PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO SEMESTRE DE 2015

MAT1203 $\star$ Álgebra Lineal

Solución al Examen, primera versión

JUSTIFIQUE SUS RESPUESTAS.

1. [**Problema 1.8.25 del texto**]
   Sean $\mathbf{v}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Se sabe que la recta que pasa por $\mathbf{p}$ en la dirección $\mathbf{v}$ tiene por ecuación paramétrica $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ (donde $t \in \mathbb{R}$ es el *parámetro*).

   Demuestre que si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal, entonces la imagen bajo T de esta recta es, o bien ella misma, o bien otra recta, o bien un punto de $\mathbb{R}^3$ (en otras palabras, T *mapea* esta recta sobre sí misma, sobre otra recta o sobre un solo punto).

   Solución:

   Llamemos ℓ a la recta. Claramente, la imagen de ℓ bajo T contiene a $T(\mathbf{p})$. Dependiendo de si $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ o no, tenemos dos casos:

   a) Si $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, entonces dado cualquier $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \in \ell$ se tiene
   $$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = T(\mathbf{p}) + T(t\mathbf{v}) = T(\mathbf{p}) + tT(\mathbf{v}) = T(\mathbf{p}) + t\mathbf{0} = T(\mathbf{p}).$$
   Así, en este caso la imagen bajo T de esta recta es un punto de $\mathbb{R}^3$, a saber, $T(\mathbf{p})$.

   b) Si $T(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces dado cualquier $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v} \in \ell$ se tiene
   $$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{p} + t\mathbf{v}) = T(\mathbf{p}) + T(t\mathbf{v}) = T(\mathbf{p}) + tT(\mathbf{v}) = T(\mathbf{p}) + t\mathbf{u}.$$
   Así, en este caso la imagen bajo T de esta recta es la recta que pasa por $T(\mathbf{p})$ y tiene dirección $\mathbf{u} = T(\mathbf{v})$.
   Esta recta puede ser la misma recta ℓ u otra.
   Nota: En estricto rigor, lo anterior demuestra que la imagen de ℓ bajo T está *contenida* en la recta a que pasa por $T(\mathbf{p})$ y tiene dirección $\mathbf{u} = T(\mathbf{v})$. Para completar la demostración debemos probar la inclusión recíproca, o sea, dado cualquier vector $T(\mathbf{p}) + \lambda\mathbf{u}$ de la recta que pasa por $T(\mathbf{p})$ y tiene dirección $\mathbf{u} = T(\mathbf{v})$, dicho vector es imagen de algún elemento de ℓ bajo T.
   Pero esto es evidente:
   $$T(\mathbf{p}) + \lambda\mathbf{u} = T(\mathbf{p}) + \lambda T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{p} + \lambda\mathbf{v}),$$
   y $\mathbf{p} + \lambda\mathbf{v}) \in \ell$.

   Puntaje:

   - Si la estructura general de la demostración está correcta, 1 punto.
   - Por probar que si $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ entonces $T(\ell)$ es un punto, 2 puntos.
   - Por probar que si $T(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ entonces $T(\ell)$ está contenida en una recta, 3 puntos.
   - Por probar que si $T(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ entonces la recta que pasa por $T(\mathbf{p})$ y tiene dirección $\mathbf{u} = T(\mathbf{v})$ está contenido en $T(\ell)$, 1 punto.

   A lo anterior se agrega el punto base.

2. **[Problema 2.3.27 del texto]**
Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Demuestre que si AB es invertible, entonces A también lo es.

Primera Solución:

Por ser AB invertible, existe una matriz F tal que $(AB)F = I$.

Pero entonces $A(BF) = I$, por lo que A es invertible.

Segunda Solución:

Por ser AB invertible, dado cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, la ecuación $AB\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente (tiene al menos una solución).

Pero entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ debe tener solución para todo $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, ya que si $\mathbf{v}$ es solución de $AB\mathbf{x} = \mathbf{c}$ entonces $B\mathbf{v}$ es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$.

