PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEGUNDO SEMESTRE DE 2021

MAT1620 – Cálculo II

Solución Interrogación N° 1

1. Determine si la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}\, dx$ es convergente o divergente. En caso de convergencia, calcule el valor numérico de la integral.

Solución. La integral es impropia de los dos tipos, puesto que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}} = \infty$ y el intervalo de integración no es acotado inferiormente. Para estudiar su convergencia debemos reescribirla de la siguente manera:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}\, dx &= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}\, dx + \int_{0}^{1} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}\, dx \\ &= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}\, dx + \lim_{t\to 1^-} \int_{0}^{t} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}\, dx.\end{aligned}$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{cases} u = -\sqrt{1-x} \\ du = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} \end{cases} \qquad \text{y notamos que} \qquad \begin{cases} x = t & \text{implica} \quad u = -\sqrt{1-t} \\ \\ x = 0 & \text{implica} \quad u = -1 \end{cases}$$

Entonces

$$\lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}\, dx = \lim_{t\to-\infty} 2\int_{-\sqrt{1-t}}^{-1} e^u\, du = \lim_{t\to-\infty} 2e^u \,\Big|_{-\sqrt{1-t}}^{-1} = \lim_{t\to-\infty} 2\left(e^{-1} - e^{-\sqrt{1-t}}\right) = 2e^{-1}.$$

Así también tenemos

$$\lim_{t\to 1^-} \int_{0}^{t} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}\, dx = \lim_{t\to 1^-} 2\int_{-1}^{-\sqrt{1-t}} e^u\, du = \lim_{t\to 1^-} 2e^u \,\Big|_{-1}^{-\sqrt{1-t}} = \lim_{t\to 1^-} 2\left(e^{-\sqrt{1-t}} - e^{-1}\right) = 2(1-e^{-1}).$$

Ahora como estas dos integrales son convergentes podemos concluir que

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{e^{-\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}\, dx = 2e^{-1} + 2 - 2e^{-1} = 2$$

lo que implica que esta integral es convergente y converge a 2.

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por reconocer que la intengral es impropia.
- **1 pt** Por hacer un cambio de variable apropiado que resuelva la integral.
- **1 pt** Por determinar los límites de integración después del cambio de variable.
- **2 pts** Por utilizar un criterio que demuestre la convergencia de la integral.
- **1 pt** Por calcular el valor numérico de la integral impropia.

2. a) Sean $c > 0$ y $\{a_n\}$ una sucesión definida por $a_n = \dfrac{c^n}{n!}$. Demuestre que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente.

Solución 1. La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ es convergente y por lo tanto $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0$. Utilizamos la prueba de la razón para demostrar la convergencia de la serie:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{c^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n} = 0 < 1.$$

Criterios de corrección para solución 1:

- **1 pt** Por reconocer que si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- **2 pts** Por utilizar un criterio que demuestre la convergencia de la serie.

Solución 2. Tenemos $0 < \dfrac{c^n}{n!}$. Entonces la sucesión $\{a_n\}$ está acotada por abajo.
Fijamos $c > 0$ y demostramos que $\forall n > c - 1, \quad a_{n+1} < a_n$.

$$\frac{c^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{c^n}{n!} \Leftrightarrow \frac{c}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n + 1 > c \Leftrightarrow n > c - 1.$$

Por lo tanto, por monotonía y cotación la sucesión es convergente.

Criterios de corrección para solución 2:

- **1 pt** Por reconocer que una sucesión monotona y acotada es convergente.
- **1 pt** Por demostrar que la sucesión está acotada por abajo.
- **1 pt** Por demostrar que $\forall n > c - 1, \quad a_{n+1} < a_n$.

b) Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ es convergente o divergente.

Solución 1. Utilizamos la prueba de la razón para demostrar la divergencia de la serie.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{(n+1)^2} = 2 > 1.$$

Criterios de corrección para solución 1:

- **2 pts** Por verificar las hipótesis del criterio elegido.
- **1 pt** Por concluir la divergencia de la serie.

Solución 2. Utilizamos el criterio de divergencia para demostrar la divergencia de la serie.
Sea $f(x) = \dfrac{2^x}{x^2}$. Tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln(2)}{2x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2^x \ln^2(2)}{2} = \infty \Longrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Como $f(n) = a_n$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} \neq 0$. Por lo tanto por el criterio de la divergencia la serie es divergente.

Criterios de corrección para solución 2:

- **2 pts** Por demostrar que el límite de la sucesión es distinto de 0.
- **1 pt** Por concluir la divergencia de la serie.

