CLASE 7: INDUCCIÓN (Cont.)

- **IO, P2**: $x^2 - 6x + 13 > 0$

$$x^2 - 6x + 13 = x^2 - \underbrace{6x}_{2\cdot 3\cdot x} + 9 + 4$$

$$= (x-3)^2 + 4 \geq 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Conjunto solución: $\mathbb{R}$

- **Inducción**: Supongamos que:

  i) $P(n_0)$ es verdadera

  ii) $\forall k \geq n_0$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Luego, $P(n)$ es verdadera $\forall n \geq n_0$

• Ej: Calcular

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Sol:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = S_3 + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

Luego, parece que $S_n = \frac{n}{n+1}$

DEM: • $n=1$: $S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ✓

• HI: $S_k = \frac{k}{k+1}$

$$S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\overset{(HI)}{=} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

<u>Conclusión</u>: $S_n = \frac{n}{n+1} \quad \forall n \geq 1$

• Ej: ¿Para qué enteros n vale la desigualdad $2^n > 2n+1$?

Sol.:

• $n=1$: $2 > 3$ ✗

• $n=2$: $4 > 5$ ✗

• $n=3$: $8 > 7$ ✓

• $n=4$: $16 > 9$ ✓

• $n=5$: $32 > 11$ ✓

Afirmación: $2^n > 2n+1 \quad \forall n \geq 3$

• $n=3\ (=n_0)$: $8 > 7$ ✓

• Supongamos que $2^k > 2k+1$ $(k \geq 3)$
(HI)

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \quad (> 2(k+1)+1)$$

$$\overset{(HI)}{>} 2 \cdot (2k+1)$$

$$= 4k+2$$

$$= 2k + 2k+2$$

$$= 2k + 2(k+1)$$

$$> 1 + 2(k+1)$$

Luego, $2^m > 2m+1 \quad \forall m \geq 3$

(<u>Ejercicio</u>: $2^m > 2m+5 \quad m \geq ?$)

Si $m=0$: $1 > 1$ X

Si $m<0$

$$2m+1 < 0 < 2^m \checkmark$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Respuesta}} \\ \bullet\ m \geq 3 \\ \bullet\ m \leq -1 \end{array}}$$

- **Ej**: Demuestre (por inducción) que

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{si } x \geq -1$$

- **Ej**: Demuestre que todo monto (entero) superior a 12 doblones se puede formar con monedas de 4 y 5 doblones.

Sol:

1 ✗	5 ✓	9 ✓	$13 = 4+4+5$
2 ✗	6 ✗	10 ✓	$14 = 4+5+5$
3 ✗	7 ✗	11 ✗	$15 = 5+5+5$
4 ✓	8 ✓	12 ✓	$16 = 4+4+4+4$

- $n=k$: ✓
- Supongamos que $k \geq 12$ se escribe como combinación de 4's y 5's

Dos casos:

i) Hay una moneda de 4 doblones
$\rightarrow$ se remplaza por 5 doblones

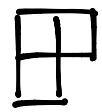
ii) Solo hay monedas de cinco.

Como $k \geq 12$, entonces $k \geq 15$. Luego, hay al menos 3 monedas de 5.

