Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2014

MAT1620 ⋆ Cálculo 2

Interrogación N° 1

1. Dibuje la región acotada y delimitada por las curvas $y = 12 - x^2$ e $y = x^2 - 6$. Luego calcule el área de la región.

   Solución. En primer lugar determinamos los puntos de intersección de las dos gráficas dadas. Estos corresponden a $x = \pm 3$, además notamos que la primera es una parábola que se abre" hacia abajo y la segunda hacia arriba", con lo cual el area pedida se puede calcular mediante la siguiente integral

$$\int_{-3}^{3} (12 - x^2) - (x^2 - 6)\, dx = \int_{-3}^{3} (18 - 2x^2) dx = 72$$

2. Determine el volumen del sólido S cuya base es un disco circular de radio r y secciones transversales perpendiculares a la base son cuadrados.

   Solución. Sea $A(x)$ el area de una sección tranversal génerica. El lado de cada uno de los cuadrados será $2\sqrt{r^2 - x^2}$ para cada $x \in [-r, r]$. Se tiene que el volumen pedido es:

$$V = \int_{-r}^{r} A(x) dx = \int_{-r}^{r} 4(r^2 - x^2) dx = 16\frac{r^3}{3}$$

3. Sea $\mathcal{R}$ es la región acotada y delimitada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 1$. Determine el volumen del sólido de revolución resultante al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje Y.

   Solución. Para calcular el volumen pedida utilizamos el metodo de los cascarones cilindricos con lo cual obtenemos que el volumen es:

$$2\pi \int_{0}^{1} x\sqrt{x}\, dx = \pi\frac{4}{5}$$

4. Si el trabajo que se requiere para estirar un resorte $0{,}01\, mt$ más de su longitud natural es de $12\, J$, ¿cuánto trabajo se requiere para estirar al resorte $0{,}09\, mt$ más de su longitud natural?

   Solución. Sabemos que la fuerza, f, necesaria para estirar x metros un resorte se comporta de acuerdo a la relación $f(x) = kx$. Además el trabajo necesario, $12\, J$, es la integral de kx. En este caso,

$$12 = \int_{0}^{0{,}01} kx\, dx$$

   de donde $k = 24 \cdot 100^2$. Por otro lado el trabajo pedido lo calculamos como:

$$\int_{0}^{0{,}09} 24 \cdot 100^2 x\, dx = 12 \cdot 9^2 = 972$$

   Por lo tanto el trabajo realizado para estirar el resorte desde el equilibrio a $0{,}09\, mt$ es de $972\, J$.

5. Determine la longitud de la curva $y = \log\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$, para $x \in [1, 2]$.

   Solución. Para calcular el largo de la curva pedida en primer lugar calculamos la expresión $1 + (y')^2 = \left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right)^2$. Con lo cual el largo de la curva resulta ser:

$$\int_{1}^{2} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\, dx = -1 - \ln(e^2 - 1) + \ln(e^4 - 1)$$

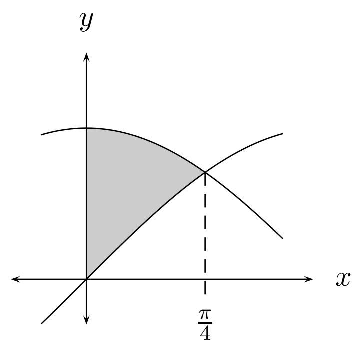
6. Determine el área de la superficie obtenida al rotar la curva $y = \sin(x)$, $x \in [0, \pi]$, en torno al eje X

   Solución. Para calcular el area de la superficie pedida resolvemos la integral

$$2\pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\, dx = 2\pi(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})).$$

7. Determine el centroide de la región acotada y delimitada por las curvas $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $x = 0$ y $x = \pi/4$.

   Solución. Representamos la región en la siguiente figura



   Luego las coordenadas del centroide están dadas por

$$\overline{x} = \frac{1}{\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos(x) - \sin(x)\, dx} \left(\int_0^{\pi/4} x(\cos(x) - \sin(x))\, dx, \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \cos^2(x) - \sin^2(x)\, dx \right)$$

   con

$$\int_0^{\pi/4} \cos(x) - \sin(x)\, dx = (\sin(x) + \cos(x))\Big|_0^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} x(\cos(x) - \sin(x))\, dx &= x(\sin(x) + \cos(x))\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \sin(x) + \cos(x)\, dx \\
&= \frac{\pi}{4}\sqrt{2} - (-\cos(x) + \sin(x))\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{4}\sqrt{2} - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \cos^2(x) - \sin^2(x))\, dx &= \int_0^{\pi/4} \cos(2x)\, dx \\
&= \frac{\sin(2x)}{2}\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   Por lo tanto

$$\overline{x} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \left(\frac{\pi}{4}\sqrt{2} - 1, \frac{1}{4} \right)$$

8. Use el teorema de Pappus para determinar el volumen de una esfera de radio r.

Solución. Si consideramos la región

$$\mathcal{R} := \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \le 0,\ y \ge 0\}$$

entonces, por Pappus, el volumen de la esfera es $V = 2\pi \cdot d \cdot A$ siendo d la distancia del centro de masa de $\mathcal{R}$ al eje X y A el área de la región $\mathcal{R}$. Puesto que $\mathcal{R}$ es una semicircunferencia se tendrá que $A = \frac{\pi r^2}{2}$.

