MAT1620 ★ Cálculo 2

Interrogación 1

1.

a)

i) $\int_0^1 f(x)dx$, **no hay suficiente información** para decidir si la integral es convergente o divergente.

ii) $\int_0^1 g(x)dx$, como $0 \leq \frac{1}{x} \leq g(x)$ y $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ es divergente, entonces por el Teorema de Comparación $\int_0^1 g(x)dx$ es **divergente**.

iii) $\int_0^1 h(x)dx$ como $0 \leq \frac{1}{x^2} \leq h(\mathrm{x})$ y $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ es divergente, entonces por el Teorema de Comparación $\int_0^1 h(x)dx$ es **divergente**.

b) Si $u = x + e^x$, entonces $du = 1 + e^x dx$ y así:

$$\int \frac{2+2e^x}{(x+e^x)^{3/2}} \mathrm{d}x = \int \frac{2}{u^{3/2}} \mathrm{d}u = 2 \cdot \frac{u^{-1/2}}{-1/2} = -4u^{-1/2} + c = -\frac{4}{(x+e^x)^{1/2}} + c$$

luego:

$$\int_1^\infty \frac{2+2e^x}{(x+e^x)^{3/2}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{2+2e^x}{(x+e^x)^{3/2}} dx = \lim_{b\to\infty} -\frac{4}{(x+e^x)^{1/2}}\Bigg|_{x=1}^{x=b}$$
$$= \lim_{b\to\infty} \frac{4}{(b+e^b)^{1/2}} + \frac{4}{(1+e)^{1/2}} = \frac{4}{(1+e)^{1/2}}$$

y así, la integral es **convergente**.

2.

a) Para $n \geq 1$, tenemos:

$$\frac{3-\cos(n)}{6n-n^{1/2}} \geq \frac{2}{6n-n^{1/2}} \geq \frac{2}{6n} \geq \frac{1}{3n}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$$

es una serie-p divergente (con $p = 1$).

Por lo tanto, por el Teorema de Comparación, la serie es divergente.

b) Primero veamos si la serie es absolutamente convergente, analizando la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n \cdot (\ln n)^2} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\ln n)^2}$$

Para esto usaremos el **criterio de la integral**.

La función $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ es positiva y decreciente para $x \geq 2$.

En cuanto a la integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$$

sustituimos $u = \ln x$ y tenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} \int_2^{b} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx &= \lim_{b\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{1}{u^2}\,du \\ &= \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{u}\Big|_{u=\ln 2}^{u=b} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, por el **Criterio de la Integral**, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(\ln n)^2}$ es convergente y así $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot(\ln n)^2}$ es **absolutamente convergente**.

3.

a)

i) La serie es una serie de potencias centrada en $x = -2$. Como la serie es convergente en $x = -4$, el radio de convergencia debe ser mayor o igual que 2 y por otro lado como la serie es divergente en $x = 0$ el radio de convergencia debe ser menor o igual a dos, por lo tanto, el radio de convergencia debe ser $R = 2$ y el intervalo de convergencia es $[-4,0)$.

ii) Si sustituimos $x = -1$ obtenemos $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ que es **convergente** ya que $x = -1$ está en el intervalo de convergencia.

iii) Si sustituimos $x = 0$ obtenemos $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n$ que es **divergente** ya que $x = 0$ no está en el intervalo de convergencia.

b) Como el radio es 3 y el centro es 1, los extremos del intervalo de convergencia son $x = -2$ y $x = 4$.

Para $x = -2$ obtenemos la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n \cdot n \cdot \sqrt{\ln(n)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt{\ln(n)}}$$

que es una **serie alternante**, y como $\frac{1}{\mathrm{n} \cdot \sqrt{\ln(n)}}$ es **decreciente** con límite igual a cero, entonces la serie converge por el **Criterio de la Serie Alternante**.

Para $x = 4$ obtenemos la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(3)^n}{3^n \cdot n \cdot \sqrt{\ln(n)}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \sqrt{\ln(n)}}$$

Si usamos el Criterio de la Integral, con la integral impropia

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln(x)}} \mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u$$

vemos que se obtiene una p $-$integral divergente (con $p = 1/2$). Por lo tanto, el intervalo de convergencia es [-2,4)

4.

a) Tenemos:

$$P_4(x) = \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(\pi)}{n!}(x-\pi)^n$$

$$= f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{f''''(\pi)}{4!}(x-\pi)^4$$

$$= 2\pi + 2(x-\pi) + \frac{-3}{2}(x-\pi)^2 + \frac{0}{6}(x-\pi)^3 + \frac{-9/2}{24}(x-\pi)^4$$

$$= 2\pi + 2(x-\pi) - \frac{3}{2}(x-\pi)^2 - \frac{3}{16}(x-\pi)^4$$

b) Cerca de cero tenemos:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 = -6 + 6x + \frac{1}{2}x^2$$

luego:

$$\int_0^x f(t^2)dt \approx \int_0^x -6 + 6t^2 + \frac{1}{2}t^4 dt = -6t + 2t^3 + \frac{1}{10}t^5\Big|_0^x$$

$$= -6x + 2x^3 + \frac{1}{10}x^5$$