PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027
Solución Ayudantía 3

1. Suponga que en una bolsa se tienen 4 chocmans, 8 doblones y 5 bon o bon. Se decide que a usted le regalaran 6 chocolates de esta bolsa, con la condición de que se extraigan aleatoriamente sin reemplazo. Encuentre la probabilidad de que le toquen 2 chocman, 3 doblones y un bon o bon.

   Vamos a realizar extracciones sin orden y sin reemplazo, pues nos da igual que nos salga primero un chocman y después un bon o bon, al final tendremos igual ambos chocolates. En total vamos a extraer

$$2 \text{ chocmans } + 3 \text{ doblones} + 1 \text{bon o bon} = 6 \text{ chocolates}$$

   de 17 chocolates que hay en la bolsa. Podemos calcular la probabilidad pedida mediante casos favorables y casos totales. Definamos

$$A = \text{se extraen 2 chocmans, 3 doblones y un bon o bon}$$

   Para extraer los 6 chocolates, tenemos

$$N(\Omega) = \binom{17}{6}$$

   Ahora, nos interesan 2 chocmans de un total de 4, hay

$$\binom{4}{2}$$

   combinaciones para elegir los dos chocmans. Nos interesan 3 doblones de un total de 8, hay

$$\binom{8}{3}$$

   combinaciones para elegir los tres doblones. Finalmente, nos interesa un bon o bon de un total de 5, hay

$$\binom{5}{1}$$

   combinaciones para elegir un bon o bon.

Teniendo asi

$$N(A) = \binom{4}{2}\binom{8}{3}\binom{5}{1}$$

Luego, la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{\binom{4}{2}\binom{8}{3}\binom{5}{1}}{\binom{17}{6}} \\ &= 0.1357466 \end{aligned}$$

Propuesto: ¿Como cambia el ejercicio si ahora es con reemplazo?

2. En el curso de Modelos Probabilísticos hay 42 estudiantes, de los cuales 19 son de la sección EYP1025 y el resto de la sección EYP1027. Suponga que para la $I1$ se sabe que 4 estudiantes no estarán presentes el momento de rendir la evaluación. ¿Cual es la probabilidad de que los cuatro estudiantes sean se la sección EYP1027? ¿Cual es la probabilidad de que 3 de ellos sean de la sección EYP1027 y 1 de la sección EYP1025?

   Podemos anotar los datos primero.

   - Total: 42 Estudiantes
     - 19 - EYP1025
     - 23 - EYP1027
   - 4 Estudiantes no asistirán

   Note que esto se puede ver como un muestreo aleatorio, pues los estudiantes que no asisten no se pueden repetir (sin reemplazo) y no nos importa si salio primero uno u otro (los 4 no asisten). Entonces podemos aplicar casos favorables y casos totales. Vamos a extraer 4 estudiantes de un total de 42, esto corresponde a

   $$N(\Omega) = \binom{42}{4}$$

   Definamos el evento $A =$ 4 estudiantes son de la sección $EYP1027$ y 0 son de la $EYP1025$. Queremos que cuatro estudiantes sean de la sección $EYP1027$, hay

   $$\binom{19}{4}$$

   combinaciones para que esto pase. Y queremos que 0 sean de la sección $EYP1025$, esto es

   $$\binom{23}{0}$$

tenemos

$$N(A) = \binom{19}{4}\binom{23}{0}$$

Luego, la probabilidad el evento A es

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} \\
&= \frac{\binom{19}{4}\binom{23}{0}}{\binom{42}{4}} \\
&= 0.03462879
\end{aligned}$$

Ahora definamos $A = 3$ de los estudiantes son de la sección $EYP1027$ y 1 de $EYP1025$. Procediendo de forma análoga al anterior tenemos que

$$N(A) = \binom{23}{3}\binom{19}{1}$$

Luego, la probabilidad del evento A es

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} \\
&= \frac{\binom{23}{3}\binom{19}{1}}{\binom{42}{4}} \\
&= 0.3006254
\end{aligned}$$

3. Un software tiene la capacidad de generar letras aleatorias de la lista $\{a_1, a_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ de manera equiprobable. En la lista se tienen dos tipos de letras, a_i y p_i. Se le pide al programa que genere 7 letras con reemplazo ¿Cual es la probabilidad de que se obtengan dos letras del tipo a_i? ¿Cual es la probabilidad de que todos los caracteres sean diferentes de a_i?

   Podemos proceder mediante casos totales y favorables. Sea $A =$ el software genera dos letras del tipo a_i. Van a generarse 7 letras, y tenemos 6 en la lista, por lo que

   $$N(\Omega) = 6^7$$

   Ahora, para encontrar $N(A)$ es un poco mas complicado de lo usual. Primero veamos las combinaciones posibles de las letras que pueden salir. Suponga que el software genera la primera letra, hay 2 opciones para que sala a_i, para la segunda también hay 2 opciones en que salga a_i, para la tercera ya no queremos que sean a_i, por lo que hay 4 opciones para que salga p_i, para la cuarta hay 4 opciones para que salga p_i, y asi sucesivamente hasta generar la ultima letra, entonces hay

   $$(2 \cdot 2) \times (4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4)$$

   formas de que esto pase.

Note que lo anterior corresponde al total de combinaciones que hay para elegir las dos letras del mismo tipo y las 5 restantes del otro tipo, pero no hemos tomado en cuenta los posibles grupos que pueden formarse, por ejemplo se tiene

$$\underline{\quad a_1 \quad}\quad \underline{\quad p_3 \quad}\quad \underline{\quad p_4 \quad}\quad \underline{\quad p_4 \quad}\quad \underline{\quad p_6 \quad}\quad \underline{\quad p_5 \quad}\quad \underline{\quad a_2 \quad} \tag{1}$$

$$\underline{\quad a_1 \quad}\quad \underline{\quad p_3 \quad}\quad \underline{\quad p_4 \quad}\quad \underline{\quad a_1 \quad}\quad \underline{\quad p_4 \quad}\quad \underline{\quad p_3 \quad}\quad \underline{\quad p_6 \quad} \tag{2}$$

$$\underline{\quad p_6 \quad}\quad \underline{\quad p_2 \quad}\quad \underline{\quad a_2 \quad}\quad \underline{\quad p_3 \quad}\quad \underline{\quad a_1 \quad}\quad \underline{\quad p_4 \quad}\quad \underline{\quad p_5 \quad} \tag{3}$$

$$\vdots$$

Esto se puede pensar de la siguiente forma, ya se generaron las 7 letras al azar con reemplazo (no se sabe las posiciones ni la forma en que salieron) y nos interesan las del tipo a_i. La primera puedo haber salido en cualquiera de las 7 posiciones, y la segunda pudo haber salido en cualquiera de las 6 posiciones restantes (las otras posiciones no nos interesan pues corresponden al tipo p_i). Ahora, ya que tenemos en consideración esto, nos falta dividir por las formas en que pueden salir el conjunto de 2 letras, es decir, si sabemos que salieron en las dos posiciones, pueden salir de cierta forma, esto se puede ver en la siguiente imagen

$$\underline{\qquad\quad}\quad \underline{\quad p_3 \quad}\quad \underline{\quad p_4 \quad}\quad \underline{\quad p_6 \quad}\quad \underline{\quad p_4 \quad}\quad \underline{\quad p_3 \quad}\quad \underline{\qquad\quad}$$

$$\underline{\quad a_1 \quad}\quad \underline{\quad p_3 \quad}\quad \underline{\quad p_4 \quad}\quad \underline{\quad p_6 \quad}\quad \underline{\quad p_4 \quad}\quad \underline{\quad p_3 \quad}\quad \underline{\quad a_2 \quad}$$

$$\underline{\quad a_2 \quad}\quad \underline{\quad p_3 \quad}\quad \underline{\quad p_4 \quad}\quad \underline{\quad p_6 \quad}\quad \underline{\quad p_4 \quad}\quad \underline{\quad p_3 \quad}\quad \underline{\quad a_1 \quad}$$

Se sabe que salieron en la primera y ultima posición, entonces en la primera opción puede salir cualquiera de las dos letras, y en la ultima solo puede salir una. Esto corresponde a

$$\frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1}$$

Note que esto ultimo lo podemos escribir como

$$\begin{aligned}
\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} &= \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\
&= \frac{7!}{2!5!}\\
&= \frac{7!}{2!(7-2)!}\\
&= \binom{7}{2}
\end{aligned}$$

Teniendo asi que

$$\begin{aligned}
N(A) &= \binom{7}{2}\times(2\cdot 2)\times(4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4)\\
&= \binom{7}{2}2^2 4^5
\end{aligned}$$

Luego, la probabilidad de que salgan dos letras del tipo a_i es

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{N(A)}{N(\Omega)}\\
&= \frac{\binom{7}{2}2^2 4^5}{6^7}\\
&= 0.3072702
\end{aligned}$$

Note que la ultima expresión se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{7}{2}2^2 4^5}{6^7} &= \binom{7}{2}\cdot\frac{2^2}{6^2}\cdot\frac{4^5}{6^5}\\
&= \binom{7}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{4}{6}\right)^5\\
&= \binom{7}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(1-\frac{2}{6}\right)^5\\
&= \binom{7}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(1-\frac{2}{6}\right)^{7-2}
\end{aligned}$$

Este ultimo corresponde al modelo binomial!

Ahora definamos $A =$ todos los caracteres sean diferentes de a_i. Este evento se puede pensar en que no salga ninguna letra a_i. Procediendo de forma análoga al anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
P(A) = \frac{\binom{7}{0}2^0 4^7}{6^7} &= \binom{7}{0}\left(\frac{4}{6}\right)^7\\
&= \left(\frac{4}{6}\right)^7
\end{aligned}$$

4. Encuentre la probabilidad de que la suma de dos números aleatorios positivos (entre 0 y 1) no exceda el valor de uno y también su producto sea de a lo mas 2/9.

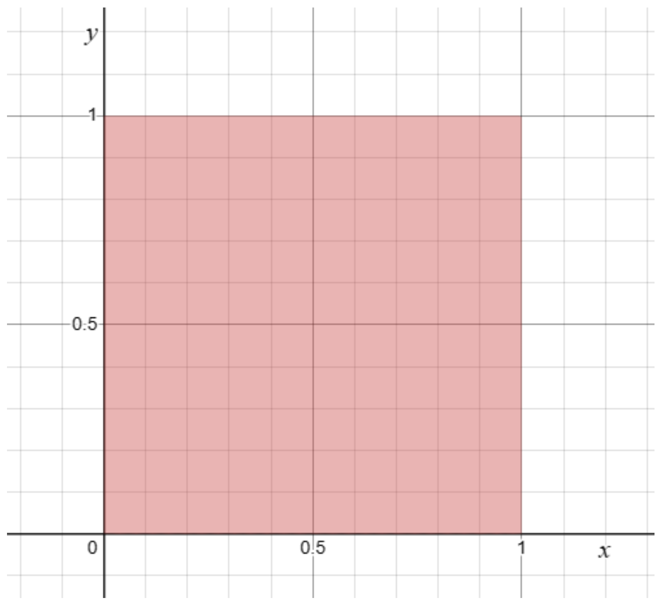
   Sea $x, y \in (0,1)^2$ números aleatorios. Que la suma no exceda el valor de uno corresponde a

$$x + y \leq 1 \tag{1}$$

   y que su producto sea de a lo mas 2/9 corresponde a

$$xy \leq 2/9 \tag{2}$$

   En este tipo de ejercicios se puede proceder por favorables y totales. Note que Ω corresponde al cuadrado $(0,1)^2$, esto es



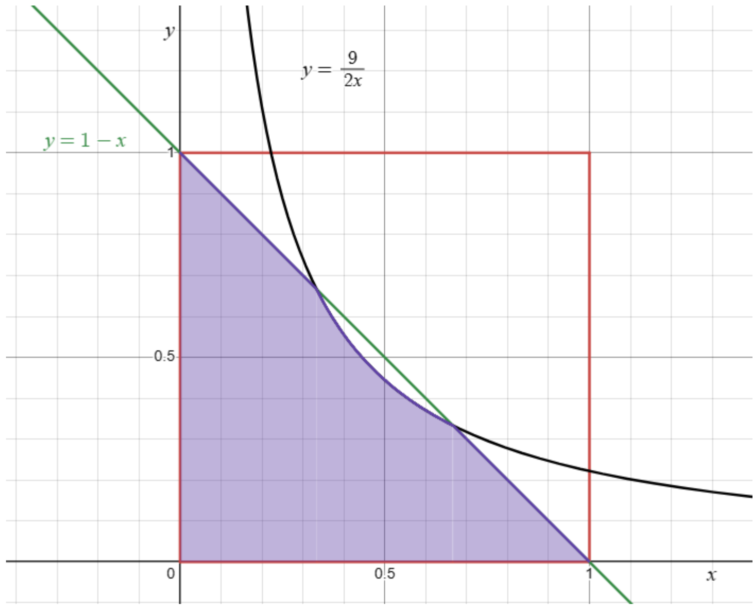
   Como los puntos pueden caer en cualquier lugar de este cuadrado, omega corresponde al area del cuadrado, teniendo que

