Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2020

Interrogación 7
MAT1107 - Introducción al Cálculo

(1) Calcule el valor de

$$S = \sum_{k=7}^{201} \frac{1}{(k+1)(k+3)}.$$

(3 puntos)

Solución. Primero, notamos que

$$\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} = \frac{2}{(k+1)(k+3)}.$$

Luego,

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=7}^{201}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right).$$

(1 punto)

Separamos la suma en dos:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=7}^{201}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=7}^{201}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)$$

(1 punto)

Ambas son telescópicas:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{203}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{204}\right).$$

(1 punto)

(2) Demuestre que, para todo $n \geq 1$, se tiene la identidad

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Para esta demostración, puede asumir el valor exacto del lado izquierdo pero no del lado derecho. **(3 puntos)**

Solución.

Procedemos por inducción. Sean

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k, \quad \Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Se verifica fácimente el caso $n = 1$: $1 = 1$ **(0.5 puntos)**

Sea $m \geq 1$ y supongamos que $S_m^2 = \Sigma_m$. **(0.5 puntos)**

Luego,

$$\begin{aligned} S_{m+1}^2 &= (S_m + m + 1)^2 \\ &= S_m^2 + 2(m+1)S_n + (m+1)^2 \\ &= \Sigma_m + m(m+1)^2 + (m+1)^2 && (\mathbf{0.5 + 0.5 puntos}) \\ &= \Sigma_m + (m+1)^3 = \Sigma_{m+1}. && (\mathbf{0.5 puntos}) \end{aligned}$$

Luego, la identidad que demostrada por inducción. **(0.5 puntos)**