Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2022

MAT1203 – Álgebra Lineal

Solución Interrogación 2

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. Encontrar (explícitamente), si es que existe, una matriz B tal que $AB = A^2 + 3A$.

   Solución. Si la matriz A es invertible, entonces multiplicando por A^{-1} a la izquierda obtenemos

$$AB = A^2 + 3A \iff A^{-1}(AB) = A^{-1}(A^2 + 3A) \iff B = A + 3I\ .$$

Luego la matriz B existe si A es invertible y puesto que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\ ,$$

A es equivalente a la identidad y, por lo tanto es invertible. Así que la matriz B existe y está dada por

$$B = A + 3I = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}\ .$$

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por encontrar una expresión algebraica para la matriz B.
- 2 puntos por mostrar que A es invertible.
- 2 puntos por exhibir explícitamente la matriz B.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix}$. Encuentre una factorización de la forma $A = LU$, con L triangular inferior (con unos en la diagonal) y U triangular superior.

Solución. Buscaremos la forma escalonada de A solo usando operaciones elementales de reemplazo de filas

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & -9 \\ 0 & -16 & -11 & 18 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U\,.$$

Las entradas resaltadas en la reducción a la forma escalonada, determinan la reducción por filas de A a U. En cada columna pivote, divida las entradas resaltadas entre el pivote y coloque el resultado en L:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \\ -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

$$\div 3 \quad \div(-2) \quad \div(-1) \quad \div(-1)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 2 & -5 & 1 & \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Un cálculo fácil comprueba que estas L y U satisfacen que $LU = A$.

Puntaje Pregunta 2.

- 3 puntos por encontrar la matriz U.
- 3 puntos por encontrar la matriz L.

3. Suponga que $A = BU$ con

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$$

Calcule $\det(3A)$.

Solución. Como U es triangular superior, entonces $\det(U) = \frac{1}{9} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{21}$.
Por otra parte, tres intercambios de fila reducen B en una matriz triangular inferior

$$B \sim \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = B_1$$

por lo que $\det(B) = -\det(B_1) = -\left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 2\right) = -1$. Entonces

$$\det(3A) = 3^4 \det(BU) = 81 \det(B) \det(U) = -\frac{81}{21} = -\frac{27}{7}.$$

Puntaje Pregunta 3.

- 1,5 puntos por obtener el determinante de la matriz U.
- 1,5 puntos por obtener el determinante de la matriz B.
- 1,5 puntos por usar las propiedades del determinante para obtener que $\det(A) = \det(B)\det(U)$.
- 1,5 puntos por usar la propiedades del determinante para obtener que $\det(3A) = 3^4 \det(A)$.

4. Utilizando el método de Cramer determine la segunda columna de la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

Solución. Para determinar la segunda columna de la inversa de A, se debe resolver el sistema matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$. Como $\det(A) = 6 \neq 0$, este sistema tiene solución única. Luego aplicando la regla de Cramer al vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ es solución de este sistema y sus componentes son:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\det A_1(x)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \\
x_2 &= \frac{\det A_2(x)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}}{6} = -\frac{22}{6} = -\frac{11}{3} \\
x_3 &= \frac{\det A_3(x)}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

luego la segunda columna de la inversa de A es $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7/3 \\ -11/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$.

Puntaje Pregunta 4.

- 1,5 puntos por establecer que determinar la segunda columna de la inversa de A es equivalente a resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2$.
- 1,5 puntos por determinar el valor de x_1.
- 1,5 puntos por determinar el valor de x_2.
- 1,5 puntos por determinar el valor de x_3.

5. Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} 2s+4t \\ 2s \\ 2s-3t \\ 5t \end{bmatrix}$, donde s y t son números reales.

Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

Solución. Notemos que

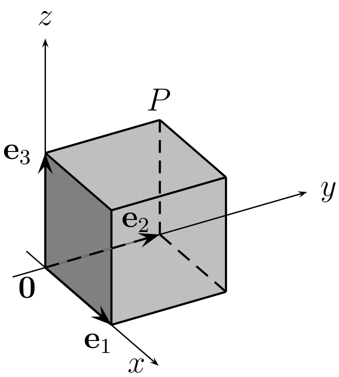
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 2s+4t \\ 2s \\ 2s-3t \\ 5t \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \mid s,t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

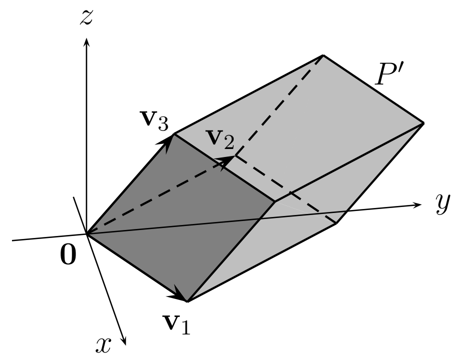
Luego W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

Puntaje Pregunta 5.

- 6 puntos por mostrar que W es el conjunto generado de dos vectores.

6. Sea P el paralelepípedo en $\mathbb{R}^3$ que está determinado por los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ y sea P' el paralelepípedo que está determinado por los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Véase la figura.





a) Determine una matriz A que representa la transformación lineal tal que $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1$, $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2$ y $T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{v}_3$.

b) Suponga que $T(P) = P'$. Determine el volumen del paralelepípedo P'.

Solución.

a) Tenemos que $A\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1$, $A\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{e}_3 = \mathbf{v}_3$. Entonces

$$A = AI = A\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\mathbf{e}_1 & A\mathbf{e}_2 & A\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Tenemos que el determinante de la matriz A es

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2(4-1) + 1 = 7\,.$$

Se sabe que

$$\mathrm{Vol}(P') = \mathrm{Vol}(P) \cdot |\det(A)| = 1 \cdot 7 = 7\,.$$

Puntaje Pregunta 6.

- 3 puntos por determinar la matriz A.
- 3 puntos por encontrar el $\mathrm{Vol}(S')$.

7. Determine una matriz A de manera que el espacio columna de A sea

$$\text{Col } A = \left\{ \begin{bmatrix} b-c \\ 2b-5d \\ b-3c+3d \\ -c+d \end{bmatrix} \mid b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Solución. Un elemento en este conjunto se puede escribir como

$$b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

donde b, c y d son números reales. Luego el conjunto es Col A donde $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Puntaje Pregunta 7.

- 6 puntos por encontrar la matriz A.

8. Sea $M_{2\times 2}$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2, y se define $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ mediante $T(A) = BA$, donde $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

   a) Demuestre que T es una transformación lineal.

   b) Encuentre el núcleo de la transformación lineal T.

Solución.

a) Debemos probar que, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $A_1, A_2 \in M_{2\times 2}$ entonces:

- $T(A_1 + A_2) = T(A_1) + T(A_2)$.
- $T(\alpha A_1) = \alpha T(A_1)$.

En efecto, usando las propiedades distributivas de la multiplicación de matrices vemos que

$$T(A_1 + A_2) = B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2 = T(A_1) + T(A_2)$$

Además, se tiene que

$$T(\alpha A_1) = B(\alpha A_1) = \alpha(BA_1) = \alpha T(A_1)\,.$$

b) A está en el núcleo de T si $T(A) = \mathbf{0}$ (matriz cero) o equivalentemente

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 3a_{11} + a_{21} & 3a_{12} + a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es sencillo ver que $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22}$, por lo tanto $\mathrm{Nul}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Otra forma: Como B es invertible, multiplicando por B a la izquierda obtenemos

$$BA = \mathbf{0} \iff B^{-1}(BA) = B^{-1}\mathbf{0} \iff A = \mathbf{0}\,,$$

por lo que $\mathrm{Nul}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Puntaje Pregunta 8.

- 1,5 puntos por mostrar que $T(A_1 + A_2) = T(A_1) + T(A_2)$.
- 1,5 puntos por mostrar que $T(\alpha A_1) = \alpha T(A_1)$.
- 3 puntos por mostrar que $\mathrm{Nul}(T) = \{\mathbf{0}\}$.