# EYP 1027 Métodos Probabilísticos

## Clase 20

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2020

# Contenido I

1. Convergencia Estocástica y Teoremas Límites
    - Algunos modos de convergencia
    - Convergencia en probabilidad
    - Ejemplos
    - Convergencia en media cuadrática
    - Ejemplos
    - Ejemplos
    - Ejemplos
    - Convergencia casi segura

El principal objetivo de este tópico, es estudiar el comportamiento estocástico de una secuencia de variables (o vectores) aleatorias $\{Z_n; n \geq 1\}$ cuando $n \to \infty$.

La secuencia $Z_n$ puede estar asociada a un estadístico muestral o alguna función de dicho estadístico que tenga algún interés inferencial, en cuyo caso el subíndice $n$ representa el tamaño muestral.

A pesar que la noción de un tamaño de muestra infinito es un concepto teórico, el sentido práctico es obtener aproximaciones útiles en el contexto de muestras finitas, ya que generalmente las expresiones se simplifican en el límite.

### Ejemplo 1.1

Sea $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde para cada $n \geq 1$, $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias iid $Ber(p)$. Entonces, $\{Z_n; n \geq 1\}$ es una secuencia de variables aleatorias tales que, para cada $n \geq 1$, $Z_n \sim Bin(n,p)$.

En este caso, se puede demostrar, por ejemplo, que:

a) $\forall\ \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \quad \text{cuando} \;\; n \to \infty;$

b) $\forall\ z \in \mathbb{R}, \quad P\left(\frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) \to \Phi(z), \quad \text{cuando} \;\; n \to \infty.$

La propiedad en a) implica que para "$n$ lo suficientemente grande", la probabilidad de que $\frac{Z_n}{n} = \bar{X}_n$ (media muestral) difiera de $p = \mathsf{E}(X_1)$ (media poblacional) en una cantidad (positiva) arbitrariamente pequeña es despreciable.

Mientras que la propiedad b) implica que para "$n$ lo suficientemente grande", se tiene que, $P\left(\frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq z\right) \simeq \Phi(z)$, es decir, que la distribución de la variable aleatoria $\frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}}$ puede aproximarse por la distribución de una variable aleatoria $Z \sim N(0,1)$.

La demostración de a) se basa en el siguiente lema (ya enunciado):

Lema 1.1

**Desigualdad de Chebyshev** Si $X$ es una variable aleatoria con segundo momento finito y $c$ es una constante real arbitraria, entonces,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad P(|X - c| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{E}\{(X-c)^2\}}{\varepsilon^2}.$$

En particular, si $c = \mu := \mathrm{E}(X)$, entonces $\mathrm{E}\{(X-c)^2\} = \mathrm{Var}(X) := \sigma^2$; luego,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Así, si $Z_n \sim Bin(n,p)$, entonces $\mathrm{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = p$ y $\mathrm{Var}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$, para cada $n \geq 1$. Luego, para cada $n \geq 1$ y cada $\varepsilon > 0$, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \\
\Longrightarrow & 0 \leq \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0 \\
\Longrightarrow & \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0.
\end{aligned}
$$

La propiedad en b) es una consecuencia del Teorema del Límite Central (TLC) clásico, el cual será enunciado más tarde.

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, y sea $\theta$ una constante en $\mathbb{R}$.

### Definición 1.1

Se dice que $Z_n$ converge en probabilidad para $\theta$ si,

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad P\left(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon\right) \to 0, \quad \text{cuando} \ \ n \to \infty;$$

o, equivalentemente, si,

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad P\left(|Z_n - \theta| < \varepsilon\right) \to 1, \quad \text{cuando} \ \ n \to \infty;$$

**Notación:** $Z_n \xrightarrow{P} \theta$ o $\operatorname{plim} Z_n = \theta$.

**Nota:** Si $Z_n = T(X_1, \ldots, X_n)$ es un estadístico muestral tal que $Z_n \xrightarrow{P} \theta$, se dice que $Z_n$ es un **estimador consistente** del parámetro poblacional $\theta$.

**Notas:**

1) De la definición anterior, es claro que, $Z_n \xrightarrow{P} \theta \iff Z_n - \theta \xrightarrow{P} 0$.

2) Si $\{Z_n := \theta_n; n \geq 1\}$, es una secuencia no-aleatoria, y $\theta_n \to \theta$, cuando $n \to \infty$, entonces $\theta_n \xrightarrow{P} \theta$.

