PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMER SEMESTRE 2018

CALCULO II ⋆ MAT1620
INTERROGACIÓN 2

La siguiente interrogación consta de 8 preguntas. Dispone de 120 minutos para responderlas

1. *a*) Determine la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $(4, -2, 3)$ y es paralelo al plano de ecuación $3x - 7z = 12$.

   b) Determine la ecuación de la recta determinada por la intersección de los planos

$$z = 2x - y - 5, \qquad z = 4x + 3y - 5.$$

2. Analice la continuidad, en $\mathbb{R}^2$, de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

3. Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   a) Calcule $f_x(x,y)$.

   b) Calcule $f_{xy}(0,0)$.

4. Considere la superficie de ecuación,

$$x^3 + 2y^3 + z^3 + 6xyz = -17.$$

   Determine la ecuación del plano tangente en el punto $(1, 1, -2)$.

5. Considere $u(r,s) = f(r^2+s^2, 2rs)$, donde f es una función dos veces derivable. Calcule $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r \partial s}$, en términos de las derivadas parciales de f.

6. Determine y clasifique los puntos críticos de la función
$$f(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

7. Determine los máximos y mínimos absolutos de la función
$$f(x,y) = 3 + xy - x - 2y,$$
definida sobre el triángulo de vértices $(1,0), (5,0), (1,4)$.

8. Determine los valores máximos y mínimos de la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ definida sobre la superficie $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$.

Una solución

1. *a*) El vector normal al plano dado es

$$N = (3, 0, -7)$$

luego la ecuación del plano pedido será

$$(x - 4, y + 2, z - 3) \cdot (3, 0, -7) = 0$$

o equivalentemente

$$3x - 7z = -9.$$

b) Para obtener las ecuaciones de la recta pedida, comenzaremos igualando las ecuaciones de los planos dados, de aquí:

$$-2y = x,$$

reemplazando en alguna de las ecuaciones,

$$z = -5y - 5.$$

Con lo cual, un punto (x, y, z) está en la recta pedida si:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

o equivalentemente

$$x = 0 + t(-2), \quad y = 0 + t(1), \quad z = -5 + t(-5), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Asignación de puntaje:

- (a) Asignar 1 punto por determinar de manera correcta el vector N.
- (a) Asignar 1 punto por plantear de manera correcta la ecuación del plano.
- (a) Asignar 1 punto por calcular de manera correcta la ecuación pedida.
- (b) Asignar 1,5 puntos por la operatoria algebraica realizada para obtener dos de las variables dependientes de alguna tercera.
- (b) Asignar 1,5 puntos por obtener la representación vectorial o parametrica de la recta pedida.

2. La funció dada es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ya que es un cuociente de polinomios y su denominador no se anula en ese conjunto. Para analizar en el punto $(0,0)$ consideramos el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},$$

para calcular este límite utilizaremos los caminos de la forma $y = mx$, rectas por el origen,

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2},$$

como para distintos valores de $m \in \mathbb{R}$ el límite obtenido es diferente, se concluye que el límite considerado no existe, en particular la función dada no es continua en $(0,0)$.
Asignación de puntaje:

- Asignar 1,5 puntos por la continuidad en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- Asignar 3 puntos por analizar de manera correcta el limite respectivo.
- Asignar 1,5 puntos por concuir de manera correcta respecto de la continuidad en $(0,0)$.

3. *a*) Comenzamos calculando la derivada $f_x(x,y)$ en el conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, para ello usamos la reglas de derivación y obtenemos

$$f_x(x,y) = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

A continuación calculamos $f_x(0,0)$ para ello debemos calcular usando la definición de derivada parcial,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to(0,0)} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

en consecuencia,

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

b) Haciendo uso de la parte anterior, calcularemos $f_{xy}(0,0)$ es decir, calcularemos

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k+0) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k^5/k^4 - 0}{k} = -1.$$

Asignación de puntaje:

- (a) Asignar 2 puntos por calcular, de manera correcta, $f_x(x,y)$ en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$.
- (a) Asignar 2 puntos por calcular de manera correcta $f_x(0,0)$.
- (b) Asignar 2 puntos por calcular de manera correcta $f_{xy}(0,0)$. Si plantea de manera correcta el límite a respectivo (pero no calcula el valor correcto) puede optar a 1 punto.