Tercera Solución:

Por ser AB invertible, la transformación lineal $\mathbf{x} \to \mathbf{ABx}$ es sobre $\mathbb{R}^n$.

Pero entonces la transformación lineal $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ debe ser sobre $\mathbb{R}^n$, ya que de no ser así, existiría un $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que no hay ningún $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{v} = \mathbf{y}$. Pero —por ser $\mathbf{x} \to \mathbf{ABx}$ sobre $\mathbb{R}^n$— existe algún $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $AB\mathbf{u} = \mathbf{y}$. Pero entonces tomando $\mathbf{b} = B\mathbf{u}$ contradecimos el hecho de que no hay ningún $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{v} = \mathbf{y}$.

En el fondo, demostramos el contrarrecíproco: si A no es invertible, entonces AB tampoco lo es.

Puntaje:

En cualquiera de las soluciones (u otras *correctas* que se les ocurran a los alumnos):

- Por plantear una demostración correctamente estructurada (por ejemplo, directa o por contradicción), 2 puntos.
- Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 2 puntos.
- Por justificar adecuadamente los argumentos, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

3. **[Problema 4.1.32 del texto]**
Sean H y K dos subespacios de un espacio vectorial V. La *intersección* de H y K, representada como $H \cap K$, se define como el conjunto de vectores de V que pertenecen tanto a H como a K.

   Demuestre que $H \cap K$ es un subespacio de V.

   Solución:

   Para probar que $H \cap K$ es un subespacio de V, debemos probar que:

   (I) $H \cap K \neq \varnothing$.

   (II) $H \cap K$ es cerrado bajo suma.

   (III) $H \cap K$ es cerrado bajo ponderación por un escalar.

   Note que una forma alternativa es probar que $H \cap K \neq \varnothing$ y es cerrado bajo "combinaciones lineales de dos de sus elementos": en otras palabras, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \cap K$ entonces $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in H \cap K$.

   En efecto:

   (I) La forma más simple de demostrar que $H \cap K \neq \varnothing$ es probar que $\mathbf{0} \in H \cap K$. Para ello podemos usar el hecho de que $\mathbf{0} \in H$ y $\mathbf{0} \in K$, por lo que $\mathbf{0}$ es un elemento común de H y de K, de donde $\mathbf{0} \in H \cap K$.

   (II) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \cap K$. Entonces $\mathbf{u} \in H$, $\mathbf{u} \in K$, $\mathbf{v} \in H$ y $\mathbf{v} \in K$. Como H es subespacio de V, es cerrado bajo suma, por lo que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$; del mismo modo, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in K$, por lo que $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H \cap K$.

   O sea, $H \cap K$ es cerrado bajo suma.

   (III) Sean $\mathbf{u} \in H \cap K$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathbf{u} \in H$ y $\mathbf{u} \in K$, por lo que —como tanto H como K son subespacios de V— se tiene que $c\mathbf{u} \in H$ y $c\mathbf{u} \in K$, por lo que $c\mathbf{u} \in H \cap K$. O sea, $H \cap K$ es cerrado bajo ponderación por un escalar.

   Puntaje:

   - Por mencionar que se debe demostrar que $H \cap K \neq \varnothing$, y que $H \cap K$ es cerrado bajo suma y bajo ponderación (o, equivalente a estos últimos dos, que $H \cap K$ es cerrado bajo combinaciones lineales de dos de sus elementos), 1 punto.

     Nota: este punto se da incluso si no se menciona *explícitamente* que hay que demostrar las tres condiciones, siempre y cuando demuestren las tres (o al menos intenten demostrarlas). Por ejemplo, si demuestran que $H \cap K$ es cerrado bajo suma y ponderación, pero omiten demostrar que $H \cap K \neq \varnothing$, reciben solo 4 puntos, no 5.
   - Por demostrar que $H \cap K \neq \varnothing$, 1 punto.
   - Por demostrar que $H \cap K$ es cerrado bajo suma, 2 puntos.
   - Por demostrar que $H \cap K$ es cerrado bajo ponderación, 2 puntos.

     O, equivalente a estos últimos dos, por demostrar que $H \cap K$ es cerrado bajo combinaciones lineales de dos de sus elementos), 4 puntos.

