PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I2 MAT1203 - Algebra Lineal

Octubre 3, 2013

1. *a*) [**3 pts.**] Sean $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $PA = LU$.
   Sin calcular A, A^T, ni inversas ni productos de matrices obtenga solamente
   i) La solución de $Ax = [1, 2]^T$.
   ii) La solución de de $AA^Tx = [1, 2]^T$.

   b) [**3 pts.**] Sea A matriz de 3×4 tal que en una factorización $PA = LU$ la matriz U es sobreyectiva. Demuestre que A es sobreyectiva

Solución:

a) i) Para resolver $Ax = b$ usando los factores P, L, U se resuelve primero $Ly = Pb$ y luego se resuelve $Ux = y$ [**0.7 pts.**]

- $Ly = Pb \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y_1 = 2, y_2 = -5$ [**0.4 pts.**]
- $Ux = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 8$ [**0.4 pts.**]

ii)
- $A\overbrace{A^Tx}^{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Au = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ A^Tx = u$
- La solución de $Au = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es $u = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ por la parte (i).
- Para resolver $A^Tx = u$ se resuelve $U^Ty = b$ y luego $L^Tz = y$ y entonces $x = P^Tz$ [**0.9 pts.**]
- La solución de $U^Ty = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$ es $y_1 = -8$, $y_2 = -21$ [**0.3 pts.**]
- La solución de $L^Tz = \begin{bmatrix} -8 \\ -21 \end{bmatrix}$ es $z_1 = 55$, $z_2 = -21$. Por lo tanto $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = P^T \begin{bmatrix} 55 \\ -21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ 55 \end{bmatrix}$ [**0.3 pts.**]

b) Una posible línea de argumentación es la siguiente:

Si $PA = LU$ entonces A y U son fila equivalentes [**1.0 pts.**] y por lo tanto $Fer(A) = Fer(U)$ [**1.0 pts.**] . Si U es sobreyectiva entonces $FER(U)$ tiene 3 pivotes distintos de cero, uno en cada fila, y por lo tanto $FER(A)$) tiene 3 pivotes distintos de cero, uno en cada fila y por lo tanto A es sobreyectiva.

Otra posible demostración es la siguiente:

- $Ax = b$ (*) $\Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LUx = Pb \Leftrightarrow Ux = L^(-1)Pb(**)$ [**2.0 pts.**]
- Como U es sobreyectiva, el sistema (**) siempre tiene solución y por lo tanto (*) tiene solución y entonces U sobre implica A sobre. [**1.0 pts.**]

2. *a*) [**3 pts.**] Escriba la forma cuadrática

$$F(x_1, x_2, x_3) = -2\,{x_1}^2 + 4\,x_1x_2 - 8\,x_1x_3 - 3\,{x_2}^2 + 4\,x_2x_3 - 14{x_3}^2$$

en una forma diagonal $F(x_1, x_2, x_3) = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + d_3y_3^2$ indicando explícitamente la matriz B de cambio de variables $y = Bx$ que diagonaliza a F. Clasifique la forma cuadrática. Justifique.

b) [**3 pts.**] Demuestre que si A es simétrica positiva definida y B es simétrica invertible entonces $A^3 + 2B^2$ es simétrica definida positiva.

Solución:

a)
- $F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & -14 \end{bmatrix}}_{A \text{ simétrica}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ [**0.5 pts.**]
- Por Eliminación Gaussiana $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & -14 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow$
  $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

  Por lo tanto $A = LDL^T$ con $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

  [**1.0 pts.**]
- Entonces $x^TAx = x^TLDLTx = (L^Tx)^TD\overbrace{L^Tx}^{y} = y^TDy = -2y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2$
  [**0.5 pts.**]
- La matriz pedida es $B = L^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ [**0.5 pts.**]
- Puesto que la diagonal de D tiene todos sus elementos negativos, A es negativa definida [**0.5 pts.**]

b) Sea $C = A^3 + 2B^2$, donde A es simétrica definida positiva y B es simétrica e invertible.

