CLASE 4 : VALOR ABSOLUTA

- **DEF**: El valor absoluto de $x \in \mathbb{R}$ se define como

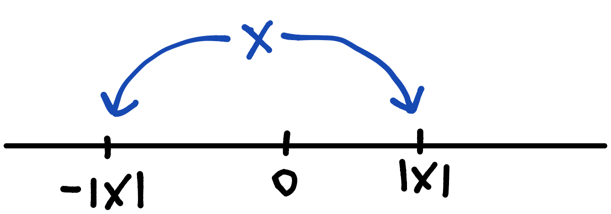
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- **Ej**: $|3| \overset{3\geq 0}{=} 3$

$$|-2| \overset{-2<0}{=} -(-2) = 2$$

- **Obs**:

$$x = \begin{cases} |x| & \text{si } x \geq 0 \\ -|x| & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$$-|x| \leq x \leq |x|$$

- **PROPIEDADES**

i) $|x|\geq 0$. Además, $|x|=0$ si y solo si $x=0$

ii) $|-x|=|x|$

iii) $|xy|=|x||y|$

iv) $|x+y|\leq |x|+|y|$ (Desigualdad triangular)
Muy pero muy importante

DEM:

i) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } x\geq 0 \Rightarrow |x|=x\geq 0 \\ \text{Si } x<0 \Rightarrow |x|=-x>0 \end{array}\right\} |x|\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Si $x=0 \Rightarrow |0| \overset{0\geq 0}{=} 0$.

Si $|x|=0$, entonces, como $-|x|\leq x\leq |x|$, tenemos que $-0\leq x\leq 0$. Luego, $x=0$.

ii) Queremos demostrar que $|-x|=|x|$

Si $x>0 \Rightarrow -x<0 \Rightarrow |-x|=-(-x)=x=|x|$

Si $x\leq 0 \Rightarrow -x\geq 0 \Rightarrow |-x|=-x=|x|$

iii) Queremos demostrar que $|xy| = |x||y|$

- Si $x \geq 0, y \geq 0$:

$$|xy| \overset{xy \geq 0}{=} xy = |x||y|$$

- Si $x < 0, y \geq 0$:

$$|xy| \overset{xy \leq 0}{=} -(xy) = (-x)y \overset{x<0}{=} |x||y|$$

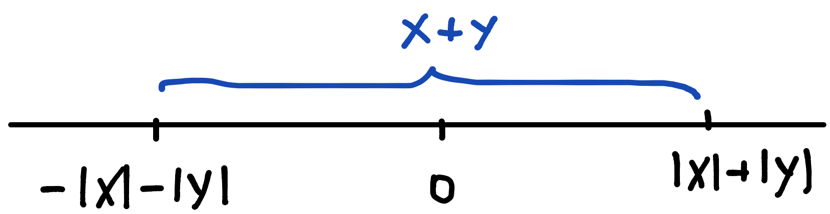
- Si $x \geq 0, y < 0$: lo mismo
- Si $x < 0, y < 0$:

$$|xy| \overset{xy > 0}{=} xy = (-x)(-y) = |x||y|$$

iv) Queremos demostrar que $|x+y| \leq |x| + |y|$

$$\left.\begin{array}{l} -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}\right\} (*)$$

Sumando: $-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$



Ahora, las desigualdades (*), se pueden reescribir como

$$-|x| \le -x \le |x|$$
$$-|y| \le -y \le |y|$$

Sumando:

$$-|x|-|y| \le -(x+y) \le |x|+|y|$$

Como $|x+y| = x+y$ o $|x+y| = -(x+y)$,

Concluimos que

$$-|x|-|y| \le |x+y| \le |x|+|y|$$

De hecho, $0 \le |x+y| \le |x|+|y|$

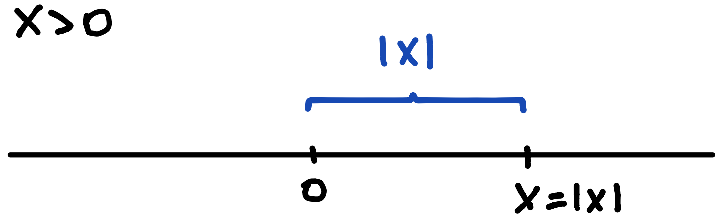
$\square$

• **Obs**:

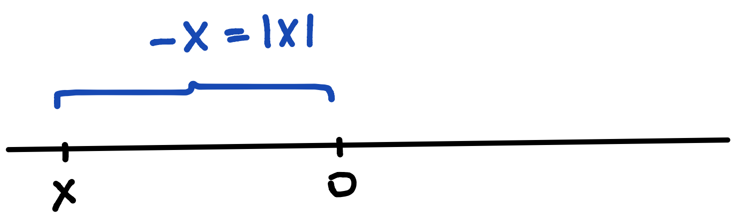
$$\underbrace{-|x| \le x}_{-x \,\le\, |x|} \overbrace{\le |x|}^{-|x| \,\le\, -x}$$

