MAT1620 ★ Cálculo 2

Examen Pauta

El examen tiene 5 preguntas, todas con el mismo puntaje. Durante el examen no hay consultas.

1. Determine si la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{a^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}\,dx, \qquad \text{donde } a>0$$

es convergente o divergente.

Solución:

Para $x>0$ tenemos $a^2+\frac{1}{x}>a^2$, luego si $a>0$ tenemos

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}>\sqrt{a^2}=a \qquad (2\ puntos)$$

Por lo tanto, multiplicando por $\frac{1}{x}$ a ambos lados

$$\frac{1}{x}\sqrt{a^2+\frac{1}{\sqrt{x}}}>\frac{a}{x} \qquad \text{(2 puntos)}$$

Y así, como $\int_1^\infty \frac{a}{x}dx$ es divergente, por el criterio de comparación, podemos concluir que la integral impropia dada es divergente (2 puntos).

Descuentos de puntaje y observaciones:

1 punto por cada justificación de las desigualdades que no esté presente.

2. Demuestre que el límite a continuación no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$$

Solución.

Sea $y = mx$, entonces

$$\frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \frac{x^2(m^2x^2)}{x^3+m^3x^3} = \frac{xm^2}{1+m^3} \to 0, \text{ cuando } (x,y) \to (0,0) \text{ (2 puntos)}$$

Ahora sea $y = -xe^x$, entonces

$$\frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \frac{-x^4e^{2x}}{x^3 - x^3e^{3x}} = \frac{xe^{2x}}{e^{3x}-1} \to \frac{1}{3}, \text{ cuando } (x,y) \to (0,0)$$

El límite anterior se obtiene usando regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{2x}}{e^{3x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}(2x+1)}{3e^{3x}} = \frac{1}{3} \quad \text{(2 puntos)}$$

Por lo tanto, al obtener dos resultados distintos por trayectorias diferentes, el límite no existe (2 puntos).

Descuentos de puntaje y observaciones.

La primera trayectoria puede ser cualquier recta que pase por el origen, por ejemplo $y = 2x$.

Si usa otra trayectoria que no sea la exponencial para obtener otro límite también es correcto.

Si la conclusión es correcta pero los límites están mal calculados no se asigna puntaje.

3. Sea $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2x$. Encuentre el valor mínimo y el máximo de f, sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 16$.

Solución

Primero debemos obtener los puntos en el interior del círculo donde $\nabla f = 0$ y luego buscar el máximo y mínimo en la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ (1 punto)

- $\nabla f = (2x + 2, 4y)$, así $\nabla f = 0$ en el punto $(-1,0)$. (1 punto)
- Para los puntos críticos en la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$ usamos multiplicadores de Lagrange y obtenemos el sistema

$$2x + 2 = 2\lambda x, \quad 4y = 2\lambda y, \; x^2 + y^2 = 16$$ (1 punto)

La segunda ecuación nos entrega los casos $y = 0$ o $\lambda = 0$

- Si $y = 0$, de la última ecuación se obtiene $x = \pm 4$. (1 punto)
- Si $\lambda = 2$, la primera ecuación nos entrega $x = 1$ y la última $y = \pm\sqrt{15}$. (1 punto)

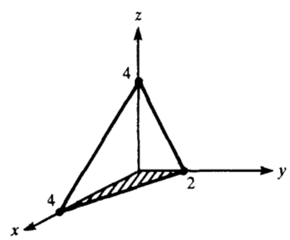
Finalmente calculamos los valores de la función en todos los puntos obtenidos:

(x,y)	$f(x,y)$
$(-1,0)$	-1
$(4,0)$	24
$(-4,0)$	8
$(1, \pm\sqrt{15})$	33

Por lo tanto, el mínimo de f es -1 y el máximo es 33. (1 punto)

4. Evalúe la integral $\iiint_R x\,dV$, donde R es el sólido encerrado por los planos coordenados y el plano $x + 2y + z = 4$.

Solución.



(1 punto)

En el triángulo de la base, para $0 \leq y \leq 2$, tenemos $0 \leq x \ \leq 4 - 2y$. Además, dados x e y, tenemos $0 \leq z \leq 4 - x + 2y$. Así

$$\begin{aligned}
\iiint_R x\,dV &= \int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_0^{4-x-2y} x\,dzdxdy \quad (3\,puntos) \\
&= \int_0^2 \int_0^{4-2y} x(4 - x - 2y)dxdy \\
&= \int_0^2 \int_0^{4-2y} 4x - x^2 - 2xydxdy \\
&= \int_0^2 (4-2y)^2 \left(2 - \frac{1}{3}(4-2y) - y\right) dy \\
&= \int_0^2 (4-2y)^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}y\right) dy \\
&= \frac{4}{3}\int_0^2 (2-y)^3 dy \\
&= \frac{16}{3} \quad (2\,puntos)
\end{aligned}$$

Descuentos de puntaje y observaciones.

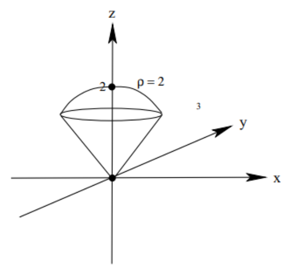
No hay puntaje por calcular integrales con los límites de integración mal definidos.

Se asigna 1 punto por cada límite de integración bien definido.

5. Sea Q el sólido encerrado por $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ y $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Solución.

a. Haga un bosquejo de la región Q.



(1.5 puntos)

b. Plantee una integral triple en coordenadas rectangulares que permita calcular el volumen de Q (¡no calcule la integral!).

$$\iiint_Q 1dV = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1\, dz\, dy\, dx \ (1.5\ puntos)$$

También puede ser sin usar simetría

$$\iiint_Q 1dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{3x^2+3y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} 1\, dz\, dy\, dx \ (1.5\ puntos)$$

c. Plantee una integral triple en coordenadas cilíndricas que permita calcular el volumen de Q (¡no calcule la integral!).

$$\iiint_Q 1dV = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta \ (1.5\ puntos)$$

También puede ser sin usar simetría

$$\iiint_Q 1dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\sqrt{3}r}^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta (1.5 puntos)$$

d. Plantee una integral triple en coordenadas esféricas que permita calcular el volumen de Q (¡no calcule la integral!).

$$\iiint_Q 1dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^2 \rho^2\, sen\phi d\rho\, d\phi\, d\theta \ (1.5\ puntos)$$

Descuentos de puntaje y observaciones.

Descontar 1 punto por intentar calcular la integral.

Se asigna 0.5 punto por cada límite de integración bien definido.