PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2020

Pauta Interrogación 3 - MAT1610

1. Determine:

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$
   Solución:
   Realizamos la sustitución $u = e^x$ entonces $du = e^x\,dx$ y luego

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_1^e \frac{du}{1+u^2} = \arctan(e) - \arctan(1)$$

   b) $\displaystyle\int \operatorname{arcos}(x)dx.$
   Haciendo sutitución por partes tenemos que

$$\begin{aligned}\int \arccos(x)dx &= \int 1.\arccos(x)dx \\ &= x\arccos(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

   Solución:

   c) $\displaystyle\int \frac{3x^2+3x+5}{(2x+1)(x^2+4)}dx.$
   Solución:
   Descomponiendo en fracciones parciales tenemos que

$$\int \frac{3x^2+3x+5}{(2x+1)(x^2+4)}dx = \int \frac{1}{2x+1}dx + \int \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Distribución de puntajes para cada inciso:

- (1 punto) por aplicar el método correctamente.
- (1 punto) por el resultado final.

En casos a) y b) descontar 0,5 ptos si olvida la constante C.

2. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por la parábola $y = x^2 - 1$ y la recta $y = x + 1$.

a) Exprese, en términos de una integral, el área de la región $\mathcal{R}$.
Solución:

$$\int_{-1}^{2} (x + 1 - (x^2 - 1))dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por los límites de integración.
- (2 punto) por la integral.

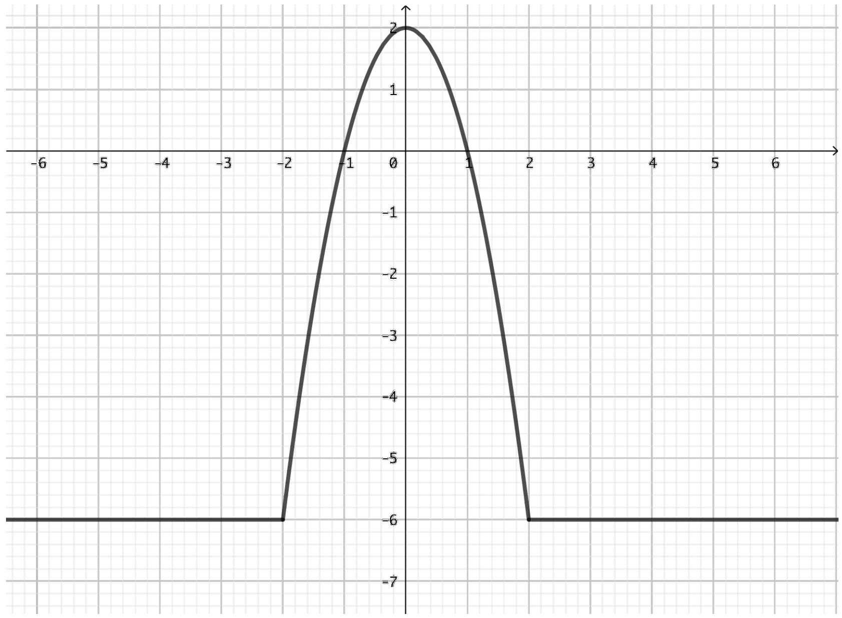
b) Exprese, en términos de una integral, el volumen del sólido obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno a la recta $x = -4$
Solución:

$$\int_{-1}^{2} 2\pi(x + 4)(-x^2 + x + 2)dx$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por los límites de integración.
- (2 punto) por la integral.

3. Sea $G(x) = \int_{x^2}^{0} f(t)dt$ donde f es la funicón cuyo gráfico corresponde al de la figura adjunta.



a) Determine G' en términos de f.

Solución:

$G'(x) = -2xf(x^2)$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por respuesta correcta. No hay puntos parciales.

b) Determine los intervalos de monotonía de G.

Solución:

Observe que $G'(x) = 0$ si $x = 0$, $x = 1$ o $x = -1$, haciendo estudio del gráfico tenemos que G es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y creciente en $(-1, 0) \cup (1, \infty)$.

Distribución de puntajes:

- (2 punto) por los ceros de G'
- (2 punto) por los intervalos.

4. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)\tan^4(x)dx.$
   Solución:
   Consideramos al sustitución $u = \tan x$ para obtener

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)\tan^4(x)dx = \int_0^1 u^4 du = \frac{1}{5}.$$

   b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx.$
   Solución:

   Usando la sustitución $x = 3\sin(\theta)$ donde $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, tenemos $dx = 3\cos(\theta)d\theta$. Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx &= \int \frac{9\sin^2(\theta)3\cos(\theta)}{3\cos(\theta)}d\theta \\ &= \int 9\sin^2(\theta)d\theta \\ &= \frac{9}{2}\int (1-\cos(2\theta))d\theta \\ &= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right) + C, \quad \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

   Como $x = 3\sin(\theta)$ y $\cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ entonces $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta) = 2\dfrac{x}{3}\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3} = \dfrac{2}{9}x\sqrt{9-x^2}$ y por lo tanto

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}dx = \frac{9}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}x\sqrt{2-x^2} + C.$$

Distribución de puntajes en cada inciso:

- (2 punto) por aplicar método correctamente.
- (2 punto) por resultado. (descontar 0.5 si olvida la constante C).

5. a) Determine la derivada de la función F definida por

$$F(x) = \int_0^x \left(\int_1^{y^3} \frac{t}{3t^2 + \cos t} dt \right) dy.$$

Solución:
Notamos que

$$F(x) = \int_0^x H(y)dy, \quad \text{donde} \quad H(y) = \int_1^{y^3} \frac{dt}{3t^2 + \cos t}.$$

Entonces por el TFC, tenemos $F'(x) = H(x)$ o sea

$$F'(x) = H(x) = \int_1^{x^3} \frac{\mathrm{d}t}{3t^2 + \cos t}.$$

Distribución de puntajes:

- (3 punto) por resultado correcto. No hay puntos parciales.

b) Evalue

$$\lim_{x \to 0} \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{\operatorname{sen}(x)} dt.$$

Solución:
Observemos que

$$\lim_{x \to 0} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sin x} \, \mathrm{d}t = \lim_{x \to 0} \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \sin t \mathrm{d}t}{\sin x}$$

que corresponde a una FI "$\frac{0}{0}$" y por regla de l'Hopital tenemos que

$$\lim_{x \to 0} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{\sin x} \, \mathrm{d}t = \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin(x^2)}{\cos x} = 0.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por chequear que es forma indeterminada.
- (1 punto) por aplicar correctamente el H'opital.
- (1 punto) por resultado.