Puesto que $\mathcal{R}$ es una semicircunferencia con $y \ge 0$, la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ y la curva $y = 0$ determinan la frontera de $\mathcal{R}$. Por lo tanto, su centro de masa estará dado por

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx} \left(\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx, \frac{1}{2} \int_{-r}^{r} r^2 - x^2\, dx \right) \\
&= \frac{1}{\frac{\pi r^2}{2}} \left(0, \frac{2}{3} r^3 \right) \\
&= \left(0, \frac{4}{3\pi} r \right)
\end{aligned}$$

De este modo, la distancia de el centro de masa de $\mathcal{R}$ al eje X es $d = \frac{4}{3\pi} r$.

De lo anterior se deduce que el volumen de la esfera es

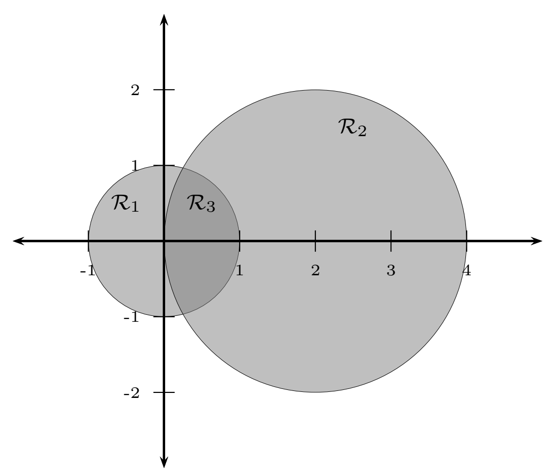
$$V = 2\pi \cdot \frac{4}{3\pi} r \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

9. Dadas las regiones

$$\mathcal{R}_1 := \{(x,y) \,|\, x^2 + y^2 \le 1\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R}_2 := \{(x,y) \,|\, (x-2)^2 + y^2 \le 4\}$$

Determine el centro de masa de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

Solución. Definamos $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ como en la figura



Luego, por simetría en torno al eje X se tiene que el centro de masa de la región $\mathcal{R}_3$ tiene ordenada $\overline{y} = 0$. Por lo tanto solo es necesario determinar

$$\overline{x} = \frac{2\int_0^{1/4} x\sqrt{1-x^2}\, dx + 2\int_0^{1/4} x\sqrt{4-(x-2)^2}\, dx}{2\int_0^{1/4} \sqrt{1-x^2}\, dx + 2\int_0^{1/4} \sqrt{4-(x-2)^2}\, dx} = \frac{2/3 + (7/8)\sqrt{3}\sqrt{5} + 8\arcsin(7/8) - 4\sqrt{3} - (4/3)\pi}{(1/2)\sqrt{3}\sqrt{5} + \arcsin(1/4) + 4\arcsin(7/8) - \sqrt{3} - (2/3)\pi}$$

Luego, si $\mathbf{x}_3$ es el centro de masa de $\mathcal{R}_3$ y $\mathbf{x}_{1,2}$ el centro de masa de $\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2$ entonces

$$\mathbf{x}_1 = \frac{A_{1,2}\mathbf{x}_{1,2} + A_3\mathbf{x}_3}{A_1 + A_3}$$

siendo $A_{1,2}$ el área de $\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2$ y A_3 el área de $\mathcal{R}_3$.

De este modo,

$$\mathbf{x}_{1,2} = -\frac{A_3}{A_{1,2}}\mathbf{x}_3$$

Finalmente, el centro de masa $\mathbf{x}$ de $\mathcal{R}$ es

$$\mathbf{x} = \frac{A_{1,2}\mathbf{x}_{1,2} + A_2\mathbf{x}_2}{A_{1,2} + A_2} = \frac{A_2\mathbf{x}_2 - A_3\mathbf{x}_3}{A_{1,2} + A_2}$$

donde A_2 es el área de $\mathcal{R}_2$

10. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada y delimitada por las curvas $y = x^2$ e $y = x$. Determine el volumen del sólido de revolución S que resulta de rotar $\mathcal{R}$ en torno a la recta $y = x$.

