EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Clase 5

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Contenido I

Cuando sólo interesa observar algunos aspectos **numéricos** de los resultados del experimento aleatorio, se debe trabajar con **variables aleatorias**

Informalmente: Una variable aletoria es una función numérica (real valorada) X definida sobre el espacio muestral Ω:

$$\begin{aligned} X: \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

Es decir, X es una función que asigna a cada elemento $\omega \in \Omega$ un número $x = X(\omega) \in \mathbb{R}$

Nota: En muchos casos el recorrido (o rango) de X, digamos $\mathcal{X}$, es un subconjunto propio de $\mathbb{R}$, es decir, $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$.

Formalmente, una variable aleatoria queda definida como sigue:

Definición 1.1

Variable aleatoria: Dado un modelo de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$, una variable aleatoria es una función real valorada X sobre Ω tal que, para todo número real x, el conjunto $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ pertenece a $\mathcal{A}$.

Las variables aleatorias son el principal insumo del análisis estadístico, es decir, para inferir sobre aspectos (parámetros) desconocidos de una población. Hay dos clases principales de variables aleatorias, **discretas** y **continuas**, aunque en algunas situaciones también se presentan las variables aleatorias **mixtas**.

Nota: Para cada $x \in \mathbb{R}$,
$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\} = X^{-1}((-\infty, x])$
es la imagen inversa de $(-\infty, x]$ bajo X

Ejemplo 1.1

Experimento: Lanzar una moneda (justa) $n = 2$ veces. Entonces, $\Omega = \{(s,s)(s,c),(c,s),(c,c)\}$ con $N(\Omega) = 4$. Si sólo interesa el número de caras, podemos definir la función $X(\omega)$ = número de caras en ω

$$\Longrightarrow \; X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = (s,s) \\ 1 & \text{si } \omega = (s,c) \\ 1 & \text{si } \omega = (c,s) \\ 2 & \text{si } \omega = (c,c) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ para cada $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \mathcal{X} = \{0,1,2\} \subset \mathbb{R}$.

Nota: Una variable aleatoria puede asignarle el mismo número a diferentes $\omega \in \Omega$; lo importante es que todos los posibles $\omega \in \Omega$ esten representados numéricamente.

Ejemplo 1.2

Experimento: Observar la altura (en pulgadas) una persona seleccionada al azar. Sea X = altura de la persona. Entonces, X es una variable aleatoria, con valores en $(0, \infty)$

Ejemplo 1.3

Experimento: Lanzar un dado dos veces. Aquí,

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, y sea X definida por $X(\omega) = i + j$ si $\omega = (i, j) \in \Omega$; entonces X es una variable aleatoria, ya que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.4

Sea $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ un espacio de probabilidad, con $\Omega = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega = a, \\ 1, & \text{si } \omega = b,\ c. \end{cases}$$

Entonces, X es una variable aleatoria, ya que,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } x < 0, \\ \{a\}, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \Omega, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Mientras que la función $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por,

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega = b, \\ 1, & \text{si } \omega = a,\ c, \end{cases}$$

no es una variable aleatoria, ya que, $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\} = \{b\} \notin \mathcal{A}$, si $0 \leq y < 1$. Note que si $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\}$ es la $\sigma-$álgebra sobre Ω considerada, entonces Y es una variable aleatoria.

Notación: Por convención, las letras mayusculas $X, Y, Z, \ldots$ representan variables aletorias; mientras que las letras minusculas $x, y, z, \ldots$ denotan sus posibles valores.

