Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2016

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución a la Interrogación N° 2

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Calcule la factorización $A = LU$ de la matriz A, y use dicha factorización para encontrar, si existen, todas las soluciones de los sistemas

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Para factorizar $A = LU$, escalonamos A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{f_2+2f_1 \\ f_3-2f_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix} \underset{f_3+\frac{3}{5}f_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que es triangular superior (U). La matriz L se obtiene, por ejemplo, tomando las inversas de las matrices elementales que corresponden a las operaciones empleadas en el escalonamiento:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3/5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3/5 & 1 \end{bmatrix},$$

Para los sistemas dados, tenemos:

- $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$:

  Resolvemos primero $L\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Sustituyendo hacia atrás, tenemos

  $$y_1 = 1, \quad y_2 = -2 + 2y_1 = 0, \quad y_3 = 2 - 2y_1 + \frac{3}{5}y_2 = 2 - 2 + \frac{0}{5} = 0.$$

  Así, para este sistema, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

A continuación, resolvemos $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, o sea

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vemos que:

- x_3 es variable libre.
- $10x_2 + 10x_3 = 0$, o sea, $x_2 = -x_3$.
- $x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1$, o sea, $x_1 = 1 - 3x_2 - 5x_3 = 1 + 3x_3 - 5x_3 = 1 - 2x_3$.

Así, la solución de este sistema es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

- $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$:

Resolvemos primero $L\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sustituyendo hacia atrás, tenemos

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2 + 2y_1 = 4, \quad y_3 = 0 - 2y_1 + \frac{3}{5}y_2 = -2 + \frac{12}{5} = 2/5.$$

Así, para este sistema, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2/5 \end{bmatrix}$.

A continuación, resolvemos $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, o sea

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2/5 \end{bmatrix}.$$

Este sistema evidentemente no tiene solución, ya que la tercera fila de su matriz de coeficientes está formada solo por ceros, y en la tercera fila del lado derecho hay un $2/5 \neq 0$.

Otra forma de ver esto es que para que este sistema sea consistente el lado derecho debe ser combinación lineal de las columnas de A, lo que en este caso es imposible porque cualquier combinación lineal de las columnas de A debe tener 0 en la tercera coordenada.

Puntaje:

- Por encontrar correctamente la factorización $A = LU$, 1 pto.
- En el primer sistema:
  - Por encontrar $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 1 punto.
  - Por plantear correctamente el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 0,5 puntos.
  - Por encontrar $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 - 2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$, 1 punto.
- En el segundo sistema:
  - Por encontrar $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2/5 \end{bmatrix}$, 1 punto.
  - Por plantear correctamente el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 0,5 puntos.
  - Por descubrir que el sistema no tiene solución, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

Nota:

Si al calcular la factorización llegan a $A = LU$ con L triangular inferior y U triangular superior, *pero L no tiene solo 1s en la diagonal*, reciben solo medio punto por la factorización (y el resto se corrige "en su mérito" a partir de ahí).

2. Sea P el paralelepípedo con un vértice en el origen y vértices adyacentes en $(1,4,0)$, $(-2,-5,2)$ y $(-1,2,-1)$.

   a) Calcule el volumen de P.

   Solución:

   Los vectores que forman las aristas de P son paralelos a los vectores $\mathbf{v}_1 = (1,4,0)$, $\mathbf{v}_2(-2,-5,2)$ y $\mathbf{v}_3 = (-1,2,-1)$, por lo que el volumen de P se puede calcular mediante el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -15.$$

   Como el volumen no es negativo, nos interesa el valor absoluto del determinante, vale decir, el volumen buscado es 15.

   b) Se define $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ como la transformación lineal definida por $T(x,y,z) = (x+y, y+z, x-z)$.

   Calcule el volumen de $T(P)$.

   Primera Solución:

   Una primera idea es calcular directamente los vectores $T(\mathbf{v}_1)$, $T(\mathbf{v}_2)$ y $T(\mathbf{v}_3)$, que son los vectores que forman las aristas de P. Como la matriz de T es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

   estos vectores son las columnas de

$$A \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

   por lo que el volumen de $T(P)$ está dado por el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} -5 & -7 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

   Segunda Solución:

   Otra posibilidad es calcular el determinante del producto de las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

sin realmente multiplicarlas, usando el hecho de que $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Como en este caso $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$, tenemos que el volumen de $T(P)$ es el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-15) = 0,$$

o sea, 0.

