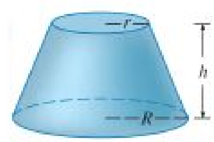
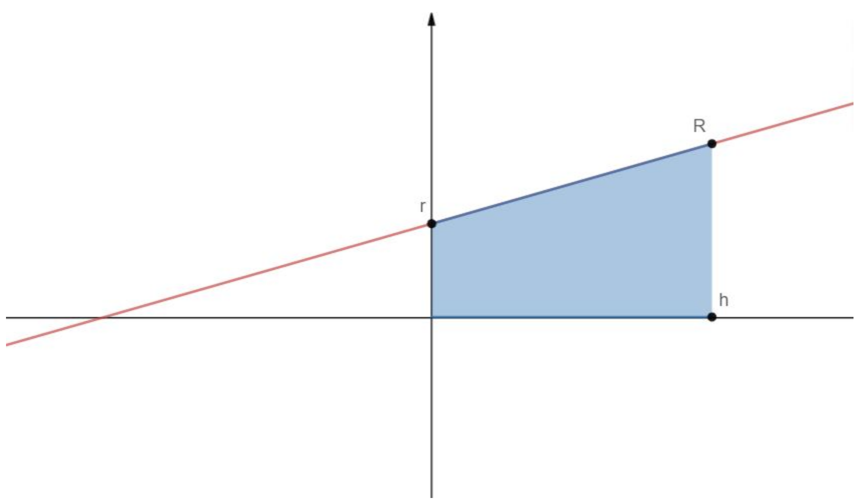
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2022

Ayudantía 13 - MAT1610

1. Calcular el volumen de un cono circular truncado, cuya altura es h , base inferior R y radio superior r, como se muestra en la figura.



Solución:
Note que el cono circular truncado puede obtenerse al rotar alrededor del eje x el área del trapecio de altura h, base menor r y base mayor R, como en la figura
Note el área del trapecio se asocia al área bajo la recta que pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, R),

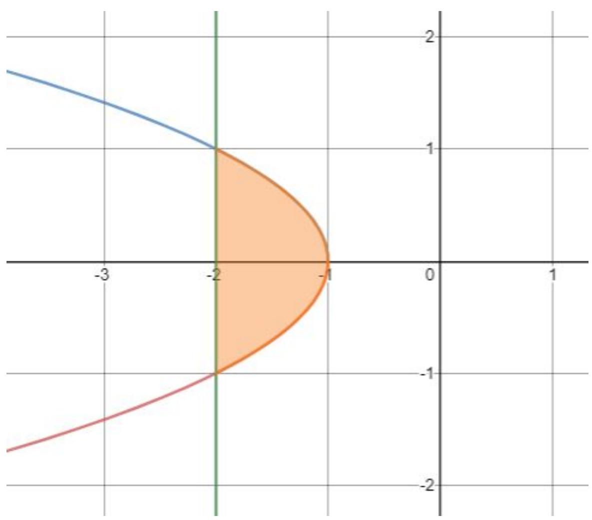


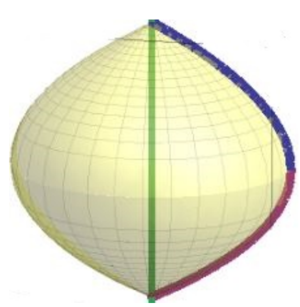
entre 0 y h. Dicha recta tiene ecuación $y = mx + r$ con $m = \frac{R-r}{h-0} = \frac{R-r}{h}$, entonces,
$$V = \int_0^h \pi(mx + r)^2 dx = \pi \int_0^h (mx + r)^2 = \pi \left. \frac{(mx + r)^3}{3m} \right|_0^h = \frac{(mh + r)^3}{3m} - \frac{(r)^3}{3m}$$
Por lo tanto,
$V = \frac{\pi}{3m}\left((mh + r)^3 - r^3\right) = \frac{\pi}{3\frac{R-r}{h}}\left((R - r + r)^3 - r^3\right) = \frac{\pi h}{3(R-r)}\left(R^3 - r^3\right) = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)$
Así, el volumen de un cono circular truncado, cuya altura es h , base inferior R y radio superior r es $V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)$ unidades de volumen.

2. Determinar el volumen del sólido generado por la rotación del área limitada por las curvas asociadas a $-y^2 - 1 = x$ y la recta $x = -2$ alrededor de la recta $x = -2$
Solución:
Puntos de Intersección: $-y^2 - 1 = -2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$, es decir, los puntos son $(-2, -1)$, $(-2, 1)$.

