PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMER SEMESTRE 2018

INTERROGACIÓN 1
CALCULO 2 $\star$ MAT1620.

1. Analice la convergencia de la siguiente integral

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}, dx.$$

2. Sea $a \geq 0$. Analice la convergencia de la siguiente integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}.$$

3. Sea $p \geq 0$. Determine los valores de p para los cuales la siguiente serie es convergente.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\ln(n)}{n^p}.$$

4. Analice la convergencia de la siguiente serie,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}}.$$

5. Analice la convergencia absoluta o condicional de la serie

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

6. Considere la sucesión de término general a_n, definida por:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3 - a_n}, \quad \text{para todo}\, n > 1.$$

   a) Pruebe que la sucesión a_n es decreciente.

   b) Asumiendo que la sucesión dada satisface,

$$2 \geq a_n \geq \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

   Deduzca que es convergente y calcule su límite.

7. Determine el intervalo y el radio de convergencia de la serie de potencias,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}.$$

8. *a*) Determine la representación en serie de potencias de

$$f(x) = \frac{1}{1 - 2x}, \qquad g(x) = \frac{1}{1 + x}.$$

   b) Sea $h(x) = f(x) - g(x)$. Verifique que para todo $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ se tiene que

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

   donde $a_n = 2^n - (-1)^n$

   c) Pruebe que, para $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = -\ln[(1 + x)\sqrt{1 - 2x}].$$

TIEMPO: 120 MINUTOS.

UNA SOLUCIÓN

1. Para analizar la integral dada, consideraremos

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}, dx = \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}, dx + \int_{1/2}^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}, dx.$$

Para la primera de las integrales comparamos la función del integrando con $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, es decir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1,$$

por lo tanto ambas funciones presentan el mismo comportamiento. Luego ambas son convergentes.
Para la segunda integral comparamos la función del integrando con $h(x) = \dfrac{1}{(1-x)^{2/3}}$ es decir,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(1-x)^{2/3}}}{\dfrac{1}{(1-x)^{2/3}}} = \operatorname{sen}(1),$$

Con lo cual nuestra integral nuevamente es convergente.
Se concluye que la integral dada es convergente.
Asignación de puntaje:

- Asignar 2,5 puntos por analizar la convergencia de la primera integral impropia.
- Asignar 2,5 puntos por analizar y concluir de manera correcta la convergencia de la segunda integral.
- Asignar 1 punto por concluir de manera correcta.

2. Comenzaremos analizando el caso $a > 0$. Para analizar la convergencia de la integral impropia dada, comenzamos notando que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)},$$

Para $x \in (0,1)$ tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x+a)} = \frac{1}{x^{3/2} + a\sqrt{x}} \leq \frac{1}{a\sqrt{x}} = g(x),$$

y como la respectiva integral de $g(x)$ es convergente se tiene que, para $x \in (0,1)$ la integral pedida es convergente.
Para $x \in (1,\infty)$ tenemos que

$$\frac{1}{\sqrt{x}(x+a)} = \frac{1}{x^{3/2} + a\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^{3/2}} = h(x),$$

y como la respectiva integral de $h(x)$ es convergente, se concluye que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$$

es convergente.

Finalmente, si $a = 0$, la integral resulta ser,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}.$$

La cual es divergente. **Asignación de puntaje:**

- Asignar 1 puntos por separar las dos integrales a analizar.
- Asignar 2 puntos por concluir que la integral en $(0,1)$ es convergente.
- Asignar 2 puntos por concluir que la integral en $(1,\infty)$ es convergente.
- Asignar 1 puntos por concluir la divergencia para el caso $a = 0$.

3. Para analizar la convergencia de la serie dada la compararemos con la serie de término general
$$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}},$$
la cual es divergente. Comparamos en el límite,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{\sqrt{5+n^5}} : \frac{1}{\sqrt{n}} = 2,$$
Por lo tanto ambas series tienen el mismo comportamiento.
Asignación de puntaje:

   - Asignar 4 puntos por utilizar de manera correcta un criterio para analizar la convergencia.
   - Asignar 2 puntos por concluir de manera correcta la divergencia de la serie.

4. Analizaremos 3 casos, en la integral dada, a saber

   - Si $0 \leq p \leq 1$ se tiene que
   $$\frac{\ln(n)}{n^p} \geq \frac{1}{n^p}, \text{para n suficientemente grande,}$$
   como la serie de término general $\frac{1}{n^p}$ es divergente, nuestra serie tambien lo es.
   - Si $p \geq 2$ se tiene que
   $$\frac{\ln(n)}{n^p} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^p} = \frac{1}{n^{p-1/2}},$$
   y para $p \geq 2$ esta última serie es convergente, por lo tanto nuestra serie tambien lo es.
   - Si $1 < p < 2$. Utilizamos el criterio de la integral y la serie resulta ser convergente.

