PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2014

MAT1203 - Algebra Lineal
Interrogación 3 - Lunes 2 de Junio - Solución

1. a) Sea $V = P_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 2. Demuestre que el conjunto

$$U = \{p(x) \in V \text{ tal que } p(1) + p(0) = p(-1)\}$$

es un subespacio de V y encuentre una base de U.

Solución:

Para demostrar que U es un subespacio se prueba que es no vacío, cerrado bajo la suma y cerrado bajo la multiplicación por escalar. (Otra manera es probar que es un conjunto generado).

No vacío: si $p(x) = 0$ entonces $p(1) + p(0) = 0 + 0 = 0 = p(-1)$, luego $p(x) = 0$ pertenece a U.

Suma: si $p, q \in U$, entonces

$$\begin{aligned} (p+q)(1) + (p+q)(0) &= p(1) + q(1) + p(0) + q(0) \\ &= p(1) + p(0) + q(1) + q(0) \\ &= p(-1) + q(-1) \\ &= (p+q)(-1). \end{aligned}$$

Multiplicación por escalar: si $p \in U$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} (\alpha p)(1) + (\alpha p)(0) &= \alpha p(1) + \alpha p(0) \\ &= \alpha(p(1) + p(0)) \\ &= \alpha p(-1) \\ &= (\alpha p)(-1). \end{aligned}$$

Por otro lado $a + bx + cx^2 \in U$ si y sólo si $a + b + c + a = a - b + c$ si y sólo si $a = -2b$.

Entonces los polinomios en U son de la forma $-2b + bx + cx^2$ para $b.c \in \mathbb{R}$. Luego $U = \text{Gen}\{x - 2, x^2\}$.

El conjunto $\{x - 2, x^2\}$ es una base de U pues es L.I.: $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) Sean $B_1 = \{1+x, 1-x, 1+x^2\}$ y B_2 bases de $P_2(\mathbb{R})$ tales que para todo $p \in P_2(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} [\, p\,]_{B_1} = [\, p\,]_{B_2}.$$

Determine los polinomios que forman la base B_2.

Solución:

Sea $B_2 = \{q_1(x), q_2(x), q_3(x)\}$.

Una manera es calcular la inversa de la matriz cambio de base:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Entonces reinterpretando, en la base B_2 queda:

$q_1(x) = 2(1+x) - 2(1-x) + (1+x^2) = 1 + 4x + x^2.$
$q_2(x) = -(1+x) + 2(1-x) - (1+x^2) = -3x - x^2.$
$q_3(x) = (1+x) - (1-x) + (1+x^2) = 1 + 2x + x^2.$

Otra manera es interpretar la matriz cambio de base dada. Entonces:

$1 + x = q_1(x) + q_2(x)$, $1 - x = q_2(x) + q_3(x)$ y $1 + x^2 = -q_1(x) + 2q_3(x)$.

Despejando se obtiene lo mismo que antes.

2. Sea $L : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$L(1+x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ L(1+x+x^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } L(1+2x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine $L(a+bx+cx^2)$ para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Solución:

Usando que L es lineal se tiene que $L(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $L(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $L(x^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Entonces $L(a+bx+cx^2) = aL(1) + bL(x) + cL(x^2) = \begin{bmatrix} a \\ b-2c \end{bmatrix}$.

b) Determine la matriz que representa a L con respecto a las bases $\{1, x, x+x^2\}$ y $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$.

Solución:

Usando lo anterior se tiene que:

$L(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$L(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$L(x+x^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto la matriz pedida es $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Sea $P_3(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a 3, y

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

la matriz que representa la transformación lineal $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ con respecto a las bases B_1 en dominio y B_2 en recorrido, dadas por:

$B_1 = \{1, 1+x, 1+x^2, 1-x^3\}$ y $B_2 = \{1, 2x, 3x^2, 4x^3\}$.

a) Encuentre una base de Ker (Núcleo) de T y una base de Im (Rango) de T.
Solución:

Al escalonar la matriz queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El Ker de la matriz está generado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Luego el Ker de la transformación está generado por $1 - (1 - x^3) = x^3$.

La Im de la matriz está generada por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Luego la Im de la transformación está generada por $1, 1+2x+3x^2+4x^3, 1+6x^2$.

b) Determine todos los polinomios no nulos p en $P_3(\mathbb{R})$ tales que $T(p) = 6p$.
Solución:

Considerando la matriz que representa a la tranformación lineal se busca a $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot [p]_{B_1} = 6[p]_{B_2}.$$

Se tiene que $[p]_{B_1} = \begin{bmatrix} a-b-c+d \\ b \\ c \\ -d \end{bmatrix}$ y $[p]_{B_2} = \begin{bmatrix} a \\ b/2 \\ c/3 \\ d/4 \end{bmatrix}$.

Resolviendo queda $a = b = d = 0$.
Entonces $p(x)$ debe ser un múltiplo no nulo del polinomio x^2.

Otra manera es que al interpretar la matriz dada se tiene que:

$T(1) = 1$, $T(1 + x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$, $T(1 + x^2) = 1 + 6x^2$ y $T(1 - x^3) = 1$.

Entonces $T(1) = 1$, $T(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3$, $T(x^2) = 6x^2$ y $T(x^3) = 0$.

La matriz que representa a T con respecto a las bases canónicas es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Como es triangular inferior los valores propios son 1, 2, 6 y 0. Se busca entonces el espacio propio E_6 el cual está generado por el polinomio x^2, y se toma un múltiplo no nulo de él.

4. *a*) Diagonalice la siguiente matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ y encuentre una matriz N tal que $N^3 = M$.

Solución:

Los valores propios de la matriz son 1 y 3.

$E_1 = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$

$E_3 = \mathrm{Ker} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

Luego la diagonalización está dada por $M = PDP^{-1}$ con $P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Si se considera a $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{3} \end{bmatrix}$ se tiene que:

$M = PDP^{-1} = PR^3P^{-1} = \left(PRP^{-1}\right)^3$, luego basta tomar $N = PRP^{-1}$.

b) Sea A una matriz de 2×2 de rango 1 tal que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. ¿ Es A diagonalizable? Justifique.

Solución:

Del enunciado se tiene que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Dado que A es de rango 1, entonces existe $u \neq \vec{0}$ tal que $Au = \vec{0} = 0 \cdot u$.

Como u y $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ son vectores propios asociados a valores propios distintos, entonces son dos vectores linealmente independientes.

Luego al existir una base de vectores propios de A se tiene que A es diagonalizable. (También basta con decir que como A tiene dos valores propios distintos, entonces es diagonalizable.)

c) Sea A matriz de 5×5 tal que $A^t = -A$ y q el polinomio dado por $q(x) = 2 - x^2 + 4x^3$. Demuestre que 2 es valor propio de la matriz $q(A)$.

Solución:

Como $A^t = -A$, entonces $|A^t| = -|A|$, pero $|A^t| = |A|$, entonces $|A| = 0$.

Entonces existe $u \neq \vec{0}$ tal que $Au = 0 \cdot u$.

Luego $q(A) \cdot u = (2I - A^2 + 4A^3)u = 2u - \vec{0} + \vec{0} = 2u$.

Por lo tanto 2 es un valor propio de $q(A)$.