PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV2024

Interrogación 2 - MAT1620

1. Considere los planos de ecuaciones

$$\Pi_1 : 3x - 2y + z = 1, \ \Pi_2 : 2x + y - 3z = 3.$$

   a) Encuentre una ecuación paramétrica para la recta de intersección de los planos.
   b) Determine el ángulo entre los planos.

Solución:

a) Para encontrar la ecuación paramétrica resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}$$

Si despejamos y de la segunda ecuación, obtenemos que $y = 3 + 3z - 2x$, reemplazando esto en la primera de las ecuaciones tenemos que $x = 1 + \frac{5}{7}z$ y de esta forma $y = 1 + \frac{11}{7}z$, obteniendo que $y = 3 + 3z - 2x$, reemplazando esto en la primera de las ecuaciones obtenemos que

$$\begin{cases} x &= 1 + 5t \\ y &= 1 + 11t \\ z &= 7t \end{cases}$$

Asignación de Puntaje:

- (2 pto.) Por resolver el sistema.
- (1 pto.) Por describir paramétricamente la recta solución.

b) Para calcular el ángulo entre los planos, basta ver el ángulo entre lso vectores normales respectivos, es decir entre $< 3, -2, 1 >$ y $< 2, 1, -3 >$, por fórmula sabemos que si θ es el ángulo entre esos dos vectores se tiene que

$$\cos(\theta) = \frac{< 3, -2, 1 > \cdot < 2, 1, -3 >}{| < 3, -2, 1 > || < 2, 1, -3 > |} = \frac{1}{14}$$

por lo tanto el ángulo entre los vectores, que coincide con el ángulo entre los planos es $\cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right)$.

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por determinar que el ángulo corresponde al de los vectores.
- (1 pto.) Por usar la fórmula correctamente.
- (1 pto.) Por concluir.

2. Considere la función definida por

$$f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - 4y^2}$$

   a) Determine y bosqueje el dominio de f.

   b) Determine y bosqueje el rango de f.

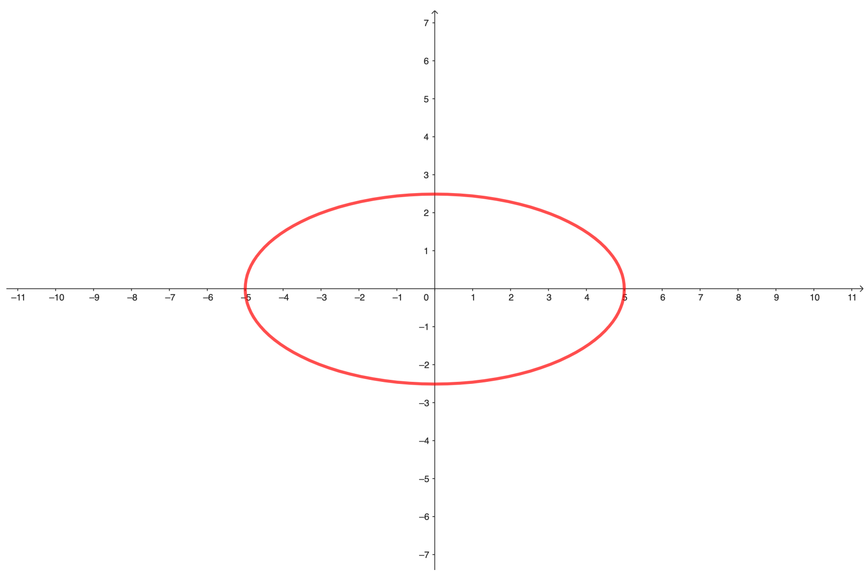
   c) Bosqueje el mapa de contorno para los niveles $k = 1, k = 3$ y $k = 5$ para la función f.

Solución:

   a) El dominio de la función corresponde a

$$\{(x,y) : x^2 + 4y^2 \leq 25\}$$

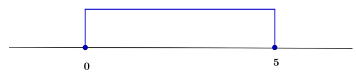
   que gráficamente corresponde a la región dentro de la elipse de la figura adjunta.



Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por la descripción analítica.
- (1 pto.) Por el bosquejo.

