PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I1 MAT1203 - Algebra Lineal
Abril 17, 2013

1. Determine condiciones sobre α, β de modo que

$$\begin{bmatrix} \alpha-\beta \\ \alpha+\beta \\ 2\,\alpha-\beta \end{bmatrix} \text{ pertenezca a } Gen \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Solución: El problema es equivalente a determinar condiciones en α, β de modo que el sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$ con matriz ampliada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \alpha-\beta \\ -1 & 2 & 3 & \alpha+\beta \\ 1 & 1 & 3 & 2\alpha-\beta \end{array}\right]$$

sea consistente. Realizando operaciones fila llevamos $[A|b]$ a una forma escalonada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \alpha-\beta \\ -1 & 2 & 3 & \alpha+\beta \\ 1 & 1 & 3 & 2\alpha-\beta \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 \leftarrow F_2 - F_1 \\ F3 \leftarrow F_3 + F_1 \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \alpha-\beta \\ 0 & 1 & 2 & 2\beta \\ 0 & 2 & 4 & 3\alpha-2\beta \end{array}\right] \begin{array}{c} F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & \alpha-\beta \\ 0 & 1 & 2 & 2\beta \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha-6\beta \end{array}\right]$$

El sistema es consistente sii $3\alpha - 6\beta = 0$

Puntos:

- Por establecer la equivalencia del problema con la consistencia de un sistema de ecuaciones [**2.5 pts.**]
- Por reducir la matriz ampliada del sistema a una forma escalonada [**2.5 pts.**]
- Por determinar a partir de la escalonada la condición de consistencia [**1 pts.**]

2. *a)* Si $A = [\vec{v}_1 \;\; \vec{v}_2 \;\; \vec{v}_3]$ es una matriz de $n \times 3$ con columnas $\vec{v}_i \neq \vec{0}$ y $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_3$, determine infinitas soluciones de $A\vec{x} = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$. Justifique.

b) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ el plano de ecuación cartesiana $x - y - z = 0$. Determine justificadamente si $A(S) = \{A\vec{x} : \;\; \vec{x} \in S\}$ es un plano o una recta en $\mathbb{R}^3$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

a) Puesto que $Ax = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3$ tenemos que $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_3 \Leftrightarrow \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \vec{0}$. De la misma manera $A \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$.

Para la familia de vectores

$$\vec{x}(\alpha) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

tenemos

$$\begin{aligned} A(\vec{x}(\alpha)) &= A(\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}) \\ &= \alpha A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \alpha\vec{0} + -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \\ &= -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 \end{aligned}$$

,

y hemos encontrado infinitas soluciones $\vec{x}(\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. **Puntos:**

- Por la idea de usar infinitas soluciones de $A\vec{x} = \vec{0}$ más una solución particular de $A\vec{x} = \vec{b}$ [**1 pts.**]
- Por encontrar una solución de $A\vec{x} = \vec{0}$, [**1 pts.**]
- Por encontrar una solución particular de $A\vec{x} = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ [**1 pts.**]

Otra alternativa de solución es la siguiente: $Ax = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + x_3\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ es equivalente a (usando la relación $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_3$) a $(x_1 + x_2)\vec{v}_1 + (3x_2 + x_3)\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + 9\vec{v}_3$ [**1 pts.**] . Puesto que el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ 3x_2 + x_3 &= 9 \qquad [\mathbf{1pts}.] \end{aligned}$$

tiene infinitas soluciones, $x_1 = 2 - x_2$, $x_3 = 9 - 3x_2$ [**1 pts.**] obtenemos que $A\vec{x} = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ tiene infinitas soluciones

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 - x_2 \\ x_2 \\ 9 - 3x_2 \end{bmatrix} \qquad x_2 \in \mathbb{R}$$

.

b) Los vectores del plano $x - y - z = 0$ son de la forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R}$$

Entonces

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= yA \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + zA \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= y \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= (z - y) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y, z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Entonces la imagen del plano bajo A es la recta por el origen generada por el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Puntos:

