PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MAT1620 - INTERROGACION 3 - PAUTA

6 de Junio de 2012

1. Encuentre el intervalo de convergencia de $S(x)$ definida como

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} x^k$$

y calcule, justificando sus calculos, la serie de potencia de

$$T(x) = \frac{S(x) - S(1)}{x - 1}$$

Solución: Dado que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{(k+1)!}}{\frac{k+1}{(k+2)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+2)}{k+1} = \infty$$

el radio de convergencia de $S(x)$ es $+\infty$ y el intervalo de convergencia es $\mathbb{R}$.

Hay varias de maneras para obtener la serie de potencias de $T(x)$, describimos un par de posibilidades.

Primera manera. Obervamos que

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!} x^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] x^k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}x}{k!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k x}{(k+1)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \\
&= x + (x-1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}
\end{aligned}$$

donde el tercer paso y el último paso están permitidos para cualquier $x \in \mathbb{R}$ porque las series de potencia involucradas convergen absolutamente en todo $\mathbb{R}$ (calculando el radio de convergencia da $+\infty$). Evaluando lo anterior tenemos $S(1) = 1$ y por ende, reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{S(x)-S(1)}{x-1} \\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Segunda manera Dado que $S(x)$ es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos realizar el segundo paso y el cuarto paso abajo. El sexto paso es calculando la serie por telescópica pues $1/(k+1)! \to 0$ cuando $k \to \infty$

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{S(x)-S(1)}{x-1} \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}x^k - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}\Big)\Big/(x-1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}(x^k-1)/(x-1) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{k-1}x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}x^i\sum_{k=i}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}x^i\sum_{k=i+1}^{\infty}\Big[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\Big] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}x^i\frac{1}{(i+1)!} \end{aligned}$$

2. *a*) Usando series, calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)(x-\ln(1+x))}{\arctan(x)-x\cos(x)}.$$

Solución: Un cálculo utilizando series de Taylor implica que

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\mp\cdots \quad \text{para todos } x\in\mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\mp\cdots \quad \text{para todos } x\in\mathbb{R}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\mp\cdots \quad \text{si } |x|<1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n} = x - \frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\mp\cdots \quad \text{si } |x|<1$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)(x-\ln(1+x))}{\arctan(x)-x\cos(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\mp\cdots\right)\left(x-(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\mp\cdots)\right)}{\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\mp\cdots\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\mp\cdots\right)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^3/2+\text{términos de orden superior}}{x^3/6+\text{términos de orden superior}}\\
&= 3.
\end{aligned}$$

b) Muestre que

$$\int_0^1 \frac{x^{7/2}}{\cosh(x)-1-\frac{x^2}{2}}\,dx \le 48.$$

Solución: Como $\cosh(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$ y $\mathrm{e}^x=\sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{n!}$ para todos $x\in\mathbb{R}$, deducimos que

$$\cosh(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})=\frac{1}{2}\left(\sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n\ge 0}\frac{(-x)^n}{n!}\right)=\sum_{n\ge 0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ge 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{7/2}}{\cosh(x)-1-x^2/2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{x^{7/2}}{\cosh(x)-1-x^2/2}\,\mathrm{d}x\\
&\le \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{x^{7/2}}{(1+x^2/2+x^4/24)-1-x^2/2}\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 \frac{x^{7/2}}{x^4/24}\,\mathrm{d}x\\
&= 24\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^1 x^{-1/2}\,\mathrm{d}x\\
&= 48\lim_{\varepsilon\searrow 0} x^{1/2}\Big|_\varepsilon^1\\
&= 48.
\end{aligned}$$

3. Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ no nulos.

a) Suponga que $\vec{c}=\|\vec{a}\|\,\vec{b}+\|\vec{b}\|\,\vec{a}$. Muestre que el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$ es igual al ángulo entre $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

Solución: Sabemos que para todo $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ se tiene que

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\cos(\theta),$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. De aquí, obtenemos que

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\|\vec{a}\|\,(\vec{a}\cdot\vec{b})+\|\vec{b}\|\,\|\vec{a}\|^2=\|\vec{a}\|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\right]$$

y

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|^2+\|\vec{b}\|\,(\vec{a}\cdot\vec{b})=\|\vec{b}\|\left[\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\right].$$