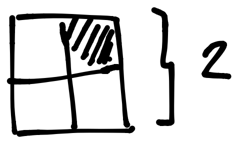
Remplazamos 5 5 5

por ~~4~~ ~~4~~ ~~4~~ ~~4~~

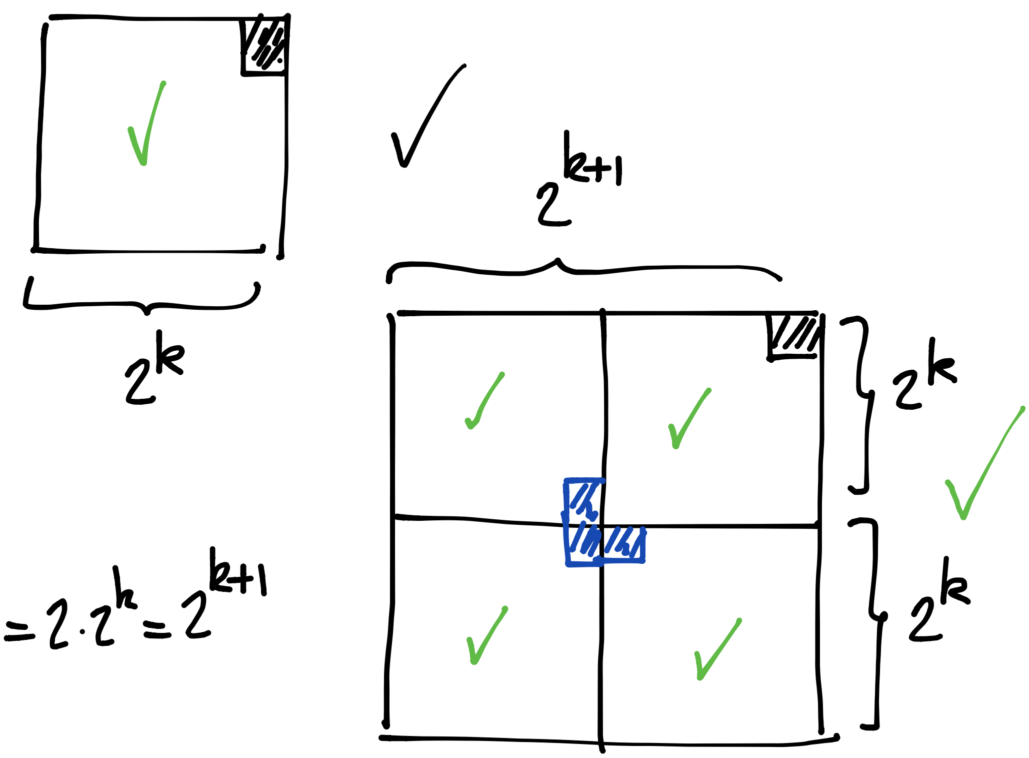
$$\left(\begin{array}{l} x=4,\ y=5 \\ 12 = 3x \\ 13 = 2x + y \\ 14 = x + 2y \\ 15 = 3y \\ 16 = 4x \end{array} \right)$$

- **Ej:** Demostrar que todo tablero de ajedrez cuadrado de $2^n \times 2^n$ casillas menos una esquina se puede cubrir con 

Sol:

- $n=1$: 

- Suponemos que es verdad para $k \geq 1$.



$$2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

Obs: $c_n = \#$ de $\boxplus$'s necesarios para cubrir el tablero de $2^n \times 2^n$

Pregunta: $c_n = ?$

- **Primera forma:**

$$c_{n+1} = 4c_n + 1, \quad c_1 = 1$$

$$c_1 = 1$$
$$c_2 = 5 = 1 + 4$$
$$c_3 = 21 = 1 + 4 + 16 = 1 + 4 + 4^2$$
$$c_4 = 85 = 1 + 4 + 16 + 64 = 1 + 4 + 4^2 + 4^3$$

Conjetura: $c_n = 1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1}$

Ejercicio: demostrar por inducción

- Segunda forma:

$$2^n \times 2^n - 1 = \text{Área}\Big(\underbrace{\square}_{2^n}\Big) = 3\,C_n$$

$$\Longrightarrow C_n = \frac{2^{2n}-1}{3}$$

- Inducción fuerte:

Supongamos que:

1.- $P(n_0)$ es verdadera

2.- Si $P(k)$ es verdadera $\forall\, n_0 \leq k \leq n$, entonces $P(n+1)$ es verdadera

Luego, $P(n)$ es verdadera $\forall\, n \geq n_0$

- **Ej**: Demostrar que todo entero mayor o igual a dos se puede escribir como producto de número primos.

Sol:

- **$n=2$**: ✓

- **HI**: Supongamos que todo entero entre 2 y k se puede escribir como producto de primos.

  - **Caso 1**: $k+1$ es primo ✓

  - **Caso 2**: $k+1$ no es primo

    Luego, $\exists\, a>1, b>1$ enteros tq

    $$k+1 = a \cdot b$$

    Necesariamente $2 \leq a \leq k$

    $2 \leq b \leq k$

Luego, por HI, a y b son producto de primo.

Luego, $k+1 = a \cdot b$ también es producto de primos.

- Obs: p es primo si y solo si $\nexists\, 2 \leq a \leq \sqrt{p}$ tal que a divide a p.