Ejercicios 6 y 7: EYP1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle Ayudante: Camilo I. González

EJERCICIOS 6

Ejercicio 1: Sean $X_1, ..., X_n$, n variables aleatorias independientes cada una con distribución Exp(λ). Encuentre la fdp de conjunta de $X_{(1)} = \text{mín}\{X_i\}_{i=1}^n$ y $X_{(n)} = \text{máx}\{X_i\}_{i=1}^n$.

Ejercicio 2: Sea (X, Y) un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Pruebe que $X + Y$ y $X/(X + Y)$ son variables aleatorias independientes.
(b) Sea $V = (X + Y)/2$. Encuentre la fdp de V.
(c) Encuentre la fgm de (X, Y) y el valor esperado de X^2Y.

Ejercicio 3: Considere la siguiente distribución de probabilidades del vector aleatorio (X, Y):

$y \backslash x$	1	2	3
2	0.1	0.2	0.1
4	0.1	0.2	0.3

(a) Encuentre la distribución conjunta de $X + Y$ y $X - Y$.
(c) Encuentre el vector de medias y la matriz de covarianza de (X, Y) y de $(X + Y, X - Y)$.
(b) Encuentre la distribución condicional de Y dado $X = x$, y obtenga la media y varianza de esta distribución para cada x tal que $P(X = x) > 0$.

Ejercicio 4: Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes, cada una con distribución normal estándar. Sean $Y_1 = X_1$ e $Y_2 = X_1 + X_2$.
(a) Encuentre la distribución conjunta de Y_1 e Y_2.
(b) Muestre $Y_2 \sim N(0, 2)$.
(c) Encuentre la distribución condicional de X_1 dado $X_1 + X_2 = z$.

Ejercicio 5: Sea (X, Y) un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}, \quad -\infty < x, y < \infty$$

(a) Obtenga la distribución condicional de Y dado $X = x$. Son X e Y variables aleatorias independientes ?
(b) Sea $Z = X - Y$. Encuentre la fgm de Z. Cuál es la distribución de Z ?
(c) Use la fgm de (X, Y) para calcular el valor esperado de XY.
(d) Encuentre la fgm conjunta de $(X + Y, X - Y)$ y calcule $\text{Cov}(X + Y, X - Y)$.

Ejercicio 6: Sean X_1 y X_2 variables aleatorias discretas iid con función de probabilidad: $p(1) = 3/4$ y $p(3) = 1/4$.
(a) Encuentre la distribución conjunta de X_1 y X_2.
(b) Encuentre la fgm de (X_1, X_2).
(c) Encuentre la distribución y fgm conjunta de $Y_1 = (X_1 + X_2)/2$ e $Y_2 = (X_1 - X_2)^2/2$.

Ejercicio 7: Sea (X_1, X_2) un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f(x_1, x_2) = 4x_1x_2,\ 0 < x_1, x_2 < 1.$$

(b) Encuentre el vector de medias y la matriz de varianza-covarianza de (X_1, X_2).
(c) Sea $Y_1 = X_1/X_2$ e $Y_2 = X_1X_2$. Encuentre la distribución conjunta de Y_1 e Y_2.

Ejercicio 8: Sea (X, Y) un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 24x^2/y^3, & 0 < x < 1,\ y > 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcule $P(X < 1/2|Y > 6)$
(b) Encuentre la fdp condiconal de X e $Y = 6$, y calcule $P(X < 1/2|Y = 6)$

EJERCICIOS 7

Ejercicio 1: Sean X_1 y X_2 va con fdp conjunta dada por:

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1x_2}{36}, & x_1 = 1, 2, 3;\ x_2 = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Encuentre la fdp conjunta de $Y_1 = X_1X_2$ e $Y_2 = X_2$.
(b) Encuentre la fdp marginal de Y_1.

Ejercicio 2: Si $f_{X|Y=y}(x) = 3x^2/y^3$, para $0 < x < y$, y $f_Y(y) = 5y^4$, para $0 < y < 1$, encuentre $P(X > 1/2)$.

