Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2016

MAT 1620 – Cálculo II
Solución Interrogación 2

1. (a) Encuentre el punto en el que se cortan las líneas dadas:

$$r = (1,1,0) + t(1,-1,2) \quad \text{y} \quad r = (-1,3,2) + s(-1,1,0)\ .$$

(b) Encuentre la ecuación del plano que contiene estas rectas.

Solución.

(a) Las rectas se intersectan cuando

$$(1,1,0) + t(1,-1,2) = (-1,3,2) + s(-1,1,0) \Longleftrightarrow (1+t, 1-t, 2t) = (-1-s, 3+s, 2)$$

lo que nos lleva al sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 1+t &=& -1-s \\ 1-t &=& 3+s \\ 2t &=& 2 \end{array}\right| \Longrightarrow \begin{array}{rcl} s &=& -3 \\ t &=& 1 \end{array}$$

Entonces, el punto de intersección de las rectas es $P = (1,1,0) + (1,-1,2) = (2,0,2)$.

(b) El vectores directores de las rectas son $u = (1,-1,2)$ y $v = (-1,1,0)$, entonces un vector normal al plano es

$$w = u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-2,0)\ .$$

Además, el punto $(2,0,2)$ pertenece al plano. Entonces la ecuación cartesiana del plano es

$$-2(x-2) - 2y + 0(z-2) = 0 \Longleftrightarrow x + y = 2\ .$$

Puntaje 1(a).

- 1 punto por igualar las ecuaciones de las rectas.
- 1 punto por resolver el sistema asociado.
- 1 punto por obtener el punto de intersección.

Puntaje 1(b).

- 1,5 puntos por obtener el vector normal al plano.
- 1,5 puntos por obtener la ecuación del plano.

2. Sea $f(x,y) = \sqrt{1+x-y^2}$.

   (a) Determine y grafique el dominio de la función f.

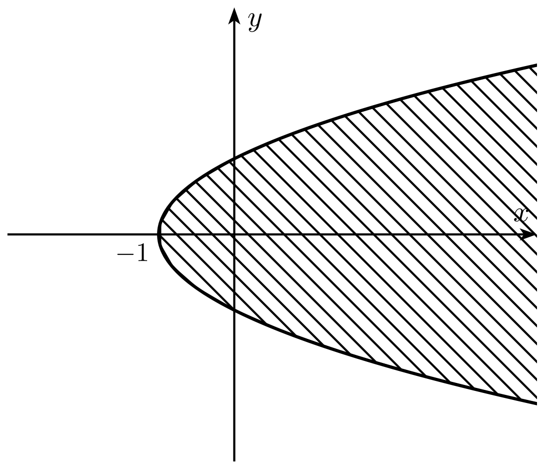
   (b) Determine el rango (recorrido) de f.

   Solución.

   (a) El dominio de f es

$$Dom(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1+x-y^2 \geqslant 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant y^2 - 1\}\,.$$

   Geometricamente, el dominio es la región achurada del plano



   (b) Note que $z = f(x,z) = \sqrt{1+x-y^2} \geqslant 0$ entonces el recorrido de f es $Rec(f) = [0, +\infty)$.

Puntaje 2(a).

- 1,5 puntos por determinar el dominio.
- 1,5 puntos por graficar el dominio.

Puntaje 2(b).

- 3 puntos por determinar el recorrido.

3. Determine el límite, si es que existe, o demuestre que el límite no existe.

(a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$. (b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$.

Solución.

(a) Sobre la curva $\Gamma_1 \,:\, y=0$ tenemos que $f(x,0)=0$ para $x\neq 0$ entonces $f(x,y)\to 0$ cuando $(x,y)\to(0,0)$ a lo largo del camino Γ_1.

Sobre la curva $\Gamma_2 \,:\, x=y^4$ tenemos que $f(y^4,y)=\dfrac{y^8}{y^8+y^8}=\dfrac{1}{2}$ para $y\neq 0$ entonces $f(x,y)\to\dfrac{1}{2}$ cuando $(x,y)\to(0,0)$ a lo largo del caminio Γ_2. Por lo tanto, el límite no existe.

(b) Usando coordenadas polares, vemos que

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{r^2+1}+1}{\sqrt{r^2+1}+1} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\sqrt{r^2+1}+1)}{r^2} \\
&= \lim_{r\to 0}(\sqrt{r^2+1}+1) = 2\,.
\end{aligned}
$$

Puntaje 3(a).

- 1 punto por dar cualquier camino cuyo límite sea cero.
- 1,5 puntos por dar el camino $x=y^4$ y calcular el límite.
- 0,5 puntos por concluir que el límite no exite.

Puntaje 3(b).

- 1 punto por hacer un cambio de variable.
- 2 puntos por calcular el límite.

