MAT1620 ★ Cálculo 2

Interrogación 3

1.

a) Sea

$$f(x,y,z) = \frac{yz}{x}$$

a. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie

$$f(x,y,z) = 6$$

en $P(1,2,3)$.

Solución:

Tenemos:

$$\nabla f(x,y,z) = -\frac{yz}{x^2}\vec{\imath} + \frac{z}{x}\vec{\jmath} + \frac{y}{z}\vec{k}$$

Un vector normal al plano tangente a la superficie en $P(1,2,3)$ es:

$$\vec{n} = \nabla f(1,2,3) = -6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

Y así, la ecuación del plano tangente es:

$$-6(x-1) + 3(y-2) + 2(z-3) = 0$$

b. Sea $\vec{u} = \vec{\imath} + c\vec{\jmath} - c\vec{k}$, donde c es un número real. Encuentre el valor de c tal que la derivada direccional $Df_{\vec{u}}(P) = 0$.

Solución:

La derivada direccional es:

$$\begin{aligned}(D_{\vec{u}}f)(P) &= \nabla f(1,2,3) \cdot \vec{u} \\ &= \left(-6\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}\right) \cdot \left(\vec{\imath} + c\vec{\jmath} - c\vec{k}\right) \\ &= -6 + c\end{aligned}$$

Por lo tanto, la derivada direccional es cero cuando $c = 6$.

b) Sean:

$$f(x,y) = x^2y + xy^2$$
$$g(s,t) = (x(s,t), y(s,t)) = (t-2, st)$$

Usando la regla de la cadena (si usa otro método no obtendrá puntaje), calcule:

$$\frac{\partial h}{\partial s}(1,2)$$

donde $h(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$.

Solución: Por la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$$

Donde $(s,t) = (1,2), (x,y) = (2-2, 1\cdot 2) = (0,2)$, así:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + 2xy; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 0; \quad \frac{\partial x}{\partial s}(1,2) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = t; \quad \frac{\partial y}{\partial s}(1,2) = 2$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial s}(1,2) &= \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)\frac{\partial x}{\partial s}(1,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)\frac{\partial y}{\partial s}(1,2)\\ &= 4\cdot 0 + 0\cdot 2\\ &= 0\end{aligned}$$

2. Suponga que la temperatura, en grados Celsius, en el punto (x, y) de una lámina de metal es:

$$T(x, y) = 30e^{-(x^2+4y^2)}$$

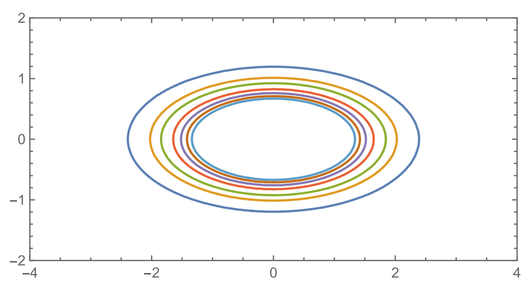
a) Identifique si las curvas de nivel de T son círculos, elipses, hipérbolas u otra curva y haga un bosquejo estas.

Solución:

Observe que $30e^{-(x^2+4y^2)}$ es constante precisamente cuando $x^2 + 4y^2$ es constante, es decir, $x^2 + 4y^2 = c$ y por lo tanto las curvas de nivel son elipses de la forma:

$$\frac{x^2}{\sqrt{c}^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2} = 1$$

Y su gráfico son elipses centradas en $(0,0)$ cuyo diámetro en x es el doble del diámetro en y:



b) Calcule el vector gradiente $\nabla T(x, y)$.

Solución:

$$\nabla T(x, y) = \langle T_x, T_y \rangle = \left\langle -60xe^{-(x^2+4y^2)}, -240ye^{-(x^2+4y^2)} \right\rangle$$

c) Suponga que en el punto $(1,1)$ hay una hormiga que está a punto de moverse con velocidad unitaria. ¿En qué dirección se debe mover la hormiga de manera tal que experimente el aumento más rápido de la temperatura?

Solución:

La hormiga experimentará la máxima razón de cambio de aumento de la temperatura si camina en la dirección:

$$\nabla T(1,1) = \langle -60e^{-5}, -240e^{-5} \rangle$$

Que es la dirección del vector $\langle -1, -4 \rangle$.

3.

a) Encuentre y clasifique todos los puntos críticos (máximo local, mínimo local o punto silla) de la función:

$$f(x,y) = x^2y - x^2 - 2y^2$$

Solución:

Tenemos $f_x = 2xy - 2x$, $f_y = x^2 - 4y$, por lo tanto, los puntos críticos son las soluciones de:

$$\begin{cases} 2xy - 2x = 0 \\ x^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación $x = 0$ o $y = 1$, luego, de la segunda ecuación $y = 0$ o $x = \pm 2$, de donde obtenemos los puntos críticos:

$$(0,0), \qquad (-2,1), \qquad (2,1)$$

Para clasificar los puntos críticos calculamos:

$$f_{xx} = 2y - 2, \qquad f_{xy} = 2x, \qquad f_{yy} = -4$$

Y así:

$$D = -8y + 8 - 4x^2$$

De donde clasificamos:

- En $(0,0)$, $f_{xx} = -2 < 0$ y $D = 8$, por lo tanto, f tiene un máximo local.
- En $(\pm 2,1)$, $D = -16$, por lo tanto, f tiene puntos sillas.

b) Usando multiplicadores de Lagrange (si usa otro método no obtendrá puntaje), encuentre el punto del plano $z = 8x - y$ más cercano al punto $P(9,4,2)$.

