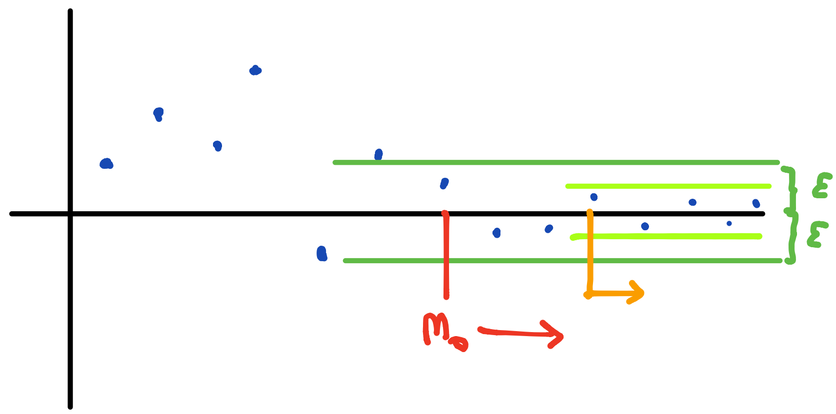
CLASE 25: LÍMITES

- **Recordemos**: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$



$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geq 1 \text{ tq } |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

- **Ej**: $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1} = 0$

DEM:

Sea $\varepsilon > 0$ (**Obs**: podríamos tener que asumir que ε es pequeño)

Buscamos $n_0 \geq 1$ tq

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| < \varepsilon .$$

Ahora,

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| < \varepsilon \iff (0<)\ \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} < n^2+1$$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n^2 \qquad (\varepsilon < 1)$$

$$\iff \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} < n$$

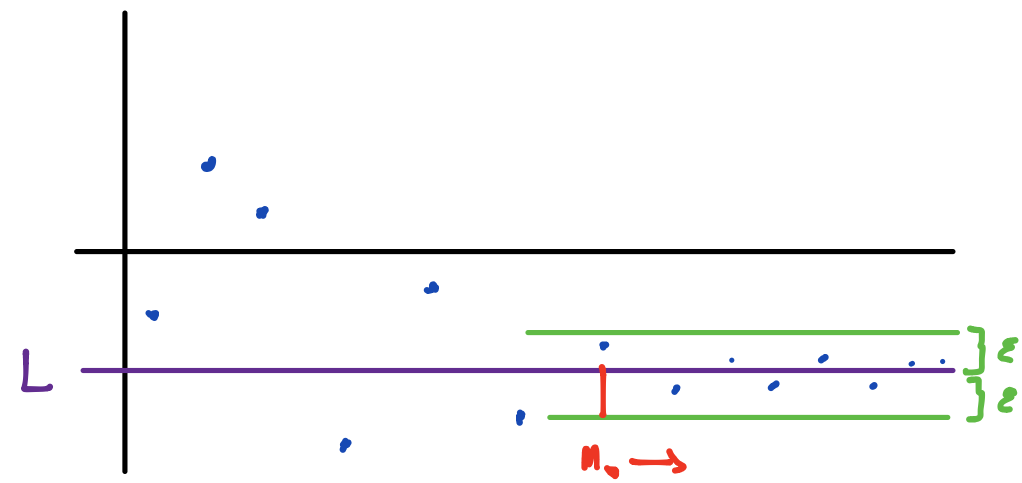
Luego, si $n_0 = \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right\rfloor + 1$, con $0 < \varepsilon < 1$, entonces

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n^2+1} \right| < \varepsilon$$

$\square$

- **DEF**: Sea $(a_n)_n$ una sucesión y $L \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \lim_{n\to\infty} (a_n - L) = 0$$



$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \geq 1 \text{ tal que}$$

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

• **Ej**: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = ?$

$n = 1000$

$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2.001} \simeq \frac{1}{2}$

$$\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\simeq 0}} \simeq \frac{1}{2}$$

Afirmación: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

DEM: Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos $n_0 \geq 1$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

Ahora,

$$\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2n-(2n+1)}{2(2n+1)} = \frac{-1}{2(2n+1)}$$

Luego,

$$\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\varepsilon} < 2n+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right) < n$$

Luego, si $n \geq n_0 = \lfloor \frac{1}{2}(\frac{1}{2\varepsilon}-1) \rfloor + 1$,

entonces $\left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$

$\square$

- Recordemos: $(a_n)_n$ es acotada si $\exists K>0$ tq $|a_n| \leq K \ \forall n \geq 1$.

