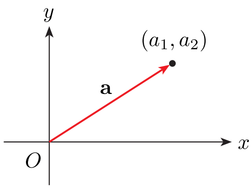
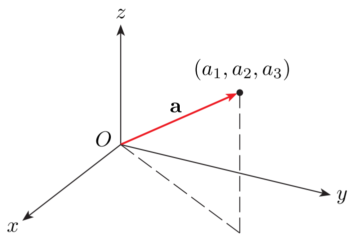
Geometría Vectorial (con coordenadas)

1 Vectores: Componentes y longitud

DEFINICIÓN (Vectores: Componentes)
Si se coloca el punto inicial de un vector $\mathbf{a}$ en el origen de un sistema coordenado rectangular, entonces el punto terminal de $\mathbf{a}$ tiene coordenadas de la forma (a_1, a_2) o (a_1, a_2, a_3), lo cual depende de si el sistema de coordenadas es de dos o tres dimensiones.

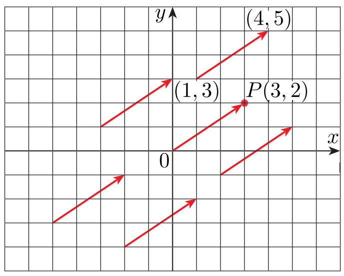




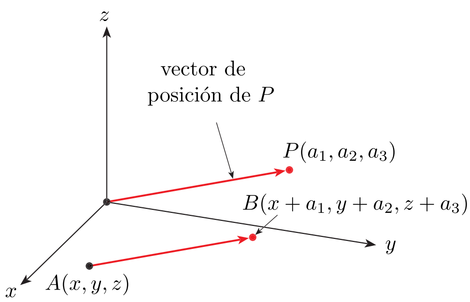
Estas coordenadas se llaman las **componentes** de $\mathbf{a}$ y se escribe

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) \quad \text{o} \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)\,.$$

EJEMPLO 1 Los vectores mostrados en la figura son iguales al vector $\overrightarrow{OP} = (3, 2)$ cuyo punto terminal es $P(3, 2)$. Se puede considerar a estos vectores geométricos como **representaciones** de un vector algebraico $\mathbf{a} = (3, 2)$. La representación particular $\overrightarrow{OP}$ del origen al punto $P(3, 2)$ se llama **vector posición** del punto P.



En tres dimensiones, el vector $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP} = (a_1, a_2, a_3)$ es el **vector de posición** del punto $P(a_1, a_2, a_3)$.



Considere cualquier otra representación $\overrightarrow{AB}$ de $\mathbf{a}$, donde el punto inicial es $A(x_1, y_1, z_1)$ y el punto terminal es $B(x_2, y_2, z_2)$. Entonces se debe tener $x_1 + a_1 = x_2$, $y_1 + a_2 = y_2$, y $z_1 + a_3 = z_2$ y, por lo tanto, $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ y $a_3 = z_2 - z_1$.

PROPOSICIÓN 1 Dados los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, el vector $\mathbf{a}$ con representación $\overrightarrow{AB}$ es

$$\mathbf{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) .$$

EJEMPLO 2 Encuentre el vector representado por el segmento de recta dirigido con punto inicial $A(2, -3, 4)$ y punto terminal $B(-2, 1, 1)$.

DEFINICIÓN La **magnitud** o **longitud** del vector $\mathbf{v}$ es la longitud de cualquiera de sus representaciones, y se denota por el símbolo $\|\mathbf{v}\|$. La longitud del vector bidimensional $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ es

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} .$$

La longitud del vector tridimensional $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

PROPOSICIÓN 2 Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, entonces

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \qquad \mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$$

$$c\mathbf{a} = (ca_1, ca_2) .$$

De manera similar, para vectores en tres dimensiones

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \\ c(a_1, a_2, a_3) &= (ca_1, ca_2, ca_3) . \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Si $\mathbf{a} = (4, 0, 3)$ y $\mathbf{b} = (-2, 1, 5)$, encuentre $\|\mathbf{a}\|$ y los vectores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $3\mathbf{b}$ y $2\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$.

