Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2016

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución y pauta de corrección del Examen

1. *a*) **[Texto, S 12.5.60]**
   Encuentre la ecuación cartesiana del plano formado por todos los puntos que equidistan de los puntos $(1,1,-2)$ y $(2,4,1)$.
   Solución:
   Sea P el punto de coordenadas (x,y,z).
   La distancia de P a $(1,1,-2)$ es $\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2}$, y la distancia de P a $(2,4,1)$ es $\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2}$. Si P equidista de estos dos puntos entonces
   $$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2},$$
   de donde
   $$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=(x-2)^2+(y-4)^2+(z-1)^2,$$
   lo que simplificado queda
   $$2x+6y+6z=15.$$

   b) **[Texto, S 12.4.50 a y b]**
   Dados tres vectores no coplanares $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^3$, definimos los vectores $\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3$ por
   $$\mathbf{k}_1=\frac{\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_1\cdot(\mathbf{v}_2\times\mathbf{v}_3)},\qquad \mathbf{k}_2=\frac{\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2\cdot(\mathbf{v}_3\times\mathbf{v}_1)},\qquad \mathbf{k}_3=\frac{\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_3\cdot(\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2)}.$$
   Demuestre que $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{k}_i=1$ para $i=1,2,3$ y que $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{k}_j=0$. si $i,j\in\{1,2,3\}$ e $i\neq j$.
   Solución:
   Sean $i,j\in\{1,2,3\}$ tales que $i\neq j$, y sea k el tercer elemento de $\{1,2,3\}$. Vemos que
   $$\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{k}_i=\mathbf{v}_i\cdot\frac{\mathbf{v}_j\times\mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_i\cdot(\mathbf{v}_j\times\mathbf{v}_k)}=\frac{\mathbf{v}_i\cdot(\mathbf{v}_j\times\mathbf{v}_k)}{\mathbf{v}_i\cdot(\mathbf{v}_j\times\mathbf{v}_k)}=1.$$
   Además
   $$\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{k}_j=\mathbf{v}_i\cdot\frac{\mathbf{v}_k\times\mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_j\cdot(\mathbf{v}_k\times\mathbf{v}_i)}=\frac{\mathbf{v}_i\cdot(\mathbf{v}_k\times\mathbf{v}_i)}{\mathbf{v}_j\cdot(\mathbf{v}_k\times\mathbf{v}_i)}.$$
   Pero $\mathbf{v}_k\times\mathbf{v}_i$ es un vector perpendicular a $\mathbf{v}_i$, por lo que $\mathbf{v}_i\cdot(\mathbf{v}_k\times\mathbf{v}_i)=0$, de donde $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{k}_j=0$.
   Otra forma de justificar que $\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{k}_j=0$ es que $\mathbf{v}_i\cdot(\mathbf{v}_k\times\mathbf{v}_i)$ es el determinante que tiene por columnas a $\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_k,\mathbf{v}_i$; y como dos de estas columnas son iguales el determinante vale cero.

Puntaje:

1)
- Por calcular correctamente las distancias entre $P(x, y, z)$ y cada uno de los puntos dados: 0,5 puntos (en total, 1 punto por ambas distancias).
- Por plantear que ambas distancias deben ser iguales: 1 punto.
- Por llegar a la ecuación *cartesiana* del plano (la dada en la solución u otra equivalente): 1 punto.
  Si dan otra ecuación correcta del plano (paramétrica, normal, etc.): 0,5 puntos.

2)
- Por mostrar que *algún par* de vectores $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{k}_i\}$ satisface $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{k}_i = 1$, 1 punto.
- Por mostrar que *algún par* de vectores $\{\mathbf{v}_i, \mathbf{k}_j\}$ con $i \neq j$ satisface $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{k}_j = 0$, 1 punto.
- Por mostrar que estas afirmaciones en realidad se aplican a todos los posibles pares de vectores que nos interesan, se da el último punto (si solo generalizan una se da 0,5 puntos).

