Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2020

MAT1610 - Cálculo I
Pauta Interrogación 1

Instrucciones:
✓Esta prueba consiste de 2 hojas, que incluyen 5 problemas en total, todas con el mismo puntaje (6 puntos cada una).
✓Desarrolle sus respuestas justificadamente. Todas sus justificaciones y argumentos de respuestas deben estar basados en resultados y teoremas estudiados en clase.

Problema 1.

Encuentre las ecuaciones de las asíntotas (horizontales y verticales) de la función

$$f(x) = \frac{2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}}{3 - 3x}.$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}}{3 - 3x} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{2 + \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2 - 3x + 6}}{3 - 3x} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{2 + x\sqrt{1 - 3/x + 6/x^2}}{3 - 3x} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{2/x + \sqrt{1 - 3/x + 6/x^2}}{3/x - 3} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 3x + 6}}{3 - 3x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{x}{|x|}\sqrt{x^2 - 3x + 6}}{3 - 3x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - x\sqrt{1 - 3/x + 6/x^2}}{3 - 3x} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{2/x - \sqrt{1 - 3/x + 6/x^2}}{3/x - 3} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Las asíntotas horizontales de f son $y = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

El único punto donde f podría tener una asíntota vertical es $x = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt{x^2-3x+6}}{3-3x} &= \lim_{x\to 1} \frac{4-(x^2-3x+6)}{(3-3x)(2+\sqrt{x^2-3x+6})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{-x^2+3x-2}{3(1-x)(2+\sqrt{x^2-3x+6})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)(x-2)}{3(1-x)(2+\sqrt{x^2-3x+6})} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{3(2+\sqrt{x^2-3x+6})} \\
&= \frac{-1}{3(2+\sqrt{4})} \\
&= -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Como el límite existe, no hay asíntota vertical.

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por álgebra correcta límite hacia $-\infty$.
- **(0.5 punto)** Por resultado correcto del límite hacia $-\infty$.
- **(0.5 punto)** Por exhibir ecuación de asíntota hacia $-\infty$.
- **(1 punto)** Por álgebra correcta límite hacia ∞.
- **(0.5 punto)** Por resultado correcto del límite hacia ∞.
- **(0.5 punto)** Por exhibir ecuación de asíntota hacia ∞
- **(1 punto)** Por álgebra correcta límite cuando $x \to 1$
- **(1 punto)** Por resultado correcto del límite y concluir correctamente sobre las asíntotas verticales.

Problema 2.

Considere las funciones

$$f(x) = \frac{x}{|x|},$$

$$g(x) = \begin{cases} x\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Calcule el siguiente límite o justifique por qué no existe:

$$\lim_{x\to 0} f(x) - 2g(x)$$

Solución:
Calcularemos primero los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Como para todo $x < 0$, $x \leq x\cos(\frac{1}{x}) \leq -x$, podemos usar el teorema del sandwich (de la compresión) para concluir que

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} x\cos(\frac{1}{x}) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} g(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) - 2g(x) = -1 - 0 = 1 - 2 = \lim_{x\to 0^+} f(x) - 2g(x)$$

de manera que

$$\lim_{x\to 0} f(x) - 2g(x) = -1$$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por algebra correcta en límite lateral izquierdo de $g(x)$
- **(0.5 punto)** Por resultado correcto en límite lateral izquierdo de $g(x)$
- **(1 punto)** Por resultado correcto del límite lateral izquierdo de $f(x) - 2g(x)$
- **(1 punto)** Por algebra correcta en límite lateral derecho de $g(x)$
- **(0.5 punto)** Por resultado correcto en límite lateral derecho de $g(x)$
- **(1 punto)** Por resultado correcto del límite lateral derecho de $f(x) - 2g(x)$
- **(1 punto)** Por concluir correctamente.

Problema 3.

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si } \ x \leq 0 \\ \dfrac{ax+b}{x^2+2x+1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Hallar a y b de modo que la función f sea continua en $x = 0$ y tenga una recta tangente horizontal en $x = 2$.

Solución:

Para que f sea continua en $x = 0$, debe ocurrir que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = -1$ y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \quad = \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x-1} = -1$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) \quad = \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{ax+b}{x^2+2x+1} = \frac{b}{1} = b$$

Así, para que f sea continua en $x = 0$, debe ocurrir que $b = -1$.

