Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
Pauta Interrogación 2

1. Suponga que la matriz A ha sido reducida a una forma escalonada como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & 8 & -10 \\ 3 & 2 & 5 & -1 \\ -9 & 5 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 7 & -16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

(a) Determine una factorización LU de A. (4 pts)

(b) Calcule el determinante de A. (2 pts)

Solución

(a) Lo primero es notar que la última matriz que se obtiene es una forma escalonada de A, por lo que definimos

$$U = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, vemos que cada operación elemental sobre la matriz A es de reemplazo (sumar un múltiplo de una fila a otra) de una fila superior hacia una inferior. Por esto, es que la matriz L puede obtenerse rellenando las entradas bajo la diagonal de 1's por el número opuesto de signo del multiplicador de cada operación. Es decir:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $|A| = |LU| = |L||U| = 1 \cdot (3) \cdot (2) \cdot (1) \cdot (-4) = -24$.

Puntaje

- 1 punto por definir U correctamente.
- 3 puntos por definir L correctamente. Asignar puntaje incluso si se equivoca en algunas entradas, pero restar 1 punto por cada entrada de L mál calculada.
- 1 punto por establecer una manera de encontrar $|A|$.
- 1 puntos por determinar $|A|$ correctamente.

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 2\alpha & \alpha+5 & 4 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{bmatrix}.$$

(a) Aplicando el desarrollo por cofactores (sin usar operaciones elementales), calcule el determinante de A.

(b) Determine todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A es invertible.

Solución

(a) Observe que

$$|A| = \alpha \begin{vmatrix} \alpha+5 & 4 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2\alpha & 4 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\alpha & \alpha+5 \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} = \alpha^3 - \alpha$$

(b) La matriz A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$, por lo tanto, del inciso anterior tenemos que A es invertible si y sólo si $\alpha^3 - \alpha = \alpha\left(\alpha^2 - 1\right) \neq 0$ y esto ocurre si y sólo si

$$\alpha \neq 0, \alpha \neq 1 \text{ y } \alpha \neq -1$$

Puntaje

- 1 punto por aplicar correctamente el desarrollo en cofactores.
- 2 puntos por determinar correctamente el determinante.
- 1.5 puntos por argumentar que la matriz A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.
- 0.5 puntos por encontrar cada valor que no debe tomar α (1.5 puntos en total)

3. Utilice el método de Cramer para encontrar únicamente la segunda columna de la A^{-1} donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

sin encontrar la matriz inversa completa.

Solución Sea $\mathbf{x}$ = la segunda columna de A^{-1}, es decir, $\mathbf{x} = A^{-1}e_2$. Esto implica que $A\mathbf{x} = e_2$. Para usar la regla de Cramer, primero calculamos $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 7 & 0 \\ 13 & 8 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = -2(-3) = 6.$$

Ahora calculamos cada entrada de la columna $\mathbf{x}$:

$$x_1 = \frac{|A_1(e_2)|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$$

$$x_2 = \frac{|A_2(e_2)|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-22}{6} = \frac{-11}{3}.$$

$$x_3 = \frac{|A_3(e_2)|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{-1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

Por lo tanto, la segunda columna de A^{-1} es $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ -11/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$.

Puntaje

- 1 punto por establecer una forma de encontrar la columna buscada. Puede ser mediante la ecuación $Ax = e_2$ o directamente diciendo que la columna buscada corresponde a $\dfrac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \\ C_{23} \end{bmatrix}$, donde C_{2i} corresponde al cofactor correspondiente.
- 1 punto por calcular correctamente $|A|$.
- 1 punto por calcular correctamente cada entrada x_i, independiente que se pudo haber equivocado en el ítem anterior (3 puntos en total).
- 1 punto por escribir la columna $\mathbf{x}$ completa.

4. Sea $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Considere el conjunto S de todas las matrices reales A de 2×2 tales que $A = DM$ donde D es cualquier matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, es decir,

$$S = \left\{ A \in M_{2\times 2} \,\middle|\, \text{Existe matriz diagonal } D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \text{ tal que } A = DM \right\}.$$

Determine si S es o no un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

Solución 1: Primero notamos que la matriz nula pertenece a S ya que si $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ entonces $DM = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Además, S es cerrado para la operación de suma ya que si A y B son dos matrices de S entonces existen D_1 y D_2 matrices tales que $A = D_1M$ y $B = D_2M$, lo que implica

$$A + B = D_1M + D_2M = (D_1 + D_2)M = D_3M$$

donde $D_3 = D_1 + D_2$ es nuevamente una matriz diagonal. Por último, S además es cerrado para operación de producto escalar. En efecto, si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $A \in S$, se tiene

$$\alpha A = \alpha(DM) = (\alpha D)M = \hat{D}M$$

con $\hat{D} = \alpha D$ una matriz diagonal.

Por estos tres puntos, concluimos que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Solución 2 Una solución alternativa consiste en demostrar que S es un conjunto generado. Para esto, basta notar que una matriz A es un elemento del conjunto S si y sólo si existe una matriz de la forma $D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ tal que

$$A = DM = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 3\beta & 4\beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Esto implica que $S = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\}$, y por lo tanto es un subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}$

Puntaje Solución 1

- 2 puntos por establecer las tres condiciones para demostrar que S es un subespacio.
- 1 punto por verificar cada condición (3 en total).
- 1 punto por concluir.

Puntaje Solución 2

- 2 puntos por explicar que los conjuntos generados son subespacios.
- 4 puntos por determinar correctamente generadores del conjunto S. Restar 1 punto por cada error aritmético.

5. Considere las matrices equivalentes por filas

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ -3 & 8 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre una base de $\operatorname{Nul} A$ e indique la dimensión.

(b) Encuentre una base de $\operatorname{Col} A$ e indique la dimensión.

(c) Determine una base de $\operatorname{Fil} A$ e indique la dimensión.

Solución

(a) Notamos que $\operatorname{Nul}(A) = \operatorname{Nul}(B)$. Un vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ en este espacio debe cumplir $x_1 + 6x_3 + 5x_4 = 0$ y $2x^2 + 5x_3 + 3x_4 = 0$ por lo que se puede escribir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6x_3 - 5x_4 \\ -\frac{5}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De esta forma una base de $\operatorname{Nul}(A)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $\dim \operatorname{Nul}(A)$=2.

(b) Una base de $\operatorname{Col}(B)$ son las dos primeras columnas de B por lo que las dos primeras columnas de A generan a las demás columnas. Por lo tanto, una base de $\operatorname{Col}(A)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$ y $\dim \operatorname{Col}(A) = 2$.

(c) Por otro lado, $\operatorname{Fil}(A) = \operatorname{Fil}(B)$ por lo que una base de $\operatorname{Fil}(A)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ y $\dim \operatorname{Fil}(A) = 2$.

Puntaje

- 1 punto por encontrar correctamente una base del espacio pedido. (3 en total)
- 1 punto por determinar correctamente la dimensión del espacio, aunque se haya equivocado en el ítem anterior. (3 en total)

6. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre la imagen del polinomio $p(x) = x^2 + x - 3$ por la transformación T. (2 pts)

(b) Encuentre una base para $\mathrm{Nul}(T)$ e indique la dimensión de dicho núcleo. (4 pts)

Solución

(a)

$$T(p) = T(x^2 + x - 3) = \begin{bmatrix} 0^2 + 0 - 3 \\ 1^2 + 1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio de $\mathbb{P}_2$. Se tiene que

$$p \in \mathrm{Nul}(A) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c \\ a + b + c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} c = 0 \\ a = -b \end{array} \right. \Leftrightarrow p(x) = a(x^2 - x)$$

Por lo tanto, una base de $\mathrm{Nul}(A)$ es $\{x^2 - x\}$ y tiene dimensión 1.

Puntaje

- 2 puntos por determinar correctamente la imagen del polinomio. Restar un punto por cada error aritmético.
- 1 punto por plantear correctamente cómo se calcula el núcleo de T.
- 2 puntos por encontrar correctamente base de núcleo de T. Cualquier polinomio ponderado de $x^2 - x$ es correcto.
- 1 punto por determinar dimensión de núcleo de T, aunque la respuesta del ítem anterior no esté correcta.

7. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

   (a) Si existe un conjunto linealmente independiente $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ en un espacio vectorial V, entonces $\dim V \leq p$.

   (b) Sea A una matriz de 3×4. El rango de A es 3 si y sólo si $\dim \operatorname{Nul}\left(A^T\right) = 0$.

Puntaje

(a) Falso. El conjunto $\{e_1, e_2\}$ es linealmente independiente en $\mathbb{R}^3$ pero $\dim \mathbb{R}^3 = 3 > 2$.

(b) Verdadero. La matriz A^T es de 4×3 por lo que según el Teorema del Rango se cumple que

$$\dim \operatorname{Nul}(A^T) + \operatorname{rango}(A^T) = 3.$$

Como $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A^T)$ se concluye que dicho rango es 3 si y sólo si la dimensión del núcleo de A^T es nula.

Puntaje

- 1 punto por determinar correctamente el valor de verdad de la proposición justificando su respuesta y la justificación está parcialmente correcta, aunque no sea completamente concluyente. Asignar 0 puntos si no hay justificación. (2 puntos en total)
- 2 punto por justificar correctamente la respuesta de verdadero o falso. (4 en total)