PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2019

Pauta Interrogación 2 - MAT1610

1. a) Encuentre la derivada de la función $f(x) = \arctan(xe^{x^2})$

   Solución:

   Observe que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(xe^{x^2}\right)^2}(xe^{x^2})' \\ &= \frac{1}{1+\left(xe^{x^2}\right)^2}(e^{x^2}+2x^2e^{x^2}) \\ &= \frac{1}{1+x^2e^{2x^2}}(e^{x^2}(1+2x^2)) \end{aligned}$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por regla de la cadena aplicada a $\arctan(x)$
   - (1 punto) Por regla del producto aplicada a xe^{x^2}
   - (1 punto) Por regla de la cadena aplicada a e^{x^2}

   b) Sea $g(x) = f(xf(x^2+1))$ donde f es una función tal que

x	1	-1	2	-2	5	-5
$f(x)$	3	4	5	-1	-1	-3
$f'(x)$	-9	7	-1	6	-2	4

   Determine $g'(2)$.

   Solución:

   Observe que

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(xf(x^2+1))(xf(x^2+1))' \\ &= f'(xf(x^2+1))(f(x^2+1)+2x^2f'(x^2+1)) \end{aligned}$$

   Evaluando $g'(2) = f'(2f(5))(f(5)+8f'(5)) = f'(-2)(-1-16) = 6(-17) = -102$

   Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por regla de la cadena.
- (1 punto) Por regla del producto.
- (1 punto) Por revaluar y obtener resultado.

2. a) Considere la curva $xy + e^y = e$, encuentre y'' en el punto donde $x = 0$.

   Solución:

   Primero observe que si un punto (x, y) de la curva se tiene que $x = 0$, entonces $y = 0$.
   Derivando implícitamente la igualdad que define a la curva obtenemos que

   $$y' = \frac{-y}{x + e^y}$$

   por lo tanto en dicho punto $y' = -1/e$.
   Derivando nuevamente obtenemos que

   $$y'' = \frac{-y'(x + e^y) + y(1 + y'e^y)}{(x + e^y)^2}$$

   reemplazando en $x = 0, y = 1$, obtenemos que $y'' = 1/e^2$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por obtener y'
   - (1 punto) Por robtener y''
   - (1 punto) Por revaluar y obtener resultado.

   b) Sea f una función derivable y g una función tal que $f(g(x)) = x$. Demuestre que

   $$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

   Use lo anterior, con $g(x) = f^{-1}(x)$, para calcular $(f^{-1})'(8)$, donde
   $f : (-\infty, -2) \longrightarrow (-\infty, 16)$ y está definida por $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 8$.

Solución:

Observe que usando la regla de la cadena en la igualdad obtenemos que

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

obteniendo que $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$.

Usando esta fórmula con $g(x) = f^{-1}(x)$, obtenemos que $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, que en este caso particular se obtiene

$$\left(f^{-1}\right)'(8) = \frac{1}{f'(f^{-1}(8))} = \frac{1}{f'(-3)} = \frac{1}{15}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por demostrar la fórmula.
- (1 punto) Por deducir la fórmula en el caso de la inversa.
- (1 punto) Por hacer los reemplazos correctamente.

3. a) Determine el máximo y mínimo absoluto de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ en el intervalo $[0, 3]$

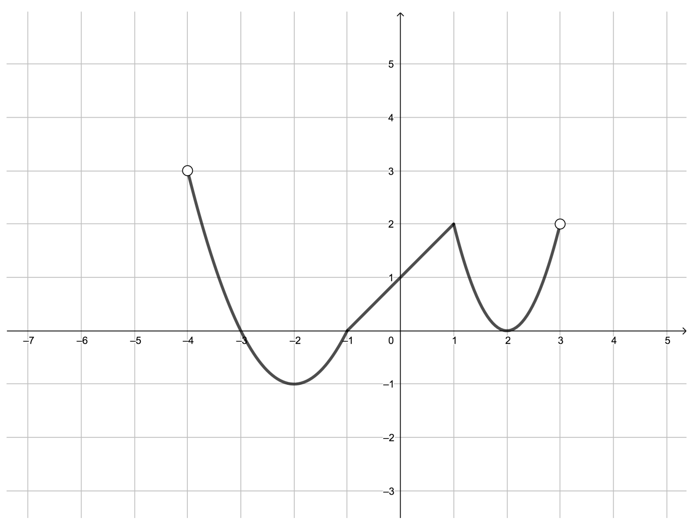
   Solución:

   Observe que f es continua en $[0, 3]$ y que $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$ por lo tanto los únicos puntos candidatos a alcanzar extremos son $x = 0, x = 3, x = 1$. Evaluando obtenemos que $f(0) = 0, f(1) = 1, f(3) = 3/7$, por lo tanto el máximo es 1 y el mínimo es 0.

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por derivada.
   - (1 punto) Por candidatos.
   - (1 punto) Por concluir.

   b) Sea $g : (-4, 3) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que el **gráfico de su derivada** es el de la figura adjunta.



   Determine los intervalos donde g es cóncava hacia arriba y el(los) mínimo(s) local(es) de g.

