

EYP 1025-1027 Métodos Probabilísticos

Clase 21

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile



Contenido I

- 1 Convergencia Estocástica y Teoremas Límites
 - Convergencia en distribución
 - Ejemplos
 - Ejemplos
 - Ejemplos
 - Teorema del límite central (TLC)
 - Ejemplos
 - Otros teoremas límites importantes

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Convergencia en distribución

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias definidas en un determinado espacio de probabilidad, y sea Z cualquier variable aleatoria cuya distribución no depende de n .

Definición 1.1

Se dice que Z_n converge en distribución para Z si,

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) \rightarrow P(Z \leq z) = F_Z(z), \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

para todo z donde F_Z es continua (es decir, $\forall z$ tal que $P(Z = z) = 0$).

Notación: $Z_n \xrightarrow{d} Z$ o $F_{Z_n} \Longrightarrow F_Z$.

Nota: Similarmente, si $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots$ son vectores aleatorios de dimensión p , entonces $\mathbf{Z}_n \xrightarrow{d} \mathbf{Z}$ ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\mathbf{Z}_n}(\mathbf{z}) = F_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) \forall \mathbf{z}$ que sea punto de continuidad de $F_{\mathbf{Z}}$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplos

Ejemplo 1.1

1) $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ssi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = \Phi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

2) Sea $Z \equiv \theta$ (variable aleatoria degenerada); es decir, $P(Z = \theta) = 1$ y $P(Z = z) = 0$ para todo $z \neq \theta$, de modo que la fda de Z esta dada por,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < \theta, \\ 1, & \text{si } z \geq \theta. \end{cases}$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

En este caso, se tiene que,

$$\begin{aligned} Z_n \xrightarrow{d} Z &\iff P(Z_n \leq z) \rightarrow P(Z \leq z) \quad \forall z \neq \theta \\ &\iff P(Z_n \leq z) \rightarrow 0 \quad \forall z < \theta \\ &\quad \rightarrow 1 \quad \forall z > \theta. \end{aligned}$$

Aplicación: Sea $\{Z_n; n \leq 1\}$ tal que $P(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n}$ y $P(Z_n = \theta + n^2) = \frac{1}{n}$. Entonces, $Z_n \xrightarrow{d} Z$; en efecto,

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < \theta, \\ 1 - \frac{1}{n}, & \text{si } \theta \leq z < \theta + n^2, \\ 1, & \text{si } z \geq \theta + n^2 \end{cases}$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < \theta, \\ 1, & \text{si } z > \theta \end{cases}$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = F_Z(z) \quad \forall z \neq \theta.$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

3) Sea $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, donde $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$. Entonces, $T_n = n(\theta - Z_n) \xrightarrow{d} T \sim \exp(1/\theta)$.

Demostración: Vimos que,

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < 0, \\ \left(\frac{z}{\theta}\right)^n, & \text{si } 0 \leq z < \theta, \\ 1, & \text{si } z \geq \theta. \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) &= P(T_n \leq t) = P(n(\theta - Z_n) \leq t) \\ &= P(Z_n \geq \theta - t/n) \\ &= 1 - P(Z_n \leq \theta - t/n) \\ &= 1 - F_{Z_n}(\theta - t/n). \end{aligned}$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Reemplazando $F_{Z_n}(z)$ evaluada en $z = \theta - \frac{t}{n}$ en esta última expresión, se tiene que,

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) &= \begin{cases} 1, & \text{si } \theta - \frac{t}{n} < 0 \Leftrightarrow t > n\theta, \\ 1 - \left(1 - \frac{t}{n\theta}\right)^n, & \text{si } 0 \leq \theta - \frac{t}{n} < \theta \Leftrightarrow 0 < t \leq n\theta, \\ 0, & \text{si } \theta - \frac{t}{n} \geq \theta \Leftrightarrow t \leq 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0, \\ 1 - \left(1 - \frac{t}{n\theta}\right)^n, & \text{si } 0 < t \leq n\theta. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F_{T_n}(t) &= \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0, \\ 1 - e^{-t/\theta}, & \text{si } 0 < t < \infty, \end{cases} \\ &= F_T(t), \quad \text{donde } T \sim \exp(1/\theta). \end{aligned}$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Teorema 1.1

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatoria y Z una variable aleatoria que no depende de n .

(a) $Z_n \xrightarrow{d} Z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t)$ para todo t en algún intervalo que contenga el 0 y donde las fgm's existen.

(b) $Z_n \xrightarrow{d} Z \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi_Z(t)$ para todo t , donde $\varphi_{Z_n}(t)$ es la f.c. de Z_n , $n \geq 1$, y $\varphi_Z(t)$ es la f.c. de Z .