A lo anterior se le suma el punto base.

2. *a*) **[Texto, 6.2.29]**
Sean U y V dos matrices ortogonales de $n \times n$. Demuestre que UV es invertible y que su inversa es $(UV)^T$.
Solución:
Para probar lo pedido basta probar que $(UV)(UV)^T = I$.
En efecto:
Que U y V sean ortogonales significa que $UU^T = VV^T = I$, por lo que

$$(UV)(UV)^T = (UV)(V^TU^T) = U(VV^T)U^T = UIU^T = UU^T = I.$$

b) **[Texto, 6.2.25]**
Demuestre que una matriz B de $n \times n$ es ortogonal si y solo si, para todo par de vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, se cumple $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (B\mathbf{u}) \cdot (B\mathbf{v})$.
Solución:

$\Rightarrow$**)** Si B es ortogonal entonces $B^TB = I$, de donde, dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$(B\mathbf{u})\cdot(B\mathbf{v}) = (B\mathbf{u})^T(B\mathbf{v}) = (\mathbf{u}^TB^T)(B\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T(B^TB)\mathbf{v} = \mathbf{u}^TI\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

$\Leftarrow$**)** Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (B\mathbf{u}) \cdot (B\mathbf{v})$ para todo par de vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, entonces en particular $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = (B\mathbf{e}_i) \cdot (B\mathbf{e}_j)$ (donde $\mathbf{e}_i$ es el i-ésimo vector de la base canónica, o sea, la i-ésima columna de la matriz identidad).
Pero —si llamamos $\mathbf{c}_i$ a la i-ésima columna de B— esto significa que

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_j = (B\mathbf{e}_i) \cdot (B\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

por lo que B tiene columnas ortonormales, o sea, B es una matriz ortogonal.

Puntaje:

1) - Por dar una demostración correcta (esta, u otra), 3 puntos.
   Si la demostración está esencialmente buena, pero tiene algunos errores menores, 2 puntos.
2) En cada dirección ($\Rightarrow$ o $\Leftarrow$):
   - Por dar una demostración correcta (esta, u otra), 1,5 puntos.
     Si la demostración está esencialmente buena, pero tiene algunos errores menores, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

3. **[Texto, 6.3.12; 6.4.11, 15]**

Sea $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, y sea W el espacio columna de la matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Encuentre una base ortogonal para W.

b) Determine el punto de W más cercano a $\mathbf{y}$.

c) Sea Q la matriz cuyas columnas son (en orden) los elementos de la base encontrada en (a). Encuentre una matriz R triangular superior tal que $A = QR$.

Solución:

a) Para encontrar una base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de W, aplicamos Gram-Schmidt al conjunto $\{(-1,2,1,-2),(4,-1,0,3)\}$. Para ello, debemos:

- Tomar $\mathbf{v}_1 = (-1,2,1,-2)$.
- Considerar $\mathbf{p}$ la proyección ortogonal de $(4,-1,0,3)$ sobre Gen $\{\mathbf{v}_1\}$.
- Tomar $\mathbf{v}_2 = (4,-1,0,3) - \mathbf{p}$.

Haciendo los cálculos,

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{v}_1} &= \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,2,1,-2), \\
\mathbf{p} &= ((4,-1,0,3)\cdot\widehat{\mathbf{v}_1})\,\widehat{\mathbf{v}_1} = \frac{1}{10}\,((4,-1,0,3)\cdot\mathbf{v}_1)\,\mathbf{v}_1 \\
&= \frac{1}{10}\,((4,-1,0,3)\cdot(-1,2,1,-2))\,(-1,2,1,-2) \\
&= -\frac{12}{10}(-1,2,1,-2) = -\frac{6}{5}(-1,2,1,-2), \\
\mathbf{v}_2 &= (4,-1,0,3) - \mathbf{p} = (4,-1,0,3) + \frac{6}{5}(-1,2,1,-2) = \frac{1}{5}(14,7,6,3);
\end{aligned}$$

