INTERROGACIÓN 2
MAT1620

PUNTAJE Y SOLUCIÓN PREGUNTA DE DESARROLLO

1 PREGUNTA 11.

Considere la curva C obtenida de intersecar el plano $x + y + z = 1$ con el cilindro
$$x^2 + y^2 = 1.$$
Determine los puntos sobre la curva C que se encuentran mas cercanos y mas lejanos al origen.
Solución:
Buscaremos los valores máximos y mínimos de la función
$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$
el cuadrado de la función distancia, sujeta a las restricciones
$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \qquad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0.$$
Las respectivas ecuaciones de Lagrange son,
$$\nabla F = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2,$$
y agregando las dos resctricciones, se obtiene el sistema:
$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda x + \mu, \\ 2y &= 2\lambda y + \mu, \\ 2z &= \mu, \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0, \\ x + y + z - 1 &= 0. \end{aligned}$$
Resolviendo obtenemos
$$P_1 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \sqrt{2} \right), \quad P_2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \sqrt{2} \right).$$

$$P_3(1,00), \quad P_4(0,1,0).$$

Finalmente, debido a que la respectiva intersección es una región cerrada y acotada, basta con que evaluamos los candidatos a máximo y minimo encontrados para determinar los puntos pedidos. De esto se obtiene que los puntos P_3, P_4 son los mas cercanos al origen y que el punto P_2 es el mas lejano.

ASIGNACIÓN DE PUNTAJE, 5 puntos

- Asignar 1 punto por identificar de manera correcta la función a maximizar, junto con las respectivas restricciones.
- Asignar 0,5 puntos por plantear el respectivo sistemas con los dos multiplicadores de Lagrange.
- Asignar 1,5 puntos por resolver el sistema de manera correcta y encontrar los cuatro puntos que lo resuelven.
- Asignar 1 punto por determinar de manera correcta los puntos donde se alcanza el minimo.
- Asignar 1 punto por determinar el punto donde se obtiene el valor máximo.

2 **PREGUNTA 12:Los alumnos debian escoger una y solo una de las siguientes preguntas.**

a) Sea D la región limitada por

$$y - x = 1, \quad y - x = -1, \quad y + x = 1, \quad y + x = 2,$$

calcule

$$\int\int_D (x + y + 1) dA.$$

Solución:
Consideremos la transformación,

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (y - x, y + x).$$

En este caso el respectivo Jacobiano es,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}.$$

Con esto, la integral pedida, será

$$\int\int_D (x + y + 1) dA = \int\int_R \left(\frac{v - u}{2} + \frac{v + u}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} dudv,$$

donde la región R se obtiene del respectivo cambio de variables, a saber:

$$u \in [-1, 1], \qquad v \in [1, 2].$$

Por lo tanto

$$\int\int_R \left(\frac{v - u}{2} + \frac{v + u}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} dudv = \int_{-1}^{1}\int_{1}^{2} \left(\frac{v - u}{2} + \frac{v + u}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} dudv = \frac{5}{2}.$$

ASIGNACIÓN DE PUNTAJE, 5 puntos

- Asignar 1,5 puntos por la correcta elección del cambio de variables.
- Asignar 1 punto por el correcto calculo del Jacobiano.
- Asignar 1 punto por la correcta descripción de la nueva región que se obtiene despues del cambio de variables.
- Asignar 1,5 puntos por el correcto calculo de la integral pedida.

b) Sea D la región del primer cuadrante limitada por las curvas

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad y = x/2, \quad y = 3x.$$

Calcule

$$\int\int_D (x^2 + y^2)\, dA.$$

Solución:
Consideremos el cambio de variables,

$$xy = u, \qquad \frac{y}{x} = v,$$

según este cambio, la nueva región de integración será:

$$u = [1, 2], \qquad v = [1/2, 3].$$

El respectivo Jacobiano será

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2v},$$

con esto,

$$\int\int_D (x^2 + y^2)\, dA = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_{1/2}^3 u \left(\frac{1}{v^2} + 1 \right) \, dvdu = \frac{25}{8}.$$

ASIGNACIÓN DE PUNTAJE, 5 puntos

- Asignar 1,5 puntos por la correcta elección del cambio de variables.
- Asignar 1 punto por el correcto calculo del Jacobiano.
- Asignar 1 punto por la correcta descripción de la nueva región que se obtiene despues del cambio de variables.
- Asignar 1,5 puntos por el correcto calculo de la integral pedida.