PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2022

# Pauta Interrogación 1 - MAT1610

1. Determine si los siguientes límites existen, en caso que exista calcúlelo, en caso contrario justifique por qué no existe.

   a) $\lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)(1-\sqrt[3]{x})}{x^2-1}$

   **Solución:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)(1-\sqrt[3]{x})}{x^2-1} &= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{(x^2-1)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)(1-x)}{(x^2-1)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)}{-(x+1)(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

**Distribución de puntajes:**

- (1 punto ) Por multiplicar por el uno adecuado.
- (1 punto) Por simplificar.
- (1 punto) Por determinar el valor.

b) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}})$
**Solución:**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}})}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}})}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x(1+1/\sqrt{x}}+\sqrt{x(1-1/\sqrt{x})})}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

**Distribución de puntajes:**

- (1 punto ) Por multiplicar por el uno adecuado.
- (1 punto) Por simplificar.
- (1 punto) Por determinar el valor.

2. Considere la función

$$f(x)=\begin{cases} a^2x & \text{si } x\leq 2\\ \\ x^2-3x+2\cos(\pi x)-2a|a| & \text{si } x>2\end{cases}$$

Usando la definición, determine los valores de $a$ de modo que $f$ sea derivable en $x=2$.
**Solución:**

Para que $f$ sea continua en $x=2$ se debe cumplir que

$$f(2)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}a^2x$$

Calculamos los límites laterales

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-}f(x) &= \lim_{x\to 2^-}a^2x\\
&= 2a^2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+}f(x) &= \lim_{x\to 2^+}x^2-3x+2\cos(\pi x)-2a|a|\\
&= 4-6+2-2a|a|\\
&= -2|a|a.
\end{aligned}$$

De esta forma, para que $f$ sea continua se debe tener que $a^2 = -a|a|$, es decir, $a \leq 0$.

Nos resta estudiar que condición necesitamos para que $f$ sea derivable $x = 2$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} f'(2^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{a^2(2+h) - a^2\cdot 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{a^2 h}{h} = a^2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f'(2^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{(2+h)^2 - 3(2+h) + 2\cos(\pi(2+h)) + 2a^2 - a^2\cdot 2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{4+4h+h^2-6-3h+2\cos(\pi h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h+h^2-2(1-\cos(\pi h))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} (1+h) - 2\pi \lim_{h\to 0^+} \frac{(1-\cos(\pi h))}{\pi h} = 1 - 2\pi\cdot 0 = 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $f$ sea derivable en $x = 2$ se debe cumplir que $f'(2^-) = f'(2^+)$, es decir $a^2 = 1$, es decir $a = -1$ (pues $a \leq 0$). **Distribución de puntajes:**

- (2 punto) Por la definición de continuidad en $x = 2$.
- (1 punto) Por determinar las condiciones sobre $a$ para la continuidad.
- (2 punto) Por la definición de ser derivable en $x = 2$.
- (1 punto) Por determinar el valor de $a$.

3. a) Sea $f(x) = \cos(x^3 - x)(2x+1)^{100}$. Calcule $f'(-1)$.

**Solución:**

Usando la regla de la cadena tenemos que

$$f'(x) = -\mathrm{sen}(x^3 - x)(3x^2 - 1)(2x+1)^{100} + 200\cos(x^3 - x)(2x+1)^{99}$$

evaluando tenemos que $f'(-1) = -\mathrm{sen}(0)(3-1)(-2+1)^{100} + 200\cos(0)(-2+1)^{99} = -200$

**Distribución de puntajes:**

- (1 punto ) Por realizar correctamente la regla de la cadena.
- (1 punto) Por realizar correctamente al derivación del producto.
- (1 punto) Por evaluar correctamente.

| $x$ | 2 | -2 | -1 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | -9 | 7 | 3 |
| $f'(x)$ | -1 | 1 | 5 |

b) Considere $f$ una función tal que
y $g$ la función definida por $g(x) = \sqrt{xf\left(x^2+1\right)}$. Determine $g'(-1)$.
**Solución:**

Usando la regla de la cadena tenemos que

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{xf\left(x^2+1\right)}}\left(xf\left(x^2+1\right)\right)' = \frac{f(x^2+1)+2x^2f'(x^2+1)}{2\sqrt{xf\left(x^2+1\right)}}$$

reemplzando tenemos que

$$g'(-1) = \frac{f(2)+2f'(2)}{2\sqrt{-f\left(2\right)}} = -\frac{11}{6}.$$

**Distribución de puntajes:**

- (1 punto ) Por realizar correctamente la regla de la cadena.
- (1 punto) Por realizar correctamente al derivación del producto.
- (1 punto) Por evaluar correctamente.

4. a) Encuentre los puntos en el gráfico de $y = x^3 - 3x^2 + 11x - 100$ de modo que las rectas tangentes al gráfico en esos puntos sean paralelas a la recta $y = 20x + 2$
**Solución:**
Observe que necesitamos resolver $\dfrac{dy}{dx} = 20 = 3x^2 - 6x + 11$ que equivale a la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ cuyas soluciones son $x = -1$ y $x = 3$ por lo tanto los puntos buscados son $(-1, -115)$ y $(3, -67)$.
**Distribución de puntajes:**

- (1 punto ) Por determinar la ecuación a resolver.
- (1 punto) Por resolver la ecuación.
- (1 punto) Por determinar los puntos .

b) Demuestre que existe un número real $x$ que satisface la ecuación

$$4x^3 - e^x = x\text{sen}(x).$$

**Solución:**

Considere la función $h(x) = x\text{sen}(x) + e^x - 4x^3$, observamos que $h$ es continua en todo $\mathbb{R}$ ya que es suma y productos de funciones continuas en todos los reales. Además, $h(0) = 1 > 0$

y $h(1) = \operatorname{sen}(1) + e - 4 < 0$ por lo tanto, por el TVI tenemos que existe $c \in (0, 1)$ con $h(c) = 0$, por lo tanto la ecuación planteada tiene al menos una solución real. **Distribución de puntajes:**

- (1 punto ) Por definir la función a la que le van a encontrar un cero (o bien un valor determinado).
- (1 punto) Por verificar las hipótesis del TVI.
- (1 punto) Por concluir lo pedido.