3) La convergencia en probabilidad de $Z_n$ también puede ser para una variable aleatoria $Z$, definida en el mismo espacio de probabilidad que la secuencia $\{Z_n; n \geq 1\}$; es decir:

**Definición 1.2**

Se dice que $Z_n$ converge en probabilidad para una variable aleatoria $Z$, y se denota por $Z_n \xrightarrow{P} Z$, ssi, $Z_n - Z \xrightarrow{P} 0$.

4) Si $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \ldots$ son vectores aleatorios $p$-dimesionales definidos en en el mismo espacio de probabilidad, entonces, $\boldsymbol{Z}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{Z}$ ssi $\|\boldsymbol{Z}_n - \boldsymbol{Z}\| \xrightarrow{P} 0$, donde $\|\boldsymbol{z}\| = \sqrt{\boldsymbol{z}^\top \boldsymbol{z}}$ es la norma usual en $\mathbb{R}^p$.

### Ejemplo 1.2

Sea $Z_n \sim Bin(n,p)$, $n \geq 1$. Vimos que,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \to 0, \quad \text{cuando} \;\; n \to \infty.$$

Por lo tanto, $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

Ya que $\frac{Z_n}{n}$ corresponde al promedio muestral $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, donde $X_1, \ldots, X_n$ es una ma(n) de la distribución $Ber(p)$, entonces, se concluye que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} p$, es decir, $\bar{X}_n$ es un estimador consistente de $p$.

### Ejemplo 1.3

Suponga que $P(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n}$ y $P(Z_n = \theta + n^2) = \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Entonces, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

En efecto, del enunciado,

$$P(Z_n = z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \text{si } z = \theta, \\ \frac{1}{n}, & \text{si } z = \theta + n^2, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \forall\ \varepsilon > 0, \quad P\left(|Z_n - \theta| < \varepsilon\right) &= P(\theta - \varepsilon < Z_n < \theta + \varepsilon) \\ &= P(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n} \to 1, \quad \text{cuando } n \to \infty. \end{aligned}$$

### Ejemplo 1.4

Sea $Z_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, donde $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$ $(\theta > 0)$. Entonces, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$, es decir, $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$ es un estimador consistente del parámetro $\theta$.

En efecto, sabemos que la fda marginal de los $X_i$'s es,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{\theta}, & \text{si } 0 \leq x < \theta, \\ 1, & \text{si } x \geq \theta. \end{cases}$$

Además, vimos que la fda $Z_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ es,

$$
\begin{aligned}
F_{Z_n}(z) &= \{F(z)\}^n \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } z < 0, \\ \left(\frac{z}{\theta}\right)^n, & \text{si } 0 \leq z < \theta, \\ 1, & \text{si } z \geq \theta. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
\forall\ \varepsilon > 0, \quad P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) &= P(-\varepsilon < Z_n - \theta < \varepsilon) \\
&= P(\theta - \varepsilon < Z_n < \theta + \varepsilon) \\
&= F_{Z_n}(\theta + \varepsilon) - F_{Z_n}(\theta - \varepsilon) \quad (F_{Z_n} \text{ es continua}),
\end{aligned}
$$

donde $F_{Z_n}(\theta + \varepsilon) = 1$, ya que $\theta + \varepsilon \geq \theta$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\theta > 0$, y

$$F_{Z_n}(\theta - \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta - \varepsilon < 0 \Leftrightarrow \varepsilon > \theta, \\ \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n, & \text{si } 0 \le \theta - \varepsilon < \theta \Leftrightarrow \varepsilon \le \theta. \end{cases}$$

Luego,

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) = \begin{cases} 1, & \text{si } \varepsilon > \theta, \\ 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n, & \text{si } \varepsilon \le \theta, \end{cases}$$
$$\to 1 \ \text{ cuando } \ n \to \infty.$$

Por lo tanto, $Z_n \overset{P}{\to} \theta$.

### Definición 1.3

Una secuencia de variables aleatorias $\{Z_n; n \geq 1\}$ converge en media cuadrática (mc) para una constante $\theta$ si,

$$\mathrm{E}\{(Z_n - \theta)^2\} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

**Notación:** $Z_n \stackrel{\mathrm{mc}}{\to} \theta$ o, equivalentemente, $Z_n - \theta \stackrel{\mathrm{mc}}{\to} 0$

**Nota:** Similarmente, se dice que $Z_n$ converge en media cuadrática para una variable aleatoria $Z$ (definida en el mismo espacio de probabilidad de la secuencia $\{Z_n; n \geq 1\}$), y se denota como $Z_n \stackrel{\mathsf{mc}}{\to} Z$, ssi $Z_n - Z \stackrel{\mathsf{mc}}{\to} 0$.

