Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
PAUTA Examen

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -5 \\ -2 & 5 & -9 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

   (a) Encuentre una condición para a, b y c que permita que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{z}$ sea consistente e indique, en ese caso, cuántas soluciones existen.

   (b) Determine las dimensiones de $\text{Col}(A)$, $\text{Fil}(A)$ y $\text{Nul}(A)$.

Solución

(a) Determinamos una forma escalonada de la matriz ampliada $[A|\mathbf{z}]$:

$$[A|\mathbf{z}] = \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ -2 & 5 & -9 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{lll|c} 1 & -4 & 7 & a \\ 0 & 3 & -5 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2a+b+c \end{array}\right].$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones, el sistema de ecuaciones es consistente si y sólo si

$$2a + b + c = 0.$$

Más aún, como la matriz ampliada tiene 2 pivotes pero el sistema tiene 3 variables, en el caso que el sistema sea consistente, éste tendrá infinitas soluciones.

(b) De la FE de la matriz A vemos que el rango de A es 2 y hay una variable libre. Como $\text{rank}(A) = \dim \text{Col}(A) = \dim \text{Fil}(A)$, entonces $\dim \text{Col}(A) = 2$, $\dim \text{Fil}(A) = 2$ y $\dim \text{Nul}(A) = 1$.

Puntaje

(a)
- 1 punto por escalonar correctamente la matriz
- 1 punto por determinar una condición correcta sobre a, b, c para que el sistema sea consistente.
- 1 punto por indicar que si el sistema es consistente, tiene infinitas soluciones.

(b)
- 1 punto por determinar que $\dim \text{Col}(A) = 2$.
- 1 punto por determinar que $\dim \text{Fil}(A) = 2$.
- 1 punto por determinar que $\dim \text{Nul}(A) = 1$.

2. Sea A una matriz de 4×4 definida por

$$\begin{bmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{bmatrix}$$

(a) Calcule el determinante de A. (4 pts)

(b) Determine los valores de a para que la matriz sea invertible. (2 pts)

Solución

(a)

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a-2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & a-2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = a(a-2)^3.$$

(b) A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$, es decir, $a \neq 0$ y $a \neq 2$.

Puntaje

(a)
- 4 puntos si aplica correctamente operaciones elementales, o bien definición por cofactores, y obtiene el determinante correcto.
- Asignar sólo 2 puntos si comete errores en las operaciones y/o cálculos, pero obtiene un resultado de determinante.

(b)
- 2 puntos por encontrar los valores correctos de a, en función del determinante obtenido.

3. (a) Despeje la matriz X de la ecuación matricial sabiendo que A y B son invertibles:

$$(AX^{-1}B)^T = AB.$$

(b) Determine la descomposición LU de la matriz X si $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución

(a)

$$\begin{aligned}(AX^{-1}B)^T = AB &\Leftrightarrow AX^{-1}B = B^T A^T \\ &\Leftrightarrow X^{-1} = A^{-1}B^T A^T B^{-1} \\ &\Leftrightarrow X = B(A^{-1})^T (B^{-1})^T A\end{aligned}$$

(b) Notar que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Así:

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = LU \end{aligned}$$

Puntaje

(a)
- 3 puntos por despejar correctamente X en cualquier expresión equivalente a la mostrada en la pauta.
- Restar 1 punto por cada error de cálculo en operaciones de matrices.

(b)
- Asignar 3 puntos si calcula la factorización LU correcta.
- Asignar sólo 2 puntos si determina una factorización LU, pero comete errores aritméticos en las operaciones entre matrices.
- Asignar sólo 1 punto por calcular correctamente las inversas y las transpuestas de las matrices involucradas, a pesar de no encontrar una factorización LU.

4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdadero, haga una demostración en general. En caso de ser falso, compruebe con un contraejemplo.

   (a) El conjunto de matrices reales de 2×2 de determinante 0 es un espacio vectorial.

   (b) La transformación definida por $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $T(x) = 2^x$ es lineal.

Solución

(a) Falso. Solución Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $\det A = \det B = 0$, de modo que A y B están en W. Pero

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que $\det(A + B) = 1 \neq 0$, y por tanto $A + B$ no está en W. Por tanto, W no es cerrado para la suma y en consecuencia no es un espacio vectorial.

(b) Falso. Sean $x = 1$ y $y = 2$. Entonces

$$T(x + y) = T(3) = 2^3 = 8 \neq 6 = 2^1 + 2^2 = T(x) + T(y)$$

de modo que T no es lineal.

Puntaje

- Asignar 3 puntos si identifica correctamente si la afirmación es verdadera o falsa y justifica correctamente su respuesta.
- Asignar sólo 1 punto si identifica correctamente si la afirmación es verdadera o falsa y justifica pero lo hace de manera incorrecta.
- Asignar 0 puntos si no hay justificación a la respuesta.

5. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ la transformación lineal tal que

$$T(x^2) = x, \quad T(x-1) = x+1, \quad T(1) = 2.$$

(a) Calcule $T(x)$.

