PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2020

Ayudantía 11 - MAT1610

1. Con una lámina cuadrada de 10 cm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recorta un cuadrado en cada vértice. Determine la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo.
Solución
Sea x la longitud del lado del cuadrado a recortar en cada vértice. Note que $0 < x < 5$ (dominio) Entonces, la base(cuadrada) de la caja tiene lado de longitud $10 - 2x$ y como área $(10 - 2x)^2$ y la altura es x y, por lo tanto, el volúmen de la caja es

$$v(x) = (10 - 2x)^2 x = 100x - 40x^2 + 4x^3$$

y

$$v'(x) = 100 - 80x + 12x^2 = 4(25 - 20x + 3x^2)$$

Entonces, $v'(x) = 0$ si $25 - 20x + 3x^2 = 0$, es decir, $x = \frac{20 \pm \sqrt{400-300}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} = \frac{10 \pm 5}{3}$, y $x = 5$ o $x = \frac{5}{3}$. pero, $x = 5$ no está en el dominio, por lo que el valor crítico es $x = \frac{5}{3}$.
Por otro lado, $v''(x) = (4(25 - 20x + 3x^2))' = -80 + 24x$ y $v''(\frac{5}{3}) = -80 + 40 = -40 < 0$, lo cual indica que $v\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2000}{27} cm^3$ es un valor máximo del volumen. Así, la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo es $\frac{5}{3}$ cm.

2. Hallar el punto sobre la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la recta tangente determine, en el primer cuadrante, con los ejes coordenados un triángulo de área mínima.
Solución:
La recta que forma el triángulo con los ejes coordenados es tangente a la función dada en algún punto, denotado por (x_0, y_0), por ahora desconocido. Dicho punto debe ser tal que el área del triángulo sea mínima entre las áreas de todos los posibles triángulos que pueden formarse en el primer cuadrante con las diferentes rectas tangentes.
Note que si la recta es $y = mx + b$, entonces la base del triángulo (rectángulo) es $B = -\frac{b}{m}$ y la altura es $H = b$. Es de resaltar que la base y la altura del triángulo cambian con el punto de tangencia.

Se tiene que: $m = f'(x_0) = -2x_0$ e $y_0 = 4 - x_0$ y, por lo tanto,

$$b = y_0 - mx_0 = 4 - x_0^2 - (-2x_0)x_0 = 4 + x_0^2$$

Entonces, el área del triángulo está dada, en términos de x_0, como:

$$A(x_0) = \frac{BH}{2} = \frac{-\frac{b}{m}b}{2} = -\frac{b^2}{2m} = \frac{(4 + x_0^2)^2}{4x_0}$$

Así,

$$A'(x_0) = \frac{2(4+x_0^2)4x_0 2x_0 - (4+x_0^2)^2 4}{(4x_0)^2} = \frac{(4+x_0^2)\left(4x_0^2 - 4 - x_0^2\right)}{4x_0^2} = \frac{(4+x_0^2)\left(3x_0^2 - 4\right)}{4x_0^2}$$

$A'(x_0) = 0$ si $(4+x_0^2)\left(3x_0^2-4\right) = 0$ y como $4 + x_0^2 \neq 0$, debe ocurrir que $3x_0^2 - 4 = 0$, es decir, $x_0 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ (x_0 debe ser positivo para que el triángulo se forme en el primer cuadrante), entonces, $y_0 = 4 - x_0^2 = \frac{8}{3}$.

Además, $A'(x_0) = \frac{(4+x_0^2)\left(3x_0^2-4\right)}{4x_0^2} = \frac{8x_0^2 - 16 + 3x_0^4}{4x_0^2} = 2 - \frac{4}{x_0^2} + \frac{3}{4}x_0^2$
Entonces,
$A''(x_0) = \frac{8}{x_0^3} + \frac{3}{2}x_0$ que es positivo para cualquier valor x_0 positivo, en particular, $A''(\frac{2\sqrt{3}}{3}) > 0$, es decir, $A(\frac{2\sqrt{3}}{3})$ es un valor mínimo. Por lo tanto, el punto sobre la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la recta tangente determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima es el punto $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3})$.

3. Determinar la altura del cilindro recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio 8 cm.

   Solución

   Sea r el radio de la base del cilindro y h la altura del cilindro (notar que $0 < r < 8$ y $0 < h < 16$ diámetro de la esfera).