Puntaje:

a)
- Por plantear que el volumen lo da el determinante, 1 punto.
- Por calcular correctamente el determinante, 1,5 puntos.
- Por tomar el valor absoluto del determinante, 0,5 puntos.

b)
- Por plantear alguna forma correcta de calcular el volumen pedido, 1 punto.
- Por llegar correctamente al volumen pedido, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

3. Sea A una matriz de $n \times n$ definida por

$$a_{i,j} = \begin{cases} 3 & \text{si } i \leq j, \\ 1 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Calcule $\det A$.

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{f_1 \leftarrow f_1/3}{=} 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{f_2 \leftarrow f_2 - f_1 \\ f_3 \leftarrow f_3 - f_1 \\ f_4 \leftarrow f_4 - f_1 \\ \vdots \\ f_n \leftarrow f_n - f_1}}{=} 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3 \cdot 2^{n-1}$$

ya que la última matriz es triangular (y por lo tanto su determinante es el producto de los elementos de su diagonal).

Puntaje:

- Por transformar A en una matriz triangular mediante operaciones elementales: 4 puntos.
- Por calcular el determinante de la matriz original a partir del de la matriz triangular: 2 puntos.

  Se da puntaje parcial (1 punto) por errores menores en este cálculo (por ejemplo, dan como resultado 2^{n-1} (se olvidan del 3) o $3 \cdot 2^n$ (cuentan una fila más).

A lo anterior se suma el punto base.

4. Sea A una matriz de 4×4, tal que $\det A = \alpha \neq 0$.

   a) Calcule $\det(5A) + \det(3A^{-1})$ en términos de α.

   b) Se sabe que $\det(\mathrm{Adj}\, A)) = 8$. Calcule $\alpha = \det A$.

Solución:

a) Como A es de 4×4, $5A$ tiene 4 filas multiplicadas por 5, lo que resulta en un aumento neto de 5^4 veces en el valor del determinante (y, en general, $\det(cA) = c^4 \det A$).
Así, $\det(5A) = 5^4 \det A = 5^4\alpha = 625\alpha$.
Por su parte, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\alpha}$, por lo que $\det(3A^{-1}) = 3^4 \det(A^{-1}) = \dfrac{3^4}{\alpha} = \dfrac{81}{\alpha}$.

$$\det(5A) + \det(3A^{-1}) = 5^4\alpha + \frac{3^4}{\alpha} = 625\alpha + \frac{81}{\alpha}.$$

b) Sabemos que $A\,\mathrm{Adj}\, A = (\det A)I$, por lo que $\det(A\,\mathrm{Adj}\, A) = (\det A)^4$. Como $\det(A\,\mathrm{Adj}\, A) = \det A \det(\mathrm{Adj}\, A)$, tenemos que

$$\det A \det(\mathrm{Adj}\, A) = (\det A)^4.$$

Como $\det A = \alpha \neq 0$, podemos simplificar por $\det A$, obteniendo
$$\det(\mathrm{Adj}\, A) = (\det A)^3 = \alpha^3.$$
Del hecho de que $\det(\mathrm{Adj}\, A)) = 8$ se deduce que $\alpha^3 = 8$, o sea, $\alpha = 2$.

Puntaje:

a)
- Por calcular correctamente $\det(5A)$, 1,5 puntos.
- Por calcular correctamente $\det(3A^{01})$, 1,5 puntos.

b)
- Por llegar a que $\det(\mathrm{Adj}\, A) = (\det A)^3$, 2 puntos.
- Por llegar a que $\alpha = 2$, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

Nota: En los siguientes problemas, $\mathbb{P}_n$ denota al espacio vectorial formado por todos los polinomios de grado $\leq n$.

5. Sea $V = \mathbb{P}_3$, y sea $W = \{p(x) \in V : p(1) = p(0) = 0\}$.

   a) Demuestre que W es subespacio de V.

   Primera Solución:

   Debemos demostrar que:

   1) $\mathbf{0} \in W$.
   2) W es cerrado bajo suma.
   3) W es cerrado bajo ponderación por un escalar.