Así, una base ortogonal[1] de W está dada por cualquier ponderado no nulo de $\mathbf{v}_1 = (-1,2,1,-2)$ y cualquier ponderado no nulo de $5\mathbf{v}_2 = (14,7,6,3)$.
De hecho, es más simple renombrar $\mathbf{v}_2 = (14,7,6,3)$ y tomar como base

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(-1,2,1,-2),(14,7,6,3)\} \quad .$$

En cualquier caso, si se quiere tener una base ortonormal de W, los vectores adecuados serían $\widehat{\mathbf{v}_1} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,2,1,-2)$, $\widehat{\mathbf{v}_2} = \pm\frac{1}{290}(14,7.6,3)$.

[1] En todo caso, no toda base ortogonal de W se obtiene de esta forma. Pero esta es quizás la forma más fácil de obtener una.

$b)$ Buscamos la proyección ortogonal de $\mathbf{y}$ sobre W.

De acuerdo al teorema 6.10, si normalizamos la base de (a), la proyección buscada es

$$\text{proy}_W\mathbf{y} = (\mathbf{y}\cdot\widehat{\mathbf{v}_1})\widehat{\mathbf{v}_1} + (\mathbf{y}\cdot\widehat{\mathbf{v}_2})\widehat{\mathbf{v}_2}.$$

Una forma equivalente de escribir esto es

$$\begin{aligned}
\text{proy}_W\mathbf{y} &= \frac{(\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_1)}{||\mathbf{v}_1||^2}\,\mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_2)}{||\mathbf{v}_2||^2}\mathbf{v}_2 \\
&= \frac{(2,1,-3,4)\cdot(-1,2,1,-2)}{||(-1,2,1,-2)||^2}\,(-1,2,1,-2) + \frac{(2,1,-3,4)\cdot(14,7,6,3)}{||(14,7,6,3)||^2}(14,7,6,3) \\
&= \frac{-11}{10}\,(-1,2,1,-2) + \frac{29}{290}(14,7,6,3) = \frac{-11}{10}\,(-1,2,1,-2) + \frac{1}{10}(14,7,6,3) \\
&= \frac{1}{10}(11+14,-22+7,-11+6,22+3) = \frac{1}{10}(25,-15,-5,25) = \frac{1}{2}(5,-3,-1,5)
\end{aligned}$$

Otra forma de resolver este problema es planteando el sistema que resulta de considerar $\text{proy}_W\mathbf{y}$ como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (o de las dos columnas de A), digamos $\text{proy}_W\mathbf{y} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$, y a partir de aquí plantear el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
(\text{proy}_W\mathbf{y} - \mathbf{y})\cdot\mathbf{v}_1 &= 0, \\
(\text{proy}_W\mathbf{y} - \mathbf{y})\cdot\mathbf{v}_2 &= 0.
\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}
(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{v}_1 &= \mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_1, \\
(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2)\cdot\mathbf{v}_2 &= \mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_2.
\end{aligned}$$

que es lo mismo que

$$\begin{aligned}
\alpha\,||\mathbf{v}_1||^2 + \beta(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) &= \mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_1, \\
\alpha(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) + \beta\,||\mathbf{v}_1||^2 &= \mathbf{y}\cdot\mathbf{v}_2.
\end{aligned}$$

Resolviendo para α y β y reemplazando en $\text{proy}_W\mathbf{y} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$ se obtiene la proyección ortogonal.

c) La respuesta a esta parte depende de la base encontrada en *a)*. Si dicha base es ortonormal ($\widehat{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,2,1,-2)$, $\widehat{\mathbf{v}}_2 = \frac{1}{\sqrt{290}}(14,7.6,3)$), entonces

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{14}{\sqrt{290}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{7}{\sqrt{290}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{6}{\sqrt{290}} \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{290}} \end{bmatrix}$$

