# Clase 11

martes, 27 de agosto de 2024 15:33

# Independencia Lineal

Recuerdo: Si $v_1, \dots, v_m$ son $m$ vectores en $\mathbb{R}^n$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, decimos que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_m \cdot v_m$$

es una combinación lineal de $v_1, \dots, v_m$

Recordemos que la ecuación matricial homogénea

$$A \cdot x = \underbrace{[a_1 \ \cdots \ a_n]}_{\text{columnas de } A} \cdot x = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \dots + x_n \cdot a_n = 0$$

siempre tiene como solución la sol. trivial $x = 0$. Esta puede ser única o no. Esto sugiere la siguiente definición.

**DEFINICIÓN**

Se dice que un conjunto indexado de vectores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es **linealmente independiente** (l.i) si la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

solo tiene la solución trivial. Se dice que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ es **linealmente dependiente** (l.d). si existen pesos $c_1, \dots, c_p$, no todos cero, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \qquad (2)$$

Ejemplo 1: Determine si los vectores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

son l.i. Si son l.d. determine pesos $c_1, c_2, c_3$ (no todos cero) tales que $c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + c_3 \cdot v_3 = 0$.

Ejemplo 2: ¿Cuándo es el conjunto $\{v_1\}$ l.i.?

Observamos que si $v_1 = 0$ entonces $\{v_1\}$ es l.d. pues

$$1 \cdot v_1 = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

Luego $\{0\}$ es l.d.

Supongamos ahora que $v_1 \neq 0$. Es decir,

$$v_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{donde algún } \alpha_i \text{ no es } 0.$$

Luego $c_1 \cdot v_1 = 0 \iff c_1 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = 0$

$$\iff \begin{bmatrix} c_1 \cdot \alpha_1 \\ c_1 \cdot \alpha_2 \\ \vdots \\ c_n \cdot \alpha_n \end{bmatrix} = 0$$

Si $\alpha_j \neq 0 \Rightarrow c_1 \cdot \alpha_j = 0 \quad / \cdot \frac{1}{\alpha_j}$

$\Rightarrow c_1 = 0$

$\therefore \{v_1\}$ es l.i.

$\therefore \{v_1\}$ es l.i. si y solo si $v_1 \neq 0$ $\boxtimes$

Por ejemplo:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

l.i.     l.i.     l.d.

Ejemplo 3: Determine si los siguientes conjuntos son l.i. o l.d:

i) $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$      ii) $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Solución: Pizarra.

— o —

Inspirados en el ejemplo anterior, observamos lo siguiente.

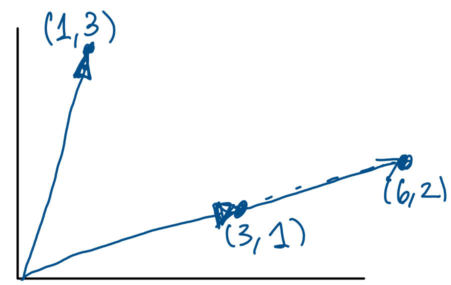
Proposición 1: Considere el conjunto $\{v_1, v_2\}$

de dos vectores en $\mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $\{v_1, v_2\}$ es l.d.

ii) uno de los vectores es múltiplo del otro.

iii) $v_1 \in \text{Gen}(v_2)$ o $v_2 \in \text{Gen}(v_1)$.




Dem:

i) ⇒ ii): Si $\{v_1, v_2\}$ son l.d. entonces
$$c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 = 0 \quad \text{para ciertos } c_1, c_2$$
no ambos nulos. Si $c_1 \neq 0$
$$\Rightarrow \quad v_1 = -\frac{c_2}{c_1} \cdot v_2 \quad \rightsquigarrow v_1 \text{ es múltiplo de } v_2$$
Si $c_2 \neq 0$
$$\Rightarrow \quad v_2 = -\frac{c_1}{c_2} \cdot v_2 \quad \rightsquigarrow v_2 \text{ es múltiplo de } v_2.$$

ii) ⇒ i): Si $v_1$ es múltiplo de $v_2$
$$\Rightarrow \quad v_1 = \alpha \cdot v_2 \quad \text{para cierto } \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \quad 1 \cdot v_1 - \alpha \cdot v_2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \{v_1, v_2\} \text{ es l.d.}$$

El caso en que $v_2$ es múltiplo de $v_1$ es análogo.

$\therefore$ i) ⇔ ii)

ii) ⇔ iii): Es directo de la definición de $\text{Gen}(v_1)$ que $v_2 \in \text{Gen}(v_1)$
$$\Longleftrightarrow$$
$$v_2 = \alpha \cdot v_1 \quad \text{para cierto } \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$v_2 \text{ es múltiplo de } v_1.$$

Luego ii) es equivalente a iii). ∎

La proposición anterior, en particular iii), nos da una interpretación geométrica de cuándos dos vectores son l.d.: $\{v_1, v_2\}$ son l.d. si es que ambos pertenecen a la misma recta que pasa por el origen.