   En efecto:

   1) El elemento $\mathbf{0}$ en el espacio $\mathbb{P}_3$ es el polinomio constante 0, o sea, el polinomio $p(x)$ tal que $p(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como claramente este polinomio satisface $p(0) = p(1) = 0$, se tiene $p(x) \in W$, o sea, $\mathbf{0} \in W$.
   2) Sean $q(x), r(x)$ dos polinomios en W. Por estar estos polinomios en $\mathbb{P}_3$, se tiene que $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y $r(x) = ex^3 + fx^2 + gx + h$ con $q(0) = q(1) = r(0) = r(1) = 0$, o sea, $d = h = 0$ y $a+b+c+d = e+f+g+h = 0$. Pero entonces el polinomio suma de $q(x)$ y $r(x)$ es el polinomio

   $$\begin{aligned} s(x) = q(x) + r(x) &= (ax^3 + bx^2 + cx + d) + (ex^3 + fx^2 + gx + h) \\ &= (a+e)x^3 + (b+f)x^2 + (c+g)x + (d+h), \end{aligned}$$

   que satisface $s(0) = d + h = 0$,

   $$s(1) = (a+e)+(b+f)+(c+g)+(d+h) = (a+b+c+d)+(e+f+g+h) = 0+0 = 0,$$

   por lo que $s(x) = q(x) + r(x) \in W$.
   3) Sea $t \in \mathbb{R}$ un escalar cualquiera, y sea $p(x) \in W$. En otras palabras, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ y $p(0) = p(1) = 0$, o sea, $d = 0$ y $a+b+c+d = 0$. Entonces $tp(x)$ es el polinomio $q(x)$ tal que

   $$q(x) = t(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (ta)x^3 + (tb)x^2 + (tc)x + (td),$$

   y $q(0) = td = t \cdot 0 = 0$ y $q(1) = (ta) + (tb) + (tc) + (td) = t(a+b+c+d) = 0$, por lo que $q(x) = tp(x) \in W$

   Puntaje:

   - Por demostrar que $\mathbf{0} \in W$, 0,5 puntos.
   - Por demostrar que W es cerrado bajo suma, 1,5 puntos.

- Por demostrar que W es cerrado bajo ponderación por un escalar, 1 punto.

Se puede dar puntaje parcial (0,5 puntos o 1 punto) en las demostraciones de clausura si están parcialmente correctas.

Segunda Solución:

Todo polinomio de $\mathbb{P}_3$ que satisface $p(1) = p(0) = 0$ debe ser divisible por $x(x-1)$. Ya que este polinomio tiene grado 2, todo polinomio de W debe ser de la forma $p(x) \cdot x(x-1)$ para algún polinomio $p(x)$ de grado ≤ 1.

Así, $W = \{(ax+b)x(x-1) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Tomando los pares de valores $(a, b) = (1, 0)$ y $(a, b) = (0, 1)$ obtenemos los polinomios $\{x \cdot x(x-1), 1 \cdot x(x-1)\} = \{x^2(x-1), x(x-1)\} = \{x^3 - x^2, x^2 - x\}$.

Como $\{x, 1\}$ genera todos los polinomios de grado ≤ 1, $\{x^3 - x^2, x^2 - x\}$ genera todos los polinomios de W.

Así, W es el conjunto generado por los polinomios $x^3 - x^2$ y $x^2 - x$, por lo que —Teorema 1, sección 4.1— W es un subespacio de V.

Puntaje:

- Por encontrar un conjunto que genera W, 1 punto.
- Por justificar que efectivamente dicho conjunto es un generador, 1 punto.
- Por invocar el teorema que asegura que todo conjunto generado es un subespacio, 1 punto.

b) Determine una base de W.

Primera Solución:

Los elementos de W son polinomios de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ tales que $p(0) = p(1) = 0$, o sea, tales que $d = 0$ y $a + b + c + d = 0$.

Considerando estas dos igualdades como ecuaciones (con incógnitas a, B, c y d) resolvemos el sistema de ecuaciones y llegamos —por ejemplo— a

$$d = 0, \qquad a = -b - c,$$

donde b y c son variables independientes, a es variable dependiente y $d = 0$ está fija.

