PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2017

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución del Examen

1. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dos vectores ortogonales en $\mathbb{R}^n$ tales que $\|\mathbf{u}\| = 1, \|\mathbf{v}\| = \sqrt{3/2}$. Demuestre que el conjunto

$$B = \{\mathbf{u} - \mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\}$$

es ortogonal y encuentre las coordenadas del vector $4\mathbf{u} - 9\mathbf{v}$ respecto del conjunto B.

Solución:

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) = 3\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 3\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Como $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales, $||\mathbf{u}|| = 1$ y $||\mathbf{v}|| = \sqrt{3/2}$, se tiene que

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) = 3\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 3\,||\mathbf{u}||^2 - 2\,||\mathbf{v}||^2 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 0.$$

Luego $(\mathbf{u} - \mathbf{v})$ y $(3\mathbf{u} + 2\mathbf{v})$ son ortogonales, por lo que $B = \{\mathbf{u} - \mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\}$ es l.i. y por lo tanto una base de Gen $\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\}$.

Ahora, se busca α y β tal que $\alpha(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \beta(3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) = 4\mathbf{u} - 9\mathbf{v}$, por lo que $(\alpha + 3\beta)\mathbf{u} + (2\beta - \alpha)\mathbf{v} = 4\mathbf{u} - 9\mathbf{v}$.

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{c} \alpha + 3\beta = 4 \\ -\alpha + 2\beta = -9 \end{array}\right|$, se llega a que $\alpha = 7$ y $\beta = -1$.

Puntaje:

- Por expandir $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} + 2\mathbf{v})$, 1 punto.
- Por usar que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, 1 punto.
- Por llegar a $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) = 3\,||\mathbf{u}||^2 - 2\,||\mathbf{v}||^2$, 2 puntos.
- Por plantear el sistema que permite encontrar los valores de α y β, 1 punto.
- Por llegar a los valores de α y β, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

2. *a*) Determine la proyección del vector $\mathbf{b} = (1, 2, 3, 0)$ sobre el subespacio

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0\}.$$

b) Calcule la distancia entre el subespacio W y el vector $\mathbf{b}$.

Primera Solución:

a) Una forma de enfrentar este problema es considerar un vector cualquiera

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2)$$

de W, y exigir que $(\mathbf{b} - \mathbf{x}) = (1 - x_1, 2 - x_2, 3 - x_3, x_1 + x_2)$ sea $\perp$ a todo vector de W.
Como todo vector $\mathbf{p} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in W$ puede ser escrito como

$$\mathbf{p} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha, \beta, \gamma, -\alpha - \beta) = \alpha(1, 0, 0, -1) + \beta(0, 1, 0, -1) + \gamma(0, 0, 1, 0),$$

vemos que $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0)\}$ es un generador de W, por lo que basta exigir que $(\mathbf{b} - \mathbf{x}) \perp (1, 0, 0, -1), (\mathbf{b} - \mathbf{x}) \perp (0, 1, 0, -1)$ y $(\mathbf{b} - \mathbf{x}) \perp (0, 0, 1, 0)$ para que $(\mathbf{b} - \mathbf{x})$ sea $\perp$ a todo vector de W.
Así, exigimos que:

- $(\mathbf{b} - \mathbf{x}) \cdot (1, 0, 0, -1) = (1 - x_1, 2 - x_2, 3 - x_3, x_1 + x_2) \cdot (1, 0, 0, -1) = 1 - 2x_1 - x_2 = 0,$
- $(\mathbf{b} - \mathbf{x}) \cdot (0, 1, 0, -1) = (1 - x_1, 2 - x_2, 3 - x_3, x_1 + x_2) \cdot (0, 1, 0, -1) = 2 - x_1 - 2x_2 = 0,$
- $(\mathbf{b} - \mathbf{x}) \cdot (0, 0, 1, 0) = (1 - x_1, 2 - x_2, 3 - x_3, x_1 + x_2) \cdot (0, 0, 1, 0) = 3 - x_3 = 0.$

Esto equivale a plantear el sistema $\left.\begin{array}{rl} 2x_1 + \;\; x_2 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 & = 2 \\ x_3 & = 3 \end{array}\right|$, que tiene por solución $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, o sea,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, -x_1 - x_2) = (0, 1, 3, -1).$$

