Clase 5

martes, 13 de agosto de 2024 16:46

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Def: Una ecuación lineal (EL) es una ecuación de la forma

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n = b$$

donde $a_1, \dots, a_n$ y b son números reales. Los números $a_1, \dots, a_n$ se llaman coeficientes de la E y b es el término independiente.

Una solución de una EL son valores específica para $x_1, x_2, \dots, x_n$ que hacen que la ecuación se satisfaga.

El conjunto solución de una EL es el conj de todas las soluciones de la EL

Nota: Las soluciones normalmente se organiza en un vector en $\mathbb{R}^n$

Ejemplos:

i) $3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$ es un EL

ii) $3x_1 + 2(x_2 - x_4) = 5x_5 - 3$ es una ya que se puede reordenar

$$3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 - 2x_4 - 5x_5 = -3$$

iii) $4x_1 + 3x_2 \cdot x_3 = 0$ NO es una EL debido al término $x_2 \cdot x_3$ donde aparecen var multiplicadas.

iv) $4x_1 + 2\sqrt{x_2} = 3$ NO es una EL

v) El vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es una solución de la EL

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 + 3x_4 = 1$$

ya que
$$(1) + \frac{1}{2}\cdot(2) + (-1) + 3(0) = 1$$

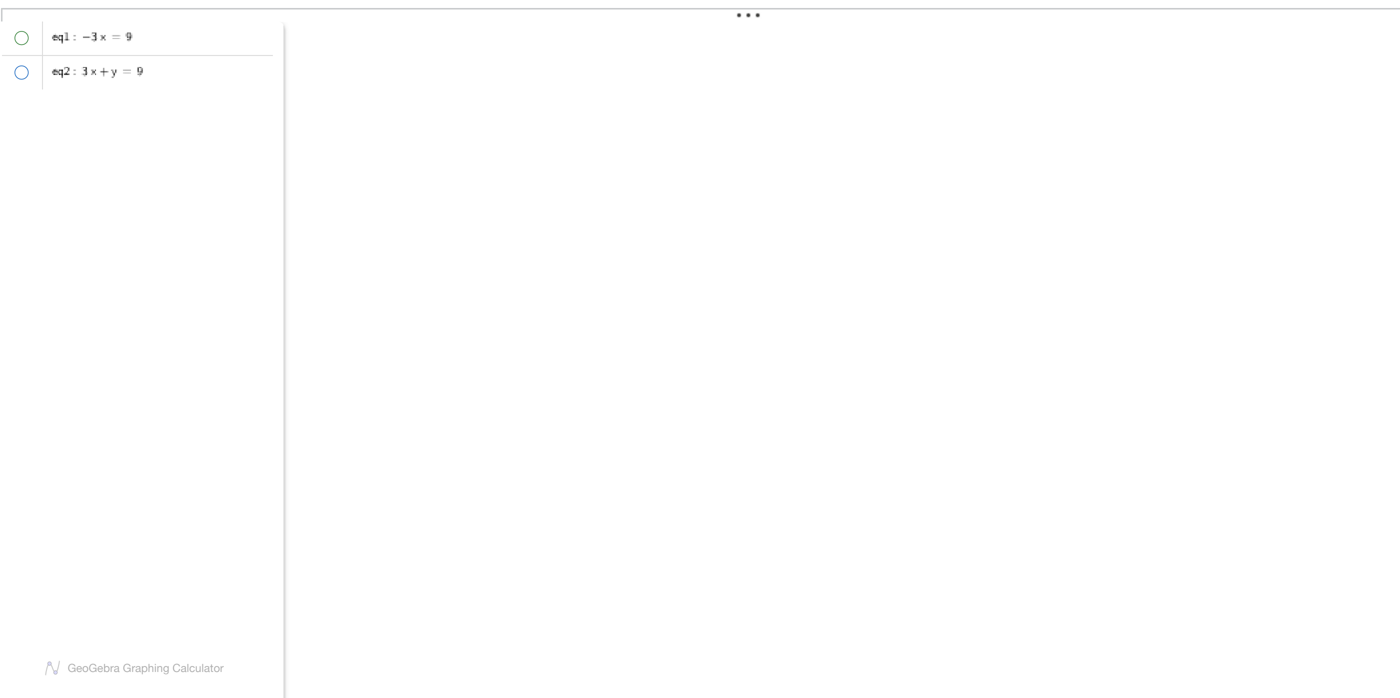
Discusion: Interpretemos geométricamente los conjuntos solucion de:

i) $-3x = 9$ ii) $3x + y = 9$ (→ en

iii) $-3x + y - 2z = 9$ iv) $3x + y + 0z = 9$ (→ en

v) $-3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 0\cdot x_4 + 5x_5 = 20$ (en $\mathbb{R}^5$

[Interpretacion Geométrica]



[Interpretacion Planos]

GeoGebra

Def: Una ecuación lineal se dice homogenea s
su término independiente $b=0$.