Así, los polinomios de W pueden ser considerados como vectores (a, b, c, d) donde $a = -b - c$ y $d = 0$, o sea, de la forma $(-b - c, b, c, 0)$.

Un conjunto de vectores que genera el subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por los vectores que satisfacen esta condición es $\{(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0)\}$. Que este conjunto es l.i. es fácil de comprobar[1], por lo que este conjunto es base del mencionado subespacio; traduciendo esto de vuelta a polinomios encontramos que una base de W está dada por

$$\left\{x^3 - x^2, x^3 - x\right\}.$$

Puntaje:

[1] Ver la segunda solución propuesta para este problema, donde se hace esta misma demostración directamente con los polinomios.

- Por plantear alguna forma correcta de encontrar una base de W, 1 punto.
- Por encontrar una base de W, 1,5 puntos.
- Por justificar adecuadamente que el conjunto dado es efectivamente una base, 0,5 puntos.

Segunda Solución:

Siguiendo la idea de la segunda solución de (a), si hemos expresado W como el conjunto generado por algunos vectores de V (y que por ende es subespacio de V), bastará hacer alguna de las dos tareas siguientes para obtener una base de W:

- demostrar que el conjunto generador hallado es l.i. (y por lo tanto él mismo es una base), o bien
- eliminar uno por uno del generador aquellos vectores (polinomios) que son combinación lineal de los elementos que no han sido eliminados.

En nuestro caso, hacemos lo primero: supongamos que s y t son dos números reales cualesquiera, y que $p(x) = s(x^3 - x) + t(x^3 - x^2)$ es el polinomio nulo. Entonces $p(u) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}$, en particular, $p(2) = 0$ y $p(3) = 0$. Escribiendo estas dos condiciones como un sistema de ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} 6s + 4t &= 0 \\ 24s + 18t &= 0 \end{aligned}\right|$$

de donde claramente $s = t = 0$, vale decir, los polinomios $x^3 - x$ y $x^3 - x^2$ son l.i.

Puntaje:

Bajo el supuesto de que encontraron un generador en la primera parte del ejercicio, el puntaje se asigna como sigue:

- Por argumentar (puede incluso ser en forma implícita) que basta probar que el generador encontrado (o un subconjunto propio que también genere W) es l.i. para tener una base, 1 punto.
- Por explicitar el conjunto que se afirma es base: 1,5 puntos.
- Por justificar adecuadamente que el conjunto dado es efectivamente una base (o sea, por probar que es l.i.), 0,5 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

6. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix}.$$

a) Demuestre que T es una transformación lineal.

Primera Solución:

Debemos probar que, si $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}_2$, entonces:

- $T(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = T(\mathbf{p}) + T(\mathbf{q})$.
- $T(a\mathbf{p}) = aT(\mathbf{p})$.

En efecto:

- Como $(\mathbf{p} + \mathbf{q})(0) = \mathbf{p}(0) + \mathbf{q}(0)$ y $(\mathbf{p} + \mathbf{q})(1) = \mathbf{p}(1) + \mathbf{q}(1)$, tenemos

$$T(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{p} + \mathbf{q})(0) \\ (\mathbf{p} + \mathbf{q})(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) + \mathbf{q}(0) \\ \mathbf{p}(1) + \mathbf{q}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q}(0) \\ \mathbf{q}(1) \end{bmatrix} = T(\mathbf{p})+T(\mathbf{q}).$$

- Como $(a\mathbf{p})(0) = a\mathbf{p}(0)$ y $(a\mathbf{p})(1) = a\mathbf{p}(1)$, tenemos

$$T(a\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} (a\mathbf{p})(0) \\ (a\mathbf{p})(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathbf{p}(0) \\ a\mathbf{p}(1) \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix} = aT(\mathbf{p}).$$

Segunda Solución:

Otra posible forma de demostrar esto es probar que, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}_2$, entonces:

$$T(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) = aT(\mathbf{p}) + bT(\mathbf{q}).$$