Así, la proyección de $\mathbf{b}$ sobre W es $\mathbf{x} = (0, 1, 3, -1)$.

b) La distancia entre $\mathbf{b}$ y W es

$$||\mathbf{b} - \mathbf{x}|| = ||(1, 2, 3, 0) - (0, 1, 3, -1)|| = ||(1, 1, 0, 1)|| = \sqrt{3}.$$

Segunda Solución:

a) Primero necesitamos encontrar una base ortogonal para W.
Como todo vector $\mathbf{p} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in W$ puede ser escrito como

$$\mathbf{p} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha, \beta, \gamma, -\alpha - \beta) = \alpha(1, 0, 0, -1) + \beta(0, 1, 0, -1) + \gamma(0, 0, 1, 0),$$

vemos que $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0)\}$ es un generador de W. No es difícil convencerse de que $\mathcal{B}$ es l.i., por lo que es base de W.
Si tomamos la base $\mathcal{B}$ de W

$$\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0)\},$$

encontraremos una base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ ortogonal usando el proceso de Gram-Schmidt:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= (1,0,0,-1) \\
\mathbf{w}_2 &= (0,1,0,-1) - \frac{(0,1,0,-1)\cdot(1,0,0,-1)}{(1,0,0,-1)\cdot(1,0,0,-1)}(1,0,0,-1) = (\frac{-1}{2},1,0,\frac{-1}{2}) \\
\mathbf{w}_3 &= (0,0,1,0) - \frac{(0,0,1,0)\cdot(1,0,0,-1)}{(1,0,0,-1)\cdot(1,0,0,-1)}(1,0,0,-1) \\
&\qquad - \frac{(0,0,1,0)\cdot(\frac{-1}{2},1,0,\frac{-1}{2})}{(\frac{-1}{2},1,0,\frac{-1}{2})\cdot(\frac{-1}{2},1,0,\frac{-1}{2})}(\frac{-1}{2},1,0,\frac{-1}{2}) = (0,0,1,0)
\end{aligned}
$$

Luego la proyección de $\mathbf{b}$ sobre W es

$$\frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2 + \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{w}_3}{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_3}\mathbf{w}_3 = (0,1,3,-1)$$

b) Úsase el mismo método que en la primera solución.

Tercera Solución:

a) Como en la solución anterior, aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$, obtenemos una base ortogonal

$$\mathcal{B}' = \left\{(1,0,0,-1), \left(-\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right), (0,0,1,0)\right\}$$

de W.

Normalizando estos vectores, obtenemos

$$\mathcal{U} = \left\{\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{u}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},0,-\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \mathbf{u}_3 = (0,0,1,0)\right\}.$$

La proyección $\mathbf{x}$ de $\mathbf{b}$ sobre W puede ser calculada como

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{u}_1 + \frac{3}{\sqrt{6}}\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3 = \left(\frac{1}{2},0,0,-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2},1,0,-\frac{1}{2}\right) + (0,0,3,0) = (0,1,3,-1)
\end{aligned}
$$

b) Úsase el mismo método que en la primera solución.

Cuarta Solución:

a) Ya que los el conjunto $\mathcal{B} = \{(1,0,0,-1),(0,1,0,-1),(0,0,1,0)\}$ es l.i., podemos aplicar el teorema 6.14, y —llamando A a la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$— obtener la solución de mínimos cuadrados $\widehat{\mathbf{x}}$ de la ecuación

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con lo que la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre W se obtiene calculando $A\widehat{\mathbf{x}}$.
El teorema 6.14 nos dice que la forma de encontrar $\widehat{\mathbf{x}}$ es

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

por lo que la proyección buscada es

$$A\widehat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Úsase el mismo método que en la primera solución.

Puntaje:

a)
- Por plantear alguna estrategia correcta de resolución del problema (puede ser alguna de las presentadas aquí, u otra distinta): 2 puntos.
- Por hacer correctamente los cálculos necesarios: 2 puntos.
- Por llegar a la proyección buscada: 1 punto.

b) Por calcular correctamente la distancia buscada: 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

3. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine matrices P, D con P ortogonal y D diagonal tales que $A = PDP^T$.

