EYP 1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Contenido I

Vectores Aleatorios

Al realizar un experimento aleatorio, podemos estar interesados en observar dos o más caracteristicas numéricas simultáneamente.

Por ejemplo, observar la dureza (X) y la resistencia a la tensión (Y) de una pieza manufacurada de acero elegida al azar; o bien, observar la altura (X) y el peso (Y) de una determinada persona.

En ambos casos, a cada resultado ω del experimento se le asocia un par numérico $(x, y) = (X(\omega), Y(\omega))$.

Interesa entonces extender el concepto de variable aleatoria unidimensional (con valores en $\mathbb{R}$) a variable aleatoria multidimensional o vector aleatorio (con valores en $\mathbb{R}^n$).

Se estudiarán, además, varios conceptos relacionados importantes.

Se debe recordar, sin embargo, que la representación de un experimento aleatorio se basa en un espacio o modelo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Definición 1.1

Un vector aleatorio n-dimensional es una función $(X_1, \ldots, X_n)$ desde el espacio muestral Ω en $\mathbb{R}^n$, el espacio Euclidiano n-dimensional:

$$\begin{array}{rccc} (X_1, \ldots, X_n) : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \omega & \longrightarrow & (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)). \end{array}$$

Es decir, $(X_1, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ssi $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Vectores Aleatorios

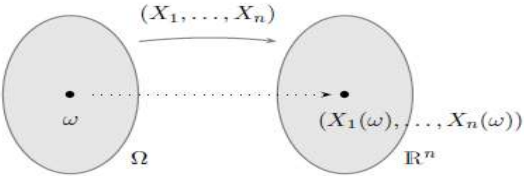

Figura 1: Un vector aleatorio es una función de Ω en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.1

Para n lanzamientos consecutivos de una moneda, defina,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si el } i\text{-ésimo lanzamiento dio cara,} \\ 0, & \text{eoc,} \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, n$.

Entonces, $(X_1, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donde,

$$\Omega = \{c, s\}^n, \quad \mathcal{A} = 2^{\Omega}, \quad P : P(\{c\}) = p, \quad 0 < p < 1.$$

Vectores Aleatorios

En este ejemplo, para cada $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega = \{c, s\}^n$, se tiene que

$$X_i(\boldsymbol{\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_i = c, \\ 0, & \text{si } \omega_i = s, \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, n$. Luego, $(X_1(\boldsymbol{\omega}), \ldots, X_n(\boldsymbol{\omega})) \in \mathcal{X} = \{0, 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, para $n = 2$, se tiene que,

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \in \{c, s\}^2$	$(X_1(\boldsymbol{\omega}), X_2(\boldsymbol{\omega})) \in \{0, 1\}^2$
(s, s)	$(0, 0)$
(s, c)	$(0, 1)$
(c, s)	$(1, 0)$
(c, c)	$(1, 1)$

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Entonces, para todo $B \in \mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que,

$$\{(X_1, \ldots, X_n) \in B\} = \{\omega \in \Omega : (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in B\} \in \mathcal{A},$$

es decir, es un evento. Luego,

$$P_{X_1,\ldots,X_n}(B) = P\{(X_1, \ldots, X_n) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}^n,$$

define la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ o distribución de probabilidad de conjunta de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$.

De esta forma, si $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es el recorrido conjunto de $(X_1, \ldots, X_n)$, entonces,

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}^n, P_{X_1,\ldots,X_n})$$

define un modelo o espacio de probabilidad multivariado.

Vectores Aleatorios

En particular, para $B = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, se tiene que,

$\{(X_1, \ldots, X_n) \in B\} = \{X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\} \in a \ \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces, la función definida por,

$$\begin{aligned} P_{X_1,\ldots,X_n}(B) &= P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \\ &= F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

se llama función de distribución (acumulada) del vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ o distribución (acumulada) conjunta de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$.

Definición 1.2

Distribución de probabilidad conjunta La distribución de probabilidad conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ es la colección de probabilidades, $P\{(X_1, \ldots, X_n) \in B\}$, para todos los subconjuntos B de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.3

Función de distribución conjunta La función de distribución (acumulada) conjunta de $X_1, \ldots, X_n$, se define como,

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Note que $F_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$.

Para $n = 2$, con $X_1 = X$ y $X_2 = Y$, se tiene que,

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P_{X,Y}\{(-\infty, x] \times (-\infty, y]\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

es la función de distribución (acumulada) conjunta de las variables aleatorias X e Y, o simplemente la función de distribución (acumulada) del vector aleatorio (X, Y).

$F_{X,Y}(x, y)$ es la probabilidad de que (X, Y) tome algún valor en la región $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$, como se muestra en la Figura 2.

