PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2019

Interrogación 1 - MAT1610

1. Determine los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x$

   b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+2x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right)$

   c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\tan(4x)}{2x-\pi}$

Solución.

a) Al amplificar por $\sqrt{x^2+x+1}-x$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\right)}\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por álgebra correcta.
- **(1 punto)** Por calcular el valor del límite.

b) Observamos que la función $x \mapsto \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right)$ es acotada en $\mathbb{R}^*$ y que $\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+2x^2} = 0$. Entonces por el teorema del Sandwich tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3+2x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{x}\right) = 0. \tag{1}$$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por verificar hipótesis.
- **(1 punto)** Por concluir el resultado.

c) Por cambio de variable $u = 2x - \pi$, tenemos que $4x = 2u + 2\pi$ ypor lo tanto

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(4x)}{2x - \pi} = \lim_{u \to 0} \frac{\tan(2u + 2\pi)}{u} \tag{2}$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{\tan(2u)}{u} \tag{3}$$

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2u)}{2u} \, \frac{2}{\cos(2u)} \tag{4}$$

$$= 2. \tag{5}$$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por desarrollar un cambio de variable adecuado.
- **(1 punto)** Por calcular el valor del límite.

2. a) Determine, justificadamente, el valor de

$$\lim_{x\to-\pi} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)+x)$$

b) Demuestre que la ecuación

$$\ln(x) = 3 - 2x$$

tiene, al menos, una raíz real.

Solución.

a) La función $x \mapsto \operatorname{sen}(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\pi} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x)+x) &= \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to-\pi}(\operatorname{sen}(x)+x)\right) && (6)\\
&= \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}\left(\lim_{x\to-\pi} x\right)+x\right) && (7)\\
&= \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}(-\pi)+\pi\right) && (8)\\
&= \operatorname{sen}(0-\pi) && (9)\\
&= \operatorname{sen}(-\pi) && (10)\\
&= 0. && (11)
\end{aligned}$$

Distribución de puntaje.

- **(2 puntos)** Por argumentar que la continuidad hace que corresponda evaluar,. Observe que son dos de estas situaciones, un punto por c/u de ellos
- **(1 punto)** Por calcular el valor del límite.

b) Sea $h(x) = \ln(x) + 2x - 3$. Observe que la función h es continua en $[1, e]$ porque es suma de funciones continuas en todo $\mathbb{R}^{+*}$. Además observamos que $h(1) = -1 < 0$ y $h(e) = 2e - 2 > 0$ y por el TVI tenemos que existe $c \in (1, e)$ tal que $h(c) = 0$. Es decir c es solución de la ecuación.

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por definir función auxiliar.
- **(1 punto)** Por ver que las hipotesis del TVI se cumplen.
- **(1 punto)** Por concluir la respuesta.

3. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \\ \cos(bx) + a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es continua en $x = 0$?

b) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es derivable en $x = 0$?

Solución.

a) Para que la función f sea continua en 0, los límites laterales tiene que ser iguales a $f(0) = b$. Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = b$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1 + a$ entonces $1 + a = b$. Así la función f es continua para $a \in \mathbb{R}$ y para $b = a + 1$.

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por definición de la continuidad.
- **(1 punto)** Por la relación $b = a + 1$.
- **(1 punto)** Por concluir el resultado.

b) Para que f sea una función derivable en 0 el límite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h}$ tiene que existir. Calculamos los límites laterales

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{ah + (a+1)\sqrt{h+1} - (a+1)}{h} && (12) \\ &= a + (a+1) \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} && (13) \\ &= a + (a+1)\frac{1}{2} && (14) \\ &= \frac{3}{2}\, a + \frac{1}{2}, && (15) \end{aligned}$$

de la misma manera

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos\left((a+1)h\right) + a - (a+1)}{h} && (16) \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos\left((a+1)h\right) - 1}{h} && (17) \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos\left((a+1)h\right) - 1}{h(a+1)}\ (a+1) && (18) \\ &= 0. && (19) \end{aligned}$$

Entonces la función f es derivable en $=$ si tenemos $\frac{3}{2}\, a + \frac{1}{2} = 0$ o sea $a = -\frac{1}{3}$ y $b = \frac{2}{3}$.

