CLASE 15: FUNCIONES BIYECTIVAS COMPOSICIÓN

- Recordemos:

Sea $f: A \longrightarrow B$ una función.

1.- Decimos que f es inyectiva si

$\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$

$(\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

2.- Decimos que f es sobreyectiva si

$\forall y \in B, \exists x \in A$ tq $f(x) = y$

(Obs: si $B = \mathrm{Rec}\, f$, entonces f es sobreyectiva)

- DEF: Sea $f: A \longrightarrow B$ una función. Decimos que f es biyectiva si f es inyectiva y sobreyectiva:

$\forall y \in B, \exists! x$ tq $f(x) = y$

- Ej: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

  $x \longmapsto 2x+1$ es biyectiva

  - Inyectiva:

    $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

    $\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

    $\Rightarrow x_1 = x_2$

  - Sobre:

    Sea $y \in \mathbb{R}$: $f(x) = y$

    $\Leftrightarrow 2x + 1 = y$

    $\Leftrightarrow 2x = y - 1$

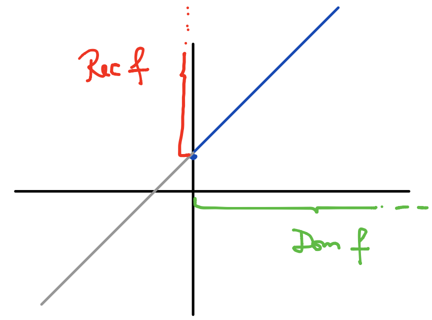
    $\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{2}$

    Es decir, $f\left(\frac{y-1}{2}\right) = y$, $\frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$

• **Obs**: $f:[0,\infty) \longrightarrow [1,\infty)$

$x \longmapsto 2x+1$

también es biyectiva.



• **Ej**: Sea $f: A \longrightarrow B$

$x \longmapsto -x^2-4x+2$

Encuentre A y B de modo que f sea biyectiva.

Hay muchas soluciones:

