PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMER SEMESTRE DE 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026
Ayudantía 7
2 de Mayo de 2019

1. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución $\mathrm{U}[0,1]$. Sean $R = \sqrt{2\log(1/(1-X))}$ y $\Theta = \pi(2Y-1)$.

   a) Muestre que $\Theta \sim \mathrm{U}[-\pi, \pi]$ y que R tiene distribución Rayleigh con densidad
   $$f_R(r) = re^{-r^2/2}, \quad r > 0.$$

   b) Muestre que Z y W, definidas por $Z = R\cos(\Theta)$ y $W = R\sin(\Theta)$ son independientes y con distribución $\mathrm{N}(0,1)$.

2. Sean $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathrm{U}(0,1)$. Sean
   $$U = \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i, \quad V = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i.$$

   a) Encuentre la densidad conjunta de U, V.

   b) Encuentre la densidad de $V - U$.

3. Sean $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$. Defina las variables $Y_i = X_i - X_{(1)}$. Demuestre que $X_{(1)} \sim \mathrm{Exp}(\lambda/n)$ y $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} Y_i = \mathrm{Gamma}(n-1, \lambda)$. Además pruebe que estas dos variables son independientes.

4. Una urna contiene n bolas numeradas $1, 2, \ldots, n$. Una persona saca una bola y la devuelve, saca otra bola y la devuelve, continuando hasta que obtiene una bola por segunda vez. Sea X el número de intentos requeridos para obtener esa repetición.

   a) Encuentre la distribución de X.

   b) Muestre que
   $$E(X) = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

5. Sea $X \sim$ Gamma-Inversa(α, β) con función de densidad
   $$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-1}\exp\{-\beta/x\}.$$

   Encuentre $E(X)$.