Para que f tenga recta tangente horizontal en $x = 2$, debe ocurrir que la pendiente de la recta tangente en $x = 2$ es cero, es decir, $f'(2) = 0$ y

Dado que $x = 2 > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{ax+b}{x^2+2x+1}\right)' \\ &= \left(\frac{ax+b}{(x+1)^2}\right)' \\ &= \frac{(ax+b)'(x+1)^2 - (ax+b)\left((x+1)^2\right)'}{\left((x+1)^2\right)^2} \\ &= \frac{a(x+1)^2 - (ax+b)\,2(x+1)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{(x+1)\left(a(x+1) - 2(ax+b)\right)}{(x+1)^4} \\ &= \frac{a(x+1) - 2(ax+b)}{(x+1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \frac{a(2+1) - 2(a2+b)}{(2+1)^3} \\ &= \frac{-a-2b}{27} \\ &= \frac{-a+2}{27} \end{aligned}$$

Así, $f'(2) = 0$ si $a = 2$
Nota: También se puede reemplazar el valor de b antes de calcular la derivada.

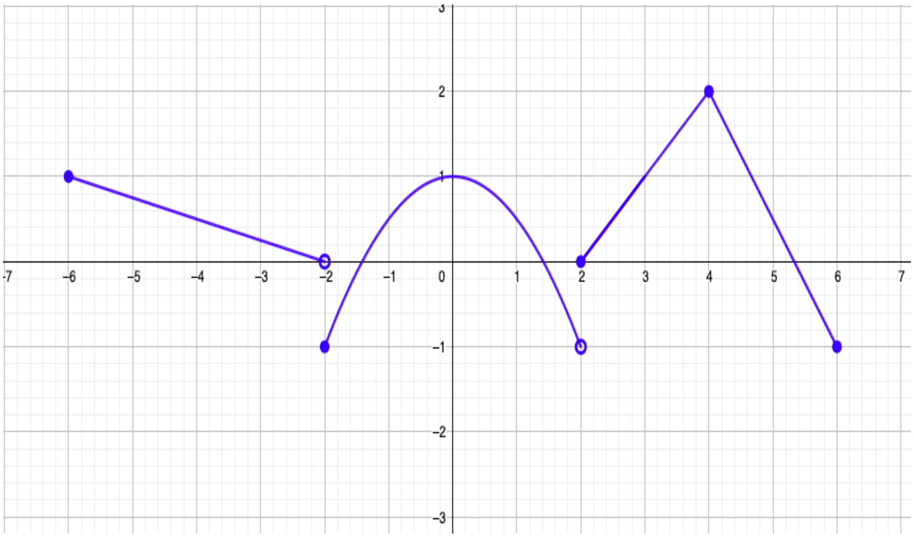
Por lo tanto, para que la función f sea continua en $x = 0$ y tenga una recta tangente horizontal en $x = 2$ se debe tener que $a = 2$ y $b = -1$.

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por determinar límites laterales en $x = 0$.
- **(1 punto)** Por plantear ecuación (igualdad de límites laterales) y calcular valor de b.
- **(1 punto)** Por aplicar correctamente regla derivada cociente.
- **(0.5 punto)** Por derivar correctamente función del numerador.
- **(0.5 punto)** Por derivar correctamente función del denominador.
- **(1 punto)** Por resolver ecuación $f'(2) = 0$.
- **(1 punto)** Por concluir correctamente.

Problema 4.

Considere la siguiente gráfica de una función f



a) Determine todos los valores de $x \in]-6,6[$ tal que: $f'(x) \geq 0$.

b) Determine todos los valores de $x \in]-6,6[$ tal que: $f''(x) = 0$.

