Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2016

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución a la Interrogación N° 2

1. Sean A y B matrices de $n \times n$ tales que $A - B$ es invertible, y sea C una matriz de $n \times p$. Demuestre que la ecuación $AX = BX + C$ tiene solución única, y exprese esta solución en la forma más simple posible.

   Solución:

   Vemos que, para que la igualdad $AX = BX + C$ tenga sentido, X debe ser una matriz de $n \times p$ (así, las tres matrices AX, BX y C serán de $n \times p$).

   De $AX = BX + C$ deducimos que $(A - B)X = C$. Como $A - B$ es invertible, podemos premultiplicar ambos lados de esta igualdad por $(A - B)^{-1}$, obteniendo

   $$(A - B)^{-1} [(A - B)X] = (A - B)^{-1}C.$$

   Por ser la multiplicación de matrices asociativa, tenemos $(A - B)^{-1} [(A - B)X] = X$, de donde —necesariamente— $X = (A - B)^{-1}C$ (que es, por lo tanto, la única solución posible).

   En estricto rigor, deberíamos *comprobar* que $X = (A - B)^{-1}C$ es una solución, vale decir, reemplazar X por $(A - B)^{-1}C$ en la ecuación y verificando que la igualdad se cumple:

   $$\begin{aligned}
   AX &\stackrel{?}{=} BX + C \\
   A\left((A - B)^{-1}C\right) &\stackrel{?}{=} B\left((A - B)^{-1}C\right) + C \\
   A\left((A - B)^{-1}C\right) - B\left((A - B)^{-1}C\right) &\stackrel{?}{=} C \\
   (A - B)\left((A - B)^{-1}C\right) &\stackrel{?}{=} C \\
   \left((A - B)(A - B)^{-1}\right) C &\stackrel{?}{=} C \\
   I_n C &\stackrel{?}{=} C \\
   C &\stackrel{\checkmark}{=} C
   \end{aligned}$$

   Puntaje:

   - Por expresar la ecuación como $(A - B)X = C$, 2 puntos.
   - Por usar el hecho de que $(A - B)^{-1}$ existe, 2 puntos.
   - Por llegar a que X debe ser $(A - B)^{-1}C$, 2 puntos.

   A lo anterior se le suma el punto base.

2. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que si las columnas de A^2 generan a $\mathbb{R}^n$ entonces las columnas de A son linealmente independientes.

Primera Solución:

Supongamos que las columnas de A son linealmente dependientes.

Entonces la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tiene una solución no trivial (dada por los ponderadores de la combinación lineal no trivial de columnas de A que da como resultado $\overrightarrow{\mathbf{0}}$).

Pero entonces $A^2\overrightarrow{\mathbf{x}} = A(A\overrightarrow{\mathbf{x}}) = A\overrightarrow{\mathbf{0}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, por lo que la ecuación $A^2\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tiene una solución no trivial, o sea, las columnas de A^2 son linealmente dependientes.

Segunda Solución:

Si las columnas de A^2 generan a $\mathbb{R}^n$, A^2 es una matriz invertible, por lo que $\det(A^2) \neq 0$. Así, $\det A \neq 0$, por lo que A es invertible, y por lo tanto sus columnas generan a $\mathbb{R}^n$.

Tercera Solución:

Si las columnas de A^2 generan $\mathbb{R}^n$, entonces es invertible. Por lo tanto existe una matriz B tal que $A^2B = I$, lo que se puede escribir como $A(AB) = I$. Pero esto quiere decir que A es invertible (con inversa AB) y así sus columnas son l.i.

Puntaje: En cualquiera de las soluciones (u otras *correctas* que se les ocurran a los alumnos):

- Por plantear una demostración correctamente estructurada, 2 puntos.
- Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 2 puntos.
- Por justificar adecuadamente los argumentos, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

Solución errónea:

La siguiente "solución" (o alguna variación sobre el mismo tema) apareció en varias respuestas:

> "*Como A^2 es invertible, existe $(A^2)^{-1}$, y como la inversa de un producto es el producto de las inversas, se tiene $(A^2)^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1}$, por lo que A es invertible y por lo tanto sus columnas son l.i.*"

Esta solución es errónea (la inversa de un producto es el producto de las inversas *siempre que dichas inversas existan*. Pero el que dichas inversas existen es justamente lo que hay que demostrar.

