Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
TAV 2022

MAT1610-Cálculo I
Pauta Examen MAT1610

1. Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{3x} \frac{\cos(2t^2) - 1}{3x^5} dt & \text{si } x > 0, \\ \\ x^2 + a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución:

Observamos que $x^2 + a$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto f es continua para $x < 0$, por otra parte el teorema Fundamental del Cálculo, asegura que $G(x) = \displaystyle\int_0^{3x} (\cos(2t^2) - 1)dt$ es derivable y por tanto continua en todo $\mathbb{R}$, luego el cociente $\dfrac{\int_0^{3x}(\cos(2t^2) - 1)dt}{3x^5}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y por lo tanto f es continua para todo $x > 0$. Por lo tanto basta buscar condicones para que f sea continua en cero, para esto se debe cumplir que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = a$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \int_0^{3x} \frac{\cos(2t^2)-1}{3x^5}dt \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{3x}(\cos(2t^2)-1)dt}{3x^5} \text{ que es de la forma } 0/0 \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos(18x^2)-1)(3)}{15x^4} \text{ que es de la forma } 0/0 \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-36x\,(\operatorname{sen}(18x^2))}{20x^3} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-36\,(\operatorname{sen}(18x^2))}{20x^2} \\
&= -\frac{162}{5},
\end{aligned}$$

por lo tanto $a = -\dfrac{162}{5}$.

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por justificar que es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
- (1 punto) por definición de continuidad en cero.
- (1 punto) por determinar que el primer límite es de la forma 0/0.
- (1 punto) por derivar correctamente usando TFC.
- (1 punto) por determinar que el segundo límite es de la forma 0/0.
- (1 punto) por determinar valor de a.

2. Dada la curva $f(x) = -x^{4/3} + 4x^{1/3}$, determinar los intervalos de crecimiento, decrecimiento, intervalos donde es cónvaca hacia arriba, cóncava hacia abajo, extremos locales , puntos de inflexión y bosquejar el gráfico de f.

   Solución: Notar que

$$f'(x) = -\frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}\left(\frac{1-x}{x^{2/3}}\right)$$

   De aquí tenemos que:

	$x \in (-\infty, 0)$	$x = 0$	$x \in (0, 1)$	$x = 1$	$x \in (1, \infty)$
$1 - x$	$+$	$+$	$+$	0	-
$x^{2/3}$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$\nexists$	$+$	0	-

Luego $x = 0$ y $x = 1$ son puntos críticos de f, y puesto que en $x = 1$ la derivada cambia de positiva a negativa tenemos que en $x = 1$ hay un máximo relativo , además concluimos que $x = 0$ no es extremo de f.

f es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$.

Ahora calculemos $f''(x)$.

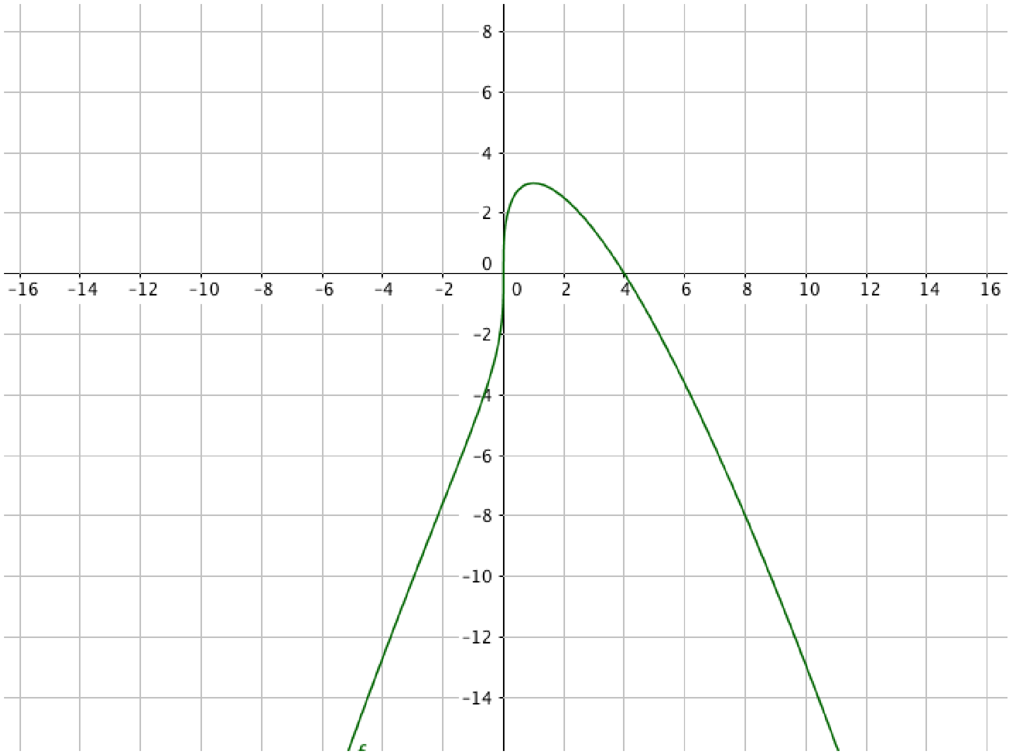
$$f''(x) = \frac{4}{3}\frac{-x^{2/3} - (1-x)(2/3x^{-1/3})}{x^{4/3}} = -\frac{4}{9}\left(\frac{x+2}{x^{5/3}}\right)$$