Solución:

Lo primero es calcular el polinomio característico de A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-4) + 4(\lambda+1) = \lambda^2+\lambda-4-\lambda^3-\lambda^2+4\lambda+4\lambda+4 \\ &= -\lambda^3+9\lambda = -\lambda(\lambda^2-9) = -\lambda(\lambda+3)(\lambda-3). \end{aligned}$$

Así, los valores propios de A son 0, 3 y -3.

En seguida, buscamos vectores propios para cada uno de estos valores propios:

$\lambda = 0$: Buscamos una solución de

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para ello llevamos la matriz a su forma escalonada reducida (omitimos los cálculos por brevedad):

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde $x_1 = x_3$, $x_2 = \frac{1}{2} \cdot x_3$, por lo que un vector propio es, por ejemplo,

$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 2).$$

$\lambda = 3$: Buscamos una solución de

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Llevando la matriz a su forma escalonada reducida, obtenemos:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde $x_1 = -2x_3$, $x_2 = 2x_3$, por lo que un vector propio es, por ejemplo,

$$(x_1, x_2, x_3) = (-2, 2, 1).$$

$\lambda = -3$**:** Buscamos una solución de

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Llevando la matriz a su forma escalonada reducida, obtenemos:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde $x_1 = -\frac{1}{2} \cdot x_3$, $x_2 = -x_3$, por lo que un vector propio es, por ejemplo,
$(x_1, x_2, x_3) = (-1, -2, 2)$.

Los vectores $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-2, 2, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, -2, 2)$ forman una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, pero necesitamos que esta base sea ortonormal:

$$\widehat{\mathbf{v}_1} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \widehat{\mathbf{v}_2} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \widehat{\mathbf{v}_3} = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

es efectivamente una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Así, la matriz

$$P = \left[\ \widehat{\mathbf{v}_1}, \quad \widehat{\mathbf{v}_2}, \quad \widehat{\mathbf{v}_3}\ \right] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

es una posible matriz ortogonal como la pedida, y

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal tal que $PDP^T = A$.

Puntaje:

- Por encontrar los valores propios de A: 1 punto.
- Por encontrar un vector propio para $\lambda = 0$: 1 punto.
- Por encontrar un vector propio para $\lambda = 3$: 1 punto.
- Por encontrar un vector propio para $\lambda = -2$: 1 punto.
- Por normalizar los vectores propios: 1 punto.
- Por llegar a P y D: 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

4. Determine una base ortogonal para el espacio columna de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

En principio, el espacio columna es generado por las tres columnas de A (!Obvio!).

Debemos determinar si esas tres columnas forman o no una base, o sea, si son o no l.i.

Esto puede ser hecho, por ejemplo, escalonándola. El escalonamiento arroja tres pivotes, por lo que efectivamente forman una base.

Pero esta base no es ortogonal, por lo que debemos obtener una bse ortogonal para el mismo subespacio de $\mathbb{R}^4$.

Para esto es idel usar el método de Gram-Schmidt.

En este caso, este método funciona como sigue:

a) Sean $\mathbf{v}_1 = (3, 1, -1, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (-5, 1, 5, -7)$ y $\mathbf{v}_3 = (1, 1, -2, 8)$ los tres vectores que forman la base original del espacio columna. Buscamos un conjunto $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ tal que $\text{Gen}\,\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \text{Gen}\,\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

b) Tomamos $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (3, 1, -1, 3)$.

c) Tomamos $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \dfrac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{||\mathbf{w}_1||^2}\mathbf{w}_1 = (-5, 1, 5, -7) - \dfrac{-40}{20}(3, 1, -1, 3)$

$$= (-5, 1, 5, -7) + 2(3, 1, -1, 3) = (1, 3, 3, -1).$$

d) Tomamos

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{||\mathbf{w}_1||^2}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{||\mathbf{w}_2||^2}\mathbf{w}_2 &= (1, 1, -2, 8) - \frac{30}{20}(3, 1, -1, 3) - \frac{-10}{20}(1, 3, 3, -1) \\ &= (1, 1, -2, 8) - \left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ &= (-3, 1, 1, 3) \end{aligned}$$

