PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2023

Interrogación 3 - MAT1610

1. Se desea fabricar una caja con una base cuadrada, abierta en la parte superior (sin tapa) y que debe tener un volumen de 32.000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimizan la cantidad de material requerido.

   Solución:

   Observe que si la caja tiene base de lado x y altura y, tenemos que el volumen de ésta esta dada por
   $$x^2y = 32.000,$$
   obteniendo que $y = \dfrac{32.000}{x^2}$. Además, el material utilizado en la fabricación es $x^2 + 4xy$, por lo que la función a minimizar, en términos de x es
   $$A(x) = x^2 + \frac{128}{x} \text{ donde } x > 0$$

   Al derivar obtenemos que $A'(x) = 2x - \dfrac{128000}{x^2}$, obteniendo que el único punto crítico es $x = 40$.
   Al derivar nuevamente, obtenemos que $A''(x) = 2 + \dfrac{256000}{x^3}$, obteniendo que $A(40)$ es mínimo.
   Por lo tanto para minimizar el uso de material, el lado de la base de la caja debe medir 40cm y la altura 20cm.

   Distribución de puntajes:

   - (1punto) Por determinar la relación entre las dimensiones de la caja.
   - (1punto) Por determinar la función a minimizar.
   - (1 punto) Por derivara correctamente la función a minimizar.
   - (1 punto) Por encontrar punto crítico.
   - (1 punto) Por justificar que es mínimo.
   - (1 punto) Por determinar las dimensiones de la caja.

2. Calcule el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right].$$

Solución:
Notemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right]$$

Tomando $\Delta x = \frac{\pi}{n}$ entonces consideramos $b - a = \pi$. Por lo anterior podemos definir a $b = \pi$ y $a = 0$, entonces, $x_i^* = a + i\Delta x = \frac{i\pi}{n}$. Por lo anterior podemos reescribir nuestro límite como integral definida de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen(x)dx$$

Por lo tanto nuestro problema se reduce a calcular la integral definida:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen(x)dx = \frac{1}{\pi}[-cos(\pi) + cos(0)] = \frac{2}{\pi}.$$

Distribución de puntajes:

- (2 punto) Por reconocer la partición
- (1punto) Por determinar el intervalo adecuado de integración.
- (1 punto) Por reconocer la función a integrar.
- (2 punto) Por determinar el valor de la integral.
  *NOTAR QUE ESTA NO ES LA UNICA INTEGRAL POSIBLE.

3. a) Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \operatorname{sen}(2t^2)dt$$

Solución:

Observe que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \operatorname{sen}(2t^2)dt = \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(2t^2)dt}{x^3}$$

y éste último límite es de la forma indeterminada $0/0$, por lo que podemos aplicar la regla del L'Hopital obteniendo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \operatorname{sen}(2t^2)dt = \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(2t^2)dt}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x^2)}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{4x\cos(2x^2)}{6x} = \frac{2}{3}.$$

Distribución de puntajes:

- (1punto) Por determinar que es una forma indeterminada.
- (1punto) Por derivar correctamente para calcular el límite
- (1 punto) Por determinar el valor del límite

b) Demuestre que

$$\frac{2}{e} \leq \int_1^3 e^{\cos(x)}dx \leq 2e.$$

Solución: Notemos que $-1 \leq cos(x) \leq 1$ para todo x en los números reales. Si aplicamos la función $f(x) = e^x$ a la desigualdad anterior obtenemos lo siguientes:

$$e^{-1} \leq e^{cos(x)} \leq e^1$$

Esto es dado que $f(x)$ es una función estrictamente creciente.

Por último utilizando **Propiedad de comparación de integrales** en la última desigualdad tenemos:

$$\int_1^3 e^{-1}dx \leq \int_1^3 e^{cos(x)}dx \leq \int_1^3 e^1 dx$$

Calculando las integrales:

$$\frac{2}{e} \leq \int_1^3 e^{\cos(x)}dx \leq 2e$$

Que es lo que buscábamos demostrar.

Distribución de puntajes:

- (1punto) Por acotar superiormente la función a integrar
- (1punto) Por acotar inferiormente la función a integrar
- (1 punto) Por concluir

4. Considere la función

$$f(x) = \int_0^{x^2/2} e^{-t^2} dt.$$

Determine:

a) los intervalos donde $f(x)$ es creciente,

b) los intervalos donde $f(x)$ es decreciente,

c) los intervalos donde $f(x)$ es cóncava hacia arriba,

d) los intervalos donde $f(x)$ es cóncava hacia abajo.

Solución:

Derivando obtenemos que $f'(x) = xe^{-x^4/4}$, por lo tanto $f'(x) > 0$ si y solo si $x > 0$ obteniendo que f es creciente en $(0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$. Para estudiar la concavidad derivamos nuevamente obteniendo que $f''(x) = (1 - x^4)xe^{-x^4/4}$, haciendo estudio de signo tenemos que f es cóncava hacia arriba en $(-1, 1)$ y cóncava hacia abajo en $(1, \infty)$ y en $(-\infty, -1)$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar f'.
- (1punto) Por determinar intervalo de crecimiento
- (1punto) Por determinar intervalo de decreciemiento
- (1 punto) Por determinar f''.
- (1punto) Por determinar intervalo de cóncavidad hacia arriba.
- (1punto) Por determinar intervalo de cóncavidad hacia abajo