Clase 3

jueves, 8 de agosto de 2024 15:28

Rectas y Planos

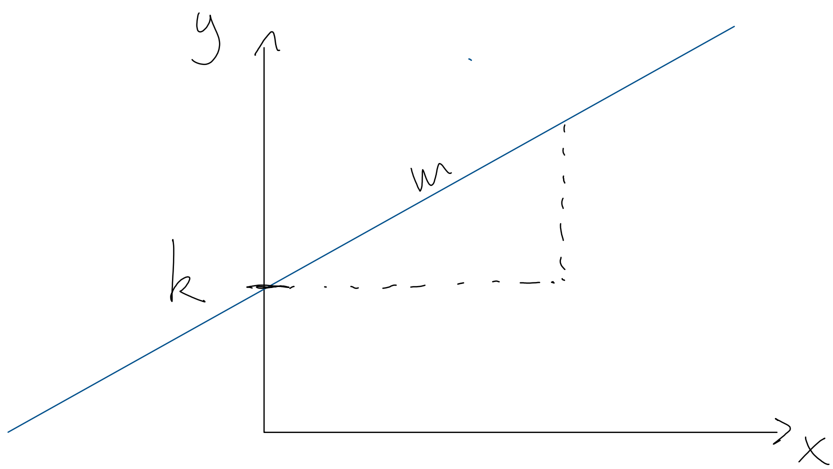
Rectas en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$

La ecuación general de la recta en $\mathbb{R}^2$ es:

$$\boxed{a \cdot x + by = c}$$

Si $b \neq 0$ podemos reescribir la ecuación así:

$$\boxed{y = \underbrace{m}_{\text{pendiente}} x + k} \quad \text{donde} \quad m = \frac{-a}{b}, \quad k = \frac{c}{b}$$



Si $k=0$ (es decir, $c=0$), la ecuación queda

$$a \cdot x + b \cdot y = 0$$

Observamos que esta ecuación se puede escribir en términos de un producto punto entre $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$(1) \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

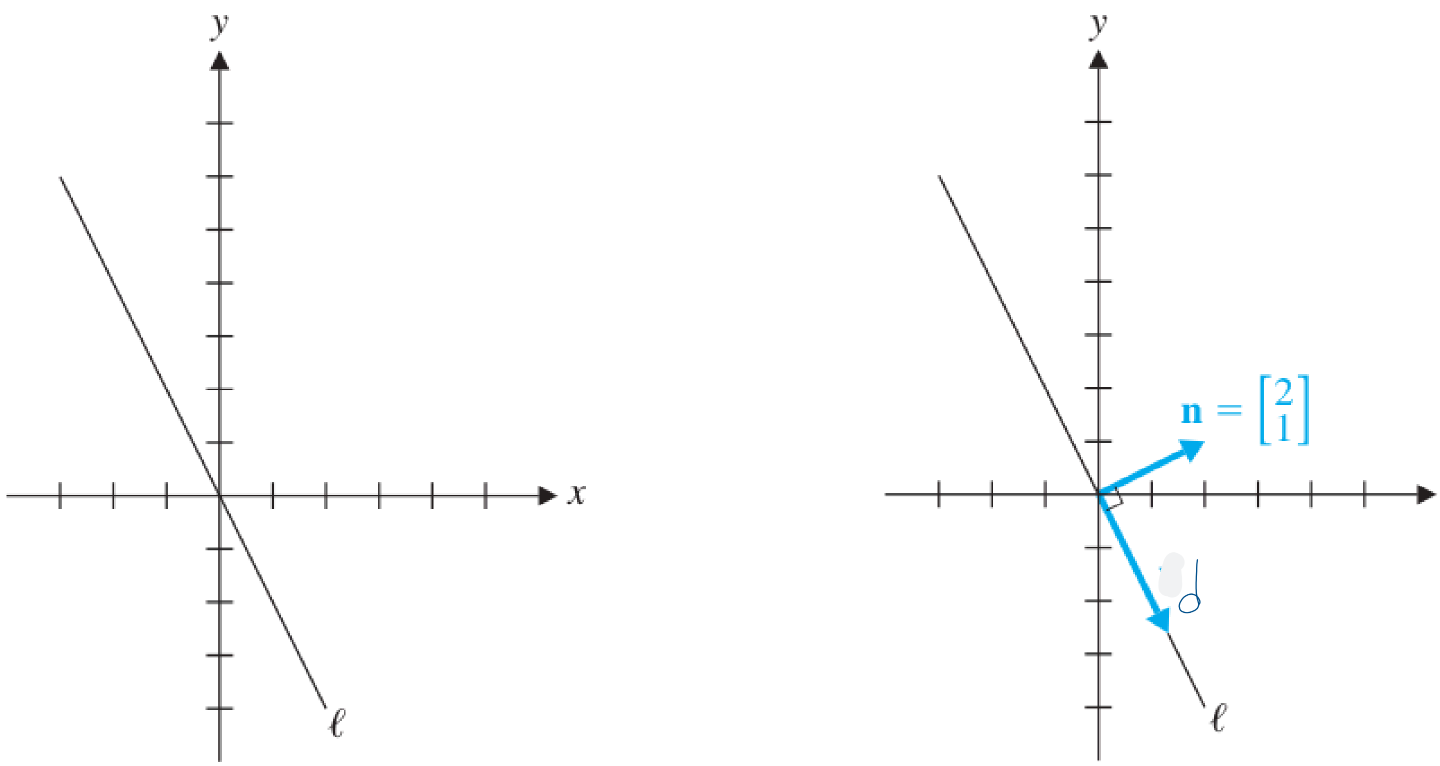
En otras palabras: La recta corresponde a los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que son ortogonales al vector $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

