PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2021

Pauta Interrogación 2 - MAT1610

1. a) Sea $h(x) = g(xg^{-1}(x))$ con g una función invertible tal que

x	1	-1	0	2	-2
$g(x)$	-2	2	3	1	5
$g'(x)$	1	4	2	6	3

Si g^{-1} denota la inversa de g, determine $h'(2)$.
Solución:

Observe que por la regla de la cadena tenemos que

$$h'(x) = g'(xg^{-1}(x)) \cdot (xg^{-1}(x))'$$

ahora, por regla del producto y derivada de la inversa tenemos que

$$h'(x) = g'(xg^{-1}(x)) \cdot \left(g^{-1}(x) + \frac{x}{g'(g^{-1}(x))} \right)$$

obteniendo que

$$h'(2) = g'(2g^{-1}(2)) \cdot \left(g^{-1}(2) + \frac{2}{g'(g^{-1}(2))} \right) = g'(-2) \cdot \left(-1 + \frac{2}{g'(-1)} \right) = 3 \left(-1 + \frac{2}{4} \right) = -\frac{3}{2}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por realizar correctamente la regla de la cadena.
- (1 punto) por realizar correctamente la derivada de la inversa.
- (1 punto) por obtener $h'(2)$.

b) Determine la pendiente de la recta tangente a la curva

$$x^y = y^x$$

en el punto $(2, 4)$.
Solución:
Al aplicar logarítmo natural a la igualdad $x^y = y^x$ obtenemos

$$y \ln(x) = x \ln(y)$$

si derivamos con respecto a la variable x obtenemos que

$$y'\left(\ln(x) - \frac{x}{y}\right) = \ln(y) - \frac{y}{x}$$

así tenemos que

$$y' = \frac{\ln(y) - y/x}{\ln(x) - x/y}$$

luego la pendiente de la recta tangente a la curva en $(2,4)$ es $\dfrac{\ln(4) - 2}{\ln(2) - 1/2}$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por aplicar correctamente ln().
- (1 punto) por realizar correctamente la derivación implícita.
- (1 punto) por obtener el valor correcto de la pendiente.

2. a) Demuestre, usando el Teorema del valor medio o una consecuencia de éste, que si $x \in (0,1)$ entonces

$$\operatorname{arcsen}(x) > x$$

Solución 1:

Observe que la función $\operatorname{arcsen}(x)$ es continua en $[-1,1]$ y derivable en $(-1,1)$ por lo tanto dado $x \in (0,1)$ podemos usar el Teorema del Valor medio en el intervalo $[0,x]$ obteniendo como conclusión de éste que existe $c \in (0,x)$ tal que

$$(\operatorname{arcsen}(c))' = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}$$

como $c \in (0,x)$ se tiene que $\dfrac{1}{\sqrt{1-c^2}} > 1$, obteniendo que

$$\frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x} > 1$$

que equivale a la desigualdad pedida ya que $x > 0$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por verificar las hipótesis del TVM en el intervalo $[0,x]$.
- (1 punto) por la conclusión del TVM.
- (1 punto) por acotar la derivada y concluir la desigualdad pedida.

Solución 2:

Observe que $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$ y $g(x) = x$ son ambas funciones continuas en $[0,1]$ y derivables es $(0,1)$, además observamos que $f'(x) > g'(x) = 1$ para todo $x \in (0,1)$ y que $f(0) = g(0)$, por lo tanto $f(x) > g(x)$ para todo $x \in (0,1)$ obteniendo la desigualdad pedida.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por verificar las hipótesis del TVM en el intervalo $[0, 1]$.
- (1 punto) por observar que $f'(x) > g'(x)$
- (1 punto) por anotar que $f(0) = g(0)$ y concluir la desigualdad.

b) Una partícula se mueve a lo largo de la hipérbola $xy = 8$, con x e y medidos en cm. Cuando la partícula llega al punto $(4, 2)$ la coordenada y va aumentando a razón de $3cm/s$. ¿Con qué rapidez está cambiando su coordenada x en ese instante?

Solución:

Del problema vemos que x e y varían con respecto al tiempo t, si derivamos con respecto a t la ecuación de la hipérbola obtenemos

$$\frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt} = 0$$

al reemplazar los datos del anunciado tenemos

$$2\frac{dx}{dt} + 12 = 0$$

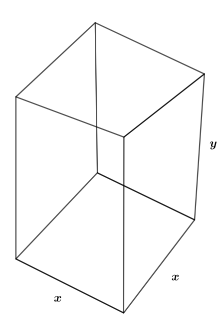
obteniendo que $\dfrac{dx}{dt} = -6$, por lo tanto, en ese instante, la coordenada x disminuye a razón de $6cm/s$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por derivar la igualdad correctamente.
- (1 punto) por obtener el valor de dx/dt.
- (1 punto) por responder la pregunta, ya sea indicando que disminuye a razón de $6cm/s$ o bien decir que cambia a razón de $-6cm/s$.