    Solución. Para determinar dicho volumen usaremos el teorema de Pappus, para ello comenzaremos calculando el área de $\mathcal{R}$

    $$A = \int_0^1 x - x^2\, dx = \frac{1}{6}$$

    Ahora debemos calcular el centro de masa de $\mathcal{R}$ y su distancia a la recta $y = x$

    $$\overline{x} = \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 x - x^2\, dx}\left(\int_0^1 x(x - x^2)\, dx, \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 - x^4\, dx\right) = \frac{1}{1/6}\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{15}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$$

    Ocupando la fórmula distancia punto recta tendremos

    $$d = \frac{|(1/2) - (2/5)|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{20}$$

    Por lo tanto, el volumen de S es

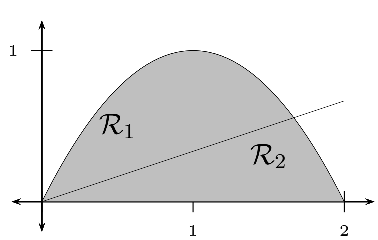
    $$V = 2\pi \cdot d \cdot A = \frac{\sqrt{2}}{60}\pi$$

11. Considere la función $f(x) = 2x - x^2$ y la región $\mathcal{R}$ definida por

    $$\mathcal{R} := \{(x, y) \,|\, x \geq 0,\, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

    Determine un punto, $P_0 = (x_0, f(x_0))$, en el gráfico de f, de modo que la recta que une el origen con P_0 divide $\mathcal{R}$ en dos regiones de la misma área.

    Solución. La recta l que une el origen con el punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ tiene ecuación $y = mx$ con $m = f(x_0)/x_0$. Si l divide $\mathcal{R}$ en regiones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ como muestra la figura

    entonces las áreas de dichas regiones están dadas por

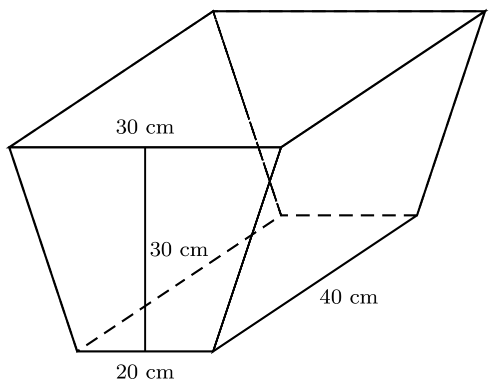
    $$A(\mathcal{R}_1) = \int_0^{x_0} (2x - x^2) - (2 - x_0)x\, dx = \frac{x_0^3}{6}$$
    $$A(\mathcal{R}_1) = \int_0^{x_0} (2 - x_0)x\, dx + \int_{x_0}^2 2x - x^2\, dx = -\frac{x_0^3}{6} + \frac{4}{3}$$

Luego, el punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$ satisface la siguiente ecuación

$$\frac{x_0^3}{6} = -\frac{x_0^3}{6} + \frac{4}{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_0^3 = 4$$

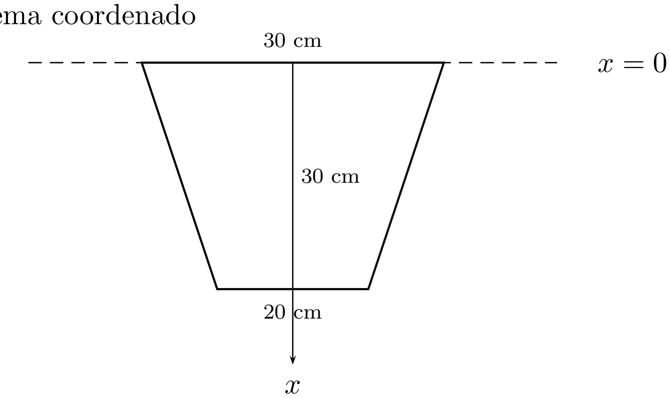
Por lo tanto $x_0 = \sqrt[3]{4}$ y $P_0 = (\sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{2})$

12. La siguiente figura es una arteza de base rectangular, dos tapas en forma de trapecio y dos laterales rectángulares:



Si la arteza es llenada con agua hasta $25\,cm$ de profundidad. Calcule el trabajo necesario para sacar el agua fuera del recipiente.

Solución. Considerando el sistema coordenado



Si x_k es una partición del intervalo $[5, 30]$ entonces el volumen de las secciones transversales en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ es aproximadamente $V_k = 80 \cdot (15 - x_k/6)(x_{k+1} - x_k)$. Por lo tanto el trabajo W se aproxima por la siguiente suma

$$W \approx \sum_{k=0}^{n-1} \rho V_k \cdot g \cdot x_k = 80\rho \cdot g \sum_{k=0}^{n-1} (15 - x_k/6) x_k (x_{k+1} - x_k)$$

siendo ρ la densidad del agua y g la constante de gravedad. Por lo tanto,

$$W = 80\rho \cdot g \int_5^{30} x(15 - x/6)\, dx$$

Tiempo: 180 minutos
Sin consultas