Funciones monótonas

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

24 de Abril de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Funciones monótonas

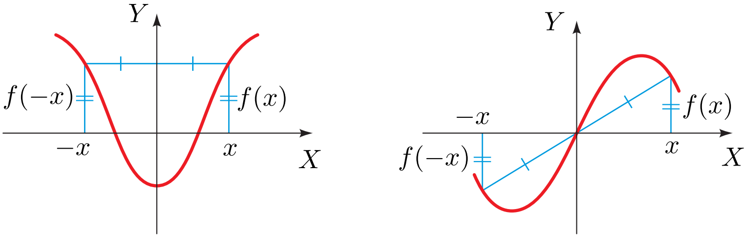
Definición.

Sea $f : (-a, a) \to \mathbb{R}$ una función.

1. Diremos que f es una función par si $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in (-a, a)$.
2. Diremos que f es una función impar si $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in (-a, a)$.

Funciones monótonas

Observación Notemos que geométriacmente se tiene lo siguiente



- La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje Y.
- La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

En particular, una función par definida en un intervalo simétrico no puede ser una función inyectiva ya que no satisface el criterio de la recta horizontal.

Funciones monótonas

EJEMPLO 1 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -\sqrt{x^2 + 4}$. ¿Es f inyectiva?

Funciones monótonas

Definición.

Dada $f : A \to B$ una función diremos que:

1. f es **estrictamente creciente** si para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$.
2. f es **creciente** si para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
3. f es **estrictamente decreciente** si para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$.
4. f es **decreciente** si para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
5. f es **monótona** en A si es creciente o decreciente.

Observación La mayoría de las funciones presentan cierto tipo de monotonía a tramos, es decir, sobre un intervalo son crecientes y sobre otro son decrecientes.

Funciones monótonas

Proposición.

Sea $f : A \to B$ una función. Si f es estrictamente monótona, entonces f es inyectiva.

Demostración Para fijar ideas supongamos que f es estrictamente creciente. Sean $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$. Entonces $x_1 < x_2$ o bien $x_2 < x_1$. Como f es estrictamente creciente, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ o bien $f(x_2) < f(x_1)$ y en cualquier caso $f(x_1) \neq f(x_2)$. Esto muestra que f es inyectiva.

EJEMPLO 2 Considere la función racional $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

Demuestre que f es estrictamente creciente.