

EYP 1027 Modelos Probabilísticos

Clase 13

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2020



Contenido I

- 1 Esperanza de Funciones de un Vector Aleatorio
 - Aplicaciones: Fgm, covarianza y correlación
 - Ejemplos

Esperanza de Funciones de un Vector Aleatorio

Dado un vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) en (Ω, \mathcal{A}, P) y una función real valorada $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, entonces la transformación $Y = g(X_1, \dots, X_n)$ define una variable aleatoria en (Ω, \mathcal{A}, P) , ya que para cada $\omega \in \Omega$, se tiene que $Y(\omega) = g(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}$.

Aunque, en general, es importante conocer en la distribución de la variable aleatoria $g(X_1, \dots, X_n)$, podemos prescindir de ella para el cálculo de su esperanza (cuando existe).

Teorema 1.1

$$\begin{aligned} & E\{g(X_1, \dots, X_n)\} \\ &= \begin{cases} \sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} g(x_1, \dots, x_n) f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) & \text{c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

(provisto que las sumatorias y las integrales convergan)

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Aplicaciones: Fgm, covarianza y correlación

1) Esperanza de funciones lineales

Si $g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$, donde a_1, \dots, a_n, b son constantes reales, entonces

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i) + b,$$

provisto que $E(|X_i|) < \infty$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Por ejemplo, si $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ es la media muestral de X_1, \dots, X_n , entonces

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i).$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

En particular, si todas las X_i 's tienen la misma media, digamos $E(X_i) = \mu$ para $i = 1, \dots, n$, entonces

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mu = \mu \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (*)$$

Esto ocurre, por ejemplo, cuando X_1, \dots, X_n corresponde a una muestra aleatoria (m.a.) de una distribución F (población) con media μ , lo cual equivale a decir que $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} F$, donde F una distribución con media μ .

El resultado (*) indica que la media muestral \bar{X} es un predictor insegado de la media poblacional μ .

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Ejemplo 1.1

Sean $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \exp(\lambda)$. Sabemos que la media de la distribución exponencial es

$$\mu = \int_0^{\infty} x \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{f_X(x)} dx = \frac{1}{\lambda} \implies E(\bar{X}) = \frac{1}{\lambda}.$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

II) Función generadora de momentos (fgm) multivariada

Si $g(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n e^{t_i x_i} = e^{\sum_{i=1}^n t_i x_i}$, entonces $E\{g(X_1, \dots, X_n)\}$ define la fgm conjunta de X_1, \dots, X_n , provisto, obviamente, que ella exista; es decir:

Definición 1.1

La fgm de conjunta de X_1, \dots, X_n se define como,

$$\begin{aligned} M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) &= E\left(e^{\sum_{i=1}^n t_i X_i}\right) \\ &= \begin{cases} \sum \cdots \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} e^{\sum_{i=1}^n t_i x_i} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) & \text{c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sum_{i=1}^n t_i x_i} f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n & \text{c.c.} \end{cases} \end{aligned}$$

provisto que la esperanza exista para todo $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $|t_k| < h_k$, algún $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, con $h_k > 0$ para todo $k = 1, \dots, n$.

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Propiedades de la fgm multivariada:

(i) $M_{X_1, \dots, X_k}(t_1, \dots, t_k) = M_{X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_k, 0, \dots, 0)$
para todo $k = 1, \dots, n-1$.

(ii) $\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}} \Big|_{t_1 = \dots = t_n = 0} = E(X_1^{k_1} \times \dots \times X_n^{k_n})$.

(iii) X_1, \dots, X_n son va's independientes si, y sólo si,

$$M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t_i)$$

para todo (t_1, \dots, t_n) donde las fgm's existen.

(iv) Si $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$, entonces,

$$M_Y(t) = e^{bt} M_{X_1, \dots, X_n}(a_1 t, \dots, a_n t).$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Así, si X_1, \dots, X_n son va's independientes, entonces

$$M_Y(t) = e^{bt} \prod_{i=1}^n M_{X_i}(a_i t).$$

En particular, si $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} M(t)$ e $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, entonces

$$M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \{M(t)\}^n.$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Ejemplo 1.2

Sean $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Ber}(p)$. Pruebe que $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p)$.

