PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I3 MAT1203 - Algebra Lineal

Noviembre 7, 2014

1. *a*) [**3 pts.**] Considere la matriz A y su escalonada reducida

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 7 & -3 & 0 & -7 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -5 & 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine bases del espacio fila, espacio columna y espacio nulo de A.

b) [**3 pts.**] Sea F una matriz fija de 3×2, y sea H el conjunto de todas las matrices A en $\mathcal{M}_{2\times 4}$ con la propiedad de que $FA = 0$ (la matriz nula en $\mathcal{M}_{3\times 4}$). Determine si H es un subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 4}$. Justifique su respuesta.

a) i) Una base del espacio columna de A es el conjunto de las columnas pivotes de A (cols 1, 2, 5)

$$\mathcal{B}_{Col(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

ii) Las variables libres en $Ax=0$ son x_3, x_4, x_6

y
$$x_1 = 3x_3 - 2x_4 - 3x_6$$
$$x_2 = -x_3 - x_4 + x_6$$
$$x_5 = -x_6$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + x_6 \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$$

$$\therefore \mathcal{B}_{Nul(A)} = \{ v_1, v_2, v_3 \}$$

iii) Una base del espacio fila de A es el conjunto de las filas no nulas de $\mathrm{rref}(A)$

$$\beta_{Fil(A)} = \left\{ [1\ 0\ -3\ 2\ 0\ 3], [0\ 1\ 1\ 1\ 0\ -1] \right\}$$

b) Para que H sea un subespacio de $M_{2\times 4}$ debe cumplirse

i) $0 \in H$

ii) $A, B \in H \Rightarrow A+B \in H$

iii) $A \in H, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A \in H$

i) $F \cdot 0 = 0 \therefore 0 \in H$

ii) $A, B \in H \Rightarrow FA = 0, FB = 0 \therefore F(A+B) = \cancel{FA} + \cancel{FB}$ $= 0$

$\therefore A+B \in H$

iii) $A \in H, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow F(\alpha A) = \alpha FA = 0 \therefore \alpha A \in H$

Por i, ii, iii) F es subespacio de $M_{2\times 4}$.

2. a) [**2 pts.**] Los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -2, 3)$ y $\mathbf{v}_2 = (-2, 3, 1, 1)$ son l.i. Encuentre dos vectores $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ tales que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ sea una base de $\mathbb{R}^4$.

b) $T : P_1 \to P_2$ la transformación lineal cuya matriz respecto a las bases $B = \{1-x, 1+x\}$ de P_1 y la base $C = \{x, x+x^2, x^2+1\}$ de P_2 es $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

i) [**2 pts.**] Calcule $T(2+3x)$.

ii) [**2 pts.**] Demuestre que T es un operador 1-1 pero no sobre.

a) Sea $A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ entonces escalonando

$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 7/3 \end{bmatrix} = \text{rref}(A)$

completamos base agregando los vectores canónicos que completan la base de las filas no nulas de rref(A) $\therefore$ los vectores

$\{e_3, e_4\} = \{[0\ 0\ 1\ 0], [0\ 0\ 0\ 1]\}$ completan base (Hay infinitas maneras de completar base)

b)

i) $2+3x = \alpha(1-x) + \beta(1+x) \iff \begin{matrix} 2 = \alpha+\beta \\ 3 = \beta-\alpha \end{matrix} \iff \begin{matrix} \beta = \frac{5}{2} \\ \alpha = -1/2 \end{matrix}$

$\therefore [2+3x]_B = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$ con coordenadas de $T(2+3x)$ c.r.a la base C son

$A\begin{bmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/2 \\ -1/2 \\ -7/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ -7/2 \end{bmatrix}$

Por lo tanto

$T(2+3x) = 2(x) - 1/2(x+x^2) - 7/2(x^2+1)$

$= -\frac{7}{2} + \frac{3}{2}x - 4x^2$

ii)

- Como A tiene sus columnas l.i. A es 1-1 ⇒ T es 1-1
- Como $\dim(\mathrm{Col}(A)) = 2$ se tiene $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2$
  Como $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2 < 3 = \dim(\mathbb{P}_2)$
  T no es sobre

