Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2020

Interrogación 1
MAT1107 - Introducción al Cálculo

(1) Resuelva la inecuación

$$|x+1| \leq \sqrt{x^2-4x+4}+3.$$

(3 puntos)

Solución.
Primera opción: Notamos que esto se puede reescribir como

$$|x+1| \leq \sqrt{(x-2)^2}+3 = |x-2|+3. \tag{1}$$

Esta desigualdad es siempre verdadera por desigualdad triangular:

$$|x+1| = |x-2+3| \leq |x-2|+|3| = |x-2|+3.$$

El conjunto solución es, por lo tanto, igual a $\mathbb{R}$.

Puntaje:

Simplificar correctamente el lado derecho: 1 puntos.

Resolver la inecuación (1) por desigualdad triangular u otro método: 1 punto.

Entregar el conjunto solución: 1 punto.

Segunda opción: Como ambos lados son positivos, podemos elevar al cuadrado: nuestra inecuación es equivalente a

$$(x+1)^2 \leq x^2-4x+4+6\sqrt{(x-2)^2}+9.$$

Simplificando, llegamos a

$$x-2 \leq |x-2|. \tag{2}$$

Esto siempre se cumple ya que $y \leq |y|$ para todo $y \in \mathbb{R}$. El conjunto solución es, por lo tanto, igual a $\mathbb{R}$.

Puntaje:

Justificar elevar al cuadrado: 0.5 puntos.

Llegar a la inecuación (2): 1 punto.

Resolver (2) usando la desigualdad $y \leq |y|$ u otro método: 0.5 puntos.

Entregar el conjunto solución: 1 punto.

(2) Demuestre que, para todo entero $n \geq 2$, se cumple la desigualdad

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

(3 puntos)

Solución.

Verificamos el caso $n = 2$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$, lo que es correcto.

Planteamos nuestra hipotesis de inducción: suponemos que, para algún $k \geq 2$, se cumple

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \cdots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \cdots + \frac{1}{2k+2} \\ &= S_k + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \\ &= S_k + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > \frac{13}{24} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}, \end{aligned} \tag{3}$$

donde usamos la hipótesis de inducción en el último paso.

Finalmente, observamos que $\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$. Luego, la desigualdad se cumple para $k + 1$.

Luego, por inducción, la desigualdad se cumple para todo $n \geq 2$.

Puntaje:

Verificar el caso $n = 2$: 0.5 puntos

Plantear la hipótesis de inducción: 0.5 puntos

Llegar a (3) o algo similar donde se aplique la H.I.: 1 punto

Concluir que se cumple la desigualdad para $n = k + 1$: 0.5 puntos

Invocar el principio de inducción para concluir: 0.5 puntos