FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

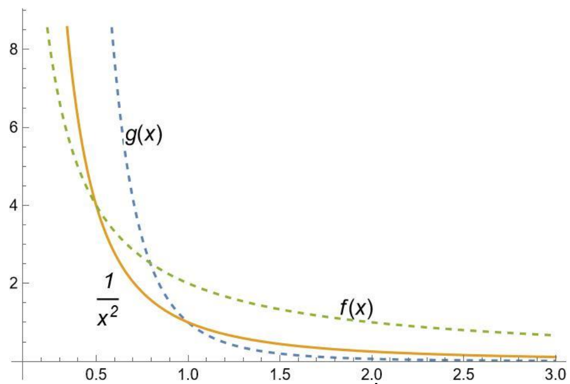
MAT1620 ★ Cálculo 2

Examen

1.

a) Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones, donde:

- $\frac{1}{x^2} \leq g(x)$ para $0 < x < \frac{1}{2}$
- $g(x) \leq \frac{1}{x^2}$ para $1 < x$
- $\frac{1}{x^2} \leq f(x)$ para $1 < x$



Usando el criterio de comparación, comparando entre $f(x)$, $g(x)$ o $\frac{1}{x^2}$ usando solo la información dada (¡sin suponer que $f(x)$ o $g(x)$ son alguna función conocida!), determine si las siguientes integrales impropias son convergentes, divergentes o si no es posible decidir la convergencia o divergencia de la integral.

a. $\int_1^\infty f(x)dx$
b. $\int_1^\infty g(x)dx$
c. $\int_0^1 f(x)dx$
d. $\int_0^1 g(x)dx$

Solución:

a. No es posible decidir la convergencia o divergencia.
b. Es convergente por criterio de comparación, ya que $g(x) \leq \frac{1}{x^2}$ para $1 < x$ y $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$ es convergente.
c. No es posible decidir la convergencia o divergencia.
d. Es divergente, aplicando criterio de comparación con $\frac{1}{x^2}$ (a partir de las desigualdades o del gráfico)

b) Demuestre que el siguiente límite no existe

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+2y-3}{x+y-2}$$

Solución:

Por la trayectoria tomando $x = 1, y \to 1$ tenemos:

$$\lim_{y\to 1} \frac{1+2y-3}{1+y-2} = \lim_{y\to 1} \frac{2y-2}{y-1} = \lim_{y\to 1} \frac{2(y-1)}{y-1} = \lim_{y\to 1} 2 = 2$$

Por la trayectoria tomando $y = 1, x \to 1$ tenemos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+2(1)-3}{x+1-2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} 1 = 1$$

Así, el límite no existe porque los límites obtenidos por dos trayectorias diferentes no son iguales.

2. Sea

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Si la temperatura en un punto (x, y, z) de S es $T(x, y, z) = 40xy^2z$, use el método de los multiplicadores de Lagrange y determine la temperatura máxima y mínima sobre S.

Solución:
Para aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} \nabla \mathrm{T(x,y,z)} = \lambda \nabla \mathrm{g(x,y,z)} \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Donde $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.

$$\begin{cases} \nabla \mathrm{T(x,y,z)} = \lambda \nabla \mathrm{g(x,y,z)} \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 40y^2z = \lambda 2x \\ 80xyz = \lambda 2y \\ 40xy^2 = \lambda 2z \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por x, la segunda por $y/2$ y la tercera por z y obtenemos:

$$\begin{cases} 40xy^2z = \lambda 2x^2 \\ 40xy^2z = \lambda y^2 \\ 40xy^2z = \lambda 2z^2 \end{cases}$$

De donde, igualando, se tiene:

$$2x^2\lambda = y^2\lambda = 2z^2\lambda$$

Ahora:

- Si $\lambda = 0$, entonces $40y^2z = 80xyz = 40xy^2 = 0$, lo cual solo es posible si alguno de x, y, z es igual a cero y por lo tanto $T(x, y, z) = 0$.
- Si $\lambda \neq 0$, entonces:

$$2x^2 = y^2 = 2z^2 \rightarrow 1 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$$

$$\rightarrow x = \pm \frac{1}{2}, \; y^2 = \frac{1}{2}, \; z = \pm \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow T(x, y, z) = 40\left(\pm \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\pm \frac{1}{2}\right) = \pm 5$$

Por lo tanto, la temperatura máxima es $+5$ y la mínima es -5.