Así, la base buscada es

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \{(3, 1, -1, 3), (1, 3, 3, -1), (-3, 1, 1, 3)\}.$$

Puntaje:

- Por indicar que la forma de obtener la base ortogonal es usando Gram-Schmidt, 0,5 ptos.
- Por obtener el primer vector de la nueva base como el primero de la original, 0,5 puntos.
- Por plantear correctamente el cálculo que debería dar el segundo vector de la nueva base, 1 punto.
- Por llevar a cabo correctamente los cálculos que permiten obtener dicho segundo vector, 1 punto.
- Por plantear correctamente el cálculo que debería dar el tercer vector de la nueva base, 1,5 puntos.
- Por llevar a cabo correctamente los cálculos que permiten obtener dicho segundo vector, 1,5 puntos.

5. Encuentre la recta $y = mx + n$, de mínimos cuadrados, que mejor se ajusta a los puntos

$$(0,1), \qquad (1,3), \qquad (2,7).$$

Solución:

Usamos las coordenadas x de los datos para construir la matriz de diseño X y las coordenadas y para construir el vector de observaciones $\mathbf{y}$:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Buscamos la solución β de mínimos cuadrados de $X\beta = \mathbf{y}$ (donde $\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$).

Para ello planteamos las *ecuaciones normales*:

$$X^T X\beta = X^T \mathbf{y},$$

o, en otras palabras, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$

Simplificando, tenemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

La solución de este sistema es

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 11 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Así, $m = \beta_1 = 3$ y $n = \beta_0 = \frac{2}{3}$, por lo que la ecuación de la recta buscada es

$$y = 3x + \frac{2}{3}.$$

Puntaje:

- Por plantear las ecuaciones normales $X^T X\beta = X^T\mathbf{y}$, 2 puntos.
- Por escribir las ecuaciones normales explícitamente como $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 17 \end{bmatrix}$, 2 puntos.
- Por resolver el sistema y llegar a $\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 3 \end{bmatrix}$, 1 punto.
- Por escribir la ecuación de la recta, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base

6. Sea A la matriz simétrica que representa a la forma cuadrática,

$$Q(\mathbf{x}) = Q(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 7x_2^2 + 11x_3^2 - 8x_1x_2 + 8x_1x_3.$$

a) Encuentre una matriz ortogonal P tal que el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ transforma la forma $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ en una forma cuadrátrica sin productos cruzados.

b) Escriba la forma cuadrática en la nuevas variables y clasifíquela.

Solución:

a) La matriz es $A = \begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ -4 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$. Como se indicó durante la prueba, sus valores propios son 3, 9 y 15.

Vectores propios correspondientes a estos valores propios son, respectivamente, $(2, 2, -1)$, $(1, -2, -2)$ y $(2, -1, 2)$. Estos tres vectores tienen norma 3, por lo que tras normalizarlos obtenemos, respectivamente, $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Así, la matriz

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal tal que $A = PDP^T$ con $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$ (o, equivalentemente, $D = P^T AP$), y es la matriz ortogonal buscada.

b) Si hacemos el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, tenemos

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) = (\mathbf{y}^T P^T)A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (P^T AP)\mathbf{y} \\ &= \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \mathbf{y}^T \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \mathbf{y} = 3y_1^2 + 9y_2^2 + 15y_3^2, \end{aligned}$$

que es la forma cuadrátrica escrita sin productos cruzados.

Como todos los elementos de la diagonal de D son positivos, la forma cuadrática es positiva definida.

Puntaje:

a)
- Por encontrar vectores propios de A, 1 punto.
- Por normalizar los vectores propios, 1 punto.
- Por encontrar la matriz P, 1 punto.

b)
- Por escribir la forma cuadrática en las nuevas variables (sin productos cruzados), 1,5 puntos.
- Por indicar que la forma es positiva definida (y dar una buena justificación), 1,5 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base

7. Determine la descomposición en valores singulares de la matriz,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Primero, calculamos $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Claramente, los valores propios de $A^T A$ son (en orden descendente) 3 y 2, con vectores propios unitarios correspondientes

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Con estos vectores como columnas formamos la matriz $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Los valores singulares son $\sigma_1 = \sqrt{3}$ y $\sigma_2 = \sqrt{2}$, por lo que la matriz $D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ y $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Para encontrar las columnas de la matriz U, comenzamos con los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Como estos dos vectores no generan $\mathbb{R}^3$, debemos encontrar un tercer vector $\mathbf{u}_3$ que —junto con $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$— complete una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Una forma de obtener este tercer vector es tomar

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left((1,1,-1) \times (0,1,1)\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Así,

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

con lo que

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

es la descomposición de la matriz A en valores singulares.

