CLASE 9: FUNCIONES (Cont.)

- **Recordemos:**

  - **Relación**: $\mathcal{R} \subseteq A \times B$

    Sean $a \in A$, $b \in B$,

    a se relaciona con b

    $\Leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{R}$

    $\Leftrightarrow a\mathcal{R}b$

    Ej: $A = B = \mathbb{N}$

    $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \leq b$

    $(1,2), (7,11) \in \mathcal{R}$

    Obs: $(1,2), (1,3), (1,4), \ldots \in \mathcal{R}$

- **Funciones**: $R \subseteq A \times B$ es una función si $\forall a \in A, \exists! b \in B$ tq aRb

Ej: • La relación del ejemplo anterior no es una función: $2 \neq 3$, $(1,2),(1,3) \in R$

• $A=B=\mathbb{R}$, aRb si $b=a^2$, es una función.

• $A=B=\mathbb{R}$, aRb si $b^2=a$ no es una función: $(-1,b) \notin R \ \forall b \in \mathbb{R}$

es decir, $\nexists b \in B$ tq $(-1,b) \in R$

• $A=[0,\infty)$, $B=[0,\infty)$, aRb si $b^2=a$ es función: si $a \geq 0$, $aRb \iff b=\sqrt{a}$.

Si $R \subseteq A \times B$ es una función, anotamos

$$b = f(a) \iff aRb$$

Ej: aRb si $b=a^2$, entonces $f(a)=a^2$

También denotamos

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

- A es el dominio de f : $\operatorname{Dom} f = A$
- El recorrido de f es

$$\operatorname{Rec} f = \{ y \in B : \exists x \text{ tq } y = f(x) \} = f(A)$$

(también conocido como rango o imagen)

- $f(x)$ se conoce como la imagen de x bajo f.

- <u>Obs</u>:
  - $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$ es función.

    $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$

    $$\begin{aligned} g : [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$ también es función

    $\operatorname{Dom} g = [0,\infty)$

Notamos que $f \neq g$: $\mathrm{Dom} f \neq \mathrm{Dom} g$

($f = g$ ssi $\mathrm{Dom} f = \mathrm{Dom} g$ y
$f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathrm{Dom} f$)

- $A = B = \mathbb{R}$, aRb ssi $b^2 = a$, no es función: $b^2 \geq 0, \forall b \in \mathbb{R}$, luego, si $a < 0$, no se relaciona con ningún $b \in \mathbb{R}$.
$\rightsquigarrow$ $\sqrt{x}$ no se puede definir para $x < 0$.

Sin embargo,

$$\begin{aligned} f : [0,\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$ es función

- En general, si no especificamos el dominio de f, se asume que su dominio es el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x)$ está bien definido.

Esto se conoce a veces como dominio natural o maximal

Ej: $f(x)=\sqrt{x} \rightsquigarrow \operatorname{Dom} f=[0,\infty)$

• Ej: • $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

$$\operatorname{Dom} f=\{x\in\mathbb{R}: x-1\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

• $f(x)=\sqrt{3-x}$

$$\operatorname{Dom} f=\{x\in\mathbb{R}: 3-x\geq 0\}=(-\infty,3]$$

• $f(x)=\sqrt{x^2+x-6}$

$$\operatorname{Dom} f=\{x\in\mathbb{R}: x^2+x-6\geq 0\}=\ ?$$

Ahora, $x^2+x-6\geq 0$

$\iff (x-2)(x+3)\geq 0$

$\iff x\in(-\infty,-3]\cup[2,\infty)$

$\mathrm{Dom} f = (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$

- $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ $\quad g(x) = x+1$

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ $\quad \mathrm{Dom}\, g = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f \neq g$

Ahora, si $x \neq 1$, entonces

$$f(x) = \frac{(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1 = g(x)$$

- Ej: Encuentre el dominio y el rango de la función $f(x) = x^2 + 2x + 4$.

Sol:

- $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}$: la fórmula tiene sentido $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $\mathrm{Rec} f = \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 2x + 4 \\ &= x^2 + 2x + 1 + 3 \\ &= (x+1)^2 + 3 \end{aligned}$$

Luego, $f(x) \geq 3$.

Por lo tanto, $y < 3 \Rightarrow y \notin \text{Rec } f$

Es decir, $(-\infty, 3) \subseteq (\text{Rec } f)^c$

$\Leftrightarrow \text{Rec } f \subseteq [3, \infty)$

Demostremos que $\text{Rec } f \supseteq [3, \infty)$:

Sea $y \geq 3$. Luego,

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = (x+1)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow y - 3 = (x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y-3} = |x+1|$$

$$\Leftrightarrow x+1 = \sqrt{y-3} \text{ o } x+1 = -\sqrt{y-3}$$

$$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{y-3} \text{ o } x = -1 - \sqrt{y-3}$$

Conclusión: si $x = -1 \pm \sqrt{y-3}$, entonces

$$f(x) = y$$

Por lo tanto, $y \in \text{Rec } f$.

• Ej.: Encuentre el dominio y recorrido de la función $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$.

