PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

# Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027
# Ayudantía 14

1. Sea $X_1, ...., X_n \overset{iid}{\sim} f_X$. Defina

$$X_{(1)} = \min\{X_1, ..., X_n\}, \quad X_{(n)} = \max\{X_1, ..., X_n\}$$

   (a) Encuentre una expresión para $f_{X_{(1)}}(x)$ y $f_{X_{(n)}}(x)$

   (b) Aplique los resultados encontrados cuando $F_X(x) = 1 - e^{-x^2}, x > 0$.

   (a) Para el mínimo se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
F_{X_{(1)}}(x) &= P(X_{(1)} \leq x) \\
&= 1 - P(min\{X_1, ..., X_n\} > x) \\
&\text{si el mínimo es mas grande} \\
&\text{que } x \text{ entonces todos los } x_i \text{ lo son.} \\
&= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, ..., X_n) \\
&= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) \\
&= 1 - P(X > x)^n \\
&= 1 - [1 - P(X < x)]^n \\
F_{X_{(1)}}(x) &= 1 - [1 - F_X(x)]^n, \quad \frac{d}{dx} \\
f_{X_{(1)}} &= n[1 - F_X(x)]^{n-1} f_X(x)
\end{aligned}$$

Para el máximo funciona de forma similar.

$$\begin{aligned}
F_{X_{(n)}}(x) &= P(X_{(n)} \leq x) \\
&= P(max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \leq x)
\end{aligned}$$

Si el máximo es menor que $x$, entonces todos los $x_i$ son menores que $x$.

$$\begin{aligned}
F_{X_{(n)}}(x) &= P(X_{(n)} \leq x) \\
&= P(max\{X_1, X_2, ..., X_n\} \leq x) \\
&= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, ..., X_n \leq x) \\
&= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \cdots P(X_n \leq x) \\
&= P(X \leq x)^n \\
F_{X_{(n)}}(x) &= F_X(x)^n, \quad \frac{d}{dx} \\
f_{X_{(n)}}(x) &= nF_X(x)^{n-1} f_X(x)
\end{aligned}$$

(b) Tenemos

$$F_X(x) = 1 - e^{-x^2}$$
$$f_X(x) = 2xe^{-x^2}, \quad x > 0$$

Ahora es llegar y reemplazar en los resultados anteriores. Para el mínimo se tiene

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)}}(x) &= n[1 - F_X(x)]^{n-1} f_X(x) \\ &= n[1 - (1 - e^{-x^2})]^{n-1} 2xe^{-x^2} \\ &= ne^{-nx^2 + x^2} 2xe^{-x^2} \\ &= 2nxe^{-nx^2}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

para el máximo se tiene

$$\begin{aligned} f_{X_{(n)}}(x) &= nF_X(x)^{n-1} f_X(x) \\ &= n[1 - e^{-x^2}]^{n-1} 2xe^{-x^2}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

2. Considere $X_i \stackrel{ind}{\sim} Exp(\mu_i)$, para $i = 1, 2, ..., n$. Defina $W = min\{X_1, ..., X_n\}$ y considere una muestra aleatoria $W_1, ..., W_j$. Encuentre la fdp de

$$Y = \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \mu_i} \sum_{i=1}^{j} W_i \right) + \theta$$

Vamos por partes. Primero encontremos la fdp de $W_i$, esto es, encontrar la fdp del mínimo. Note que en este caso los $X_i$ no son iid, por lo que no se puede aplicar directamente el resultado anterior. Recordando que si $X_i \sim Exp(\mu_i)$ entonces

