PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO SEMESTRE DE 2015

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución de la Interrogación N° 1

1. [**Problema 1.4.16 del texto**]

   Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

   a) Demuestre que existe al menos un $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ para el que la la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución.

   Solución:

   Para esto tomemos la matriz ampliada asociada

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ -2 & 2 & 0 & b_2 \\ 4 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right]$$

   Aplicando operaciones elementales fila podemos ver que

$$\left[\begin{array}{rrr|l} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ -2 & 2 & 0 & b_2 \\ 4 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & b_2 + 2b_1 \\ 0 & 7 & 7 & b_3 - 4b_1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -2 & -2 & b_2 + 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_1 + \frac{7}{2}b_2 + b_3 \end{array}\right]$$

   Ahora en la última matriz es fácil ver que para

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (o cualquier $\mathbf{b}$ tal que $3b_1 + \frac{7}{2}b_2 + b_3 \neq 0$) la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene soluciones.

   Puntaje:

   - Por usar algún método *razonable* para encontrar un $\mathbf{b}$ como el buscado, 2 ptos.
     Nota: El método del tanteo *NO ES* razonable.
   - Por exhibir un $\mathbf{b}$ como el pedido, 1 pto.

   b) Describa el conjunto de todos los $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ para los cuales la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sí tiene solución.

Primera Solución:

Dado lo desarrollado en la parte anterior podemos ver que los vectores para los cuales la ecuación tiene solución satisfacen

$$3b_1 + \frac{7}{2}b_2 + b_3 = 0$$

(o, equivalentemente, $6b_1 + 7b_2 + 2b_3 = 0$) que representa un plano por el origen.

O sea, el conjunto pedido es

$$\left\{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \;:\; 3b_1 + \frac{7}{2}b_2 + b_3 = 0\right\} = \left\{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \;:\; 6b_1 + 7b_2 + 2b_3 = 0\right\}.$$

Segunda Solución:

Vectorialmente, si despejamos b_3 podemos describirlo con

$$\mathbf{b} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Luego el conjunto que buscamos es

$$\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{7}{2} \end{bmatrix}\right\} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}\right\}$$

Tercera Solución:

Dado que

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

otra forma de describir el conjunto pedido es como “el conjunto generado por los vectores columna de la matriz”, es decir,

$$\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}.$$

Cuarta Solución:

Finalmente, un refinamiento de la solución anterior consiste en darse cuenta de que el tercer vector columna de la matriz (y en realidad *cualquiera de los tres vectores columna*) es combinación lineal de los otros dos, por lo que el conjunto pedido puede ser descrito como

$$\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}.$$

Puntaje:

- Por usar algún método razonable para hallar la descripción del conjunto, 1 punto.
  Ejemplos de métodos “razonables”:
  - hacer referencia a la parte (a) del ejercicio,
  - despejar b_3 en términos de b_1 y b_2,
  - mencionar (materia vista en clases) que las columnas de $\mathbf{A}$ generan el conjunto solución del sistema, etc.
- Por llegar a cualquiera de las descripciones dadas (o alguna otra *correcta*): 2 puntos.

A lo anterior (máximo 3 puntos en cada parte de la pregunta) se le suma el punto base.

2. [**Problema 1.7.10 del texto**]

Sean

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ h \end{bmatrix}.$$

¿Para qué valores de h está el vector $\mathbf{v}_3$ en el Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$?

Solución:

$\mathbf{v}_3$ pertenece a Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ si y solo si el sistema de ecuaciones (presentado como ecuación vectorial)

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$$

tiene soluciones.

La matriz extendida asociada a este sistema de ecuaciones es

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 10 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & h \end{array}\right].$$

Usando operaciones elementales podemos ver que

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 10 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & h \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 9 & 27 \\ 0 & -7 & h-30 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 9 & 27 \\ 0 & 0 & h-9 \end{array}\right]$$

Ahora es fácil ver que el sistema tiene soluciones si y solo si $h = 9$.

Puntaje:

- Por transformar la condición $\mathbf{v}_3 \in$ Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en términos de un sistema de ecuaciones, o como ecuación vectorial, o como ecuación matricial: 2 puntos.
- Por llevar el sistema mencionado en el punto anterior a forma escalonada, de manera tal que quede en evidencia en qué casos hay solución y en cuáles no, 3 puntos.
- Por interpretar el resultado anterior y concluir que el sistema tiene soluciones (y por lo tanto la pregunta de si $\mathbf{v}_3 \in$ Gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$) si y solo si $h = 9$, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

3. **[Problema 1.8.36 del texto]**

Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$, y suponga que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es un conjunto linealmente independiente, pero $\{T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Demuestre que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial.

Solución:

Por ser $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ l.i., debe tenerse $\mathbf{u} \neq \mathbf{0} \neq \mathbf{v}$, por lo que si $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ o $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ entonces claramente la ecuación dada tiene una solución no trivial, por lo que podemos centrarnos en el caso en que $T(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0} \neq T(\mathbf{v})$.

Por ser $\{T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})\}$ l.d., existe una combinación lineal no trivial (o sea, donde α y β no son ambos cero) $\alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Pero entonces $T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, o sea, el vector $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ es solución de la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Como α y β no son ambos cero, $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ es una combinación no trivial de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Ya que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es l.i., $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, por lo que $\mathbf{w}$ es una solución no trivial de la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Puntaje:

- Por argumentar que existe una combinación lineal no trivial de $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$, 1 punto.
- Por exhibir una solución no trivial de la ecuación $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (en nuestro ejemplo, $\mathbf{w}$), 2 puntos.
- Por argumentar que dicho vector es efectivamente solución de la ecuación, 1,5 puntos.
- Por argumentar que dicho vector es $\neq \mathbf{0}$, 1,5 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

Nota: Algunos plantean una solución más o menos como la siguiente:

"Como $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores l.i., puedo escribir la matriz asociada a la matriz como $A = [T(\mathbf{u})T(\mathbf{v})]$, y resolver el sistema $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ será equivalente a resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dado que $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ son l.d., la matriz A tendrá una variable libre en su forma reducida, por lo que habrá soluciones no nulas para $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y por ende no nulas para $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$".

Esto no es correcto, ya que el paso "habrá soluciones no nulas para $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y por ende no nulas para $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$" supone justamente lo que se desea demostrar.

La matriz A reducida no entrega directamente información sobre T.

4. [**Problema 1.9.22 del texto**]

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -3x_1 + x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre $\mathbf{x}$ tal que

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Solución:

De la definición de T, vemos que $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ donde A es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Así, el problema planteado corresponde a encontrar una solución del sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

o sea, al sistema que tiene por matriz aumentada a

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Llevando esta matriz a forma escalonada reducida, vemos que

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

de donde el sistema planteado tiene por única solución a $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; vale decir, el único $\mathbf{x}$ que cumple la condición pedida es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Puntaje:

- Por plantear el problema en términos de encontrar la solución de un sistema, 1 punto.
- Por encontrar la matriz aumentada del sistema, 1 punto.
- Por llevar la matriz aumentada a su forma escalonada reducida, 2 puntos.
- Por interpretar la solución del sistema en términos del problema planteado originalmente, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

Nota: Algunos resuelven esta pregunta simplemente resolviendo el sistema de ecuaciones "con los métodos del colegio", por ejemplo despejando x_1 en una ecuación, resolviendo otra y comprobando que la tercera ecuación también se satisface. Este método es correcto, por lo que si no hay otros errores debe tener puntaje máximo.

5. [**Problema 2.1.25 del texto**]

   Suponga que A es una matriz de $m \times n$, y que existen las matrices C y D de $n \times m$, tales que $CA = I_n$ y $AD = I_m$. Demuestre que $m = n$ y $C = D$.

   Solución:

   Consideremos el producto de las tres matrices C, A y D *en ese orden*, o sea, CAD. Este producto puede, en principio, ser calculado de dos maneras distintas, a saber $(CA)D$ y $C(AD)$.

   Pero sabemos que el producto de matrices es asociativo, porlo que ambas formas de calcular este producto dan el mismo resultado; en otras palabras, $(CA)D = C(AD)$. Pero por hipótesis $CA = I_n$ y $AD = I_m$, por lo que tenemos

$$\begin{array}{rcl} (CA)D & = & I_nD = D \\ \| & & \\ C(AD) & = & CI_m = C \end{array}$$

   Así, $C = D$.

   Para probar que $m = n$, vemos que la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene únicamente la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (en efecto: si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ entonces $C(A\mathbf{x}) = C\mathbf{0}$ por lo que $(CA)\mathbf{x} = C\mathbf{0}$, de donde $\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = C\mathbf{0} = \mathbf{0}$).

   Pero entonces (Teorema 2, sec. 1.2) la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no tiene variables libres, o sea, al escalonar A en cada columna hay un pivote. Esto implica que A tiene —al menos— tantas filas como columnas, o sea, $m \geq n$.

   Por otra parte, dado $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ debe tener al menos una solución (en efecto:

$$\mathbf{b} = I_m\mathbf{b} = (AD)\mathbf{b} = A(D\mathbf{b})$$

   por lo que el vector $\mathbf{x} = D\mathbf{b}$ es tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$).

   Pero entonces (Teorema 4, sec. 1.4) la matriz A tiene un pivote en cada fila. Esto implica que A tiene —al menos— tantas columnas como filas , o sea, $m \leq n$.

   Ya que $m \geq n$ y $m \leq n$, concluimos que $m = n$.

   Puntaje:

   - Por demostrar que $C = D$, 2 puntos.
   - Por demostrar que $m = n$, 4 puntos.
     En particular, si siguen un esquema similar al aquí presentado, estos 4 puntos se dividen en dos partes: por probar que $m \leq n$, 2 puntos, y por probar que $m \geq n$, 2 puntos.

   A lo anterior se suma el punto base.

6. [**Problema 2.3.28 del texto**]

   Sean A y B dos matrices de $n \times n$. Demuestre que si AB es invertible, entonces B también lo es.

   Primera Solución:

   Por ser AB invertible, existe una matriz F tal que $F(AB) = I$.

   Pero entonces $(FA)B = I$, por lo que B es invertible.

   Nota: en ambos pasos usamos la equivalencia $(a) \iff (j)$ del teorema 8.

   Segunda Solución:

   Por ser AB invertible, la ecuación $\mathbf{ABx} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.

   Pero entonces la ecuación $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ debe tener solamente la solución trivial, ya que si $\mathbf{v}$ es solución no trivial de $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$ entonces es solución no trivial de $\mathbf{ABx} = \mathbf{0}$.

   En el fondo, demostramos el contrarrecíproco: si $\mathbf{B}$ no es invertible, entonces $\mathbf{AB}$ tampoco lo es.

   Tercera Solución:

   Por ser AB invertible, la transformación lineal $\mathbf{x} \to \mathbf{ABx}$ es uno a uno.

   Pero entonces la transformación lineal $\mathbf{x} \to \mathbf{Bx}$ debe ser uno a uno, ya que de no ser así, dos vectores distintos $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ tales que $\mathbf{Bv_1} = \mathbf{Bv_2}$ también satisfacen $\mathbf{ABv_1} = \mathbf{ABv_2}$.

   En el fondo, demostramos el contrarrecíproco: si $\mathbf{B}$ no es invertible, entonces $\mathbf{AB}$ tampoco lo es.

   Puntaje:

   En cualquiera de las soluciones (u otras *correctas* que se les ocurran a los alumnos):

   - Por plantear una demostración correctamente estructurada (por ejemplo, directa o por contradicción), 2 puntos.
   - Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 2 puntos.
   - Por justificar adecuadamente los argumentos, 2 puntos.

   A lo anterior se le suma el punto base.

   Nota: Los alumnos que usaron determinantes para responder la pregunta recibieron 0 puntos, ya que determinantes es una materia que ni siquiera se había mencionado al momento de dar la I_1.

   Si alguien hubiera usado formas bilineales, transformaciones semi-lineales o espacios vectoriales de dimensión infinita para responder esta pregunta (u otra) el criterio sería el mismo.

7. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) **[Problema 1.9.23 a del texto]**
   Si A es una matriz de 3×2, entonces la transformación $\mathbf{x} \to A\,\mathbf{x}$ no puede ser uno a uno.

   b) **[Problema Complementario 1, cap. 1g del texto]**
   Si A es una matriz de $m \times n$ y la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para algún $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, entonces las columnas de A generan a $\mathbb{R}^m$.

Solución:

   a) **Falso**.
   Contraejemplo: cualquier matriz con dos columnas linealmente independientes, argumentando que no poseen variables libres y así tiene solución única para cualquier elemento del recorrido.

   b) **Falso**.
   Contraejemplo: cualquier matriz con menos de m columnas l.i., ya que la ecuación $Ax = 0$ es siempre consistente.Tambien pueden argumentar que para una matriz dada por ellos la ecuación matricial $Ax = b$ es inconsitente para algún b.

Puntaje:

En cada parte, se dan 3 puntos por la respuesta correcta *con una justificación adecuada.*

En particular, en este caso cada respuesta FALSO debe ir acompañada de un contraejemplo que efectivamente refute la afirmación.

Así, responder FALSO sin realmente justificar obtiene 0 puntos de 3.

Responder FALSO con una justificación muy vaga (por ejemplo, en la parte (b) dar como argumento que "debe ser consistente para todo **b**), obtiene 1 punto de 3.

Si explican MUY bien CÓMO construir un contraejemplo, sin llegar a dar uno específico obtienen 2 puntos de 3.

Nota: si mencionan el hecho de que "la matriz podría tener filas l.d." lo consideramos como indicio de que entienden lo que se necesita para construir el contraejemplo, y se asignó 2 puntos de 3.

8. Expresse la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

como el producto de matrices elementales. Escriba cada una de las matrices elementales en forma explícita con todos sus elementos.

Solución:

La idea general para resolver este problema es:

- Mediante operaciones elementales fila llevamos A a la identidad. Esto equivale a multiplicar por la izquierda por matrices elementales.
- Obtenemos entonces $E_p \cdots E_2\, E_1 A = I$, y por lo tanto $A^{-1} = E_p \cdots E_2\, E_1$
- Entonces $A = (E_p \cdots E_2\, E_1)^{-1} = (E_1)^{-1}\, (E_2)^{-1}\, \cdots (E_p)^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 3F_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow -\frac{1}{2}F_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 - F_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 + 2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos en términos matriciales:

$$E_4E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} A = I \tag{1}$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
A &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Nota: Es posible realizar las operaciones elementales en un orden diferente y por lo tanto la factorización que a la que se llegue puede ser distinta a la mostrada aquí.