PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2021

Interrogación 3 - MAT1610

1. a) Use integrales para calcular

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} + \frac{k^3}{n^4} \right)$$

Solución:

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} + \frac{k^3}{n^4} \right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} + \left(\frac{k}{n} \right)^3 \right) \\ &= \int_0^1 (x + x^3) dx \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por reconocer la función a integrar.
- (1 punto) por los límites de integración.
- (1 punto) por el valor de la sumatoria.

b) Demuestre que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{33} \leq \int_0^2 \frac{1}{x^5 + 1} dx \leq 2$$

Solución:

Observe que la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^5}$ es decreciente en el intervalo $[0, 2]$, por lo tanto el máximo de la función f en dicho intervalo es $f(0) = 1$, de lo anterior tenemos que

$$\int_0^2 \frac{1}{x^5 + 1} dx \leq 2.$$

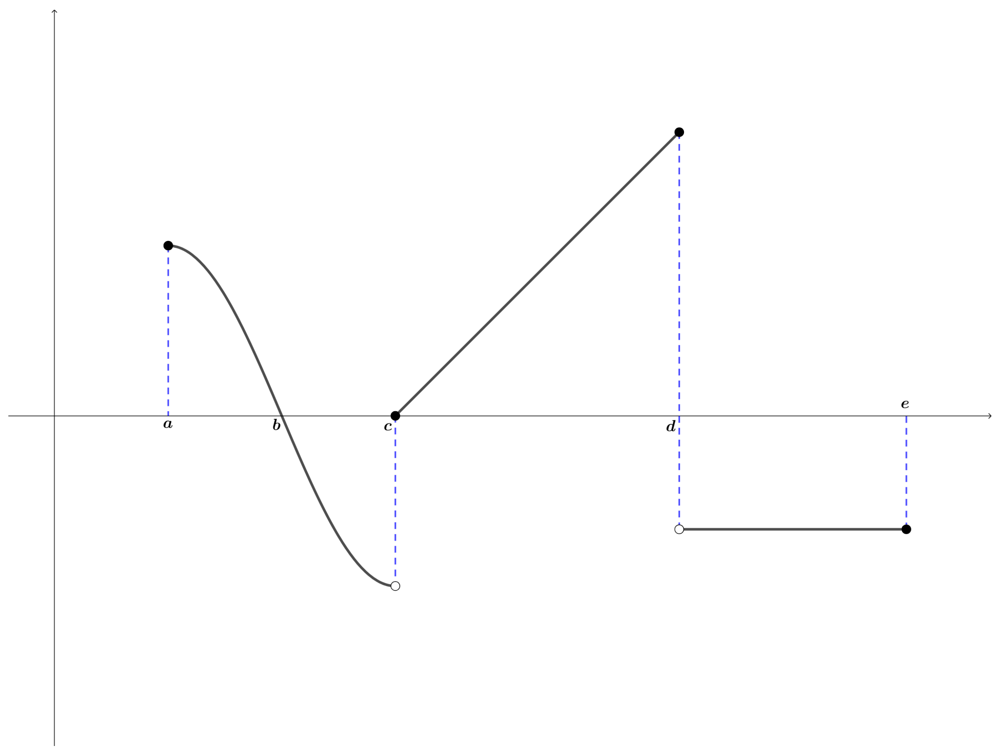
Por otra parte el mínimo de la función en $[0, 1]$ es $f(1) = \dfrac{1}{2}$ y en $[1, 2]$ es $f(2) = \dfrac{1}{33}$, luego

$$\int_0^2 \frac{1}{x^5 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^5 + 1} dx + \int_1^2 \frac{1}{x^5 + 1} dx \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{33}.$$

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por acotar por 2 de forma justificada.
- (1 punto) por separar correctamente.
- (1 punto) por argumentar la cota inferior.

2. La figura muestra el gráfico de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, e]$. Con ella se define la función $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$



Indique los intervalos de crecimiento y concavidad de F.

