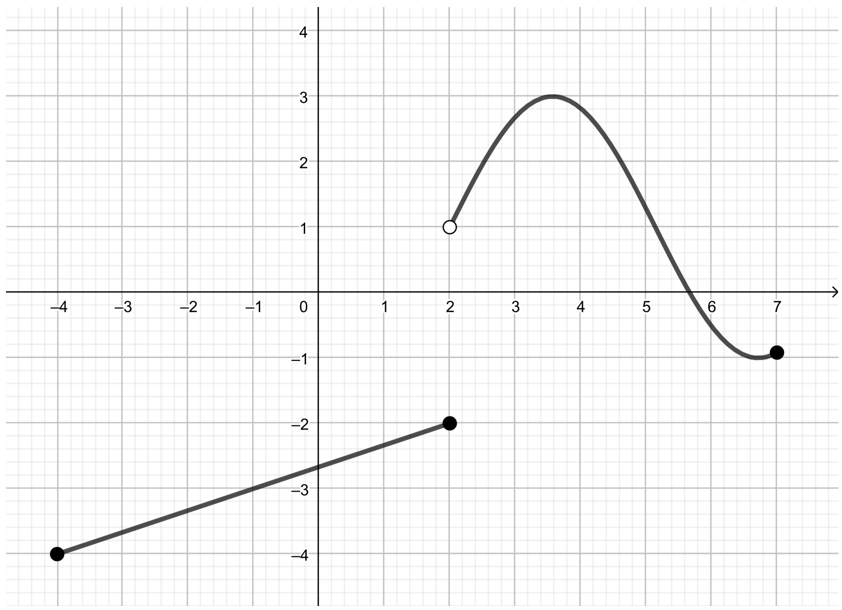
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2019

Pauta Interrogación 1 - MAT1610

1. Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x > 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

y g la función cuyo gráfico es el de la figura adjunta.



Estudie la existencia de $\lim\limits_{x\to 2} (f+g)(x)$.

Solución:

Observe que

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 - 3x = -2$$

y que

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 2^+} (f+g)(x) = -1$$

Análogamente tenemos que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 - 2x + 1 = 1$$

y que

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = -2$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 2^-} (f+g)(x) = -1$$

Como $\lim\limits_{x\to 2^-} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (f+g)(x) = -1$ tenemos que

$$\lim_{x\to 2} (f+g)(x) = -1$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por determinar límite lateral derecho de $f+g$
- (2 puntos) por determinar límite lateral izquierdo de $f+g$
- (2 puntos) por concluir la existencia del límite de $f+g$

2. Determine si los siguientes límites existen. En caso afirmativo calcúlelos.

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{x}$
   Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \\
&= 1 \cdot 1
\end{aligned}$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) por la amplificación adecuada o cambio de variable.
   - (1 punto) por el valor de límite notable
   - (1 punto) por resultado final

b) $\lim_{x\to 0^+} \ x\left[\frac{1}{x}\right]$ ($[x] :=$ parte entera de x)

Solución:

Observe que $\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}$, por lo tanto para $x > 0$ se tiene que

$$x\left(\frac{1}{x} - 1\right) \leq x\left[\frac{1}{x}\right] \leq 1$$

Adeás observamos que $\lim_{x\to 0+} x\left(\frac{1}{x} - 1\right) = \lim_{x\to 0+} 1 = 1$, entonces aplicando el Teorema del Sandwich tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \ x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por acotar
- (1 punto) por usar sandwich correctaemnte
- (1 punto) por concluir valor del límite pedido

3. Calcule los siguiente límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \ \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \ \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x} &= \lim_{x\to\infty} \ \frac{e^x(1/e^x - 1)}{e^x(1/e^x + 2)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \ \frac{1/e^x - 1}{1/e^x + 2} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por el álgebra usada
- (2 punto) por resultado final

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+4x-5}{|x^2+2x-3|}$

Solución:

Observe que si $x < -3$ tenemos que $x^2+2x-3 > 0$ por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+4x-5}{|x^2+2x-3|} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)(x+3)} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{x(1+5/x)}{x(1+3/x)} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por argumentar como deshacerse del valor absoluto
- (1 punto) por el álgebra
- (1 punto) por resultado final

4. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\operatorname{sen}(ax)}{x} + \cos(ax) & \text{si } x > 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ e^{a/x} + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

¿Para qué valores de $a > 0$ la función f es continua en $x = 0$?

Solución:

Para que f sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2$.

Observe que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = a^2 + 1$$

y que por ser $a > 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 2$$

por lo tanto la función es continua se debe cumplir que $a^2 + 1 = 2$, con $a > 0$ por lo tanto $a = 1$.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por evidenciar que necesita que los laterales existan y coincida con $f(0)$
- (1 puntos) por límite lateral derecho
- (1 punto) por límite lateral izquiero
- (1 punto) por condición de a
- (1 punto) por concluir

5. Demuestre que si $h(x) = x^2 + 7\text{sen}(x)$ entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $h(c) = 50$.

   Solución:

   Considere la función $f(x) = x^2 + 7\text{sen}(x) - 50$ y observe que f es continua en $[0, 10]$, además evaluando vemos que $f(0) = -50$ y que $f(10) = 50 + 7\text{sen}(10) > 48 > 0$, por lo tanto por TVI tenemos que, existe $c \in [0, 10]$ tal que $f(c) = 0$, lo que equivale a que, existe $c \in [0, 10]$ con $h(c) = 50$.

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) por armar función auxiliar
   - (1 punto) por decir que es continua
   - (2 puntos) por verificar punto donde es positiva y negativa
   - (2 puntos) por conclusión

6. Sea f una función continua y derivable en $x = 2$ tal que la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$ es $y = 3x - 1$. Determine $f(2)$, $f'(2)$ y el valor de

$$\lim_{x\to 2} \frac{(f(x))^2 - 25}{x - 2}$$

Solución:

Observe que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = 2$ tiene pendiente $f'(2)$ y pasa por el punto $(2, f(2))$, obteniendo que $f'(2) = 3$ y que $f(2) = 5$. Por otra parte, de la definición de derivada, tenemos que

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$$

y que, por ser f continua en $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 5$$

por lo tanto, usando álgebra de límites, tenemos que

$$\lim_{x\to 2} \frac{(f(x))^2 - 25}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} \cdot \lim_{x\to 2}(f(x) + 5) = 3 \cdot 10 = 30$$

Distribución de puntajes:

- (1 puntos) por determinar $f(2)$
- (1 punto) por determinar $f'(2)$
- (1 punto) por reconocer el límite correspondiente a $f'(2)$
- (1 punto) por justificar que el límite en $x = 2$ es 5
- (2 puntos) por concluir

120 MINUTOS.
SIN CONSULTAS.
TODA RESPUESTA DEBE SER JUSTIFICADA.