Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2022

Álgebra Lineal - MAT1203
PAUTA Interrogación 3

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
   (a) La dimensión del espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales de grado a lo más 4 es 4 .
   (b) Si el espacio vectorial V se genera con el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ entonces $\dim V = 3$.

Solución :

(a) Falso. El espacio tiene dimensión 5 ya que una base del espacio vectorial es $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ que tiene 5 elementos.
(b) Falso. Si $v_1 = v_2 = v_3$ y $V = \text{Gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ entonces $\dim V = 1$.

Puntaje

- 1 puntos por decidir correctamente si cada ítem es verdadero o falso (2 en total).
- 2 puntos por justificar correctamente cada ítem (4 en total).

2. Si una matriz A de 7×5 tiene rango 2 , determine $\dim(\text{Nul}(A))$, $\dim(\text{Fil}(A))$, el rango de A^T y $\dim(\text{Nul}(\mathrm{A}^\mathrm{T}))$.

Solución Por el teorema del rango,

$$\dim \text{Nul}\, A + \text{ rango } (A) = 5,$$

por lo que $\dim \text{Nul}(A) = 3$.

Además, $\dim \text{Fil}(A) = \text{rango}(A) = 2$.

Por otro lado, $\text{rango}(A^T) = \text{rango}(A) = 2$.

Finalmente, por el teorema del rango pero ahora aplicado a A^T (matriz de 5×7) se tiene
$$\dim \mathrm{Nul}(A^T) + \text{ rango } (A^T) = 7$$
lo que implica que $\dim \mathrm{Nul}(A^T) = 5$.

Puntaje

- 2 puntos por determinar $\dim \mathrm{Nul}(A)$.
- 1 punto por determinar $\dim \mathrm{Fil}(A)$.
- 1 punto por determinar rango de A^T.
- 2 puntos por determinar $\dim \mathrm{Nul}(A^T)$.

3. En $\mathbb{P}_2$, el espacio de los polinomios de grado a lo más dos, encuentre la matriz de cambio de coordenadas de la base
$$\mathcal{B} = \left\{1 - 2t + t^2, 3 - 5t + 4t^2, 2t + 3t^2\right\}$$
a la base estándar de $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$. Luego, encuentre el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas para $-1 + 2t$

Solución La matriz de cambio de coordenadas desde $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ es
$$M_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \big[[1-2t+t^2]_{\mathcal{B}} \quad [3-5t+4t^2]_{\mathcal{B}} \quad [2t+3t^2]_{\mathcal{B}}\big] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$
Se tiene que
$$M_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}[-1+2t]_{\mathcal{B}} = [-1+2t]_{\mathcal{C}}$$
es decir
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{x} = [-1+2t]_{\mathcal{B}}.$$
Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene $[-1+2t]_{\mathcal{B}} = \vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Puntaje

- 2 puntos por determinar la matriz $M_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$.
- 2 puntos por establecer la relación que cumple M y los vectores de coordenadas. Esto puede ser a través de la ecuación matricial que se ve en la solución o directamente a través de un sistema de ecuaciones.
- 2 puntos por determinar el vector de $\mathcal{B}$-coordenadas de $-1+2t$.

4. Sea A una matriz cuadrada invertible que cumple que $A^4 - 7A^3 = 0$. Explique porqué 7 es un valor propio de A.

(Pista: Puede aplicar determinante a la ecuación del enunciado)

Solución 1 Como $A^4 - 7A^3 = 0$ entonces $A^3(A - 7I) = 0$. Aplicando determinante:

$$\det(A^3(A - 7I)) = 0 \Longrightarrow |A|^3|A - 7I| = 0$$

Como A es invertible, entonces $|A| \neq 0$, por lo que $|A - 7I| = 0$, lo que implica que 7 es raíz del polinomio característico de A y por lo tanto un valor propio.

Solución 2 Como A es invertible existe la matriz $(A^{-1})^3$ y por lo tanto para un vector $v \neq 0$ se tiene:

$$\begin{aligned}(A^{-1})^3(A^4 - 7A^3)v &= 0 \\ \Longrightarrow (A - 7I)v &= 0 \\ \Longrightarrow Av &= 7v\end{aligned}$$

lo que implica que 7 es valor propio de A.

