PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2022

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Lista de Ejercicios

1. Los números reales

1. Sean x, y, a y b números reales positivos no nulos. Asuma que $\dfrac{x}{y} < \dfrac{a}{b}$. Demuestre que
$$\frac{x}{y} < \frac{x+a}{y+b} < \frac{a}{b} \,.$$

2. Resuelva la siguiente inecuación, indicando explícitamente el conjunto solución
$$\frac{4}{x+1} + \frac{5}{2x-1} \geqslant 3 \,.$$

3. Sea A el conjunto solución de la inecuación $|x| \leqslant |x-1|$.
Sea B el conjunto solución de la inecuación $|4x-2| > x(1-2x)$.

   a) Resuelva la primera inecuación, esto es determine A.

   b) Resuelva la segunda inecuación, esto es determine B.

   c) Calcule $A \cup B$ y $A \cap B$.

4. Resuelva la siguiente inecuación
$$\frac{||x-1|-2|}{2+|x|} \geq 1 \,.$$

5. Resuelva la siguiente inecuación
$$\sqrt{4-|x+1|} \leqslant 1 \,.$$

6. Sea $x \geqslant -3$. Demuestre que $1 + 3x \leqslant (1+x)^3$.

7. Resuelva la inecuación $x^2 - 6x + 13 > 0$.

8. Resuelva la inecuación
$$|x+1| \leqslant \sqrt{x^2-4x+4} + 3 \,.$$

9. Resuelva la inecuación
$$\frac{x^2-4}{x-4} > 1 \,.$$

10. Si $a + b + c = 3$ demuestre que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3$.

11. Determine el conjunto solución de la inecuación $||x+1|-1| \geqslant |x|$.

12. Si a, b y c son números reales positivos, demuestre

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac\,.$$

13. Determine el conjunto solución de la inecuación

$$\left|\frac{x}{|x|-2}\right| \geqslant -x\,.$$

14. Determine el conjunto solución de la inecuación $\sqrt{2x^2+x+3} > 1-x$.

15. Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x^2 + ax + 3)y^2 + (x+a)y + 1 > 0\,.$$

16. Resuelva la inecuación

$$\frac{x}{|x|-2} \leqslant x\,.$$

17. Demuestre, usando las propiedades de orden, que

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^+ \;:\; a + a^{-1} \geqslant 2\,.$$

18. Resuelva la inecuación

$$\frac{x+1}{x-1} \leqslant x+2\,.$$

19. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq b$. Determine el conjunto solución de la inecuación

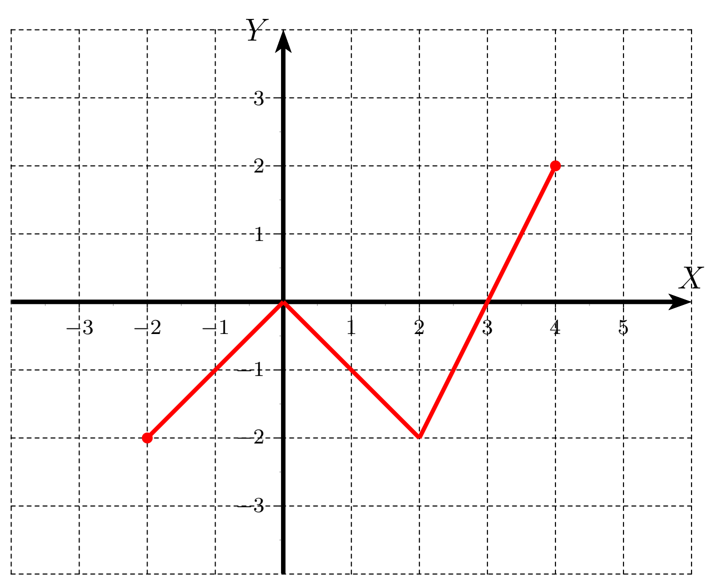
$$|x-a| + |b-x| > |a-b|\,.$$

20. Resuelva la inecuación

$$\sqrt{|x-1|-2} < x+3\,.$$

2. Funciones

1. Considere la función $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ dada en la siguiente gráfica.



Definimos la función $g(x) = 2 - \frac{1}{2}f(-x+3)$, determine:

a) Las transformaciones apropiadas que aplicadas a f den como resultado la función g.

b) La gráfica de la función g y de cada una de las transformaciones propuesta en el inciso *a*)

c) El dominio y recorrido de la función g.

2. *a*) Grafique la función $r(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

   b) Use la forma normal en el numerador y factorice el denominador para demostrar que la función racional
$$s(x) = \frac{2x^2+4x+5}{x^2+2x+1}$$
se puede escribir como
$$s(x) = 2 + \frac{3}{(x+1)^2}$$
A continuación grafique s al transformar la gráfica del inciso a).

   c) Determine las asíntotas horizontales o verticales de la función racional y su gráfica
$$t(x) = \frac{3x^2-3x-6}{x-2}.$$

3. Determine condiciones sobre a y b de modo que:
$$f(x) = \begin{cases} x^2-4x+7 & \text{si } x \geqslant 2 \\ \\ ax+b & \text{si } x < 2 \end{cases}$$
sea una biyeccion sobre $\mathbb{R}$. Demuestre que con las condiciones encontradas f es efectivamente una biyección sobre $\mathbb{R}$.

4. Considere las funciones $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ y
$$g(x) = \begin{cases} 3-x^2 & \text{si } |x| < 3 \\ \\ x+1 & \text{si } |x| \geqslant 3 \end{cases}$$
Calcule f^{-1} y $g \circ f^{-1}$.

5. Sea $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x^2-10}{x-3}$.

   a) Encuentre a, b y c de modo que
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}.$$

   b) Determine, si es que existen, las asíntotas verticales y horizontales.

   c) Determine el gráfico de f y dedúzca que f es sobreyectiva.

   d) Restringa el dominio de la función f para que sea inyectiva y determine su inversa.

6. Considere la función dada por

$$f(x) = \log_3 \left(4 + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{5x+1}{3-x} \right) \right).$$

a) Determine el dominio de f.

b) Demuestre que f es decreciente. Justifique su respuesta.
Sugerencia: Puede ser útil graficar la función $x \mapsto \frac{5x+1}{3-x}$.

c) Determine la inversa de f.

7. Encuentre todos los valores de x e y que satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} (x+y)^{\log(x+y)} = 1000(x+y)^2 \\ \\ \left| \dfrac{x}{y} \right| = 1 \end{cases}$$

8. Sean las funciones reales

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \\ 3x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x > -1 \\ \\ 3x - 2 & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$$

Demuestre que f es biyección pero g no los es. Determinar $g \circ f^{-1}$.

9. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales definidas por

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 + 1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ \\ -2x - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 0 \\ \\ x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Calcule $f \circ g$.

b) Pruebe que f es inyectiva en $\mathbb{R}$ y calcule f^{-1}.

10. Encuentre el dominio y el recorrido de la función

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2}\,.$$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Suponga que $f(0) \neq 0$. Demuestre que

a) $f(0) = 1$.

b) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

12. Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0,1] \\ \\ 2-x & x \in (1,2] \end{cases}$$

   a) Grafique f.

   b) Grafique $g(x) = 3f(1-2x)$ detallando su razonamiento.

13. Esboce la gráfica de $p(x) = 2x(x-1)^3(x-2)^2(x-3)$.

14. Esboce la gráfica de $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$.

15. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente, es decir, si $x_1, x_2 \in [a,b]$ y $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

   a) Demuestre que f es invertible.

   b) Demuestre que f^{-1} es estrictamente creciente.

16. Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $e^x + e^{-x} \geqslant 2$.

