Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas

Problemas Resueltos ⋆ MAT1610 – Cálculo I

Sebastián Urrutia Quiroga
sgurruti@uc.cl
http://web.ing.puc.cl/~sgurruti/
Versión 1.0

19 de noviembre de 2012

Índice

1. Límite de sucesiones

1.1. Sucesiones, supremo e ideas de límite

(1) *a*) Sean A y B dos conjuntos, definimos $A+B=\{x+y : x\in A, y\in B\}$, entonces demuestre que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

b) Sea $A\subset\mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y sea $-A=\{-x \mid x\in A\}$. Pruebe que $-A$ es acotado inferiormente y que $\inf\{-A\}=-\sup\{A\}$.

Solución:

a) Demostraremos la propiedad demostrando dos desigualdades.
Primero $\sup(A+B)\leq\sup(A)+\sup(B)$:
Un elemento de $A+B$ se escribe como $x+y$, y este número es menor que $\sup(A)+\sup(B)$, pues $x\leq\sup(A)$ e $y\leq\sup(B)$. Con ello tenemos que $\sup(A)+\sup(B)$ es una cota superior del conjunto $A+B$. Entonces el $\sup(A+B)$ debe ser menor que $\sup(A)+\sup(B)$. Luego,

$$\sup(A+B)\leq\sup(A)+\sup(B)$$

Segundo $\sup(A+B)\geq\sup(A)+\sup(B)$:
Sabemos que para todo $x\in A$ e $y\in B$, $x+y\leq\sup(A+B)$, es decir para todo $x\in A$ se tiene $x\leq\sup(A+B)-y$, lo que equivale a decir que para todo $y\in B$, se tiene que el real $\sup(A+B)-y$, es cota superior de A. Entonces para todo $y\in B$ se tiene que $\sup(A)\leq\sup(A+B)-y$. Como es para todo $y\in B$, entonces tenemos $y\leq\sup(A+B)-\sup(A)$. Luego $\sup(B)\leq\sup(A+B)-\sup(A)$. Con lo cual se tiene la otra desigualdad.
Así,

$$\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$$

b) Sea $a\in\mathbb{R}$ cota superior de A; es decir, para todo $x\in A$ se tiene que $x\leq a$. Multiplicando por -1 obtenemos que $-a\leq -x$. Recordemos que un elemento $y\in -A$ es de la forma $y=-x$. Es decir, para todo $y\in -A$ tenemos que $-a\leq y$. Por tanto, el conjunto $-A$ es acotado inferiormente y con ello, posee ínfimo $\inf\{-A\}$. Por otra parte, notemos que dado $\epsilon>0$, existe $x\in A$ tal que

$$\sup\{A\}-\epsilon<x\leq\sup\{A\}$$

De donde,

$$-\sup\{A\}\leq -x<-\sup\{A\}+\epsilon$$

y por lo tanto $\inf\{-A\}=-\sup\{A\}$.

■

(2) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{6n+1}$ y luego demuéstrelo por definición.

Solución:

Notemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{6n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(3+\frac{1}{n})}{n(6+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{6+\frac{1}{n}} = \frac{3+0}{6+0} = \frac{1}{2}$$

Ahora, debemos demostrar que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ (\forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{3n+1}{6n+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon)$$

Es decir, dado $\epsilon > 0$, buscamos n_0 tal que cumpla lo pedido. A modo de <u>borrador</u>, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{3n+1}{6n+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon \quad &\Rightarrow \quad \left| \frac{6n+2-6n-1}{2(6n+1)} \right| < \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \left| \frac{1}{2(6n+1)} \right| < \epsilon \quad \text{como la fracción es positiva,} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{6n+1} < 2\epsilon \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2\epsilon} < 6n+1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1-2\epsilon}{12\epsilon} < n
\end{aligned}$$

Recordemos que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left[x\right] \leq x$. Así, nuestro candidato a n_0 es

$$n_0 = \left[\frac{1-2\epsilon}{12\epsilon} \right]$$

Ahora, con nuestro n_0 probamos que:
Sea $n > n_0 = \left[\frac{1-2\epsilon}{12\epsilon} \right]$. Entonces,

$$\begin{aligned}
n > \frac{1-2\epsilon}{12\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad 6n > \frac{1-2\epsilon}{2\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon} - 1 \\
&\Rightarrow \quad 6n+1 > \frac{1}{2\epsilon} \\
&\Rightarrow \quad \epsilon > \frac{1}{2(6n+1)} = \frac{3n+1}{6n+1} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

y con ello $\epsilon > \left|\frac{3n+1}{6n+1} - \frac{1}{2}\right|$. ■

(3) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Solución:

Debemos demostrar que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ (\forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon)$$

Lo que es equivalente a demostrar que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ (\forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n+1} \right| < \epsilon)$$

Sea $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$. Ahora, su existencia está asegurada por la propiedad Arquimediana. [1]

Entonces si $n > n_0$ entonces se tiene que:

$$n + 1 > \frac{1-\epsilon}{\epsilon} + 1 = \frac{1}{\epsilon}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{n+1} < \epsilon$$

■

(4) En cada caso, de un ejemplo de una sucesión que satisfaga la condición propuesta y, si no existe tal sucesión, explique.

a) Una sucesión ni creciente ni decreciente que converja a 0.

b) Una sucesión no acotada que converja a -3.

c) Una sucesión divergente a $-\infty$.

Solución:

(5) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(6) Si es convergente, entonces necesariamente es acotada. Luego, no existe tal sucesión.

(7) $b_n = -n^2$ ■

(8) Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por $a_n = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

a) Demuestre que es creciente.

b) Demuestre que la sucesión está acotada superiormente por $\frac{1}{2}$.

c) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Solución:

[1] **Teorema (Propiedad Arquimediana):** $\forall x > 0 \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x \cdot n > 1$

a) Notemos que

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\sqrt{n+1} - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} \\ &= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} - (n+1) - \left(\sqrt{n}\sqrt{n+1} - n\right) \\ &= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{n}\sqrt{n+1} \\ &= \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

Entonces, para probar el carácter creciente, debemos probar que la expresión anterior es positiva, o bien

$$\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} > 1 + \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Pero, ya que para $a, b > 0$ se cumple que $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$, esto es equivalente a demostrar que

$$(n+1)(n+2) > \left(1 + \sqrt{n}\sqrt{n+1}\right)^2 = n(n+1) + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1$$

o lo que es lo mismo que

$$2n + 1 > 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Aplicando nuevamente la propiedad anterior, vemos que basta probar que

$$4n^2 + 4n + 1 > 4n(n+1)$$

lo que es evidentemente cierto.

b) Se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} = \frac{(n+1-n)\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) De lo anterior,

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

■

1.2. Límites

(1) Demuestre que el límite de una sucesión convergente es único.

Solución:

Para la demostración, primero probaremos el siguiente lema:

Lema: *Una sucesión es convergente a L si y solo si la distancia entre los valores de la misma y L converge a cero.*
<u>Dem:</u> Si una sucesión a_n converge a L, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}(n > n_0 \longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

O lo que es equivalente,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}(n > n_0 \longrightarrow ||a_n - L| - 0| < \varepsilon)$$

es decir, que la sucesión definida como $b_n = |a_n - L|$ converge a cero.

Ahora, supongamos que existen $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a_n \to L_1, a_n \to L_2$ distintos entre si. Notemos que, por la desigualdad triangular:

$$0 \leq |L_1 - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2|$$

Con $n \to \infty$ obtenemos que $|L_1 - L_2| = 0$ y con ello $L_1 = L_2$, lo que contradice la hipótesis inicial. Por lo tanto, el límite es único. ■

(2) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$$

Solución:

Notemos que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n + k \geq n$, si $k = 0 \ldots n$. Por tanto, $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+k}$. Dado que ambos términos son positivo, la desigualdad se mantiene al elevar al cuadrado ambos lados. Así,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{(n+k)^2}}_{\leq \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{(n+n)^2} \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Por otra parte, notemos que de manera análoga se puede concluir que $n + n \geq n + k$, y con ello se cumple que $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k}$. Igual que en el caso anterior, la desigualdad se mantiene al elevar al cuadrado:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{(n+k)^2}}_{\geq \frac{1}{(2n)^2}} + \frac{1}{(n+n)^2} \\
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n}
\end{aligned}
$$

Por tanto, por el *Teorema del Sandwich* y dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} = 0$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = 0$$

$\blacksquare$

(3) Calcule los límites de las sucesiones cuyos términos $n-$ésimos son:

- $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ $\boxed{R = 0}$
- $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n-1}$ $\boxed{R = \dfrac{1}{2}}$
- $\left(\dfrac{n^2+5}{n^2+1}\right)^{n^2+4}$ $\boxed{R = e^4}$
- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\boxed{R = 0}$
- $\dfrac{\sin n}{n}$ $\boxed{R = 0}$
- $\dfrac{1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^4}{1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^3}$ $\boxed{R = \dfrac{4}{3}}$
- $\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ $\boxed{R = 1}$

(4) Calcule

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-3n}{n^2-2n}$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{3^n+1}$

c) $\lim_{n\to\infty} [a_n]$, donde $\{a_n\}$ es la sucesión definida por $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$

Solución:

a) Se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-3n}{n^2-2n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(4-\frac{3}{n})}{n^2(1-\frac{2}{n})}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n}}\\ &= \frac{4-0}{1-0}\\ &= 4\end{aligned}$$

b) Tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{3^n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(1+(\frac{1}{2})^n)}{3^n(1+(\frac{1}{3})^n)}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1+(\frac{1}{2})^n}{1+(\frac{1}{3})^n}\\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0} \underbrace{\frac{1+(\frac{1}{2})^n}{1+(\frac{1}{3})^n}}_{\to 1}\\ &= 0\end{aligned}$$

c) Dado que

$$\frac{2n+1}{n+3} = 2 - \frac{5}{n+3}$$

y como $0 < \dfrac{5}{n+3} < 1$ para $n > 2$, entonces:

$$\left[\frac{2n+1}{n+3}\right] \leq 1$$

Además,

$$\left[\frac{2n+1}{n+3}\right] \geq \frac{2n+1}{n+3} - 1 = \frac{n-2}{n+3}$$

Luego,

$$\frac{n-2}{n+3} \leq \left[\frac{2n+1}{n+3}\right] \leq 1, \qquad \forall n > 2$$

Finalmente, por el Teorema del Sandwich,

$$\lim_{n\to\infty} [a_n] = 1$$

$\blacksquare$

(5) *a*) Sea $\{a_n\}$ una sucesión definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_n &= 2 - \frac{1}{a_{n-1}} \end{aligned}$$

Demuestre que dicha sucesión es convergente y calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Si $a_1 = 4$ y $a_{n+1} = \dfrac{6a_n + 6}{a_n + 11}$, demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y calcular su límite.

Solución:

a) Tenemos que $a_1 = 3$, $a_2 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} < a_1$. Probemos que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente.

- Trataremos de probar, vía inducción, que 1 es una cota inferior de nuestra sucesión. Notemos que $a_1 = 3 > 1$. Supongamos que $a_n > 1$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} a_n > 1 \qquad &\Rightarrow \frac{1}{a_n} < 1 \\ &\Rightarrow 2 - \frac{1}{a_n} > 2 - 1 \\ &\Rightarrow a_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

y, por tanto, 1 es una cota inferior de la sucesión.

- Ahora, probaremos por inducción que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente. Por lo antes calculado, evidenciemos que $a_1 > a_2$. Tomemos como hipótesis de inducción que $a_n < a_{n-1}$. Ahora,

$$\begin{aligned} a_n < a_{n-1} \qquad &\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n-1}} < \frac{1}{a_n} \\ &\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{a_{n-1}} > 2 - \frac{1}{a_n} \\ &\Leftrightarrow a_n > a_{n+1} \end{aligned}$$

y con ello se concluye que es decreciente.

- Por teorema, como la sucesión es acotada inferiormente y decreciente, tiene límite. Notemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = L$. Ahora, tomando el límite de la igualdad $a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} L = 2 - \frac{1}{L} \quad &\Leftrightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (L-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow L = 1 \end{aligned}$$

  Así, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Igualmente que en el ejercicio anterior, debemos probar que la sucesión es monótona y acotada.

- Tenemos que $a_1 = 4 > 0$. Ahora, nuestra hipótesis de inducción es que $a_n > 0$. Luego,

$$\begin{array}{lcl} \text{Si } a_n > 0 & \rightarrow & 6(a_n+1) > 6 > 0 \\ \text{Si } a_n > 0 & \rightarrow & a_n + 11 > 11 > 0 \\ & \therefore & a_{n+1} > 0 \end{array}$$

  Así, la sucesión es acotada inferiormente.

- Notemos que $a_1 = 4 > a_2 = \frac{24+6}{4+11} = 2$. Nuestra H.I. es que $a_n < a_{n-1}$. Así,

$$a_{n+1} = \frac{6a_n + 6}{a_n + 11} = 6\left(1 - \frac{10}{a_n + 11}\right)$$

  Por tanto,

$$\begin{array}{rcccc} a_n < a_{n-1} & \Leftrightarrow & a_n + 11 & < & a_{n-1} + 11 \\ & \Leftrightarrow & \frac{10}{a_n+11} & > & \frac{10}{a_{n-1}+11} \\ & \Leftrightarrow & -\frac{10}{a_n+11} & < & -\frac{10}{a_{n-1}+11} \\ & \Leftrightarrow & 1 - \frac{10}{a_n+11} & < & 1 - \frac{10}{a_{n-1}+11} \\ & \Leftrightarrow & 6\left(1 - \frac{10}{a_n+11}\right) & < & 6\left(1 - \frac{10}{a_{n-1}+11}\right) \\ & \Leftrightarrow & a_{n+1} & < & a_n \end{array}$$

  Así, la sucesión es decreciente. Por tanto,

$$\text{acotada} \ + \ \text{monótona} \ \Rightarrow \ \text{convergente}$$

- Sabemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$. Así, reemplazando,

$$L^2 + 5L - 6 = 0 \quad \longrightarrow \quad L = 1 \ \vee \ L = -6$$

  Por unicidad del límite, éste debe corresponder a uno de los valores anteriores. Pues bien, dado que la sucesión es siempre mayor que cero, por tanto el límite debe ser igualmente positivo. Así,

$$L = 1$$

■

(6) *a*) Determine $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 1$

b) Igual que en el ejercicio anterior, pero con $x_n = \frac{n+1}{n}$

Solución:

a) Sea $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Notemos que:

$$\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$$

y por propiedad de sucesiones, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

b) Notemos que:

$$\frac{\dfrac{n+1+1}{(n+1)}}{\dfrac{n+1}{n}} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1$$

y en este caso la propiedad no aplica. Evidentemente, es más fácil realizar el cálculo directo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

Esto nos muestra que la propiedad utilizada anteriormente no sirve para el cálculo de límites de todo tipo de sucesiones.

■

(7) Determine:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + \pi^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^p + 2^p + \cdots + n^p}$, con $p \in \mathbb{N}$ fijo.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, con

$$a_1 = 0.9,\ a_2 = 0.99, \cdots\ a_n = 0.9999\ldots$$

Solución:

a) Inicialmente,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n+\pi^n} = \lim_{n\to\infty} \pi\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n+1} = \pi\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n+1}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} 0<e<\pi \quad &\Longrightarrow \quad 0<\left(\frac{e}{\pi}\right)<1 \\ &\Longrightarrow \quad 0<\left(\frac{e}{\pi}\right)^n<1 \\ &\Longrightarrow \quad 1<1+\left(\frac{e}{\pi}\right)^n<2<n \qquad \text{para } n>2 \\ &\Longrightarrow \quad 1<\sqrt[n]{1+\left(\frac{e}{\pi}\right)^n}<\sqrt[n]{n} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^n+\pi^n}=\pi$$

b) Dado que $\forall p\in\mathbb{N}$ se cumple que $1^p<k^p<n^p$, con $k=1,\cdots,n$, entonces es claro que:

$$\begin{aligned} \underbrace{1^p+1^p+\cdots+1^p}_{n-veces} < \quad & 1^p+2^p+\cdots+n^p < \underbrace{n^p+n^p+\cdots+n^p}_{n-veces} \\ n\cdot 1^p < \quad & 1^p+2^p+\cdots+n^p < \qquad n\cdot n^p \\ \sqrt[n]{n} < & \sqrt[n]{1^p+2^p+\cdots+n^p} < \sqrt[n]{n^{p+1}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{p+1} \end{aligned}$$

Como los extremos tienden a 1 cuando $n\to\infty$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1^p+2^p+\cdots+n^p}=1$$

c) Analicemos nuestra sucesión:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.9 && = \frac{9}{10} && = \frac{9}{10} \\ a_2 &= 0.99 && = \frac{99}{100} && = \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2} \\ a_n &= 0.999\ldots && = \frac{999\ldots}{1000\ldots} && = \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\cdots+\frac{9}{10^n} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9\left[\frac{1}{10}\left(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right)\right] = 1 - \frac{1}{10^n}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n} = 1$$

Note que, aunque la sucesión consiste en agregar nueves luego de la coma, ésta converge a uno.

■

(8) Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por $a_n = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

a) Demuestre que es creciente.

b) Demuestre que la sucesión está acotada superiormente por $\frac{1}{2}$.

c) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Solución:

a) Notemos que

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\sqrt{n+1} - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} \\
&= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} - (n+1) - \left(\sqrt{n}\sqrt{n+1} - n\right) \\
&= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{n}\sqrt{n+1} \\
&= \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) - 1
\end{aligned}$$

Entonces, para probar el carácter creciente, debemos probar que la expresión anterior es positiva, o bien

$$\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} > 1 + \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Pero, ya que para $a, b > 0$ se cumple que $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$, esto es equivalente a demostrar que

$$(n+1)(n+2) > \left(1 + \sqrt{n}\sqrt{n+1}\right)^2 = n(n+1) + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1$$

o lo que es lo mismo que

$$2n + 1 > 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Aplicando nuevamente la propiedad anterior, vemos que basta probar que

$$4n^2 + 4n + 1 > 4n(n+1)$$

lo que es evidentemente cierto.

b) Se tiene que:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} = \frac{(n+1-n)\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) De lo anterior,

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

■

2. Límite de funciones y continuidad

2.1. Límite de funciones

(1) *a*) Demuestre $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, $a > 0$.

b) Dado el límite $\lim\limits_{x \to 3} (2x-5) = 1$, encontrar δ tal que $|(2x-5)-1| < 0.01$ siempre que $0 < |x-3| < \delta$.

Solución:

a) Por demostrar:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \left(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - a^2\right| < \epsilon\right)$$

Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \epsilon)$.

$$\left|x^2 - a^2\right| = |(x-a)(x+a)| = (x+a)\,|x-a| < \epsilon$$

$$\text{Pero,} \quad |x-a| < \delta \;\longrightarrow\; (x+a)|x-a| < \delta(x+a) < \underbrace{\delta(\delta + a + a)}_{\text{dado que la función es creciente}} < \epsilon$$

Así,

$$\delta(\delta + 2a) < \epsilon$$

Con ello, hemos hallado un $\delta(\epsilon)$ tal que cumple con lo pedido.

b) Observemos que:

$$|(2x-5)-1| = |2x-6| = 2|x-3| < 0.01$$

Además, por enunciado es claro que:

$$0 < |x-3| < \delta \;\longrightarrow\; 0 < 2|x-3| < 2\delta$$

Así, basta tomar $2\delta = 0.01$ para mantener las desigualdades. Finalmente, $\delta = 0.005$.

$\blacksquare$

(2) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \nexists$, si $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Solución:

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números racionales tales que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Entonces,

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$$

Ahora, sea $\{b_n\}$ una sucesión de números irracionales tales que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Como ambos límites son distintos, por el *Teorema de enlace entre límites de funciones y sucesiones*[2], dicho límite no existe. ■

(3) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin\left(\cos^2(x)\right)}{1-\sin(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{[x]}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x^3+3x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{x^3+x-2}$

Solución:

a) Se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\cos^2(x)\right)}{1-\sin(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\cos^2(x)\right)}{1-\sin(x)}\left(\frac{1+\sin(x)}{1+\sin(x)}\right)\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\cos^2(x)\right)}{\cos^2(x)}\left(\frac{1+\sin(x)}{1}\right)\end{aligned}$$

Es claro que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\sin(x)) = 2$.

Ahora, sea $u=\cos^2(x)$. Si $x\to\frac{\pi}{2}$, entonces $u\to 0$. Así, $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin^2(u)}{u} = 1$.

Por tanto,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\cos^2(x)\right)}{1-\sin(x)} = 2$$

b) Sabemos que $\forall x\in\mathbb{R}$, se cumple que $x-1\leq [x]\leq x$:

$$\begin{gathered} x-1 \leq [x] \leq x \\ \frac{x-1}{x} \leq \frac{[x]}{x} \leq 1 \end{gathered}$$

[2]**Teorema:** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$

Como $\lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x} = 1$, entonces por el *Teorema del Sandwich*, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

c) Racionalizando,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x^3+3x-4} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x^3+3x-4}\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}\right)\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+4)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+1})}\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x^2+x+4)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+1})}\\
&= \frac{1}{12\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x^3+x-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)}\left(\frac{1}{(x-1)(x^2+x+2)}\right)\\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}\left(\frac{1}{(\cos(x-1))(x^2+x+2)}\right)\\
&= 1\cdot\frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

■

(4) Hallar los valores del parámetro k para los cuales existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} & \text{si } x<0 \\[2ex] \dfrac{1-\cos(k\cdot x)}{x^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

Solución:

Para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ deben existir los límites laterales

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0-} f(x)$$

Notemos que, para $x > 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(k\cdot x)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(k\cdot x)}{(kx)^2}k^2 \\
&= \frac{k^2}{2}
\end{aligned}$$

Por otra parte, para $x < 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x+1-1}\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}\right) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe si y solo si:

$$\frac{k^2}{2} = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

■

(5) El concepto de límites también es útil para analizar el comportamiento de las funciones, tanto en sus puntos de indefinición como en grandes valores del dominio. Estudie dichos elementos en las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2+2x-8}$

b) $g(t) = \dfrac{t^2+1}{\sqrt{t^2-1}}$

c) $h(x) = x - \sqrt{x^2-4}$

Solución:

a) Lo primero que debemos notar es que nuestra función puede escribirse como sigue:

$$f(x) = \frac{x(x+2)(x-1)}{(x+4)(x-2)} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Por tanto, los límites a calcular son los siguientes:

- $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$
  En este caso, $p(-4) = -40,\ q(-4) = 0$ y por lo tanto, dado que el denominador se hace cada vez más pequeño en comparación con el numerador mientras $x \to -4$, es claro que la función diverge. Ahondemos un poco más:
  Sea $\delta > 0$. Así, $p(-4+\delta) = p(-4-\delta) < 0$. Por otra parte, $q(-4-\delta) < 0$ y $q(-4+\delta) > 0$. Por tanto se cumple que:

  $$\lim_{x \to -4-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -4+} f(x) = \infty$$

  Decimos entonces que $f(x)$ tiene una <u>asíntota vertical</u> en $x = -4$.

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
  Igual que en el caso anterior, el límite no tiene posibilidades de existir dado que $p(2) = 8,\ q(2) = 0$. De igual manera, tomando $\delta > 0$ se cumple que $p(2+\delta) = p(2-\delta) > 0$ y $q(2+\delta) > 0,\ q(2-\delta) < 0$ y con ello:

  $$\lim_{x \to 2-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 2+} f(x) = \infty$$

  Decimos entonces que $f(x)$ tiene una <u>asíntota vertical</u> en $x = 2$.

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$
  Es fácil reconocer, ya sea utilizando el grado de los polinomios u otro argumento similar, que la función f diverge cuando $x \to \pm\infty$. Lo interesante es saber cómo diverge, i.e. si tiene alguna similitud con alguna otra función particular. Aplicando división de polinomios, podemos reescribir nuestra función f de un modo ligeramente diferente:

  $$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+2x-8) + 4(x-2)}{x^2+2x-8} = x - 1 + \frac{4(x-2)}{x^2+2x-8}$$

  Notemos que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4(x-2)}{x^2+2x-8} = 0$, por lo para valores lo suficientemente grandes o pequeños de x, nuestra función tendrá cada vez más un comportamiento similar a la recta $x - 1$.