   A lo anterior se le suma el punto base.

4. Sea A una matriz de 4×3 tal que $PA = LU$, donde P es una matriz de permutación, L es una matriz cuadrada, triangular inferior con números 1 en la diagonal, y U está en forma escalonada (o, en otras palabras, es triangular superior).

   Demuestre que si U tiene columnas linealmente independientes, entonces la transformación lineal $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ es uno a uno.

   Solución:

   Si U tiene columnas l.i., entonces todas las columnas de U son pivotes. Pero las columnas pivotes de U son las mismas que las de PA, por lo que todas las columnas de A son pivotes.

   Ya que todas las columnas de A son pivotes, al escalonar la matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ donde $\mathbf{b}$ es algún vector en $\operatorname{Col} A$, las tres columnas correspondientes a A son pivotes, por lo que ninguna corresponde a una variable libre.

   Así, si $\mathbf{b} \in \operatorname{Col} A$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única, lo que significa que la transformación lineal $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ es uno a uno.

   Puntaje:

   En esta solución (u otra *correcta* que se le ocurra a los alumnos):

   - Por plantear una demostración correctamente estructurada (por ejemplo, directa o por contradicción), 2 puntos.
   - Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 2 puntos.
   - Por justificar adecuadamente los argumentos, 2 puntos.

   A lo anterior se le suma el punto base.

5. **[Problema 5.6.1 del texto]**
Sea A una matriz de 2×2 con valores propios 3 y $1/3$, y vectores propios correspondientes $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sea $\{\mathbf{x}_k\}$ una solución de la ecuación en diferencias $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, donde $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Calcule $\mathbf{x}_1$, y encuentre una fórmula para $\mathbf{x}_k$ en términos de k y de los vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Solución:

Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, buscamos escalares α y β tales que

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2.$$

No es difícil ver que $\alpha = 5$, $\beta = -4$ satisface esto. Así, $\mathbf{x}_0 = 5\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2$ y por lo tanto

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = A(5\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2) = 5A\mathbf{v}_1 - 4A\mathbf{v}_2 = 5 \cdot (3\mathbf{v}_1) - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\mathbf{v}_1\right) = 15\mathbf{v}_1 - \frac{4}{3}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{49}{3} \\ \\ \frac{41}{3} \end{bmatrix}.$$

Calculando $\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = 5 \cdot 9\mathbf{v}_1 - \frac{4}{9}\mathbf{v}_2$, etc., descubrimos que

$$\mathbf{x}_k = 5 \cdot 3^k \mathbf{v}_1 - \frac{4}{3^k}\mathbf{v}_2.$$

Puntaje:

- Por expresar $\mathbf{x}_0$ en términos de los vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (encontrando α y β): 1 punto.
- Por calcular $\mathbf{x}_1$: 1 punto.
- Por llegar a la fórmula general para $\mathbf{x}_k$: 4 puntos.

A lo anterior se suma el punto base.

6. [**Problema 7.4.10 del texto**]

Encuentre una descomposición en valores singulares de $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Solución:

Encontremos primero los valores singulares de A. Estos son las raíces cuadradas de los valores propios de

$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}.$$

Como los valores propios de esta matriz son (ordenados de mayor a menor):

$$\lambda_1 = 25, \qquad \lambda_2 = 0,$$

los valores singulares de A son

$$\sigma_1 = 5, \qquad \sigma_2 = 0.$$

Dos vectores propios de $A^T A$ correspondientes a los vectores propios $\lambda_1 = 25, \lambda_2 = 0$ son, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} -2 \\ \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Normalizándolos, obtenemos

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix};$$

con ellos formamos la matriz ortogonal

$$V = [\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

El vector $A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$, por sí solo, forma una base del espacio $\operatorname{Col} A$. Normalizándolo, obtenemos una base ortonormal de $\operatorname{Col} A$, $\mathcal{B}_{\operatorname{Col} A} = \{\mathbf{u}_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

El siguiente paso es completar $\{\mathbf{u}_1\}$ a una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$. Una forma de hacer esto (¡no la única!) es tomar $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Con los tres vectores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ formamos la matriz ortogonal

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La tercera matriz que necesitamos es una matriz Σ del mismo tamaño que A (3×2) que en la diagonal principal está formada por los valores singulares mayores que 0, ordenados en forma decreciente, seguidos de tantos ceros como sea necesario, y donde los elementos fuera de la diagonal principal son cero.

