Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo Semestre del 2020

Modelos Probabilísticos (EYP1027)
Ayudantía 5

Camilo González Rojas

1. Sea λ una constante positiva fija, y f una función definida como $f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ y $f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}$ si $x < 0$.

   a) Verifique que $f(x)$ es una densidad.

   b) Si X es una variable aleatoria con densidad dada por $f(x)$, encuentre $\mathrm{P}(X < t)$ para todo t. Evalúe todas las integrales.

   c) Encuentre $\mathrm{P}(|X| < t)$para todo t. Evalúe todas las integrales.

2. Si la variable aleatoria X tiene densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

   encuentre una función monótona $u(x)$ tal que la variable aleatoria $Y = u(X)$ tenga distribución $Unif(0,1)$.

3. Para una variable aleatoria continua X no negativa ($f(x) = 0$ para $x < 0$). Se tiene,

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]\, dx$$

   donde $F_X(x)$ es la función de distribución acumulada de X. Utilice este resultado para resolver lo siguiente para encontrar la duración media de llamadas telefónicas, donde se asume que la duración de una llamada tiene una distribución T tal que $P(T > t) = ae^{-\lambda t} + (1-a)e^{-\mu t}$, donde a, λ y μ son constantes tal que $0 < a < 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

4. Encuentre la función generadora de momentos de:

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^z}{x\,|}, \quad x = 0, 1, \ldots; \quad \lambda > 0.$$

   Utilizando la función generadora de momentos encuentre $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

5. Sea $M_X(t)$ la función generadora de momentos de X, se define $S(t) = \log(M_X(t))$. Muestre que:

$$\left.\frac{d}{dt}S(t)\right|_{t=0} = EX \quad \text{and} \quad \left.\frac{d^2}{dt^2}S(t)\right|_{t=0} = \mathrm{Var}\, X.$$

Solución

1. Sea λ una constante positiva fija, y f una función definida como $f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ y $f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}$ si $x < 0$.

   a) Verifique que $f(x)$ es una densidad.

   b) Si X es una variable aleatoria con densidad dada por $f(x)$, encuentre $\mathrm{P}(X < t)$ para todo t. Evalúe todas las integrales.

   c) Encuentre $\mathrm{P}(|X| < t)$ para todo t. Evalúe todas las integrales.

a) $f(x)$ tiene que ser no negativa e integrar 1.

Como $\lambda > 0$ $\quad \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x} > 0 \quad$ y $\quad \frac{1}{2} e^{\lambda x} > 0$

$\Rightarrow f$ es positiva

Por otro lado

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{0} + -\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$\therefore f$ es densidad

b) $$P(T<t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda t}\,dx & \text{si } t<0 \\ \int_{0}^{t} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}\,dx & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(T<t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{\lambda t} & \text{si } t<0 \\ 1-\frac{1}{2} e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

c) Si $t<0$, $P(|X|<t)=0$ $(\overbrace{|X|}^{\text{no neg.}} < \underbrace{t}_{\text{negativo}})$

Si $t \geq 0$,

$$P(|X|<t) = P(-t<X<t)$$
$$= P(X<t) - P(X<-t)$$
$$= 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda t} - \frac{1}{2}e^{-\lambda t}$$
$$= 1 - e^{-\lambda t}.$$

2. Si la variable aleatoria X tiene densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & 1 < x < 3 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

encuentre una función monótona $u(x)$ tal que la variable aleatoria $Y = u(X)$ tenga distribución $Unif(0,1)$.

$$Y \sim Unif(a,b), \quad f(y) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}, \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<a \\ \frac{y-a}{b-a} & \text{si } y \in [a,b] \\ 1 & \text{si } y>b \end{cases}$$

Se vio en clases que $u(x) = F(x) \sim Unif(0,1)$

Pues si $Y = F(X)$

$$P(Y<y) = P(F_X(X)<y)$$
$$= P(X < F_X^{-1}(y))$$
$$= F_X(F_X^{-1}(y))$$
$$= y$$

Ahora tenemos que

$$u(x) = F_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{(x-1)^2}{4} & \text{si} \quad 1 < x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 \geq x \end{cases}$$

Ejemplo exponencial

$$X \sim \text{Exponencial}(\lambda) \qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$u = F_x(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-\lambda x} = 1 - u$$

$$-\lambda x = \log(1-u)$$

$$x = \frac{-\log(1-u)}{\lambda}$$

En R $u = \text{Runif}(n, 0, 1)$ y se obtiene una muestra de tamaño n de una exponencial.

3. Para una variable aleatoria continua X no negativa ($f(x) = 0$ para $x < 0$). Se tiene,

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]\, dx$$

donde $F_X(x)$ es la función de distribución acumulada de X. Utilice este resultado para resolver lo siguiente para encontrar la duración media de llamadas telefónicas, donde se asume que la duración de una llamada tiene una distribución T tal que $P(T > t) = ae^{-\lambda t} + (1-a)e^{-\mu t}$, donde a, λ y μ son constantes tal que $0 < a < 1$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

$$E(X) = \int_0^\infty a e^{-\lambda t} + (1-a) e^{-\mu t} \, dt$$

$$= \frac{a}{-\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{(1-a)}{-\mu} e^{-\mu t} \Big|_0^\infty$$

$$= \frac{a}{\lambda} + \frac{(1-a)}{\mu}$$

4. Encuentre la función generadora de momentos de:

$$e^x = \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$$

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{z}}{x\,|}, \quad x = 0, 1, \ldots; \quad \lambda > 0.$$

Utilizando la función generadora de momentos encuentre $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} \cdot e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x \geq 0} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

luego $E(X) = \left.\frac{dM_x(t)}{dt}\right|_{t=0}$

$$= \left.\lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)}\right|_{t=0}$$

$$= \lambda$$

5. Sea $M_X(t)$ la función generadora de momentos de X, se define $S(t) = \log(M_X(t))$. Muestre que:

$$\left.\frac{d}{dt}S(t)\right|_{t=0} = EX \quad \text{and} \quad \left.\frac{d^2}{dt^2}S(t)\right|_{t=0} = \operatorname{Var} X.$$

Se tiene que

$$\left.\frac{dS(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d\log(M_x(t))}{dt}\right|_{t=0}$$

$$= \left.\frac{1}{M_x(t)} M_X'(t)\right|_{t=0} = \frac{E(X)}{M_X(0)} = \frac{E(x)}{E(e^{0\cdot x})}$$

$$= \frac{E(x)}{E(1)} = E(X)$$

$$\left.\frac{d^2S(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{M''_x(t)M_X(t) - (M'_x(t))^2}{(M_X(t))^2}\right|_{t=0}$$

$$= E(X^2) - E^2(X) = Var(X)$$