$$F_{X_i}(x) = 1 - e^{-\mu_i x}$$
$$f_{X_i}(x) = \mu_i e^{-\mu_i x}$$

Teniendo esto en consideración se procede de la siguiente manera

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= P(X_{(1)} \leq x) \\ &= 1 - P(min\{X_1, ..., X_n\} > x) \\ &\text{si el mínimo es mas grande} \\ &\text{que } x \text{ entonces todos los } x_i \text{ lo son.} \\ &= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, ..., X_n) \\ &= 1 - P(X_1 > x) P(X_2 > x) \cdots P(X_n > x) \\ &= 1 - [1 - F_{X_1}(x)][1 - F_{X_2}(x)] \cdots [1 - F_{X_n}(x)] \\ &= 1 - e^{-\mu_1 x} e^{-\mu_2 x} \cdots e^{-\mu_n x} \\ F_{X_{(1)}}(x) &= 1 - e^{-\sum_{i=1}^{n} \mu_i x}, \quad \frac{d}{dx} \\ f_{X_{(1)}}(x) &= \sum_{i=1}^{n} \mu_i x e^{-\sum_{i=1}^{n} \mu_i x} \\ f_{X_{(1)}}(x) &= \mu^* e^{-\mu^* x}, \quad x > 0 \end{aligned}$$

con $\mu^* = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$. Note entonces que

$$W_i \sim Exp(\mu^*)$$

por lo que la v.a $Y$ se puede reducir a

$$Y = \left( \frac{1}{\mu^*} \sum_{i=1}^{j} W_i \right) + \theta$$

Mas aun, podemos encontrar la distribución de $\sum_{i=1}^{n} W_i$, ya que es la suma de exponenciales, y por lo visto en ayudantías, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{j} W_i \sim Gamma(j, \mu^*)$$

Podemos llamar $Z$ a esta ultima, de modo que

$$Y = \frac{1}{\mu^*} Z + \theta$$

con $Z \sim Gamma(j, \mu^*)$. Entonces ahora simplemente nos queda una transformación.

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(\frac{1}{\mu^*} Z + \theta \leq y) \\
&= P(Z \leq \mu^*(y - \theta)) \\
&= F_Z(\mu^*(y - \theta)) \\
F_Y(y) &= F_Z(\mu^*(y - \theta)), \quad \frac{d}{dy} \\
f_Y(y) &= \mu^* y f_Z(\mu^*(y - \theta)) \\
&= \mu^* \frac{(\mu^*)^j (\mu^*(y - \theta))^{j-1} e^{-(\mu^*(y-\theta))\mu^*}}{\Gamma(j)} \\
&= (\mu^*)^{2j} (y - \theta)^{j-1} e^{-(\mu^*)^2 (y-\theta)} \frac{1}{\Gamma(j)}
\end{aligned}$$

Ahora el recorrido, recordemos que si $Z \sim Gamma(j, \mu^*)$, entonces $z \in (0, \infty)$. Entonces

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{\mu^*} 0 + \theta = \theta \\
Y &= \frac{1}{\mu^*} \infty + \theta = \infty
\end{aligned}$$

Finalmente se tiene que

$$f_Y(y) = (\mu^*)^{2j} (y - \theta)^{j-1} e^{-(\mu^*)^2 (y-\theta)} \frac{1}{\Gamma(j)}, \quad y > \theta$$

3. Muestre que

$$f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) = n(n-1)[F_X(y) - F_X(x)]^{n-2} f_X(x) f_Y(y), \quad y > x$$

El truco está en la siguiente expresión

$$P(Y \leq y) = P(X \leq x, Y \leq y) + P(X > x, Y \leq y)$$

Lo cual tiene sentido, pues si estamos "barriendo" todo el recorrido de $X$, entonces nos entrega en este caso la acumulada de $Y$. De este modo se tiene que

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(Y \leq y) - P(X > x, Y \leq y)$$