- Demostramos que C es simétrica.
  $C^T = (A^3 + B^2)^T = (A^3)^T + (2B^2)^T = (A^T)^3 + 2(B^T)^2$
  Pero $A^T = A$ y $B^T = B$ y por lo tanto $C^T = A^3 + 2B^2 = C$ y entonces C es simétrica [**1.0 pts.**]
- Demostramos que C es definida positiva. Suponemos que $x \neq \vec{0}$ y demostramos que $x^TCx > 0$

- $x^TCx = x^T(A^3 + 2B^2)x = x^TA^3x + 2x^TB^2x$ [**0.4 pts.**]
  - $x^TA^3x = x^TAAAx = x^TA^TAAx = (Ax)^TA(Ax) = u^TAu$, donde $u = Ax$ [**0.4 pts.**]
  - $x^TB^2x = x^TBBx = x^TB^TBx = (Bx)^T(Bx) = v^Tv$, donde $v = Bx$ [**0.4 pts.**]
- Pero A definida positiva implica A invertible y entonces $u = Ax \neq \vec{0}$, pues $x \neq \vec{0}$ [**0.2 pts.**]
- Similarmente B invertible y $x \neq \vec{0}$ implica $v = Bx \neq \vec{0}$ [**0.2 pts.**]
- Pero
  - $u \neq \vec{0}$ y A definida positiva implica $u^TAu > 0$.
  - $v \neq \vec{0} \Rightarrow v^Tv = \sum v_i > 0$
- Por lo tanto $x^TCx = \underbrace{u^TAu}_{>0} + 2\underbrace{v^Tv}_{>0} > 0$ [**0.4 pts.**]

3. *a*) [**3 pts.**] Sean F_1, F_2, F_3 las filas primera, segunda y tercera, respectivamente de una matriz A de 3×3. Si $det(A) = -2$ calcule justificadamente:

   i) El determinante de $2(AA^T)^2A^{-1}$.

   ii) El determinante de la matriz cuyas primera, segunda y tercera columnas son respectivamente $6F_1^T - 2F_3^T, 2F_3^T, -F_2^T$.

   b) [**3 pts.**] Escriba A y A^{-1} como el producto de matrices elementales, escribiendo explícitamente las matrices elementales y sus inversas, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución:

a) i)

$$\begin{aligned} C = 2(AA^T)^2A^{-1} \Rightarrow |C| &= |2(AA^T)^2A^{-1}| \\ &= 2^3\left(|AA^T|\right)^2\ |A^{-1}| \quad [\mathbf{0{,}8pts.}] \\ &= 2^3\left(|A||A^T|\right)^2\frac{1}{|A|} \quad [\mathbf{0{,}4pts.}] \\ &= 2^3\frac{\left(|A|^2\right)^2}{|A|} = 2^3|A|^2 \\ &= 8\,(-8) = -64 \quad [\mathbf{0{,}3pts.}] \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} |C| &= |6F_1^T - 2F_3^T\ \ 2F_3^T\ \ -F_2^T| \\ &= 2\,(-1)\,|6F_1^T - 2F_3^T\ \ F_3^T\ \ F_2^T| \quad [\mathbf{0{,}5pts.}] \end{aligned}$$

Sumando dos veces la columna 2 a la columna 1 se obtiene

$$\begin{aligned} |C| &= -2\,|6F_1^T\ \ F_3^T\ \ F_2^T| \quad [\mathbf{0{,}5pts.}] \\ &= -2\cdot\ 6\,|F_1^T\ \ F_3^T\ \ F_2^T| \\ &= -12|F_1^T\ \ F_3^T\ \ F_2^T| \\ &= -8|F_1^T\ \ F_2^T\ \ F_3^T| \quad \text{intercambiando columnas} \\ &= -8|A^T| \\ &= -8|A| \\ &= -12\ \cdot 2 = -24 \quad [\mathbf{0{,}5pts.}] \end{aligned}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{1{,}0pts}.]$$