3. Una caja de base cuadrada, sin tapa, debe tener un volumen de 32.000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimizan el uso de material.

Solución:



Si denotamos por x e y las dimensiones de la caja, como muestra la figura, tendemos que el volumen es x^2y como este debe ser $32.000cm^3$, tenemos que $y = \dfrac{2^5\ 10^3}{x^2}$, luego el material que se usará en su construcción en función de x es:

$$M(x) = x^2 + \frac{2^7 10^3}{x} \text{ con } x \in (0, \infty)$$

para minimizar está función derivamos obteniendo que:

$$M'(x) = 2x - \frac{2^7 10^3}{x^2}$$

por lo tanto $M'(x) = 0$ si y sólo si $x = 40$.

Al estudiar el signo de $M'(x)$ tenemos que $M'(x) < 0$ para $x \in (0, 40)$ y $M'(x) > 0$ para $x \in (40, \infty)$ por lo que tenemos que $M(40)$ es el mínimo de la función que determina el material que se usará.

De lo anterior concluimos que, para minimizar el material, el lado de la base de la caja debe medir $40cm$ y el alto debe ser de $20cm$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por obtener la función $M(x)$ que describe el material en función de la medida de uno de sus lados.
- (1 punto) por derivar la función que se quiere minimizar.
- (1 punto) por determinar la solución de $M'(x) = 0$ (podría ser 20 o 40).
- (1 punto) por justificar que el punto crítico encontrado corresponde a un punto donde se encuentra el mínimo de la función (puede ser por 1er o 2do criterio de la derivada)
- (2 puntos) por dar las dimensiones de la caja, 1 por la medida de la base y 1 por la altura.

4. Determine todos los valores de a y b de modo que

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(at)}{t^2} + \frac{2}{t} + b \right) = -3$$

Solución:

Observe que

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(at)}{t^2} + \frac{2}{t} + b \right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(at) + 2t + bt^2}{t^2} \right)$$

es de la forma $0/0$ independiente de los valores de a y b, por lo tanto podemos usar L'Hôpital obteniendo que

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(at)}{t^2} + \frac{2}{t} + b \right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{a\cos(at) + 2 + 2bt}{2t} \right)$$

al detenernos en este límite observamos que el denominador tiende a cero, luego para que el límite de ese cociente exista el numerador debe tender a cero, es decir

$$\lim_{t\to 0}(a\cos(at)+2+2bt)=a+2=0$$

obteniendo que necesariamente $a=-2$, haciendo el reemplazo correspondiente tenemos que calcular el siguiente límite

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{-2\cos(-2t)+2+2bt}{2t}\right)$$

que también resulta ser de la forma 0/0, aplicando L'Hôpital nuevamente obtenemos que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{-2\cos(-2t)+2+2bt}{2t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-4\operatorname{sen}(-2t)+2b}{2}\right)=b$$

obteniendo que $b=-3$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por usar correctamente L'Hôpital la primera vez
- (2 puntos) por determinar el valor de a justificadamente.
- (1 punto) por aplicar correctamente L'Hôpital una vez más.
- (2 puntos) por determinar justificadamente el valor de b.

5. Considere la función $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+3\sqrt[3]{x}$ definida en el intervalo $[-2,1]$

   a) Determine los intervalos de monotonía de f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{2}+3\sqrt[3]{x}\right)' \\ &= 2\frac{1}{2}x+3\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\ &= x+x^{-\frac{2}{3}} \\ &= x+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{x^{\frac{5}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

$Dom(f'(x))=[-2,1]-\{0\}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{x^{\frac{5}{3}}+1}{x^{\frac{2}{3}}}=0\Leftrightarrow x^{\frac{5}{3}}+1=0\Leftrightarrow x=-1$.
Números críticos: $x=-1$, $x=0$.
Dado que $x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}>0$, el signo de f' lo determina el factor del numerador, $x^{\frac{5}{3}}+1$. Entonces,

$x^{\frac{5}{3}} + 1 < 0 \Rightarrow x^{\frac{5}{3}} < -1 \Rightarrow x < -1$ y $x \in Dom(f'(x)) \Rightarrow (-2, -1)$.
$x^{\frac{5}{3}} + 1 > 0 \Rightarrow x^{\frac{5}{3}} > -1 \Rightarrow x > -1$ y $x \in Dom(f'(x)) \Rightarrow x \in (-1, 0) \bigcup (0, 1)$.