4. Notamos que para la función

$$F(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 + 6xyz,$$

es tal que su superficie de nivel -17 es la superficie dada. Luego un vector normal a su respectivo plano tangente es $\nabla F(1,1,-2)$, procedemos a calcularlo,

$$F_x(x,y,z) = 3x^2 + 6yz, \quad F_y(x,y,z) = 6y^2 + 6xz, \quad F_z(x,y,z) = 3z^2 + 6xy,$$

$$\nabla F(1,1,-2) = (-9,-6,18).$$

Finalmente la ecuación del plano tangente será

$$(x-1, y-1, z+2) \cdot (\nabla F(1,1,-2)) = 0$$

o equivalentemente,

$$3x + 2y - 6z = 17.$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 3 puntos por determinar el vector normal respectivo (o un ponderado de él). Pueden obtener las coordenadas del vector normal por el método sugerido en la solución o bien haciendo uso del Teorema de la función implícita.

- Asignar 3 puntos por determinar de manera correcta la ecuación del plano tangente pedido. Asignar 1 punto en caso que el alumno escriba de manera correcta la ecuación del plano tangente de la manera

$$z - z_0 = z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0).$$

pero no encuentre el vector normal de manera correcta.

5. Para calcular la derivada pedida, denotaremos

$$x = r^2 + s^2, \qquad y = 2rs.$$

Comenzamos calculando $\dfrac{\partial u}{\partial s} = u_s$ la cual por regla de la cadena,

$$u_s = u_x \cdot x_s + u_y \cdot y_s = u_x \cdot (2s) + u_y \cdot (2r).$$

A continuación, haciendo uso de la regla de la cadena, se tiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial s} = (u_s)_r = (u_{xx}x_r + u_{xy}y_r) \cdot 2s + u_x \cdot (2s)_r + (u_{yx}x_r + u_{yy}y_r)2r + u_y \cdot (2r)_r.$$

o de manera equivalente

$$u_{sr} = u_{xx} \cdot 4rs + u_{xy} \cdot 4s^2 + u_{yx} \cdot 4r^2 + u_{yy} \cdot 4sr + 2u_y.$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por el calculo correcto de la derivada u_s.
- Asignar 2 puntos por utlizar de manera correcta la ragla de la cadena al momento de calcular u_{sr} en cada una de las expresiones u_x, u_y.
- Asignar 2 puntos por determinar de manera correcta la derivada pedida.

6. Comenzaremos calculando los puntos críticos de la función dada,

$$\nabla f(x, y) = (6x^2 + y^2 + 10x, 2xy + 2y) = (0, 0).$$

Resolviendo se obtienen

$$P_1 = (0, 0), \quad P_2 = (-5/3, 0), \quad P_3 = (-1, 2), \quad P_4 = (-1, -2).$$

A continuación calculamos la respectiva matriz Hessiana de f.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2(6x+5) & 2y \\ 2y & 2(x+1) \end{pmatrix}.$$

Y evualamos para determinar la naturaleza de cada uno de los puntos criticos obtenidos.

$$\begin{array}{rlr} det(Hf(P_1)) = 20, & f_{xx}(P_1) = 12, & P_1 \quad \text{es un mínimo local} \\ det(Hf(P_2)) = 40/3, & f_{xx}(P_2) = -2, & P_2 \quad \text{es un máximo local} \\ det(Hf(P_3)) = -16, & & P_3 \quad \text{es un punto tipo silla} \\ det(Hf(P_4)) = -16, & & P_4 \quad \text{es un punto tipo silla} \end{array}$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 1 puntos por calcular de manera correcta el gradiente.
- Asignar 1.5 puntos por determinar de manera correcta los 4 puntos críticos.
- Asignar 1,5 puntos por calcular de manera correcta la matriz Hessiana de f.
- Asignar 0.5 puntos por clasificar de manera correcta cada uno de los puntos criticos. (2 puntos en total).

