

CLASE 22 : TEOREMA DEL BINOMIO

- META: Encontrar una fórmula para

$$(a+b)^m, m \geq 0$$

Concretamente

$$(a+b)^m = C_m a^m + \text{potencias menores de } a + C_0 b^m$$

con potencias de b

$$\leadsto C_k = ?$$

• Ej: $\underline{m=0}$ $(a+b)^0 = 1$

$\underline{m=1}$ $(a+b)^1 = a+b$

$\underline{m=2}$ $(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2$

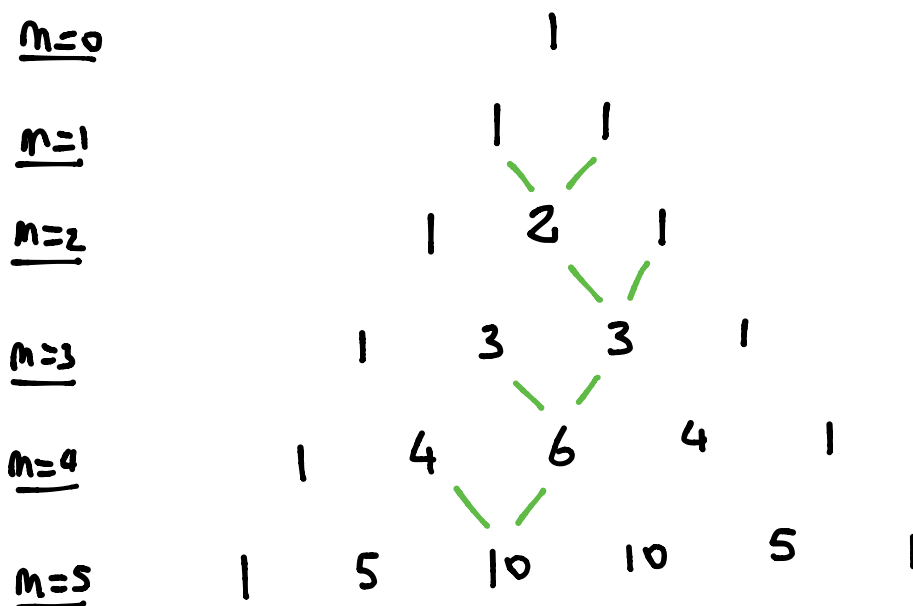
$\underline{m=3}$ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3$

$\underline{m=4}$ $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Siguiendo el patrón:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Aparentemente, el coeficiente que acompaña a^k se puede inferir de la siguiente pirámide



Do problems: i) Hay que demostrarlo
ii) En la práctica, esto sirve solo
para potencias pequeñas de n

→ Necesitamos una manera más "práctica"
de calcular estos coeficientes.

• Preliminar: $a=x, b=1$

$$(x+1)^n = ?$$

$$\bullet (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1)$$

$$x^2 : (x+1)(x+1) \quad 1 \text{ posibilidad}$$

$$2x : (x+1)(x+1) \quad 2 \text{ posibilidades}$$

$$1 : (x+1)(x+1) \quad 1 \text{ posibilidad}$$

$$\bullet (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)(x+1)(x+1)$$

$$x^3 : (x+1)(x+1)(x+1) \quad 1 \text{ posibilidad}$$

$$3x^2 : (x+1)(x+1)(x+1) \quad 3 \text{ posibilidades}$$

$$3x : \underbrace{(x+1)(x+1)}_{\text{red}} \underbrace{(x+1)}_{\text{orange}}$$

$$1 : \underbrace{(x+1)(x+1)}_{\text{green}} \underbrace{(x+1)}_{\text{green}} \quad 1 \text{ posibilidad}$$

Monomio: $(x+1)^m = x^m + \dots + C_k x^k + \dots + 1$

→ C_k = el número de formas de escoger k de los x's entre los m disponibles.

Obs: En rigor, C_k también depende de $m \rightsquigarrow C_k^m$

Conclusión: $(x+1)^m = \sum_{k=0}^m C_k^m x^k$

donde C_k^m es el número de grupo de k objetos que se pueden formar a partir de m objetos.

