



Pontificia Universidad Católica de Chile  
Facultad de Matemáticas  
Departamento de Estadística

EYP1026 - MODELOS PROBABILÍSTICOS  
Ayudantía N°9

Profesor: Guido del Pino  
Ayudante: José Quinlan  
Fecha: 05 de Octubre - 2016

1. Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \mathbb{I}((x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]).$$

Calcule  $\text{Var}[X^m Y^n] : m, n \in \mathbb{N}$ .

2. Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = Cx^{a-1}y^{b-1}(1-x-y)^{c-1}\mathbb{I}((x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1), y \in (0, 1-x))$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ .

a) Demuestre que  $C = \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}$ .

b) Deduzca la distribución de  $Y$ .

3. Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{2}{x} \exp\{-2x\}\mathbb{I}((x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}^+, y \in (0, x)).$$

a) Calcule  $\text{Cov}[X, Y]$  y  $\text{Cov}[X^2, Y^2]$ .

b) Determine la densidad de probabilidad marginal para  $X$ .

c) Analice si  $X$  e  $Y$  son independientes.

4. Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2}\right\}\mathbb{I}((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

a) Pruebe que  $X, Y \stackrel{i.i.d}{\sim} \text{Normal}(0, 1)$ .

b) Muestre que  $\frac{X}{Y} \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ .