Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2014

MAT1620 ⋆ Cálculo 2

Interrogación N° 2

Preguntas 1 a la 8. Para obtener todo el puntaje debe tener un desarrollo impecable. Si comete un error de arrastre optará a lo mucho nota 5,0.

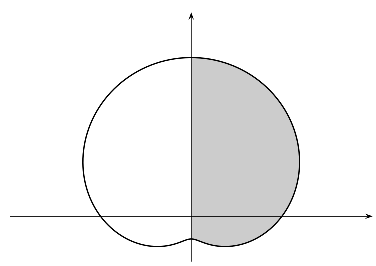
Preguntas 9 a la 12. Se evaluará la estrategia que se utiliza para solucionar el problema. Si la estrategia es la correcta entonces la nota comienza en 5,0. Los errores de cálculo que no alteren el análisis del problema no bajarán mucho la nota en caso de no ser reiterativos.

1. Determine la longitud de la curva paramétrica $\vec{r}(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t))$, para $t \in [0, \infty)$

   Solución. La longitud está dada por

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\infty \sqrt{(-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t))^2 + (-e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t))^2}\, dt \qquad (\textbf{2 ptos}) \\ &= \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-t}\, dt \qquad (\textbf{2 ptos}) \\ &= \sqrt{2} \qquad (\textbf{2 ptos}) \end{aligned}$$

2. Determine el área de la región sombreada



$\rho(\theta) = 4 + 3\sin(\theta)$

   Solución. La curva que delimita la región polar está definida para $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. De este modo el área está dada por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (4 + 3\sin(\theta))^2\, d\theta \qquad (\textbf{2 ptos}) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (16 + 24\sin(\theta) + 9\sin^2(\theta))\, d\theta \qquad (\textbf{2 ptos}) \\ &= \frac{41}{4}\pi \qquad (\textbf{2 ptos}) \end{aligned}$$

3. Determine la ecuación cartesiana de la recta tangente a la curva $\vec{r}(t) = (6\sin(t), t^2 + t)$ en el punto $(0, 0)$.

   Solución. El punto $(0, 0)$ se obtiene para $t = 0$ (**2 ptos**) y la pendiente de la recta está dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t + 1}{6\cos(t)} \qquad (\textbf{2 ptos})$$

   Luego la pendiente de la recta es $m = 1/6$ y por tanto la recta tiene ecuación

$$6y - x = 0 \qquad (\textbf{2 ptos})$$

4. Demuestre que la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{2+e^x}\,dx$ converge.

Solución. Para $x \in [0,\infty)$ se cumple que $0 \leq \arctan(x) \leq \pi/2$ (**2 ptos**). Luego, por el criterio de comparación se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{2+e^x}\,dx &\leq \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{dx}{2+e^x} \qquad (\mathbf{2\ ptos})\\ &\leq \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1 \qquad (\mathbf{2\ ptos})\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral converge.

5. Demuestre que la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$ diverge.

Solución.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}}\,dx &\geq \int_0^\infty \frac{x+1}{x^2+1}\,dx \qquad (\mathbf{2\ ptos})\\ &\geq \int_0^\infty \frac{dx}{x+1} \qquad (\mathbf{2\ ptos})\\ &= \infty \qquad (\mathbf{2\ ptos})\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral diverge.

6. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es divergente.

Solución. Por definición

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \log\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N (\log(n+1)-\log(n)) \qquad (\mathbf{2\ ptos})\\ &= \lim_{N\to\infty}\log(N+1) \qquad (\mathbf{2\ ptos})\\ &= \infty \qquad (\mathbf{2\ ptos})\end{aligned}$$

7. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^4+1}$ converge.

Solución.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{n^4+1} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \qquad (\mathbf{2\ ptos})$$

Pero la última serie converge por el criterio de la integral (**2 ptos**), ya que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2} \qquad (\mathbf{2\ ptos})$$

8. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$ converge.

