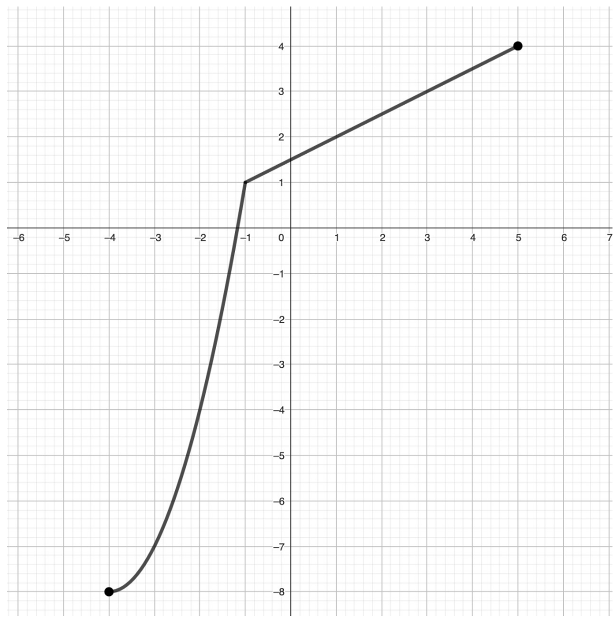
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2023

Interrogación 2 - MAT1610

1. Sea f la función cuya gráfica es la de la figura adjunta,



a) Si $h(x) = e^x f^{-1}(x)$, determine $h'(2)$.

Solución: Usando la regla de derivación del producto y la derivada de la función inversa, tenemos que:

$$h'(x) = e^x f^{-1}(x) + e^x \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

por lo tanto

$$h'(2) = e^2 f^{-1}(2) + e^2 \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)}$$

del gráfico sabemos que $f^{-1}(2) = 1$ y que $f'(1) = \dfrac{1}{2}$, obteniendo que

$$h'(2) = e^2 \cdot 1 + e^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 3e^2$$

Distribución de puntajes:

- (0.5 puntos) Por aplicar la regla del producto.
- (0.5 puntos) Por la derivada de la función inversa.

- (0.5 puntos) Por determinar correctamente $h'(x)$.
- (0.5 puntos) Por obtener correctamente $f^{-1}(2)$.
- (0.5 puntos) Por obtener correctamente $f'(1)$.
- (0.5 puntos) Por determinar correctamente el valor de $h'(2)$.

b) Si $g(x) = x \cdot f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$, determine $g'(2)$.

Solución: Usando las reglas de derivación tenemos que:

$$g'(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x \cdot f'\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}$$

por lo tanto

$$g'(2) = f(3) + 2f'(3) \cdot (-2) = f(3) - 4f'(3)$$

del gráfico sabemos que $f(3) = 3$ y que $f'(3) = \dfrac{1}{2}$, obteniendo que

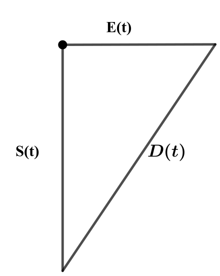
$$g'(2) = 3 - 4 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Distribución de puntajes:

- (0.5 puntos) Por usar correctamente la regla del producto en la derivación.
- (0.5 puntos) Por usar correctamente la regla de la cadena en la derivación.
- (0.5 puntos) Por usar correctamente la regla del cociente en la derivación.
- (0.5 puntos) Por determinar correctamente $g'(x)$.
- (0.5 puntos) Por obtener correctamente $f'(3)$.
- (0.5 puntos) Por determinar correctamente el valor de $g'(2)$.

2. Dos motocicletas parten desde un mismo punto. Una de ellas se dirige hacia el sur a 60km/hr y la otra hacia el este a 25km/hr ¿Con qué rápidez se incrementa la distancia entre ellas dos horas después de comenzar su trayecto?

