PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
PRIMER SEMESTRE 2018.

EXAMEN
CALCULO II ⋆ MAT1620

1. Analice la convergencia de la siguiente integral impropia.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

2. *a)* Determine la convergencia de la siguiente serie númerica.

$$\sum_{n\geq 0} ne^{-n^2}$$

   b) Encuentre una representación en serie de potencias para la función

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}.$$

   Determine el respectivo radio de convergencia.

3. Si $z = f(x,y)$ con $x = r\cos(\theta), y = \operatorname{sen}(\theta)$ calcule

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}.$$

4. Encuentre los puntos sobre la superficie $xy^2z^3 = 2$ que son los mas cercanos al origen.

5. Calcule el volumen del sólido que se encuentra dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2+y^2 = 4$.

6. Calcule la siguiente integral
$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{1+y^3}\, dydx.$$

7. Calcule
$$\int\int_E\int (x+2y)\, dV$$
donde E es la región encerrada por $y = x^2$ y los planos $x = z, x = y, z = 0$.

8. Calcule
$$\int\int_E\int z\, dV,$$
donde E es la región que se encuentra entre las esferas $x^2+y^2+z^2 = 1, x^2+y^2+z^2 = 4$ en el primer octante.

UNA SOLUCIÓN.

1. Para analizar la convergencia de la integral pedida comenzamos notando que

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int_2^7 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} + \int_7^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

Para la primera integral, compararemos la función dada con la función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4}.$$

Por lo tanto el comportamiento de las respectivas integrales impropias es el mismo y como

$$\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x-2}},$$

es convergente se tiene que la primera parte es una integral convergente.
Para la segunda integral, comparamos con la función $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Se tiene en este caso,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = 1,$$

por lo tanto nuevamente ambas integrales tienen el mismo comportamiento.

Finalmente se concluye que la integral dada es convergente.
Asignación de puntaje:

- Asignar 1 puntos por separar en las dos integrales a calcular.
- Asignar 1 punto por utilizar, de manera correcta, algún criterio de comparación en la primera integral.
- Asignar 1 punto por concluir de manera correcta la convergencia de la primera integral.
- Asignar 1 punto por utilizar, de manera correcta, algún criterio de comparación en la segunda integral.
- Asignar 1 punto por concluir de manera correcta la convergencia de la segunda integral.
- Asignar 1 punto por concluir la convergencia de la integral pedida.

2. *a*) Para analizar la convergencia de la serie dada, consideremos la función $f(x) = xe^{-x^2}$, la cual es decreciente ($f'(x) < 0$) y claramente continua, luego por el Criterio de la Integral, nos basta analizar la convergencia de la integral

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx.$$

Para esto notamos que

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^c xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2e}.$$

Por lo tanto la serie dada es convergente.

b) Recordamos que para $|x| < 1$ se tiene

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n,$$

luego derivando dentro del intervalo de convergencia se tiene que

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -\sum_{n\geq 0}(-1)^n n x^{n-1},$$

o de manera equivalente

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1} n x^{n-1}, \qquad |x| < 1.$$

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 2 puntos por la correcta aplicación de un criterio de para analizar la convergencia de la serie dada.
- a) Asignar 1 punto por concluir que la serie es convergente. (La conclusión se debe desprender del análisis previo).
- b) Asignar 1 punto por utilizar la serie geométrica respectiva.
- b) Asignar 1 punto por derivar de manera correcta.
- b) Asignar 1 punto por obtener la serie pedida con el radio respectivo.

3. Comencemos calculando $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = f_x x_\theta + f_y y_\theta,$$

lo cual es equivalente a:

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = f_x(-r\operatorname{sen}(\theta)) + f_y(r\cos(\theta)).$$

Para la segunda derivada parcial

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} = (f_{xx}x_r + f_{xy}y_r)(-r\operatorname{sen}(\theta)) + f_x(-\operatorname{sen}(\theta)) + (f_{yx}x_r + f_{yy}y_r)(r\cos(\theta)) + f_y(\cos(\theta)),$$

o de manera equivalente

$$= f_{xx}(-r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)) - f_{xy}(r\operatorname{sen}^2(\theta)) + f_{yx}r\cos^2(\theta) + f_{yy}(r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) - f_x(\operatorname{sen}(\theta)) + f_y(\cos(\theta)).$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por el correcto calculo de la primera derivada pedida.
- Asignar 2 puntos por la correcta utlización de la regla de la cadena en el calculo de la segunda derivada parcial.
- Asignar 2 puntos por llegar a la derivada pedida. Descontar $0,5$ por cada error de signo o númerico en caso de estar bien el desarrollo pero no llegar a la expresión pedida.

