Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2020

MAT1610 - Cálculo I
Pauta Examen

Instrucciones: Esta prueba consiste de 2 hojas, que incluyen 5 problemas en total. Desarrolle sus respuestas justificadamente.

Problema 1.

a) Determine el valor del parámetro r para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x+r} & \text{si } x < r \\ 2x - e^{x-r} & \text{si } x \geq r \end{cases}$$

sea continua en $x = r$.

b) A continuación considere el valor de r obtenido en item anterior.

i) Pruebe, usando el TVI, que la función se anula en algún punto en $[r, \infty)$.

ii) Determine, si existen, asíntotas verticales, horizontales y oblícuas.

Solución:

(a) Note que $f(r) = 2r - e^0 = 2r - 1$, para que f sea continua en $x = r$ debe ocurrir que $\lim\limits_{x\to r} f(x) = f(r) = 2r - 1$ y como

$$\begin{aligned} \lim_{x\to r^+} f(x) &= \lim_{x\to r^+} 2x - e^{x-r} \\ &= 2r - 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{x\to r^-} f(x) &= \lim_{x\to r^-} \frac{2x^2}{x+r} \\ &= \frac{2r^2}{r+r} \\ &= \frac{2r^2}{2r} \\ &= r \end{aligned}$$

Entonces, para que f sea continua en $x = r$ debe ocurrir que $2r - 1 = r$, es decir, $r - 1 = 0$ y, por lo tanto, $r = 1$.

(b) Considerando $r = 1$, se tiene que

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x+1} & \text{si } x < 1 \\ 2x - e^{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(i) Se tiene que $f(1) = 1$ y

$$\begin{aligned} f(4) &= 8 - e^3 \\ &= 2^3 - e^3 \\ &= (2-e)(2^2 + 2e + e^2) \\ &= (2-e)(4 + 2e + e^2) \end{aligned}$$

que es menor que cero porque $2 - e < 0$ y $4 + 2e + e^2 > 0$. Así, $f(1) > 0$, $f(4) < 0$ y f es continua en $[1, \infty)$, en particular f es continua en $[1, 4]$, entonces por el Teorema de Valor Intermedio (TVI), existe un valor c, $c \in (1, 4)$ tal que $f(c) = 0$ y como $(1, 4) \subset [1, \infty)$, se tiene que la función se anula en algún valor c, con en $c \in [r, \infty) = [1, \infty)$.

(ii) **Asíntotas horizontales:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{1 + 1/x} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} 2x - e^{x-1} \\ &= \lim_{x \to +\infty} e^{x-1} \left(\frac{2x}{e^{x-1}} - 1 \right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Note que las funciones $2x$ y e^{x-1} son continuas y derivables en $\mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = \infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x-1} = \infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{d}{dx} 2x}{\frac{d}{dx} e^{x-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{e^{x-1}} = 0$, entonces, por la regla de L'Hopital, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^{x-1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{d}{dx} 2x}{\frac{d}{dx} e^{x-1}} = 0$

Así, no existen asíntotas horizontales ya que los límites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ son no finitos.

Asíntotas Verticales:

Posible asíntota vertical: $x = -1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1^-} 2x^2 \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x+1} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = -1$ es una asíntota vertical de la función f. También,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1^+} 2x^2 \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Asíntotas Oblicuas:
Hacia $-\infty$

$$\begin{aligned}
m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x^2+x} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{1+1/x} \\
&= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b = \lim_{x\to -\infty} f(x) - 2x &= \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{x+1} - 2x \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2 - 2x(x+1)}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{-2}{1+1/x} \\
&= -2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $y = 2x - 2$ es una asíntota oblicua de f hacia $-\infty$.
Hacia $+\infty$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x - e^{x-1}}{x} \\
&= \lim_{x\to +\infty} 2 - \frac{e^{x-1}}{x} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ no existe, la función f no tiene asíntota oblicua hacia $+\infty$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por establecer condiciones para la continuidad en $x = r$
- **(0.5 punto)** Por determinar el valor de r
- **(1 punto)** Por argumentar que la función cumple hipótesis del TVI.
- **(1 punto)** Por demostrar que existe el valor con las condiciones requeridas.

- **(0.5 punto)** Por determinar asíntota vertical (solo si presenta cálculos).
- **(1 punto)** Por concluir correctamente sobre asíntotas horizontales (solo si presenta cálculos o argumentos).
- **(1 punto)** Por determinar ecuación de asíntota oblicua (solo si presenta cálculos).

