Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2022

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Tarea

1. Sean a, b y c la medida de los lados de un triángulo y A su área. Demuestre que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}A\,.$$

Solución. Si el triángulo es equilátero entonces su altura sería $a\sqrt{3}/2$ y su área $a^2\sqrt{3}/4$, por lo tanto se cumpliría la igualdad. Sean a el lado de medida mayor y h la altura trazada desde el vértice A como se muestra en la Figura 1:

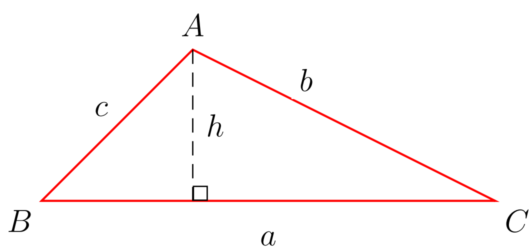


Figura 1

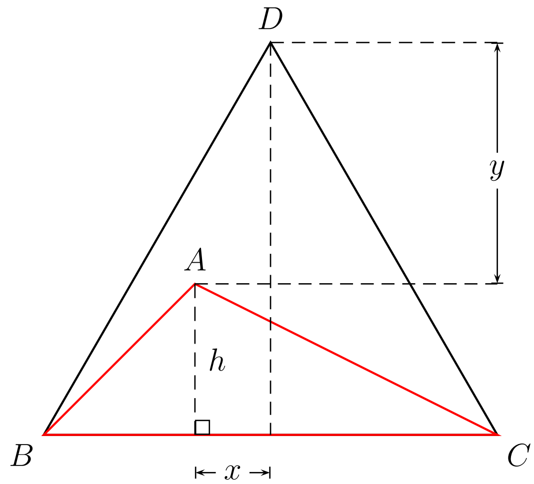
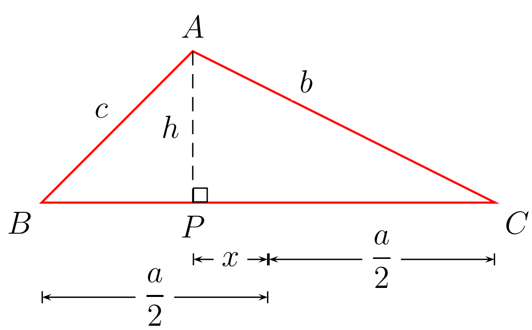


Figura 2

Considere un triángulo equilátero BCD y las medidas x e y como lo muestra la Figura 2.



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo PAC se obtiene que

$$b^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 + h^2\,.$$

De manera similar, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo PAB obtenemos

$$c^2 = \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + h^2\,.$$

Además el triángulo equilátero BCD (Figura 2) tiene altura $H = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, entonces se cumple que

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = y + h \Longrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a - y\ .$$

Entonces sustituyendo los valores de b^2 y c^2 se ve que

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2-4A\sqrt{3} &= a^2 + \left(\frac{a}{2}+x\right)^2 + h^2 + \left(\frac{a}{2}-x\right)^2 + h^2 - 2ah\sqrt{3} \\
&= a^2 + \frac{a^2}{4} + ax + x^2 + \frac{a^2}{4} - ax + x^2 + 2h^2 - 2ah\sqrt{3} \\
&= \frac{3}{2}a^2 + 2x^2 + 2h^2 - 2ah\sqrt{3} \\
&= \frac{3}{2}a^2 + 2x^2 + 2h(h - a\sqrt{3}) \\
&= \frac{3}{2}a^2 + 2x^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - y\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - y - a\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{3}{2}a^2 + 2x^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - y\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a - y\right) \\
&= \frac{3}{2}a^2 + 2x^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - y\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + y\right) \\
&= \frac{3}{2}a^2 + 2x^2 - 2\left(\frac{3}{4}a^2 - y^2\right) \\
&= 2(x^2+y^2) \geqslant 0
\end{aligned}$$

como queríamos probar.

Puntaje Pregunta 1.

- 1 punto por considerar las variables x e y que miden cuanto le falta al triángulo ABC para ser equilátero.
- 1 punto por usar el teorema de Pitágoras y obtener expresiones para b^2 y c^2 que dependen de a, x y h.
- 1 punto por expresar la altura h en términos de a e y.
- 2 puntos por obtener que la expresión $a^2+b^2+c^2-4A\sqrt{3} = 2(x^2+y^2)$
- 1 punto por concluir que la expresión $2(x^2+y^2)$ no es negativa.

Nota. En caso de que los alumnos se encuentre lejos de la solución, sugerir la figura 2 para intentar llegar a una solución.

2. Resuelva la siguiente inecuación

$$\left|\frac{|x-2|-3}{|x|-1}\right| \geqslant 4\,.$$

Solución. Las restricciones de la inecuación son $x \neq 1$ y $x \neq -1$. Observe que la inecuación es equivalente con resolver

$$||x-2|-3| \geq 4||x|-1|\,.$$

Aquí los puntos críticos se obtiene de resolver las ecuaciones $x=0$, $|x|-1=0$, $x-2=0$ y $|x-2|-3=0$, resolviendo se obtienen los siguientes puntos críticos:

$$x=1\,,\quad x=-1\,,\quad x=0\,,\quad x=2 \quad \text{y} \quad x=5\,.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |x|-1<0 &\iff |x|<1 \iff -1<x<1 \\ |x|-1 \geqslant 0 &\iff |x| \geqslant 1 \iff x \leqslant -1 \quad \text{o} \quad x \geqslant 1 \end{aligned}$$

Por lo que se tiene que

$$||x|-1| = \begin{cases} |x|-1 & \text{si } x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty) \\ -(|x|-1) & \text{si } x \in (-1,1) \end{cases} \tag{1}$$

De manera similar, se puede ver que

$$||x-2|-3| = \begin{cases} |x-2|-3 & \text{si } x \in (-\infty,-1] \cup [5,\infty) \\ -(|x-2|-3) & \text{si } x \in (-1,5) \end{cases} \tag{2}$$

Usando la información proporcionada en (1) y (2) y separando el análisis en casos obtenemos

- **Caso 1:** Para $x \in (-\infty,-1)$ tenemos que resolver

  $$|x-2|-3 \geq 4(|x|-1)$$

  que en este caso es equivalente a resolver

  $$-(x-2)-3 \geq 4(-x-1)\,.$$

  Lo que equivalente a $x \geq -3/4 \Rightarrow x \in \left(-\frac{3}{4},\infty\right)$. Luego la solución es

  $$S_1 = (-\infty,-1) \cap (-3/4,\infty) = \varnothing\,.$$

- **Caso 2:** Para $x \in (-1,0)$ tenemos que resolver

  $$-|x-2|+3 \geq 4(-|x|+1)$$

  que en este caso es equivalente a resolver

  $$(x-2)+3 \geq 4(x+1)\,.$$

  Se sigue que $x \leq -1 \Rightarrow x \in (-\infty,-1)$. Luego la solución es

  $$S_2 = (-1,0) \cap (-\infty,-1) = \varnothing\,.$$

- **Caso 3:** Para $x \in [0,1)$ tenemos que resolver
$$-|x-2|+3 \geq 4(-|x|+1)$$
que en este caso es equivalente a resolver
$$(x-2)+3 \geq 4(-x+1)\,.$$
Se sigue que $x \geq 3/5 \Rightarrow x \in [3/5,\infty)$. Luego la solución es
$$S_3 = [0,1) \cap [3/5,\infty) = [3/5,1)\,.$$

- **Caso 4:** Para $x \in (1,2)$ tenemos que resolver
$$-|x-2|+3 \geq 4(-|x|+1)$$
que en este caso es equivalente a resolver
$$(x-2)+3 \geq 4(x-1)\,.$$
Se sigue que $x \leq 5/3$. Luego la solución es
$$S_4 = (1,2) \cap (-\infty,5/3] = (1,5/3]\,.$$

- **Caso 5:** Para $x \in [2,5)$ tenemos que resolver
$$-|x-2|+3 \geq 4(|x|-1)$$
que en este caso es equivalente a resolver
$$-(x-2)+3 \geq 4(x-1)\,.$$
Se sigue que $x \leq 9/5 \Rightarrow x \in (-\infty,9/5]$. Luego la solución es
$$S_5 = [2,5) \cap (-\infty,9/5] = \varnothing\,.$$

