EYP1027 Métodos Probabilísticos

Clase 4

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Contenido I

La probabilidad geométrica se usa en el caso continuo y asume una distribución uniforme sobre la region que define el espacio muestral.

Definición 1.1

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible, y supongamos que una medida geométrica $m(\cdot)$ tal como longitud, área o volumen, es definida sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. Definimos la probabilidad geométrica de un evento A de la siguiente manera,

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

A continuación, damos algunos ejemplos que muestran el cálculo de probabilidad geométrica.

Modelo de Probabilidad

Ejemplo 1.1

Calcule la probabilidad de que un punto elegido al azar se encuentre en un segmento de línea $\overline{AC}$ de una línea $\overline{AB}$(ver Figura 1)

La probabilidad de que el punto esté en $\overline{AC}$ es

$$\frac{\text{Longitud de } \overline{AC}}{\text{Longitud de } \overline{AB}} = \frac{4}{15}$$

Modelo de Probabilidad

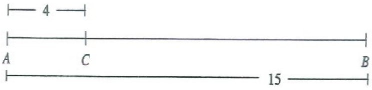

Figura 1: Segmentos de línea. Fuente: Blanco et al. (2012)

Ejemplo 1.2

María Victoria y Carlos acordaron reunirse en el centro de la cuidad entre las 12 del mediodía y la 1 de la tarde. Ambos llegan allí en cualquier momento en ese intervalo de tiempo. Suponiendo que sus horarios de llegada sean independientes, encuentre,

(i) La probabilidad de que Carlos y María Victoria se encuentren si ambos esperan por el otro 10 minutos como máximo.

(ii) La probabilidad de que Carlos y María Victoria se encuentren si María Victoria espera 5 minutos pero Carlos espera 20.

(i) Sean X e Y eventos definidos como,

$$\begin{aligned} X &= \{\text{Hora de llegada de María Victoria}\}, \\ Y &= \{\text{Hora de llegada de Carlos}\}. \end{aligned}$$

El espacio muestral, en este caso, viene dado por,

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 60, 0 \leq y \leq 60\right\}$$

Deseamos medir la probabilidad del evento,

$$T = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| \leq 10\}$$

Por lo tanto, ver Figura 2,

$$P(T) = \frac{\text{área de } T}{\text{área de } \Omega} = \frac{11}{36}.$$

Modelo de Probabilidad

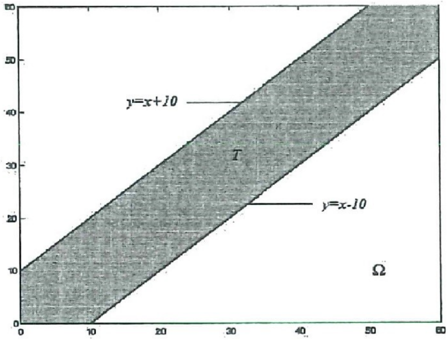

Figura 2: Evento de interés T y espacio muestral. Fuente: Blanco et al. (2012)

(ii) La Figura 3 corresponde al conjunto de puntos T que representan los horarios de llegada de Carlos y María Victoria que les permiten reunirse. Por lo tanto, la probabilidad deseada es,

$$P(T) = \frac{\text{área de } T}{\text{área de } \Omega} = \frac{103}{288}.$$

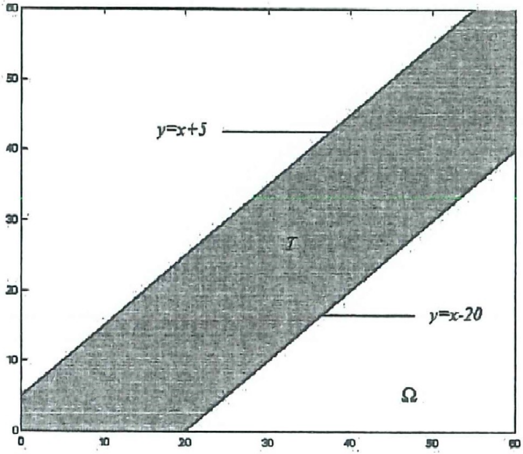

Figura 3: Evento de interés T y espacio muestral. Fuente: Blanco et al. (2012)

Todas las probabilidades que hemos tratado hasta ahora han sido probabilidades incondicionales. Se definió un espacio muestral y se calcularon todas las probabilidades con respecto a ese espacio muestral.