  Ahora, este hecho se sistematiza al introducir el concepto de asíntotas horizontales y oblicuas, definidas como:

  $$m_+ = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad m_- = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$
  $$n_+ = \lim_{x \to \infty} f(x) - m_+ x \qquad n_- = \lim_{x \to -\infty} f(x) - m_- x$$

Es fácil comprobar que:

$$m_+ = m_- = 1 \qquad n_+ = n_- = -1$$

Decimos entonces que la recta $y = x - 1$ es una <u>asíntota oblicua</u> a $f(x)$ en $\pm\infty$.

b) Primero que todo, debemos entender que el dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

- $\lim\limits_{t \to -1} g(t)$
  En este caso, el numerador tiende a un número fijo distinto de cero (dos) mientras que el denominador se acerca al valor nulo. Por tanto, $g(t)$ diverge en $x = -1$. Dado que tanto el polinomio $t^2 + 1$ como la raíz $\sqrt{t^2 - 1}$ son positivas, podemos concluir que:

  $$\lim_{t \to -1} g(t) = \infty$$

  Decimos entonces que $g(t)$ tiene una <u>asíntota vertical</u> en $t = -1$.

- $\lim\limits_{t \to 1} g(t)$
  Igual que en el caso anterior, la función diverge en $t = 1$ por los mismos motivos que en la anterior discontinuidad. De igual manera,

  $$\lim_{t \to 1} g(t) = \infty$$

  Decimos entonces que $g(t)$ tiene una <u>asíntota vertical</u> en $t = 1$.

- $\lim\limits_{t \to \pm\infty} g(t)$
  Notemos que: $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{g(t)}{t} = 1$ y con ello $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) - t = 0$. Decimos entonces que la recta $y = t$ es una <u>asíntota oblicua</u> a $g(t)$ en ∞.
  De manera análoga, $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{g(t)}{t} = -1$ y con ello $\lim\limits_{t \to -\infty} g(t) + t = 0$. Decimos entonces que la recta $y = -t$ es una <u>asíntota oblicua</u> a $g(t)$ en $-\infty$.

c) En este caso la función tiene como dominio $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, pero no posee discontinuidades. Así, solo basta analizar el comportamiento en $\pm\infty$.

$$m_+ = \lim_{x \to \infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - (x^2 - 4)}{x(x + \sqrt{x^2 - 4})} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x(x + \sqrt{x^2 - 4})} = 0$$

$$n_+ = \lim_{x \to \infty} x - \sqrt{x^2 - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - (x^2 - 4)}{x + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{4}{x + \sqrt{x^2 - 4}} = 0$$

Decimos entonces que la recta $y = 0$ es una <u>asíntota horizontal</u> a $h(x)$ en ∞. Finalmente,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x} = m_-$$

Sea $u = -x$, y con ello si $x \to -\infty$, $u \to \infty$. Así,

$$m_- = \lim_{u \to \infty} \frac{-u - \sqrt{u^2 - 4}}{-u} = \lim_{u \to \infty} \frac{u + \sqrt{u^2 - 4}}{u} = \lim_{u \to \infty} \frac{u + u\sqrt{1 - 4/u^2}}{u} = 2$$

$$n_- = \lim_{x \to -\infty} h(x) - 2 \cdot x = \lim_{x \to -\infty} -x - \sqrt{x^2 - 4} = \lim_{u \to \infty} u - \sqrt{u^2 - 4} = 0$$

Decimos entonces que la recta $y = 2x$ es una asíntota horizontal a $h(x)$ en $-\infty$.

■

2.2. Continuidad

(1) Estudie la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} & , \text{ si } x > 0 \\ \\ \dfrac{(1 - \cos(x))(x^3 + 4x^2)}{x^4} & , \text{ si } x < 0 \\ \\ 2 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

Notemos que, para $x < 0$, la función es continua en todo el intervalo $(0, \infty)$. Por otra parte, para $x > 0$, igualmente es continua en todo el intervalo $(-\infty, 0)$. Por tanto, basta analizar únicamente el punto $x = 0$.

Recordemos que una función f se dice continua en $x = a$ si:

- $x = a \in \mathrm{Dom}\,(f)$
- $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

En primer lugar, calculemos los límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0+} f(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}} \right) \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{(2x+1) - (x+1)} \cdot \left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1} \right) \\ &= \underbrace{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x \to 0} (\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1})}_{=2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))(x^2(x+4))}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)\cdot(x+4) \\
&= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} x+4}_{=4} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Por tanto, como los límites laterales son iguales entre sí e iguales a la función evaluada en el punto, f es continua en $x=0$. Entonces, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. ■

(2) Determine las constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente función sea continua en toda la recta real:

$$
f(x) = \begin{cases} -2\sin(x) & \text{si } x < -\frac{\pi}{2} \\ A\sin(x)+B & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 3\cos^2(x) & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}
$$

Solución:

La función definida a tramos presenta una combinación de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, basta analizar los puntos en donde se produce el cambio en la definición de la función:

- Continuidad en $x = -\frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} -2\sin(x) = 2 \\
\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} A\sin(x)+B = B-A = f\left(-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Por tanto, $\underbrace{B-A=2}_{(1)}$

- Continuidad en $x = \frac{\pi}{2}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} f(x) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} A\sin(x)+B = A+B = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
\lim_{x\to \frac{\pi}{2}+} f(x) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} 3\cos^2(x) = 0
\end{aligned}
$$

y con ello, $\underbrace{B+A=0}_{(2)}$

Finalmente, por (1) y (2), la función será continua en toda la recta real si

$$A = -1 \qquad \text{y} \qquad B = 1$$

$\blacksquare$

(3) Determine los valores de a, b, c para los cuales la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(3x)}{1-\cos(5x)} & , \text{ si } x < 0 \\[2ex] a & , \text{ si } x = 0 \\[2ex] \dfrac{x^2+bx+c}{x} & , \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Sea continua en $x = 0$.

Solución:

Notemos que la función posee infinitas discontinuidades, en aquellos puntos x_0 donde $1-\cos(5x_0) = 0$. En este caso, eso no influye en nuestro problema, puesto que se nos pide analizar un único punto.

Para la continuidad en $x = 0$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0)$$

Es claro que,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{1-\cos(5x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}}{\dfrac{1-\cos(5x)}{(5x)^2}} \frac{(3x)^2}{(5x)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{9}{25} \\ &= \frac{9}{25} \end{aligned}$$

Por tanto, como $f(0) = a$ se cumple que:

$$a = \frac{9}{25}$$

Ahora, f es continua en dicho punto si

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+bx+c}{x} = \frac{9}{25}$$

Así,

Como se trata de una forma indeterminada $(\frac{0}{0})$, para que el límite anterior exista se requiere que el numerador se haga cero cuando $x = 0$. Esto se logra dividiendo los polinomios:

$$(x^2 + bx + c) = (x + b) \cdot x + c$$

Como el resto es c, y deseamos que el polinomio inicial sea divisible por x (para que podamos simplificar), debe cumplirse que:

$$c = 0$$

Lo anterior asegura que $x^2 + bx + c = x \cdot q(x)$, con $q(x) = x + b$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + bx + c}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot q(x)}{x} \\ &= q(0) \;=\; b \end{aligned}$$

Finalmente, juntando nuestros resultados,

$$b = \frac{9}{25}$$

■

(4) a) Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, pruebe que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

b) Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ tal que $a \leq f(a)$ y $f(b) \leq b$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$[3].

c) Demuestre que el polinomio $p(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ tiene tres raíces reales.

Solución:

a) Definamos la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Notemos que nuestra nueva función es continua en el intervalo $[a, b]$ puesto que corresponde a una resta de funciones continuas. Por otra parte, notemos que:

$$h(a) = f(a) - g(a) > 0 \quad \text{, y también} \quad h(b) = f(b) - g(b) < 0$$

Entonces, por Teorema del Valor Intermedio, existe $c \in [a, b]$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) - g(c) = 0$ y, por tanto,

$$f(c) = g(c)$$

[3]Muchas veces se denomina a esta propiedad como el *Teorema del punto fijo*.

b) Definamos la función auxiliar $g(x) = f(x) - x$. Notemos que dicha función es continua en el intervalo $[a, b]$ puesto que corresponde a una resta de funciones continuas. Así:

$$g(a) = f(a) - a > 0 \quad \text{, y también} \quad g(b) = f(b) - b < 0$$

Entonces, por Teorema del Valor Intermedio, existe c $\in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) - c = 0$ y, por tanto,

$$f(c) = c$$

c) Tenemos que $p(0) = -1 < 0$ y que $p(1) = 3 > 0$. Como $p(x)$ en continua en el intervalo $[0, 1]$ por ser un polinomio, por el T.V.I. existe $c \in [0, 1]$ tal que $p(c) = 0$.

Por otro lado, $p(-1) = 1 > 0$. Entonces, nuevamente por el T.V.I. existe $d \in [-1, 0]$ tal que $p(d) = 0$.

Como $p(x)$ es de grado tres solo puede tener una o tres raíces reales, pero como ya hallamos dos de ellas, $p(x)$ debe tener tres raíces reales.

■

(5) Analice la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

Solución:

Como $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}$ es cero, uno o infinito, según sea $|x| < 1$, $|x| = 1$ o $|x| > 1$ separaremos por casos:

- Si $|x| < 1$ tenemos:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

- Si $|x| > 1$ tenemos:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

- Si $|x| = 1$ tenemos:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$$

Por tanto, la función en cuestión puede escribirse de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } |x| < 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| = 1 \end{cases}$$

Entonces f presenta discontinuidades irreparables en $x = \pm 1$. En todos los demás puntos, es continua. ■

(6) *a*) Sea $n \in \mathbb{Z}$. Calcule $\lim\limits_{x\to n} \sqrt{x-[x]}+[x]$. ¿Qué puede decir de la continuidad de $f(x) = \sqrt{x-[x]}+[x]$ en $\mathbb{R}$?

b) Demuestre que si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ también existe. ¿Es verdadero, en general, el recíproco (o sea, si $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe)?

Solución:

a) Mostraremos que los límites laterales son iguales a n. Si $n-1 \leq x < n$, tenemos que $[x] = n-1$. Por tanto, $\sqrt{x-[x]}+[x] = \sqrt{x-(n-1)}+(n-1)$. Por la continuidad de la función raíz cuadrada, se cumple que

$$\lim_{x\to n^-} \sqrt{x-[x]}+[x] = n$$

Por otro lado, si $n \leq x < n+1$, $[x] = n$. Así, $\sqrt{x-[x]}+[x] = \sqrt{x-n}+n$. Por el mismo argumento que en el apartado anterior,

$$\lim_{x\to n^+} \sqrt{x-[x]}+[x] = n$$

Como los límites laterales existen y son iguales entre sí, concluimos que

$$\lim_{x\to n} \sqrt{x-[x]}+[x] = n$$

Para estudiar la continuidad de f, supongamos que $a \in \mathbb{R}$ y separemos por casos:

- $a \in \mathbb{Z}$
  Por lo hecho anteriormente, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a = \sqrt{a-[a]}+a = f(a)$ y por lo tanto es continua en los enteros.

- $a \notin \mathbb{Z}$
  La función está bien definida en $x = a$, puesto que $[a] < a$. Tenemos que $[a] < a < [a]+1$; si x es tal que $[a] < a < [a]+1$, se tiene que

  $$\sqrt{x-[x]}+[x] = \sqrt{x-[a]}+[a]$$

  Utilizando la continuidad de la raíz cuadrada, se cumple que:

  $$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sqrt{x-[a]}+[a] = \sqrt{a-[a]}+[a] = f(a)$$

  Por lo tanto, f es continua $x = a$.

Luego, f es continua en $\mathbb{R}$.

b) Recordemos la desigualdad triangular reversa: Si a, b son números reales cualesquiera, $||a| - |b|| < |a - b|$.

Si al función converge a L cuando $x \to a$, entonces se cumple que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } |f(x) - L| < \epsilon \text{ cuando } 0 < |x - a| < \delta$$

Notemos que, por la desigualdad triangular reversa, se cumple que:

$$||f(x)| - |L|| < |f(x) - L|$$

Basta tomar $\epsilon > 0$ tal que la función cumpla con la definición de límite antes expuesta. Así, existe δ positivo tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \Longleftrightarrow ||f(x)| - |L|| < |f(x) - L|$$

Por tanto, es claro que si f converge a L, entonces $|f|$ lo hace a $|L|$. Ahora, para probar que la proposición recíproca no es cierta, tomemos la siguiente función

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

y analizar los límites laterales cuando x tiende a 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \wedge \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

y el límite no existe; mientras que $|f(x)| \equiv 1$, por lo que su límite sí existe.

$\blacksquare$

3. Derivadas

3.1. Derivación

(1) Calcule, por definición, la derivada de $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ en el punto $x = \sqrt{3}$

Solución:

Por la definición de derivada, sabemos que:

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}}{h} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1+(x+h)^2-1-x^2}{h(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x+h}{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$f'(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

■

(2) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $g(x) = \sqrt{\sin(x^2)}\sqrt{\tan(2x)} + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

c) $h(x) = \sin(x)\, e^{\sqrt{x+\cos(2x)}}$

Solución:

a) La derivada del primer sumando es:

$$\frac{\cos(x^2)\cdot 2x}{2\sqrt{\sin(x^2)}} \cdot \sqrt{\tan(2x)} + \sqrt{\sin(x^2)} \cdot \frac{\sec^2(2x)\cdot 2}{2\sqrt{\tan(2x)}}$$

La derivada del segundo sumando es:

$$\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{x}$$

Así,

$$g'(x) = \frac{\cos(x^2) \cdot x}{\sqrt{\sin(x^2)}} \cdot \sqrt{\tan(2x)} + \sqrt{\sin(x^2)} \cdot \frac{\sec^2(x) \cdot 2}{\sqrt{\tan(2x)}} - \frac{1}{x}$$

b) Por la regla de la cadena, tenemos que:

$$\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x}\right)'$$

Ahora, aplicando la regla del cociente en la derivada,

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{(1-x)\cdot 1 - (1+x)\cdot -1}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

Así,

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right) \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2}$$

c) Por la regla del producto, la derivada corresponde a:

$$\cos(x)\ e^{\sqrt{x+\cos(2x)}} + \sin(x) \left(e^{\sqrt{x+\cos(2x)}}\right)'$$

Aplicando la regla de la cadena,

$$\left(e^{\sqrt{x+\cos(2x)}}\right)' = e^{\sqrt{x+\cos(2x)}} \cdot \frac{1-2\sin(2x)}{2\sqrt{x+\cos(2x)}}$$

Finalmente,

$$h'(x) = \cos(x)\ e^{\sqrt{x+\cos(2x)}} + \sin(x)\ e^{\sqrt{x+\cos(2x)}} \cdot \frac{1-2\sin(2x)}{2\sqrt{x+\cos(2x)}}$$

■

(3) *a*) Si se define la función $f(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot |x|$, demuestre es diferenciable $\forall x \in \mathbb{R}$ y encuentre $f'(x)$

b) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, una función derivable en todo (a,b). Sea $x_0 \in (a,b)$ fijo , se define:

$$\phi(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Demuestre que $\lim\limits_{h\to 0} \phi(x_0) = f'(x_0)$

Solución:

a) Se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y con ello es claro que $f(x)$ es diferenciable $\forall x \neq 0$. Por otra parte,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}h\,|h|}{h} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0} |h| = 0$$

Entonces $f(x)$ también es diferenciable en el origen. Así,

$$f'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = |x|$$

b) Notemos que la función $\phi(x)$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \phi(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2}\frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{h\to 0} \phi(x_0) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \right)$$

Pero, sea $u = -h$. Si $h \to 0$, entonces $u \to 0$. Así:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+u)}{-u} = \lim_{u\to 0} \frac{f(x_0+u) - f(x_0)}{u} = f'(x_0)$$

Con ello,

$$\lim_{h\to 0} \phi(x_0) = \frac{1}{2}\Big(f'(x_0) + f'(x_0)\Big) = f'(x_0)$$

■

(4) Determine los valores de a, b para los cuales la función:

$$f(x) = \begin{cases} 5+\sqrt{2x} & , \text{ si } x \in (0,8] \\ \\ bx+a & , \text{ si } x \in (8,\infty) \end{cases}$$

Sea diferenciable en $x = 8$.

Solución:

Primero que todo, necesitamos que f sea continua en $x = 8$. Así:

$$\lim_{x\to 8-} f(x) = 9 = f(8)$$

$$\lim_{x\to 8+} f(x) = 8b + a$$

$$\therefore \quad 8b + a = 9$$

Por otra parte, por la definición formal de derivada, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 8+} \frac{f(x)-f(8)}{x-8} &= \lim_{x\to 8} \frac{bx+a-9}{x-8} \\ &= \lim_{x\to 8} \frac{bx+a-(8b+a)}{x-8} \\ &= \lim_{x\to 8} \frac{b(x-8)}{x-8} = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 8-} \frac{f(x)-f(8)}{x-8} &= \lim_{x\to 8} \frac{5+\sqrt{2x}-9}{x-8} = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{2x}-4}{x-8} \\ &= \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{2x}-4}{x-8} \cdot \frac{\sqrt{2x}+4}{\sqrt{2x}+4} \\ &= \lim_{x\to 8} \frac{2x-16}{(x-8)(\sqrt{2x}+4)} \\ &= \lim_{x\to 8} \frac{2}{\sqrt{2x}+4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Así,

$$b = \frac{1}{4} \longrightarrow a = 7$$

y con ello se tiene lo pedido.

$\blacksquare$

(5) Determine la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 \ \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

La recta buscada pasa por $(0,0)$, por lo que solo falta hallar su pendiente. Esta es:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{x \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{h - h^2 \ \cos\left(\dfrac{\pi}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{x \to 0} \left(1 - h \ \cos\left(\frac{\pi}{h}\right)\right) = 1 - \lim_{x \to 0} h \ \cos\left(\frac{\pi}{h}\right) \end{aligned}$$

El último límite es producto de una función acotada por otro que tiende a cero, por lo que $f\prime(0) = 1 - 0 = 1$. Así, la recta tangente buscada es:

$$y = x$$

■

(6) *a*) Sean f y g funciones de reales, tales que:

$$f'(x) = g(x)$$
$$g'(x) = f(x)$$

y $f(0) = 0, \ g(0) = 1$. Demuestre que $F(x) = (f(x))^2 - (g(x))^2$ es constante y determine su valor.

b) [**Propuesto**] Demuestre, vía inducción, la fórmula de Leibniz para la derivada del producto:

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

Solución:

a) Notemos que:

$$F'(x) = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2f(x)g(x) = 0$$

Como $F'(x) = 0$, es claro que $F(x) = C$. Así,

$$F(0) = 0^2 - 1^2 = -1 \ \longrightarrow \ F(x) = -1, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

■

3.2. Derivadas de orden superior, Teoremas de la función inversa e implícita

(1) Considere la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Determine valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la función es *continua, diferenciable* o con *derivada continua*.

Solución:

Para que nuestra función $f(x)$ sea continua, debemos analizar los que ocurre en $x = 0$. Así, debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

Ahora,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si $n \geq 1$, entonces el límite anterior será de la forma cero por acotada, y con ello $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ y la función será <u>continua en la recta real</u>.

Calculemos su derivada:

$$f'(x) = nx^{n-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right), \ \forall x \neq 0$$

para hallar $f'(0)$, si existe, debemos utilizar la definición analítica:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^n \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} h^{n-1} \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

Igual que en el caso anterior, dicho límite solo existirá si $n - 1 \geq 1 \to n \geq 2$. Por tanto, si $n \geq 2$ la función será <u>diferenciable en todo $\mathbb{R}$</u>.

Con ello,

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{ si } x \neq 0 \\ \\ 0 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Finalmente, para analizar la continuidad de f' debemos realizar el mismo análisis que para cualquier otra función: Notemos que f' es una composición de funciones continuas, y por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en el origen. Para analizar la continuidad en dicho punto probamos que:

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$$

Si $n = 2$, entonces el límite en cuestión es de la forma:

$$\lim_{x \to 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$$

Por tanto, con $n > 2$ se garantiza la <u>continuidad de la derivada en $\mathbb{R}$</u>. ■

(2) *a*) Determine la derivada de la función $\text{Arcsin}\,(x) : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) Sea $f(x) = x^3 - x$ para $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, y sea $g(x)$ su inversa. Calcular $g'(0)$.

Solución:

a) Por la definición de función inversa, sabemos que:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Por tanto, como $(\sin\,(x))' = \cos\,(x)$, debemos calcular $\cos\,(\text{Arcsin}\,(x))$.

Recordemos que $\cos\,(u) = \pm\sqrt{1 - \sin^2\,(u)}$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

Ahora, si tomamos $\text{Arcsin}\,(x) = y \leftrightarrow \sin\,(y) = x$, entonces la identidad fundamental anterior queda como sigue:

$$\begin{aligned} \cos\,(y) &= \pm\sqrt{1 - \sin^2\,(y)} = \pm\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{Pero, } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\,(y) > 0 \\ \cos\,(y) &= \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow \cos\,(\text{Arcsin}\,(x)) = \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$(\text{Arcsin}\,(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b) Por la fórmula de la derivada de la función inversa,

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))}$$

Ahora bien, $g(0) = x \leftrightarrow f(x) = 0 \leftrightarrow x^3 - x = 0$ y $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
La ecuación $x^3 - x = 0$ tiene soluciones $x = 0$ y $x = \pm 1$. De ellas, la única que satisface la restricción $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ es $x = -1$.
Por lo tanto, $g(0) = -1$ y con ello $g'(0) = \dfrac{1}{f'(-1)}$.
Como $f'(x) = 3x^2 - 1$ tenemos que $f'(-1) = 2$ y por tanto

$$g'(0) = \frac{1}{2}$$

$\blacksquare$

(3) Las siguientes ecuaciones definen implícitamente a y como función de x. Encuentre $\frac{dy}{dx}$:

a) $\sin(x+y) = y^2 \ \cos(x)$

b) $1 - \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{x^2+y^2}{2}$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= y^2 \ \cos(x) \ \Big/ \ \frac{d}{dx} \\
\cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) &= 2y\frac{dy}{dx}\cos(x) - y^2 \ \sin(x) \\
\cos(x+y) + \cos(x+y)\ \frac{dy}{dx} &= 2y\frac{dy}{dx}\cos(x) - y^2 \ \sin(x) \\
[\cos(x+y) - 2y \ \cos(x)]\ \frac{dy}{dx} &= -\left[y^2 \ \sin(x) + \cos(x+y)\right] \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y^2 \ \sin(x) + \cos(x+y)}{2y \ \cos(x) - \cos(x+y)}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
1 - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{x^2+y^2}{2} \ \Big/ \ \frac{d}{dx} \\
\left(-\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\right)\cdot\left(\frac{y - x\ y'}{y^2}\right) &= x + y\ y' \\
\frac{x\ y' + y}{x^2+y^2} &= x + y\ y' \\
x\ y' + y &= (x^2+y^2)(x + y\ y') \\
\left[x - (x^2 - y^2)\ y\right]\ y' &= (x^2+y^2)\ x + y \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^3 + xy^2 + y}{x - x^2y - y^3}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

(4) La curva γ dada por $\gamma : x^3 + xy^2 + x^3y^5 = 3$ define a y como función implícita de x. Determine si la recta tangente a γ en el punto $(1, 1)$, pasa por el punto $(-2, 3)$.

