PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo Semestre 2014.

MAT 1610 - Cálculo I.
Interrogación 2

1. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} & \text{si} \quad |x| > 2 \\ \\ a + bx^2 & \text{si} \quad |x| \leq 2 \end{cases}$$

determine a y $b \in \mathbb{R}$ de modo que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$.

Solución:

- Podemos reescribir la función como:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < -2 \\ \\ a + bx^2 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 2 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

- Como $f(x)$ debe ser continua en $x = 2$ (sino no es derivable), entonces imponemos la condición que:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$

(**0.5 pts**)

Tenemos:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} a + bx^2 = 4b + a = f(2)$$

y

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

de forma que $f(x)$ es continua en $x = 2$ si y sólo si

$$4b + a = \frac{1}{2} \quad (*)$$

(**2.0 pts**)

- Como $f(x)$ con la condición anterior es continua en $x = 2$, para que sea derivable en $x = 2$, debemos imponer además la condición, de que exista

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

(0.5 pts)

usando la condición $(*)$, se tiene que $f(2) = \frac{1}{2}$ y $a = \frac{1}{2} - 4b$, luego

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{a + b(2+h)^2 - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{2} - 4b + b(2+h)^2 - \frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{4bh + bh^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} b(4+h) = 4b$$

(1.0 pts)

Por otra parte

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2 - (2+h)}{2h(2+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{-h}{2h(2+h)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

(1.0 pts)

- Por último $f(x)$ es derivable en $x = 2$, si y sólo si:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \Longleftrightarrow 4b = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow b = \frac{1}{16}$$

(0.5 pts)
Por lo tanto la condición para que $f(x)$ sea derivable en $x = 2$, es que

$$b = -\frac{1}{16} \Longrightarrow a = \frac{3}{4}$$

(0.5 pts)

2. *a*) Para $x \geq 0$, se definen las funciones

$$f(x) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \text{ y } g(x) = 2\,\arctan\left(\sqrt{x}\right).$$

Demuestre que para $x \geq 0$, $f(x) - g(x)$ es constante, y determine la constante.

Solución:

Para $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$$

(**1.0 pts**)

$$g'(x) = \frac{2}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\,(x+1)}$$

(**1.0 pts**)

Como $f'(x) = g'(x)$, para $x > 0$ entonces:

$$f(x) - g(x) = C\ ,\ C \text{ constante}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\ \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{x}\right) = C\ , x > 0$$

(**0.5 pts**)

Si $x = 1$, entonces:

$$C = \operatorname{arc\,sen}(0) - 2\ \operatorname{arc\,tg}(1) = -2 \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

Así:

$$arcsen\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\,arctg\left(\sqrt{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad , \forall\, x \geq 0$$

(**0.5 pts**)

O bien,la identidad también se cumple si $x = 0$, pues se tiene:

$$\operatorname{arc\,sen}(-1) - 2\arctan(0) = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}$$

Así:

$$arcsen\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\,arctg\left(\sqrt{x}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad , \forall\, x \geq 0$$

b) La ecuación $x\,y^2 - 2x = 3$, define a y como función de x. Determine $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en función de x e y.

Solución:

Derivando implícitamente con respecto a x en la ecuación: $x\,y^2 - 2x = 3$.

Se tiene:

$$y^2 + 2x\,y\,\frac{dy}{dx} - 2 = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2-y^2}{2x\,y} \quad , \text{ con } x\,y \neq 0 \quad (*)$$

(**0.5 pts**)

Derivando nuevamente en forma implícita con respecto a x, se tiene:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left((-2y)\,\dfrac{dy}{dx}\right)2xy - (2-y^2)\left(2y + 2x\,\dfrac{dy}{dx}\right)}{4\,x^2\,y^2} = \frac{2y^3 - 4y - 4x\,\dfrac{dy}{dx} - 2xy^2\,\dfrac{dy}{dx}}{4\,x^2\,y^2}$$

(**1.5 pts**)

Usando $(*)$, obtenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3y^4 - 4y^2 - 4}{4x^2y^3}$$

(**1.0 pts**)

3. *a*) Dada la función: $f(x) = (\ln(x))^{x+1}$, determine $f'(1)$

Solución:

$$f(x) = (\ln(x))^{x+1} \Longrightarrow \ln\Big(f(x)\Big) = \ln\Big((\ln(x))^{x+1}\Big)$$

$$\Longrightarrow \ln\Big(f(x)\Big) = (x+1)\ \ln\Big(\ \ln(x)\Big)$$

(**1.0 pts**)

Derivando con respecto a x, se tiene:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln\Big(\ \ln(x)\Big) + (x+1)\cdot\frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Longrightarrow f'(x) = f(x)\ \left(\ln\Big(\ \ln(x)\Big) + \frac{x+1}{x\ \ln(x)}\right)$$

(**1.5 pts**)

luego:

$$f'(e) = 1\,(0 + \frac{e+1}{e}) = \frac{e+1}{e}$$

(**0.5 pts**)

b) Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}.$$

Solución:

El dominio de f es $\mathbb{R} - \{-2\,,2\}$.

Además:

$$f'(x) = \frac{2x^4 - 24x^2}{(x^2-4)^2}$$

(**1.0 pts**)

Por lo tanto: $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2(x^2-12) > 0 \Leftrightarrow (x^2-12) > 0$

Por lo tanto, f es estrictamente creciente en:

$$(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, \infty)$$

(**1.0pts**)

y es estrictamente decreciente en:

$$(-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 2\sqrt{3})$$

(**1.0 pts**)

Observación: Si colocan decreciente en:

$$(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$$

se quitan $0,5$ puntos.

4. *a*) Sea f una función tal que verifica $|f(x)| \leq x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es derivable en $x = 0$.

Solución:

Por hipótesis como $|f(x)| \leq x^2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, entonces si $x = 0$, se tiene que: $f(0) = 0$
(**0.5 pts**)
Por otra parte:

$$|f(x)| \leq x^2 \Longrightarrow |f(x)| \leq |x|^2 \Longrightarrow \frac{|f(x)|}{|x|} \leq |x| \; , \; \forall\, x \neq 0$$

De donde

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = 0$$

(**1.0 pts**)
Como para $x \neq 0$:

$$-\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{f(x)}{x} \leq \left| \frac{f(x)}{x} \right|$$

Por teorema del sandwich:

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad (*)$$

(**0.5 pts**)
Ahora

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} \overset{(*)}{=} 0$$

Por lo tanto f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$

(**1.0 pts**)

b) Determine un polinomio $p(x)$, de modo que la derivada de la función

$$f(x) = e^{3x}\, p(x)$$

sea igual a $e^{3x}\,(3x^2 + 8x)$

Solución:
Se tiene:

$$f'(x) = 3\, e^{3x}\, p(x) + e^{3x}\, p'(x) = e^{3x} \Big(3\, p(x) + p'(x)\Big)$$

(**0.5 pts**)

Como f' debe ser igual a $e^{3x}\,(3x^2 + 8x)$, se tiene:

$$e^{3x} \Big(3\, p(x) + p'(x)\Big) = e^{3x}\,(3x^2 + 5x) \Longrightarrow 3\, p(x) + p'(x) = 3x^2 + 8x \quad (*)$$

(**0.5 pts**)
Por lo tanto $p(x)$ debe ser un polinomio de grado 2, digamos

$$p(x) = ax^2 + bx + c \Longrightarrow p'(x) = 2ax + b$$

(**1.0 pts**)
de donde por $(*)$:

$$3p(x) + p'(x) = 3ax^2 + (3b + 2a)x + (3c + b) = 3x^2 + 5x$$

$$\Longrightarrow a = 1\,,\ b = 2\,,\ c = -\frac{2}{3}$$

(**0.5 pts**)
Así el polinomio pedido es:

$$p(x) = x^2 + 2x - \frac{2}{3}$$

(**0.5 pts**)