



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

PRIMER SEMESTRE DE 2019

Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

## Modelos Probabilísticos - EYP1026

### Ayudantía 13

13 de Junio de 2019

1. Sea  $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$  e  $Y | X = x \sim N\left(0, \frac{1}{x}\right)$ .
  - a) Calcule  $E(Y)$ ,  $\text{Var}(Y)$  y  $\text{cov}(X, Y)$ .
  - b) Encuentre la distribución de  $X | Y = y$ .
  - c) Calcule el valor de  $P(\sqrt{XY} > 1)$ .
2. Sea  $X \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ . Defina  $Y = |X|$ . Muestre que  $E(X) \neq E(E(X | Y))$ . ¿Contradice este hecho el teorema de esperanzas iteradas?
3. Se tienen dos lámparas cuyas vidas útiles son variables aleatorias iid con distribución exponencial de media  $\lambda > 0$ . Suponiendo que ambas lámparas se encienden simultáneamente, denote por  $X$  el tiempo que transcurre hasta que la primera lámpara se apaga, e  $Y$  el tiempo transcurrido hasta que la segunda lámpara se apague.
  - a) Obtenga las distribuciones de  $X | Y = y$  e  $Y | X = x$ .
  - b) Calcule  $E(X)$ ,  $E(Y)$ ,  $\text{Var}(X)$ ,  $\text{Var}(Y)$ ,  $\text{cov}(X, Y)$ .
4. Sea  $X$  el número de gotas de lluvia que caen durante un segundo. Suponga que  $X | \lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$  con  $\lambda > 0$  representando la intensidad de lluvia. Si  $\lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, 1)$  con  $\alpha > 0$ :
  - a) Muestre que  $P(X = k) = \frac{\Gamma(k + \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+\alpha}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$
  - b) Usando métodos probabilísticos, demuestre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} \frac{1}{2^k} = 2^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Sean  $X, Y, Z$  variables aleatorias independientes con  $X, Y \sim N(0, 1)$  y  $Z \sim F_Z(z)$ . Considere la variable

$$W = \frac{X + YZ}{\sqrt{1 + Z^2}}.$$

Encuentre la distribución de  $W$ .