Intervalos de crecimiento: $(-1, 0)$ y $(0, 1)$
Intervalos de decrecimiento: $(-2, -1)$

b) Determine extremos locales y globales de f.
$x = -1$ es un número crítico, $f'(x) < 0$ si $x \in (-2, -1)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (-1, 0)$ (cambio de signo), entonces en $x = -1$ se alcanza un valor mínimo local $f(-1) = -\frac{5}{2}$.

En $f(0) = 0$ no es valor máximo local ni valor mínimo local ya que $f'(x) > 0$ si $x \in (-1, 0)$ y también $f'(x) > 0$ si $x \in (0, 1)$ (no hay cambio de signo de la derivada).

En los extremos del intervalo se tiene:

$f(-2) = \frac{(-2)^2}{2} + 3\sqrt[3]{-2} = 2 - 3\sqrt[3]{2}$
Como $1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$, se tiene que $-\frac{5}{2} < 2 - 3\sqrt[3]{2} < -1$

$f(1) = \frac{1^2}{2} + 3\sqrt[3]{1} = 1 + 3\sqrt[3]{1} = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$
Por lo tanto,
El valor mínimo absoluto(global) es $f(-1) = -\frac{5}{2}$.
El valor máximo absoluto(global) es $f(1) = \frac{7}{2}$.

c) Determine intervalos de concavidad de f.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(x + x^{-\frac{2}{3}}\right)' \\ &= 1 - \frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} \\ &= 1 - \frac{2}{3x^{\frac{5}{3}}} \\ &= \frac{3x^{\frac{5}{3}} - 2}{3x^{\frac{5}{3}}} \end{aligned}$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^{\frac{5}{3}} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{\frac{8}{27}}$.
Note que:
$x^{\frac{5}{3}}$ tiene el mismo signo que x.
$3x^{\frac{5}{3}} - 2 < 0 \Rightarrow x < \sqrt[5]{\frac{8}{27}}$.
$3x^{\frac{5}{3}} - 2 > 0 \Rightarrow x > \sqrt[5]{\frac{8}{27}}$.

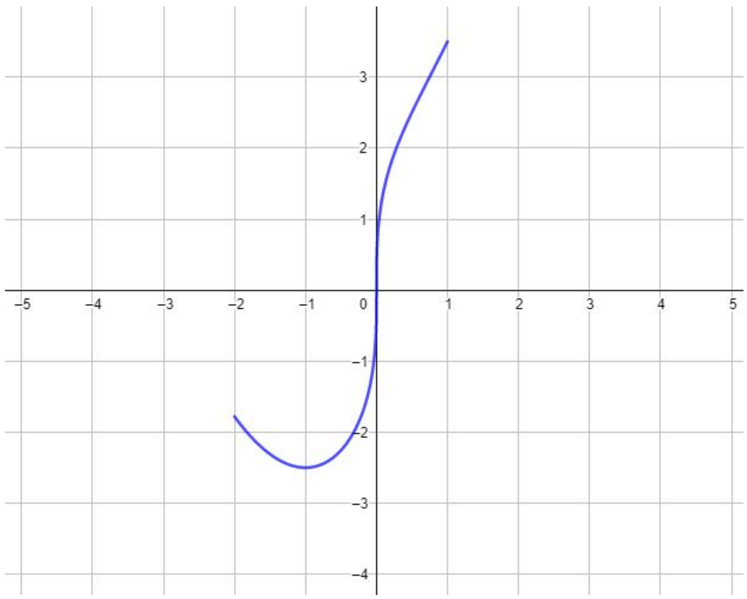
	$3x^{\frac{5}{3}}-2$	x	$f''(x)$
$-2<x<0$	-	-	$+$
$0<x<\sqrt[5]{\frac{8}{27}})$	-	$+$	-
$\sqrt[5]{\frac{8}{27}}<x<1$	$+$	$+$	$+$

Así,

f es cóncava hacia arriba en $(-2,0)$ y en $\left(\sqrt[5]{\frac{8}{27}},1\right)$

f es cóncava hacia abajo en $\left(0,\sqrt[5]{\frac{8}{27}}\right)$.

d) Esboce el gráfico de f.



Distribución de puntaje.

- (1 punto) Por determinar correctamente intervalos de crecimiento.
- (1 punto) Por determinar correctamente intervalos de decrecimiento.
- (1 punto) Por determinar correctamente el mínimo local y concluir sobre máximo local.
- (1 punto) Por determinar correctamente el valor máximo absoluto(global) y el valor mínimo absoluto(global).
- (1 punto) Por determinar correctamente intervalos de concavidad
- (1 punto) Por exhibir el esbozo de la gráfica correcta (si presenta análisis y las características solicitadas).
  En cada característica debe presentar el análisis respectivo.