Sin embargo, en muchas situaciones, hay que actualizar el espacio muestral en función de una nueva información; por ejemplo, porque se dispone de información parcial sobre el resultado del experimento aleatorio.

En tales casos, las probabilidad calculadas en base al modelo original deben modificarse (actualizarse) a partir de las denominadas probabilidades condicionales.

Para motivar de mejor forma la definición de probabilidad condicional, vamos considerar primero un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1.3

Sean $\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,\ldots,6\} = \{1,2,3,4,5,6\}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $P(A) = \frac{N(A)}{36}$ $\forall\, A \in \mathcal{A}$. Para dos eventos A y B en $\mathcal{A}$, note que $\Omega = B + B^c$ y $A = AB + AB^c$; es decir, tanto Ω como A pueden ocurrir de dos formas excluyentes, con B o con B^c. Por ejemplo, si

$$
\begin{aligned}
A &= \{(i,j) : i,j = 1,\ldots,6, i+j > 6\} \\
&= \{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(2,6),(6,2),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(3,6),(6,3), \\
&\quad (4,4),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\} \;\Rightarrow\; P(A) = 21/36, \\
B &= \{(3,j) : j = 1,\ldots,6\} = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\} \;\Rightarrow\; P(B) = 6/36, \\
AB &= \{(3,4),(3,5),(3,6)\} \;\Rightarrow\; P(AB) = 3/36, \\
AB^c &= A - AB = A - \{(3,4),(3,5),(3,6)\} \;\Rightarrow\; P(A^cB) = 18/36.
\end{aligned}
$$

Pero la ocurrencia de B descarta la ocurrencia de B^c y por tanto la de AB^c; entonces, al saber que B ocurrio, las posibilidades de Ω y A quedan reducidas a las chances de B y AB, respectivamente. En tal caso, el axioma A3) de la definición de probabilidad, nos fuerza a renormalizar la probabilidad de A en base la probabilidad de B; es decir, la probabilidad de que A ocurra dado que B ocurrio, es $\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3}{6}$.

Definición 1.2

Probabilidad Condicional Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Si $A, B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$, entonces la probabilidad condicional del evento A dado B se define como,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Teorema 1.1

Medida de Probabilidad Condicional: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, y sea $B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$. Entonces, $P(\cdot|B)$ es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ centrada en B, es decir, $P(B|B) = 1$

Demostración 1.1

Se deben verificar los tres axiomas de una medida de probabilidad.

A1) Claramente $P(A|B) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$

A2) $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$. Por lo tanto, también tenemos que $P(B|B) = 1$.

A3) Sea $A_1, A_2, \cdots$ una secuencia de eventos disjuntos en $\mathcal{A}$. Entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) = \frac{P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(A_i \cap B\right)\right)}{P(B)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i \cap B\right)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i|B\right).$$

Nota: El Teorema 1.1 implica que $P(\cdot|B)$ debe verificar todas la propiedades de una medida de probabilidad. Además, la Definición 1.2 implica que $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, lo cual queda generalizado en la parte II) del siguiente teorema.

Teorema 1.2

I) Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, y sea $B \in \mathcal{A}$ con $P(B) > 0$. Entonces,

1) Si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A|B) = 0$.
2) $P(A \cap C|B) = P(A|B \cap C)P(C|B)$ si $P(B \cap C) > 0$.

II) Si $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ con $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, entonces se tiene la siguiente **regla multiplicativa:**

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \cdots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Demostración 1.2

1) Note que $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0.$

2) Basta notar que,

$$\begin{aligned} P(A \cap C|B) &= \frac{P(A \cap C \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \times \frac{P(B \cap C)}{P(B)} \\ &= P(A|B \cap C)P(C|B). \end{aligned}$$

3) Ejercicio para el lector.