(0.5 puntos por el escalonado, 0.5 puntos por identificar correctamente las elementales)

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = I \quad [\mathbf{0{,}5pts}.]$$

y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{0{,}5pts}.]$$

Entonces

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{1{,}0pts}.] \end{aligned}$$

4. Determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA y justifique su respuesta.

   a) [**1.5 pts.**] Si A es simétrica y B es antisimétrica con $AB = BA$, entonces $B^3A + AB$ es antisimétrica.

   b) [**1.5 pts.**] El determinante de la matriz de $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} A_{i,i} = a, \;\; i = 1, \ldots, n \\ A_{i,i+1} = b, \;\; i = 1, \ldots, n-1 \\ A_{n,1} = b \\ A_{p,q} = 0, \text{ otros casos} \end{array}$$

   es $det(A) = a^n + (-1)^{n+1}b^n$.

   c) [**1.5 pts.**] Si A, B son simétricas negativas definidas entonces $C = -2A - 3B$ es simétrica positiva definida.

   d) [**1.5 pts.**] Si A es de $n \times n$ de coeficientes reales y $A^2 + I = O$ entonces n es un número par.

Solución:

a) VERDADERA. Sea $C = B^3A + AB$

$$\begin{aligned} C^T &= (B^3A + AB)^T \\ &= (B^3A)^T + (AB)^T \\ &= A^T(B^3)^T + B^TA^T \\ &= A^T(B^T)^3 + B^TA^T \\ &= A(-B)^3 + (-B)A \\ &= -\left(AB^3 + BA\right) \quad [\mathbf{0{,}7pts.}] \end{aligned}$$

Pero $AB = BA$ y entonces

$$AB^3 = ABB" = BAB^2 = B(AB)B = B(BA)B = B^2(AB) = B^2(BA) = B^3A$$

Entonces $C^T = -(AB^3 + BA) = -(B^3A + AB) = -C$ [**0.8 pts.**] y por lo tanto C es antisimétrica.

b) VERDADERA. desarrollando por cofactores por la primera columna se obtiene

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} \\
&= a \overbrace{\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}}^{\substack{\text{es triangular superior} \\ \text{de } (n-1)\times(n-1)}} +(-1)^{n+1} b \overbrace{\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}}^{\substack{\text{es triangular inferior} \\ \text{de } (n-1)\times(n-1)}} \quad [\mathbf{1{,}0pts}.] \\
&= a \cdot a^{n-1} + (-1)^{n+1} b \cdot b^{n-1} \\
&= a^n + (-1)^{n+1} b^n \quad [\mathbf{0{,}5pts}.]
\end{aligned}$$

c) VERDADERO

- $C = -2A - 3B \Rightarrow C^T = -2A^t - 3B^T = -2A - 3B = C$ y por lo tanto C es simétrica [**0.5 pts.**]
- Sea $x \neq \vec{0}$. Entonces

$$\begin{aligned}
x^T C x &= x^T(-2A - 3B)\,x \\
&= -2\underbrace{x^T A x}_{<0} - 3\underbrace{x^T B x}_{<0} > 0 \quad [\mathbf{1{,}0pts}.]
\end{aligned}$$

y entonces C es positiva definida

d) VERDADERO

$$\begin{aligned}
A^2 + I = O \;&\Rightarrow\; A^2 = -I \\
&\Rightarrow\; |A^2| = |-I| \\
&\Rightarrow\; |A|^2 = (-1)^n \quad [\mathbf{1{,}0pts}.]
\end{aligned}$$

Si n fuera impar entonces, A real implica $|A|$ es un número real y por lo tanto se tendría $0 < |A|^2 = -1$, lo que es contradictorio. Por lo tanto, n es par. [**0.5 pts.**]