Solución:

Derivando implícitamente con respecto a x en la ecuación de γ, se tiene:

$$3x^2 + y^2 + 2xyy' + 3x^2y^5 + 5x^3y^4y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{3x^2 + y^2 + 3x^2y^5}{2xy + 5x^3y^4}$$

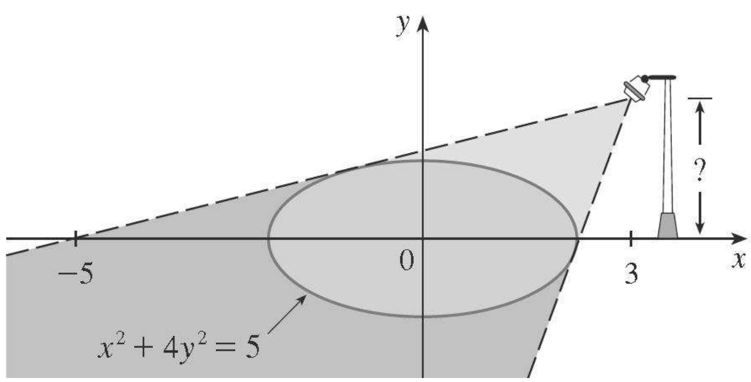
$$y'(1, 1) = -1$$

Luego la recta T, tangente a γ en $(1, 1)$ tiene pendiente -1, de donde la ecuación de T es:

$$T : y + x - 2 = 0$$

Si reemplazamos en T para $x = -2$, se obtiene $y = 4$, por lo tanto la recta tangente T no pasa por el punto $(-2, 3)$. ■

(5) La figura muestra una luz ubicada tres unidades a la derecha del eje Y y la sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, ¿a qué altura sobre el eje X está ubicada la luz?



Solución:

La recta que une la luz con el punto $(-5, 0)$ es tangente a la elipse $x^3 + 4y^2 = 5$, llamemos (x_0, y_0) al punto de tangencia de esta recta con la elipse. Luego, la ecuación de la recta es:

$$y - y_0 \;=\; \frac{dy}{dx}(x_0, y_0)\;(x - x_0)$$

Ahora, determinemos la derivada usando derivación implícita:

$$x^3 + 4y^2 = 5 \,/\, \frac{d}{dx} \;\Rightarrow\; 2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$$

Y como el punto $(-5, 0)$ pertenece a esta recta, se tiene que:

$$y - y_0 \;=\; -\frac{x_0}{4y_0}\,(x - x_0) \Rightarrow \underbrace{4y_0^2 = -5x_0 - x_0^2}_{(i)}$$

Pero el punto de tangencia pertenece a la elipse, y por tanto

$$\underbrace{x_0^2 + 4y_0^2 = 5}_{(ii)}$$

Juntando las ecuaciones (i) y (ii), se obtiene que $x_0 = -1$ e $y_0 = 1$ o $y_0 = -1$. Pero el punto de tangencia está sobre el eje X, por tanto, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$. Reemplazando estos valores, se obtiene que la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = \frac{1}{4}(x + 1)$$

Para finalizar, sabemos que la luz está sobre la recta $x = 3$ y sobre la recta tangente que acabamos de encontrar, luego

$$y = \frac{1}{4}(3 + 1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

y la luz se encuentra a dos unidades sobre el eje X. ■

(6) *a*) Sea n un número natural y C una constante real. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^n \sin\left(\dfrac{1}{x+2}\right) + \dfrac{2x^2}{3} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ \\ C & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$$

Determine condiciones sobre n y C para que $f'(-2)$ exista.

b) Estudie la continuidad y diferenciabilidad de la función indicada.

$$h(x) = x[x], \; x \in (-2, 2)$$

Solución:

a) Cuando $x \neq -2$, $f'(x)$ puede calcularse usando las reglas de derivación. Luego,

$$f'(x) = (x+2)^{n-1}\, n \sin\left(\frac{1}{x+2}\right) - (x+2)^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x+2}\right) + \frac{4}{3}x$$

Para que f sea diferenciable en $x = -2$ debe ser continua en dicho punto. Así,

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to -2} f(x) \\ &= \lim_{x\to -2}\left((x+2)^n \sin\left(\frac{1}{x+2}\right) + \frac{2}{3}x^2\right) \\ &= 0 + \frac{8}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

pues $n \in \mathbb{N}$ y el seno es una función acotada. Ahora, calculamos $f'(-2)$ por definición:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{\left((x+2)^n \sin\left(\frac{1}{x+2}\right) + \frac{2}{3}x^2\right) - \frac{8}{3}}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2}\left((x+2)^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x+2}\right)\right) + \lim_{x\to -2}\frac{\frac{2}{3}(x^2-4)}{x+2} \end{aligned}$$

Pero, $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{\frac{2}{3}(x^2-4)}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{2}{3}(x-2) = -\frac{8}{3}$.
Así, $f'(-2)$ existe *ssi* el primer límite existe, y ello se consigue estableciendo que $n > 1$. Finalmente, las condiciones pedidas son:

$$C = \frac{8}{3} \qquad \text{y} \qquad n > 1$$

b) Notemos que la función en cuestión es:

$$h(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x \in (-2,-1) \\ -x & \text{si} \quad x \in [-1,0) \\ 0 & \text{si} \quad x \in [0,1) \\ x & \text{si} \quad x \in [1,2) \end{cases}$$

Es claro que h es continua y derivable en $(-2,-1)$, en $(-1,0)$, en $(0,1)$ y en $(1,2)$. En estos intervalos las derivadas son $-2,\ -1,\ 0$ y 1 respectivamente. Por otra parte,

$$\lim_{x\to -1^-} h(x) = 2 \quad \neq \quad 1 = \lim_{x\to -1^+} h(x)$$

entonces h no es continua en $x = -1$, y por tanto no es derivable en ese punto. Análogamente:

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = 0 \quad \neq \quad 1 = \lim_{x\to 1^+} h(x)$$

Por tanto, h no es continua ni derivable en $x = 1$. Tenemos que:

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = 0 \quad = \quad \lim_{x \to 0^+} h(x)$$

y con ello h es continua en $x = 0$. Ahora

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Además

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{0}{x} = 0$$

y finalmente la función no es derivable en $x = 0$.

■

(7) *a*) Calcule, de la forma más simple posible, la derivada de:

$$g(x) = \tan\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)$$

b) Encuentre la ecuación de la normal a la curva $\phi : x \ \cos(y) = \sin(x+y)$ en $\mathcal{P} = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

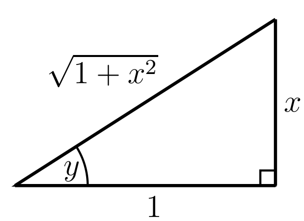
c) Demuestre el *Teorema de Darboux*: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $d \in (f'(a), f'(b))$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$.

Solución:

a) Veamos que:

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = y \iff \cos(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Gráficamente,



Por tanto, $\tan(y)$ puede calcularse fácilmente:

$$\tan\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \tan(y) = |x|$$

donde el módulo aparece porque valores positivos y negativos de x satisfacen la identidad inicial. Así,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

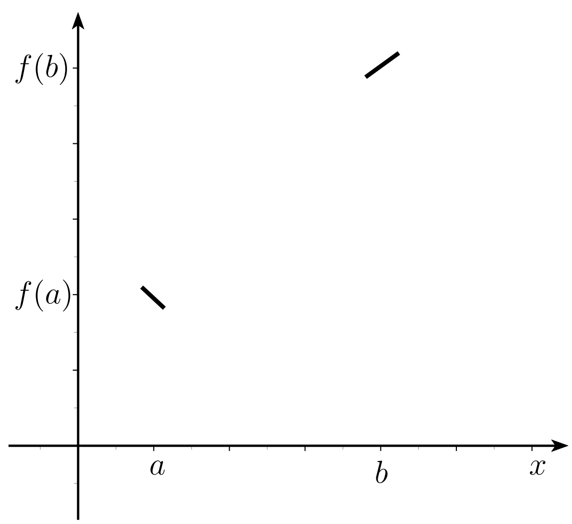
b) Usando diferenciación implícita, si ϕ define implícitamente a y como función de x en una vecindad del punto dado, se tiene que:

$$\cos(y) - x\sin(y)\cdot y' = \cos(x+y)(1+y')$$

y por tanto la pendiente de la recta *tangente* en el punto $\mathcal{P}$ es $m = \dfrac{2}{\pi - 2}$. Por geometría analítica elemental, sabemos entonces que la pendiente de la recta normal es $\tilde{m} = -\frac{1}{m}$. Por tanto, la recta pedida es:

$$\mathcal{N} : \left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2-\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

c) Supongamos inicialmente que $d = 0$, i.e. $f'(a) < 0 < f'(b)$.



Por Teorema de Weierstrass, la función continua alcanza un valor extremo en $[a,b]$ (por la compacidad de los intervalos cerrados y acotados). Dado que $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$ entonces el mínimo debe alcanzarse en el interior del intervalo. Así, existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c)$ es un mínimo local. Como la función es diferenciable y posee un mínimo en $c \in (a,b)$ entonces $f'(c) = 0$ de donde se obtiene el resultado.

Para demostrar el resultado en el caso general, recurrimos a la función auxiliar $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, tal que $\varphi(x) = f(x) - d\,x$.

Notemos que si $d \in (f'(a), f'(b))$ y $c \in (a,b)$ es tal que $f'(c) = d$, entonces

$$\varphi'(x) = f'(x) - d \implies \varphi'(c) = f'(c) - d = 0$$

Por lo tanto, encontrar un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = d$ es equivalente a encontrar una punto $\tilde{c}$ tal que $\varphi(\tilde{c}) = 0$; que es, justamente, lo que probamos inicialmente.

$\blacksquare$

3.3. Regla de L'Hôpital

(1) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \csc(x) - \dfrac{1}{x}$

b) $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}(\pi - 2\arctan(\sqrt{x}))$

c) $\lim_{x \to \infty} x\left(\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$

Solución:

a)

$$\lim_{x \to 0} \csc(x) - \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin(x) + x\cos(x)} = L$$

Así,

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)} = 0$$

b)

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}(\pi - 2\arctan(\sqrt{x})) = \lim_{x \to \infty} \frac{(\pi - 2\arctan(\sqrt{x}))}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = L$$

Ahora bien,

$$\frac{(\pi - 2\arctan(\sqrt{x}))}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \underbrace{=}_{L'H} \frac{\frac{1}{(1+x)x^{1/2}}}{\frac{1}{2x^{3/2}}} = \frac{2x}{x+1} = 2$$

Por tanto,

$$L = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

c) El límite en cuestión puede escribirse de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}}{1\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} 2x^2\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

■

(2) Aplicando directamente la Regla de L'Hôpital, determine los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{e^{-x}}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

f) $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin(x))^x$

g) $\lim\limits_{x\to 1+} \left(\dfrac{1}{\ln(x)} - \dfrac{1}{x-1}\right)$

Solución:

a) El límite es de la forma $\frac{0}{0}$. Por tanto, aplicamos directamente la regla:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

b) El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Por tanto, aplicamos directamente la regla:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

c) Tenemos:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

d) Notemos que la sustitución directa nos entrega la forma $0\cdot\infty$. Debemos adaptar nuestro límite para aplicar la regla:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x} \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}e^x} = 0$$

e) A priori, el límite es de la forma 1^∞. Así, supongamos que dicho límite existe y vale L. Con ello,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
\ln(L) &= \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] \quad \text{por continuidad,} \\
&= \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \\
&= \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x} \quad \text{L'H...} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(-1/x^2)\frac{1}{1+1/x}}{-1/x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x} \\
\ln(L) = 1 \ &\Rightarrow \ L = e
\end{aligned}$$

f) La sustitución directa nos entrega la forma indeterminada 0^0. Por tanto, inicialmente supongamos que el límite existe y vale L. Así,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0+}(\sin(x))^x \\
\ln(L) &= \ln\left[\lim_{x\to 0+}(\sin(x))^x\right] \quad \text{por continuidad,} \\
&= \lim_{x\to 0+}\ln\left((\sin(x))^x\right) \\
&= \lim_{x\to 0+} x\ln(\sin(x)) \\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(\sin(x))}{\frac{1}{x}} \quad \text{L'H...} \\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{\cot(x)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+}\frac{-x^2}{\tan(x)} \quad \text{L'H...} \\
&= \lim_{x\to 0+}\frac{-2x}{\sec^2(x)} = 0 \\
\ln(L) = 0 \ &\Rightarrow \ L = 1
\end{aligned}$$

g) Esta forma indeterminada es del tipo $(\infty-\infty)$. La idea es intentar trabajar sobre el límite para así utilizar la regla directamente:

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}\right)$$

y ahora es de la forma $\frac{0}{0}$. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1+}\left(\frac{1-(1/x)}{(x-1)(1/x)\ln(x)}\right)\\
&= \lim_{x\to 1+}\left(\frac{x-1}{x-1+x\ln(x)}\right) \quad \text{L'H...}\\
&= \lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{1+x(1/x)+\ln(x)}\right)\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

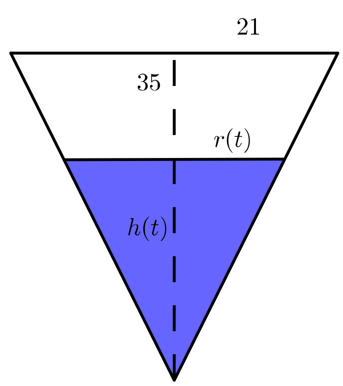
■

3.4. Aplicaciones: tasas relacionadas, Teorema del valor medio y aproximaciones

(1) En un depósito cónico recto entra, a razón de 8 $[m^3/s]$ cierto líquido incompresible. El radio y la altura del depósito son 21 $[m]$ y 35 $[m]$ respectivamente. Calcule la tasa de crecimiento de la altura cuando ésta toma un valor de $h = 6$ $[m]$.

Solución:

Realizando un diagrama de la situación, tenemos que:



Notemos que, por el Teorema de Thales, encontramos la siguiente relación:

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad r(t) = \frac{3}{5}\ h(t)$$

Ahora bien, el volumen del líquido contenido en el depósito corresponde a

$$V(t) = \frac{1}{3}\ \pi\ r(t)^2\ h(t)$$

Así, con la relación antes calculada, tenemos que:

$$V(t) = \frac{1}{3}\ \pi\ \frac{9}{25}\ h(t)^3$$

Con ello, la variación temporal de la expresión queda como sigue:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9\pi}{25}\ h(t)^2\ \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{25\frac{dV}{dt}}{9\pi\ h(t)^2}$$

Reemplazado,

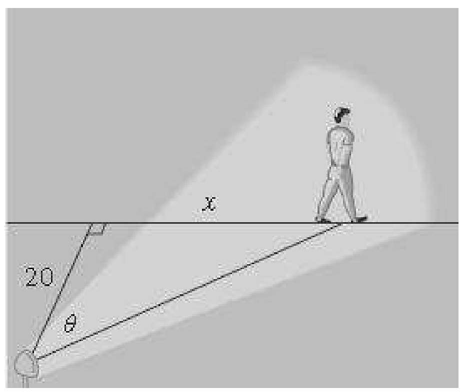
$$\frac{dh}{dt} \ = \ \frac{25 \cdot 8}{9\pi \cdot 6^2} \ = \ \frac{50}{81\pi} \approx \ 0.196 \left[\ \frac{m}{s}\right]$$

■

(2) Un hombre camina por un sendero recto a una velocidad de 4 $[\frac{m}{s}]$. Un reflector está situado en el suelo a 20 $[m]$ del camino y se mantiene centrado en el hombre. ¿A qué tasa gira el reflector cuando el hombre está a 15 $[m]$ desde el punto en la senda más cercano al reflector?

Solución:

La situación se diagrama de la siguiente forma:



Sea x la distancia medida desde el hombre hasta el punto más cercano al reflector. Llamemos θ al ángulo que forman la perpendicular al camino y la posición del hombre, tal como lo indica la figura. Por las relaciones trigonométricas, tenemos que:

$$\frac{x}{20} \ = \ \tan(\theta) \Longrightarrow x \ = \ 20\tan(\theta)$$

Así, derivando dicha expresión con respecto al tiempo:

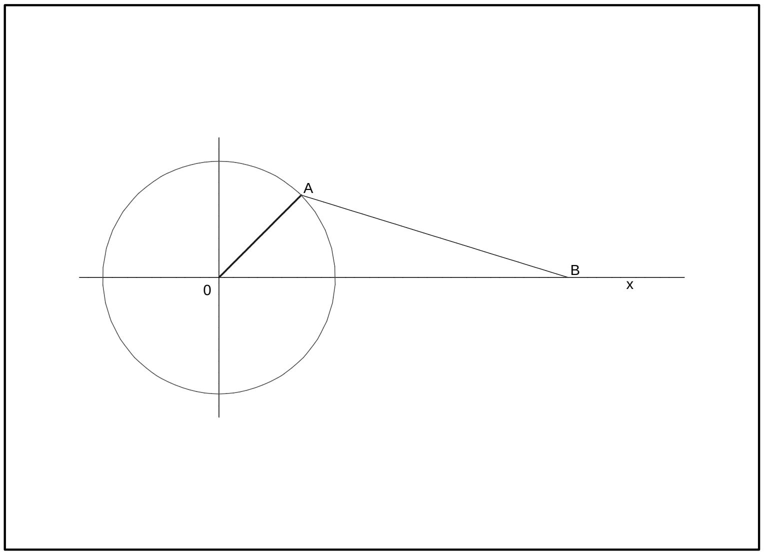
$$\frac{dx}{dt} \ = \ 20\sec^2(\theta)\ \frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} \ = \ \frac{1}{20}\cos^2(\theta)\ \frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 15$, la distancia del hombre al foco es de 25 y con ello $\cos(\theta) = \frac{4}{5}$. Reemplazando dicho valor y $\frac{dx}{dt} = 4$, finalmente:

$$\frac{d\theta}{dt} \ = \ \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 \ = \ \frac{16}{125} \ = \ 0.128 \ \left[\frac{rad}{s}\right]$$

■

(3) Sobre un círculo de radio 1 se mueve el extremo A de una barra de largo 3 cuyo otro extremo B se desliza sobre un eje fijo.



a) Determine una ecuación que relacione la posición x del punto B con el ángulo $\angle BOA = \theta$.

b) Suponga que A gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj con el ángulo θ variando a una tasa de 0.6 $[rad/s]$. Calcule la velocidad de desplazamiento de B cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Solución:

a) Sea x la posición del punto B. Por el *Teorema del Coseno* tenemos que:

$$9 = 1 + x^2 - 2x\cos(\theta)$$

b) Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo tenemos:

$$2x\frac{dx}{dt} - 2\frac{dx}{dt}\cos(\theta) + 2x\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = \frac{x\sin(\theta)}{\cos(\theta) - x}\frac{d\theta}{dt}$$

Cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$ obtenemos x de la ecuación original, después de descartar la raíz negativa. Esto da que $x = \sqrt{2} + \sqrt{17/2}$, que sumado al hecho que

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.6$$

da el resultado reemplazando:

$$\frac{dx}{dt} \approx -0.5071\ [m/s]$$

■

(4) *a*) Dada la función $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$, con m y n naturales, demuestre que el punto c del teorema de Rolle divide al intervalo $[a,b]$ en la razón $m:n$.

b) Demuestre que si f es una función dos veces diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y tiene tres raíces reales distintas, entonces existe un punto c en el cual $f''(c) = 0$.

c) Suponga que $f(0) = -3$ y que $f'(x) \leq 5$ para todo valor de x . ¿Cuál es el mayor valor que $f(2)$ puede tomar?

Solución:

a) Es inmediato que $f(a) = f(b) = 0$, y por el *Teorema de Rolle* existe $c \in [a,b]$ tal que $f'(c) = 0$. Así,

$$\begin{aligned} 0 &= f'(c) \\ &= m(c-a)^{m-1}(c-b)^n + n(c-b)^{n-1}(c-a)^m \qquad \text{Sup. que c} \neq a, b \\ &= m(c-b) + n(c-a) \\ &= -m(c-b) + n(c-a) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(b-c)m = (c-a) \qquad \rightarrow \qquad \frac{c-a}{b-c} = \frac{m}{n}$$

b) Sean a, b, c distintos entre sí tales que $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Entonces, como f es dos veces diferenciable en todo $\mathbb{R}$, por el Teorema de Rolle,

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \alpha \in (a,b) \text{ tal que } f'(\alpha) = 0$$

Similarmente,

$$f(b) = f(c) \Rightarrow \exists \beta \in (b,c) \text{ tal que } f'(\beta) = 0$$

Aplicando el Teorema de Rolle una vez más a f' obtenemos que

$$\exists \gamma \in (\alpha, \beta) \text{ tal que } f''(\gamma) = 0$$

c) Como f es diferenciable, pues su derivada existe, entonces es posible aplicar el T.V.M en el intervalo $[0,2]$ y con ello obtener que:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2-0} = f'(c), \;\; c \in (0,2)$$

pero, por hipótesis, $f'(c) \leq 5$. Así,

$$\frac{f(2) - f(0)}{2-0} \leq 5 \quad \Rightarrow \quad f(2) - f(0) \leq 10 \quad \Rightarrow \quad f(2) \leq 7$$

■

(5) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $0 < u < v < \frac{\pi}{2}$, entonces:

$$\frac{u}{v} < \frac{\sin(u)}{\sin(v)}$$

b) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ diferenciable, tal que $f'(x) \neq 1$. Existe un único punto $\phi \in [0,1]$ tal que $f(\phi) = \phi$.

c) Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisface que $|f(x) - f(y)| \leq c\,|x-y|^{\alpha}$, $\forall x, y \in [a,b]$ con $\alpha > 1$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces f es constante.

Solución:

a) Analicemos la función

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t},\ t \in (0, \pi/2)$$

Tomemos dos puntos arbitrarios en el intervalo, $x,\ y$, tales que $x > y$. Así, por el T.V.M:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z) = \frac{z\cos(z) - \sin(z)}{z^2} \qquad , z \in (x, y)$$

Analicemos ahora la función auxiliar $g(z) = z\cos(z) - \sin(z)$. Notemos que:

$$g'(z) = -z\sin(z) < 0, \forall z \in (0, \pi/2)$$

Por tanto,

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \longrightarrow f(x) < f(y)$$

y la función es decreciente. Si tomamos los u, v pedidos tendremos que:

$$f(v) < f(u) \to \frac{\sin(v)}{v} < \frac{\sin(u)}{u} \to \frac{u}{v} < \frac{\sin(u)}{\sin(v)}$$

que es lo que se pedía demostrar.

b) El Teorema del Valor Intermedio garantiza la existencia de un punto[4] ϕ donde $f(\phi) = \phi$. Si existiese un segundo punto θ con $f(\theta) = \theta$ tendríamos, por el T.V.M:

$$f'(\psi) = \frac{f(\theta) - f(\phi)}{\theta - \phi} = \frac{\theta - \phi}{\theta - \phi} = 1$$

para algún $\psi \in (\theta, \phi)$, lo cual es una contradicción.

[4] Propiedad denominada como *Teorema del punto fijo.*

c) La definición de derivada nos dice que:

$$f'(y) = \lim_{x \to y} \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

Así, utilizando la desigualdad del enunciado,

$$\begin{aligned}
|f'(y)| = & \left| \lim_{x\to y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| = \lim_{x\to y} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \\
= & \lim_{x\to y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq \lim_{x\to y} \frac{c\,|x-y|^{\alpha}}{|x-y|} \\
= & \lim_{x\to y} c\,|x-y|^{\alpha-1} = 0
\end{aligned}$$

El límite anterior es cero pues $\alpha - 1 > 0$. Por lo tanto, $|f'(y)| \leq 0$ lo que implica que $f'(y) = 0$ para todo $y \in [a, b]$ si y solo si f es constante en $[a, b]$.

■

(6) Dada la función $h(x) = \dfrac{1}{a}(4 - 3x^2)(a^2 - ax - 1)$ donde a es una constante positiva, demuestre que $h(x)$ tiene un máximo y un mínimo, y que la diferencia entre ellos es $\dfrac{4}{9}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)^3$. ¿Para qué valor de a es mínima esta diferencia?