Notas:

1) La condición que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ pertenezca a $\mathcal{A}$ (sea un evento) para todo $x \in \mathbb{R}$ asegura que siempre se puede evaluar su probabilidad mediante la medida de probabilidad P sobre $(\Omega, \mathcal{A})$; es decir, se puede calcular $\Pr(X \leq x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Para esto, conviene escribir

$$\{X \leq x\} = \{X \in (-\infty, x]\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}\{(-\infty, x]\}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, y de esta forma

$$\Pr(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X^{-1}\{(-\infty, x]\}) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

En general, esta condición asegura que

$$\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

para cada subconjunto B (Borel-medible) de $\mathbb{R}$, de modo que

$$\Pr(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)) \ \forall\, B(\text{boreliano}) \subseteq \mathbb{R}$$

Variables Aleatorias

2) Cuando el espacio de probabilidad es discreto, la condición $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ se cumple automáticamente, ya que todos los subconjuntos de Ω son eventos en $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

3) La condición $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ nunca será un obstáculo importante en espacios de probabilidad continuos, a menos que se intente construir funciones *exóticas*. De modo que podemos adoptar la definición informal de una variable aleatoria, es decir, considerar que una variable aleatoria es cualquier función real valorada sobre los resultados de un experimento aleatorio.

4) En algunos experimentos, cada resultado en sí mismo es de interés primario. Cuando Ω es una colección contable de números reales, o un intervalo de los reales, entonces la función identidad, $X(\omega) = \omega$, es una variable aleatoria.

La definición de una variable aleatoria, induce automáticamente una nueva medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}$, la cual asigna una probabilidad a cada $B \in \mathcal{B}$, la $\sigma-$algebra de Borel de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Definición 1.2

Distribución de probabilidad: La **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria X definida sobre un modelo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, se define como:

$$P_X(B) = P(\{X \in B\}) \; \forall \; B \in \mathcal{B},$$

donde para cada $B \in \mathcal{B}$, $\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ es la imagen inversa de B bajo X.

Nota: Por simplicida, $P(\{X \in B\})$ se escribe como $P(X \in B)$.

Ejemplo 1.5

Experimento: Lazar una moneda justa tres veces. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de caras obtenidas en los tres lanzamientos. Una enumeración completa de los valores de X para cada punto en el espacio muestral es

ω	(s,s,s)	(s,s,c)	(s,c,s)	(c,s,s)	(s,c,c)	(c,s,c)	(c,c,s)	(c,c,c)
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Es decir, $X : \Omega = \{c,s\}^3 \longrightarrow \mathcal{X} = \{0,1,2,3\}$ y es tal que,

$$\begin{aligned} P_X(\{x\}) = P(X = x) &= P(\{\omega \in \{c,s\}^3 : X(\omega) = x\}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{si } x = 0,3, \\ \frac{3}{8}, & \text{si } x = 1,2, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases} \end{aligned}$$

Además, por la definición de P_X,

$$\begin{aligned}
P_X(\{0,1\}) &= P(X \in \{0,1\}) \\
&= P(\{\omega \in \{c,s\}^3 : X(\omega) = 0 \text{ o } 1\}) \\
&= P(\{(s,s,s),(s,s,c),(s,c,s),(c,s,s)\}) = \frac{4}{8}; \\
P_X((-\infty,0]) &= P(X \in (-\infty,0]) \\
&= P(\{\omega \in \{c,s\}^3 : X(\omega) \in (-\infty,0]\}) \\
&= P(\{(s,s,s)\}) = \frac{1}{8};
\end{aligned}$$

etc.

Nota: En general, si Ω es discreto, entonces el recorrido $\mathcal{X}$ (o espacio muestral) de X también es discreto.

Teorema 1.1

Sea X una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria X, definida como,

$$P_X(B) = P(\{X \in B\}) \ \forall \ B \in \mathcal{B},$$

es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$; es decir, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ es un **modelo de probabilidad** (inducido por la variable aleatoria X)

Demostración 1.1

Se deben verificar los tres axiomas de una medida de probabilidad.