- **Caso 6:** Para $x \in [5,\infty)$ tenemos que resolver
$$|x-2|-3 \geq 4(|x|-1)$$
que en este caso es equivalente a resolver
$$(x-2)-3 \geq 4(x-1)\,.$$
Se sigue que $x \leq -1/3 \Rightarrow x \in (-\infty,-1/3]$. Luego la solución es
$$S_5 = (5,\infty) \cap (-\infty,-1/3] = \varnothing\,.$$

Por lo tanto la solución final es
$$S_F = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 \cup S_6 = \left[\frac{3}{5},1\right) \cup \left(1,\frac{5}{3}\right]\,.$$

Puntaje Pregunta 2.

- 1 punto por mostrar los puntos críticos y las restricciones. En caso de no obtener todos los puntos críticos señalarlo en la revisión (Faltan puntos críticos).
- 1 punto por establecer los intervalos en donde la expresión $|x| - 1$ es positiva y negativa. En caso de no establecer este hecho indicarlo en la corrección.
- 1 punto por establecer los intervalos en donde la expresión $|x - 2| - 3$ es positiva y negativa. En caso de no establecer este hecho indicarlo en la corrección.
- 0,5 puntos por establecer las soluciones en el caso 1.
- 0,5 puntos por establecer las soluciones en el caso 2.
- 0,5 puntos por establecer las soluciones en el caso 3.
- 0,5 puntos por establecer las soluciones en el caso 4.
- 0,5 puntos por establecer las soluciones en el caso 5.
- 0,5 puntos por establecer las soluciones en el caso 6.

3. Sea $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1+x} \,.$$

a) Pruebe que f es estrictamente creciente.

b) Demuestre que f es acotada superiormente

Solución.

(a) Sean $x, y \in (-1, \infty)$ con $x < y$ entonces

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \frac{y}{y+1} - \frac{x}{x+1} \\ &= \frac{y(x+1) - x(y+1)}{(y+1)(x+1)} \\ &= \frac{xy + y - xy - x}{(y+1)(x+1)} \\ &= \frac{y - x}{(y+1)(x+1)} > 0 \,. \end{aligned}$$

La última desigualdad se debe a lo siguiente que si $x < y \Rightarrow y - x > 0$, si $x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0$ y si $y > -1 \Rightarrow y + 1 > 0$, es decir, tanto numerador como denominador son positivos. Luego, $f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$. Por lo tanto, f es estrictamente creciente.

(b) Sabemos que $0 < 1$ sumando ambos lados en la última expresión por x, obtenemos $x < x+1$. Como $x > -1 \Rightarrow x+1 > 0$ entonces al multiplicar a ambos lados de la desigualdad anterior por $1/(x+1)$ no se invierte la desigualdad, luego

$$\frac{x}{x+1} < 1 \Rightarrow f(x) < 1 \;\forall\, x > -1 \,.$$

Por lo tanto, f es acotada superiormente.

Puntaje Pregunta 3.

- 3 puntos por mostrar que f es estrictamente creciente.
- 3 puntos por mostrar que f está acotada superiormente.

4. Dadas las funciones

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } \sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2\,, \\ 1 - \sqrt{x^2 - 4} & \text{si } x \leqslant -4 \end{cases} \qquad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{|x^2 - 4| - 3}\,,$$

con $\mathrm{Dom}(g) = (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup [0, 1]$ tal que $f = h^{-1} \circ g$.

a) Demostrar que f y g son funciones inyectivas.

b) Hallar la función h.

Solución.

a) Mostraremos que f es inyectiva.

- Caso 1. $x_1, x_2 \in [\sqrt{3}, 2]$.

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad 2 - x_1^2 = 2 - x_2^2 \Longrightarrow x_1^2 = x_2^2 \Longrightarrow |x_1| = |x_2|$$

  Como x_1 y x_2 son positivos se sigue que $x_1 = x_2$.

- Caso 2. $x_1, x_2 \in (-\infty, -4]$

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad 1 - \sqrt{x_1^2 - 4} = 1 - \sqrt{x_2^2 - 4} \Longrightarrow x_1^2 - 4 = x_2^2 - 4 \Longrightarrow |x_1| = |x_2|$$

  Como x_1 y x_2 son negativos obtenemos que $|x_1| = |x_2| \Longrightarrow -x_1 = -x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$.