- Por escribir en forma paramétrica vectorial el plano [**1 pts.**]
- Por aplicar la linealidad de A y por realizar las multplicaciones de A por vector [**1.5 pts.**]
- Por concluir que es una recta [**0.5 pts.**]

3. *a*) Sea $F: \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$F(\hat{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \ , \quad F(\hat{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \ , \quad F(\hat{e}_3) = \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \\ \alpha \end{bmatrix} \ ,$$

donde $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ son los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$. Determine los valores de α para los cuáles la transformación F tiene inversa y determine F^{-1}.

b) Si $PA = LU$ donde

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

determine usando directamente esta factorización (sin calcular A ni A^T) la tercera fila de A^{-1}.

a) Puesto que F es una transformación lineal

$$F(\vec{x}) = [F(\hat{e}_1) \ F(\hat{e}_2) \ F(\hat{e}_3)]\vec{x} = A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

F tiene inversa sii A tiene inversa y $F^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$. Se calcula la inversa de A por medio de operaciones elementales fila llevando $[A|I]$ a su forma escalonada reducida. Obtenemos que para $1 + 2\alpha \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & \alpha & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{rref()}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\,\frac{1+\alpha}{1+2\,\alpha} & -\frac{\alpha}{1+2\,\alpha} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3+2\,\alpha}{1+2\,\alpha} & 2\,\frac{\alpha}{1+2\,\alpha} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{1+2\,\alpha} & -\frac{1}{1+2\,\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2\,\frac{1+\alpha}{1+2\,\alpha} & -\frac{\alpha}{1+2\,\alpha} & 1 \\ \frac{3+2\,\alpha}{1+2\,\alpha} & 2\,\frac{\alpha}{1+2\,\alpha} & -1 \\ \frac{2}{1+2\,\alpha} & -\frac{1}{1+2\,\alpha} & 0 \end{bmatrix}$$

Puntos:

- Por establecer que $F(\vec{x}) = A\vec{x}$ [**0.5 pts.**]
- Por establecer que $F^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$ [**0.5 pts.**]
- Por calcular la inversa de A [**1.5 pts.**]
- Por la condición $1 + 2\alpha \neq 0$ [**0.5 pts.**]

b) La tercera fila de A^{-1} es la tercera columna transpuesta de $(A^T)^{-1}$, que es la solución de $A^T\vec{x} = \hat{e}_3$, con $\hat{e}_3$ el tercer vector canónico en $\mathbb{R}^3$. Pero $PA = LU$ implica $A^TP^T = U^TL^T$ y entonces $A^T = U^TL^TP$. De esta manera el sistema $A^T\vec{x} = \hat{e}_3$ es equivalente a $U^TL^TP\vec{x} = \hat{e}_3$. Resolvemos

i) $U^T\vec{y} = \hat{e}_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, cuya solución es $\vec{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

ii) $L^T\vec{z} = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \vec{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ cuya solución es $\vec{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

iii) $P\vec{x} = \vec{z} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ cuya solución es $\vec{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Entonces la tercera fila de A^{-1} es el vector fila $[-1, 1, 1]$. **Puntos:**

- Por el método correcto [**1 pts.**]
- Por i) [**0.5 pts.**]
- Por ii) [**0.5 pts.**]
- Por iii) [**0.5 pts.**]
- Por la tercera fila de A^{-1} [**0,5 pts.**]

4. Determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA y justifique demostrando su respuesta.

   a) Si A es una matriz de 4×3 entonces la transformación $\vec{x} \to A\vec{x}$ no puede ser 1-1.

   b) Si A es matriz de $n \times n$ y $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ linealmente dependientes entonces $A\vec{u}$, $A\vec{v}$, $A\vec{w}$ son linealmente dependientes.

   c) Si A, B son matrices de $n \times n$ y A es la inversa de B^3 entonces AB es la inversa de B^2 y $AB = BA$.

   d) Si $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= a_{1,1}\vec{u}_1 + a_{2,1}\vec{u}_2 \\ \vec{v}_2 &= a_{1,2}\vec{u}_1 + a_{2,2}\vec{u}_2 \end{aligned}$$

   son linealmente independientes si y sólo si la matriz $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$ de 2×2 tiene inversa.