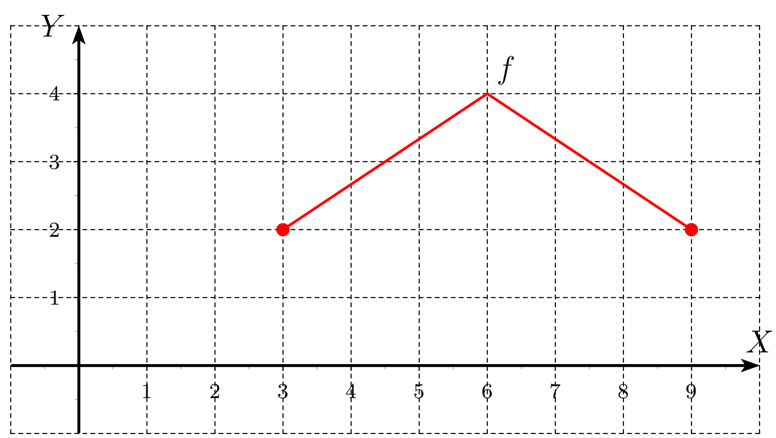
17. Esboce la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|^3 - x^3}{x+1}.$$

18. Determine el dominio de

$$f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{x^2-1}{|x|-1}}}.$$

19. En la siguiente gráfica se muestra la gráfica de una función $f : [3,9] \to \mathbb{R}$.



Si $g(x) = -1 - \dfrac{1}{2} f(3x+6)$,

   a) Determine el dominio y recorrigo de g.

   b) Identifique un orden en que deben ser aplicadas las transformaciones a f para obtener la gráfica de g.

   c) Trace la gráfica de g en su dominio.

20. Dadas las funciones

$$f(x) = x + \frac{2}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 3\,,\ x \neq 0\,, \\ \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 3\,. \end{cases}$$

Determine una expresión para $g \circ f$, identificando su dominio.

21. Sea $f : (5, \infty) \to B$ dada por $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2 - 9}$.

   a) Determine B para que f sea sobreyectiva.

   b) Pruebe que f es inyectiva.

   c) Calcule f^{-1} e identifique su dominio.

22. a) Trace la gráfica de $f(x) = 2 - e^{-|x|}$.

   b) Determine el dominio y recorrido de $g(x) = \ln(2 - e^{-|x|})$

23. Si se detuviera de repente la contaminación del lago Erie, se ha estimado que el nivel de contaminantes decrecería de acuerdo con la fórmula

$$C(t) = C_0 e^{-\frac{t}{4}}\,,$$

donde t está en años y C_0 es el nivel de contaminantes cuando se dejó de contaminar. ¿Cuántos años tomará eliminar el 50 % de los contaminantes?

24. Considere la función definida por $h(x) = x^2 \left[\dfrac{1}{x}\right]$.

   a) ¿Es h una función par?

   b) Bosqueje el gráfico de h.

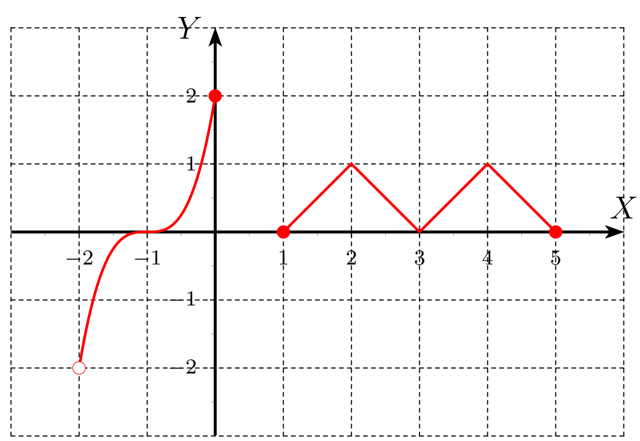
25. Considere las funciones g y f definidas por:

$$g(x) = \sqrt{4 - x^2}\,, \qquad f(x) = \begin{cases} 4x - 10 & \text{si } x > 1\,, \\ 3 - x^2 & \text{si } x \leqslant 0\,. \end{cases}$$

   a) Determine $g \circ g$.

   b) Determine $g \circ f$.

26. Sea f la función cuyo gráfico se muestra a continuación



a) Bosqueje el gráfico de $h(x) = f(2x - 2)$.

b) Bosqueje el gráfico de $g(x) = 1 - f(2x - 2)$.

27. Considere la función definida por $h(x) = \ln\left(\frac{3^x - 1}{3^x + 1}\right)$.

    a) Determine el dominio de h.

    b) Demuestre que h es inyectiva.

    c) Determine la inversa de h.

