EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Programa

Objetivo: Proporcionar las bases necesarias de la teoría de probabilidad, y que sean fundamentales para el estudio de la estadística.
Contenido:

- Modelo de Probabilidad
- Variables aleatorias
- Transformaciones y valor esperado
- Vectores aleatorios, distribuciones conjuntas y condicionales.
- Distribuciones muestrales y teoremas límites.

Evaluación: Tres interrogaciones ($70\,\%$) y un exámen ($30\,\%$).
Ayudante: Por definir

Resumen

- La teoría de probabilidad es la base sobre la cual se construyen todas las herramientas estadísticas.
- Ella proporciona un modelo probabilístico para representar poblaciones, experimentos o fenómenos aleatorios.
- A través de estos modelos, los estadísticos pueden hacer inferencias sobre aspectos desconocidos mediante resultados experimentales (o información parcial).
- Así como la estadística se fundamenta en la teoría de la probabilidad, esta última, a su vez, se apoya en la teoría de conjuntos, que es por donde comenzamos.

Contenido I

Conjuntos

Definición 1.1

$\triangleright$ Un conjunto Ω se dice contable (o discreto) si es finito o si sus elementos pueden colocarse en correspondencia uno a uno con algún subconjunto del conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$.
$\triangleright$ En caso contrario diremos que Ω no es contable.

Ejemplo 1.1

1) $\Omega_1 = \{0, 1\}$, $\Omega_2 = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $\Omega_3 = \{1, 3, 5, ...\}$ son contables.
2) $\Omega_4 = (0, 1)$, $\Omega_5 = [0, \infty)$ y $\Omega_6 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ no son contables.

Conjuntos

Inclusión:

- Un conjunto A es subconjunto de un conjunto B o que A está contenido en B, y escribimos $A \subseteq B$, si para cada $x \in A$, tenemos que $x \in B$.
- El conjunto A es subconjunto propio de B, y escribimos $A \subset B$, si $A \subseteq B$ y $\exists x \in B$ tal que $x \notin A$.

Recuerde también que:

- $A = B$ ssi $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
- $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$ para todo subconjunto A, donde $\emptyset$ denota el conjunto vacío.

Conjuntos

Definición 1.2

Dados dos conjuntos A y B, definimos las siguientes operaciones elementales.

Unión: La unión de A y B, escrita como $A \cup B$, es el conjunto de elementos que pertenecen ya sea a A o B o ambos,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Intersección: La intersección de A y B, escrita como $A \cap B$, es el conjunto de elementos que pertenecen a ambos, a A y B,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Complemento: El complemento de A, escrito como A^c, es el conjunto de todos los elementos que no estan en A,

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

Deferencia: La diferencia de dos conjuntos A y B, escrita como $A - B$, es conjunto de todos aquellos elementos de A que no pertenecen a B,

$$A - B = A \cap B^c = \{x : x \in A,\ x \notin B\}$$

Definición 1.3

$\triangleright$ Los conjuntos A y B se dicen disjuntos si: $\quad A \cap B = \emptyset$.
$\triangleright$ Una secuencia de conjuntos $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se dice mutuamente (dos a dos) disjunta si: $\quad A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$.

Conjuntos

Teorema 1.1

Si A, B, y C tres conjuntos, entonces valen las siguientes operaciones:

a) **Commutatividad:**

$$A \cup B \;=\; B \cup A, \quad A \cap B \;=\; B \cap A$$

b) **Asociatividad:**

$$A \cup (B \cup C) \;=\; (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) \;=\; (A \cap B) \cap C$$

c) **Leyes distributivas:**

$$A \cap (B \cup C) \;=\; (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) \;=\; (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

d) **Leyes de Morgan:**

$$(A \cup B)^c \;=\; A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c \;=\; A^c \cup B^c$$

Demostración 1.1 (Tarea!)

Secuencia de conjuntos

Las operaciones de **unión** e **intersección** pueden extenderse a colecciones (secuencias o sucesiones) infinitas de conjuntos:

▷ Si $A_1, A_2, \ldots$ es una colección de conjuntos definida dentro de un conjunto Ω, entonces

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para algún } i\}$$
$$\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \{x \in \Omega : x \in A_i \text{ para todo } i\}$$

▷ Por ejemplo, si $\Omega = (0, 1]$ y $A_i = [(1/i), 1]$ $i = 1, 2, \ldots$, entonces

$$\begin{aligned}
\cup_{i=1}^{\infty} A_i &= \cup_{i=1}^{\infty} [(1/i), 1] = \{x \in (0, 1] : x \in [(1/i), 1] \text{ para algún } i\} \\
&= \{x \in (0, 1]\} = (0, 1] \\
\cap_{i=1}^{\infty} A_i &= \cap_{i=1}^{\infty} [(1/i), 1] = \{x \in (0, 1] : x \in [(1/i), 1] \text{ para todo } i\} \\
&= \{x \in (0, 1] : x \in [1, 1]\} = \{1\}
\end{aligned}$$

Secuencia de conjuntos

También es posible definir uniones e intersecciones sobre colecciones de conjuntos no contables; es decir, si Γ es un conjunto de índices, entonces

$$\cup_{a\in\Gamma} A_a = \{x \in \Omega : x \in A_a \text{ para algún } a\}$$
$$\cap_{a\in\Gamma} A_a = \{x \in \Omega : x \in A_a \text{ para todo } a\}$$

▷ Por ejemplo, si $\Gamma = \{$ todos los números reales positivos $\}$ y $A_a = (0, a]$, entonces $\mathrm{U}_{a\in\Gamma} A_a = (0, \infty)$ es una unión no contable.
▷ Aunque las uniones e intersecciones no contables no juegan un rol muy importante en estadística, ellas pueden ser un mecanismo útil para resolver ciertos problemas.

