Polinomios

1 Raíces de Polinomios

DEFINICIÓN Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio. Diremos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es una raíz de P si $P(\alpha) = 0$.

DEFINICIÓN Si al dividir P por D en el algorimo de la división nos da que $R = 0$, entonces

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x)$$

y en este caso decimos que:

- P es **divisible** por D o que
- D **divide** a P o que
- D es **factor** de P

y lo denotamos por $D(x)|P(x)$.

PROPOSICIÓN 1 Si $P \in \mathbb{R}[x]$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces:

1. α es raíz de P si y solo si $(x - \alpha)|P(x)$ en $\mathbb{R}[x]$.
2. Si α es raíz de P, entonces existe un menor entero positivo m tal que $(x - \alpha)^m$ divide a P. Además, $P(x) = (x - \alpha)^m Q(x)$ con $Q \in \mathbb{R}[x]$, se tiene que $Q(\alpha) \neq 0$.
3. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ son las raíces dos a dos distintas de P entonces el polinomio $(x - \alpha_1) \cdot \cdots \cdot (x - \alpha_k)$ divide a $P(x)$ en $\mathbb{R}[x]$.

Observación. El punto 1 de la proposición anterior es llamado el teorema del factor.

EJEMPLO 1 Demuestre que $x^2 + x + 1$ es factor de $x^4 + x^2 + 1$.

EJEMPLO 2 Considere el polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.

1. Verifique que 1, -1 y $\dfrac{1}{2}$ son raíces de P.
2. Justifique por qué P no puede tener más de tres raíces.
3. Use el teorema del factor para escribir a P como producto de factores lineales.

EJEMPLO 3 Determine A y B de modo que $P(x) = x^4 + x^3 + Ax^2 + Bx + 30$ sea divisible por $x - 2$ como por $x + 3$.

2 Raíces Racionales

TEOREMA 1 (Teorema de los ceros racionales)
Sea $P \in \mathbb{Z}[x]$ dado por

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \,, \quad a_n \neq 0$$

Si $\alpha = \dfrac{p}{q}$ es una raíz racional de P, con p y q sin factores comunes, entonces $p|a_0$ y $q|a_n$.

EJEMPLO 4 Considere el polinomio $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 2$.

1. Liste las posibles raíces racionales de P. ¿Cuáles de éstas son raíces de P?
2. Sabiendo que P tiene al menos una raíz racional, ¿puede determinar todas las raíces de P?, ¿cuántas de ellas son racionales?

EJEMPLO 5 Resuelva la ecuación $P(x) = 2x^4 - x^3 - 11x^2 + 4x + 12 = 0$.

EJEMPLO 6 Resuelva la ecuación $4x^4 - 4x^3 - 5x^2 + x + 1 = 0$

DEFINICIÓN Un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ no constante es **irreducible** si no existen polinomios reales Q, D de grado mayor o igual a uno y menor que el grado de P tales que

$$P(x) = Q(x)D(x)\,.$$

PROPOSICIÓN 2 Los polinomios reales irreducibles son los polinomios de primer grado y los de segundo grado con discriminante negativo.

PROPOSICIÓN 3 (Factorización en $\mathbb{R}$)
Si $P \in \mathbb{R}[x]$ es tal que $\mathrm{grad}(P) = n \geqslant 1$, entonces existen valores $a_n, c_1, \ldots, c_m$ y $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots, p_s, q_s \in \mathbb{R}$ tales

$$p(x) = a_n(x - x_1)(x - c_2)\cdots(x - c_m)(x^2 + p_1 x + q_1)(x_2 + p_2 x + q_2)\cdots(x^2 + p_s x + q_s)\,.$$

donde $c_1, \ldots, c_m$ son las raíces reales de P, los polinomios $x^2 + p_1 x + q_1, \ldots, x^2 + p_s x + q_s$ (con posible repetición) no tienen raíces reales y a_n es el coeficiente principal de P.

PROPOSICIÓN 4 Todo polinomio real de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

3 Número de raíces de una ecuación

TEOREMA 2 (Teorema Fundamental del Álgebra)[Gauss]
Todo polinomio $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ no constante tiene al menos una raíz compleja

COROLARIO 1 Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio con coeficientes complejos de grado $n \geqslant 1$, entonces existen números complejos $z_1, \ldots, z_n$ tales que

$$P(x) = a_n(x - z_1) \cdot \cdots \cdot (x - z_n)$$

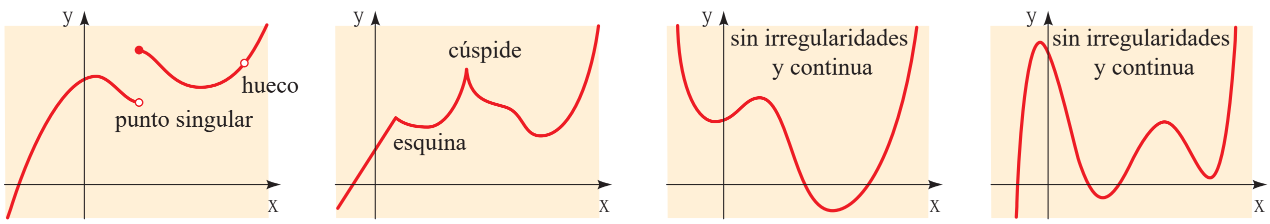
TEOREMA 3
Si $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ y α es una raíz compleja de P, entonces $\overline{\alpha}$ también es raíz de P.

EJEMPLO 7 Si $\alpha = 1 + i$ es raíz del polinomio $P(x) = x^3 - 4x^2 + 6x - 4$, determine las otras raíces de P.

EJEMPLO 8 Determine $a, b \in \mathbb{R}$ para que $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax + b$ tenga raíz $\alpha = 1 + i$.

4 Graficar funciones polinomiales

Las gráficas de polinomios de grado 0 o 1 son rectas, y las gráficas de polinomios de grado 2 son parábolas. Cuanto mayor sea el grado de un polinomio, más complicada puede ser su gráfica. No obstante, la gráfica de una función polinomial es continua. Esto significa que la gráfica no tiene puntos singulares ni huecos (vea Figura). Además, la gráfica de una función polinomial es una curva sin irregularidades; esto es, no tiene esquinas ni puntos agudos (cúspides) como se muestra en la Figura.



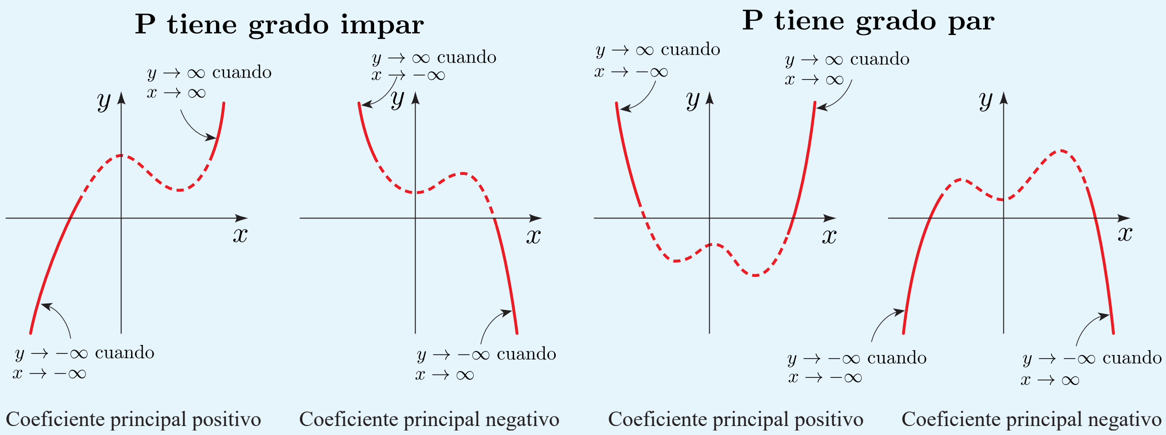
No es gráfica de una función polinomial

No es gráfica de una función polinomial

Gráfica de una función polinomial

Gráfica de una función polinomial

PROPOSICIÓN 5 (Comportamiento final de polinomios)
El comportamiento final de la función polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ está determinado por el grado n y el signo del coeficiente principal a_n, como se indica en las gráficas siguientes.



EJEMPLO 9 Determine el comportamiento final de la función polinomial

$$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7\,.$$

5 Guía de Ejercicios

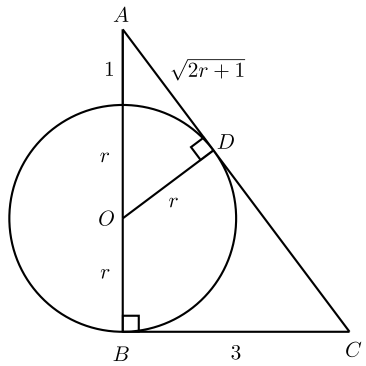
1. Determine el valor de c para que el polinomio $q(x) = x^2 + c$ divida al polinomio $p(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 3$.