En este caso, el único valor singular > 0 es $\sigma_1 = 5$, y la diagonal principal tiene largo 2, por lo que

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la descomposición en valores singulares de A es

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Puntaje:

- Por encontrar los valores singulares de A: 1 punto.
- Por encontrar los vectores propios de A^TA: 1 punto.
- Por construir la matriz V: 1 punto.
- Por determinar el vector $\mathbf{u}_1$: 1 punto.
- Por completar $\{\mathbf{u}_1\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, y construir la matriz U: 1 punto.
- Por construir la matriz Σ: 1 punto.

7. [**Problema 6.5-10 del texto**]
Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

a) Encuentre la proyección de $\mathbf{b}$ sobre $\mathrm{Col}(A)$.

b) Encuentre una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solución:

a) Observamos en primer lugar que las columnas de A son ortogonales:

$$(1, -1, 1) \cdot (2, 4, 2) = 2 - 4 + 2 = 0.$$

Así, una base ortonormal de $\mathrm{Col}\,A$ se obtiene simplemente normalizando las columnas de A:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{Col}\,A} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \right\}.$$

Así, la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\mathrm{Col}\,A$ está dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{proy}_{\mathrm{Col}\,A}\,\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}^T \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) El conjunto de soluciones del problema de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el conjunto de soluciones de las ecuaciones normales $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, o sea, de
$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ o, equivalentemente, $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$.

Claramente, este último sistema tiene como única solución $\begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \\ 1/2 \end{bmatrix}$, que es la solución buscada.

Puntaje:

a)
- Por darse cuenta de que los vectores columna de A forman una base ortogonal (y normalizarlos): 1 punto.
- Por plantear la fórmula $\text{proy}_{\text{Col}\, A} = UU^T\mathbf{b}$ (donde U es la matriz cuyas columnas son la base ortonormal de $\text{Col}\, A$): 1 punto.
- Por realizar el cálculo correctamente: 1 punto.

b)
- Por indicar que se debe resolver $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$: 1 punto.
- Por plantear correctamente los productos a realizar para resolver lo anterior: 1 punto.
- Por llegar al sistema diagonal que permite encontrar $\mathbf{x}$: 0,5 puntos.
- Por llegar al valor buscado de $\mathbf{x}$: 0,5 puntos.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) **[Problema 7.1.25c del texto]**
   Toda matriz simétrica de $n \times n$ tiene n valores propios reales distintos.

   b) **[Problema 7.2.28 del texto]**
   Si A es una matriz simétrica e invertible de $n \times n$ tal que la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$ es positiva definida, entonces la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A^{-1}\,\mathbf{x}$ también lo es.

Solución:

a) **FALSO**.

La matriz $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene un valor propio repetido ($\lambda = 1$).

b) **VERDADERO**.

Por ser A simétrica, es diagonalizable, o sea, puede ser escrita como $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D es una matriz diagonal formada por los valores propios de A.

Por ser A invertible, todos sus valores propios son no nulos, por lo que D es invertible (sus entradas diagonales son los recíprocos de los valores propios de A), y $A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Ahora bien: una matriz simétrica es definida positiva si y solo si todos sus valores propios son positivos, por lo que los de A lo son, y en consecuencia los de A^{-1} (que son los recíprocos de los valores propios de A) también lo son, por lo que A^{-1} es definida positiva.

