PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMER SEMESTRE 2013

MAT1620 $\star$ CÁLCULO 2
INTERROGACIÓN 1

1. *a*) Sea $a > 0$. Calcule el área de la región R encerrada por las curvas

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \qquad x + y = a.$$

   b) Determine las coordenadas del centroide de la región R.

   c) Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región R en torno al eje X.

2. Determine el volumen del sólido engendrado por la revolución alrededor del eje Y, de la figura dada por

$$x \geq 0, \quad y \geq x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5, \quad y \leq 5.$$

3. Calcule la longitud de la curva cerrada, dada por la relación $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

4. *a*) Determine el valor de C en $\mathbb{R}$, de manera que la siguiente integral sea convergente. Calcule el valor de dicha integral para el valor de C encontrado.

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1} \right) dx.$$

   b) Analice la convergencia de la siguiente integral.

$$\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{2+e^x} dx.$$

Tiempo: 120 minutos.
Sin consultas ni calculadoras.

SOLUCIÓN

1. *a*) Para calcular el area, notamos que debemos calcular la siguiente integral

$$A=\int_0^a[(a-x)-(a+x-2\sqrt{ax})]dx=\left[\frac{4}{3}\sqrt{ax^3}-x^2\right]_0^a=\frac{a^2}{3}.$$

   b) Para calcular el centroide, digamos $(\overline{x},\overline{y})$ utilizamos las respectivas formulas y tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{x}&=\frac{1}{A}\int_0^a x[a-x-(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2]dx\\&=\frac{1}{A}\left[2\sqrt{a}\int_0^a x^{3/2}dx-\int_0^a 2x^2dx\right]\\&=\frac{2}{5}a.\end{aligned}$$

   De manera análoga o bien utilizando un argumento de simetria, se tiene que

$$\overline{y}=\frac{1}{A}\int_0^a\frac{1}{2}[(a-x)^2-(\sqrt{a}-\sqrt{x})^4]dx=\frac{2}{5}a.$$

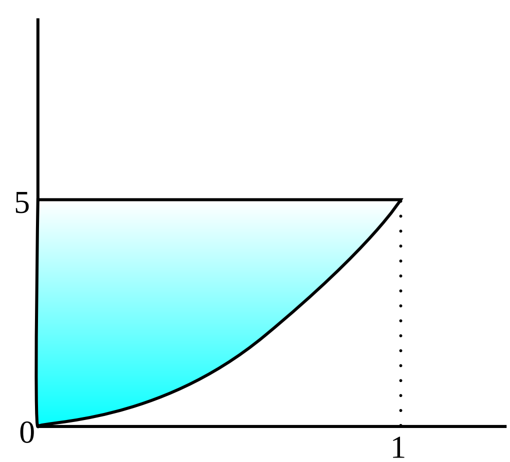
   c) Finalmente para calcular el volumen del sólido pedido, se tiene que

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^a[(a-x)^2-(a+x-2\sqrt{ax})^2]dx\\&=\pi\int_0^a[-8ax+4a\sqrt{ax}+4\sqrt{ax^3}]dx\\&=\frac{4}{15}\pi a^3.\end{aligned}$$

   O bien utilizando el Teorema de Pappus se tiene que

$$V=2\pi d(C,X)A=\frac{4}{15}\pi a^3.$$

2. Lo primero que debemos notar que la región gráficamente se ve de la siguiente manera



Por lo tanto, como estamos rotando con respecto al eje Y, debemos usar el método de los cascarones cilíndricos, esto es, dada una partición $\mathcal{P} = \{0 = x_0, x_2, \ldots, x_n = 1\}$, entonces se tiene que la aproximación al volumen engendrado al rotar respecto al eje Y es

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi \left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2} \right) (5 - f(x_k^*)) \Delta x_k,$$

por lo que haciendo tender el módulo de la partición a 0, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} 2\pi \left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2} \right) (5 - f(x_k^*)) \Delta x_k \to 2\pi \int_0^1 x(5 - f(x))dx,$$

donde $f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$. Por lo tanto, el volumen engendrado será

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 (5x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)dx \\ &= 2\pi \left(\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} \right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{197\pi}{70}. \end{aligned}$$

3. *a*) Sea f la funcion definida sobre $[0, \infty)$ por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{3x + 1} = \frac{(3 - C)x^2 + x - C}{(x^2 + 1)(3x + 1)} \quad .$$

La integral considerada es impropia en ∞ (primera especie). Para todo $x \in (0, \infty)$,

$$\int_0^x f(t)\, dt = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \frac{C}{3} \ln(3x + 1) \quad .$$

Se observa que el termino que aparece a la derecha de la identidad tiene limite (finito) ssi $C = 3$. En este caso, se tiene que:

$$\int_0^\infty f(t)\, dt = \lim_{x \to \infty} \int_0^x f(t)\, dt = -\ln 3 \quad .$$

b) La integral considerada es impropia en ∞ (primera especie). Se observa que para todo $x \in (0, \infty)$, $0 \leq \arctan x < \pi/2$, lo cual implica que:

$$0 \leq \frac{\arctan x}{e^x + 2} < \frac{\pi}{2} e^{-x} \quad .$$

Un calculo directo muestra que $\int_0^\infty e^{-x}\, dx$ es convergente. Por teorema de comparacion, sigue que la integral considerada es convergente tambien.