2. Al dividir el polinomio $P(x) = \alpha x^4 - x^3 + \beta x^2 + 10x - 2\alpha$ por $x - 1$, el resto es 3 y el cociente es un polinomio que toma el valor 21 cuando $x = 2$. Calcule las constantes α y β.

3. El problema siguiente fue planteado en el siglo XIII por el matemático chino Qin Jinshao:

   > Una ciudad está rodeada por una muralla circular con dos puertas, una al norte y otra al sur. Saliendo por la puerta norte y caminando 1 kilómetro hacia el norte se llega hasta un árbol. Saliendo por la puerta sur, hay que caminar 3 kilómetros hacia el este para ver el mismo árbol.

   Considere la figura que describe la situación del problema. Note que los triángulos ODA y CBA son semejantes por el criterio de semejanza ángulo-ángulo



Entonces, se cumple que

$$\frac{\sqrt{2r+1}}{r} = \frac{2r+1}{3}$$

Calcular el diámetro de la ciudad.

4. Se sabe que al dividir el polinomio $P(x) = x^4 + px^3 + qx^2 - 18x - 12$ por $(x+1)(x+3)$ el resto es $2x+3$. Determine p y q.

5. Considere el polinomio $Q(x) = x^3 + px + q$ con $p, q \in \mathbb{R}$. Determine p, q de modo que $\alpha = 1 + \sqrt{2}i$ sea raíz del polinomio $Q(x)$.

6. Determine la factorización de $R(x) = x^3 + x + 10$ en polinomios irreducibles de $\mathbb{R}$.

7. Sea $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ un polinomio con raíces $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Pruebe que:

$$\alpha\beta\gamma = -c\,, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b\,, \quad \alpha + \beta + \gamma = -a$$

y use esto para encontrar las raíces del polinomio $Q(z) = z^3 - 11z^2 + 44z - 112$ sabiendo que tiene una raíz compleja (esto es, en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) de módulo 4.

8. Sabiendo que la ecuación $z^3 - 9z^2 + 33z = 65$ admite una solución $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de módulo $\sqrt{13}$, determinar todas las soluciones (en $\mathbb{C}$) de la ecuación.

9. Si $n = 3k \pm 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$, probar, sin usar inducción, que $x^{2n} + 1 + (x+1)^{2n}$ es divisible por $x^2 + x + 1$.

10. Sean $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, grad(P(x)) $\geqslant 4$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$. Se sabe que:

    - El resto de dividir $P(x)$ por $(x^2 - b^2)$ es cx.
    - El resto $R(x)$, de dividir $P(x)$ por $(x^2 - b^2)(x - a)$ es un polinomio mónico, es decir, el coeficiente asociado a x^n, donde $n =$ grad$(R(x))$, es igual a 1.

    a) Determine los valores $P(b)$ y $P(-b)$.

    b) Justifique que grad$(R(x)) \leqslant 2$.

    c) Determine $R(x)$.

11. Sea $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$. Sea $R(x)$ el resto de la división de $P(x)$ por $(x-1)$. Si $R(4) = 0$ y $x = i$ es raíz de $P(x)$, calcule a, b y c.

12. Considere el polinomio

$$p(x) = 2x^5 + 3x^4 - 9x^3 + 11x^2 + 4x - 2\,.$$

Factorice $p(x)$ completamente en $\mathbb{R}[x]$. Ayuda: $p(1+i) = 0$ y p tiene una raíz racional.

13. Enuncie el teorema de las raíces racionales indicando todas las hipótesis necesarias. En particular, ¿qué permite decir sobre las raíces racionales del polinomio

$$x^3 - \frac{8}{3}x^2 + kx - 1$$

si k es un número entero.

14. Factorice completamente el polinomio

$$p(x) = x^5 - (2i-6)x^4 - (12i-10)x^3 - (20i-3)x^2 - 6ix$$

Ayuda: $p(2i) = 0$.

15. Encuentre todas las raíces complejas de la ecuación $x^8 - 16 = 0$ y escríbalas en la forma $a + bi$