Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2015

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Solución a la Interrogación N° 2

1. [**Problema 3.5.31 del texto**]

   El conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ es una curva en el plano. Encuentre la ecuación de la recta que es tangente a esta curva en el punto $(1, 2)$.

   Solución:

   La ecuación de la recta tangente está dada por:

   $$y - 2 = y'(1, 2)(x - 1). \tag{1}$$

   Derivando implícitamente con respecto a x la ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se tiene:

   $$2yy' = 20x^3 - 2x \Leftrightarrow y' = \frac{10x^3 - x}{y} \Rightarrow y'(1, 2) = \frac{9}{2}.$$

   Por tanto la ecuación de la tangente es

   $$y - 2 = \frac{9}{2}(x - 1).$$

2. **[Problema 4.1.63 del texto]**

Sean m y n dos números positivos. Encuentre el valor máximo de

$$f(x) = x^m(1-x)^n$$

en el intervalo $[0,1]$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= mx^{m-1}(1-x)^n + nx^m(1-x)^{n-1}\cdot(-1) \\ &= x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m-(m+n)x], \end{aligned}$$

de donde haciendo $f'(x)=0$, resultan los puntos críticos:

$$x=0, \quad x=\frac{m}{m+n}, \quad x=1.$$

Nota: Otra posibilidad es considerar los extremos del intervalo ($x=0$, $x=1$) y buscar los puntos críticos distintos de 0 y 1, con lo que se llega a $x=\dfrac{m}{m+n}$.

Ahora evaluando en estos puntos resulta:

$$f(0)=f(1)=0 \;\text{ y }\; f\left(\frac{m}{m+n}\right)=\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

Nótese que $0 \leq \dfrac{m}{m+n} \leq 1$, por lo que el punto crítico está en el interior del intervalo $[0,1]$. Comparando los valores de f en los tres puntos encontrados anteriormente, y como m y n son positivos, el valor máximo de f es

$$\frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

3. **[Problema 3.9.10 del texto]**

Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = \sqrt{1+x^3}$. Cuando llega al punto $(2,3)$, su ordenada (coordenada y) va aumentando a razón de 4 cm/s.

¿Con qué rapidez está cambiando su abcisa (coordenada x) en ese instante?

Solución:

De la definición de y, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}.$$

Si le llamamos t_0 al momento en que la curva llega al punto $(2,3)$, entonces $\frac{dy}{dt}(t_0) = 4$ cm/s.

Además, en dicho punto se cumple que $\frac{dy}{dx}(t_0) = \frac{3 \cdot 2^2}{2\sqrt{1+2^3}} = \frac{12}{2\sqrt{9}} = \frac{12}{2 \cdot 3} = 2.$

Se nos pide calcular $\frac{dx}{dt}(t_0)$.

Por regla de la cadena,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy}{dx}}.$$

Así,

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \frac{\frac{dy}{dt}(t_0)}{\frac{dy}{dx}(t_0)} = \frac{4\text{cm/s}}{2} = 2\text{cm/s}.$$

4. **[Problema 4.2.27 del texto]**

Demuestre que, si $x > 0$, entonces $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$.

Primera Solución:

Sea $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{1+x}$. Así, $f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}} = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}$, por lo que:

$$\text{si } x > 0, \text{ entonces } f'(x) > 0. \tag{1}$$

Probaremos que $f(x) > 0$ para todo $x > 0$. En efecto, si existiera $x_0 > 0$ tal que $f(x_0) = 0$, entonces —por el Teorema de Rolle— existiría $c \in (0, x_0)$ tal qie $f'(c) = 0$, lo que contradice (1).

Así, $f(x) = 0$ es imposible para $x > 0$.

¿Qué ocurre si $f(x_1) < 0$ para algún $x_1 > 0$?

Como $f(1) = \dfrac{3}{2} - \sqrt{2} \approx 0,08 > 0$, por lo que —TVI, f es continua— existe x_0 entre 1 y x_1 tal que $f(x_0) = 0$. Pero ya demostramos que esto es imposible.

Así, si $x_1 > 0$, no puede darse que $f(x_1) = 0$ ni que $f(x_1) < 0$, por lo que necesariamente $f(x_1) > 0$, o sea, $\sqrt{1+x_1} < 1 + \frac{1}{2}x_1$.

