Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Primer Semestre 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
Pauta de corrección Interrogación 1

1. Determine el o los valores del parámetro k tales que el sistema lineal de dos variables $\begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + y = 1 \end{cases}$ tenga única solución, infinitas soluciones o no tenga solución.

Solución Aplicamos el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones de sistemas lineales a la matriz aumentada del sistema $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{array}\right]$.

Buscamos la forma escalonada de la matriz $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k \end{array}\right]$.

Acá hay tres subcasos: Si $k = 1$, la matriz queda $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ la cual entrega infinitas soluciones.

Si $k = -1$, entonces $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$ la que corresponde a una matriz aumentada inconsistente.

Si $k \neq 1$ y $k \neq -1$, de $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & k & 1 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k \end{array}\right]$ obtenemos única solución ya que las dos primeras columnas de la matriz contienen posiciones pivotes.

En resumen: si $k = 1$ el sistema tiene infinitas, si $k = -1$ el sistema es inconsistente, si $k \neq 1$ y $k \neq -1$ el sistema tiene única solución.

Puntaje

- 1 punto por escribir la matriz aumentada del sistema.
- 1 punto por analizar el caso $k = 0$ de manera separada
- 1 punto por escolar correctamente la matriz aumentada cuando $k \neq 0$.
- 3 puntos por analizar correctamente la matriz aumentada escalonada usando el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones de sistemas lineal. (Si comete un error de cálculo aritmético pero analiza correctamente, asignar solo 2 puntos. Si aplica incorrectamente el teorema, asignar 0 puntos.)

2. (a) Determine si el vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ pertenece o no al plano generado por $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$. (3 pts)

   (b) Determine si los vectores $\{\mathbf{y}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ son linealmente dependientes o independientes. (3 pts)

Solución

(a) Que el vector $\mathbf{y}$ pertenezca al plano generado por $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ es equivalente a que el sistema $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & -4 \end{array}\right]$ sea consistente. Ya que

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & -14 \end{array}\right]$$

entonces el sistema es inconsistente ya que la matriz aumentada tiene un pivote en la última columna de la forma escalonada. Por lo tanto, $\mathbf{y}$ no pertenece al plano generado por $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$.

(b) Los vectores $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$ son LI ya que no son paralelos. Por lo analizado en el ítem anterior, el vector $\mathbf{y}$ no pertenece al plano $\text{Gen}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, por lo que los vectores no son coplanares. Esto significa que $\{\mathbf{y}, \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ son linealmente independientes.

Puntaje

- 1 punto por establecer el hecho que $\mathbf{y}$ pertenezca al plano significa que el sistema correspondiente es consistente.
- 1 punto por escalonar correctamente la matriz ampliada.
- 1 punto por concluir correctamente en el ítem (a).
- 2 puntos por concluir de acuerdo a su respuesta del ítem anterior (no importa que la conclusión en el ítem (a) sea equivocada).
- 1 punto por responder correctamente al ítem (b).

3. Defina la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$, el vector $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ y la transformación lineal $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

   (a) Determine el dominio y el codominio de T. (1 pt)

   (b) Determine si $\mathbf{y}$ es un vector del rango de T. (2pts)

   (c) ¿Es T una transformación sobreyectiva (sobre)? (2pts)

   (d) ¿Es T una transformación inyectiva (uno a uno)? (1pt)

Solución

(a) Ya que A es una matriz de 3×2, la transformación T tiene dominio $\mathbb{R}^2$ y codominio $\mathbb{R}^3$.

(b) El vector $\mathbf{y}$ está en el rango de T si el sistema $[A|\mathbf{y}]$ es consistente, pero

$$[A|\mathbf{y}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -7 \\ -1 & -3 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

lo que implica que el sistema es consistente. Por lo tanto $\mathbf{y} \in \text{rango}(T)$.

(c) T no puede ser sobreyectiva porque va de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

(d) T si es inyectiva porque las columnas de A son LI.

Puntaje

- 1 punto por determinar correctamente dominio y codominio de T.
- 2 puntos por concluir justificadamente que $\mathbf{y} \notin \text{rango}(T)$. Alternativamente, asignar 1 punto si comete errores en cálculos aritméticos pero concluye bien a partir de éstos.
- 2 punto por responder justificadamente que T es sobre. Alternativamente, asignar solo 1 punto si a partir de cálculos aritméticos erróneos, concluye que no es sobreyectiva.
- 1 punto por responder que T si es inyectiva.

4. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Para justificar que una afirmación es verdadera debe demostrarlo en general. En cambio, para mostrar que es falsa, basta mostrar un contraejemplo.

   (a) Si A es una matriz tal que $A\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ y $A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, entonces el sistema lineal $A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ es consistente. (3pts)

   (b) Si las columnas de una matriz B generan a $\mathbb{R}^3$, entonces las columnas son linealmente independientes. (3pts)

Solución

(a) Verdadero.
En efecto, si A es una matriz como en el enunciado, entonces

$$\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Esto implica que el sistema $A\mathbf{x}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ es consistente.

(b) Falso.

Las columnas de la matriz $B=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$ generan $\mathbb{R}^3$ pero son linealmente dependientes.

Puntaje

- 3 puntos por responder justificadamente al ítem (a). Debe escribirse una demostración general.
- 3 puntos por responder justificadamente al ítem (b). Se acepta un contraejemplo o una explicación general correcta.

5. Considere la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que primero hace girar puntos en $\pi/4$ radianes (antihorario) y después los refleja a través del eje vertical Y.

Encuentre la matriz estándar de dicha transformación.

Solución El vector $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ primero es transformado en $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ y luego reflejado hacia el $\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$. Por otro lado, el vector $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es rotado hacia el $\begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ y posteriormente enviado al $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto, la matriz estándar de la transformación compuesta es

$$A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Puntaje

- 2 puntos por establecer que $A = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{bmatrix}$.
- 1,5 puntos por determinar cada columna de A (3 en total).
- 1 punto por escribir la matriz A explícitamente de acuerdo a sus cálculos. Este punto es independiente que los cálculos anteriores estén correctos.

6. Sea A una matriz de 2×4 cuyas columnas son los vectores a_1, a_2, a_3 y a_4 y cuya forma escalonada reducida es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Además se sabe que la suma de los vectores columnas de A cumple que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine el conjunto solución del sistema homogéneo $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. (3 pts)

(b) Determine el conjunto solución del sistema no homogéneo $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. (3 pts)

Solución

(a) Resolver la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = 0$ es equivalente a encontrar la solución de $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$. Así, $x_1 = -x_4$ $x_3 = -2x_4$, x_2 y x_4 son variables libres. Por lo tanto el conjunto solución del problema homogéneo consiste en todos los vectores de $\mathbb{R}^4$ de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_4 \\ x_2 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

(b) Por otro lado, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ implica que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Es decir, una solución particular de la ecuación no homogénea es $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, la solución general de $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ son los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_4 + 1 \\ x_2 + 1 \\ -2x_4 + 1 \\ x_4 + 1 \end{bmatrix}, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Puntaje

- 1 punto por establecer la relación entre la ecuación $A\mathbf{x} = 0$ y la forma escalonada aumentada.
- 1 punto por determinar las variables básicas y las variables libres correctamente.
- 1 punto por determinar la solución de $A\mathbf{x} = 0$.
- 1 punto por determinar una solución particular de $A\mathbf{x} = 0$.
- 2 puntos por escribir la solución general del problema no homogéneo de manera correcta.

7. Considere una matriz A de 3×3 tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = I$$

donde I es la matriz identidad correspondiente. Sin calcular A ni A^{-1} explícitamente:

(a) Justifique porqué A debe ser una matriz invertible. (2 pt)

(b) Escriba A^{-1} como producto de matrices elementales. (1 pt)

(c) Escriba A como producto de matrices elementales. (3 pts)

Solución

(a) Primero notar que cada matriz a la izquierda de A es elemental. De la ecuación matricial, tenemos que A se transforma en la matriz identidad con tres operaciones elementales de fila. Esto implica que A es invertible.

(b) Al multiplicar por A^{-1} a la derecha de la ecuación del enunciado, se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A^{-1}.$$

(c) De la ecuación matricial del enunciado, se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = I$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Puntaje

- 2 puntos por dar una justificación correcta sobre la invertibilidad de A.
- 1 punto por escribir A^{-1} correctamente como producto de matrices elementales.
- 1 puntos por despejar correctamente la matriz A en el ítem (c)
- 2 puntos por calcular cada inversa de las matrices elementales correctamente en el ítem (c). Asignar 1 punto si comete algún error de cálculo aritmético. Asignar 0 puntos si comete 2 o más errores.