Ejemplo 1.4

Se reparten cuatro cartas desde la parte superior de una baraja bien barajada. Cuál es la probabilidad de que las cuatro cartas sean ases ? Podemos calcular esta probabilidad por los métodos de la Clase 3. El número de grupos distintos (muestras ordenadas s/d) de cuatro cartas es

$$\binom{52}{4} = 270725$$

Solo uno de estos grupos (muestras) consta de los cuatro ases y cada grupo (muestra) es igualmente probable, por lo que la probabilidad de recibir los cuatro ases es 1/270725

También podemos calcular esta probabilidad usando la regla del producto. En efecto, defina los eventos

$$A_i = \{\text{la } i\text{-ésima carta es un as}\}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Luego, la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{4}{52}\frac{3}{51}\frac{2}{50}\frac{1}{49} \\ &= \frac{1}{270725}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.5

Continuación ejemplo anterior Aunque la probabilidad de obtener los cuatro ases es bastante pequeña, veamos cómo cambian las probabilidades condicionales dado que algunos ases ya han sido extraídos. Se repartirán cuatro cartas de una baraja bien barajada, y ahora calculamos

$$P(4 \text{ ases en } 4 \text{ cartas } | i \text{ ases en } i \text{ cartas}),\ i = 1, 2, 3$$

El evento $\{4 \text{ ases en } 4 \text{ cartas }\}$ es un subconjunto del evento $\{i \text{ ases en } i \text{ cartas}\}$. Por lo tanto, de la definición de probabilidad condicional, sabemos que

$$P(4 \text{ ases en } 4 \text{ cartas } | i \text{ ases en } i \text{ cartas })$$

$$= \frac{P(\{4 \text{ ases en } 4 \text{ cartas }\} \cap \{i \text{ ases en } i \text{ cartas }\})}{P(i \text{ ases en } i \text{ cartas })}$$
$$= \frac{P(4 \text{ ases en } 4 \text{ cartas })}{P(i \text{ ases en } i \text{ cartas })}.$$

El numerador ya se ha calculado y el denominador se puede calcular con un argumento similar. El número de grupos distintos de i cartas es $\binom{52}{i}$, y

$$P(i \text{ ases en } i \text{ cartas }) = \binom{4}{i} / \binom{52}{i}.$$

Por lo tanto, la probabilidad condicional está dada por,

$P(4 \text{ ases en } 4 \text{ cartas}|i \text{ ases en } i \text{ cartas})$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\binom{52}{i}}{\binom{52}{4}\binom{4}{i}} \\
&= \frac{(4-i)!48!}{(52-i)!} \\
&= \frac{1}{\binom{52-i}{4-i}}.
\end{aligned}
$$

Para $i = 1, 2,$ y 3, las probabilidades condicionales son .00005, .00082, y .02041, respectivamente.

Ejemplo 1.6

Urna de Polya: Una caja contiene inicialmente r bolitas rojas y b bolitas blancas. En cada prueba se extrae una bolita al azar, se observa su color y se devuelve a la caja junto a otras c bolitas de su mismo color. Se desea la probabilidad de que aparezca una bolita roja en cada una de las tres primeras pruebas.

Sea A_i: se extrae una bolita roja en la prueba i, para $i = 1, 2, 3$. Se pide,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \\ &= \left(\frac{r}{r+b}\right)\left(\frac{r+c}{r+b+c}\right)\left(\frac{r+2c}{r+b+2c}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo 1.7

Tres adolescentes quieren entrar a ver una película con clasificación XXX. En la taquilla, se les pide que presenten sus identificaciones; después de que el empleado las revisa y les niega la entrada, devuelve las identificaciones al azar. Encuentre la probabilidad de que ninguno de los adolescentes obtenga su propia identificación.

