Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2020

Interrogación 5
MAT1107 - Introducción al Cálculo

(1) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función estríctamente creciente, es decir, si $x_1, x_2 \in [a, b]$ y $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

(a) Demuestre que f es invertible. **(1 punto)**

(b) Demuestre que f^{-1} es estríctamente creciente. **(2 puntos)**

Solución.
(a) Si $x_1 \neq x_2$, entonces, o bien $f(x_1) < f(x_2)$, o bien $f(x_1) > f(x_2)$. En cualquier caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$ y, por lo tanto, f es inyectiva.

(b) Sean $y_1 < y_2$ en el dominio de f^{-1}. Supongamos que $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$.
(1 punto hasta un planteo de este tipo)

Como f es estríctamente creciente, se tiene que $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, es decir, $y_1 \geq y_2$. Esto es una contradicción. **(1 punto)**

(2) Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $e^x + e^{-x} \geq 2$. **(3 puntos)**

Solución.
Como $e^x > 0$, la desigualdad es equivalente a

$$e^{2x} + 1 \geq 2e^x,$$

y, por lo tanto, equivalente a

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0.$$

Esto último es equivalente a

$$(e^x - 1)^2 \geq 0,$$

que es verdadera.

- Reducir a una inecuación cuadrática **(2 puntos)**
- Concluir. **(1 punto)**