Puntaje

- 2 puntos por establecer una condición necesaria para que 7 sea un valor propio. (aunque no la demuestre)
- 2 puntos por demostrar correctamente la condición que implica que 7 es valor propio.
- 2 puntos usar de manera correcta el hecho que A sea invertible.

5. Determine h en la matriz A, tal que el espacio propio para $\lambda = 4$ tenga dimensión 2:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución El espacio propio $E(4)$ es por definición $\mathrm{Nul}(A - 4I)$. Analizamos la matriz ampliada $(A - 4I|0)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & h & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Para que $\dim \mathrm{Nul}(A - 7I) = 2$, matriz ampliada debe tener 2 variables libres, lo que se cumple si y sólo si $h = -3$.

Puntaje

- 2 puntos por establecer (explícita o implícitamente) que $E(4) = \text{Nul}(A - 7I)$.
- 2 puntos por relacionar las variables libres del sistema con la dimensión del espacio propio.
- 2 puntos por concluir correctamente que $h = -3$.

6. Determine si la siguiente matriz es diagonalizable. En caso afirmativo, determine una matriz P invertible y una matriz D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución Los valores propios de A son 2, 5 y -1. Como son todos distintos, A es diagonalizable. Determinamos los vectores propios de A:

$$(A - 2I|0) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow E(2) = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$(A - 5I|0) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow E(5) = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$(A + I|0) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow E(-1) = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -15 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}$$

Luego las matrices $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -15 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ satisfacen que $A = PDP^{-1}$.

Puntaje

- 1 punto por justificar correctamente que A si es diagonalizable.
- 1 punto por encontrar un vector propio de cada valor propio (3 puntos en total)
- 1 punto por escribir explícitamente la matriz P.
- 1 punto por escribir explícitamente la matriz D.

7. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base para un espacio vectorial V. Encuentre $T(4\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2)$ cuando T es una transformación lineal de V a V cuya matriz respecto a $\mathcal{B}$ es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución 1 Para encontrar $T(4\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2)$ calculamos su $\mathcal{B}$-coordenadas usando la representación matricial de T:

$$[T(4\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[4\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que $T(4\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2) = 5\mathbf{b}_2 - 5\mathbf{b}_3$.

Solución 2 De la definición de $[T]_{\mathcal{B}}$ se tiene que:

$$[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow T(\mathbf{b}_1) = 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3$$

$$[T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow T(\mathbf{b}_2) = \mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3$$

Por lo tanto

$$T(4\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2) = 4T(\mathbf{b}_1) - 3T(\mathbf{b}_2) = 4(2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) - 3(\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3) = 5\mathbf{b}_2 - 5\mathbf{b}_3.$$

Puntaje

- 2 puntos por concluir correctamente información acerca de la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$. Puede ser que cumple con una determinada ecuación o definir sus columnas.
- 2 puntos por establecer una manera de encontrar $T(4\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2)$ (no es necesario que lo resuelva).
- 2 puntos por determinar $T(4\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2)$.

8. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Determine matrices P invertible y $C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ tales que $A = PCP^{-1}$.

Solución Determinamos los valores propios de A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 2 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm i.$$

Determinamos vectores propios:

$$(A - (1-i)I|0) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -1 & 0 \\ 2 & -1+i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1+i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esto implica que los vectores propios asociados a $1-i$ son generados por el vector

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde la parte real y la parte imaginaria son vectores linealmente independientes. Por lo tanto, si definimos $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ se tiene que $A = PCP^{-1}$.

Puntaje

- 1 punto por encontrar los valores propios de A.
- 2 puntos por determinar un vector propio complejo de A.
- 1 punto por determinar correctamente la parte real y la parte imagina del vector propio anterior.
- 1 punto por definir P usando la parte real y la parte imaginaria del vector propio.
- 1 punto por definir correctamente C.