Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2022

Álgebra Lineal - MAT1203
Pauta de corrección Interrogación 1

1. Encontrar, de ser posible, todos los valores de k de modo que los puntos $P(1,3,7)$, $Q(2,0,1)$ y $R(-3,1-k,k)$ sean colineales, es decir, que pertenezcan a la misma recta.

Solución Para que los puntos P, Q y R sean colineales, es suficiente que los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{QR}$ sean paralelos. Dichos vectores corresponden a:

$$\vec{PQ} = Q - P = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 0-3 \\ 1-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{QR} = R - Q = \begin{bmatrix} -3-2 \\ (1-k)-0 \\ k-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1-k \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Para que sean paralelos debe existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{PQ} = \alpha \vec{QR}$, es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -5 \\ 1-k \\ k-1 \end{bmatrix}.$$

Igualando las coordenadas tenemos que $\alpha = -\frac{1}{5}$ lo cual hace inconsistente el sistema $-3 = -\frac{1}{5}(1-k)$, $-6 = k-1$. Por lo tanto, no existe k de manera que los puntos sean colineales.

Puntaje

- 2 puntos por establecer una condición que garantice la colinealidad de los puntos P, Q y R.
- 2 puntos por desarrollar dicha condición de manera correcta
- 2 puntos por concluir correctamente sobre la existencia de k independiente si desarrolló bien o mal los cálculos anteriores.

2. Verifique que el triángulo cuyos vértices corresponden a los puntos $A(3,7,5), B(3,4,8)$ y $C(4,4,5)$ es isósceles, es decir, dos de sus lados tienen la misma longitud.

Solución: Verificamos que al menos dos lados del triángulo tienen la misma longitud:

$$d(A,C) = \sqrt{(3-4)^2 + (7-4)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{10}.$$
$$d(B,C) = \sqrt{(3-4)^2 + (4-4)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{10}.$$

Por lo tanto el triángulo es isósceles.

Puntaje

- 2 puntos por establecer que las distancias entre dos pares de puntos deben ser iguales.
- 2 puntos por escribir correctamente las fórmulas de distancias entre puntos.
- 2 puntos por verificar que dichas distancias son iguales a $\sqrt{10}$.

3. Sean π_1 el plano de ecuación $x + y + 2z = 1$, π_2 el plano de ecuación $-x + y = 2$ y L_1 la recta que pasa por el punto $P_1 = (0,1,1)$ y cuya dirección es $d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   (a) Encuentre una ecuación vectorial de la recta L_2, que se obtiene como la intersección de los planos π_1 y π_2.

   (b) Encuentre el punto P_2 de intersección de la recta L_1 y π_1.

Solución

(a) Sea $\vec{d} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ un vector director de la recta L_2. El vector $\vec{d}$ debe ser simultáneamente ortogonal a las normales $\vec{n_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\vec{n_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ de los planos π_1 y π_2, es decir,

$$\vec{d} \cdot \vec{n_1} = a + b + 2c = 0$$
$$\vec{d} \cdot \vec{n_2} = -a + b = 0$$

lo que implica que $a = b$ y $c = -b$, por lo que un vector director de la recta es $\vec{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Además, si reemplazamos $x = 0$ en las ecuaciones de los planos se tiene $y = 2$ y $z = -\frac{1}{2}$.
Por lo tanto, una ecuación vectorial de la recta es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solución alternativa:

La recta intersección entre dos planos puede encontrarse resolviendo el sistema

$$x + y + 2z = 1, \quad -x + y = 2.$$

De la segunda ecuación tenemos que $x = y - 2$ y reemplazando en la primera se tiene $(y-2) + y + 2z = 1$ lo que implica que $y = \frac{3}{2} - z$ y por lo tanto $x = \frac{-1}{2} - z$. Una ecuación vectorial de la recta es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - z \\ \frac{3}{2} - z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) La recta L_1 tiene ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 1, \quad z = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación del plano π_1 se tiene

$$t + 1 + 2 = 1 \Longrightarrow t = -2.$$

Por lo tanto, el punto de intersección es $P_2 = (-2, 1, 1)$.

Puntaje

- 1 punto por establecer correctamente una manera de determinar la recta intersección L_2, independiente que los cálculos no sean correctos.
- 1 punto por realizar los cálculos correctos para determinar la recta de L_2.
- 1 punto por determinar una ecuación vectorial de L_2 correcta.
- 2 puntos por establecer una manera correcta de encontrar el punto P_2.
- 1 punto por encontrar el punto P_2.

4. Use el producto cruz para encontrar una ecuación del plano que pasa por los puntos $P(0,-1,1)$, $Q(2,0,2)$ y $R(1,2,-1)$.

