CLASE 17 : EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

- **Funciones exponenciales** : $a>0$

La función exponencial en base a es la función:

$$f_a(x) = a^x, \quad \mathrm{Dom}\, f_a = \mathbb{R}.$$

- **Ej**: • $a=3$

$$f_3(x) = 3^x$$

$f_3(2) = 3^2 = 9$ $\qquad$ $f_3(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

$f_3\left(\frac{1}{4}\right) = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3}$ $\qquad$ $f_3(0) = 3^0 = 1$

• $a = \frac{1}{5}$

$$f_{\frac{1}{5}}(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x = \frac{1}{5^x} = 5^{-x}$$

$f_{\frac{1}{5}}(2) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$ $\qquad$ $f_{\frac{1}{5}}(-1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$

• **Obs**: • $a=1$, $f_1(x)=1^x=1$, $\forall x\in\mathbb{R}$

• No incluimos $a<0$: por ejemplo, si $a=-3$, entonces

$$f_{-3}\left(\tfrac{1}{2}\right)=(-3)^{1/2}=\sqrt{-3}$$ no está definido en los reales.

• Recordemos algunas propiedades de las exponenciales: sea $a>0$,

• $a^0=1$, $a^1=a$

• $a^{x+y}=a^x a^y$

• $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

• $a^{xy}=(a^x)^y$

• $a^x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

En particular,

$$f_a(0)=1\ ,\ f_a(1)=a$$

$$f_a(-x)=f_a(x)^{-1}$$

$$f_a(x+y)=f_a(x)f_a(y)$$

- Distinguimos dos casos:

1.- $\underline{a>1}$: $a^h > 1, \forall h>0$

$$f_a(x+h) = a^{x+h}$$
$$= a^x a^h \quad ; h>0$$
$$> a^x = f_a(x)$$

$\Rightarrow f_a$ es estrictamente creciente si $a>1$

En particular, es inyectiva.

2.- $\underline{a\in(0,1)}$: $a^h < 1, \forall h>0$

$$f_a(x+h) = a^x a^h \quad ; h>0$$
$$< a^x = f_a(x)$$

$\Rightarrow f_a$ es estrictamente decreciente si $a\in(0,1)$

En particular, es inyectiva.

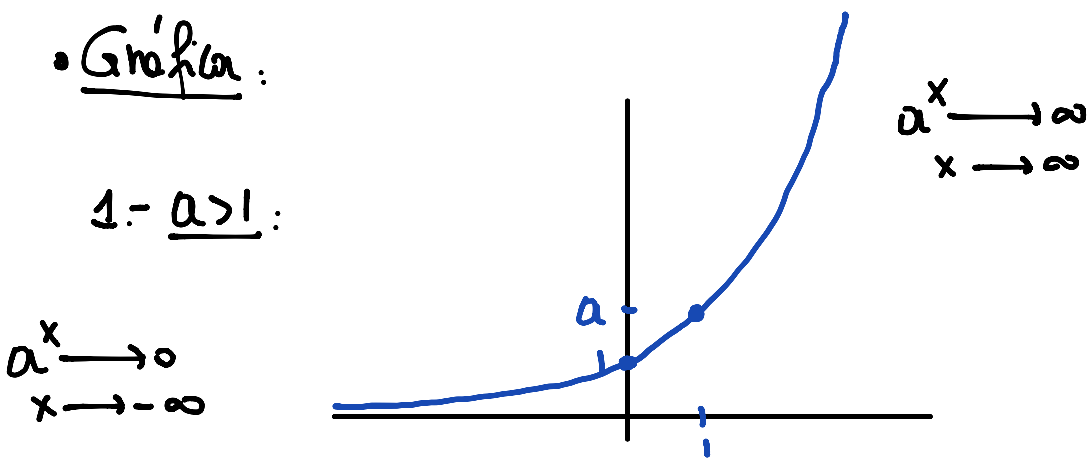
- **Afirmación:** si $a>0$, $a\neq 1$, entonces

