PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2019

Pauta Interrogación 2 - MAT1610

1. Sea g la función definida por

$$g(x) = (x^2+1)^{f(2x)}$$

donde f es una función tal que

x	1	-1	2	-2	5	-5
$f(x)$	2	-3	3	4	-2	1
$f'(x)$	1	-2	-3	2	4	-5

Determine $g'(-1)$.

Solución:

Observe que

$$\ln(g(x)) = f(2x)\ln(x^2+1)$$

por lo tanto, derivando está igualdad, obtenemos que

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = 2f'(2x)\ln(x^2+1) + f(2x)\frac{2x}{x^2+1}$$

luego,

$$g'(x) = g(x)\left(2f'(2x)\ln(x^2+1) + f(2x)\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

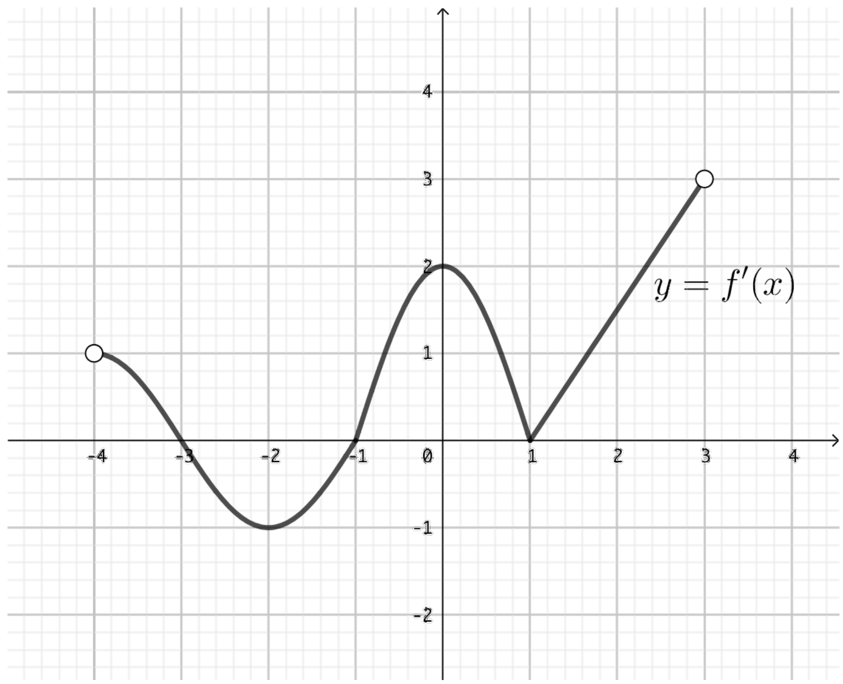
evaluando en $x=-1$, tenemos

$$g'(-1) = g(-1)\left(2f'(-2)\ln(2) + f(-2)\frac{-2}{2}\right) = 2^4(4\ln(2)-4)$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por usar correctamente la derivada logarítmica
- (2 puntos) Por la regla la cadena correcta
- (2 puntos) Por hacer los reemplazos correctamente

2. Sea f una función derivable en $]-4,3[$ y tal que el gráfico de su **derivada** es el de la figura adjunta.



Determine dónde se alcanzan los extremos locales de f y los puntos de inflexión.
NOTA: Para referirse a un punto de la gr fica de f cuya abscisa sea a, escriba $(a, f(a))$.

Solución:

Del gráfico de $y = f'(x)$ tenemos que $f'(-3) = f'(-1) = f'(1) = 0$, por lo tanto $x = -3, x = -1$ y $x = 1$ son posibles puntos donde se obtienen los extremos locales, sin embrago sólo en $x = -3$ y $x = -1$ la derivada cambia de signo, en el primero de estos valores cambia de + a - y en $x = -1$ de - a +.

Por lo tanto, tenemos que $f(-3)$ es máximo local y $x = -1$ es mínimo local.

Por otra parte los puntos de inflexión, son puntos de la forma $(a, f(a))$ en los que f es continua a y la cóncavidad cambia. Observe que para que cambie la cóncavidad de f debe cambiar la monotoná de f', del gráfico vemos que esto pasa en $(-2, f(-2)), (0, f(0))$ y $(1, f(1))$.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por máximo local, justificadamente. Descontar 1 punto si dice que el máximo ES $x = -3$
- (2 puntos) Por mínimo local, justificadamente. Descontar 1 punto si dice que el mínimo ES $x = -1$
- (2 puntos) Por los puntos de inflexión justificadamente. Descontar 1 punto si no lo expresa como punto.

3. La función $f(x) = 2x + e^x$ es una función invertible. Determine $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

Solución:

Usando la fórmula para la derivada de la inversa de una función, tenemos que

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por la fórmula de la derivada de la inversa
- (2 puntos) por derivar correctamente f
- (2 puntos) por identificar que $f^{-1}(1) = 0$ y usar esto en la fórmula.

