Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2015

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Interrogación N° 1

1. Determine la longitud del arco de la curva $y = \operatorname{Arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$ con $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Solución: La longitud del arco de curva se calcula de acuerdo a la fórmula

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}dx.$$

En nuestro caso,

$$\begin{aligned}
y &= \operatorname{Arcsen} x + \sqrt{1-x^2}, \\
y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}, \\
(y')^2 &= \left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 = \frac{(1-x)^2}{1-x^2} = \frac{1-x}{1+x}, \\
1+(y')^2 &= 1 + \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1+x}, \\
\sqrt{1+(y')^2} &= \sqrt{\frac{2}{1+x}},
\end{aligned}$$

de donde

$$L = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{2}{1+x}}\, dx = \sqrt{2}\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1}{1+x}}\, dx.$$

La integral puede ser calculada, por ejemplo, con la sustitución $u = \sqrt{\dfrac{1}{1+x}}$, de donde

$$du = -\frac{dx}{2(x+1)^{3/2}},$$

por lo que $dx = -2(x+1)^{3/2}\, du = \dfrac{-2\, du}{u^3}$ y

$$\begin{aligned}
L &= \sqrt{2}\int_1^{\sqrt{2/3}} -2u \cdot \frac{du}{u^3} = -2\sqrt{2}\int_1^{\sqrt{2/3}} \frac{du}{u^2} = 2\sqrt{2}\int_{\sqrt{2/3}}^1 \frac{du}{u^2} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{-1}{u}\Bigg|_{\sqrt{2/3}}^{1} \\
&= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{u}\Bigg|_1^{\sqrt{2/3}} = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2/3}} - 1\right) = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = 2(\sqrt{3}-\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Puntaje:

- Por expresar correctamente la longitud del arco como una integral, nota 3,0.
- Por lograr lo anterior y además transformar la integral en una o más integrales inmediatas de calcular, nota 5,0.

- Por lograr lo anterior y además llegar al valor correcto de la longitud de arco, nota 7,0.

2. Calcule los momentos M_X y M_Y y las coordenadas del centro de masa de una lámina de densidad uniforme, formada por la unión de un cuarto de círculo y un triángulo rectángulo isósceles, como se indica a continuación:

   Solución: Usando que la región R esta acotada por las curvas $y = \sqrt{1-x^2}$ e $y = x-1$, $x \in [0,1]$, tenemos que las coordenadas del centroide de R (con densidad constante) son

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_0^1 x(\sqrt{1-x^2} - (x-1))dx}{\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - (x-1))dx} = \frac{2}{\pi + 2}$$

   y

$$\overline{y} = \frac{\displaystyle\int_0^1 (1/2)(1-x^2 - (x-1)^2)dx}{\displaystyle\int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - (x-1))dx} = \frac{2}{3(\pi + 2)}.$$

   Puntaje:

   - Por expresar correctamente $\overline{x}$ e $\overline{y}$ como una integral, nota 3,0.
   - Por lograr lo anterior y además calcular el valor correcto de $\overline{x}$ o $\overline{y}$, nota 5,0.
   - Por lograr lo anterior y además llegar al valor correcto $\overline{x}$ y $\overline{y}$, nota 7,0.

3. Un depósito lleno de agua tiene la forma del paraboloide de revolución generado al rotar el trozo de parábola $y = \dfrac{x^2}{4}$, $0 \leq x \leq 4$, en torno al eje Y.

   Determine el trabajo necesario para extraer por bombeo toda el agua del tanque. Suponer que la densidad del agua es $\rho = 1000\, kg/m^3$.

   Solución: Hay agua desde una profundidad de 0 m hasta una profundidad de 4 m. Dividimos el intervalo 0, 4 en n sub-intervalos con extremos $y_0, y_1, ..., y_n$ y elegimos y_i^* en el i-ésimo subintervalo. De este modo el agua se divide en n capas. La i-ésima capa es aproximadamente un cilindro de radio $\sqrt{4y_i^*}$ y altura Δy.

   El volumen aproximado de la i-ésima capa es $V_i = 4\pi y_i^* \Delta y$, por lo que la masa de esta capa es (aprox.) $m_i = densidad \times V_i = 4000\pi y_i^* \Delta y$ (la densidad del agua es 1000). La fuerza necesaria para subir esta capa es $F_i = gm_i = 4000\pi g y_i^* \Delta y$. Cada partícula de la capa debe viajar una distancia de aproximadamente y_i^*. El trabajo W_i realizado para subir esta capa hasta lo alto del depósito es $W_i = F_i y_i^* = 4000\pi g (y_i^*)^2 \Delta y$. Por lo tanto, el trabajo total en el vaciado del tanque es dado por la integral

$$W = \int_0^4 4000\pi g y^2 dy,$$

cuyo valor es $256 \cdot 10^3 \pi g/3$.