¿Qué pasa con más vectores?

El siguiente teorema generaliza esta interpretación a más vectores.

Teorema 2: Un conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ de dos o más vectores es l.d. si y solo al menos un vector es combinación lineal de los otros. (En otras palabras: al menos un vector pertenece al conjunto generado por los otros vectores).

Más aun, si $S$ es l.d. y $v_1 \neq 0$, al menos un $v_j$, con $j > 1$, es combinación lineal de los vectores precedentes, $v_1, \ldots, v_{j-1}$.

Ejemplo: Los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

son l.d. pues

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Sin embargo, $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ no es combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ (Ejercicio: ¿porqué?)

Ejemplo:

Considere los vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ determine cuales son los vectores $w$ tal que

$\{v_1, v_2, w\}$ son l.d. Grafique el cjto. en Geogebra

Sol.: Observamos que $v_1 \neq 0$ y $v_2$ no es c.l. de $v_1$. Luego, por la última parte del teorema, el cjto. $\{v_1, v_2, w\}$ será l.d. ssi $w$ es combinación lineal de $v_1$ y $v_2$.

$$\iff w = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 \text{ para ciertos } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\iff w \in \underbrace{Gen(v_1, v_2)}_{\substack{\text{plano que pasa por} \\ \text{el origen y que tiene} \\ \text{como vectores directores} \\ v_1 \text{ y } v_2.}}$$

Plano v1v2

— o —

Observamos que el ejemplo anterior es válido siempre y cuando $v_1, v_2$ son l.i.

Dem (Teo 2):

Si $v_j$ es combinación lineal de los demás vectores

$$\Rightarrow \quad v_j = c_1 \cdot v_1 + \dots + c_{j-1} \cdot v_{j-1} + c_{j+1} v_{j+1} + \dots + c_p \cdot v_p$$

$$\Rightarrow \quad 0 = c_1 v_1 + \dots + c_{j-1} v_{j-1} - v_j + c_{j+1} \cdot v_{j+1} + \dots + c_p v_p$$

$\Rightarrow$ S es l.d.

Suponga ahora que S es l.d. Luego

$$c_1 \cdot v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = 0$$

para ciertos coeficientes $c_1, \ldots, c_p$ no todos ceros. Supongamos que $c_1 \neq 0$ (si fuera alguno de los otros el argumento es el mismo). Luego, despejando $v_1$:

$$v_1 = -\frac{c_2}{c_1} \cdot v_2 - \frac{c_3}{c_1} \cdot v_3 + \dots + -\frac{c_p}{c_1} \cdot v_p$$

$\therefore$ $v_1$ es comb. lineal de $v_2, \ldots, v_p$.

Para ver la última parte del teorema, asuma que $v_1 \neq 0$ y que S es l.d. Sea j el índice más grande tal que $c_j \neq 0$. Notamos que $j \neq 1$, pues sino

$$c_1 \cdot v_1 = 0 \quad \text{con } v_1 \neq 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

lo que es una contradicción. Luego

$$c_j = -\frac{c_1}{c_j} \cdot v_1 - \frac{c_2}{c_j} \cdot v_2 - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j} \cdot v_{j-1} \quad \blacksquare$$

Los siguientes teoremas entregan algunos casos específicos cuando sabemos que un cjto. S es l.d. automáticamente.

Teo. 3: Un conjunto de p vectores $S = \{v_1, \ldots, v_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ será l.d. en cualquiera de los dos caso:

i) $0 \in S$

ii) $p > n$.

Ejemplo: El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ es l.d. pues

$$1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

**Ejemplo**: El conjunto
$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es l.d. pues $p > n$.

**Dem (Teo. 3)**:

i) Supongamos que $v_1 = 0$ (si no le podemos cambiar de nombre a los vectores.
Luego,

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_p = 0$$

$\Rightarrow$ S es l.d.

ii) Supongamos que $p > n$. Consideremos la ecuación vectorial

$$x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_p \cdot v_p = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$A \cdot x = 0 \quad \text{donde} \quad A = [v_1 \cdots v_p]$$

$$\Leftrightarrow$$

$x$ es sol. de SEL homogéneo con matriz ampliada $[A \vdots 0]$ con $A$ de $n \times p$ $(p > n)$

Como el sistema tiene más variables que ecuaciones, tiene al menos una variable libre
$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ solución no-trivial

$\Rightarrow c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + \cdots + c_p v_p = 0$
donde no todos los $c_i$ son nulos ▨