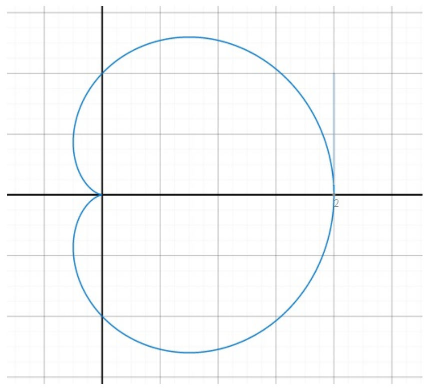
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Primer Semestre de 2015

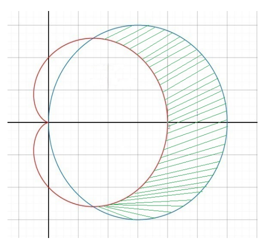
UNA SOLUCIÓN DEL EXAMEN
MAT1620 $*$ Cálculo II

1. Dada la curva de ecuación en coordenadas polares $r = (1 + \cos\theta)$.

   (a) Hacer un esquema de la gráfica de la curva.
   Solución:



   (b) Calcular el valor del área al exterior de la curva dada pero al interior de la curva $r = 3\cos(\theta)$.
   Solución:
   Se requiere calcular el área achurada de la siguiente figura



Los puntos de intersección de las curvas están dados por la solución de

$$\begin{aligned} 3\cos(\theta) &= 1 + \cos(\theta) \\ \cos(\theta) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

con lo cual para $0 \le \theta \le 2\pi$ tenemos que $\theta = \pi/3,\ 5\pi/3$. Por simetría basta calcular el área de la figura en el primer cudrante ya que el área total es dos veces ésta. Así

$$\frac{\text{Área}}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \big(3\cos(\theta)\big)^2 - \big(1 + \cos(\theta)\big)^2\, d\theta\,,$$

luego

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \int_0^{\pi/3} 9\cos^2(\theta) - 1 - 2\cos(\theta) - \cos^2(\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} 8\cos^2(\theta) - 1 - 2\cos(\theta)\, d\theta \\
&= 8\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \\
&= \pi - \sqrt{3}\,.
\end{aligned}$$

2. Considere la función

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,.$$

(a) Encuentre la serie de Taylor centrada en 0 de f y determine su radio de convergencia.

Solución:

Nótese que si $|x| < 1$ se tiene

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\,,$$

entonces si $|-x^2| < 1$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n}\,,$$

de donde obtenemos que para $|x| < 1$

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{n} \tag{1}$$

y su radio de convergencia es 1.

(b) Use una serie de potencia para expresar en una serie

$$\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\, dx\,.$$

Solución:

Usando la ecuación (1) podemos obtener

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\, dx &= \int_0^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{n}\, dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{1/2} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{n}\, dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left.\frac{x^{2n}}{2n^2}\right|_0^{1/2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{2n+1} n^2}\,.
\end{aligned}$$

(c) Estimar el valor numérico de $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}\, dx$ con 3 decimales de aproximación.

Solución:
Como

$$a_3 = \frac{1}{2^7 3^2} \approx 0,00086\,.$$

Por el criterio del error de series alternantes sabemos que

$$|S - S_2| \leq a_3\,,$$

donde $S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^{2n+1} n^2}$ y S_2 denota la suma parcial hasta 2. Basta sumar los dos primeros términos de la serie.

$$S \approx \frac{1}{8} - \frac{1}{2^5 4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{128} \approx 0,117$$

3. Considere la curva $\mathbf{r}(t) = (2t, 1 - t^2, t^3/3)$.

(a) Encuentre todos t reales tales que el vector tangente es ortogonal a la recta $x = 3t,\ y = 1 + 3t,\ z = t\,.$

Solución:
Nótese que la recta tiene vector dirección $(3, 3, 1)$. Por otro lado el vector tangente a la curva $\mathbf{r}$ es $\vec{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ y como $\mathbf{r}'(t) = (2, -2t, t^2)$, tenemos que

