Pontificia Universidad Católica de Chile
Bastián Mora - bmor@uc.cl
Matías Fernández - matias.fernandez@uc.cl

MAT1107 - Introducción al Cálculo

Ayudantía 11 - Jueves 02 de junio del 2022

Problema 1. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales. Demuestre que si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente, entonces $n \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución: Demoatraremos por inducción. Para $n = 1$, como a_1 es un número natural, entonces $1 \leq a_1$. Ahora suponiendo que esto se cumple para algún $k \in \mathbb{N}$, es decir, $k \leq a_k$, entonces como la sucesión es estrictamente creciente y es consiste únicamente de números naturales, $a_k + 1 \leq a_{k+1}$, de modo que $k + 1 \leq a_{k+1}$. Así se tiene lo pedido para todo n número natural.

Problema 2. Sea $n \geq k \geq 1$ enteros. Pruebe que $\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}$. Luego, demuestre que

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} i x^{i-1}$$

Solución: Como ya vimos en la ayudantía anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}k &= \frac{n!}{k!(n-k)!}k \\
&= \frac{kn \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)!(n-k)!} \\
&= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= n\binom{n-1}{k-1}
\end{aligned}$$

Ahora usaremos el teorema del binomio:

$$\begin{aligned}
n(1+x)^{n-1} &= n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}1^{n-1-k}x^k \\
&= n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k, \quad \text{haciendo i=k+1} \\
&= n\cdot\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}x^{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}n\binom{n-1}{i-1}x^{i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}ix^{i-1}
\end{aligned}$$

Problema 3. Calcule el valor de

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}$$

Solución: Usamos el teorema del binomio:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k 1^{n-k}=\left(1+\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Problema 4. Encuentre el coeficiente que acompaña el término x^{13} en la expansión de

$$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{17}$$

Puede dejar su respuesta expresada en términos de coeficientes binomiales.

Solución: Usamos el teorema del binomio:

$$\begin{aligned}
\left(x^2+\tfrac{1}{x}\right)^{17} &= \textstyle\sum_{k=0}^{17}\binom{17}{k}\left(x^{-1}\right)^k\left(x^2\right)^{17-k} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{17}\binom{17}{k}x^{34-3k}
\end{aligned}$$

Vemos que tenemos que elegir el coeficiente correspondiente a $k=7$. Luego, el coeficiente buscado es $\binom{17}{7}$

Problema 5. ¿Para qué valores de $n\in\mathbb{N}$ la expansión de $(\frac{1}{x}+x^3)^n$ tiene un término cuadrático?

Solución: Expandimos la expresión usando el teorema del binomio:

$$\begin{aligned}
(x^{-1}+x^3)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^{-1})^{n-k}(x^3)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}x^{k-n}x^{3k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}x^{4k-n}
\end{aligned}$$

Acá nos gustaría que para algún $k \in \{0, 1, ..., n\}$ se tenga que $2 = 4k - n$, o sea, $n = 4k - 2$. Así, necesitamos que n sea de la forma $n = 4k - 2$, con $k \geq 1$ un número natural (es importante que $k \neq 0$), de modo que $0 \leq k \leq n = 4k - 2$.

Problema 6. Sea $a \in (0, 1)$. Demuestre que la sucesión $x_n = a^n$ converge a 0 cuando n tiende a infinito.

Solución: Antes que nada notemos que $a^n \geq 0$ para todo n (se puede verificar usando inducción). Por otro lado, como $0 < a < 1$, entonces $1 < \frac{1}{a}$, o sea, $\frac{1}{a} = 1 + \delta$, para algún $\delta > 0$. Para poder usar la propiedad Arquimediana, antes usaremos la desigualdad de Bernoulli en lo anterior:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n &= (1+\delta)^n \\ &\geq 1 + \delta n \\ &> \delta n \\ &\Rightarrow x_n = a^n < \frac{1}{\delta n} \end{aligned}$$

Ahora tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Para que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, debemos demostrar que existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $|x_n - 0| = a^n < \varepsilon$.

En efecto, tomando $\varepsilon\delta > 0$, por la propiedad Arquimediana obtenemos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon\delta > \frac{1}{n_0}$. Así, para todo $n \geq n_0$:

$$|x_n - 0| = a^n < \frac{1}{\delta n} \leq \frac{1}{\delta n_0} < \varepsilon$$

Problema 7. Usando la definición de límite, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2 + n + 1} = \frac{1}{2}.$$

Solución: Sea $\varepsilon > 0$. Primero,

$$\begin{aligned} \left|\frac{n^2}{2n^2+n+1} - \frac{1}{2}\right| &= \frac{n+1}{2\left(2n^2+n+1\right)} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{2\left(2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}. \end{aligned}$$

Notamos que, para $n \geq 1$,

$$\frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \leq \frac{2}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \leq 1$$

Luego,

$$\left|\frac{n^2}{2n^2+n+1} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{n}$$

Sea $n_0 \geq 1$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Luego, si $n \geq n_0$,

$$\left|\frac{n^2}{2n^2+n+1} - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$