PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Solución Ayudantía 4

1. Sea $\Omega = H_1 \cup H_2$ y $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Asuma que $P(A|H_1), P(A|H_2)$, $P(H_1) \neq 0, P(H_2) \neq 0$ son probabilidades conocidas. Encuentre una expresión para $P(A)$.

   Para esto vamos a recordar que $P(A) = P(A \cap \Omega)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega), \quad \Omega = H_1 \cup H_2 \\
&= P(A \cap [H_1 \cup H_2]) \\
&= P([A \cap H_1] \cup [A \cap H_2]), \quad \text{disjuntos} \\
&= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) \\
&= P(A \cap H_1)\frac{P(H_1)}{P(H_1)} + P(A \cap H_2)\frac{P(H_2)}{P(H_2)} \\
&= \frac{P(A \cap H_1)}{P(H_1)}P(H_1) + \frac{P(A \cap H_2)}{P(H_2)}P(H_2) \\
&= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2) \\
\Rightarrow \; P(A) &= P(A|H_1)P(H_1) + P(A|H_2)P(H_2)
\end{aligned}
$$

2. Generalicemos el ejercicio anterior, esto es, mostrar que para una partición $H_1, H_2, ...$ de Ω, con $P(H_n) \neq 0$ para $n = 1, 2, ...$, se cumple que

$$
P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)P(H_n)
$$

   Recordemos que si $H_1, H_2, ...$ es una partición, entonces

$$
\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \Omega
$$

   con $H_i \cap H_j = \emptyset \,, \forall i \neq j$. Podemos mostrar lo pedido del mismo modo que antes.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A \cap \Omega) \\
&= P(A \cap [H_1 \cup H_2 \cup \cdots])
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= P([A\cap H_1]\cup[A\cap H_2]\cup\cdots)\\
&= P(A\cap H_1)+P(A\cap H_2)+\cdots\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(A\cap H_n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(A\cap H_n)\frac{P(H_n)}{P(H_n)}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A\cap H_n)}{P(H_n)}P(H_n)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)P(H_n)\\
\Rightarrow\ P(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)P(H_n)
\end{aligned}
$$

3. Se realiza una encuesta para saber el porcentaje de hombres que cantan en el baño debido a que algunas personas pueden sentirse demasiado avergonzadas para admitir abiertamente que son cantantes de baño, a cada persona interrogada se le pide que lance un dado en secreto y responda NO si el número que se muestra es 1 y SI si es 6, sin importar cuál sea la verdadera respuesta, pero a decir la verdad (SI o NO) si sale 2, 3, 4 o 5. Debido a que el número mostrado no se revela, es imposible saber a partir de la respuesta dada si la persona es un cantante de baño o no. Supongamos que la probabilidad de responder SÍ en esta encuesta es 2/3. ¿Cuál es entonces la probabilidad de ser cantante de baño?

   Note que la respuesta de la persona va a depender del numero del dado, por lo que podemos intuir que hay que utilizar probabilidad condicional. Definamos los siguientes eventos

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \text{Sale el numero 1 en el dado}\\
D_{2345} &= \text{Sale el numero 2,3,4 o 5 en el dado}\\
D_6 &= \text{Sale el numero 6 en el dado}\\
S &= \text{Responder sí en la encuesta}\\
C &= \text{La persona es cantante de baño}
\end{aligned}
$$

   por enunciado tenemos $P(S) = 2/3$, además, como el dado es honesto, se tiene

$$
P(D_1) = \frac{1}{6},\quad P(D_{2345}) = \frac{4}{6},\quad P(D_6) = \frac{1}{6}
$$

   Note que nos piden $P(C) = P(S|D_{2345})$, pues la persona será cantante de baño solo si dice la verdad, es decir, si sale el numero $2, 3, 4$ o 5. Calcular esto de manera directa es casi imposible, debido a la falta de datos. Lo que podemos hacer es notar que responder sí en la encuesta, va a depender del numero que haya salido, por lo que $P(S)$ se calcula condicionando según el numero que salio en el dado, esto es

$$
P(S) = P(S|D_1)P(D_1) + P(S|D_{2345})P(D_{2345}) + P(S|D_6)P(D_6)
$$

   A partir de acá podemos reemplazar las probabilidades que ya tenemos

$$
\begin{aligned}
P(S) &= P(S|D_1)P(D_1) + P(S|D_{2345})P(D_{2345}) + P(S|D_6)P(D_6)\\
2/3 &= P(S|D_1)\cdot 1/6 + P(S|D_{2345})\cdot 4/6 + P(S|D_6)\cdot 1/6
\end{aligned}
$$

