Ayudantía 7

Gustavo Blanco

1. Demostrar que la sucesión de raíces:

$$c^{\frac{1}{n}}$$

es estrictamente decreciente para $c > 1$.

* Es una demostración distinta a la que desarrollamos en la ayudantía, pero ambas son válidas.

→ Sabemos que

$$n < n+1$$

si aplicamos $f(x) = c^{x}$, con $c > 1$, sabemos que es creciente ∴ se mantiene la desigualdad

$$\Rightarrow \quad c^{n} < c^{n+1}$$

si aplicamos $f(x) = x^{\frac{1}{n(n+1)}}$, también es creciente ∴ la desigualdad se mantiene.

$$\Rightarrow \quad (c^{n})^{\frac{1}{n(n+1)}} < (c^{n+1})^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$\Rightarrow \quad c^{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n+1)}} < c^{\frac{\cancel{n+1}}{n\cancel{(n+1)}}}$$

$$\Rightarrow \quad c^{\frac{1}{n+1}} < c^{\frac{1}{n}}$$

∴ $c^{\frac{1}{n}}$ es una sucesión decreciente.

2.

$$f(x) = e^{2x+1}$$

/ asumiendo que es invertible

↳

$$y = e^{2x+1}$$

$$\ln(y) = \ln(e^{2x+1})$$

$$\ln(y) = (2x+1)\ln(e)$$

* $\ln(x) \underset{f^{-1}(x)}{\rightleftarrows} e^{x}$

∴ $\ln(e^{x}) = x$

$$\ln(y) = 2x+1$$

$$\ln(y) - 1 = 2x$$

$$x = \frac{\ln(y) - 1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \frac{\ln(x) - 1}{2}$$

3. $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = x-3$, $f_3(x) = -x$ $\quad \mathbb{R} \to (0,\infty)$ y $f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) $f(x) = -3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$

↳ 2^{-1}

↳ $= (-2^{-1\cdot(x-3)}) - 3$

$= (-2^{-(x-3)}) - 3$

$= (-2^{-(x-3)}) - 3$

$\Rightarrow f_2(x) = x-3 \quad / f_3(3)$

$f_3 \circ f_2(x) = -(x-3) \quad / f_1(x)$

$f_1 \circ f_3 \circ f_2(x) = 2^{-(x-3)} \quad / f_3(x)$

$f_3 \circ f_1 \circ f_3 \circ f_2(x) = -2^{-(x-3)} \quad / f_2(x)$

$f_2 \circ f_3 \circ f_1 \circ f_3 \circ f_2(x) = (-2^{-(x-3)}) - 3$

$\Rightarrow f(x) = f_2 \circ f_3 \circ f_1 \circ f_3 \circ f_2(x) = -3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-(x-3)}$

b)

$f(x) = -3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-(x-3)}$

→ en primer lugar revisemos el recorrido

↳ $f_2 \circ f_3 \circ f_1 \circ f_3 \circ f_2(x)$

↳ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

↳ $f_3(f_2(x)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

↳ $f_1(f_3(f_2(x))) : \mathbb{R} \to (0,\infty)$

$f_3(\underbrace{f_1(f_3(f_2(x)))}) : \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$

Si bien el Dominio de f_3 son todos los reales y su recorrido también

Como el recorrido de f_1 es $(0,\infty)$ a f_3 solo le "llega" $(0,\infty)$

$\Rightarrow f_3((0,\infty)) \to (-\infty, 0)$

↳ abuso de notación

$f_2(f_3(f_1(f_3(f_2(x))))) : \mathbb{R} \to (-\infty, -3)$

igual que en el paso anterior, a f_2 solo le llega $(-\infty, 0)$

$f_2((-\infty, 0)) \to (-\infty, 0) - 3$

↳ $(-\infty, -3)$

$\therefore f_2 \circ f_3 \circ f_1 \circ f_3 \circ f_2 : \mathbb{R} \to (-\infty, -3)$