En efecto:

$$\begin{aligned} T(a\mathbf{p} + b\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} (a\mathbf{p} + b\mathbf{q})(0) \\ (a\mathbf{p} + b\mathbf{q})(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathbf{p}(0) + b\mathbf{q}(0) \\ a\mathbf{p}(1) + b\mathbf{q}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\mathbf{p}(0) \\ a\mathbf{p}(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b\mathbf{q}(0) \\ b\mathbf{q}(1) \end{bmatrix} \\ &= a \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} \mathbf{q}(0) \\ \mathbf{q}(1) \end{bmatrix} = aT(\mathbf{p}) + bT(\mathbf{q}). \end{aligned}$$

Puntaje:

- Por plantear alguna forma correcta de demostrar lo pedido, 1 punto.
- Por realizar correctamente la demostración, 2 puntos.
  Si se cometen errores algebraicos menores se descuenta 1 punto.

b) Encuentre una base del núcleo de T.

Solución:

Como todos ya nos dimos cuenta, esta pregunta es la misma que 5b, por lo que la solución y la distribución de puntaje siguen las mismas guías.

Al puntaje total obtenido en la pregunta se le suma el punto base.

7. Sean $\mathbf{p}_1(t) = 1 - t^2$, $\mathbf{p}_2(t) = 1 + t$, $\mathbf{p}_3(t) = 1 + t + t^2$. Se sabe que $\{\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \mathbf{p}_3(t)\}$ es una base de $\mathbb{P}_2$.

   a) Exprese los polinomios $\mathbf{f}(t) = 3 - 5t + 2t^2$ y $\mathbf{g}(t) = 1 - 3t$ como combinaciones lineales de $\{\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \mathbf{p}_3(t)\}$ (en otras palabras, encuentre las *coordenadas* de $\mathbf{f}(t)$ y $\mathbf{g}(t)$ en la base $\{\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \mathbf{p}_3(t)\}$).

   b) Use los vectores de coordenadas encontrados en la parte anterior para determinar si el conjunto $\{\mathbf{p}_1(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}$ es l.i. o l.d.

Solución:

a) Buscmamos $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que

$$\mathbf{f}(t) = 3-5t+2t^2 = a\mathbf{p}_1(t)+b\mathbf{p}_2(t)+c\mathbf{p}_3(t), \qquad \mathbf{g}(t) = 1-3t = d\mathbf{p}_1(t)+e\mathbf{p}_2(t)+f\mathbf{p}_3(t).$$

Así,

$$a(1-t^2)+b(1+t)+c(1+t+t^2) = 3-5t+2t^2, \qquad d(1-t^2)+e(1+t)+f(1+t+t^2) = 1-3t,$$

o sea,

$$a+b+c+(b+c)t+(c-a)t^2 = 3-5t+2t^2 \quad \text{y} \qquad d+e+f+(e+f)t+(f-d)t^2 = 1-3t.$$

Así, planteamos los sistemas de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rrr} a & +b+c & = 3 \\ & b+c & = -5 \\ -a & +c & = 2 \end{array}\right| \qquad \text{y} \qquad \left.\begin{array}{rrr} d & +e+f & = 1 \\ & e+f & = -3 \\ -d & +f & = 0 \end{array}\right|,$$

que tienen por soluciones $a = 8, b = -15, c = 10$ y $d = 4, e = -7, f = 4$, por lo que, en la base $\{\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \mathbf{p}_3(t)\}$, las coordenadas de $\mathbf{f}(t)$ son $(8, -15, 10)$ y las de $\mathbf{g}(t)$ son $(4, -7, 4)$.

b) En la base $\{\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \mathbf{p}_3(t)\}$, las coordenadas de $\mathbf{p}_1(t)$ son $(1, 0, 0)$, por lo que la dependencia o independencia lineal pedida es equivalente a la dependencia o independencia lineal de los vectores $(1, 0, 0)$, $(8, -15, 10)$ y $(4, -7, 4)$, lo que a su vez es equivalente a que la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & -15 & 10 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ tenga 3 filas (o columnas) pivote.

Como al escalonar esta matriz obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & -15 & 10 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 10 \\ 0 & -7 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & -7 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{bmatrix}$$

por lo que la matriz tiene 3 filas l.i., por lo que el conjunto de vectores $\{\mathbf{p}_1(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}$ es l.i.