3. *a*) Sea $S_n = \dfrac{n-3}{n+1}$ la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Determine a_n para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ y calcule el valor numérico de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Solución. Notamos que $a_1 = S_1 = -1$.
Para $n > 1$ tenemos $a_n = S_n - S_{n-1} = \dfrac{n-3}{n+1} - \dfrac{n-4}{n} = \dfrac{4}{n(n+1)}$.

Según la definición $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n-3}{n+1} = 1$.

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por calcular a_1.
- **1 pt** Por calcular a_n cuando $n > 1$.
- **1 pt** Por determinar el valor numérico de la serie.

b) Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^n}{5+11^n}$ es convergente o divergente.

Solución. Notamos que $0 < \dfrac{8^n}{5+11^n} < \dfrac{8^n}{11^n}$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{8}{11}\right)^n$ es una serie geométrica convergente con razón positiva $\dfrac{8}{11} < 1$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^n}{5+11^n}$, que es una serie con términos positivos, es convergente por la prueba de comparación.

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por reconocer que los términos de la serie son positivos.
- **1 pt** Por comparar correctamente los términos de la serie con los de una serie convergente.
- **1 pt** Por concluir la convergencia de la serie.

Nota: Se puede usar otros criterios de convergencia.

Criterios de corrección para otras soluciones:

- **2 pts** Por verificar las hipótesis del criterio de convergencia elegido.
- **1 pt** Por concluir la convergencia de la serie.

4. *a*) Utilice la prueba de la integral para demostrar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2\, e^{-n^3}$.

Solución. Sea $f(x) = x^2\, e^{-x^3} = \dfrac{x^2}{e^{x^3}}$, entonces f es positiva y continua en $[1, \infty)$. Además

$$f'(x) = \frac{2x\, e^{x^3} - x^2 \cdot e^{x^3} \cdot 3x^2}{(e^{x^3})^2} = \frac{x\, e^{x^3}\, (2 - 3x^3)}{(e^{x^3})^2} < 0\,,\ \forall\, x \geq 1.$$

Entonces en $[1, \infty)$ la función f es positiva, continua y decreciente. Por lo tanto podemos usar el criterio de la integral.

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx = \int_1^{\infty} \frac{x^2}{e^{x^3}}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{x^2}{e^{x^3}}\, dx = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\, e^{-x^3} \Big|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{3}\, e^{-b^3} + \frac{1}{3e} \right) = \frac{1}{3e}.$$

Como la integral impropia converge, entonces la serie converge.

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por verificar las dos hipótesis que la función es positiva y continua.
- **1 pt** Por verificar que la función es decreciente en $[1, \infty)$.
- **1 pt** Por utilizar un criterio que demuestre la convergencia de la integral impropia.

b) Del teorema del valor medio, se puede demostrar que para cada n natural, existe $\alpha_n \in \left] \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n} \right[$ tal que $e^{\alpha_n} = \dfrac{e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}$. Usando esto, calcule el valor numérico de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha_n}}{n(n+1)}$.

Nota: No es necesario demostrar la proposición del teorema del valor medio.

Solución. Según la información del enunciado, por el TVM se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{e^{\alpha_n}}{n(n+1)} = e^{\alpha_n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}.$$

Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha_n}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(e - e^{\frac{1}{k+1}} \right) = e - 1$$

donde la penúltima igualdad es verdadera del hecho que la serie es telescópica.

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por aplicar el TVM para simplicar el término general de la serie.
- **1 pt** Por reconocer la serie como una serie telescópica.
- **1 pt** Por determinar el valor numérico de la serie.

5. Determine el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{3^n (n+1)^3}.$$

Solución. Note que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}(x+2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+2)^3}}{\frac{(-1)^n(x+2)^n}{3^n(n+1)^3}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(n+1)^n|x+2|^{n+1}}{3^{n+1}(n+2)^3|x+2|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^3 |x+2| = \frac{|x+2|}{3}$$

De acuerdo con la prueba de la razón, la serie dada converge cuando $\frac{|x+2|}{3} < 1$. Ahora

$$\frac{|x+2|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x+2 < 3 \Leftrightarrow -5 < x < 1$$

de modo que la serie converge cuando $-5 < x < 1$. Evaluando la serie de potencias en $x = -5$ y en $x = 1$ obtenemos respectivamente,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3} \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3}.$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^3}$ es absolutamente convergente por comparación con una serie p. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^3}$ es convergente por la prueba de la serie alternante, puesto que la sucesión de término general $a_n = \frac{1}{(n+1)^3}$ es decreciente y convergente a 0.

Luego el dominio de convergencia de la serie de potencias es el intervalo cerrado $[-5, 1]$.

Criterios de corrección:

- **2 pts** Por determinar el límite de la razón.
- **2 pts** Por determinar el intervalo abierto donde la serie es convergente.
- **2 pts** Por determinar el dominio de convergencia de la serie de potencias.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo