Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2018

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Examen

1. Sea A una matriz de 4×4 definida por

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{pmatrix}$$

   a) **[4 ptos]** Calcule el determinante de A.

   b) **[2 ptos]** Determine que condiciones debe cumplir la constante a para que la matriz A sea invertible.

Solución.

a)

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2 & a & a & a \\ 3 & 2 & a & a \\ 4 & 3 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 2-a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2-a & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a \begin{vmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 1 & 2-a & 0 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix} = -a(2-a)^3$$

b) Para que A sea invertible es necesario y suficiente que el $\mid A \mid \neq 0$, luego si $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 2$ la matriz A es invertible.

Puntaje:

- 1.5 ptos por aplicar correctamente alguna operación que facilite el calculo del determinante de A.
- 1.5 ptos por aplicar correctamente el calculo de cofactores para calcular el determinante de A.
- 1 pto por calcular correctamente el determinante de A.
- 1 pto por determinar que $a \neq 0$ para que A sea invertible.
- 1 pto por determinar que $a \neq 2$ para que A sea invertible.

2. Sean $V \leq \mathbb{R}^3$ definido por $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y = 0 \right\}$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ -2y + z \\ 2x - z \end{pmatrix}$

   a) Determine una base para V.

   b) Determine la dimensión de la imagen de V, es decir $T(V) = \{T(v) \mid v \in V\}$. Justifique su respuesta.

Solución.

a) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = y \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Luego $V = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y estos dos vectores son linealmente independientes, entonces $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para V.

b) $T(V) = \{T(v) \mid v \in V\} = \left\{ T(v) \mid v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ T \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\}$

$$= \left\{ xT \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + zT \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Luego $V = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ pero estos dos vectores son linealmente dependientes, entonces $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base para $T(V)$ y así la dimensión de $T(V)$es 1.

Puntaje:

- 1 pto por mostrar vectores que generen al subespacio V.
- 1 pto por argumentar que los vectores escogidos para formar la base deben ser li.
- 1 pto mostrar dos vectores que formen una base para V.
- 3 pto por determinar justificadamente que la dimensión de $T(V)$ es 1.(1.5 ptos si solo muestra vectores que generen $T(V)$)

3. Sean $B = \{u, v, w\}$ una base para $\mathbb{R}^3$ y A una matriz de 3×3 tal que

$$Au = u + w, \quad Av = -v, \quad Aw = 2u + 2w$$

a) Demuestre que $B_1 = \{u + w, v, -2u + w\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$.

b) Demuestre que $u + w,\ v$ y $-2u + w$ son vectores propios para A.

c) Determine una matriz D diagonal que sea similar a la matriz $A^2 - I$.

Solución.

a) Primero demostraremos que el conjunto $B_1 = \{u + w, v, -2u + w\}$ es linealmente independiente.
Sean c_1, c_2 y $c_3 \in \mathbb{R}$

$$c_1(u + w) + c_2(v) + c_3(-2u + w) = \vec{0}$$

$$(c_1 - 2c_3)u + c_2v + (c_1 + c_3)w = 0 \to c_1 - 2c_3 = 0 \ \wedge \ c_2 = 0 \ \wedge \ c_1 + c_3 = 0$$

ya que $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente, luego $c_1 = 0 \wedge c_2 = 0 \wedge c_3 = 0$ así demostramos que $B_1 = \{u+w, v, -2u+w\}$ es un conjunto de 3 vectores linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$ luego es una base para $\mathbb{R}^3$.

b) Como

$$A(u + w) = A(u) + A(w) = u + w + 2u + 2w = 3(u + w)$$

$$A(v) = -1v$$

$$A(-2u + w) = A(-2u) + A(w) = -2(u + w) + 2u + 2w = \vec{0}$$

tenemos que los vectores $u + w, v, -2u + w$ son vectores propios de la matriz A.

c) Si x es vector propio se A asociado a un valor propio λ tenemos que

$$(A^2 - I)x = A^2x + x = \lambda^2x + x = (\lambda^2 - 1)x$$

luego x es un vector propio de $A^2 - I$ asociado al valor propio $(\lambda^2 - 1)$. Luego como

$$A(u + w) = 3(u + w),\ A(v) = -1v,\ A(-2u + w) = 0(-2u + w)$$

la matriz $A^2 - I$ tiene una base de vectores propios y cuyos valore propios son 8, 0, -1 así sabemos que la matriz $D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una matriz similar a $A^2 - I$.

Puntaje:

- 0.5 ptos por plantear la ecuación vectorial que verifica si los vectores son li o ld.
- 0.5 ptos por concluir que los coeficientes que ponderan a los vectores u, v y w deben ser 0 argumentando que ellos son li .
- 0.5 ptos por concluir que que B_1 es un conunto de vectores li.
- 0.5 ptos por argumentar que 3 vectores li de $\mathbb{R}^3$ forman una base para $\mathbb{R}^3$.
- 0.7 ptos por demostar que cada uno de los vectores son vectores propios para A.(2 ptos en total como máximo).
- 2 ptos por mostrar una atriz diagonal similar a $A^2 - I$.