Segunda Solución:

Debemos probar que la función

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \sqrt{1+x} > 0, \quad \text{si } x > 0.$$

Calculamos

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$$

Como $x > 0$, se tiene que $\sqrt{1+x} > 1$ y esto implica que $\frac{1}{\sqrt{1+x}} < 1$. Con esto $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$, entonces f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$. Como $f(0) = 0$, tendremos que $f(x) > 0$ en $(0, \infty)$.

5. **[Problema 4.4.38 del texto]**

Determine si el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$$

existe. Si existe, calcúlelo.

Solución:

Como $\ln(x-a)$ no está definido para $x < a$, el límite no existe.

También podemos calcular

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}.$$

Aplicamos la regla de L'Hospital. Como $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$, debemos calcular el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{\dfrac{1}{x-a}}{\dfrac{e^x}{e^x - e^a}} = \lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{(x-a)e^x}.$$

Como $\lim\limits_{x\to a} 1/e^x = 1/e^a$ debemos calcular $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{e^x - e^a}{x-a}$, y tenemos —al menos— dos caminos:

a) Observamos que esta también es una forma indeterminada y usamos L'Hospital otra vez:

$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{e^x}{1} = e^a.$$

b) Observamos que este límite es precisamente la definición de $(e^x)'$ evaluado en $x = a$, y como $(e^x)' = e^x$, tenemos que el límite es e^a.

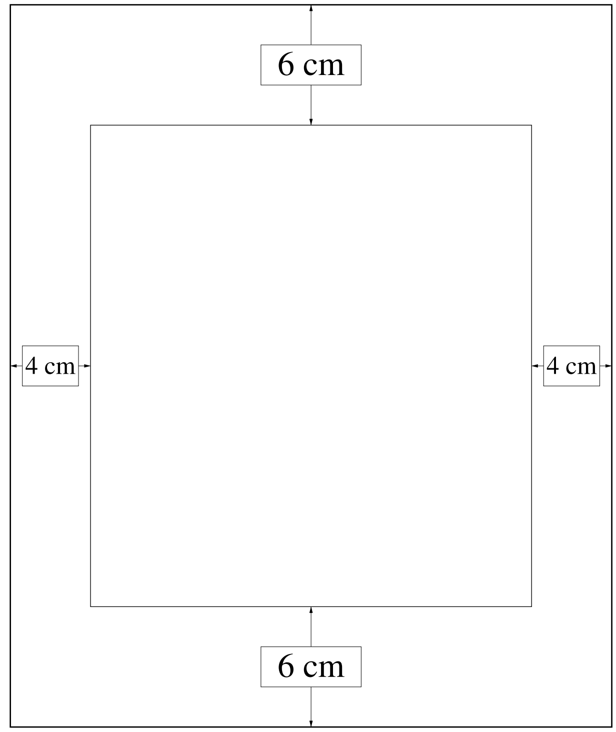
Juntando estos resultados obtenemos finalmente

$$\lim_{x\to a^+} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} = \lim_{x\to a} \cos x \lim_{x\to a} 1/e^x \lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{(x-a)} = (\cos a)\frac{1}{e^a} e^a = \cos a.$$

6. [**Problema 4.7.31 del texto**]

Los márgenes superior e inferior de un afiche miden 6 cm cada uno, mientras que los márgenes izquierdo y derecho miden 4cm (ver figura).

El área de impresión del afiche (la parte contenida *entre* los márgenes) mide 384 cm^2. Encuentre las dimensiones de este afiche, sabiendo que su área total es la mínima posible.



Solución:

Sean $x =$ largo del lado horizontal de la región de impresión, e $y =$ largo del lado vertical de la misma.

Se tiene que el área de la región de impresión es $x \cdot y$, luego

$$x \cdot y = 384.$$

También:

Área total del afiche $A = (x+8)(y+12)$.