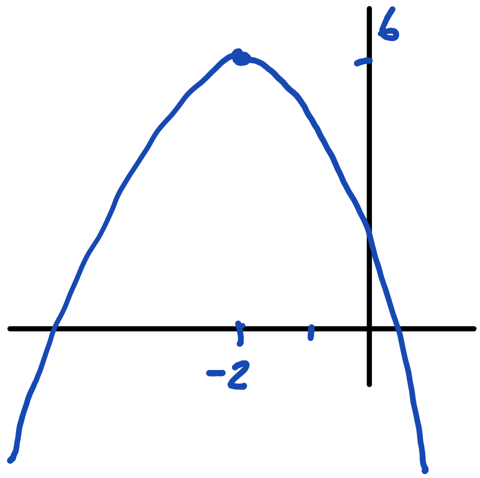
1.- $A=\{1\}$, $B=\{-3\}$

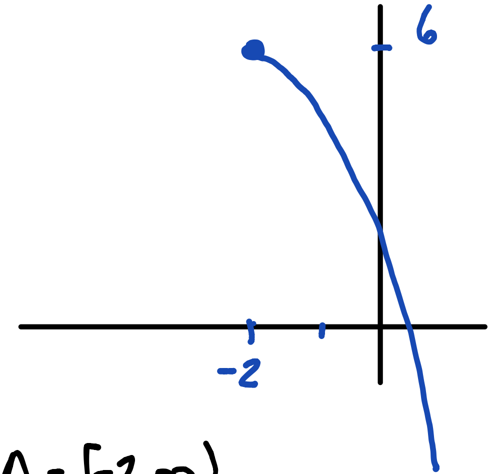
2.- $f(x) = -x^2-4x+2$

$= -(x^2+4x)+2$

$= -(x^2+4x+4)+2+4$

$= -(x+2)^2+6$

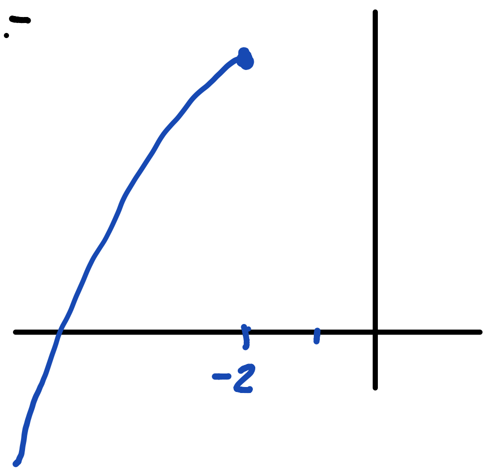




$A = [-2, \infty)$

$B = (-\infty, 6]$

3.-

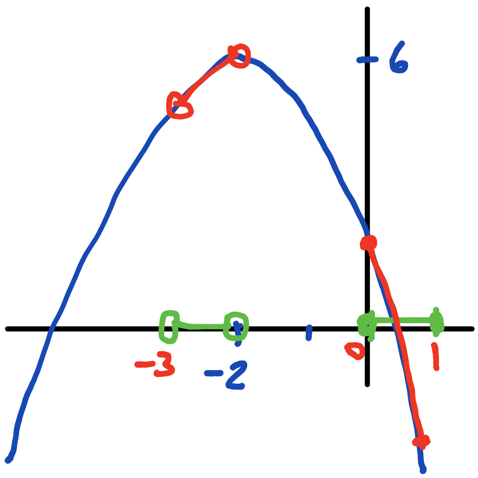


$A = (-\infty, -2]$

$B = (-\infty, 6]$

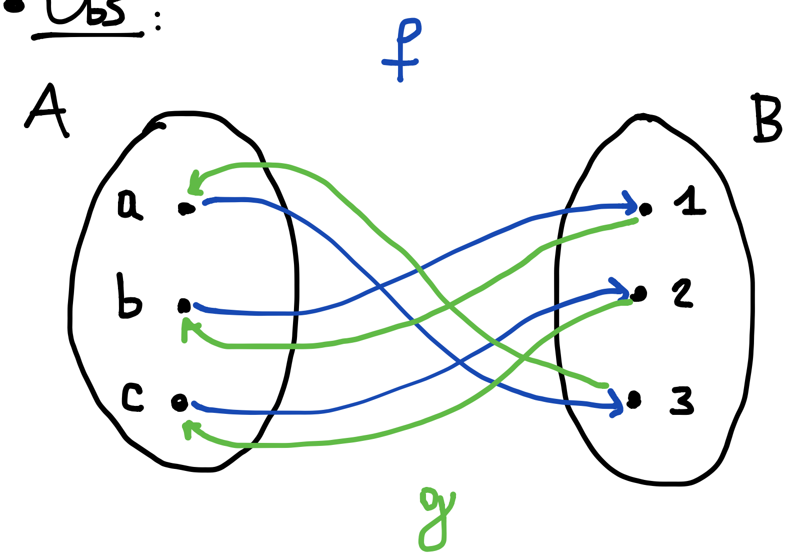
4.- $A = (-\infty, -2)$, $B = (-\infty, 6)$

5.- $A = (-3,-2) \cup [0,1]$ $\qquad f(x) = -x^2 - 4x + 2$



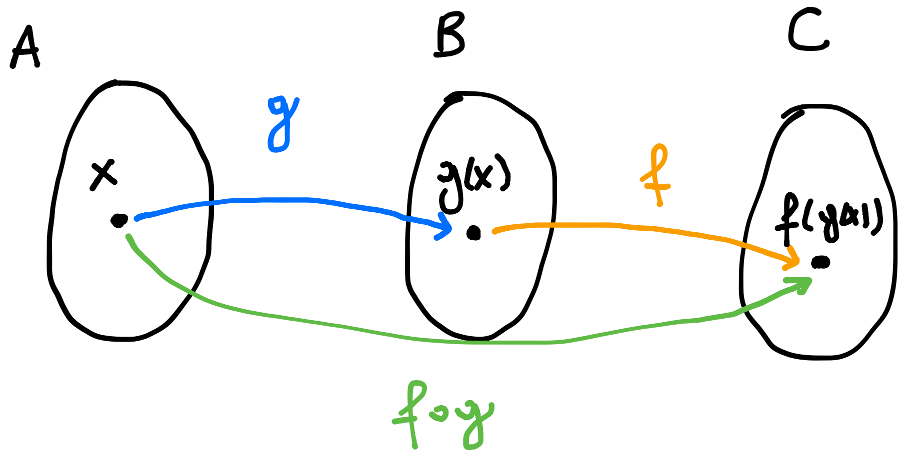
$B = [-3,2] \cup (4,6)$

• Obs:



$g(f(x)) = x, \forall x \in A \; ; \; f(g(y)) = y, \forall y \in B$

- **DEF**: Función compuesta



Sea $g: A \longrightarrow B$ y $f: B \longrightarrow C$ funciones.

