PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2022

**MAT1107 – Introducción al Cálculo**

Solución Interrogación N° 0

1. Demuestre que si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

   **Solución.** Si $a < b$ entonces $b - a > 0$.

   Por hipótesis $a > 0$ y $b > 0$ luego $a + b > 0$. (Ya que $\mathbb{R}^+$ es cerrado)

   Como $b - a > 0$ y $b + a > 0$ entonces $(b - a)(b + a) > 0$. (Ya que $\mathbb{R}^+$ es cerrado).

   La última desigualdad es equivalente a $b^2 - a^2 > 0$ es decir $b^2 > a^2$ como queríamos probar.

   **Puntaje Pregunta 1.**

   - 2 puntos por concluir que $b - a > 0$.
   - 2 puntos por deducir que $a + b > 0$.
   - 2 puntos por mostrar que $(b - a)(a + b) > 0$ y concluir que $a^2 < b^2$.

2. Pruebe la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $b > 0$.

**Solución.** Por contradicción, supongamos que $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$.

Note que $a + b > 0$ ya que $a$ y $b$ son positivos, luego $\dfrac{a+b}{2} > 0$.

Aplicando lo demostrado en el inciso 1 de esta evaluación obtenemos

$$0 < \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \Longrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} < ab$$

Desarrollando los términos obtenemos

$$a^2 + 2ab + b^2 < 4ab \Longleftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Longleftrightarrow (a-b)^2 < 0$$

lo cual es una contradicción.

**Puntaje Pregunta 2.**

- 1 punto por deducir que $(a+b)/2 > 0$.
- 2 puntos por usar el inciso 1 de la interrogación 0.
- 3 puntos por llegar a la contradicción.