PROPOSICIÓN 3 (Propiedades de Vectores)
Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ vectores y $c, d \in \mathbb{R}$, entonces

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$
5. $c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$
6. $(c + d)\mathbf{a} = c\mathbf{a} + d\mathbf{a}$
7. $(cd)\mathbf{a} = c(d\mathbf{a})$
8. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

Tres vectores en $\mathbb{R}^3$ juegan un papel especial

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0)\ , \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0)\ , \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)\ .$$

Estos vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ se denominan **vectores base estándar**. Tienen longitud 1 y apuntan en las direcciones de los ejes positivos.

Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, entonces se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) \\ &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \end{aligned}$$

Así cualquier vector en $\mathbb{R}^3$ se puede expresar en términos de los vectores de la base estándar.

EJEMPLO 4 Si $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{k}$, exprese el vector $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ en términos de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

DEFINICIÓN Un **vector unitario** es un vector cuya longitud es 1.

Por ejemplo, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ son vectores unitarios. En general, si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, entonces el vector unitario que tiene la misma dirección que $\mathbf{a}$ es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}\ .$$

EJEMPLO 5 Encuentre el vector unitario en la dirección del vector $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

2 Producto Punto

DEFINICIÓN Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces el **producto punto** de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es el número real dada por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\ .$$

Para hallar el producto punto de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se multiplican las componentes correspondientes y se suman. El resultado no es un vector, es un número real.

EJEMPLO 6

$$\begin{aligned}
(2,4)\cdot(3,-1) &= 2(3)+4(-1)=2\\
(-1,7,4)\cdot(6,2,-\frac{1}{2}) &= (-1)6+7(2)+4\left(-\frac{1}{2}\right)=6\\
(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k})\cdot(2\mathbf{j}-\mathbf{k}) &= 1(0)+2(2)+(-3)(-1)=7
\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 4 (Producto Punto)
Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores en $\mathbb{R}^3$ y c es un escalar, entonces

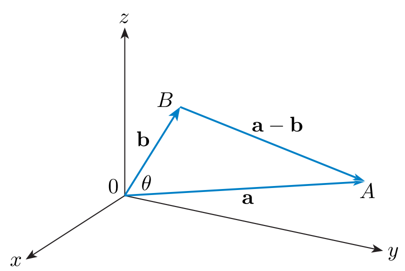
1. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=\|\mathbf{a}\|^2$
2. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$
3. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$
4. $(c\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot(c\mathbf{b})$
5. $\mathbf{0}\cdot\mathbf{a}=0$

Al producto punto $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ se le puede dar una interpretación geométrica en términos del ángulo θ entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, que se define como el ángulo entre las representaciones de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que empiezan en el origen, donde $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. En otras palabras, θ es el ángulo entre los segmentos de recta $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

TEOREMA 1 Si θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, entonces

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta\,.$$

Demostración Aplicando la ley de los cosenos al triángulo OAB de la figura, se obtiene



$$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|^2=\|\mathbf{a}\|^2+\|\mathbf{b}\|^2-2\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos\theta\,.$$

EJEMPLO 7 Si los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ tienen longitudes 4 y 6, y el ángulo entre ellos es $\pi/3$, encuentre $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

PROPOSICIÓN 5 Si θ es el ángulo entre los vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}\,.$$

EJEMPLO 8 Determine el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = (2, 2 - 1)$ y $\mathbf{b} = (5, -3, 2)$.

DEFINICIÓN Los vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se llaman **perpendiculares** u **ortogonales** si el ángulo entre ellos es $\theta = \pi/2$.

El Teorema nos da

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos(\pi/2) = 0$$

y a la inversa si $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, entonces $\cos\theta = 0$, por lo tanto $\theta = \pi/2$. En consecuencia, se tiene el siguiente método para determinar si dos vectores son ortogonales.

$$\boxed{\mathbf{a} \text{ y } \mathbf{b} \text{ son ortogonales si y sólo si } \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0\,.}$$

EJEMPLO 9 Muestre que $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ es perpendicular a $5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

3 Producto Cruz

DEFINICIÓN Si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, entonces el **producto cruz** de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es el vector

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)\,.$$

A fin de hacer la definición más fácil de recordar, se usa la notación de determinantes. Un **determinante de orden 2** se define mediante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\,.$$

Por ejemplo, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2(4) - 1(-6) = 14$.

