15/03/16.

Intro a Estadística
Ayudantía 1

① $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $A = \{\Omega, \{a,b\}, \{c,d\}, \emptyset\}$
$B = \{\Omega, \{a,c\}, \{b,d\}, \emptyset\}$
$C = \{\Omega, \{a\}, \{b\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \emptyset\}$

Pilar Tello.
pitello@uc.cl

a) * • $\Omega \in A$ ✓
• $\Omega^c = \emptyset \in A$ ✓
$\{a,b\}^c = \{c,d\} \in A$ ✓
• $\{a,b\} \cup \{c,d\} = \Omega \in A$
Como se cumplen los axiomas entonces A es un $\sigma$-álgebra.

* • $\Omega \in B$ ✓
• $\Omega^c = \emptyset \in B$
$\{a,c\}^c = \{b,d\} \in B$ ✓
• $\{a,c\} \cup \{b,d\} = \Omega \in B$ ✓.
Luego, B es $\sigma$-álgebra.

* • $\Omega \in C$ ✓
• $\Omega^c = \emptyset \in C$
$\{a\}^c = \{b,c,d\} \in C$
$\{b\}^c = \{a,c,d\} \in C$ ✓
• $\{a\} \cup \{b\} = \{a,b\} \notin C$
Luego, C no es $\sigma$-álgebra.

b) $A \cup B = \{\Omega, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a,c\}, \{b,d\}, \emptyset\}$
• $\Omega \in A \cup B$ ✓
• $\Omega^c = \emptyset \in A \cup B$
$\{a,b\}^c = \{c,d\} \in A \cup B$.
$\{a,c\}^c = \{b,d\} \in A \cup B$. ✓
• $\{a,b\} \cup \{a,c\} = \{a,b,c\} \notin A \cup B$ ✗
Luego, $A \cup B$ no es $\sigma$-álgebra.

c) $A \cup C = \{\Omega, \{a,b\}, \{c,d\}, \{a\}, \{b\}, \{b,c,d\}, \{a,c,d\}, \emptyset\}$

- $\Omega \in A \cup C$ ✓
- $\Omega^c = \emptyset \in A \cup C$.
  $\{a,b\}^c = \{c,d\} \in A \cup C$.
  $\{a\}^c = \{b,c,d\} \in A \cup C$.
  $\{b\}^c = \{a,c,d\} \in A \cup C$. ✓
- Se puede observar que todas las uniones de eventos se encuentran en $A \cup C$ ✓

Luego, $A \cup C$ es un $\sigma$- álgebra.

(2) Si A es $\sigma$-álgebra y B es $\sigma$-álgebra

pd. $A \cap B$ es $\sigma$-álgebra.

i) $\Omega \in A \wedge \Omega \in B \Rightarrow \Omega \in A \cap B$ ✓

ii) $\omega \in A \Rightarrow \omega^c \in A$
$\omega \in B \Rightarrow \omega^c \in B$ $\Rightarrow \omega \in A \cap B \Rightarrow \omega^c \in A \cap B$ ✓

iii) ~~Si $A' \in A \wedge A' \in B \Rightarrow A' \in A \cap B$~~
~~$B' \in A \wedge B' \in B \Rightarrow B' \in A \cap B$~~ Sup. $A', B' \in A \cap B$.

Si $A' \in A \wedge B' \in A \Rightarrow A' \cup B' \in A$ (iii)
$A' \in B \wedge B' \in B \Rightarrow A' \cup B' \in B$ (iii)

$\therefore A' \cup B' \in A \cap B$

(3) Demuestre que $(\Omega, F, P)$ espacio de probabilidad.
$\forall A_1, \dots, A_n \in F$ :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$$

Por inducción!

Para $K = 2$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

~~como $P(A \cap B) \geq 0$~~

como $P(\cdot)$ es una medida de probabilidad
$P(\cdot) \geq 0$

Luego, $P(A) + (P(B)) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$

Esta demostrado el caso base.