Solución:

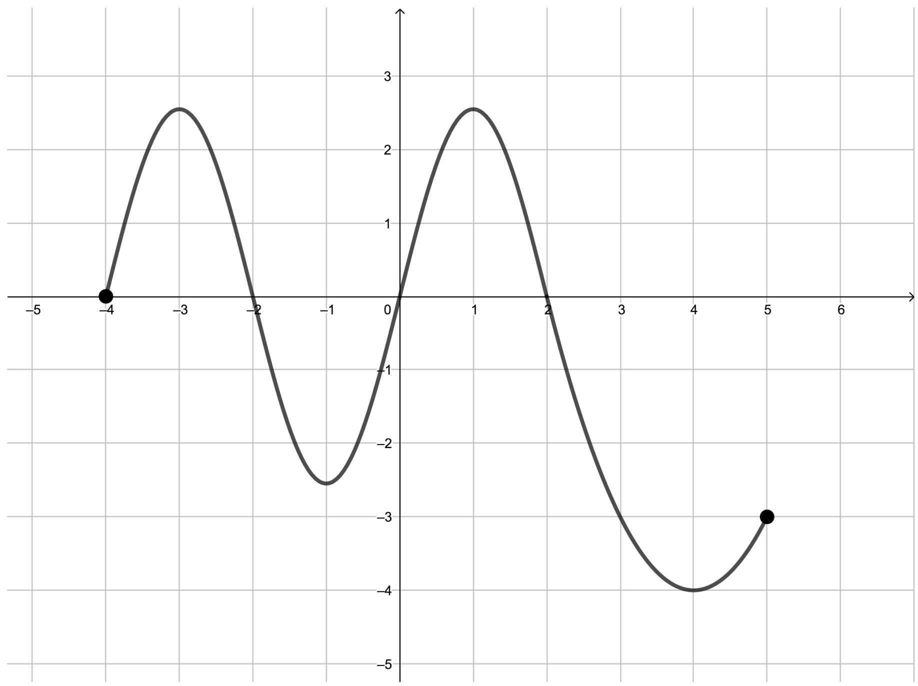
Observe que g es derivable en $(-4, 3)$ por lo tanto los mínimos locales corresponde a los puntos donde g' se anula y que cambia de signo de negativo a positivo, del gráfico se observa que esto ocurre solo en $x = -1$, por lo tanto el único mínimo local es $g(-1)$.

Por otra parte tenemos que los intervalos donde g es cóncava hacia arriba corresponde a los puntos donde g' es creciente. Del gráfico vemos que esto ocurre en $(-2, 1)$ y $(2, 3)$.

Distribución de puntajes:

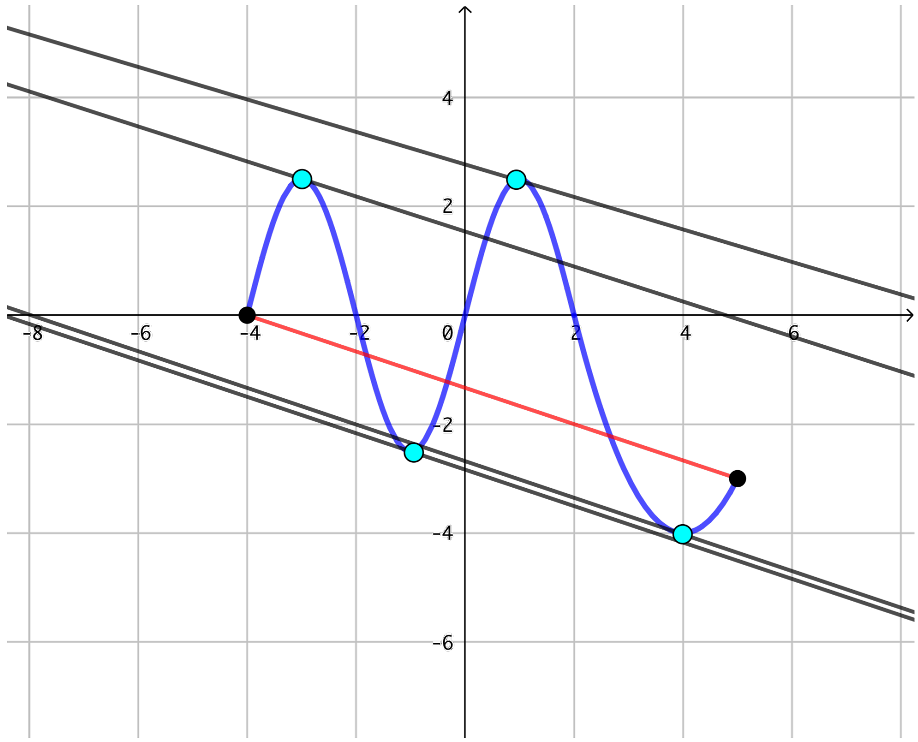
- (1 punto) Por determinar, justificadamente que el único mínimo es $f(-1)$.
- (1 punto) Por argumentar la cónvavidad
- (1 punto) Por dar correctamente los intervalos.

4. a) La función g cuyo gráfico es el de la figura adjunta cumple las hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[-4,5]$. ¿Cuántos valores de c en (-4,5) satisfacen la conclusión de este teorema? Justifique su respuesta gráficamente.



Solución:

El TVM dice que existe $c \in (-4,5)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(5)-f(-4)}{9}$ que gráficamente corresponde a la pendiente del trazo rojo. Del gráfico vemos que existen 4 puntos tales que la recta tangente es horizontal al trazo descrito (puntos en celeste), es decir cuatro puntos que satisfacen la hipótesis del TVM.



Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por la justificación gráfica.
- (2 puntos) Por determinar que son 4 puntos.

b) Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = e$$

Solución:

Si $f(x) = \ln\left(\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x\right)$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x = e$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$

Observe que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)}{1/x}\end{aligned}$$

el último de estos límites es de la forma indeterminada $0/0$ por lo que aplicando L'Hopital tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{-2ax^2}{(x-a)(x+a)} \\ &= -2a \end{aligned}$$

Obteniendo que $a = -\dfrac{1}{2}$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por determinar el valor del límite pedido (en función de a).
- (1 punto) Por dar el valor de a.