Luego la segunda derivada cambia según la tabla:

	$x \in (-\infty, -2)$	$x = -2$	$x \in (-2, 0)$	$x = 0$	$x \in (0, +\infty)$
$x + 2$	-	0	$+$	$+$	$+$
$-x^{5/3}$	$+$	$+$	0	-	-
f''	-	0	$+$	0	-

De la tabla concluimos que en $x = 0, x = -2$ hay puntos de inflexión y cuyas coordenadas son $(0, 0)$ y $\left(-2, -(-2)^{4/3} + 4(-2)^{1/3}\right)$ y además concluimos que f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y cóncava hacia arriba en (-2.0)

De lo anterior el gráfico de f es de la forma:



Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por concluir de la variación de f' los inverlaos de crecimiento y decrecimeinto.
- (1 Punto) Por concluir que en $x = 1$ hay un máximo relativo.
- (1 punto) Por calcular correctamente $f''(x)$.
- (1 punto) Por concluir los inverlaos de concavidad.
- (1 punto) por concluir los puntos de inflexión.
- (1 punto) Por graficar f de la información obtenida.

3. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

   b) $\displaystyle\int_0^1 x\arctan(x)dx$.

Solución:

a) Sea

$$\begin{aligned} x &= \sin(\theta) \\ dx &= \cos(\theta)d\theta \end{aligned}$$

entonces, para $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ se tiene:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \int \frac{\sin^3(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{1-\sin^2(\theta)}}d\theta \\ &= \int \frac{\sin^3(\theta)\cos(\theta)}{\sqrt{\cos^2(\theta)}}d\theta \\ &= \int \frac{\sin^3(\theta)\cos(\theta)}{\cos(\theta)}d\theta \\ &= \int \sin^3(\theta)d\theta \end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned} u &= \cos(\theta) \\ du &= -\sin(\theta)d\theta \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \sin(\theta)\sin^2(\theta)d\theta \\ &= \int \sin(\theta)(1-\cos^2(\theta))d\theta \\ &= -\int 1-u^2du \\ &= -u+\frac{u^3}{3}+C(C\in\mathbb{R}) \end{aligned}$$

de este modo

$$\begin{aligned} I &= -cos(\theta)+\frac{cos^3(\theta)}{3}+C \\ &= -\sqrt{1-x^2}+\frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{3}+C \end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por elegir el cambio $x = \sin(x)$ y reemplazar correctamente.
- (1 Punto) Por calcular $\int \sin^3(\theta) d\theta$
- (1 punto) Por escribir correctamente el resultado de la integral en términos de x.

b) Por integración por partes:
Hagamos $u = \arctan(x), \quad dv = x\ dx$, entonces tenemos: $du = \dfrac{1}{x^2+1}dx$, $v = \dfrac{x^2}{2}$.

