Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2020

Interrogación 2
MAT1107 - Introducción al Cálculo

(1) Encuentre el dominio y el recorrido de la función

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2}.$$

(3 puntos)

Solución.
Dominio:
El dominio de f corresponde a

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} : 2x - x^2 \geq 0\}. \tag{1}$$

Resolviendo la inecuación, obtenemos

$$\text{Dom } f = [0, 2]. \tag{2}$$

Recorrido:
Plantemos la ecuación

$$y = \sqrt{2x - x^2}.$$

Elevando al cuadrado, obtenemos

$$y^2 = 2x - x^2,$$

que se reordena como

$$x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

Esta ecuación tiene soluciones si y solo si

$$4 - 4y^2 \geq 0. \tag{3}$$

Resolviendo la inecuación, obtenemos $-1 \leq y \leq 1$.
Como $y \geq 0$, obtenemos $y \in [0, 1]$.
Por lo tanto, el recorrido es $[0, 1]$.

Puntaje:

Plantear (1): 0.5 puntos.

Obtener (2): 0.5 puntos.

Plantear alguna versión de (3): 1 punto.

Obtener $-1 \leq y \leq 1$: 0.5 puntos

Concluir: 0.5 puntos.

(2) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, sean $u_1 = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$, $u_2 = \dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$ y, para $n \geq 2$, sea

$$u_{n+1} = (a+b)u_n - ab u_{n-1}.$$

Demuestre que

$$u_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b},$$

para todo $n \geq 1$.

(3 puntos)

Solución.

Se verifica directamente que la afirmación es verdadera para $n = 1$ y $n = 2$.

H.I.: supongamos que $u_k = \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b}$ para todo $k \leq n$. En particular, esto es válido para $k = n$ y $k = n - 1$.

Se verifica directamente que

$$(a+b)u_n - ab u_{n-1} = (a+b)\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b} - ab\frac{a^n - b^n}{a - b} = \frac{a^{n+2} - b^{n+2}}{a - b}.$$

La afirmación sigue del principio de inducción fuerte.

Puntaje:

Verificar los caso $n = 1$ y $n = 2$: 0.5 puntos cada uno

Plantear la hipótesis de inducción: 0.5 puntos

Obtener el caso $n + 1$ de los dos anteriores: 1.0 punto

Invocar el principio de inducción fuerte para concluir: 0.5 puntos