Puntaje:

- Por encontrar los valores singulares de A (lo que conlleva calcular $A^T A$ y sus valores propios), 1 punto.
- Por encontrar la matriz V, 1 punto.
- Por encontrar la matriz Σ, 1 punto.
- Por encontrar los vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, 1,5 ptos.
- Por encontrar un tercer vector $\mathbf{u}_3$ que completa una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, 1,5 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) Si A es una matriz de $m \times n$, entonces el rango de $A^T A$ y el de A es el mismo.

   b) Si A es una matriz ortogonal entonces A^2 es ortogonal y $\det(A) = 1$.

   c) Si $A = QR$, donde R es una matriz invertible, entonces A y Q poseen el mismo espacio columna.

Solución:

a) **VERDADERO.**

Ya que $A^T A$ y A tienen la misma cantidad de columnas, y para cualquier matriz M se tiene que

$$\text{rango}(M) + \dim(\text{Nul}(M)) = \text{ número de columnas de } M,$$

para probar que $\text{rango}(A^T A) = \text{rango}(A)$ basta probar que $\dim(\text{Nul}(A^T A)) = \dim(\text{Nul}(A))$. De hecho, probaremos que $\text{Nul}(A^T A)) = \dim(\text{Nul}(A)$.

En efecto:

1) si $\mathbf{x} \in \text{Nul}(A)$ entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, por lo que $A^T A\mathbf{x} = A^T(A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$, de donde $\mathbf{x} \in \text{Nul}(A^T A)$; así, $\text{Nul}(A) \subseteq \text{Nul}(A^T A)$.
2) si $\mathbf{x} \in \text{Nul}(A^T A)$ entonces $(A^T A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, por lo que $\mathbf{x}^T((A^T A)\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Pero, por otro lado, $\mathbf{x}^T((A^T A)\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T A^T)(A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x})$, y sabemos que esto es cero si y solo si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Así, si $\mathbf{x} \in \text{Nul}(A)$ entonces $\mathbf{x} \in \text{Nul}(A^T A)$, por lo que $\text{Nul}(A^T A) \subseteq \text{Nul}(A)$.

b) **FALSO.**

Considere, por ejemplo, la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Esta es una matriz ortogonal, pero su determinante es -1.

c) **VERDADERO.**

Partamos recordando que $\mathbf{v} \in \text{Col}(A)$ si y solo si existe $\mathbf{u}$ tal que $A\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Probamos, en general, que si B, C y D son matrices, B y C de $m \times n$, D de $n \times n$ y $B = CD$, entonces $\text{Col}(B) \subseteq \text{Col}(C)$.

En efecto: si $\mathbf{y} \in \text{Col}(B)$, entonces existe $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $B\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Pero entonces $\mathbf{y} = B\mathbf{x} = (CD)\mathbf{x} = C(D\mathbf{x})$, por lo que $\mathbf{y} \in \text{Col}(C)$. En otras palabras, $\text{Col}(B) \subseteq \text{Col}(C)$.

Usando lo anterior y tomando $B = A$, $C = Q$ y $D = R$, tenemos que $\text{Col}(A) \subseteq \text{Col}(Q)$; como además $Q = AR^{-1}$, tomamos $B = Q$, $C = A$ y $D = R^{-1}$, llegamos a $\text{Col}(Q) \subseteq \text{Col}(A)$.

Puntaje:

En cada parte, se dan los dos puntos si se da una justificación correcta.

En las partes (a) y (c) una buena justificación es una demostración.

En la parte (b) una buena justificación es un contraejemplo.

A lo anterior se le suma el punto base.