CLASE 28: DIVERGENCIA A INFINITO

- **Recordemos:**

  - Principio de Arquímedes:

    $\forall M>0, \exists n$ tal que $n>M$

    $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{N}$ no es acotado superiormente

    Esto reescribir como:

    $\forall M>0, \exists n_0 \geq 1$ tal que $n>M \; \forall n \geq n_0$

  - Hace algunas clases demostramos que si $r \in (0,1)$, entonces $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$

    ¿Cómo lo demostramos?

    Demostramos que $\forall M>0, \exists n_0 \geq 1$ tq

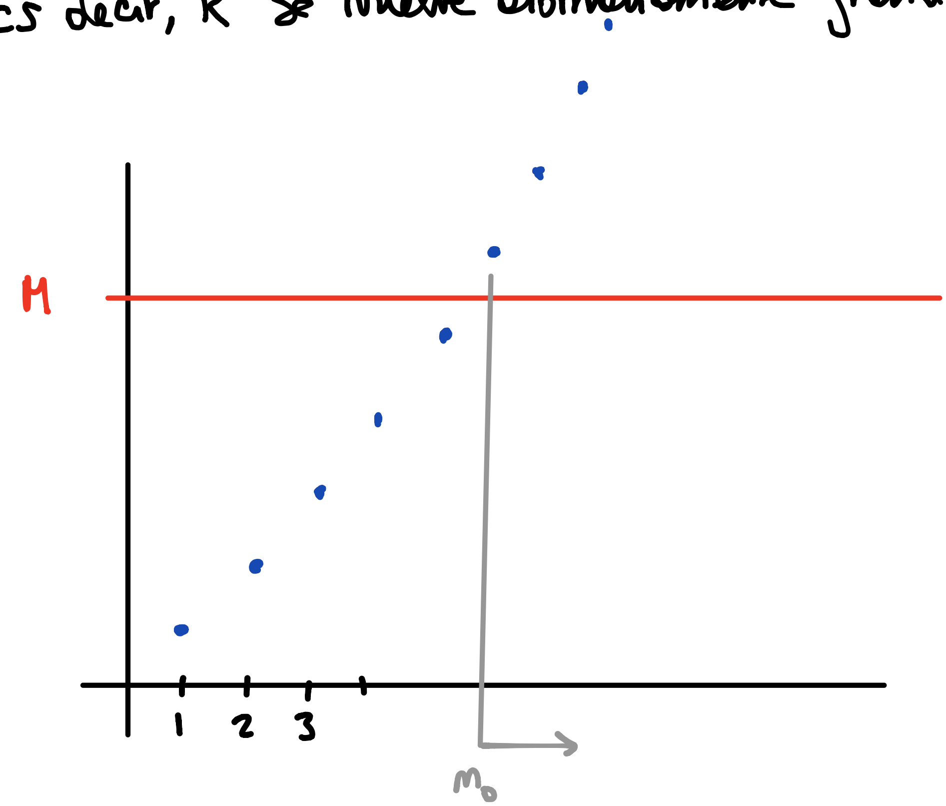
    $$n \geq n_0 \Longrightarrow \frac{1}{r^n} > M \quad \left(\Longrightarrow 0 \leq r^n < \frac{1}{M}, \; M \approx \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor\right)$$

Equivalente, si $R>1$, entonces $\forall M>0, \exists m_0 \geq 1$ tq

$$m \geq m_0 \implies R^m > M$$

(considerando $r = \frac{1}{R}$ en lo anterior)

Es decir, R^m se vuelve arbitrariamente grande.



• <u>DEF.</u> (Divergencia a infinito)

Sea $(a_n)_n$ una sucesión. Decimos que $(a_n)_n$ <u>diverge a infinito</u> si $\forall M>0$, $\exists n_0\geq 1$ tal que

$$a_n > M, \ \forall n \geq n_0$$

<u>Notación</u>: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

($\underline{\text{Obs}}$: <u>no</u> es un límite usual, $\infty \notin \mathbb{R}$)

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

<u>Obs.</u>: en la literatura se puede encontrar el término "converge a infinito"

Es preferible decir a_n tiende a infinito.

• <u>Ej</u>: i) $\lim_{n\to\infty} n = \infty$

ii) Si $R>1$, entonces $\lim_{n\to\infty} R^n = \infty$

iii) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n}$

pd $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

<u>DEM</u>:

Sea $M>0$.

Primero, $a_n = \dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n} > n$

Ahora, sea $n_0 \geq 1$ tq $n_0 > M$ (Ppio. de Arquímedes)

Luego, si $n \geq n_0$, entonces

$$a_n > n \geq n_0 > M$$

$\square$

iv) $a_n = \dfrac{2n^2}{n+1}$

p.d. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

<u>DEM</u>: Sea $M>0$.

Primero, $a_n = \dfrac{2n^2}{n+1} = \dfrac{2(n^2-1)+2}{n+1}$

$$= 2(n-1) + \frac{2}{n+1}$$

Conclusión: $a_n = 2n - 2 + \frac{2}{n+1}$

$$> 2n - 2$$

Necesitamos $\quad 2n - 2 > M$

$$\Leftrightarrow \; 2n > M + 2$$

$$\Leftrightarrow \; n > \frac{M+2}{2}$$

Por principio de Arquímedes, $\exists n_0 \geq 1$

tal que $\quad n_0 > \frac{M+2}{2}$.

Luego, si $n \geq n_0$, entonces

$$a_n > 2n - 2 \geq 2n_0 - 2 > M$$

$\square$

• **Lema**: Sea $(a_n)_n$ tal que

i) $a_n > 0 \quad \forall n \geq 1$

ii) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Luego, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

DEM: Sea $M > 0$.

