Pontificia Universidad Católica de Chile
Bastián Mora - bmor@uc.cl
Matías Fernández - matias.fernandez@uc.cl

MAT1107 - Introducción al Cálculo

Ayudantía 12 - Jueves 09 de junio del 2022

Problema 1. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n-2}-n)$$

Solución: Notemos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+5n-2}-n &= \frac{(\sqrt{n^2+5n-2}-n)(\sqrt{n^2+5n-2}+n)}{\sqrt{n^2+5n-2}+n}\\
&= \frac{5n-2}{\sqrt{n^2+5n-2}+n}\\
&= \frac{2-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}}
\end{aligned}$$

Por álgebra de límites tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n-2}-n) = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{5}{n}-\frac{2}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2.$$

Problema 2. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

Solución: Notemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, de modo que $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ por la propiedad telescópica. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\\
&= 1+0 = 1.
\end{aligned}$$

Problema 3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $1 < a < b < c$. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$$

Solución: Por un lado, notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$c = \sqrt[n]{c^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$$

Mientras que, acotando por arriba,

$$\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3c^n} = \sqrt[n]{3}c$$

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$. Así que, como $c \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3}c$, por el teorema del sándwich se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c$$

Problema 4. Sabiendo que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Solución: Notemos que haciendo un cambio de índice $n \mapsto n+1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Problema 5. Usando el teorema del sándwich muestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{1}}{n^2+1} + \frac{\sqrt{2}}{n^2+2} + \frac{\sqrt{3}}{n^2+3} + ... + \frac{\sqrt{n}}{n^2+n}\right) = 0$$

Solución: Acotemos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{\sqrt{1}}{n^2+1} + \frac{\sqrt{2}}{n^2+2} + \frac{\sqrt{3}}{n^2+3} + ... + \frac{\sqrt{n}}{n^2+n} \\
&\leq \frac{\sqrt{1}}{n^2} + \frac{\sqrt{2}}{n^2} + \frac{\sqrt{3}}{n^2} + ... + \frac{\sqrt{n}}{n^2} \\
&\leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} + \frac{\sqrt{n}}{n^2} + \frac{\sqrt{n}}{n^2} + ... + \frac{\sqrt{n}}{n^2} \\
&= \frac{n\sqrt{n}}{n^2} \\
&= \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Por el teorema del sándwich, como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{1}}{n^2+1} + \frac{\sqrt{2}}{n^2+2} + \frac{\sqrt{3}}{n^2+3} + ... + \frac{\sqrt{n}}{n^2+n} \right) = 0$$

Problema 6. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(2n^2)}{1+\sqrt{n}}$$

Solución: Sabemos que la sucesión $\cos(2n^2)$ es acotada. Como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}} = 0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(2n^2)}{1+\sqrt{n}} = 0$$

Problema 7. Considere la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por:

$$a_1 = 1 \ a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}, n \in \mathbb{N}.$$

a) Demuestre que la sucesión es acotada.

b) Asumiendo que la sucesión es convergente, calcule el límite.

Solución: Primero, veamos que para $n = 1, 2, 3$ se tiene $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{5}$, lo que nos motiva a mostrar que $0 \leq a_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El caso base ya está listo. Asumamos que se tiene la desigualdad para algún n, luego $2 \leq 3 - a_n \leq 3$, lo que nos implica que $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3-a_n} \leq \frac{1}{2}$, o sea, $0 \leq a_{n+1} \leq 1$. Esto demuestra las cotas para todo n.

Ahora si asumimos $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, en particular $0 \leq L \leq 1$. Por álgebra de límites,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-a_n} \\ &= \frac{1}{3 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n} \\ &= \frac{1}{3-L} \end{aligned}$$

Esto nos da la ecuación cuadrática $L^2 - 3L + 1 = 0$. La solución $L = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ la descartamos pues es mayor a 1. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Problema 8. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+2^n}{3^n-2^n}$$

Solución:
Factorizando por 3^n en el numerador y denominador, se tiene que

$$\frac{3^n+2^n}{3^n-2^n} = \frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

Como $\frac{2}{3} < 1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$, por lo que usando álgebra de límites $\frac{3^n+2^n}{3^n-2^n} \to 1$.