Para encontrar las probabilidades restantes piense de la siguiente forma

- $P(S|D_1)$
  Esto corresponde a la probabilidad de que la persona responda "sí", dado que salio el numero uno en el dado, pero si salio el numero 1, entonces la persona esta obligada a decir "no", entonces
  $$P(S|D_1) = 0$$
- $P(S|D_{2345})$
  Es la probabilidad buscada, no la sabemos.
- $P(S|D_6)$
  Esto corresponde a la probabilidad de que la persona responda "sí", dado que salio el numero seis en el dado, pero si salio el numero 6, entonces la persona esta obligada a decir "si", entonces
  $$P(S|D_6) = 1$$

Ahora reemplazamos todo lo que tenemos

$$\begin{aligned} 2/3 &= P(S|D_1)\cdot 1/6 + P(S|D_{2345})\cdot 4/6 + P(S|D_6)\cdot 1/6 \\ 2/3 &= 0\cdot 1/6 + P(S|D_{2345})\cdot 4/6 + 1\cdot 1/6 \\ \frac{1}{2} &= P(S|D_{2345})\cdot 4/6 \\ P(S|D_{2345}) &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ P(S|D_{2345}) = P(C) = 3/4$$

4. Suponga que en una caja hay 99 monedas honestas y una con doble cara. Suponga que se elige una moneda al azar, se lanza n veces, y sale cara en todos los lanzamientos. ¿Cual es la probabilidad de que la moneda elegida haya sido la con doble cara, dado la información entregada? ¿Cual es el n mas pequeño tal que la probabilidad anterior es de al menos 9/10?

   Definamos los siguientes eventos

$$\begin{aligned} A &= \text{se elige moneda con doble cara} \\ A^c &= \text{se elige moneda honesta} \\ H_n &= \text{sale cara en los } n \text{ lanzamientos} \end{aligned}$$

   Nos piden $P(A|H_n)$, entonces

$$P(A|H_n) = \frac{P(H_n|A)P(A)}{P(H_n)}$$

   la probabilidad de que salga cara en los n lanzamientos va a depender de la moneda que se elige, de modo que podemos condicionar según la moneda.

$$\begin{aligned} P(A|H_n) &= \frac{P(H_n|A)P(A)}{P(H_n)} \\ &= \frac{P(H_n|A)P(A)}{P(H_n|A)P(A) + P(H_n|A^c)P(A^c)} \end{aligned}$$

Calculemos todo lo necesario.

- $P(H_n|A)$
  Esto corresponde a la probabilidad de obtener n caras en los n lanzamientos dado que se eligió la moneda con doble cara. Esta probabilidad vale 1, pues si la moneda tiene doble cara, siempre saldrá cara. Teniendo así
  $$P(H_n|A) = 1$$
- $P(H_n|A^c)$
  Esto corresponde a la probabilidad de obtener n caras en los n lanzamientos dado que se eligió la moneda honesta. Como estamos con la moneda honesta, esta tiene probabilidad $1/2$ de dar cara, y como queremos n caras se tiene que
  $$P(H_n|A^c) = \frac{1}{2^n}$$
- $P(A)$
  Esto corresponde a la probabilidad de elegir una moneda con doble cara, pero solo hay una de entre 100, por lo que
  $$P(A) = \frac{1}{100}$$
- $P(A^c)$
  Esto corresponde a la probabilidad de elegir una moneda honesta, hay 99 de entre 100, por lo que
  $$P(A) = \frac{99}{100}$$