28. Bosqueje el gráfico de $f(x) = -3 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}$.

3. Sucesiones de números reales

1. La sucesión $\{a_n\}$ se define recursivamente con $a_1 = 1$ y
$$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{para } n \geqslant 1\,.$$
Pruebe que $\{a_n\}$ es monótona creciente, es decir, que $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Encuentre el valor de las siguientes sumas

    a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 - k^2$

    b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{sen}(k) - \operatorname{sen}(k+1)$

    c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

3. Encuentre el término independiente de x en $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2 (1+x)^n$.

4. Sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $p + q = 1$. Definimos para $k = 0, 1, \ldots, n$ los términos
$$r_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}\,.$$
Demuestre que
$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot r_k = n \cdot p\,.$$

5. Demuestre, usando la definición de límite, que la sucesión $a_n = \dfrac{2n+3}{n+2}$ converge a $L = 2$.

6. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{4n^2 + 5n - 1}}$.

7. Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida por
$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}\,.$$
Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$.

8. La sucesión $\{a_n\}$ se define con $a_1 = 1$ y

$$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n} \quad \text{para } n \geqslant 1\,. \tag{1}$$

Se sabe que $\{a_n\}$ es monótona creciente. Pruebe que $\{a_n\}$ es convergente y calcule su límite.

9. Calcule el límite de las siguientes sucesiones

   a) $a_n = \dfrac{1 + 2 \cdot 10^n}{5 + 3 \cdot 10^n}$

   b) $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

10. Halle las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(an + b - \frac{n^3+1}{n^2+1} \right) = 0\,.$$

11. a) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{9^{n+1}}{14^n} - \frac{2n - \sqrt{n+4n^2}}{2-3n} \right)$.

    b) Considere la sucesión

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\,.$$

    Use el Teorema del Sandwich para calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$.

12. Calcule el valor de

$$S = \sum_{k=7}^{201} \frac{1}{(k+1)(k+3)}\,.$$

13. Calcule el valor de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k}\,.$$

14. Encuentre el coeficiente que acompaña el término x^{13} en la expansión de

$$\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^{17}\,.$$

Puede dejar su respuesta expresada en términos de coeficiente binomiales.

15. Usando la definición de límite, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+n+1} = \frac{1}{2}\,.$$

16. Considere la sucesión dada por

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)\,, \quad n \geqslant 1\,. \end{aligned}$$

a) Demuestre que $a_n > 0$ para todo $n \geqslant 1$.

b) Demuestre que $a_n \geqslant \sqrt{2}$ para todo $n \geqslant 2$.

c) Demuestre que $a_n \geqslant 2$ para todo $n \geqslant 1$.

17. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right) .$$

Justifique su respuesta.

18. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $1 < a < b < c$. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} .$$

Justifique su respuesta.

19. Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere la sucesión dada por

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_{n+1} &= a_n + a^{n+1} , \quad n \geqslant 1 . \end{aligned}$$

Calcule a_{100}.

20. Calcule el coeficiente que acompaña a x^{-30} en la expansión de

$$\left(2+\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{54}\right)^2 .$$

21. Usando la definición, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[n+1]^3}{n^2+1} = \infty .$$

22. Demuestre que el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\cos(\pi n)}{n^2+1}$$

no existe.

23. Calcule las siguientes sumas.

a) $\displaystyle\sum_{k=5}^{n} \left(12k^2-\frac{4}{5^k}\right)$,

b) $\displaystyle\sum_{k=10}^{100} \frac{1}{k^2-4k+3}$.

24. Determine el coeficiente que acompaña a x^3 en la expansión del binomio $\left(2x+\dfrac{1}{8x}\right)^{15}$.

25. Calcule

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-3)^k .$$

26. Demuestre que $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$ es monótona, para $n \in \mathbb{N}$.

27. Demuestre, por definición de límite, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+5n+3}{n^2+2n+1} = 2\,.$$

28. Dada la sucesión $2a_{n+1} = \sqrt{7a_n+2}$ con $a_1 = 1$, demuestre

    a) $0 \leqslant a_n \leqslant 2$ y
    b) a_n es creciente.

