PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
PRIMER SEMESTRE 2019.

EXAMEN
CÁLCULO II ⋆ MAT1620

Una solución

1. Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie de potencias dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \ln(n+1)} x^n.$$

Solución 1 .

Comenzamos calculando el respectivo radio de convergencia de la serie dada, para ello

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2^{n+1}\ln(n+2)}}{\dfrac{1}{2^n \ln(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto el radio de convergencia es $R = 2$.
A continuación analizamos en los puntos, $x = -2, x = 2$.
Para $x = 2$ la serie respectiva es,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)},$$

la cual por el Criterio de Leinitz es una serie convergente.
Ahora para $x = -2$ la serie respectiva es,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)},$$

la cual es una serie divergente, lo cual se puede concluir por ejemplo, comparandola con

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2},$$

Se concluye que el intervalo de convergencia de la serie dada es $[-2, 2)$.
Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por el correcto calculo del radio de convergencia.
- Asignar 2 puntos por el correcto analisis en $x = -2$.
- Asignar 2 puntos por el correcto analisis en $x = 2$.
- Agregar 1 punto base.

2. Analice la convergencia de las siguientes integrales,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)(\sqrt{x}+2)}.$$

Solución 2 .

Para la primera integral dada, notamos que

$$\left|\int_0^1 \frac{\ln}{1+x^2}dx\right| = -\int_0^1 \frac{\ln}{1+x^2}dx \leq -\int_0^1 \ln(x)\,dx = 1,$$

Luego la primera integral es convergente.

Para la segunda integral impropia, podemos comparar la respectiva función con la función auxiliar

$$g(x) = \frac{1}{x^{3/2}},$$

para ello notamos en primer lugar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)}}{\dfrac{1}{x^{3/2}}} < \infty,$$

y como la integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}},$$

es convergente, se tiene que la segunda integral dada tambien lo es.

Asignación de puntaje:

- Entregar 2 puntos por la correcta aplicación de algún criterio para determinar la convergencia de la primera integral.
- Entregar 1 punto por concluir que la primera integral es convergente.
- Entregar 2 puntos por la correcta aplicación de algún criterio para determinar la convergencia de la segunda integral.
- Entregar 1 punto por concluir que la segunda integral es convergente.

3. Determine la dirección de mayor crecimiento de la función $z = f(x, y)$ dada implícitamente por

$$Arctan(x + y + z) + 3xyz + z = 0,$$

en el punto $(0, 0, 0)$.

Solución 3 .

Consideremos la función

$$F(x, y, z) = Arctg(x + y + z) + 3xyz + z,$$

y notemos que el punto en cuestión verifica $F(0, 0, 0) = 0$. Por otro lado, sabemos que la dirección de mayor variación de una función viene dada por la dirección del vector $\nabla f(x, y)$.

En este caso se tiene que el vector gradiente de la función definida implicitamente es,

$$\nabla f(0, 0) = \left(\frac{-F_x(0, 0, 0)}{F_z(0, 0, 0)}, \frac{-F_y(0, 0, 0)}{F_z(0, 0, 0)} \right),$$

procedemos a calcular las respectivas derivadas parciales,

$$F_z = \frac{1}{1 + (x + y + z)^2} + 3xy + 1, \qquad F_x = \frac{1}{1 + (x + y + z)^2} + 3yz, \qquad F_y = \frac{1}{1 + (x + y + z)^2} + 3xz,$$

Evaluando en $(0, 0, 0)$ se tiene que la dirección pedida viene dada por la dirección del vector,

$$\nabla f(0, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Asignación de puntaje:

- Entregar 2 puntos por concluir que el vector pedido es el vector de las derivadas parciales.
- Entregar 2.5 puntos por calcular de manera implicita las respectivas derivadas parciales.
- Entregar 1.5 calcular de manera correcta el vector pedido.

4. Determine los valores máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$

definida en el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3\,, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Solución 4 .

Dada que la función en cuestión es continua y el dominio donde está definida es cerrado y acotada, esta función debe alcanzar un máximo y un mínimo sobre D. Para determinarlos comenzamos analizando en el interior de D, para ellos,

$$(f_x(x, y), f_y(x, y)) = (0, 0),$$

el único punto que satisface lo anterior, (en el interior de D) es el punto $P_1 = (1, 1)$.
A continuación debemos analizar la frontera de D. Denotaremos por D_i para $i = 1, 2, 3, 4$ los respectivos cuatro segmentos de la frontera y denotaremos por f_i a la función f restringida a D_i. Se tiene:

$$D_1 = \{(x, 0) : x \in [0, 3]\},$$

en este caso $f_1(x) = x^4 + 2$, la cual no posee puntos criticos.

$$D_2 = \{(3, y) : y \in [0, 2]\},$$

en este caso $(f_2)'(y) = 4y^3 - 12$ con lo cual tenemos un punto crítico $P_2 = (3, 3\sqrt[3]{3})$.

$$D_3 = \{(x, 3) : x \in [0, 2]\},$$

en este caso f_3 admite un tercer punto crítico $(3\sqrt[3]{3}, 3)$.

$$D_4 = \{(0, y) : y \in [0, 2]\},$$

en este caso $f_4(y)$ no tiene puntos críticos.
Finalmente debemos agregar los puntos de los vértices de D.

$$P_4 = (0, 0), \quad P_5 = (0, 2), \quad P_6 = (3, 2), \quad P_7 = (3, 0).$$

A continuación evaluamos en la función para determinar los valores pedidos, se obtiene que el máximo absoluto se alcanza en P_7 donde $f(P_7) = 83$ y el mínimo absoluto se alcanza en P_1 donde $f(P_1) = 0$.

