



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA  
PROFESOR: REINALDO ARELLANO  
AYUDANTE: DANIEL GÁLVEZ  
PRIMER SEMESTRE 2024

## Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

### Ayudantía 6

1. (a) Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un modelo de probabilidad. Considere

$$\begin{aligned}\Omega &= (0, 1) \\ \mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, (0, 1), (0, 1/2), [2/3, 1), [1/2, 1), (0, 2/3)\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, (0, 1), (0, 1/4), [1/4, 1)\}\end{aligned}$$

¿Son  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$   $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\mathcal{F}$ ?

- (b) Sea  $\Omega = (0, \infty)$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  y  $f(x) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ . Defina la medida de probabilidad  $P$  como

$$P(B) = \frac{\int_B f(x)dx}{\int_{\Omega} f(x)dx}, \quad B \in \mathcal{B}$$

Demuestre que  $P$  es efectivamente una medida de probabilidad.

2. Considere el siguiente experimento. Se dispone de dos dados. El dado  $A$  tiene 4 caras rojas y 2 blancas, mientras que el dado  $B$  tiene 2 caras rojas y 4 blancas. Se lanza una moneda honesta, y si sale cara, el experimento continua sólo con el dado  $A$ , mientras que si sale sello, se continua sólo con el dado  $B$ .
- (a) Pruebe que la probabilidad de obtener cara roja en cualquier lanzamiento del dado es  $1/2$
- (b) Suponga que se lanza el dado seleccionado  $n$  veces, independientemente. Si todos ellos resultaron en cara roja, ¿cual es la probabilidad de que el dado seleccionado haya sido el  $A$ ?
- (c) Si, como en (a), los primeros  $n$  lanzamientos del dado resultaron en cara roja, ¿cual es la probabilidad de que el siguiente también resulte en cara roja?
- (d) Suponga que en (b), una persona decide lanzar el dado una gran cantidad de veces ( $n \rightarrow \infty$ ). ¿Que sucede con la probabilidad obtenida?

3. Sea  $X$  una v.a con fda dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2}, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{e^{-2}}{2} \sum_{i=0}^x \frac{2^i}{i!}, & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

(a) Calcule  $P(X < 0)$ ,  $P(X = 0)$ ,  $P(X = 2)$  y  $P(-1 < X \leq 0)$

(b) Verifique que  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

**Hint:**  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

4. (a) Suponga que en un cierto curso, el profesor seleccionará 40 ejercicios del libro guía para la I2, de los cuales solamente 5 se evaluarán en la prueba. Un estudiante decide estudiar solamente 25 ejercicios del total. ¿Cual es la probabilidad de que en la prueba sepa resolver 4 de las 5 preguntas?
- (b) Bajo el mismo contexto que antes, el estudiante decide resolver 7 pruebas de semestres anteriores del profesor. ¿Cual es la probabilidad de que en 3 pruebas sepa resolver 4 de las preguntas?

**Indicación: 1** Asuma que todas las pruebas del profesor se basan en el procedimiento mencionado en a) y que el estudiante las resuelve de forma independiente.

**Indicación: 2:** Intente asociar las preguntas a algún modelo conocido.