Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
Pauta Interrogación 3

1. Considere el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ de los polinomios de grado menor o igual a 2 incluyendo el polinomio nulo. El conjunto $\mathcal{B} = \{1+t, 1+t^2, t+t^2\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$.

   (a) Encuentre la matriz de cambio de base desde $\mathcal{B}$ hacia la canónica (base estándar). (3 pts)

   (b) Usando el ítem anterior, determine una ecuación matricial que permita encontrar las coordenadas de $\mathbf{p}(t) = 6 + 3y - t^2$ con respecto de la base $\mathcal{B}$ (no es necesario resolver la ecuación). (3 pts)

Solución

(a) La matriz de cambio de base desde $\mathcal{B}$ hacia la canónica $\{1, t, t^2\}$ es aquella cuyas columnas son los vectores de coordenadas de los elementos de $\mathcal{B}$ con respecto a la base canónica. De esta forma:

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}[1+t] & [1+t^2] & [t+t^2]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

(b) La matriz del ítem anterior cumple que $P_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}} = [x]$ donde $[x]$ corresponde al vector de coordenadas de x con respecto de la base canónica.
Para encontrar las $\mathcal{B}$-coordenadas del polinomio $\mathbf{p}$ debemos resolver el sistema de ecuaciones dado por la ecuación

$$P_{\mathcal{B}}[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} = [\mathbf{p}] \iff \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\ 3\\ -1\end{bmatrix}.$$

Nota: Si define la base canónica como $\{t^2, t, 1\}$, entonces $P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ y $[\mathbf{p}] = \begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 6\end{bmatrix}$.

Puntaje

- 2 puntos por establecer, explícita o implícitamente, como calcular correctamente la matriz de cambio de base.
- 1 punto por determinar correctamente la matriz $P_{\mathcal{B}}$.
- 3 puntos por escribir correctamente la ecuación matricial pedida o alguna otra equivalente. También asignar el puntaje si se escribe la matriz aumentada.

2. Sea A una matriz tal que A^3 es la matriz nula.

   (a) Demuestre que si λ es valor propio de A entonces λ^3 es valor propio de A^3. (3 pts)

   (b) Concluya que $\lambda = 0$ es el único valor propio de A. (3 pts)

Solución

(a)

$$\begin{aligned}
&\text{Sea } \lambda \text{ valor propio de } A\\
&\Rightarrow A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \text{ para algún } \mathbf{v} \neq 0\\
&\Rightarrow A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) \text{ para algún } \mathbf{v} \neq 0\\
&\Rightarrow A^2\mathbf{v} = \lambda A\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v} \text{ para algún } \mathbf{v} \neq 0\\
&\Rightarrow A(A^2\mathbf{v}) = A(\lambda^2\mathbf{v}) \text{ para algún } \mathbf{v} \neq 0\\
&\Rightarrow A^3\mathbf{v} = \lambda^3\mathbf{v} \text{ para algún } \mathbf{v} \neq 0
\end{aligned}$$

esto significa que λ^3 es valor propio de la matriz A^3.

(b) De lo anterior, como tenemos que $A^3 = 0$ entonces $\lambda^3\mathbf{v} = 0$, lo que implica $\lambda = 0$. Por lo tanto, el único valor propio de A es $\lambda = 0$.

Puntaje

(a)
- Asignar 1 de 3 puntos si no logra demostrar la proposición pero escribe qué significa que λ sea valor propio de A.
- Asignar 2 de 3 puntos si escribe una demostración coherente pero tiene errores (por ejemplo, no afirma que el vector propio debe ser no nulo)
- Asignar 3 puntos si la demostración es correcta.

(b) 3 puntos si concluye correcta y justificadamente que $\lambda = 0$ (aunque no haya demostrado el ítem anterior).

3. (a) Diagonalice las matrices $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. (3 pts)

(b) A partir del ítem anterior, demuestre que A y B son similares. En otras palabras, encuentre explícitamente una matriz R invertible tal que $A = RBR^{-1}$. (3 pts)

Solución

(a) La matriz A tiene valores propios 3 y -1, por lo tanto es diagonalizable. Notamos que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $A \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. Por lo tanto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Por otro lado, $\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = -(\lambda+1)(\lambda-3)$ por lo que B tiene los mismos valores propios que A, lo que implica que también es diagonalizable. Además, $B \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $B \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

(b) De la diagonalización de B, tenemos que $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} B \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Reemplanzando en la diagonalización de A se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} B \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Sea $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$. Ya que R es invertible, entonces $A = RBR^{-1}$, lo que significa que A y B son matrices similares.

Puntaje

(a)
- 0.5 puntos por determinar los valores propios de cada matriz (1 punto en total).
- 0.5 puntos por determinar dos vectores propios linealmente independientes de cada matriz. (1 en total)
- 0.5 puntos por escribir la diagonalización de la matriz cada matriz (1 en total).

(b)
- 1 punto por despejar correctamente la matriz diagonal $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
- 1 punto por definir correctamente la matriz R.
- 1 punto por demostrar correctamente que A y B son similares.

4. Encuentre una matriz real que tenga a $\lambda = -2 + 2i$ como valor propio y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1+i \\ 3i \end{bmatrix}$ como vector propio asociado a λ.

Solución 1 Notamos que $\operatorname{Re}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\operatorname{Im}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Como buscamos una matriz real, basta definir la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\mathbf{v} & \operatorname{Im}\mathbf{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{Re}\mathbf{v} & \operatorname{Im}\mathbf{v} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Obtenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4/3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, A cumple que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$.