Asignación de puntaje:

- Entregar 1.4 puntos por encontrar de manera correcta el punto crítico del interior de D.(0,4 por derivar y 1 punto por discriminar)
- Entregar 0,8 puntos por calcular de manera correcta y analizar la función en cada uno de los 4 segmentos de la frontera. (3.2 en total)
- Entregar 0,7 puntos por calcular el máximo y 0,7 por calcular el mínimo.

5. Utilizando coordenadas esféricas, determine el volumen de la región exterior a la esfera $r = 2\cos(\varphi)$ e interior a la esfera $r = 2$ para $\varphi \in [0, \pi/2]$.

Solución 5 .

En primer lugar notemos que la esfera $\rho = 2\cos(\varphi)$ en coordenadas cartesianas, se ve como sigue,

$$\begin{aligned}\rho = 2\cos(\varphi) &\Leftrightarrow \rho^2 = 2\rho\cos(\varphi)\\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2z\\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\end{aligned}$$

Con lo cual se tiene que nuestro volumen a calcular se puede expresar como,

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{2\cos(\varphi)}^{2} \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi) d\rho d\varphi d\theta.$$

calculando las integrales iteradas respectivas se tiene, en primera instancia,

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} (8\operatorname{sen}(\varphi) - 8\operatorname{sen}^3(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi))d\varphi.$$

En la segunda de las integrales hacemos $u = \cos(\varphi)$ con lo cual se tiene,

$$V = \frac{16\pi}{3}\left(1 + \int_1^0 u^3 du\right) = 4\pi.$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 1.5 puntos por describir de manera correcta las regiones en cuestión.
- Asignar 1,5 puntos por escribir la integral triple de manera correcta en coordenadas polares.
- Asignar 3 puntos por calcular de manera correcta la respectiva integral.

6. Evalúe la siguiente integral

$$\int_0^2 \int_0^3 \int_0^{1-z/2} e^{2x-x^2} dxdydz.$$

Solución 6 .

Intercambiando el orden de integración en la integral triple dada,

$$I = \int_0^2 \int_0^3 \int_0^{1-z/2} e^{2x-x^2} dxdydz = \int_0^1 \int_0^3 \int_0^{2-2x} e^{2x-x^2} dzdydx,$$

calculando las respectivas integrales iteradas,

$$I = \int_0^1 3(2-2x)e^{2x-x^2} dx.$$

Finalmente haciendo $u = 2x - x^2$, tenemos

$$I = \int_0^1 3e^u \, du = 3(e-1).$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 2,5 puntos por el cambio de orden de integración.
- Asignar 3,5 puntos por calcular de manera correcta la respectiva integral.

7. Calcule la integral

$$\int\int_D \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA,$$

siendo D la región trapezoidal con vértices, $(1,0); (2,0); (0,2); (0,1)$.

Solución 7 .

Notemos que la frontera de la región de integración esta formada por las rectas de ecuaciones,

$$y+x=1, \quad y+x=2, \quad y=0, \quad x=0.$$

Considerando la función dada y las rectas anteriormente descritas, utilizaremos el cambio de variables,

$$y+x=v, \qquad y-x=u,$$

o equivalentemente,

$$x=\frac{v-u}{2}, \qquad y=\frac{u+v}{2},$$

las nuevas variables satisfacen,

$$u \in [-v, v], \qquad v \in [1,2],$$

y el determinante de la respectiva matriz de transformación, es

$$|J| = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Con esto nuestra integral a calcular se puede expresar como,

$$I = \int_1^2 \int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \frac{1}{2}\, dudv.$$

Calculando se obtiene

$$I = \frac{1}{2}\int_1^2 (v \cdot sen(u/v))\Big|_{-v}^{v} dv = 3\,\mathrm{sen}(1).$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 1.5 puntos por un correcto cambio de variables.
- Asignar 2 puntos por describir de manera correcta la nueva región de integración.
- Asignar 1 punto por calcular de manera correcta el respectivo Jacobiano.
- Asignar 1,5 puntos por el calculo correcto de la integral doble.

8. Una lámina ocupa la región en el primer cuadrante del plano XY acotada por la elipse de ecuación $25x^2+4y^2=1$. Su densidad esta dada, en cada punto (x,y), por la función $\rho(x,y)=\cos(25x^2+4y^2)$. Determine la masa de esta lámina.

Solución 8: .

La integral que representa la masa pedida viene dada por,

$$M=\int\int_D \cos(25x^2+4y^2)dA,$$

haciendo el cambio de variables,

$$x=\frac{1}{5}r\cos(\theta), \qquad y=\frac{1}{2}r\,\mathrm{sen}(\theta).$$

se tiene que

$$M=\frac{1}{10}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 \cos(r^2)rdrd\theta,$$

calculando se obtiene,

$$M=\frac{\pi}{40}\,\mathrm{sen}(1).$$

Asignación de puntaje:

- Entregar 1 punto por la correcta escritura de la integral a calcular.(en cartesianas o polares).
- Entregar 2.5 puntos por la correcta utilización del cambio de coordenadas.
- Entregar 2.5 puntos por calcular de manera correcta la integral dada.