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = \sqrt{(t^2 + 2)^2} = t^2 + 2.$$

Por lo tanto

$$\vec{T}(t) = \frac{1}{t^2 + 2}(2, -2t, t^2)\,. \tag{2}$$

Para mostrar que dos vectores son ortogonales basta ver que el producto punto entre ellos es cero. Luego basta encontrar los valores de t tales que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (\frac{1}{t^2 + 2}(2, -2t, t^2), (3, 3, 1) \rangle \\ &= \frac{2(t^2 - 6t + 6)}{t^2 + 2} \end{aligned}$$

es decir, $0 = t^2 - 6t + 6$ con lo cual $t_1 = 3 + \sqrt{3}$, y $t_2 = 3 - \sqrt{3}$.

(b) Encontrar la curvatura $\kappa(t)$ y el vector normal $\vec{N}(t)$ de la curva.

Solución:
Como $\kappa(t) = \frac{\|\vec{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$ calculamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{T}(t) &= -\frac{2t}{(t^2 + 2)^2}(2, -2t, t^2) + \frac{1}{t^2 + 2}(0, -2, 2t) \\ &= \frac{1}{(t^2 + 2)^2}(-4t, 2t^2 - 4, 4t) \end{aligned} \tag{3}$$

y

$$\begin{aligned} \|\vec{T}'(t)\| &= (t^2 + 2)^{-2}\sqrt{16t^2 + 4t^4 - 16t^2 + 16 + 16t^2} \\ &= (t^2 + 2)^{-2}\sqrt{4t^4 + 16t^2 + 16} \\ &= (t^2 + 2)^{-2}(2t^2 + 4)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Así $\kappa(t) = \frac{2t^2 + 4}{(t^2 + 2)^3}$. Ahora como $\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|}$ y usando las ecuaciones (4) y (3) se tiene que

$$\vec{N}(t) = \frac{1}{2t^2 + 4}(-4t, 2t^2 - 4, 4t)\,.$$

4. Sea $\mathbf{r} : [1, a) \to \mathbb{R}$ con

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\cos(t)}{t^2}\mathbf{i} + \frac{\sin(t)}{t^2}\mathbf{j} + \frac{1}{t^2}\mathbf{k}$$

una curva en el espacio. Determine si el largo de la curva es finito cuando $a \to \infty$.

Solución:

Calculamos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}t^{-2}\cos(t) &= -2t^{-3}\cos(t) - t^{-2}\sin(t)\,,\\
\frac{d}{dt}t^{-2}\sin(t) &= -2t^{-3}\sin(t) + t^{-2}\cos(t)\,,\\
\frac{d}{dt}t^{-2} &= \frac{-2}{t^3}\,.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt}t^{-2}\cos(t)\right)^2 &= 4t^{-6}\cos^2(t) + t^{-4}\sin^2(t) + 4t^{-5}\sin(t)\cos(t)\,,\\
\left(\frac{d}{dt}t^{-2}\sin(t)\right)^2 &= 4t^{-6}\sin^2(t) + t^{-4}\cos^2(t) - 4t^{-5}\sin(t)\cos(t)\,,\\
\left(\frac{d}{dt}t^{-2}\right)^2 &= \frac{4}{t^6}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la longitud de la curva L es

$$L = \int_1^a \sqrt{\left(\frac{d}{dt}t^{-2}\cos(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}t^{-2}\cos(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}t^{-2}\right)^2}\,dt = \int_1^a \sqrt{\frac{8}{t^6} + \frac{1}{t^4}}\,dt\,.$$

Como $\sqrt{\frac{8}{t^6} + \frac{1}{t^4}} \leq \frac{\sqrt{8}}{t^3} + \frac{1}{t^2}$ tenemos que

$$\int_1^a \sqrt{\frac{8}{t^6} + \frac{1}{t^4}}\,dt \leq \int_1^a \frac{\sqrt{8}}{t^3} + \frac{1}{t^2}\,dt\,,$$

y la última integral es convergente cuando $a \to \infty$. Asi el largo es finito cuando $a \to \infty$.