En este caso, el vector $n=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ se dice el vecto
normal a la recta.

La ecuación

$$n\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$$

se dice la forma normal de la recta.



Una forma equivalente de representar esta recta es considerar un vector $d\neq 0$. Luego, la recta es el conjunto de todos los vectores que se pueden escribir como un múltiplo de d:

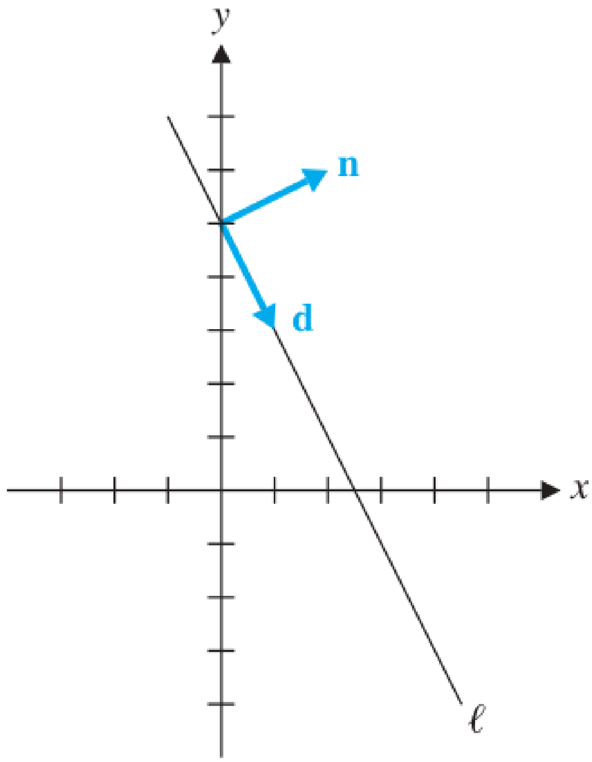
$$\boxed{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=t\cdot d} \quad \text{para cierto } t\in\mathbb{R}$$

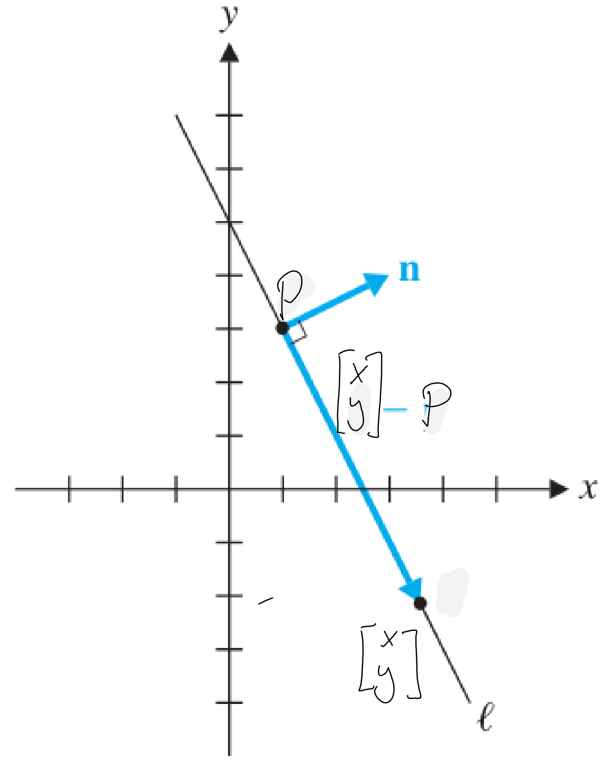
En otras palab
la recta es el
conjunto Gen(d

Esta es la forma vectorial de esta recta.