- Caso 3. $x_1 \in [\sqrt{3}, 2]$ y $x_2 \in (-\infty, -4]$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Longrightarrow \quad 2 - x_1^2 = 1 - \sqrt{x_2^2 - 4} \Longrightarrow x_1^2 = \sqrt{x_2^2 - 4} + 1 \Longrightarrow |x_1| = \sqrt{\sqrt{x_2^2 - 4} + 1} \\ &\Longrightarrow \quad x_1 = \sqrt{\sqrt{x_2^2 - 4} + 1} \end{aligned}$$

  Como $x_1 \in [\sqrt{3}, 2]$ entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \leqslant \sqrt{\sqrt{x_2^2 - 4} + 1} \leqslant 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 3 \leqslant \sqrt{x_2^2 - 4} + 1 \leqslant 4 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2 \leqslant \sqrt{x_2^2 - 4} \leqslant 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4 \leqslant x_2^2 - 4 \leqslant 9 \\ &\Longleftrightarrow \quad 8 \leqslant x_2^2 \leqslant 13 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{8} \leqslant |x_2| \leqslant \sqrt{13} \end{aligned}$$

  Como x_2 es negativo se sigue que $\sqrt{8} \leqslant -x_2 \leqslant \sqrt{13} \Longleftrightarrow -\sqrt{13} \leqslant x_2 \leqslant -\sqrt{8}$ lo cual es una contradicción con el hecho de que la $x_2 \leqslant -4$.

Por lo tanto, f es inyectiva.

Ahora mostraremos que g es inyectiva. Notemos que la función g se puede escribir en la forma

$$g(x) = \sqrt{|x^2-4|-3} = \begin{cases} \sqrt{-(x^2-4)-3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \\ \sqrt{x^2-4-3} & \text{si } x < -2\sqrt{2} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \\ \sqrt{x^2-7} & \text{si } x < -2\sqrt{2} \end{cases}$$

- Caso 1. $x_1, x_2 \in [0,1]$

$$g(x_1) = g(x_2) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{1-x_1^2} = \sqrt{1-x_2^2} \Longrightarrow 1-x_1^2 = 1-x_2^2 \Longrightarrow |x_1| = |x_2|$$

  Como x_1 y x_2 son positivos se sigue que $x_1 = x_2$.
- Caso 2. $x_1, x_2 \in (-\infty, -2\sqrt{2})$

$$g(x_1) = g(x_2) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x_1^2-7} = \sqrt{x_2^2-7} \Longrightarrow x_1^2-7 = x_2^2-7 \Longrightarrow |x_1| = |x_2|$$

  Como x_1 y x_2 son negativos obtenemos que $|x_1| = |x_2| \Longrightarrow -x_1 = -x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2$.
- Caso 3. $x_1 \in [0,1]$ y $x_2 \in (-\infty, -2\sqrt{2})$

$$\begin{aligned} g(x_1) = g(x_2) \quad &\Longrightarrow \quad \sqrt{1-x_1^2} = \sqrt{x_2^2-7} \Longrightarrow 1-x_1^2 = x_2^2-7 \Longrightarrow x_1^2 = 8-x_2^2 \\ &\Longrightarrow \quad |x_1| = \sqrt{8-x_2^2} \end{aligned}$$

  Como x_1 es positivo entonces $x_1 = \sqrt{8-x_2^2}$. Además, $x_1 \in [0,1]$ por lo que

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sqrt{8-x_2^2} \leqslant 1 \quad &\Longrightarrow \quad 0 \leqslant 8-x_2^2 \leqslant 1 \Longrightarrow -8 \leqslant -x_2^2 \leqslant -7 \\ &\Longrightarrow \quad 8 \geqslant x_2^1 \geqslant 7 \Longrightarrow \sqrt{7} \leqslant |x_2| \leqslant \sqrt{8} \end{aligned}$$

  Como x_2 es negativo entonces $\sqrt{7} \leqslant -x_2 \leqslant \sqrt{8} \Longleftrightarrow -2\sqrt{2} \leqslant x_2 \leqslant -\sqrt{7}$ lo cual es una contradicción con el hecho de que $x_2 < -2\sqrt{2}$.