Solución:

Para analizar la existencia de máximos y mínimos, debemos recurrir tanto a la primera como a la segunda derivada de h. Así:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{1}{a}(-4a - 6xa^2 + 9ax^2 + 6x) \\
h''(x) &= \frac{1}{a}(-6a^2 + 18ax + 6)
\end{aligned}$$

Para hallar los valores extremos (si los hay) resolvemos:

$$\begin{aligned}
h'(x) = 0 &\iff \frac{1}{a}(-4a - 6xa^2 + 9ax^2 + 6x) = 0 \\
&\iff \left(9ax^2 - (6a^2 - 6)x - 4a\right) = 0 \\
&\iff x = \frac{6a^2 - 6 \pm \sqrt{(6a^2-6)^2 + 144a^2}}{9a} \\
&\iff x_1 = \frac{2a}{3} \quad \vee \quad x_2 = -\frac{2}{3a}
\end{aligned}$$

Para clasificar dichos punto, recurrimos al criterio de la segunda derivada:

$$\begin{aligned}
h''(x_1) = & \frac{6(a^2+1)}{a} > 0 \longrightarrow x_1 \text{ es un mínimo} \\
h''(x_2) = & -\frac{6(a^2+1)}{a} < 0 \longrightarrow x_2 \text{ es un máximo}
\end{aligned}$$

Que es lo que se pedía probar. Ahora bien, la diferencia entre ambos valores será:

$$D = f(x_2) - f(x_1) \longrightarrow D = \frac{1}{a}\left[\left(4 - \frac{4}{3a^2}\right)\left(a^2 - \frac{1}{3}\right) - \left(4 - \frac{4a^2}{3}\right)\left(\frac{a^2}{3} - 1\right)\right]$$

Reduciendo términos semejantes,

$$D = \frac{4}{9}\left(a + \frac{1}{a}\right)^3$$

Para minimizar la distancia, derivamos con respecto a a:

$$\frac{dD}{da} = \frac{4}{3}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)$$

Así,

$$\frac{dD}{da} = 0 \iff a = \pm 1 \quad \vee \quad a = \pm i$$

Como a debe ser positivo, el valor que minimiza la distancia es $a = 1$. ■

(7) Calcular aproximadamente $\sqrt{304}$.

Solución:

Sea $f(x) = \sqrt{x}$. Para aplicar el teorema del valor medio busquemos una raíz exacta menor y más cercana a 304. Sean $a = 289$ y $b = 304$, entonces tenemos:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \;\rightarrow\; \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{\sqrt{304} - 17}{15}$$

para algún $x_0 \in (289, 304)$. Como la función $f(x)$ es estrictamente creciente (probar), se tiene que:

$$17 < \sqrt{x_0} < \sqrt{304}$$

acotando tenemos,

$$17 < \sqrt{x_0} < \sqrt{304} < \sqrt{324} = 18$$

Luego,

$$\frac{15}{2 \cdot 18} < \sqrt{304} - 17 < \frac{15}{2 \cdot 17}$$

Así,

$$17,416 < \sqrt{304} - 17 < 17,441$$

Lo que es una aproximación bastante razonable, si no se tiene calculadora. ■

(8) *a*) Usando la función auxiliar

$$H(x) = [g(b) - g(a)] \cdot [f(x) - f(a)] - [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)]$$

pruebe que *si f y g son continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) y f' y g' no se anulan simultáneamente, entonces existe c tal que*[5]

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

b) Utilizando el resultado anterior, pruebe que

$$e^x \geq 1 + (1 + x)\ln(1 + x) \text{ para } x > 0$$

Solución:

a) Sea $H(x)$ una función definida como sigue:

$$H(x) = [g(b) - g(a)] \cdot [f(x) - f(a)] - [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)]$$

Notemos que $H(x)$ es una función continua en $[a, b]$, y derivable en (a, b) al ser una combinación de funciones de igual clase. Además, se cumple que:

$$H(a) = 0 = H(b)$$

Por el Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$, tal que $H'(c) = 0$. Así:

$$H'(x) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(x) - [f(b) - f(a)] \cdot g'(x)$$

Reemplazando $x = c$,

$$0 = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) - [f(b) - f(a)] \cdot g'(c)$$

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c)$$

Si $g(b) - g(a)$ y $g'(c)$ son distintos de 0, la expresión anterior puede ser escrita como:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

[5] A este resultado se le conoce como el Teorema del valor medio generalizado de Cauchy.

b) Sean $f(x) = e^x$ y $g(x) = 1 + (1+x)\ln(1+x)$. Entonces, si aplicamos el T.V.M. Generalizado al intervalo $[0, x]$, con $x > 0$ tenemos:

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f(x)-1}{g(x)-1} = \frac{e^c}{\ln(1+c)+1}}_{(i)},\quad c > 0$$

Ahora, aplicamos nuevamente el T.V.M Generalizado a las funciones $h(x) = e^x, k(x) = \ln(x+1)+1$ en el mismo intervalo anterior:

$$\frac{h(x)-h(0)}{k(x)-k(0)} = \frac{h(x)-1}{k(x)-1} = \frac{e^{\alpha}}{\frac{1}{1+\alpha}} = e^{\alpha}(1+\alpha) \geq 1,\ \alpha > 0$$

$$\therefore\ h(x)-1 \geq k(x)-1 \Longrightarrow e^x \geq \ln(x+1)+1,\ \forall x > 0$$

Por tanto, reemplazando el resultado anterior en (i), tenemos:

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f(x)-1}{g(x)-1} \geq 1 \Longrightarrow e^x \geq 1 + (1+x)\ln(1+x)$$

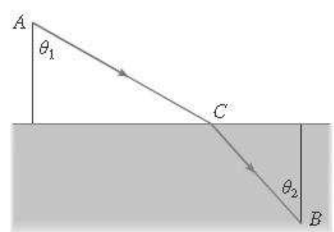
■

3.5. Máximos y mínimos, gráfico de funciones y otros

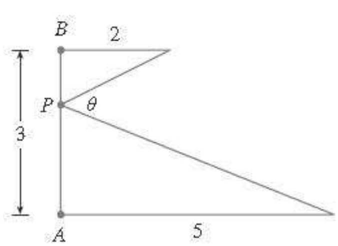
(1) *a*) Sea v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua. De acuerdo con el *Principio de Fermat*, un rayo de luz viajará desde un punto en el aire a otro punto en el agua por el camino que minimize el tiempo de viaje. Demuestre que:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

donde θ_1 (ángulo de incidencia) y θ_2 (ángulo de refracción) son conocidos. Ésta ecuación es conocida como la *Ley de Snell*.

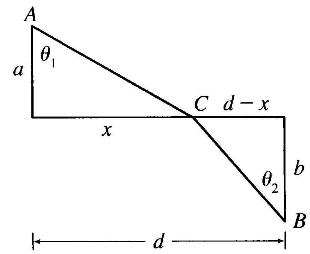


b) ¿Dónde debería estar ubicado el punto P sobre el segmento de línea AB para maximizar el ángulo θ?



Solución:

a) El tiempo total es:



$$T(x) = T_{A\to C}(x) + T_{C\to B}(x)$$

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}, \;\; 0 < x < d$$

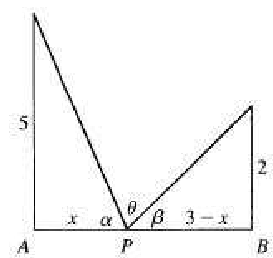
Así,

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = \frac{\sin\theta_1}{v_1} - \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

El mínimo ocurre cuando $T'(x) = 0$ (notar que $T''(x) > 0$). Finalmente,

$$T'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

b) De la figura, $\tan\alpha = \frac{5}{x}$ y $\tan\beta = \frac{2}{3-x}$. Dado que $\alpha+\beta+\theta = \pi$, se cumple que:



$$\theta = \pi - \arctan\left(\frac{5}{x}\right) - \arctan\left(\frac{2}{3-x}\right)$$

Así,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{x^2}{x^2+25}\cdot\frac{5}{x^2} - \frac{(3-x)^2}{(3-x)^2+2}\cdot\frac{2}{(3-x)^2}$$

Notemos que

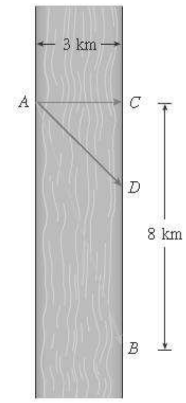
$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{5}{x^2+25} = \frac{2}{(3-x)^2+2} \;\Rightarrow\; x^2 - 10x + 5 = 0 \;\Rightarrow\; x = 5 \pm 2\sqrt{5}$$

Descartamos la raíz positiva, puesto que $x \leq 3$. Ahora, $\theta' > 0$ para $x < 3 - 2\sqrt{5}$ y $\theta' < 0$ para $x > 3 - 2\sqrt{5}$. Con ello, el ángulo en cuestión se maximiza cuando $\overline{AP} = x = 5 - 2\sqrt{5} \approx 0.53$.

■

(2) Considere la siguiente situación:

Un hombre lanza su barco desde un punto en la orilla de un río recto, de 3 $[km]$ de ancho, y quiere llegar a otro punto a 8 $[km]$ río abajo en la orilla opuesta. Dicha persona puede remar en su barca directamente al punto B, remar hasta C y luego correr hasta B o realizar una mezcla de ambas posibilidades (remar hasta D y luego correr hasta B). Si el hombre rema a 6 $[km/h]$ y corre a 8 $[km/h]$, ¿dónde debe desembarcar para realizar el trayecto lo más rápidamente posible? Suponga que la velocidad del agua es insignificante.



Solución:

Sea x la distancia entre C y D. Por tanto, la distancia a recorrer a pie es de $P = 8 - x$ y la distancia a recorrer en bote, por *Teorema de Pitágoras* es de $B = \sqrt{x^2 + 9}$.
El tiempo que le toma realizar el viaje puede escribirse como sigue:

$$t_{total}(x) = t(x) = t_B(x) + t_P(x)$$

Así, utilizando la fórmula clásica $t = \frac{d}{v}$ y reemplazando tanto las distancias como las velocidades en cada uno de los tramos, tenemos que:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8} \qquad , x \in [0, 8]$$

$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$$

No existe $x \in \mathbb{R}$ tal que la derivada no exista. Así, nuestros puntos críticos son los extremos del intervalo y donde se anule la derivada. Calculemos éste último:

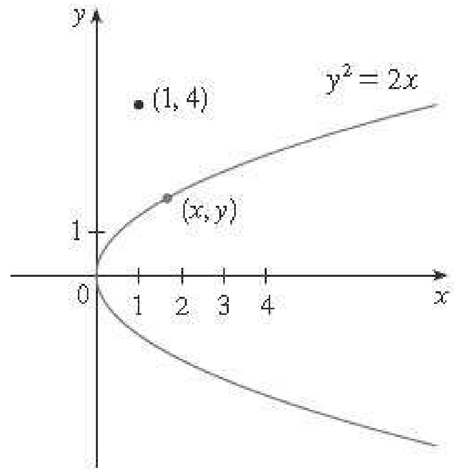
$$\begin{aligned} t'(x) = 0 &\longleftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8} = 0 \longleftrightarrow 4x = 3\sqrt{x^2+9} \\ &\longleftrightarrow \quad 16x^2 = 9(x^2+9) \longleftrightarrow \quad 7x^2 = 81 \\ &\longleftrightarrow \quad x = \frac{9}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

Para encontrar el mínimo en la función tiempo, debemos reemplazar los puntos críticos en dicha función:

$$t(0) = 1.5 \qquad t\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad t(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

Por tanto, el hombre debería remar $\frac{9}{\sqrt{7}} \approx 3.4$ $[km]$ río abajo y lugo correr hasta su objetivo. ■

(3) Encuentre el punto en la parábola $y^2 = 2x$ que es más cercano al punto $(1, 4)$.



Solución:

La distancia entre el punto $(1,4)$ y (x,y) es:

$$d(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

Pero el punto (x,y) pertenece a la parábola, luego:

$$d(y) = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

Dado que las distancias son positivas, minimizaremos la función $d(y)^2$. Así,

$$d(y)^2 = f(y) = (x-1)^2 + (y-4)^2 \quad \longrightarrow \quad f'(y) = y^3 - 8$$

Por tanto, $f'(2) = 0$. Notemos que f' es negativa si $y < 2$ y positiva si $y > 2$. Entonces, la función tiene un único punto crítico en todo $\mathbb{R}$, lo que es consistente con la geometría del problema. Así, el punto tiene coordenadas $x = \frac{y^2}{2} = 2$, $y = 2$.

Finalmente, el punto más cercano a $(1,4)$ en la parábola descrita es $(2,2)$. $\blacksquare$

(4) Dada la función $f(x) = \dfrac{2(x-2)}{x^2}$. Determine:

a) Dominio y raíces.
b) Máximos y mínimos.
c) Intervalos de crecimiento.
d) Puntos de inflexión.
e) Intervalos de concavidad.
f) Asíntotas.
g) Esbozo de su gráfico.

Solución:

Tenemos: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R} - \{0\}$. $f(x) = 0 \iff x = 2$. Ahora,

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x(x-2)}{x^4} = \frac{8x - 2x^2}{x^4}$$

$$
\begin{aligned}
\text{Así,} \qquad f' > 0 &\longleftrightarrow -2x^2 + 8x > 0 \\
&\longleftrightarrow x^2 - 4x < 0 \\
&\longleftrightarrow x \in \,]0, 4[\\
\\
f' < 0 &\longleftrightarrow x \in \mathbb{R} - [0, 4] \\
\\
f' = 0 &\longleftrightarrow x = 0, \; x = 4
\end{aligned}
$$

Entonces,

- f es creciente en el intervalo $]0, 4[$.
- f es decreciente en los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]4, \infty[$.
- f tiene puntos críticos en $x = 0$ y $x = 4$.

Por otra parte,

$$
f''(x) = \frac{(8 - 4x)x^4 - 4x^3(8x - 2x^2)}{x^8} = \frac{4x^5 - 24x^4}{x^8} = \frac{4x - 24}{x^4}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Así,} \qquad f'' > 0 &\longleftrightarrow 4x - 24 > 0 \\
&\longleftrightarrow x - 6 > 0 \\
&\longleftrightarrow x > 6 \\
\\
f'' < 0 &\longleftrightarrow x < 6 \\
\\
f'' = 0 &\longleftrightarrow x = 6
\end{aligned}
$$

Entonces,

- f es cóncava hacia arriba en el intervalo $]6, \infty[$.
- f es cóncava hacia abajo en el intervalo $]-\infty, 6[$.
- f tiene un punto de inflexión en $x = 6$.

Ahora, las asíntotas:

VERTICALES

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{2(x-2)}{x^2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{2(x-2)}{x^2} = -\infty$$

HORIZONTALES U OBLICUAS

$$m_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x-2)}{x^3} = 0$$
$$n_1 = \lim_{x\to\infty} f(x) - m_1 x = 0$$

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x-2)}{x^3} = 0$$
$$n_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - m_2 x = 0$$

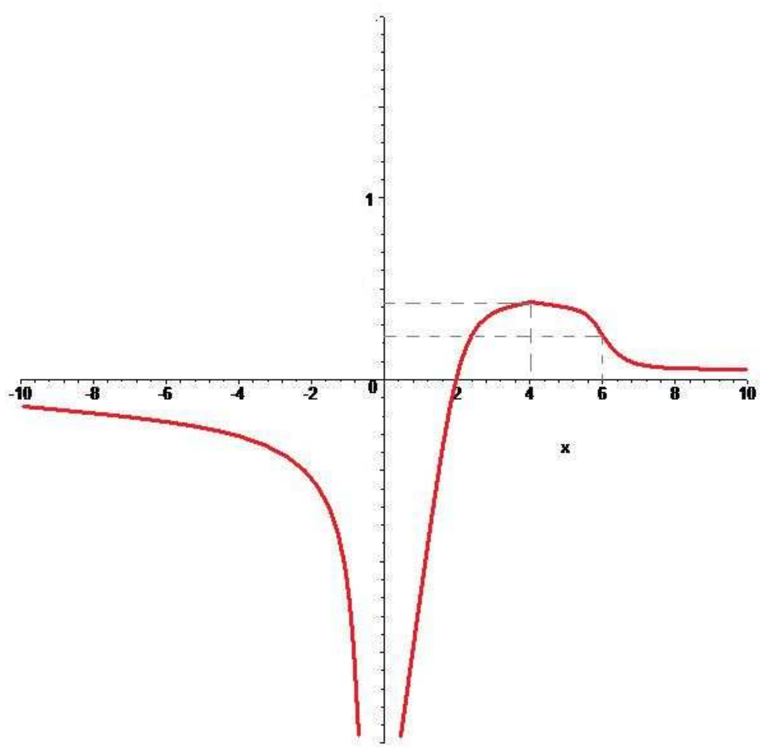
Así,

- $y = 0$ es asíntota a la función hacia $\pm\infty$.
- $x = 0$ es asíntota a la función hacia 0.

Agrupando la información obtenida, podemos concluir que:

- Como $f'(4) = 0$ y $f''(4) > 0$, entonces f tiene un máximo global en $x = 4$.
- f no tiene mínimos locales ni globales.

Finalmente,



■

(5) Mismos elementos que la pregunta anterior, pero para $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$ ***Solución:***

Tenemos: $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$. $f(x) = 0 \;\longleftrightarrow\; (x-1)(x+2) = 0 \;\longleftrightarrow\; x = 1,\; x = -2$. Ahora,

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{3(x^3 - 3x + 2)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x+1}{(x-1)^{\frac{1}{3}}(x+2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$\begin{aligned}
\text{Así,}\qquad f' > 0 \;&\longleftrightarrow\; x \in \mathbb{R} - [-1, 1] \\
f' < 0 \;&\longleftrightarrow\; x \in\,]-1, 1[\\
f' = 0 \;&\longleftrightarrow\; x = -1 \\
f' \nexists \;&\longleftrightarrow\; x = 1,\; x = -2
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{array}{c|ccccccc}
f & \nearrow & \vert & \nearrow & \vert & \searrow & \vert & \nearrow \\
\hline
 & & -2 & & -1 & & 1 & \\
f' & + & \nexists & + & 0 & - & \nexists & +
\end{array}$$

Por otra parte,

$$f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+2)^{\frac{5}{3}}}$$

$$\begin{aligned}
\text{Así,}\qquad f'' > 0 \;&\longleftrightarrow\; x < -2 \\
f'' < 0 \;&\longleftrightarrow\; x > -2
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{array}{c|ccccccc}
f & \nearrow & \vert & \nearrow & \vert & \searrow & \vert & \nearrow \\
\hline
 & & -2 & & -1 & & 1 & \\
f'' & + & \nexists & - & & - & \nexists & -
\end{array}$$

Ahora, las asíntotas: <u>HORIZONTALES U OBLICUAS</u>

$$m_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n_1 = \lim_{x\to\infty} f(x) - m_1 x = 0$$

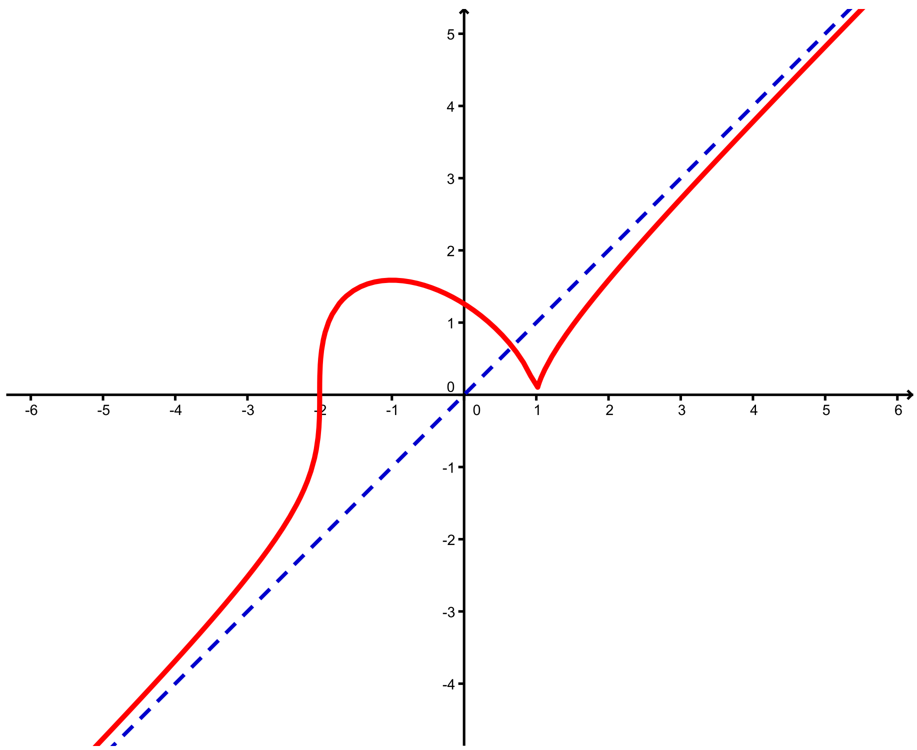
$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$n_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - m_2 x = 0$$

Así, $y = x$ es asíntota a la función hacia $\pm\infty$. Agrupando la información obtenida, podemos concluir que:

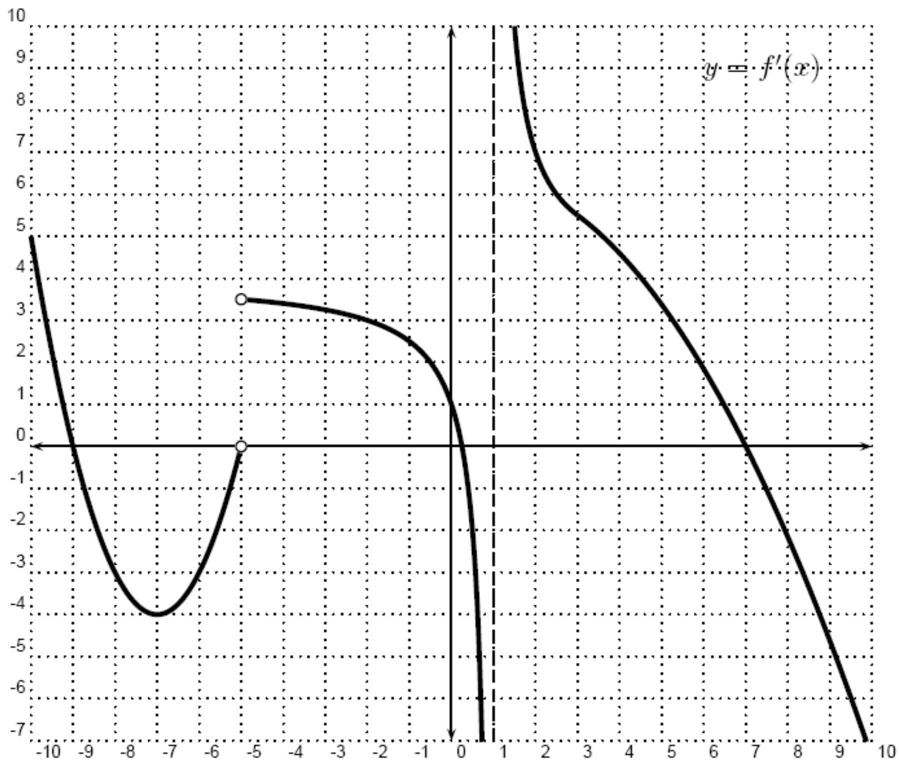
- f tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$.
- f no tiene mínimos ni máximos globales.
- f tiene un punto de inflexión en $x = -2$.

Finalmente,



■

(6) La función $f(x)$ está definida a tramos en $[-10, 10]$ y es continua en ese intervalo. A continuación se presenta el gráfico de la función derivada de $f(x)$, $y = f'(x)$. Utilice dicho gráfico para indicar la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones:



a) $f''(-5)$ no existe.

b) En -7 hay un mínimo local de $f(x)$.

c) En 7 hay un máximo local de $f(x)$.

d) $f(x)$ tiene dos puntos de inflexión en el intervalo $[-10, 10]$.

e) $f(x)$ es decreciente en el intervalo $]1, 10[$.

f) En -5 hay tanto un mínimo como un punto de inflexión de $f(x)$.