Substituyendo $y = \frac{384}{x}$ obtenemos que debemos minimizar la funcion

$$A(x) = (x+8)\left(\frac{384}{x} + 12\right) \text{ con } x \in (0, \infty).$$

Derivando, obtenemos

$$A'(x) = 12 - 8\frac{384}{x^2}.$$

Como $A''(x) > 0$ en $(0, \infty)$ se tiene que el único punto crítico, que está dado por $x^2 = 8\frac{384}{12} = 256$, o sea $x = 16$, da un mínimo absoluto. (Alternativamente: como $A(x)$ tiende a ∞ cuando x tiende a cero o a infinito, la función debe tener un mínimo).

Así, las dimensiones del afiche deben ser:

Lado horizontal $16 + 4 + 4 = 24$, lado vertical $24 + 6 + 6 = 36$.

7. [**Problema 4.5.27 del texto**]

Estudie la función

$$f(x) = x - 3x^{1/3},$$

determinando sus raíces, simetrías, intervalos de crecimiento, máximos y mínimos locales, el sentido de la concavidad de f y si el gráfico posee asíntotas (y de ser así, cuáles).

Con esta información, esboce su gráfico.

Solución:

Raíces: Resolviendo la ecuación $f(x) = 0$ (o, equivalentemente, $x = 3x^{1/3}$) se llega a $x^3 = 27x$, o sea a $x(x^2 - 27) = 0$, de donde $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{27}$.

Simetrías: La función es impar, por lo que de ahora en adelante estudiaremos su comportamiento para $x > 0$ y para $x < 0$ se obtiene aplicando imparidad.

Intervalos de crecimiento: Para estudiar el comportamiento de f en términos de dónde crece (y, por complemento, dónde decrece), necesitamos analizar $f'(x) = 1 - x^{-2/3}$. La derivada $f'(x)$ es positiva donde $x^{-2/3} < 1$, lo que —dado que estamos restringiéndonos a $x > 0$— es equivalente a $x^{2/3} > 1$, o sea, a $x > 1$. Así, f crece en $[1, \infty)$, y por simetría en $(-\infty, -1]$. De paso, hacemos notar que f decrece en $[-1, 1]$, aunque esto no se pedía.

Máximos y mínimos locales: Los candidatos a máximos y mínimos locales son:

- Extremos del intervalo de definición:
  Como f está definida en todo $\mathbb{R}$, su intervalo de definición es $(-\infty, \infty)$, que no tiene extremos.
- Puntos donde no hay derivada:
  Como $f'(x) = 1 - x^{-2/3}$, el único punto donde ella no está definida es $x = 0$.
  Pero para x entre 0 y 1, como f decrece en $[0, 1]$ (de hecho, ya dijimos que decrece en $[-1, 1]$), tenemos $f(x) < f(0) = 0$; y por ser una función impar, si x está entre -1 y 0 se tiene $f(x) > f(0) = 0$. Así, $x = 0$ no es ni máximo local ni mínimo local.
- Puntos críticos (aquellos donde $f'(x) = 0$):
  Resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$ llegamos a $x^{-2/3} = 1$, que tiene por raíces a $x = \pm 1$. Ya sabemos que f crece en $(-\infty, -1)$ y decrece en $(-1, 0)$, por lo que $x = -1$ es un máximo local; por simetría, $x = 1$ es un mínimo local.
  Otra forma de llegar a este resultado es calcular $f''(x) = \dfrac{2}{3}x^{-5/3}$, y darse cuenta de que $f''(-1) = -\dfrac{2}{3} < 0$ y $f''(1) = \dfrac{2}{3} > 0$, por lo que —por el *test* de la segunda derivada— $x = -1$ es máximo local y $x = 1$ es mínimo local.

Sentido de la concavidad, puntos de inflexión: La función es cóncava hacia arriba en los puntos en que la segunda derivada es positiva, y cóncava hacia abajo en los puntos en que la segunda derivada es negativa.

Como $f''(x) = \dfrac{2}{3}x^{-5/3}$, $f''(x)$ es positiva (y por lo tanto f cóncava hacia arriba) para $x > 0$, y es negativa (y por lo tanto f cóncava hacia abajo) para $x < 0$.

Así, el único punto donde la concavidad cambia de sentido (o sea, el único punto de inflexión) es $x = 0$.

Asíntotas: f no tiene asíntotas verticales (de sus dos términos, ninguno se va a $\pm$ infinito cerca de valores reales).