Por lo tanto, g es inyectiva.

b) Sabemos que $f = h^{-1} \circ g$. Como f y g son inyectivas existen las funciones f^{-1} y g^{-1}, entonces

$$f = h^{-1} \circ g \Longleftrightarrow f \circ g^{-1} = h^{-1} \circ g \circ g^{-1} \Longleftrightarrow f \circ g^{-1} = h^{-1}$$

Se sigue que $h = (f \circ g^{-1})^{-1} = g \circ f^{-1}$. La inversa de la función f es

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant -1 \\ \\ -\sqrt{(1-x)^2+4} & \text{si } x \leqslant 1-\sqrt{12} \end{cases}$$

Para determinar la composición $g \circ f^{-1}$, primero determinaremos el dominio

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Dom}(g \circ f^{-1}) \quad &\Longleftrightarrow \quad (x \in \mathrm{Dom}(f^{-1})) \wedge (f^{-1}(x) \in \mathrm{Dom}(g)) \\ &\Longleftrightarrow \quad (x \in (-\infty, 1-\sqrt{12}) \cup [-2,-1]) \wedge (f^{-1}(x) \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup [0,1]) \end{aligned}$$

separando el análisis en casos

- Caso 1. $x \in [-2,-1]$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) \in (-\infty,-2\sqrt{2}) \cup [0,1] &\iff \sqrt{2-x} \in (-\infty,-2\sqrt{2}) \cup [0,1] \\ &\iff 0 \leqslant \sqrt{2-x} \leqslant 1 \iff 0 \leqslant 2-x \leqslant 1 \iff 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{aligned}$$

Como $x \in [-2,-1]$ obtenemos en este caso el conjunto $S_1 = [-2,-1] \cap [1,2] = \varnothing$.

- Caso 2. $x \in (-\infty, 1-\sqrt{12}]$

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) \in (-\infty,-2\sqrt{2}) \cup [0,1] &\iff -\sqrt{(1-x)^2+4} \in (-\infty,-2\sqrt{2}) \cup [0,1] \\ &\iff -\sqrt{(1-x)^2+4} < -2\sqrt{2} \iff 2\sqrt{2} < \sqrt{(1-x)^2+4} \\ &\iff 8 < (1-x)^2+4 \iff 4 < (1-x)^2 \\ &\iff 2 < |1-x| \iff 1-x < -2 \quad \text{ó} \quad 1-x > 2 \\ &\iff 3 < x \quad \text{ó} \quad x < -1 \\ &\iff x \in (3,\infty) \cup (-\infty,-1) \end{aligned}$$

En este caso el conjunto $S_2 = (-\infty, 1-\sqrt{12}) \cap [(-\infty,-1) \cup (3,\infty)] = (-\infty, 1-\sqrt{12})$.

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(g \circ f^{-1}) = (-\infty, 1-\sqrt{12})$ y está dada por

$$\begin{aligned} h(x) &= (g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = g(-\sqrt{(1-x)^2+4}) \\ &= \sqrt{|(-\sqrt{(1-x)^2+4}-4|-3} = \sqrt{|(1-x)^2|-3} = \sqrt{(1-x)^2-3}\,. \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 4.

- 1,5 puntos por mostrar que f es inyectiva.
- 1,5 puntos por mostrar que g es inyectiva.
- 1,5 puntos por obtener que $h = g \circ f^{-1}$.
- 1,5 puntos por obtener explícitamente la función h y su dominio.

5. Demuestre que si $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Solución. En efecto, tomemos $c \in \mathbb{R}$ con $a < c < 1$. Entonces $0 < x_{n+1}/x_n < c$ para todo n suficientemente grande. Se sigue que

$$0 < x_{n+1} = \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) \cdot x_n < cx_n < x_n \,,$$

luego, para n suficientemente grande, la sucesión (x_n) es monótona decreciente y acotada por 0 por abajo. Entonces $\{x_n\}$ es convergente. Sea $b = \lim_{n\to\infty} x_n$. De $x_{n+1} < c \cdot x_n$ para todo n suficientemente grande resulta, haciendo $n \to \infty$, que $b \leqslant c \cdot b$, esto es $(1-c)b \leqslant 0$. Como $b \geqslant 0$ y $0 < c < 1$ concluimos que $b = 0$.

