PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Ayudantía 12

1. Considere la siguiente función de probabilidad conjunta

$$P(X = x, Y = y) = \begin{cases} 1/3, & x = 0, y = 0 \\ 1/3, & x = 1, y = 1 \\ 1/3, & x = 2, y = 0 \end{cases}$$

   (a) Calcule la correlación entre X, Y
   (b) ¿Son X, Y independientes?
   (c) ¿Que concluye en base a lo anterior?
   (d) Calcule $P(X = 1|Y = 1)$. ¿El valor obtenido tiene sentido?

2. Sea $(X, Y)'$ un vector aleatorio con

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{ln(2)} e^{-xy}, \quad x > 0, 1 < y < 2$$

   Calcule $Var(aX + Y + c)$, el vector de medias y la matriz de varianza-covarianza.

3. Sea $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias con función densidad conjunta dada por

$$f_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}, \quad x_i > 0$$

   (a) ¿Son $X_1, ..., X_n$ iid?
   (b) Defina

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

   Encuentre la distribución de S_n
   (c) **Propuesto:** Muestre que $2\lambda S_n \sim \chi^2_{(2n)}$

4. Muestre que si X, Y son independientes entonces

$$\mathbb{E}[h(X)g(Y)] = \mathbb{E}[h(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$$

5. Sea $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)^T$ un vector aleatorio con fgm conjunta dada por

$$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = e^{\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{\sigma^2}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{t}}$$

con $\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu & \cdots & \mu \end{pmatrix}^T$ y $\sigma^2 > 0$.

(a) Encuentre las fgm marginales para cada X_i y determine la distribución de las mismas

(b) Defina las siguientes variables aleatorias

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad W = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

Encuentre la distribución de Y y W

(c) Repita (b) pero ahora teniendo

$$M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = e^{\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{t}}$$

con $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}^T$ y $\boldsymbol{\Sigma} = diag(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2)$

(d) **Propuesto:** Considere $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Encuentre la distribución de $T = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b_i$, con $a_i > 0$ y $b_i \in \mathbb{R}$