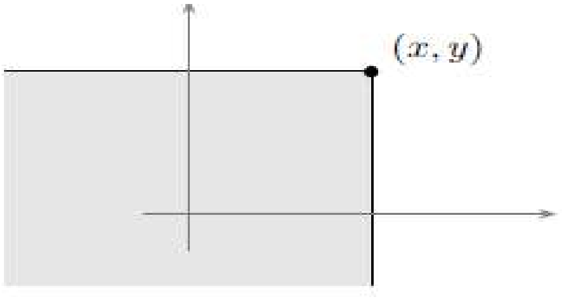

Figura 2: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ es la probabilidad de que (X, Y) tome un valor en la región sombreada.

Vectores Aleatorios

Las funciones de distribución conjunta satisfacen propiedades similares al caso unidimensional; lo cual se ilustra en el caso bivariado.

Teorema 1.1

Sea $F_{X,Y}(x,y)$ la función de distribución conjunta de X e Y. Entonces,

F1a) $\lim_{x,y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$, ambos argumentos.

F1b) $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, para cada valor del otro argumento.

F2) $F_{X,Y}(x,y)$ es no decreciente en cada uno de sus argumentos.

F3) $F_{X,Y}(x,y)$ es continua por la derecha en cada uno de sus argumentos.

F4) Si $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$, entonces,

$$\underbrace{F_{X,Y}(b_1,b_2) - F_{X,Y}(a_1,b_2) - F_{X,Y}(b_1,a_2) + F_{X,Y}(a_1,a_2)}_{P_{X,Y}\{(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\}=P(a_1<X\leq b_1,a_2<Y\leq b_2)} \geq 0$$

Recíprocamente, toda función bivariada $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique F1) a F4) es una función de distribución bivariada.

La extensión para el caso n-dimensional es inmediata.

En particular, la condición F4) exige que una función de distribución n-variada,

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 \le x_1,\ldots,X_n \le x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

asigne probabilidades no-negativas a todos los rectángulos de $\mathbb{R}^n$ de la forma,

$$(a_1,b_1] \times \ldots \times (a_n,b_n],$$

donde $-\infty < a_i < b_i < \infty$ para $i = 1,\ldots,n$.

Ejemplo 1.2

Sea

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & \text{si} \quad x,y \geq 0, \\ 0 & \text{eoc.} \end{cases}$$

(a) Pruebe que $F_{X,Y}$ verifica F1) a F4); p.e.:
$\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) =$
$\begin{cases} 0 & \forall\, y < 0, \\ \lim_{x\to 0} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(0,y) = (1-e^{-0})(1-e^{-y}) & \forall\, y \geq 0. \end{cases}$

(b) Verifique que:

$$\begin{aligned} P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) &= F_{X,Y}(1,1) - F_{X,Y}(1,0) \\ &\quad - F_{X,Y}(0,1) + F_{X,Y}(0,0) \\ &= (1-e^{-1})^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3

Sea

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ \ x + y \geq 1, \\ 0 & \text{eoc.} \end{cases}$$

Es fácil ver que (tarea!) F verifica las propiedades F1) a F3); sin embargo,

$$\begin{aligned} 0 \leq P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) &= F(1,1) - F(1,0) - F(0,1) + F(0,0) \\ &= 1 - 1 - 1 + 0 \\ &= -1 \quad \rightarrow\leftarrow . \end{aligned}$$

Luego, F no es una función de distribución bivariada, ya que no verifica F4).

Al igual que en el caso univariado, hay varios tipos de vectores aleatorios, de acuerdo con la naturaleza de su coordenadas. A continuación, se consideran solo dos tipos, los vectores aleatorios discretos y continuos.

Definición 2.1

Vector aleatorio discreto. Un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ se dice discreto si su recorrido, $\mathcal{X}$, es un subconjunto contable (finito o infinito) de $\mathbb{R}^n$; es decir, $(X_1, \ldots, X_n)$ es dicreto ssi las coordenadas $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias discretas.

En tal caso, la distribución de probabilidad conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ queda completamente determinada por la función (de masa) de probabilidad (fmp) conjunta definida por,

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

De este modo, se tiene que,

i) $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ para todo $(x_1, \ldots, x_n)$,
ii) $\sum \cdots \sum_{\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\}} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = 1$,
iii) $P_{X_1,\ldots,X_n}(B) = \sum \cdots \sum_{\{(x_1,\ldots,x_n) \in B\}} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ para todo subconjunto B de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.1