$$\operatorname{Rec} f_a = (0,\infty)$$

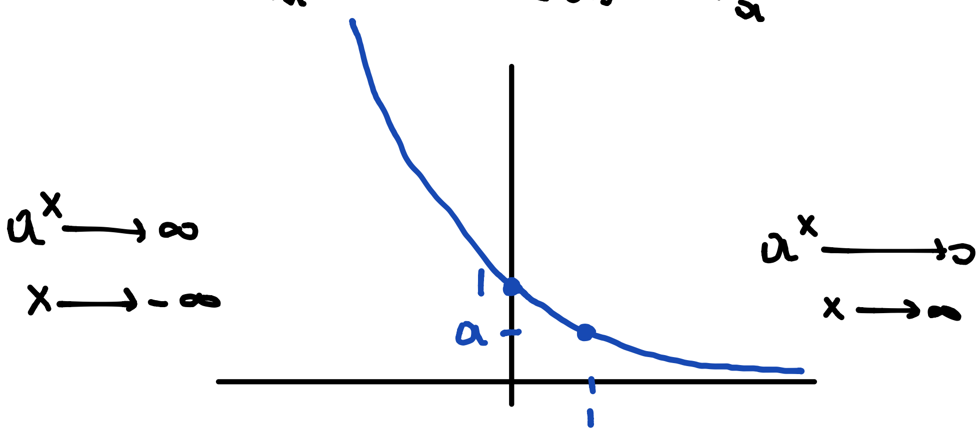
$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R} &\longrightarrow (0,\infty) \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

- **Gráfica:**

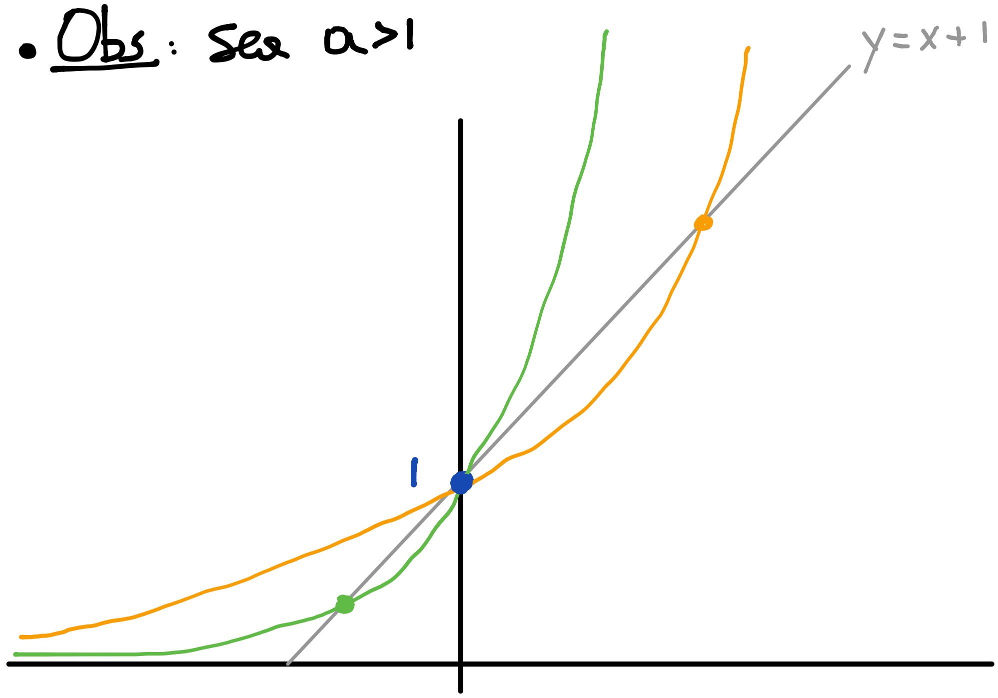
1.- $a>1$:



2.- $a\in(0,1)$: $f_a(x) = a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x} = f_{\frac{1}{a}}(-x)$