Solución:

a) Los valores de $x \in]-6,6[$ para los que $f'(x) \geq 0$ corresponden a aquellos los valores de $x \in]-6,6[$ tal que $f'(x)$ existe y $f'(x) > 0$ o $f'(x) = 0$. Es decir, aquellos los valores de $x \in]-6,6[$ tal que $f'(x)$ existe y la recta tangente en el punto $(x, f(x))$ tiene pendiente positiva o cero. Los valores de x que cumplen que $f'(x) > 0$ son aquellos en $(-2,0) \bigcup (2,4)$ y $f'(x) = 0$ si $x = 0$. Por lo tanto, $f'(x) \geq 0$ para

$$x \in (-2,0] \bigcup (2,4)$$

b) Los valores de $x \in]-6,6[$ tal que: $f''(x) = 0$ corresponden a aquellos los valores de $x \in]-6,6[$ tal que $f'(x)$ es constante. Ello corresponde a

$$x \in (-6,-2) \bigcup (2,4) \bigcup (4,6)$$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por argumento y respuesta $f'(x) > 0$ en intervalo $(-2,0)$.
- **(1 punto)** Por argumento y respuesta $f'(x) > 0$ en intervalo $(2,4)$.
- **(1 punto)** Por argumento y respuesta $f'(x) = 0$ en $x = 0$.
- **(1 punto)** Por argumento y respuesta $f''(x) = 0$ en intervalo $(-6,-2)$.
- **(1 punto)** Por argumento y respuesta $f''(x) = 0$ en intervalo $(2,4)$.
- **(1 punto)** Por argumento y respuesta $f''(x) = 0$ en intervalo $(4,6)$.

Problema 5.

Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$ cuya recta tangente al gráfico de $y = f(x)$ en $(-2, 1)$ es paralela a $y = 3x - 7$ y g la función definida por

$$g(x) = (f^2(x) - 3f(x))^4 \cos\left(\frac{\pi}{3} f(x)\right).$$

Determine $g'(-2)$.

Solución:

Se calcula $g'(x)$ y luego se evalúa en $x = -2$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \left((f^2(x) - 3f(x))^4 \cos\left(\frac{\pi}{3} f(x)\right)\right)' \\
&= \left((f^2(x) - 3f(x))^4\right)' \cos\left(\frac{\pi}{3} f(x)\right) \\
&\quad + (f^2(x) - 3f(x))^4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} f(x)\right)\right)' \\
&= 4(f^2(x) - 3f(x))^3 \left((f^2(x) - 3f(x))\right)' \cos\left(\frac{\pi}{3} f(x)\right) \\
&\quad + (f^2(x) - 3f(x))^4 \left(-\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} f(x)\right)\right) \frac{\pi}{3} f'(x) \\
&= 4(f^2(x) - 3f(x))^3 \left((2f(x)f'(x) - 3f'(x))\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} f(x)\right) \\
&\quad - (f^2(x) - 3f(x))^4 \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} f(x)\right) \frac{\pi}{3} f'(x)
\end{aligned}$$

Para deteminar el valor de $g'(2)$ se requieren los valores de $f(-2)$ y $f'(-2)$. El punto de tangencia dado es $(-2, 1)$, entonces $f(-2) = 1$. Además, como la recta tangente a f en $(-2, 1)$ es paralela a la recta $y = 3x - 7$, se tiene que la recta tangente a f en $(-2, 1)$ tiene pendiente igual a 3, y dicha pendiente es $f'(-2)$, es decir, $f'(-2) = 3$. Entonces,

$$\begin{aligned}
g'(-2) &= 4(f^2(-2) - 3f(-2))^3 \left((2f(-2)f'(-2) - 3f'(-2))\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} f(-2)\right) \\
&\quad - (f^2(-2) - 3f(-2))^4 \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} f(-2)\right) \frac{\pi}{3} f'(-2) \\
&= 4(1^2 - 3 \cdot 1)^3 \left((2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 3)\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\quad - (1^2 - 3 \cdot 1)^4 \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{\pi}{3} 3 \\
&= 96 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 16 \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \pi \\
&= 48 - 8\sqrt{3}\pi \\
&= 8\left(6 - \sqrt{3}\pi\right)
\end{aligned}$$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por deducir que $f'(-2) = 3$.
- **(1 punto)** Por aplicar correctamente derivada de un producto.
- **(1 punto)** Por aplicar correctamente regla de derivada de la potencia a $(f^2(x) - 3f(x))^4$
- **(1 punto)** Por aplicar correctamente regla de la cadena a $(f^2(x) - 3f(x))^4$
- **(1 punto)** Por aplicar correctamente regla de la cadena a $\cos\left(\frac{\pi}{3}f(x)\right)$
- **(0.5 punto)** Por sustituir correctamente valores $f(-2)$ y $f'(-2)$ en $g'(x)$
- **(0.5 punto)** Por resultado correcto.