   Se pide maximizar el volumen del cilindro, el cual está dado por $v(r, h) = \pi r^2 h$, con la restricción de que el cilindro esté inscrito en la esfera Dicha condición o restricción permite escribir a la función volumen, v, en términos solo de h. Para ello, note que,

$$8^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2 = \frac{h^2}{4} + r^2$$

   Dicha relación se obtiene al forma el triángulo rectángulo vértices O, P y S, donde
   O es el centro de la esfera.
   S es el centro de la base del cilindro.
   P representa a uno de los puntos sobre el perímetro de la base del cilindro, donde coinciden la esfera y el cilindro.

   Entonces, $8^2 = \frac{h^2}{4} + r^2$ y $r^2 = 8^2 - \frac{h^2}{4} = 64 - \frac{h^2}{4}$, con lo que el volumen puede expresarse, en términos de h como

$$v(h) = \pi \left(64 - \frac{h^2}{4}\right) h = 64\pi h - \frac{\pi}{4} h^3$$

   Por lo que, $v'(h) = 64\pi - \frac{3\pi}{4} h^2$ que vale cero si $h = \frac{16\sqrt{3}}{3}$,
   $v''(h) = -\frac{3\pi}{2} h$ y $v''(\frac{16\sqrt{3}}{3}) = -\frac{3\pi}{2} \frac{16\sqrt{3}}{3} = -8\pi\sqrt{3} < 0$ y en consecuencia, $v(\frac{16\sqrt{3}}{3})$ es un valor máximo del volumen, es decir, $h = \frac{16\sqrt{3}}{3}$ es la altura del cilindro recto de volúmen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio 8 cm.

4. (a) Determine la antiderivada general de la función

$$g(x) = \frac{2 + x^2 + x\sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2}$$

(b) Determine la función f tal.

$$f''(x) = \text{sen}(x) + \cos(x) \text{ y } f(0) = 3 \text{ y } f'(0) = 7$$

(c) Determine la antiderivada de la función $f(x) = 10 * 2^x - 1$ que pasa por el punto $(0, 20)$.

(d) Determine una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ sea tangente a la grafica de f.

Solución:

(a) Notar que
$g(x) = \frac{2+x^2}{1+x^2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = 1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$
Enonces, la antiederivada general es:

$$G(x) = x + \arctan(x) + \sqrt{1 + x^2} + C$$

(b) Dado que $f''(x) = \text{sen}(x) + \cos(x$ su antiderivada general es $G(x) = -\cos(x) + \text{sen}(x) + C$ y
$f'(x) = -\cos(x) + \text{sen}(x) + C$ donde la constante C es tal que,

$$f'(0) = -\cos(0) + \text{sen}(0) + C = 7$$

es decir, $C = 8$. Entonces, $f(x) = -\text{sen}(x) - \cos(x) + 8x + K$ y K es el valor que hace que $f(0) = -\text{sen}(0) - \cos(0) + K = 3$, es decir, $k = 4$. Así, la función buscada es:

$$f(x) = -\text{sen}(x) - \cos(x) + 8x + 4$$

(c) Recordar que $(2^x)' = 2^x \ln(2)$, entonces, $\frac{(2^x)'}{\ln(2)} = \left(\frac{2^x}{\ln(2)}\right)' = 2^x$, es decir, una antiderivada de la función 2^x es $\frac{2^x}{\ln(2)}$. Entonces, la antiderivada general para f es:

$$F(x) = \frac{10}{\ln(2)} 2^x - x + C$$

Para que $F(0) = 20$ debe cumplirse que $C = 20 - \frac{10}{\ln(2)}$, entonces la función buscada es $F(x) = \frac{10}{\ln(2)} 2^x - x + 20 - \frac{10}{\ln(2)}$.

(d) La antiderivada general para f' es $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, para que la recta $y = -x$ (que tiene pendiente -1) sea tangente a F debe ocurrir que $f'(x_0) = -1$, es decir, $x_0^3 = -1$ para algún x_0, lo cual ocurre si $x_0 = -1$ e $y_0 = -x_0 = 1$. Por lo tanto la constante C debe ser tal que $F(-1) = 1$, esto es, $\frac{(-1)^4}{4} + C = \frac{1}{4} + C = 1$, es decir, $C = \frac{3}{4}$.
Entonces, $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}$