Puntaje:

a)
- Responder FALSO sin realmente justificar obtiene 0 puntos de 3.
- Responder FALSO con una justificación muy vaga, obtiene 1 punto de 3.
- Si explican MUY bien CÓMO construir un contraejemplo, sin llegar a dar uno específico obtienen 2 puntos de 3.

b) Si lo hacen siguiendo el esquema mostrado aquí:
- Por mostrar que A es diagonalizable y los valores propios de D son los mismos de A: 1 punto.
- Por argumentar que D es invertible, y en consecuencia los valores propios de D^{-1} son los mismos de A^{-1} (que son los recíprocos de los valores propios de A: 1 punto.
- Por ligar la cualidad de definida positiva a tener solo valores propios positivos, y llegar a que A^{-1} es definida positiva: 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO SEMESTRE DE 2015

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución al Examen, segunda versión

JUSTIFIQUE SUS RESPUESTAS.

1. **[Problema 4.2.33 del texto]**
Sea $M_{2\times 2}$ el espacio vectorial de todas las matrices de 2×2, y defina $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ mediante $T(A) = A + A^T$.

   a) [4 pts.] Demuestre que T es una transformación lineal.

   b) [2 pts.] Describa el núcleo de T, indicando una propiedad que caracterice a las matrices de 2×2 que pertenecen a él.

Solución:

a) Debemos probar que $T(A + B) = T(A) + T(B)$ y que, si $c \in \mathbb{R}$, entonces $T(cA) = cT(A)$.
En efecto:

- $T(A+B) = (A+B)+(A+B)^T = A+B+A^T+B^T = (A+A^T)+(B+B^T) = T(A)+T(B)$.
- $T(cA) = (cA) + (cA)^T = cA + cA^T = c(A + A^T) = cT(A)$.

Nota: Otra forma de demostrar esto es probar que, si $A, B \in M_{2\times 2}$ y $s, t \in \mathbb{R}$ entonces $T(sA + tB) = sT(A) + tT(B)$.
En efecto:

$$\begin{aligned} T(sA + tB) &= (sA + tB) + (sA + TB)^T = sA + tB + sA^T + tB^T \\ &= sA + sA^T + tB + tB^T = s(A + A^T) + t(B + B^T) \\ &= sT(A) + tT(B). \end{aligned}$$

b) El núcleo (o *kernel*) de la transformación T es el conjunto de las matrices A de $M_{2\times 2}$ que satisfacen $A + A^T = 0$, o sea, tales que $A^T = -A$.
En otras palabras, el núcleo de la transformación T es el conjunto de las matrices *antisimétricas* de 2×2.

a)
- Por probar que $T(A + B) = T(A) + T(B)$: 2 puntos.
- Por probar que, si $c \in \mathbb{R}$, entonces $T(cA) = cT(A)$: 2 puntos.

Nota: Si en lugar de esto prueban correctamente que para $s, t \in \mathbb{R}$ se cumple que $T(sA + tB) = sT(A) + tT(B)$, obtienen los 4 puntos.

b) Por decir que el núcleo de la transformación T es el conjunto de las matrices A de $M_{2\times 2}$ que satisfacen $A + A^T = 0$ (o $A^T = -A$, o que son antisimétricas): 2 puntos.

A lo anterior se le agrega el punto base.

2. **[Problema 2.3.23 del texto]**
Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente para algún $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, entonces la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene alguna solución no trivial.

Primera Solución:

Supongamos que para $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente.

Entonces al escalonar la matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ llegamos a una fila de la forma $[0\ 0\ \ldots\ 0\ 1]$.

Pero entonces, al escalonar la matriz aumentada $[A \mid \mathbf{0}]$ llegamos a una fila de la forma $[0\ 0\ \ldots\ 0\ 0]$, por lo que al menos una de las variables en el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es libre. Pero entonces las variables dependientes pueden ser despejadas en términos de las variables libres, y como estas pueden tomar valores arbitrarios, basta que una de ellas tome un valor $\neq 0$ para encontrar una solución no trivial del sistema.

Segunda Solución:

Si la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente, entonces A tiene rango menor que la matriz aumentada $[A \mid \mathbf{0}]$: $\operatorname{rango} A < \operatorname{rango}([A \mid \mathbf{0}]) \leq n$.

Como el rango de A es menor a su número de columnas, todo sistema de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ o bien es inconsistente o tiene infinitas soluciones.