Solución:
Observe que $F'(x) = f(x)$, por lo tanto F es creciente en donde f es positiva y decreciente donde f es negativa, por lo tanto F es creciente en (a, b) y (c, d), F es decreciente en (b, c) y (d, e). Por otra parte tenemos que F es cóncava hacia arriba en donde $F'' = f'$ es positiva es decir donde f es creciente, análogamente F es cóncava hacia abajo en donde f es decreciente, por lo tanto es cóncava hacia arriba en (c, d) y cóncava hacia abajo en (a, b).

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por argumento que relaciona la monotonía de F con el signo de f.
- (1 punto) por intervalos de creciemiento.
- (1 punto) por intervalos de decreciemiento.
- (1 punto) por argumento que relaciona la concavidad de F con el crecimiento de f.

- (1 punto) por intervalo donde F es cóncava hacia arriba.
- (1 punto) por intervalo donde F es cóncava hacia abajo.

3. a) Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(x)\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))dx$

Solución:

Al usar el cambio de variable $u = \operatorname{sen}(x)$, tenemos que $du = \cos(x)dx$ y, ya que $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, y que $0 \leq u \leq 1$. Por lo tanto

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x)\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))dx = \int_0^1 \operatorname{sen}(u)du = -\cos(u)|_0^1 = -\cos(1) + 1$$

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por el cambio de variable adecuado.
- (1 punto) por plantear la integral en la nueva variable correctamente.
- (1 punto) por el valor de la integral.

b) Demuestre que si a y b son números positivos entonces

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx.$$

Solución:

Al hacer el cambio de variable $u = 1 - x$, obtenemos que $du = -dx$ obteniendo que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_1^0 (1-u)^a u^b(-du) = -\int_0^1 u^b(1-u)^a(-du) = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx.$$

Distribución de puntajes.

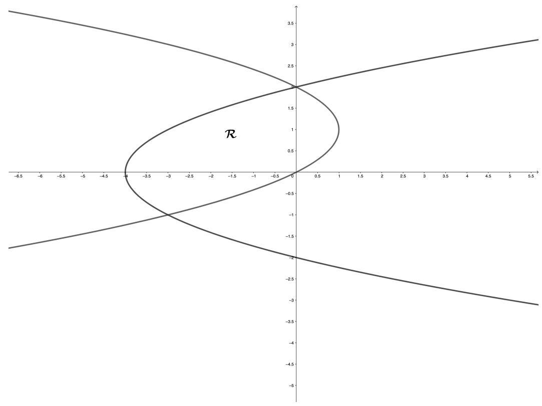
- (1 punto) por el cambio de variable adecuado.
- (1 punto) por plantear la integral en la nueva variable correctamente.
- (1 punto) por usar las propiedades de la integral para llegar a la igualdad planteada.

4. Sean $\mathcal{R}$ la región acotada por las curvas $x = y^2 - 4$ e $x = 2y - y^2$.

a) Calcule el área de la región $\mathcal{R}$.

Solución:

La región $\mathcal{R}$ es la de la figura adjunta



Al igualar $y^2 - 4 = 2y - y^2$, vemos que los puntos de intersección tienen segunda coordenada $y = -1$ e $y = 2$, por lo tanto el área es

$$\int_{-1}^{2} 2y - y^2 - (y^2 - 4)dy = \left(y^2 - \frac{2}{3}y^3 + 4y\right)_{-1}^{2} = 9$$

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por plantear correctamente la función que se debe integrar.
- (1 punto) por los límites de integración correctos.
- (1 punto) por el valor de la integral.

b) Determina el volumen del sólido generado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno a la recta $y = 4$.

Usando cascarones cilíndricos tenemos que el volumen corresponde a

$$\int_{-1}^{2} 2\pi(4 - y)(2y - y^2 - (y^2 - 4))dy = 63\pi.$$

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por plantear correctamente la función que se debe integrar.
- (1 punto) por los límites de integración correctos.
- (1 punto) por el valor de la integral.