Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo Semestre del 2020

Modelos Probabilísticos (EYP1027)

Guía 1

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle   Ayudante: Camilo I. González

Parte 1

Ejercicio 1: Sea $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$. Para cada una de las siguientes secuencias $\{A_n; n = 1, 2, ...\}$, encuentre $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

(a) $A_n = \{1, 2, ..., n\}$.

(b) $A_n = \mathbb{N} - \{1, 2, ..., n\}$.

Ejercicio 2: Sean $A_1, A_2 \subseteq \Omega$ y $\mathrm{C} = \{A_1, A_2\}$. Encuentre una $\sigma-$álgebra que contenga a C.

Ejercicio 3: Sean A y B subconjuntos de Ω tales que $A \subseteq B$. Considere la colección de conjuntos $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, B, A^c, B^c, B - A, (B - A)^c\}$. Es $\mathcal{A}$ un $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω ?

Ejercicio 4: Sean $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ dos $\sigma-$álgebras de subconjuntos de Ω. Demuestre que $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ no necesariamente es un $\sigma-$álgebra. Considere, por ejemplo, el conjunto $\Omega = \{1, 2, 3\}$ y las $\sigma-$álgebras $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$.

Ejercicio 5: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.

(a) Sean A y B en $\mathcal{A}$ tales que $A \subseteq B$. Pruebe que $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

(b) Si A y B son eventos independientes, muestre que A y B^c también lo son.

(c) Sean $a_1, ..., a_n$ números positivos y $A_1, ..., A_n$ una partición de Ω. Para todo A en $\mathcal{A}$ sea

$$Q(A) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(A \cap A_i) / \sum_{i=1}^{n} a_i P(A_i).$$

Es Q una medida de probabilidad ?

Ejercicio 6: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.

(a) Sean A y B en $\mathcal{A}$. Cuál es la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los eventos A o B ?

(b) Sea Q otra medida de probabilidad definida en $(\Omega, \mathcal{A})$. Es $\alpha P + (1 - \alpha)Q$, con $0 \leq \alpha \leq 1$, una medida de probabilidad ?

Ejercicio 7: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, con P definida como;

$$P((-\infty, x]) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ x^2/2, & \text{si } 0 < x \leq 1/2, \\ (x+1)/3, & \text{si } 1/2 < x \leq 1, \\ 1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calcule las siguientes probabilidades; $P((-\infty, 1/2])$, $P((-\infty, 5])$ y $P((1/2, 8])$.

Ejercicio 8: Sea $\Omega = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$, $\mathcal{A}$=$p(\Omega)$ y P definida como;

$$P(\{i\}) = (1-q)q^i, \text{ para } i = 0, 1, 2, ...; \; 0 < q < 1.$$

Es P una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$?

Ejercicio 9: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.

(a) Sean A y B en $\mathcal{A}$, pruebe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(b) Sea $\{A_n; n = 1, 2, ...\}$ una secuencia decreciente de elementos de $\mathcal{A}$, muestre que $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Ejercicio 10: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Si A y B son tales que $P(A) = p$, $P(B) = q$ y $P(A \cup B) = r$. Muestre que;

(a) $P(A \cap B) = p + q - r$.

(b) $P(A \cap B^c) = r - q$.

(c) $P(A^c \cap B^c) = 1 - r$.

(d) $P(A \cup B^c) = p - r + 1$.

Ejercicio 11: Para ganar el campeonato, el City debe vencer al Town y al United. Tienen un 60 % de posibilidades de ganarle a Town, un 70 % de posibilidades de ganarle al United, y un 80 % de posibilidades de al menos una victoria. Cuál es el posibilidad de que el City gane el campeonato ? Describa $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en este caso.

Ejercicio 12: Se tienen n personas formadas en un círculo, dos de las cuales se llaman Ana y Berta. Cuál es la probabilidad de que Ana y Berta se encuentren separadas por r personas en la formación ? Describa $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Ejercicio 13: De entre los números $\{1, 2, ..., 50\}$ se escoge uno al azar. Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 o por 8 ?

Ejercicio 14: De 6 números positivos y 8 negativos, se eligen 4 al azar (sin sustitución) y se multiplican. Cuál es la probabilidad de que el producto sea positivo ?

Ejercicio 15: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad.

(a) Demuestre que para dos sucesos cualquiera, A_1 y A_2, se tiene que $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

(b) Demuestre que para n sucesos cualquiera, $A_1, A_2, ..., A_n$, se tiene que $P(A_1 \cup A_2 .... \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$.