  - $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow (a_n)_n$ es acotada.

- Ahora, supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Luego, $\lim_{n\to\infty} (a_n - L) = 0$

$\Rightarrow (a_n - L)_n$ es acotada: $\exists K>0$ tq

$$|a_n - L| \leq K \quad \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \ -K \leq a_n - L \leq K \quad \forall n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \ -K + L \leq a_n \leq K + L$$

Sea $\overline{K} = \text{máx}\{|-K+L|, |K+L|\}$.

Luego, $-\overline{K} \leq a_n \leq \overline{K}$, es decir,

$$|a_n| \leq \overline{K}.$$

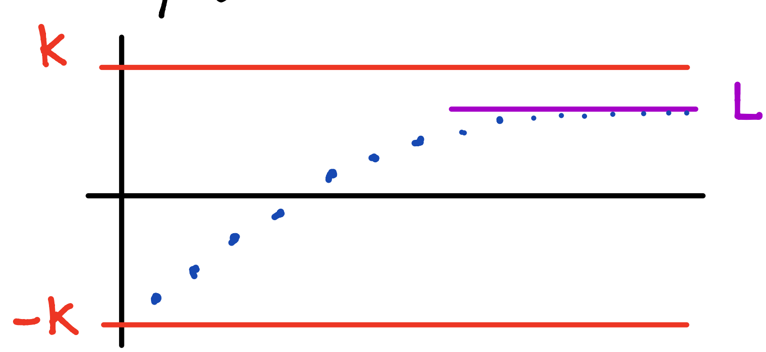
<u>Conclusión</u>: $\lim_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow (a_n)_n$ es acotada

- <u>Pregunta</u>: $(a_n)_n$ acotada $\Rightarrow$ converge ?

  <u>No</u> : sea $a_n = (-1)^n$.

  $|a_n| = 1 \Rightarrow (a_n)_n$ es acotada pero no converge.

- <u>Obs</u>: supongamos que $(a_n)_n$ es acotada y creciente.



- Axioma: toda sucesión creciente y acotada converge.

- Obs: lo mismo vale para sucesiones decrecientes y acotadas.

- Ej: $a_n = \frac{n}{n+1}$

  - $(a_n)_n$ es acotada:

$$0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1}\right| \leq 1$$

  - $(a_n)_n$ es creciente.

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{(n+1)+1} \Leftrightarrow n(n+2) < (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow n^2+2n < n^2+2n+1 \checkmark$$

Luego, $(a_n)_n$ converge. De hecho, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ (ejercicio)

• **Ej**: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Hace algunas clases, intuimos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Demostremos que $(a_n)_n$ es creciente y acotada:

• <u>$(a_n)_n$ es creciente:</u>

Demostremos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{(n+2)^n n^n}{(n+1)^{2n}}$$

$$= \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n$$

$$= \frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}\right)^n$$

$$= \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \ ; \quad (1+x)^n \geq 1+xn,\ x>-1$$

$$\geq \frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)$$

$$= \frac{(n+2)\left((n+1)^2-n\right)}{(n+1)^3}$$

$$= \frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3} > 1$$

- <u>$(a_n)_n$ es acotada</u>: $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

<u>Afirmación</u>: $0 \leq a_n < 3$

<u>DEM</u>:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}$$

$$\binom{m}{k}\frac{1}{m^k} = \frac{m\cdot(m-1)\cdot\dots\cdot(m-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{m^k}$$

$$= \frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\ldots\cdot\frac{m-k+1}{m}\cdot\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \leq \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}$$

Aber, $k! \geq 2^k$, $\forall k \geq 4$.

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{m}\right)^m \leq \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\sum_{k=4}^{m}\frac{1}{2^k}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^{m+1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\underbrace{\frac{\frac{1}{2^4}}{1-\frac{1}{2}}}_{\frac{1}{8}}$$

$$= 2+\frac{12+4+3}{24} < 3 \qquad \square$$