Sean $A = \{\text{Ninguno de los adolescentes tiene su propia ID}\}$ y $B_i = \{\text{El } i\text{−ésimo adolescente obtiene su propio ID}\}$, $i = 1, 2, 3$. Claramente, la probabilidad que buscamos es,

$$
\begin{aligned}
P(A) =& P\left(B_1^c \cap B_2^c \cap B_3^c\right) \\
=& 1 - P\left(B_1 \cup B_2 \cup B_3\right) \\
=& 1 - P\left(B_1\right) - P\left(B_2\right) - P\left(B_3\right) + P\left(B_1 \cap B_2\right) \\
& + P\left(B_2 \cap B_3\right) + P\left(B_1 \cap B_3\right) - P\left(B_1 \cap B_2 \cap B_3\right).
\end{aligned}
$$

Dado que hay 6 forma posibles y solo 2 son favorables al evento B_i, $P(B_i) = 1/3$ para $i = 1, 2, 3$. Por otro lado, para cualquier $i \neq j$

$$P\left(B_i \cap B_j\right) = P\left(B_i\right) P\left(B_j | B_i\right) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

notando que, después de entregar al adolescente i la identificación correcta, para el adolescente de j sólo hay una opción favorable de dos posibles. De forma similar,

$$\begin{aligned} P\left(B_1 \cap B_2 \cap B_3\right) &= P\left(B_1\right) P\left(B_2 | B_1\right) P\left(B_3 | B_1 \cap B_2\right) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por lo tanto,

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

Teorema 1.3

Teorema de probabilidad total Sea $B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{A}$ una partición finita o contable de Ω, es decir, $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ y $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ tal que $P(B_i) > 0$ para todo i. Entonces, para cualquier $A \in \mathcal{A}$,

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)\, P(B_i)\, .$$

Demostración 1.3

Observe que, $A = A \cap \Omega = A \cap (\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \cup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)$; luego,

$$P(A) = P(\cup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i)) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)\, P(B_i)\, ,$$

lo cual prueba el teorema.

Modelo de Probabilidad

Corolario 1.1

Regla de Bayes Sea $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ una partición finita o contable de Ω con $P(A_i) > 0$ para todo i. Entonces, para cualquier $A \in \mathcal{A}$ con $P(A) > 0$

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\, P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)\, P(B_j)} \text{ para todo } i$$

Demostración 1.4

De la definición de probabilidad condicional,

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)\, P(B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)\, P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)\, P(B_j)}.$$

Ejemplo 1.8

Suponga que sólo una cuarta parte de la población mundial está vacunada contra una determinada enfermedad contagiosa. Durante el curso de una epidemia debido a dicha enfermedad, se observa que de cada 5 personas enfermas sólo una fue vacunada. También se sabe que de cada 12 personas vacunadas, sólo 1 está enferma. Calcule la probabilidad de que una persona no vacunada esté enferma.
Defina los eventos
$V = \{\text{La persona está vacunada}\}$ y $E = \{\text{La persona está enferma}\}$.
De la información, tenemos, $P(V|E) = 1/5, P(E|V) = 1/12$, y $P(V) = 1/4$. Sea $x = P\left(E|V^c\right)$ la probabilidad pedida; luego:

$$x = \frac{P\left(V^c|E\right) P(E)}{P\left(V^c\right)} = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4}x\right)}{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \frac{1}{9}.$$

Ejemplo 1.9

Se sabe que la población de una determinada ciudad consta de 45 % mujeres y 55 % hombres. Suponga que 70 % de los hombres y 10 % de las mujeres fuman. Encuentre la probabilidad de que un fumador sea hombre. Sea F el evento de que una persona sea fumadora, H el evento de que una persona sea hombre y M el evento de que una persona sea mujer. Se tiene, $P(H) = 0.55, P(M) = 0.45$ y $P(F|H) = 0.70$, y la probabilidad pedida es,

$$
\begin{aligned}
P(H|F) &= \frac{P(F|H)P(H)}{(P(F|H)P(H) + P(F|M)P(M)} \\
&= \frac{(0.70) \times (0.55)}{(0.70) \times (0.55) + (0.45) \times (0.10)} \\
&= 0.895.
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.10

Dunlop Company produce neumáticos que pasan por una máquina de prueba automática. Se observa que 5 % de los neumáticos que ingresan a la máquina de prueba están defectuosos. Sin embargo, la máquina de prueba automática no es completamente confiable. Si un neumático es defectuoso, hay una probabilidad de 0.04 de que no sea rechazado. Si un neumático no esta defectuoso, hay una probabilidad 0.06 de que sea rechazado. Cuál es la probabilidad de que los neumáticos rechazados no esten defectuosos ? Además, qué fracción de los no rechazados son defectuosos ?