A1) Es claro que $\forall\ B \in \mathcal{B}$, $P_X(B) = P(\{X \in B\}) \geq 0$

A2) $P_X(\mathbb{R}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{R}\}) = P(\Omega) = 1$

A3) Sea $B_1, B_2, \cdots$ una secuencia de eventos disjuntos en $\mathcal{B}$ (es decir $B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall\ i \neq j$.) Entonces,

$$\begin{aligned} P_X(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) &= P(\{X \in \cup_{i=1}^{\infty} B_i\}) \\ &= P(\cup_{i=1}^{\infty}\{X \in B_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\{X \in B_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_X(B_i). \end{aligned}$$

Para cualquier variable aleatoria X, la evaluación de P_X puede restringirse (s.p.g.) a los intervalos:

$$\begin{aligned} X \in (a,b) &= a < X < b \\ X \in [a,b) &= a \leq X < b \\ X \in [a,b] &= a \leq X \leq b \\ X \in (a,b] &= a < X \leq b, \end{aligned}$$

donde $-\infty < a < b < \infty$; es decir, conocer P_X para estos intervalos, permite conocer P_X para cualquier $B \in \mathcal{B}$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P_X((a,b]^c) &= 1 - P_X((a,b]) = 1 - P(a < X \leq b), \\ P_X((a,b] \cap (c,d]) &= P_X((c,b]) = P(c < X \leq b), \quad \text{si } a < c < b < d. \end{aligned}$$

Variables Aleatorias

En realidad, basta conocer P_X para una sola clase de estos intervalos; por ejemplo para los intervalos de la forma $(a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Esto se debe a que esta clase genera la σ-algebra de Borel $\mathcal{B}$.

En otras palabras, la probabilidad de eventos de la forma $\{a < X \leq b\}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, determina completamente y de forma única la probabilidad de eventos de la forma $\{a < X < b\}$, $\{a \leq X \leq b\}$ y $\{a \leq X < b\}$. Para demostrar esto, basta recordar que

$$
\begin{aligned}
\{a < X < b\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{a < X \leq b - \frac{1}{n}\right\} \\
\{a \leq X \leq b\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{a - \frac{1}{n} < X \leq b\right\} \\
\{a \leq X < b\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{a - \frac{1}{n} < X \leq b - \frac{1}{m}\right\}
\end{aligned}
$$

En general, cada conjunto $B \in \mathcal{B}$ puede generarse a partir de uniones y/o intersecciones de secuencias (contables) de intervalos de la forma $(a_n, b_n]$. Por otro lado, cabe observar que

$$\begin{aligned} \{a < X \le b\} &= \{X \le b\} - \{X \le a\} \\ \Longrightarrow P(a < X \le b) &= P(X \le b) - P(X \le a). \end{aligned}$$

Es decir, la probabilidad de $\{a < X \le b\}$ puede determinarse a partir de la probabilidad de eventos de la forma

$$\{X \le x\}, \quad -\infty < x < \infty$$

De este modo, para describir la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X, basta conocer la función $F_X(x) = P(X \le x) = P_X((-\infty, x])$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Con cada variable aleatoria X, asociamos, entonces, una función llamada función de distribución acumulativa de X.

Definición 1.3

Función de distribución acumulada La función de distribución acumulada (o acumulativa) o fda de una variable aleatoria X, denotada por $F_X(x)$, se define por

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.6

Considere el experimento de lanzar tres monedas justas y sea $X =$ número de caras observadas, del ejemplo anterior. La fda de X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

La función escalera $F_X(x)$ está graficada en la Figura 1. Hay varios puntos a tener en cuenta en la Figura 1. F_X se define para todos los valores de $x \in \mathbb{R}$, no solo aquellos en $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$. Así, por ejemplo,

$$F_X(2{,}5) = P_X(X \leq 2{,}5) = P_X(X = 0, 1, \text{o } 2) = \frac{7}{8}.$$

Note que F_X tiene saltos en los valores de $x \in \mathcal{X}$ y el tamaño del salto en x es igual a $P(X = x)$.

