

**MAT1107 – Introducción al Cálculo**  
**Solución Interrogación N° 5**

1. Considere la función  $f : \mathbb{R} - \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \frac{x+1}{|x|-1}.$$

- a) Pruebe que  $f$  no es inyectiva.
- b) Sea  $g : [0, 1) \rightarrow B$  la función definida por  $g(x) = f(x)$ . Demuestre que  $g$  es inyectiva.
- c) Determine el conjunto  $B$  para que la función  $g$  sea sobreyectiva.
- d) Calcule la inversa de  $g$ .

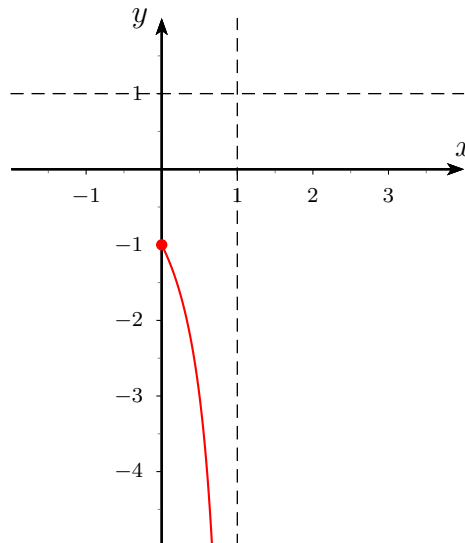
**Solución.**

- a) Tenemos que  $x_1 = -2$  y  $x_2 = -3$  con  $x_1 \neq x_2$  entonces  $f(x_1) = f(x_2) = -1$ . Luego  $f$  no es inyectiva.
- b) Si  $x \in [0, 1)$  entonces  $|x| = x$  por lo que  $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ . Supongamos que  $g(x_1) = g(x_2)$  entonces

$$\frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \implies (x_1+1)(x_2-1) = (x_2+1)(x_1-1) \implies x_1x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_2x_1 - x_2 + x_1 - 1 \implies x_1 = x_2.$$

Por lo tanto,  $g$  es inyectiva.

- c) El gráfico de la función  $g$  es



Por lo tanto, para que  $g$  sea sobreyectiva basta que  $B = (-\infty, -1]$ .

d) Tenemos que

$$y = f(x) \iff y = \frac{x+1}{x-1} \implies yx - y = x + 1 \implies x(y-1) = y+1 \implies x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\text{Luego, } g^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

**Puntaje Pregunta 1.**

- 1,5 puntos por encontrar cualquier par de puntos  $x_1$  y  $x_2$  distintos para los cuales  $f(x_1) = f(x_2)$ .
- 1,5 por mostrar que la función  $g$  es inyectiva.
- 1,5 puntos por determinar el conjunto  $B = \text{Rec}(f)$ .
- 1,5 puntos por encontrar la función inversa de  $g$ .

2. Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Demuestre que  $e^x + e^{-x} \geq 2$ .

**Solución.** Como  $e^x > 0$ , la desigualdad es equivalente a

$$e^{2x} + 1 \geq 2e^x,$$

y, por lo tanto, equivalente a

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0.$$

Esto último es equivalente a

$$(e^x - 1)^2 \geq 0,$$

que es verdadera.

**Otra Forma.** Usando la desigualdad fundamental sabemos que  $e^x \geq 1 + x$  y  $e^{-x} \geq 1 - x$ . Sumando estas desigualdades obtenemos que

$$e^x + e^{-x} \geq 1 + x + 1 - x = 2.$$

### Puntaje Pregunta 2.

- 6 puntos por mostrar de manera correcta lo solicitado.