4. Verifique que la función $z = \ln(e^x + e^y)$ satisface la relación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0\,.$$

Solución. Tenemos que las derivadas de orden 1 de z son:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y}\,.$$

Las derivadas de orden 2 son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{e^x(e^x + e^y) - e^x \cdot e^x}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{e^y(e^x + e^y) - e^y \cdot e^y}{(e^x + e^y)^2} = \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{-e^x e^y}{(e^x + e^y)^2}
\end{aligned}$$

y se verifica que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} \cdot \frac{e^x e^y}{(e^x + e^y)^2} - \left(\frac{-e^x e^y}{(e^x + e^y)^2}\right)^2 = 0\,.$$

Puntaje 4.

- 1 punto por calcular z_x
- 1 punto por calcular z_y
- 1 punto por calcular z_{xx}
- 1 punto por calcular z_{yy}
- 1 punto por calcular z_{xy}
- 1 punto por verificar que se satisface la ecuación.

5. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x^2y - 2y^2x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Encuentre $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ para $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Calcule $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.

(c) Demuestre que $f_{xy}(0,0) = -2$ y $f_{yx}(0,0) = 5$.

(d) ¿El resultado del inciso (c) contradice el teorema de Clairaut? Fundamente su respuesta.

Solución.

(a) Tenemos que

$$f_x(x,y) = \frac{y^2(10xy + 2x^2 - 2y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{y} \quad f_y(x,y) = \frac{x^2(5x^2 - 5y^2 - 4xy)}{(x^2+y^2)^2}.$$

(b) Tenemos que

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 \end{aligned}$$

(c) Tenemos que

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} \\ f_{yx}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} \end{aligned}$$

(d) Esto no contradice el teorema de Clairaut, debido a que las derivadas parciales f_x y f_y no son continuas en $(0,0)$.

Puntaje 5.

- 1,5 puntos por calcular f_x y f_y para $(x,y) \neq (0,0)$.
- 1,5 puntos por calcular $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
- 1,5 puntos por calcular $f_xy(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$.
- 1,5 puntos por argumentar correctamente que no hay contradicción.

6. Determine una ecuación del plano tangente a la superficie $z = y\cos(x-y)$ en el punto $(2,2,2)$.

Solución. Sean $z = f(x,y) = y\cos(x-y)$. Tenemos que $z_0 = f(2,2) = 2$, $f_x(x,y) = -y\,\mathrm{sen}(x-y)$, $f_y(x,y) = \cos(x-y) + y\,\mathrm{sen}(x-y)$ entonces $f_x(2,2) = 0$ y $f_y(2,2) = 1$.
Por lo tanto, el plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(2,2,2)$ es

$$z - z_0 = f_x(2,2)(x-2) + f_y(2,2)(y-2) \implies z - 2 = y - 2 \implies y - z = 0$$

Puntaje 6.

- 2 puntos por calcular f_x y f_y.
- 2 puntos por calcular $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
- 2 puntos por determinar el plano tangente.

7. Demuestre, mediante linealización en $(0,0)$, que $\dfrac{2x+3}{4y+1} \approx 3 + 2x - 12y$.

Solución. Si $f(x,y) = \dfrac{2x+3}{4y+1}$, entonces tenemos que

$$f_x(x,y) = \frac{2}{4y+1} \quad \text{y} \quad f_y(x,y) = (2x+3) \cdot \frac{-4}{(4y+1)^2} = \frac{-8x-12}{(4y+1)^2}$$

con $f_x(0,0) = 2$ y $f_y(0,0) = -12$. La aproximación lineal de f en $(0,0)$ es

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)(x-0) + f_y(0,0)(y-0) = 3 + 2x - 12y\,.$$

Puntaje 7.

- 2 puntos por calcular f_x y f_y.
- 2 puntos por calcular $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
- 2 puntos por determinar la aproximación lineal.

8. Sea f una función de dos variables con derivadas parciales continuas y considere los puntos $A(1,3)$, $B(3,3)$, $C(1,7)$ y $D(6,15)$. La derivada dereccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional en A en la dirección de $\overrightarrow{AC}$ es 26. Calcule la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

Solución. Un vector unitario en la dirección $\overrightarrow{AB}$ es $u = (1,0)$ y un vector unitario en la dirección $\overrightarrow{AC}$ es $v = (0,1)$. Entonces,

$$\begin{aligned} 3 &= D_u f(1,3) = f_x(1,3) \cdot 1 + f_y(1,3) \cdot 0 = f_x(1,3) \\ 26 &= D_v f(1,3) = f_x(1,3) \cdot 0 + f_y(1,3) \cdot 1 = f_y(1,3) \end{aligned}$$

Luego, $\nabla f(1,3) = (3,26)$. Note que $\overrightarrow{AD} = (6-1, 15-3) = (5,12)$. Un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AD}$ es $w = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ por lo que

$$D_w f(1,3) = \nabla f(1,3) \cdot w = 3 \cdot \frac{5}{13} + 26 \cdot \frac{12}{13} = \frac{327}{13}\ .$$

Puntaje 8.

- 1,5 puntos por determinar el valor de $f_x(1,3)$.
- 1,5 puntos por determinar el valor de $f_y(1,3)$.
- 1,5 puntos por determinar un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{AD}$.
- 1,5 puntos por calcular la derivada dirección de f en A en la dirección $\overrightarrow{AD}$.