Variables Aleatorias

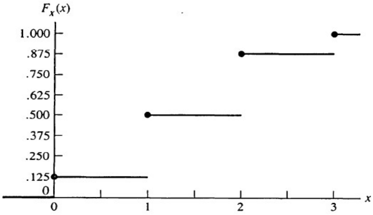

Figura 1: Fda Ejemplo 1.6. (Fuente: Casella & Berger (2002))

Teorema 1.2

Sea X una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La fda F_X satisface las siguientes propiedades,

- F1 Cuando $x \to \infty$, entonces $F_X(x) \to 1$, y cuando $x \to -\infty, F_X(x) \to 0 \quad (0 \leq F_X(x) \leq 1 \; \forall \, x \in \mathbb{R})$
- F2 Si $x \leq y$, entonces $F_X(x) \leq F_X(y) \quad (F_X$ es no-decreciente$)$
- F3 Cuando $h \downarrow 0, F_X(x+h) \to F_X(x) \quad (F_X$ es continua por la derecha$)$

Demostración 1.2

F1 Sea $A_n = \{\omega : X(\omega) \leq n\}$, entonces $\{A_n\} \uparrow \Omega$; o sea $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} F_X(x) &= \lim_{n\to\infty} F_X(n) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\ &= P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \\ &= P(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

de donde sigue la primera afirmación. Similarmente, con $B_n = \{\omega : X(\omega) \leq -n\}$ tenemos $\{B_n\} \downarrow \emptyset$, de donde sigue la segunda afirmación.

F2 Si $x \leq y$, defina $A = \{\omega : X(\omega) \leq x\}$ y $B = \{\omega : X(\omega) \leq y\}$. Luego se tiene que $A \subseteq B$, así $P(X \leq x) = P(A) \leq P(B) = P(X \leq y)$, y el resultado sigue. Es decir, $F_X(x)$ es una función no decreciente de x.

F3 Sea $A_h = \{\omega : x < X(\omega) \leq x + h\}$. Luego $A_h \to \emptyset$ cuando $h \downarrow 0$. Ya que $P(A_h) = F_X(x+h) - F_X(x)$, y el resultado sigue. Es decir, $F_X(x)$ es continua por la derecha.

Nota 1.1

También se cumple la implicación inversa. En efecto, puede demostrarse que cualquier función $F(x)$ que satisfaga las propiedades F1, F2 y F3 del teorema anterior, es la fda de alguna variable aleatoria X. O sea el teorema puede establecerse como: La función $F(x)$ es una fda si y sólo si se cumplen las condiciones F1, F2, F3.

Corolario 1.1

Sea X una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, F_X su fda y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$; entonces,

1. $F_X(x^-) = \lim_{h \to 0^+} F_X(x - h) = P(X < x)$.
2. $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$.
3. $P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$.
4. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

Ejemplo 1.7

Supongamos que hacemos un experimento que consiste en lanzar una moneda hasta que aparezca una cara. Supongamos que p es la probabilidad de una cara en cualquier lanzamiento dado, y defina una variable aleatoria $X =$ número de lanzamientos necesarios para obtener una cara. Entonces, para cualquier $x = 1, 2, \ldots$
$P(X = x) = (1-p)^{x-1}p$.
Luego, para cualquier entero positivo x,

$$
\begin{aligned}
F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} P(X = i) &= \sum_{i=1}^{x} (1-p)^{i-1}p \\
&= 1 - (1-p)^x, \; x = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

Es fácil demostrar que si $0 < p < 1$, entonces $F_X(x)$ satisface las condiciones de una fda.

1 Para verificar $F1$, note primero que,

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0,$$

ya que $F_X(x) = 0$ para todo $x < 0$, y

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = \lim_{x \to \infty} \{1 - (1-p)^x\} = 1.$$

2 Para verificar $F2$, simplemente observemos que la suma anterior contiene más términos positivos a medida que aumenta x.