Un **determinante de orden 3** se puede definir en términos de determinantes de segundo orden como sigue:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 1(0-4) - 2(6+5) + (-1)(12-0) = -38$$

Ahora podemos reescribir la definición del producto cruz usando determinantes y los vectores de la base estándar $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, se ve que el producto cruz de los vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ es

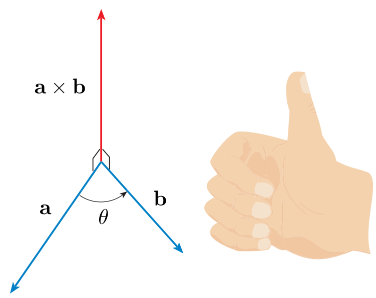
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

EJEMPLO 10 Si $\mathbf{a} = (1, 3, 4)$ y $\mathbf{b} = (2, 7, -5)$, encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

EJEMPLO 11 Muestre que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ para cualquier vector $\mathbf{a}$ en $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA 2 El vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es ortogonal a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ apunta en una dirección perpendicular al plano formado por los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Resulta que la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está dada por la regla de la mano derecha: si los dedos de su mano derecha se curvan en la dirección de $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, entonces su dedo pulgar apunta en la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.



TEOREMA 3 Si θ es el ángulo entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, entonces

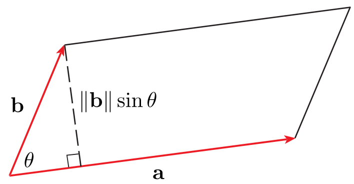
$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen}(\theta) \,.$$

PROPOSICIÓN 6 Dos vectores no nulos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos si y sólo si

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \,.$$

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores, entonces determinan un paralelogramo con base $\|\mathbf{a}\|$, altura $\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen}\theta$ y área

$$A = \|\mathbf{a}\|(\|\mathbf{b}\| \operatorname{sen}\theta) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \,.$$



EJEMPLO 12 Encuentre un vector perpendicular al plano que pasa por los puntos $P(1,4,6)$, $Q(-2,5,-1)$ y $R(1,-1,1)$.

EJEMPLO 13 Encuentre el área del triángulo con vértices $P(1,4,6)$, $Q(-2,5,-1)$ y $R(1,-1,1)$.

TEOREMA 4 Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores y α es un escalar, entonces

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$
2. $(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times(\alpha\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$
5. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$
6. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$

4 Guía de Ejercicios

1. Considere el triángulo de vértices $A=(1,5,0)$, $B=(4,1,5)$ y $C=(8,4,10)$. Calcule los ángulos internos del triángulo ABC y su área.
2. Encuentre un vector unitario perpendicular al triángulo ABC donde $A=(1,2,3)$, $B=(-3,-2,5)$, $C=(1,4,1)$.
3. Demuestre que los vectores $\mathbf{v}=(2,6,-2)$ y $\mathbf{w}=(5,-3,-4)$ son ortogonales.
4. Calcule la distancia entre los puntos $(2,-3,5)$ y $(-2,5,-4)$. Halle las coordenadas del punto medio del segmento lineal que une los puntos anteriores.
5. Halle las coordenadas de un punto R sobre el segmento que une los puntos $P=(2,-3,5)$ y $Q=(-2,5,-4)$, de tal modo que la distancia desde R al punto P sea el doble de la distancia de R al punto Q.
6. Considere el triángulo determinado por los puntos $A=(1,3,5)$, $B=(2,-3,6)$ y $C=(4,5,-3)$. Determine el ángulo correspondiente al vértice C.
7. Demuestre que la recta que pasa por los puntos $(1,2,-9)$ y $(5,-3,14)$, es ortogonal a la recta que pasa por los puntos $(1,2,3)$ y $(-3,8,5)$.
8. Demuestre que la ley del paralelogramo:

$$2\|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2+\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2$$

9. Demuestre la siguiente igualdad, llamada identidad de polarización:

$$4\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$$

10. Suponga que x, y y z son números reales distintos entre si. Demuestre que los vectores $(1, x, x^2)$, $(1, y, y^2)$ y $(1, z, z^2)$ nunca son coplanares.

11. Halle el ángulo agudo formado por dos diagonales de un cubo unitario.

12. Halle la longitud de una diagonal de un cubo de lado unitario.