Sol:

• $\text{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0\}$
$= [1, \infty)$

• $\text{Rec} f = ?$

Observamos que $f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \geq 2$

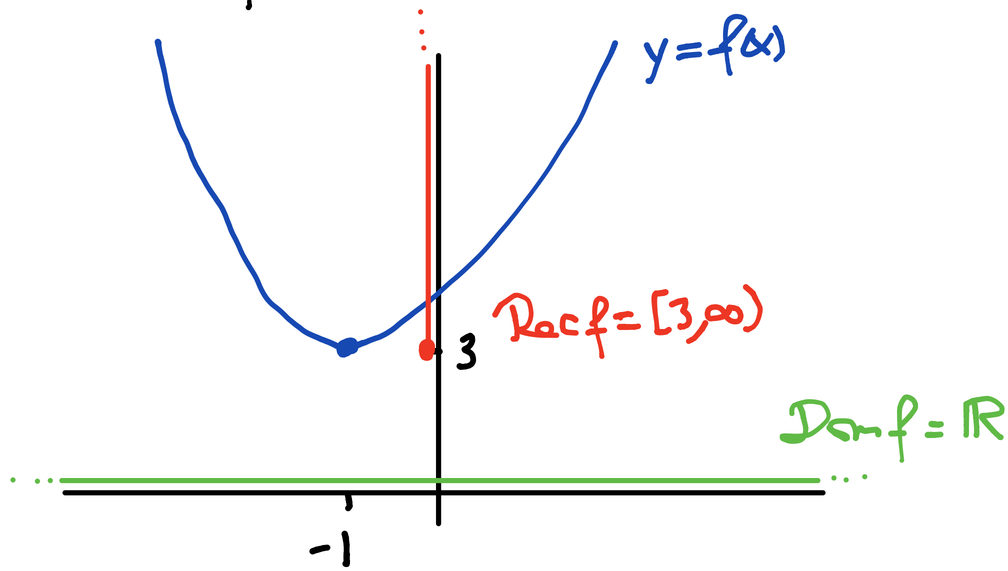
$\Rightarrow \text{Rec} f \subseteq [2, \infty)$

Ahora, sea $y \geq 2$. Luego

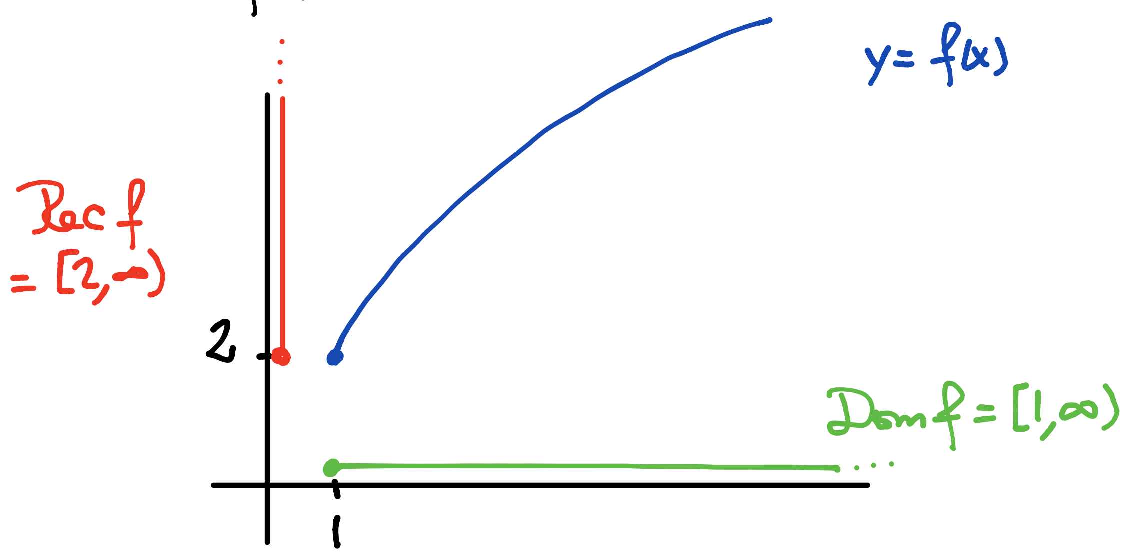
$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \sqrt{x-1} + 2 \\ &\Leftrightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \\ &\Leftrightarrow (y-2)^2 = x - 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 + (y-2)^2 \end{aligned}$$

Es decir, si $y \geq 2$, entonces $y = f(1 + (y-2)^2)$.

• **Obs**: • $f(x) = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$



• $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$



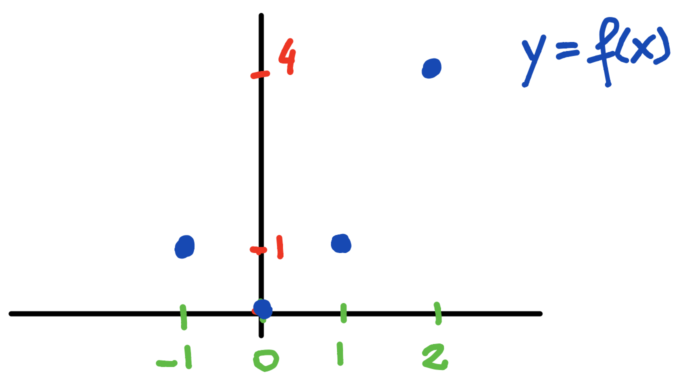
• **DEF**: Sea $f: A \longrightarrow B$ una función.

La <u>gráfica</u> de f se define como el conjunto

$$\mathcal{F} = \{ (x, f(x)) : x \in A \} \quad (\subseteq A \times B)$$

• **Ej**: $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \mathbb{R}$

$f(-1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 4$



• <u>Ej</u>: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$