Solución:

a) La afirmación es VERDADERA, pues como $f'(x)$ es discontinua en $x = -5$, entonces no existe su derivada en ese punto.

b) La afirmación es FALSA, pues en el intervalo $]-9, -5[$ la función derivada es negativa, por tanto, $f(x)$ es decreciente en ese intervalo y como no hay cambio de crecimiento, no hay ni un máximo ni un mínimo en ese intervalo.

c) La afirmación es VERDADERA, pues $f'(x) > 0$ si $1 < x < 7$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > 7$. Entonces $f(x)$ pasa de ser creciente a ser decreciente en $x = 7$.

d) La afirmación es VERDADERA, pues $f(x)$ tiene un punto de inflexión cuando cambia su concavidad, es decir, cuando $f''(x)$ cambia de signo. Pero esto significa que $f'(x)$ tiene un cambio en su crecimiento. Al observar el gráfico, es claro que los únicos cambios en el crecimiento de la derivada se producen en -7 y en -5. Luego, los únicos puntos de inflexión de $f(x)$ ocurren en $x = -7$ y $x = -5$.

e) La afirmación es FALSA, pues $f'(x) > 0$ cuando $1 < x < 7$, entonces $f(x)$ es creciente en $]1, 7[$.

f) La afirmación es VERDADERA. En -5 hay un mínimo de $f(x)$ pues la derivada pasa de ser negativa a positiva y, por tanto, $f(x)$ pasa de ser decreciente a ser creciente. Además, en -5 hay un punto de inflexión de $f(x)$ porque la derivada pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, $f''(x)$ pasa de ser positiva a ser negativa en -5 y esto significa que $f(x)$ pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo.

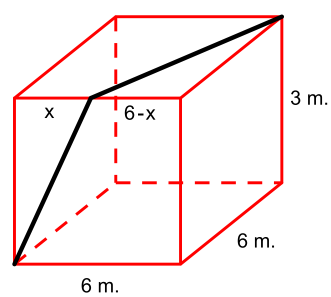
■

(7) *a*) Una habitación tiene forma de paralelepípedo recto de base cuadrada de 6 metros por 6 metros por 3 metros de altura. En un vértice superior de la habitación se encuentra una pequeña araña que desea llegar al vértice opuesto para atrapar a su presa. Si la araña solo puede desplazarse por las caras de la habitación, ¿Cuál es la trayectoria más corta?

b) Un globo esférico se infla a una tasa de 20 cm^3/seg. Determine la tasa de cambio de la superficie del globo cuando el volumen es de $36\pi\ cm^3$.

Solución:

a) Sea s el camino recorrido por la araña y x el segmento indicado por la figura, luego:



$$s(x) = \sqrt{6^2 + (6-x)^2} + \sqrt{3^2 + x^2} \quad x \in [0, 6]$$

Tenemos que,

$$s'(x) = \frac{x-6}{\sqrt{36 + (6-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}}$$

Para determinar los puntos críticos, $s'(x) = 0$, resolvemos:

$$\frac{x^2 - 12x + 36}{36 + (6-x)^2} = \frac{x^2}{9 + x^2}$$

y con ello $x = 2$.

Si calculamos la segunda derivada,

$$s''(x) = \frac{\sqrt{36 + (6-x)^2} - \frac{(6-x)^2}{\sqrt{36+(6-x)^2}}}{36 + (6-x)^2} + \frac{\sqrt{9 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9 + x^2}$$

y evaluamos en $x = 2$ tendremos que:

$$s''(2) = \frac{9}{676}\sqrt{52} + \frac{9}{169}\sqrt{13} > 0 \implies x = 2 \text{ es un mínimo local}$$

Para determinar el mínimo absoluto comparamos $s(0),\ s(2),\ s(6)$ a través del estudio de:

$$\begin{array}{lcl} s(0) & \to & s(0)^2 = 81 + 36\sqrt{2} \\ s(0) & \to & s(2)^2 = 117 \\ s(6) & \to & s(6)^2 = 81 + 36\sqrt{5} \end{array}$$

y por tanto el camino más corto se consigue con $x = 2$.

b) Sea $V(t)$ el volumen del globo en el instante t y sea $S(t)$ la superficie del globo en el mismo instante. Entonces, sabemos que $\frac{dV}{dt} = 20$ y debemos calcular $\left.\frac{dS}{dt}\right|_{V=36\pi}$. Para ello, notemos que:

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{4}{3}\pi r(t)^3 \\ S(t) &= 4\pi r(t)^2 \end{aligned}$$

donde $r(t)$ es el radio del globo en el instante t. Luego, $r(t) = \sqrt{\dfrac{S(t)}{4\pi}}$ y con ello

$$V(t) = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} S(t)^{3/2}$$

Derivando esta relación con respecto al tiempo, obtenemos que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\ S(t)^{1/2}\ \frac{dS}{dt}$$

Ahora, en el instante en que $V = 36\pi$, tendremos que $S = 36\pi$ también. Luego,

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{V=36\pi} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\ 6\sqrt{\pi}\ \left.\frac{dS}{dt}\right|_{V=36\pi}$$

De donde,

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{V=36\pi} = \frac{40}{3}\ cm^2/seg$$

■

(8) **<u>Anexo:</u> Existencia de una función continua pero no diferenciable en punto alguno.**

Antes que todo, necesitamos enunciar el siguiente lema:

Lema: Sea f una función real acotada en $\mathbb{R}$. Si

$$\frac{f(c)-f(x)}{x-c}$$

es no acotada, entonces $f'(c)$ no existe.

<u>*Dem:*</u> Sea $|f(x)| \leq M$ para todo x. Supongamos que $f'(c)$ existe. Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c} - f'(c)\right| < 1$$

para $0 < |x-c| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{f(c)-f(x)}{c-x}\right| < |f'(c)| + 1 \quad \text{para } 0 < |x-c| < \delta$$

y

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right| \leq \frac{2M}{\delta} \quad \text{para } |x-c| \geq \delta$$

Las dos últimas desigualdades contradicen el carácter no acotado de

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

$\square$

Consideremos la función g en $\mathbb{R}$ definida como

$$g(x) = |x| \quad \text{para } |x| \leq 2$$

$$g(x+4n) = g(x) \quad \text{para } n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

que cumple las siguientes propiedades:

a) g es continua.

b) $0 \leq g(x) \leq 2$ para todo x.

c) Para todo x, y

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{x-y}\right| \leq 1$$

d) Dado c, existe un x_0 tal que

$$|x_0 - c| = 1 \quad \text{y} \quad \left|\frac{g(c)-g(x_0)}{c-x_0}\right| = 1$$

Estas propiedades son fácilmente verificables, tarea que se deja propuesta al lector. Siguiendo con la construcción, cuando $n = 0, 1, 2, \ldots$, definimos las funciones g_n como

$$g_n(x) = a^n g(b^n x)$$

donde a, b son constantes positivas. Entonces,

i. g_n es continua.

ii. $0 \leq g_n(x) \leq 2a^n$ para todo x.

iii. Para todo x, y

$$\left| \frac{g_n(x) - g_n(y)}{x - y} \right| \leq a^n b^n$$

iv. Dado c, existe x_n tal que

$$|x_n - c| = b^{-n} \quad \text{y} \quad \left| \frac{g_n(c) - g_n(x_n)}{c - x_n} \right| = a^n b^n$$

Si $0 < a < 1$, la función $h_k(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} g_k(x)$ es continua en todas partes. Ahora, es posible probar (pero en este caso asumiremos que es cierto) que la *suma infinita* de los g_n es convergente y con ello

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$$

es continua en $\mathbb{R}$. Tomando $ab > 1$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(c) - f(x_n)}{c - x_n} \right| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(c) - g_k(x_n)}{c - x_n} \right| \\
&\geq \left| \frac{g_n(x) - g_n(x_n)}{c - x_n} \right| - \left(\sum_{k=0}^{n-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \right) \left| \frac{g_k(c) - g_k(x_n)}{c - x_n} \right| \\
&\geq a^n b^n - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2a^k}{b^{-n}} \\
&= a^n b^n - \frac{a^n b^n - 1}{ab - 1} - \frac{2b^n a^{n+1}}{1 - a} \\
&> \left(1 - \frac{1}{ab - 1} - \frac{2a}{1 - a} \right) a^n b^n
\end{aligned}$$

Si elegimos a suficientemente pequeño, y b muy grande tales que

$$1 - \frac{1}{ab - 1} - \frac{2a}{1 - a} > 0$$

entonces el lema indica que $f'(c)$ no existe, pues la expresión anterior es no acotada. Por ejemplo, tomando $a = 1/5$ y $b = 20$, la función

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} g(20^n x)$$

es continua en todo $\mathbb{R}$, pero diferenciable en punto alguno.

Para un tratamiento más formal, se sugiere revisar el capítulo 4 sobre *Convergencia Uniforme* del texto:

BURKILL, J.C., *A Second Course in Mathematical Analysis*, Cambrigde University Press, 1970.

4. Integral de Riemann

4.1. Propiedades de la integral

(1) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sean $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^*$ dos particiones de $[a, b]$ tales que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^*$. Demuestre que

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}^*)$$
$$S(f, \mathcal{P}) \geq S(f, \mathcal{P}^*)$$

y utilice ese resultado para probar que si $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ son dos particiones de $[a, b]$ entonces

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{Q})$$

Solución:

Bastará probarlo en el caso en que $\mathcal{P}^*$ tiene un elemento más que $\mathcal{P}$; para los demás casos es suficiente iterar el razonamiento añadiendo en cada paso un punto nuevo hasta conseguir lo pedido. Supongamos que $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{c\}$ con:

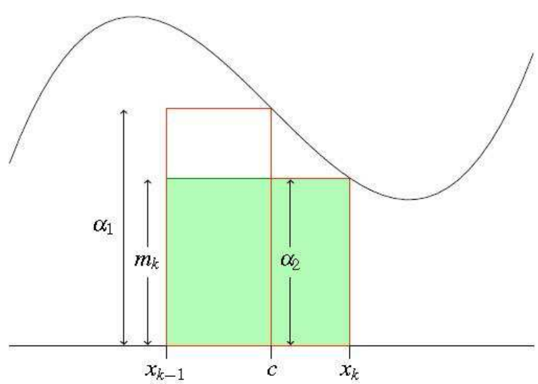
$$\mathcal{P} \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

$$\mathcal{P}^* \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < c < x_k \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

Sean m_i los ínfimos correspondientes a la partición $\mathcal{P}$ y sean

$$\alpha_1 = \text{ínf}\,\{f(x) : x \in [x_{k-1}, c]\}$$

$$\alpha_2 = \text{ínf}\,\{f(x) : x \in [c, x_k]\}$$



Entonces, $m_k \leq \alpha_1$, $m_k \leq \alpha_2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{P}^*) - s(f, \mathcal{P}) &= [\alpha_1(c - x_{k-1}) + \alpha_2(x_k - c)] - [m_k(x_k - x_{k-1})] \\ &= \geq [m_k(c - x_{k-1}) + m_k(x_k - c)] - [m_k(x_k - x_{k-1})] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}^*)$$

Análogamente, sean M_i los supremos correspondientes a P y sean

$$\beta_1 = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, c]\}$$

$$\beta_2 = \sup\{f(x) : x \in [c, x_k]\}$$

Entonces, $M_k \leq \beta_1$, $M_k \leq \beta_2$ y con ello $S(f, \mathcal{P}^*) - S(f, \mathcal{P}) = [\beta_1(c - x_{k-1}) + \beta_2(x_k - c)] - [M_k(x_k - x_{k-1})] \leq 0$

$$\Rightarrow S(f, P^*) \leq S(f, P)$$

Ahora, sean $\mathcal{P},\ \mathcal{Q}$ particiones de $[a, b]$. Entonces

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq S(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) \leq S(f, \mathcal{Q})$$

$\blacksquare$

(2) Calcule la integral superior e inferior de la función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x \in [0, 1] \\ 1 & , x \in (1, 2] \text{ irracional} \\ 0 & , x \in (1, 2] \text{ racional} \end{cases}$$

Solución:

Recordemos que el valor de una integral no se ve afectada por la presencia de un punto adicional. Las integrales en cuestión se definen como sigue:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \text{ínf}\{S(f, P) :\ P \text{ partición de } [a, b]\}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f, P) :\ P \text{ partición de } [a, b]\}$$

Así, sea

$$\mathcal{P} \equiv \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = 1 < x_{k+1} \cdots < x_{n-1} < x_n = 2\}$$

Sean M_i los supremos correspondientes a la partición $\mathcal{P}$ y éstos valen:

$$M_i = \begin{cases} 2 & , \text{si } i \leq k \\ 1 & , \text{si } i > k \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned} S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} 2\cdot(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} 2\cdot(x_i - x_{i-1}) \\ &= 2\cdot 1 + 1\cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Por otra parte, m_i los ínfimos correspondientes a la partición $\mathcal{P}$ y

$$m_i = \begin{cases} 2 & \text{, si } i \leq k \\ 0 & \text{, si } i > k \end{cases}$$

y con ello,

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} 2\cdot(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} 0\cdot(x_i - x_{i-1}) \\ &= 2\cdot 1 + 0\cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Como la partición $\mathcal{P}$ es arbitraria, tenemos que:

$$\overline{\int_0^2} f(x)dx = 3$$

$$\underline{\int_0^2} f(x)dx = 2$$

$\blacksquare$

(3) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, idénticamente no nula y no negativa. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$

Solución:

Tenemos que $f(x) \leq 0$, por tanto $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 0$ ya que $\inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \leq 0$. Notemos que la función f es continua y no idénticamente nula, i.e. $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) > 0$.

Como f es continua,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in (c-\delta, c+\delta) \rightarrow f(x) \in (f(c)-\epsilon, f(c)+\epsilon)$$

En particular, sea $\epsilon = \frac{f(c)}{2}$. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \\
&\geq 0 + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx + 0 = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx
\end{aligned}$$

Recordemos que si $x \in (c-\delta, c+\delta)$ entonces $f(x) \geq f(c) - \epsilon = \frac{c}{2}$. Por tanto,

$$\text{ínf}\,\{f(x) : x \in (c-\delta, c+\delta)\} \geq \frac{f(c)}{2} > 0$$

Así,

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx \geq 2\delta \cdot \frac{f(c)}{2} = \delta \cdot f(c) > 0$$

Finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

■

(4) Pruebe las siguientes afirmaciones:

a) Sean f y g funciones integrables en $[a,b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

b) Si f es integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Solución:

a) Si $f \leq g$ entonces $0 \leq g - f$, y es claro entonces que $s(g-f, \mathcal{P}) \geq 0$ para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$. Como además $g-f$ es integrable, se deduce que:

$$0 \leq s(g-f,\mathcal{P}) \leq \int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f$$

Por tanto,

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

b) Como f es integrable, es acotada. Luego, $|f|$ también es acotada. Sean $M_i,\ m_i$ los supremos e ínfimos de una partición $\mathcal{P}$ arbitraria. Así,

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\ S(|f|,\mathcal{P}) - s(|f|,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^{'} - m_i^{'})\Delta x_i \end{aligned}$$

Como $\sup(A) - \text{ínf}(A) = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$ entonces

$$\begin{aligned} M_i - m_i &= \sup\{|f(t) - f(s)| : t, s \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i^{'} - m_i^{'} &= \sup\{||f(t)| - |f(s)|| : t, s \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

Por desigualdad triangular reversa, $||f(t)| - |f(s)|| \leq |f(t) - f(s)|$. Entonces $M_i^{'} - m_i^{'} \leq M_i - m_i$ y con ello $S(|f|,\mathcal{P}) - s(|f|,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})$. Por tanto, como f es integrable resulta que $|f|$ también lo es.

Ahora, como $f \leq |f|$ y $-f \leq |f|$ podemos utilizar la propiedad antes demostrada para concluir que $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ y $\displaystyle\int_a^b (-f) = -\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Luego,

$$\left|\int_a^b f\right| = \text{máx}\left\{\int_a^b f, -\int_a^b f\right\} \leq \int_a^b |f|$$

■

(5) *a*) Sea f una función acotada e integrable en $[a,b]$. Demuestre que $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ es continua en $[a,b]$.

b) Encuentre una función f acotada e integrable en $[a,b]$ con $a < 1 < b$ tal que $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ no posee derivada en $x = 1$- Justifique su respuesta.

Solución:

a) Sea $x_0 \in [a,b]$ arbitrario. Entonces,

$$g(x) = \int_a^x f(t)\ dt = \int_a^{x_0} f(t)\ dt + \int_{x_0}^x f(t)\ dt = g(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)\ dt$$

Como f es acotada en $[a,b]$, existe un real M tal que $-M \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Por tanto,

$$-\int_{x_0}^x M\ dt = -M(x-x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t)\ dt \leq \int_{x_0}^x M\ dt = M(x-x_0)$$

Vemos que $\lim\limits_{x \to x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$ existe y es igual a 0; por lo tanto, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) + 0 = g(x_0)$ y por tanto es continua.

b) Basta considerar alguna función integrable que tenga una discontinuidad esencial en $x = 1$. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \leq x \leq 1 \\ \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leq b \end{cases}$$

Entonces,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \leq x \leq 1 \\ \\ x - 1 & \text{si} \quad 1 < x \leq b \end{cases}$$

Se cumple que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{(1+h-1) - 0}{h} = 1$$

y por tanto g no es derivable en $x = 1$.

■

4.2. Sumas de Riemann

(1) Demuestre que, si $f(x)$ es una función Riemann-Integrable en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

y de aquí deduzca que:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Solución:

Recordemos la definición dada por Riemann para su integral: *Una función f acotada definida en un intervalo $[a, b]$ se dice que es Riemann integrable en $[a, b]$ si existe un número I en los reales tal que, para todo número real positivo ϵ existe una δ positiva tal que si $\mathcal{P}$ es una partición de $[a, b]$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y $S(\mathcal{P}, f)$ es cualquier suma de Riemann entonces $|S(\mathcal{P}, f) - I| < \epsilon$.*

Entonces, sea f una función que cumple con las características anteriores:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Así, sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$ definida de la siguiente manera:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_{k-1} \leq c_k \leq x_k$$

Dado que la función es integrable para cualquier suma de Riemann, tomaremos una partición de n subintervalos de la misma longitud:

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Elegiremos c_k como el punto terminal derecho de cada subintervalos. Así:

$$c_k = a + k(\Delta x) = a + \frac{(b-a)k}{n}$$

Dado que la función es integrable, es claro que:

$$|S(P,f) - I| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right) \frac{b-a}{n} \right| < \epsilon$$

Con ello, llevando refinando nuestra partición $\mathcal{P}$ aumentando el número de subintervalos:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

Ahora bien, aplicando el resultado anterior tenemos que:

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

■

(2) Halle la integral definida $\displaystyle\int_{-2}^{1} 2xdx$

Solución:

Para realizar este problema, utilizaremos el resultado de la parte anterior. Así, definimos los elementos a utilizar:

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

$$c_k = a + k(\Delta x) = a + \frac{(b-a)k}{n} = -2 + \frac{3k}{n}$$

De este modo, la integral definida queda como sigue:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} 2x dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} 2\left(-2 + \frac{3k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(-2 + \frac{3k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \left[-2n + \frac{3}{n}\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} -12 + 9 + \frac{9}{n} \\
&= -3
\end{aligned}$$

■

(3) Utilizando sumas de Riemann, determine $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin(x)dx$

Solución:

Tenemos $a=0$, $b=2\pi$, $\Delta x = \dfrac{2\pi}{n}$ y finalmente $c = 0 + \dfrac{2\pi k}{n}$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{2\pi} \sin(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{2\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}_{2\sin(x)\sin(y)=\cos(x-y)-\cos(x+y)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k+1)\right)}_{(i)}
\end{aligned}$$

Trabajemos un poco más sobre (i). Estamos bastante cerca de obtener dos sumas telescópicas que nos permitan resolver la sumatoria. Para ello, sumamos $\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
(i) &= \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k+1)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k+1)\right) \\
&= \cos(0) - \cos(2\pi) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)
\end{aligned}$$

Retomemos la integral,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right) \\
&= \pi \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\right) \\
&= \pi \cdot 0 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

■

(4) Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right]$

b) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$

c) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)}$

HINT: $\displaystyle \int_a^b \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+b) - \ln(1+a)$ y $\displaystyle \int_a^b \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(b) - \arctan(a)$

Solución:

a) Existen varias maneras de realizar el límite anterior, pero dado que conocemos la integral de Riemann, intentaremos utilizar dicha herramienta para realizar el cálculo. La idea es formar una suma de Riemann y, dado que existe un paso al límite, transformarla en una integral fácil de calcular.

Notemos que:

$$\begin{aligned}
S(n) &= \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \\
&= \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + \underbrace{\sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right)}_{=\,0} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)
\end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\, S(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(x) dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

$b)$ Similar al ejercicio anterior.

$$S(n) = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

Pero, si dividimos, tanto numerador como denominador, por n^2 tendremos:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Ahora, lo anterior es muy parecido a una suma de Riemann, haciendo $b-a=1$ y $c_k = \frac{k}{n}$. Para que ambos resultados sean consistentes, $a=0$ y $b=1$. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+c_k^2} \Delta x_k \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

$c)$ Sea

$$S(n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+(n-1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+n} + \frac{1}{n}$$

Notemos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \frac{1}{n}$$

Igual que en el caso anterior, si $b-a=1$ y $c=k/n$ entonces $a=0$ y $b=1$. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S(n) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)\\
&= \int_0^1\frac{1}{1+x}dx\\
&= \ln(1+1)-\ln(1+0)=\ln(2)
\end{aligned}$$

■

(5) Acote las siguientes integrales según se indica:

a) $1.15 \leq \displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{5+4x-x^2}} \leq 1.25$

b) $0.7 < \displaystyle\int_5^7 \frac{1}{\sqrt{9-5\cos(x)}} \leq 1$

Solución:

a) En estos ejercicios la idea es tomar una expresión inicial que esté acotada y luego comenzar a trabajar la desigualdad hasta llegar a lo pedido en el enunciado. Notemos que:

$$5+4x-x^2=9-(x-2)^2$$

Haciendo uso de las técnicas del capítulo anterior, podemos determinar que $\forall x\in[1,3]$ se tiene que:

$$8 \leq 9-(x-2)^2 \leq 9 \quad \Big/ \sqrt[4]{()}$$

$$\sqrt[4]{8} \leq \sqrt[4]{9-(x-2)^2} \leq \sqrt[4]{9} \quad \Big/ ()^{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{9}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{9-(x-2)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \quad \Big/ \int_1^3 ()\,dx$$

$$\int_1^3\frac{1}{\sqrt[4]{9}}dx \leq \int_1^3\frac{dx}{\sqrt[4]{9-(x-2)^2}} \leq \int_1^3\frac{1}{\sqrt[4]{8}}dx$$

Finalmente,

$$\int_1^3\frac{1}{\sqrt[4]{9}}dx=\frac{2}{\sqrt[4]{9}}\approx 1.154$$

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[4]{8}}dx = \frac{2}{\sqrt[4]{8}} \approx 1.189$$

Así,

$$1.15 \leq \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{5+4x-x^2}} \leq 1.25$$

b) Haciendo uso de las técnicas del capítulo anterior, podemos determinar que $\forall x \in [5,7]$ se tiene que:

$$4 \leq 9 - 5\cos(x) < 8 \quad \Big/ \sqrt{()}$$

$$2 \leq \sqrt{9-5\cos(x)} < \sqrt{8} \quad \Big/ ()^{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{1}{\sqrt{9-5\cos(x)}} \leq \frac{1}{2} \quad \Big/ \int_5^7 ()\ dx$$

$$\frac{2}{\sqrt{8}} < \int_5^7 \frac{1}{\sqrt{9-5\cos(x)}} \leq 1$$

Pero $\frac{2}{\sqrt{8}} \approx 0.7071 > 0.7$. Así,

$$0.7 < \int_5^7 \frac{1}{\sqrt{9-5\cos(x)}} \leq 1$$

$\blacksquare$

(6) Sea $A_a^b(f)$ el valor medio de una función f en $[a,b]$, definido por:

$$A_a^b(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Demuestre que si $a < c < b$, entonces existe un número t, $0 < t < 1$, tal que

$$A_a^b(f) = t \cdot A_a^c(f) + (1-t)\cdot A_c^b(f)$$

Además demuestre que

$$A_a^b(f+g) = A_a^b(f) + A_a^b(g) \quad \text{y que} \quad A_a^b(k\cdot f) = k\cdot A_a^b(f)$$

Solución:

Primero que todo, notemos que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = (b-a)A_a^b(f)$. Por otra parte, para $a < c < b$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Por el *Teorema del valor medio para integrales*, se cumple que:

$$\int_a^c f(x)dx = (c-a)A_a^c(f) \quad \text{y} \quad \int_c^b f(x)dx = (b-c)A_c^b(f)$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)A_c^b(f) = (c-a)A_a^c(f) + (b-c)A_c^b(f)$$

$$\Longrightarrow A_a^b(f) = \frac{c-a}{b-a}A_a^c(f) + \frac{b-c}{b-a}A_c^b(f)$$

Como $a < c < b$ es claro que $0 < c-a < b-a$. Por tanto, $0 < \frac{c-a}{b-a} < 1$. Entonces, nombrando $t = \frac{c-a}{b-a}$ es evidente que $1-t = \frac{b-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{b-c}{b-a}$. Por tanto,

$$A_a^b(f) = t \cdot A_a^c(f) + (1-t) \cdot A_c^b(f),\ 0 < t < 1$$

Ahora, se hace evidente que:

$$\begin{aligned}
(b-a)A_a^b(f+g) &= \int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\
A_a^b(f+g) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx \\
\therefore\ A_a^b(f+g) &= A_a^b(f) + A_a^b(g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b-a)A_a^b(k \cdot f) &= \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx \\
A_a^b(k \cdot f) &= k \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\
\therefore\ A_a^b(k \cdot f) &= k \cdot A_a^b(f)
\end{aligned}$$

■

(7) **[Propuesto]** Calcule el siguiente límite, identificándolo como una suma de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{n^3}}$$

Solución:

Trabajemos un poco sobre la suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{n^3}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k+(k-1)}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{2\left(\frac{k+(k-1)}{2n}\right)}$$

que corresponde a la suma de Riemann de $f(x) = \sqrt{2x}$ en el intervalo $[0,1]$ considerando la partición regular

$$\mathcal{P} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{(n-1)}{n}, 1\right\}$$

y evaluando en el punto medio $\dfrac{k+(k-1)}{2n}$ del $k-$ésimo subintervalo. Como la función es continua, calculamos directamente:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{n^3}} = \int_0^1 \sqrt{2x}\ dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

■

4.3. Teorema Fundamental del Cálculo

(1) Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, determine:

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-3)dx$

b) $\displaystyle\int_1^4 (3\sqrt{x})dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)dx$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |1+2\cos(x)|dx$

e) El área de la región delimitada por la gráfica de $y = 2x^2-3x+2$, el eje x y las rectas verticales $x=0$ y $x=2$.