En cuanto a asíntotas oblicuas u horizontales, vemos que f satisface:

$$\begin{aligned} m_\infty &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x - 3x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to\infty} 1 - 3x^{-2/3} = 1, \\ m_\infty &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 3x^{1/3}}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 - 3x^{-2/3} = 1. \end{aligned}$$

Así, no hay asíntotas horizontales, y de haber asíntotas oblicuas ellas deben tener pendiente 1.

Para que efectivamente haya asíntotas oblicuas dbe tenerse que los límites

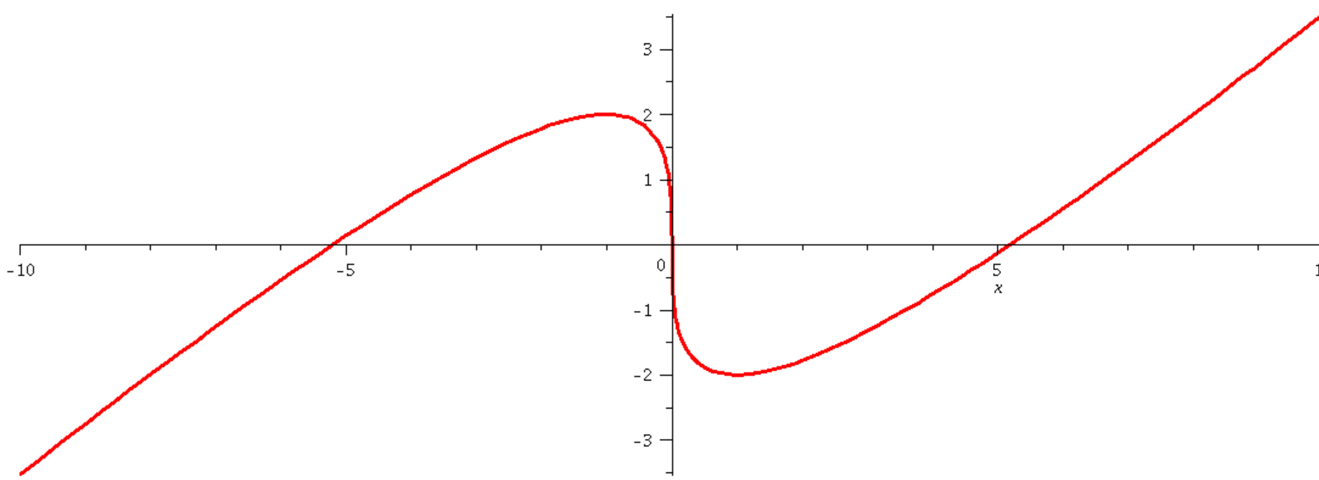
$$n_\infty = \lim_{x\to\infty} f(x) - m_\infty \cdot x \qquad \text{y} \qquad n_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} f(x) - m_{-\infty} \cdot x$$

(o al menos uno de ellos) existan (como límites finitos). Pero estos límites corresponden a

$$n_\infty = \lim_{x\to\infty} -3x^{1/3} = -\infty \qquad \text{y} \qquad n_{-\infty} = \lim_{x\to-\infty} -3x^{1/3} = \infty$$

que no son finitos. Así, f no tiene asíntotas oblicuas y por lo tanto no tiene ningún tipo de asíntota.

Con la información anterior, el gráfico queda como sigue:



8. Sea $f(x)=\cos(\ln(\sqrt{1+x}))$. Encuentre una fórmula para $f''(x)$, y evalúe $f''(0)$ y $f''(1)$.

Solución:

Derivamos dos veces:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{1+x}))\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+x}} = -\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{1+x}))\cdot\frac{1}{2(1+x)} = -\frac{\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{1+x}))}{2(1+x)}, \\ f''(x) &= \frac{-\cos(\ln(\sqrt{1+x}))+2\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{1+x}))}{4(1+x)^2}. \end{aligned}$$

Evaluamos

$$\begin{aligned} f''(0) &= -\frac{1}{4}. \\ f''(1) &= -\cos(\ln(2))\frac{1}{16}+\operatorname{sen}(\ln(\sqrt{2}))\frac{1}{8}. \end{aligned}$$