Puntaje:

a) Para cada uno de los polinomios $\mathbf{f}(t)$ y $\mathbf{g}(t)$:

- Por plantear correctamente un sistema que permita calcular las coordenadas del polinomio: 0,5 puntos.
- Por resolver correctamente el sistema: 0,5 puntos.
- Por obtener correctamente los ponderadores de la combinación lineal buscada (o sea, por dar las coordenadas del polinomio en la base $\{\mathbf{p}_1(t), \mathbf{p}_2(t), \mathbf{p}_3(t)\}$): 0,5 puntos.

b)
- Por plantear alguna forma correcta de enfrentar el problema (cantidad de filas independientes de una matriz, soluciones no triviales de algún sistema, etc.): 1 punto.
- Por aplicar correctamente la forma planteada en el punto anterior: 1,5 puntos.
- Por responder correctamente la pregunta, diciendo que el conjunto $\{\mathbf{p}_1(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}$ es l.i., 0,5 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) El subconjunto de $\mathbb{R}^2$

   $$E = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \, 9x_1^2 + 2x_2^2 \leq 4\right\}$$

   es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

   b) Si A es una matriz de $n \times n$ tal que $A^2 = A$, entonces $\text{Col}(A) \cap \text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

   c) Si n es impar y A es una matriz de $n \times n$ que satisface $A^T = -A$ entonces $\text{Nul}\, A \neq \{0\}$.

   Solución:

   a) **Falso**.

   El par $(0,1)$ pertenece a E (ya que $9 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 = 2 \leq 4$, pero $2(0,1) = (0,2)$ no $(9 \cdot 0^2 + 2 \cdot 2^2 = 8 > 4)$.

   Así, E no es cerrado bajo ponderación.

   Otra forma de demostrar que E no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$ es probar que no es cerrado bajo suma. Para ello, debemos exhibir dos pares ordenados que pertenecen a E pero cuya suma no.

   Por ejemplo, considerando $(1/2, 0)$ y $(0,1)$ vemos que $9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot 0^2 = \frac{9}{4} \leq 4$ y $9 \cdot 0^2 + 2 \cdot 1^2 = 2 \leq 4$, por lo que tanto $(1/2, 0)$ como $(0,1)$ pertenecen a E. Pero su suma es $(1/2, 1)$, y como $9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot 1^2 = \frac{17}{4} > 4$, $(1/2, 1) \notin E$.

   b) **Verdadero**.

   Sea $\mathbf{y} \in \text{Col}(A) \cap \text{Nul}(A)$.

   Por estar $\mathbf{y} \in \text{Col}(A)$, existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Como $A^2 = A$, $A\mathbf{y} = A(A\mathbf{x}) = A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

   Pero $\mathbf{y} \in \text{Nul}(A)$, por lo que $\mathbf{y} = A\mathbf{y} = \mathbf{0}$, de donde el único posible valor de $\mathbf{y}$ es $\mathbf{0}$, lo que significa que $\text{Col}(A) \cap \text{Nul}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

   c) **Verdadero**.

   Por ser A de $n \times n$, $\det(-A) = (-1)^n \det A$, Como n es impar, $(-1)^n = -1$, por lo que $\det(A^T) = \det(-A) = -\det(A)$.

   Por otra parte, sabemos que $\det(A^T) = \det A$, por lo que $\det A = -\det A$, de donde $\det A = 0$.

   Pero entonces A no es invertible, porlo que $\text{Nul}\, A \neq \{\mathbf{0}\}$.

Puntaje:

a)
- Por exhibir un vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y un escalar α tal que $(a, b) \in E$ pero $\alpha(a, b) \notin E$, o dos vectores $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(a, b), (c, d) \in E$ pero $(a + c, b + d) \notin E$, 1,5 puntos.
- Por concluir (basado en lo anterior) que E no es espacio vectorial, 0,5 puntos.

b)
- Por probar que $\mathbf{y} \in \mathrm{Col}(A) \to A\mathbf{y} = \mathbf{y}$, 1 punto.
- Por probar que $\mathbf{y} \in \mathrm{Col}(A) \cap \mathrm{Nul}(A) \to \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 1 punto.

c)
- Por llegar a que A no es invertible, 1,5 puntos.
- Por concluir que $\mathrm{Nul}\, A \neq \{\mathbf{0}\}$, 0,5 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.