Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2022

MAT1203 – Álgebra Lineal

Solución Examen

1. Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}$ una base de $\mathbb{R}^3$. Determine, si es posible, una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz para T respecto a $\mathcal{B}$ sea

$$\big[T\big]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución. Tenemos que

$$\left[T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \iff T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + (0)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$$

$$\left[T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} \iff T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (3)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\5\\2\end{bmatrix}$$

$$\left[T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}0\\2\\-2\end{bmatrix} \iff T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = (0)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (2)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\-2\end{bmatrix}$$

Como $\mathcal{B}$ es una base entonces todo vector en $\mathbb{R}^3$ es combinación lineal de los elementos de la base, resolviendo el sistema se obtiene que:

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = (x-y)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (y-z)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Entonces, usando que T es una transformación lineal se obtiene que:

$$\begin{aligned} T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} &= (x-y)T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (y-z)T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + zT\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \\ &= (x-y)\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix} + (y-z)\begin{bmatrix}6\\5\\2\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\0\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6y-6z\\-x+6y-5z\\2y-4z\end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por obtener los valores de la transformación lineal T en la base $\mathcal{B}$.
- 2 puntos por determinar los escalares que permiten escribir los vectores de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de la base $\mathcal{B}$.
- 2 puntos por obtener explícitamente la transformación T.

2. Considere el subespacio vectorial $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \; : \; x - y - z = 0 \right\}$.

   a) Demuestre que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de W.

   b) Determine la proyección ortogonal de vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ en W.

   c) Determine la distancia del vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ al subespacio W.

Solución.

a) Note que los vectores de $\mathcal{B}$ son ortogonales luego es un conjunto linealmente independiente. Cada vector de $\mathcal{B}$ pertenece a W y como W tiene dimensión 3 se sigue que $\mathcal{B}$ es una base.

b) Considere $\mathbf{x} = [1, 1, 1, 1]^T \in \mathbb{R}^4$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ entonces la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ en W es

$$\begin{aligned} \mathrm{proy}_W x &= \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3}\mathbf{v}_3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) Sabemos que

$$d(x, W) = \|x - \mathrm{proy}_W x\| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Puntaje Pregunta 2.

- 2 puntos por mostrar que $\mathcal{B}$ es base de W.
- 2 puntos por determinar la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ en W.
- 2 puntos por determinar la distancia de un vector de $\mathbb{R}^4$ sobre W.

3. Encuentre la ecuación $y = \beta_0 + \beta_1 x$ de la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los puntos de datos $(2, 4)$, $(3, 6)$ y $(4, 5)$.

Solución. Usamos las coordenadas x de los datos para construir la matriz de diseño X y las coordenadas y para construir el vector de observaciones $\mathbf{y}$:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Buscamos la solución β de mínimos cuadrados de $X\beta = \mathbf{y}$. Para ello planteamos las ecuaciones normales:

$$\begin{aligned} X^T X\beta = X^T\mathbf{y} \quad &\iff \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &\iff \quad \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 46 \end{bmatrix} \\ &\iff \quad \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 9 & 29 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 15 \\ 46 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 29 & -9 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De manera que la recta de mínimos cuadrados tiene la ecuación $y = \dfrac{7}{2} + \dfrac{1}{2}x$.

Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por identificar correctamente la matriz de diseño.
- 1 punto por identificar el vector de observaciones $\mathbf{y}$.
- 2 puntos por escribir explícitamente las ecuaciones normales: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$
- 1 punto por resolver el sistema y exhibir la recta de mínimos cuadrados.

4. Considere la forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2ax_1x_2 + x_2^2.$$

Encuentre para qué valores de a, Q es una forma definida positiva.

Solución. La matriz simétrica que define a Q es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica de A es

$$(1 - \lambda)^2 - a^2 = 0,$$

de donde los valores propios de A son $1 \pm |a|$. Para que Q sea definida positiva, es necesario y suficiente que ambos valores propios sean positivos. El valor propio $1 + |a|$ es siempre positivo, por lo que es necesario y suficiente que

$$1 - |a| > 0 \iff |a| < 1.$$

Por lo tanto, la forma es definida positiva si y solo si $|a| < 1$, es decir, $a \in (-1, 1)$.

Puntaje Pregunta 4.

- 1,5 puntos por identificar la matriz simétrica que define a Q.
- 1,5 puntos por obtener la ecuación característica de A.
- 2 punto por identificar que Q es definida positiva si y solo si $1 \pm |a| > 0$
- 1 punto por encontrar todos los valores de a que permiten a Q ser positiva definida.

5. Suponga A es una matriz simétrica de 3×3 tal que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y que

$$\text{Nul } A = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Encuentre una matriz diagonal D y un matriz ortogonal P tal que $A = PDP^T$.

Solución. La primera igualdad nos dice que $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 2$. Notemos que los vectores

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

satisfacen $\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_4$, luego $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es un conjunto L.I. Por lo tanto $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es base de Nul A, que es el espacio propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 0$. De aquí se concluye que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es base de vectores propios.

Se verifica que $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$ y $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_3 = 0$ pero $\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_3 = -3$. Para conseguir una base ortogonal de Nul A reemplazamos $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_3 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\frac{-3}{6} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como $\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{3}$, $\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{6}$ y $\|\mathbf{v}_3\| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ obtenemos la base ortonormal

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Luego, $A = PDP^T$ con

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Puntaje Pregunta 5.

- 1 punto por deducir que $\mathbf{u}_1 = [1, 1, 1]^T$ es vector propio asociado a $\lambda_1 = 2$.
- 1,5 punto por deducir que $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base del espacio nulo de A asociado al valor propio $\lambda_2 = 0$.
- 1,5 punto por encontrar una base ortogonal.
- 1 punto por normalizar la base.
- 1 punto por expresar A como PDP^T con P ortogonal.

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Encuentre una descomposición en valores singulares de A.

Solución. Se tiene que $A^T A = \begin{bmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$, la ecuación característica de $A^T A$ es

$$\det(A^T A - \lambda I) = \lambda^2 - 25\lambda = \lambda(\lambda - 25)$$

y los valores propios de $A^T A$ son en orden decreciente $\lambda_1 = 25$ y $\lambda_2 = 0$.
Los vectores propios unitarios son:

$$\lambda_1 = 25 \ : \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 0 \ : \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} .$$

Luego una elección para V es $V = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

Los valores singulares de A son $\sigma_1 = \sqrt{25} = 5$ y $\sigma_2 = \sqrt{0} = 0$. Luego la matriz Σ es $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Se tiene que $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$. Como $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, la única columna encontrada para U hasta ahora es $\mathbf{u}_1$. Para encuentrar las otras columnas de U debemos extender $\{\mathbf{u}_1\}$ a una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. En este caso, necesitamos dos vectores unitarios ortogonales $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ que sean ortogonales a $\mathbf{u}_1$. Cada vector debe satisfacer la ecuación $\mathbf{u}_1^T \mathbf{x} = \mathbf{0}$, que es equivalente a la ecuación $2x_1 + x_2 = 0$. Una base ortonormal para el conjunto solución de esta ecuación es $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, sea $U = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto,

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} .$$

Puntaje Pregunta 6

- 0,5 punto por encontrar los valores propios de $A^T A$.
- 1 punto por encontrar los vectores propios de $A^T A$.
- 0,5 punto por normalizar los vectores propios de $A^T A$.
- 0,5 punto por calcular los valores singulares de A.
- 1 punto por determinar correctamente V.
- 0,5 punto por determinar correctamente Σ.
- 2 punto por determinar U.