MAT1620 ★ Cálculo 2

Interrogación 2

Todas sus respuestas deben estar debidamente justificadas y escritas de manera clara. Todas las preguntas (4) tienen el mismo puntaje.

1.

a) Determine los tres primeros términos no nulos de la serie de Maclaurin (serie de Taylor centrada en cero) de

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Nota: $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

b) Utilice el resultado obtenido en la parte a) para calcular el valor exacto de la suma

$$2\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5 + \cdots$$

Solución.

a) Primero obtengamos la serie de Maclaurin de $F(x) = \ln(1+x)$. Para esto calculamos las cuatro primeras derivadas de F evaluadas en $x = 0$

$$F^{(0)}(0) = \ln(1+0) = \ln(1) = 0$$
$$F^{(1)}(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$
$$F^{(2)}(0) = -\frac{1}{(1+0)^2} = -1$$
$$F^{(3)}(0) = \frac{2}{(1+0)^3} = 2$$
$$F^{(4)}(0) = -\frac{6}{(1+0)^4} = -6$$

Luego

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \frac{0}{0!}\cdot(x-0)^0 + \frac{1}{1!}\cdot(x-0)^1 + \frac{-1}{2!}\cdot(x-0)^2 + \frac{2}{3!}\cdot(x-0)^3 + \frac{-6}{4!}\cdot(x-0)^4 + \cdots \\ &= 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\end{aligned}$$

Además, usando la igualdad anterior

$$\begin{aligned}\ln(1-x) = \ln\big(1+(-x)\big) &= 0 + (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{3}(-x)^3 - \frac{1}{4}(-x)^4 + \cdots \\ &= 0 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\end{aligned}$$

Y así tenemos

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x)-\ln(1-x)\\ &= \left(0+\mathrm{x}-\frac{1}{2}\mathrm{x}^2+\frac{1}{3}\mathrm{x}^3-\frac{1}{4}\mathrm{x}^4+\cdots\right)-\left(0-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\\ &= 2x+\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\cdots\end{aligned}$$

b) Basta observar que

$$2\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5+\cdots$$

es la misma serie obtenida en la parte a), poniendo $x=\frac{3}{4}$, de donde se sigue que

$$2\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5+\cdots=\ln\left(\frac{1+\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right)=\ln(7)$$

2.

a) Suponga que u y v son dos vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que el ángulo entre ellos es $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $|u| = 4$, $|v| = 7$. Calcule el valor de:

I. $u \cdot v$

II. $|u \times v|$

III. $|3u - 5v|$

b) Encuentre la ecuación del plano que pasa por $(-1,2,1)$ y contiene a la recta de intersección de los planos cuyas ecuaciones son $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 1$ respectivamente.

Solución.

a)

I. $u \cdot v = |u||v| \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} = 14$

II. $|u \times v| = |u||v| \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot 7 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$

III.
$$\begin{aligned} |3u - 5v|^2 &= (3u - 5v) \cdot (3u - 5v) \\ &= 9u \cdot u - 15u \cdot v - 15\, v \cdot u + 25v \cdot v \\ &= 9|u|^2 - 30u \cdot v + 25|v|^2 \\ &= 9(16) - 30(14) + 25(49) \\ &= 949 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow |3u - 5v| = \sqrt{949}$$

b) Un punto pertenece a la recta de intersección de los planos, si satisface ambas ecuaciones. Dicho esto, poniendo $z = 0$ en ambas ecuaciones, tenemos

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Longrightarrow x = 1, y = 1$$

Y así obtenemos el punto $(1,1,0)$ que está en la recta de intersección.

Del mismo modo, ahora poniendo $x = -1$, tenemos

$$\begin{cases} y - z = 3 \\ -y + 3z = 3 \end{cases} \Longrightarrow z = 3, y = 6$$

Y así obtenemos el punto $(-1,6,3)$ que está en la recta de intersección.

Luego, usando esos dos puntos, podemos encontrar dos vectores paralelos al plano pedido

$$u = (-1,2,1) - (1,1,0) = (-2,1,1) \text{ y } v = (-1,2,1) - (-1,6,3) = (0,-4,-2)$$

y encontramos un vector normal al plano

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2i - 4j + 8k = (2,-4,8)$$

Finalmente, escribimos la ecuación del plano que pasa por $(-1,2,1)$ y con vector normal $2i - 4j + 8k$

$$2(x + 1) - 4(y - 2) + 8(z - 1) = 0$$

https://www.geogebra.org/3d/f2hdgwyc

3.

a) Determine y grafique el dominio de la función de dos variables

$$f(x,y) = \frac{\ln(x-1) + \sqrt{y-x} + \ln(4-y)}{x^2 + 2x + 1}$$

En el bosquejo debe sombrear el interior de la región, además, debe dibujar con líneas continuas las partes del borde de la región que están incluidas y con línea segmentada las que no.

b) Sea f la función de dos variables definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{y - 4}$$

con dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 4\}$.

Grafique la curva de nivel $f(x,y) = -2$. Debe justificar su respuesta reconociendo la curva a partir de la ecuación obtenida (¿es una elipse, una circunferencia, una recta, etc.?)

Solución.

