PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2022

Interrogación 1 - MAT1610

1. Determine si los siguientes límites existen, en caso que exista calcúlelo, en caso contrario justifique por qué no existe.

   a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}}$

   Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}} &= \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{1+\cos(x)}} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{1-\cos(x)}} \\
&= \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)\sqrt{1-\cos(x)}}{\sqrt{1-\cos^2(x)}} \\
&= \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)\sqrt{1-\cos(x)}}{|\operatorname{sen}(x)|}
\end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\operatorname{sen}(x)\sqrt{1-\cos(x)}}{|\operatorname{sen}(x)|} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\operatorname{sen}(x)\sqrt{1-\cos(x)}}{-\operatorname{sen}(x)} = -\sqrt{2}$$

y que

$$\lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)\sqrt{1-\cos(x)}}{|\operatorname{sen}(x)|} = \lim_{x\to\pi^-} \frac{\operatorname{sen}(x)\sqrt{1-\cos(x)}}{\operatorname{sen}(x)} = \sqrt{2}$$

por lo tanto el límite no existe.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por el álgebra.
- (1 punto) Por determinar los límites laterales.
- (1 punto) Por concluir que no existe.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+1}-x}{2x-3}$

Solución:

Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-6x+1}-x}{2x-3} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-6/x+1/x^2)}-x}{x(2-3/x)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{(1-6/x+1/x^2)}-x}{x(2-3/x)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{(1-6/x+1/x^2)}-1}{(2-3/x)} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por la factorización.
- (1 punto) Por sacar correctamente el x^2 de la raíz.
- (1 punto) Por deetrminar que el límite es -1.

2. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{sen}(bx) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b de modo que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

Solución:

Observe que f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ ya que x y $\operatorname{sen}(bx)$ son funciones derivables en $\mathbb{R}$, por lo que necesitamos determinar las condiciones para que f sea derivable en $x = 0$, para esto debemos primero chequear las condiciones para que f seaa continua en $x = 0$, para esto debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to0^-} x = \lim_{x\to0^+} \operatorname{sen}(bx) = f(0) = a$$

obteniedno que $a = 0$.

Ahora para que f sea derivable en $x = 0$ se debe cumplir que

$$\lim_{h\to0^-} \frac{h}{h} = \lim_{h\to0^+} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{h} = b$$

obteniendo que $b = 1$.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por justificar que es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.
- (1 punto) Por la definición de continuidad en $x = 0$.
- (1 punto) Por determinar el valor de a.
- (1 punto) Por la definición de ser derivable en $x = 0$.
- (1 punto) Por determinar el valor de b.

3. a) Encuentre la ecuación de la recta tangente al gráfico de $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+1}$ en el punto $\left(2, \frac{1}{5}\right)$.

   Solución:

   Observe que usando la regla del cociente tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{(x^2+1)}{2\sqrt{x-1}} - 2x\sqrt{x-1}}{(x^2+1)^2}$$

   al evaluar en $x = 2$ obtenemos que la pendiente de la recta es $-\dfrac{3}{50}$, por lo tanto la ecuación de la recta pedida es

$$y = -\frac{3}{50}(x-2) + \frac{1}{5}$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por determinar dy/dx.
   - (1 punto) Por determinar la pendiente en el punto dado.
   - (1 punto) Por la ecuación de la recta tangente.

   b) Considere f una función tal que

x	2	-2	4
$f(x)$	9	7	3
$f'(x)$	-1	1	5

   y g la función definida por $g(x) = \sqrt{xf(x^2)}$. Determine $g'(2)$.

   Solución:

   Usando la regla de la cadena tenemos que

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{xf(x^2)}} \cdot (xf(x^2))'$$

si ahora usamos la regla del producto, tenemos que

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{xf(x^2)}} \cdot (f(x^2)) + 2x^2 f'(x^2))$$

reemplazando en $x = 2$, obtenemos que $g'(2) = \dfrac{43}{2\sqrt{6}}$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por realizar correctamente la regla de la cadena.
- (1 punto) Por realizar correctamente al derivación del producto.
- (1 punto) Por evaluar correctamente.

4. a) Calcule el valor de $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \ln(1-x)$.

Solución:

Sabemos que $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo tanto

$$-\ln(1-x) \leq \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \ln(1-x) \leq \ln(1-x)$$

además

$$\lim_{x\to 0} -\ln(1-x) = \lim_{x\to 0} \ln(1-x) = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \ln(1-x)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por acotar correctamente.
- (1 punto) Por determinar que los límites de las cotas son iguales.
- (1 punto) Por concluir el valor del límite pedido.
  NOTA: puedes usar "0 por acotada"

b) Demuestre, usando el Teorema del valor intermedio, que todo número positivo a tiene una raíz cuadrada, es decir, que existe $b > 0$ tal que $b^2 = a$.

Solución:

Dado $a > 0$ definimos $f(x) = x^2 - a$ y observamos que f es continua en todo $\mathbb{R}$, $f(0) = -a < 0$ y $f(a+1) = a^2 + a + 1 > 0$, por lo tanto, por el TVI, existe $b \in (0, a+1)$ con $f(b) = 0$ es decir, existe b tal que $b^2 = a$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por definir la función a la que le van a encontrar un cero (o bien un valor determinado).
- (1 punto) Por verificar las hipótesis del TVI.
- (1 punto) Por concluir lo pedido.