4. Demuestre que la ecuación

$$= 3x = \cos(x)$$

tiene sólo una solución en $\mathbb{R}$.

Solución:

Al considerar la función $h(x) = 3x - \cos(x)$ observamos que h es continua en todo $\mathbb{R}$ y que $h(0) = -1 < 0$ y $h(1) = 3 - \cos(1) > 2$, por lo tanto por TVI tenemos que al menos h tiene un cero o equivalentemente que la ecuación planteada tiene al menos una solución real.

Por otra parte, al suponer que tiene al menos dos soluciones a y b, tenemos que h cumple las hipótests del Teorema de Rolle (o TVM), por lo tanto existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 3 + \operatorname{sen}(c) = 0$, lo que es imposible, por lo tanto h tiene exactamente un cero real, es decir, la ecuación planteada tiene sólo una solución en $\mathbb{R}$.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por demostrar que al menos hay una solución, debe incluir verificación de hipótesis de TVI, de lo contrario descontar 1 punto.
- (2 puntos) Por verificar hipótesis del TVM o Rolle al suponer que hay más de una
- (2 puntos) por concluir

5. Sea $f(x) = 1 + ex + e^{-x}$. Bosqueje el gráfico de f indicando explícitamente los intervalos de monotonía, concavidad y asíntotas.

Solución:

Observemos primero que f es continua en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto no tiene asíntotas verticales, por otra parte

$$\lim_{x\to\infty} (1 + ex + e^{-x}) = \infty \text{ y } \lim_{x\to-\infty} (1 + ex + e^{-x}) = \infty$$

por lo tanto tampoco tiene asíntotas horizontales.

Observemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1 + ex + e^{-x})}{x} = e \text{ y que } \lim_{x\to\infty} (1 + ex + e^{-x} - ex) = 1$$

por lo tanto la recta $y = 1 + ex$ es una asíntota oblicua. (otro argumento que es directo es observar que $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, por lo tanto de manera directa se ve que $y = 1 + ex$ es asíntota.)

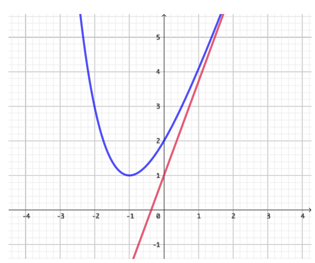
Por otra parte $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(1 + ex + e^{-x})}{x} = -\infty$ entonces no tiene asíntotas oblicuas para el extremo izquierdo del gráfico.

Para estudiar la cóncavidad y monotonía derivamos la función obteniendo que

$$f'(x) = e - e^{-x} \text{ y que } f''(x) = e^{-x}$$

Donde concluimos que $f'(x) > 0$ si y sólo si $x > -1$, luego es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, \infty)$.

Por otra parte $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego f es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$



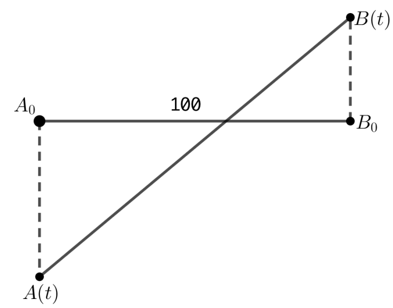
Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por estudio correcto de asíntotas
- (2 punto) por monotonía
- (1 punto) por cóncavidad
- (1 punto) por gráfico

6. A mediodía el barco A está a 100 km al oeste del barco B. El barco A se dirige al sur a 35 km/hr y el barco B va hacia el norte a 25 km/hr ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre estos barcos a las 16:00 hrs del mismo día?

   Solución:

   La situación descrita se ilustra en el siguiente diagrama



   y en el podemos ver que si $D(t)$ corresponde a la distancia entre los barcos después de t horas, tenemos que

$$D^2(t) = (A(t) + B(t))^2 + 100^2$$

   donde $A(t)$ y $B(t)$ corresponde a la distancia de cada barco después de t horas.

   Al derivar la igualdad anterior tenemos que

$$2D(t)D'(t) = 2(A(t) + B(t))(A'(t) + B'(t))$$

   Además del enunciado tenemos que $A(4) = 140, A'(4) = 35, B(4) = 100$ y que $B'(4) = 25$, al reemplazar esta información obtenemos que, la distancia entre los barcos, $D(t)$, cambia a $D'(4)$ km/hr, con

$$D'(4) = \frac{240 \cdot 60}{\sqrt{240^2 + 100^2}} = \frac{240 \cdot 60}{260}$$

   Distribución de puntajes:

   - (2 puntos) Por plantear correctamente las relaciones que definen la distancia
   - (2 puntos) Por derivar correctamente la relación
   - (2 puntos) Por determinar la respuesta, NO descontar si no simplifica valor