Hasta el momento la forma normal y vectorial las hemos dado para el caso de una recta que pasa por el origen.

¿Qué pasa si nuestra recta no pasa por $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$?





Sea p un punto sobre la recta y n un vector ortogonal a ella.
Un vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ será un vector de la recta si $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - p$ ortogonal a n, es decir:

$$\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - p\right) \cdot n = 0 \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot n = p \cdot n$$

Definición La ***forma normal de la ecuación de una recta*** ℓ en $\mathbb{R}^2$ es

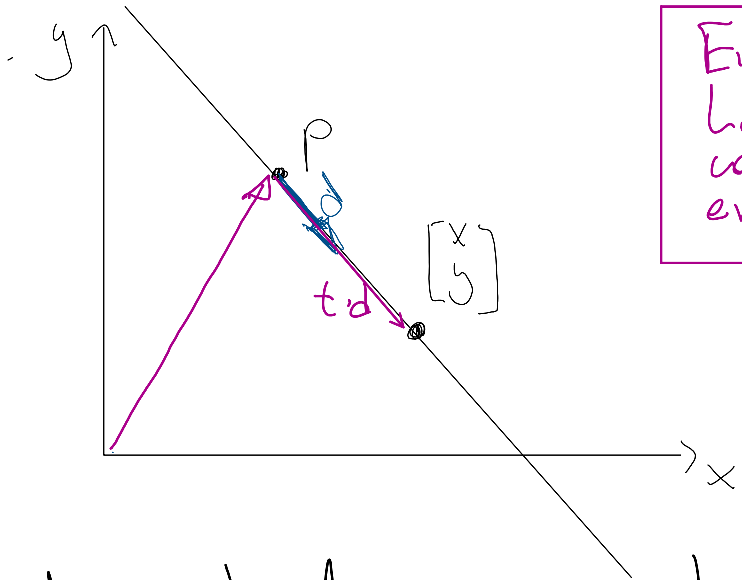
$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$$

donde $\mathbf{p}$ es un punto específico sobre ℓ y $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ es un vector normal a ℓ.

La ***forma general de la ecuación de*** ℓ es $ax + by = c$, donde $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ es un vector normal para ℓ.

Para la forma vectorial, notamos que $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sera parte de la recta si

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = p + t \cdot d} \qquad \text{donde } t \in \mathbb{R}$$



En otras palabras:
La recta corresponde al conjunto Gen(d) traslac
en p

Exactamente la misma idea funciona en $\mathbb{R}^3$..
Más generalmente, definimos una recta en $\mathbb{R}^n$ de igual f

Definición La ***forma vectorial de la ecuación de una recta*** ℓ en $\mathbb{R}^2$ o $\boxed{\mathbb{R}^n}$ es

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$$

donde $\mathbf{p}$ es un punto específico sobre ℓ y $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ es un vector director para ℓ.

Las ecuaciones que corresponden a los componentes de la forma vectorial de l ecuación se llaman ***ecuaciones paramétricas*** de ℓ.

Importante: i) Hay infinitas maneras de escribi recta de forma vectorial

ii) Dos rectas

$$L_1 := \{ p + t \cdot d : t \in \mathbb{R} \} \quad y \quad L_2 \{ p' + t \cdot d' : t \in \mathbb{R} \}$$

serán paralelas si los vectores directores d y son paralelos (es decir, uno es múltiplo del otro).

Planos en $\mathbb{R}^3$

Consideremos un vector $n \in \mathbb{R}^3$.
¿Cuáles son los vectores ortogonales a n?

n

Si n es el vector en direcció

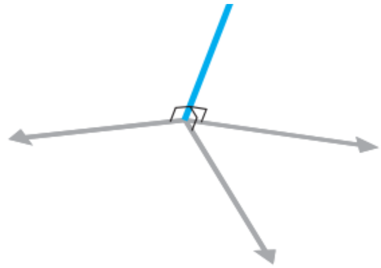
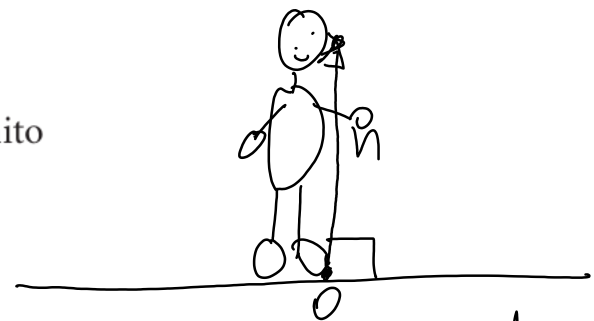