H.I | Asumimor que para $k=n$ se cumple:

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$k=n+1$ |

$$\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1})$$
$$= \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - P(\cup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1})$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + P(A_{n+1}) - \underbrace{\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1})}_{\geq 0}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_i) \cancel{- \mathbb{P}}$$

Luego esta demostrado. ■

4 a) Sean los eventos $A =$ "gana Argentina", $C =$ "gana Chile", $V =$ "gana Venezuela"

Por como esta definido el ejercicio

$$\Omega = \{A, C, V\}$$
$$F = \{\Omega, \{A\}, \{C\}, \{V\}, \{A, C\}, \{A, V\}, \{C, V\}, \phi\}$$

b) Medida de Probabilidad $\quad \mathbb{P}: F \longrightarrow [0,1]$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A \longmapsto P(A).$

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \Omega$

iii) ($\sigma$-aditividad) Si $A_1, \dots, \dots$ disjuntos 2-2

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

Primero $P(\Omega) = P(\{A, C, V\}) = P(A \; C \cup V) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(K) + \mathbb{P}(V) = 1$

Del enunciado $\mathbb{P}(C) = 2 \cdot \mathbb{P}(A)$

$$\mathbb{P}(V) = \frac{2}{3} \mathbb{P}(A)$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A) + 2 \cdot \mathbb{P}(A) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(A) = 1 \Rightarrow 3\mathbb{P}(A) + \frac{2}{3} \mathbb{P}(A) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9\mathbb{P}(A) + 2\mathbb{P}(A) = 3 \rightarrow \mathbb{P}(A) =$

$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{11} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{6}{11} \quad \mathbb{P}(V) = \frac{2}{11}$

$$\mathbb{P}(x) = \begin{cases} 3/11 & x = A \\ 6/11 & x = C \\ 2/11 & x = V \end{cases}$$

c) $\mathbb{P}(C^c) = \mathbb{P}(A \cup V)$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(V) = \frac{3}{11} + \frac{2}{11} = \frac{5}{11}$ //

d) $P(\{A, C\}) = P(A) + P(C) = \frac{3}{11} + \frac{6}{11} = \frac{9}{11}$ //

5 5 Cálculo. 6 Geometría. 3 Álgebra. $\}$ 14

$$= \binom{5}{2}\cancel{\binom{6}{0}\binom{3}{0}}^{1} + \binom{5}{1}\binom{6}{1}\cancel{\binom{3}{0}}^{1} + \binom{5}{4}\cancel{\binom{6}{0}}^{1}\binom{3}{1} + \cancel{\binom{5}{0}}^{1}\binom{6}{2}\cancel{\binom{3}{0}}^{1}$$

$$+ \cancel{\binom{5}{0}}^{1}\binom{6}{1}\binom{3}{1} + \cancel{\binom{5}{0}\binom{6}{0}}^{1}\binom{3}{2}$$

6 a) A= "no hay 2 cartas de = n°"

$$P(A) = \frac{52}{52} \cdot \frac{(52-4)}{52} \cdot \frac{52-?}{52} \cdots \frac{\phantom{0}}{52} = \prod_{i=0}^{10} \left(\frac{52-4i}{52}\right)$$

b) = "9 cartas de= pinto" = A

$$P(A) = \frac{52}{52} \cdot \frac{12}{51} \cdot \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} \cdot \frac{9}{48} \cdot \frac{8}{47} \cdot \frac{7}{46} \cdot \frac{6}{45} \cdot \frac{5}{44} = \frac{52 \cdot 12!}{4!} \cdot \frac{(43)!}{(52)!}$$

$$= \frac{12!}{4!} \cdot \frac{(43)!}{(51)!}$$

7 $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{(h+1)!}{(h+m)!} = \prod_{i=2}^{m} \frac{1}{(h+i)}$

8 ✓✓ i) $P_B(A) = P(A|B) = \frac{\overset{\geq 0}{P(A \cap B)}}{P(B)} \geq 0$ ✓

ii) $P_B(\Omega) = P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$ ✓

iii) Inducción $P_B(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \frac{P(\bigcup_1^{n+1} A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_{n+1} \cap B)}{P(B)}$

$= \sum_{i=1}^{n} P_B(A_i) + P_B(A_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} P_B(A_i)$ ✓