### Teorema 1.1

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias. Si,

$$Z_n \overset{\text{mc}}{\to} \theta, \text{ entonces } Z_n \overset{\text{P}}{\to} \theta.$$

Es decir,

$$\begin{gathered}\text{lím}_{n\to\infty} \mathrm{E}\{(Z_n - \theta)^2\} = 0, \text{ entonces,} \\ \text{lím}_{n\to\infty} P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) = 0 \ \ \forall\, \varepsilon > 0.\end{gathered}$$

### Demostración 1.1

Usando el Lema 1.1 (desigualdad de Chebyschev), se tiene que,

$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \ 0 \leq P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{E}\{(Z_n - \theta)^2\}}{\varepsilon^2} \to 0 \ \text{ cuando } \ n \to \infty.$$

### Corolario 1.1

Si se cumple que, (a) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}(Z_n) = \theta$ y (b) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(Z_n) = 0$, entonces $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

### Demostración 1.2

Use que $0 \leq \mathrm{E}\{(Z_n - \theta)^2\} = \mathrm{Var}(Z_n) + \{\mathrm{E}(Z_n) - \theta\}^2$.

**Nota:** La esperanza $\mathsf{E}\{(Z_n - \theta)^2\}$ se llama error cuadrático medio de $Z_n$ con respecto a $\theta$, y la diferencia $\mathsf{E}(Z_n) - \theta$ se llama sesgo de $Z_n$ con respecto a $\theta$.

### Ejemplo 1.5

Sea $Z_n \sim Bin(n,p)$, $n \geq 1$. Entonces,

(a) $\mathrm{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = p$ para todo $n \geq 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = p$,

(b) $\mathrm{E}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$ para todo $n \geq 1 \Longrightarrow$
$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{p(1-p)}{n} = 0.$

Por lo tanto, $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

### Ejemplo 1.6

Sea $Z_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, donde $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$ $(\theta > 0)$. Entonces,

$$f_{Z_n}(z) = \begin{cases} \frac{n}{\theta}\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1}, & \text{si } 0 < z < \theta, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego,

$$\mathrm{E}(Z_n) = \int_0^\theta z \frac{n}{\theta}\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1} dz = \frac{n}{n+1}\theta,$$

$$\mathrm{E}(Z_n^2) = \int_0^\theta z^2 \frac{n}{\theta}\left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1} dz = \frac{n}{n+2}\theta^2.$$

Así, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}(Z_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}\theta = \theta, \\
\lim_{n\to\infty} \mathsf{Var}(Z_n^2) &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2}\theta^2 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2 \\
&= \theta^2 - \theta^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $Z_n \stackrel{P}{\to} \theta$.

### Ejemplo 1.7

Caso donde el Teorema 1.1 (y por ende, el Corolario 1.1) falla:
**Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias tales que $P(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n}$ y $P(Z_n = \theta + n^2) = \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Probamos que, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.**

**Pero, en este caso,**

$$\mathbf{E}\{(Z_n - \theta)^2\} = 0 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n^4 \times \frac{1}{n} = n^3 \to \infty, \quad \textbf{cuando} \quad n \to \infty.$$

**Note, sin embargo, que,**

$$\mathbf{E}\{|Z_n - \theta|^{1/4}\} = 0 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n^{1/2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \quad \textbf{cuando} \quad n \to \infty.$$

El siguiente resultado entrega una extensión del Teorema 1.1:

**Teorema 1.2**

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias. Si, para algún $r > 0$, se tiene que,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\{|Z_n - \theta|^r\} = 0, \quad (*)$$

entonces, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

**Demostración 1.3**

Use la desigualdad de Markov.

**Nota:** Si $Z_n$ verifica $(*)$, se dice que $Z_n$ converge en media de orden $r$ para $\theta$, y se denota por $Z_n \xrightarrow{\text{mr}} \theta$.

El siguiente teorema establece que la media muestral $\bar{X}_n$ de una ma(n) es un estimador consistente de la media poblacional $\mu$ cuando esta es finita.

Teorema 1.3

**Ley débil de los grandes números (LDGN)** Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias iid, con $\mathrm{E}(|X_1|) < \infty$. Entonces,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} \mu = \mathrm{E}(X_1).$$

**Nota:** Similarmente, si $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ es una secuencia de vectores aleatorios $p$-dimensionales iid, con vector de medias $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_1)$ finito, entonces, $\bar{\boldsymbol{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \xrightarrow{P} \boldsymbol{\mu}$.

**Demostración 1.4**

Asuma que $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$ es finita. Entonces, $\mathrm{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$, y la desigualdad de Chebyshev implica que,

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\bar{X}_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(\bar{X}_n\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to 0 \ \text{ cuando } \ n \to \infty.$$

Por lo tanto, $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

La demostración sin suponer la existencia del segundo momento, se verá posteriormente.