Solución:

a)

$$\int_1^2 (x^2-3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 3\right) = -\frac{2}{3}$$

b)

$$\int_1^4 3\sqrt{x}dx = 3\int_1^4 x^{1/2}dx = \left[3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2} - 2(1)^3/2 = 14$$

c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)dx = \tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - 0 = 1$$

d) Notemos que:

$$|1+2\cos x| = \begin{cases} 1+2\cos x & x \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \\ -1-2\cos x & x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \\ 1+2\cos x & x \in \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right] \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^{2\pi} |1+2\cos(x)|dx \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1+2\cos x)dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (-1-2\cos x)dx + \int_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} (1+2\cos x)dx \\
&= [x+2\sin x]_0^{2\pi/3} + [-x-2\sin x]_{2\pi/3}^{4\pi/3} + [x+2\sin x]_{4\pi/3}^{2\pi} \\
&= \left(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{2\pi}{3}+2\sqrt{3}\right) + \left(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3}+4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

e) Dado que $y > 0$, podemos interpretar a la integral de Riemann como el área bajo la curva. Así,

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2-3x+2)dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

■

(2) Demuestre que si la función h es continua y $f,\ g$ son derivables y si

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\ dt$$

entonces se tiene que $F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$. Utilice este hecho para resolver los siguientes problemas:

a) Halle la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x-t)\sin(t^2)dt$.

b) Para $x > 0$, pruebe que $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} - \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{1+t^2}$ es constante y determine su valor.

c) Dada la función $f(x) = 3 + \displaystyle\int_0^x \frac{1+\sin(t)}{2+t^2}dt$, determine un polinomio $p(x) = ax^2+bx+c$ tal que $p(0) = f(0),\ p'(0) = f'(0),\ p''(0) = f''(0)$.

d) Si f es una función continua de período T , demuestre que para todo número real a se tiene $\displaystyle\int_0^T f(t)dt = \int_a^{T+a} f(t)dt$

Solución:

Dado que la función h es continua entonces, por el *Teorema Fundamental del Cálculo*, existe una función H derivable tal que $H' = h$. Con ello,

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} = H(g(x)) - H(f(x))$$

Derivando la expresión anterior con respecto a x, dado que F es diferenciable -porque h es continua- al igual que H, tenemos:

$$F'(x) = H'(g(x)) \cdot g'(x) - H'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Pero $H'(u) = h(u)$, entonces:

$$F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$$

a) Tenemos que:

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x-t)\sin(t^2)dt = \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^{x^2} x\sin(t^2)dt}_{F_1(x)} - \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^{x^2} t\sin(t^2)dt}_{F_2(x)}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} {F_1}'(x) &= x \cdot \left(\sin(x^4)2x - \sin(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sin(t^2)dt \\ F_2'(x) &= x^2\sin(x^4)2x - \sqrt{x}\sin(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x^3\ \sin(x^4) - \frac{\sin(x)}{2} \end{aligned}$$

Así,

$$F'(x) = {F_1}'(x) - {F_2}'(x)$$

b) Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}\right) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx}\left(\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{1+t^2}\right) &= -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Por tanto, $F'(x) = 0$. Ahora, $F(1) = 0$ y con ello la constante es igual a 0.

c) Calculando,

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3 + \int_0^x \frac{1+\sin(t)}{2+t^2}dt \\
f'(x) &= \frac{1+\sin(x)}{2+x^2} \\
f''(x) &= \frac{2\cos(x) + \cos(x)\,x^2 - 2\,x - 2\,x\sin(x)}{\left(2+x^2\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= ax^2 + bx + c \\
p'(x) &= 2ax + b \\
p''(x) &= 2a
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{array}{lll}
f(0) = 3 = c = p(0) & \therefore\ b = \frac{1}{2} & \therefore\ a = \frac{1}{4} \\
\therefore\ c = 3\ f'(0) = \frac{1}{2} = b = p'(0) & f''(0) = \frac{1}{2} = 2a = p''(0) &
\end{array}$$

Así,

$$p(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

d) Sea $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)dt$. Entonces,

$$g'(x) = f(x+T) - f(x)$$

Pero f es periódica, por tanto $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x+T) = f(x)$. Por tanto, $g'(x) = 0$. Así, g es una función constante y finalmente, evaluando en $x = 0$ y $x = a$:

$$\int_0^T f(t)dt = \int_a^{T+a} f(t)dt$$

■

(3) *a*) ¿Se puede afirmar que si existe $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ entonces también existe $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$? En caso afirmativo, demuestre. Si no, mencione un contraejemplo.

b) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\int_0^{2n} \frac{\sin(x)}{x+1}dx$

Solución:

a) Sean las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \text{ racional} \\ -1 & x \in [a,b] \text{ irracional} \end{cases} \qquad |f(x)| = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \text{ racional} \\ 1 & x \in [a,b] \text{ irracional} \end{cases} = 1$$

Es evidente que $|f|$ es integrable, puesto que es constante, pero f no lo es.

b) Para $x \in [0, 2n]$ se cumple que:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{x+1} \leq \frac{\sin(x)}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

Como $\displaystyle\int_0^{2n} \frac{1}{1+x} = \ln(2n+1)$ entonces:

$$-\frac{\ln(2n+1)}{2n} \leq \frac{1}{2n} \int_0^{2n} \frac{\sin(x)}{x+1} dx \leq \frac{\ln(2n+1)}{2n}$$

Por el *Teorema del Sandwich* como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \pm\frac{\ln(2n+1)}{2n} = 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_0^{2n} \frac{\sin(x)}{x+1} dx = 0$$

■

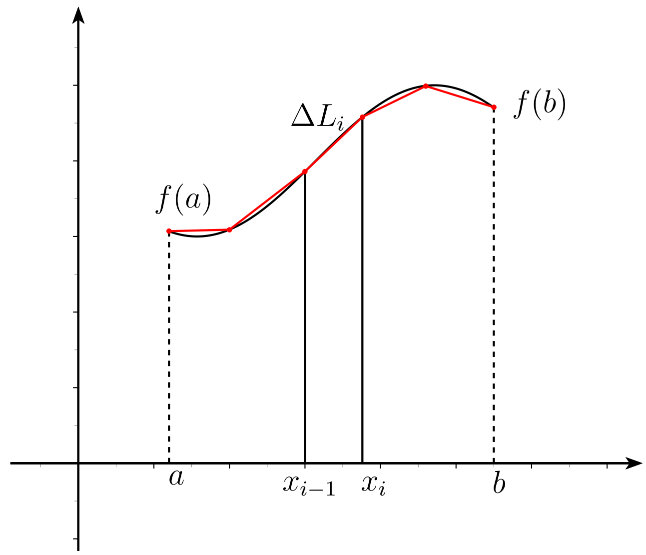
(4) *a*) Utilizando los conceptos de la Integral de Riemann, demuestre que la longitud de una curva regular $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ puede calcularse como sigue:

$$L(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

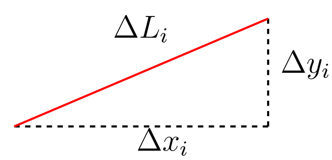
b) Utilice el resultado anterior para comprobar que una semicircunferencia de radio 1 posee largo π. ¿Podría calcular el largo de una semielipse de semiejes mayor y menor 2 y 1, respectivamente?

Solución:

a) Tomemos una partición arbitraria del intervalo $[a, b]$ de la forma $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Miremos dos puntos de la curva, digamos $x_i,\ x_{i-1}$. Localmente, dado que la curva es regular entonces posee una buena aproximación lineal. De ésta forma, en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ nuestra función se parece mucho a un segmento de recta de largo ΔL_i:



Analizando el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ podemos establecer una relación entre los segmentos:



Por el T.V.M. tenemos que:

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(x_i^*)$$

Por tanto, el largo del segmento puede calcularse como sigue:

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + f'(x_i^*)^2(\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}(\Delta x_i)$$

Así, el largo total de los segmentos de recta que aproximan a f corresponde a:

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}(\Delta x_i) \end{aligned}$$

Refinando la partición, $||\mathcal{P}|| \to 0$, notemos que la suma de Riemann converge al largo de la curva:

$$L(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

que es lo que se quería probar.

$b)$ En el caso de una semicircunferencia, tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1-x^2} \qquad x \in [-1,1] \\ f'(x) &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 1+f'(x)^2 &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Así,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+f'(x)^2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi$$

[Anexo] Una fórmula diferente

La definición anterior para calcular el largo de un segmento requiere que la función radical sea integrable. Además, debemos tener siempre en cuenta que utilizaremos la fórmula anterior para calcular el largo de un segmento de *una función de x o y* por lo que surge la pregunta: ¿cómo es posible calcular el largo de cualquier curva en el plano?

Una solución a este problema es recurrir a la denominada *Fórmula de Cauchy - Crofton*: es posible obtener el largo de una curva plana *contando* el número de intersecciones que posee la curva con todas las rectas del plano.

Definiremos todas las rectas a utilizar por dos parámetros: el ángulo θ que forman con el eje X y el coeficiente de corte x con el eje Y. Además, si definimos la función $n(\theta, x)$ como el número de intersecciones de una recta L con nuestra curva γ, entonces:

$$Largo = L(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} n(\theta,x)dxd\theta$$

Para una demostración acabada del teorema anterior se sugiere revisar:

- Do Carmo, Manfredo P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.

■

4.4. Funciones logaritmo y exponencial

(1) Sea $\psi(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Demuestre que $\psi'(x) = 1-\psi(x)^2$. Determine la ecuación de la recta tangente al gráfico de ψ que se paralela a la recta $3x-4y-12=0$.

Solución:

Analicemos las siguientes igualdades:

$$\psi(x)' = \frac{2\cdot e^{2x}(e^{2x}+1) - 2\cdot e^{2x}(e^{2x}-1)}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$1-\psi(x)^2 = 1 - \frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2-(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

Observe que la pendiente de la recta $3x-4y-12=0$ es $\frac{3}{4}$. Queremos hallar los puntos en el gráfico de ψ en donde la recta tangente tiene pendiente $\frac{3}{4}$, usando la identidad demostrada tomando $y=\psi(x)$ obtenemos la siguiente condición:

$$y' = \frac{3}{4} = 1-y^2 \;\Rightarrow\; y^2-\frac{1}{4} = 0 \;\Rightarrow\; \left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } y = \frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\\
&\Longrightarrow \quad 2\,\mathrm{e}^{2x}-2 \;=\; \mathrm{e}^{2x}+1\\
&\Longrightarrow \quad 2\,\mathrm{e}^{2x} \;=\; 3\\
&\Longrightarrow \quad x \;=\; \ln(\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Por lo tanto en $x=\ln(\sqrt{3})$ la recta tangente al gráfico de ψ es paralela a la recta

$$3x-4y-12=0$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } y = -\frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\\
&\Longrightarrow \quad 2\,\mathrm{e}^{2x}-2 \;=\; -\,\mathrm{e}^{2x}-1\\
&\Longrightarrow \quad 3\,\mathrm{e}^{2x} \;=\; 1\\
&\Longrightarrow \quad x \;=\; -\ln(\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Por lo tanto en $x=-\ln(\sqrt{3})$ la recta tangente al gráfico de ψ es paralela a la recta

$$3x-4y-12=0$$

■

(2) Calcule, utilizando el método de derivación logarítmica[6], las derivadas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = x^{x^x}$
   b) $g(x) = x^{\sin^2(x)}$

[6]Recuerde que este método consiste en aplicar logaritmo a la igualdad $y=f(x)$ y derivar hasta obtener $\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$ y finalmente despejar $f'(x)$

c) $h(x) = \left(\dfrac{2}{1+x^2}\right)^{-\ln(x)}$

Solución:

a) Notemos que:

$$\ln(f(x)) = \ln(x^{x^x}) = x\ln(x^x) = x^2\ln(x)$$

Entonces derivando a ambos lados de la igualdad obtenemos que,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x\ln(x) + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln(x)+1)$$

Por tanto,

$$f'(x) = f(x)\cdot x(2\ln(x)+1) = x^{x^x}(x(2\ln(x)+1))$$

b) Igual que en el apartado anterior,

$$\ln(g(x)) = \ln(x^{\sin^2(x)}) = \sin^2(x)\ \ln(x)$$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = 2\sin(x)\cos(x)\ln(x) + \sin^2(x)\ \frac{1}{x}$$

$$\therefore g'(x) = \frac{(2\sin(x)\cos(x)\ln(x) + \sin^2(x))(x^{\sin^2(x)})}{x}$$

c)

$$\ln(h(x)) = \ln(x)\ \ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) \Longrightarrow \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) +\ x\ \ln(x)\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$$

$$\Longrightarrow h'(x) = \left[\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) + x\ \ln(x)\cdot\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\right]\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^{-\ln(x)}$$

$\blacksquare$

(3) Demuestre que para todo número natural n se tiene

a) La sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln(n)$ es convergente.

b) Demuestre que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \gamma$, entonces $0 < \gamma < 1$.

Solución:

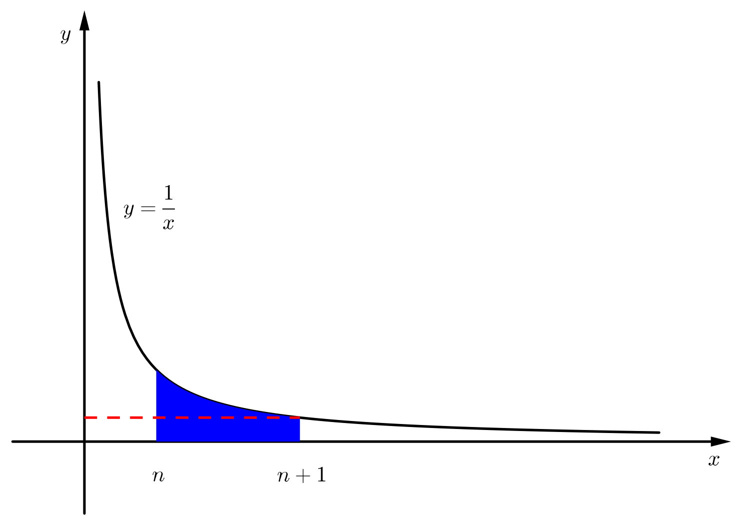
a) Sea

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - \ln(n)$$

- Analicemos su crecimiento:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} + \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n)\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} < 0 \end{aligned}$$

La justificación es del tipo geométrica. La expresión racional es el área rectangular, mientras que la integral en cuestión es el área sombreada bajo la hipérbola mayor, que incluye al rectángulo.



Más analíticamente, podemos establecer el siguiente hecho: la función $f(t) = \frac{1}{t}$ es decreciente en el intervalo $[n, n+1]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} &< (n+1-n) \cdot \text{máx}\{f(t) : t \in [n, n+1]\} \\ \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} &< \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} &< \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Así, la sucesión es <u>decreciente</u>.

- Como sabemos, la función $f(t)$, por ser decreciente, cumple que:

$$\int_{m-1}^{m} \frac{dt}{t} < \frac{1}{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}$$

dado que el largo del intervalo es igual a 1. Ahora, notemos que:

$$\ln(n) = \int_1^n \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dt}{t}$$

por tanto, utilizando la desigualdad inicial,

$$\ln(n) = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

$$\ln(n) = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}$$

$$\therefore a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) > 0$$

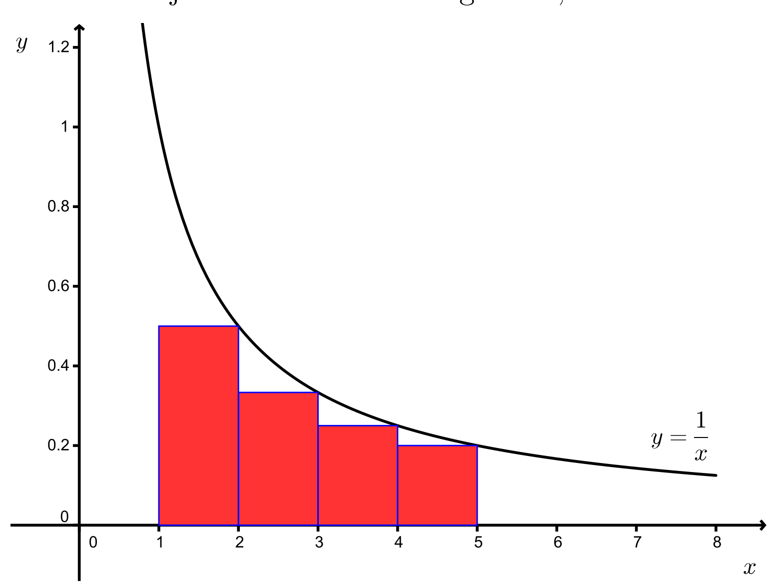
y es acotada. Otra forma de justificar lo anterior es la siguiente: Es fácil probar que la función $g(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ es estrictamente creciente en $[1, \infty)$ y, como $g(1) > 0$ entonces es positiva en $[1, \infty)$. En particular, $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$ Así,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} &> \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) \\ a_n &> \ln(n+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Como dicho logaritmo natural es una función estrictamente creciente y, al acotar su dominio a los naturales, tiene un mínimo positivo entonces es claro que $a_n > 0$. Así, la sucesión es <u>acotada inferiormente</u>.

$$\therefore \text{ monótona } + \text{ acotada } \Longrightarrow \text{ convergente}$$

b) Es evidente, como se aprecia en la figura, que la suma de los bloques rectangulares es menor que la correspondiente área bajo la curva. Por consiguiente,



$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n)$$

De aquí,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) < 1, \ n > 1$$

Con ello podemos afirmar que: $0 < a_n < 1$. Por el *Teorema del Sandwich*, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \gamma$ entonces:

$$0 < \gamma < 1$$

$\blacksquare$

4.5. Teoremas de integración por partes y sustituciones

(1) *a*) Encuentre una función f y un $a \in (0, \infty)$ tales que

$$\int_{a}^{x^2} f(t)\ln(t)\ dt = x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right)$$

b) Sea $f(x)$ una función estrictamente creciente, positiva y con derivada continua en $[a, b]$ con $0 < a < b$. Demuestre que:

$$\int_{a}^{b} f(x)\ dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\ dx$$

c) Demuestre que:

$$I_n = \int_{0}^{1} x(1-x)^n\ dx$$

satisface la relación de recurrencia:

$$I_n = \frac{n}{n+2}\ I_{n-1}$$

Solución:

a) Primero notemos que:

$$\int_{a}^{(\sqrt{a})^2} f(t)\ln(t)\ dt = 0$$

Para que las dos funciones sean iguales, requerimos que

$$(\sqrt{a})^3\left(\ln(\sqrt{a}) - \frac{1}{3}\right) = 0$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos que los valores posibles de a son 0 o $e^{2/3}$. Como $a \neq 0$, entonces $a = e^{2/3}$. Como deseamos que la igualdad se cumpla, derivamos las funciones e igualamos:[7]

$$2xf(x^2)\ln(x^2) = 3x^2 \ln x \quad \longleftrightarrow \quad f(x^2) = \frac{3}{4}x \quad \longleftrightarrow \quad f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x}$$

b) La derivada de f es continua; luego, si ponemos $f(x) = 1 \cdot f(x)$ podemos utilizar integración por partes para llegar a:

$$\int_a^b f(x)\ dx = xf(x)\Big|_a^b - \int_a^b xf'(x)\ dx$$

Para calcular la segunda integral, sugerimos la sustitución $u = f(x)$. Luego, $du = f'(x)\ dx$ y con ello:

$$\int_a^b xf'(x)\ dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(u)\ du$$

ya que si $u = f(x)$, $x = f^{-1}(u)$. Podemos asegurar la existencia de la inversa puesto que f es continua y estrictamente creciente. Así, reemplazando,

$$\int_a^b f(x)\ dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\ dx$$

c) Utilizando integración por partes: $u = (1-x)^n \ \rightarrow \ du = -n(1-x)^{n-1}$, $dv = xdx \ \rightarrow \ v = x^2/2$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \ \frac{x^2}{2}(1-x)^2\Big|_0^1 &= I_n - \frac{n}{2}\int_0^1 x^2(1-x)^{n-1}\ dx \\
0 &= I_n - \frac{n}{2}\int_0^2 x\Big(1-(1-x)\Big)(1-x)^{n-1}\ dx \\
&= I_n - \frac{n}{2}\int_0^2 x(1-x)^{n-1}\ dx + \frac{n}{2}\int_0^2 x(1-x)^n\ dx \\
&= I_n + \frac{n}{2}\Big(-I_{n-1} + I_n\Big) \\
I_n &= \frac{n}{n+2}\ I_{n-1}
\end{aligned}$$

■

(2) Utilizando el teorema de Integración por partes:

$$uv = \int udv + \int vdu$$

Resuelva las siguientes integrales.

