Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2022

Álgebra Lineal - MAT1203
PAUTA Examen

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determine el o los valores de α que hacen que el sistema $Ax = b$ sea consistente y encuentre la o las soluciones del sistema (escritas en función del parámetro α).

   (b) Para el o los valores de α que hacen el sistema $Ax = b$ inconsistente, determine la o las soluciones de mínimos cuadrados de $Ax = b$.

Solución

(a) Si $\alpha \neq 0$, la forma escalonada reducida de la matriz ampliada del sistema $Ax = b$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 1 & 0 & 3 - 1/\alpha \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

por lo que es consistente con única solución igual a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\alpha \\ 3 - 1/\alpha \\ -1 \end{pmatrix}$.

En cambio si $\alpha = 0$, la matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

lo que corresponde a un sistema inconsistente.

(b) Con $\alpha = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Su transpuesta es $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Las soluciones de mínimos cuadrados son las soluciones de la ecuación matricial $A^T A x = A^T b$, donde $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $A^T b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La forma escalonada reducida de $(A^TA|A^Tb)$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

por lo que las soluciones están dadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-y \\ y \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Puntaje

(a) – 1 punto por justificar que el sistema $Ax = b$ es consistente si $\alpha \neq 0$.
– 1 punto por determinar la solución del sistema en el caso $\alpha \neq 0$.
– 1 punto por justificar que el sistema es inconsistente si $\alpha = 0$.

(b) – 1 punto por plantear el sistema $A^TAx = A^Tb$ o alternativamente $Ax = \text{proy}_{\text{Col}(A)}(y)$. No es necesario haber hecho los cálculos.
– 1 punto por establecer explícitamente el sistema a resolver.
– 1 punto por calcular las soluciones correctas de mínimos cuadrados.

2. Sea V el espacio vectorial de matrices de 2×2 con entradas reales,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) Demuestre que la transformación $T : V \to \mathbb{R}^2$, definida por $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b+c \end{pmatrix}$ es lineal.

(b) Encuentre una base de V, calcule $\dim(V)$ y determine si T es inyectiva y/o sobreyectiva.

Solución

(a) Sea $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ y $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ dos matrices de V. Se tiene:

$$\begin{aligned} T(A_1 + A_2) &= T\left(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right) = T \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 + c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} \\ &= T \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = T(A_1) + T(A_2). \end{aligned}$$

Por otro lado, para $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned} T(\alpha A) &= T\left(\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha b + \alpha c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a \\ b + c \end{pmatrix} = \alpha T(A) \end{aligned}$$

Esto demuestra que T es una transformación lineal.

(b) Una base para V es $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Como $\mathcal{B}$ tiene 4 elementos, la dimensión de V es 4. Ya que la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es 2, T no puede ser inyectiva. Por otro lado, para un elemento arbitrario de $\mathbb{R}^2$ se cumple

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que T es sobreyectiva.

Puntaje

(a)
- 1 punto por establecer, implícita o explícitamente, la definición de transformación lineal.
- 1 punto por demostrar correctamente la propiedad de la suma.
- 1 punto por demostrar correctamente la propiedad de la multiplicación escalar.

(b)
- 0,5 puntos por determinar una base de W.
- 0,5 puntos por determinar la dimensión de W.
- 1 punto por justificar que T no es inyectiva.
- 1 punto por justificar que T es sobreyectiva.

3. Considere en $\mathbb{R}^3$ el plano $W = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Determine una base ortonormal de W.

(b) Encuentre el vector de W más cercano al vector $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución

(a) Siguiendo el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, definimos

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -1/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La norma de u es

$$||u|| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}.$$

La norma de v es

$$||v|| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25} + 1} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Por lo tanto, una base ortonormal de W es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) El vector de W más cercano al vector y es $z = \text{proy}_W(y)$. Como los vectores de W están normalizados, entonces:

$$\begin{aligned} \text{proy}_W(y) &= \left(y \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \left(y \cdot \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{7}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{30} \\ -1/\sqrt{30} \\ 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/6 \\ 7/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puntaje

(a)
- 1 punto por establecer, implícita o explícitamente, una manera de encontrar una base ortogonal.
- 1 puntos por calcular una base ortogonal de W.
- 1 punto por determinar una base ortonormal de W.

(b)
- 1 punto por establecer, implícita o explícitamente, que el vector buscado es $\text{proy}_W(y)$.
- 1 punto por escribir explícitamente cómo calcular $\text{proy}_W(y)$.
- 1 punto por determinar correctamente el vector buscado.

4. Considere la forma cuadrática $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$.

   (a) Encuentre la matriz simétrica A asociada a la forma cuadrática Q y luego diagonalice A ortogonalmente, es decir, descompóngala en la forma $A = PDP^T$.

   (b) Defina un cambio de variables y reescriba la forma cuadrática Q sin productos cruzados con respecto de las nuevas variables y explique porqué Q es definida positiva.

Solución

(a) Primero notamos que

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

La matriz buscada es $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Para diagnolizar ortogonalmente primero buscamos valores propios:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 4 = (3-\lambda)(7-\lambda)$$

por lo que los valores propios de A son $\lambda = 3$ y $\lambda = 7$. Además, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ es vector propio de A asociado a $\lambda = 3$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 5-3 & -2 \\ -2 & 5-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_2.$$

Por otro lado, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ es vector propio de A asociado a $\lambda = 7$ si y sólo si

$$\begin{pmatrix} 5-7 & -2 \\ -2 & 5-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u_1 = -u_2.$$

Por lo tanto, una base ortogonal de vectores propios es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Luego de normalizar dicha base, si definimos $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ emtonces se cumple que $A = PDP^T$.

(b) Sea $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T PDP^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \left(P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right)^T D \left(P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= 3y_1^2 + 7y_2^2 = Q(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Como $Q(y_1, y_2) = 3y_1^2 + 7y_2^2$ es mayor o igual a 0, entonces Q es definida positiva.

(Alternativamente, como A tiene valores propios positivos, entonces Q es definida positiva).

Puntaje

(a) – 1 punto por determinar la matriz A.
– $0,5$ puntos por determinar cada columna de una matriz P (1 punto en total).
– $0,5$ puntos por determinar cada columna de una matriz D (1 punto en total).

(b) – 1 punto por definir el cambio de variables.
– 1 punto por reescribir Q sin productos cruzados.
– 1 punto por justificar porqué Q es definida positiva.