Clase 6v2

martes, 20 de agosto de 2024 16:10

Matrices

Observamos que cuando trabajamos con un sistema de ecuaciones lineales, por ejemplo,

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$
$$2x_1 + -3x_2 + 6x_3 = 0$$

nos basta con conocer los coeficientes de cada ecuación lineal y sus respectivos terminos independientes. Estos los podemos escribir en un arreglo rectangular de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto nos ayudará a escribir menos. Más adelante veremos que estos objetos, llamados matrices, juegan un rol vital en la teoría del álgebra lineal.

Def: Una matriz es un arreglo rectangular de números

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Los números a_{ij} se llaman los coeficientes de la matriz A

El número m corresponde al número de filas
El " n " " " " columnas

En tal caso decimos que la matriz es de $m \times n$

Denotaremos por $M_{m\times n}[\mathbb{R}]$ al conjunto de todas las matrices de $m \times n$ cuyos coeficientes son números reales.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz de 2×4. Luego pertenece a $M_{2\times 4}(\mathbb{R})$.

Dada una matriz A de $m \times n$, consideradmos sus filas numeradas de arriba a abajo y sus columnas de derecha a izquierda.

$$A = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{array}{l} \to \text{Fila } 1 \\ \to \text{Fila } 2 \\ \vdots \\ \to \text{Fila } m \end{array}$$

$$A = \begin{array}{ccccc} & & & & \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \text{Col. }1 & \text{Col. }2 & \text{Col. }3 & \cdots & \text{Col. } n \end{array} \end{array}$$

Observemos que en tal caso a_{ij} es el coeficiente de la fila i en la columna j.
Para ahorrar escribir de más, a la matriz A la denotaremos

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

En ocasiones será útil dar nombre a las filas o columnas de A. Por ejemplo, podemos denotar

$$A = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} = [c_1 \; c_2 \; \cdots \; c_n]$$

donde $F_i = [a_{i1} \; a_{i2} \; \ldots \; a_{in}]$ es la i-ésima fila

y $c_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ es la i-ésima columna.

Nota: Una matriz de $m \times 1$ tiene m filas y 1 columna. En tal caso interpretaremos la matriz con un vector en $\mathbb{R}^m$. Por eso llamamos a tales vectores vectores columna. Ej: $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Una matriz de $1 \times n$ tiene una fila. Nos referiremos a tales objetos vectores fila.

Ej: $[0 \; 1 \; 4 \; 5]$.

Def: Consideremos una matriz A de $m \times n$ y $x \in \mathbb{R}^n$ un vector. Definimos la multiplicación de A por x como el vector en $\mathbb{R}^m$ dado por:

$$\boxed{A \cdot x = \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \cdots + x_n \cdot a_n}$$

donde $a_1, \ldots, a_n$ son las columnas de A.

En otras palabras: El vector $A \cdot x$ es la la combinación lineal de las columnas de A con coeficientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$

... $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot (3) + 0 \cdot (1) + 1 \cdot (0) \\ 2 \cdot (4) + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Importante: Del último ejemplo observamos que si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces $A \cdot x$ es el vector

$$\boxed{A \cdot x = \begin{bmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n \end{bmatrix}}$$

Esto puede ser útil para hacer cálculos a mano.

Y esto: ¿Para qué?

De la definición de $A \cdot x$ observamos que cualquier SEL

$$\boxed{\begin{matrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{matrix}}\ ,$$

se puede representar más compactamente como

$$\boxed{A \cdot x = b}$$

donde $A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

y x es el vector de incognitas

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

La matriz A se dice matriz de coeficientes del SEL y b se dice vector de términos libres o lado derecho del sistema.

La matriz obtenida de concatenar la matriz de coeficientes con el vector b se llama matriz ampliada o aumentada $\boxed{[A \vdots b]}$

Ejemplo: El sistema

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

corresponde a $Ax = b$ si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \end{bmatrix} , \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes Lado drecho

$$[A \vdots b] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & \vdots & 3 \\ 4 & -5 & -1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz aumentada.

La matriz aumentada nos servirá para escribir menos al hacer los cálculos para resolver un SEL.
Tomemos como ejemplo el sistema de la Clase 4

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ x + y - 3z = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ 3x + 3y - 9z = 6 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -9 & 6 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ 5y - 10z = 5 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 3x - 3z = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

——— o ———

Definición: Si A es una matriz de $m \times n$ con columnas $a_1, \dots, a_n$ $(A = [a_1 \ a_2 \cdots a_n])$ entonces decimos que:

i) $Ax = b$ es una ecuación matricial

ii) $x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n = b$ es una ecuación vectorial

Teorema: Si A es una matriz de $m \times n$ con columnas $a_1, \dots, a_n$ y $b \in \mathbb{R}^m$ entonces la ecuación matricial

$$Ax = b$$

tiene el mismo conjunto solución que la ecuación vectorial

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b,$$

que también tiene el mismo conjunto solución que el SEL con matriz aumentada

$[A \vdots b]$

Dem: Viene directo de las definiciones anteriores $\boxtimes$

Estas 3 interpretaciones equivalentes nos serán de utilidad al analizar el conjunto solución