Solución:



Tal como se muestra la figura, si llamamos $E(t)$ a la distancia recorrida por la moto que se dirige al este, después de t horas desde el punto inicial y, análogamente, $S(t)$ a la distancia de la moto que se dirige al sur tenemos, del enunciado, que $E'(t) = 25$, y que $S'(t) = 60$. Por otra parte si $D(t)$ corresponde a la distancia entre las motos, después de t horas de iniciado el trayecto vemos que:

$$D^2(t) = E^2(t) + S^2(t)$$

y derivando esta igualdad tenemos que

$$D(t)D'(t) = E(t)E'(t) + S(t)S'(t)$$

Lo que debemos calcular es $D'(2)$, para eso observamos que después de 2 horas la moto que se dirige al este ha avanzado 50km y la que va al sur 120km, con lo cual la distancia entre ellas es de 130 km. Reemplazando esta información en la última de las igualdades obtenemos que

$$D'(2) = 65km/hr$$

Es decir, la distancia entre las motocicletas se incrementa con una rapidez de 65km/hr después de 2 horas de comenzado su trayecto.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por graficar y/o asignar las variables correspondientes.
- (0.5 puntos) Por reconocer y explicitar que $E'(t) = 25$ y $S'(t) = 60$.
- (1.5 puntos) Por determinar correctamente la relación entre $D(t)$, $E(t)$ y $S(t)$.
- (1.5 puntos) Por derivar correctamente la relación correspondiente.
- (0.5 puntos) Por obtener que $E(2) = 50$ y $S(2) = 120$.
- (0.5 puntos) Por calcular correctamente $D'(2)$.
- (0.5 puntos) Por concluir.

3. a) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}$

Solución: Notamos que el límite dado corresponde a una forma indeterminada del tipo 1^∞ y observamos que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{5x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} 5x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

Para calcular $\lim\limits_{x\to\infty} 5x\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$ que es un límite de la forma $\infty\cdot 0$, lo transformamos en una forma indeterminada del tipo 0/0 y usamos la regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to\infty} 5x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{5x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{3}{x}}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{5x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{15}{1+\frac{3}{x}} = 15$$

Por lo tanto, obtenemos que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{5x} = e^{15}$

Distribución de puntajes:

- (0.5 puntos) Por pasar de una forma indeterminada del tipo 1^∞ a una del tipo $\infty \cdot 0$.
- (0.5 puntos) Por transformar el límite de la forma $\infty \cdot 0$ en uno de la forma $0/0$.
- (1 puntos) Por aplicar correctamente la regla de L'Hopital.
- (0.5 puntos) Por calcular el valor del límite obtenido luego de usar la regla de L'Hopital.
- (0.5 puntos) Por obtener correctamente el valor del límite inicial.

b) Demuestre que la ecuación $2x + \operatorname{sen}(x) = 0$ tiene exactamente una solución real.

Solución: Consideramos la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen}(x)$, la cual es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$. Además, es claro que $x = 0$ es una raíz de la función (y, por ende, una solución de la ecuación). Probaremos por contradicción que no es posible que exista otra raíz de esta función. Supongamos entonces que r es otra raíz de f. Luego, por el Teorema del Valor Medio, debería existir c en $(0, r)$ (o en $(r, 0)$) tal que $f'(c) = 0$. Sin embargo, $f'(x) = 2 + \cos(x) \geq 1$ para toda x en $\mathbb{R}$. Concluimos entonces que no existe otra raíz de f y, por lo tanto, la única solución de la ecuación es $x = 0$.

Distribución de puntajes:

- (0.5 puntos) Por definir una función f adecuada.
- (0.5 puntos) Por probar que existe una raíz de f (y/o una solución de la ecuación).
- (0.5 puntos) Por suponer que existe otra raíz de f.
- (0.5 puntos) Por verificar que f cumple con las hipótesis del TVM.
- (0.5 puntos) Por determinar que $f'(x) \geq 1$ para toda x en $\mathbb{R}$.
- (0.5 puntos) Por concluir.

4. Considere la función $f(x) = xe^{-1/x}$.

a) Determine intervalos de monotonía.

