PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2023

Ayudantía 6 - MAT1610

1. Considere la función $f(x) = x + e^x$, la cual es uno a uno (o inyectiva) en $\mathbb{R}$. Determine el valor $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

   Solución

   Una forma:

   Se tiene que $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ y $f'(x) = 1 + e^x$, entonces

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} \\ &= \frac{1}{1 + e^{f^{-1}(1)}} \end{aligned}$$

   Por definición $f^{-1}(1) = a \Leftrightarrow f(a) = 1$, es decir,

$$\begin{aligned} f^{-1}(1) = a \quad &\Leftrightarrow \quad f(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad a + e^a = 1 \end{aligned}$$

   Como $f(0) = 1$ y f es inyectiva, solo para $a = 0$ se cumple que $f(a) = 1$. Por lo tanto, $f^{-1}(1) = 0$. Así,

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{1 + e^0} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Otra forma:

   Considerar $y = x + e^x$, y calcular implícitamente $\frac{dx}{dy}$, que es $\left(f^{-1}\right)'(x, y)$. Se tiene que:

$$1 = \frac{dx}{dy} + e^x \frac{dx}{dy}$$

   Entonces,

$$1 = \frac{dx}{dy}\left(1 + e^x\right)$$

   y, por lo tanto,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + e^x}$$

   y

$$\frac{dx}{dy}(0, 1) = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$$

2. Para cada una de las siguientes funciones, determine y', usando la derivación logarítmica.

(a) $y = (\tan(x))^{\frac{1}{x}}$

(b) $y = \dfrac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
y = (\tan(x))^{\frac{1}{x}} \quad &\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left((\tan(x))^{\frac{1}{x}}\right) \\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \frac{1}{x}\ln(\tan(x)) \\
&\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\ln(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\ln(\tan(x))\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{1}{x}\frac{\sec^2(x)}{\tan(x)} \\
&\Rightarrow \quad y' = y\left(-\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{\sec^2(x)}{x\tan(x)}\right) \\
&\Rightarrow \quad y' = (\tan(x))^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln(\tan(x)) + \frac{\sec^2(x)}{x\tan(x)}\right)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
y = \frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} \quad &\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(\frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right) \\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\cos^2(x)\right) - \ln\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}\right) \\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\right) + \ln\left(\cos^2(x)\right) - \frac{2}{3}\ln((x+1)) \\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = \ln\left(e^{x^2-x}\right) + 2\ln(\cos(x)) - \frac{2}{3}\ln((x+1)) \\
&\Rightarrow \quad \ln(y) = x^2 - x + 2\ln(\cos(x)) - \frac{2}{3}\ln(x+1) \\
&\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = 2x - 1 - 2\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - \frac{2}{3(x+1)} \\
&\Rightarrow \quad y' = y\left(2x - 1 - 2\tan(x) - \frac{2}{3(x+1)}\right) \\
&\Rightarrow \quad y' = \left(\frac{e^{x^2-x}\cos^2(x)}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}\right)\left(2x - 1 - 2\tan(x) - \frac{2}{3(x+1)}\right)
\end{aligned}$$

3. Utilice la derivación implícita para calcular la derivada indicada.

(a) $\dfrac{dy}{dx}$ si $\arctan(x^2y) = x + xy^2$

(b) $\dfrac{dx}{dy}$ si $y\sec(x) = x\tan(y)$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
\arctan\left(x^2y\right) = x + xy^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\arctan\left(x^2y\right) = \frac{d}{dx}\left(x + xy^2\right)\\
&\Rightarrow \quad \frac{2xy + x^2\frac{dy}{dx}}{1+x^4y^2} = 1 + y^2 + 2xy\frac{dy}{dx}\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left(\frac{x^2}{1+x^4y^2} - 2xy\right) = 1 + y^2 - \frac{2xy}{1+x^4y^2}\\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(1+y^2\right)\left(1+x^4y^2\right) - 2xy}{x^2 - 2xy\left(1+x^4y^2\right)}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
y\sec(x) = x\tan(y) \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dy}\left(y\sec(x)\right) = \frac{d}{dy}\left(x\tan(y)\right)\\
&\Rightarrow \quad \sec(x) + y\sec(x)\tan(x)\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dy}\tan(y) + x\sec^2(y)\\
&\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy}\left(y\sec(x)\tan(x) - \tan(y)\right) = x\sec^2(y) - \sec(x)\\
&\Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x\sec^2(y) - \sec(x)}{y\sec(x)\tan(x) - \tan(y)}
\end{aligned}$$

