

MAT1107 – Introducción al Cálculo
Solución Interrogación N° 1

1. Demuestre que, si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces

$$\frac{(a+b)}{2} \cdot \frac{(c+d)}{2} < \frac{ac+bd}{2}.$$

Solución. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{ac+bd}{2} - \frac{(a+b)}{2} \cdot \frac{(c+d)}{2} &= \frac{2(ac+bd)}{4} - \frac{ac+ad+bc+bd}{4} \\ &= \frac{ac-ad-bc+bd}{4} \\ &= \frac{a(c-d)-b(c-d)}{4} \\ &= \frac{(c-d)(a-b)}{4}. \end{aligned}$$

Por hipótesis $a < b$ y $c < d$ entonces $a-b < 0$ y $c-d < 0$. Por lo que

$$(c-d)(a-b) > 0 \iff \frac{(c-d)(a-b)}{4} > 0,$$

como queríamos probar.

Puntaje Pregunta 1.

- 3 puntos por obtener la igualdad $\frac{ac+bd}{2} - \frac{(a+b)}{2} \cdot \frac{(c+d)}{2} = \frac{(c-d)(a-b)}{4}$.
- 3 puntos por concluir mediante las hipótesis que la expresión es estrictamente positiva.

2. Resuelva la siguiente inecuación

$$\frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 6x + 8} \leq -1.$$

Solución. Notemos que la inecuación es equivalente con

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 6x + 8} \leq -1 &\iff \frac{x^2 + 4x - 12}{x^2 - 6x + 8} + 1 \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2 + 4x - 12 + x^2 - 6x + 8}{x^2 - 6x + 8} \leq 0 \\ &\iff \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 - 6x + 8} \leq 0 \\ &\iff \frac{2(x^2 - x - 2)}{(x - 4)(x - 2)} \leq 0 \\ &\iff \frac{2(x - 2)(x + 1)}{(x - 4)(x - 2)} \leq 0. \end{aligned}$$

Tenemos tres puntos críticos $x = -1$, $x = 2$ y $x = 4$ y dos restricciones para la inecuación $x \neq 2$ y $x \neq 4$. Note que podemos cancelar el término $(x - 2)$ en el cociente y que $x \neq 2$ ya que en la desigualdad original estaríamos dividiendo por cero. Luego, tenemos que

$$\frac{2(x - 2)(x + 1)}{(x - 4)(x - 2)} \leq 0 \iff \frac{x + 1}{x - 4} \leq 0 \quad \text{y} \quad x \neq 2.$$

Realizando una tabla de signos para esta última

	$-\infty$	-1	4	∞
$x + 1$		$-$	$+$	$+$
$x - 4$		$-$	$-$	$+$
		$+$	$-$	$+$

Entonces el conjunto solución es $S = [-1, 4[- \{2\} = [-1, 2[\cup]2, 4[$.

Puntaje Pregunta 2.

- 2 puntos por desarrollar y obtener una inecuación con numerador y denominador factorizados.
- 2 puntos por obtener la tabla de signos correctamente.
- 2 puntos por obtener el conjunto solución considerando los puntos de restricción.