PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MAT1620 - EXAMEN

29 de Junio de 2012

1. Considere la curva C dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = 3t^2, \qquad y = 3t - t^3, \qquad t \in [0,1].$$

(a) Sea R la región comprendida entre C y el eje OX. Hallar el volumen del sólido engendrado por la rotación de la región R en torno al eje OY.

(b) Hallar el área de la superficie de revolución engendrada por rotación de C en torno al eje OX.

Solución: (a) Por la fórmula del volumen de un sólido generado por la rotación de una región entre una curva y el eje OX, en torno al eje OY se tiene

$$V = \int_0^1 2\pi x(t)\, y(t)\, dx.$$

Según las ecuaciones paramétricas tenemos que $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ y $dx = 6t\, dt$. Entonces el volumen queda

$$V = \int_0^1 2\pi(3t^2)(3t - t^3)6t\, dt = 36\pi \int_0^1 (3t^4 - t^6)\, dt = 36\pi\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{7}\right) = \frac{576}{35}\pi.$$

(b) Por la fórmula del área de una superficie de revolución en torno al eje OX se tiene

$$A = \int_0^1 2\pi y(t)\, ds.$$

Como la curva viene dada en forma paramétrica se tiene que

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Luego,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(6t)^2 + (3 - 3t^2)^2} = \sqrt{36t^2 + 9 - 18t^2 + 9t^4} = \sqrt{(3t^2+3)^2}.$$

Entonces el área queda

$$A = \int_0^1 2\pi(3t - t^3)(3t^2 + 3)\, dt = 2\pi \int_0^1 (9t^3 + 9t - 3t^5 - 3t^3)\, dt = 2\pi\left(\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)$$
$$= 11\,\pi.$$

2. (a) Indique para que valores de $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3 x^{4n}}{(3n)!}$$

es convergente o divergente.

(b) Sea la integral

$$I := \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Determine una aproximación I_0 del valor I tal que

$$|I - I_0| \leq 10^{-1}.$$

Solución: (a) El criterio del cociente aplicado a la serie de términos positivos $a_n = \frac{(n!)^3 x^{4n}}{(3n)!}$ nos da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{((n+1)!)^3 x^{4(n+1)}}{(3(n+1))!}}{\frac{(n!)^3 x^{4n}}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 x^4}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{x^4}{27}.$$

Entonces, la serie converge si

$$\frac{x^4}{27} < 1 \iff |x| < 27^{1/4},$$

y la serie diverge si

$$\frac{x^4}{27} > 1 \iff |x| > 27^{1/4}.$$

En el caso límite $|x| = 27^{1/4}$, el cociente $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ verifica para todo $n \geq 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^3\, 27}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{(3n+3)(3n+3)}{(3n+1)(3n+2)} > 1.$$

Pues, $a_n > a_{n-1}$ para todo $n \geq 1$, y el término de la serie no tiende a 0. Entonces, la serie diverge en el caso $|x| = 27^{1/4}$.

En resumen, hemos encontrado que la serie converge si $x \in (-27^{1/4}, 27^{1/4})$ y que la serie diverge si $x \in (-\infty, -27^{1/4}] \cup [27^{1/4}, \infty)$.

(b) Como $\mathrm{e}^t = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}$ para todos $t \in \mathbb{R}$, la sustitución $t = -x^2$ da

$$\mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^{2k} \quad \text{para todos } x \in \mathbb{R}.$$

El radio de convergencia de esta serie es todo $\mathbb{R}$, entonces se puede integrar término a término:

$$\begin{aligned} I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^{2k} \right) \mathrm{d}x &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{2k}\, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \left. \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right|_{x=0}^{x=1} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}. \end{aligned}$$

I es una serie alternada, entonces sabemos por el Teorema de Leibniz que

$$\left| I - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} \right| \leq \frac{1}{n!\,(2n+1)} \quad \text{para todos } n \geq 0.$$

Pues, para que el error cometido al aproximar I por la suma parcial $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)}$ sea más chico que 10^{-1}, uno debe encontrar un $n \geq 0$ tal que

$$\frac{1}{n!\,(2n+1)} \leq 10^{-1}.$$

Un calculo para $n = 0, 1, 2$ da

$$\frac{1}{0!\,(2 \cdot 0 + 1)} = 1, \qquad \frac{1}{1!\,(2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{1}{2!\,(2 \cdot 2 + 1)} = \frac{1}{10}.$$

Luego, es suficiente tomar $n = 2$ en la suma parcial. En resumen, una buena aproximación del valor I (con error más chico que 10^{-1}) es

$$I_0 = \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{k!\,(2k+1)} = \frac{1}{0!\,(2 \cdot 0 + 1)} - \frac{1}{1!\,(2 \cdot 1 + 1)} + \frac{1}{2!\,(2 \cdot 2 + 1)} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} = \frac{23}{30}.$$

3. (a) Estudie la convergencia de
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}}.$$

   (b) Hallar la curvatura, en cada punto en que ella exista, de la curva en el plano cuya ecuacion polar es $r(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. Si hay puntos en los que la curvatura no exista indíquelos.

Solución: (a) La integral es impropia de primera y de segunda especie. Debemos pues separarla

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}}}_{I_2}$$

- Respecto de I_1 tenemos que, cerca de $x = 0$,

  $$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

  En efecto,

  $$\lim_{x \to 0+} \frac{1/\sqrt[3]{x^4 + x^2}}{1/\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{x \to 0+} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^4 + x^2}} = \lim_{x \to 0+} \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + 1}} = 1.$$

  Luego, como $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}}$ converge (integral de x^{-p} con $p < 1$) concluímos que I_1 converge también.