Distribución de puntaje.

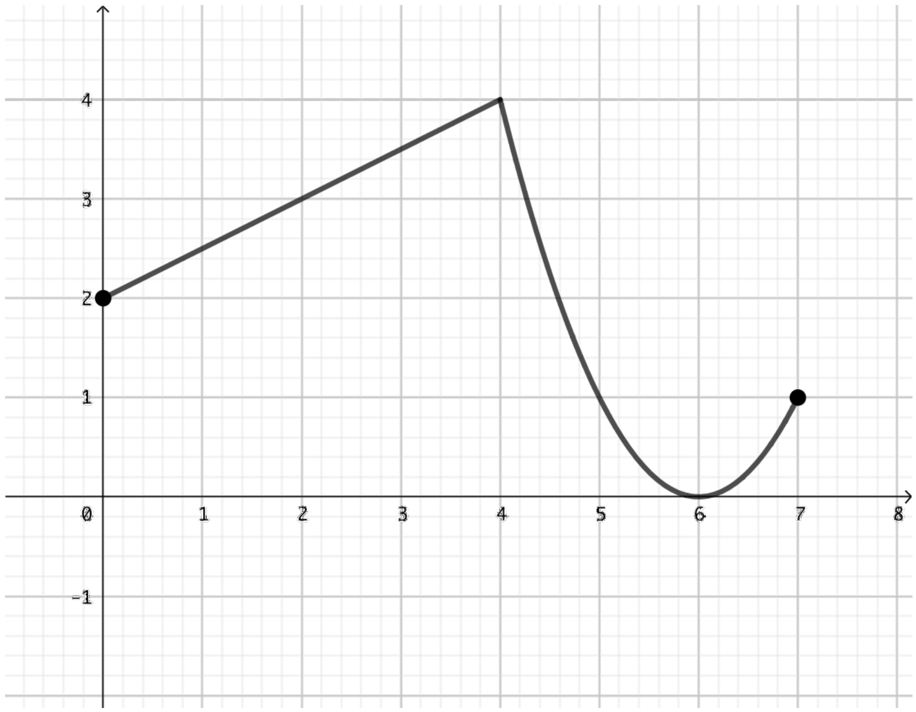
- **(1 punto)** Por el límite lateral derecho.
- **(1 punto)** Por el límite lateral izquierdo.
- **(1 punto)** Por concluir.

4. a) Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x\cos(x) + 2}{x + 1}$$

determine la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(0, 2)$.

b) Sea g la función cuyo gráfico es el de la figura adjunta.



Se define la función $f(x) = \dfrac{x}{g(x)}$. Determine, usando el gráfico de g, el valor de $f'(2)$.

Solución.

a) Calculamos la derivada de la función f

$$f'(x) = = \frac{(x\cos x)'(x+1) - (x+1)'(x\cos x + 2)}{(x+1)^2} \tag{20}$$

$$= \frac{(\cos x - x\ \mathrm{sen} x)(x+1) - (\cos x + 2)}{(x+1)^2} \tag{21}$$

$$= \frac{\cos x - x^2\ \mathrm{sen} x - x\ \mathrm{sen} x - 2}{(x+1)^2}. \tag{22}$$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por la regla del cociente.
- **(1 punto)** Por la regla del producto para $(x\cos x)'$.
- **(1 punto)** Por el resultado.

b) Derivamos la función f sabiendo que $f(x) = \dfrac{x}{g(x)}$. Entonces

$$f'(x) = \frac{g(x) - xg'(x)}{(g(x))^2},$$

y por lo tanto

$$f'(2) = \frac{g(2) - 2g'(2)}{(g(2))^2} = \frac{2}{9}.$$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por la regla del producto.
- **(1 punto)** Por $g'(2)$.
- **(1 punto)** Por la respuesta.