PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2014

MAT1203 - Algebra Lineal
Interrogación 2 - Lunes 5 de mayo - Solución

1. *a*) Sea A una matriz tal que $A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ y $A\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\9\end{bmatrix}$. Calcule la inversa de A.

   Solución:

   Del enunciado se tiene que $A\cdot\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\3&9\end{bmatrix}$.

   Entonces $A\cdot\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\3&9\end{bmatrix}^{-1}=I$.

   Luego la inversa de A es $\begin{bmatrix}1&3\\2&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\3&9\end{bmatrix}^{-1}=(1/6)\begin{bmatrix}0&2\\3&3\end{bmatrix}$.

   b) Sea A una matriz de $n\times n$ tal que $A^3=2I$. Demuestre que $A-I$ es una matriz invertible.
   Solución:

   Se tiene que $A^3-I^3=(A-I)(A^2+A+I)$, pero $A^3=2I$, entonces

   $2I-I=I=(A-I)(A^2+A+I)$.

   Por lo tanto $(A-I)$ es invertible y su inversa es (A^2+A+I).

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

   a) Escriba A como producto de matrices elementales.

   Solución:

   Para obtener la I como forma escalonada reducida de A se multiplica A por las matrices elementales que representan las operaciones elementales descritas en la siguiente igualdad:

$$\Big[F_1 \to F_1 - F_2\Big] \cdot \Big[F_3 \to (-1/3)F_3\Big] \cdot \Big[F_3 \to F_3 - F_2\Big] \cdot \Big[F_2 \to F_2 - F_1\Big]\ A = I$$

   Es decir:

$$A = \Big[F_2 \to F_2 - F_1\Big]^{-1} \Big[F_3 \to F_3 - F_2\Big]^{-1} \Big[F_3 \to (-1/3)F_3\Big]^{-1} \Big[F_1 \to F_1 - F_2\Big]^{-1}$$

   Calculando las operaciones queda:

$$A = \Big[F_2 \to F_2 + F_1\Big] \Big[F_3 \to F_3 + F_2\Big] \Big[F_3 \to (-3)F_3\Big] \Big[F_1 \to F_1 + F_2\Big].$$

   Calculando las matrices queda:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Usando la descomposición $A = LU$ encuentre la segunda columna de la inversa de A.
Solución:

La descomposición queda $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

El sistema que hay que resolver es $Ax = e_2$.

Se tiene que $LUx = e_2$ con $Ux = y$.

Primero se resuelve $Ly = e_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se tiene $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$.

Segundo se resuelve $Ux = y$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Se tiene $x_3 = 1/3$, $x_2 = 1$, $x_1 = -1$.

Nota: Si se encuentra la segunda columna de la inversa de cualquier manera distinta a la forma anterior, el puntaje es 0.

3. Sea A una matriz simétrica tal que $q_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1^2+5x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3.$

a) Determine una matriz R tal que $A = R^tR$.

Solución:

La matriz A queda descrita como $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$.

Primero se busca la descomposición $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Segundo se busca la descomposición:

$$A = LDL^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente tomando $D = \sqrt{D}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}^2$ se tiene $A = R^tR$ con:

$$R = \sqrt{D}L^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

b) Use la descomposición de Cholesky para escribir q_A como una suma ponderada de cuadrados.

Solución:

De la parte *a*) se tiene que:

$$q_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + 4(x_2 - x_3)^2 + 2(x_3)^2.$$

4. *a*) Sea T una matriz de $n\times n$, I la matriz identidad de $n\times n$ y O la matriz nula de $n\times n$. Si $|T|=5$, calcule el determinante de la siguiente matriz M de $2n\times 2n$:

$$M=\begin{bmatrix} -T & T^2 \\ 2I & O \end{bmatrix}.$$

Solución:

Haciendo las operaciones $F_1 \leftrightarrow F_{n+1}$, $F_2 \leftrightarrow F_{n+2}$, $\cdots$, $F_n \leftrightarrow F_{2n}$ queda:

$|M|=(-1)^n\begin{vmatrix} 2I & O \\ -T & T^2 \end{vmatrix}.$

Utilizando cofactores en las primeras n filas queda:

$|M|=(-1)^n\cdot(2)^n\cdot|T^2|=(-1)^n\cdot(2)^n\cdot|T|^2=(-1)^n\cdot(2)^n\cdot(5)^2.$

b) Sea $b\in\mathbb{R}$. Determine todos los valores de b para los cuales la siguiente matriz B es positiva definida:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ b & 1 & b-1 \\ 1 & b-1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Los determinantes de las submatrices principales deben ser todos positivos, entonces:

$|B_1|=1>0$ se cumple.

$|B_2|=1-b^2>0$, entonces b pertenece al intervalo $(-1,1)$.

$|B_3|=|B|=2-3b^2>0$, entonces b pertenece al intervalo $(-\sqrt{2/3},\sqrt{2/3})$.

Por lo tanto b pertenece al intervalo $(-\sqrt{2/3},\sqrt{2/3})$.

Nota: Si en la respuesta aparece solamente el cálculo del determinante de B, el puntaje es 0.