Solución:

Sean

$$f(x, y, z) = \text{distancia}\big((x, y, z), (9,4,2)\big)^2 = (x - 9)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2$$

y

$$g(x, y, z) = 8x - y - z$$

Tenemos que resolver el sistema de ecuaciones formado por $\nabla f = \lambda \nabla g$ y $8x - y = z$, es decir:

$$\begin{cases} 2(x - 9) = 8\lambda \\ 2(y - 4) = -\lambda \\ 2(z - 2) = -\lambda \\ 8x - y = z \end{cases}$$

Despejamos λ en las tres primeras ecuaciones

$$\begin{cases} 2(x - 9) = 8\lambda \to \lambda = \dfrac{1}{4}(x - 9) \\ 2(y - 4) = -\lambda \to \lambda = -2(y - 4) \\ 2(z - 2) = -\lambda \to \lambda = -2(z - 2) \\ 8x - y = z \end{cases}$$

Luego igualamos:

$$\frac{1}{4}(x - 9) = -2(y - 4) = -2(z - 2)$$

Obtenemos:

$$y = z + 2, \qquad x = -8z + 25$$

Finalmente, sustituimos esto último en la ecuación $8x - y = z$, de donde:

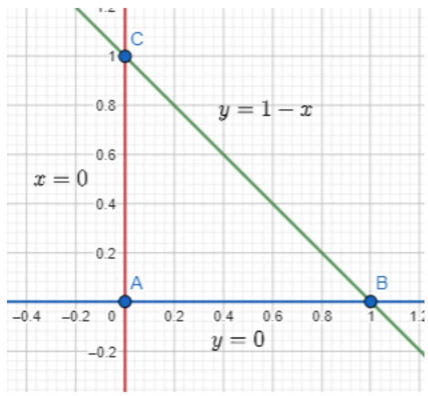
$$\begin{cases} z = 8(-8z + 25) - z - 2 \to z = 3 \\ y = 3 + 2 = 5 \\ x = -8 \cdot 3 + 25 = 1 \end{cases}$$

Y así, el punto del plano que minimiza la distancia es $(1,5,3)$.

4. Determine el máximo y mínimo absoluto de $f(x,y) = 3 + xy - x - y$ sobre la región triangular cerrada D, que consiste en todos los puntos dentro del triángulo y en el triángulo, cuyos vértices son $A(0,0)$, $B(1,0)$ y $C(0,1)$.

Solución:

Un bosquejo de la región D es:



Primero buscamos puntos críticos en el interior de la región:

$$\nabla f = \langle y - 1, x - 1 \rangle = 0 \ \rightarrow y = 1, x = 1$$

Pero como $(1,1)$ no está en la región, ignoramos este punto para el análisis de los extremos de la función.

Ahora buscamos puntos críticos en los lados del triángulo:

- Sobre la recta $x = 0$, con $0 \leq y \leq 1$, que contiene a $\overline{AC}$ tenemos:

  $$f(0,y) = f_1(y) = 3 - y$$

  pero como $f_1'(y) = -1 \neq 0$, no hay puntos críticos. Solo nos queda evaluar en los extremos:

  $$f(0,0) = f_1(0) = 3, \qquad f(0,1) = f_1(1) = 2$$

- Sobre la recta $y = 0$, con $0 \leq x \leq 1$, que contiene a $\overline{AB}$ tenemos:

  $$f(x,0) = f_2(x) = 3 - x$$

  pero como $f_2'(x) = -1 \neq 0$, no hay puntos críticos. Solo nos queda evaluar en los extremos:

  $$f(0,0) = f_2(0) = 3, \qquad f(1,0) = f_2(1) = 2$$

- Sobre la recta $y = 1 - x$, con $0 \leq x \leq 1$, que contiene a $\overline{CB}$ tenemos:

$$\mathrm{f}(x, 1-x) = f_3(x) = 3 + x(1-x) - x - (1-x) = 2 + x - x^2$$

Como $f_3'(x) = 1 - 2x$, tenemos un punto crítico cuando $x = \frac{1}{2}$, que corresponde al punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Evaluamos en ese punto crítico y en los extremos:

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{4}$$

$$f(0,1) = f_3(0) = 3, \qquad f(1,0) = f_3(1) = 2$$

Así, comparando los resultados de todos los puntos evaluados, obtenemos que f tiene un máximo absoluto en el punto $(0,0)$, cuyo valor es 3 y un mínimo absoluto en $(1,0)$ y $(0,1)$ cuyo valor es 2.

¡Éxito!

Con éxito no me refiero a la nota, me refiero a que en sus respuestas vea reflejado su esfuerzo, que se sienta orgulloso de su trabajo y sepa darse cuenta de que es lo que debe mejorar.

Fin.