3. *a*) [**3 pts.**] Demuestre que si λ es valor propio de A entonces $\lambda^3 + 2\lambda - 5$ es valor propio de $A^3 + 2A - 5I$.

b) [**3 pts.**] Diagonalice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ y calcule A^{99}.

a) λ valor propio de $A \Rightarrow \exists x \neq 0$ tq $Ax = \lambda x$

$\therefore (A^3 + 2A - 5I)x = A^3x + 2Ax - 5x$

Luego $A^3 x = A(A(Ax))$
$= A(A(\lambda x))$
$= \lambda A(Ax)$
$= \lambda A(\lambda x)$
$= \lambda^2 Ax$
$= \lambda^2(\lambda x)$
$= \lambda^3 x$

$\therefore (A^3 + 2A - 5I)x = \lambda^3 x + 2\lambda x - 5x = (\lambda^3 + 2\lambda - 5)x$

$\therefore \lambda^3 + 2\lambda - 5$ es valor propio de $A^3 + 2A - 5I$ con vector propio x

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (A - \lambda I = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)$
$= -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

$\underline{\lambda = 1}$ $\quad A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore (A - I)x = 0 \to x_1 = -x_2 - x_3 \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\therefore W_{\lambda=1} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

multiplicidad algebraica de $\lambda = 1$ = mult. geometrica $= 2$

$\lambda = -1 \quad A+I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore (A+I)x = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = x_3 \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore W_{\lambda=-1} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Como las multiplicidades algebraicas son iguales a las multiplicidades geométricas para cada valor propio de A, se tiene que A es diagonalizable y

$A = V D V^{-1}$ con $V = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$A^{99} = (V D V^{-1})^{99} = V D^{99} V^{-1} = V \begin{bmatrix} 1^{99} & 0 & 0 \\ 0 & 1^{99} & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{99} \end{bmatrix} V^{-1} = V \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} V^{-1}$

$= A$

4. Determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA y justifique su respuesta (El indicar correctamente si es V o F sin una demostración no tiene puntos)

   a) [**1.5 pts.**] El conjunto $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : xy \geq 0,\ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$

   b) [**1.5 pts.**] Si $A^2 = A$ entonces $\lambda = 0$ es valor propio de A.

   c) [**1.5 pts.**] Si A es similar a la matriz diagonal D, entonces existe una única matriz P tal que $A = PDP^{-1}$.

   d) [**1.5 pts.**] Si A es una matriz de 6×8, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^6$ y el conjunto solución de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene dos variables libres, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tiene solución para todo $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^6$.

a) FALSO

W No es subespacio pues No es cerrado bajo la suma

Por ejemplo $\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} \in W$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in W$ pero

$\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \notin W$ pues $1 \cdot (-3) < 0$

b) FALSO

$A = I$ cumple con $A^2 = A$ y $\lambda = 0$ No es valor propio de I pues I tiene un único valor propio (repetido) igual a 1.

c) FALSO

$A = PDP^{-1}$ si P es una matriz invertible de vectores propios con valores propios correspondientes en la diagonal de D. Si $\bar{P}$ se obtiene de P escalando sus columnas entonces las cols de $\bar{P}$ forman también una base de vectores propios con valores propios en la diagonal de D y entonces $A = \bar{P} D \bar{P}^{-1}$ $\therefore$ La P No es única

Además, se pueden reordenar los elementos de la diagonal de D y las columnas de P e igualmente se tiene $A = \bar{P} \bar{D} \bar{P}^{-1}$.

d) VERDADERO

Si A es de 6×8 y $Ax=b$ tiene sol con 2 variables
libres entonces la escalonada reducida de A
tiene 6 columnas pivots y así $\operatorname{Dim}(\operatorname{Col}(A))=6$
Como $\operatorname{Col}(A) \subset \mathbb{R}^6$ y $\dim(\operatorname{Col}(A)) = \dim(\mathbb{R}^6)=6$
A es sobre (Hay otros teoremas que se pueden
usar) y por lo tanto $Ax=c$ tiene solución
para cada $c \in \mathbb{R}^6$