$$-|x| \le -x \le |x|$$

• **Obs**: • $x>0$

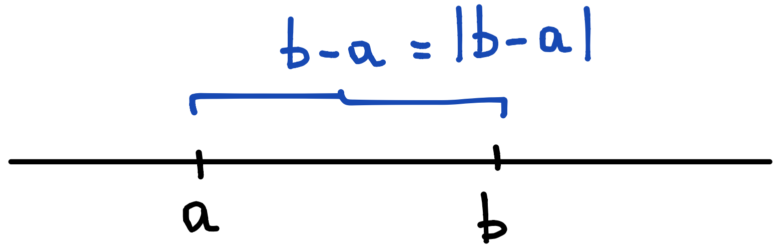


• $x<0$

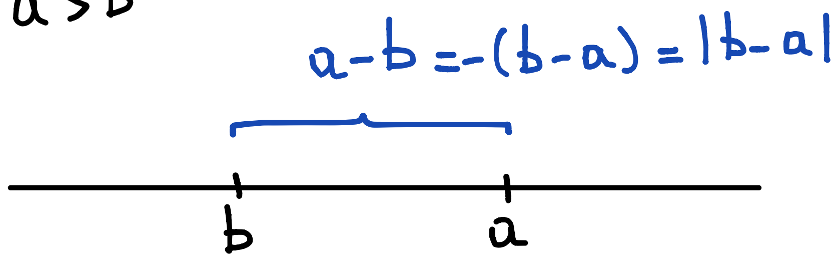


Luego, $|x| =$ distancia entre 0 y x

• $a<b$



• $a > b$



Luego, $|b-a|$ = distancia entre a y b

Más aún,

$$\text{distancia entre } b \text{ y } a = |a-b| = |-(a-b)| = |b-a| = \text{distancia entre } a \text{ y } b$$

• <u>DEF</u>: $d(a,b) = |b-a|$ es la distancia entre a y b.

- **PROPIEDADES:**

i) $d(a,b) \geq 0$. Además,

$d(a,b) = 0$ si y solo si $a = b$

ii) $d(a,b) = d(b,a)$

iii) $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

(Desigualdad triangular)

DEM:

i) Sigue de la primera propiedad de valor absoluto.

ii) Ver observación anterior.

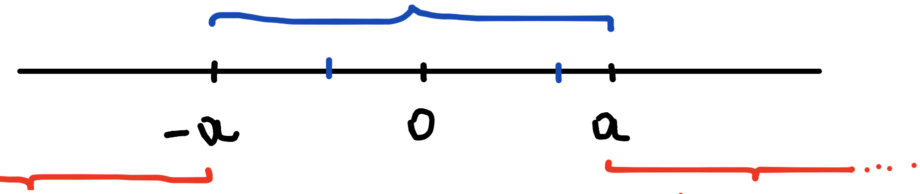
iii)
$$
\begin{aligned}
d(a,b) &= |b-a| \\
&= |(b-c)+(c-a)| \\
&\leq |b-c| + |c-a| \\
&= d(b,c) + d(c,a)
\end{aligned}
$$

$\square$

• **Obs**: $a>0$

$(-a \leq x \leq a)$

$x : d(x,0) \leq a \Rightarrow |x| \leq a$



$d(x,0) \geq a$

$\Rightarrow |x| \geq a$

$(x \leq -a)$

$d(x,0) \geq a$

$\Rightarrow |x| \geq a$

$(x \geq a)$

• **Lema**: Sea $a>0$. Luego,

i) $|x| < a \iff -a < x < a$

ii) $|x| > a \iff x < -a$ o $x > a$

Muy pero muy importante

DEM:

Ejercicio $\square$

• Ej: Resolver $|2x+1| < 6$

$$\underbrace{|2x+1|}_{y} < 6 \iff -6 < 2x+1 < 6$$

$|y| < 6 \iff -6 < y < 6$

$-6 < 2x+1$ y $2x+1 < 6$

$$\iff -7 < 2x < 5$$

$$\iff -\frac{7}{2} < x < \frac{5}{2}$$

Conjunto solución: $\left(-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

• Ej: $|x-5| \geq 9$

$$\iff x-5 \leq -9 \quad \text{o} \quad x-5 \geq 9$$

$$\iff x \leq -4 \quad \text{o} \quad x \geq 14$$

$$\iff x \in (-\infty, -4] \cup [14, \infty)$$

Conjunto solución: $(-\infty, -4] \cup [14, \infty)$

• Ej: $|x^2-3x+1| < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x^2-3x+1 < 1$

$\Leftrightarrow -1 < x^2-3x+1 \quad y \quad x^2-3x+1 < 1$

$\Leftrightarrow 0 < x^2-3x+2 \quad y \quad x^2-3x < 0$

(A) (B)

Resolvemos (A):

$0 < x^2-3x+2 \Leftrightarrow 0 < (x-1)(x-2)$

		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-1)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Conjunto solución: $S_A = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

Resolvemos (B):

$x^2-3x < 0 \Leftrightarrow x(x-3) < 0$

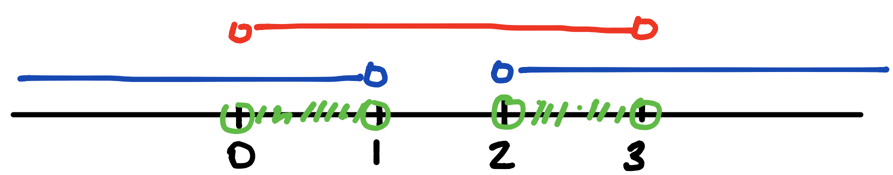
		0		3	
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$	0	$+$
$x(x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Conjunto solución : $S_B = (0,3)$

<u>Finalmente</u> :

Conjunto solución $= S_A \cap S_B$

$$= \left(\underline{(-\infty, 1) \cup (2, \infty)}\right) \cap (0, 3)$$

$=$ 

$$= (0,1) \cup (2,3)$$