PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo Semestre 2013

MAT - 1610 * Interrogación 2

1. a) Sea f una función tal que $f(a) = 3$ y $f'(a) = -1$. Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} \left(\frac{0}{0}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{f'(a+x) - f'(a-x)(-1)}{1} \ \textbf{(2 puntos)}\\ &= 2f'(a) = -2 \ \textbf{(1 punto)}\end{aligned}$$

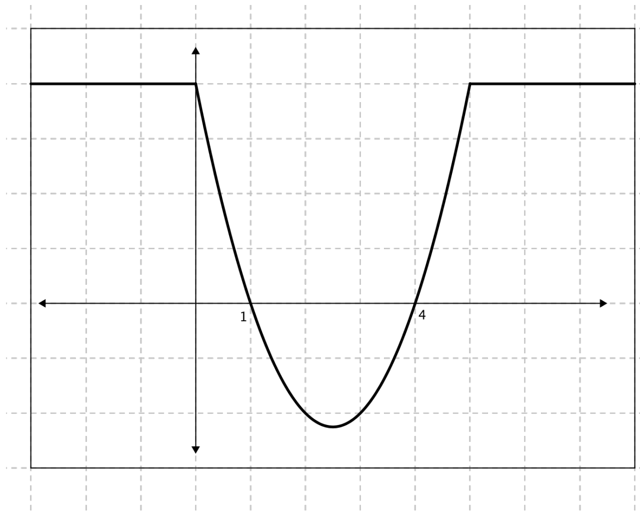
b) Calcule:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x t^2 \, \ln(1+4t^2)\, dt}{x^5}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x t^2 \ln(1+4t^2) dt}{x^5} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(1+4x^2)}{5x^4} \ \textbf{(1.5 puntos)}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{5x^2} \left(\frac{0}{0}\right)\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{8x}{1+4x^2}}{10x} \ \textbf{(1 punto)}\\ &= \frac{4}{5} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+4x^2} = \frac{4}{5} \ \textbf{(0.5 puntos)}\end{aligned}$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con el siguiente gráfico :



A partir de f se define la función

$$G(x) = \int_{x^2}^{0} f(t)dt$$

Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función G.
Solución:
Por T.F.C. tenemos que $G'(x) = -2xf(x^2)$ **(2 puntos)**, luego

$$G'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = -2, x = -1; x = 0, x = 1 \text{ o } x = 2 \quad \textbf{(1 punto)}$$

Realizando estudio de signos tenemos que:

Monotonía	creciente	decreciente	creciente	decreciente	creciente	decreciente
$G'(x)$	$+$	-	$+$	-	$+$	-
Intervalos	$]-\infty, -2[$	$]-2, -1[$	$]-1, 0[$	$]0, 1[$	$]1, 2[$	$]2, \infty[$
	(0.5 ptos)	**(0.5 ptos)**	**(0.5 ptos)**	**(0.5 ptos)**	**(0.5 ptos)**	**(0.5 ptos)**

3. a) Demuestre que

$$\frac{37}{84} < \int_1^3 \frac{3}{1+x^3} < \frac{11}{6}$$

Solución:

Como $f(x) = \dfrac{3}{1+x^3}$ es decreciente para la parte izquierda de la desigualdad tomamos la suma inferior para una partición de $[1,3]$ en dos sub-intervalos iguales, así

$$\frac{3}{1+2^3} + \frac{3}{1+3^3} = \frac{37}{84} < \int_1^3 \frac{3}{1+x^3}dx < \int_1^3 \frac{3}{x^3}dx = \frac{4}{3} < \frac{11}{6}.$$

- **(1 punto)** por cada partición.
- **(0.5 puntos)** por obtener cada desigualdad.

b) Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{t}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2t}{n}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) \right) = \frac{1-cos(t)}{t}$$

Solución:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{1}{t}\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen}\left(\frac{(i-1)t}{n}\right)\frac{t}{n} \ \textbf{(1.5 puntos)}$$

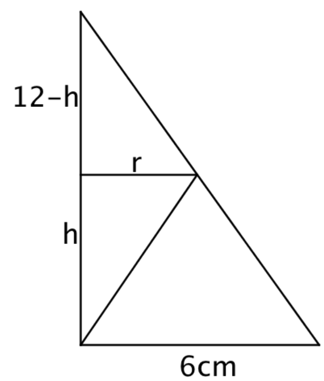
$$= \frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{sen}(x)dx, \text{ donde } \left\{ \begin{array}{l} \triangle x_1 = \dfrac{t}{n},\ x_{i-1} \leq \epsilon_i \leq x_i \\ \\ \epsilon_i = \operatorname{sen}(\epsilon_i) \text{ con } \epsilon_i = x_{i-1} = \dfrac{(i-1)t}{n.} \end{array} \right\} \textbf{(1 punto)}$$

$$= \frac{1-\cos(t)}{t} \ \textbf{(0.5 puntos)}$$

4. Se desea inscribir un cono circular recto en otro cono circular recto más grande, de manera que sus bases sean paralelas y que el vértice del cono inscrito se encuentre en el centro de la base del cono mayor. Si las dimensiones del cono mayor son 6 cm de radio y 12 cm de altura, determine la altura h y el radio r del cono inscrito de manera que su volumen sea máximo. (La fórmula de volumen para un cono cricular recto es V=$\frac{\pi}{3}\,r^2\,h$)

Solución:

Si hacemos un visión plana del problema planteado tenemos que $\frac{12}{6} = \frac{12-h}{r}$, luego $h = 12 - r$ **(1 punto)**. (ver figura)



De lo anterior tenemos que el volumen en función del radio es:

$$V(r) = \frac{\pi}{3} r^2 (12 - r) \textbf{ (1 punto)}$$

derivando obtenemos que $V'(r) = 8\pi r - \pi r^2$, entonces $V'(r) = 0$ si y sólo si $r = 8$ **(2 puntos)**, derivando una vez más tenemos que $V''(8) = -8\pi$, por lo tanto con $r = 8$ se obtiene el máximo de la función **(1 punto)**, luego las dimensiones del cono deben ser $r = 8$ y $h = 12$ **(1 punto)**.