Sea D el evento de que el neumático este defectuoso y R el evento de que el neumático sea rechazado. Se tiene,
$P(D) = 0.05, \quad P(D^c) = 1 - P(D) = 0.95$ y
$P(R^c|D) = 0.04$ y $P(R|D^c) = 0.06$.

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
P(D^c|R) &= \frac{P\left(D^c\right) P\left(R|D^c\right)}{P\left(D^c\right) P\left(R|D^c\right) + P(D)P(R|D)} \\
&= \frac{P\left(D^c\right) P\left(R|D^c\right)}{P\left(D^c\right) P\left(R|D^c\right) + P(D)(1 - P\left(R^c|D\right))} \\
&= \frac{0.95(0.06)}{0.95(0.06) + 0.05(1 - 0.04)} \\
&= 0.542
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$
\begin{aligned}
P(D|R^c) &= \frac{P(D)P\left(R^c|D\right)}{P(D)P\left(R^c|D\right) + P\left(D^c\right) P\left(R^c|D^c\right)} \\
&= \frac{0.05(0.04)}{0.05(0.04) + 0.95(1 - 0.06)} \\
&= 0.002.
\end{aligned}
$$

Definición 1.3

Distribuciones a Priori y a Posteriori Sea $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{A}$ una partición finita o contable de Ω con $P(B_i) \geq 0$ para todo i. Si $A \in \mathcal{A}$ con $P(A) > 0$; a $\{P(B_n)\}_{n\geq 1}$ se le llama distribución a priori, es decir, antes de que A ocurra, y a $\{P(B_n|A)\}_{n\geq 1}$ se le llama distribución a posteriori, es decir, después que A ocurrió.

Ejemplo 1.11

En una ciudad, se realizan pruebas para detectar una determinada enfermedad. Suponga que 1 % de las personas sanas están registradas como enfermas, 0.1 % de la población está realmente enferma y 90 % de los enfermos se reportan como tales. Deseamos calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar que se reporta como enferma esté realmente enferma.

Si definimos los eventos, $E = \{\text{la persona está realmente enferma}\}$ y $R = \{\text{la persona es reportada como enferma}\}$; desde la información anterior, sabemos que, $P(E) = 0.001$, $P(R|E^c) = 0.01$, y $P(R|E) = 0.9$ Luego,

$$P(E|R) = \frac{P(R|E)P(E)}{P\left(R|E^c\right)P\left(E^c\right) + P(R|E)P(E)} = \frac{0.9 \times 0.001}{0.01 \times 0.999 + 0.9 \times 0.001}$$
$$= 8.2645 \times 10^{-2} \approx 0.083$$

En este caso tenemos,

i) Distribución a priori: $= \left(P(E), P\left(E^c\right)\right) = (0.001, 0.999)$,

ii) Distribución a posteriori: $= \left(P(E|R), P\left(E^c|R\right)\right) = (0.083, 0.917)$.

A veces, la ocurrencia de un evento B no afecta la probabilidad de otro evento A, es decir,

$$P(A|B) = P(A)$$

En este caso, decimos que el evento A es independiente del evento B. La definición de $P(A|B)$ requiere que $P(B) > 0$. Para evitar esta condición, definimos independencia de la siguiente manera.

Definición 1.4

Eventos Independientes Dos eventos A y B se dicen independientes si y solo si,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Por el contrario, si no se cumple esta condición, se dice que los eventos son dependientes.

Ejemplo 1.12

Supongamos que un dado justo se tira dos veces. Sea,

$A = \{$La suma de los resultados obtenidos es un número par$\}$, y

$B = \{$El resultado del segundo lanzamiento es par$\}$.

En este caso,

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

En consecuencia, los eventos son independientes.

Ejemplo 1.13

Supongamos, ahora, que se extrae una carta al azar de una baraja de 52 cartas. Sean,

$$A = \{ \text{ Sale Rey}\} \quad \text{y} \quad B = \{ \text{ Sale Corazón}\}.$$

Entonces

$$A \cap B = \{ \text{ Sale Rey de Corazón}\}$$

En este caso,

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \quad \text{y} \quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Además, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52} = \dfrac{1}{13} \times \dfrac{1}{4} = P(A)P(B) \Longrightarrow A$ y B son independientes.

