Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2018

MAT1620 $\star$ CÁLCULO II

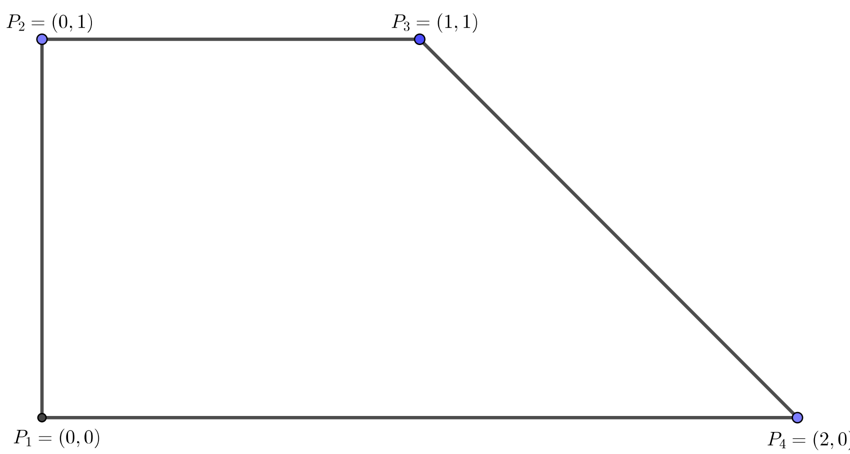
SOLUCIÓN INTERROGACIÓN 3

1. Determine la constante $c \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\iint_D cxy\ dA = 1,$$

donde D es el trapezoide de vértices $P_1(0,0)$, $P_2(0,1)$, $P_3(1,1)$ y $P_4(2,0)$.

Solución. Notamos que la región D tiene la siguiente forma por lo que conviene verla



como una región de tipo II, es decir, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \le y \le 1, 0 \le x \le 2-y\}$.
Luego

$$\iint_D cxy\ dA = c\int_0^1 \int_0^{2-y} xydxdy = \frac{c}{2}\int_0^1 (2-y)^2 ydy$$

$$= \frac{c}{2}\int_0^1 (y^3 - 4y^2 + 4y)dy = \frac{c}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + 2\right) = \frac{11c}{24},$$

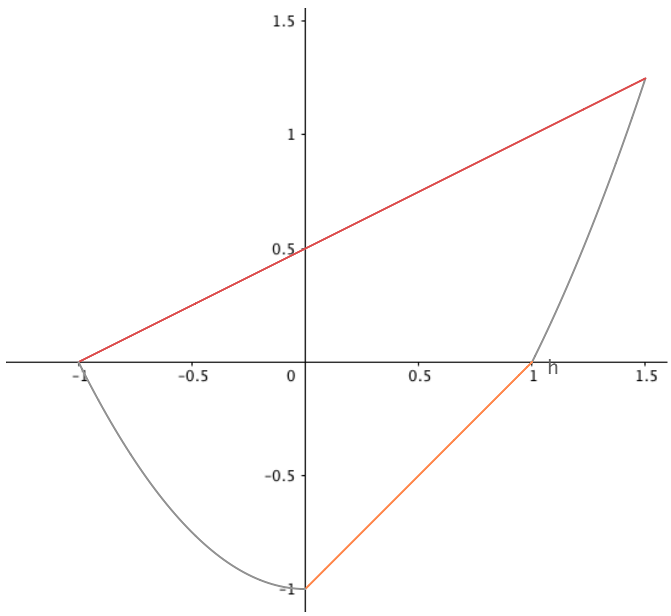
con lo que podemos concluir que $c = 24/11$.

2. Determine

$$\iint_D 5x\ dA,$$

donde D es la región acotada comprendida entre las curvas: $2y = 1 + x$, $x - y = 1$ y $y = x^2 - 1$.