↳ ahora calculemos la inversa

$$f(x) = -3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-3}$$
$$y = -3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-3}$$
$$y + 3 = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-3}$$
$$-(y+3) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-3}$$

$\log_{1/2}(-(y+3))$ tiene sentido, ya que $y \in (-\infty, -3)$ → recorrido

$\Rightarrow y < -3$

↳ $y + 3 < 0 \quad / \cdot -1$

$-(y+3) > 0$

$$\log_{\frac{1}{2}}(-(y+3)) = x - 3$$
$$\Rightarrow \log_{1/2}(-(y+3)) + 3 = x$$
$$\therefore f^{-1}(x) = \log_{1/2}(-(x+3)) + 3$$

↳ $f^{-1} \circ f = \log_{1/2}\left(-\left(-3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-3} + 3\right)\right) + 3$

$= \log_{1/2}\left(-\left(-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-3}\right)\right) + 3$

$= \log_{1/2}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{x-3}\right) + 3$

$= x - 3 + 3$

$= x$ ✓

↳ $f \circ f^{-1} = -3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{(\log_{1/2}(-(x+3)) + 3 - 3)}$

$= -3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{(\log_{1/2}(-x-3))}$

$= -3 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\log_{1/2}(-x-3)}$

$= -3 - (-x-3)$

$= -3 + x + 3$

$= x$ ✓

→ es invertible con inversa $f^{-1}(x) = \log_{1/2}(-(x+3)) + 3$

---

por def

$f^{-1} \circ f(\alpha) = \alpha$

↳ $f f_2^{-1}(f_2 \circ f_3 \circ f_1 \circ f_3 \circ f_2))$

$= f_3 \circ f_1 \circ f_3 \circ f_2$

↳ $\cancel{f_3^{-1}} \circ (\cancel{f_3} \circ f_1 \circ f_3 \circ f_2)$

$f_1 \circ f_3 \circ f_2$

$\cancel{f_1^{-1}}(\cancel{f_1} \circ f_3 \circ f_2(x))$

$f_3 \circ f_2(x)$

$\cancel{f_3^{-1}} \circ \cancel{f_3} \circ f_2(x)$

$\cancel{f_2^{-1}} \circ \cancel{f_2}(x)$

$= x$

$\Rightarrow f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_1^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_2^{-1}$

$\hookrightarrow \cancel{f_2^{-1}} \circ \cancel{f_3^{-1}} \circ \cancel{f_1^{-1}} \circ \cancel{f_3^{-1}} \circ \cancel{f_2^{-1}} \left(\cancel{f_2} \circ \cancel{f_3} \circ \cancel{f_1} \circ \cancel{f_3} \circ \cancel{f_2} \right)(x)$

$= x$

$\therefore \ f^{-1} = f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_1^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_2^{-1}$

$\Rightarrow f^{-1} - f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_1^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_2^{-1} = 0$

$\hookrightarrow$ 0 es una constante

$\therefore$ no es invertible

---

4. $f(x) = 2 - 3\sqrt{x+1} \qquad x \in (0, 8]$

Como $f(x)$ es estrictamente Decreciente

el recorrido va a ser $[f(8), f(0))$

$\hookrightarrow f(0) = 2 - 3\sqrt{1} = -1$

$f(8) = 2 - 3\sqrt{8+1}$

$= 2 - 3\sqrt{9} = 2 - 3 \cdot 3$

$= 2 - 9 = -7$

$\Rightarrow y \in [-7, -1)$

$\rightarrow y = 2 - 3\sqrt{x+1}$

$\rightarrow y - 2 = -3\sqrt{x+1}$

$-(y-2) = 3\sqrt{x+1}$

$\frac{-(y-2)}{3} = \sqrt{x+1}$

$\frac{(y-2)^2}{9} = x+1$

$\frac{(y-2)^2}{9} - 1 = x$

$\therefore \ f^{-1}(x) = \frac{(x-2)^2}{9}$

Como el recorrido de $f(x)$ es $[-7, -1)$

$\Rightarrow$ el $\mathrm{Dom}(f^{-1}(x)) = [-7, -1)$