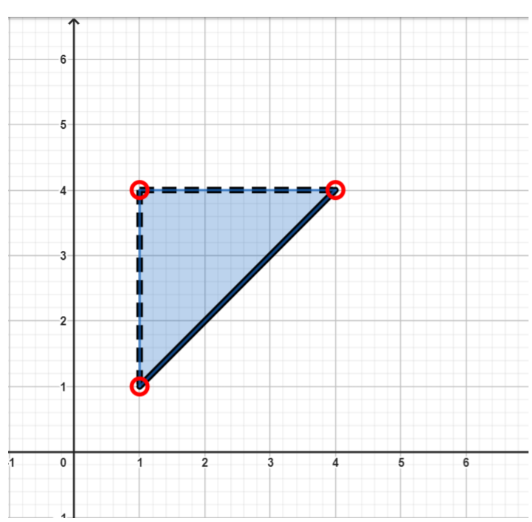
a) Primero observemos que el denominador de la expresión se puede factorizar como

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

El cual es igual a cero cuando $x = -1$. Así, como el argumento de la función logaritmo natural debe ser mayor que cero y el argumento de la función raíz cuadrada debe ser mayor o igual a cero, el dominio de la función f es:

$$\text{dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \ \& \ y \geq x \ \& \ 4 > y \ \& \ x \neq -1\}$$

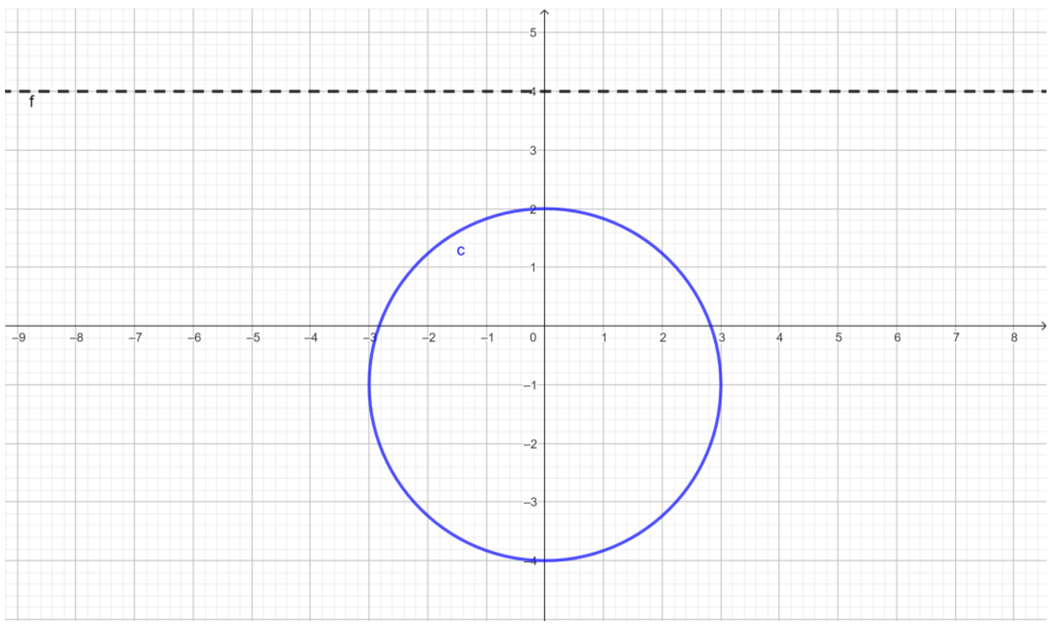
Que corresponde a la región del plano cuya gráfica es la siguiente



b) Si $y \neq 4$, tenemos

$$\frac{x^2+y^2}{y-4} = -2$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2 = -2(y-4)$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y-8 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2-9 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2 = 3^2$$

Que corresponde a la ecuación de una circunferencia de centro $(0,-1)$ y radio 3.



4.

a) Determine el límite, si existe, o demuestre que no existe.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2}$$

b) Verifique que la función $u = \frac{x^2y^2}{x+y}$ satisface la ecuación

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 3u$$

Solución.

a) Primero usaremos la trayectoria dada por la recta $y = x$ para calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2 - x^2 + x^2}{x^2 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Ahora, calculemos el límite por la trayectoria definida por la recta $y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Por lo tanto, como hay dos trayectorias con las cuales se obtienen valores distintos para el límite pedido, podemos concluir que el límite **no existe**.

-----------------Otra forma-------------------

Usamos **coordenadas polares**, ponemos $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y calculamos el límite

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos\theta)^2 - r\cos\theta\, r\sin\theta + r^2(\sin\theta)^2}{r^2(\cos\theta)^2 + r^2(\sin\theta)^2} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2(1-\cos\theta\sin\theta)}{r^2((\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2)} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{(1-\cos\theta\sin\theta)}{1} \\
&= (1-\cos\theta\sin\theta)
\end{aligned}$$

Ahora, como para valores distintos de θ se obtienen resultados diferentes, podemos concluir que el límite no existe. Por ejemplo, para $\theta = 0$ el límite es igual a 1 y para $\theta = \frac{\pi}{4}$ el límite es igual a $\frac{1}{2}$.

b) Calculamos las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2y^2 + 2xy^3}{(x+y)^2} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2x^3y + x^2y^2}{(x+y)^2}$$

Luego tenemos

$$x\left(\frac{x^2y^2 + 2xy^3}{(x+y)^2}\right) + y\left(\frac{2x^3y + x^2y^2}{(x+y)^2}\right) =$$

$$= \frac{3x^3y^2 + 3x^2y^3}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{3x^2y^2(x+y)}{(x+y)^2}$$

$$= \frac{3x^2y^2}{x+y}$$

$$= 3\,\frac{x^2y^2}{x+y}$$

$$= 3u$$

Fin