29. Calcule los siguientes límites

    a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{4n^2+3n-2}}$
    b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+4n+1}-n\right)$.

30. Sabiendo que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ calcule

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\,.$$

31. Use el teorema del Sandwich para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1}}{n^2+1}+\frac{\sqrt{2}}{n^2+2}+\frac{\sqrt{3}}{n^2+3}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{n^2+n}\right) = 0\,.$$

32. Calcule las siguientes sumas:

    a) $\displaystyle\sum_{k=4}^{40} \frac{4}{(2k-3)(2k+1)}$,
    b) $\displaystyle\sum_{k=10}^{50} \frac{(-2)^{k+1}}{3^{2k}}$.

33. Sea x_n la sucesión definida recursivamente por $x_1 = 6$, $x_{n+1} = 5 - \dfrac{6}{x_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

    a) Demuestre que x_n es monótona.
    b) Demuestre que x_n es acotada.
    c) Use las dos partes anteriores para concluir que el límite existe y calcule su límite.

34. Demuestre, por definición, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n+1}} = \infty\,.$$

35. Asuma que x_n es tal que existe $\lim_{n\to\infty} y_n$ y $|x_n \cdot y_n|$ es acotada. Demuestre que x_n converge a 0.

36. Calcule

    a) $\displaystyle\sum_{k=21}^{100} \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$,
    b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} (-1)^k k^2$,
    c) $\displaystyle\sum_{k=100}^{153} \frac{(-3)^{k+1}}{2^{2k}}$.

37. Considere la siguiente suma:

$$a + (1+a)b + (1+a+a^2)b^2 + \cdots + (1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})b^{n-1}\,.$$

Escriba la suma anterior usando sumatorias.

38. Calcule la siguiente suma:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}3^k \,.$$

39. Determine el término independiente de x en el desarrollo de
$$(2x+1)\left(1+\frac{2}{x}\right)^n \,.$$

40. Sea $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por:
$$a_1 = 1\,, \qquad a_{k+1} = 3 - \frac{1}{a_k}\,.$$
Demuestre que

   a) La sucesión es acotada inferiormente por 0.

   b) La sucesión es acotada superiormente por 3.

   c) Demuestre que la sucesión es monótona.

41. Decida si es verdadero o falso justificadamente:

   a) Sea $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Si las sub-sucesiones $\{a_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{a_{2k+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ son decrecientes entonces $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ también lo es.

   b) Si $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada y $a_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $b_k = \dfrac{1}{a_k}$ es acotada.

42. Sea $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por:
$$a_k = \frac{k^2+2k+2}{k+1}\,.$$

   a) Determine algún $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_k > 10^{10}$ para todo $k \geqslant k_0$.

   b) Demuestre, usando la definición, que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = +\infty$.

43. Decida si es verdadero o falso justificadamente:
Si $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son sucesiones tales que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = +\infty$ y que b_k es acotada entonces
$$\lim_{k\to\infty}(a_k+b_k) = +\infty\,.$$

44. Demuestre, usando la definición, que
$$\lim_{k\to\infty}\frac{2k+1}{k+3} = 2\,.$$

45. Decida si es verdaderi o falso justificadamente:

   a) Si $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son sucesiones tales que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ y que $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = +\infty$ entonces
$$\lim_{k\to\infty} a_k\cdot b_k = 0\,.$$

   b) Si $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son sucesiones tales que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ y que $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 8$ entonces
$$\lim_{k\to\infty}(a_k+b_k) = 8\,.$$

46. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{3^n+5^n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos(2n^2)}{1+\sqrt{n}}$.

47. Demuestre que los siguientes límites no existen.

    a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n^3}{n^3+2n^2+1}$,

    b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{2^n}$.

48. Considere la sucesión $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definida recursivamente por

$$a_1 = 1\,, \qquad a_{k+1} = \frac{1}{3-a_k}\,.$$

    a) Demuestre que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que $(a_k)^2 - 3a - k + 1 \leqslant 0$.

    b) Demuestre que la sucesión es acotada.

    c) Demuestre que la sucesión es monótona.

    d) Concluya que la sucesión converge y calcule el límite.