Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo semestre de 2021

**MAT1620 – Cálculo II**

Solución Examen

1. Se sabe que $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

   *a*) Represente la función $x^2 \cos(x)$ como una serie de potencia y luego determine una representación en serie de potencias de $\frac{d}{dx}\left(x^2\cos(x)\right)$.

   *b*) Calcule la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$.

**Solución.**

*a*) Como

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{con} \quad R = \infty$$

luego

$$x^2\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n)!} \quad \text{con} \quad R = \infty$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\cos(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2) x^{2n+1}}{(2n)!} \quad \text{con} \quad R = \infty.$$

*b*) Notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}}{2n!} - 1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1$$

**Criterios de corrección:**

- **1 pt** por concluir la representacion en serie potencias de la función $x^2\cos(x)$.
- **1 pt** por concluir la representacion en serie potencias de la función $\frac{d}{dx}\left(x^2\cos(x)\right)$.
- **1 pt** por mencionar el radio de convergencia de la serie potencias de la función $\frac{d}{dx}\left(x^2\cos(x)\right)$.
- **1 pt** por llegar a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}}{2n!}$ o a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}}{2n!}$.
- **1 pt** por restar el término para $n = 0$.
- **1 pt** por la respuesta *cos* $\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1$.

2. Considere la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{4x^2+2y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) (**4 pts**) Determine todos los puntos donde la función es continua.

**Solución.** Para $(x,y)\neq(0,0)$ la función $f(x,y)$ es una función racional, que es continua en cada punto donde su denominador $4x^2+2y^2$ no se anula. Entonces $f(x,y)$ es continua para $(x,y)\neq(0,0)$

Para estudiar la continuidad de $f(x,y)$ en $(x,y)=(0,0)$ notamos que

$$\begin{aligned} 0\leq|f(x,y)| &= \left|\frac{xy^3}{4x^2+2y^2}\right| \\ &= \frac{1}{2}|xy|\left|\frac{y^2}{2x^2+y^2}\right| \end{aligned}$$

Pero $2x^2+y^2\leq y^2$ y entonces $\dfrac{y^2}{2x^2+y^2}\leq 1$ para $(x,y)\neq(0,0)$ y por lo tanto

$$0\leq|f(x,y)|\leq\frac{1}{2}|xy|$$

Considerando que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|xy|=0$, tenemos por el teorema de Compresión que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|f(x,y)|=0$ y en consecuencia $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$

Puesto que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0$ tenemos que $f$ es continua en $(0,0)$.

Entonces $f$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

**Criterios de corrección:**

- **1 pts** por deducir que la función es continua en $(x,y)\neq(0,0)$.
- **1 pts** por argumentar si el límite existe y es igual al valor de función evaluada en $(0,0)$, la función es continua en $(0,0)$.
- **2 pts** por concluir que el límite es 0.

b) (**2 pts**) Calcule $\nabla f(0,0)$.

**Solución.** Por definición tenemos:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{h\cdot0^3}{4h^2+2\cdot0^2}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{0\cdot h^3}{4\cdot0^2+2\cdot h^2}=0$$

por lo tanto $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

**Criterios de corrección:**

- **2 pts** por calcular $\nabla f(0,0)$ (1 pt por cada componente).

3. Sea
$$\frac{x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}+z^3+5xyz=8$$
una superficie que define en forma implícita a $z=z(x,y)$ en un entorno del punto $(1,1,1)$ de ella.

*a*) (**3 pts**) Determine el plano tangente a la superficie en el punto $(1,1,1)$.

*b*) (**1 pt**) Determine las ecuaciones simétricas de la recta normal a la superficie en el punto $(1,1,1)$.

*c*) (**2 pts**) Calcule $z_{xy}(1,1)$.