### Ejemplo 1.8

1) Si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias iid $Ber(p)$, entonces $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} p$.

2) Si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias iid $U(0,\theta)$, entonces $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \theta/2$.

3) Si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias iid $\exp(\lambda)$, entonces $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} 1/\lambda$.

4) Si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias iid $N(\mu,\sigma^2)$, entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu = \mathrm{E}(X_1) \quad \text{y} \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} \mu^2 + \sigma^2 = \mathrm{E}(X_1^2).$$

etc.

### Teorema 1.4

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias tal que $Z_n \xrightarrow{P} \theta$, y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, $g(Z_n) \xrightarrow{P} g(\theta)$.

### Demostración 1.5

Como $g$ es una función continua, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|Z_n - \theta| < \delta \Longrightarrow |g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon.$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\{|Z_n - \theta| < \delta\} \subseteq \{|g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon\}.$$

Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$
\begin{aligned}
P(|Z_n - \theta| < \delta) \leq P(|g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon) \leq 1 \\
\Longrightarrow 1 = \lim_{n\to\infty} P(|Z_n - \theta| < \delta) \leq \lim_{n\to\infty} P(|g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon) \leq 1 \\
\Longrightarrow 1 \leq \lim_{n\to\infty} P(|g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon) \leq 1.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\forall\ \varepsilon > 0$, se tiene que, $\lim_{n\to\infty} P(|g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon) = 1$, lo que prueba el resultado.

### Ejemplo 1.9

1) Si $Z_n \sim Bin(n,p)$, probamos que $\frac{Z_n}{n} = \bar{X}_n \xrightarrow{P} p$. Sea $g(x) = x(1-x)$, la cual es una función continua para todo $0 < x < 1$. Entonces $g(\bar{X}_n) = \bar{X}_n(1-\bar{X}_n) \xrightarrow{P} p(1-p)$.

2) Si $X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$, la LDGN implica que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 1/\lambda$. Entonces, tomando $g(x) = 1/x$, se tiene que $g(\bar{X}_n) = 1/\bar{X}_n \xrightarrow{P} \lambda$.

3) Si $X_1, X_2, \ldots \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ y, por lo tanto, $\bar{X}_n^2 \xrightarrow{P} \mu^2$

etc.

Un modo de convergencia más fuerte que (implica) la convergencia en la probabilidad es la denominada convergencia casi segura.

### Definición 1.4

Una secuencia de variables aleatorias $\{Z_n; n \geq 1\}$ converge casi seguramente (cs) para $\theta$, que se denota como $Z_n \stackrel{\text{cs}}{\to} \theta$, si,

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad P\left(\lim_{n\to\infty} |X_n - \theta| < \varepsilon\right) = 1.$$

Equivalentemente, $Z_n \stackrel{\text{cs}}{\to} \theta$ si,

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) = \theta\right\}\right) = 1.$$

**Nota:** Similarmente, $Z_n \stackrel{\text{cs}}{\to} Z$ ssi $Z_n - Z \stackrel{\text{cs}}{\to} 0$, donde $Z$ es una variable aleatoria definida en mismo espacio de probabilidad de la secuencia $\{Z_n; n \geq 1\}$.

El siguiente teorema es una versión más fuerte del Teorema 1.3 (LDGN)

### Teorema 1.5

**Ley fuerte de los grandes números (LFGN)** Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias iid, con $\mathrm{E}(|X_1|) < \infty$. Entonces,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{cs}}{\to} \mu = \mathrm{E}(X_1).$$

Es decir, $P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \bar{X}_n(\omega) = \mu\right\}\right) = 1$.

**Nota:** Similarmente, si $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ es una secuencia de vectores aleatorios $p$-dimensionales iid, con vector de medias $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{E}(\boldsymbol{X}_1)$ finito, entonces, $\bar{\boldsymbol{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i \overset{\text{cs}}{\to} \boldsymbol{\mu}$.

**Nota:** $\boldsymbol{Z}_n = (Z_{1n}, \ldots, Z_{pn})^\top \xrightarrow{\text{P o cs}} \boldsymbol{Z} = (Z_1, \ldots, Z_p)^\top \Longleftrightarrow Z_{in} \xrightarrow{\text{P o cs}} Z_i$ para todo $i = 1, \ldots, p$.

**Teorema 1.6**

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias. Si,

$$Z_n \xrightarrow{\text{cs}} \theta, \text{ entonces } Z_n \xrightarrow{\text{P}} \theta.$$

**Demostración 1.6**

Vea, por ejemplo, el libro de Barry James.