Como el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ claramente no es inconsistente, debe tener infinitas soluciones, por lo que tiene una cantidad infinita de soluciones no triviales.

Puntaje:

En cualquiera de las soluciones (u otras *correctas* que se les ocurran a los alumnos):

- Por plantear una demostración correctamente estructurada (por ejemplo, directa o por contradicción), 2 puntos.
- Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 2 puntos.
- Por justificar adecuadamente los argumentos, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

3. **[Problema 4.1.33 del texto]**
Sean H y K dos subespacios de un espacio vectorial V. La *suma* de H y K, representada como $H+K$, se define como el conjunto de los vectores de V que pueden ser representados como la suma de un vector de H y un vector de K. En otras palabras:

$$H+K=\{\mathbf{w}:\mathbf{w}=\mathbf{u}+\mathbf{v} \text{ para algún } \mathbf{u}\in H \text{ y algún } \mathbf{v}\in K\}.$$

Demuestre que $H+K$ es un subespacio de V.

Solución:

Para probar que $H+K$ es un subespacio de V, debemos probar que:

(I) $H+K\neq\varnothing$.
(II) $H+K$ es cerrado bajo suma.
(III) $H+K$ es cerrado bajo ponderación por un escalar.

Note que una forma alternativa es probar que $H+K\neq\varnothing$ y es cerrado bajo "combinaciones lineales de dos de sus elementos": en otras palabras, si $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $\mathbf{u},\mathbf{v}\in H+K$ entonces $\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}\in H+K$.

En efecto:

(I) La forma más simple de demostrar que $H+K\neq\varnothing$ es probar que $\mathbf{0}\in H+K$. Para ello podemos usar el hecho de que $\mathbf{0}\in H$ y $\mathbf{0}\in K$, por lo que $\mathbf{0}$ puede ser escrito como suma de un elemento de H y otro de K: $\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{0}\in H+K$.

(II) Sean $\mathbf{u},\mathbf{v}\in H+K$. Entonces $\mathbf{u}=\mathbf{u}_H+\mathbf{u}_K$ con $\mathbf{u}_H\in H$, $\mathbf{u}_K\in K$, y $\mathbf{v}=\mathbf{v}_H+\mathbf{v}_K$ con $\mathbf{v}_H\in H$, $\mathbf{v}_K\in K$.

Como H es subespacio de V, es cerrado bajo suma, por lo que $\mathbf{u}_H+\mathbf{v}_H\in H$; del mismo modo, $\mathbf{u}_K+\mathbf{v}_K\in K$, de donde

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=(\mathbf{u}_H+\mathbf{u}_K)+(\mathbf{v}_H+\mathbf{v}_K)=(\mathbf{u}_H+\mathbf{v}_H)+(\mathbf{u}_K+\mathbf{v}_K)\in H+K.$$

O sea, $H+K$ es cerrado bajo suma.

(III) Sean $\mathbf{u}\in H+K$ y $c\in\mathbb{R}$. Entonces $\mathbf{u}=\mathbf{u}_H+\mathbf{u}_K$ con $\mathbf{u}_H\in H$, $\mathbf{u}_K\in K$

Como tanto H como K son subespacios de V, se tiene que $c\mathbf{u}_H\in H$ y $c\mathbf{u}_K\in K$, por lo que

$$c\mathbf{u}=c(\mathbf{u}_H+\mathbf{u}_K)=(c\mathbf{u}_H)+(c\mathbf{u}_K)\in H+K.$$

O sea, $H+K$ es cerrado bajo ponderación por un escalar.

Puntaje:

- Por mencionar que se debe demostrar que $H+K\neq\varnothing$, y que $H+K$ es cerrado bajo suma y bajo ponderación (o, equivalente a estos últimos dos, que $H+K$ es cerrado bajo combinaciones lineales de dos de sus elementos), 1 punto.

  Nota: este punto se da incluso si no se menciona *explícitamente* que hay que demostrar las tres condiciones, siempre y cuando demuestren las tres (o al menos intenten demostrarlas). Por ejemplo, si demuestran que $H+K$ es cerrado bajo suma y ponderación, pero omiten demostrar que $H+K\neq\varnothing$, reciben solo 4 puntos, no 5.