(b) Encuentre la matriz de T con respecto a la base estándar $\mathcal{E} = \{x^2, x, 1\}$ de $\mathbb{P}_2$.

(c) Determine si la matriz obtenida en el ítem anterior es diagonalizable.

Solución

(a) $T(x) = T((x-1)+1) = T(x-1) + T(1) = (x+1) + 2 = x + 3$.

(b)

$$[T]_{\mathcal{E}} = \left[\ [T(x^2)]_{\mathcal{E}} \quad [T(x)]_{\mathcal{E}} \quad [T(1)]_{\mathcal{E}}\ \right] = \left[\ [x]_{\mathcal{E}} \quad [x+3]_{\mathcal{E}} \quad [2]_{\mathcal{E}}\ \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(c) La matriz es triangular inferior por lo que sus valores propios son los elementos de su diagonal, esto es, 0, 1 y 2. Como son todos distintos, entonces la matriz es diagonalizable.

Puntaje

(a)
- 1 punto por descomponer el polinomio $x^2 - x$ respecto de $x - 1$ y 1
- 1 punto por calcular correctamente $T(x^2 - x)$

(b)
- 1 punto por establecer, explícita o implícitamente, una forma de calcular $[T]_{\mathcal{E}}$.
- 1 punto por calcular correctamente $[T]_{\mathcal{E}}$.

(c)
- 2 puntos por justificar correctamente si la matriz es diagonalizable, independiente si la matriz del ítem anterior sea la correcta.
- Asignar sólo 1 punto si no justifica correctamente si la matriz es diagonalizable, independiente si la matriz del ítem anterior sea la correcta.

6. (a) Encuentre una solución de mínimos cuadrados para el sistema inconsistente $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(b) Encuentre la mejor aproximación al vector $\mathbf{b}$ en el espacio columna de A.

Solución 1

(a) Calculamos A^TA y $A^T\mathbf{b}$:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es una solución de $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. Así:

$$[A^TA|A^T\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 3 \\ -3 & 9 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Por lo tanto una solución de mínimos cuadrados es $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) La mejor aproximación al vector $\mathbf{b}$ en el espacio columna de A es el vector

$$A\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solución 2

(a) Buscamos una base ortogonal de Col(A). Por el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt basta definir

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Calculamos la proyección $\text{proy}_{\text{Col}(A)}(\mathbf{b})$ usando la base ortogonal $\{\mathbf{v_1}, 2\mathbf{v_2}\}$:

$$\text{proy}_{\text{Col}(A)}(\mathbf{b}) = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|^2} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora buscamos una solución del sistema $A\mathbf{x} = \text{proy}_{\text{Col}(A)}(\mathbf{b})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es la solución de mínimos cuadrados buscada.

(b) La mejor aproximación al vector $\mathbf{b}$ del espacio $\text{Col}(A)$ es $\text{proy}_{\text{Col}(A)}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Puntaje

(a)
- 2 puntos por establecer una manera apropiada de encontrar una solución de mínimos cuadrados del sistema.
- 2 puntos por determinar una solución de mínimos cuadrados.

(b)
- 1 punto por identificar cómo encontrar la mejor aproximación al vector $\mathbf{b}$.
- 1 punto por calcular el vector buscado $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

7. Suponga que la siguiente factorización es una DVS de una matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

donde σ es algún número real distinto de 0. Sin calcular A explícitamente, responda:

(a) ¿Cuál es el rango de A?

(b) Encuentre una diagonalización ortogonal para la matriz simétrica AA^T.

(c) Clasifique la forma cuadrática de la matriz AA^T.

Solución

(a) El rango de A corresponde a la cantidad de valores singulares no nulos. Puesto que la matriz Σ tiene sólo una entrada no nula, entonces $\text{rank}(A) = 1$.

(b) Ya que $A = U\Sigma V^T$ y $V^TV = I$ por ser una matriz ortogonal, entonces

$$\begin{aligned} AA^T &= (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = (U\Sigma V^T)(V\Sigma^T U^T) = U\Sigma(V^TV)\Sigma^T U^T = U\Sigma\Sigma^T U^T \\ &= U \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^T = U \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} U^T. \end{aligned}$$

Ya que U también es una matriz ortogonal, entonces la diagonalización buscada es

$$AA^T = P \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^T,$$

donde $P = U = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} \\ 2/3 & 0 & 5/\sqrt{45} \end{bmatrix}$.

(c) Por la diagonalización anterior, los valores propios de AA^T son $\sigma^2 > 0$ y 0 (de multiplicidad algebraica 2), por lo que la forma cuadrática correspondiente es semidefinida positiva.

Puntaje

(a) 2 puntos por determinar correctamente el rango de A.

(b) 2 puntos por diagonalizar correctamente la matriz AA^T.

(c) 2 puntos por clasificar correctamente la forma cuadrática, según los cálculos del ítem anterior.