Solución. Si $a_n = \dfrac{n+5}{\sqrt[3]{n^7+n^2}}$ y $b_n = \dfrac{1}{n^{4/3}}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \qquad (\textbf{2 ptos})$$

Por el criterio de comparación al límite se tiene que la serie de a_n converge si y sólo si la serie de b_n converge (**2 ptos**). Pero la serie de b_n converge por causa del criterio de la integral

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^{4/3}} = \frac{1}{4/3-1} \qquad (\textbf{2 ptos})$$

9. Determine el valor de C para que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(1+C)^{-n} = 2$.

Solución. A partir de la suma geométrica se tendrá

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty}(1+C)^{-n} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{1+C}\right)^n \\
&= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1-(\frac{1}{1+C})^{N+1}}{1-\frac{1}{1+C}} - 1 - \frac{1}{C+1}\right), \qquad |C+1|>1 \qquad (\textbf{2 ptos}) \\
&= \frac{1}{C(C+1)} = 2 \qquad (\textbf{2 ptos})
\end{aligned}$$

Entonces $C = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ pero $C = -\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ no satisface $|C+1|>1$, luego el único valor de C que hace convergente la serie es $C = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (**2 ptos**)

10. Calcular $\displaystyle\int_0^R \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right) dx$ y determine $C\in\mathbb{R}$ para que $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right) dx$ converge.

Solución. Para todo $R>0$ se tiene

$$\int_0^R \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right) dx = \log(R/2+\sqrt{(R/2)^2+1}) - C\log(R+2) \qquad (\textbf{2 ptos})$$

luego

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right) dx &= \lim_{R\to\infty}\Big(\log(R/2+\sqrt{(R/2)^2+1}) - C\log(R+2)\Big) \\
&= \lim_{R\to\infty}\log\left(\frac{R/2+\sqrt{(R/2)^2+1}}{(R+2)^C}\right) \qquad (\textbf{2 ptos}) \\
&= \log\left(\lim_{R\to\infty}\frac{R/2+\sqrt{(R/2)^2+1}}{(R+2)^C}\right)
\end{aligned}$$

Pero

$$\lim_{R\to\infty}\frac{R/2+\sqrt{(R/2)^2+1}}{(R+2)^C} = \begin{cases}\infty & \text{si } C<1 \\ 1 & \text{si } C=1 \\ 0 & \text{si } C>1\end{cases} \qquad (\textbf{1 ptos})$$

Por lo tanto, la integral converge si y sólo si $C=1$. (**1 ptos**)

11. Determine el valor del siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$$

Solución. Para todo $k \in \mathcal{N}$ se cumple que

$$\frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \textbf{(2 ptos)}$$

Luego

$$0 \leq \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right) \leq \frac{n+1}{n^2} \qquad \textbf{(2 ptos)}$$

Concluyendo, por el teorema de Sandwich, que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right) = 0 \qquad \textbf{(2 ptos)}$$

12. Determine el área de la superficie que resulta de rotar la curva polar $\rho(\theta) = 1+\cos(\theta)$ en torno al eje polar.

Sugerencia: Recuerde que la fórmula para área de superficie en paramétricas es

$$A = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

Deduzca una fórmula para polares.

Solución. Toda curva polar $\rho = \rho(\theta)$ se puede escribir en forma paramétrica $\vec{r}(t) = (\rho(\theta)\cos(\theta), \rho(\theta)\sin(\theta))$, luego el área de la superficie se calcula mediante la siguiente integral

$$A = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho(\theta)\sin(\theta)\sqrt{(\rho'(\theta)))^2+(\rho(\theta))^2}\,d\theta \qquad \textbf{(2 ptos)}$$

Puesto que $\rho(\theta) = 1+\cos(\theta)$ es un cardiode, entonces el área de la superficie está dada por

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{2}\pi\int_0^\pi (1+\cos(\theta))\sin(\theta)\sqrt{1+\cos(\theta)}\,d\theta \qquad \textbf{(2 ptos)} \\ &= 2\sqrt{2}\pi\int_0^2 u^{3/2}\,du \\ &= 32\pi \qquad \textbf{(2 ptos)} \end{aligned}$$

Tiempo: 180 minutos
Sin consultas