



Pontificia Universidad Católica de Chile  
Facultad de Matemáticas  
Departamento de Estadística

EYP1026 - MODELOS PROBABILÍSTICOS  
Ayudantía N°8

Profesor: Guido del Pino  
Ayudante: José Quinlan  
Fecha: 28 de Septiembre - 2016

1. Sean  $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d}{\sim} \text{Uniforme}(0, 1)$ . Demuestre que  $-2n \log(G_n) \sim \chi^2(2n)$  con

$$G_n = \left( \prod_{i=1}^n X_i \right)^{1/n}.$$

2. Sea  $(X, Y)$  vector aleatorio con densidad de probabilidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{6}{7}(x+y)^2 \mathbb{I}((x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]).$$

- a) Determine  $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$  y  $\mathbb{P}(X \leq \frac{1}{2})$ .
  - b) Deduzca la densidad de probabilidad para  $X$  e  $Y|X = x : x \in [0, 1]$ .
  - c) Analice si  $X$  e  $Y$  son independientes.
  - d) Calcule  $\text{Cov}[X, Y]$ .
3. Sean  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$  e  $Y \sim \text{Gamma}(\beta, \lambda)$  independientes con  $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}^+$ .
- a) Demuestre que  $U = X + Y$  y  $V = \frac{X}{X+Y}$  son variables aleatorias independientes.
  - b) Pruebe que  $V \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ .