Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 8

1. Considere la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por la siguiente recursión:

$$a_1 = \frac{5}{3} \qquad , \qquad a_{n+1} = (a_n - 1)^2 + 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demuestre que $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, y calcule su límite.

Solución.

- **Primera Solución.** Notemos que $a_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que es una sucesión acotada inferiormente. Veamos que es decreciente. Tenemos que

$$a_2 = (a_1 - 1)^2 + 1 = \left(\frac{5}{3} - 1\right)^2 + 1 = \frac{4}{9} + 1 = \frac{13}{9} \leq \frac{15}{9} = \frac{5}{3} = a_1.$$

Ahora supongamos que $a_{k+1} \leq a_k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Como $a_{k+1} \geq 1$, tenemos que $0 \leq a_{k+1} - 1 \leq a_k - 1$. Podemos elevar al cuadrado esta desigualdad y obtenemos que $(a_{k+1} - 1)^2 \leq (a_k - 1)^2$. Finalmente, sumamos 1 a ambos lados, y obtenemos que $a_{k+2} \leq a_{k+1}$. Esto prueba que la sucesión es decreciente. Como la sucesión es decreciente y está acotada inferiormente, concluimos que es convergente.

Sea L el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L \qquad , \qquad \lim_{n\to\infty} \left((a_n - 1)^2 + 1\right) = \lim_{n\to\infty} \left((a_n)^2 - 2a_n + 2\right) = L^2 - 2L + 2.$$

Como $a_{n+1} = (a_n - 1)^2 + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $L = L^2 - 2L + 2$, y entonces $L^2 - 3L + 2 = 0$. Dicha ecuación cuadrática tiene como soluciones a 1 y a 2. Sin embargo, no es posible que $L = 2$, pues $a_1 < 2$ y la sucesión es decreciente. Por lo tanto, concluimos que $L = 1$.

- **Segunda Solución.** Probaremos por inducción que se cumple lo siguiente:

$$a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}} + 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Si $n = 1$, se cumple que

$$a_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2^0} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Ahora supongamos que la fórmula se cumple para un $k \in \mathbb{N}$, y notemos que

$$a_{k+1} = (a_k - 1)^2 + 1 = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2^{k-1}} + 1 - 1\right)^2 + 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2\cdot 2^{k-1}} + 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2^{(k+1)-1}} + 1.$$

Esto prueba la fórmula. Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2^{n-1}} = 0,$$

pues es una subsucesión de la progresión geométrica con razón $r = \frac{2}{3} < 1$. Por lo tanto, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1,5 punto por verificar que la sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente.

CC 2. 2 puntos por demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente.

CC 3. 1,5 puntos por obtener que el límite de la sucesión satisface la ecuación $L^2 - 3L + 2 = 0$

CC 4. 1 puntos por descartar $L = 2$ y concluir que el límite es $L = 1$.

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < a \leq b$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b.$$

Solución. Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$b = \sqrt[n]{b^n} = \sqrt[n]{0 + b^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{b^n + b^n} = \sqrt[n]{2b^n} = b\sqrt[n]{2}.$$

Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} b\sqrt[n]{2} = b \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = b \cdot 1 = 1.$$

Por el teorema del sándwich, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b.$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 3 puntos por obtener la desigualdad $b \leqslant \sqrt[n]{a^n + b^n} \leqslant b \cdot \sqrt[n]{2}$.

CC 2. 1,5 puntos por calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty} b\sqrt[n]{2} = b$.

CC 3. 1,5 puntos por usar el teorema del Sandwich y concluir que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.