Secuencia de conjuntos

Definición 1.4

Una secuencia $A_1, A_2, \ldots$ de subconjuntos de un conjunto Ω se llama **partición** de Ω si

i) $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ (exahustivos), y

ii) $A_i \cap A_j = \emptyset \, \forall \, i \neq j$ (mutuamente excluyentes)

Ejemplo 1.2

Sea $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Entonces, la colección de subconjutos $\{A_i\}_{i=1}^{4} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}\}$ no es una partición de Ω, ya que:

i) $\cup_i A_i = \{a, b, c\} \neq \Omega$, y

ii) $A_2 \cap A_3 \neq \emptyset$

Secuencia de conjuntos

Ejemplo 1.3

Considere la secuencia:

$$A_i = [i, i+1), \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Entonces, los A_i's son conjuntos disjuntos de a pares. Además,

$$\cup_{i=0}^{\infty} A_i = [0, \infty).$$

Luego, la secuencia $A_i = [i, i+1)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, constituye una partición de $\Omega = [0, \infty)$.

Secuencia de conjuntos

Definición 1.5

Una secuencia conjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dice **monótona** si:

i) $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$, es decir, $\{A_n\}$ es creciente $(\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subseteq A_{n+1}) : \quad A_n \uparrow$

ii) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, es decir, $\{A_n\}$ es decreciente $(\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \supseteq A_{n+1}) : \quad A_n \downarrow$

Definición 1.6

El límite de una secuencia monótona se define por:

i) Si $A_n \uparrow$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$

ii) Si $A_n \downarrow$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$

Ejemplo 1.4

Si a y b son números reales tales que $-\infty < a < b < \infty$, entonces

i) La secuencia $A_n = [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, \ldots$ es monónotona creciente; luego

$$A_n = [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \uparrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n = (a, b).$$

ii) La secuencia $A_n = [a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}]$, $n = 1, 2, \ldots$ es monónotona decreciente; luego

$$A_n = (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}) \downarrow \cap_{n=1}^{\infty} A_n = [a, b],$$

Ejercicio: Dibuje las secuencias anteriores sobre la recta real.

σ - algebra

Definición 1.7

Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un conjunto Ω (no vacío) constituye una σ - **algebra (sigma algebra)**, si satisface los tres siguientes axiomas:

A1) $\Omega \in \mathcal{A}$ (el conjunto Ω es un elemento de $\mathcal{A}$)

A2) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ es cerrada bajo complemento)

A3) si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones contables)

Definición 1.8

Sea $\mathcal{A}$ una σ - algebra de subconjuntos de Ω:

▷ Al par $(\Omega, \mathcal{A})$ se le denomina **espacio medible** o **espacio de sucesos**.

▷ Si $A \in \mathcal{A}$, se dice que A es medible.

Teorema 1.2

Sea $\mathcal{A}$ es una σ - **algebra** de subconjuntos de Ω (no vacío). Entonces: a) $\emptyset \in \mathcal{A}$; b) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones contables; c) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas.

Demostración 1.2

a) Como $\emptyset \subset \Omega$ y $\Omega^c = \emptyset$, los Axiomas A1) y A2) implican que $\emptyset$ también esta en $\mathcal{A}$.

b) Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ entonces $A_1^c, A_2^c, \ldots \in \mathcal{A}$, por el Axioma A2), de modo que $\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A}$, por el Axioma A3); por la aplicación de las leyes de Morgan se tiene que $(\cup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c = \cap_{i=1}^{\infty} A_i$; usando nuevamente el Axioma A2), se concluye que $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

c) Como $\cup_{i=1}^{n} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ con $A_i = \emptyset$ para $i = n+1, n+2, \ldots$, se concluye facílmente que $\cup_{i=1}^{n} A_i$ y $\cap_{i=1}^{n} A_i$ también son elementos de $\mathcal{A}$.

σ - algebra

Ejemplo 1.5

1) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$: σ - algebra trivial
2) $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ es σ - algebra para todo subconjunto A de Ω
3) $\mathcal{A} = \{$ todos los subconjuntos de $\Omega\}$: $\mathcal{P}(\Omega)$ o 2^{Ω} σ - algebra
4) Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ y $\mathcal{A} =$ $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$
   Es $\mathcal{A}$ un σ - algebra para Ω ?
5) Sean $A_1, A_2 \subset \Omega$ y $\mathrm{C} = \{A_1, A_2\}$. Encuentre un σ - algebra que contenga a C

Ejemplo 1.6

Si $\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ es la recta real, entonces eligimos $\mathcal{A}$ de modo que contenga a todos los intervalos de la forma,

$$[a, b], \quad (a, b], \quad (a, b), \quad [a, b) \quad -\infty < a < b < \infty.$$

Además, de las propiedades de una σ - algebra sigue que $\mathcal{A}$ contiene a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que se pueden formar tomando uniones e intersecciones (posiblemente infinitas) de los intervalos anteriores. En este caso, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ se llama σ - algebra de Borel, y sus elemento se llaman Borelianos.

Nota: La extensión para los Borelianos en $\mathbb{R}^n$ es similar (remplazando los intervalos por rectángulos), y la σ - algebra correspondiente se denota como $\mathcal{B}_n$.

Ejercicio 1.1

Dada una secuencia contable de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$, defina la secuencia $B_1 = A_1$ y $B_i = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i$ para $i = 2, 3, \ldots$. Pruebe que:

i) $B_i \cap B_j = \emptyset \; \forall \, i \neq j$ (los B_i's son dos a dos disjuntos);

ii) $\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$.

References

Casella, G. y Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference.* Second Edition. Duxbury, California.