Ej: $3x_1 + 2x_3 + 4x_2 = 0$ es una EL homo

$3x_2 + 2x_1 + 4 = 0$ NO es homoge
(su término independ
es -4)

$3(x_1 - 1) + 2(x_2 + 1) + (x_3 + 2) = 1$ es

Importante:

El conjunto solución de una EL es siempre un hiperplano H, salvo que todos los coeficien sean 0. H pasará por el origen (es decir $0 \in$ si y solo si la ecuacion es homogenea.

En efecto: Supongamos que H es el conjunto solución de

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

Si $0 \in H$ entonces

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0 = b$$

$\Rightarrow$ La EL es homogenea.

Análogamente, si $b = 0$ entonces $0 \in H$ es solución ya que

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0.$$

Def: Un sistema de ecuaciones lineales (SEL) un sistema de la forma

$$\boxed{\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n &= b_m \end{aligned}}$$

Una solución del SEL es un vector en $\mathbb{R}^n$ (una lista de números) $(s_1, -, s_n)$ tal que si los reemplazo en vez de $(x_1, -, x_n)$ las m igualdad se cumplen

El conjunto solución del SEL es el conjunto de todos las soluciones del SEL.

Ejemplo: Como vimos la clase pasada, el conj solución del SEL

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 1 \\ x + y - 3z &= 2 \end{aligned}$$

es la recta

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Es decir, para cada vector $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que es solu puedo encontrar un número t tal que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Recíprocamente, si elegimos cualquier t, e

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es solución del SEL.

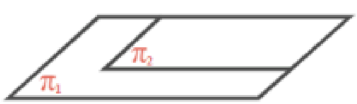
Por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

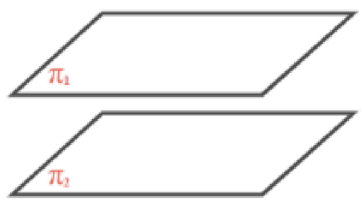
son soluciones.

Ejercicio 1

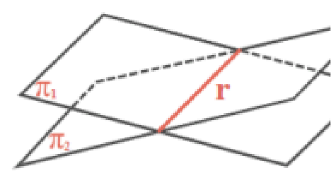
– Determine cuáles SEL podrían corresponder a las posiciones relativas que se ilustran en ca



A



B



C

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ 2x - 3y + 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

I

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - 3y + 4z & = & 1 \\ 4x - 6y + 8z & = & 2 \end{array}\right.$$

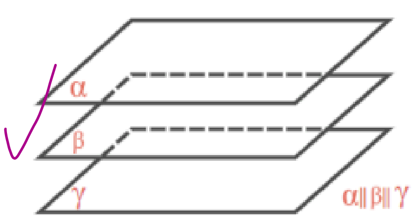
II

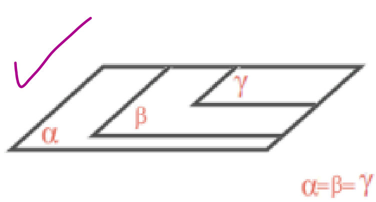
$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ -x - y - z & = & - \end{array}\right.$$

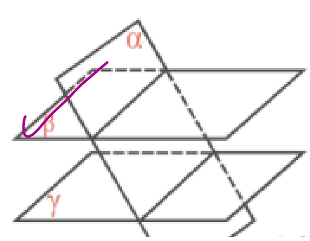
III

Ejercicio 2.

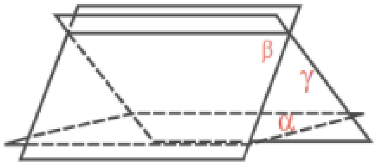
– Determine cuáles SEL podrían corresponder a las posiciones relativas que se ilustran en c

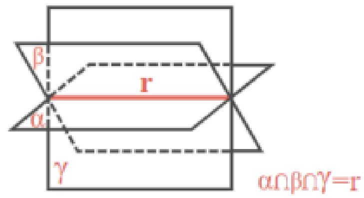


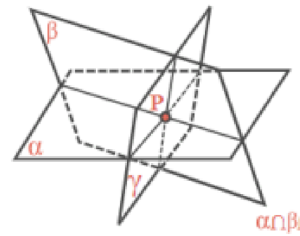




A B C







D E F

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x-3y+4z & = & 1 \\ 2x-3y+4z & = & 2 \end{array}\right.$$

I

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x-3y+4z & = & 1 \\ 10x+25y+4z & = & 1 \end{array}\right.$$

II

$$\left\{\begin{array}{rc} x+y+z & = \\ 2x-3y+4z & = \\ 3x+5y-z & = \end{array}\right.$$

III

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y+4z & = & 1 \\ 4x-6y+8z & = & 2 \\ -2x+3y-4z & = & -1 \end{array}\right.$$

IV

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ 2x-3y+4z & = & 1 \\ 10x+25y+4z & = & 13 \end{array}\right.$$

V

$$\left\{\begin{array}{rc} x+y+z & = \\ -x-y-z & = \\ x+y+z & = \end{array}\right.$$

VI

A - VI

B - IV

C - I