PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Interrogación 3 MAT1203 - 2 de diciembre

1. *a*) Sea A matriz simétrica de $n \times n$. Si A^2 es definida positiva, entonces A es definida positiva.

   Solución:

   La afirmación es falsa.

   Basta tomar $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ que es definida negativa pues es diagonal con elementos de la diagonal negativos.
   Se tiene entonces que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es definida positiva pues es diagonal con elementos de la diagonal positivos.

   b) Si a y b son reales positivos, entones la función $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (a+1)^2 x_1^2 + 2a x_1 x_2 + (a+b)^2 x_2^2,$$

   alcanza un mínimo absoluto en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Solución:

   La afirmación es verdadera.

   Primero se tiene que $q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1\ x_2)\begin{bmatrix} a+1 & a \\ a & a+b \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

   $\text{Det}[a+1] > 0$ pues $a > 0$.

   $\text{Det}\begin{bmatrix} a+1 & a \\ a & a+b \end{bmatrix} = a(b+1) + b > 0$ pues $a, b > 0$.

   Luego la matriz $\begin{bmatrix} a+1 & a \\ a & a+b \end{bmatrix}$ es positiva definida y entonces q alcanza un mínimo absoluto en $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. *a*) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \frac{1}{n} \end{bmatrix} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}\left(\frac{1}{n} - \frac{(n-1)n}{2}\right).$$

Solución:

La afirmación es verdadera.

Se hacen las operaciones elementales $F_n \to F_n - F_1$, $F_n \to F_n - 2F_2$, $\dots$, $F_n \to F_n - (n-1)F_{n-1}$ y el determinante no cambia. Luego se calcula el determinante una matriz diagonal y queda:

$$\operatorname{Det}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{n} - 1 - 2 - \ldots - (n-1) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-1)}\left(\frac{1}{n} - \frac{(n-1)n}{2}\right).$$

b) Sea $k \in \mathbb{R}$. Si $k > 0$, entonces la matriz $\begin{bmatrix} k^2 & 4 & 1 \\ k & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es invertible.

Solución:

La afirmación es verdadera.

El determinante de la matriz es $-(k+1)(k+2)$.

Este se hace cero en $k = -1$ y en $k = -2$, pero k es positivo, entonces la matriz es siempre invertible.

3. *a*) El conjunto $U = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \text{ tal que } A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A \right\}$ es un subespacio de $M_2(\mathbb{R})$.

Solución:

La afirmación es verdadera.

• El conjunto es no vacío pues la matriz nula pertenece a U.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

• El conjunto es cerrado bajo la suma de matrices. Si A y B pertenecen a U se tiene que:

$$A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A \text{ y } B \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} B.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} (A+B) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} B \ . \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} (A+B) \end{aligned}$$

Por lo tanto $(A+B)$ pertenece a U.

• El conjunto es cerrado bajo la multiplicación por escalar de matrices. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y A pertenece a U se tiene que:

$$A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A.$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
(\alpha A)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} &= (\alpha)A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\
&= (\alpha)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}A \qquad . \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}((\alpha)A)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto (αA) pertenece a U.

Finalmente entonces U es un subespacio del espacio $M_2(\mathbb{R})$.

b) Sean $B_1 = \{u, v\}$ y $B_2 = \{u + 3v, 2u + 4v\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $x \in \mathbb{R}^2$. Si el vector coordenado de x con respecto a la base B_2 NO es un vector canónico, entonces el vector coordenado de x con respecto a la base B_1 NO es un vector canónico.

Solución:

La afirmación es falsa.

Sea $x \in \mathbb{R}^2$ tal que su vector coordenado con respecto a B_2 es $\begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ que no es un vector canónico.

Interpretando el vector coordenado se tiene que $x = (1)(u+3v)+(-1/2)(2u+4v) = (0)u + (1)v$.

Entonces el vector coordenado de x con respecto a B_1 es $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que sí es un vector canónico.

4. *a*) La función $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $T(A) = \text{Det}(A)$ es una transformación lineal.

   Solución:

   La afirmación es falsa.

   Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $2A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   SI T es una transformación lineal debe cumplirse que $T(2A) = 2T(A)$.

   Pero $T(2A) = 4$ y $2T(A) = 2 \cdot 1 = 2$.

   b) Si $T : V \to W$ es una transformación lineal entre los espacios V y W de dimensiones 3 y 2, respectivamente, entonces T no es inyectiva.

   Solución:

   La afirmación es verdadera.

   Se tiene que $\text{Dim}(V) = \text{Dim}(\text{Nul}(T)) + \text{Dim}(\text{Im}(T))$.

   La dimensión de V es 3 y si T es inyectiva, entonces la dimensión de $\text{Nul}(T)$ es 0, reemplazando se tiene:

   $3 = \text{Dim}(\text{Im}(T))$.

   Pero $\text{Im}(T)$ es un subespacio de W, luego su dimensión no puede ser mayor que la dimensión de W que es 2.

   Por lo tanto T no es inyectiva.