4. La función que determina la distancia de un punto (x, y, z) al origen $(0, 0, 0)$ es $\sqrt{x^2 + y^2 + x^2}$. Consideraremos su cuadrado, es decir debemos resolver el siguiente problema

$$Min x^2 + y^2 + z^2, \qquad \text{sujeto a} \quad xy^2z^3 = 2.$$

Las condiciones de Lagrange son en este caso, junto con la condición dada por la restricción:

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda y^2 z^3 \\ 2y &= 2\lambda yxz^3 \\ 2z &= 3\lambda xy^2 z^2 \\ xy^2z^3 &= 2. \end{aligned}$$

Al resolver encontramos las siguientes soluciones

$$\left(\pm\sqrt[4]{3}, \pm\sqrt{2}\sqrt[4]{3}, \frac{\pm 1}{\sqrt[4]{3}} \right)$$

Pero sólo el punto

$$\left(\sqrt[4]{3}, \sqrt{2}\sqrt[4]{3}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right),$$

pertenece a la superficie dada. Este punto es el punto sobre la superficie mas cercano al origen.
Asignación de puntaje:

a) Asignar 2 puntos por plantear de manera correcta el sistema que da cuenta de la respectiva condición de Lagrange.

b) Asignar 2.5 puntos por resolver de manera correcta el sistema.

c) Asignar 1,5 puntos por encontrar el puntos pedido.

5. Denotamos por V el volumen pedido, calcularemos V_s el volumen para $z \geq 0$. Se tiene, usando coordenadas polares,

$$V_s = \int_0^{2\pi} \int_2^4 \sqrt{16 - r^2} r \, dr d\theta.$$

al calcular esta integral obtenemos

$$V_s = 16\pi\sqrt{3},$$

por lo tanto el volumen pedido es $V = 32\pi\sqrt{3}$.
Asignación de puntaje:

- Entregar 3 puntos por la correcta utilización de algún método que permita calcular el volumen respectivo (coordenadas cartesanas, coordenadas polares. etc.)
- Entregar 3 puntos por calcular el volumen de manera correcta. Descontar 0.5 por cada error númerico.

6. Para calcular la integral pedida, cambiaremos el orden de integración, es decir, la región de integración dada se puede describir como

$$\begin{aligned} \sqrt{x} \leq y \leq 2. \\ 0 \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

Tambien puede describirse de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} 0 \leq & x \leq y^2 \\ 0 \leq & y \leq 2. \end{aligned}$$

Con lo cual la integral puede rescribirse como

$$\int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{1}{1+y^3} \, dx dy = \int_0^2 \frac{y^2}{1+y^3} \, dy = \frac{1}{3} \ln(9).$$

7. Comencemos revisando los respectivos bordes de integración

$$\begin{aligned} 0 \leq & z \leq x \\ x^2 \leq & y \leq x \\ 0 \leq & x \leq 1. \end{aligned}$$

Con lo cual la integral pedida resulta ser,

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x \int_0^x (x+2y)\, dzdydx = \frac{2}{15}.$$

Asignación de puntaje:

- Entregar 2.5 puntos por la descripción correcta de la región de integración.
- Entregar 2 puntos por el calculo de la integral triple.
- Entregar 1.5 puntos por determinar de manera correcta el valor pedido.

8. Para calcular la integral pedida utilizaremos coordenadas ésfericas, con lo cual nuestra integral puede escribirse como sigue,

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_1^2 (r\cos(\varphi))r^2 \operatorname{sen}(\varphi)\, drd\theta d\varphi = \frac{15\pi}{16}.$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 2.5 puntos por la descripción correcta de la región de integración.
- Asignar 1 punto por la inclusión correcta del Jacobiano.
- Asignar 1.5 puntos por el calculo de la integral triple.
- Entregar 1 puntos por determinar de manera correcta el valor pedido.