Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2022

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 7

1. En el desarrollo de $\left(xy + \dfrac{2}{x^2y}\right)^{13}$, halle el coeficiente del término $\dfrac{y^3}{x^2}$.

   Solución. Por el teorema del binomio

$$\left(xy + \frac{2}{x^2y}\right)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} (xy)^{13-k} \left(\frac{2}{x^2y}\right)^k = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} 2^k \cdot x^{13-3k} \cdot y^{13-2k}\,.$$

   Para que contenga el término y^3/x^2 debe ocurrir que

$$\begin{cases} x^{13-3k} = \dfrac{1}{x^2} \\ y^{13-3k} = y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} 13 - 3k = -2 \\ 13 - 2k = 3 \end{cases} \iff k = 5$$

   Por lo que el coeficiente de y^3/x^2 es $\dbinom{13}{5} 2^5$.

Puntaje Pregunta 1.

- 3 puntos por usar de manera correcta el teorema del binomio.
- 1,5 puntos por obtener el valor de $k = 5$.
- 1,5 puntos por obtener el coeficiente.

2. Usando la definición de límite, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{n^2+n+1} = 3.$

Solución. Dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar N tal que si $n > N$, entonces

$$|a_n - L| = \left| \frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3 \right| = \left| \frac{-3n-2}{n^2+n+1} \right| = \frac{3n+2}{n^2+n+1}$$

debe ser menor que ε. Notemos que

$$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leqslant \frac{3n+2n}{n^2+n+1} = \frac{5n}{n^2+n+1} < \frac{5n}{n^2+n} = \frac{5}{n+1}$$

Imponiendo la condición a este último valor, vemos que

$$\frac{5}{n+1} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} < n+1 \Longleftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} - 1 < n\,.$$

Dado $a = 5/\varepsilon - 1$ por el principio de Arquimides existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a < N$. Entonces, si $n > N$ implica que

$$\frac{5}{\varepsilon} - 1 < n \Longleftrightarrow \frac{5}{n+1} < \varepsilon\,.$$

Se sigue que

$$|a_n - L| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} < \frac{5}{n+1} < \varepsilon\,,$$

como queríamos probar.

Puntaje Pregunta 2.

- 6 puntos por obtener de manera correcta la demostración.