3 Finalmente, para verificar $F3$, note que, para cualquier $x, F_X(x+h) = F_X(x)$ si $h > 0$ es suficientemente pequeño. Por lo tanto,

$$\lim_{h \downarrow 0} F_X(x+h) = F_X(x),$$

así $F_X(x)$ es continua por la derecha. Note que $F_X(x)$ es la fda de una distribución geométrica, y se muestra en la Figura 2.

Variables Aleatorias

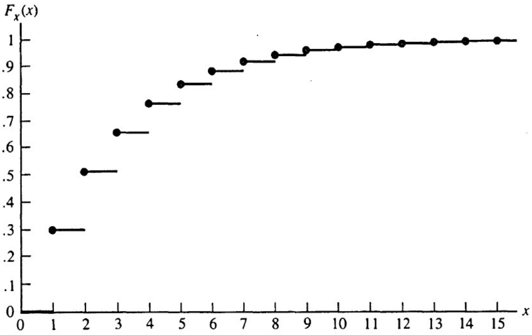

Figura 2: Fda, distribución geométrica, con $p = 0{,}3$. (Fuente: Casella & Berger (2002))

Ejemplo 1.8

Un ejemplo de una fda continua es la función $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, que satisface las condiciones de una fda. Por ejemplo,

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \text{ ya que } \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = \infty$$

y

$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1 \text{ ya que } \lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0.$$

Diferenciando $F_X(x)$ nos da,

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} > 0,$$

mostrando que $F_X(x)$ es una función creciente. De hecho F_X no solo es continua a la derecha, sino también continua. Este es un caso especial de la distribución logística.

Variables Aleatorias

Si una fda es continua o tiene saltos determina completamente si la variable aleatoria asociada es o no continua. De hecho, la asociación es tal que es conveniente definir variables aleatorias continuas de esta manera.

Definición 1.4

Una variable aleatoria X es *continua* si $F_X(x)$ es una función continua de x. Una variable aleatoria X se dice *discreta* si $F_X(x)$ es una función escalera de x.

La F_X determina completamente la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X. Esto es cierto si $P_X(B) = P(X \in B)$ se define solo para eventos $B \in \mathcal{B}$, no en general (dos variables aleatorias pueden tener la misma fda pero no la misma probabilidad para cada evento). En este curso, como en la mayoría de las aplicaciones estadísticas, solo nos interesan los eventos que son intervalos, uniones contables o intersecciones de intervalos, etc.

Variables Aleatorias

Definición 1.5

Se dice que las variables aleatorias X y Y tienen la misma distribución (o son igualmente distribuídas), si para cada conjunto $B \in \mathcal{B}, P(X \in B) = P(Y \in B)$.

Note que dos variables aleatorias que son igualmente distribuidas no son necesariamente iguales, la definición no dice que $X(\omega) = Y(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$.

Ejemplo 1.9

Considere el Ejemplo 1.5 de lanzar una moneda justa tres veces. Defina las variables aleatorias X y Y como, $X =$ número de caras observadas e $Y =$ número de sellos observados. La distribución de X está dada en el Ejemplo 1.5 y se puede verificar que la distribución de Y es exactamente la misma. Es decir, para cada $x = 0, 1, 2, 3$, tenemos $P(X = x) = P(Y = x)$. Así X e Y son identicamente distribuídas. Sin embargo, para ningún punto en el espacio muestral tenemos que $X(\omega) = Y(\omega)$.

Teorema 1.3

Las siguientes dos afirmaciones son equivalentes,

a) Las variables aleatorias X e Y son identicamente distribuídas.

b) $F_X(x) = F_Y(x)$ para cada x.

Demostración 1.3

Para probar este resultado, debemos demostrar que cada afirmación implica la otra. Primero probaremos que $a) \Rightarrow b)$. Debido a que X e Y son identicamente distribuídas, para cualquier evento $A \in \mathcal{B}, P(X \in A) = P(Y \in A)$. En particular, para cada x, el intervalo $(-\infty, x]$ está en $\mathcal{B}$, y

$$F_X(x) = P(X \in (-\infty, x]) = P(Y \in (-\infty, x]) = F_Y(x).$$

Para $b) \Rightarrow a)$, ver Casella & Berger (2002).

Asociada con una variable aleatoria X y su fda F_X hay otra función, llamada función de densidad de probabilidad (fdp) o función de masa de probabilidad (fmp). Los términos fdp y fmp se refieren, respectivamente, a los casos continuo y discreto.

Definición 1.6

Función de masa de probabilidad (fmp) La fmp de una variable aleatoria discreta X está dada por,

$$f_X(x) = P(X = x) \quad \text{para todo } x.$$

Ejemplo 1.10

Distribución Geométrica Para la distribución geométrica la fmp está dada por,

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1}p & \text{para } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Podemos usar la fmp para calcular probabilidades. Como ahora podemos medir la probabilidad de un solo punto, solo necesitamos sumar todos los puntos en el evento apropiado. Por lo tanto, para enteros positivos a y b, con $a \leq b$, tenemos,

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^{b} f_X(x) = \sum_{k=a}^{b} (1-p)^{x-1}p.$$

El procedimiento análogo en el caso continuo es sustituir sumas por integrales, y obtenemos,

$$P(X \leq x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

Usando el teorema fundamental del cálculo, si $F_X(x)$ es continua, tenemos que,

$$\frac{d}{dx}F_X(x) = f_X(x) \quad \text{(c.p.1)}.$$

Definición 1.7

La función de densidad de probabilidad o fdp $f_X(x)$, de una variable aleatoria continua X es la función que satisface, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ para todo x.

Note que para el caso continuo, $P(X = x) = 0$. En efecto, ya que $\{X = x\} \subseteq \{x - \epsilon < X \leq x\}$ para cualquier $h > 0$, we have that

$$P(X = x) \leq P_X(x - h < X \leq x) = F_X(x) - F_X(x - h)$$

para cualquier $h > 0$. Por lo tanto,

$$0 \leq P(X = x) \leq \lim_{h \downarrow 0} [F_X(x) - F_X(x - h)] = 0$$

por continuidad de F_X. Luego, si X es una variable aleatoria continua, tenemos que,

$$P(a < X < b) = P_X(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b).$$

Ejemplo 1.11

Para la distribución logística tenemos, $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, y por lo tanto,

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

El área bajo la curva $f_X(x)$ nos da la probabilidad del intervalo,

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx \\ &= \int_{a}^{b} f_X(x)dx. \end{aligned}$$

Teorema 1.4

Una función $f_X(x)$ es una fdp (o fmp) de una variable aleatoria X si y sólo si,

a) $f_X(x) \geq 0$ para todo x;
b) $\sum_x f_X(x) = 1$ (fmp) o $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ (fdp).

Demostración 1.4

Si $f_X(x)$ es una fdp (o fmp), entonces las dos propiedades son inmediatas desde la definición. En particular, para una fdp tenemos,

$$1 = \lim_{x \to \infty} F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt.$$

La implicación inversa no es difícil de probar. Una vez que tengamos $f_X(x)$, podemos obtener $F_X(x)$ y usar el Teorema 1.2.

Ejemplo 1.12

Calculando probabilidades. Suponga que la fdp de X es de la forma,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & \text{para } 0 < x < 4 \\ 0 & \text{eoc} \end{cases}$$

Por ejemplo, podemos calcular los valores de $P(1 \leq X \leq 2)$ y $P(X > 2)$. Usando los resultados anteriores obtenemos,

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{x}{8} dx = \frac{3}{16},$$

y

$$P(X > 2) = \int_2^4 \frac{x}{8} dx = \frac{3}{4}.$$

References

Blanco, L., Arunachalam, V. y Dharmaraja, S. (2012). *Introduction to Probability and Stochastic Processes.* John Wiley, New Jersey.

Casella, G. y Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference.* Second Edition. Duxbury, California.