Demostración 1.1

Omitida! (T. de H-B y T. de cont. de P-L; ver el libro de Barry James)

Nota: Si $\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \dots$ son vectores aleatorias p -dimensionales, entonces,
 $\mathbf{Z}_n \xrightarrow{d} \mathbf{Z} \iff \mathbf{a}^\top \mathbf{Z}_n \xrightarrow{d} \mathbf{a}^\top \mathbf{Z}$ para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$.
(Ver Teorema de Cramer-Wold).

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplos

Aplicación: Para demostrar que $Z_n \xrightarrow{d} Z$ es suficiente probar que $M_{Z_n}(t) \rightarrow M_Z(t)$ (o $\varphi_{Z_n}(t) \rightarrow \varphi_Z(t)$), cuando $n \rightarrow \infty$.

Ejemplo 1.2

1) $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(\mu, \sigma^2) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

2) Sea $Z_n \sim \text{Bin}(n, p_n)$, donde $np_n = \lambda > 0$ para todo $n = 1, 2, \dots$.
Entonces, $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim P(\lambda)$.

Demostración: Como $M_Z(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$, $t \in \mathbb{R}$, basta con probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Por otro lado,

$$M_{Z_n}(t) = \{1 + p_n(e^t - 1)\}^n = \left\{1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}\right\}^n \quad (p_n = \lambda/n)$$

$$\implies \lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}\right\}^n = e^{\lambda(e^t - 1)} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

3) Sea $Z_n \sim P(n)$, $n \geq 1$; por ejemplo, $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$, donde, para cada $n \geq 1$, $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} P(1)$. Entonces,

$$T_n = \frac{Z_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} T \sim N(0, 1), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Note que $E(Z_n) = \text{Var}(Z_n) = n$, de modo que $E(T_n) = 0$ y $\text{Var}(T_n) = 1$.

Demostración: La definición de la fgm de T_n implica que,

$$M_{T_n}(t) = E \left\{ e^{t \left(\frac{Z_n - n}{\sqrt{n}} \right)} \right\} = e^{-t\sqrt{n}} M_{Z_n}(t/\sqrt{n}), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $M_{Z_n}(s) = e^{n(e^s - 1)}$ $s \in \mathbb{R}$, ya que $Z_n \sim P(n)$. Luego,

$$M_{T_n}(t) = e^{-t\sqrt{n}} e^{n(e^{t/\sqrt{n}} - 1)} = e^{nh(t/\sqrt{n})},$$

donde $h(t/\sqrt{n}) = e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} - \frac{t}{\sqrt{n}} - 1$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Una expansión de Taylor de segundo orden de $e^x|_{x=t/\sqrt{n}}$ alrededor de 0 implica que,

$$\begin{aligned}h(t/\sqrt{n}) &= 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{t^2}{(\sqrt{n})^2} + \frac{1}{6} \frac{t^3}{(\sqrt{n})^3} e^{\xi \frac{t}{\sqrt{n}}} - \frac{t}{\sqrt{n}} - 1 \\&= \frac{1}{2} \frac{t^2}{n} + \frac{1}{6} \frac{t^3}{n^{3/2}} e^{\xi \frac{t}{\sqrt{n}}},\end{aligned}$$

donde $0 < \xi < 1$. Así, multiplicando por n , se tiene que,

$$\begin{aligned}nh(t/\sqrt{n}) &= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6} \frac{t^3}{\sqrt{n}} e^{\xi \frac{t}{\sqrt{n}}} \rightarrow \frac{1}{2}t^2, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty \\ \implies M_{T_n}(t) &= e^{nh(t/\sqrt{n})} \rightarrow e^{t^2/2}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

donde $M_T(t) = e^{t^2/2}$ es la fgm de $T \sim N(0, 1)$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Tarea: Si $Z_n \sim \chi_n^2$, $n \geq 1$, demuestre que $(Z_n - n)/\sqrt{2n} \xrightarrow{d} N(0, 1)$, cuando $n \rightarrow \infty$. Pruebe también que $Z_n/n \xrightarrow{P} 1$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 1.2

Si $Z_n \xrightarrow{d} Z$, entonces $g(Z_n) \xrightarrow{d} g(Z)$ para toda función continua g .