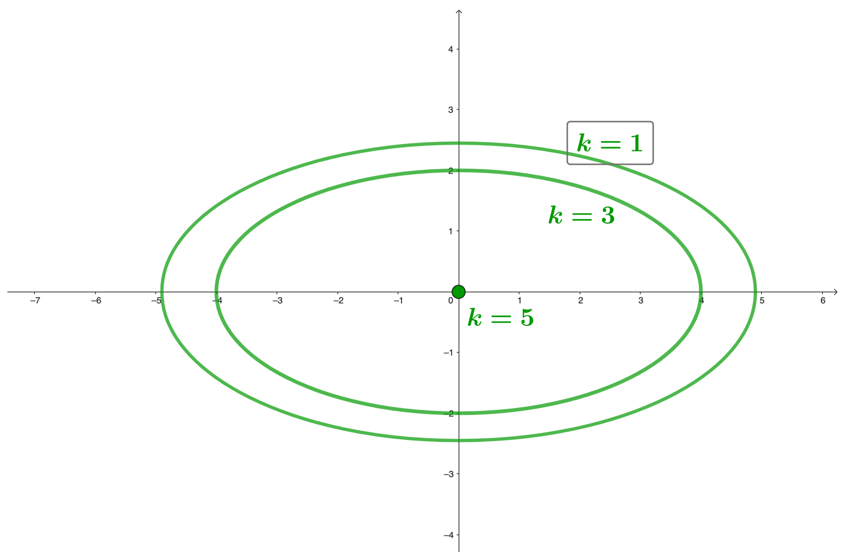
b) Observe que $0 \leq f(x) = \sqrt{25-(x^2+4y^2)} \leq 5$, por lo tanto el rango es $[0,5]$ cuyo bosquejo es



Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por determinar el rango.
- (1 pto.) Por bosquejar el intervalo.

c) El mapa de contorno para los valores pedidos es:



Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por dibujar elipses.
- (1 pto.) Por el punto para $k=5$.

3. (a) Calcule, si existe, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$.

(b) Considere la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en $(0,0)$.

Solución:

(a) Para determinar si $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3}$ existe, usemos la trayectoria $y = mx$.

Así:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{m^4x^8}{\left(x^2+(mx)^4\right)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{m^4x^8}{x^6\left(1+m^4x^2\right)^3} = 0$$

Sin embargo, si nos aproximamos por la trayectoria $x = y^2$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{\left(x^2+y^4\right)^3} = \lim_{y\to 0} \frac{y^{12}}{\left(2y^4\right)^3} = \frac{1}{8}.$$

Este valor no coincide con el valor al aproximarnos por rectas. Luego, el límite no existe.

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por calcular el límite en la trayectoria $y = mx$ u otra similar.
- (1 pto.) Por calcular el límite en la trayectoria $x = y^2$ u otra similar.
- (1 pto.) Por concluir que el límite no existe.

(b) Para demostrar continuidad en $(0,0)$ notemos que:

a) $f(0,0) = 0$ y por tanto f está definida en $(0,0)$.

b) Notar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}.$$

Para el cálculo de este límite podemos aplicar coordenadas porlares:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

De donde:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta + r^3\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta}{r^2} \\
&\lim_{r\to 0} r\left(\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

c) Finalmente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0),$$

De donde concluimos que f es continua en $(0,0)$.

Asignación de Puntaje:

- (0.5 pts.) Por indicar que f está definida en $(0,0)$.
- (2 pts.) Por calcular correctamente el límite en $(0,0)$ ya sea por coordenadas polares o el teorema del Sandwich.
- (0.5 pts.) Por concluir que f es continua en $(0,0)$.

4. (a) Si $w = f\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-y}{yz}\right)$, demuestre que $x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial w}{\partial y} + z^2\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

   (b) Suponga que la función $T(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2$ entrega la temperatura en cada punto del espacio. En el punto $(1,1,1)$ ¿cuál es la dirección en la cual se produce el mayor crecimiento de la temperatura?

Solución

(a) Hacemos $u = \dfrac{y-x}{xy}$ y $v = \dfrac{z-y}{yz}$.

Entonces:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{-xy-y^2+xy}{x^2y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot 0\\ &= -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{xy-(y-x)x}{x^2y^2}\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{-yz-(z-y)z}{y^2z^2}\right)\\ &= \frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{yz-(z-y)y}{y^2z^2}\right)\\ &= \frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

Luego se tiene:

$$x^2\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\cdot\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\cdot\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

Asignación de Puntaje:

- (0.5 pts.) Por introducir los cambios de variables u y v.
- (0.5 pts.) Por calcular correctamente la derivada de w respecto de x.
- (0.5 pts.) Por calcular correctamente la derivada de w respecto de y.
- (0.5 pts.) Por calcular correctamente la derivada de w respecto de z

- (1 pto.) Por concluir correctamente el resultado reemplazando en la ecuación las derivadas encontradas.

(b) Notemos que la dirección de mayor crecimeinto estaŕá dada, en la dirección en la que se obtenga la máxima derivada direccional, esto es, en la dirección del vector

$$\frac{\nabla T}{\|\nabla T\|}(1,1,1).$$

En este caso $\nabla T = (2x, 4y, 4z)$, evaluando en $(1,1,1)$ tenemos que la dirección pedida es

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por indicar que el máximo crecimiento de temperatura estará en la dirección del vector gradiente.
- (1 pto.) Por calcular el gradiente geenral.
- (1 pto.) Por concluir la dirección pedida con o sin el vector normalizado.