Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2017

MAT1610 ⋆ CÁLCULO I
INTERROGACIÓN 2

1. Calcule,

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right).$

   b) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-(1+h)}{h^2}$

2. Sea $r>0$. Determine el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio r.

3. Pruebe que la ecuación

   $$2x-1-\operatorname{sen}(x)=0,$$

   tiene exactamente una raíz real.

4. Determine los valores de $a,b,c\in\mathbb{R}$ de modo que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ posea un máximo local en $x=3$, un mínimo local en $x=-1$ y un punto de inflexión en $(1,11)$.

Las preguntas 5 y 6 son relativas a la función

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}.$$

5. *a*) Determine los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función f.

   b) Determine los intervalos de concavidad de la función f.

6. *a*) Determine, en caso que existan, las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas del gráfico de la función f.

   b) Esboce el gráfico de f.

7. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   a) Si las gráficas de las funciones f, g tienen puntos de inflexión en $x = a$ entonces la función $f \cdot g$ posee un punto de inflexión en $x = a$.

   b) Sea f una función continua en [0,6] tal que $f'(x) < 0$ para $x \in (0, 3)$ y $f'(x) > 0$ para $x \in (3, 6)$. Entonces el mínimo absoluto de f, en el intervalo $[0, 6]$ se alcanza en $x = 3$.

   c) Suponga que $f(0) = 5$ y que $f'(x) = 2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces $f(x) = 2x + 5$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Una solución

1. *a*) Para calcular este límite comenzamos restando ambas expresiones, con esto el límite a calcular se convierte en:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(3x+1)\operatorname{sen}(x)-x}{x\operatorname{sen}(x)},$$

este límite es del tipo $\dfrac{0}{0}$, por lo tanto haremos uso del resultado de L'Hospital. Con esto,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\operatorname{sen}(x)+3x\cos(x)+\cos(x)-1}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)},$$

este límite nuevamente es del tipo $\dfrac{0}{0}$, por lo cual recurriremos a L'Hospital nuevamente,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{6\cos(x)-3x\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(x)}{2\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)},$$

estamos, ahora, en condiciones de poder evaluar, con lo cual obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(3x+1)\operatorname{sen}(x)-x}{x\operatorname{sen}(x)} = \frac{6}{2} = 3.$$

b) Para calcular este segundo límite, nuevamente utilizaremos el resultado de L'Hospital, ya que el límite es del tipo $\dfrac{0}{0}$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1-h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{2h} = \frac{1}{2}.$$

En el segundo límite anterior, es posible volver a aplicar L'Hospital o recurrir al conocido límite

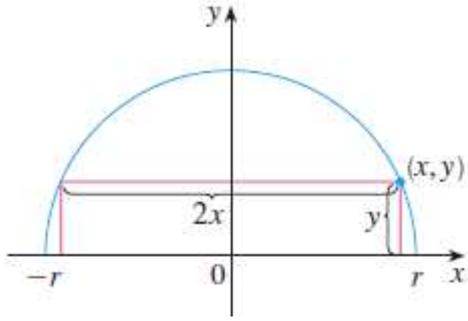
$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1.$$

Asignación de puntaje:

- Parte a). Por reconocer que el limite es del tipo de L'Hospital asignar 1 punto.
- Parte a). Por derivar de manera correcta asignar 1 punto.
- Parte a). Por calcular de manera correcta el límite asignar 1 punto.
- Parte b). Por reconocer que el limite es del tipo de L'Hospital asignar 1 punto.
- Parte b). Por derivar de manera correcta asignar 1 punto.
- Parte b). Por calcular de manera correcta el límite asignar 1 punto.

2. Consideraremos el siguiente esquema, Con lo cual el área del rectángulo será $A(x,y) = 2xy$ pero como el punto (x,y) pertenece a la circunferencia de radio r se tiene que $y = \sqrt{r^2-x^2}$ luego

$$A(x) = 2x\sqrt{r^2-x^2}.$$



Esta función está definida para $x \in [0, r]$ y su derivada es:

$$A'(x) = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

la cual posee un único punto crítico en $x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$.
Más aún como

$$A'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x \in (0, r/\sqrt{2})$$
$$A'(x) < 0 \quad \text{para} \quad x \in (r/\sqrt{2}, r)$$

se tiene que en $x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$ la función posee un máximo local. En particular alcanza el máximo absoluto en el intervalo donde $A(x)$ está definida ya que esta es continua y $A(0) = 0 = A(r)$. Finalmente evaluamos en la función para calcular el valor máximo correspondiente

$$A(\frac{r}{\sqrt{2}}) = r^2.$$

Asignación de puntaje:

- Por determinar la función que modela el area del rectángulo asignar 1.5 puntos.
- Por calcular el punto crítico utilizando la derivada asignar 2 puntos.
- Por verificar que el punto crítico es el máximo buscado. asignar 1.5 puntos.
- Por calcular el área máxima asignar 1 punto.

