Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

EYP1016 - Introducción a la Estadística

Ayudantía 11

Profesora	:	Anita Araneda
Ayudante	:	Pilar Tello
Fecha	:	24 de Mayo del 2016

1. Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución $Uniforme[0, \theta]$:

   a) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de θ.

   b) Encuentre el estimador de momentos de θ.

   c) Calcule el error cuadrático medio del EMV y EM encontrados en *a)* y *b)*. ¿Cuál de los dos estimadores prefiere? Justifique.

   Hint: Si Y es una v.a con función de densidad $f_Y(y) = ny^{n-1}/\theta^n$ con $0 \leq x \leq \theta$ entonces $\mathbb{E}(Y) = n\theta/(n+1)$ y $\mathbb{E}(Y^2) = n\theta^2/(n+2)$.

2. La probabilidad de que una plancha de cinc fabricada por una máquina sea declarada de segunda clase es igual a θ, y su valor es desconocido.

   a) Determine el estimador de máxima verosimilitud de θ, basándose en una muestra aleatoria de n de estas planchas donde, para cada una de ellas, se registra si ella es declarada de segunda clase, o no.

   b) Para un tamaño muestral suficientemente grande, encuentre un pivote aproximado para θ, $R(X, \theta)$, basado en el estimador máximo verosímil que encontró en *a)*.

   c) Utilice el pivote que encontró en b) para construir paso a paso un intervalo de confianza aproximada $(1 - \alpha)$ para θ.

   d) Si en una muestra aleatoria de 1.000 de estas planchas se encuentra que 30 de ellas son de segunda clase, determine una estimación puntual y una estimación intervalar para θ, esta última utilizando un 95 % de confianza.

   e) Determine el número de planchas requeridas para asegurar que el semi-ancho de un intervalo de 95 % de confianza sea a lo más 0,02. *Hint:* ¿Cuál es la varianza máxima en una población Bernoulli?

   f) ¿Cómo podría argumentar que es posible lograr lo anterior utilizando un tamaño de muestra menor al encontrado?

3. Sea Y una variable aleatoria con densidad

$$f_Y(y) = \frac{1}{\theta y^{\frac{1}{\theta}+1}} \; y > 1, 0 < \theta < 1$$

   a) Demuestre que $Y^{\frac{1}{\theta}}$ es una función pivote para θ.

   b) Se ha observado una muestra de tamaño $n = 1$. A partir de *a)* obtenga un intervalo de confianza al nivel $1 - \alpha$ para θ.