Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 3

1. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales. Determine la matriz cambio de base $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$, donde $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ y $\mathcal{B} = \{1 - 3t^2, 2 + t - 5t^2, 1 + 2t\}$. Luego determine $[-1 + 2t^2]_B$.

Solución.

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \begin{bmatrix}[1]_B & [t]_B & [t^2]_B\end{bmatrix} = (\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así

$$[-1 + 2t^2]_B = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Puntaje:

- 1 pto por describir $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = [[1]_B \quad [t]_B \quad [t^2]_B]$ o $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = (\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P})^{-1}$.
- 1 pto por determinar correctamente cada columna de $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ (3ptos).
- 2 ptos por determinar correctamente $[-1 + 2t^2]_B$.

2. Determine si existen valores de a y b reales con $b \neq 0$, tal que la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ sea diagonalizable.

Solución.

Como la matriz A es triangular superio se sigue que los valores propios de A son los elementos de su diagonal, es decir $P_A(\lambda) = (a - \lambda)^4$ y luego A tiene un valor propio $\lambda = a$ con multiplicidad algebraica 4. Ahora bien, el espacio propio asociado a $\lambda = a$ es

$$E_\lambda = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mid x_2 = 0 \right\} = \text{Gen}\left\{ e_1, e_3, e_4 \right\}.$$

La multiplicidad geométrica de λ es distinta de la multiplicada algebraica por lo tanto la matriz dada no es diagonalizable cualesquiera sean los valores a y b con $b \neq 0$. También se puede argumentar que no existe una base de vectores propios de A para $\mathbb{R}^4$.

Puntaje:

- 0.5 pto por determinar correctamente el polinomio caractaristico de A.
- 0.5 pto por determinar que $\lambda = a$ es el único valor propio de A.
- 2 ptos por determinar correctamente el espacio de vectores propios asociados al valor propio a.
- 3 ptos por argumentar que no existen valores para que la matriz A sea diagonalizable.

3. Determinar si $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ es diagonalizable. En tal caso encontrar una matriz P invertible y una matriz D diagonal, tal que $A = PDP^{-1}$.

Solución.

El polinomio característico de A es:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 4 & -2 \\ -3 & 4-\lambda & 0 \\ -3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda+3)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Como son tres valores propios distintos y A es una matriz de 3×3 la matriz A es diagonalizable. Los espacios propios son

$$E_{\lambda_1} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda_2} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} \qquad E_{\lambda_3} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$$

Entonces $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios. Se sigue que la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ es la matriz invertible y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ la matriz diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.

Puntaje:

- 1 pto por determinar correctamente el polinomio caracteristico de A.
- 0.5 pto por determinar los 3 valores propios de A.
- 1 ptos por determinar correctamente cada espacio de vectores propios asociados. (3 ptos)
- 0.5 ptos por argumentar la matriz A es diagonalizable.(si solo encuentran la diagonalización tambien se asigna este puntaje).
- 0.5 por determinar correctamente P. (recordar que las columnas pueden estar en otro orden o ser un ponderado de ellas).
- 0.5 por determinar correctamente D. (recordar que las columnas pueden estar en otro orden correspondiente al orden de P).

4. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes reales y $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(-1) \\ p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}.$$

Obtenga la matriz para T respecto a la bases $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ y $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Solución.

Para obtener la matriz para T en las bases dadas, calculamos

$$T[1] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T[t] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T[t^2] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, la matriz para T es

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puntaje:

- 1 pts por calcular la transformación de cada de los elementos de la base. (3 ptos)
- 3 ptos por escribir la matriz correctamente.

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre una matriz P de 2×2 y una matriz C de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ tal que $A = PCP^{-1}$.

Solución.

El polinomio característico para A es

$$p(\lambda) = \det[A - \lambda I] = \lambda^2 - 4\lambda + 6 = (\lambda - 2)^2 + 2,$$

así que A tiene valores propios complejos $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}i$. Un vector propio complejo v, asociado con $\lambda = 2 - \sqrt{2}i$ pertenece a $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$, donde

$$A - (2 - \sqrt{2}i)I = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2}i & -3 \\ 1 & -1 + \sqrt{2}i \end{bmatrix}.$$

Entonces podemos tomar $v = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$. De esta información construimos las matrices P y C:

$$P = [\mathrm{Re}\ v, \mathrm{Im}\ v] = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}.$$

Puntaje:

- 1 pto para calcular el polinomio caracteristico y los valores propios;
- 2 pts para calcular un vector propio asociado v;
- 1 pto por escribir C;
- 2 pts por calcular la partes real y imaginera de v y producir P.

6. Sean $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$, no nulos y ortogonales. Se sabe que si $\vec{w} \in Gen\{\vec{u}, \vec{v}\}$ entonces $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Demuestre que

$$\alpha = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}.$$

Solución.

Como $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ entonces podemos concluir que

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{u} &= \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{u}), \\ \vec{w} \cdot \vec{v} &= \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{v}). \end{aligned}$$

Como $\vec{u}, \vec{v}$ son ortogonales, de lo anterior concluimos que

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{u} &= \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u}), \\ \vec{w} \cdot \vec{v} &= \beta(\vec{v} \cdot \vec{v}), \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\alpha = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}.$$

Puntaje:

- 1 pto por determinar que $\vec{w} \cdot \vec{u} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{u})$.
- 1 pto por determinar que $\vec{w} \cdot \vec{v} = \beta(\vec{v} \cdot \vec{v})$.
- 2 ptos por concluir que $\alpha = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.
- 2 ptos por concluir que $\beta = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$.

7. Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $W^{\perp}$ el ortogonal de W. Sea $\vec{z}_1 \in W$ un vector unitario, $\vec{z}_2 \in W^{\perp}$ un vector no nulo e $\vec{y} = \vec{z}_1 + \vec{z}_2$. Calcular $Proy_W\{\vec{y}\}$.

Solución.
Versión 1

Sea $\{\vec{z}_1, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s\}$ una base ortonormal (si toman una base solo ortogonal al hacer la proyección deben tomar los vectores $\dfrac{\vec{w}_i}{\|\vec{w}_i\|}$) de W. Note que esta base contiene a $\vec{z}_1$. La proyección de $\vec{y}$ sobre W se calcula según

$$Proy_W\{\vec{y}\} = (\vec{y} \cdot \vec{z}_1)\vec{z}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{w}_1)\vec{w}_1 + \cdots + (\vec{y} \cdot \vec{w}_s)\vec{w}_s.$$

Como

$$\begin{aligned}
\vec{y} \cdot \vec{z}_1 &= \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_1 + \vec{z}_2 \cdot \vec{z}_1 = 1, \\
\vec{y} \cdot \vec{w}_1 &= \vec{z}_1 \cdot \vec{w}_1 + \vec{z}_2 \cdot \vec{w}_1 = 0, \\
&\vdots \\
\vec{y} \cdot \vec{w}_s &= \vec{z}_1 \cdot \vec{w}_s + \vec{z}_2 \cdot \vec{w}_s = 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$Proy_W\{\vec{y}\} = \vec{z}_1.$$

Puntaje:

- 2 pto por determinar que $Proy_W\{\vec{y}\} = (\vec{y}\cdot\vec{z}_1)\vec{z}_1 + (\vec{y}\cdot\vec{w}_1)\vec{w}_1 + \cdots + (\vec{y}\cdot\vec{w}_s)\vec{w}_s$ con $\{\vec{z}_1, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s\}$ una base ortonormal de W.
- 1 pto por determinar que $\vec{y} \cdot \vec{z}_1 = 1$.
- 1 pto por determinar que $\vec{y} \cdot \vec{w}_i = 0$.
- 2 ptos por concluir que $Proy_W\{\vec{y}\} = \vec{z}_1$.

Versión 2

Por el teorema de la descomposición ortogonal si $y \in \mathbb{R}^n$ existe una única forma de descomponerlo como

$$y = y_1 + y_2 \text{ donde } y_1 = Proy_W(y) \in W \text{ y } y_2 \in W^{\perp}$$

luego como $y = z_1 + z_2$ y $z_2 \in W^{\perp}$ tenemos que $Proy_W(y) = z_1$

Puntaje:

- 3 ptos argumentar existe una única forma de descomponerlo como $y = y_1 + y_2$ donde $y_1 = Proy_W(y) \in W$ y $y_2 \in W^{\perp}$
- 3 ptos por concluir que $Proy_W(y) = z_1$

Versión 3

Sea $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_s\}$ una base ortonormal de W, luego si $U = [w_1 \quad \cdots \quad w_s]$ la

$$Proy_W y = UU^t y = UU^t z_1 + UU^t z_2 = Proy_W z_1 + Proy_W z_2$$

como $z_1 \in W$ la $Proy_W z_1 = z_1$ por otro lado $Proy_W z_2 = UU^t z_2 = U(U^t z_2) = U\vec{0} = \vec{0}$ ya que $z_2 \perp w_i$ para todo $i = 1...s$. Así concluimos que $Proy_W y = z_1$.

Puntaje:

- 1 pto por argumentar $Proy_W y = UU^t y$.
- 1 pto por argumentar que $Proy_W y = Proy_W z_1 + Proy_W z_2$
- 1.5 ptos por decir que $Proy_W z_1 = z_1$
- 1.5 ptos por argumentar que $Proy_W z_2 = \vec{0}$
- 1 pto por concluir que $Proy_W(y) = z_1$

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas demuéstrelas y si son falsas de un contraejemplo.

   a) Toda matriz A de 3×3 cuyo polinomio característico es $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)$ es diagonalizable.

   b) La dimensión del subespacio $S = Gen\left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ es 2.

   c) Si A es diagonalizable y B es similar a A, entonces B también es diagonalizable.

Solución.

a) Falso.

Tome $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) Verdadero.

Si tomamos el conjunto $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ es claro que genera a S, ahora para analizar su dependencia escribimos las matrices en las coordenadas de la base estandar de $M_{2\times 2}$, tenemos que $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ por lo cual concluimos que una base para S es $B_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ que posee solo 2 elementos, luego la dimensión de S es 2.

c) Verdadero.

Si A es diagonalizable entonces existen matrices P invertible y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$, si B es similar a A entonces existe una matriz P_1 invertible tal que $B = P_1^{-1}AP_1$, luego

$$B = P_1^{-1}PDP^{-1}P_1 = (P_1^{-1}P)D(P_1^{-1}P)^{-1}$$

luego B es diagonalizable.

Puntaje:

- 2 pto por cada item correctamente respondiddo.