Ahora, si consideramos $X = X_{(1)}$ y $Y = X_{(n)}$, se tiene

$$\begin{aligned}
P(X \leq x, Y \leq y) &= P(Y \leq y) - P(X > x, Y \leq y) \\
P(X_{(1)} \leq x, X_{(n)} \leq y) &= P(X_{(n)} \leq y) - P(X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y) \\
&= F_{X_{(n)}}(y) - P(min\{X_1, ..., X_n\} > x, min\{X_1, ..., X_n\} \leq y) \\
&= F_{X_{(n)}}(y) - P(x < X_1, X_2, ..., X_n \leq y) \\
&= F_{X_{(n)}}(y) - P(x < X_1 \leq y) P(x < X_2 \leq y) \cdots P(x < X_n \leq y) \\
&= F_{X_{(n)}}(y) - P(x < X \leq y)^n \\
&= F_{X_{(n)}}(y) - [F_X(y) - F_X(x)]^n \\
F_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) &= F_{X_{(n)}}(y) - [F_X(y) - F_X(x)]^n, \quad \frac{\partial}{\partial x \partial y} \\
f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) &= n(n-1)[F_X(y) - F_X(x)]^{n-2} f_X(x) f_Y(y), \quad y > x
\end{aligned}$$

Note que el recorrido $y > x$ se debe a que el máximo siempre es mayor que el mínimo.

4. Considere el caso $X_1, ..., X_n \sim Exp(1)$. Encuentre la distribución del rango, esto es

$$R_n = X_{(n)} - X_{(1)}$$

Como $X_1, ..., X_n$ la conjunta del máximo y del mínimo adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned}
f_{X_{(1)},X_{(n)}}(x,y) &= n(n-1)[F_X(y) - F_X(x)]^{n-2} f_X(x) f_Y(y) \\
&= n(n-1)[e^{-y} - e^{-x}]^{n-2} e^{-x} e^{-y}, \quad y > x > 0
\end{aligned}$$

Como ya tenemos la conjunta de $X_{(1)}, X_{(n)}$ podemos obtener fácilmente la distribución. Tomemos la variable auxiliar

$$W = X_{(1)}$$

Las inversas son

$$X_{(1)} = W, \quad X_{(n)} = R_n + W$$

El jacobiano es

$$|J| = 1$$

La conjunta queda como

$$\begin{aligned}
f_{R_n,W}(r,w) &= 1 f_{X_{(1)},X_{(n)}}(w, r+w) \\
&= n(n-1)[e^{-r-w} - e^{-w}]^{n-2} e^{-w} e^{-r-w} \\
&= n(n-1) e^{-w(n-2)} (e^{-r} - 1)^{n-2} e^{-2w-r}
\end{aligned}$$

Ahora el recorrido. Originalmente se tiene

$$0 < x < y < \infty$$

Entonces

$$\begin{aligned} x &< y \\ X_{(1)} &< X_{(n)} \\ 0 &< X_{(n)} - X_{(1)} \\ 0 &< R_n \end{aligned}$$

Y es fácil ver que $W > 0$. Entonces

$$f_{R_n,W}(r,w) = n(n-1)e^{-w(n-2)}(e^{-r}-1)^{n-2}e^{-2w-r}, \quad r,w > 0$$

Como nos interesa la marginal de $R_n$ integramos respecto de $w$.

$$\begin{aligned} f_{R_n}(r) &= \int_0^\infty n(n-1)e^{-w(n-2)}(e^{-r}-1)^{n-2}e^{-2w-r}dw \\ &= (n-1)(e^{-r}-1)^{n-2}e^{-r}\int_0^\infty ne^{-wn}dw \\ &= (n-1)(e^{-r}-1)^{n-2}e^{-r} \end{aligned}$$

Luego,

$$f_{R_n}(r) = (n-1)(e^{-r}-1)^{n-2}e^{-r}, \quad r > 0$$

5. **Propuesto:** Calcule $\mathbb{E}(XY)$ si

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 3\min\{x,y\}, & \text{si } 0 < x, y < 1 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

6. **Propuesto:** Sea $X_1, .., X_n$ una muestra proveniente de la distribución triangular

$$f_X(x) = 1 - |x|, \quad -1 \leq x \leq 1$$

   Encuentre una expresión para $\mathbb{E}(X_{(i)})$.