[7] Recurrimos al teorema que asegura que si f, g satisfacen $f' = g'$, entonces $f(x) = g(x) + c$.

a) $\displaystyle\int \ln(x)dx$

b) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$

c) $\displaystyle\int \cos^2(x)dx$

d) $\displaystyle\int e^x\cos(x)dx$

e) $\displaystyle\int x\sec(x)\tan(x)dx$

f) $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{x}\right)dx$

Solución:

a) Sean

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & \ln(x) & \qquad & dv & = & dx \\ \Rightarrow du & = & \dfrac{dx}{x} & \qquad & \Rightarrow v & = & x \end{array}$$

Entonces, utilizando la fórmula de la integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} x\ln(x) &= \int \ln(x)dx + \int x\frac{dx}{x} = \int \ln(x)dx + \int dx \\ \therefore \int \ln(x)dx &= x\ln(x) - x + c \end{aligned}$$

b) Sean

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & x & \qquad & dv & = & e^{-x}dx \\ \Rightarrow du & = & dx & \qquad & \Rightarrow v & = & -e^{-x} \end{array}$$

Entonces, utilizando la fórmula de la integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} -xe^{-x} &= \int xe^{-x}dx + \int -e^{-x}dx = \int xe^{-x}dx + e^{-x} \\ \therefore \int xe^{-x}dx &= -(1+x)e^{-x} + c \end{aligned}$$

c) Sean

$$\begin{array}{rclcrcl} u & = & \cos(x) & \qquad & dv & = & \cos(x)dx \\ \Rightarrow du & = & -\sin(x)dx & \qquad & \Rightarrow v & = & \sin(x) \end{array}$$

Entonces, utilizando la fórmula de la integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sin(x)\cos(x) &= \int \cos^2(x)dx - \int \sin^2(x)dx \\
&= \int \cos^2(x)dx + \int (\cos^2(x) - 1)dx \\
&= 2\int \cos^2(x)dx - \int dx \\
\therefore \int \cos^2(x)dx &= \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + \frac{x}{2} + c
\end{aligned}$$

d) Sean

$$\begin{aligned}
u &= \cos(x) & dv &= e^x dx \\
\Rightarrow du &= -\sin(x)dx & \Rightarrow v &= e^x
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando la fórmula de la integración por partes, tenemos:

$$e^x \cos(x) = \int e^x \cos(x)dx - \underbrace{\int e^x \sin(x)dx}_{(i)}$$

Debemos utilizar nuevamente la integración por partes para hallar (i). Así,

$$\begin{aligned}
u &= \sin(x) & dv &= e^x dx \\
\Rightarrow du &= \cos(x)dx & \Rightarrow v &= e^x
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$e^x \sin(x) = \int e^x \sin(x)dx + \int e^x \cos(x)dx$$

$$\Longrightarrow \int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

Finalmente, reemplazando en (i) tenemos:

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

$$\therefore \int e^x \cos(x)dx = \frac{1}{2}e^x \cos(x) + \frac{1}{2}e^x \sin(x) + c$$

e) Sean

$$\begin{aligned}
u &= x & dv &= \sec(x)\tan(x)dx \\
\Rightarrow du &= dx & \Rightarrow v &= \sec(x)
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando la fórmula de la integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} x\sec(x) &= \int x\sec(x)\tan(x)dx + \int \sec(x)dx \\ \int x\sec(x)\tan(x)dx &= x\sec(x) - \underbrace{\int \sec(x)dx}_{(ii)} \end{aligned}$$

Debemos hallar (ii). Así,

$$\begin{aligned} \int \sec(x)dx &= \int \sec(x)\left(\frac{\sec(x)+\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\right)dx \\ &= \int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\tan(x)}{\tan(x)+\sec(x)}dx \\ &= \int \frac{dm}{m} = \ln|m| \\ &= \ln(\sec(x)+\tan(x)) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\therefore \int x\sec(x)\tan(x)dx = x\sec(x) - \ln|\sec(x)+\tan(x)|$$

f) Modifiquemos el integrando mediante la siguiente sustitución: Sea $m = \sqrt{x}$ y con ello $dm = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. Así,

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)dx = 2\int \sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right)\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int m\cos(m)dm$$

Por tanto, aplicamos ahora el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} u &= m & dv &= \cos(m)dx \\ \Rightarrow du &= dm & \Rightarrow v &= \sin(m) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} m\sin(m) &= \int m\cos(m)dm + \int \sin(m)dm \\ \therefore \int m\cos(m)dm &= m\sin(m) + \cos(m) + k \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)dx = 2(m\sin(m)+\cos(m)+k) = 2\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\cos\left(\sqrt{x}\right) + c$$

■

(3) Utilizando el teorema de cambio de variable o sustitución,

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

resuelva las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

b) $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}dx$

c) $\displaystyle\int \cos(x)(2+\sin(x))^5$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-2x^2}}$

e) $\displaystyle\int \cos^{2/3}(t)\sin^5(t)dt$

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$

Solución:

a) Tenemos que:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

Sea $u = x-1$ y con ello $du = dx$ y, evidentemente, $x+1 = u$. Así,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u) + c = \arcsin(x-1) + c$$

b) Hagamos $x+2 = y^2$. Así, $x = y^2-2,\ dx = 2ydy$. Entonces,

$$\int x\sqrt{x+2} = \int (y^2-2)2y^2dy = \int (2y^4-4y^2)dy = \frac{2}{5}y^5 - \frac{4}{3}y^3 + c$$

Como $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}$, reemplazando tenemos:

$$\int x\sqrt{x+2} = \frac{2}{5}(x+2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+2)^{3/2} + c$$

c) Sea $s = 2+\sin(x)$ y con ello $ds = \cos(x)dx$. Con ello,

$$\int \cos(x)(2+\sin(x))^5 = \int s^5ds = \frac{s^6}{6} + c = \frac{(2+\sin(x))^6}{6} + c$$

d) Si hacemos $t = 1 - 2x^2$ y $dt = -4xdx$ entonces tendremos:

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{1}{8}\int \underbrace{2x^2}_{1-t} \underbrace{\frac{-4xdx}{\sqrt{1-2x^2}}}_{\frac{dt}{\sqrt{t}}} = -\frac{1}{8}\int (1-t)t^{-1/2}dt = -\frac{1}{8}\int t^{-1/2} - t^{1/2}dt$$

Así,

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{t^{1/2}}{4} + \frac{t^{3/2}}{12} + c = -\frac{(1-2x^2)^{1/2}}{4} + \frac{(1-2x^2)^{3/2}}{12} + c$$

e) Primero que todo, separamos las potencias del seno de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int \cos^{2/3}(t)\sin^5(t)dt &= \int \cos^{2/3}(t)\sin^4(t)\sin(t)dt \\
&= \int \cos^{2/3}(t)(\sin^2(t))^2\sin(t)dt \\
&= \int \cos^{2/3}(t)(1-\cos^2(t))^2\sin(t)dt
\end{aligned}$$

Con $u = \cos(t)$ y $du = -\sin(t)dt$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \cos^{2/3}(t)\sin^5(t)dt &= -\int u^{2/3}(1-u^2)^2 \\
&= -\int u^{2/3}(1-2u^2+u^4) \\
&= -\int u^{2/3} - u^{8/3} + u^{14/3} \\
&= -\frac{3}{5}u^{5/5} + \frac{3}{11}u^{11/3} - \frac{3}{17}u^{17/3} + c \\
&= -\frac{3}{5}(\cos(t))^{5/5} + \frac{3}{11}(\cos(t))^{11/3} - \frac{3}{17}(\cos(t))^{17/3} + c
\end{aligned}$$

f) Sea $x = z^4$ y $dx = 4z^3dz$. Así,

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}} = \int \frac{z^2 \cdot 4z^3dz}{1+z} = 4\int \frac{z^5dz}{1+z} = \Phi$$

Aplicando división de polinomios, obtendremos que

$$z^5 = (z+1)\cdot(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) - 1$$

Con ello,

$$\begin{aligned}
\Phi &= 4\int \frac{(z+1)\cdot(z^4-z^3+z^2-z+1)-1}{1+z}dz \\
&= 4\int (z^4-z^3+z^2-z+1)dz - 4\int \frac{dz}{1+z} \\
&= \frac{4}{5}z^5 - z^4 + \frac{4}{3}z^3 - 2z^2 + 4z - 4\ln(1+z) + c
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}} = \frac{4}{5}x^{5/4} - x + \frac{4}{3}x^{3/4} - 2\sqrt{x} + 4x^{1/4} - 4\ln\left(1+x^{1/4}\right) + c$$

$\blacksquare$

(4) **[Propuesto]** La difusión de una epidemia es modelada por la ecuación logística, en donde la velocidad de propagación es proporcional a la cantidad de personas infectadas en un tiempo de t días, $x(t)$, y la cantidad de personas que aún no se contagian, siendo m la población total. Considere que para $t = 0$, un décimo de la población está infectada; después de cinco dias, un quinto de población está infectada.

a) ¿Qué proporción de la población estará infectada después de diez días?

b) ¿Para qué valor de t la mitad de la población estará infectada?

Hint: Considere que las soluciones de la ecuación diferencial del tipo $x'(t) = g(t)h(x)$ satisfacen

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dy}{h(y)} = \int_{t_0}^{t} g(s)\ ds$$

Solución:

Dado que la velocidad de propagación, $x'(t)$, es proporcional a x y $m-x$, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x'(t) = kx(m-x)$$

Utilizando el *hint* del enunciado, hacemos $g(t) = k$ y $h(x) = x(m-x)$. Así,

$$\int_{m/10}^{x} \frac{dy}{y(m-y)} = \frac{1}{m}\left(\int_{m/10}^{x} \frac{dy}{y} - \frac{dy}{x-m}\right) = \frac{1}{m}\left[\ln\left(\frac{x}{m/10}\right) - \ln\left(\frac{m-x}{9m/10}\right)\right]$$

Por otro lado,

$$\int_0^t g(s)\ ds = kt$$

Juntando ambos resultados,

$$\ln\left(\frac{x}{m/10}\cdot\frac{9m/10}{m-x}\right) = \ln\left(\frac{9x}{m-x}\right) = kmt \quad \rightarrow \quad x(t) = \frac{me^{kmt}}{9+e^{kmt}} = \frac{m}{1+9e^{-kmt}}$$

Como $x(5) = m/5$, entonces:

$$e^{-5mk} = \frac{4}{9} \quad \longrightarrow \quad mk = -\frac{1}{5}\Big(\ln(4) - \ln(9)\Big)$$

a)

$$x(0) = \frac{m}{1+9\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{9}{25}\ m$$

b) Si $x(t) = m/2$, entonces:

$$\frac{m}{2} = \frac{m}{1+9e^{-mkt}} \quad \longrightarrow \quad 1 + 9e^{-mkt} = 2 \quad \longrightarrow \quad t = \frac{\ln(9)}{mk} = \frac{5\ln(9)}{\ln(9) - \ln(4)}$$

■

4.6. Sustituciones trigonométricas, fracciones parciales y otros teoremas

(1) Calcule la siguiente integral:

$$\int \tan^6 x \sec^4 x \; dx$$

Solución:

Reagrupamos términos:

$$\int \tan^6 x \sec^4 x \; dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \;\; \sec^2 x dx = \int \tan^6 x (1 - \tan^2 x) \;\; \sec^2 x dx = A$$

Sean $u = \tan x$ y $du = \sec^2 x dx$. Así,

$$A = \int u^6 (1 + u^2) \; du = \int u^6 1 + u^8 \; du = \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

Con ello,

$$\int \tan^6 x \sec^4 x \; dx = \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} + C$$

■

(2) Utilizando la técnica de sustitución trigonométrica:

Expresión del integrando	**Sustitución trigonométrica**
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a\sin\theta$
$\sqrt{a^2 + u^2}$	$u = a\tan\theta$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = a\sec\theta$

Resuelva las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}dx$

Solución:

a) En este ejercicio la expresión es de la forma $a^2 - u^2$, por lo que la sustitución es:

$$\begin{aligned} x &= \sin\theta, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \Rightarrow dx &= \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \\ &= \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}} \\ &= \int d\theta \\ &= \theta + C \end{aligned}$$

Como $\arcsin(x) = \theta$, entonces:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

b) Notemos que $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = -\int \frac{dx}{1-x^2}$. Así, hacemos la siguiente sustitución:

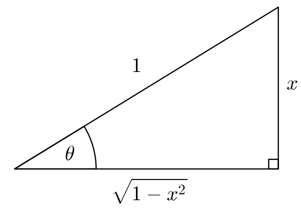
$$\begin{aligned} x &= \sin\theta \\ \Rightarrow dx &= \cos\theta d\theta \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} -\int \frac{dx}{1-x^2} &= -\int \frac{\cos\theta d\theta}{1-\sin^2\theta} \\ &= -\int \sec\theta d\theta \\ &= -\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \end{aligned}$$

Debemos hallar entonces la relación entre dichas funciones trigonométricas y x. La figura de la derecha se construye a partir de la definición de

$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = x$$



Entonces,

$$\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2-1} &= -\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\
&= -\ln\left|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\right| + C \\
&= \ln\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{(1+x)^2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + C
\end{aligned}$$

$c)$ Trabajemos un poco en la integral original:

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{dx}{((x-1)^2+4)^2}$$

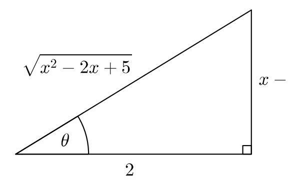
Con ello hacemos,

$$\begin{aligned}
x-1 &= 2\tan\theta \\
\Rightarrow\ du &= 2\sec^2\theta d\theta
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} &= \int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{(4\tan^2\theta+4)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} \\
&= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta d\theta \qquad \text{recordando que } \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \\
&= \frac{1}{16}\int \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{16}\int d\theta = \frac{1}{32}\sin 2\theta + \frac{1}{16}\theta + C \\
&= \frac{1}{16}(\cos\theta\sin\theta + \theta) + C
\end{aligned}$$

Como $x-1 = 2\tan\theta$ entonces $\theta = \arctan\frac{x-1}{2}$. Con estos datos, construimos la figura para deducir las relaciones trigonométricas.



Entonces,

$$\sin\theta = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} &= \frac{1}{16}\left(\cos\theta\sin\theta+\theta\right)+C \\
&= \frac{1}{16}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-2x+5}}\cdot\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}+\arctan\frac{x-1}{2}\right)+C \\
&= \frac{1}{8}\frac{x-1}{x^2-2x+5}+\frac{1}{16}\arctan\frac{x-1}{2}+C
\end{aligned}$$

d) En este caso, la expresión es de la forma u^2-a^2, por tanto hacemos:

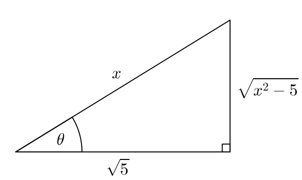
$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{5}\sec\theta \\
\Rightarrow dx &= \sqrt{5}\sec\theta\tan\theta d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} &= \int \frac{\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{5\sec^2\theta-5}} \\
&= \int \frac{\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{5\tan^2\theta}} \\
&= \int \sec\theta d\theta \\
&= \ln|\sec\theta+\tan\theta|+C
\end{aligned}$$

Igual que en el problemas anteriores, construimos nuestro triángulo:

De acuerdo a la definición de

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{x}{\sqrt{5}}$$



Obtenemos que:

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}}$$

Finalmente,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} &= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\
&= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}}\right) + C \\
&= \ln\left(x + \sqrt{x^2-5}\right) + \ln\left(\sqrt{5}\right) + C \\
&= \ln\left(x + \sqrt{x^2-5}\right) + C'
\end{aligned}
$$

e) Sea

$$
\begin{aligned}
x^2 &= \tan\theta \\
\Rightarrow 2xdx &= \sec^2\theta d\theta
\end{aligned}
$$

Resolvemos:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x}{1+x^4}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{1+\tan^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{2}\int d\theta \\
&= \frac{\theta}{2} + C
\end{aligned}
$$

Como $\theta = \arctan(x^2)$, finalmente:

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\arctan\left(x^2\right) + C$$

■

(3) Utilizando el método de las fracciones parciales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$$

Resuelva:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx$

Solución:

a) Nos encontramos con el caso en que $Q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$. Así, podemos escribir

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}$$

Como $Q(x)=x(2x-1)(x+2)$, hacemos:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} &= \frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}\\ &= \frac{A(2x-1)(x+2)+B(x)(x+2)+C(x)(2x-1)}{x(2x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lllll}(*) & \text{Si } x=0, & \rightarrow\ -1=2A & \rightarrow & A=\dfrac{1}{2}\\ (*) & \text{Si } x=-2, & \rightarrow\ -1=10C & \rightarrow & C=-\dfrac{1}{10}\\ (*) & \text{Si } x=1/2, & \rightarrow\ \dfrac{1}{4}=\dfrac{5B}{4} & \rightarrow & B=\dfrac{1}{5}\end{array}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}dx &= \int\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{5}\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right)dx\\ &= \frac{\ln|x|}{2}+\frac{\ln|2x-1|}{10}-\frac{\ln|x+2|}{10}+C\end{aligned}$$

b) Lo primero que debemos notar es que grad $(P)>$ grad (Q). Por tanto, utilizamos la división de polinomios para llevarlos a la forma:

$$\frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}=(x+1)+\frac{4x}{x^3-x^2-x+1}$$

En este caso logramos obtener una fracción de polinomios donde grad $(P')<$ grad (Q') y podemos utilizar las fracciones parciales[8]. Ahora, nos encontramos con el caso en que $Q(x)=(a_1x+b_1)^r$. Así, podemos escribir

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{(a_1x+b_1)^2}+\cdots+\frac{A_r}{(a_1x+b_1)^r}$$

[8]Recuerde que la base de las fracciones parciales es el hecho de que exista $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ función racional tal que grad $(P)<$ grad (Q).

Como $Q(x) = (x+1)(x-1)^2$, hacemos:

$$\begin{aligned} \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\ &= \frac{A(x-1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x+1)}{x^3 - x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

En este caso es más conveniente utilizar el sistema de ecuaciones para hallar A, B, C. Es decir:

$$A + B = 0 \ , \qquad C - 2A = 4 \ , \qquad A - B + C = 0$$

Así, $A = -1, \ B = 1, \ C = 2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx &= \int (x+1) dx + \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + C \end{aligned}$$

c) Nos encontramos con el caso en que $Q(x) = (ax^2 + bx + c)$ posee factores cuadráticos irreductibles. Entonces tendremos un factor de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Como $Q(x) = x(x^2 + 4)$, hacemos:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} \\ &= \frac{A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x)}{x^3 + 4x} \end{aligned}$$

En este caso es más conveniente utilizar el sistema de ecuaciones para hallar A, B, C. Es decir:

$$A + B = 2 \ , \qquad 4A = 4 \ , \qquad C = -1$$

Así, $A = 1, \ B = 1, \ C = -1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} \right) dx \\ &= \ln|x| + \int \frac{x}{x^2+4} dx - \int \frac{dx}{x^2+4} \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2} \right) + C \end{aligned}$$

d) Nos encontramos con el caso en que $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^r$. Entonces tendremos factores de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

Como $Q(x) = x(x^2 + 1)^2$, hacemos:

$$\begin{aligned} \frac{1 - x + 2x^2 - x^2}{x(x^2 + 1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x)(x^2 + 1) + (Dx + E)(x)}{x(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

Utilizamos el sistema de ecuaciones para hallar A, B, C, D, E:

$$A + B = 0\ , \quad C = -1\ , \quad 2A + B + D = 2\ , \quad C + E = -1\ , \quad A = 1$$

Así, $A = 1,\ B = -1,\ C = -1,\ D = 1,\ E = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - x + 2x^2 - x^2}{x(x^2 + 1)^2} dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{(x^2 + 1)^2} \right) dx \\ &= \ln|x| + \int \frac{x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \int \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + \frac{1}{2(x^2 + 1)} + C \end{aligned}$$

$\blacksquare$

(4) Calcule la siguiente integral, utilizando *ambos* métodos analizados anteriormente:

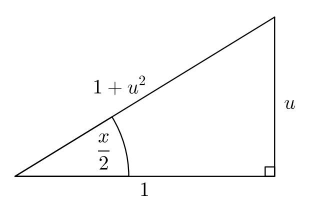
$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos^2 x}$$

Solución:

En este caso, utilizaremos la siguiente sustitución:
Sea

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies dx = \frac{2du}{1 + u^2}$$

Con ello, construimos la figura para facilitar el entendimiento del cambio de variables. Así, tenemos que:



$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2u}{1 + u^2}$$

Por tanto,

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \frac{4u^2}{(1 + u^2)^2} = \left(\frac{1 - u^2}{1 + u^2}\right)^2 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$$

Así, sea $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos^2 x}$.

$$I = \int \frac{(1+u^2)du}{u^4+u^3+u+1} = \int \frac{(1+u^2)du}{(u+1)^2(u^2-u+1)}$$

Usando fracciones parciales:

$$\frac{1+u^2}{(u+1)^2(u^2-u+1)} = \frac{A}{u+1}+\frac{B}{(u+1)^2}+\frac{Cu+D}{u^2-u+1}$$

Se obtiene $A=C=0, B=\dfrac{2}{3}, D=\dfrac{1}{3}$. Luego,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3}\int \frac{du}{(u+1)^2} + \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2-u+1} \\ &= \frac{-2}{3(u+1)} + \frac{1}{3}\int \frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Sea $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan z = u-\dfrac{1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} I &= \frac{-2}{3(u+1)} + \frac{1}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 z dz}{\frac{3}{4}\tan^2 z+\frac{3}{4}} \\ &= \frac{-2}{3(u+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\int \frac{\sec^2 z}{\tan^2 z+1}dz = \frac{-2}{3(u+1)}+\frac{2\sqrt{3}}{9}z+C \\ &= \frac{-2}{3(u+1)} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}(u-1/2)\right)+C \\ &= \frac{-2}{3\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right)} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]\right)+C \end{aligned}$$

■

(5) **[Propuesto I]** Determine $\displaystyle\int \sin^m x\cos^n x\ dx$, donde $m,n\in\mathbb{N}$ y n es impar.

Solución:

Los números impares se escriben como sigue: $n=2k+1$.

$$\int \sin^m x\cos^n x\ dx = \int \sin^m x\cos^{2k} x\cos x\ dx = \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^k\cos x\ dx = \Phi$$

Hagamos $u=\sin x$ y con ello $du=\cos x dx$. Así,

$$\Phi = \int u^m(1-u^2)^k\ du = \int u^m(1-u^2)^k\ du$$

Notemos que:

$$(1-u^2)^k = (-1)^k(u^2-1)^k = (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{2k-2i}(-1)^i \quad \Big/ \cdot u^m$$

$$u^m(1-u^2)^k = (-1)^k(u^2-1)^k = (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{2k+m-2i}(-1)^i$$

Así,

$$\Phi = \int u^m(1-u^2)^k \, du = (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\int u^{2k+m-2i} \, du \right) (-1)^i$$

$$\Phi = (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{u^{2k+m-2i+1}}{2k+m-2i+1}(-1)^i$$

Finalmente, reemplazamos:

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(\sin x)^{n+m-2i}}{n+m-2i}(-1)^i, \;\; n = 2k+1$$

$\blacksquare$

(6) **[Propuesto II]** Determine $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, donde $m, n \in \mathbb{N}$ y m es impar.

Solución:

Los números impares se escriben como sigue: $m = 2k+1$.

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx = \int \sin x \cos^n x \sin^{2k} x \, dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \, dx = \Psi$$

Hagamos $u = \cos x$ y con ello $du = -\sin x dx$. Así,

$$\Psi = -\int (1-u^2)^k \cdot u^n \, du$$

Notemos que:

$$(1-u^2)^k = (-1)^k(u^2-1)^k = (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{2k-2i}(-1)^i \quad \Big/ \cdot u^n$$

$$u^m(1-u^2)^k = (-1)^k(u^2-1)^k = (-1)^k \cdot \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} u^{2k+n-2i}(-1)^i$$

Así,

$$\Psi = -\int u^n(1-u^2)^k \ du = (-1)^{k+1}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\int u^{2k+n-2i}\ du\right)(-1)^i$$

$$\Psi = (-1)^{k+1}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{u^{2k+n-2i+1}}{2k+n-2i+1}(-1)^i$$

Finalmente, reemplazamos:

$$\int \sin^m x\cos^n x \ dx = (-1)^{k+1}\cdot\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{(\cos x)^{n+m-2i}}{n+m-2i}(-1)^i,\ m=2k+1$$

■

(7) **[Para profundizar]** La función real f es continua en $[a,b]$ y, para $n=0,1,2,\ldots,$

$$\int_a^b f(x)x^n \ dx = 0$$

Muestre que

$$\int_a^b f^2(x)\ dx = 0$$

y deduzca que $f(x)=0$ para $a\leq x\leq b$.

