Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Verano 2018

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 1

1. Sean v_1, v_2, $v_3 \in \mathbb{R}^3$ vectores unitarios tales que v_1 es ortogonal a v_2 y a v_3, y $v_2 \cdot v_3 = 5$. Calcule el valor de
$$\|3v_1 - 2v_2 + 2v_3\|^2$$

Solución.

$$\|3v_1 - 2v_2 + 2v_3\|^2 = (3v_1 - 2v_2 + 2v_3) \cdot (3v_1 - 2v_2 + 2v_3)$$
$$= 3v_1 \cdot 3v_1 + 2v_2 \cdot 2v_2 + 2v_3 \cdot 2v_3 - 3v_1 \cdot 2v_2 + 3v_1 \cdot 2v_3 - 2v_2 \cdot 3v_1 - 2v_2 \cdot 2v_3 + 2v_3 \cdot 3v_1 - 2v_3 \cdot 2v_2$$

Luego como $v_i \cdot v_i = \|v_i\|^2 = 1$ ya que son vectores unitarios, $v_1 \cdot v_2 = 0$ y $v_1 \cdot v_3 = 0$ ya que v_1 es ortogonal a v_2 y a v_3 y que el producto punto es conmutativo, tenemos que

$$= 9\|v_1\|^2 + 4\|v_2\|^2 + 4\|v_3\|^2 - 8v_2 \cdot v_3 = 9 + 4 + 4 - 8 \cdot 5 = -23$$

Puntaje:

- 1 pto por argumentar que $\|3v_1 - 2v_2 + 2v_3\|^2 = (3v_1 - 2v_2 + 2v_3) \cdot (3v_1 - 2v_2 + 2v_3)$.
- 1 pto por argumentar que el producto punto es distributivo y conmutativo.
- 1 pto por argumentar que $v_i \cdot v_i = \|v_i\|^2 = 1$ ya que son vectores unitarios.
- 1 pto por argumentar que $v_1 \cdot v_2 = 0$ y $v_1 \cdot v_3 = 0$ ya que v_1 es ortogonal a v_2 y a v_3.
- 2 pto por llegar el resultado correcto. (1 pto si hay algún error algebraico).

2. *a*) Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos:

$$\pi_1 : x + y + z = 1$$

$$\pi_2 : x + 2y + 2z = 1$$

   b) Encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y contiene a la recta de ecuaciones $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$

Solución.

a) Solucionamos el sistema lineal $x+y+z = 1,\ x+2y+2z = 1$ obtenemos la recta de ecuaciones paramétricas $x = 1$, $y = -t$, $z = t$.

b) Tomemos un punto cualquiera de la recta $(0, 1, 2)$ y formemos el vector que pasa por este punto y el punto $(1, 2, 3)$, $< 1, 1, 1 >$ luego la normal del plano que nos piden debe ser perpendicular a este vector y al vector director de la recta $< 3, 1, -1 >$, por lo cual podemos tomar al vector normal como $< 1, 1, 1 > \times < 3, 1, -1 >=< -2, 4, -2 >$ así una ecuación del plano pedido es $-2x + 4y - 2z + d = 0$ evaluando en el punto $d = 0$,$-2x + 4y - 2z = 0$

Puntaje:

- 3 ptos por encontrar unas ecuaciones paramétricas de la recta.
- 1,5 ptos por determinar una normal del plano.
- 1,5 ptos por determinar una ecuación del plano.

3. Obtenga el valor o los valores de h para que el vector $y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$ esté en $Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Solución.

Para que el vector $y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$ esté en $Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, necesitamos que $y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$ sea una combinación lineal de los vectores $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ es decir que la ecuación vectorial

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tenga solución. Pasando esta ecuación vectorial a un sistema de ecuaciones la matriz ampliada que le corresponde es

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & h \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & h-5 \end{array}\right)$$

luego para que el sistema sea consistente $h \neq 5$. Entonces para todo valor de $h \neq 5$ el vector $y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$ pertenece al $Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Puntaje:

- 2 ptos por argumentar que el vector y debe ser combinación lineal de los vectores.
- 2 ptos por determinar el sistema que resuelve este problema y argumentar que debe ser consistente.
- 2 ptos por determinar correctamente la condición que debe cumplir h.

4. Sea A una matriz de 3×4 tal que la suma de sus columnas es el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y su forma escalonada reducida es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Escriba la solución general del sistema $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Solución.

Si la suma de las columnas de A es el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ entonces $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Luego el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema matricial $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Si la forma escalonada reducida de A es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ implica que la solución del sistema homogeneo asociado a $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ es $Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Luego por teorema visto en clases la solución general del sistema $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

Puntaje:

- 2 ptos por argumentar que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución particular del sistema .
- 2 ptos por encontrar correctamente la solución del sistema homogeneo.
- 2 ptos por encontrar correctamente que la solución general del sistema .