Llamemos Q_1 a esta matriz. En este caso, la matriz R puede ser obtenida como

$$R = Q_1^T A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{14}{\sqrt{290}} & \frac{7}{\sqrt{290}} & \frac{6}{\sqrt{290}} & \frac{3}{\sqrt{290}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & -\frac{6\sqrt{10}}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{290}}{5} \end{bmatrix}.$$

¿Qué pasa si Q *no* tiene columnas ortonormales? Por ejemplo, si

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 14 \\ 2 & 7 \\ 1 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{14}{\sqrt{290}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{7}{\sqrt{290}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{6}{\sqrt{290}} \\ -\frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{290}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{290} \end{bmatrix} = Q_1 D$$

(donde $D = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{290} \end{bmatrix}$) entonces el R adecuado no es $Q^T A$ ya que en este caso

$$QQ^T A = (Q_1 D)(D^T Q_1^T)A = Q_1 D^2 Q_1^T A,$$

o sea, aparece un factor D^2 que cambia el producto.

Pero si en lugar de $Q^T A$ tomamos $R = (D^{-1})^2 Q^T A$ entonces

$$\begin{aligned} QR &= (Q_1 D)R = (Q_1 D)(D^{-1})^2 Q^T A = Q_1(DD^{-1})D^{-1}Q^T A \\ &= Q_1 D^{-1} Q^T A = Q_1 (QD^{-1})^T A = Q_1 Q_1^T A = A. \end{aligned}$$

Así,

$$
\begin{aligned}
R &= (D^{-1})^2 Q^T A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{10} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{290} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -2 \\ 14 & 7 & 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{10} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{290} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -12 \\ 0 & 58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{6}{5} \\ 0 & \dfrac{1}{5} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Puntaje:

a) Por encontrar una base ortogonal (cualquiera, no necesariamente ortogonal) de W, 2 puntos.

Si se equivocan al aplicar Gram-Schmidt, *cometiendo algún pequeño error de cálculo*, pero queda en evidencia que tienen claro cómo aplicar el método, 1 punto.

b)
- Por plantear correctamente una forma de encontrar la proyección ortogonal, 1 punto.
- Por realizar los cálculos en la forma correcta, 1 punto. Si cometen *pequeños errores de cálculo*, reciben 0,5 puntos.

c)
- Por plantear correctamente alguna forma de calcular R (que sea acorde a la base hallada en *a)*), 1 punto.
- Si la matriz R no es consistente con la base encontrada en *a)*, sino que corresponde a otra elección de ponderados de la base, se descuentan 0,5 puntos.
- Por realizar los cálculos en la forma correcta, 1 punto. Si cometen *pequeños errores de cálculo*, reciben 0,5 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

4. **[Texto, 6.6.9]**

Un cierto experimento genera los datos $(1,3)$, $(2,5)$ y $(3,4)$. Describa el modelo que da un ajuste de mínimos cuadrados de esos puntos mediante una recta de la forma $y = Ax + B$.

Nota: Basta que describa el modelo, no es necesario que lo resuelva.

Solución:

Se busca una recta de la forma $y = B + Ax$.

La *matriz de diseño* X y el *vector de observaciones* $\mathbf{y}$ están dados por las ecuaciones

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Nos interesa encontrar el *vector de parámetros* $\beta = \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix}$ que es la solución de mínimos cuadrados de $X\beta = \mathbf{y}$.

Para esto, es necesario resolver las ecuaciones normales $X^T X\beta = X^T\mathbf{y}$, o sea,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Esto es suficiente para describir completamente el modelo.

Si se desea resolver completamente el problema, basta realizar las multiplicaciones expresadas en la última ecuación:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

La solución de este sistema es

$$\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 12 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/3 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

O sea, la recta de mínimos cuadrados es la recta de ecuación $y = \dfrac{1}{2}x + 3$.

Puntaje:

- Por identificar correctamente la matriz de diseño X, 2 puntos.
- Por identificar correctamente el vector de observaciones $\mathbf{y}$, 1 punto.
- Por indicar que las ecuaciones normales que debe cumplir la solución buscada son $X^T X\beta = X^T\mathbf{y}$, 1 punto.

- Por escribir explícitamente las ecuaciones normales, por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix},$$

  2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

5. **[Texto, 7.1.28]**

Demuestre que si A es una matriz de $n \times n$ que satisface que para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$ se tiene $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$, entonces A es simétrica.

Solución:

Dados $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, consideremos el caso en que $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$ (aquí $\mathbf{e}_i$ es el i-ésimo vector de la base canónica, o sea, la i-ésima columna de la matriz identidad).

Así, $A\mathbf{x} = A\mathbf{e}_i$ es $\mathbf{c}_i$, la i-ésima columna de A, y el resultado de $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{e}_j$ es el j-ésimo elemento de $\mathbf{c}_i$, o sea, es el elemento a_{ji} de la matriz A.

Por otra parte, $\mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}) = \mathbf{e}_i \cdot (A\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{c}_j$ es el i-ésimo elemento de $\mathbf{c}_j$, o sea, es el elemento a_{ij} de la matriz A.

De esta forma, la condición $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$ implica que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, de donde A es simétrica.

Puntaje:

- Por dar una demostración correcta (esta, u otra), 6 puntos.
- Si la demostración está esencialmente buena, pero tiene algunos errores menores, recibe 5 puntos.
- Una demostración "a medias" (en que está la idea general, pero falta justificar algunos pasos, o hay algunos mal justificados) recibe 3 puntos.
- Una demostración que evidencia que "se tiene la idea" pero no llega ni siquiera a mitad de camino recibe 2 puntos.
- Finalmente, una demostración que no evidencia ni siquiera que se tenga claro qué hay que demostrar o que no hay una idea para demostrarlo, recibe 0 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$.

a) Encuentre una matriz L cuadrada, triangular inferior con números 1 en la diagonal, y una matriz diagonal D tal que $A = LDL^T$.

Primera Solución:

Una idea es usar la factorización $A = LU$, que nos da

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Necesitamos expresar U de la forma $U = DL^T$, con D diagonal. Como L^T es invertible,

$$D = U(L^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T = LDL^T$.

Segunda Solución:

Una segunda idea es usar *fuerza bruta* (sí, a veces resulta).

Si es posible escribir A como $A = LDL^T$ con L triangular inferior y 1s en la diagonal, y D diagonal, entonces existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = LDL^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 0 \\ xy & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & xy \\ xy & x^2y + z \end{bmatrix}.$$

De aquí se deduce que $y = 1$, $x = -3$ y finalmente $z = 0$, de donde $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, o sea, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T$.

b) Realice un cambio de variable $x = Py$ que transforme la forma cuadrática

$$Q\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

en una sin términos con producto cruzado (o sea, sin términos con x_1x_2).

Primera Solución:

Como $A = LDL^T$,

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(LDL^T)\mathbf{x} = (bfx^TL)D(L^T\mathbf{x}) = (L^T\mathbf{x})^TD(L^T\mathbf{x}).$$

Así, si tomamos $\mathbf{y} = L^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$, o equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x} = (L^T)^{-1}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + 3y_2 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

tenemos que

$$Q(\mathbf{x}) = (L^T\mathbf{x})^T D(L^T\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_1^2$$

que es una expresión sin término cruzado.

Segunda Solución:

Siguiendo el método esbozado en el libro, comenzamos buscando los vectores y valores propios de A.

Los vectores propios son $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ con valor propio 10 y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ con valor propio 0.

Normalizando estos dos vectores, obtenemos la base ortonormal formada por $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ con valor propio 10 y $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ con valor propio 0.