Problema 2.
Calcule $g'(1)$ donde g es la función inversa de

$$f(x) = \tan\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

Solución:
Una forma:
Se tiene que $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$, es decir, $g'(b) = \frac{1}{f'(g(b))}$. En este caso,

$$f'(x) = \sec^2\left(\frac{1}{1+x}\right)\left(\frac{-1}{(1+x)^2}\right) = -\frac{\sec^2\left(\frac{1}{1+x}\right)}{(1+x)^2} = -\left(\frac{\sec\left(\frac{1}{1+x}\right)}{1+x}\right)^2$$

y

$$\begin{aligned}
g(1) = s \Leftrightarrow f^{-1}(1) = s &\Leftrightarrow f(s) = 1\\
&\Leftrightarrow 1 = \tan\left(\frac{1}{1+s}\right)\\
&\Leftrightarrow \arctan(1) = \frac{1}{1+s}\\
&\Leftrightarrow 1+s = \frac{1}{\arctan(1)}\\
&\Leftrightarrow s = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} - 1\\
&\Leftrightarrow s = \frac{4}{\pi} - 1
\end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned}
g'(1) &= \frac{1}{f'\left(g(1)\right)}\\
&= \frac{1}{-\left(\frac{\sec\left(\frac{1}{1+g(1)}\right)}{1+g(1)}\right)^2}\\
&= -\left(\frac{1+g(1)}{\sec\left(\frac{1}{1+g(1)}\right)}\right)^2\\
&= -\left(\frac{\frac{4}{\pi}}{\sec\left(\frac{1}{\frac{4}{\pi}}\right)}\right)^2\\
&= -\left(\frac{\frac{4}{\pi}}{\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^2\\
&= -\frac{\frac{16}{\pi^2}}{2}\\
&= -\frac{8}{\pi^2}
\end{aligned}$$

Otra forma:
Determinar la función $g(x)$, para x tal que $-\frac{\pi}{2} < \frac{1}{1+x} < \frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
y = \tan\left(\frac{1}{1+x}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad \arctan(y) = \frac{1}{1+x} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 + x = \frac{1}{\arctan(y)} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{\arctan(y)} - 1
\end{aligned}
$$

Entonces, $g(x) = \frac{1}{\arctan(x)} - 1$ y, por lo tanto,

$$g'(x) = -\frac{1}{\arctan^2(x)} \frac{1}{1+x^2}$$

y

$$g'(1) = -\frac{1}{\arctan^2(1)} \frac{1}{(1+1^2)} = -\frac{1}{2\arctan^2(1)} = -\frac{1}{2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = -\frac{8}{\pi^2}$$

Distribución de puntaje.

- **(1.5 puntos)** Por determinar $g(x)$ (o determinar $g(1)$).
- **(1.5 puntos)** Por derivar función externa en la regla de la cadena en el cálculo de $f'(x)$ (o de $g'(x)$).
- **(1.5 puntos)** Por derivar función interna en la regla de la cadena en el cálculo de $f'(x)$ (o de $g'(x)$).
- **(1 punto)** Por evaluar $g'(1)$.
- **(0.5 punto)** Por obtener resultado correcto $g'(1)$.

Problema 3.

Encuentre los extremos locales y absolutos de la función

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -5 \leq x < 1 \\ x^2 - 6x + 7, & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Solución:

Se tiene que el dominio de la función es el intervalo $[-5, 4]$ y f es continua en su dominio ya que, en los intervalos $[-5, 1)$ y $(1, 4]$ es una función polinomial y $x = 1$ es continua porque $f(1) = 2$ y
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x+1 = 2 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 - 6x + 7.$
Es decir,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

Valor de la función en los extermos del intervalo:
$f(-5) = -5 + 1 = -4$ y $f(4) = 4^2 - 24 + 7 = -1$
Valores críticos de la función: $x = 3$ y $x = 1$, ya que
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ y $f'(1)$ no existe porque

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x+1-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

