Límites y convergencia

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

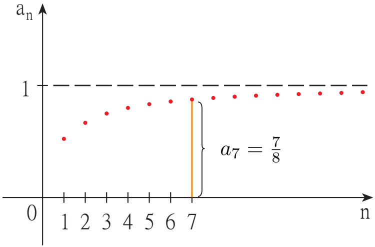
[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

25 de Mayo de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Límites de Sucesiones

La sucesión $\{a_n\}$ dada por $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, se puede representar dibujando su gráfica como en la figura



Observe que, como una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales, su gráfica consta de puntos aislados con coordenadas

$$(1, a_1) \quad (2, a_2) \quad (3, a_3) \quad \cdots \quad (n, a_n) \quad \cdots$$

De acuerdo a la figura los términos de la sucesión a_n se aproximan a 1 cuando n se incrementa.

Límites de Sucesiones

En efecto, distancia entre 1 y a_n es

$$d(1, a_n) = |1 - a_n| = \left|1 - \frac{n}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$$

y es cada vez más pequeña a medida que n se incrementa. Se indica lo anterior escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

En general, se usa la notación

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L\,.$$

Límites de Sucesiones

Definición.

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite a L y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$ hay un natural N tal que si $n > N$ entonces $|a_n - L| < \varepsilon$.

En símbolos,

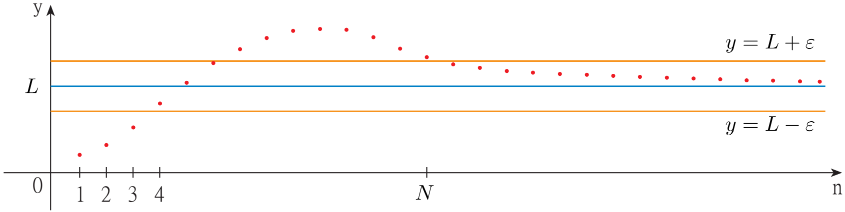
$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = L\,.$$

Límites de Sucesiones

Note que

$$|a_n - L| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Longleftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

En otras palabras, dada un $\varepsilon > 0$ lo cual podemos interpretar como un error, es decir, un número pequeño, a partir de un N suficientemente grande, todos los valores de la sucesión se encuentran en la franja $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. En la imagen se presenta la situación con la gráfica de la sucesión, no importa qué tan pequeño se haya escogido ε, pero por lo regular un ε más pequeño requiere un N más grande.



Límites de Sucesiones

Teorema. (Principio de Arquímedes)

$\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

Observación Otra forma equivalente de enunciar el Principio de Arquímedes es:
Dado un número real positivo a, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n$.

Teorema. (Propiedad Arquimediana)

Dada un número real pequeño positivo $\varepsilon < 1$, siempre existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Demostración Como $0 < \varepsilon < 1$ tenemos que $0 < \dfrac{1}{\varepsilon}$, luego por el Principio de Arquímedes existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{\varepsilon} < n$. Es decir, $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

EJEMPLO 1 La sucesión $a_n = 1 + \dfrac{5}{n+1}$ converge a $L = 1$.

Solución En efecto, dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar N tal que si $n > N$, entonces

$$|a_n - L| = \left|1 + \frac{5}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{5}{n+1}\right| = \frac{5}{n+1}$$

debe ser menor que ε. Imponiendo la condición, despejemos n. Para que $\dfrac{5}{n+1} < \varepsilon$ es necesario y suficiente que $\dfrac{5}{\varepsilon} - 1 < n$. Así, usando la propiedad arquimediana, dado $\frac{5}{\varepsilon} - 1$ existe N tal que $\dfrac{5}{\varepsilon} - 1 < N$, de modo que si $n > N$, entonces

$$\frac{5}{\varepsilon} - 1 < n \iff \frac{5}{\varepsilon} < n + 1 \iff \frac{1}{\varepsilon} < \frac{n+1}{5} \iff \frac{5}{n+1} < \varepsilon \, .$$

Límites de Sucesiones

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n+1}\right)=1\,.$$

EJEMPLO 2 La sucesión constante con término general $a_n = c$ para todo n, tiene límite $L = c$. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} c = c\,.$$

Solución En efecto, Dado $\varepsilon > 0$ para todo n se tiene que

$$|a_n - L| = |c - c| = 0 < \varepsilon\,.$$

EJEMPLO 3 La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ tiene límite $L = 0$. Esto es, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Solución En efecto, es consecuencia directa de la propiedad Arquimediana, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Entonces, si $n > N$ implica que $\dfrac{1}{N} > \dfrac{1}{n}$ entonces

$$|a_n - L| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

EJEMPLO 4 Demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Solución Dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces

$$|a_n - L| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}$$

debe ser menor que ε. Imponemos la condición

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$$

Usando la propiedad arquimediana, dado $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{\varepsilon} - 1 < N$, de modo que si $n > N$ entonces

$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n \iff \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon\,.$$

Límites de Sucesiones

Definición.

Una sucesión que posee límite se llama **convergente**. En caso contrario se llama **divergente**.

Teorema. (Unicidad del límite)

Una sucesión no puede converger a dos límites diferentes.

Demostración Sea $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Dado $M \neq L$ podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que los intervalos abiertos $I = (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ y $J = (M-\varepsilon, M+\varepsilon)$ sean disjuntos. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ implica que $a_n \in I$. Entonces, para todo $n > N$, tenemos $a_n \notin J$. Luego no se tiene que $\lim_{n\to\infty} a_n = M$.

Definición.

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ está acotada si existe una constante $M > 0$ tal que $|a_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

EJEMPLO 5 La sucesión $a_n = (-1)^n$ está acotada ya que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $|a_n| = 1$.

EJEMPLO 6 La sucesión $b_n = \dfrac{n}{n+1}$ está acotada.
En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$n < n+1 \Longleftrightarrow \frac{n}{n+1} < 1\,.$$

Luego, $|a_n| = \dfrac{n}{n+1} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Límites de Sucesiones

Teorema.

Toda sucesión convergente es acotada.

Demostración Sea $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Dado $\varepsilon = 1$ existe un natural $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $a_n \in (L-1, L+1)$. Sean a el menor y b el mayor elemento del conjunto finito $\{a_1, a_2, \ldots, a_N, L-1, L+1\}$. Todos los términos a_n de la sucesión están contenidos en el intervalo $[a, b]$, luego la sucesión está acotada.

Límites de Sucesiones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Observación Si $\{a_n\}$ no es acotada entonces es divergente.

EJEMPLO 7 La sucesión $a_n = n$ no está acotada, luego es divergente.

EJEMPLO 8 La sucesión $a_n = n^2$, por ser creciente y no acotada superiormente, los términos para n grande no pueden acumularse en torno a un número fijo. Luego es divergente.