3. Para probar que la ecuación dada sólo posee una raíz, debemos probar, en primer lugar, que existe al menos una raíz. Para ello consideremos la función continua $f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen}(x)$, esta función satisface

$$f(0) = -1 < 0, \qquad f(\pi) = 2\pi - 1 > 0$$

por lo tanto el Teorema del valor intermedio nos asegura la existencia de al menos una raíz en el intervalo $(0, \pi)$.

Por otro lado la función f es creciente en toda la recta real, ya que

$$f'(x) = 2 - \cos(x) > 0, \quad \text{para todo}\, x \in \mathbb{R},$$

De lo anterior se concluye el resultado pedido.

- Por determinar la existencia de al menos una raíz, usando la continuidad de la función asignar 2.5 puntos.
- Por reconocer el hecho que la función es creciente asignar 2.5 puntos.
- Por concluir de manera correcta asignar 1 punto.

4. Si los valores $x = 3, x = -1$ determinan, respectivamente, el máximo y mínimo local, se tiene que ambos son puntos críticos de f, por lo tanto $f'(3) = 0 = f'(-1)$, es decir

$$27a + 6b + c = 0, \qquad 3a - 2b + c = 0$$

Por otro lado, si $(1, 11)$ es un punto de inflexión de f, como f'' es continua (f es un polinomio), se tiene que $f''(1) = 0$ o de manera equivalente,

$$-3a - b = 0$$

Con esto, hemos obtenido 3 ecuaciones para nuestras 3 incógnitas. Procedemos a resolver el sistema para obtener,

$$a = -1, \qquad b = 3, \qquad c = 9.$$

Es decir la función pedida es

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x,$$

notemos que $f(1) = 11$ y que $f''(x) = 6(-x + 1)$ luego

$$f''(3) = -12 < 0, \qquad f''(-1) = 12 > 0,$$

con lo cual se verifica que $x = 3$ y $x = -1$ determinan respectivamente valores máximos y minimos locales de f.

Asignación de puntaje:

- Por reconocer de manera correcta las condiciones de puntos critico asignar 2 puntos.
- Por reconocer de manera correcta la condicion de punto de inflexión asignar 1.5 puntos.
- Por plantear y resolver de manera correcta el sistema respectivo asignar 1.5 puntos.
- Por calcular la función pedida y verificar las condiciones de máximo y minimo local asignar 1 punto.

5. *a*) Respecto de la función dada, comenzamos notando que el máximo dominio para ella es el conjunto

$$Dom(f) = (-\infty, -2) \cup (2, \infty).$$

A continuación para determinar los intervalos de crecimiento calcularemos la primera derivada de f, a saber,

$$f'(x) = \frac{x(x^2 - 8)}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}},$$

con lo cual

$$f'(x) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad x = 0, \pm 2\sqrt{2},$$

como el valor $x = 0 \notin Dom(f)$, los únicos puntos críticos son $\pm 2\sqrt{2}$. En particular se verifica que,

$$\begin{aligned} f'(x) > 0, &\quad \text{para} \quad x \in (-2\sqrt{2}, 2) \cup (2\sqrt{2}, \infty) \\ f'(x) < 0, &\quad \text{para} \quad x \in (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2, 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

luego f es una función creciente en $(-2\sqrt{2}, 2) \cup (2\sqrt{2}, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (2, 2\sqrt{2})$.

b) Para analizar la concavidad de f calculamoremos f'', en nuestro caso obtenemos

$$f''(x) = \frac{4x^2 + 32}{\sqrt{(x^2-4)^5}},$$

esta expresión es positiva para todo $x \in Dom(f)$, por lo tanto la función f será siempre concava hacia arriva (o convexa). En particular los puntos críticos obtenidos anteriormente son ambos mínimos locales.