Así, tomando $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ se tiene $A = PDP^{-1} = PDP^T$ y $D = P^{-1}AP = P^TAP$, por lo que —tomando $\mathbf{x} = P\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dfrac{y_1 + 3y_2}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{-3y_1 + y_2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$, o equivalentemente $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x} = P^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1 - 3x_2}{\sqrt{10}} \\ \dfrac{3x_1 + x_2}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$— llegamos a

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T PDP^T\mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T D(P^T\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 10y_1^2.$$

Tercera Solución:

Podemos seguir la misma idea que en la solución anterior, pero sin normalizar los vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Así, teniendo como matriz diagonal $D = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, P sería la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, de donde vemos que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/10 & -3/10 \\ 3/10 & 1/10 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} P^T$$

y por lo tanto podemos expresar

$$A = PDP^{-1} = \frac{1}{10} PDP^T = P\left(\frac{1}{10}D\right)P^T = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^T.$$

Aquí el cambio de variable está dado por $\mathbf{x} = P\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 + 3y_2 \\ -3y_1 + y_2 \end{bmatrix}$, o equivalentemente $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x} = \dfrac{1}{10}P^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1 - 3x_2}{10} \\ \dfrac{3x_1 + x_2}{10} \end{bmatrix}$. por lo que

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^T\mathbf{x} = (P^T\mathbf{x})^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (P^T\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_1^2. \end{aligned}$$

En resumen:

Este problema no tiene una solución única. De partida cualquiera de estas factorizaciones puede ser re-escrita cambiando el orden de las columnas de la matriz P e intercambiando los elementos de la diagonal de D. Por ejemplo, podemos tomar:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(estas matrices son la tercera solución presentada más arriba).

Una solución puede ser transformada multiplicando P por un escalar $c \neq 0$, y dividiendo D por c^2. Esto por ejemplo se logra dividiendo P en la solución anterior por $\sqrt{10}$ y multiplicando D por 10:

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(segunda solución).}$$

Otra posible solución está dada por la primera solución a la parte (b) (y todas sus variantes):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cualquiera de estas factorizaciones nos permite transformar la forma cuadrática en otra sin términos con producto cruzado, mediante el cambio de variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$.

c) Clasifique la forma cuadrática Q. ¿Es esta forma definida positiva, definida negativa, semi-definida positiva, semi-definitiva negativa o indefinida?

Solución:

Claramente, en todas las soluciones presentadas a la parte (b), la matriz diagonal correspondiente tiene un elemento diagonal $a > 0$ y otro $b = 0$. Así, $Q(\mathbf{x}) = ay_1^2 + b \cdot 0 = ay_1^2$, que es > 0 cuando $y_1 > 0$ y es $= 0$ cuando $y_1 = 0$.

En otras palabras, $Q(\mathbf{x}) \geq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, pero existen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ para los que $Q(\mathbf{x}) = 0$, por lo que esta forma es semi-definida positiva.

Puntaje:

a)
- Cualquier solución correcta (y completa) recibe 2 puntos.
- Si la solución está esencialmente correcta, pero hay errores *menores* de cálculo, o faltan detalles importantes, recibe 1 punto.

b)
- Una solución correcta (y completa, que muestre que la expresión final no tiene término mixto) recibe 2 puntos.
- Si la solución está esencialmente correcta, pero hay errores *menores* de cálculo, o faltan detalles importantes, recibe 1 punto.

c)
- Por decir que la forma es semi-definida positiva, 1 punto.
- Por justificar correctamente la afirmación, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

7. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Encuentre una descomposición en valores singulares de A.

Solución:

Seguimos los pasos indicados en la sección 7.4 del texto.

Paso 1: **Encuentre una diagonalización ortogonal de** A^TA.

Para ello, calculamos los valores propios de $A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $\det A^TA - \lambda I = -\lambda^3+4\lambda^2-3\lambda = -\lambda(\lambda^2-4\lambda+3) = -\lambda(\lambda-3)(\lambda-1)$, los valores propios de A^TA son —en orden descendente— 3, 1 y 0.

Tres vectores propios correspondientes a estos valores propios son, respectivamente, $\mathbf{v}_1 = (2,1,1), \mathbf{v}_2 = (0,-1,1)$ y $\mathbf{v}_3 = (-1,1,1)$. Note que estos vectores propios son mutuamente ortogonales.

