Solución Ayud. 2

1. Si A, B son disjuntos entonces

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4+9}{12} = \frac{13}{12} > 1 \quad \therefore \; A\cap B \neq \emptyset$$

Por otro lado si A, B son disjuntos

$A \subseteq B^c \Rightarrow P(A) \leq P(B^c)$ (en este caso $P(A) > P(B^c)$)

2. a) Se tiene que

Piezas con igual número : n

Piezas con $\neq$ número : $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!\,2!} = \frac{n(n-1)}{2}$

Así el # de piezas es

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n + n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

b) Casos totales : n^n

Selecc. bolsa vacía : n

Selecc. bolsa con dos bolitas : $n-1$

escojer 2 bol. : $\binom{n}{2}$

Poner las demás bolitas : $(n-2)!$

$P(\text{evento})$

$$= \frac{n(n-1)\binom{n}{2}(n-2)!}{n^n}$$
$$= \frac{\frac{n(n-1)\cdot n!}{2}}{n^n} = \frac{n!\binom{n}{2}}{n^n}$$

c) $\begin{matrix} n=3 \\ r=4 \end{matrix} \Rightarrow \binom{n+r-1}{r} = \binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4}$ //

(sin orden con repetición)

3. Queremos que $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$ sea esp. de prob.

Veamos si P cumple las 3 prop. deseadas

$$\left(\begin{array}{l} P: \mathcal{B} \to \mathbb{R} \\ E \mapsto P(A) \end{array} \right)$$

1) $P(S) = P(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{K} dx$

$$= \frac{1}{K} \cdot \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} f(y) dy} = 1 \quad \checkmark$$

2) $\forall E \in \mathcal{B}$, se tiene que

E es union, inter de intervalos

luego $\int_E f(x) dx \geq 0$ y $K \geq 0$

$$\therefore \frac{\int_E f(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} f(x) dx} \geq 0$$

3. Sea $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ colecc. disj. tq

$A_i \in \mathcal{B}$ $\forall K$ tenemos que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \frac{\int_{\cup A_K} f(x) dx}{K} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f(x) dx}{K}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} \frac{f(x)}{K} dx = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Notar que $\int_{\cup A_i} f(x) dx < \infty$. Luego P es prob. en $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

6. Se tiene que

$P(\text{Cara}) = p$
$P(\text{Sello}) = 1-p$

X: # de lanzamientos hasta que aparece cara

Por def. $F_x(x) = P(X \leq x) = \sum_{k=1}^{x} P(X=k)$

Ahora $P(X=k)$ es $k-1$ lanzamientos sello seguido de una cara, es decir, $(1-p)^{k-1}p$

Así $F_x(x) = \sum_{k=1}^{x} (1-p)^{k-1}p = p\sum_{k=0}^{x-1}(1-p)^k = p \cdot \frac{1-(1-p)^x}{1-(1-p)}$

$$= p\,\frac{1-(1-p)^x}{p} = 1-(1-p)^x$$

Que era lo pedido.

7. $\boxed{\text{Corta}}$ $X^{-1}(1) = \{1\} \notin \mathcal{F}$ $\therefore$ no es v.a.

$\boxed{\text{Larga}}$ Si X es v.a. tiene que cumplir que sea una función

$$X: S \to \mathbb{R} \quad \text{tq} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \{s \in S : X(s) \leq x\} \in \mathcal{F}$$
$$s \mapsto X(s)$$

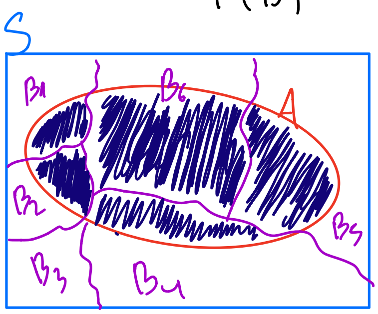
Si $x=0 \implies \{s \in S : X(s) \leq 0\} = \{-1, 0\} \notin \mathcal{F}$

$\therefore$ X no es variable aleat.

4.

$$P(\text{Hombre} \mid \text{Dalt.})$$

$$= \frac{P(H \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \mid H)\,P(H)}{P(D \mid H)P(H) + P(D \mid M)\,P(M)}$$



$$= \frac{0.05 \cdot 0.5}{0.05 \cdot 0.5 + 0.0025 \cdot 0.5}$$

Hola

$$= 0.9524$$

5.

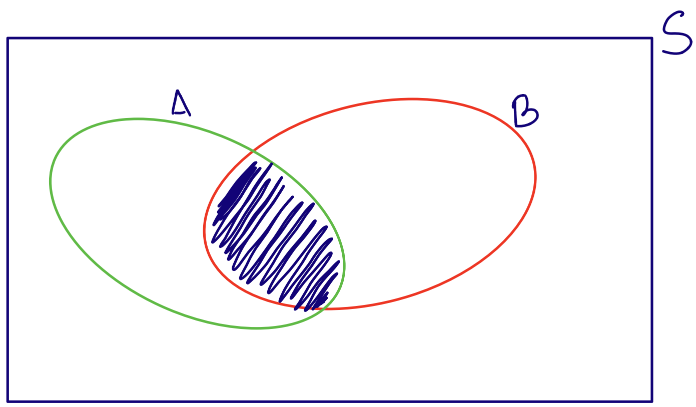
1) $P(\cdot \mid B) = \dfrac{P(\cdot \cap B)\}\geq 0}{\underbrace{P(B)}_{>0}} \Bigg\} \geq 0$

2) $P(S \mid B) = \dfrac{P(S \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

3) Si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una colección disjunta

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k \mid B\right) = \frac{P\left(\bigcup_{k \geq 1} (A_k \cap B)\right)}{P(B)} = \frac{\sum_{k \geq 1} P(A_k \cap B)}{P(B)}$$

$$= \sum_{k \geq 1} \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)} = \sum_{k \geq 1} P(A_k \mid B)$$



$P(B) = 1$ Caso total

$P(A \cap B)$ Caso favorable

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$