CLASE 3: INECUACIONES

- Una inecuación de una incógnita es una desigualdad que puede ser verdadera o falsa dependiendo del valor de la incógnita.

  Ej: $7x+5<0$

  Verdadera si $x=-1$

  Falsa si $x=2$

- Resolver una inecuación consiste en encontrar el conjunto de todos los valores que la hacen verdadera.

  Ej: $7x+5<0$

  $\Leftrightarrow \quad 7x<-5$

  $\Leftrightarrow \quad x<-5/7$

  El conjunto de soluciones de esta inecuación es $\{x\in\mathbb{R} : x<-5/7\}$.

  tal que

- Intervalos:

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\},$$
$$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}, \ =]a,b]$$
$$[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\},$$
$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}.$$

$$(-\infty,a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\},$$
$$(-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\},$$
$$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$
$$(a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}.$$
$$(-\infty,\infty) = \mathbb{R}$$

- Obs: ∞ y $-\infty$ no son números

$$\cancel{[-\infty, a)}$$

- Ej: $7X + 5 < 0$

Conjunto solución:

$$\{X \in \mathbb{R} : X < -5/7\} = (-\infty, -5/7)$$

- Ej: $-4x + 8 \leq 0$

$\iff 8 \leq 4x$

$\iff 2 \leq x$

Conjunto solución: $[2, \infty)$

- Ej: $x^2 + x > 2$

$\iff x^2 + x - 2 > 0$

$\iff (x+2)(x-1) > 0$

		-2		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$(x+2)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Conjunto solución: $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

• **Ej**: $x^2 + 2x + 7 < 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow \quad x_{\pm} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ si $b^2 - 4ac \geq 0$

$ax^2 + bx + c = (x - x_+)(x - x_-)$

En este caso, $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 < 0$

$$x^2 + 2x + 7 = x^2 + 2x + 1 + 6$$
$$= (x+1)^2 + 6 \geq 6 \geq 0$$

<u>Conclusión</u>: el conjunto solución es vacío

• Ej: $\dfrac{2x+1}{x+2} < 1$

$$\cancel{\dfrac{2x+1}{x+2} < 1 \iff 2x+1 < x+2 \iff x < 1}$$

$\underline{x=-3}$: $\dfrac{2\cdot(-3)+1}{(-3)+2} = \dfrac{-5}{-1} = 5 > 1$

$\underline{\text{Si } x+2>0}$: $\dfrac{2x+1}{x+2} < 1 \iff 2x+1 < x+2$

$\underline{\text{Si } x+2<0}$: $\dfrac{2x+1}{x+2} < 1 \iff 2x+1 > x+2$

Vamos a resolver de una vez:

$$\dfrac{2x+1}{x+2} < 1 \iff \dfrac{2x+1}{x+2} - 1 < 0$$

$$\iff \dfrac{2x+1-(x+2)}{x+2} < 0$$

$$\iff \dfrac{x-1}{x+2} < 0$$

		-2		1	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{x-1}{x+2}$	$+$		$-$	0	$+$

Conjunto solución: $(-2,1)$

Obs: $\dfrac{2x+1}{x+2} \leq 1 \iff \dfrac{x-1}{x+2} \leq 0$

Conjunto solución: $(-2,1]$

• Ej: $3+\dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{2x+1}$

$\iff 3+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2x+1} > 0$

$\iff \dfrac{3(x-1)(2x+1)+(2x+1)+(x-1)}{(x-1)(2x+1)} > 0$ etc

• **Ej**: $-2x^2+8x+10>0$

$$\iff 2x^2-8x-10<0$$

$$\iff x^2-4x-5<0$$

$$\iff (x^2-4x+4)-4-5<0$$

$$\iff (x-2)^2-9<0$$

$$\iff (x-2)^2<9$$

> **Lemita**: Sea $a>0$. Luego,
>
> $$y^2<a^2 \iff -a<y<a$$
>
> **DEM**: Ver curso $\square$

$$\iff -3<x-2<3$$

$$\iff -1<x<5$$

Conjunto solución: $(-1,5)$

• Ej: $x^4 - 2x^2 - 8 > 0$

$\iff (x^2)^2 - 2(x^2) - 8 > 0$

$y = x^2$

$$x^4 - 2x^2 - 8 = y^2 - 2y - 8$$
$$= (y-4)(y+2)$$
$$= (x^2-4)(x^2+2)$$

$\iff (x^2-4)(x^2+2) > 0 \quad ; \; x^2+2 > 0$

$\iff x^2 - 4 > 0$

Veamos el "caso complementario"

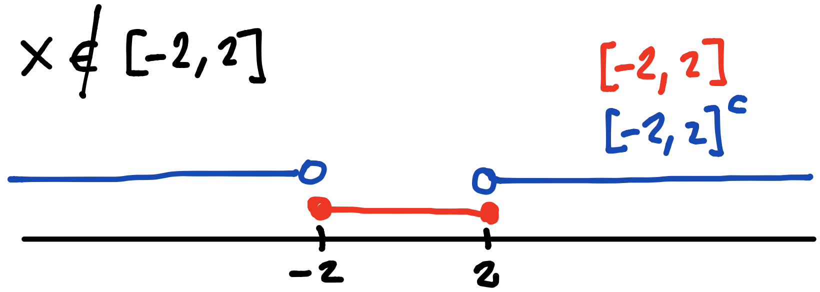
$x^2 - 4 \leq 0$

$\iff x^2 \leq 4$

$\iff -2 \leq x \leq 2$

$\iff x \in [-2, 2]$

$\iff x \notin [-2, 2]$



Conjunto solución: $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

- Ej: $x^6 - x^4 - x^2 + 1 > 0$

$$x^2(x^6-x^4-x^2+1) = x^8 - x^6 - x^4 + x^2$$

$$\Rightarrow (x^2+1)(x^6-x^4-x^2+1) = x^8 - 2x^4 + 1$$
$$= (x^4-1)^2$$

$$x^6 - x^4 - x^2 + 1 > 0 \quad ; \; x^2+1>0$$

$$\Leftrightarrow (x^2+1)(x^6-x^4-x^2+1) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4-1)^2 > 0$$

Conjunto solución:

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1, x \neq -1\}$$
$$= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$
$$= (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$$

Otra forma:

$$x^6 - x^4 - x^2 + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4(x^2-1) - (x^2-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^4-1)(x^2-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2+1)(x^2-1)(x+1)(x-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^2+1)(x+1)^2(x-1)^2 > 0$$