Solución: Veamos que:

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-1/x} + x \cdot e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = e^{-1/x} + \frac{e^{-1/x}}{x} = \frac{(x+1)e^{-1/x}}{x}$$

Por lo tanto, f es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$ y decreciente en $(-1, 0)$.

b) Determine extremos locales y globales.

Solución: Notamos que el único número crítico de f es $x = -1$ donde se produce un máximo local cuyo valor es $f(-1) = -e$. ($x = 0$ no es un número crítico ya que no pertenece al dominio de f). Por otra parte, f no posee extremos globales.

c) Determine intervalos dónde f es cóncava hacia arriba (convexa) y dónde es cóncava hacia abajo (cóncava).

Solución: Veamos que:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\left(1 \cdot e^{-1/x} + (x+1) \cdot e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}\right) \cdot x - 1 \cdot (x+1)e^{-1/x}}{x^2} \\
&= \frac{xe^{-1/x} + \frac{(x+1)e^{-1/x}}{x} - xe^{-1/x} - e^{-1/x}}{x^2} \\
&= \frac{e^{-1/x}}{x^3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ y es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$.

d) Determine, en caso que existan, los puntos de inflexión.

Solución: Si bien en $x = 0$ existe un cambio en la concavidad, f no posee puntos de inflexión ya que $x = 0$ no es parte del dominio de la función.

e) Bosqueje el gráfico incluyendo las asíntotas.

Solución: Notamos que la única posible asíntota vertical es $x = 0$, para verificar si es así veamos que:

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{-1/x} = \lim_{x\to 0^+} xe^{-1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -e^{-1/x} = 0$$

Análogamente, obtenemos que:

$$\lim_{x\to 0^-} xe^{-1/x} = \lim_{x\to 0^-} xe^{-1/x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} -e^{-1/x} = -\infty$$

Por lo tanto, la recta $x = 0$ sí es una asíntota vertical.

No existen asíntotas horizontales ya que $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-1/x} = \infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-1/x} = -\infty$.

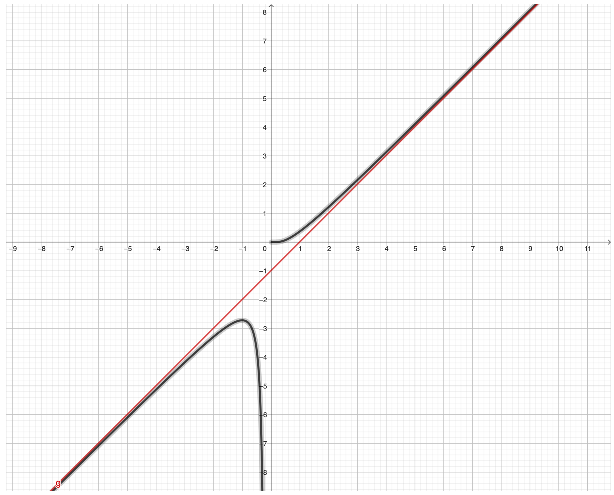
Finalmente estudiamos si existen asíntotas oblicuas. Tenemos que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-1/x} = e^0 = 1$$

y

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{-1/x} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-1/x} - 1}{\frac{1}{x}} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} -e^{-1/x} = -e^0 = -1
\end{aligned}$$

Luego, la recta $y = x - 1$ es una asíntota oblicua hacia ∞ y hacia $-\infty$.



Distribución de puntajes:

- (0.5 puntos) Por obtener correctamente $f'(x)$.
- (0.5 puntos) Por determinar los intervalos de monotonía.
- (0.5 puntos) Por determinar que $-e$ es un máximo local.
- (0.5 puntos) Por determinar que no existen extremos globales.
- (0.5 puntos) Por obtener correctamente $f''(x)$.
- (0.5 puntos) Por determinar los intervalos de concavidad.
- (0.5 puntos) Por determinar que no existen puntos de inflexión.
- (0.5 puntos) Por determinar justificadamente que la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.
- (1 punto) Por determinar justificadamente que la recta $y = x - 1$ es una asíntota oblicua.
- (1 punto) Por graficar incorporando todos los elementos encontrados.