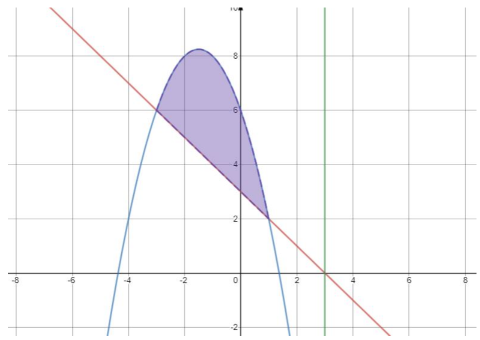
$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} \pi(-y^2 - 1 - (-2))^2 dy \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} (-y^2 + 1)^2 dy \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} (y^4 - 2y^2 + 1) dy \\
&= \pi \left(\frac{y^5}{5} - 2\frac{y^3}{3} + y \Big|_{-1}^{1} \right) \\
&= \left(\frac{16\pi}{15} \right)
\end{aligned}
$$

Así el volumen es $\frac{16\pi}{15}$ unidades de volumen.
Idea gráfica





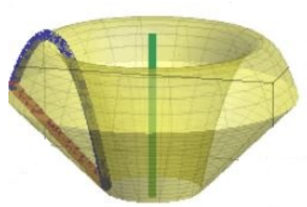
3. Hallar el volumen del sólido generado en la rotación del área limitada por la parábola $y = -x^2 - 3x + 6$ y la recta $y = 3 - x$ alrededor de la recta $x = 3$ y del eje x.
Solución:
El área a rotar se muestra en la figura



Intersección entre las curvas:

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x + 6 = 3 - x &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Idea gráfica del sólido generado:



$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)\left(-x^2-3x+6-(3-x)\right) dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)\left(-x^2-2x+3)\right) dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} \left(-3x^2-6x+9+x^3+2x^2-3x)\right) dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} \left(x^3-x^2-9x+9)\right) dx \\
&= 2\pi \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{9x^2}{2}+9x\right]\Bigg|_{-3}^{1} \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{9}{2}+9-\left(\frac{81}{4}+9-\frac{81}{2}-27\right)\right] \\
&= 2\pi \left[-\frac{80}{4}+\frac{72}{2}+27-\frac{1}{3}\right] \\
&= 2\pi \left[43-\frac{1}{3}\right] \\
&= 2\pi \left[\frac{128}{3}\right] \\
&= \frac{256\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Así, el volumen del sólido es $\frac{256\pi}{3}$ unidades de volumen.

4. Determine:

(a) $\displaystyle\int e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xe^{\text{arcsen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Solución:

(a) Entonces, considerando $u=\ln(1+e^x)$ y $dv=e^{-x}dx$ se tiene que $du=\frac{e^x}{1+e^x}dx$ y $v=\displaystyle\int dv=\int e^{-x}dx=-e^{-x}$. Así, aplicando integración por partes

$$
\begin{aligned}
\int e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx &= -\ln(1+e^x)\,e^{-x}+\int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}dx\\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x}+\int \frac{1}{1+e^x}dx\\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x}+\int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx\\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x}+\int \frac{1+e^x}{1+e^x}dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx\\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x}+\int 1dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx\\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x}+x-\ln(|1+e^x|)+C\\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x}+x-\ln(1+e^x)+C\\
&= -\ln(1+e^x)\left(e^{-x}+1\right)+x+C
\end{aligned}
$$

(b) Notar que $\frac{d}{dx}\text{arcsen}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces haciendo la sustitución $t=\text{arcsen}(x)$, se tiene que $dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $x=\text{sen}(t)$, si $x=0$ entonces $t=\text{arcsen}(0)=0$ y si $x=\frac{1}{2}$ entonces $t=\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ y $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{xe^{\text{arcsen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\text{sen}(t)e^tdt$ cuyo valor puede obtenerse integrando por partes.
Considerando la integral indefinida, aplicando integración pr partes dos veces:
$u=\text{sen}(t)$, $dv=e^t$, $du=\cos(t)dt$, $v=e^t$
$u=\cos(t)$, $dv=e^t$, $du=-\text{sen}(t)dt$, $v=e^t$

$$
\begin{aligned}
\int\text{sen}(t)e^tdt &= e^t\text{sen}(t)-\int\cos(t)e^tdt\\
&= e^t\text{sen}(t)-\left(\cos(t)e^t+\int\text{sen}(t)e^tdt\right)\\
&= e^t\text{sen}(t)-\cos(t)e^t-\int\text{sen}(t)e^tdt\\
&= e^t\left(\text{sen}(t)-\cos(t)\right)-\int\text{sen}(t)e^tdt
\end{aligned}
$$

Entonces, $\int \operatorname{sen}(t)e^t dt = \frac{e^t}{2}\left(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)\right) + C$ y

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}(t)e^t dt &= \frac{e^t}{2}\left(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{e^{\frac{\pi}{6}}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$