Definimos la <u>función compuesta</u> de f y g:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$\text{Dom } f\circ g = \{x \in A : g(x) \in B\}$$

$$= \{x \in \text{Dom } g : g(x) \in \text{Dom } f\}$$

• **Ej**: $f(x) = 2x+1$ $\quad \text{Dom } f = \mathbb{R}$

$g(x) = x^2$ $\quad \text{Dom } g = \mathbb{R}$

Calcular $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$

Sol:

• $f \circ g(x) = f(g(x))$

$= f(x^2) \quad ; \quad f(u) = 2u+1$

$= 2x^2 + 1$

• $g \circ f(x) = g(f(x))$

$= g(2x+1) \quad ; \quad g(u) = u^2$

$= (2x+1)^2$

Obs: $f \circ g \neq g \circ f$ en general

- $$\begin{aligned} f\circ f(x) &= f(f(x)) \\ &= f(2x+1) \quad ; \quad f(u) = 2u+1 \\ &= 2(2x+1)+1 \\ &= 4x+3 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} g\circ g(x) &= g(g(x)) \\ &= g(x^2) \quad ; \quad g(u) = u^2 \\ &= (x^2)^2 \\ &= x^4 \end{aligned}$$

- __Ej__: Sea $F(x) = \sqrt{x^2+4}$.

  Exprese F como composición de dos funciones.

  __Sol__:

  $F(3) = ?$

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, mapsto, bend right, "g"'] & 3^2 \arrow[r, mapsto] & 3^2+4 \arrow[r, mapsto, "f"] & \sqrt{3^2+4} \end{tikzcd}$$

$g(x) = x^2+4$, $f(u) = \sqrt{u}$, $F = f \circ g$

También sirve:

$\tilde{g}(x) = x^2$, $\tilde{f}(u) = \sqrt{u+4}$, $F = \tilde{f} \circ \tilde{g}$

• Obs: $h(x) = x^2$, $g(u) = u+4$, $f(v) = \sqrt{v}$

$$F(x) = f(g(h(x)))$$
$$= f \circ g \circ h(x)$$

• Ej: $F(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2+1}}$

$$x \overset{f_1}{\longmapsto} x^2 \overset{f_2}{\longmapsto} x^2+1 \overset{f_3}{\longmapsto} \frac{1}{x^2+1} \overset{f_4}{\longmapsto} 1 + \frac{1}{x^2+1} \overset{f_5}{\longmapsto} \sqrt{1+\frac{1}{x^2+1}}$$

$f_1(x) = x^2$ $\qquad$ $f_4(x_3) = x_3+1$

$f_2(x_1) = x_1+1$ $\qquad$ $f_5(x_4) = \sqrt{x_4}$

$f_3(x_2) = \dfrac{1}{x_2}$ $\qquad$ $\Rightarrow F = f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$

• **Ej**: $f(x)=2x+1$, $\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{x}$, $\mathrm{Dom}\, g=[0,\infty)$

• $f\circ g(x)=2\sqrt{x}+1$

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\, f\circ g &= \{x\in \mathrm{Dom}\, g : g(x)\in \mathrm{Dom}\, f\}\\ &= \{x\in[0,\infty) : \cancel{\sqrt{x}\in\mathbb{R}}\}\\ &= [0,\infty)\end{aligned}$$

• $g\circ f(x)=\sqrt{2x+1}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\, g\circ f &= \{x\in \mathrm{Dom}\, f : f(x)\in \mathrm{Dom}\, g\}\\ &= \{x\in\mathbb{R} : 2x+1\geq 0\}\\ &= \{x\in\mathbb{R} : x\geq -\tfrac{1}{2}\}\\ &= [-\tfrac{1}{2},\infty)\end{aligned}$$

- **Obs**: Sea $f: A \longrightarrow B$ una función biyectiva, es decir,

$$\forall y \in B, \exists! x \in A \text{ tq } f(x) = y$$

Dado $y \in B$, sea $x \in A$ dado por esta definición.

Podemos escribir $x = g(y)$, $g: B \longrightarrow A$

- **DEF**: Sea $f: A \longrightarrow B$ una función biyectiva. Para $y \in B$, definimos $f^{-1}(y) \in A$ tal que

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x).$$

De este modo, obtenemos una función

$$\begin{aligned} f^{-1}: B &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Esta función se conoce como la función inversa de f.

Además, se tiene

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B$$

Es decir,

$$f^{-1} \circ f(x) = x \quad \forall x \in A$$

$$f \circ f^{-1}(y) = y \quad \forall y \in B$$

- Obs: $f : A \longrightarrow B$

  $f^{-1} : B \longrightarrow A$

$$\text{Dom } f^{-1} = B = \text{Rec } f$$

$$\text{Rec } f^{-1} = A = \text{Dom } f$$