

$$L = \frac{L + 7}{2}$$

obteniendo que el límite de la sucesión es 7.

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por justificar correctamente la existencia del límite.
- (1 pto.) Por calcular el límite.

3. Determine si las siguientes series son convergentes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 4n + 1}}{n^3 + 9}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \sin^2(5n)}{4^n + \cos^2(n)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\ln(n)]^3}{n}$

Solución:

a) Apliquemos, para esta serie, el criterio de comparación al límite y comparemos con:

$$b_n = \frac{\sqrt{2n^2}}{n^3} = \frac{\sqrt{2}}{n^2}$$

Y calculemos el límte:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt{2n^2+4n+1}}{n^3+9}\frac{n^2}{\sqrt{2}}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2\sqrt{n^2\left(2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{\sqrt{2}n^3\left(1+\frac{9}{n^3}\right)}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2(n)\sqrt{2+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{2}n^3\left(1+\frac{9}{n^3}\right)}\right]=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$$

Dado que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n^2}$ es convergente por el criterio de serie p con $p=2>1$ tenemos que: la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^2+4n+1}}{n^3+9}$ es convergente, esto debido al criterio de comparación al límte.

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por comparar correctamente con el término $b_n=\frac{\sqrt{2}}{n^2}$ y calcular corrrectamente el límite $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.
- (0.5 pts.) Por justificar que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{n^2}$ es convergente
- (0.5 pts.) Por concluir la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n^2+4n+1}}{n^3+9}$ por el criterio de comparación al límite.

b) Notemos que:

$$\frac{2^n\sin^2(5n)}{4^n+\cos^2(n)}<\frac{2^n}{4^n+\cos^2(n)}$$

Por otro lado notar que:

$$4^n+\cos^2(n)>4^n+0=4^n.$$

De donde tenemos que:

$$\frac{2^n\sin^2(5n)}{4^n+\cos^2(n)}<\frac{2^n}{4^n+\cos^2(n)}<\frac{2^n}{4^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Observe que la serie geométrica con los términos del lado derecho de la desigualdad es convergente con $r=1/2$.

Luego por el criterio de comparación, la serie: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\sin^2(5n)}{4^n+\cos^2(n)}$ es convergente.

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por comparar correctamente con el término $b_n=(1/2)^n$
- (0.5 pts.) Por justificar que la serie geométrica es convergente.

- (0.5 pts.) Por concluir la convergencia de la serie por el criterio de comparación.

c) Apliquemos, para esta serie, el criterio de la integral, para ello sea $f(x) = \dfrac{[\ln(x)]^3}{x}$.

Observemos que $f(x) > 0$ para $x > 1$, además f es decreciente:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\left[3[\ln(x)]^2\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x - [\ln(x)]^3\right.}{x^2} \\ &= \frac{3[\ln(x)]^2 - [\ln(x)]^3}{x^2} = \frac{[3 - \ln(x)][\ln(x)]^2}{x^2}. \end{aligned}$$

Si $x > e^3$ entonces $\ln(x) > 3$, así $f'(x) < 0$.
Por lo tanto f es decreciente en (e^3, ∞).
Ahora veamos la integral de la función:
Usando la sustitución $u = \ln(x)$, y así $du = \frac{1}{x}dx$, de donde obtenemos:

$$\int_1^\infty \frac{[\ln(x)]^3}{x}dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{4}[\ln(x)]^4\right)\Bigg|_1^{\ln(b)} = +\infty.$$

Por lo tanto la integral impropia diverge y por el criterio de la integral la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\ln(n)]^3}{n}$ diverge.

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por verificar las hipótesis del criterio de la integral.
- (0.5 pts.) Por justificar que la integral converge.
- (0.5 pts.) Por concluir la divergencia de la serie.

4. a) Determine el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$.

Solución:
Para calcular el intervalo de convergencia, realizamos el criterio de la razón, obteniendo que,

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2 k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{x^2}{k+1} = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

por lo tanto el intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$.
Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por determinar $|a_{n+1}|/|a_n|$.
- (1 pto.) Por calcular correctamente el límite.
- (1 pto.) Por determinar el intervalo de convergencia..

b) Demuestre que si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$, entonces f es solución de la ecuación diferencial

$$f'(x) + 2xf(x) = 0.$$

Solución:

Observe que si $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$, entonces

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots$$

derivando obtenemos que

$$f'(x) = -2x + 4\frac{x^3}{2!} - 6\frac{x^5}{3!} + 8\frac{x^7}{4!} - \cdots + \frac{(2k+2)(-1)^{k+1}x^{2k+1}}{(k+1)!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\ x^{2k+1}$$

por otra parte, tenemos que

$$2xf(x) = 2x - 2\frac{x^3}{1!} + 2\frac{x^5}{2!} - 2\frac{x^7}{3!} + \cdots + \frac{2(-1)^k x^{2k+1}}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{k!}\ x^{2k+1}$$

Observe que el coeficiente de x^{2k+1} en el desarrollo de $f'(x)$ es

$$\frac{(2k+2)(-1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{2(k+1)(-1)^{k+1}}{(k+1)k!} = \frac{2(-1)^{k+1}}{k!}$$

que coincide con el inverso aditivo del coeficiente de x^{2k+1} en el desarrollo de $2xf(x)$, luego se tiene que

$$f'(x) + 2xf(x) = 0.$$

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por determinar el desarrollo de $f'(x)$.
- (1 pto.) Por determinar el desarrollo de $2xf(x)$.
- (1 pto.) Por concluir la demostración