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \end{pmatrix} \text{ y } T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) **[4 ptos]** Determine la matriz A, tal que $T(x) = Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

b) **[1 pto]** ¿Que condiciones debe cumplir α para que esta tranformación lineal sea uno a uno?.

c) **[1 pto]** ¿Que condiciones debe cumplir α para que esta tranformación lineal sea sobreyectiva?.

Solución.

a) Ya que T es una transformación lineal tenemos que $A = [T(e_1)\, T(e_2)\, T(e_3)]$. Para encontrar las imagenes de los vectores canonicos tenemos que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha - 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Luego $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & \alpha - 1 & -2 \end{pmatrix}$.

b) Para que T sea uno a uno necesitamos que las columnas de la matriz A sean linealmente independientes(todos columnas pivotes), lo que no dependiendo de α nunca se cumplira.

c) Para que T sea sobreyectiva necesitamos que las columnas de la matriz A generen a $\mathbb{R}^2$ (2 columnas pivotes), lo que se cumple si $\alpha \neq -1$.

Puntaje:

- 1 pto por argumentar que $A = [T(e_1)\, T(e_2)\, T(e_3)]$.
- 1 pto por encontrar cada columna de A correctamente.(3 ptos)
- 1 pto por argumentar que la transformación no puede der uno a uno.
- 1 pto por argumentar que la transformación para ser sobreyectiva $\alpha \neq -1$.

6. *a*) Determine la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Sean A, B, C matrices 7×7 tales que A, C y $A - AC$ son matrices invertibles. Supongamos que

$$(A - AC)^{-1} = C^{-1}B.$$

Despeje C de esta ecuación justificando cada paso.

Solución.

a) Para determinar la inversa de la matriz A, tenemos que

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) Observemos en primer lugar que B es también una matriz invertible, pues, multiplicando por C a la izquierda de ambos lados de la ecuación, se tiene que

$$C(A - AC)^{-1} = B,$$

de modo que B es producto de matrices invertibles. Considerando esto, aplicando inversa a ambos lados de la ecuación inicial, se tiene que

$$(A - AC) = B^{-1}C,$$

por lo que $A = (A + B^{-1})C$. Por último, como A y C son matrices invertibles, $A + B^{-1}$ también lo es, de modo que

$$C = (A + B^{-1})^{-1}A$$

Puntaje:

- 1 pto por encontrar correctamente cada columna de A^{-1}
- 1 puntos por argumentar que B es invertible.
- 1 puntos por justificar que $A + B^{-1}$ es una matriz invertible.
- 1 puntos por aplicar las diferentes propiedades para llegar a una expresión para C.

7. Utilice la factorización $PA = LU$ de

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

para obtener la última columna de la inversa de A.

Solución. Se debe resolver el sistema $Ax = e_4$. La factorización $PA = LU$ viene dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } U = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, para resolver $Ax = e_4$, multiplicando por P se tiene que $(PA)x = Pe_4$ y así, debemos resolver $(LU)x = Pe_4 = (0, 0, 1, 0)^t$. En primer lugar, resolvemos $Ly = (0, 0, 1, 0)^t$, resultando $y = (0, 0, 1, 0)^t$. Por último, determinamos la solución resolviendo $Ux = (0, 0, 1, 0)^t$, obteniéndose $x = (-1/36, 1/4, -1/3, 0)^t$.

Puntaje:

- Asignar 3 puntos por encontrar la descomposición PA=LU (1 punto por cada matriz correcta).
- Asginar 1 punto por utilizar la descomposición para resolver $Ax = e_4$.
- Asignar 1 punto por resolver correctamente el sistema $Ly = Pe_4$.
- Asignar 1 punto por resolver correctamente el sistema $Ux = y$.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas demúestrelas y si son falsas de un contraejemplo.

   a) Si $\{u, v, w\}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$ y A es un matriz de $n \times m$, entoces {Au,Av,Aw} es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^m$.

   b) Si la trasformación lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva, entonces $m \leq n$.

   c) Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal que primero refleja a cada vector través del eje Y y luego lo pondera por 3 entonces la matriz asociada a esta transfomación es $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Solución.

a) Falsa.

Si A es la matiz nula cada vector $Ax = 0$ luego el conjunto es linealmente dependiente

b) Verdadero.

Sea A la matriz asociada a tal transformación. Sabemos que A tiene dimensión $n \times m$ y como es inyectiva, entonces $Ax = 0$ tiene solución única. Esto último quiere decir que A tiene m pivotes (es decir, la misma cantidad de pivotes que el número de columnas), y esto no sería posible si $n < m$, pues la matriz tendría menos filas que columnas y cada pivote está ubicado en una fila distinta.

c) Verdadero

La matriz $A = [T(e_1)\ T(e_2)] = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Puntaje:

- 2 puntos por dar contraejemplo en a).
- 2 puntos por demostrar b).
- 2 puntos por demostrar c).