  Ya que tenemos todo, reemplazamos
  $$\begin{aligned} P(A|H_n) &= \frac{P(H_n|A)P(A)}{P(H_n)} \\ &= \frac{P(H_n|A)P(A)}{P(H_n|A)P(A) + P(H_n|A^c)P(A^c)} \\ &= \frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{1 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{99}{100}} \end{aligned}$$
  Teniendo así
  $$P(A|H_n) = \frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{1 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{99}{100}}$$
  Finalmente nos piden encontrar n tal que
  $$P(A|H_n) \geq \frac{9}{10}$$
  Entonces
  $$\frac{1 \cdot \frac{1}{100}}{1 \cdot \frac{1}{100} + \frac{1}{2^n} \cdot \frac{99}{100}} \geq \frac{9}{10}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{900} &\geq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{99}{100} \\
\frac{1}{891} &\geq \frac{1}{2^n} \\
2^n &\geq 891 \\
nln(2) &\geq ln(891) \\
n &\geq 9.799281621
\end{aligned}
$$

como n debe ser entero, se tiene que $n = 10$ es el n mas pequeño que cumple lo solicitado.

5. Sea A, B eventos disjuntos tales que $P(A) = p$ y $P(B) = q$ con $0 < p + q < 1$. Se realiza un experimento de ensayos independientes donde cada ensayo se observa si A, B o $(A \cup B)^c$ ocurre. Encuentre la probabilidad de que ocurra el evento A antes que el evento B.

   La probabilidad de que ocurra el evento A antes que el evento B puede pasar de varias formas, pues puede ocurrir A en el primer ensayo, o puede ocurrir que A no ocurra en el primer ensayo, que B no ocurra en el segundo ensayo, pero que A si ocurra en el tercer ensayo, y así sucesivamente. Para esto definamos los siguientes eventos

$$
\begin{aligned}
A_i &= \text{Ocurre el evento } A \text{ en el } i\text{−esimo ensayo} \\
B_i &= \text{Ocurre el evento } B \text{ en el } i\text{−esimo ensayo} \\
C_i &= \text{No ocurre el evento } A \text{ ni el evento } B \text{ en el } i\text{−esimo ensayo} = A_i^c \cap B_i^c
\end{aligned}
$$

   Nos piden

$$
P(A_1 \cup [C_1 \cap A_2] \cup [C_1 \cap C_2 \cap A_3] \cup \cdots)
$$

   Ahora utilizando que son ensayos independientes y eventos disjuntos tenemos

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup [C_1 \cap A_2] \cup [C_1 \cap C_2 \cap A_3] \cup \cdots) &= P(A_1) + P(C_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap C_2 \cap A_3) + \cdots \\
&= P(A_1) + P(C_1)P(A_2) + P(C_1)P(C_2)P(A_3) + \cdots \\
&= P(A_1) + P(A_1^c \cap B_1^c)P(A_2) + P(A_1^c \cap B_1^c)P(A_2^c \cap B_2^c)P(A_3) + \cdots
\end{aligned}
$$

   Para las probabilidades $P(A_i^c \cap B_i^c)$ note que

$$
\begin{aligned}
P(A_i^c \cap B_i^c) &= P([A_i \cup B_i]^c) \\
&= 1 - P(A_i \cup B_i) \\
&= 1 - [P(A_i) + P(B_j) - P(A_i \cap B_j)], \quad A, B \text{ disjuntos} \\
&= 1 - [P(A_i) + P(B_j) - 0] \\
&= 1 - p - q \\
\Rightarrow \; P(A_i^c \cap B_i^c) &= 1 - p - q
\end{aligned}
$$

   Ahora si reemplazamos

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup [C_1 \cap A_2] \cup [C_1 \cap C_2 \cap A_3] \cup \cdots) &= P(A_1) + P(C_1 \cap A_2) + P(C_1 \cap C_2 \cap A_3) + \cdots \\
&= P(A_1) + P(C_1)P(A_2) + P(C_1)P(C_2)P(A_3) + \cdots \\
&= P(A_1) + P(A_1^c \cap B_1^c)P(A_2) + P(A_1^c \cap B_1^c)P(A_2^c \cap B_2^c)P(A_3) + \cdots \\
&= p + (1 - p - q)p + (1 - p - q)(1 - p - q)p + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= p + (1-p-q)p + (1-p-q)^2 p + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p-q)^n \\
&= p\frac{1}{1-(1-p-q)} \\
&= \frac{p}{p+q}
\end{aligned}
$$

6. Una urna contiene 12 bolas, 4 de las cuales son negras y las 8 restantes son blancas. Se juega el siguiente juego: se extrae la primera bola al azar y, tras anotar su color, se devuelve a la urna junto con un nuevo par de bolas del mismo color. Calcule la probabilidad de que en las tres primeras rondas del juego todas las bolas extraídas sean negras.