**Solución.**

*a*) Derivando parcial con respecto a $x$ la ecuación que define a la superficie obtenemos
$$x+3z^2z_x+5yz+5xyz_x=0 \qquad (*)$$
Reemplazando $x=1, y=1, z=1$ obtenemos $6+8z_x(1,1)=0$, de donde $z_x(1,1)=-3/4$
Similarmente, derivando parcial respecto a $y$ obtenemos
$$3y+3z^2z_y+5xz+5xyz_y=0$$
Reemplazando $x=1, y=1, z=1$ obtenemos $8+8z_y(1,1)=0$, de donde $z_y(1,1)=-1$
La ecuación del plano tangente a la superficie es
$$z=1+z_x(1,1)(x-1)+z_y(1,1)(y-1)=1-\frac{3}{4}(x-1)-(y-1)$$
o equivalentemente
$$3x+4y+4z=11$$

*b*) Un vector normal al plano tangente es $\vec{n}=(3,4,4)$ y entonces las ecuaciones simétricas de la recta normal al plano son
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{4}$$

*c*) De la ecuación (*) se obtiene $z_x=-\dfrac{5yz+x}{5xy+3z^2}$, de donde derivando parcial con respecto a $y$, se obtiene
$$z_{xy}=-\frac{(5z+5yz_y)(5xy+3z^2)-(5yz+x)(5x+6z\,z_y)}{(5xy+3z^2)^2}$$
Reemplazando $x=1, y=1, z=1, z_y=-1$ obtenemos
$$z_{xy}(1,1)=-\frac{6}{64}=-\frac{3}{32}$$

**Criterios de corrección:**

- **1 pt** por $z_x(1,1)=-3/4$.
- **1 pt** por $z_y(1,1)=-1$
- **1 pt** por determinar el plano tangente.
- **1 pt** por determinar una ecuación de la recta normal.
- **1 pt** por determinar $z_{xy}$.
- **1 pt** por determinar $z_{xy}(1,1)$.

4. *a*) Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+3}}{2^{2n-1}}$. En caso de converger calcule su valor.

**Solución.**

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+3}}{2^{2n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n} \cdot (-27)}{2^{2n} \cdot 2^{-1}} \\ &= -54 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{4}\right)^{n}\end{aligned}$$

La serie es una serie geométrica con la razón $\frac{-3}{4}$ y por lo tanto converge. El valor de su suma es $-54 \cdot \frac{-3}{7} = \frac{162}{7}$.

**Criterios de corrección:**

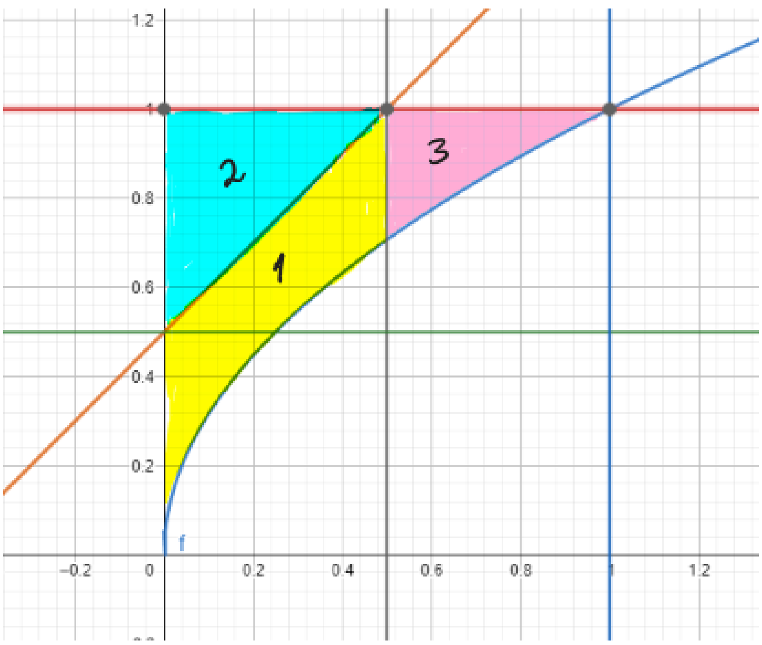
- **1 pt** por identificar la razón de la suma geométrica.
- **1 pt** por reconocer que la serie es convergente.
- **1 pt** por determinar la suma de la serie geométrica.

*b*) Sea

$$I = \int_0^{1/2} \int_{\sqrt{x}}^{x+1/2} f(x,y)\, dydx + \int_{1/2}^{1} \int_0^{y-1/2} f(x,y)\, dxdy + \int_{1/2}^{1} \int_{\sqrt{x}}^{1} f(x,y)\, dydx$$

Grafique las regiones de integración de cada una de las integrales en un plano cartesiano.