   De los tres casos anteriores, se concluye que la serie es convergente para $p > 1$.
   Asignación de puntaje:

   - Asignar 3 puntos por analizar y concluir que es divergente con p en $[0, 1]$.
   - Asignar 3 puntos por concluir que es convergente para $p > 1$.

5. Comenzamos analizando la convergencia absoluta, notando que

$$\sum_{n\geq 0}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$

la cual es divergente, ya que al compararla con la serie, divergente, de término general $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Analizamos a continuación la respectiva serie alterntante, la cual satisface

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

y como $\sqrt{n+1}, \sqrt{n}$ son crecientes se tiene que $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ es decreciente. Se concluye que la serie alternante es convergente y por la tanto la serie dada converge de manera condicional.

Asignación de puntaje:

- Asignar 2,5 puntos por el análisis de la convergencia en valor absoluta.
- Asignar 2,5 puntos por analizar la convergencia de la respectiva serie alternante.
- Asignar 1 punto por concluir de manera correcta la convergencia condicional.

6. Probaremos por inducción que la sucesión dada es decreciente. Es decir probaremos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$a_{n+1} \leq a_n.$$

Para el caso base, se tiene que

$$a_2 = 1 < 3 = a_1.$$

La hipótesis de inducción

$$a_n \leq a_{n-1}$$

a partir de la cual se obtiene que

$$\begin{aligned} a_n &\leq a_{n-1} \\ -a_n &\geq -a_{n-1} \\ 3 - a_n &\geq 3 - a_{n-1} \\ \frac{1}{3 - a_n} &\leq \frac{1}{3 - a_{n-1}} \\ a_{n+1} &\leq a_n. \end{aligned}$$

De donde concluimos que a_n es decreciente. Por otro lado, podemos asumir que la serie es acotada inferiormente, por lo tanto al ser decreciente el Teorema de las sucesiones monótonas, esta es convergente. Sea L su límite. Finalmente utilizando la recursividad en la definición de a_n tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1}, \\ L &= \frac{1}{3 - L} \\ L^2 - 3L + 1 &= 0 \\ L &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 3 puntos por la correcta demostración del hecho que la sucesión es decreciente.
- Asignar 1.5 puntos por concluir de manera correcta la existencia del límite para la sucesión.
- Asignar 1.5 puntos por calcular el valor del límite al que converge al sucesión.

7. Comenzamos calculando el radio de convergencia, para ello sea

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} |\frac{-3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}}| = 3.$$

Con lo cual el radio es $R = \dfrac{1}{3}$. Analizaremos en los extremos del respectivo intervalo, es decir en $x_1 = \dfrac{1}{3}, x_2 = -\dfrac{1}{3}$.

En $x_1 = \dfrac{1}{3}$, se tiene la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad \text{la cual es divergente.}$$

En $x_2 = -\dfrac{1}{3}$ se tiene la serie,

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \qquad \text{la cual es convergente.}$$

Se concluye que el intervalo de convergencia es $(-1/3, 1/3]$.
Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por el correcto calculo del radio de convergencia.
- Asignar 1.5 puntos por el correcto análisis en x_1.
- Asignar 1.5 puntos por el correcto análisis en x_2.
- Asignar 1 punto por el correcto calculo del intervalo de convergencia.

8. *a*) Se tiene que, utilizando la representación de series geométricas,

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0}(2x)^n, \qquad |x| < \frac{1}{2}.$$

$$g(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n, \qquad |x| < 1.$$

b) La representación en serie de potencias de $h(x)$ existe en el conjunto donde ambas funciones,f, g, admiten representación, es decir el conjunto es $|x| < \frac{1}{2}$ en donde se tiene que

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0}(2^n - (-1)^n)x^n.$$

c) Si consideramos

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

se tiene que para $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, notamos que

$$S'(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+x}.$$

Dentro del intervalo de convergencia, es posible integrar, con lo cual,

$$S(x) = \int \frac{1}{1-2x}\, dx - \int \frac{1}{1+x}\, dx = -\frac{1}{2}\ln(1-2x) - \ln(1+x) = -\ln(\sqrt{1-2x}(1+x)).$$

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 1 punto por la correcta representación en serie, mencionando el intervalo de convergencia, de la función f.
- a) Asignar 1 punto por la correcta representación en serie, mencionando el intervalo de convergencia, de la función g.
- b) Asignar 1 punto por mencionar el correcto intervalo para la representación de $f - g$.
- b) Asignar 1 punto por la correcta serie de potencias para la función $f - g$.
- c) Asignar 1 punto por reconocer la serie dada como la derivada de otra serie.
- c) Asignar 1 punto por la correcta integración respectiva.