Asignación de puntaje:

- Por reconocer el dominio correcto de la función asignar 0.5 puntos.
- Por calcular de manera correcta la derivada 1.5 puntos.
- Por determinar de manera correcta los intervalos de crecimiento 1 punto.
- Por calcular de manera correcta la segunda derivada 2 puntos.
- Por determnar de manera correcta la concavidad de la función 1 punto.

6. *a*) Comenzamos buscando asíntotas horizontales, para ello,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \infty,$$

por lo tanto no existen asíntotas horizontales.

Revisemos la existencia de asíntotas verticales, las rectas $x = -2, x = 2$ son las únicas candidatas posibles,

$$\lim_{x \to \pm 2} f(x) = \infty,$$

por lo tanto $x = 2, x = -2$ son ambas asíntotas verticales al gráfico de f.

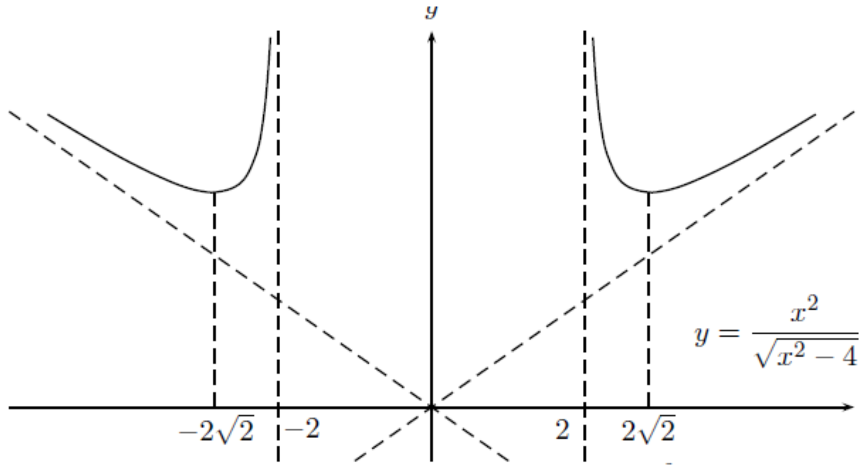
Finalmente revisaremos la existencia de una recta de la forma $y = mx + n$ que sea asíntota al gráfico de f, en este caso

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-4}} = 1$$

y luego

$$n = \lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2}{\sqrt{x^2-4}(x^2 + x\sqrt{x^2-4})} = 0.$$

Por lo tanto la recta $y = x$ es una asíntota oblicua al gráfico de f. Por simetría, f es una función par, se obtiene que $y = -x$ tambien es asíntota oblicua.



b) Recopilando toda la información obtenida anteriormente se concluye que el gráfico de f es:

Asignación de puntaje:

- Por reconocer de manera correcta la manera de determinar cada uno de las posibles asintotas asignar 0.5 puntos por cada planteamiento.
- Por calcular de manera correcta los respectivos límites y las ecuaciones de las asintotas asignar 1 punto por cada uno.
- Por esbozar de manera correcta el gráfico pedido asignar 2.5 puntos.

7. *a*) Falso, ya que podemos considerar las funciones $f(x) = x^3, g(x) = -x^3$. Ambas funciones poseen un punto de inflexión en $x = 0$ sin embargo $f(x) \cdot g(x) = -x^6$ en $x = 0$ no.

   b) Verdadero, ya si existiera otro punto donde f alcanza su mínimo éste solo podría ser $x = 0$ o bien $x = 3$. Y, suponiendo, que fuese $x = 0$ existiria c_1 con

   $$f(0) < c_1 < f(3),$$

   pero por la continuidad de f entonces deberia existir $x_1 \in (0, 3)$ tal que $f(x_1) = c_1$, pero esto sería una contradicción, dado que la función f es decreciente en $(0, 3)$. De manera analoga se puede argumentar que $x = 6$ tampoco es el mínimo absoluto.

   c) Verdadero, ya que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene, por Teorema del Valor Medio

   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c), \qquad c \in (0, x).$$

   De donde

   $$f(x) - 5 = 2x,$$

   o de manera equivalente $f(x) = 2x + 5$.

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por cada justificación y respuesta correcta.