Solución 2 Como buscamos una matriz real, entonces $\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 1-i \\ -3i \end{bmatrix}$ debe ser un vector propio asociado al valor propio $\bar{\lambda} = -2 - 2i$. Además, $\mathbf{v}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ son linealmente independientes, por lo que la matriz buscada se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 3i & -3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2+2i & 0 \\ 0 & -2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 3i & -3i \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 4/3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puntaje

- 2 puntos por definir elementos necesarios para la construcción de la matriz (vectores parte real e imaginaria, o bien vector propio conjugado y valor propio conjugado).
- 2 puntos por escribir una ecuación que permita encontrar la matriz buscada.
- 2 puntos por determinar la matriz.

5. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre una base para $W^{\perp}$.

Solución Los vectores de $W^{\perp}$ son aquellos $\mathbf{x}$ tales que $\mathbf{x} \cdot w_1 = \mathbf{x} \cdot w_2 = \mathbf{x} \cdot w_3 = 0$, es decir, las soluciones del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando la matriz y resolviendo el sistema se obtiene $x_1 = -x_2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Por lo tanto, una base para $W^{\perp}$ corresponde a $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Puntaje

- 2 puntos por identificar, implícita o explícitamente, cuál es el subespacio $W^{\perp}$.
- 2 puntos por establecer una manera de encontrar la base de $W^{\perp}$.
- 2 puntos por determinar correctamente una base para $W^{\perp}$.

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \\ 1 & -3 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

(a) Verifique que las columnas de A son vectores ortogonales. (2 pts)

(b) Determine una matriz U de columnas ortonormales tal que $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Col}(U)$. (2 pts)

(c) Determine $\|Ux\|$ donde $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. (2 pts)

Solución

(a) Dos columnas son ortogonales si su producto punto es cero. Verificamos:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = -3 - 6 - 3 + 12 = 0, \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = -3 + 24 - 21 + 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} = 9 - 16 + 7 + 0 = 0.$$

(b) Calculamos las normas de cada columna:

$$\left|\left|\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{9 + 4 + 1 + 9} = \sqrt{23}, \qquad \left|\left|\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{1 + 9 + 9 + 16} = \sqrt{35},$$

$$\left|\left|\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{9 + 64 + 49 + 0} = \sqrt{122}.$$

Definimos U como la matriz A cuyas columnas están normalizadas.

$$U = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{23} & -1/\sqrt{35} & 3/\sqrt{122} \\ -2/\sqrt{23} & 3/\sqrt{35} & 8/\sqrt{122} \\ 1/\sqrt{23} & -3/\sqrt{35} & 7/\sqrt{122} \\ 3/\sqrt{23} & 4/\sqrt{35} & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego U es la matriz pedida.

(c) Como U es una matriz de columnas ortonormales, se tiene

$$||Ux|| = ||x|| = \left|\left|\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{16 + 0 + 9} = 5.$$

Puntaje

(a)
- 1 punto por establecer que vectores ortogonales son aquellos cuyo producto punto es cero.
- 1 punto por verificar que todas las columnas son ortogonales.

(b)
- 1 punto por calcular correctamente la norma de las tres columnas.
- 1 punto por definir correctamente U.

(c)
- 1 punto por afirmar que $||Ux|| = ||x||$.
- 1 punto por calcular correctamente $||Ux||$.

7. Sean $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y P el plano de $\mathbb{R}^3$ generado por $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$.

(a) Escriba al vector $\mathbf{y}$ como suma de un vector del plano P y otro del complemento ortogonal $P^{\perp}$.

(b) Encuentre la distancia de $\mathbf{y}$ al plano P.

Solución

(a) Los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ son ortogonales. En efecto, $\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{u_2} = 9 - 10 + 1 = 0$. Esto implica que proyectar sobre P es sumar las proyecciones sobre $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$:

$$\text{proy}_P(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u_1}}{||\mathbf{u_1}||^2}\mathbf{u_1} + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u_2}}{||\mathbf{u_2}||^2}\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Además se define

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \text{proy}_P(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Luego, por construcción de los vectores se tiene $\mathbf{y} = \text{proy}_P(\mathbf{y}) + \mathbf{z}$ donde $\text{proy}_P(\mathbf{y})$ pertenece al plano P y y z al complemento ortogonal $P^{\perp}$.

(b) La distancia de $\mathbf{y}$ al plano P corresponde a

$$\text{dist}(\mathbf{y}, P) = ||\mathbf{y} - \text{proy}_P(\mathbf{y})|| = ||z|| = \left|\left| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right|\right| = \sqrt{4 + 0 + 36} = \sqrt{40}.$$

Puntaje

(a)
- 1 punto establecer que la descomposición buscada es $\mathbf{y} = \text{proy}_P(\mathbf{y}) + \mathbf{z}$ donde $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \text{proy}_P(\mathbf{y})$, aunque no calcule dichos vectores.
- 1 punto por calcular correctamente $\text{proy}_P(\mathbf{y})$.
- 1 punto por calcular correctamente $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \text{proy}_P(\mathbf{y})$.

(b)
- 2 puntos por identificar que la distancia corresponde a $||\mathbf{y} - \text{proy}_P(\mathbf{y})||$.
- 1 punto por calcular correctamente la distancia.