Figura 1.59

n es ortogonal a un número infinito de vectores

vertical $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ (imagínese una flecha vertical desde la punta de sus pies a su nariz), los vectores ortogonales a n son todos los vectores del piso.



De igual manera, si n es un vector oblicuo los vectores ortogonales a n formarán un plano.

A = (3.69, 3.46, 2)

p : (x, y, z) A = 0

= 3.69x + 3.46y + 2z = 0

n = A

$= \begin{pmatrix}3.69\\3.46\\2\end{pmatrix}$

Please enable We

Luego, un plano que pasa por el origen es el conjunto de todos los vectores $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ que satisface la ecuación

$$\boxed{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \cdot n = 0}$$

donde n es el vector normal al plano. Es decir el plano corresponde a todos los vectores ortogonales a n

Obs: Dado un plano, existen infinitos vectores normales.

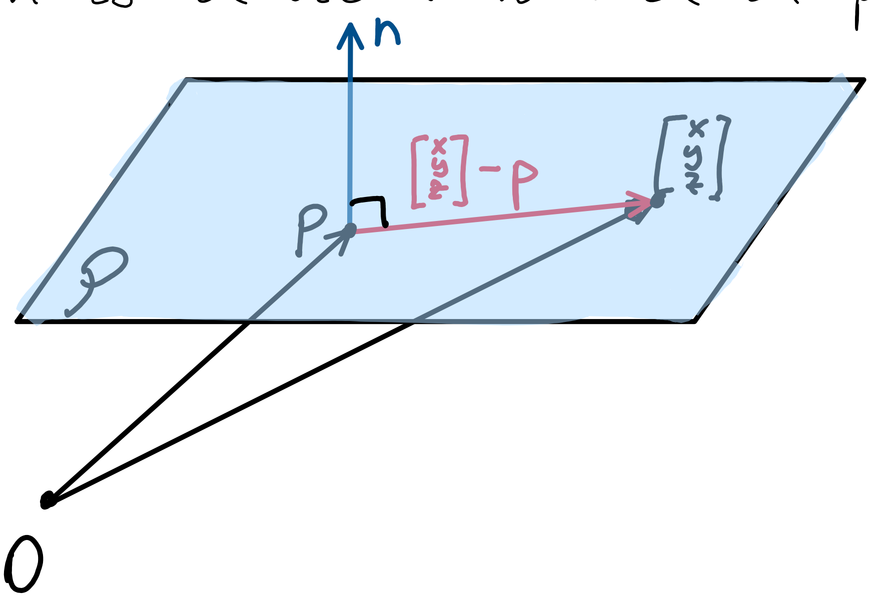
En el Geogebra anterior ¿Qué pasa si reemplazamos N por $2N$ o $-\frac{1}{2}N$?

—o—

Similar al caso de la recta en $\mathbb{R}^2$, podemos generalizar la ecuación normal del plano al caso de un plano que no pasa necesariamente por el origen. Para ese, si p es un punto un plano $\mathcal{P}$ y p es un punto (vector) cualquiera de $\mathcal{P}$, entonces $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ será un vector en $\mathcal{P}$ si es que

$$\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-p\right)\cdot n=0$$

donde n es el vector normal al plano



Definición La *forma normal de la ecuación de un plano* $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^3$ es

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p})=0 \quad \text{o} \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{p}$$

donde $\mathbf{p}$ es un punto específico sobre $\mathcal{P}$ y $\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$ es un vector normal para $\mathcal{P}$.

La *forma general de la ecuación de* $\mathcal{P}$ es $ax+by+cz=d$, donde $\mathbf{n}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ es un vector normal para $\mathcal{P}$.

$d = n \cdot p$

Importante: Planos paralelos tienen los mismos vectores normales. Por ejemplo, los planos con ecuaciones

$$3x + 2y - z = 1$$
$$6x + 4y - 2z = 5$$

son planos distintos pero paralelos.

Puede jugar con ejemplos similares en el siguiente Geogebra (mueva P con el cursor)

[Ecuacion Normal Plano]

P = (1.07, 0.76, 2)

Please enable WebGL in your browser

n = (1, 3, 2)

p : ((x, y, z) − P) n = 0

x + 3y + 2z = 7.36

Generalizamos el concepto de plano a más dimensiones de la siguiente manera:

Definición: Un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de todos los vectores $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ que satisfacen la ecuación

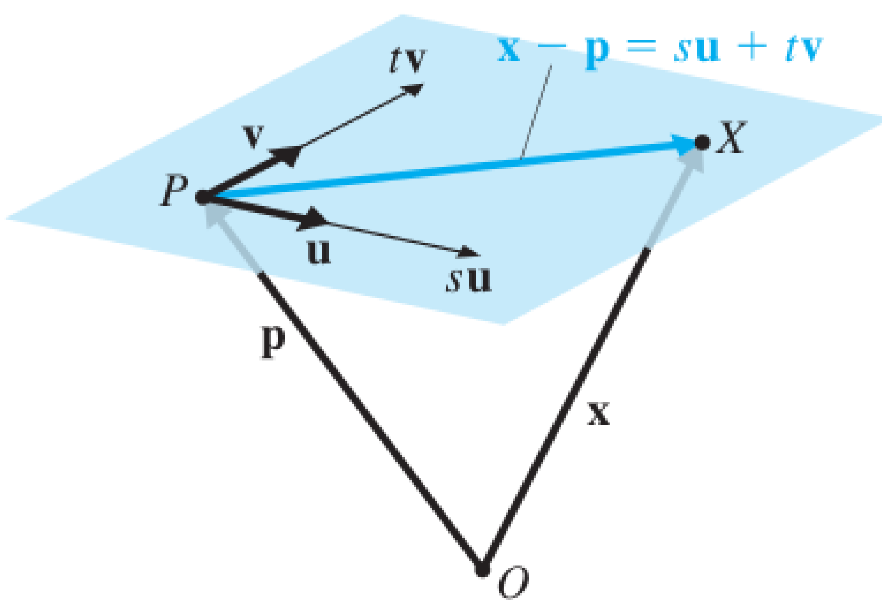
$$(x-p)\cdot n = 0$$

donde p y n son vectores en $\mathbb{R}^n$ y $n \neq 0$.

Obs: En $\mathbb{R}^2$ un hiperplano es una recta. En $\mathbb{R}^3$ un plano es un plano.

Recordemos de la Clase 2 que si $u, v \in \mathbb{R}^3$ son dos vectores en $\mathbb{R}^3$ distintos de 0, que no son paralelos, es decir, u no es múltiplo de v (o sea, no existe un escalar t que haga que $t\cdot u = v$), entonces $\text{Gen}(u, v)$ es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por 0.

Luego, un plano puede determinarse por un punto p y dos vectores directores u y v



Definición La *forma vectorial de la ecuación de un plano* $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^3$ es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

donde $\mathbf{p}$ es un punto sobre $\mathscr{P}$ y $\mathbf{u}$, y $\mathbf{v}$ son vectores directores para $\mathscr{P}$ ($\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son distintos de cero y paralelos a $\mathscr{P}$, mas no mutuamente paralelos).

Las ecuaciones correspondientes a los componentes de la forma vectorial de la ecuación se llaman ***ecuaciones paramétricas*** de $\mathscr{P}$.

Observación: i) Si $\mathcal{P}$ es un plano y P, Q, R son puntos en plano, podemos tomar $p = \overrightarrow{OP}$, $u = \overrightarrow{PQ}$ y $v = \overrightarrow{PR}$ siempre y cuando $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ no sean paralelos

ii) Existen infinitas maneras de escribir un pla de forma vectorial.

iii) Si dos planos son paralelos, podemos tomar mismos vectores directores.

Utilizamos la misma definición para determi lo que es un plano en $\mathbb{R}^n$:

Def: Un plano $\mathcal{P}$ en $\mathbb{R}^n$, es el conjunto de todos los vectores $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ que se pueden escribi la forma

$$\boxed{x = p + s \cdot u + t \cdot v \quad \text{para ciertos } s, t \in \mathbb{R}}$$

donde p, u y v son vectores en $\mathbb{R}^n$, u y no son el vector 0 y no son paralelos entre

Importante: Las nociones de plano e hiperpl son equivalentes en $\mathbb{R}^3$.

Sin embargo, las nociones no coinciden si $n \neq 3$. Todavía no contamos con las he para entender esto completamente. Volveremos a punto más adelante.