Pauta 10

Gustavo Blanco

problema 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{n^2+n+1} = 3$$

→ Queremos afirmar

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \quad n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

↳ Construyamos n que cumpla $|a_n - L| < \varepsilon$

$$\left| \frac{3n^2-1}{n^2+n+1} - 3 \right|$$

$$= \left| \frac{3n^2-1}{n^2+n+1} - \frac{3(n^2+n+1)}{n^2+n+1} \right|$$

$$= \left| \frac{3n^2-1-3n^2-3n-1}{n^2+n+1} \right|$$

$$= \left| \frac{-3n-2}{n^2+n+1} \right|$$

$$= \left| \frac{-(3n+2)}{n^2+n+1} \right|$$

$*\ n > 0$
$\therefore 3n+2 > 0$
$\therefore -(3n+2) < 0$

$n^2+n+1 > 0$
$\therefore \frac{-(3n+2)}{n^2+n+1} < 0$

$\Rightarrow \left| \frac{-(3n+2)}{n^2+n+1} \right| = \frac{3n+2}{n^2+n+1}$

$$= \frac{3n+2}{n^2+n+1}$$

↳ Vamos a buscar simplificar hasta llegar a algo sencillo (n sin exponente y en el Denominador)

→ $\frac{3n+2}{n^2+n+1} < \frac{5n}{n^2+n+1}$ $\qquad 3n+2 < 3n+2n = 5n$

↳ $\frac{5n}{n^2+n+1} < \frac{5\cancel{n}}{n^2+\cancel{n}}$ $\qquad n^2+n+1 > n^2+n \quad (n>0)$

↳ $\frac{1}{n^2+n+1} < \frac{1}{n^2+n}$

$= \frac{5}{n+1}$

↳ $|a_n - 3| < \frac{5}{n+1}$

→ buscamos que se cumpla

$$\frac{5}{n+1} < \varepsilon$$

↳ $5 < \varepsilon(n+1)$

$\frac{5}{\varepsilon} < n+1$

$\frac{5}{\varepsilon} - 1 < n$

↳ tomando $a = \frac{5}{\varepsilon} - 1$

por arquimedes sabemos que $\exists N \in \mathbb{N} \mid a < N$

$\Rightarrow \forall n > N$

$n > a$ / por transitividad

$\rightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 1$

$\Leftrightarrow n+1 > \frac{5}{\varepsilon}$

$\varepsilon > \frac{5}{n+1}$

y sabemos que $|a_n - 3| < \frac{5}{n+1}$

$\therefore$ por transitividad

$|a_n - 3| < \varepsilon$

Es Decir

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \mid n > N \Rightarrow |a_n - 3| < \varepsilon$

Pregunta 2

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$ Asumiendo que $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$ existen

→ Queremos afirmar

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ n>N \Rightarrow |(a_n+b_n)-(L_1+L_2)|<\varepsilon$$

↳ Como $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe

Digamos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$$

Como Los limites Existen se Cumple

$$\forall \tfrac{\varepsilon}{2}<0\ \exists N_1\in\mathbb{N}\ n>N_1 \Rightarrow |a_n-L_1|<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

también

∴

$$\forall \tfrac{\varepsilon}{2}<0\ \exists N_2\in\mathbb{N}\ n>N_2 \Rightarrow |b_n-L_2|<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

* Decir $\frac{\varepsilon}{2}>0$ Es equivalente a decir $\varepsilon>0$, ya que ε es arbitrario

→ Sea $N=\max\{N_1,N_2\}$ (el Valor más grande entre N_1 y N_2)

Como $N=\max\{N_1,N_2\}$
$\Rightarrow$ Si $n>N$
$\Rightarrow n>N_1$ y $n>N_2$

SPDG sea $N_1>N_2$ ∴ $N=N_1$
$\Rightarrow$ Si $n>N \Rightarrow n>N_1$ y como $N_1>N_2$
$\Rightarrow n>N_2$

Como $n>N_1$ y $n>N_2$

Se Cumple

$$|a_n-L_1|<\tfrac{\varepsilon}{2} \text{ y } |b_n-L_2|<\tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore\ |a_n-L_1|+|b_n-L_2|<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore\ |a_n-L_1|+|b_n-L_2|<\varepsilon$$

↓ Continua

↳ Recordemos la desigualdad triangular

$$|a| + |b| \geq |a+b|$$

$\therefore$ $|a_n - L_1| + |b_n - L_2| \geq |a_n + b_n - (L_1 + L_2)|$

$\Rightarrow$ Como $|a_n - L_1| + |b_n - L_2| < \varepsilon$

↳ $|a_n + b_n - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$

Es Decir

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N > \mathbb{N} \; \forall_n > N \; |a_n + b_n - (L_1 + L_2)| < \varepsilon$

*donde N es $Max\{N_1, N_2\}$