7. Para determinar los máximos y mínimos absolutos debemos analizar el interior del triangulo respectivo asi como en su frontera. Para realizar el análisis en el interior de la región buscaremos determinar la existencia de puntos criticos en ella,

$$\nabla f(x,y) = (y-1, x-2),$$

El unico punto críticos es $P_1 = (2,1)$.

A continuación analizaremos la frontera, la cual la dividiremos en 2 segmentos, a saber:

$$\begin{array}{r} B_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1, y \in [0,4]\} \longrightarrow f|_{B_1} = 2 - y \\ B_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0, x \in [1,5]\} \longrightarrow f|_{B_2} = 3 - x \\ B_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x+5, x \in [1,5]\} \longrightarrow f|_{B_3} = -x^2 + 6x - 7. \end{array}$$

Cada una de las restricciones de f a B_1, B_2, B_3 determinan respectivamente los siguientes candidatos a máximo o minimo,

$$P_2 = (1,0), \quad P_3 = (1,4), \quad P_4 = (5,0), \quad P_5 = (3,2).$$

Evaluamos en todos los puntos encontrados,

$$f(P_1) = 1, \quad f(P_2) = 2, \quad f(P_3) = -2, \quad f(P_4) = -2, \quad f(P_5) = 2.$$

Se concluye que P_2, P_5 son los puntos donde f alcanza su máximo y P_3, P_4 puntos donde f alcanza su valor mínimo.
Asignación de puntaje:

- Asignar 1 punto por el punto critico en el interior del triangulo.
- Asignar 1 punto por describir cada uno de los segmentos que forman el triángulo y analizar la función sobre ellos. (3 puntos en total)
- Asignar 1 punto por determinar de manera correcta todos los candidatos a máximos o mínimos.
- Asignar 1 punto por evaluar y determinar de manera correcta el máximo y el mínimo pedido.

8. Para resolver lo pedido utilizamos el método de los Multiplicadores de Lagrange, además notamos que en caso de existir varios puntos que satisfagan la condición de Lagrange, como la función f es continua y se encuentra definida sobre una región cerrada y acotada de $\mathbb{R}^3$, su máximo y su mínimo existe y debe ser alguno de los puntos encontrados.
La ecuación $\nabla f(x, y) = \lambda\lambda\nabla g(x, y)$ conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x \\ 2y &= \frac{1}{2}\lambda y \\ 2z &= -\frac{2}{9}\lambda z \\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene por solución los siguientes 6 puntos,

$$(\pm 1, 0, 0), \qquad (0, \pm 2, 0), \quad (0, 0, \pm 3).$$

Evaluamos nuestra función f en estos puntos para obtener,

$$f(\pm 1, 0, 0) = 1, \quad f(0, \pm 2, 0) = 4, \quad f(0, 0, \pm 3) = 9,$$

de donde se concluye que el máximo valor de f es 9 y lo alcanza en los puntos $(0, 0, \pm 3)$ y su mínimo valor es 1 y lo alcanza en los puntos $(\pm 1, 0, 0)$.
Asignación de puntaje:

a) Entregar 2 puntos por plantear de manera correcta las condiciones (y el sistema) de Lagrange.

b) Entregar 2 puntos por resolver de manera correcta el sistema anterior encontrar los 6 puntos respectivos. Entregar 1 punto en caso que se resuelva de manera parcial, es decir si se resuelve de manera correcta pero incompleta el sistema.

c) Entregar 2 puntos por determinar de manera correcta todos los puntos máximos y minimos. (1 punto por el maximo y 1 punto por el mínimo).