PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO SEMESTRE DE 2022

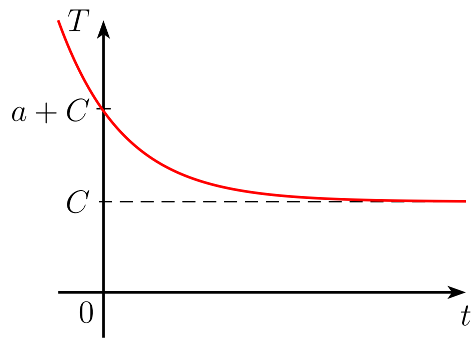
MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 3

1. Si se coloca un objeto en un entorno más frío, la temperatura del objeto disminuye hacia la temperatura del entorno. El modelo matemático que describe este proceso es

$$T = f(t) = ae^{-kt} + C$$

donde T equivale a la temperatura del objeto t tiempo después de que se coloca en el entorno más frío, que está a la temperatura C. En la figura se muestra la gráfica de la función



Suponga que se descubre el cuerpo de una persona fallecida en un departamento. El forense llega a las 3:00 pm y encuentra que la temperatura del cadáver es de 30°C y la temperatura del departamento es de 20°C. El forence espera una hora y después vuelve a tomar la temperatura del cuerpo, encontrando que está a 28°C. Determine la hora del fallecimiento, suponiendo que la temperatura del cuerpo en el momento de la muerte era de 37°C.

Solución. La temperatura del departamento es de 20° entonces $\boxed{C = 20}$. Si suponemos que en el tiempo $t = 0$ son las 3:00 pm y a esa hora el cuerpo tenía una temperatura de 30° entonces

$$f(0) = 30 \iff a + C = 30 \iff a + 20 = 30 \iff \boxed{a = 10}$$

Transcurrida 1 hora la temperatura del cuerpo es de 28° entonces

$$f(1) = 28 \iff 10e^{-k} + 20 = 28 \iff 10e^{-k} = 8 \iff e^{-k} = \frac{4}{5} \iff \boxed{-k = \ln\left(\frac{4}{5}\right)}.$$

Entonces, el modelo matemático nos queda

$$f(t) = ae^{-kt} + C = 10e^{t\cdot\ln\left(\frac{4}{5}\right)} + 20 = 10e^{\ln\left(\frac{4}{5}\right)^t} + 20 = 10\left(\frac{4}{5}\right)^t + 20\,.$$

El cuerpo estaba a temperatura de 37° cuando

$$\begin{aligned} f(t) = 37 \quad &\Longleftrightarrow \quad 10\left(\frac{4}{5}\right)^t + 20 = 37 \Longleftrightarrow 10\left(\frac{4}{5}\right)^t = 17 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{4}{5}\right)^t = \frac{17}{10} \Longleftrightarrow t\ln\left(\frac{4}{5}\right) = \ln\left(\frac{17}{10}\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad t = \frac{\ln\left(\frac{17}{10}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \end{aligned}$$

Note que el tiempo t obtenido es negativo. Entonces, la hora del fallecimiento es 3 de la tarde mas el tiempo $t = \dfrac{\ln\left(\frac{17}{10}\right)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}$.

Puntaje Pregunta 1.

- 1 punto por encontrar el valor de C.
- 1 punto por encontrar el valor de a.
- 2 puntos por encontrar el valor de k.
- 2 puntos por encontrar el tiempo t para el cual $f(t) = 37$.

2. Considera los números enteros n y k con $1 \leqslant k \leqslant n$.

   a) Verifique que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. **[2 puntos]**

   b) Use el teorema del binomio para verificar que $(1+3)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 3^k$. **[1 punto]**

   c) Use los incisos a) y b) para calcular $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} 3^k$. **[3 puntos]**

Solución.

a) Notemos que el lado izquierdo de la igualdad es

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{kn!}{(n-k)!k(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$$

mientras que el lado derecho de la igualdad es

$$n\binom{n-1}{k-1} = n\frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}$$

como ambas expresiones son iguales, se sigue que la igualdad es verdadera.

b) Usando el teorema del binomio, vemos que

$$(1+3)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 1^{n-1-k} \cdot 3^k = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 3^k.$$

como queríamos verificar.

c) Usando el inciso a) vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} 3^k &= \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} 3^k = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 3^k = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 3^{k+1} \\
&= 3n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 3^k = 3n(1+3)^{n-1} = 3n4^{n-1}.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 2.

- 2 puntos por verificar la igualdad del inciso a).
- 1 punto por verificar la igualdad del inciso b)
- 1 punto por llegar a la igualdad $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} 3^k = n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 3^k$
- 1 punto por llegar a la igualdad $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 3^k = n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 3^{k+1}$
- 1 punto por calcular la suma y obtener que da $3n4^{n-1}$.

3. Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k}$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{j}{k} &\overset{\textbf{(1)}}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\sum_{j=1}^{k} j\right)\\
&\overset{\textbf{(2)}}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)\\
&\overset{\textbf{(3)}}{=} \sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{2}\\
&\overset{\textbf{(4)}}{=} \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right]\\
&\overset{\textbf{(5)}}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} + n\right] = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} = \frac{n}{4}\left[(n+1)+2\right] = \frac{n(n+3)}{4}\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 3.

- 1 punto por obtener la identidad (1).
- 2 puntos por obtener la identidad (2).
- 1 punto por obtener la identidad (3).
- 1 punto por obtener la identidad (4).
- 1 punto por obtener la identidad (5).

4. Demuestre, usando la definición de límite, que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+2n-1}{n^2+2} = 3.$

Solución. Notemos que si $n \geqslant 2$ entonces

$$|a_n - L| \;=\; \left|\frac{3n^2+2n-1}{n^2+2} - 3\right| = \left|\frac{3n^2+2n-1-3n^2-6}{n^2+2}\right| = \left|\frac{2n-7}{n^2+2}\right| < \left|\frac{2n}{n^2+2}\right| < \left|\frac{2n}{n^2}\right| = \frac{2}{n}$$

Imponiendo la condición vemos que

$$\frac{2}{n} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, por el principio de Arquímedes existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2}{\varepsilon} < N \Longleftrightarrow \frac{2}{N} < \varepsilon$$

Entonces, si $n > N$ obtenemos que

$$|a_n - L| = \left|\frac{2n-7}{n^2+2}\right| < \frac{2}{n} < \frac{2}{N} < \varepsilon\,,$$

como queríamos probar.

Puntaje Pregunta 4.

- 2 puntos por encontrar una cota superior para $|a_n - L|$.
- 2 puntos por utilizar el principio de Arquímedes.
- 2 puntos por concluir correctamente la demostración.