FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

tMAT1620 ★ Cálculo 2

Interrogación 3

Todas sus respuestas deben estar debidamente justificadas y escritas de manera clara. Todas las preguntas (4) tienen el mismo puntaje.

---

1. Sea $f(r,\theta) = r^3 \cos(3\,\theta)$.

a) Encuentre las derivadas parciales de segundo orden f_{rr}, $f_{r\theta}$, $f_{\theta\theta}$ y evalúelas en $(r,\theta) = (1,0)$.

b) Determine el valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(r,\theta)$ satisface la ecuación:

$$f_{rr} + \frac{\lambda}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} = 0, \qquad r \neq 0$$

Solución.

a) Tenemos:

$f_r = 3r^2 \cos(3\theta)$

$f_{rr} = 6r\cos(3\theta)\,, f_{rr}(1,0) = 6$

$f_\theta = -3r^3 \sin(3\theta)$,

$f_{\theta\theta} = -9r^3\cos(3\theta)\,, f_{\theta\theta}(1,0) = -9$

$f_{r\theta} = -9r^2 \sin(3\theta)\,, f_{r\theta}(1,0) = 0$

b) Sustituyendo las derivadas parciales en la ecuación se tiene:

$$f_{rr} + \frac{\lambda}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} = 0$$

$$6r\cos(3\theta) + \frac{\lambda}{r} 3r^2\cos(3\theta) + \frac{1}{r^2} \cdot -9r^3\cos(3\theta) = 0$$

$$6r\cos(3\theta) + 3r\,\lambda\cos(3\theta) - 9r\cos(3\theta) = 0$$

$$3r\lambda\cos(3\theta) - 3r\cos(3\theta) = 0$$

$$3r\cos(3\theta)\,(\lambda - 1) = 0, \text{ para todo } r \neq 0, \theta \in \mathbb{R}$$

De donde se sigue que $\lambda = 1$.

2.

a) Encuentre todos los puntos del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 72$ donde el plano tangente es paralelo al plano $4x + 4y + 12z = 3$

Solución.

La ecuación del plano tangente al elipsoide en un punto $P(a, b, c)$ es:

$$\nabla F(a, b, c) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0, \ \text{ donde } F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

Esto es:

$$(2a, 4b, 6c) \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0$$

$$2a(x - a) + 4b(y - b) + 6c(z - c) = 0$$

Para que el plano tangente sea paralelo al plano dado, su vector normal $\overrightarrow{n_1} = (2a, 4b, 6c)$ debe ser múltiplo del vector normal del plano dado $\overrightarrow{n_2} = (4,4,12)$, es decir:

$$2a = k \cdot 4 \Rightarrow a = 2k$$

$$4b = k \cdot 4 \Rightarrow b = k$$

$$6c = k \cdot 12 \Rightarrow c = 2k$$

Ahora, como el punto $(a, b, c) = (2k, k, 2k)$ está en el elipsoide, debe satisfacer la ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 72$$

Así

$$(2k)^2 + 2(k^2) + 3(2k)^2 = 72$$

$$4k^2 + 2k^2 + 12k^2 = 72$$

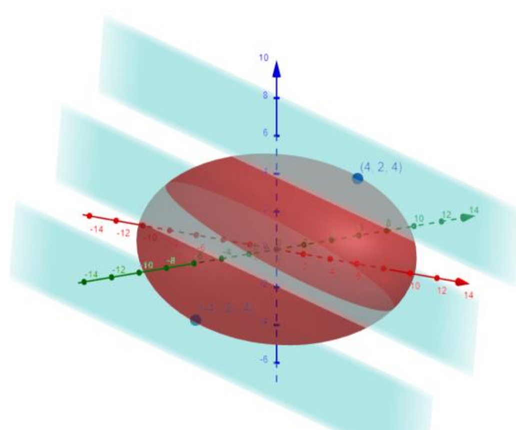
$$18k^2 = 72$$

$$k^2 = 4$$

$$k = \pm 2$$

Por lo tanto, los puntos del elipsoide donde el plano tangente es paralelo al plano dado son:

$$(4,2,4) \text{ y } (-4, -2, -4)$$



b) Suponga que f es una función derivable de x e y, y que $g(u,v) = f(3u - v, u^2 + v)$. Use la tabla de valores para calcular $g_u(2,-1)$ y $g_v(2,-1)$.

(x,y)	f	g	f_x	f_y
$(2,-1)$	6	-7	1	9
$(7,3)$	4	2	-3	5

Solución.

$g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ donde $x = 3u - v$, $y = u^2 + v$.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 3, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -1, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 2u, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = 1$$

Por regla de la cadena

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Entonces

$$\begin{aligned} g_u(2,-1) &= f_x\big(x(2,-1), y(2,-1)\big)x_u(2,-1) + f_y\big(x(2,-1), y(2,-1)\big)y_u(2,-1) \\ &= f_x(7,3)\cdot 3 + f_y(7,3)\cdot 4 = -3\cdot 3 + 5\ \cdot 4 = 11 \end{aligned}$$

Por regla de la cadena

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Entonces

$$\begin{aligned} g_v(2,-1) &= f_x\big(x(2,-1), y(2,-1)\big)x_v(2,-1) + f_y\big(x(2,-1), y(2,-1)\big)y_v(2,-1) \\ &= f_x(7,3)\cdot -1 + f_y(7,3)\cdot 1 = -3\cdot -1 + 5\ \cdot 1 = 8 \end{aligned}$$

3.

a) Determine los valores máximo y mínimo locales y los puntos silla de la función

$$f(x,y) = x^3 - 3x + 3xy^2$$

Solución.

