Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Enero 2023

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Pauta Interrogación 3

1. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $g(0) = -1$ y $g'(0) = 2$. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = xy \cdot g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(2, 2, f(2, 2))$.

Solución: Para determinar la ecuación del plano tangente debemos calcular las derivadas parciales de f en el punto $(2, 2)$ usando la regla del producto y la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= y \cdot g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + xy \cdot g'\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \frac{-1}{x^2} \\
\frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) &= 2g(0) + 4g'(0) \cdot -\frac{1}{4} = -4 \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= x \cdot g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + xy \cdot g'\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) &= 2g(0) + 4g'(0) \cdot \frac{1}{4} = 0
\end{aligned}$$

Como $f(2, 2) = 4 \cdot g(0) = -4$, la ecuación del plano tangente es

$$z = -4 - 4(x - 2) + 0(y - 2)$$

Simplificando:

$$z = -4x + 4$$

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ en general.
- (1 pto.) Por evaluar $\frac{\partial f}{\partial x}$ en el punto $(2, 2)$.
- (1 pto.) Por calcular $\frac{\partial f}{\partial y}$ en general.

- (1 pto.) Por evaluar $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(2,2)$.
- (2 pts.) Por escribir la ecuación del plano tangente (solo si antes calculó las derivadas parciales).

2. *a*) Suponga que la altura de una colina sobre el nivel del mar está dada por $z = 1000 - 0,01x^2 - 0,02y^2$. Si está en el punto $(60,100)$ ¿En qué dirección cambia más rápidamente la elevación? ¿Cuál es la tasa máxima de cambio de elevación en este punto?

   b) Clasifique los puntos críticos de la función:

$$f(x,y) = 7x - 8y + 2xy - x^2 + y^3.$$

Solución:

a) La dirección en la que el valor de la función aumenta más rápidamente es la dirección del gradiente y la tasa de cambio en esa dirección es la norma del gradiente.

$$\nabla z(60,100) = \langle -1{,}2, -4\rangle, \quad ||\nabla z(60,100)|| = \sqrt{17{,}44}$$

Asignación de Puntaje:

- (0.5 pts.) Por calcular el gradiente en en el punto.
- (1 pto.) Por decir que la dirección de máxima variación es la dirección del gradiente.
- (0.5 pts.) Por calcular la norma del gradiente.
- (1 pt.) Por decir que la tasa máxima de cambio es la norma del gradiente.

b) Para encontrar los puntos críticos debemos calcular las derivadas parciales e igualarlas a 0.

$$\begin{aligned} 7 + 2y - 2x &= 0 \\ -8 + 2x + 3y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones, tenemos

$$3y^2 + 2y - 1 = (3y-1)(y+1) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación las usamos para determinar x a partir de la primera ecuación, es decir $x = y + \frac{7}{2}$. Los puntos críticos son $(\frac{5}{2}, -1)$ y $(\frac{23}{6}, \frac{1}{3})$.
Como

$$D = -2 \cdot 6y - 4 = -12y - 4 = \begin{cases} 8 > 0 & \text{si } y = -1 \\ -8 < 0 & \text{si } y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{5}{2}, -1) = -1 < 0$, concluimos que en el punto $(\frac{5}{2}, -1)$ f tiene un máximo local y en $(\frac{23}{6}, \frac{1}{3})$, f tiene un punto silla.

- (1 pto.) Por encontrar los puntos críticos.
- (1 pto.) Por calcular el discriminante y evaluarlo en los puntos críticos.
- (1 pto.) Por clasificar los puntos críticos.

3. Encuentre las dimensiones de una caja rectangular con tapa de modo que tenga volumen máximo y cuya área superficial sea $64cm^2$.

   Solución:

   Supongamos que x, y, z son las dimensiones de la caja buscada.

   Notar que por las características del problema la función a maximizar será la función del volumen:

   $$f(x, y, z) = xyz$$

   Y dado que requerimos que el área superficial de la caja sea $64cm^2$ debe cumplirse que:

   $$2xy + 2xz + 2yz = 64 \quad \Rightarrow \quad xy + xz + yz = 32$$

   Por lo tanto nuestro problema se reduce a maximizar:

   $f(x, y, z) = xyz$ sujeto a $xy + xz + yz = 32$.

   Usaremos el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver dicho problema.