• **Obs**: Sea $a>1$



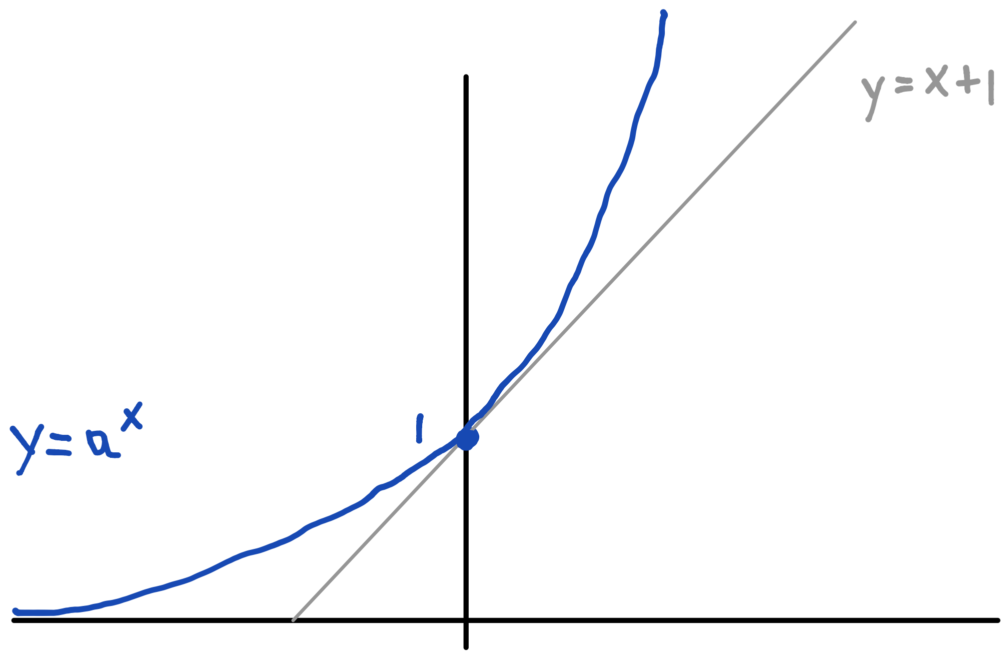
Ej: • $a=2$

$2^x = x+1 \Rightarrow x=0,\ x=1$

• $a=4$

$4^x = x+1 \Rightarrow x=0,\ x=-\frac{1}{2}$

Por lo tanto, "debe" existir una base $2<a<4$ que separe las dos situaciones anteriores.

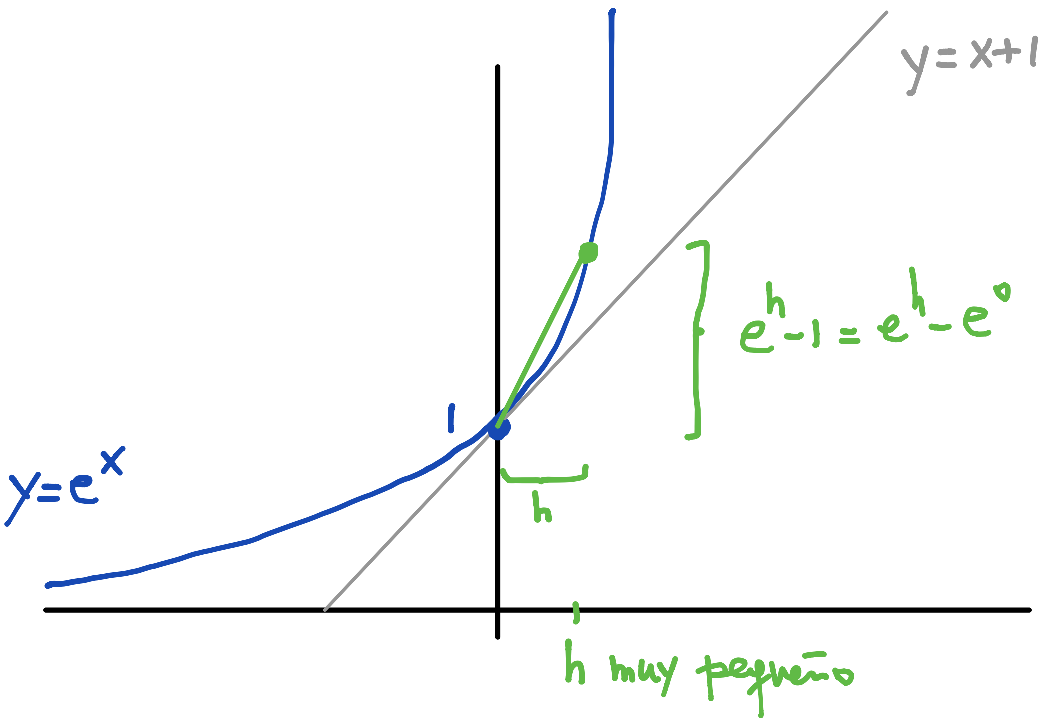


En este caso, la curva de f_a intersecta la recta gris solo en el punto $(0,1)$.

Esta base se conoce como e y f_e se conoce como exponencial natural o simplemente exponencial.

$$f_e(x) = e^x \qquad (e>1)$$

• Busquemos el valor de e:



La pendiente del trazo verde es $\dfrac{e^h-1}{h}$.