Solución:

a) FALSA: Un contraejemplo es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de 4×3, tiene columnas que son linealmente independientes en $\mathbb{R}^4$ y entonces A es 1-1.

Puntos:

- [**1 pts.**] por el matriz contraejemplo
- [**0.5 pts.**] por la justificación

b) VERDADERA: Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ linealmente dependientes entonces existen x_1, x_2, x_3 no todos nulos tal que $x_1\vec{u} + x_2\vec{v} + x_3\vec{w}, = \vec{0}$. Multiplicado por A esta igualdad, y usando que $\vec{x} \to A\vec{x}$ es una transformación lineal, obtenemos que $A(x_1\vec{u} + x_2\vec{v} + x_3\vec{w}) = x_1A(\vec{u}) + x_2A(\vec{v}) + x_3A(\vec{w}) = A(\vec{0}) = \vec{0}$. Por lo tanto una combinación no trivial de los vectores $A\vec{u}$, $A\vec{v}$, $A\vec{w}$ es igual al vector nulo y entonces ellos son linealmente dependientes.

Puntos:

- Por establecer correctamente la condición de dependencia lineal para los vectores $vu, \vec{v}.\vec{w}$ [**0.5 pts.**] [**pts.**]

- Pos multiplicar por A esta condición y justificadamente llegar a la condición de linealidad de $A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w}$ **[1 pts.]**

c) VERDADERA: Si A es la inversa de B^3, entonces $A(B^3) = I$. Por la asociatividad de la multiplicación $AB^3 = A(BBB) = (AB)(B^2) = I$ y como las matrices son cuadradas, $AB = (B^2)^{-1}$. Similarmente, A es la inversa de B^3 implica $I = B^3 A = B^2(BA)$; y por lo tanto BA es también la inversa de B^2, y entonces $BA = AB$.

Puntos:

- [**0.5 pts.**] por usar que para matrices cuadradas A, X la matriz X es la inversa de A sii $AX = I$ o $XA = I$
- [**0.5 pts.**] por demostrar que AB es la inversa de B^2
- [**0.5 pts.**] por demostrar que BA es la inversa de B^2

d) Notamos primero que

$$\begin{aligned}
\vec{0} &= x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 \\
&= x_1(a_{1,1}\vec{u}_1 + a_{2,1}\vec{u}_2) + x_2(a_{1,2}\vec{u}_1 + a_{2,2}\vec{u}_2) \\
&= (a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2)\vec{u}_1 + (a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2)\vec{u}_2 \qquad (*) \\
&= y_1\vec{u}_1 + y_2\vec{u}_2
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{matrix} y_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \\ y_2 = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{y}$$

Sean $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ vectores linealmente independientes y A invertible. Entonces $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{0}$ implica (por(*)) $y_1\vec{u}_1 + x_2\vec{v}_2 = \vec{0}$. Por la independencia lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ se tiene que $y_1 = y_2 = 0$. Como A tiene inversa, $\vec{x} = A^{-1}\vec{y} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$ y por lo tanto $x_1 = x_2 = 0$ y $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son LI.

De la misma manera, si $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son linealmente independientes, y $\vec{y} = A\vec{x} = \vec{0}$, entonces por (*) y la independencia lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ se tiene $x_1 = x_2 = 0$ y entonces $\vec{y} = A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ y por lo tanto A tiene inversa.

Puntos:

- [**0.5 pts.**] por establecer la relación entre las combinaciones lineales de los $\vec{v}_1$ con lo $\vec{u}_j$.
- [**0.5 pts.**] por demostrar que si A es invertible y $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ son LI entonces $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son L
- [**0.5 pts.**] por demostrar que si y $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ son LI y $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son LI entonces A es invertible