Valor absoluto

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

13 de Marzo de 2023

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

La estructura métrica de $\mathbb{R}$

Además de la estructura algebraica y de orden de los números reales, necesitamos hacer mediciones. Necesitamos describir las distancias entre puntos. Estas son las propiedades métricas de los reales, por tomar un término del griego para medida (metron).
Como es habitual, la distancia entre un punto x y otro punto y es $x - y$ o $y - x$ dependiendo de cuál sea positivo. Así, la distancia entre 3 y -4 es 7. La distancia entre π y $\sqrt{10}$ es $\sqrt{10} - \pi$. Para describir esto en general requiere la función de valor absoluto que simplemente hace una elección entre positivo y negativo.

La estructura métrica de $\mathbb{R}$

Definición. (Valor absoluto)

Para cualquier número real x escribimos

$$|x| = x \quad \text{si} \quad x \geqslant 0$$

y

$$|x| = -x \quad \text{si} \quad x < 0\,.$$

Observación Otra forma de definir la función valor absoluto de un número real es $|x| = \sqrt{x^2}$. Con esta definición es sencillo ver que:

$$|x|^2 = [\sqrt{x^2}]^2 = x^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

La estructura métrica de $\mathbb{R}$

Dado que el valor absoluto se define directamente en términos de desigualdades (es decir, la elección $x \geqslant 0$ o $x < 0$), hay una serie de propiedades que se pueden demostrar directamente a partir de las propiedades de las desigualdades.

Teorema.

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades

1. $|x| \geqslant 0$.
2. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
3. $|xy| = |x||y|$.
4. $|x| \leqslant a \Longleftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$
5. $|x| \geqslant a \Longleftrightarrow x \leqslant -a$ ó $x \geqslant a$
6. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Demostración

1. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $x \geqslant 0$ o $x < 0$.
   En el primer caso se tiene $|x| = x \geqslant 0$ y en el segundo caso $|x| = -x > 0$.
   Por lo tanto $|x| \geqslant 0$.

6. Usando la igualdad $|x|^2 = x^2$ obtenemos que

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \,.$$

Por el inciso 2, se tiene que $xy \leqslant |xy| = |x||y|$ y usando los axiomas de orden vemos que

$$\begin{aligned} xy \leqslant |x||y| \quad &\Longrightarrow \quad 2xy \leqslant 2|x||y| \\ &\Longrightarrow \quad x^2 + 2xy + y^2 \leqslant x^2 + 2|x||y| + y^2 \end{aligned}$$

Se sigue que

$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \,.$$

La estructura métrica de $\mathbb{R}$

Por lo tanto $|x+y|^2 \leqslant (|x|+|y|)^2$. Usando el ejercicio 1 (más abajo) vemos que $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

EJERCICIO 1 Si $0 < a < b$ entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

La estructura métrica de $\mathbb{R}$

EJEMPLO 1 Demuestre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumplen

a. $|x| - |y| \leqslant |x - y|$

b. $|y| - |x| \leqslant |x - y|$.

Solución

a. Usando la desigualdad triangular, vemos que

$$|x| = |x - y + y| = |(x - y) + y| \leqslant |x - y| + |y| \,.$$

Hemos obtenido la desigualdad

$$|x| \leqslant |x - y| + |y|$$

Sumando $-|y|$ obtenemos

$$|x| - |y| \leqslant |x - y| \,.$$

b. Es similar para al inciso a.

La estructura métrica de $\mathbb{R}$

Usando la función valor absoluto podemos difinir la función distancia

Definición. (Distancia)

La distancia entre dos números reales x e y es

$$d(x,y) = |x-y| \,.$$

Casi nunca utilizamos la notación $d(x,y)$ en cálculo, prefiriendo escribir $|x-y|$ incluso cuando pensamos en ello como la distancia entre los dos puntos. Así, si una secuencia de puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ se acerca cada vez más a un punto c, tal vez deberíamos decir que $d(x_n, c)$ se hace cada vez más pequeño, enfatizando así de que las distancias se están reduciendo; lo más frecuente es escribir simplemente $|x_n - c|$ y esperar que se interprete como una distancia.

La estructura métrica de $\mathbb{R}$

Las principales propiedades de la función distancia son solo interpretaciones de la función valor absoluto. Expresados en el lenguaje de una función distancia, son geométricamente muy intuitivos:

1. $d(x, y) \geq 0$.
2. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$. (simetría)
4. $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$. (Desigualdad triangular)

La estructura métrica de $\mathbb{R}$

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Demostración

1. Por el inciso 1 del teorema, $d(x,y) = |x-y| \geq 0$.
2. $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0$
3. Se tiene que

$$d(y,x) = |y-x| = |-(x-y)| = \underbrace{|-1|}_{1}|x-y| = |x-y| = d(x,y).$$

4. Usando el inciso 6 del teorema, vemos que

$$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leqslant |x-z|+|z-y| = d(x,z)+d(z,y).$$

Observación $|x| = a$ con $a \geqslant 0$ si y solo si $x = a$ o $x = -a$. En efecto, se tiene que

$$|x| = a \Longleftrightarrow |x|^2 = a^2 \Longleftrightarrow x^2 = a^2 \Longleftrightarrow x = a \quad o \quad x = -a\,.$$

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación $|x - 1| = 3$ e interpretarla geométricamente.

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $|3x - 5| + 3 = 0$.

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $|x + 2| = |x - 1|$.

La estructura métrica de $\mathbb{R}$

EJEMPLO 5 Demuestre que la desigualdad $|x - a| < \varepsilon$ es equivalente con la desigualdad $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Interprete estás desigualdades en la recta real.

EJEMPLO 6 ¿Bajo que condiciones se cumple la igualdad $|x + y| = |x| + |y|$?