PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2022

Examen - MAT1610

1. a) Considere f una función tal que

x	2	-2	4
$f(x)$	9	7	3
$f'(x)$	-1	1	5

y g la función definida por $g(x) = \sqrt{xf(x^2)}$. Determine $g'(2)$.

Solución:

Usando la regla de la cadena tenemos que

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{xf(x^2)}} \cdot (xf(x^2))'$$

si ahora usamos la regla del producto, tenemos que

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{xf(x^2)}} \cdot (f(x^2)) + 2x^2 f'(x^2))$$

reemplazando en $x = 2$, obtenemos que $g'(2) = \dfrac{43}{2\sqrt{6}}$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por realizar correctamente la regla de la cadena.
- (1 punto) Por realizar correctamente al derivación del producto.
- (1 punto) Por evaluar correctamente.

b) Se sabe que la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + e^x$ es biyectiva. Determine $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

Solución

Una forma:

Se tiene que $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ y $f'(x) = 1 + e^x$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)} \\
&= \frac{1}{1 + e^{f^{-1}(1)}}
\end{aligned}$$

Por definición $f^{-1}(1) = a \Leftrightarrow f(a) = 1$, es decir,

$$\begin{aligned} f^{-1}(1) = a &\Leftrightarrow f(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow a + e^a = 1 \end{aligned}$$

Como $f(0) = 1$ y f es inyectiva, solo para $a = 0$ se cumple que $f(a) = 1$. Por lo tanto, $f^{-1}(1) = 0$. Así,

$$\begin{aligned} \left(f^{-1}\right)'(1) &= \frac{1}{1+e^0} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Otra forma:
Considerar $y = x + e^x$, y calcular implícitamente $\frac{dx}{dy}$, que es $\left(f^{-1}\right)'(x, y)$. Se tiene que:

$$1 = \frac{dx}{dy} + e^x \frac{dx}{dy}$$

Entonces,

$$1 = \frac{dx}{dy}\left(1 + e^x\right)$$

y, por lo tanto,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+e^x}$$

y

$$\frac{dx}{dy}(0, 1) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por encontrar la fórmula para la derivada de la inversa (en cualquiera de los dos métodos).
- (1 punto) Por establecer que $f(0) = 1$.
- (1 punto) Por el resultado.

2. a) Determine el área encerrada por las curvas $y = x^2e^{-x}$ e $y = xe^{-x}$

Solución:

Observe que la intersección de ambas curvas está dada por las soluciones de la ecuación

$$x^2e^{-x} = xe^{-x}$$

cuyas soluciones son $x = 1$ y $x = 0$, por lo tanto el área puede ser calculada como

$$\int_0^1 (x - x^2)e^{-x}dx$$

para calcular la integral anterior usamos integración por partes, para esto partiremos calculando

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx$$

consideramos $u = x^2$ y $dv = e^{-x}$ obtenemos que

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx = (-x^2e^{-x})_0^1 + \int_0^1 2xe^{-x}dx = -e^{-1} + \int_0^1 2xe^{-x}dx$$

reordenando en la integral que corresponde al área tenemos que:

$$\int_0^1 (x - x^2)e^{-x}dx = \int_0^1 xe^{-x}dx - \left(-e^{-1} + \int_0^1 2xe^{-x}dx\right) = -\int_0^1 xe^{-x}dx + e{-}1$$

volvemos a usar integración por partes paar calcular $\int_0^1 xe^{-x}dx$, con $u = x$ y $dv = e^{-x}dx$, obteniendo que

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = (-xe^{-x})_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})_0^1 = -2e^{-1} + 1$$

obteniendo que el área

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx = 3e^{-1} - 1$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por plantear correctamente la integral.
- (1 punto) Por integrar correctamente $\int_0^1 x^2e^{-x}dx$.
- (1 punto) Por el resultado.

b) Demuestre que

$$\frac{3}{127} \leq \int_2^5 \frac{1}{x^3+2} dx \leq \frac{3}{10}$$

Solución:

Observe que la función $f(x) = \dfrac{1}{x^3+2}$ es decreciente en el intervalo $[2,5]$ por lo tanto tenemos que para todo x en dicho intervalo se tiene que

$$f(5) = \frac{1}{127} \leq f(x) \leq f(2) = \frac{1}{10}$$

como el intervalo de integración es de largo tres tenemos que:

$$\frac{3}{127} \leq \int_2^5 \frac{1}{x^3+2} dx \leq \frac{3}{10}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por acotar f superiormente.
- (1 punto) Por acotar f inferiormente.
- (1 punto) Por conclusión.

3. Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\, dx.$

Solución 1 :
Al considerar la sustitución $u = 36 - x^2$, tenemos que

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\, dx = -\int_{36}^{25} \frac{1}{2\sqrt{u}} du = -\sqrt{u}\,\Big|_{36}^{27} = -3\sqrt{3} + 6$$

Solución 2 :

Al realizar la sustitución $x = 6\text{sen}(\theta)$ tenemos que:

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{36-x^2}}\, dx = \int_0^{\pi/6} 6\text{sen}(\theta) d\theta = -6\cos(\theta)|_0^{\pi/6} = -3\sqrt{3} + 6$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por sustitución adecuada.
- (1 punto) Por plantear correctamente la nueva integral
- (1 punto) Por resultado

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3(\theta)\cos^5(\theta)\, d\theta.$

Solución:

Observe que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3(\theta)\cos^5(\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\theta)(1-\cos^2(\theta))\cos^5(\theta)\, d\theta$$

por lo tanto haciedno la sustitución $u = \cos(\theta)$ tenemos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^3(\theta)\cos^5(\theta)\, d\theta = -\int_1^0 (1-u^2)u^5 du = \left(\frac{u^6}{6} - \frac{u^8}{8}\right)_0^1 = \frac{1}{24}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por sustitución adecuada.
- (1 punto) Por plantear correctamente la nueva integral
- (1 punto) Por resultado

4. Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^{2x} (e^{t^2} - 1)\, dt & \text{si } x > 0, \\ \\ 2x^2 - x + a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

es continua **en todo** $\mathbb{R}$.

Solución:

Observamos que $2x^2 - x + a$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$ (sin importar el valor de a), por lo tanto g es continua para $x < 0$, por otra parte el teorema Fundamental del Cálculo, asegura que $G(x) = \displaystyle\int_0^{2x} (e^{t^2} - 1)dt$ es derivable y por tanto continua en todo $\mathbb{R}$, luego el cociente $\dfrac{\int_0^{2x}(e^{t^2} - 1)dt}{x^3}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y por lo tanto f es continua para todo $x > 0$. Por lo tanto basta busacr condicones para que f sea continua en cero, para esto se debe cumplir que:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = g(0) = a$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} g(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{2x}(e^{t^2}-1)dt}{x^3} \text{ que es de la forma } 0/0 \\
&= \lim_{x\to 0^+} 2\cdot\frac{e^{4x^2}-1}{3x^2} \text{ que es de la forma } 0/0 \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{8e^{4x^2}}{3} \\
&= \frac{8}{3},
\end{aligned}$$

por lo tanto $a = \dfrac{8}{3}$.

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por justificar que es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
- (1 punto) por definición de continuidad en cero.
- (1 punto) por determinar que el primer límite es de la forma 0/0.
- (1 punto) por derivar correctamente usando TFC.
- (1 punto) por determinar que el segundo límite es de la forma 0/0.
- (1 punto) por determinar valor de a.