Solución Definimos los vectores

$$u = PQ = Q - P = \begin{bmatrix} 2-0 \\ 0-(-1) \\ 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v = PR = R - P = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 2-(-1) \\ -1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Calculamos el producto cruz:

$$u \times v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

El vector $u \times v$ es normal al plano generado por los vectores u y v por lo que la ecuación del plano es de la forma $-5x + 5y + 5z = d$. Dicho plano contiene al punto P, por lo que $-5(0) + 5(-1) + 5(1) = d \Longrightarrow d = 0$. En conclusión, una ecuación del plano es

$$-5x + 5y + 5y = 0$$

o equivalentemente

$$-x + y + z = 0.$$

Puntaje

- 2 puntos por identificar dos vectores paralelos al plano buscado.
- 2 puntos por calcular correctamente el producto cruz de acuerdo a los vectores encontrados.
- 2 puntos por determinar una ecuación del plano. Puede ser en forma general, vectorial o paramétrica.

5. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales usando matrices, indicando si es consistente o no y exhiba dichas soluciones si existen.

$$\begin{cases} a+b+c=2 \\ a-b+c=6 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases}$$

Solución Escalonamos la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ya que matriz de coeficientes tiene 3 posiciones pivotes, el sistema es consistente y tiene solución única. Más aún, ésta es: De la tercera fila tenemos que $c=3$. De la segunda fila se tiene $b=-2$. De la primera fila $a+b+c=2$ por lo tanto $a=1$.

Puntaje

- 2 puntos por determinar correctamente una forma escalonada de la matriz ampliada.
- 2 puntos por concluir acerca de la consistencia o inconsistencia del sistema, independiente que los cálculos estén bien hechos.
- 2 puntos por determinar la solución del sistema de acuerdo al análisis de la consistencia anterior.

6. Sea $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ una matriz de 2×4 cuyas columnas son los vectores a_1, a_2, a_3 y a_4. Sabiendo que A es equivalente por filas a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y que las columnas de A satisfacen

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

determine el conjunto solución del sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución Una forma escalonada de A es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, por lo que el conjunto solución de $Ax = 0$ son todos los vectores

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

tales que $x_3 = 0$ y $x_1 + x_4 = 0$. Además, se cumple que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

es decir, $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ es solución del problema no homogéneo $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, la solución general del sistema no homogéneo es

$$x = \begin{bmatrix} -x_4 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Puntaje

- 2 puntos por determinar la solución del problema homogéneo $Ax = 0$.
- 2 puntos por determinar una solución del problema no homogéneo $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.
- 2 puntos por determinar la solución general del problema $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, de acuerdo a los cálculos hechos anteriormente. Si no encuentra la solución general pero enuncia el teorema de solución de sistemas no homogéneos, asignar 1 punto.

7. Explique con un ejemplo porqué las siguientes afirmaciones son falsas:

   (a) Las columnas de una matriz A son linealmente independientes si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones.

   (b) Si S es un conjunto linealmente dependiente, entonces cada vector de S es una combinación lineal de los otros vectores en S.

   (c) Si u y v son vectores linealmente independientes, entonces $\{u, v, w\}$ es un conjunto linealmente independiente, cualquiera sea el vector w.

Solución

(a) La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ tiene columnas LD pero el sistema $Ax = 0$ tiene infinitas soluciones.

(b) El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es LD pero el tercer vector no es combinación lineal de los dos primeros.

(c) Aunque u y v sean linealmente independientes, el conjunto $\{u, v, \vec{0}\}$ es LD.

Puntaje

- 2 puntos por justificar cada afirmación como falsa con un ejemplo adecuado. (6 puntos en total).

8. Determine si la siguiente transformación lineal de $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^3$ es inyectiva y/o sobreyectiva:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z-w \\ 2x-y-w \\ 3x+4y-z \end{bmatrix}$$

Solución La matriz estándar de T es $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Al escalonar la matriz A obtenemos

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 7 \end{bmatrix}$$

La forma escalonada de A tiene un pivote en cada fila, por lo que las columnas de A generan todo $\mathbb{R}^3$, es decir, T es sobreyectiva. Por otro lado, las columnas de A son LD ya que corresponden a 4 vectores de $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, T no es inyectiva.

Puntaje

- 2 puntos por determinar la matriz estándar de T.
- 2 puntos por justificar correctamente que T es sobreyectiva, de acuerdo a la matriz encontrada.
- 2 puntos por justificar correctamente que T no es inyectiva, de acuerdo a la matriz encontrada.
- Si la matriz encontrada no es la correcta, igual puede asignar puntos en el item 2 y 3 siempre y cuando el problema no se haya trivializado.