Ayudantía 1

① Muestre que $a<b$ si y solo si $a^3<b^3$

$a<b \iff a^3<b^3$

$a^3-b^3<0 \quad : \quad a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$

$\therefore\ (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)<0$

$(a+b)^2>0 \Rightarrow a^2+2ab+b^2>0$
$\Rightarrow a^2+b^2>-2ab$
$\dfrac{a^2+b^2}{2}>-ab$

$\therefore\ a^2+b^2>-ab \Rightarrow \underbrace{a^2+ab+b^2}_{c}>0$
$c>0$

$\Rightarrow (a-b)\cdot c>0 \Rightarrow (a-b)>0 \ \therefore\ a>b$

② a) Si dos números reales (x,y), satisfacen que $x<y$ entonces $x^{-1}<y^{-1}$

$x<y \Rightarrow \dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y} \quad : \quad 1<2 \Rightarrow 1<\dfrac{1}{2}$ Falso

b) $a,b\in\mathbb{R}$: $a<b \iff a^2<b^2$

$\left.\begin{array}{l} a=-1/2 \\ b=1/4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a^2=1/4 \\ b^2=1/16 \end{array}\right\} \ a^2>b^2$ Falso

c) $b,d\in\mathbb{R}^-$

$(b-d)^2\geq 0 \Rightarrow b^2-2b\cdot d+d^2\geq 0 \Rightarrow b^2+d^2\geq 2bd$

$\Rightarrow \dfrac{b^2+d^2}{b\cdot d}\geq 2 \quad \therefore\ \dfrac{b^{\cancel{2}}}{\cancel{b}\cdot d}+\dfrac{d^{\cancel{2}}}{b\cancel{d}}\geq 2 \Rightarrow \dfrac{d}{b}+\dfrac{b}{d}\geq 2 \quad +2$

$\Rightarrow \dfrac{d}{b}+\dfrac{b}{d}+2\geq 4 \quad : \quad \left(\sqrt{\dfrac{d}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{d}}\right)^2=\dfrac{d}{b}+\dfrac{b}{d}+2\sqrt{\dfrac{db}{b\cdot d}}=\dfrac{d}{b}+\dfrac{b}{d}+2$

$\therefore\left(\sqrt{\dfrac{d}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{d}}\right)^{\cancel{2}}\geq 2^{\cancel{2}} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{d}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{d}}\geq 2$ Verdadero

③ $a>1$; $a>b$

$$a^2+b > a + a\cdot b$$

$$\Rightarrow a^2 - a\cdot b - a + b > 0$$
$$a(a-1) - b(a-1) > 0$$
$$(a-b)\cdot(a-1) > 0$$

Luego $a>1 \therefore (a-1)>0$; $a>b \therefore (a-b)>0$

Finalmente, multiplicar 2 números pos. da un núm pos

Axioma de Orden 4 //

④ $a^{-1} > a \Rightarrow a<-1 \lor 0<a<1$

Caso 1: $a>0$

$$a^{-1} > a \quad /\cdot a\ (>0)$$
$$1 > a^2 \quad /-1$$
$$0 > a^2-1$$
$$0 > (a-1)\cdot(a+1)$$

Para que esto se cumpla, $(a-1)$ debe ser menor a 0 dado que $(a+1)$ es siempre positivo con $a>0$.

Luego: $(a-1)<0$
$a<1$

$\therefore 0<a<1$

Caso 2: $a<0$

$$a^{-1} > a \quad /\cdot a\ (<0)$$ * invierte la inecuac.
$$1 < a^2 \quad /-1$$
$$0 < a^2-1$$
$$0 < (a-1)\cdot(a+1)$$

Esta vez, ambos deben ser negativos puesto que $a-1$ es siempre negativo.

Luego:

$$\left.\begin{array}{l}(a-1)<0 \\ (a+1)<0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}a<1 \\ a<-1\end{array}\right\} a<-1<1$$

$\therefore a<-1$; $0<a<1$

Recordar lo visto en clase : $\forall (a,b) \in \mathbb{R} : a,b > 0$ se cumple que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

5) $x, y \in \mathbb{R} : x, y > 0 \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Tomando $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{x}$ obtenemos:

$$\sqrt{\frac{\cancel{x} \cdot \cancel{y}}{\cancel{y} \cdot \cancel{x}}} \leq \frac{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)}{2} \qquad 1 \cdot 2$$

$$2 \cdot 1 \leq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

6) $\forall (a,b) > 0 \quad \Rightarrow (1+a^2) \cdot (1+b^2) \geq 4ab$

$$\frac{1+a^2}{2} \geq \sqrt{a^2} \Rightarrow 1+a^2 \geq 2a$$

$$\frac{1+b^2}{2} \geq \sqrt{b^2} \Rightarrow 1+b^2 \geq 2b$$

$$\therefore (1+a^2) \cdot (1+b^2) \geq 2a \cdot 2b = 4ab$$