Demostración Ya que $X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} \text{Ber}(p)$, entonces

$$X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} M(t) = (1 - p + pe^t).$$

Luego, la fgm de $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ es,

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= M_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) \\ &= \{M(t)\}^n \\ &= (1 - p + pe^t)^n \longrightarrow \text{fgm de la distribución } \text{Bin}(n, p). \end{aligned}$$

Por la unicidad de la fgm se concluye que $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, p)$.

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Ejemplo 1.3

Sean que X_1 e X_2 va's independientes, con $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, 2$. Encuentre la distribución de $Y = X_1 - X_2$.

Solución Ya que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$, entonces $M_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ para $i = 1, 2$. Además, como X_1 y X_2 son va's independientes, entonces la fgm de $Y = X_1 - X_2$ es,

$$\begin{aligned}M_{X_1 - X_2}(t) &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(-t) \\&= e^{\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} e^{-\mu_2 t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \\&= e^{(\mu_1 - \mu_2)t + \frac{1}{2}(2\sigma^2)t^2}, \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Como $M_{X_1 - X_2}(t) = e^{(\mu_1 - \mu_2)t + \frac{1}{2}(2\sigma^2)t^2}$ es la fgm de una distribución normal con media $\mu_1 - \mu_2$ y varianza $2\sigma^2$, se concluye que $X_1 - X_2 \sim N(\mu_1 - \mu_2, 2\sigma^2)$.

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

III) Covarianza y Correlación

Si $n = 2$, con $X_1 = X$ y $X_2 = Y$, sean $\mu_X = E(X)$, $\mu_Y = E(Y)$, $\sigma_X^2 = \text{Var}(X)$ y $\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y)$, y suponga que $0 < \sigma_X^2 < \infty$ y $0 < \sigma_Y^2 < \infty$. Entonces, la función $g(x, y) = (x - \mu_X)(y - \mu_Y)$ permite definir la covarianza entre las va's X e Y ; es decir:

Definición 1.2

La convarianza entre dos variables aleatorias X e Y se define como,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(X, Y) &= E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} \\ &= \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} \sum_{y \in \mathbb{R}} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{X,Y}(x, y) & \text{c.d.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{X,Y}(x, y) dy dx & \text{c.c.} \end{cases}\end{aligned}$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Notación alternativa e interpretación:

$$\sigma_{XY} := \text{Cov}(X, Y)$$

Interpretación:

$\sigma_{XY} > 0 \implies$ asociación +,

$\sigma_{XY} < 0 \implies$ asociación −,

$\sigma_{XY} = 0 \implies$ no hay asociación lineal.

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Propiedades de la covarianza: Para dos va's X e Y definidas sobre el mismo espacio de probabilidades, se tiene que:

- (i) $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ (formula alternativa)
- (ii) $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X) \geq 0$ (operador positivo definido)
- (iii) $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ (simetría)
- (iv) $\text{Cov}(X, c) = \text{Cov}(c, X) = 0$ para cualquier constante $c \in \mathbb{R}$
- (v) Si X e Y son va's independientes, entonces $\text{Cov}(X, Y) = 0$

Nota: Si X e Y son independientes, entonces $g(X)$ y $h(Y)$ también son va's independientes, para cualquier funciones g y h

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

(vi) $\text{Cov}(aX + b, Y) = a\text{Cov}(X, Y)$ y $\text{Cov}(aX + b, X) = a\text{Var}(X)$,
donde a y b son constantes

(vii) $|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}$ (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Definición 1.3

La correlación (coeficiente de correlación) entre dos variables aleatorias X e Y , se define como,

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

La Propiedad (vii) $\implies |\rho_{XY}| \leq 1$, con igualdad si, y sólo si $Y = aX + b$ para $a \neq 0$, de acuerdo con y la Propiedad (vi).

