EYP2106 Modelos Probabilísticos

Solución del Examen

Profesor	Fernando Quintana
Ayudante	Rubén Soza
Semestre	2019/1

1. (a) Dado que $U = u$, Z se transforma en una combinación lineal de v.a. independientes con distribución $N(0,1)$, y por tanto $Z \mid U = u$ tiene también distribución normal. Puesto que X_1 y X_2 son independientes de U se tiene

$$\begin{aligned} E(Z \mid U = u) &= uE(X_1 \mid U = u) + (1-u)E(X_2 \mid U = u) = uE(X_1) + (1-u)E(X_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z \mid U = u) &= u^2\text{Var}(X_1 \mid U = u) + (1-u)^2\text{Var}(X_2 \mid U = u) \\ &= u^2\text{Var}(X_1) + (1-u)^2\text{Var}(X_2) = u^2 + (1-u)^2. \end{aligned}$$

Luego $Z \mid U = u \sim N(0, u^2 + (1-u)^2)$.

(b) Se tiene $E(Z \mid U) = 0$ por lo que $E(Z) = E(E(Z \mid U)) = 0$. Además, usando $\text{Var}(Z) = E(\text{Var}(Z \mid U)) + \text{Var}(E(Z \mid U))$:

- $E(\text{Var}(Z \mid U)) = E(U^2 + (1-U)^2) = E(U^2) + E((1-U)^2) = 2/3$.
- $\text{Var}(E(Z \mid U)) = \text{Var}(0) = 0$.

Sumando lo anterior se tiene $\text{Var}(Z) = 2/3$.

2. (a) Puesto que $E(Y \mid X = x) = x$ y $\text{Var}(Y \mid X = x) = x$ tenemos $E(Y \mid X) = X$ y $\text{Var}(Y \mid X) = X$ de donde

$$E(Y) = E(E(Y \mid X)) = E(X) = \frac{\alpha}{\beta},$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \text{Var}(E(Y \mid X)) + E(\text{Var}(Y \mid X)) = \text{Var}(X) + E(X) \\ &= \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha(1+\beta)}{\beta^2}. \end{aligned}$$

(b) El MP de X dado Y es $E(X \mid Y)$. Primero calculamos la distribución condicional de X dado que $Y = y$:

$$\begin{aligned} f_{X|Y=y}(x \mid y) &= \frac{p_{Y|X=x}(y \mid x) f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{Y|X=t}(y \mid t) f_X(t)\, dt} = \frac{\frac{x^y}{y!} e^{-x} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\int_0^\infty \frac{t^y}{y!} e^{-t} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t}\, dt} \\ &= \frac{x^{y+\alpha-1} e^{-x(1+\beta)}}{\int_0^\infty t^{y+\alpha-1} e^{-t(1+\beta)}\, dt} = \frac{(1+\beta)^{y+\alpha}}{\Gamma(y+\alpha)} x^{y+\alpha-1} e^{-x(1+\beta)}, \qquad x > 0, \end{aligned}$$

por lo que $X \mid Y = y \sim \text{Gama}(y+\alpha, 1+\beta)$, y entonces el MP es

$$\text{MP} = E(X \mid Y) = \frac{Y+\alpha}{1+\beta}.$$

Además,

$$\text{Var}(\text{MP}) = \text{Var}\left(\frac{Y+\alpha}{1+\beta}\right) = \frac{\text{Var}(Y)}{(1+\beta)^2} = \frac{\alpha(1+\beta)}{\beta^2(1+\beta)^2} = \frac{\alpha}{\beta^2} \times \frac{1}{1+\beta},$$

y como $(1+\beta)^{-1} < 1$ tenemos que $\text{Var}(\text{MP}) < \text{Var}(X)$.

3. (a) Se tiene

$$\begin{aligned} E\{(Y-c)^2\} &= E\{Y^2 - 2cY + c^2\} = E(Y^2) - 2cE(Y) + c^2 = \\ &= E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 + \{E(Y)\}^2 - 2cE(Y) + c^2 \\ &= \text{Var}(Y) + \{E(Y) - c)\}^2, \end{aligned}$$

lo que prueba la indicación. Para probar que $E\{(X_n - \mu)^2\} \to 0$ cuando $n \to \infty$, usamos la indicación:

$$E\{(X_n - \mu)^2\} = \text{Var}(X_n) + \{E(X_n) - \mu\}^2 \to 0,$$

cuando $n \to \infty$ por hipótesis.

(b) Con $X_n = (Y_1 + \cdots + Y_n)/n$ tenemos $E(X_n) = \mu$ por linealidad y $\text{Var}(X_n) = \sigma^2/n$ por independencia, y entonces las hipótesis de (a) aplican inmediatamente a este caso, para concluir lo pedido.

4.
- Por las condiciones del problema se tiene que $U_n \xrightarrow{\text{c.s.}} \mu$ (LFGN), lo que implica en particular $U_n \xrightarrow{\text{P}} \mu$ cuando $n \to \infty$. Además, por el TCL, $\sqrt{n}V_n/\sigma \xrightarrow{\text{D}} Z' \sim N(0,1)$. Luego, por Slutsky

$$U_n + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}V_n \xrightarrow{\text{D}} Z = \mu + Z' \sim N(\mu, 1).$$

- **(Bono)** El resultado anterior significa que $W_n \equiv U_n + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}V_n$ distribuye aproximadamente como $N(\mu,1)$, de modo que $W_n - \mu$ distribuye aproximadamente como $N(0,1)$. Luego:

$$P(|W_n - \mu| < \delta) \approx \Phi(\delta) - \Phi(-\delta) = \Phi(\delta) - (1 - \Phi(\delta)) = 2\Phi(\delta) - 1.$$