# Sucesiones

**Introducción al Cálculo - MAT1107**

Rodrigo Vargas

[1] **Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile**
[2] **LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile**

22 de Mayo de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

## Definición.

Una sucesión de números reales es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que asocia a cada número natural $n$ un número real $f(n) = f_n$, llamado el $n$-ésimo término de la sucesión.

Una sucesión es una lista de números que podemos escribir como

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

en donde los puntos indican que la lista continua.
Cuando no sea confuso, nos referiremos a dicha sucesión utilizando la expresión $\{f_n\}$ (con el entendimiento de que el índice $n$ varía sobre todos los números naturales). También se usa la notación $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

**EJEMPLO 1** La sucesión cuyos términos son

$$1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$$

es la sucesión $x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ dada por $x_n = 1$.

**EJEMPLO 2** La sucesión de naturales pares

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

Podemos comunicar esta sucesión de tres maneras distintas:

1. Podría comunicarse precisamente de esa manera: "Considere la sucesión de naturales pares".
2. Quizás más directo sería dar una fórmula para todos los términos de la sucesión: "Considere la sucesión cuyo enésimo término es $x_n = 2n$."
3. O de forma recursiva: "Considere la sucesión cuyo primer término es 2 y cuyo enésimo término es 2 más el $(n-1)$-énimo término", es decir, $x_n = 2 + x_{n-1}$.

**EJEMPLO 3** El número factorial es una sucesión que se define de manera recursiva:

$$0! = 1\,, \quad 1! = 1\,, \quad n! = n \cdot (n-1)!\,.$$

**Observación** A menudo, una fórmula explícita es la mejor. Sin embargo, con frecuencia, es preferible una fórmula que relacione el enésimo término con algún término precedente. Dichas fórmulas se llaman fórmulas de recursión y generalmente serán más eficientes si se usa una computadora para generar los términos.

# Sucesiones

**EJEMPLO 4 Progresión aritmética.** Una sucesión que es bastante sencilla es aquella en que cada término se obtiene a partir del termino anterior sumando una cantidad fija. Estas son llamadas progresiones aritméticas. La sucesión

$$c, c+d, c+2d, c+3d, c+4d, \ldots, c+(n-1)d, \ldots$$

es una progresión aritmética general. El número $d$ es llamado la diferencia de la progresión.
Por ejemplo, si $c = 3$ y $d = 5$ entonces los términos de la sucesión son

$$3, 8, 13, 18, \ldots$$

El $n$-ésimo término de esta sucesión es

$$x_n = c + (n-1) \cdot d = 3 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 2\,.$$

# Sucesiones



Toda progresión aritmética se puede escribir por la fórmula

$$x_n = c + (n-1)d$$

o con la fórmula recursiva

$$x_1 = c \,, \qquad x_n = x_{n-1} + d \,.$$

**EJEMPLO 5** **Progresión Geométrica.** Una variante de la progresión aritmética se obtiene reemplazando la adicción de una cantidad fija por la multiplicación de una cantidad fija. Estas sucesiones son llamadas progresiones geométricas. La sucesión

$$c, cr, cr^2, cr^3, cr^4, \ldots, cr^{n-1}, \ldots$$

es una progresión geométrica general. El número $r$ es llamado la razón de la progresión geométrica.

Por ejemplo, si $c = 3$ y $r = \frac{1}{2}$, entonces los términos de la sucesión son

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots, \frac{3}{2^{n-1}}, \ldots$$

El término general de la sucesión es

$$x_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

# Sucesiones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Toda progresión geométrica se puede escribir por la fórmula

$$x_n = cr^{n-1}$$

o por la fórmula recursiva

$$x_1 = c \,, \qquad x_n = r \cdot x_{n-1} \,.$$

**EJEMPLO 6** **Iteración.** Los ejemplos de progresiones aritméticas y geométricas son un caso especial de una proceso llamado iterativo. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función real y $c \in X$. Definimos la sucesión iterativa cuyos términos son

$$c, f(c), f(f(c)), f(f(f(c))), f(f(f(f(c)))), \ldots$$

Si $f$ es una función de la forma $f(x) = x + b$, entonces el resultado de esta iteración es una progresión aritmética. Si $f$ es una función de la forma $f(x) = ax$, entonces el resultado de esta iteración es una progresión geométrica.
Una fórmula recursiva que representa este proceso iterativo es

$$x_1 = c\,, \qquad x_n = f(x_{n-1})\,.$$

# Sucesiones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Por ejemplo, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ y tomamos $c = \frac{1}{2}$. Realizando las iteraciones obtenemos

$$
\begin{aligned}
x_1 &= c = \frac{1}{2} \\
x_2 &= f(c) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\
x_3 &= f(x_2) = f(1) = 2 \\
x_4 &= f(x_3) = f(2) = 4 \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

lo cual es una progresión geométrica.

## Definición.

Dada una sucesión $\{x_n\}$ podemos construir una nueva sucesión sumando los términos

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 \\ s_2 &= x_1 + x_2 \\ s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ s_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

El proceso se puede escribir por la fórmula recursiva:

$$s_1 = x_1 \,, \qquad s_n = s_{n-1} + x_n \,.$$

La nueva sucesión es llamada la **sucesión de sumas parciales** de la sucesión $\{x_n\}$.

**EJEMPLO 7** Considere la sucesión $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. La sucesión de sumas parciales para esta sucesión es

$$
\begin{aligned}
s_1 &= x_1 = \frac{1}{2} \\
s_2 &= x_1 + x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
s_3 &= x_1 + x_2 + x_3 = s_2 + x_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\
s_4 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = s_3 + x_4 = \frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

El término general de la sucesión de sumas parciales es

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^n}\,.$$