PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
PRIMER SEMESTRE 2019.

SOLUCIÓN INTERROGACIÓN 3
CALCULO II ⋆ MAT1620

1. *a*) Determine los puntos del hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano de ecuación $z = x + y$.

   b) Sea f una función diferenciable de la cual se sabe:
   $$D_u(f)(3,1) = 3, \qquad D_v(f)(3,1) = \sqrt{2},$$
   siendo $u = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$, $\quad v = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$. Calcule $D_w(f)(3,1)$ si $w = (3,2)$.

Solución:

a) Para determinar los puntos pedidos, se debe tener que el gradiente a la superficie de nivel
$$F(x,y,z) := x^2 - y^2 - z^2 = 1,$$
debe ser paralelo al vector normal al plano dado, es decir, $\nabla F(x,y,z) = \lambda(1,1,-1)$ lo cual corresponde a resolver,
$$2x = \lambda, \quad -2y = \lambda, \qquad -2z = -\lambda.$$
Para algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$. Pero el punto buscado debe satisfacer $F(x,y,z) = 1$, luego despejando el valor x, y, z en términos de λ y reemplazando se obtiene
$$\frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4} = 1,$$
lo cual nos deja que $\lambda^2 = -4$. Por lo tanto no existen puntos sobre la superficie dada que verifiquen la condición pedida.

b) Consideremos $\nabla f(x,y) = (a,b)$, luego como la función f es diferenciable se tiene que
$$D_u(f)(3,1) = (a,b) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = 3$$
$$D_v(f)(3,1) = (a,b) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1) = \sqrt{2}$$

Resolviendo obtenemos que

$$(a,b) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{17\sqrt{5}}{5} \right).$$

Finalmente la derivada pedida será

$$D_w(f)(3,1) = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{17\sqrt{5}}{5} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(3,2) = \frac{17\sqrt{5}}{5\sqrt{13}}.$$

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 1.5 puntos por establecer de manera correcta la relación entre el gradiente de la superficie de nivel y el normal al plano dado.
- a) Asignar 1.5 puntos por resolver y concluir que no existe punto alguno que verifique lo pedido.
- b) Asignar 1 punto por plantear el sistemas de ecuaciones en el cual se traducen las derivadas direccionales dadas.
- b) Asignar 1 punto por calcular el vector gradiente de f.
- b) Asignar 1 punto por calcular de manera correcta la derivada direccional pedida. (si el vector no se encuentra normalizado este punto se pierde de manera integra.)
- Asignar 1 punto base.

2. Determine y clasifique los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 4x^2 - 2y^2.$$

Solución:
Comenzamos calculando los puntos críticos. Para ello resolvemos,

$$\nabla f(x,y) = (0,0),$$

lo cual es este caso es,

$$8x^3 - 8x = 0, \qquad 4y^3 - 4y = 0.$$

Resolvemos para obtener

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (0,1), \quad P_3 = (0,-1), \quad P_4 = (1,0), \quad P_5 = (1,1), \quad P_6 = (1,-1)$$

$$P_7 = (-1,0) \quad P_8 = (-1,1), \quad P_9 = (-1,-1).$$

A continuación calculamos la matriz Hessiana,

$$Hf = \begin{pmatrix} 24x^2 - 8 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

Luego de analizar el signo de los respectivos determinantes se obtiene que

$$P_2, P_3, P_4, P_7, \quad \text{son puntos tipo silla.}$$

$$P_5, P_6, P_8, P_9, \quad \text{son mínimos locales.}$$

$$P_1, \quad \text{es un máximo local.}$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 2.5 puntos por calcular de manera correcta los 9 puntos criticos. Descontar 0,5 por cada punto critico que falte.
- Asignar 1 punto por calcular de manera correcta la matriz Hessiana.
- Asignar 2.5 puntos por la correcta clasificación de los puntos criticos. Cada error en la clasificación descuenta $0,5$ punto.
- Agregar 1 punto base.

3. Determine los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ definida sobre el conjunto

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Solución:
Comenzamos buscando los puntos críticos que puedan existir en el interior de D, para ello resolvemos

$$(2x-1, 2y-1) = (0,0)$$

Con lo cual el punto $P_1 := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es el único punto crítico en el interior de D.

A continuación debemos mirar en la frontera de D para ello parametrizamos a esta como $h(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$. Con lo cual la función se representa como

$$f(t) = 2 - \cos(t) - \operatorname{sen}(t).$$

Los respectivos puntos criticos de esta función de una variable serán

$$f'(t) = 0,$$

los cuales son $t = \frac{\pi}{4}$, $\quad t = \frac{3\pi}{4}$ es decir

$$P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad P_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

Finalmente debemos agregar los extremos del respectivo intervalo,

$$P_4 := f(\cos(0), \operatorname{sen}(0)) = f(\cos(2\pi), \operatorname{sen}(2\pi)) = (1,0)$$

Una vez encontrados todos los puntos posibles, notamos que dado que la función f es continua y la región D es cerrada y acotada, esta alcanza su máximo y su minimo en alguno de los puntos encontrados anteriormente, luego calculamos,

$$f(P_1) = \frac{1}{2}, \qquad f(P_2) = 2 - \sqrt{2}$$

$$f(P_3) = 2 + \sqrt{2}, \qquad f(P_4) = 1,$$

de donde se concluye que P_3 es el punto donde f alcanza su máximo absoluto y P_1 donde f alcanza el respectivo mínimo.

