EJERCICIOS EXAMEN

1. Sea V la región encerrada por las las gráficas de

$$2z = x^2 + y^2, \qquad 2z = 8 - x^2 - y^2$$

   a) Escriba la integral triple que representa el volumen de V usando coordenadas cartesianas.
   b) Escriba la integral triple que representa el volumen de V usando coordenadas cilindricas.
   c) Escriba la integral triple que representa el volumen de V usando coordenadas esféricas.
   d) Escriba la integral doble que representa el volumen de V.
   e) Calcule el volumen de V.

2. Considere la función

$$f(x, y) = x^4 - 4xy + y^2.$$

   a) Encuentre todos los puntos criticos de f.
   b) Clasifique los puntos criticos de f.
   c) Sea D el conjunto de los puntos (x, y) tales que

$$-2 \leq x \leq 2, \qquad -2 \leq y \leq 2.$$

   Determine los máximos y mínimos absolutos de f sobre el conjunto D.

Una solución

1. *a*) En coordenadas cartesianas,

$$Vol(V) = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{(x^2+y^2)/2}^{4-(x^2+y^2)/2} 1\, dzdydx.$$

b) En coordenadas cilíndricas,

$$Vol(V) = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2} \int_{r^2/2}^{4-r^2/2} r\, dzdrd\theta.$$

c) En coordenadas esféricas,

$$Vol(V) = 2\left[\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{\pi/4} \int_{0}^{2\sec(\theta)} r^2 \operatorname{sen}(\varphi)\, drd\varphi d\theta + \int_{0}^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{0}^{2f(\varphi)} r^2 \operatorname{sen}(\varphi)\, drd\varphi d\theta\right],$$

donde $f(\varphi) = \dfrac{2\cos(\varphi)}{\operatorname{sen}^2(\varphi)}$.

d) El volumen pedido es $Vol(V) = 8\pi$.

2. *a*) Para determinar los puntos críticos, debemos resolver el siguiente sistema,

$$4x^3 - 4y = 0, \qquad 2y - 4x = 0,$$

se tiene que los puntos pedidos son:

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, 2\sqrt{2}), \qquad (-\sqrt{2}, -2\sqrt{2}).$$

b) Utilizando la matriz Hessiana de la respectiva función,

$$HF(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 2. \end{bmatrix},$$

se tiene que

- $(0,0)$ es un punto de tipo silla.
- $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ es un minimo local.
- $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ es un minimo local.

c) En el interior de la región dada, solo existe un punto critico, $(0,0)$. Analizaremos la frontera. En esta, además de los vértices de la región encontramos dos puntos $(\sqrt[3]{2}, 2), (-\sqrt[3]{2}, -2)$. A continuación evaluamos en la función, con todos los posibles candidatos,

- $f(0,0) = 0$
- $f(-2,2) = 36.$
- $f(-2,2) = 36.$
- $f(\sqrt[3]{2}, 2) = 4 - 6\sqrt[3]{2}.$
- $f(\sqrt[3]{2}, -2) = 4 - 6\sqrt[3]{2}.$
- $f(-2,-2) = 4.$
- $f(2,-2) = 36.$

Se concluye que el máximo valor de f en el conjunto D es $M = 36$ y el mínimo absoluto es $m = 4 - 6\sqrt[3]{2}$.