Por lo tanto,

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{c}\|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}{\big\|\|\vec{a}\|\,\vec{b}+\|\vec{b}\|\,\vec{a}\big\|}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\|\vec{b}\|\,\|\vec{c}\|}.$$

Concluimos que $\sphericalangle(\vec{a},\vec{c})=\sphericalangle(\vec{b},\vec{c})$.

b) Pruebe que
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$

Solución: Sabemos que para todos $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ se tiene que
$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}.$$

Entonces
$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} + (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} + (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} + (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} + (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. Considere los planos
$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \cdot (0,7,4) = 0\} \\ \Pi_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \cdot (1,0,8) = 0\} \\ \Pi_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \cdot (6,5,2) = 0\} \end{aligned}$$

Encuentre el lugar geométrico de los puntos equidistantes a Π_1, Π_2 y Π_3, encontrando una descripción lo más explicita posible.

Solución: Vemos que las normales a los planos Π_1, Π_2 y Π_3 son respectivamente $\vec{n}_1 = (0,7,4)$, $\vec{n}_2 = (1,0,8)$ y $\vec{n}_3 = (6,5,2)$. Calculamos $||\vec{n}_1|| = \sqrt{65}$, $||\vec{n}_2|| = \sqrt{65}$ y $||\vec{n}_3|| = \sqrt{65}$. Luego, un punto (x,y,z) va a ser equidistante a Π_1, Π_2 y Π_3 si y solo si
$$\frac{|(x,y,z) \cdot (0,7,4)|}{\sqrt{65}} = \frac{|(x,y,z) \cdot (1,0,8)|}{\sqrt{65}} = \frac{|(x,y,z) \cdot (6,5,2)|}{\sqrt{65}} \tag{1}$$
si y solo si
$$|7y + 4z| = |x + 8z| = |6x + 5y + 2z| \tag{2}$$

Dadas las distintas posibilidades de signo para los valores absolutos, se obtienen 4 posibles conjuntos.

- $L_1 = \{(x,y,z) : 7y + 4z = x + 8z = 6x + 5y + 2z\}$
- $L_2 = \{(x,y,z) : 7y + 4z = -x - 8z = 6x + 5y + 2z\}$
- $L_3 = \{(x,y,z) : 7y + 4z = x + 8z = -6x - 5y - 2z\}$
- $L_4 = \{(x,y,z) : 7y + 4z = -x - 8z = -6x - 5y - 2z\}$

Cada L_i es una recta y todas pasa por el origen (pues claramente $(0,0,0)$ pertenece a cada L_i). Una forma de encontrar el vector director de cada L_i es la siguiente. Vemos que $(x,y,z) \in L_1$
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow [7y + 4z = x + 8z = 6x + 5y + 2z] \\ &\Leftrightarrow [x - 7y + 4z = 0 \wedge 6x - 2y - 2z = 0] \\ &\Leftrightarrow [(x,y,z) \perp (1,-7,4) \wedge (x,y,z) \perp (6,-2,-2)] \\ &\Leftrightarrow (x,y,z) \parallel (1,-7,4) \times (6,-2,-2) \end{aligned}$$

y $(1,-7,4)\times(6,-2,-2)=(22,26,40)$. Luego $L_1=\{(22t,26t,40t):t\in\mathbb{R}\}$.

De la misma manera, para L_2 obtenemos $(x,y,z)\in L_2 \Leftrightarrow (x,y,z)\parallel(1,7,12)\times 2(3,-1,-1)=2(5,37,-22)$ y $L_2=\{(5t,37t,-22t):t\in\mathbb{R}\}$.

Para L_3 obtenemos $(x,y,z)\in L_3 \Leftrightarrow (x,y,z)\parallel(1,-7,4)\times 6(1,2,1)=6(-15,3,9)$ y $L_3=\{(-5t,t,3t):t\in\mathbb{R}\}$.

Para L_4 obtenemos $(x,y,z)\in L_4 \Leftrightarrow (x,y,z)\parallel(1,7,12)\times 6(1,2,1)=6(-17,11,-5)$ y $L_4=\{(-17t,11t,-5t):t\in\mathbb{R}\}$.

Y el conjunto de puntos equidistantes a Π_1,Π_2 y Π_3 es

$$L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4$$