Modelos Probabilísticos

Ayudantía 12

Camilo González

24 de Noviembre del 2020

Ejercicio 1

Este ejercicio consiste en derivar la fórmula de Stirling utilizando el TCL.

$a)$ Argumente que si, $X_i \sim$ exponential (1), $i = 1, 2$, ..., independientes, entonces para todo x,

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) \to P(Z \leq x)$$

donde Z es una variable aleatoria normal estándar.

$b)$ Muestre que diferenciando ambos lados de la aproximación de la parte $a)$ y haciendo $x = 0$, se obtiene la fórmula de Stirling.

Ejercicio 2

Suponga que $X_1, X_2, \ldots$ converge en probabilidad a una variable aleatoria X y que h es una función contínua. Muestre que $h\left(X_1\right), h\left(X_2\right), \ldots$ converge en probabilidad a $h(X)$.

Ejercicio 3

Demuestre que,

$$P\left(|X_n - \mu| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ para todo } \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P\left(X_n \leq x\right) \to \begin{cases} 0 & \text{if } x < \mu \\ 1 & \text{if } x \geq \mu \end{cases}$$

a) Fije $\varepsilon = |x - \mu|$ y muestre que si $x > \mu$, entonces $P\left(X_n \leq x\right) \geq P\left(|X_n - \mu| \leq \varepsilon\right)$, mientras que si $x < \mu$, entonces $P\left(X_n \leq x\right) \leq P\left(|X_n - \mu| \geq \varepsilon\right)$. Concluya la implicación $\Rightarrow$.

b) Con $\{x : |x - \mu| > \varepsilon\} = \{x : x - \mu < -\varepsilon\} \cup \{x : x - \mu > \varepsilon\}$ concluya la implicación $\Leftarrow$.

Ejercicio 4

Muestre que si, $\sqrt{n}\left(Y_n - \mu\right) \to \mathrm{n}\left(0, \sigma^2\right)$ en distribución, entonces $Y_n \to \mu$ en probabilidad.

Ejercicio 5

Sea T_k el tiempo transcurrido entre la $k-1$-ésima y la k-ésima ocurrencia (de un proceso de Poisson con intensidad λ), $k = 1, \ldots, n$. Pruebe que:

a) $T_1, T_2, \ldots$ son variables aleatorias iid Exponencial(λ)

b) $S_n = T_1 + \ldots + T_n \sim \mathrm{Gama}(n, \lambda)$