   Definamos el siguiente evento

   $$A_i = \text{se extrae bola negra en la } i\text{−esima extracción}$$

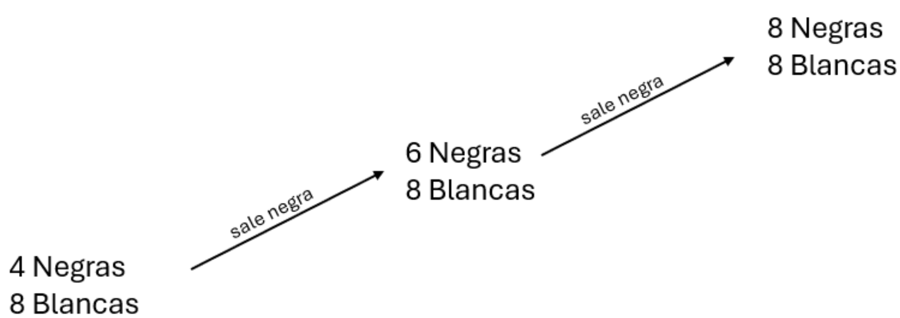
   Nos piden

   $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

   como los eventos no son independientes, pues depende de la bolita que se extrajo en el momento anterior, podemos calcular lo pedido condicionando de la siguiente manera

   $$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1)$$

   Podemos hacer el siguiente diagrama de árbol

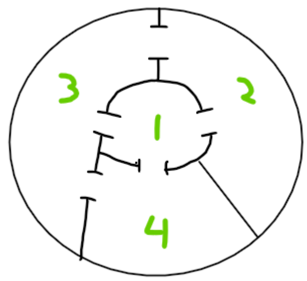


   donde es fácil obtener las probabilidades, de modo que

   $$
   \begin{aligned}
   P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_3|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1) \\
   &= \frac{8}{16} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{4}{12}
   \end{aligned}
   $$

   * **Los siguientes ejercicios quedan de tarea**

7. Suponga que un ratón entrenado se coloca en el siguiente laberinto



El ratón al estar en un sector en un instante dado elige una puerta de salida al azar y se cambia de sector. Si el lugar donde inicia el ratón es totalmente aleatorio (equiprobable), ¿Cual es la probabilidad de que en el primer paso se mueva a la puerta 4? Asuma que el ratón siempre se mueve de sector de manera equiprobable según disponibilidad de movimiento.

8. En un experimento compuesto, primero se lanza un dado honesto, y luego se lanza una moneda honesta de forma independiente tantas veces como el número indicado por el dado.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?

   (b) Sabiendo que se han obtenido 3 caras ¿cuál es la probabilidad que el resultado del dado fue 4?

9. En la urna U_1 hay 2 bolas blancas y 3 bolas negras y en la urna U_2 hay 2 bolas negras. Seleccionamos una urna al azar y extraemos 2 bolas sin reemplazo. Calcule la probabilidad de extraer 0 bolas negras, 1 bola negra, y 2 bolas negras.

10. Sean A y B dos eventos definidos en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tales que $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. ¿Son A y B eventos independientes? ¿Cual es la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los eventos A o B? ¿Cual es la probabilidad de que algún evento no ocurra?

11. Demuestre que si $P(\cdot)$ es una medida de probabilidad y B un evento con $P(B) > 0$, entonces $P(\cdot|B)$ cumple con los axiomas de Kolmogorov.

12. Una señal puede ser verde o roja con probabilidad 4/5 o 1/5, respectivamente. La probabilidad de que sea recibido correctamente por una estación es 3/4. De las dos estaciones A y B, la señal la recibe primero A y luego la estación A pasa la señal a la estación B. Si la señal recibida en la estación B es verde, entonces encuentre la probabilidad de que la señal original fuera verde.

13. Sea $\mathcal{F} = A_1 \cap A_2$ y $\mathcal{G} = A_1 \cup A_2$, donde $A_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$ y $A_2 = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \Omega\}$ dos $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\Omega = \{1,2,3\}$. ¿Son $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ $\sigma-$álgebras de subconjuntos de Ω?