PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Segundo Semestre 2020

MAT1610 - Cálculo I
Control formativo 2

Instrucciones:
✓Esta prueba tiene 1 página, que incluye 2 problemas en total, ambos con el mismo puntaje (6 puntos cada uno).
✓Desarrolle sus respuestas justificadamente. Todas sus justificaciones y argumentos de respuestas deben estar basados en resultados y teoremas estudiados en clase.

1. Suponga que las longitudes de los lados x, y, y z de una caja rectangular cerrada cambian a las siguientes tasas:

$$\frac{dx}{dt} = 1\,\text{m/s}; \quad \frac{dy}{dt} = -2\,\text{m/s}; \frac{dz}{dt} = 2\,\text{m/s}$$

Si los lados de la caja son 3 m, 10 m y 5 m, respectivamente, determine la tasa a la que cambia en ese instante

(a) el volumen de la caja.

(b) la longitud de su diagonal.
Nota: la longitud de la diagonal de una caja cuyos lados tienen longitud x, y, z es $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Solución

(a) Sea $V(t)$ el volumen de una caja cuyos lados tienen longitud $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en el instante de tiempo t (medido en segundos (s)), está dado por

$$V(t) = x(t)y(t)z(t)$$

entonces la tasa de cambio del volumen respecto del tiempo t, en el instante de tiempo t es:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}y(t)z(t) + x(t)\frac{dy}{dt}z(t) + x(t)y(t)\frac{dz}{dt}$$

En el instante en el que $x(t) = 3\text{m}$, $y(t) = 10\text{m}$ y $z(t) = 5\text{m}$, la tasa de cambio del volumen es:

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} &= \frac{dx}{dt}y(t)z(t) + x(t)\frac{dy}{dt}z(t) + x(t)y(t)\frac{dz}{dt} \\
&= 1\text{m/s} \cdot 10\text{m} \cdot 5\text{m} + 3\text{m} \cdot (-2)\text{m/s} \cdot 5\text{m} + 3\text{m} \cdot 10\text{m} \cdot 2\text{m/s} \\
&= 80\text{m}^3/\text{s}
\end{aligned}$$

(b) Sea $s(t)$ la longitud de la diagonal de una caja cuyos lados tienen longitud $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ en el instante de tiempo t (medido en segundos (s)), la cual está dada por

$$s(t) = \sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}$$

Entonces la tasa de cambio de la longitud de la diagonal de la caja respecto del tiempo t , en el instante de tiempo t es:

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{2x(t)\frac{dx}{dt} + 2y(t)\frac{dy}{dt} + 2z(t)\frac{dz}{dt}}{2\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}} = \frac{x(t)\frac{dx}{dt} + y(t)\frac{dy}{dt} + z(t)\frac{dz}{dt}}{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t))^2 + (z(t))^2}}$$

En el instante en el que $x(t) = 3\text{m}$, $y(t) = 10\text{m}$ y $z(t) = 5\text{m}$, la tasa de cambio de la longitud de la diagonal es:

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt}(t) &= \frac{x(t)\frac{dx}{dt} + y(t)\frac{dy}{dt} + z(t)\frac{dz}{dt}}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}} \\
&= \frac{3\text{m} \cdot 1\text{m/s} + 10\text{m} \cdot (-2)\text{m/s} + 5\text{m} \cdot 2\text{m/s}}{\sqrt{9\text{m}^2 + 100\text{m}^2 + 25\text{m}^2}} \\
&= -\frac{7\text{m}^2/\text{s}}{\sqrt{134}\text{m}} \\
&= -\frac{7\sqrt{134}}{134}\text{m/s}
\end{aligned}$$

Distribución de puntaje.

- **(0.5 punto)** Definir variables y función, parte (a).
- **(1 punto)** Por derivar correctamente, parte (a).
- **(0.5 punto)** Por reemplazar valores correctos en la derivada parte (a).
- **(0.5 punto)** Por obtener resultado correcto parte (a).
- **(0.5 punto)** Por responder en unidades correctas, parte (a).
- **(0.5 punto)** Definir variables y función, parte (b).
- **(1 punto)** Por derivar correctamente, parte (b).
- **(0.5 punto)** Por reemplazar valores correctos en la derivada, parte (b).
- **(0.5 punto)** Por obtener resultado correcto, parte (b).
- **(0.5 punto)** Por responder en unidades correctas, parte (b).

2. Considere $y(x)$ definida por la relación

$$xe^{\operatorname{senh}(y)} = 1.$$

(a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva asociada a $y(x)$ en el punto $(1,0)$.

(b) ¿Existe algún punto sobre la curva asociada a $y(x)$ que tenga recta tangente horizontal?

(c) Determine el polinomio de Taylor de grado 2 de $y(x)$ centrado en $x = 1$.