- Por demostrar que $H + K \neq \varnothing$, 1 punto.
- Por demostrar que $H + K$ es cerrado bajo suma, 2 puntos.
- Por demostrar que $H + K$ es cerrado bajo ponderación, 2 puntos.

  O, equivalente a estos últimos dos, por demostrar que $H+K$ es cerrado bajo combinaciones lineales de dos de sus elementos), 4 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

4. Sea A una matriz de 3×4 tal que $PA = LU$, donde P es una matriz de permutación, L es una matriz cuadrada, triangular inferior con números 1 en la diagonal, y U está en forma escalonada (o, en otras palabras, es triangular superior).

   Demuestre que si U tiene filas linealmente independientes, entonces la transformación lineal $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ mapea $\mathbb{R}^4$ *sobre* $\mathbb{R}^3$.

   Solución:

   Si U tiene filas l.i., entonces al escalonar A no queda una fila de ceros (si eso ocurriera, quiere decir que dicha fila es combinación lineal de las otras y por lo tanto las filas no son l.i.).

   Así, dado cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, al escalonar $[A \mid \mathbf{b}]$, las columnas pivote serán columnas de A (no la última columna).

   En otras palabras, dado cualquier $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$, el sistema representado por la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, lo que nos dice que existe un $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ cuya imagen por la transformación $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ es $\mathbf{b}$.

   Lo anterior demuestra que la transformación $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ mapea $\mathbb{R}^4$ *sobre* $\mathbb{R}^3$.

   Puntaje:

   En esta solución (u otra *correcta* que se le ocurra a los alumnos):

   - Por plantear una demostración correctamente estructurada (por ejemplo, directa o por contradicción), 2 puntos.
   - Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 2 puntos.
   - Por justificar adecuadamente los argumentos, 2 puntos.

   A lo anterior se le suma el punto base.

5. [**Problema 5.3.15 del texto**]
Diagonalice la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \underset{f_3+f_1, f_2+\lambda f_1}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2\lambda - \lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & -(\lambda-1)^2 & \lambda - 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda-1)^2 (\lambda - 1 + 1) = -\lambda(\lambda-1)^2 \end{aligned}$$

Note que hay más de una manera de llegar a este resultado ...

Así, los valores propios de A son 1 (con multiplicidad 2) y 0 (con multiplicidad 1).

Para determinar los vectores propios, debemos encontrar las soluciones de $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Para $\lambda = 0$, tenemos $A - \lambda I = A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, la que tras ser llevada a forma escalonada reducida queda $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, y vemos que la solución de $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $x_2 = -x_3$, $x_1 = x_3$, por lo que la dimensión del espacio propio correspondiente al valor propio $\lambda = 0$ es 1, ya que hay solo una variable libre, a saber x_3. Asignando el valor 1 a dicha variable libre obtenemos el vector propio $(1, -1, 1)$, por lo que una base de dicho espacio propio es $\{(1, -1, 1)\}$.

Para $\lambda = 1$, calculamos $A - I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, la que tras ser escalonada queda $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, de donde la solución de $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $x_1 = -x_2 - x_3$, por lo que la dimensión del espacio propio correspondiente al valor propio $\lambda = 1$ es 2, ya que hay dos variables libres. Para determinar una base de dicho espacio propio, asignamos los valores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ a (x_2, x_3), obteniendo los vectores $(-1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$.

Con los vectores propios como columnas (agrupadas por valor propio) generamos la matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz D es la matriz que en la diagonal tiene los valores propios, *en el orden correspondiente a los vectores propios que son columnas de* A:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Puntaje:

- Por calcular el polinomio característico de A: 1 punto.
- Por determinar los valores propios de A: 0,5 puntos.
- Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = 2$: 1 punto.
- Por encontrar dos vectores propios independientes, correspondientes a $\lambda = 3$: 2 puntos.
- Por escribir la matriz P: 1 punto.
- Por escribir A como PDP^{-1}: 0,5 puntos.

