

Interrogación 3: EYP1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arrellano-Valle Ayudante: Camilo I. González

Pregunta 1: Sea (X, Y) un vector aleatorio con fmp dada por;

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2!}, & \text{si } x = 1, 2; y = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

- (a) Calcule $P(|Y - X| \leq 1)$ y $P(|Y - X| < 1)$.
- (b) Calcule la esperanza de $Y - X$.
- (c) Obtenga la fmp condicional de $Y - X$ dado $X = 1$.
- (d) Obtenga la esperanza condicional de $Y - X$ dado $X = 1$.

Pregunta 2: (a) Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con fdp conjunta dada por

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & \text{si } 0 < x_1 < 1; 0 < x_2 < 1 \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

- (a) Calcule $P(2X_1 \leq X_2 | 2X_1 \leq 1)$.
- (b) Sea $R = X_{(2)} - X_{(1)}$, donde $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2\}$ y $X_{(2)} = \max\{X_1, X_2\}$. Calcule $E(R)$.
- (c) Sean $Y_1 = -\log X_1$ e $Y_2 = -\log X_2$. Encuentre la fdp conjunta de Y_1 e Y_2 .
- (d) En (c), pruebe que $-\log(X_1X_2) \sim \text{Gama}(2, 2)$.

Pregunta 3: Sean X_1 y X_2 variables aleatorias tales que

$$X_1 \sim N(0, 1) \text{ y } X_2 | X_1 = x_1 \sim N(\rho x_1, 1 - \rho^2), \text{ donde } |\rho| < 1.$$

- (a) Encuentre la media y la varianza de X_2 . Se puede determinar la correlación entre X_1 y X_2 . Justifique su respuesta con argumentos sólidos.
- (b) La información entregada le permite determinar la distribución conjunta de (X_1, X_2) ? Justifique su respuesta con argumentos sólidos.
- (c) Sean $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$. Calcule la correlación entre Y_1 e Y_2 .
- (d) La información entregada le permite determinar la distribución conjunta de (Y_1, Y_2) ? Justifique su respuesta con argumentos sólidos.

Indicaciones: Sólo puede consultar los apuntes de cátedra, no puede tener a la vista ejercicios resueltos. Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.