Límites infinitos

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1] Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2] LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

22 de Junio de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Límites infinitos

Definición.

1. Dada una sucesión $\{a_n\}$, se dice que el límite de a_n es más infinito y se escribe $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, para significar que, dado cualquier $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ implica $a_n > A$.
2. Análogamente, $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ significa que, para todo $A > 0$ dado, se puede encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Longrightarrow a_n < -A$.

Se debe enfatizar que $+\infty$ y $-\infty$ no son números y que, si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ no son convergentes.

Observación Como $\lim_{n\to\infty} (a_n) = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} (-a_n) = -\infty$, limitaremos nuestros comentarios al primer caso.

Límites infinitos

Proposición.

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ entonces la sucesión $\{a_n\}$ no está acotada superiormente.

EJEMPLO 1 El recíproco de la proposición anterior es falso. La sucesión dada por $a_n = n + (-1)^n n$ no está acotada superiormente, sin embargo no se tiene $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pues $a_{2n-1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión creciente.
Si $\{a_n\}$ no esta acotada, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

Límites infinitos

EJEMPLO 2 Se tiene que $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$

EJEMPLO 3 Probar que $\lim_{n\to\infty} \exp(n) = +\infty$.

Solución Usando la desigualdad fundamental

$$e^n \geqslant 1 + n \geqslant n$$

Haciendo $n \to \infty$ se ve que $e^n \to +\infty$.

EJEMPLO 4 Probar que $\lim_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$

EJEMPLO 5 Se tiene que $\lim_{n\to\infty} \arctan(n) = \dfrac{\pi}{2}$.

Límites infinitos

Teorema.

1. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y $\{b_n\}$ está acotada inferiormente, entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.
2. Si $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ y existe $c > 0$ tal que $b_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = +\infty$.
3. Si $a_n > c > 0$, $b_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ entonces $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty \, .$$
4. Si $\{a_n\}$ está acotada y $\lim_{n\to\infty} (b_n) = +\infty$ entonces $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Límites infinitos

Demostración

1. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $b_n \geqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado cualquier $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ entonces $a_n > A - c$.
   Se sigue que si $n > N$ entonces $a_n + b_n \geqslant A - c + c = A$. Luego $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$
2. Dado cualquier $A > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ implica que $a_n > A/c$. Luego si $n > N$ entonces
   $$a_n \cdot b_n > (A/c) \cdot b_n > (A/c) \cdot c = A$$
   por lo que $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty$.
3. Dado $A > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Longrightarrow b_n < c/A$.
   Entonces, $n > N \Longrightarrow a_n/b_n > c \cdot A/c = A$, de donde $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = +\infty$.

Límites infinitos

1. Existe $c > 0$ tal que $|a_n| \leqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Longrightarrow b_n > c/\varepsilon$. Entonces $n > N \Longrightarrow |a_n/b_n| < c \cdot \varepsilon/c = \varepsilon$, luego $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$.

EJEMPLO 6 Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ no implica que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$. Por ejemplo, si $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge a cero, pero $\dfrac{1}{a_n} = (-1)^n n$ no diverge a ∞ ni a $-\infty$.

Límites infinitos

EJEMPLO 7 Si $x > 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$.

En efecto, si $x > 1$ entonces $0 < \frac{1}{x} < 1$ entonces $b_n = \frac{1}{x^n} > 0$ y

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0$$

Por el inciso 3 del teorema se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$$