4. Dada la forma cuadrática $x_1^2 + 5x_2^2 + \alpha x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_1x_2$ con $\alpha \neq 5$.

   a) [**4 pts**] Determine la descomposición de Cholesky de la matriz asociada a este forma.

   b) [**2 pts**] Determine las condiciones que debe cumplir α para que la forma cuadrática sea definida positiva.

Solución.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Para que forma cuadrática sea definida positiva se necesita que los elementos de la diagonal de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix}$ sean positivos es decir $\alpha > 1$.

Puntaje:

- 2 ptos por determinar correctamente la matriz L.
- 2 ptos por determinar correctamente la matriz D.
- 2 ptos por determinar que la condición es $\alpha > 1$.

Continúa en la siguiente página.

5. Determine una base ortogonal para el espacio columna de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \\ -1 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Solución.
Primero determinaremos un base para el espacio columna A

$$A \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego los vectores $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ son linealmente independiente y formar una base para el $Col(A)$, ahora necesitamos ortogonalizarla y para esto ocuparemos el proceso de gram-schimdt.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{20}{20} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{30}{20} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{10}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} \\ \frac{11}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Puntaje:

- 0.5 ptos por argumentar que la base tiene dimensión 3.
- 0.5 por mostrar v_1.
- 2.5 por calcular correctamente v_2.(0.5 ptos si muestra bien la forma que debe calcularlo para comete algún error algebraico)
- 2.5 por calcular correctamente v_3.(0.5 ptos si muestra bien la forma que debe calcularlo para comete algún error algebraico)

6. Si a, b y c son números distintos, entonces el siguiente sistema es inconsistente.

$$x - 2y + 5z = a,$$

$$x - 2y + 5z = b,$$

$$x - 2y + 5z = c.$$

Demuestre que el conjunto de todas las soluciones de mínimos cuadrados del sistema es el plano cuya ecuación es $x - 2y + 5z = \dfrac{a+b+c}{3}$.

Solución.

El sistema matricial que corresponde con este sistema de ecuaciones es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

luego para encontrar el conjunto de todas las soluciones de mínimos cuadrados del sistema, debemos solucionar el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 15 \\ -6 & 12 & -30 \\ 15 & -30 & 75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ -2a-2b-2c \\ 5a+5b+5c \end{pmatrix}$$

el cual se soluciona a través de la matriz aumentada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 15 & a+b+c \\ -6 & 12 & -30 & -2a-2b-2c \\ 15 & -30 & 75 & 5a+5b+5c \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 15 & a+b+c \\ 0 & 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 & -0 \end{array}\right)$$

luego la solución es $3x - 6y + 15z = a + b + c \rightarrow x - 2y + 5z = \dfrac{a+b+c}{3}$

Puntaje:

- 2 ptos por plantear correctamente sistema matricial que encunetra el conjunto de todas las soluciones de mínimos cuadrados.
- 3 ptos por solucionar el sistema planteado.
- 1 pto por concluir lo que se pide demostrar.

7. Sean P una matriz ortogonal de $m \times m$ y A una matriz de $m \times n$. Demuestre que si $\sqrt{\sigma}$ es un valor singular de PA entonces también es un valor singular de A .

Solución.

Si $\sqrt{\sigma}$ es un valor propio de PA tenemos que σ es un valor propio para

$$(PA)^T(PA) = A^T P^T PA = A^T A$$

ya que P es una matriz ortogonal por lo cual cumple que $P^T P = I$. Así σ es un valor propio para $A^T A$ lo que implica que $\sqrt{\sigma}$ es un valor singular para A.

Puntaje:

- 1 pto por argumentar que σ es valor propio para $(PA)^T(PA)$.
- 2 pto por argumentar que $(PA)^T(PA) = A^T A$.
- 1 pto por argumentar que σ es un valor propio para $A^T A$.
- 2 ptos por concluir que σ s un valor singular para A.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

a) Si A es una matriz invertible y diagonalizable ortogonalmente entonces A^{-1} tambien es diagonalizable ortogonalmente.

b) El sistema de ecuaciones

$$x + 3z = 3,$$

$$x + y = 2,$$

$$2x + y + 2z = b.$$

es consistente para todo b.

c) Si A una matriz de 3×3 dada por $A = [a_1 a_2\ a_3]$ y $W = (Nul(A^t))^{\perp}$ entonces $Proy_W a_1 = \vec{0}$

Solución.

a) Verdadero. Si x es un vector propio de A entonces $Ax = \lambda x \to \frac{1}{\lambda}x = A^{-1}x$ con $\lambda \neq 0$(ya que A es invertible, luego x es un vector propio de A^{-1}, luego como A es diagonalizable posee una base ortogonal de vectores propios, que como ya demostramos es una base ortogonal de vectores propios para A^{-1}, esto equivale a decir que A^{-1} es diagonalizable ortogonalmente.

b) Verdadero. El sistema se representa por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & b-5 \end{array}\right)$$

el cual siempre tiene solución.

c) Falso. $(Nul(A^T))^{\perp} = Col(A)$ luego $Proy_{Col(A)} a_1 = a_1$

Puntaje:

2 ptos por cada item contestado correctamente y justificado.