- Respecto de I_2 tenemos que, cuando $x \to \infty$,

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + x^2}} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

En efecto,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1/\sqrt[3]{x^4+x^2}}{1/\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^4}{x^4+x^2}} = \lim_{x\to 0+} \sqrt[3]{\frac{1}{1+1/x^2}} = 1.$$

Luego, como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4}} = \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{4/3}}$ converge (integral de x^{-p} con $p > 1$) concluímos que I_2 converge también.

Por tanto, la integral dada converge.

(b) Como $x = r(\theta)\cos(\theta)$ e $y = r(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)$, la parametrización de la curva es

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(\theta) & = & (1+\cos(\theta))\cos(\theta) \\ y(\theta) & = & (1+\cos(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta) \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad \vec{r}(\theta) = (\, x(\theta),\, y(\theta),\, 0\,).$$

Como la curvatura es $\kappa = \dfrac{||\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''||}{||\vec{r}\,'||^3}$, para nuestro caso esto se traduce en

$$\kappa = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^{\,2} + y'^{\,2})^{3/2}}.$$

De las expresiones de arriba y de la fórmula $\mathrm{sen}(2\theta) = 2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)$ tenemos que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(\theta) & = & -\big(\mathrm{sen}(\theta) + \mathrm{sen}(2\theta)\big) \\ y'(\theta) & = & \cos(\theta) + \cos(2\theta) \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x''(\theta) & = & -\big(\cos(\theta) + 2\cos(2\theta)\big) \\ y''(\theta) & = & -\big(\mathrm{sen}(\theta) + 2\,\mathrm{sen}(2\theta)\big) \end{array} \right.$$

por tanto, ejecutando las operaciones indicadas y utilizando la fórmula $\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \mathrm{sen}(\theta)^2$, deducimos

$$\kappa = \frac{||\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''||}{||\vec{r}\,'||^3} = \frac{|3 + 3\cos(\theta)|}{\big(2 + 2\cos(\theta)\big)^{3/2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\,\frac{1+\cos(\theta)}{(1+\cos(\theta))^{3/2}}.$$

Por tanto, la curvatura no existe cuando $\cos(\theta) = -1$. Esto es, cuando $\theta = \pi$.

4. (a) Encuentre todos los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que la curva $\Gamma_{a,b,c} = \{r(t) : t \in \mathbb{R}\}$ parametrizada por

$$r(t) = (a + t + t^2, t^2 + bt^3, t + ct^3)$$

sea una curva plana.

(b) Para $\Gamma_{a,b,c}$ de la parte a), encuentre la ecuación normal del plano que la contiene.

Solución: (a) Sabemos que $\Gamma_{a,b,c}$ es una curva plana si y solo si su torsión es 0. Dado que

$$\tau = \frac{||(r' \times r'') \cdot r'''||}{||r'||^3}$$

entonces $\Gamma_{a,b,c}$ es plana si y solo si $r' \cdot (r'' \times r''') = (r' \times r'') \cdot r''' = 0$.
Calculamos

$$\begin{aligned} r'(t) &= (1+2t, 2t+3bt^2, 1+3ct^2) \\ r''(t) &= (2, 2+6bt, 6ct) \\ r'''(t) &= (0, 6b, 6c) \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$r'' \times r''' = \big((2+6bt)*6c - 6ct*6b, -2*6c, 2*6b\big) = 12(c, -c, b).$$

De aquí

$$r' \cdot (r'' \times r''') = 12\Big(c*(1+2t) - c*(2t+3bt^2) + b*(1+3ct^2)\Big) = 12(c+b)$$

y podemos concluir que $\tau(t) = 0$ para todos $t \in \mathbb{R}$ si y solo si $c = -b$. El valor de a es cualquiera y la curva $\Gamma_{a,b,c}$ es plana si y solo si los parámetros están en el conjunto

$$\big\{(a,b,c) : a, b \in \mathbb{R},\ c = -b\big\}.$$

(b) La parametrización de $\Gamma_{a,b,-b}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} r(t) &= \big(a+t+t^2, t^2+bt^3, t-bt^3\big) \\ &= \big(a,0,0\big) + (t+t^2)\big(1,1,0\big) + (t-bt^3)\big(0,-1,1\big) \end{aligned}$$

de donde se ve que $\Gamma_{a,b,-b}$ se encuentra en el plano

$$\Pi_a := \big\{(a,0,0) + u(1,1,0) + v(0,-1,1) : u, v \in \mathbb{R}\big\}.$$

Dado que $(a,0,0) \in \Pi_a$, que $(1,1,0) \times (0,-1,1) = (1,-1,-1)$ y $(1,-1,-1) \cdot (a,0,0) = a$, una ecuación normal de Π_a es

$$\Pi_a = \big\{(x,y,z) : (x,y,z) \cdot (1,-1,-1) = a\big\}.$$

Otra solución para (b) Dado que la curva es plana, otra forma de encontrar el plano que contiene a $\Gamma_{a,b,-b}$ es construyendo el plano osculador de la curva en cualquier punto donde T, N existan. Además, el plano generado por T, N en tal punto será el mismo que el generado por r', r''. Observamos que en $t = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} r(0) &= (a,0,0) \\ r'(0) &= (1,0,1) \\ r''(0) &= (2,2,0) \end{aligned}$$

y por ende el plano osculador en $t = 0$, y por lo tanto el plano que contiene a $\Gamma_{a,b,-b}$, es

$$\Pi_a := \big\{(a,0,0) + u(1,0,1) + v(2,2,0) : u, v \in \mathbb{R}\big\}.$$

Tomando producto cruz de los vectores directores y observando que $(a,0,0)$ pertenece al plano, obtenemos una ecuación normal de Π_a

$$\Pi_a = \big\{(x,y,z) : (x,y,z) \cdot (-2,2,2) = -2a\big\}.$$