3.

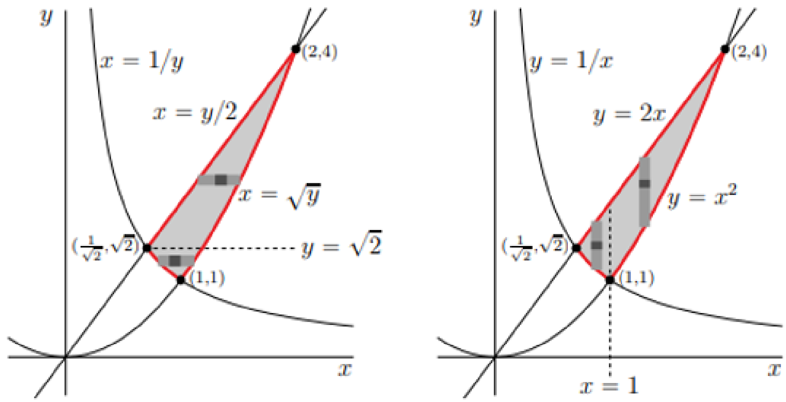
a) Sea

$$I = \iint_R f(x,y)dA = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{1/y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy + \int_{\sqrt{2}}^{4} \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$$

a. Haga un bosquejo de la región R.
b. Reescriba la integral I cambiando el orden de integración.
c. Calcule la integral I, cuando $f(x,y) = x/y$.

Solución:

a. Bosquejo de la región.



b. Reescribiendo la integral tenemos:

$$I = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{1/x}^{2x} f(x,y)dydx + \int_{1}^{2} \int_{x^2}^{2x} f(x,y)dydx$$

c. Cuando $f(x,y) = \frac{x}{y}$

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{1/y}^{\sqrt{y}} \frac{x}{y} dxdy + \int_{\sqrt{2}}^{4} \int_{y/2}^{\sqrt{y}} \frac{x}{y} dxdy$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{y}\left[\frac{y}{2} - \frac{1}{2y^2}\right] dy + \int_{\sqrt{2}}^{4} \frac{1}{y}\left[\frac{y}{2} - \frac{1}{2y^2}\right] dy$$

$$= \left[\frac{y}{2} + \frac{1}{4y^2}\right]_1^{\sqrt{2}} + \left[\frac{y}{2} - \frac{y^2}{16}\right]_{\sqrt{2}}^{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 2 - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8}$$

$$= \frac{1}{2}$$

b) Use coordenadas polares para evaluar la integral $\iint_T (x^2+y^2)dxdy$ donde T es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$.

Solución:

En coordenadas polares el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$ tiene lados $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $r = \frac{1}{\cos\theta}$, que corresponde al lado $x = 1$.

$$\iint_T (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 \cdot r dr d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{\cos\theta}} d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4\theta \, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\theta\,(1+\tan^2\theta)d\theta$$

$= \frac{1}{4}\left(\tan\theta + \frac{\tan^3\theta}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$, haciendo la sustitución $u = \tan\theta$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

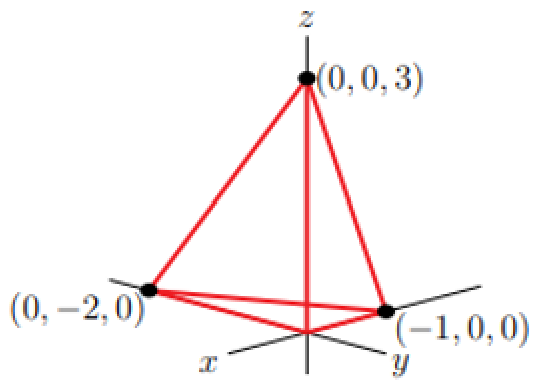
4.

a) Sea $I = \iiint_E f(x,y,z)dV$ donde E es el tetraedro con vértices $(-1{,}0{,}0)$, $(0{,}0{,}0)$, $(0{,}0{,}3)$ y $(0,-2{,}0)$.