Normalizando estos vectores, obtenemos los vectores propios unitarios

$$\widehat{\mathbf{v}_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1), \widehat{\mathbf{v}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) \quad \text{y} \quad \widehat{\mathbf{v}_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1).$$

Paso 2: **Obtenga** V **y** Σ.

En nuestro caso,

$$V = [\widehat{\mathbf{v}}_1\ \widehat{\mathbf{v}}_2\ \widehat{\mathbf{v}}_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Los valores singulares son $\sigma_1 = \sqrt{3}$, $\sigma_2 = \sqrt{1} = 1$ y $\sigma_3 = \sqrt{0} = 0$, por lo que

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Sigma = [D\ \ 0] = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Paso 3: **Construya** U.

Como A tiene 2 filas, necesitamos una base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Como el rango de A es 2, estos vectores están dados por

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\widehat{\mathbf{v}}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2}A\widehat{\mathbf{v}}_2 = 1\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Así,

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T.$$

Puntaje:

Cada uno de los siguientes indicadores tiene 0,5 puntos, excepto *c)* y *d)* (marcados en negrita) que tienen 1 punto cada uno.

a) Calcular correctamente A^TA.

b) Encontrar correctamente los valores propios de A^TA.

c) **Encontrar correctamente los vectores propios de** A^TA.

d) **Normalizar correctamente dichos vectores**.

e) Calcular correctamente los valores singulares de A.

f) Determinar correctamente V (o, equivalentemente, V^T).

g) Determinar correctamente Σ.

h) Calcular correctamente $\mathbf{u}_1$.

i) Calcular correctamente $\mathbf{u}_2$.

j) Determinar correctamente U.

A lo anterior se le suma el punto base.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

a) Toda matriz que es diagonalizable ortogonalmente debe ser simétrica.

b) Si A es una matriz simétrica e invertible, entonces la forma cuadrática $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(A^TA)\mathbf{x}$ es definida positiva.

c) Si A y B son dos matrices simétricas de $n \times n$, y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de que cada vector $\mathbf{v}_i$ de esta base es vector propio tanto de A como de B, entonces $AB = BA$.

Solución:

a) **Verdadero**.
Si A es diagonalizable, entonces $A = PDP^{-1}$ con D diagonal. Si además A es diagonalizable ortogonalmente entonces $P^{-1} = P^T$ (P es una matriz ortogonal) y por lo tanto $A = PDP^T$.
Pero entonces

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^TD^TP^T = PD^TP^T = A,$$

por lo que A es simétrica.

b) **Verdadero**.
Sea A de $n \times n$, y sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Debemos probar que $Q(\mathbf{x}) > 0$.
En efecto: por ser A invertible, $\mathbf{y} = A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Pero entonces

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(A^TA)\mathbf{x} = (\mathbf{x}^TA^T)(A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = ||\mathbf{y}||^2 > 0$$

ya que $\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \rightarrow ||\mathbf{y}|| > 0$.

c) **Verdadero**.
Para probar que $AB = BA$, debemos probar que dado cualquier vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $AB\mathbf{x} = BA\mathbf{x}$. Para esto es suficiente que $AB\mathbf{v}_i = BA\mathbf{v}_i$ para cada $\mathbf{v}_i$ de la base ortonormal (¿por qué?).
Sea $\mathbf{v}$ cualquiera de los vectores de la bae dada. Como $\mathbf{v}$ es vector propio tanto de A como de B, existen escalares λ, μ tales que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $B\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$.
Pero entonces

$$AB\mathbf{v} = A(B\mathbf{v}) = A(\mu\mathbf{v}) = \mu(A\mathbf{v}) = \mu(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mu\mathbf{v}) = \lambda(B\mathbf{v}) = B(\lambda\mathbf{v}) = B(A\mathbf{v}) = BA\mathbf{v}.$$

Puntaje:

Cada parte vale dos puntos, los que se dan solo si está la respuesta correcta con una justificación adecuada.

A lo anterior se le suma el punto base.