4. Utilice derivación implícita para determinar la ecuación de la recta tangente a la curva

$$x^2 + y^2 = \left(2x^2 + 2y^2 - x\right)^2$$

en el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 = \left(2x^2 + 2y^2 - x\right)^2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)^2\right) \\
&\Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)\left(4x + 4y\frac{dy}{dx} - 1\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}\left(2y\left(1 - 4\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)\right)\right) = 2\left((4x-1)\left(2x^2 + 2y^2 - x\right) - x\right) \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2\left((4x-1)\left(2x^2 + 2y^2 - x\right) - x\right)}{2y\left(1 - 4\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)\right)} \\
&\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(4x-1)\left(2x^2 + 2y^2 - x\right) - x}{y\left(1 - 4\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)\right)}
\end{aligned}$$

Así,

$$y'(x,y) = \frac{dy}{dx}(x,y) = \frac{(4x-1)\left(2x^2 + 2y^2 - x\right) - x}{y\left(1 - 4\left(2x^2 + 2y^2 - x\right)\right)}$$

$$y'\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente en el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ es:

$$y = 1(x - 0) + \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}$$

5. Determine los puntos sobre la curva dada por $2\left(x^2+y^2\right)^2 = 25\left(x^2-y^2\right)$ donde la recta tangente es horizontal.
Solución:

$$\begin{aligned}
2\left(x^2+y^2\right)^2 = 25\left(x^2-y^2\right) \;&\Rightarrow\; \frac{d}{dx}\left(2\left(x^2+y^2\right)^2\right) = \frac{d}{dx}\left(25\left(x^2-y^2\right)\right)\\
&\Rightarrow\; 4\left(x^2+y^2\right)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right) = 25\left(2x-2y\frac{dy}{dx}\right)\\
&\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}\left(2y\left(4\left(x^2+y^2\right)+25\right)\right) = 2x\left(25-4\left(x^2+y^2\right)\right)\\
&\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{2x\left(25-4\left(x^2+y^2\right)\right)}{2y\left(4\left(x^2+y^2\right)+25\right)}\\
&\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{x\left(25-4\left(x^2+y^2\right)\right)}{y\left(4\left(x^2+y^2\right)+25\right)}
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = 0 \;&\Rightarrow\; x\left(25-4\left(x^2+y^2\right)\right) = 0\\
&\Rightarrow\; x = 0 \vee 25-4\left(x^2+y^2\right) = 0
\end{aligned}$$

Si $x = 0$, entonces, por la ecuación original se tiene que

$$\begin{aligned}
x = 0 \;&\Rightarrow\; 2y^4 = -25y^2\\
&\Rightarrow\; y^2\left(2y^2+25\right)\\
&\Rightarrow\; y = 0 \quad \text{ya que } 2y^2+25 > 0
\end{aligned}$$

pero, $\frac{dy}{dx}$ no existe si $x = y = 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = 0 \;&\Leftrightarrow\; 25-4\left(x^2+y^2\right) = 0\\
&\Leftrightarrow\; x^2+y^2 = \frac{25}{4}\\
&\Leftrightarrow\; 2\left(\frac{25}{4}\right)^2 = 25\left(x^2-y^2\right)\\
&\Leftrightarrow\; \frac{25}{8} = \left(x^2-y^2\right)
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= \frac{25}{4}\\
x^2-y^2 &= \frac{25}{8}
\end{aligned}$$

Entonces, $2x^2 = \frac{75}{8}$, es decir, $x = \pm\frac{5\sqrt{3}}{4}$ y, por lo tanto,

$$y^2 = x^2 - \frac{25}{8} = \frac{75}{16} - \frac{25}{8} = \frac{25}{16}$$

Entonces, $y = \pm\frac{5}{4}$. Por lo tanto, la recta tangente a la curva dada es horizontal en los puntos

$$\left(\pm\frac{5\sqrt{3}}{4}, \pm\frac{5}{4}\right)$$