PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PRIMER SEMESTRE DE 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026
Ayudantía 1
14 de Marzo de 2019

1. Sean $\Omega = \{1, \dots, n\}$, $(\Omega, 2^{\Omega})$ un espacio medible. Indique si las siguientes asignaciones cumplen los axiomas, y por ende, son medidas de probabilidad:

   a) $P(A) = \alpha P_1(A) + (1-\alpha)P_2(A)$, con $\alpha \in [0,1]$ y P_1, P_2 medidas de probabilidad.

   Solución.

   a) Es fácil ver que los dos primeros axiomas se cumplen. Para el tercero, para cualquier sucesión disjunta $A_1, A_2, \dots \in 2^{\Omega}$ se verifica

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \alpha P_1\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) + (1-\alpha)P_2\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \\ &= \alpha \sum_{n\in\mathbb{N}} P_1(A_n) + (1-\alpha)\sum_{n\in\mathbb{N}} P_2(A_n) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha P_1(A_n) + (1-\alpha)P_2(A_n) \end{aligned}$$

   lo que nos dice que P es medida de probabilidad.

   □

2. Si $n \in \mathbb{N}$ objetos indistinguibles son asignados de maneara aleatoria en n urnas, determine la probabilidad de que exactamente una urna quede vacía.

   Solución. Según el proceso de asignación, para calcular la probabilidad pedida es suficiente con determinar:

   - La cantidad de formas(N_F) de distribuir n objetos indistinguibles en n urnas tal que exactamente una de ellas quede vacía. Para calcular N_F, hay n posibilidades para seleccionar aquella única urna que quedará vacía. Esto implica que 1 de las $n-1$ urnas restantes tendrá 2 objetos y las otras, sólo 1. Este último proceso se puede llevar a cabo de $n-1$ formas diferentes. Por el principio multiplicativo, $N_F = n(n-1)$.
   - La cantidad de formas (N_T) de distribuir n objetos indistinguibles en n urnas. En el caso de N_T, el proceso de conteo requiere un análisis diferentes. Para ello, consideremos una configuración posible:

$$|OO|\ |O|OOO| \cdots |OO|$$

Cada barra actúa como un separador entre urnas, mientras que O representa un objeto. Un espacio vacío entre barras consecutivas conforma una urna vacía. En total hay $n+1$ separadores y n objetos. Observemos que la primera y última barra son irrelevantes para dicha configuración:

$$OO|\ |O|OOO|\cdots|OO$$

Bajo este escenario, el total de separadores es $n-1$. Identificando las barras con 1 y O con 0, la configuración previa es equivalente a una secuencia de ceros y unos:

$$00110100001\cdots100$$

Por lo tanto, N_T es igual al total de formas de distribuir $n-1$ unos y n ceros en un arreglo de tamaño $2n-1$, es decir,

$$N_T = \binom{2n-1}{n-1}.$$

Finalmente, la probabilidad pedida es

$$\frac{N_F}{N_T} = \frac{n(n-1)}{\binom{2n-1}{n}}.$$

$\square$