Puntaje:

- Por expresar correctamente como una suma de riemann el trabajo realizado, nota 3,0.
- Por lograr lo anterior y además expresar el trabajo realizado como una integral, nota 5,0.
- Por lograr lo anterior y además llegar al valor correcto del trabajo, nota 7,0.

4. Una cadena de 10 metros de largo pesa 25 Kg y cuelga del techo de un edificio. Sabiendo que la densidad de la cadena es constante, calcule el trabajo que se realiza al subir el extremo inferior de la cadena al techo de modo que llegue al mismo nivel que el extremo superior. Asignemos coordenadas a las distintas partes de la cadena, comenzando por $x = 0$ al extremo inferior de esta y terminando por $x = 10$ al extremo superior.

   Dividamos la mitad inferior de la cadena en n trozos, cada uno correspondiente al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ con
$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 5.$$

   En el i-ésimo intervalo, elegimos un punto α_i y suponemos que la masa del trozo correspondiente (en total, $2,5\Delta x_i$ Kg) está concentrada en la coordenada α_i.

   Como el punto de coordenada α_i debe subir a la coordenada $10 - \alpha_i$, el i-ésimo trozo de cadena debe subir en total $(10 - \alpha_i) - \alpha_i = 10 - 2\alpha_i$ metros, por lo que el trabajo necesario para realizar este movimiento es
$$\approx 9,8 \cdot 2,5(10 - 2\alpha_i)\ \Delta x_i = 24,5(10 - 2\alpha_i)\ \Delta x_i \,\mathrm{J},$$
   por lo que el trabajo total realizado es
$$W \approx 24,5 \sum_{i=1}^{n} (10 - 2\alpha_i)\ \Delta x_i \,\mathrm{J}.$$

   Al llevar esto límite, descubrimos que
$$\begin{aligned} W &= 24,5 \int_0^5 (10 - 2x)\ dx \,\mathrm{J} = 245 \int_0^5\ dx - 49 \int_0^5 x\ dx \,\mathrm{J} \\ &= \left(245x - \frac{49x^2}{2}\right)\Bigg|_0^5 \ \mathrm{J} = 1225 - \frac{49 \cdot 25}{2}\,\mathrm{J} = 612.5\,\mathrm{J}. \end{aligned}$$

Puntaje:

- Por expresar correctamente como una suma de riemann el trabajo realizado, nota 3,0.
- Por lograr lo anterior y además expresar el trabajo realizado como una integral, nota 5,0.
- Por lograr lo anterior y además llegar al valor correcto del trabajo, nota 7,0.

5. *a*) Determine un valor constante $C \in \mathbb{R}$ para la cual la integral
$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right) dx$$
   converge.

b) Evalúe la integral para este valor de C.

Solución. Es claro que

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{C}{3x+1}\right)dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{C}{3x+1}\right)dx$$
$$= \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(R^2+1)-\frac{C}{3}\ln(3R+1)\right)$$

a) Si $C=3$ entonces

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(R^2+1)-\ln(3R+1)\right)=\ln(1/3) \quad \textbf{(2 pto)}$$

luego la integral converge

Si $C\neq 3$ entonces

$$\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(R^2+1)-\frac{C}{3}\ln(3R+1)\right)=\ln(1/3)-\lim_{R\to\infty}\left(\frac{C}{3}-1\right)\ln(3R+1)=\pm\infty$$

luego la integral no converge. **(2 pto)**

b) Por la parte (a) se concluye que, para $C=3$, la integral es:

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{3}{3x+1}\right)dx=\ln(1/3) \quad \textbf{(2 pto)}$$

6. Se sabe que la fórmula para calcular el área de la superficie de revolución generada al rotar en torno al eje X el arco de curva dado por las ecuaciones paramétricas $x=x(t), y=y(t)$ con $a\leq t\leq b$ es

$$A=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Si $\rho=\rho(\theta)$, con $\theta\in[\theta_1,\theta_2]$, es una curva polar continua con derivada continua, demuestre que el área de la superficie generada al rotar el arco de curva torno al eje polar está dada por

$$A=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho\operatorname{sen}\theta\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\theta.$$

Solución.

$$A=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

Luego las coordenadas paramétricas de la curva estan dadas por

$$x(\theta)=\rho(\theta)cos\theta \qquad y(\theta)=\rho(\theta)sen\theta \quad \theta_1\leq\theta\leq\theta_2 \quad \textbf{(2 pto)}$$

