Álgebra y composición de funciones

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1] Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2] LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

25 de Abril de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Álgebra y composición de funciones

Definición. (Álgebra de Funciones)

Sean $f : A \to C$ y $g : B \to D$ funciones. Entonces $f + g$, $f - g$, fg y f/g están definidas como sigue

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ con dominio $A \cap B$.
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ con dominio $A \cap B$.
3. $(fg)(x) = f(x)g(x)$ con dominio $A \cap B$.
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ con dominio $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$.

Álgebra y composición de funciones

EJEMPLO 1 Dadas las funciones

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x^2-1}{x^2-x-6}$$

1. Calcule $(f+g)(2)$
2. Verifique que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{(x-3)\sqrt{x+2}}{x-1}$$

con dominio $(2,\infty) - \{-1,1,3\}$.

Álgebra y composición de funciones

Definición. (Función compuesta)

Sean $f : A \to C$ y $g : B \to D$ funciones tales que el recorrido de f está contenido en el dominio de g, esto es, $\mathrm{Rec}(f) \subseteq \mathrm{Dom}(g)$. En este caso, podemos definir la **función compuesta** $g \circ f : A \to D$, que consiste en aplicar primero f y después g. Más precisamente,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad \text{para todo } x \in A\,.$$

Observación Dadas dos funciones $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : B \to \mathbb{R}$, no siempre se cumple que $\mathrm{Rec}(f) \subset B$, luego la definición de la composición no siempre se puede realizar. En estos casos, definimos el dominio de la composición por

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) \mid f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$$

Álgebra y composición de funciones

Proposición.

Sean $f : A \to C$ y $g : B \to D$ son funciones tales que $g \circ f$ está bien definida. Entonces

1. Si f y g son funciones inyectivas entonces $g \circ f$ es inyectiva.
2. Si f y g son funciones sobreyectivas entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

En particular, la compuesta de dos biyecciones es una biyección.

Álgebra y composición de funciones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

No siempre se tiene que $g \circ f$ y $f \circ g$ son iguales, más aún, en ocasiones es imposible definirlas. Por ejemplo

EJEMPLO 2 Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$. Entonces, $(g \circ f)(x) = (2x + 1)^2$ mientras que $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$. Obviamente $g \circ f \neq f \circ g$.

EJEMPLO 3 Sean las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : P \to \mathbb{Z}$ donde $P = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto de los números naturales pares, definidas por $f(n) = 2n$ y $g(m) = -m$
Es posible definir $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $(g \circ f)(n) = -2n$.
Pero no es posible definir $f \circ g$, pues $g(n) \in \mathbb{Z} \neq \mathbb{N}$, el dominio de f.

Álgebra y composición de funciones

EJEMPLO 4 Sean $f :]-\infty, 5[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+4}$.
y $g : [6, \infty[\to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x+3$. Defina la función compuesta $g \circ f$.

Solución Tenemos que el dominio de la función composición es

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Dom}(g \circ f) &\iff (x \in \mathrm{Dom}(f)) \wedge (f(x) \in \mathrm{Dom}(g)) \\ &\iff (x < 5) \wedge (\sqrt{x^2+4} \geqslant 6) \\ &\iff (x < 5) \wedge (x \geqslant \sqrt{32} \quad \text{o} \quad x \leqslant -\sqrt{32}) \\ &\iff x \leqslant -\sqrt{32} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(g \circ f) = (-\infty, -\sqrt{32}]$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x^2+4}) = 2\sqrt{x^2+4} + 3\,.$$

Álgebra y composición de funciones

EJEMPLO 5 Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -3x + 1$ y

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{si } x < -1 \\ 1 - x & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}$$

Definir las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Dom}(f \circ g) &\iff (x \in \mathrm{Dom}(g)) \wedge (g(x) \in \mathrm{Dom}(f)) \\ &\iff (x \in \mathbb{R}) \wedge (-3x + 1 \in \mathbb{R}) \\ &\iff x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego, $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$.

Álgebra y composición de funciones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Se tiene que

$$(f \circ g)(x) = f(-3x+1) = \begin{cases} (-3x+1)^2+5 & \text{si } -3x+1 < -1 \\ \\ 1-(-3x+1) & \text{si } -3x+1 \geqslant -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 9x^2-6x+6 & \text{si } x > 2/3 \\ \\ 3x & \text{si } x \leqslant 2/3 \end{cases}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Dom}(g \circ f) &\iff (x \in \mathrm{Dom}(f)) \wedge (f(x) \in \mathrm{Dom}(g)) \\ &\iff (x \in \mathbb{R}) \wedge (f(x) \in \mathbb{R}) \\ &\iff x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Luego, $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

Álgebra y composición de funciones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = -3f(x) + 1 \\
&= \begin{cases} -3(x^2+5)+1 & \text{si } x < -1 \\ \\ -3(1-x)+1 & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} -3x^2-14 & \text{si } x < -1 \\ \\ 3x-2 & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}
\end{aligned}
$$