Hint: Considere el Teorema de aproximación de Weierstrass, que garantiza la existencia de un polinomio con coeficientes reales, $p(x)$, tal que $\forall\varepsilon>0$ y para cualquier función f continua sobre un intervalo $[a,b]$ se cumple que:

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-p(x)|<\varepsilon$$

Solución:

Dado que trabajamos con una función continua en un compacto (intervalo cerrado y acotado), existe $M\in\mathbb{R}$ tal que $|f(x)|\leq M$ para $x\in[a,b]$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass, existe un polinomio $p(x)=\sum a_n x^n$ tal que $|f(x)-p(x)|<\varepsilon$ para $x\in[a,b]$. Así,

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\ dx &= \int_a^b f(x)\Big(f(x)-p(x)\Big)\ dx + \int_a^b f(x)p(x)\ dx\\ &= \int_a^b f(x)\Big(f(x)-p(x)\Big)\ dx\\ &\leq M(b-a)\varepsilon\end{aligned}$$

Como el ε es arbitrariamente pequeño, entonces $\int_a^b f^2(x)\ dx = 0$. Si f no es idénticamente cero, entonces existe un $\xi \in [a, b]$ tal que $f(\xi) = \eta \neq 0$. Por continuidad, $f^2(x) > \frac{\eta^2}{2}$ para una vecindad de ξ, $\alpha \leq x \leq \beta$. Entonces,

$$\int_a^b f^2(x)\ dx \geq \int_\alpha^\beta f^2(x)\ dx \geq \frac{\eta^2(\beta - \alpha)}{2} > 0$$

lo que es una contradicción.

■

5. Polinomios de Taylor y transición a Cálculo II

5.1. Aplicaciones del Teorema de Taylor

(1) Determine los polinomios de Taylor en torno a $x_0 = 0$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x$

b) $g(x) = \sin(x)$

c) $h(x) = \ln(x+1)$

Solución:

a) Recordemos la fórmula del polinomio de Taylor de orden n en torno a x_0:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

con

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

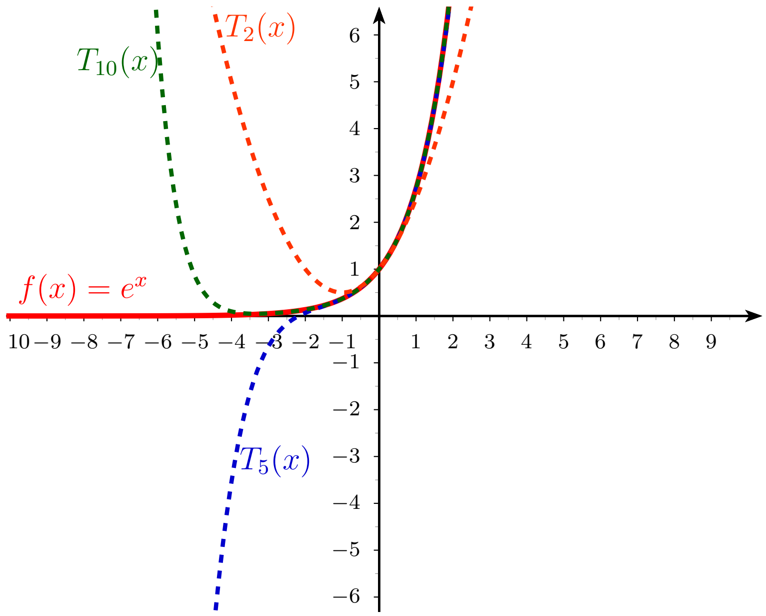
$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad z \in (x, x_0)$$

En este caso, notemos que $f^{(k)} = e^x,\ \forall k$. Así,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k + R_n(f)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(f)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(f)$$



Aproximaciones a la función $f(x) = e^x$ con polinomios de Taylor.

b) En el caso de la función seno, se tiene que:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \sin(x) &\Rightarrow\quad f^{(0)}(0) &= 0\\
f^{(1)}(x) &= \cos(x) &\Rightarrow\quad f^{(1)}(0) &= 1\\
f^{(2)}(x) &= -\sin(x) &\Rightarrow\quad f^{(2)}(0) &= 0\\
f^{(3)}(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow\quad f^{(3)}(0) &= -1\\
f^{(4)}(x) &= \sin(x) &\Rightarrow\quad f^{(4)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

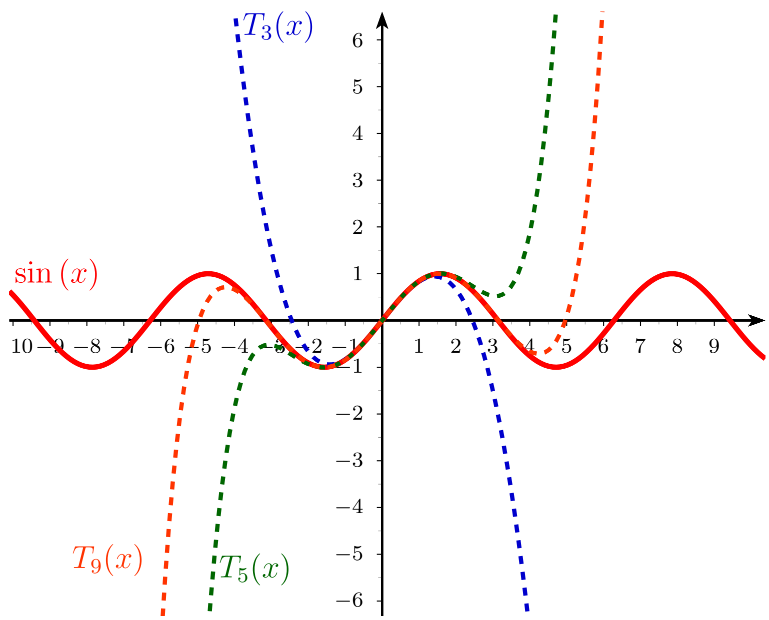
Notemos que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & k = 0, 4, 8, \cdots \\ \cos(x) & k = 1, 5, 9, \cdots \\ -\sin(x) & k = 2, 6, 10, \cdots \\ -\cos(x) & k = 3, 7, 11, \cdots \end{cases}$$

Así,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_n(f)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + R_n(f)$$



Aproximaciones a la función $f(x) = \sin(x)$ con polinomios de Taylor.

c) Para el caso del logaritmo natural, vemos que:

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= \ln(x+1) \\ f^{(1)}(x) &= \frac{1}{x+1} \\ f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} \\ f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^{k+1}\,(k-1)!}{(x+1)^k}, \text{ si } k>0 \end{aligned}$$

Entonces, para $k > 0$ tenemos:

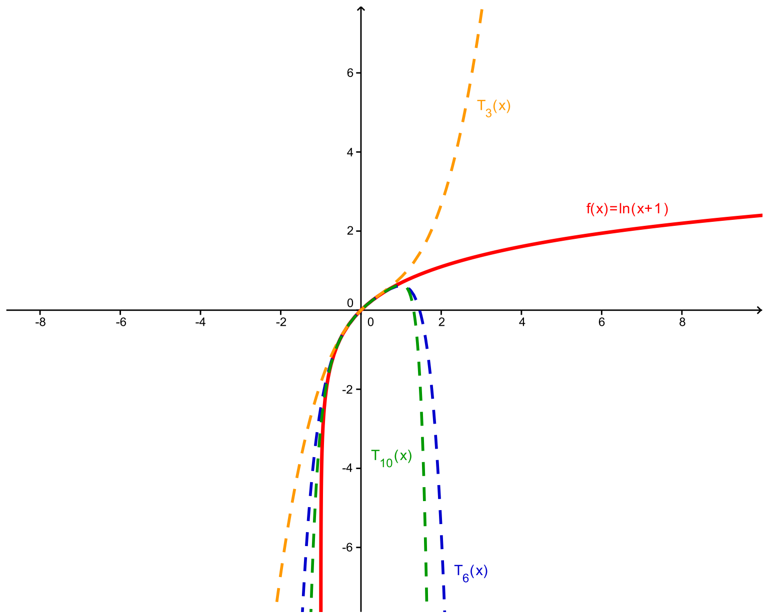
$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{(-1)^{k+1}\,(k-1)!}{(x_0+1)^k\; k!}(x-x_0)^k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x)^k$$

Para $k = 0$ tenemos:

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{\ln(1)}{0!} = 0$$

Así,

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x)^n + R_n(f)$$



Aproximaciones a la función $f(x) = \ln(x+1)$ con polinomios de Taylor.

■

(2) Si $P(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-1)^2$ es el Polinomio de Taylor de orden 2 de $y = f(x)$ en $x = 1$, demuestre que f tiene un mínimo local en $x = 1$.

Solución:

Como el polinomio de Taylor de segundo orden cumple

$$p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1), \quad p''(1) = f''(1)$$

y $p(1) = 1,\ p'(1) = 0,\ p''(1) = \frac{1}{2}$, tenemos que $f(1) = 1,\ f'(1) = 0,\ f''(1) = \frac{1}{2}$. Entonces, por el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos concluimos que $x = 1$ es un mínimo local para f.

■

(3) *a*) Utilice el Teorema de Taylor para aproximar $\sin(0.1)$ con su polinomio de grado $n = 3$ y determine la precisión de la aproximación.

b) Determine el grado del polinomio de Taylor desarrollado en torno a $x_0 = 1$ que debe utilizarse para aproximar $\ln(1.2)$ de manera que el error sea menor que 0.001.

Solución:

a) Recordemos que:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4, \qquad 0 < z < 0.1$$

Por consiguiente,

$$\sin(0.1) \approx 0.1 - \frac{(0.1)^3}{6} \approx 0.1 - 0.000167 = 0.099833$$

Como $f^{(4)}(z) = \sin(z)$, se sigue que el error $|R_3(0.1)|$ puede acotarse como sigue:

$$0 < \sin(z) < 1$$

$$0 < \frac{\sin(z)}{4!} < \frac{1}{4!}$$

$$0 < \frac{\sin(z)}{4!}(0.1)^4 < \frac{1}{4!}(0.1)^4 \approx 0.000004$$

$$0 < R_3(z) < 0.000004$$

Lo que implica que,

$$0.099833 < \sin(0.1) = 0.099833 + R_3(z) < 0.099833 + 0.000004$$

$$0.099833 < \sin(0.1) < 0.099837$$

b) Utilizando los cálculos anteriores, notemos que para $f(x) = \ln(x+1)$:

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Por tanto, por el Teorema de Taylor sabemos que el error $|R_n(1.2)|$ está dado por:

$$\begin{aligned} |R_n(1.2)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(1.2-1)^{n+1} \right| &= \frac{n!}{z^{n+1}} \left[\frac{1}{(n+1)!}(0.2)^{n+1} \right] \\ &= \frac{(0.2)^{n+1}}{z^{n+1}(n+1)} \end{aligned}$$

de donde $1 < z < 1.2$. En este intervalo $\frac{(0.2)^{n+1}}{z^{n+1}(n+1)}$ es menor que $\frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)}$. Así, buscamos n tal que:

$$\frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)} < 0.001 \Longrightarrow 1000 < (n+1)5^{n+1}$$

Por ensayo y error, u otro método de cálculo, puede determinarse que el menor valor de n que satisface la desigualdad es $n = 3$.

■

(4) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Sea $R : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que sea $n - veces$ derivable en cierto entorno de $x_0 \in I$. Entonces,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \Longleftrightarrow R(x_0) = R'(x_0) = \cdots = R^{(n)}(x_0) = 0$$

b) Si $R_n(x)$ es el resto del polinomio de Taylor de grado n, entonces pruebe que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Solución:

a) $(\Longleftarrow)$ Dado que la función es $n - veces$ diferenciable, utilizamos la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} \quad & \underbrace{=}_{\mathcal{L}'\mathcal{H}} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{R'(x)}{n(x - x_0)^{(n-1)}} \\
& \underbrace{=}_{\mathcal{L}'\mathcal{H}} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(2)}(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{(n-2)}} \\
& \cdots \\
& \underbrace{=}_{\mathcal{L}'\mathcal{H}} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{R^n(x)}{n!(x - x_0)^{(0)}} \\
& = \quad 0
\end{aligned}$$

$(\Longrightarrow)$ Si $\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n}$ existe, entonces debe cumplirse que $\lim_{x \to x_0} R(x) = 0$. Como la función R es continua, $R(x_0) = 0$.
Ahora bien, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R'(x)}{n(x - x_0)^{(n-1)}} = 0$$

Repitiendo el argumento anterior, es claro que $\lim_{x \to x_0} R'(x) = 0$ y, como la función R' es continua -dado que R es $n - veces$ diferenciable- se concluye que $R'(x_0) = 0$.
Iterando el proceso anterior $n - veces$, finalmente concluiremos que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R^n(x)}{n!(x - x_0)^{(0)}} = 0$$

y por tanto $R^{(n)}(x_0) = 0$. Finalmente,

$$R(x_0) = R'(x_0) = \cdots = R^{(n)}(x_0) = 0$$

b) Como por definición de resto de Taylor, $R_n(x) = f(x) - T_n(f, x_0)$, tenemos que R_n es derivable $n - veces$ y que además todas sus derivadas hasta el orden n y su valor funcional en $x = x_0$ son cero, entonces por el Teorema anterior tenemos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

$\blacksquare$

(5) Calcule los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin(x) - x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x) - \ln(1 + x^2)}{x^2 - x\tan(x)}$

Solución:

a) Utilizando los desarrollos de MacLaurin de las funciones que se encuentran tanto en el numerador como en el denominador, es decir, como

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + R_3(x), \qquad \text{con } \lim_{x \to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0$$

$$\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + r_3(x), \qquad \text{con } \lim_{x \to 0} \frac{r_3(x)}{x^3} = 0$$

Así,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin(x) - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + R_3(x)}{-\frac{x^3}{6} + r_3(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6} + \frac{R_3(x)}{x^3}}{-\frac{1}{6} - \frac{r_3(x)}{x^3}} = -1$$

b) Todos los polinomio de Taylor se calcularan con $n = 5$. El polinomio de Taylor de $\sin(x)$ para $n = 5$, se puede obtener a partir de tomar el cuadrado del polinomio de Taylor de grado 5 para $\sin(x)$, es decir:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + 2\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\frac{x^5}{5!} + \left(\frac{x^5}{5!}\right)^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{10} - \frac{x^8}{60} + \frac{x^{10}}{120^2} \end{aligned}$$

Luego, el polinomio de Taylor de $\sin^2(x)$ que necesitamos es

$$x^2 - \frac{x^4}{3}$$

Usando el polinomio de Taylor para $\ln(1+x)$, obtenemos el polinomio de grado 5 para $\ln(1+x^2)$, que viene dado por

$$x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} \Longrightarrow x^2 - \frac{x^4}{2}$$

Finalmente, debemos obtener el polinomio de Taylor de $\tan(x)$ de grado cinco o inferior; para esto usamos los polinomios de Taylor de las funciones seno y coseno, dividiéndolas de la siguiente manera:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}}$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcccl} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) & : & \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) & = & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} \\ -\left(x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!}\right) & & & & \\ \hline \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & & & & \\ -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{72}\right) & & & & \\ \hline \frac{2x^5}{15} - \frac{x^7}{72} & & & & \end{array}$$

Considerando los tres polinomios antes calculados,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x) - \ln(1+x^2)}{x^2 - x\tan(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} - x^2 + \frac{x^4}{2}}{x^2 - x^2 - \frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{15}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{6}}{-\frac{x^4}{3} - \frac{2x^6}{15}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6}}{-\frac{1}{3} - \frac{2x^2}{15}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

(6) [Propuesto] Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones dos veces diferenciables tales que $f(a) = f(a)$, $f'(a) = g'(a)$. Demuestre que si, para todo $x \in I$, se tiene que $f(x) \geq g(x)$ entonces $f''(a) \geq g''(a)$.

Solución:

Por el teorema de Taylor, tenemos que:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + R(f) \quad , \quad g(a+h) = g(a) + g'(a)h + \frac{g''(a)}{2}h^2 + R(g)$$

donde

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(f)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{R(g)}{h} = 0$$

Así,
$$f(a+h)-g(a+h)=\Big(f''(a)-g''(a)\Big)\frac{h^2}{2}+\Big(R(f)-R(g)\Big)$$
Por otra parte, $h^2/2\geq 0$ y dado $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ de modo que si $h\in(-\delta,\delta)$ entonces $|R(f)-R(g)|<\epsilon$ (hemos usado que el error se "va rápido" a cero).

Por lo tanto, el signo de la diferencia $f(a+h)-g(a+h)$ coincide con el signo de $f''(a)-g''(a)$. Como, por hipótesis, $f(a+h)\geq g(a+h)$ tenemos que:
$$f''(a)\geq g''(a)$$
de donde se obtiene el resultado. ∎

5.2. Integrales y cálculo de áreas

(1) Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x\arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

b) $\displaystyle\int x\cos(\ln x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$

d) $\displaystyle\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx$

Solución:

a) Integramos por partes: sea $u=\arcsin(x^2)$, y con ello $du=\dfrac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$. Por otra parte, $dv=\dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$, y por ende $v=\dfrac{1}{2}\arcsin(x^2)$. Así,
$$\begin{aligned}\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x\arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx &= \frac{1}{2}\Big(\arcsin(x^2)\Big)^2\Big|_0^{1/\sqrt{2}}-\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x\arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2-\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x\arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx\end{aligned}$$
Por tanto,
$$2\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x\arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx=\frac{\pi^2}{72}\quad\longrightarrow\quad\int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{x\arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,dx=\frac{\pi^2}{144}$$

b) Sea $z=\ln(x)$. Así, $x=e^z$, y con ello $dx=e^zdz$. La integral queda como sigue:
$$\int x\cos(\ln x)\,dx=\int e^z\cos(z)e^z\,dz=\int e^{2z}\cos(z)\,dz$$

Esta última integral se resuelve aplicando integración por partes: $u = e^{2z}$, $dv = \cos(z)dz$; de donde, $du = 2e^{2z}dz$ y $v = \sin(z)$. Con ello,

$$\int e^{2z}\cos(z)\ dz = e^{2z}\sin(z) - 2\int e^{2z}\sin(z)\ dz$$

Volviendo a aplicar integración por partes (ahora con $u = e^{2z}$ y $v = \sin(z)dz$), se llega a:

$$\int e^{2z}\sin(z)\ dz = -e^{2z}\cos(z) + 2\int e^{2z}\cos(z)\ dz$$

Juntando ambas expresiones,

$$\begin{aligned}\int e^{2z}\cos(z)\ dz &= \frac{e^{2z}\Big(\sin(z) + 2\cos(z)\Big)}{5} + C_1 \\ &= \frac{x^2\Big(\sin(\ln x) + 2\cos(\ln x)\Big)}{5} + C_1\end{aligned}$$

c) Tomemos $x = 2\sec(u)$. Así, $dx = 2\sec(u)\tan(u)du$ y $\sqrt{x^2-4} = 2\tan(u)$. Además, $x = 2 \to \sec(u) = 1 \to \cos(u) = 1 \to u = 0$, $x = 4 \to \sec(u) = 2 \to \cos(u) = 1/2 \to u = \pi/3$. Así:

$$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\ dx = \int_0^{\pi/3}\frac{2\tan(u)\cdot 2\sec(u)\tan(u)\ du}{2\sec(u)} = 2\int_0^{\pi/3}\tan^2(u)\ du$$

Empleando la identidad trigonométrica fundamental aplicada a la secante y la tangente,

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{\pi/3}\Big(\sec^2(u) - 1\Big)\ du = 2\int_0^{\pi/3}\sec^2(u)\ du - 2\int_0^{\pi/3} du \\ &= 2\tan(\pi/3) - 2\tan(0) - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

d) Notemos que:

$$\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ dx = \int x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\ dx = \int x\ln(x+1)\ dx - \int x\ln(x)\ dx$$

Para la primera integral, sea $u = \ln(x+1) \to du = \dfrac{dx}{x+1}$. Por otra parte, $dv = xdx \to v = \dfrac{x^2}{2}$. Luego,

$$\begin{aligned}\int x\ln(x+1)\ dx &= \frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x+1}\ dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\int\left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)\ dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln|x+1| - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} + c_1\end{aligned}$$

Para la segunda integral, $u = \ln(x) \to du = \dfrac{dx}{x}$ y $dv = xdx \to v = v = \dfrac{x^2}{2}$. Así:

$$\begin{aligned}\int x \ln(x)\ dx &= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\int x\ dx \\ &= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + c_2\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ dx = \frac{x^2}{4}\ln|x(x+1)| - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\ln|x+1|}{2} + c_3$$

■

(2) Determine el área de las regiones limitadas por las curvas de ecuaciones

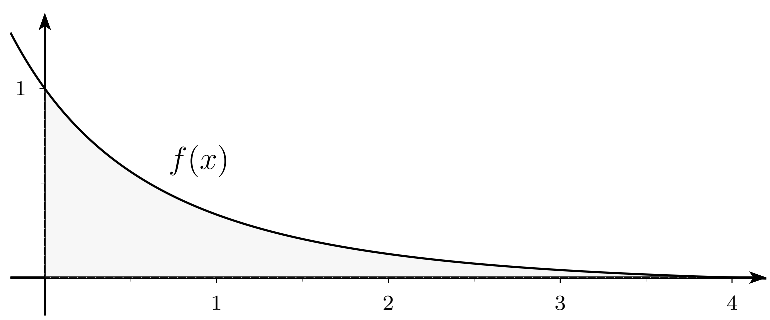
a) $(x+2)^2 y = 4 - x$, con $x, y \geq 0$

b) $y^2 = x^2 - x^4$

c) $y = x$, $y = \tan(x)$ y la recta $x = \dfrac{\pi}{4}$

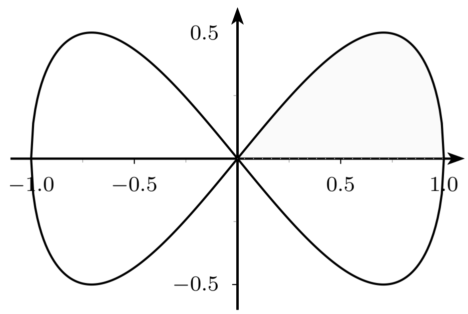
Solución:

a) Ya sea mediante el análisis gráfico (*ver a continuación*) o por cálculo directo, el área en cuestión es la siguiente:



$$\begin{aligned}A = \int_0^4 y\ dx &= \int_0^4 \frac{4-x}{(x+2)^2}dx \\ &= -\int_0^4 \frac{x+2}{(x+2)^2}dx + 6\int_0^4 \frac{dx}{(x+2)^2} \\ &= -\int_0^4 \frac{dx}{x+2} + 6\left[\frac{-1}{x+2}\right]_0^4 \\ &= -[\ln 6 - \ln 2] + 2 \\ &= 2 - \ln 3\end{aligned}$$

b) La curva es simétrica con respecto a los ejes coordenados, razón por la cual el área total será cuatro veces la correspondiente al primer cuadrante:



$$\begin{aligned} A = 4\int_0^1 y\,dx &= 4\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}\,dx \\ &= 4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \left[-\frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

c) Entre $x = 0$ y $x = \pi/4$, las curvas $f(x) = x$ y $g(x) = \tan(x)$ se cortan solo en $x = 0$ (de no ser así, la función auxiliar $h(x) = x - \tan(x)$ tendría dos raíces en dicho intervalo, por lo que $-TVM-$ existiría $\alpha \in (0, \pi/4)$ tal que $h'(\alpha) = 1 - \sec^2(\alpha) = 0$, lo que es imposible ya que entonces $\cos(\alpha) = \pm 1$).

Así, el área pedida es simplemente

$$A = \int_0^{\pi/4} |\tan(x) - x|\,dx$$

Como $g > f$ en $(0, \pi/4]$, tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \Big(\tan(x) - x\Big)\,dx = \left[-\ln(\cos x) - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi/4} \\ &= -\ln(\cos(\pi/4)) - \frac{(\pi/4)^2}{2} + \ln(\cos(0)) - \frac{0^2}{2} \\ &= -\ln(\sqrt{2}/2) - \frac{\pi^2}{32} + \ln(1) + 0 \\ &= \frac{\ln(2)}{2} - \frac{\pi^2}{32} \end{aligned}$$

■