$$\int_0^1 x \arctan(x) dx = \left[\frac{x^2 \arctan(x)}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Esta última integral la calculamos de la siguiente forma:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int_0^1 1dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [x - \arctan(x)]_0^1.$$

Por lo tanto:

$$\int_0^1 x \arctan(x) dx = \left[\frac{x^2 \arctan(x)}{2}\right]_0^1 - 1/2\,[x - \arctan(x)]_0^1 = \frac{1}{4}(-2+\pi).$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por aplicar correctamente integración por partes.
- (1 Punto) Por calcular $\int_0^1 \dfrac{x^2}{x^2+1}dx$
- (1 punto) Por calcular correctamen el valor de la integral.

4. Sea $\Re$ la región acontada por las curvas $y = x^2 - 6x + 9;\ y = -x^2 + 6x - 1$

   a) Determine el área de la región $\Re$.

   b) Usar el método de las capas cilíndricas para determinar el volumen del sólido de revolución que se genera al rotar $\Re$ a través de la recta $x = 8$.

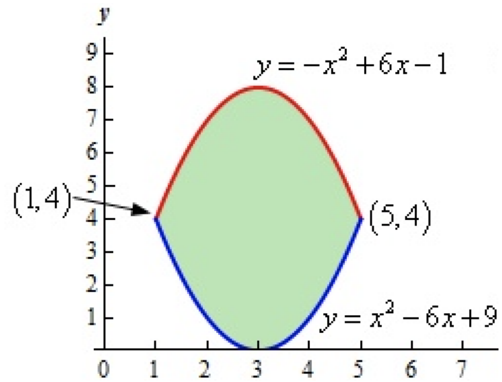
Solución:

a) Primero construimos el gráfico de la región $\Re$.

Notar que la intersección de las parábolas está dada por la ecuación:

$$x^2 - 6x + 9 = -x^2 + 6x - 1 \implies x = 1,\ x = 5.$$

Así el gráfico de la región es dado por:



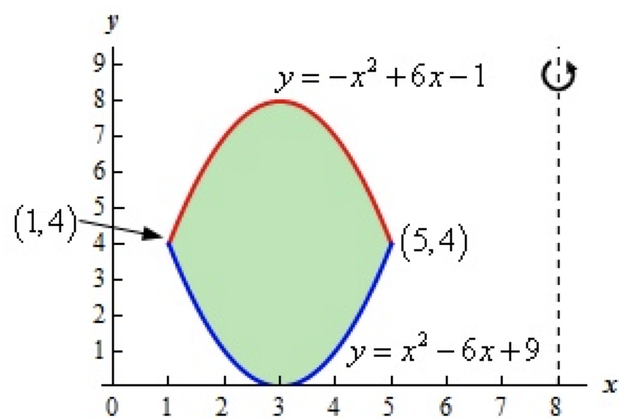
Por lo tanto el área entre las curvas es dado por:

$$A = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 1) - (x^2 - 6x + 9)dx = \int_1^5 (-2x^2 + 12x - 10)dx = \frac{64}{3}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por graficar correctamente la región con sus puntos de intersección.
- (1 Punto) Por plantear correctamente la integral que calcula el área.
- (1 punto) Por calcular el valor de la integral correctamente.

b) Necesitamos rotar la región $\Re$ en torno a la recta $x = 8$



Para ello notemos que:

radio de la capa cilíndrica en x es dada por $8 - x$.
la **altura de la capa cilíndrica en** x **es dada por:**

$$-x^2 + 6x - 1 - (x^2 - 6x + 9) = -2x^2 + 12x - 10.$$

Luego, el volumen es dado por

$$V = \int_1^5 2\pi(8-x)(-2x^2+12x-10)dx = \int_1^5 2\pi(-80+106x-28x^2+2x^3)dx = \frac{640}{3}\pi.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por identificar correctamente el radio de la capa ciíndrica y la altura.
- (1 Punto) Por plantear correctamente la integral que calcula el volumen.
- (1 punto) Por calcular el valor de la integral correctamente.