Si h es muy muy pequeño, entonces

$$\frac{e^h-1}{h} \simeq 1 \quad (= \text{pendiente de } y=x+1)$$

Probemos con distintas bases:

- $a=2$, $\dfrac{2^h-1}{h} \simeq 0.7$

- $a=4$, $\dfrac{4^h-1}{h} \simeq 1.4$

- $a=3$, $\dfrac{3^h-1}{h} \simeq 1.1$

- $a=2.5$, $\dfrac{(2.5)^h-1}{h} \simeq 0.9$

- $a=2.7$, $\dfrac{(2.7)^h-1}{h} \simeq 1 \implies e \simeq 2.7$

- <u>Obs</u>: e es un número irracional

- Recordamos que

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{R} &\longrightarrow (0,\infty) \qquad (a>0, a\neq 1) \\ x &\longmapsto a^x \end{aligned}$$

es biyectiva.

Por lo tanto, tiene una función inversa.

- **DEF**: Sea $a>0$, $a\neq 1$.

El logaritmo en base a se define como la inversa de la exponencial en base a.

$$\log_a = f_a^{-1}$$

Es decir,

$$\log_a(y) = x \iff a^x = y$$

$$\log_a : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto \log_a(y)$$

- **Ej**: $a=3$
  - $\log_3(9) = 2$ ya que $3^2 = 9$
  - $\log_3\left(\frac{1}{27}\right) = -3$ ya que $3^{-3} = \frac{1}{27}$

- <u>Obs</u>: $\log_e$ se conoce como logaritmo natural y se denota $\ln$.

- <u>Obs</u>: $\log_a(a^x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$a^{\log_a(y)} = y, \ \forall y \in (0,\infty)$$

- <u>Algunas propiedades</u>:

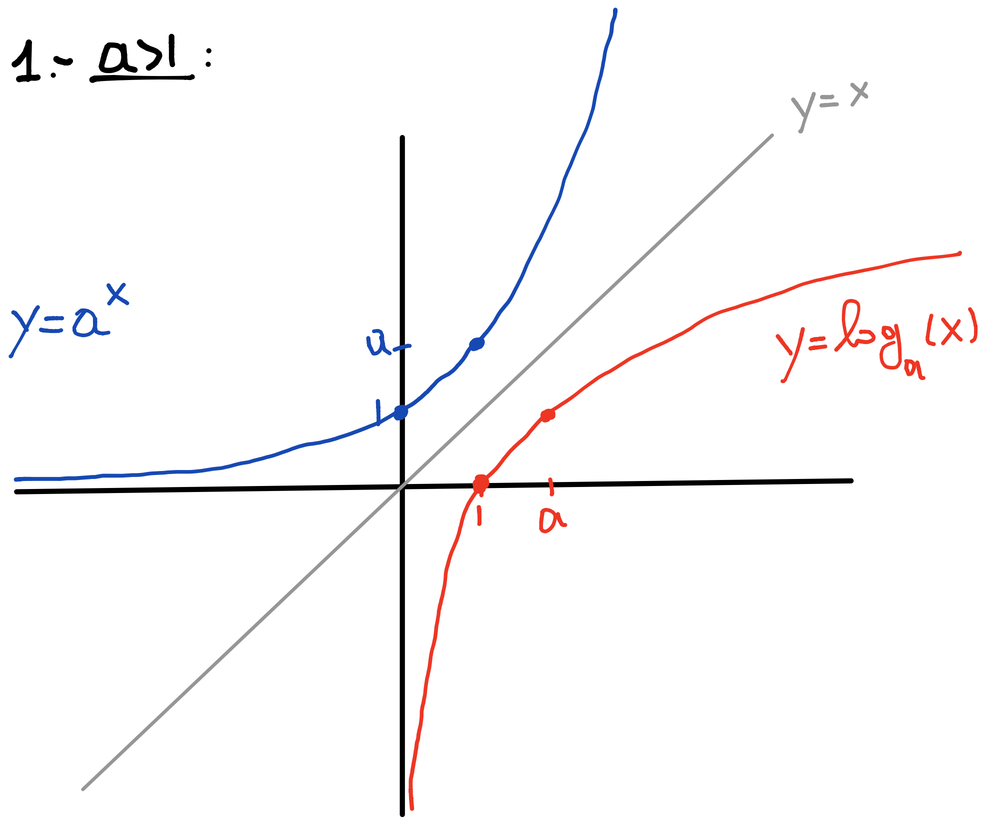
  - $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y), \ \forall x,y \in (0,\infty)$

  - $\log_a(x^c) = c\log_a(x), \ \forall x \in (0,\infty), \ \forall c \in \mathbb{R}$

  - $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x), \ \forall x \in (0,\infty)$

- **Gráfica:**

1.- $\underline{a>1}$:



2.- $\underline{a \in (0,1)}$: