

Ayudantía 2 - MAT1610

1. Determine, si existe, la ecuación de la(s) asíntota(s) horizontal(es) de la función dada:

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 2020}}{3x - 6}$

Note que,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{4x^2 + 2020}}{3x - 6} \\ &= \frac{\sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{2020}{4x^2}\right)}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{4x^2} \sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)} \\ &= \frac{2|x| \sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)} \quad (\sqrt{x^2} = |x|) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2|x| \sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)} \quad (|x| = x, \text{ si } x > 0) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{\left(3 - \frac{6}{x}\right)} \right) \quad (\text{Leyes límite}) \\ &= 2 \frac{\sqrt{1+0}}{3-0} \quad (\text{Leyes límite}) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

y hacia menos infinito, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| \sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2(-x) \sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)} \quad (|x| = -x, \text{ si } x < 0) \\
 &= \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{\left(3 - \frac{6}{x}\right)} \right) \quad (\text{Leyes límite}) \\
 &= -2 \frac{\sqrt{1+0}}{3-0} \quad (\text{Leyes límite}) \\
 &= -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ tiene como asíntotas horizontales a las rectas de ecuación: $y = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}$

(b) $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 - x}{x^2}}{\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}} \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

Note que, en el numerador, el $\lim_{x \rightarrow \infty} x - \frac{1}{x} = \infty - 0 = \infty$ y, en el denominador, el $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = 1 - 0 + 0 = 1$
Análogamente,

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3 - x}{x^2}}{\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}} \\
 &= -\infty
 \end{aligned}$$

Esto, ya que, en el numerador, el $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{1}{x} = -\infty - 0 = -\infty$ y, en el denominador, el $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = 1 - 0 + 0 = 1$

Por lo tanto, como ambos límites son no finitos, la función dada no tiene asíntota horizontal.

$$(c) \quad f(x) = \frac{-2e^x}{e^x - 5}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2e^x}{e^x - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(-2)}{e^x \left(1 - \frac{5}{e^x}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{1 - 5e^{-x}} \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{1 - 5e^{-x}} \\ &= \frac{-2}{1 - 0} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2e^x}{e^x - 5} \\ &= \frac{(-2) \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x}{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} 5} \\ &= \frac{(-2) \cdot 0}{0 - 5} \\ &= \frac{0}{-5} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función $f(x)$ tiene como asíntotas horizontales a las rectas de ecuación:
 $y = -2$ e $y = 0$

2. Estudie si cada uno de los límites indicados existe o no. Si existe, determine su valor, en caso contrario, explique por qué

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x - \sqrt{x^2 + x + 2})}{(x + \sqrt{x^2 + x + 2})(x - \sqrt{x^2 + x + 2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(x - \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}\right)}{x^2 - (\sqrt{x^2 + x + 2})^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(x - (-x)\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)}{-x - 2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)}{x\left(-1 - \frac{2}{x}\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{-1 - \frac{2}{x}} \\
 &= (-\infty)(-2) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

(b) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{sen}(x) - \sqrt{2}}{4x - \pi}$

Considerando el cambio de variable $t = x - \frac{\pi}{4}$, entonces se tiene que $x = t + \frac{\pi}{4}$, $t \rightarrow 0$ conforme $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{sen}(x) - \sqrt{2}}{4x - \pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}}{4\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \pi} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}}{4t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}}{4t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\left(\operatorname{sen}(t) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos(t)\right) - \sqrt{2}}{4t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2\left(\operatorname{sen}(t) \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t)\right) - \sqrt{2}}{4t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}(\operatorname{sen}(t) + \cos(t) - 1)}{4t} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t) - 1}{t} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + 0) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Nota: Otro cambio variable que se puede considerar es $t = 4x - \pi$ y, por lo tanto, $x = \frac{t+\pi}{4} = \frac{t}{4} + \frac{\pi}{4}$.

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} \left(\cos(x) + x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right)$

Considere el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$, entonces se tiene que $x = \frac{1}{t}$, $t \rightarrow 0^+$ conforme $x \rightarrow \infty$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} \left(\cos(x) + x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1} \left(\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \left(\frac{1}{t}\right)^3 \operatorname{sen}(t) \right) \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \left(\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^3} \operatorname{sen}(t) \right) \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \left(\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{t^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \right) \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \frac{1}{t^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \cos\left(\frac{1}{t}\right) + \left(\frac{1}{1 + t^2} \right) \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} \right) \\
&= \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \cos\left(\frac{1}{t}\right)}_{L_1} + \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 + t^2} \right)}_{L_2} \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}}_{L_3}
\end{aligned}$$

Los límites L_2 y L_3 son ambos iguales a 1.

El límite L_1 la función involucra el producto de una función acotada por una función que tiende a cero cuando x tiende a 0^+ . Entonces, por el teorema de la compresión (sandwich) el límite existe y vale 0, ya que

$$\begin{aligned} -1 \leq \cos\left(\frac{1}{t}\right) \leq 1 &\implies -\frac{t^2}{1+t^2} \leq \cos\left(\frac{1}{t}\right) \frac{t^2}{1+t^2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} && \left(\frac{t^2}{1+t^2} > 0\right) \\ &\implies -\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{1+t^2} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \frac{t^2}{1+t^2} \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2}{1+t^2} \\ &\implies 0 \leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \frac{t^2}{1+t^2} \leq 0 \end{aligned}$$

entonces, $L_1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \frac{t^2}{1+t^2} = 0$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} \left[\cos(x) + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] &= L_1 + L_2 \cdot L_3 \\ &= 0 + 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. Determine si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \cos\left(\pi x + 3 \arcsen\left(\frac{1}{x}\right)\right) & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \frac{3 - 3 \cos(2 - x)}{x^2 - 2x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

es continua o discontinua en $x = 1$ y si es continua o discontinua en $x = 2$. En caso de discontinuidad, clasifíquela.

Se tiene que $f(1) = 1^2 = 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \cos\left(\pi x + 3 \arcsen\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \cos\left(\pi \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 3 \arcsen\left(\frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1^+} x}\right)\right) \quad (\text{continuidad}) \\ &= \cos(\pi + 3 \arcsen(1)) \\ &= \cos\left(\pi + 3 \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ y, por lo tanto, f tiene una discontinuidad de salto en $x = 1$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} f(2) &= \cos\left(2\pi + 3 \arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \cos\left(3 \arcsen\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \cos\left(3 \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \cos \left(\pi x + 3 \arcsen \left(\frac{1}{x} \right) \right) \\
&= \cos \left(\pi \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 3 \arcsen \left(\frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2^-} x} \right) \right) \quad (\text{continuidad}) \\
&= \cos \left(2\pi + 3 \arcsen \left(\frac{1}{2} \right) \right) \\
&= \cos \left(3 \arcsen \left(\frac{1}{2} \right) \right) \\
&= \cos \left(3 \frac{\pi}{6} \right) \\
&= \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3 - 3 \cos(2 - x)}{x^2 - 2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(1 - \cos(x - 2))}{(x - 2)x} \quad (\cos(2 - x) = \cos(x - 2)) \\
&= 3 \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(1 - \cos(x - 2))}{(x - 2)x}
\end{aligned}$$

considerando el cambio de variables $t = x - 2$, se tiene que $x = t + 2$, $t \rightarrow 0^+$ conforme $x \rightarrow 2^+$ y

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 3 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos(t))}{t(t + 2)} \\
&= 3 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos(t))}{t} \frac{1}{t + 2} \\
&= 3 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos(t))}{t} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t + 2} \\
&= 3 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ y, por lo tanto, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$. Así,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 = f(2)$$

por lo que la función f es continua en $x = 2$.