   Planteamos el sistema:

   $$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 32 \end{aligned}$$

   De donde obtenemos:

   $$\begin{aligned} yz &= \lambda(y + z) & (f_x = \lambda g_x) \qquad (1) \\ xz &= \lambda(x + z) & (f_y = \lambda g_y) \qquad (2) \\ xy &= \lambda(x + y) & (f_z = \lambda g_z) \qquad (3) \\ xy + xz + yz &= 32 & (g(x, y, z) = 32) \qquad (4) \end{aligned}$$

   Si multiplicamos (1) por x, (2) por (y) y (3) por z obtenemos:

   $xyz = \lambda x(y + z) \qquad (5)$

   $xyz = \lambda y(x + z) \qquad (6)$

   $xyz = \lambda z(x + y) \qquad (7)$

   Igualando las ecuaciones (5) y (6):

$$\begin{aligned} \lambda x(y+z) &= \lambda y(x+z) \\ \lambda(xy+xz) - \lambda(yx+yz) &= 0 \\ \lambda(xz-yz) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \quad \text{o} \quad xz = yz \end{aligned}$$

Puesto que $\lambda \neq 0$ entonces $xz = yz$ y dado que $z \neq 0$ se tiene que:

$$x = y$$

Igualando las ecuaciones (7) y (6):

$$\begin{aligned} \lambda y(x+z) &= \lambda z(x+y) \\ \lambda(yx+yz-zx-zy) &= 0 \\ \lambda(yx-zx) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0 \text{ o } yx = zx \end{aligned}$$

De manera análoga concluimos que: $z = y$.

Es decir $x = y = z$.

Escribiendo la ecuación (4) sólo en términos de y no dá que:

$y^2 + y^2 + y^2 = 3y^2 = 32 \quad \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{32}{3}}$.

Claramente tomamos el positivo de este valor, pues son las dimensiones de una caja.

Por lo tanto las dimensiones de la caja deben ser:

$$(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{32}{3}}, \sqrt{\frac{32}{3}}, \sqrt{\frac{32}{3}}\right).$$

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por determinar correctamente la función f.
- (1 pto.) Por determinar correctamente la función restricción g.
- (1 pto.) Por plantear correctamente el sistema.
- (2 pts.) Por resolver correctamente el sistema.
- (1 pto.) Por concluir las dimensiones de la caja.

4. *a*) Calcule la integral:

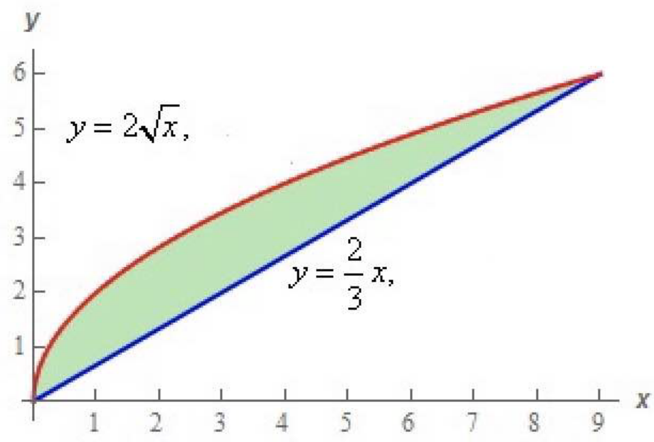
$$\iint_D 2yx^2 + 9y^3 dA,$$

Donde D es la región acotada por las curvas: $y = \dfrac{2}{3}x$ e $y = 2\sqrt{x}$.

b) Determine el volumen del sólido que yace dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$, bajo $z = 2x^2 + 2y^2$ y sobre el plano xy.

Solución:

a) Primero graficamos las curvas:



De donde obtenemos que:

$$\begin{gathered} 0 \leq x \leq 9 \\ \tfrac{2}{3}x \leq y \leq 2\sqrt{x} \end{gathered}$$

Luego la integral buscada la podemos calcular de la forma:

$$\begin{aligned}
\iint_D 2yx^2 + 9y^3 dA &= \int_0^9 \int_{\frac{2}{3}x}^{2\sqrt{x}} 2yx^2 + 9y^3 dydx \\
&= \int_0^9 \left(y^2x^2 + \frac{9}{4}y^4 \right)\Bigg|_{\frac{2}{3}x}^{2\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^9 4x\left(x^2\right) + \frac{9}{4}\left(16x^2\right) - \left[\frac{4}{9}x^2\left(x^2\right) + \frac{9}{4}\left(\frac{16}{81}x^4\right)\right] dx \\
&= \int_0^9 36x^2 + 4x^3 - \frac{8}{9}x^4 dx \\
&= \left(12x^3 + x^4 - \frac{8}{45}x^5\right)\Bigg|_0^9 \\
&= 12 \cdot 9^3 + 9^4 - \frac{8}{45} \cdot 9^5
\end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por determinar correctamente la región D.

- (1 pto.) Por plantear la integral correctamente.
- (1 pto.) Por calcular la integral correctamente.

b) Notar que el volumen del sólido buscado será dado por:

$$V = \iint_D 2x^2 + 2y^2 dA$$

Con $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\}$.
Si usamos coordenadas polares para calcular esta integral tenemos que: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 4$.
Luego el volumen será dado por:

$$V = \iint_D 2x^2 + 2y^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \left(2r^2\right)(r) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^4 2r^3 dr d\theta$$

Integrando primero respecto de r nos dá:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 2r^3 dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^4 \Big|_0^4 d\theta = \int_0^{2\pi} 128 d\theta = 256\pi \end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por escribir la integral que entregará el volumen y determinar la región D.
- (1 pto.) Por plantear la integral correctamente en coordenadas polares.
- (1 pto.) Por calcular la integral correctamente.