Así reemplazando

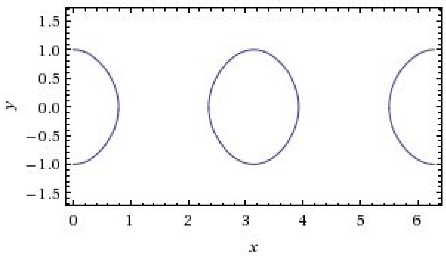
$$A=2\pi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho(\theta)sen\theta\sqrt{(\rho'(\theta)cos\theta-\rho(\theta)sen\theta)^2+(\rho'(\theta)sen\theta+\rho(\theta)cos\theta)^2}d\theta \quad \textbf{(2 pto)}$$

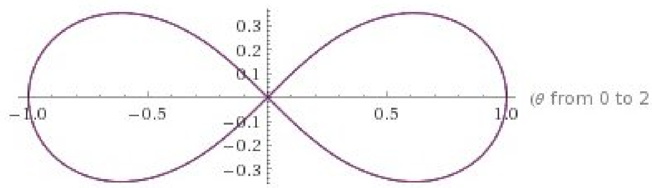
$$A = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta) sen\theta \sqrt{\rho'^2(\theta)(cos^2\theta + sen^2\theta) + \rho^2(\theta)(sen^2\theta + cos^2\theta)} d\theta$$

$$A = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta) sen\theta \sqrt{\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)} d\theta \quad \textbf{(2 pto)}$$

7. La *lemniscata* es la curva dada en polares por la ecuación $\rho^2 = \cos(2\theta)$, con dominio $\subseteq [0.2\pi]$. Grafíquela, justificando su análisis, y use la fórmula deducida en la pregunta anterior para determinar el área de la superficie generada al hacer girar la lemniscata en torno al eje polar.

   Solución. Grafico





   (2 pto)

   Trabajaremos con la curva $r = \sqrt{cos(2\theta)}$ ya que este representa un función positiva, intersecta al eje polar cuando $cos(2\theta) = 0$

   $cos(2\theta) = 0 \rightarrow 2\theta = 0, \dfrac{\pi}{2} \rightarrow \theta = 0, \dfrac{\pi}{4}$ **(1 pto)**, luego el área pedida esta determinada por

$$2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{cos(2\theta)} sen(\theta) \sqrt{\left(\frac{-sen(2\theta)}{\sqrt{cos(2\theta)}}\right)^2 + cos(2\theta)} \quad d\theta \quad \textbf{(1 pto)}$$

$$4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{cos(2\theta)} sen(\theta) \sqrt{\frac{sen^2(2\theta) + cos^2(2\theta)}{cos(2\theta)}} \quad d\theta = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen(\theta) \quad d\theta \textbf{(1 pto)}$$

$$4\pi \left(-cos(\theta)\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = 4\pi \left(-cos(\frac{\pi}{4}) + cos(0)\right) = 4\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \textbf{(1 pto)}$$

8. Usando el **Criterio de Comparación**, determinar todos los $p \in \mathbb{R}$ para los cuales la integral

$$\int_0^\infty u^{2p-1} e^{-u^2} \, du$$

   converge.

   Solución. Separando la integral tendremos:

$$\int_0^\infty u^{2p-1} e^{-u^2} \, du = \int_0^1 u^{2p-1} e^{-u^2} \, du + \int_1^\infty u^{2p-1} e^{-u^2} \, du \textbf{(1 pto)}$$

- Haciendo el cambio de variable $u = 1/x$ tendremos

$$\int_0^1 u^{2p-1} e^{-u^2}\, du = \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2p+1}}\, dx \quad \textbf{(1 pto)}$$

  Además, $e^{-1} \leq e^{-\frac{1}{x^2}} \leq 1$ para $x \in [1, \infty)$, luego

$$e^{-1} \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2p+1}} \leq \int_1^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2p+1}}\, dx \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2p+1}} \quad \textbf{(1 pto)}$$

  Por lo tanto la integral $\int_0^1 u^{2p-1} e^{-u^2}\, du$ converge si y sólo si $p > 0$ **(1 pto)**.

- Dada la parte anterior podemos suponer $p > 0$. Además, sabemos que $u \leq e^u$, luego

$$\int_1^\infty u^{2p-1} e^{-u^2}\, du \leq \int_1^\infty e^{(2p-1)u - u^2}\, du \leq \int_1^\infty e^{-\left(u - \frac{2p-1}{2}\right)^2} du < \infty \quad \textbf{(1 pto)}$$

Por lo tanto, la integral completa converge si y sólo si $p > 0$ **(1 pto)**.

TIEMPO: 180 MINUTOS
SIN CONSULTAS
SIN CALCULADORA