   a. Haga un bosquejo de la región tridimensional E.
   b. Escriba la integral I en la forma $\iiint_E f(x,y,z)dzdydx$
   c. Escriba la integral I en la forma $\iiint_E f(x,y,z)dydxdz$

Solución:

a. Bosquejo de la región E



b. La ecuación del plano que contiene a los tres vértices se puede escribir de la forma $ax + by + cz = 1$ (ya que no contiene al origen). Luego:

$$a(0) + b(0) + c(3) = 1 \to c = \frac{1}{3}$$
$$a(0) + b(-2) + c(0) = 1 \to b = -\frac{1}{2}$$
$$a(-1) + b(0) + c(0) = 1 \to a = -1$$

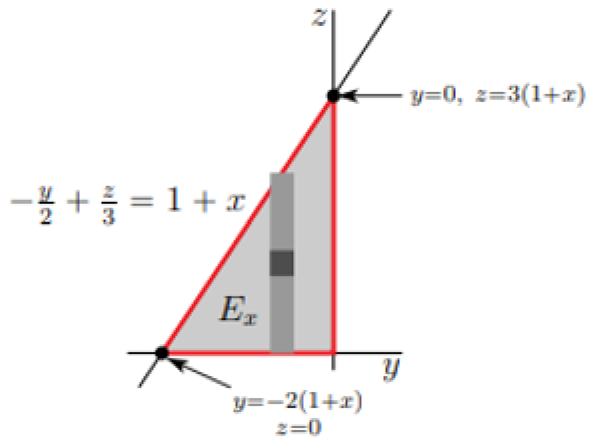
Y así la ecuación del plano que contiene a los tres puntos es

$$-x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z = 1$$

Por lo tanto, E se puede escribir como:

$$E = \left\{(x,y,z): x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0, -x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z \leq 1\right\}$$

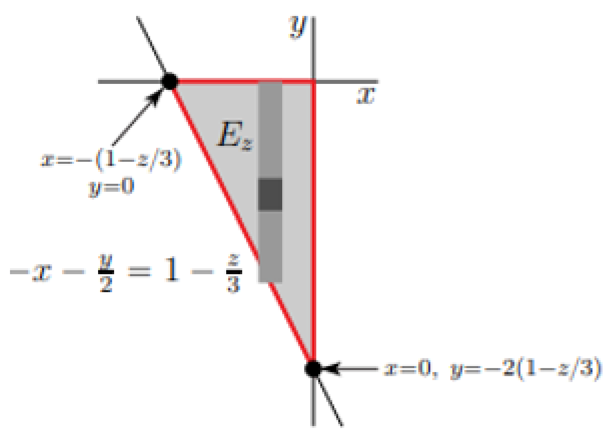
Para escribir la integral I en la forma $\iiint_E f(x,y,z)dzdydx$, debemos mirar la proyección E_x en el plano yz con $-1 < x < 0$:



De donde obtenemos:

$$I = \int_{-1}^{0}\int_{-2(1+x)}^{0}\int_{0}^{3\left(1+x+\frac{y}{2}\right)} f(x,y,z)dzdydx$$

c. Para escribir la integral *I* en la forma $\iiint_E f(x,y,z)dydxdz$, debemos mirar la proyección E_z en el plano xy con $0 < z < 3$:



De donde obtenemos:

$$I = \int_{0}^{3}\int_{-1\left(1-\frac{z}{3}\right)}^{0}\int_{-2\left(1+x-\frac{z}{3}\right)}^{0} f(x,y,z)dydxdz$$

b) Sea $I = \iiint_E \, xzdV$ donde E es el octavo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ con $x, y, z \geq 0$.
   a. Exprese I como una integral triple en coordenadas esféricas.
   b. Exprese I como una integral triple en coordenadas cilíndricas.

Solución:

a. En coordenadas esféricas:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (\rho sen\varphi \cos\theta)(\rho \cos\varphi)\, \rho^2 sen\, \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

b. En coordenadas cilíndricas:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} rz \cos\theta \;\, r dz dr d\theta$$

Fin.