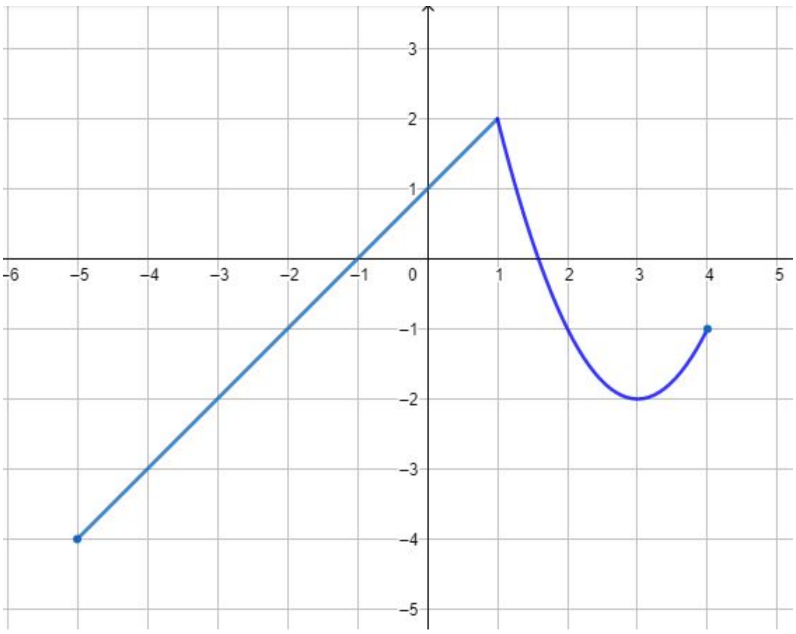
y

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 6x + 7 - 2)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 6x + 5)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-5)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1^-} x - 5 \\ &= -4 \end{aligned}$$

es decir, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$ no existe.
Así, se tiene que $f(3) = 9 - 18 + 7 = -2$, entonces,

$$f(-5) < f(3) < f(4) < f(1)$$

y el valor máximo absoluto de f es $f(1) = 2$ y el valor mínimo absoluto de f es $f(-5) = -4$
Estudio signo de la derivada: Se tiene que:
$f'(x) = 1 > 0$ si $x \in (-5, 1)$, por lo tanto, f es creciente en dicho intervalo y $f'(x) = 2x - 6 < 0$ si $x \in (1, 3)$, por lo tanto, f es decreciente en dicho intervalo. Entonces, $f(1) = 2$ es un valor máximo local de f
$f'(x) = 2x - 6 < 0$ si $x \in (1, 3)$, por lo tanto, f es decreciente en dicho intervalo y $f'(x) = 2x - 6 > 0$ si $x \in (3, 4)$, por lo tanto, f es creciente en dicho intervalo. Por lo tanto, $f(3) = -2$ es un valor mínimo local de f
El análisis para determinar los extremos también es válido si se presenta la gráfica correcta e identifica correctamente los valores requeridos.



Gráfica de f

Distribución de puntaje.

- **(0.5 punto)** Por concluir o argumentar continuidad de la función en su dominio.
- **(1 punto)** Por determinar número o valor crítico donde se anula la derivada.
- **(1 punto)** Por determinar número o valor crítico donde no existe la derivada.
- **(0.5 punto)** Por evaluación de la función en números críticos y extremos del intervalo que define el dominio.
- **(0.5 punto)** Por concluir correctamente sobre máximo absoluto.
- **(0.5 punto)** Por concluir correctamente sobre mínimo absoluto.
- **(1 punto)** Por concluir correctamente sobre mínimo local.
- **(1 punto)** Por concluir correctamente máximo local.

Problema 4.

Suponga que $f : [3, 5] \to \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$\int_3^x f(t)dt = \left(x^2 - 4^2\right) \arccos(4 - x)$$

Calcule:

a) $\displaystyle\int_2^{\frac{5}{2}} 3f(2x)dx$

b) $f(4)$

Solución:
Sea $g(x) = \displaystyle\int_3^x f(t)dt$

(a)

$$\begin{aligned}
\int_2^{\frac{5}{2}} 3f(2x)dx &= 3\int_2^{\frac{5}{2}} f(2x)dx \\
&= \frac{3}{2}\int_4^5 f(t)dt \\
&= \frac{3}{2}\left[\int_3^5 f(t)dt - \int_3^4 f(t)dt\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[g(5) - g(4)\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[(5^2 - 16)\arccos(4-5) - (4^2 - 16)\arccos(4-4)\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[9\arccos(-1) - 0 \cdot \arccos(0)\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[9\pi\right] \\
&= \frac{27\pi}{2}
\end{aligned}$$

Note que se hizo la sustitución $t = 2x$ por lo que $dt = 2dx$ o $\frac{dt}{2} = dx$ y si $x = 2$ entonces $t = 4$ y si $x = \frac{5}{2}$ entonces $t = 2\frac{5}{2} = 5$.

(b) Note que por el Teorema fundamental del cálculo (TFC) $g'(x) = f(x)$, entonces, para determinar $f(4)$ se debe calcular $g'(4)$

$$\begin{aligned}
f(4) &= g'(4) \\
&= \left.\frac{d\left((x^2-16)\arccos(4-x)\right)}{dx}\right|_{x=4} \\
&= \left.\left[2x\arccos(4-x) + \left(x^2-16\right)\frac{-1}{\sqrt{1-(4-x)^2}}(-1)\right]\right|_{x=4} \\
&= \left.\left[2x\arccos(4-x) + \left(x^2-16\right)\frac{1}{\sqrt{1-(4-x)^2}}\right]\right|_{x=4} \\
&= 8\arccos(0) + 0\cdot 1 \\
&= 8\frac{\pi}{2} \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

Distribución de puntaje.

