Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2016

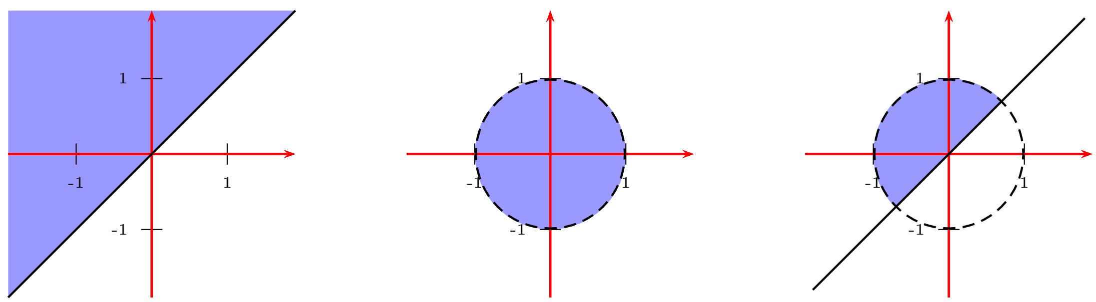
MAT1620 ⋆ Cálculo II

Interrogación N° 3

1. Determine y grafique el dominio de $f(x,y) = \sqrt{y-x}\ln(1-x^2-y^2)$.

Solución:

$\text{Dom}f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \geq 0 \wedge 1 - x^2 - y^2 > 0\}$



Criterio de corrección:

(**1 pto por cada una**)

- Por encontrar la restricción $y - x \geq 0$
- Por graficar la restricción $y - x \geq 0$
- Por encontrar la restricción $1 - x^2 - y^2 > 0$
- Por graficar la restricción $1 - x^2 - y^2 > 0$
- Por encontrar dominio.
- Por graficar dominio.

2. Calcular el siguiente límite, o muestre que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^3+y^2}$$

Solución1:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^3+y^2}$ no existe ya que si tomamos el camino $x = y$ tenemos que

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{x^2+x^2}{x^3+x^2} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{2x^2}{x^2(1+x)} = 2,$$

y si $x = 0$

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{y^2} = 1.$$

Solución2:

Si se cambia a coordenadas polares se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^3+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2}{r^2(r\cos^3\theta + \sin\theta)} = \lim_{r\to 0} \frac{1}{(r\cos^3\theta + \sin\theta)} = \frac{1}{\sin\theta}$$

Lo cual diverge.

Criterio de corrección:

(**2 ptos por cada una**)

- Por usar caminos o cambiar a coordenadas polares.
- Por correcto cálculo de límites.
- Por respuesta correcta.

3. Demuestre que la siguiente función es continua sobre todo $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución:

Primero notamos que la función $g(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}$ es continua en todo $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Esto es ya que g es división de de dos funciones continua en $\mathbb{R}^2$ y $2x^2+y^2 = 0$ solo en $(0,0)$.

Luego la función f es continua al menos en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Además f es continua en $(0,0)$ ya que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

Esto se puede mostrar usand el teorema del acotamiento

$$\frac{x^2y^3}{2x^2+2y^2} < \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} < \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2+2y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^2\theta\sin^3\theta}{2r^2} = \frac{1}{2}\lim_{r\to 0} r^3\cos^2\theta\sin^3\theta = 0$$

De la misma manera

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^2\theta\sin^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^3\cos^2\theta\sin^3\theta = 0$$

Luego, por el teorema del acotamiento se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$$

Criterio de corrección:

- Asignar (**1 pto**) por asegurar el que la función del númerador es continua por ser un polinomio (o función continua).
- Asignar (**1 pto**) por asegurar el que la función del denominador es continua por ser un polinomio (o función continua).
- Asignar (**2 pto**) por calcular el límite en $(0,0)$, correctamente.
- Asignar (**2 pto**) por concluir explícitamente que f es una función continua sobre $\mathbb{R}^2$.

4. Sea f una función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{x^4+y^4}}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sqrt{h^4}}{h^2h} = 1$$

Criterio de corrección:

- Todo o nada, si calcula correctamente el límite asignar los (**6 ptos**). En caso contrario no se asignará puntaje.

5. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = \ln(xy) - 5x^2y$ en el punto $(1, 1, -5)$.

Solución:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} - 10xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -9$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} - 5x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -4$$

Luego la ecuación del plano tangente a la superficie en ese punto es:

$$z = -9(x-1) - 4(y-1) - 5$$

o lo que es lo mismo

$$z = -9x - 4y + 8$$

Criterio de corrección:

- Asignar (**1 ptos**) por calcular cada derivada parciál, correctamente.
- Asignar (**1 ptos**) por evaluar cada derivada parciál en el punto dado, correctamente.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar la ecuación del plano tangente.

6. Demuestre, mediante linealización en $(0, 0)$, que

$$\sqrt{y + \cos^2(x)} \approx 1 + \frac{1}{2}y$$

Solución:

Si $f(x, y) = \sqrt{y + \cos^2(x)}$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{y + \cos^2(x)}} 2\cos x \sin x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y + \cos^2(x)}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{1}{2}$$

Luego la ecuación del plano tangente a la superficie en $(0, 0)$ es

$$z = 1 + \frac{1}{2}y$$

y por lo tanto, para un vecindad de $(0, 0)$ se tiene que

$$\sqrt{y + \cos^2(x)} \approx 1 + \frac{1}{2}y$$

Criterio de corrección:

- Asignar (**1 ptos**) por calcular cada derivada parciál, correctamente.
- Asignar (**1 ptos**) por evaluar cada derivada parciál en el punto dado, correctamente.
- Asignar (**2 ptos**) demostrar la aproximación.

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, tal que

$$f(x, y, z) = \frac{6x + 3y + 12z}{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Determine y grafique todos los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y, z) = -3$.

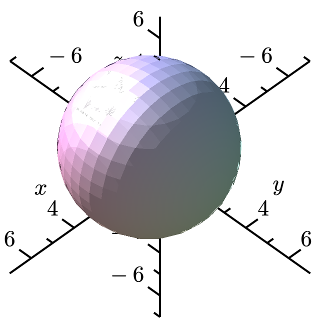
Solución:

Si $f(x, y, z) = -3$, entonces :

$$\frac{6x + 3y + 12z}{4 - x^2 - y^2 - z^2} = -3 \leftrightarrow \frac{2x + y + 4z}{x^2 + y^2 + z^2 - 4} = 1 \leftrightarrow (x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + (z-2)^2 = \frac{37}{4}$$

Notamos entonces que se trata de una esfera de centro $(\ 1,\ \frac{1}{2},\ 2\ )$ y radio $\frac{\sqrt{37}}{2}$.

La gráfica resulta:



Criterio de corrección:

(2 puntos cada una)

- Igualar $f(x,y,z)$ a -3.
- LLegar a la expresión $(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z-2)^2=\frac{37}{4}$
- Graficar la superficie.

8. Demuestre que la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{si } \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

tiene derivadas parciales $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$, pero f no es continua.

Solución.

Por definición

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

y

$$f_y(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Por lo tanto, $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ concluyendo así que existen.

Por otro lado, en coordenadas polares

$$\lim_{\rho\to 0}f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))=\lim_{\rho\to 0}\frac{\sin(\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta))}{\rho^2}=\sin(\theta)\cos(\theta)$$

Por lo tanto la función no es continua ya que el límite depende dl valor de θ.

Evaluación

- Asignar (**2 ptos**) por calcular cada derivada parcial en $(0,0)$.
- Asignar (**2 ptos**) por demostrar que f no es continua en $(0,0)$.