Ejercicio 3: Sean X, Y, Z variables aleatorias con fdp conjunta dada por

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} 8xyz, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Alguien afirma que $P(X < Y < Z) = 1/3$. Pruebe o refute dicha afirmación. Se puede extender el resultado a n variables aleatorias iid f? Discuta!

Nota: el ejercicio se adaptó debido a la apregunta de un alumno en la clase del martes 5 de Nov.

Ejercicio 4: Suponga que X e Y tienen una fdp conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1;\ 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la fdp del producto $Z = XY$.

Ejercicio 5: Sea (X, Y) un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la fdp de $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Ejercicio 6: Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes cada una con la misma densidad,

$$f_X(x) = \begin{cases} 5x^4, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Encuentre el vector de medias y la matriz de varianza-covarianza de (X_1, X_2, X_3).
(b) Encuentre la fdp condicional de (X_1, X_2) dado $X_3 = x_3$.
(b) Encuentre la fdp y la función de distribución de $Y = \text{máx}\{X_1, X_2, X_3\}$.

Ejercicio 7: Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2, respectivamente. Encuentre la distribución condicional X_2 dado $X_1 + X_2 = x$.

Ejercicio 8: Sea (X, Y) un vector aleatorio con fdp dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 \leq y < x < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre i) $P(X < 2, Y > 1)$, ii) $P(X > 2Y)$ y iii) $P(X - Y \geq 1)$.

Ejercicio 9: Sean X_1, X_2,..., X_n variables aleatorias independientes cada una con distribución chicuadrado con un grado de libertad. Muestre que $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(n)$. Aplique el resultado al caso en que $X_i = Z_i^2$ para $i = 1, \ldots, n$, donde $Z_1, \ldots, Z_n$ son variables aleatorias iid $N(0, 1)$.

Ejercicio 10: Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes con varianzas σ_1^2, σ_2^2 y σ_3^2 respectivamente. Calcule el coeficiente de correlación entre, $X_1 - X_2$ y $X_2 + X_3$.

Ejercicio 11: Sea $\boldsymbol{X}$ un vector aleatorio $n-$dimensional con vector de medias $\mathbf{0}$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{I}_n$. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada no singular de orden n e $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{\mu}$.
(a) Encuentre el vector de medias y la matriz de covarianza de $\boldsymbol{Y}$.
(b) Si $\boldsymbol{X} \sim N_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n)$, encuentre la fgm de $\boldsymbol{Y}$.
(c) Si $\boldsymbol{X} \sim N_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n)$, encuentre la fdp de $\boldsymbol{Y}$.
(d) Si $\boldsymbol{X} \sim N_n(\mathbf{0}, \boldsymbol{I}_n)$ y $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top$ es una matriz diagonal, muestre que las componentes $Y_1, \ldots, Y_n$ del vector $\boldsymbol{Y}$ son variables aleatorias independientes y normamente distribuidas.

Ejercicio 12: Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias no correlacionadas con medias 2, 1 y 4 y varianzas 9, 20 y 12, respectivamente.
(a) Encuentre la media y la varianza de $Y_1 = X_1 - 2X_2 + 5X_3$.
(b) Encuentre la covarianza entre $Y_2 = X_1 + 5X_2$ y $Y_3 = 2X_2 - X_3 + 5$.
(c) Suponga que la distribución conjunta de X_1, X_2 y X_3 es normal trivariada. Encuentre la fgm y la fdp conjunta de (Y_1, Y_2, Y_3), e indique las respectivas marginales. Finalmente, estudie como obtener la distribución condicional de Y_3 dado $(Y_1, Y_2) = (y_1, y_2)$.

Ejercicio 13: Considere una variable aleatoria $Y \sim P(\Lambda)$, donde Λ es también una variable aleatoria con distribución $\Gamma(\alpha, \beta)$. Calcule $f_{\Lambda|Y}(\lambda|y)$.

Ejercicio 14: Sean X e Y variables aleatorias reales definidas en un mismo espacio de probabilidad, y h una función real valorada tal que $h(X)$ sea una variable aleatoria. Si $E(h(Y))$ existe, muestre que $E(h(Y)) = E\{E(h(Y))|X\}$

– Santiago, 5 de Noviembre de 2020 –