Asignación de puntaje:

a) Asignar $1,5$ puntos por encontrar el punto P_1 en el interior.

b) Asignar 1 punto por la correcta parametrización de la frontera.

c) Asignar 1,5 puntos por encontrar los puntos criticos de la frontera.

d) Asignar $0,5$ puntos por el punto P_4.

e) Asignar 1,5 puntos por la correcta determinación del maximo y el minimo.

f) En caso que algún alumno utilice Lagrange para los puntos del borde, esto entrega 3 puntos por encontrar de manera correcta P_2, P_3, P_4.

g) Asignar 1 punto base.

4. Determine el mayor volumen que puede tener una caja rectangular, con tapa, sujeta a la restricción de que el área superficial sea $10m^2$.
Solución:
Consideremos la función volumen que deseamos maximizar como $f(x, y, z) = xyz$ y la respectiva restricción del area dada por

$$g(x, y, z) := 2xy + 2xz + 2yz = 10.$$

Notemos que (x, y, z) además pertenecen a la región cerrada y acotada

$$[0, 10] \times [0, 10] \times [0, 10],$$

luego en esta región la función alcanza su mínimo (el cual es obviamente cero) y su máximo absoluto.
Planteamos las condiciones de Lagrange, $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z)$, lo cual se traduce en el sistema

$$\begin{aligned} yz - \lambda(y + z) &= 0, \\ xz - \lambda(x + z) &= 0, \\ xy - \lambda(x + y) &= 0, \\ xy + xz + yz &= 5. \end{aligned}$$

Resolvemos para obtener un único punto que resuelve este sistema,

$$\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\right).$$

El cual, por lo dicho al comienzo, determina el volumen máximo que es $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^3$

Asignación de puntaje:

- Asignar 1.5 puntos por asignar funciones corretas para la expresión a maximizar y la respectiva restricción.
- Asignar 1 punto por plantear de manera correcta el sistema con las condiciones de Lagrange.
- Asignar 1.5 puntos por resolver de manera correcta dicho sistema.
- Asignar 1 punto por calcular de manera correcta el volumen pedido.
- Asignar 1 punto por justificar que el valor calculado es el maximo absoluto.
- Asignar 1 punto base.

5. *a*) Invierta el orden de integración en la integral

$$\int_0^1 \int_y^{2-\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy.$$

b) En la integral anterior, considere la función $f(x,y) = xe^{2y}$. Calcule la respectiva integral.

Solución:

a) Al hacer el cambio de orden la integral se reescribe como:

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dydx + \int_1^2 \int_0^{(x-2)^2} f(x,y)\,dydx.$$

b) Para calcular la respectiva integral, utilizaremos el orden dado originalmente,

$$\int_0^1 \int_y^{2-\sqrt{y}} xe^{2y}\,dxdy = \int_0^1 \int_y^{2-\sqrt{y}} e^{2y}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2y}(y^2-(2-\sqrt{y})^2)dy = I$$

$$= \frac{-1}{2}\int_0^1 e^{2y}(y^2-4-2\sqrt{y}-y)dy = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{4}e^{2y}(2y^2-2y+1) - 4\frac{e^{2y}}{2} - \frac{1}{4}e^{2y}(2y-1) + ...\right)\Bigg|_0^1$$

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 1 punto por describir de manera correcta la región respectiva, mediante un gráfico, mediante ecuaciones o simplemente por notar que en el orden pedido se obtienen dos integrales.
- a) Asignar 3 puntos por escribir la integral pedida en el orden pedido de manera correcta.
- b) Asignar 1 punto por calcular la primera integración, denotada por I en la pauta. (en cualquiera de los ordenes dados).
- b) Asignar 1 punto por realizar alguna (basta con una de ellas) de las respectivas integraciones por partes que eran necesarias a continuación, no es necesario que evaluen de manera correcta para obtener el puntaje en este item.
- Agregar 1 punto base.

6. Considere la región D, en el segundo cuadrante, acotada por las curvas

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = 9.$$

Calcule la integral,

$$\int_D \int \ln(1 + x^2 + y^2)\, dA$$

Solución:
Utilizando el cambio a coordenadas polares la integral se puede representar por,

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^3 \ln(1 + r^2)\, r\, dr d\theta.$$

Calculando se obtiene

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \left((r^2 + 1) \ln(r^2 + 1) - r^2 \right) \Big|_1^3 = \frac{\pi}{2} \left(5 \ln(10) - \ln(2) - 4 \right).$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por la correcta implementación del cambio de variables, mas 1 punto por el respectivo Jacobiano.
- Asignar 2 punto por el calculo de la primera primitiva.
- Asignar 1 punto por obtener el valor pedido.