PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2023

Pauta Interrogación 1 - MAT1620

1. Determine para qué valor de C la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right) dx$$

converge. Evalúe la integral para el valor de C encontrado.

Solución:

Observe que la integral es convergente si y sólo si

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right) dx \text{ existe.}$$

Integrando tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \int_0^t \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right) dx &= \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \frac{C}{3}\ln(3x+1)\right)\Bigg|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{(x^2+1)^{1/2}}{(3x+1)^{C/3}}\right)\Bigg|_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{(t^2+1)^{1/2}}{(3t+1)^{C/3}}\right)
\end{aligned}$$

Observe que el último de estos límites existe si y sólo si $\lim_{t\to\infty} \frac{(t^2+1)^{1/2}}{(3t+1)^{C/3}}$ existe y no es cero. Lo anterior es cierto si y sólo si $C = 3$, por lo tanto la integral impropia converge sólo para $C = 3$ y converge al valor de dicho límite que es $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por la definición de convergencia.
- (2 puntos) Por integrar correctamente (1 por cada integral).
- (2 puntos) Por determinar, justificadamente, que el único valor posible es $C = 3$.
- (1 punto) Por determinar el valor de la integral.

2. Considere la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \quad \text{con } a_1 = 1.$$

(a) Demuestre que la sucesión es monótona creciente y que $a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.**(4 pts)**

Solución:

Observe que $a_1 \leq 2$ y que si $a_k \leq 2$ entonces $2a_k \leq 4$ y por lo tanto $a_{k+1} = \sqrt{2a_k} \leq 2$, entonces, por el Principio de Inducción tenemos que $a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte notamos que $1 = a_1 \leq \sqrt{2} = a_2$ y que si $a_k \leq a_{k+1}$ entonces $2a_k \leq 2a_{k+1}$, luego $a_{k+1} = \sqrt{2a_k} \leq \sqrt{2a_{k+1}} = a_{k+2}$, por lo tanto, por el principio de Inducción, tenemos que $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por demostrar monotonía.
- (2 puntos) Por demostrar que está acotada por 2.

(b) Demuestre que la sucesión converge y determine el límite.**(2 pts)**

Solución:

Del inciso anterior sabemos que la sucesión converge a algún número L por ser monótona y acotada.Así,

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{2 \lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{2L}$$

y se concluye $L^2 = 2L$, es decir $L(L-2) = 0$, de donde $L = 0$ o $L = 2$. Como la sucesión está acotada inferiormente por 1 se deduce que $L = 2$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por justificar la convergencia
- (1 punto) Por determinar el valor del límite.

3. Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{(-7)^k\sqrt{k}}$$

Solución:

Usaremos el criterio de la razón para determinar el radio de la serie, para esto estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k+1}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{k}}{7\sqrt{k+1}}|x+1| = \frac{1}{7}|x+1|$$

por lo tanto el radio de convergencia de la serie es 7.

Sabemos, de lo anterior que la serie converge en $(-8,6)$ y para determinar el intervalo de convergencia debemos ver qué pasa en los bordes del intervalo. Para $x=6$ la serie númerica correspondiente es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

que corresponde a una serie convergente por el criterio alternante, ya que $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ es decreciente y $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$.

Para $x=-8$ la serie numérica correspondiente es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

que diverge por criterio p.

Por lo tanto el intervalo de convergencia es $(-8,6]$.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por determinar que el límite del cociente es $1/7$.
- (1 punto) Por determinar que converge en $(-8,6)$.
- (1 punto) Por concluir que converge para $x=6$.
- (1 punto) Por concluir que no converge para $x=-8$.
- (1 punto) Por concluir que el intervalo de convergencia es $(-8,6]$

4. Sabiendo que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \ -1 < x < 1$$

determinar la serie de potencias, en torno a $x = 0$, de la función $\ln(1+x)$ indicando su intervalo de convergencia y úsela para calcular el valor de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)}$.

Solución:

Observamos que $\dfrac{d}{dx}\ln(1+x) = \dfrac{1}{1+x}dx$, luego

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \int \frac{1}{1+x} \\
&= \int 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots dx \\
&= c + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots
\end{aligned}$$

evaluando en $x = 0$ tenemos que $c = 0$ por lo tanto

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

De lo anterior podemos observar que al reemplazar en $x = 1$ se obtiene

$$\ln(1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1}$$

entonces $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)} = -\ln(2)$.