- **(0.5 punto)** Por aplicar la regla de sustitución correctamente.
- **(1 punto)** Por escribir la integral de forma tal que se puede usar la integral dada (conocida).
- **(1 punto)** Por usar correctamente la integral dada (conocida) en las dor integrales.
- **(0.5 punto)** Por obtener resultado correcto en parte (a).
- **(1 punto)** Por aplicar correctamente el TFC.
- **(1.5 punto)** Por determinar correctamente derivada de g.
- **(0.5 punto)** Por obtener resultado correcto.

Problema 5.

Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por las curvas $y = \dfrac{1}{x^2+6x+10}$, $x=-2$, $x=2$ y el eje X. Determine el volumen del sólido obtenido al rotar $\mathcal{R}$ en torno a $x=-4$.

Solución:

El volumen, V, del sólido puede ser expresado como:

$$V = \int_{-2}^{2} 2\pi(x-(-4))\frac{1}{x^2+6x+10}dx = 2\pi\int_{-2}^{2}\frac{x+4}{x^2+6x+10}dx$$

Entonces,

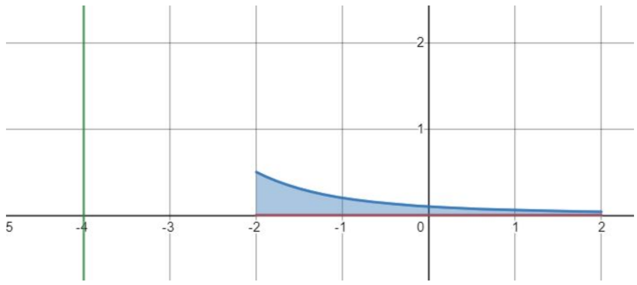
$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-2}^{2}\frac{2x+8}{x^2+6x+10}dx \\
&= \pi\int_{-2}^{2}\frac{2x+6+2}{x^2+6x+10}dx \\
&= \pi\int_{-2}^{2}\frac{2x+6}{x^2+6x+10}dx + \pi\int_{-2}^{2}\frac{2}{x^2+6x+10}dx \\
&= \pi\underbrace{\int_{-2}^{2}\frac{2x+6}{x^2+6x+10}dx}_{s} + 2\pi\underbrace{\int_{-2}^{2}\frac{1}{x^2+6x+10}dx}_{t} \\
&= \pi\left(s+2t\right)
\end{aligned}$$

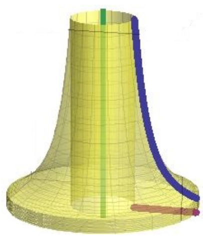
$$\begin{aligned}
s &= \int_{-2}^{2}\frac{2x+6}{x^2+6x+10}dx \\
&= \int_{2}^{26}\frac{du}{u} \\
&= \left[\ln\left(|u|\right)\right]\Big|_{2}^{26} \\
&= \ln(26) - \ln(2) \\
&= \ln\left(\frac{26}{2}\right) \\
&= \ln(13)
\end{aligned}$$

Note que se hizo la sustitución $u = x^2+6x+10$ por lo que $du = (2x+6)dx$ y si $x=-2$ entonces $u = (-2)^2+6(-2)+10 = 2$ y si $x=2$ entonces $u = (2)^2+6(2)+10 = 26$

$$\begin{aligned} t &= \int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+6x+10} dx \\ &= \int_{-2}^{2} \frac{1}{(x+3)^2+1} dx \\ &= \int_{1}^{5} \frac{1}{u^2+1} du \\ &= [\arctan(u)]|_1^5 \\ &= \arctan(5) - \arctan(1) = \arctan(5) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Note que se hizo la sustitución $u = x + 3$ por lo que $du = dx$ y si $x = -2$ entonces $u = -2 + 3 = 1$ y si $x = 2$ entonces $u = 2 + 3 = 5$.
Así el volumen es $V = \pi \left(\ln(13) + 2\arctan(5) - \frac{\pi}{2}\right)$ unidades de volumen.
Idea gráfica:





Distribución de puntaje.

- **(1.5 punto)** Por expresar el volumen en términos de integral(es) definida(s).
- **(1 punto)** Por aplicar sustitución correcta en la primera(una) de las integrales resultantes.
- **(1 punto)** Por resolver y obtener valor correcto en la primera (una) de las integrales resultantes.
- **(1 punto)** Por aplicar sustitución correcta en la segunda (la otra) de las integrales resultantes.
- **(1 punto)** Por resolver y obtener valor correcto en la segunda (la otra) de las integrales resultantes.
- **(0.5 punto)** Por determinar resultado correcto del volumen.