Demostración 1.2

Omitida! (usa el T. de H-B y el T. de Cont. de P-L)

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplos

Ejemplo 1.3

1) Si $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, donde $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$, vimos que

$$T_n = n(\theta - Z_n) \xrightarrow{d} T \sim \exp(1/\theta), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Entonces, por Teorema 1.2 se tiene que,

$$g(T_n) = \frac{T_n}{\theta} \xrightarrow{d} \frac{T}{\theta} \sim \exp(1), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

2) Si $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces, $\frac{Z_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} \frac{Z - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ y, por tanto, $\left(\frac{Z_n - \mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow{d} \left(\frac{Z - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_1^2$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Teorema del límite central (TLC)

Teorema 1.3

Sea X_1, X_2, \dots una secuencia de variables aleatorias iid con media $E(X_1) = \mu$ y varianza $0 < \text{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Entonces,

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

donde $\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\} dt$ es la fda de $Z \sim N(0, 1)$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Demostración 1.3

Defina $Y_i = (X_i - \mu) / \sigma$, $i = 1, 2, \dots$. La secuencia Y_1, Y_2, \dots son variables aleatorias iid con $E(Y_1) = 0$ y $\text{Var}(Y_1) = E(Y_1^2) = 1$. Sea $M_{Y_1}(t)$ la fgm común de Y_1, Y_2, \dots , la cual se supone que existe para $|t| < \sigma h$, algún $h > 0$. Vimos que si la fgm de una variable aleatoria Y_1 existe en un intervalo que contiene el cero, entonces la expansión Taylor de alrededor de cero produce que,

$$M_{Y_1}(s) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \underbrace{M_{Y_1}^{(k)}(0)}_{E(Y_1^k)} \frac{s}{k!} = 1 + \frac{s^2}{2} + \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} M_{Y_1}^{(k)}(0) \frac{s}{k!}}_{\text{resto}=r(s)}, \quad (*)$$

ya que $M_{Y_1}^{(1)}(0) = E(Y_1) = 0$ y $M_{Y_1}^{(2)}(0) = E(Y_1^2) = 1$; y donde $r(s)/s^2 \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow 0$ de acuerdo con el Teorema de Taylor.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Por otro lado, en términos de las variables estandarizadas Y_1, \dots, Y_n , tenemos que,

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Luego, la fgm de Z_n está dada por,

$$\begin{aligned} M_{Z_n}(t) &= M_{\sum_{i=1}^n Y_i/\sqrt{n}}(t) \\ &= M_{\sum_{i=1}^n Y_i}(t/\sqrt{n}) \\ &= \{M_{Y_1}(t/\sqrt{n})\}^n \\ &= \left\{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + r \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n \quad \text{por } (*) \\ &= \left\{1 + \frac{1}{n} \left(\frac{t^2}{2} + nr \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right\}^n. \end{aligned}$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Finalmente, tomado limite cuando $n \rightarrow \infty$, se tiene que,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} M_{Z_n}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{t^2}{2} + nr \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) \right\}^n \\ &= \exp\{t^2/2\},\end{aligned}$$

ya que $nr(t/\sqrt{n}) = t^2 r(t/\sqrt{n}) / (t/\sqrt{n})^2 \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Nota: La demostración presupone la existencia de la fgm de la secuencia X_1, X_2, \dots lo cual limita el alcance del TLC. Una demostración similar puede realizarse en base a la función carastarística la cual siempre existe, extendiendo la aplicación del TLC a cualquier secuencias de variables aleatorias iid con segundo momento finito.

Nota: Similarmente, si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ es una secuencia vectores aleatorios p -dimensionales iid con $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X}_1)$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \text{Var}(\mathbf{X}_1)$ (finita), entonces $\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} N_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Aplicación: Para " n lo suficientemente grande", se tiene que,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \simeq N(0, 1) \text{ o, equivalentemente, } \bar{X}_n \simeq N(\mu, \sigma^2/n);$$

es decir, para " n lo suficientemente grande",

$$\begin{aligned} P(\bar{X}_n \leq x) &= P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{n}(x - \mu)}{\sigma}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(x - \mu)}{\sigma}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplo 1.4

1) Sea X_1, X_2, \dots una secuencia de variables aleatorias iid $Bern(p)$.

Note que $E(X_1) = p$ y $Var(X_1) = p(1 - p)$ son ambos finitos. Además, en este caso, se debe notar que, $\sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(n, p)$, $n = 1, 2, \dots$, es una secuencia de variables aleatorias discretas.

Sin embargo, por el TLC se tiene que,

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Es decir, para "n lo suficientemente grande" el TLC permite aproximar la distribución $Bin(n, p)$ por una distribución $N(np, np(1 - p))$, de modo que si $T_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(n, p)$ y $k_1 < k_2$ son enteros no negativos, entonces,

$$P(k_1 \leq S_n \leq k_2) \simeq \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Nota: Aplicando la denominada "corrección por continuidad", se tiene que,

$$P(k_1 \leq T_n \leq k_2) \simeq \Phi\left(\frac{k_2 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Por ejemplo, si $n = 36$ y $p = 0.5$, un cálculo exacto da,

$$P(T_n \leq 21) = \sum_{k=0}^{21} \binom{36}{k} (0.5)^{36} = 0.8785$$

La aproximación sin la corrección por continuidad", da,

$$P(T_n \leq 21) \simeq \Phi\left(\frac{21 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{21 - 18}{3}\right) = \Phi(1) = 0.8413.$$

Si se aplica la corrección por continuidad", se tiene,

$$P(T_n \leq 21) \simeq \Phi\left(\frac{21.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{21.5 - 18}{3}\right) = \Phi(1.17) = 0.879,$$

la cual es mucho más cercana al valor exacto.