Primero determinamos los puntos críticos resolviendo el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 + 3y^2 = 0 \\ 6xy = 0 \end{cases}$$

De la ecuación $6xy = 0$, obtenemos que $x = 0$ o $y = 0$.

- Para $x = 0$, sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $y = \pm 1$ y así tenemos los puntos críticos $(0,1)$ y $(0,-1)$.
- Para $y = 0$, sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $x = \pm 1$ y así tenemos los puntos críticos $(-1,0)$ y $(1,0)$.

Ahora hacemos la prueba de la segunda derivada para cada uno de los puntos críticos,

$$D(x,y) = 36(x^2 - y^2)$$

- Para $(0,1)$ tenemos $D(0,1) = -36$, por lo tanto, es un punto silla.
- Para $(0,-1)$ tenemos $D(0,-1) = -36$, por lo tanto, es un punto silla.
- Para $(1,0)$ tenemos $D(1,0) = 36$ y $f_{xx}(1,0) = 6$, por lo tanto, es un mínimo local.
- Para (-1,0) tenemos $D(1,0) = 36$ y $f_{xx}(1,0) = -6$, por lo tanto, es un máximo local.

b) Usando Multiplicadores de Lagrange, determine los valores extremos de la función

$$f(x,y) = xe^y$$

sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 2$

Solución.

Calculando los gradientes y poniendo $\nabla f = \lambda \nabla g$, con $g(x,y) = x^2 + y^2$ tenemos el sistema

$$\begin{cases} e^y = 2\lambda x & (1) \\ xe^y = 2\lambda y & (2) \\ x^2 + y^2 = 2 & (3) \end{cases}$$

Como e^y nunca es igual a cero, entonces $\lambda \neq 0$. Ahora sustituimos (1) en (2) para obtener

$$2\lambda x^2 = 2\lambda y$$

Luego $y = x^2$, que podemos reemplazar en (3) y obtenemos la ecuación

$$y^2 + y - 2 = 0$$

cuyas soluciones son $y = 1$ e $y = -2$, pero esta última se descarta porque $y = x^2$.

Por lo tanto, debemos evaluar solo los puntos $(1,1)$ y $(-1,1)$

$$f(1,1) = e$$
$$f(-1,1) = -e$$

De donde concluimos que el valor máximo de $f(x,y)$, sujeta a la restricción dada, es e y el valor mínimo es $-e$.

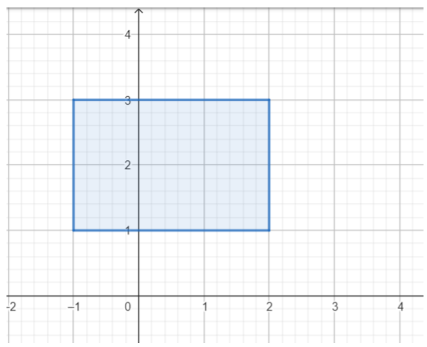
4.

a) Bosqueje la región de integración y calcule la integral doble.

$$\iint_R x^2 - y \; dA$$

donde $R = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 2,\; 1 \leq y \leq 3\}$

Solución.



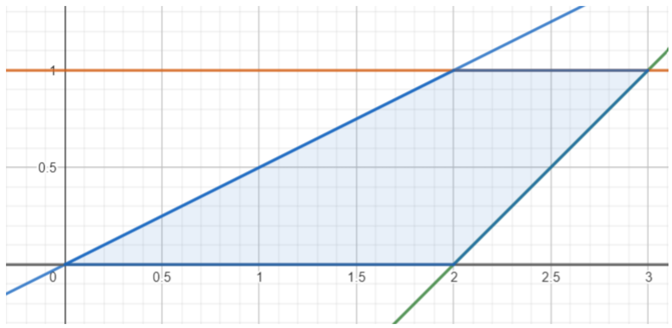
$$\iint_R x^2 - y\, dA = \int_{-1}^{2}\int_{1}^{3} x^2 - y\, dydx = \int_{-1}^{2} x^2y - \frac{y^2}{2}\Big|_{y=1}^{y=3} dx = \int_{-1}^{2} \left(3x^2 - \frac{9}{2}\right) - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{2} 2x^2 - 4\, dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 4x\Big|_{x=-1}^{x=2} = \left(\frac{16}{3} - 8\right) - \left(-\frac{2}{3} + 4\right) = -6$$

b) Bosqueje la región de integración y cambie el orden de integración.

$$\int_0^1 \int_{2y}^{2+y} f(x,y)dxdy$$

Solución.



$$\int_0^1 \int_{2y}^{2+y} f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)dydx + \int_2^3 \int_{x-2}^{1} f(x,y)dydx$$

c) Calcule la integral

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 e^{y^3} dydx$$

Solución.

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 e^{y^3} dydx = \int_0^2 \int_0^{y^2} e^{y^3} dxdy = \int_0^2 e^{y^3} x\Big|_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^2 e^{y^3} y^2\, dy = \frac{e^{y^3}}{3}\Bigg|_{y=0}^{y=2}$$
$$= \frac{e^8}{3} - \frac{1}{3}$$

Fin