Otra Forma. Tomemos $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < 1$. Dado que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a$ y $x_n > 0$ entonces existe N tal que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq c \qquad \forall\, n \geq N \,.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
0 &< x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \cdot x_n \\
&\leq c \cdot x_n = c\frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot x_{n-1} \\
&\leq c^2 \cdot x_{n-1} \\
&\vdots \\
&\leq c^{n-N+1} x_N = b_n
\end{aligned}$$

es decir, $0 < x_{n+1} \leq b_n$ y como

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c^{n-N+1} x_N = x_N \underbrace{\lim_{n\to\infty} c^{n-N+1}}_{0} = 0$$

luego por el Teorema del Sandwich

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \,.$$

Puntaje Pregunta 5.

- 2 puntos por mostrar que x_n es monótona.
- 2 puntos por mostrar que x_n está acotada inferiormente.
- 2 puntos por encontrar el límite.

Puntaje Pregunta 5. Otra forma

- 4 puntos por mostrar que $0 < x_{n+1} \leqslant c^{n-N+1} x_N$
- 1 punto por usar que $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = 0$.
- 1 punto por encontrar el límite.

6. El siguiente método iterativo para obtener, con error tan pequeño cuanto se desee, raíces cuadradas de un número real $a > 0$ ya era conocido por los babilonios 17 siglos antes de la era cristiana. Se toma de forma arbitraria un valor $x_1 > 0$ y se define inductivamente

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) .$$

   a) Use la sucesión iterativa para calcular $\sqrt{11}$ con 6 decimales exactos tomando $x_1 = 1$.

   b) Demuestre que la sucesión (x_n) converge a $\sqrt{a}$.

Solución.

   a) Tenemos que

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2}(1+11) = 6 \\ x_3 &= \frac{1}{2}\left(6 + \frac{11}{6}\right) = \frac{47}{12} = 3,91\overline{6} \\ x_4 &= \frac{1}{2}\left(\frac{47}{12} + \frac{11}{47}\cdot 12\right) = \frac{3793}{1128} = 3,362588652 \\ x_5 &= \frac{1}{2}\left(\frac{3793}{1128} + \frac{11\cdot 1128}{2793}\right) = 3,316938935 \\ x_6 &= \frac{1}{2}\left(x_5 + \frac{11}{x_5}\right) = 3,316624805 \end{aligned}$$

   donde en 5 iteraciones hemos obtenido 6 cifras decimales exactas. Después del punto, la séptima cifra es incorrecta.

   b) Notemos que para todo $x \neq 0$ se tiene $[x + a/x]^2 \geqslant 4a$. En efecto, desarrollando el cuadrado y pasando $4a$ al primer término, vemos que esta desigualdad es equivalente a afirmar que $(x - a/x)^2 \geqslant 0$, lo que es obvio. De aquí resulta

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)^2 \geqslant a$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, si $x^2 \geqslant a$ entonces $[x + a/x]^2 \leqslant x^2$. En efecto,

$$a \leqslant x^2 \Longrightarrow [x + a/x]^2/4 \leqslant [x + x^2/x]^2/4 = x^2 .$$

   Como $x_{n+1}^2 \geqslant a$ para todo n, se sigue que $x_{n+2}^2 \leqslant x_{n+1}^2$, luego $x_{n+2} \leqslant x_{n+1}$, pues son números positivos. Por lo tanto, inclusive si $x_1 < \sqrt{a}$, siempre se cumple $x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4 \geqslant \cdots$, con $x_{n+1}^2 \geqslant a$ para todo n. Por lo tanto, existe $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Haciendo $n \to \infty$ en la igualdad $x_{n+1} = [x_n + a/x_n]/2$ obtenemos $c = [c + a/c]/2$, de donde $c^2 = a$, esto es $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Puntaje Pregunta 6.

- 1,5 puntos por iterar 5 veces la sucesión para obtener 6 cifras decimales exactas.
- 1,5 puntos por mostrar que x_n es monótona.
- 1,5 puntos por mostrar que x_n es acotada.
- 1,5 puntos por calcular el límite.