Al lanzar una moneda justa tres veces consecutivas, defina las variables aleatorias,
$X = \{$Número de caras obtenidas en los primeros dos lanzamientos$\}$,
$Y = \{$Número de caras obtenidas en los últimos dos lanzamientos$\}$.
Claramente, (X, Y) es un vector aleatorio discreto, con recorrido
$\mathcal{X} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, y fmp conjunta,

$$
\begin{aligned}
&f_{X,Y}(0,0) = P(X=0, Y=0) = P((s,s,s)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(0,1) = P(X=0, Y=1) = P((s,s,c)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(1,0) = P(X=1, Y=0) = P((c,s,s)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(1,1) = P(X=1, Y=1) = P(\{(c,s,c),(s,c,s)\}) = \tfrac{1}{4},\\
&f_{X,Y}(1,2) = P(X=1, Y=2) = P((s,c,c)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(2,1) = P(X=2, Y=1) = P((c,c,s)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(2,2) = P(X=2, Y=2) = P((c,c,c)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(x,y) = 0 \quad \forall\,(x,y) \notin \mathcal{X}.
\end{aligned}
$$

La información sobre la fmp de (X, Y) puede resumirse en la siguiente tabla (de contingencia):

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Vectores aleatorios continuos y discretos

Definición 2.2

Vector aleatorio continuo. Un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ se dice (absolutamente) continuo si existe una función no negativa, $f_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\ldots,X_n}(u_1, \ldots, u_n) du_n \cdots du_1,$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Vectores aleatorios continuos y discretos

En tal caso, en los puntos de continuidad,

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n},$$

y se llama función de densidad de probabilidad (fdp) conjunta de $X_1,\ldots,X_n$; la cual es tal que:

i) $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$ para todo $(x_1,\ldots,x_n)$,

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$,

iii) $P_{X_1,\ldots,X_n}(B) = \int \cdots \int_{\{(x_1,\ldots,x_n)\in B\}} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) dx_n \cdots dx_1$ para cada subconjunto B de $\mathbb{R}^n$.

Nota:

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio (absolutamente) continuo, entonces las coordenas $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias (absolutamente) continuas.

Sin embargo, que $X_1, \ldots, X_n$ sean variables aleatorias (absolutamente) continuas no implica que el vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ sea (absolutamente) continuo.

Vectores aleatorios continuos y discretos

Por ejemplo, para $n = 2$, con $X_1 = X$ y $X_2 = Y$, se tiene que,

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v) dv du,$$

y por el teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f_{X,Y}(x, y)$$

en los puntos de continuidad de $f_{X,Y}(x, y)$. Además, es claro que,

i) $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ para todo (x, y),

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$, y

iii) $P_{X,Y}(B) = \int \int_{\{(x,y) \in B\}} f_{X,Y}(x, y) dy dx$ para toda región B en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.2

Sean X e Y variables aleatorias con fdp conjunta dada por,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xy^2, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule,

i) $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}, 0 < Y \leq \frac{1}{3}\right)$

ii) $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}\right)$

iii) $P(X + Y > 1)$.

i) $P\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{4}, 0 < Y \le \frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 6xy^2 dx dy = 1.1574 \times 10^{-2}$

ii) $P\left(\frac{1}{2} < X \le \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \int_0^1 6xy^2 dy dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2x dx \int_0^1 3y^2 dy = 0.3125.$

iii) $P(X + Y \ge 1) = \int \int_B f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{1-y}^1 6xy^2 dx dy = \frac{9}{10}$, ya que,

$$\begin{aligned} B &= \{(x, y) : x + y \ge 1, 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \\ &= \{(x, y) : x \ge 1 - y, 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \\ &= \{(x, y) : 1 - y \le x < 1, 0 < y < 1\}. \end{aligned}$$

Vectores aleatorios continuos y discretos

Nota: Si (X, Y) es un vector aleatorio continuo, entonces la probabilidad del evento $\{a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d\}$ no cambia si se incluyen o no los extremos de cada intervalo, y se calcula como la integral doble que se ilustra en la Figura 3

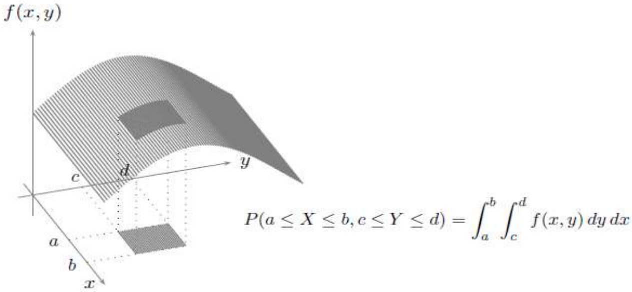

Figura 3: La probabilidad de $\{a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d\}$ como el volumen bajo una superficie.

References

Blanco, L., Arunachalam, V. y Dharmaraja, S. (2012). *Introduction to Probability and Stochastic Processes.* John Wiley, New Jersey.

Casella, G. y Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference.* Second Edition. Duxbury, California.