A lo anterior se suma el punto base.

Note que No es necesario calcular P^{-1}.

6. **[Problema 7.1.30 del texto]**
   Suponga que tanto A como B son diagonalizables ortogonalmente, y que $AB = BA$. Explique por qué AB también es diagonalizable ortogonalmente.

   Solución:

   Sabemos (Teorema 2, Lay) que una matriz M es diagonalizable ortogonalmente si y solo si es simétrica.

   Ya que A y B son diagonalizables ortogonalmente, entonces tanto A como B son simétricas.

   Así, $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$; o sea, AB es simétrica.

   Pero entonces —aplicando nuevamente el mismo teorema— como AB es simétrica, es diagonalizable ortogonalmente.

   Puntaje:

   - Por plantear una demostración correctamente estructurada (por ejemplo, directa o por contradicción), 2 puntos.
   - Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 2 puntos.
   - Por justificar adecuadamente los argumentos, 2 puntos.

7. Sea $R = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

a) Demuestre que R es una matriz de reflexión.

b) Encuentre una base para el espacio sobre el cual R refleja.

c) ¿Cuál es la matriz de proyección correspondiente a este espacio?

Solución:

a) Una matriz cuadrada R es de reflexión si y solo si $P = \left(\frac{R+I}{2}\right)$ es una matriz de proyección.

A su vez, una matriz cuadrada P es de proyección si y solo si $P^2 = P$.

Así, la forma más simple de demostrar que R es de reflexión es calcular

$$P = \left(\frac{R+I}{2}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

y probar que $P^2 = P$. Esto puede hacerse directamente.

b) El espacio sobre el cual se refleja es generado por el conjunto de columnas de P. Como este conjunto es l.d., una base está formada por un vector,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \right\}$$

o, si se prefiere,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) La matriz de proyección es la matriz P indicada anteriormente.

Puntaje:

a) Por justificar adecuadamente que R es de reflexión: 2 puntos.

b) Por llegar a alguna base del espacio indicado: 2 puntos.

c) Por dar en forma explícita la matriz (o mencionar que fue calculada antes, si es ese el caso): 2 puntos.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) [**Problema 7.4.21 del texto**]
   Si A es una matriz de $m \times n$ y P es una matriz ortogonal de $m \times m$, entonces PA y A tienen los mismos valores singulares.

   b) [**Problema 7.2.21e del texto**]
   Si todos los valores propios de una matriz simétrica A son positivos, entonces la forma cuadrática $\mathbf{x}^T A\,\mathbf{x}$ es positiva definida.

Solución:

a) **VERDADERO**.
Los valores singulares de una matriz M son las raíces cuadradas de los valores propios de $M^T M$.
Como $(PA)^T(PA) = A^T P^T PA = A^T(P^T P)A = A^T IA = A^T A$, las matrices $(PA)^T(PA)$ y $A^T A$ tienen los mismos valores propios (de hecho, son la misma matriz) y por lo tanto PA y A tienen los mismos valores singulares.

b) **VERDADERO**.
Si los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ entonces es posible escribir A como $A = PDP^T$ con P ortogonal y D la matriz diagonal determinada por los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Así, la forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ puede ser escrita como

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(PDP^T)\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T P)D(P^T\mathbf{x}) = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}).$$

Definiendo $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x}$, vemos que $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.
Como todos los λ_i son > 0, esta última expresión no es nunca negativa, por lo que $Q(\mathbf{x})$ es positiva definida o semidefinida, dependiendo de si ocurre o no que $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
Pero esto último es imposible, ya que —por ser P ortogonal, P^T es invertible y por lo tanto la transformación lineal $\mathbf{x} \to P^T\mathbf{x}$ es uno a uno, por lo que $\mathbf{y} = P^T\mathbf{x} = \mathbf{0} \to \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Así, $Q(\mathbf{x})$ es positiva definida.

Puntaje: En cada parte:

- Por plantear una justificación correctamente estructurada, 1 punto.
- Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 1 punto.
- Por justificar adecuadamente los argumentos, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.