Por lo anterior, una respuesta como la aquí presentada no obtiene puntaje.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Encuentre una factorización de la forma $A = LU$, con L triangular inferior unitaria (o sea, con 1s en la diagonal), y U triangular superior.

b) Use la factorización anterior para resolver

$$A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

a) La factorización buscada es

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

b) La forma de utilizar esta factorización para resolver un sistema de la forma $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ consiste en:

(I) Resolver la ecuación $L\overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$.
(II) Resolver la ecuación $U\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$.

En nuestro caso:

(I) $L\overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que tiene por solución:

- $y_1 = 3$,
- $y_2 = 2 - 3y_1 = 2 - 9 = -7$,
- $y_3 = 1 + \frac{1}{2}y_1 + 2y_2 = 1 + \frac{3}{2} - 14 = -\frac{23}{2}$.

(II) $U\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$ es

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -\frac{23}{2} \end{bmatrix},$$

que tiene por solución:

- $x_4 = \frac{1}{5} \cdot -\frac{23}{2} = -\frac{23}{10}$,
- x_3 es libre,
- $x_2 = \frac{1}{3}\left(-7 + 5x_3 - 3x_4\right) = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}x_3 - x_4 = -\frac{7}{3} + \frac{5}{3}x_3 + \frac{23}{10} = \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{30}$.
- $x_1 = \frac{1}{2}\left(3 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4\right) = \frac{1}{2}\left(3 + 4\left(\frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{30}\right) - 4x_3 - \frac{23}{5}\right)$
  $= \frac{1}{2}\left(3 + \frac{20}{3}x_3 - \frac{4}{30} - 4x_3 - \frac{23}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}x_3 - \frac{26}{15}\right) = \frac{4}{3}x_3 - \frac{13}{15}$.

Puntaje:

a)
- Por calcular correctamente L, 1,5 puntos.
- Por calcular correctamente U, 1,5 puntos.

b)
- Por plantear el sistema como las dos ecuaciones $L\overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, $U\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$, 0,5 puntos.
- Por resolver correctamente el sistema $L\overrightarrow{\mathbf{y}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, 1 punto.
- Por resolver correctamente el sistema $U\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$, 1,5 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

4. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal determinada por la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Sea S el paralelepípedo determinado por los vectores $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Calcule el volumen de S y el volumen de $T(S)$.

Solución:

Sean $\vec{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\vec{\mathbf{v}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Sabemos que el volumen de S está dado por

$$\operatorname{vol}(S) = \left|\det \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{v}}_1 & \vec{\mathbf{v}}_2 & \vec{\mathbf{v}}_3 \end{bmatrix}\right| = \left| \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \right| = |3| = 3.$$

Otra forma de calcularlo es

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(S) &= \left|(\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2)\cdot \vec{\mathbf{v}}_3\right| = \left|\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T\right)\cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right| = |3| = 3. \end{aligned}$$

El volumen de $T(S)$ puede ser calculado de (al menos) dos maneras:

(I) $\operatorname{vol}(T(S)) = |\det A \cdot \det S| = |-7\cdot 3| = |-21| = 21.$

(II) $\operatorname{vol}(T(S)) = \left|\det \begin{bmatrix} T(\vec{\mathbf{v}}_1) & T(\vec{\mathbf{v}}_2) & T(\vec{\mathbf{v}}_3) \end{bmatrix}\right| = \left| \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -6 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} \right| = |-21| = 21.$

Puntaje:

- Por indicar que el volumen de S se calcula usando el valor absoluto del determinante de $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (o, equivalentemente, como $\left|(\vec{\mathbf{v}}_1 \times \vec{\mathbf{v}}_2)\cdot \vec{\mathbf{v}}_3\right|$), 1 punto.
- Por calcular correctamente el volumen de S, 2 puntos.
- Por indicar alguna de las formas de calcular el volumen de $T(S)$, 1 punto.
- Por calcular correctamente el volumen de $T(S)$, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

5. Dados dos subespacios H y K de un espacio vectorial V, la *intersección* de H y K (que se denota por $H \cap K$) es el conjunto de todos los vectores en V que pertenecen tanto a H como a K; es decir,
$$H \cap K = \left\{ \overrightarrow{\mathbf{w}} \in V : \overrightarrow{\mathbf{w}} \in H \text{ y } \overrightarrow{\mathbf{w}} \in K \right\}.$$
Demuestre que $H \cap K$ es un subespacio de V.

Primera Solución:

Debemos demostrar que:

a) $\overrightarrow{\mathbf{0}} \in H \cap K$.
b) $H \cap K$ es cerrado bajo suma de vectores.
c) $H \cap K$ es cerrado bajo ponderación de vectores por escalares.

En efecto:

a) Como $\overrightarrow{\mathbf{0}} \in H$ y $\overrightarrow{\mathbf{0}} \in K$ (por el hecho de que H y K son subespacios de V), $\overrightarrow{\mathbf{0}} \in H \cap K$.
b) Sean $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in H \cap K$. Entonces $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in H$, por lo que $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} \in H$ (ya que H es subespacio de V). Análogamente, $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} \in K$, lo que, junto con lo anterior, implica que $\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}} \in H H \cap K$.
c) Sean $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in H \cap K$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in H$, por lo que $\lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} \in H$ (ya que H es subespacio de V). Análogamente, $\lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} \in K$, lo que, junto con lo anterior, implica que $\lambda \overrightarrow{\mathbf{u}} \in H \cap K$.

Segunda Solución:

Una forma alternativa de demostrar los dos últimos puntos es probar que $H \cap K$ es cerrado bajo "combinaciones lineales de dos de sus elementos": en otras palabras, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in H \cap K$ entonces $\alpha \overrightarrow{\mathbf{u}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{v}} \in H \cap K$.

En efecto: sean $\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}} \in H \cap K$. Entonces $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in H$, $\overrightarrow{\mathbf{u}} \in K$, $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in H$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}} \in K$. Como H es subespacio de V, es cerrado bajo ponderación por un escalar, por lo que $\alpha \overrightarrow{\mathbf{u}} \in H$ y $\beta \overrightarrow{\mathbf{v}} \in H$; del mismo modo, $\alpha \overrightarrow{\mathbf{u}} \in K$ y $\beta \overrightarrow{\mathbf{v}} \in K$. Pero H es cerrado bajo suma, por lo que $\alpha \overrightarrow{\mathbf{u}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{v}} \in H$; del mismo modo, $\alpha \overrightarrow{\mathbf{u}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{v}} \in K$, por lo que $\alpha \overrightarrow{\mathbf{u}} + \beta \overrightarrow{\mathbf{v}} \in H \cap K$.

Puntaje:

- Por mencionar que se debe demostrar que $\overrightarrow{\mathbf{0}} \in H \cap K$ (o, más generalmente, que $H \cap K \neq \varnothing$), y que $H \cap K$ es cerrado bajo suma y bajo ponderación (o, equivalente a estos últimos dos, que $H \cap K$ es cerrado bajo combinaciones lineales de dos de sus elementos), 1 punto.

  Nota: este punto se da incluso si no se menciona *explícitamente* que hay que demostrar las tres condiciones, siempre y cuando demuestren las tres (o al menos intenten demostrarlas). Por ejemplo, si demuestran que $H \cap K$ es cerrado bajo suma y ponderación (ver más abajo), pero omiten demostrar que $\overrightarrow{\mathbf{0}} \in H \cap K$, reciben solo 4 puntos, no 5.
- Por demostrar que $\overrightarrow{\mathbf{0}} \in H \cap K$, 1 punto.
- Por demostrar que $H \cap K$ es cerrado bajo suma, 2 puntos.
- Por demostrar que $H \cap K$ es cerrado bajo ponderación, 2 puntos.

  O, equivalente a estos últimos dos, por demostrar que $H \cap K$ es cerrado bajo combinaciones lineales de dos de sus elementos), 4 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

6. Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}$ el espacio vectorial de todas las matrices de 2×2, y defina $T:\mathcal{M}_{2\times 2}\to\mathcal{M}_{2\times 2}$ mediante $T(A)=2A-3A^T$ (donde A es una matriz de 2×2).

   a) Demuestre que T es una transformación lineal.

   b) Encuentre una matriz $A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w\end{bmatrix}$ tal que $T(A)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -5\end{bmatrix}$.

Solución:

a) Para probar que T es una transformación lineal, debemos probar que, dados $A,B\in\mathcal{M}_{2\times 2}$ y $c\in\mathbb{R}$, se cumple que $T(A+B)=T(A)+T(B)$ y $T(cA)=cT(A)$.
En efecto: ya que $(A+B)^T=A^T+B^T$ y $(cA)^T=c(A^T)$, tenemos que

$$\begin{aligned} T(A+B) &= 2(A+B)-3(A+B)^T = 2A+2B-3(A^T+B^T) \\ &= 2A+2B-3A^T-3B^T=(2A-3A^T)+(2B-3B^T)=T(A)+T(B) \end{aligned}$$

y

$$T(cA)=2(cA)-3(cA)^T=(2c)A-(3c)A^T=c(2A)-c(3A^T)=c(2A-3A^T)=cT(A).$$

b) Sea $A=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w\end{bmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned} T(A) &= 2A-3A^T=2\begin{bmatrix} x & y \\ z & w\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w\end{bmatrix}^T=2\begin{bmatrix} x & y \\ z & w\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} x & z \\ y & w\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x-3x & 2y-3z \\ 2z-3y & 2w-3w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -x & 2y-3z \\ 2z-3y & -w\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Así, $T(A)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -5\end{bmatrix}$ significa que $\begin{bmatrix} -x & 2y-3z \\ 2z-3y & -w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -5\end{bmatrix}$, por lo que

$$\left.\begin{aligned} -x \qquad\qquad\quad &= 1 \\ 2y-3z \quad &= 0 \\ -3y+2z \quad &= -5 \\ -w &= -5 \end{aligned}\right|$$

Resolviendo el sistema, tenemos que $x=-1$, $y=3$, $z=2$, $w=5$, por lo que

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5\end{bmatrix}.$$

Segunda Solución:

Una forma alternativa de demostrar que T es una transformación lineal es probar que, dadas $A,B\in\mathcal{M}_{2\times 2}$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, se cumple que

$$T(\alpha A+\beta B)=\alpha T(A)+\beta T(B).$$

Puntaje:

a)
- Por demostrar que $T(A+B) = T(A) + T(B)$, 1,5 puntos.
- Por demostrar que $T(cA) = cT(A)$, 1,5 puntos.

Alternativamente, si prueban correctamente que $T(\alpha A + \beta B) = \alpha T(A) + \beta T(B)$, se les dan los tres puntos de esta parte.

b)
- Por llegar a que $T(A) = \begin{bmatrix} -x & 2y-3z \\ 2z-3y & -w \end{bmatrix}$, 0,3 puntos.
- Por plantear el sistema de ecuaciones, 0,2 puntos.
- Por resolver el sistema, 0,8 puntos.
- Por llegar a que $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, 0,2 puntos.

Si resuelven el sistema llegando a un valor erróneo, se les da en total 1,0 punto. Si plantearon correctamente el sistema pero al resolver llegan a dos valores erróneos, no reciben puntaje por la resolución del sistema.

7. Sea W el subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ definido por

$$W=\left\{A\in\mathcal{M}_{2\times 2} : A^T=A\right\}.$$

a) Demuestre que $\mathcal{B}=\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}\right\}$ es una base de W.

Primera Solución:

Debemos demostrar que $\mathcal{B}$ genera W y que es l.i.

- Para demostrar que $\mathcal{B}$ genera W, consideramos un elemento genérico de W, y mostramos cómo representarlo como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.
  Sea $A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$.
  Buscamos x, y, z tales que

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y & 2x+3z\\ 2x+3z & z-3x\end{bmatrix}.$$

  Debemos resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{rrr} x+y & & =a\\ 2x & & +3z=b\\ -3x & & +\ \ z=c \end{array}\right|$$

  Este sistema tiene como única solución

$$x=\frac{b-3c}{11}, y=\frac{11a-b+3c}{11}, z=\frac{2c+3b}{11}.$$

  Así, A es combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$, por lo que $\mathcal{B}$ genera W.

- Para demostrar que $\mathcal{B}$ es l.i., debemos probar que $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ puede ser escrito como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$ en una única manera, a saber, como

$$0\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+0\begin{bmatrix}0 & 3\\ 3 & 1\end{bmatrix}.$$

  Pero, por lo discutido en el punto anterior, cada matriz de W puede ser escrita en forma única como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$. En particular, esto es cierto para $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

Segunda Solución:

Otra forma de demostrar que $\mathcal{B}$ es base de W consiste en probar que $\mathcal{B}$ genera W y que $\dim W\geq 3$.

La primera parte ya fue demostrada. Que $\dim W\geq 3$ puede ser probado, por ejemplo, argumentando que el conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ es l.i., por lo que toda base debe tener al menos 3 elementos.

Los detalles de cómo demostrar que el conjunto $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ es l.i. se dejan como ejercicio.

Tercera Solución:

Una tercera forma de demostrar que $\mathcal{B}$ es base de W consiste en probar que $\mathcal{B}$ es l.i. y que $\dim W \leq 3$.

La primera parte ya fue demostrada. Que $\dim W \leq 3$ puede ser probado, por ejemplo, argumentando que el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera W, por lo que toda base debe tener a lo más 3 elementos.

Los detalles de cómo demostrar que el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ genera W se dejan como ejercicio.

b) Sea $M = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Determine $\left[M\right]_{\mathcal{B}}$, vale decir, el vector de coordenadas de M en la base $\mathcal{B}$.

Solución:

Aprovechamos el trabajo hecho en la parte anterior para expresar M como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$,

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aquí, tomando $a = -2$, $b = 3$, $z = 1$, obtenemos

$$x = \frac{b - 3c}{11} = 0, y = \frac{11a - b + 3c}{11} = -2, z = \frac{2c + 3b}{11} = 1,$$

por lo que

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

En otras palabras, $\left[M\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Puntaje:

a)
- Por plantear una demostración correctamente estructurada, 1 punto.
  Nótese que una demostración correcta consiste, en general, de dos afirmaciones que deben ser demostradas independientemente (o bien que $\mathcal{B}$ genera W y es l.i., o bien que $\mathcal{B}$ genera W y $\dim w \geq 3$, o bien que $\mathcal{B}$ es l.i. y $\dim w \geq 3$, etc.).
- Por demostrar que $\mathcal{B}$ genera W (o que $\mathcal{B}$ es l.i.), 1 punto.
- Por demostrar la restante (o las restantes) afirmaciones que deben cumplirse para que $\mathcal{B}$ sea una base de W, 1 punto.

b)
- Por calcular correctamente los coeficientes de la combinación lineal de elementos de$\mathcal{B}$ que da como resultado $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, 2 puntos.
- Por escribir correctamente el vector de coordenadas pedido, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) Si B es una matriz invertible y $A = BC$, entonces cualquier sucesión de operaciones fila que transforma A en C debe reducir B a I.

   Solución:

   FALSO.

   Si $A = C = 0$ entonces A se reduce a C con cero operaciones fila, pero esto no reduce B a I.

   b) Si A es una matriz cuadrada tal que $\det(A^4) = 0$, entonces A no puede ser invertible.

   Solución:

   VERDADERO.

   Si $\det(A^4) = 0$, entonces $\det A = 0$, por lo que A no es invertible.

   c) Si B es una forma escalonada de una matriz A, entonces las columnas pivote de B forman una base para $\operatorname{Col} A$.

   Solución:

   FALSO.

   Considérese por ejemplo la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. La matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es una forma escalonada de A, y sus dos columnas son columnas pivote.

   Pero dichas columnas no generan $\operatorname{Col} A$: no existen escalares α y β tales que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (es imposible lograr que la tercera coordenada sea $\neq 0$).

   Puntaje:

   En cada parte, se dan los dos puntos si se da una justificación correcta. En las partes (a) y (c), una justificación correcta es un contraejemplo; en la (b) es una breve demostración.

   A lo anterior se le suma el punto base.