**Solución.** El siguiente dibujo se ven las regiones de integración de cada una de las tres integrales dobles.




**Criterios de corrección:**

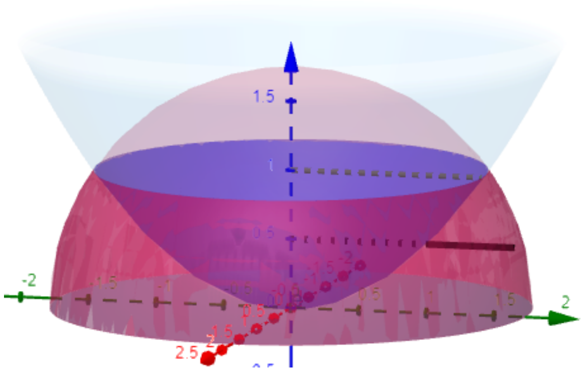
- **1 pt** por determinar la región de cada una de las integrales (3 puntos en total)

5. Calcule el volumen de la región dentro de la mitad de esfera $x^2+y^2+z^2=3$, $z\geq 0$ pero fuera del paraboloide $2z=x^2+y^2$.

**Solución.** Para encontrar el rango de $z$ intersectamos ambas superficies:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 3 \\ x^2+y^2 &= 2z \end{aligned}\right| \quad z^2+2z=3 \quad \to \quad z=1 \text{ y } z=-3$$

donde solo $z=1$ es la intersección válida. Entonces el rango de $z$ es $0\leq z\leq 1$.
Usaremos coordenadas cilíndricas, para cada $z$ y cada ángulo $\theta$ integramos desde el paraboloide a la esfera.




Para cada $z$ el radio del punto en la esfera está dado por $r^2+z^2=3$, por lo que $r=\sqrt{3-z^2}$. El punto en el paraboloide corresponde a $2z=r^2$ o $r=\sqrt{2z}$.

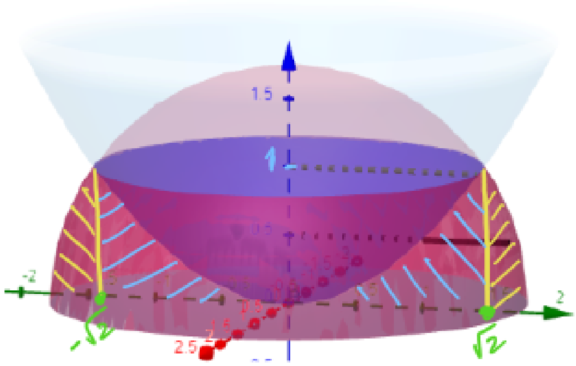
Recordando que el elemento de volumen en coordenadas cilíndricas es $dV=r\ dr\ d\theta\ dz$ tenemos

$$\begin{aligned} V=\iint_E 1\ dV &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{2z}}^{\sqrt{3-z^2}} r\ dr\ d\theta\ dz \\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{3-z^2}{2}-\frac{2z}{2}\ d\theta\ dz \\ &= \int_0^1 2\pi\frac{3-z^2-2z}{2}\ dz=\pi(3-\frac{1}{3}-1)=\frac{5}{3}\pi. \end{aligned}$$

**Criterios de corrección:**

- **1 pt** por intersectar las superficies.
- **1 pt** por determinar el rango de $z$.
- **1 pt** por determinar el rando de $r$
- **1 pt** por formar una integral que calcule el volumen.
- **2 pts** por determinar el valor númerico del volumen.

Otra solución alternativa es dividir la región en dos regiones como el siguiente dibujo donde en la región sombreada con el color azul $0 \leq z \leq \frac{r^2}{2}$ y en la región sombreada con el color amarillo $0 \leq z \leq \sqrt{3-r^2}$.




Usando coordenadas polares, tenemos la esfera $z = \sqrt{3-r^2}$ y el paraboloide $z = \dfrac{r^2}{2}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
V = \iiint_E 1 \, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{r^2}{2}} r \, dz \, dr \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{2} dr \, d\theta + \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} r\sqrt{3-r^2} dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} d\theta = \frac{5}{3}\pi.
\end{aligned}$$

**Criterios de corrección:**

- **1 pt** por intersectar las superficies.
- **2 pts** por determinar el rango de $z$ en ambas regiones (1 pt para cada región).
- **2 pts** por formar la suma de dos integrales para calcular el volumen (1 pt cada término de la suma).
- **1 pt** por determinar el valor númerico del volumen.