Parte 2

Ejercicio 1: Un trabajador elabora n artículos. El evento "El i-ésimo artículo es defectuoso" será denotado por A_i, con $i = 1, ..., n$. Describa los siguientes eventos usando los conjuntos A_i y las operaciones usuales entre eventos;

(a) $B =$ "Al menos un artículo es defectuoso".

(b) $C =$ "Ninguno de los n artículos es defectuoso".

(c) $D =$ "Exactamente un artículo es defectuoso".

(d) $E =$ "A lo más un artículo es defectuoso".

Ejercicio 2: Suponga que el 35 % de los estudiantes de una universidad están tomando Inglés, 7 % están tomando Alemán y 2 % restan tomando ambos Inglés y Alemán.

(a) Qué % de la población de estudiantes esta tomando Inglés, pero no Alemán ?

(b) Qué % de la población de estudiantes no esta tomando Inglés, ni Alemán ?

Ejercicio 3: Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Encuentre 4 $\sigma-$álgebras $\{\mathcal{A}_i\}$ con $i = 1, 2, 3, 4$ tales que $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_3 \subseteq \mathcal{A}_4$.

Ejercicio 4: Sea $\Omega \neq \varnothing$ y B un subconjunto de Ω. Si $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra sobre Ω, pruebe que $\mathcal{A}_B$=$\{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$ es una $\sigma-$álgebra sobre B denominada traza de $\mathcal{A}$ sobre B.

Ejercicio 5: Dos tubos defectuosos se confunden con dos buenos. Los tubos se prueban uno por uno hasta encontrar los defectuosos. Cuál es la probabilidad de encontrar el último tubo defectuoso en la segunda prueba ? en la tercera ?, en la cuarta ? Qué puede decir acerca de estos resultados ?

Ejercicio 6: Se lanza al aire una moneda y se pregunta cuál es la probabilidad condicionada de que aparezca cara por primera vez en la N-ésima tirada, sabiendo que, por lo menos, ha salido cara una vez en las M+N primeras tiradas.

Ejercicio 7: Una persona lanza repetidamente dos dados y gana si saca una suma igual a 8 antes de obtener un 7. Cuál es la probabilidad de ganar ?

Ejercicio 8: Para descubrir el cáncer se ha iniciado una prueba que parece prometedora. Se encontró que el 98 % de los cancerosos en un hospital reaccionaron positivamente a la prueba, mientras que solamente el 4 % de aquellos que no tenían cáncer lo hacían así. Si el 3 % de los pacientes del hospital tienen cáncer, cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar, que reacciona positivamente a la prueba, tenga cáncer ?

Ejercicio 9: Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio. Suponga que $P(A) = 0{,}4$ mientras que $P(A \cap B) = 0{,}7$. Sea $P(B) = p$.

(a) Para qué elección de p, A y B son mutuamente excluyentes ?

(b) Para qué elección de p, A y B son eventos independientes ?

Ejercicio 10: Sea $\Omega = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ un espacio muestral equiprobable y considere los siguientes sucesos: A_1: la primera coordenada es uno; A_2: la segunda coordenada es uno y A_3: la tercera coordenada es uno. Muestre que estos eventos son independientes de a pares, pero no mutuamente independientes.

Ejercicio 11: Cada vez que se realiza un experimento, la probabilidad de ocurrencia de un suceso particular A, es igual a 0,2. El experimento se repite independiente hasta que ocurre A. Cuál es la probabilidad de que sea necesaria una cuarta repetición ?

Ejercicio 12: Un cuarto de una población es vacunada contra cierta enfermedad contagiosa. Durante el curso de una epidemia debido a la enfermedad, se observa que de cada 5 personas enfermas sólo 1 fue vacunada. También se sabe que de cada 12 personas vacunadas, sólo una esta enferma. Calcule la probabilidad de que una persona no vacunada este enferma.

Ejercicio 13: Suponga que un dado es lanzado dos veces consecutivas. Sea Z una variable aleatoria definida como: $Z =$"la diferencia en valor absoluto de los resultados obtenidos".

(a) Describa un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, asociado a este experimento.

(b) Es Z efectivamente una variable aleatoria ?

(c) Encuentre la función de distribución de Z.

(d) Cuál es la probabilidad de que $Z = 0$.

Ejercicio 14: Sea X una variable aleatoria real definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, F_X su función de distribución y $a, b \in \mathbf{R}$ con $a < b$. Pruebe que:

(a) $F_X(x^-) = P(X < x)$.

(b) $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$.

Ejercicio 15: Sea X una variable aleatoria real definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y $a, b \in \mathbf{R}$.

(a) Es $aX + b$ una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$?

(b) Es X^2 una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$?

– Santiago, 18 de Agosto de 2020 –