• Caso general:

$$(a+b)^n = (\underset{\checkmark}{a} + \underset{\checkmark}{b})(\underset{\checkmark}{a} + \underset{\checkmark}{b}) \dots \underset{\checkmark}{\dots} \dots (\underset{\checkmark}{a} + \underset{\checkmark}{b})(\underset{\checkmark}{a} + \underset{\checkmark}{b})$$

• a^k : # elegir k de los a 's entre los n disponibles

• elegir k a 's \leftrightarrow elegir $n-k$ b 's

$$\rightsquigarrow C_k^n a^k b^{n-k}$$

Obs: $C_k^n = C_{n-k}^n$

• Conclusión:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^k b^{n-k}$$

donde C_k^n es como antes.

• Pregunta: ¿Cómo calcular C_k^m ?

• m objetos: ① ② ③ ④ m

Tenemos que seleccionar k objetos distintos

• Primero: m posibilidades

• Segundo: $m-1$ posibilidades

• Tercero: $m-2$ posibilidades

⋮

• k -ésimo: $m-k+1$ posibilidades

→ $m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)$ posibilidades

$$= \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1)(m-k) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m-k)(m-k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= \frac{m!}{(m-k)!}$$

donde $m!$ = factorial de $m = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

• Hay un problema:

$$\{1, 2, 4\} = \{2, 1, 4\} = \dots = \{4, 1, 2\}$$

→ Estamos contando el mismo grupo
muchas veces

→ Hemos contado los maneras de escoger
los k objetos ordenados

→ Tenemos que dividir por el número de
formas de ordenar los k objetos

escoger el primero : k

escoger el segundo : $k-1$

escoger el tercero : $k-2$

⋮

escoger el último : 1

→ # maneras de ordenar k objetos: $k(k-1) \dots 2 \cdot 1 = k!$

- Conclusion: $C_k^m = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- DEF: Coeficientes binomiales

$$\binom{m}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad m \geq 1, 0 \leq k \leq m$$

Obs: $0! = 1$

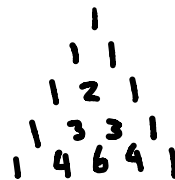
- TEOREMA (Teorema del binomio)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

DEM: Pendiente

D

• Volviendo a la pirámide:



$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

$$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0! \cdot 1!} = 1 \quad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1! \cdot 0!} = 1$$

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0! \cdot 2!} = 1 \quad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2 \quad \binom{2}{2} = \frac{2!}{2! \cdot 0!} = 1$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0! \cdot 3!} = 1 \quad \binom{3}{1} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$\begin{matrix} m=3 \\ k=0 \\ m-k=3 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} m=3 \\ k=1 \\ m-k=2 \end{matrix}$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 1} = 3 \quad \binom{3}{3} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$$

• Obs:

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!} = \frac{m!}{(m-k)! \cdot k!} = \binom{m}{m-k}$$

• Obs:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & \binom{1}{0} & \\
 & & & \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & \binom{m}{0} & \dots & \binom{m}{k} & \binom{m}{k+1} & \dots & \binom{m}{m} \\
 & & & & \text{green lines} & & \\
 \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \dots & \binom{m+1}{k+1} & \dots & \dots & \binom{m+1}{m+1}
 \end{array}$$

$$\rightarrow \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$

DEM:

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \frac{m!}{k! (m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)! (m-k-1)!}$$

$$= \frac{m!}{\underline{k!} (m-k) \cdot \underline{(m-k-1)!}} + \frac{m!}{(k+1) \cdot \underline{k!} (m-k-1)!}$$

$$= \frac{m! (k+1)}{\underbrace{(k+1) \cdot k! \cdot (m-k)(m-k-1)!}_{(k+1)! \cdot \underbrace{(m-k)!}_{m-k = (m+1)-(k+1)}}} + \frac{m! (m-k)}{\underbrace{(k+1)! \cdot k! \cdot (m-k)(m-k-1)!}_{(k+1)! \cdot (m-k)!}}$$

$$= \frac{m! (m+1)}{(k+1)! (m+1-(k+1))!}$$

$$= \binom{m+1}{k+1}$$

□