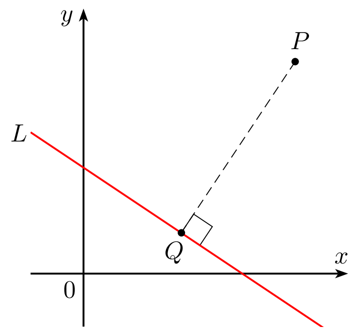
# Geometría Analítica

## 1 Distancia

**DEFINICIÓN** (distancia entre dos puntos)
Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano. Se define la distancia entre ellos como

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

**DEFINICIÓN** (distancia de un punto a una recta)
Sea $L$ una recta y $P(x_1, y_1)$ un punto que no está en la recta $L$. Se define la distancia de $P$ a $L$ como la distancia entre los puntos $P$ y $Q$ donde $Q$ es el punto de intersección de la recta que pasa por $P$ y es perpendicular a $L$. Esta distancia se denota por $d(P, L)$.




**TEOREMA 1** Sean $P(x_1, y_1)$ un punto en el plano y la recta $L$ de ecuación general $ax + by + c = 0$. Entonces, la distancia entre $P$ y $L$ es

$$d(P, L) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\ .$$

**Demostración** Supongamos que la recta no es vertical, entonces $B \neq 0$. Podemos escribir la recta como $y = mx + n$ donde $m = -\dfrac{a}{b}$ y $n = -\dfrac{c}{b}$. La ecuación de la recta que pasa por $P$ y es perpendicular a $L$ es

$$y = -\frac{1}{m}(x - x_1) + y_1\ .$$

Para encontrar el punto $Q$ de intersección de ambas rectas, debemos resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & mx+n \\ y & = & -\dfrac{1}{m}(x-x_1)+y_1 \end{array}\right|$$

La solución es

$$Q\left(\frac{m(y_1-n)+x_1}{1+m^2}, \frac{m^2y_1+mx_1+n}{1+m^2}\right).$$

Por definición $d(P,L)=d(P,Q)$ y para calcular esta distancia note que

$$\begin{array}{rcl} x-x_1 & = & m\cdot\dfrac{y_1-b-mx_1}{1+m^2} \\ y-y_1 & = & \dfrac{mx_1+n-y_1}{1+m^2} \end{array}$$

Por lo tanto,

$$d(P,L)=\sqrt{m^2\frac{(y_1-n-mx_1)^2}{(1+m^2)^2}+\frac{(mx_1+n-y_1)^2}{(1+m^2)^2}}=\frac{|y_1-n+mx_1|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

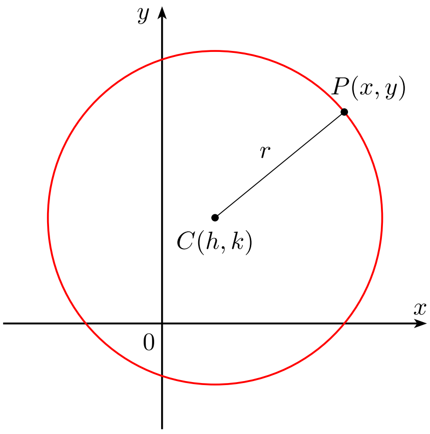
Reemplazando en esta ecuación los valores de $m$ y $n$ en la ecuación anterior se obtiene el resultado.

**EJEMPLO 1** Encontrar la distancia del punto de intersección de las rectas $x-y-1=0$ y $x-2y+1=0$ a la recta $5x+12y-13=0$.

## 2 Circunferencia

**DEFINICIÓN** Una **circunferencia** es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano que están a una misma distancia de un punto fijo. Al punto fijo le llamaremos **centro** de la circunferencia y a la distancia común **radio**.

Sea el centro de la circunferencia un punto fijo $C(h,k)$ y sea el radio igual a $r$. Entonces, si $P(x,y)$ es cualquier punto de la circunferencia, la distancia de $C$ a $P$ es igual a $r$. (Ver figura).



Esta condición equivale a:

$$d(P,Q) = r \iff \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r^2$$

y elevando al cuadrado,

$$\boxed{(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\ .}$$

Esta fórmula exhibe las coordenadas del centro y la longitud del radio.

**EJEMPLO 2** . Encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene como extremos de un diámetro los puntos $A(-4,6)$ y $B(2,0)$.

**TEOREMA 2** La forma general de la ecuación de una circunferencia es

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0\ .$$

la cual puede ser una circunferencia, o punto o el conjunto vacío.

**Demostración** Basta completar cuadrado para obtener

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

- Si $D^2+E^2-4F > 0$ entonces la ecuación es una circunferencia de centro en $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y radio $r = \sqrt{D^2 + E^2 - 4F}/2$.
- Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$ entonces la ecuación es un punto de coordenadas $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$.
- Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$ como la suma de cuadrados no puede ser negativa, en este caso se trata del conjunto vacío.