Nota: El resultado sobre la aproximación de la binomial por una normal se conoce como Aproximación (o Teorema) de Demoivre-Laplace.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

2) Si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias iid χ_1^2 , entonces,

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Note que $\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_n^2$, con media n y varianza $2n$, $n = 1, 2, \dots$, y para " n lo suficientemente grande" se tiene que, $\sum_{i=1}^n X_i \simeq N(n, 2n)$.

3) Si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias iid $P(1)$, entonces,

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0, 1), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

En este caso, $\sum_{i=1}^n X_i \sim P(n)$, con media y varianza n , $n = 1, 2, \dots$, y para " n lo suficientemente grande" se tiene que, $\sum_{i=1}^n X_i \simeq N(n, n)$.

etc.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Otros teoremas límites importantes

Vimos que tanto la convergencia en media cuadrática como la convergencia casi seguramente implican la convergencia en probabilidad. El siguiente resultado establece que la convergencia en probabilidad implica la convergencia en distribución.

Teorema 1.4

Si $Z_n \xrightarrow{P} Z \implies Z_n \xrightarrow{d} Z$.

Demostración 1.4

Se verá más despues!

Teorema 1.5

$Z_n \xrightarrow{P} \theta \iff Z_n \xrightarrow{d} \theta$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Demostración 1.5

(\implies) Suponga que $Z_n \xrightarrow{P} \theta$. Entonces, por definición de convergencia en probabilidad, se tiene que,

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \quad 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\theta - \varepsilon < Z_n < \theta + \varepsilon) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{P(Z_n < \theta + \varepsilon) - P(Z_n < \theta - \varepsilon)\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < \theta + \varepsilon) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq \theta - \varepsilon),\end{aligned}$$

lo cual se ocurre si, y sólo si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < \theta + \varepsilon) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq \theta - \varepsilon) = 0.$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Es decir, si, y sólo si,

$$\begin{aligned} (*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq z) &= \begin{cases} 0, & \text{si } z < \theta, \\ 1, & \text{si } z > \theta, \end{cases} \\ &= F_Z(z), \quad \forall z \neq \theta, \end{aligned}$$

donde $Z = \theta$ con probabilidad 1. Por lo tanto, $Z_n \xrightarrow{d} Z \equiv \theta$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

(\Leftarrow) Suponga, ahora, que $Z_n \xrightarrow{d} Z \equiv \theta$. Entonces, por la definición de convergencia en distribución, debe tenerse que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < \theta, \\ 1, & \text{si } z > \theta, \end{cases}$$

para todo $z \neq \theta$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(\theta - \varepsilon < Z_n < \theta + \varepsilon) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n < \theta + \varepsilon) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq \theta - \varepsilon) \\ &= 1 - 0 \quad (\text{por } (*)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

Nota: La extensión de los Teoremas 1.4 y 1.5 al caso p -dimensional es inmediata.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Aplicación: Para demostrar que $Z_n \xrightarrow{P} \theta$, es suficiente probar que $Z_n \xrightarrow{d} \theta$

Ejemplo 1.5

Si $\varphi_{Z_n}(t) = E(e^{itZ_n}) \rightarrow e^{it\theta}$, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces, por la parte (b) del Teorema 1.1, se tiene que $Z_n \xrightarrow{d} \theta$ y, por lo tanto, el Teorema 1.5 implica que $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

Con este resultado, se puede discutir la demostración de la LDGN sin tener que suponer la existencia del segundo momento para la secuencia de variables aleatorias X_1, X_2, \dots iid con media finita μ . En efecto, la función característica de $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$ es,

$$\varphi_{\bar{X}_n}(t) = \{\varphi_{X_1}(t/n)\}^n \stackrel{(**)}{=} \left\{ 1 + i\mu \frac{t}{n} + o(1/n) \right\}^n,$$

donde $no(1/n) = o(1) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

La igualdad (**) se debe al uso de una expansión de Taylor de primer orden alrededor de cero para $\varphi_{X_1}(t/n)$; es decir,

$$\varphi_{X_1}(t/n) = \varphi_{X_1}(0) + \varphi'_{X_1}(0)(t/n) + o(1/n), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde $\varphi_{X_1}(0) = 1$ y $\varphi'_{X_1}(0) = i\mu$. Así, el resultado se obtiene al aplicar el siguiente lema:

Lema 1.1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right\}^n = e^\lambda.$$