PREGUNTA 1

a) $F'(x) = f'(x\cdot f(x\cdot f(x)))\cdot(x\cdot f(x\cdot f(x)))'$

$= f'(x\cdot f(x\cdot f(x)))\,(f(x\cdot f(x)) + x\, f'(x\cdot f(x))\cdot(x\cdot f(x))')$

$= f'(x\cdot f(x\cdot f(x)))\,(f(x f(x)) + x f'(x f(x))(f(x) + x f'(x)))$

~~1.5~~ 2 ptos (sin pto intermedio)

$\Rightarrow F'(1) = f'(f(f(1)))\,[f(f(1)) + f'(f(1))(f(1) + f'(1))]$

$= f'(3)\,[3 + f'(2)(2+4)]$

$= 6\,[3 + 5\cdot 6]$

$= 6\,[33] = 198$

1 pto

b) $xy + e^y = e$ $\Rightarrow$ cuando

$x = 0$ tenemos que $y = 1$ $\Rightarrow$

queremos calcular y'' en $(0,1)$ 0.5 pto

Derivando tenemos que

$$y + xy' + e^y \cdot y' = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{-y}{x + e^y}} \quad 1\text{pto}$$

$$y'' = \frac{-y'(x+e^y) + y(1 + e^y \cdot y')}{(x+e^y)^2} \quad 1\text{pto}$$

reemplazando $y' = \frac{-1}{e}$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-1/e\,(e) + 1(1-1)}{e^2}$$

$$= -1/e^2 \quad 0.5\text{ pto}$$

TAV 2016 I_2 - MAT1610

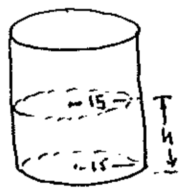
2.- a) A un balde cilíndrico con base circular de radio 15 cm. le está entrando agua a razón de 17 lt/seg. Encuentre la rapidez a la que sube la superficie del agua.

b) Demuestre que para $0<a<b$ se tiene la desigualdad

$$1-\frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a}-1$$

Solución

a)



$V = \pi r^2 h$, $r = 15$ $\frac{dV}{dt} = 17\frac{lt}{seg}\cdot\frac{1000\ cm^3}{1\ lt}$

$$\frac{dV}{dt} = \pi\, 225\ cm^2 \frac{dh}{dt}$$

$$17\cdot 1000 \frac{cm^3}{seg} = \pi\, 225\ cm^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{17000}{\pi\, 225}\ cm/seg.$$

b) Sea $f(x) = \ln(x)$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b)

Por el T.V.M, existe $\varepsilon \in (a,b)$ tal que

$$f'(\varepsilon) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}$$

Como: $a<\varepsilon<b \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{a}$, $b>a>0$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a} < \frac{1}{a}$$

$$\Updownarrow$$

$$1-\frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a}-1$$

Distribución de puntaje

a) Por obtener $\frac{dV}{dt}$, 2.0 puntos
Por fijarse las unidades 0.5 "
Por el resultado 0.5 ptos

b) Por colocar las condiciones del T.V.M. para $f(x) = \ln x$ 0.5 ptos
Por aplicar T.V.M 1.0 pto
Por acotar bien $\frac{1}{\varepsilon}$ 1.0 pto
Por llegar a la desigualdad. 0.5 ptos

PREGUNTA 3

- Dominio $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

- ~~lim~~ $y = 2$ es asíntota horizontal. $x = 1$ y $x = -1$ asíntota vertical. 1 pto

