Clase 12

jueves, 29 de agosto de 2024 14:43

Transformaciones Lineales: Una Introducción

Recordemos que si $A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ es una matriz de $m\times n$ y $x = [x_j]_{1\le j\le n} \in \mathbb{R}^n$ es cualquier vector, entonces

$$A\cdot x = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & \cdots \; a_n \end{array}$$

$$= x_1\cdot a_1 + x_2\cdot a_2 + \cdots + x_n\cdot a_n$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \cdots + a_{1n}\cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + \cdots + a_{mn}\cdot x_n \end{bmatrix}$$

es un vector en $\mathbb{R}^m$.

Es decir, la matriz A define una función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ (es decir, una "máquina" que transforma un vector $x\in\mathbb{R}^n$ a un cierto vector $A\cdot x$ en $\mathbb{R}^m$).

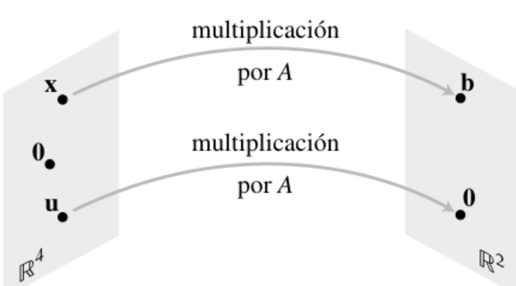

FIGURA 1 Transformación de vectores por medio de multiplicación matricial.

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

"transforma" vectores de $\mathbb{R}^4$ en vectores de $\mathbb{R}^2$.

$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 0\cdot 3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ \vdots \end{bmatrix}$

$$A \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$$

Luego, podemos reinterpretar el sistema de ecuaciones asociado a la ec. matricial $A \cdot x = b$ como sigue:

¿ Cuáles son los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que se transforman en b como resultado de multiplicarlos por A ?

Recuerdo: Una función (o transformación o mapeo) T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es una regla que transforma a cada $x \in \mathbb{R}^n$ un vector $T(x)$ en $\mathbb{R}^m$. Se denota

$$T: \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\text{dominio}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}^m}_{\text{codominio}}.$$

El vector $T(x)$ es la imagen de x bajo T. El conjunto de todas las imagenes $T(x)$ es el conjunto imagen o rango de T.

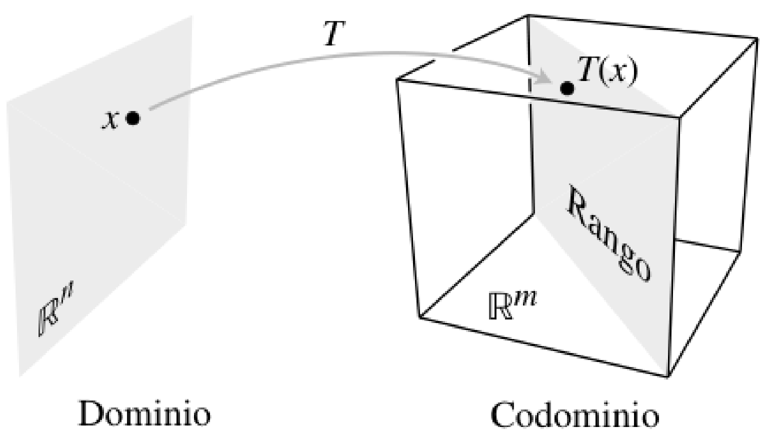

FIGURA 2 Dominio, codominio y rango de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

EJEMPLO 1 Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, y defina una transformación $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, de manera que

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre $T(\mathbf{u})$, la imagen de **u** bajo la transformación T.

b) Encuentre una **x** en $\mathbb{R}^2$ cuya imagen bajo T sea **b**.

c) ¿Hay más de una **x** cuya imagen bajo T sea **b**?

d) Determine si **c** está en el rango de la transformación T.

Transformaciones Lineales

En clases anteriores (Lay Sección 1.4) vimos dos propiedades cruciales de las transformaciones lineales $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dadas por $T(x) = A \cdot x$ donde A es una matriz de $m \times n$:

i) $T(u+v) = A \cdot (u+v) = A \cdot u + A \cdot v = T(u) + T(v)$

ii) $T(c \cdot u) = A \cdot (c \cdot u) = c \cdot (A \cdot u) = c \cdot T(u)$

Es decir, T se "lleva bien" con la suma de vectores y la mult. por escalar.

Estas dos propiedades caracterizan a la clase de funciones más importante del algebra lineal.

DEFINICIÓN

Una transformación (o mapeo) T es **lineal** si:

i. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ para todas las **u**, **v** en el dominio de T;

ii. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$ para todos los escalares c y para todas las **u** en el dominio de T.

Las transformaciones lineales satisfacen varias propiedades importantes. Por ejemplo

Si T es una transformación lineal, entonces

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{3}$$

y

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v}) \tag{4}$$

para todos los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ en el dominio de T y para todos los escalares c, d.

EJEMPLO 5 Defina una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$$

Encuentre las imágenes bajo T de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$.

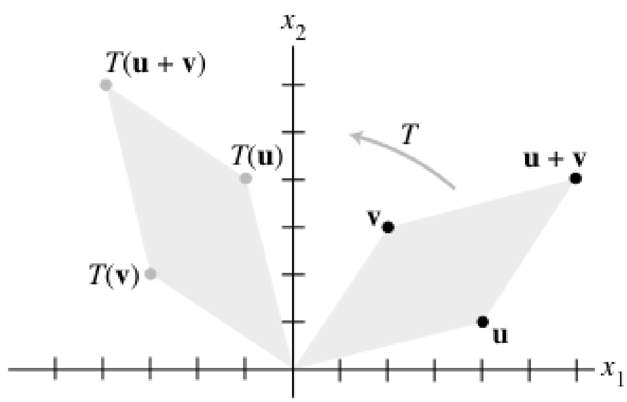

FIGURA 6 Una transformación de rotación.

Ejercicio:

19. Sean $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal que mapea $\mathbf{e}_1$ en $\mathbf{y}_1$, y $\mathbf{e}_2$ en $\mathbf{y}_2$. Encuentre las imágenes de $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.