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Más formalmente:

Teorema 1.2

Suponga que X es una variable aleatoria tal que $0 < \sigma_X^2 < \infty$. Si existen constantes $a \neq 0$ y b tal que $Y = aX + b$, entonces, $\rho_{XY} = 1$ si $a > 0$ (asociación lineal +) y $\rho_{XY} = -1$ si $a < 0$ (asociación lineal -).

Demostración 1.1

Como $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$ y $\text{Cov}(X, aX + b) = a \text{Var}(X)$, la definición de correlación implica que,

$$\rho(X, aX + b) = \frac{\text{Cov}(X, aX + b)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(aX + b)}} = \frac{a}{\sqrt{a^2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0, \\ -1 & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

IV) Varianza de funciones lineales

Considerando nuevamente la funcion lineal $Y = \sum_{i=1}^n a_i x_i + b$, ahora podemos calcular su varianza:

Sean X_1, \dots, X_n va's con varianzas finitas y a_1, \dots, a_n, b constantes en \mathbb{R} . Vimos que

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b \right) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{E}(X_i) + b. \quad (*)$$

Ahora, podemos también afirmar que,

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j). \quad (**)$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

En particular, si las va's X_1, \dots, X_n son independientes, entonces $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0 \ \forall \ i \neq j$, y de $(**)$ se tiene que,

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b \right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i).$$

Por ejemplo, colocando para $n = 2$, $X_1 = X$ y $X_2 = Y$, entonces de $(**)$ se tiene que,

$$\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

y

$$\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y).$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Demostración de ():* Sea $Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b$. La definición de varianza de una va Y y el resultado en (*) implican que,

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y) &= E \{ (Y - E(Y))^2 \} \\ &= E \left\{ \left[\sum_{i=1}^n a_i X_i + b - \sum_{i=1}^n a_i E(X)_i - b \right]^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left[\sum_{i=1}^n a_i (X_i - E(X_i)) \right]^2 \right\} \\ &= E \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j)) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j E \{ (X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j)) \}\end{aligned}$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{E} \{ (X_i - \mathbb{E}(X_i))^2 \} \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} a_i a_j \mathbb{E} \{ (X_i - \mathbb{E}(X_i))(X_j - \mathbb{E}(X_j)) \} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i < j}} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Ejemplo 1.4

Sean X_1, \dots, X_n va's iid, con media μ y varianza σ^2 . Entonces, la media y la varianza de la media muestral $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ estan dadas por,

$$E(\bar{X}) = \mu \quad \text{y} \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Ejemplo 1.5

Suponga que $X_i \stackrel{\text{ind.}}{\sim} N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, n$. Entonces, usando la fgm podemos probar que,

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i + b \sim N\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n a_i \mu_i}_{E(Y)} + b, \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2}_{\text{Var}(Y)}\right),$$

de modo que la distribución normal es cerrada bajo transformaciones lineales de va's normales independientes.

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Ejemplos

Ejemplo 1.6

Suponga que un estudiante debe rendir una prueba verbal y una cuantitativa. Sea X el puntaje en el examen verbal, e Y el puntaje en el examen cuantitativo. Se desea encontrar la correlación entre X e Y . Para ello, se supone que la fdp conjunta de X e Y está dada por,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2xy + 0.5 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

Esperanza de Funciones de Vectores Aleatorios

Para calcularemos la covarianza $\text{Cov}(X, Y)$, primero se deben calcular las medias μ_X y μ_Y de X e Y , respectivamente. La simetría en la fdp conjunta, implica que X e Y tienen la misma distribución marginal; por lo tanto, $\mu_X = \mu_Y$, donde,

$$\begin{aligned}\mu_X &= \int_0^1 \int_0^1 (2x^2y + 0.5x) dy dx \\ &= \int_0^1 (x^2 + 0.5x) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},\end{aligned}$$

y $\mu_Y = \frac{7}{12}$. Luego,

$$\text{Cov}(X, Y) = \int_0^1 \int_0^1 \left(x - \frac{7}{12}\right) \left(y - \frac{7}{12}\right) (2xy + 0.5) dy dx = \frac{1}{144}.$$

Además, $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 11/144$, de modo que $\rho(X, Y) = 1/11$. Aunque, un algo baja, la correlación entre los puntajes es positiva.