PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I3 MAT1203 - Algebra Lineal

Diciembre 2, 2014

1. *a*) Determine bases para el espacio columna, el espacio fila y el espacio nulo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Sea $L : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$L(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; L(x-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } L(x^2 - x + 1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre $L(a + bx + cx^2)$ para todo polinomio $a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 + 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rref}(A)$$ 0.9

cols pivotes 1, 4, 5

- Base Col(A) = $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ 0.7 (cols 1, 4, 5 de A)
- Base Fil(A) = $\{ [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1], [0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 2], [0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0] \}$ 0.7
  (Filas No Nulas de rref(A))
- Base Nul(A)

  $Ax = 0 \Rightarrow$ $x_1 = -x_2 - x_3 + x_6$, $x_4 = -2x_6$, $x_5 = 0$

  x_2, x_3, x_6 libres

  x_1, x_4, x_5 básicos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 + x_6 \\ x_2 \\ x_3 \\ -2x_6 \\ 0 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Base Nul}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ 0.7

b) $L(a+bx+cx^2) = a\,L(1) + b\,L(x) + c\,L(x^2)$ 0.8

Pero • $L(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

• $L(x) = L(x-1+1) = L(x-1) + L(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ 0.8

¡Anto ya Método correcto!

• $L(x^2) = L(x^2-x+1 \; +x-1) = L(x^2-x+1) + L(x-1)$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$ 0.8

0.6

$$\therefore \; L(a+bx+cx^2) = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ 2a+3b \\ 2a+5b+2c \\ a+3b+3c \end{bmatrix}$$

2. *a*) [**3 pts.**] Demuestre que $W = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : x \text{ es factor de } p(x)\}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 3, y determine una base de W.

b) [**3 pts.**] Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determine la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ y determine la distancia de b a $Col(A)$

a) Para demostrar que W es subespacio hay que dem

i) $0 \in W$

ii) $p, q \in W \Rightarrow p+q \in W$

iii) $p \in W, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha p \in W$

0.7 pts (resolución)

i) $0 = x \cdot 0 \quad \therefore$ x es factor de $q(x)$ 0.4

ii) $p, q \in W \Rightarrow q = x\,r(x)$, $p(x) = x\,s(x)$ $\quad r, s \in \mathbb{P}_2$ 0.5

$\Rightarrow p+q = x\,r(x) + x\,s(x)$

$= x\,(r(x) + s(x))$

Pero $r+s \in \mathbb{P}_2 \quad \therefore p+q \in W$.

iii) $p \in W, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow p = x\,r(x)$ $\Rightarrow \alpha p = x\,(\alpha r(x)) \in W$

$(r \in \mathbb{P}_2)$ $\qquad (\alpha r \in \mathbb{P}_2)$ 0.4

Por i, ii, iii) se tiene que W es subespacio de $\mathbb{P}_3$

- Encontremos una base para W

$p \in W \Rightarrow p = x(ax^2+bx+c) = ax^3+bx^2+cx$

$\therefore W = \langle x^3, x^2, x \rangle$

Como x^3, x^2, x son l.i. tenemos que una base de W es $\quad \mathcal{B}_W = \{x^3, x^2, x\}$

(Hay una infinidad de bases)

1 pto

Si demuestra $W = \langle\ \rangle$, dicen que es subespacio 1.0

b) Hay que resolver las ecuaciones normales $A^TAx = A^Tb$ 0.6 (método)

- $A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 0.5
- $A^Tb = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 0.4

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad x_1 = 1, \ x_2 = 0, \ x_3 = 1$$

$\therefore$ La sol de mínimos cuadrados de $Ax=b$ es $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 0.5

- La distancia de b a Col(A) es $\|b - Ax\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{3}$ 1 pto

3. Considere la forma cuadrática

$$F(x) = 2\,{x_1}^2 - 2\,x_1x_2 + 2\,x_1x_3 + 2\,{x_2}^2 - 2\,x_2x_3 + 2\,{x_3}^2$$

i) Determine la matriz simétrica A tal que $F(x) = x^T Ax$

ii) Diagonalice ortogonalmente la matriz A

iii) Usando la respuesta obtenida en ii) clasifique la forma cuadrática $F(x)$

i) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 1.5

ii) El polinomio característico de A es

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$$ 1 pto

$$= -(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$$ 0.5

- $\underline{\lambda = 4}$ $\quad B_1 = A - 4I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad \text{Null}(B_1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ 0.3

- $\lambda = 1$ $\quad B_2 - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \text{Null}(B_2) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ 0.3

Una base de vectores propios es $\quad \lambda = 1 \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda = 4 \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ortonormalizamos cada base.

$$\hat{v}_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{-1}{2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ 0.5

$$= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$ 0.5

$$\hat{u}_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \hat{u}_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Una matriz ortogonal de vectores propios es

$$V = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

0.9

¡Hay otras posibles respuestas!

$$A = VDV^T$$

iii) Puesto que los valores propios de A son positivos la forma cuadrática es positiva definida.

1. pts

Si un alumno igualmente dem por el criterio de los determinantes que es pos def asignar igualmente el pto!

4. Determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA y justifique su respuesta (El indicar correctamente si es V o F sin una demostración no tiene puntos)

   a) Si A, B son matrices de $n \times n$ y $det(AB) = 0$ entonces $det(A) = 0$ o $det(B) = 0$

   b) Si la proyección ortogonal de $[1, 2, 3, -1]^T$ en un subespacio W es $[2, -1, 1, 1]^T$ entonces la proyección ortogonal de b en $W^{\perp}$ es $[-1, 3, 2, -2]^T$

   c) Si $||x|| = 1$, $||x - 2y|| = 6$, $||y|| = 4$ entonces el producto punto de x con y es $x \cdot y = 1$

   d) La matriz de proyección en $W = Gen\{[2, -1, 1]^T\}$ es $P = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) VERDADERO: $0 = det(AB) = det(A)det(B) \Rightarrow det(A) = 0$ o $det(B) = 0$ 1.5

b) FALSO: $[-1,3,2,-2] \cdot [2,-1,1,1] = -5$ $\therefore$ No son $\perp$'s. $= 6-1(4)$

La observación que la proyección $\perp$ de $[1,2,3,-1]^T$ en W es $[2,-1,1,1]^T$ No puede ser cierta. 1.5

Si asumen P(b) es correcto y la suma ... 1.5

Estrictamente hablando si la hipótesis es FALSA entonces la conclusión es VERDADERA

c) FALSO

$36 = ||x-2y||^2 = (x-2y) \cdot (x-2y) = x \cdot x - 4x \cdot y + 4y \cdot y$ 0.5

$= ||x||^2 - 4x \cdot y + 4||y||^2$ 0.5

$= 1^2 - 4(x \cdot y) + 4 \cdot 16 = 65 - 4x \cdot y$ 0.5

$\therefore x \cdot y = \frac{65-36}{4} \neq 1$ 0.5

d) Verdadero

$Col(P) = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = W$ 0.5

y además $P^2 = P$ y $P^T = P$ 0.3 P es matriz de proyección en $Col(P) = W$ 0.2

Otra sol es calcular $P = A^T(A^TA)^{-1}A$ 0.5 con $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{6}\right) \cdot [2\ -1\ 1]$ 0.5

$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 0.5