Distribución de puntajes:

- (1 puntos) Por observar que $\ln(1+x) = \displaystyle\int \frac{1}{1+x}dx$.
- (1 punto) Por integrar correctamente la serie de $\displaystyle\int \frac{1}{1+x}dx$.
- (1 punto) Por determinar el valor de la constante c.
- (1 punto) Por determinar la serie de $\ln(1+x)$ junto al intervalo (0.5 por c/u).
- (1 punto) Por calcular $\ln(2)$.
- (1 punto) Por ajustar el signo para concluir que la serie pedida converge a $-\ln(2)$.

5. Determine si las siguientes series convergen o divergen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{3n^2}$

Solución 1:

Sea $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{3x^2}$, sabemos que $f(x)$ es continua en $[1, \infty]$, positiva en dicho intervalo y decreciente en $[1, \infty]$ ya que $f'(x) = \dfrac{e^{1/x}(-1/x^2 - 6x)}{9x^4} < 0$ en $[1, \infty)$, con lo anterior podemos usar el criterio de la integral, que dice que la serie propuesta converge si y sólo si la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{1/x}}{3x^2} dx$ converge.

Usamos la sustitución $u = 1/x$ obteniendo que

$$\int \frac{e^{1/x}}{3x^2} dx = -\frac{1}{3} \int e^u du = -\frac{1}{3} e^u + c = -\frac{1}{3} e^{1/x} + c.$$

luego

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{1/x}}{3x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \left(-\frac{1}{3} e^{1/x} \right) \Bigg|_1^t = \frac{e-1}{3}$$

entonces la integral impropia es convergente y por lo tanto la serie es convergente.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por verificar hipótesis de criterio de la integral.
- (1 punto) Por determinar que la integral converge.
- (1 punto) Por concluir que converge.

Solución 2:

Observamos que la serie a estudair es de términos positivos y que la serie, también de términos positivos, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2}$ es convergente por criterio p y además, $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{e^{1/n}/3n^2}{1/3n^2} = 1$, por lo tanto, por criterio de comparación, tenemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{3n^2}$ es también convergente.

* También puede hacer comparación, por ejemplo con $\dfrac{e^{1/n}}{3n^2} \leq \dfrac{e}{3n^2}$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por decir que ambas series son de términos positivos.
- (1 punto) Por determinar el límite de cociente.
- (1 punto) Por concluir que converge.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n}+\sin(n)}{3n^2-2n+1}$

Solución 1:

Sean
$$b_n = \frac{2\sqrt{n}}{3n^2-2n+1} \qquad c_n = \frac{\sin(n)}{3n^2-2n+1}$$
de manera que
$$\frac{2\sqrt{n}+\sin(n)}{3n^2-2n+1} = b_n + c_n.$$
La serie $\sum b_n$ converge por comparación al límite con $\tilde{b}_n = \frac{1}{n^{3/2}}$, y la serie $\sum c_n$ converge absolutamente por comparación con $\tilde{c}_n = \frac{1}{n^2}$, luego la serie dada converge.

También pueden decir que
$$0 \leq \frac{\sqrt{n}+\sin(n)}{3n^2-2n+1} \leq \frac{2\sqrt{n}}{n^2} \leq \frac{2}{n^{3/2}}$$
luego la serie converge por criterio de comparación con serie p con $p > 1$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por verificar hipótesis de criterio a usar.
- (1 punto) Por usar criterio correctamente.
- (1 punto) Por concluir que converge.

Solución 2:

Sean $a_n = \dfrac{2\sqrt{n}+\sin(n)}{3n^2-2n+1}$ y $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$, observe que ambas son series de términos positivos y que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{3}$ por lo tanto, ambas series convergen o divergen, por criterio p sabemos que $\sum b_n$ converge por lo que podemos concluir que la serie dada converge.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por verificar hipótesis de criterio a usar.
- (1 punto) Por usar criterio correctamente.
- (1 punto) Por concluir que converge.