Solución. Notamos que la región D tiene la siguiente forma por lo que conviene verla



como la suma de tres integrales sobre regiones del tipo I, esto es, $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ donde $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ -1 \leq x \leq 0, x^2 - 1\ \leq y \leq (1 + x)/2\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq (x + 1)/2\}$ y $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \leq x \leq 3/2, x^2 - 1 \leq y \leq (x + 1)/2\}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\iint_D 5x\ dA &= \int_{-1}^{0} \int_{x^2-1}^{(1+x)/2} 5x dy dx + \int_{0}^{1} \int_{x-1}^{(1+x)/2} 5x dy dx + \int_{1}^{3/2} \int_{x^2-1}^{(1+x)/2} 5x dy dx \\
&= \frac{5}{2} \int_{-1}^{0} (x^2 - 2x^3 + 3x) dx + \frac{5}{2} \int_{0}^{1} (3x - x^2) dx + \frac{5}{2} \int_{1}^{3/2} (x^2 - 2x^3 + 3x) dx \\
&= \frac{5}{2} \left(-\frac{2}{3} + \frac{7}{6} + \frac{61}{96} \right) = \frac{545}{192}.
\end{aligned}$$

3. Determine el volumen del sólido que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

   Solución. Por la naturaleza del problema, lo más conveniente es utilizar coordenadas cilíndricas, dado que el volumen que se quiere calcular corresponde a un cilindro el cual tiene como tapas cascos esféricos. Luego, la región en coordenadas cilíndricas se escribe por

$$D = \{(r, \theta, z) \ : \ 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\sqrt{1-r^2} \leq z \leq \sqrt{1-r^2}\}.$$

   Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\text{Volumen}(D) &= \iiint_D 1 dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2} dr d\theta \\
&= 2\pi \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2} \\
&= 2\pi \left[-\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2} \right] \Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

4. La siguiente expresión representa la integral de una función continua $f(x, y, z)$ sobre una región en el espacio

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{x^2} \int_{0}^{y} f(x, y, z)\ dzdydx.$$

Escriba la integral anterior en el orden $dydzdx$.

Solución. Si D es la región del plano XY acotada por la parábola $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = -1$, la región de integración $E = \{(x, y, z) : (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq y\}$. Luego para encontrar la integral pedida observemoa que x avría entre -1 y 1, para cada valor de x, z varía entre 0 y x^2 y para cada z, y varía entre z y x^2. Entonces

$$\int_{-1}^{1} \int_{0}^{x^2} \int_{0}^{y} f(x, y, z)\ dzdydx = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{x^2} \int_{z}^{x^2} f(x, y, z)\ dydzdx$$

5. Calcule

$$\iiint_E (9 - x^2 - y^2)\ dV,$$

donde E es la semiesfera sólida $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq 0$.

Solución. Notamos que utilizando coordenadas esféricas, tendremos que la región E puede ser escrita por

$$E = \{(r, \theta, \phi)\ :\ \ 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/2\},$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\iiint_E (9 - x^2 - y^2) dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 (9 - r^2 \sin^2(\phi)) r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} \int_0^3 (9r^2 \sin(\phi) - r^4 \sin^3(\phi)) dr d\phi \\
&= 2\pi \int_0^{\pi/2} [81 \sin(\phi) - \frac{243}{5} \sin^3(\phi)] d\phi \\
&= 162\pi - \frac{486\pi}{5} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(\phi)) \sin(\phi) d\phi \\
&= 162\pi - \frac{486\pi}{5} \int_0^1 (1 - u^2) du \\
&= 162\pi - \frac{324\pi}{5} = \frac{486\pi}{5}.
\end{aligned}$$

6. Mediante un cambio de variables apropiado, calcule

$$\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\, dA,$$

donde R es la región encerrada por las rectas $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$ y $3x-y=8$.

Solución. Notamos que si utilizamos el cambio de variables

$$\begin{cases} u = x-2y \\ v = 3x-y \end{cases}$$

entonces la región de integración se cambia a $R' = \{(u,v) \ : \ 0 \le u \le 4, 1 \le v \le 8\}$. Luego, calculando el Jacobiano

$$\left|\frac{\partial x, y}{\partial u, v}\right| = \left| \begin{array}{cc} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right| = \left| -\frac{5}{25} \right| = \frac{1}{5}.$$

Finalmente,

$$\iint_R \frac{x-2y}{3x-y}\, dA = \frac{1}{5}\int_0^4 \int_1^8 \frac{u}{v} dv du = \frac{1}{5}\left(\int_0^4 u du\right)\left(\int_1^8 \frac{1}{v} dv\right) = \frac{1}{5}(\ln(8)+8).$$