**EJEMPLO 3** . Determine la gráfica de las siguientes ecuaciones:

1. $5x^2 + 5y^2 - 14x + 7y - 24 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 8x - 18y + 100 = 0$

# 3 Tangentes a una circunferencia

**DEFINICIÓN** La recta tangente a la circunferencia $C$ en un punto $P$ de ella es la recta perpendicular al radio en dicho punto.

Dados un punto $P$ y una circunferencia $C$, puede ocurrir una de las siguientes situaciones:

1. $P$ está en el interior de $C$ y no hay tangentes a $C$ que pasa por $P$.
2. $P$ está en $C$ y hay una tangente a $C$ que pasa por $P$.
3. $P$ está fuera de $C$ y entonces hay dos tangentes a $C$ que pasa por $P$.

**EJEMPLO 4** Encuentre las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $(1, -1)$ a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$.

**Solución** La familia de rectas que pasan por el punto es $y + 1 = m(x - 1)$. Sustituyendo la $y$ en la ecuación de la circunferencia, obtenemos

$$x^2 + (mx - m - 1)^2 + 2x - 6(mx - m - 1) - 6 = 0\,,$$

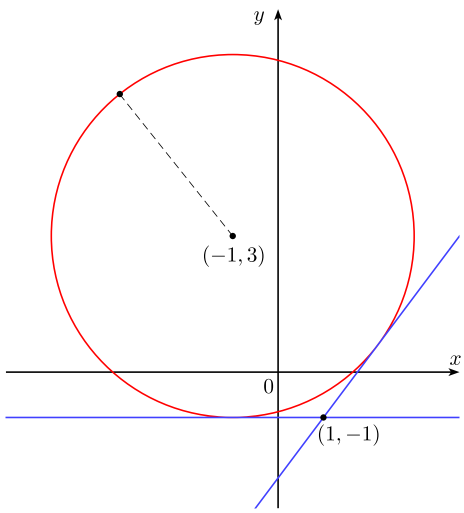
ecuación que se simplifica a

$$(1 + m^2)x^2 + (2 - 2m^2 - 8m)x + m^2 + 8m + 1 = 0\,,$$

y para que la recta sea tangente, el discriminante de esta ecuación deberá anularse, o sea

$$(2 - 2m^2 - 8m)^2 - 4(1 + m^2)(m^2 + 8m + 1) = 0\,,$$

de donde $3m^2 - 4m = 0$, que tiene soluciones $m_1 = 0$ y $m_2 = 4/3$. Por consiguiente, las ecuaciones de las tangentes son $y = -1$ y $y + 1 = \frac{4}{3}(x - 1)$.




**EJEMPLO 5** Hallar las ecuaciones de las tangentes de pendiente $m = 2$ para la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$.

**Solución** Las tangente serán de la forma $y = 2x + k$, sustituyendo en la ecuación de la circunferencia y simplificando obtenemos

$$x^2 + (2x + k)^2 + 2x - 6(2x + k) - 6 = 0 \Longleftrightarrow 5x^2 + (4k - 10)x + (k^2 - 6k - 6) = 0\,.$$

Haciendo el discriminante de esta ecuación igual a cero, se sigue que:

$$(4k-10)^2 - 4(5)(k^2-6k-6) = 0\ ,$$

y simplificando $k^2 - 10k - 55 = 0$, por lo que $k = 5 \pm 4\sqrt{5}$. Por consiguiente, las ecuaciones de las tangentes de pendiente $m = 2$ son $y = 2x + 5 + 4\sqrt{5}$ y $y = 2x + 5 - 4\sqrt{5}$.

**TEOREMA 3** Sean $L$ una recta tangente a la circunferencia $C$ de centro en $Q(a,b)$ y radio $r$. Entonces, la distancia de la recta $L$ al centro de la circunferencia es igual al radio de la circunferencia, es decir $d(Q,L) = r$.

**EJEMPLO 6** . Dada la familia de curvas de ecuación

$$x^2 + y^2 - 8x + k - 1 = 0$$

establecer:

*a*) ¿Para cuáles valores del parámetro $k$ la curva es una circunferencia?

*b*) ¿Para cuáles valores del parámetro $k$ la circunferencia pasa por el punto $P(7,0)$?

*c*) ¿Para cuáles valores del parámetro $k$ la circunferencia es tangente a la recta $x+y-10 = 0$?

**PROPOSICIÓN 1** Dados tres puntos en el plano $P, Q$ y $R$ en el plano, existe una única circunferencia $C$ que pasa por los puntos $P$, $Q$ y $R$.

¿Cuál es el procedimiento para obtener el centro de la circunferencia que pasa por 3 puntos? Video de la película "el hombre sin rostro"

# 4 Familias de circunferencias.

- Dadas las circunferencias de ecuación general

$$\begin{aligned} C_1: &\qquad x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \\ C_2: &\qquad x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0 \end{aligned}$$

  tales que $C_1 \cap C_2 = \{P, Q\}$. Entonces la familia de circunferencias que pasan por los puntos $P$ y $Q$ está dada por

$$C_\lambda: \qquad x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 + \lambda(x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2) = 0$$

- Cuando $\lambda = -1$ obtenemos la ecuación de la recta

$$(D_1 - D_2)x + (E_1 - E_2)y + (F_1 - F_2) = 0$$

  llamada ecuación del eje radical.