- ~~Creciente~~ $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$

creciente en $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$ decre

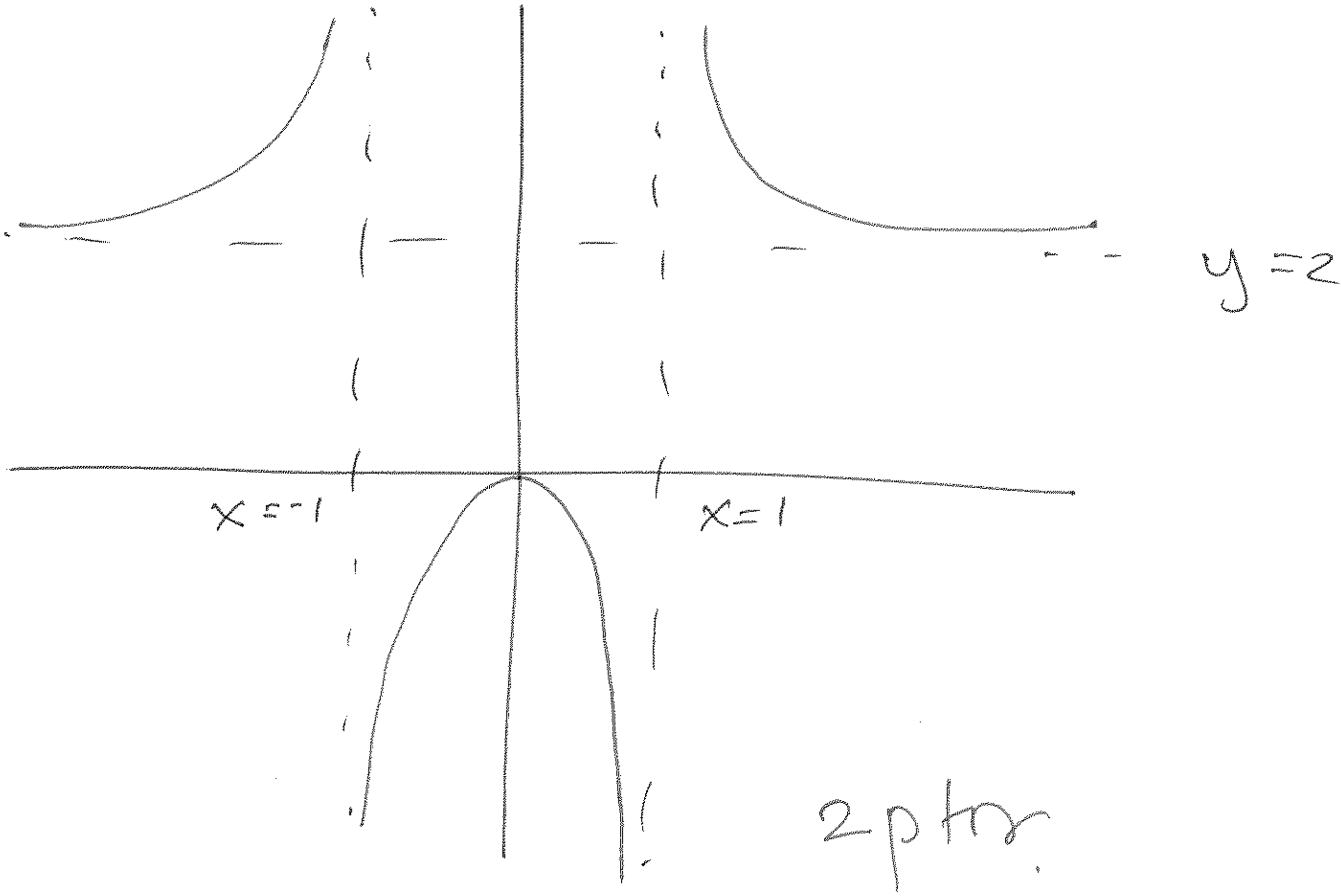
ciente en $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. 1 pto

- $f(0)$ es máximo local. 0.5

- $f''(x) = \dfrac{12x^2 + 4}{(x^2-1)^3}$

Es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$. En $(-1, 1)$ es cóncava hacia abajo. 1 pto

- No hay pto de inflexion. 0.5



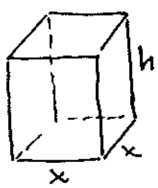
2 pts.

4.- a) Una caja de base cuadrada, sin tapa, debe tener un volumen de 32000 cm^3. Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado

b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right)$

<u>Solución</u>

a)



$V = x^2h \iff 32000 = x^2 h$

Sea C la cantidad de material

$$C(x,h) = x^2 + 4xh \quad \text{pero } h = \frac{32000}{x^2}$$
$$\Downarrow$$
$$C(x) = x^2 + 4\cdot 32000\,\frac{1}{x}$$
$$C'(x) = 2x - 128000\,\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 40 \text{ cm.}$$
$$C''(x) = 2 + \frac{256000}{x^3} \Rightarrow C''(40) = 2 + \frac{256000}{40^3} > 0 \Rightarrow C(x) \text{ es mín.}$$

b)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x\ln(x)-x+1}{(x-1)\ln(x)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+(x-1)\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{\ln(x)+1-\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

<u>Distribución de puntaje</u>

a)
- Por la condición de volumen 0.75
- Por la función $C(x,y)$ a minimizar 0.75
- Por determinar el pto crítico 0.75
- Por justificar que se trata de un mín. 0.75

b)
- Por aplicar L'Hopital (con las primeras derivadas) 1.0 pts
- " " " (con las segundas ") 1.0 pts
- Por el resultado correcto 1.0 pto.

(Si deriva mal no colocar puntaje).