$$N(\Omega) = 1^2 = 1$$

   Ahora, para $N(A)$, corresponde a la intersección de (1), y (2), pues queremos ambas condiciones, entonces

$$\begin{aligned} N(A) &= P(x + y \leq 1 \cap xy \leq 2/9) \\ &= P(y \leq 1 - x \cap y \leq 2/9x) \end{aligned}$$

   La intersección de ambas se puede ver en la imagen de la siguiente pagina.



El área de esta región corresponde a

$$
\begin{aligned}
N(A) &= \int_0^{1/3} 1 - x dx + \int_{1/3}^{2/3} \frac{2}{9x} dx + \int_{2/3}^{1} 1 - x dx \\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{9} ln(2)
\end{aligned}
$$

Luego, la probabilidad pedida es

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} ln(2)$$

5. Se lanza al aire una moneda y se pregunta cuál es la probabilidad condicionada de que aparezca cara por primera vez en la $N-$ésima tirada, sabiendo que, por lo menos, ha salido cara una vez en las $M+N$ primeras tiradas.

   Definamos los siguientes eventos

$$
\begin{aligned}
A &= \text{aparece cara por primera vez en la } N- \text{ esima tirada} \\
B &= \text{sale al menos una cara en las } M+N \text{ primeras tiradas}
\end{aligned}
$$

   Nos piden

$$P(A|B)$$

   esto lo podemos escribir de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} \\
&= \frac{P(AB)}{P(B)} \frac{P(A)}{P(A)} \\
&= \frac{P(BA)}{P(A)} \frac{P(A)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}
\end{aligned}
$$

Esto lo hicimos con el fin de encontrar las probabilidades de forma mas fácil, ya que calcular la probabilidad de forma directa es muy difícil.

$P(A)$ corresponde a la probabilidad de que aparezca cara por primera vez en la $N-$esima tirada, esto ocurre si en la primera tirada aparece sello y en la segunda sello y en la tercera sello y asi sucesivamente hasta que en la $N-$esima salga cara, esto es

$$s, s, s, s, ..., s, c = \underbrace{s, s, s, s, ..., s}_{N-1 \text{ tiradas}} \quad \underbrace{c}_{N\text{-esima tirada}}$$

Entonces

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{N-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^N}$$

Esto por que los lanzamientos de las monedas son independientes.

Para calcular $P(B)$, podemos aplicar el complemento

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(B) \\ &= 1 - P(\text{no sale ninguna cara en las } M + N \text{ tiradas}) \\ &= 1 - \frac{1}{2^{M+N}} \end{aligned}$$

Para $P(B|A)$, note que esta probabilidad es fácil de obtener, pues nos piden la probabilidad de que salga al menos una cara en las $M+N$ primeras tiradas **dado** que ya salio una cara, pero si ya salio una cara, entonces va a salir si o si al menos una cara, pues ya salio una, por lo que

$$P(B|A) = 1$$

Reuniendo todo tenemos que la probabilidad pedida es

$$P(A|B) = \frac{1 \cdot \frac{1}{2^N}}{1 - \frac{1}{2^{M+N}}}$$

6. Suponga que se tienen 20 aceitunas. Cinco de ellas están en mal estado y 15 de ellas no lo están. La persona B se traga cinco aceitunas enteras. Luego la persona A toma una de las aceitunas restantes. Si la aceituna que A seleccionó esta vencida, ¿cuál es la probabilidad de que la persona B tenga al menos una aceituna vencida en el estómago?

   Definamos C = la persona B tiene al menos una aceituna en el estomago, y H = la persona A selecciona una aceituna que está vencida. Se pide

$$P(C|H)$$

   calculamos vía complemento

$$\begin{aligned} P(C|H) &= 1 - P(C^c|H) \\ &= 1 - P(\text{la persona } B \text{ no tiene aceitunas en el estomago}|H) \\ &= 1 - \frac{\binom{15}{5}}{\binom{19}{5}} \end{aligned}$$