- Observación. Para hallar los puntos de intersección de dos circunferencias que se cortan, conviene determinar la ecuación del eje radical y luego buscar las soluciones comunes a la ecuación del eje y a una de las circunferencias. La ecuación del eje radical se obtiene fácilmente, restando miembro a miembro las ecuaciones de las dos circunferencias, preferiblemente en su forma normal.

- Observación. Sean $C_1$ y $C_2$ circunferencias con centros $Q_1$ y $Q_2$ y radios $r_1$ y $r_2$, respectivamente. Entonces

  - Si $d(Q_1, Q_2) > r_1 + r_2$ entonces $C_1 \cap C_2 = \varnothing$.
  - Si $d(Q_1, Q_2) = r_1 + r_2$ entonces $C_1 \cap C_2 = \{P\}$.
  - Si $d(Q_1, Q_2) < r_1 + r_2$ entonces $C_1 \cap C_2 = \{P, Q\}$.

  **EJEMPLO 7** . Encuentre la ecuación del eje radical de las circunferencias $C_1$ y $C_2$ y determine las coordenadas de sus puntos de intersección, donde

$$\begin{array}{ll} C_1 : & (x+2)^2 + (y-4)^2 = 10 \\ C_2 : & (x-1/2)^2 + (y-3/2)^2 = 5/2 \end{array}$$

  **EJEMPLO 8** . Dadas las rectas $y = x + 9$; $x + 2y - 24 = 0$. Encuentre una recta que pasa por la intersección de las rectas anteriores y determine en la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 7 = 0$ una cuerda de longitud $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

# 5 Guía de Ejercicios

1. Encuentre la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el punto de intersección de las rectas $x - y = 1$, $2x + 3y = 22$ y que es tangente a la recta $L_1 :\ 3x + 4y = 16$. Encuentre la tangente a la circunferencia paralela a $L_1$ (no la misma).

   R: $3x + 4y - 46 = 0$

2. Halle la ecuación de la circunferencia que tiene su centro sobre la recta de ecuación $2x + y - 14 = 0$ y que pasa por las intersecciones de las circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ y $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 9 = 0$.

   R: $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 21 = 0$

3. Hallar la distancia entre las rectas $L_1$ y $L_2$ de ecuaciones asociadas $-3y + 2x = 3$, $6y - 4x = 3$, respectivamente.

   R: $d = 9/2\sqrt{13}$

4. Sean $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$. Demostrar que el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que $d(A, P) = 2 \cdot d(B, P)$ es una circunferencia, indicando el centro y el radio.

5. Demostrar que las tangentes desde el origen a la circunferencia $x^2+y^2-14x+2y+25 = 0$ son perpendiculares entre si.

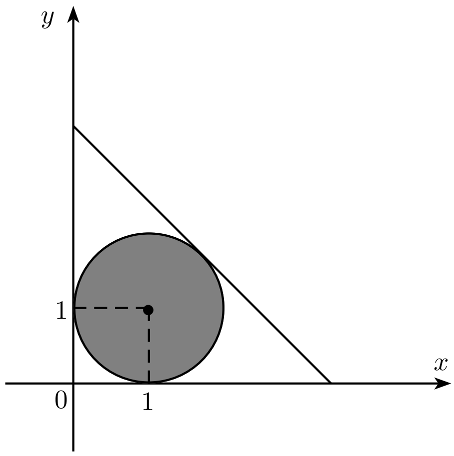
6. Dada la circunferencia $C$ de ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 5y - \dfrac{25}{4} = 0$.

   *a*) Determine su centro y su radio.

   *b*) Sea $C_1$ otra circunferencia cuyo centro es el mismo que el centro de $C$ y es tangente a la recta $4x - 12y = 1$, determine la ecuación de $C_1$.

   R: a) $C(2, -5/2)$ y $r = \sqrt{33/2}$; b) $(x-2)^2 + \left(y + \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{169}{160}$.

7. Un tanque cilíndrico reposa su lado paralelamente y contra la pared de un almacén (ver la figura). Hay una escalera de mano apoyada contra el edificio, que pasa sobre el tanque, apenas tocándolo, y tiene una pendiente de $-1$. Encuentre una ecuación para la recta de la escalera y la longitud de la escalera.




   R: $y = -x + 2 + \sqrt{2}$, $d = (2 + \sqrt{2})\sqrt{2}$.

8. Dadas las rectas $y = x + 9$ y $x + 2y - 24 = 0$. Encuentre una recta que pasa por la intersección de las rectas anteriores y determine en la circunferencia $x^2+y^2-4x+4y+7 = 0$ una cuerda de longitud $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.