Modelo de Probabilidad

Teorema 1.4

Las siguientes afimaciones son equivalente.

i) A y B son eventos independientes
ii) A y B^c son eventos independientes
iii) A^c y B son eventos independientes
iv) A^c y B^c son eventos independientes.

Demostración 1.5

Ejercicio para el lector. *Idea: i) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) $\Rightarrow$ i)*. Por ejemplo, i) $\Rightarrow$ ii): por demostrar que si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ entonces $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$. En efecto,

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

En muchos casos es necesario analizar la independencia de dos o más eventos. En este contexto, la definición de independencia debe ser más amplia.

Definición 1.5

Familia Independiente Una familia de eventos $\{A_i : i \in I\}$ se dice independiente si

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i)$$

para cada subconjunto finito $J \neq \emptyset$ de I. En tal caso, también se dice que los eventos A_i, $i \in I$, son mutuamente independientes.

Modelo de Probabilidad

Nota: Si $I = \{1, \ldots, n\}$, entonces se deben verificar $2^n - n - 1$ para que $A_1, \ldots, A_n$ sean eventos mutuamente independientes.

Por ejemplo, para $n = 3$ hay que verificar las siguientes $2^3 - 3 - 1 = 4$ ecuaciones para que los eventos A_1, A_2, y A_3 sean (mutuamente) independientes:

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2), \\
P(A_1 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_3), \\
P(A_2 \cap A_3) &= P(A_2)P(A_3), \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2)P(A_3).
\end{aligned}$$

Modelo de Probabilidad

Definición 1.6

Eventos independientes de a pares Una familia de eventos $\{A_i : i \in I\}$ se dice independiente de a pares si,

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j) \quad \text{para todo } i \neq j.$$

Independencia de a pares no implica independencia de la familia o eventos mutuamente independientes.

Ejemplo 1.14

Suponga que el espacio muestral Ω consiste de las 3! permutaciones de la letras a, b, and c junto con las tres ternas de cada letra. O sea,

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{lll} \text{aaa} & \text{bbb} & \text{ccc} \\ \text{abc} & \text{bca} & \text{cba} \\ \text{acb} & \text{bac} & \text{cab} \end{array} \right\}$$

Además, suponga que cada elemento de Ω tiene probabilidad $\frac{1}{9}$.

Definamos,

$A_i = \{\text{el } i-\text{ésimo lugar en la terna está ocupado por a}\}$, $i = 1, 2, 3$.

Note que $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{aaa\}$

Entonces, es fácil ver que,

$$P(A_i) = \frac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

y

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{9},$$

$$\Longrightarrow \; P(A_i \cap A_j) = P(A_i \cap A_j) \, \forall \, i > j$$

implicando que los eventos A_1, A_2 y A_3 son independientes de a pares. Sin embargo,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{9} \neq P(A_1) \, P(A_2) \, P(A_3)$$

de modo que los eventos A_1, A_2 y A_3 no son mutuamente independientes.

Modelo de Probabilidad

Tarea. Muestre los siguientes resultados:

1) Eventos con probabilidad 0 o 1 son independientes de cualquier otro evento.
2) Un evento A es independiente de si mismo $\iff P(A) = 0$ o $P(A) = 1$
3) Si $AB = \emptyset \implies$ los eventos A y B no son independientes, a menos que $P(A) = 0$ o $P(B) = 0$
4) Si $A_1, \ldots, A_n$ son eventos mutuamente independientes $\implies$ $B_1, \ldots, B_n$ también son eventos mutuamente independientes, donde $B_i = A_i$ o A_i^c.
5) Si $A_1, \ldots, A_n$ son eventos mutuamente independientes, muestre que $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$.

References

Blanco, L., Arunachalam, V. y Dharmaraja, S. (2012). *Introduction to Probability and Stochastic Processes.* John Wiley, New Jersey.

Casella, G. y Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference.* Second Edition. Duxbury, California.