Solución

(a) Derivando implícitamente

$$\begin{aligned}
xe^{\operatorname{senh}(y)} = 1 \quad &\Rightarrow \quad e^{\operatorname{senh}(y)} + xe^{\operatorname{senh}(y)}\cosh(y)\frac{dy}{dx} = 0\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(x) = -\frac{e^{\operatorname{senh}(y)}}{xe^{\operatorname{senh}(y)}\cosh(y)}\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(x) = -\frac{1}{x\cosh(y)}
\end{aligned}$$

Notar que x debe ser positivo.
La fracción está bien definida ya que $x \neq 0$, $e^{\operatorname{senh}(y)} \neq 0$ y $\cosh(y) \neq 0$ y, por ello, el denominador es no nulo. Evaluando se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}(1) &= -\frac{1}{1\cdot\cosh(0)}\\
&= -\frac{1}{1\cdot 1}\\
&= -1
\end{aligned}$$

Entonces, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1,0)$ viene dada por $y - 0 = (-1)(x-1)$, es decir, $y = -x + 1$

(b) Para que la recta tangente en un punto (x,y) sea horizontal debe ocurrir la dicha recta tenga pendiente 0, es decir, que la derivada en x es igual a 0. Lo cual no puede ocurrir ya, para todo x, y

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{1}{x\cosh(y)} \neq 0$$

Entonces, no existen puntos donde la recta tangente a la curva en dicho punto sea horizontal.

(c) Para calcular el polinomio de Taylor de orden 2 se requieren los valores de la primera derivada y de la segunda derivada en $x = 1$. El primer valor se calculó en la parte (a).

Cálculo de la segunda derivada,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{1}{x\cosh(y)} \quad &\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x\cosh(y)}\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}(x) = -\frac{-1}{(x\cosh(y))^2}\frac{d}{dx}\left(x\cosh(y)\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{1}{(x\cosh(y))^2}\left(\cosh(y) + x\mathrm{senh}(y)\frac{dy}{dx}\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{\cosh(y) + x\mathrm{senh}(y)\frac{dy}{dx}}{(x\cosh(y))^2}
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \frac{\cosh(y) + x\mathrm{senh}(y)\frac{dy}{dx}}{(x\cosh(y))^2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}(1) = \frac{\cosh(0) + 1\mathrm{senh}(0)(-1)}{(1\cosh(0))^2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}(1) = \frac{1 + 1\cdot 0\cdot(-1)}{(1\cdot 1)^2} \\
&\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2}(1) = 1
\end{aligned}$$

Entonces, el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1, 0) = (x, y(x))$ es:
$P(x) = 0 + (-1)(x-1) + \frac{1}{2!}(x-1)^2 = 0 - x + 1 + \frac{x^2-2x+1}{2} = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{3}{2}$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por calcular correctamente la derivada, parte (a)
- **(0.5 punto)** Por calcular correctamente valor de la derivada en el punto, parte (a)
- **(1 punto)** Por determinar correctamente la ecuación de recta tangente, parte (a)
- **(1 punto)** Por argumentar y concluir correctamente (la conclusión sin argumento no tiene validez), parte (b)
- **(1 punto)** Por calcular correctamente la segunda derivada, parte (c)
- **(0.5 punto)** Por deteminar correctamente valor de la segunda derivada en el punto, parte (c)
- **(1 punto)** Por determinar correctamente la fórmula del polinomio de Taylor, parte (c)

Otra forma, más extensa pero, válida, para calcular la segunda derivada

$$
\begin{aligned}
e^{\text{senh}(y)} + xe^{\text{senh}(y)}\cosh(y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad & e^{\text{senh}(y)}\cosh(y)\frac{dy}{dx} \\
+ \quad & e^{\text{senh}(y)}\cosh(y)\frac{dy}{dx} + xe^{\text{senh}(y)}\cosh^2(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \\
+ \quad & xe^{\text{senh}(y)}\text{senh}(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xe^{\text{senh}(y)}\cosh(y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \\
\Rightarrow \quad & e^{\text{senh}(y)}\frac{dy}{dx}\left(2\cosh(y) + x\cosh^2(y)\frac{dy}{dx} + x\text{senh}(y)\frac{dy}{dx}\right) \\
+ \quad & xe^{\text{senh}(y)}\cosh(y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \\
\Rightarrow \quad & \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{e^{\text{senh}(y)}\frac{dy}{dx}\left(2\cosh(y) + x\cosh^2(y)\frac{dy}{dx} + x\text{senh}(y)\frac{dy}{dx}\right)}{xe^{\text{senh}(y)}\cosh(y)} \\
\Rightarrow \quad & \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{dy}{dx}\left(2\cosh(y) + x\cosh^2(y)\frac{dy}{dx} + x\text{senh}(y)\frac{dy}{dx}\right)}{x\cosh(y)}
\end{aligned}
$$

que también puede escribirse como:

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{-\frac{1}{x\cosh(y)}\left(2\cosh(y) + x\cosh^2(y)\left(-\frac{1}{x\cosh(y)}\right) + x\text{senh}(y)\frac{dy}{dx}\right)}{x\cosh(y)} \\
&= \frac{2\cosh(y) - \cosh(y) + x\text{senh}(y)\frac{dy}{dx}}{(x\cosh(y))^2} \\
&= \frac{\cosh(y) + x\text{senh}(y)\frac{dy}{dx}}{(x\cosh(y))^2}
\end{aligned}
$$

o, equivalentemente,

$$
\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cosh(y) - \tanh(y)}{(x\cosh(y))^2}
$$

Nota: se usó que $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\cosh(y)}$