



Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo Semestre del 2020

Modelos Probabilísticos (EYP1027)

Ayudantía 3

1. Se tienen n personas formadas en un círculo, dos de las cuales se llaman Ana y Berta. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana y Berta se encuentren separadas por r personas en la formación?
2. Demuestre que para cualquier partición C_1, C_2, \dots y para cualquier colección de conjuntos A_1, A_2, \dots se cumple que,

a) $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i)$

b) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (Desigualdad de Boole)

c) $P(\cap_{i=1}^n A_i) \geq \sum_{i=1}^n P(A_i) - (n-1)$ (Desigualdad de Bonferroni)

3. Si A_1, \dots, A_n son una familia independiente de conjuntos, demuestre que

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

4. Un par de eventos A and B no pueden ser mutuamente excluyente e independientes a la vez. Demuestre que si $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, entonces:

a) Si A y B son mutuamente excluyente, entonces no son independientes.

b) Si A y B son independientes, entonces no son mutuamente excluyentes.

5. En la serie mundial de béisbol, dos equipos A y B juegan una serie de partidos uno contra otro y el primer equipo que gana un total de tres partidos es el ganador de la serie mundial. Si la probabilidad de que el equipo A gane un partido contra el equipo B es $\frac{1}{3}$

a) Describa el espacio muestral de este experimento.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo A gane la serie mundial?

c) Si la probabilidad de que el equipo A gane cualquier partido es p ($0 < p < 1$). ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario jugar los 5 partidos para determinar al ganador de la serie?

d) Si la serie termina en el cuarto juego, ¿cuál es la probabilidad de que el ganador sea el equipo B ?

6. En clases se demostró que cuando $x \rightarrow \infty$, entonces $F_X(x) \rightarrow 1$, demuestre que si $x \rightarrow -\infty$, entonces $F_X(x) \rightarrow 0$ de esta manera $0 \leq F_X(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

7. Considere la siguiente función,

$$H(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \quad \lambda > 0$$

Demuestre que

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ H(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es función de distribución acumulada (cdf).

8. Para una empresa de buses de pasajeros es importante mantener una buena frecuencia del servicio. El tiempo de recorrido X de un bus, medido en minutos, desde su salida del terminal hasta su regreso a él, tiene función densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} e^{-\frac{1}{30}(x-120)} & \text{si } x > 120 \\ 0 & \text{si } x \leq 120 \end{cases}$$

- Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en menos de t minutos, $t \in \mathbb{R}$
 - Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en más de 3 horas.
 - Un bus inicia su recorrido y tres horas después aún no ha llegado a su destino. Calcule la probabilidad que el bus se demore a lo menos 15 minutos adicionales.
9. Una cdf F_X es estocásticamente más grande que una cdf F_Y si $F_X(t) \leq F_Y(t)$ para toda t y $F_X(t) < F_Y(t)$ para algún t . Demuestre que si $X \sim F_X$ y $Y \sim F_Y$ y se cumple la condición anterior entonces

$$P(X > t) \geq P(Y > t) \quad \text{para todo } t$$

y

$$P(X > t) > P(Y > t) \quad \text{para algún } t$$

esto es, X tiende a ser más grande que Y .