PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2022

Pauta Interrogación 2 - MAT1610

1. Determine para qué valor(es) de $a > 0$, la recta tangente a la curva

$$(x^2 + y^2 - x)^2 = x^2 + y^2$$

en el punto $(0, 1)$, es tangente también a la circunferencia de ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Solución:

En primer lugar notamos que $(0, 1)$ pertenece a la curva, pues

$$(0^2 + 1^2 - 0)^2 = 1 = 0^2 + 1^2.$$

Ahora bien, derivando implícitamente tenemos

$$2(x^2 + y^2 - x)(2x + 2y \cdot y' - 1) = 2x + 2y \cdot y',$$

lo que al evaluar en $(0, 1)$ nos lleva a

$$2(2y' - 1) = 2y' \Rightarrow y' = 1.$$

Por lo tanto, la recta tangente a la curva pedida en el punto $(0, 1)$ es

$$y = x + 1.$$

Por otro lado, derivando implícitamente la ecuación $x^2 + y^2 = a^2$ obtenemos

$$2x + 2y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y},\ (y \neq 0)$$

Para que la recta anterior sea tangente a la circunferencia en un punto (x, y), necesitamos que $y' = 1$, es decir,

$$\frac{-x}{y} = 1 \Rightarrow y = -x.$$

Como además el punto (x, y) debe pertenecer a la recta, tenemos que $y = x + 1$. Juntando ambas ecuaciones llegamos a que

$$-x = x + 1 \Rightarrow x = -1/2$$

y

$$y = -x = 1/2.$$

Reemplazando en la circunferencia, obtenemos finalmente que

$$a^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

por lo que $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por la derivar implícitamente la primera curva.
- (1 punto) Por determinar la ecuación de la recta tangente.
- (1 punto) Por la derivar implícitamente la circunferencia.
- (1 punto) Por determinar que el punto de tangencia es aquel de la forma $(x, -x)$
- (1 punto) Por determinar las coordenadas del punto
- (1 punto)Por determinar el valor de a.

2. El volumen de un cubo se incrementa a razón de 10 cm^3/min. ¿Qué tan rápido se incrementa el área superficial del cubo cuando la medida de la arista es de 30 cm?

   Solución:

   Considere $a(t)$ la medida, en centímetros, de la arista del cubo en cuestión, en función del tiempo t medido en minutos. Observe que entonces el volumen es $V(t) = a^3(t)$ y que el área superficial corresponde a $S(t) = 6a^2(t)$.

   Del enunciado tenemos que $\dfrac{dV}{dt} = 3a^2(t)\dfrac{da}{dt} = 10$, por otra parte tenemos que $\dfrac{dS}{dt} = 12a(t)\dfrac{da}{dt}$, por lo tanto si $a(t) = 30$ tenemos que

$$\frac{dS}{dt} = 12(30)\frac{10}{3(30)^2} = \frac{4}{3}\ \text{cm}^2/\text{min}$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por determinar la función volumen en función de la arista.
   - (1 punto) Por determinar la función área superficial en función de la arista.
   - (1 punto) Por derivar correctamente el volumen
   - (1 punto)Por derivar correctamente el área.
   - (1 punto) Por realizar los reemplazos adecuadamente
   - (1 punto) Por responder la pregunta planteada.

3. a) Use el Teorema del Valor Medio para demostrar que $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$, para todo $x, y \in [0, 2\pi]$.

Solución:

Si $x, y \in [0, 2\pi]$ y consideramos $f(t) = \text{sen}(t)$, tenemos que se cumplen las hipótesis del TVM ya que f es continua en $[x, y]$ y derivable en (x, y) (aquí se supone que $x < y$ pero el argumento también es válido para $y < x$, solo se debe cambiar el orden en cada uno de los intervalos) por lo tanto tenemos que existe $c \in (x, y)$btal que

$$f'(c) = \cos(c) = \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y}$$

como $-1 \leq \cos(c) \leq 1$, tenemos que

$$\left| \frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} \right| = |\cos(c)| \leq 1$$

obteniendo que

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por la decir que se cumplen las hipótesis del TVM.
- (1 punto) Por la conclusión del TVM
- (1 punto) Por acotar y concluir.

b) Calcule $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos(5x)-\cos(3x)}{x^2}\right)$

Solución:

Observe que el límite pedido es de la forma $0/0$, por lo tanto, usando L'Hopital tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos(5x)-\cos(3x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-5\sin(5x)+3\sin(3x)}{2x}\right)$$

aplicando nuevamente L'Hopital tenemso que

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{-25\cos(5x)+9\cos(3x)}{2}\right)$$

$$= -8$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por el uso del L'Hopital, diciendo que es de forma indeterminada
- (1 punto) Por el uso nuevamente del L'hopital, diciendo que es de forma indeterminada
- (1 punto) Por determinar el valor del límite pedido

4. Considere la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$.

a) Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Determine extremos locales y globales.

c) Determine intervalos dónde f es cóncava hacia arriba (convexa) y donde es cóncava hacia abajo (cóncava).

d) Determine, en caso que existan, los puntos de inflexión.

e) Bosqueje el gráfico incluyendo las asíntotas.

Solución:

Observe que el dominio de la función es todo $\mathbb{R}-\{1,-1\}$, y que la función tiene como asíntotas verticales a $x=1$ y a $x=-1$. Además si estudiamos los límites a infinito, tenemos que la recta $y=2$ es una asíntota horizontal.

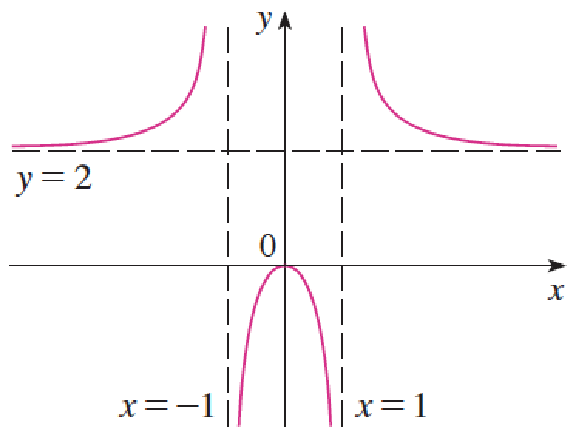
Al derivar obtenemos que $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$, luego solo cambia de signo en torno a $x=0$; es decreciente en $(0,1)$ y $(1,\infty)$ y creciente en $(-\infty,-1)$ y $(-1,0)$ obteniendo además que $f(0)=0$ es un máximo local.

Al derivar por segunda vez tenemos que

$$f''(x) = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

de está forma concluimos que es cóncava hacia arriba en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 1)$. No existen puntos de inflexión ya que no hay puntos donde f sea continua y cambie la concavidad.

Con toda la información obtenemos que le gráfico es el siguiente, obteniendo además que no hay extremos globales.



Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por los intervalos de monotonía.
- (1 punto) Por determinar extremos locales y concluir que no hay globales.
- (1 punto) Por determinar los intervalos de concavidad.
- (1 punto) Por determinar que no existen puntos de inflexión.
- (1 punto) Por incluir las asíntotas en el gráfico
- (1 punto) Por el gráfico.