Sabemos que: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \geq 1$ tq

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$$

Como $a_n > 0$, tenemos que

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 < a_n < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{a_n}$$

Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{M}$. Luego, $\exists n_0 \geq 1$ tq

$$n \geq n_0 \Rightarrow 0 < a_n < \varepsilon = \frac{1}{M}$$

$$\Rightarrow M < \frac{1}{a_n}$$

$\square$

• <u>Lema</u>: Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

<u>DEM</u>: Ejercicio $\square$

(<u>Obs</u>: $a_n \longrightarrow \infty$ entonces $\exists \bar{n} \geq 1$ tq $a_n > 0$ $\forall n \geq \bar{n}$)

• <u>Obs</u>: En el primer lema, era crucial asumir que a_n es <u>positivo</u>.

<u>Ej</u>: Sea $r \in (-1, 0)$ y sea $R = \frac{1}{r}$

Luego, $R^{2n} > 0$ y $R^{2n+1} < 0$

Sea $M > 0$. Luego, si n es impar, entonces

$$R^n < M$$

Es decir, $\forall n_0 \geq 1$, $\exists n \geq n_0$ tq

$$R^n < M$$

Por lo tanto, R^n no tiende a infinito.

• DEF (Divergencia a menos infinito)

Decimos que $(a_n)_n$ diverge a menos infinito (o tiende a menos infinito) si

$\forall M<0, \exists n_0 \geq 1$ tq

$n \geq n_0 \Rightarrow a_n < M$

Notación: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$

• Ej: i) $\lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty$

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{-n^2+1}{n} = -\infty$

iii) Si $R<-1$, entonces R^n tampoco tiende a $-\infty$.

iv) Si $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, entonces $-a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$

• <u>Obs</u>: Si $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, entonces $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

De hecho, si $|a_n| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, entonces

$$\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

• <u>Lema</u>: Supongamos que $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

i) Si $b_n \longrightarrow \infty$, entonces $a_n + b_n \longrightarrow \infty$

ii) Si $b_n \longrightarrow \infty$, entonces $a_n b_n \longrightarrow \infty$

iii) Si $\exists B \in \mathbb{R}$ tal que $b_n \geq B$ $\forall n \geq 1$

entonces $a_n + b_n \longrightarrow \infty$

iv) Si $\exists C > 0$ tq $b_n > C$ $\forall n \geq 1$

entonces $a_n b_n \longrightarrow \infty$.

DEM:

iii) Sea $M > 0$.

$$a_n + b_n \geq a_n + B \quad (> M)$$

Como $a_n \longrightarrow \infty$, $\exists n_0 \geq 1$ tq $a_n > M - B$ $\forall n \geq n_0$.

Luego, si $n \geq n_0$, entonces

$$a_n + b_n \geq a_n + B > (M - B) + B = M$$

iv) Sea $M > 0$.

Como $a_n \xrightarrow{n \to \infty} \infty$, $\exists \bar{n} \geq 1$ tq $a_n \geq 1$ $\forall n \geq \bar{n}$

Luego, si $n \geq \bar{n}$, entonces

$$a_n b_n > c a_n \quad (> M)$$

Ahora, $\exists\, m_0 \geq 1$ tq $a_m > \frac{M}{C}$ $\forall m \geq m_0$

Luego, si $m \geq m_0$, entonces

$$a_m b_m > \frac{M}{C} \cdot C = M$$

i) Basta observar que, si $b_m \longrightarrow \infty$, entonces $\exists\, \bar{m} \geq 1$ tq $b_m \geq 1$ $\forall m \geq \bar{m}$ y, por lo tanto, se cumplen las hipótesis de iii) $\forall m \geq \bar{m}$.

ii) Ídem.

$\square$

- <u>Lema</u>: Supongamos que:

  i) $a_m \xrightarrow{m \to \infty} \infty$

  ii) $b_m \geq a_m$

Luego, $b_m \xrightarrow{m \to \infty} \infty$.

__DEM__: Sea $M>0$.

Sea $n_0 \geq 1$ tq $n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$

Luego, si $n \geq n_0$, entonces

$b_n \geq a_n > M$ $\square$

- __Ej__: i) $b_n = n^2 + n\sin(n)$

$$\geq n^2 - n =: a_n$$

Como $a_n \to \infty$, tenemos que $b_n \to \infty$.

ii) $b_n = \lfloor \frac{2n+1}{3} \rfloor$

$$\geq \frac{2n+1}{3} - 1$$

$$= \frac{2n-2}{3} =: a_n$$

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow b_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

- **Obs.**: $+\infty$ y $-\infty$ no se mezclan bien.

Ej: i) $a_n = n^2$, $b_n = -n$

$$\begin{cases} a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \\ b_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \\ a_n + b_n = n^2 - n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \end{cases}$$

ii) $a_n = n$, $b_n = -n^2$

$$\begin{cases} a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \\ b_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \\ a_n + b_n = -n^2 + n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \end{cases}$$

iii) $a_n = n+2$, $b_n = -n$

$$\begin{cases} a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \\ b_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty \\ a_n + b_n = 2 \xrightarrow{n\to\infty} 2 \end{cases}$$

Pero:

iv) $\begin{cases} a_n \longrightarrow \infty \\ b_n \longrightarrow -\infty \\ a_n b_n \longrightarrow -\infty \end{cases}$

- Obs: $\begin{cases} a_n \longrightarrow -\infty \\ b_n \longrightarrow -\infty \\ a_n b_n \longrightarrow \infty \end{cases}$