Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Académica de Verano 2015

MAT1610 ⋆ CALCULO I

INTERROGACION N° 2

1. *a*) Demuestre que la curva de ecuación

$$y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$$

tiene en el punto $P_0(-1, 15)$ una recta tangente que pasa por el origen (2 ptos.).

b) Encuentre todos los otros puntos sobre la curva en los cuales también las rectas tangentes pasan por el origen (4 ptos).

D)

a) La tangente a la curva en el punto P_0 tiene ecuación $y = 15 + f'(-1)(x+1)$. Como $f'(x) = 6x^2 + 26x + 5$ se tiene que $f'(-1) = -15$ y la ecuación será

$$y = -15x,$$

recta que claramente contiene al origen.

b) Toda recta tangente que pase por el origen debe tener ecuación de la forma

$$y = mx,$$

donde $m = f'(x_0)$, con x_0 es la abscisa del punto de tangencia.
Si $y_0 = f(x_0)$, entonces

$$2x_0^3 + 13x_0^2 + 5x_0 + 9 = 6x_0^3 + 26x_0^2 + 5x_0$$

lo que se reduce a la ecuación

$$4x_0^3 + 13x_0^2 - 9 = 0.$$

Como $x_0 = -1$ satisface esta ecuación (por a)) se puede dividir por $x+1$, quedando como factor $4x_0^2 + 6x_0 - 9 = 0$, ecuación que tiene raíces -3 y 3/4.
De modo que los puntos son $P_0(-1, 15), P_1(3/4, 669/32), P_3(-3, 57)$.

2. *a*) Demostrar que si $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\frac{\operatorname{tg} x_2}{\operatorname{tg} x_1} > \frac{x_2}{x_1}$$

b) Dado un punto $P_0(x_0, y_0)$ del primer cuadrante trazar por él una recta que forma un triángulo de área mínima con la parte positiva de los ejes coordenados.

D)

a) Sea la función auxiliar $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$, entonces

$$f'(x) = \frac{x \sec^2 x - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{x^2 \cos^2 x} = \frac{2x - \operatorname{sen} 2x}{2x^2 \cos^2 x}$$

Como $\operatorname{sen} 2x < 2x$ (si $g(x) = x - \operatorname{sen} x, x \in (0, \pi)$, se tiene $g'(x) = 1 - \cos x > 0$, salvo para $x = \frac{\pi}{2}$, por lo que $g(x) > g(0) = 0$) para $x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ se tiene que $f'(x) > 0$ en dicho intervalo, por lo que f es estrictamente creciente allí.

Sean x_1, x_2 en el intervalo, con $x_1 < x_2$ se tiene que $\dfrac{\operatorname{tg} x_1}{x_1} < \dfrac{\operatorname{tg} x_2}{x_2}$, de donde se concluye la afirmación.

b) Considérese un triángulo cuyos lados cortan la parte positiva de los ejes cooredenados en los puntos $P_1(a, 0), P_2(0, b)$; éste es un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes a, b por lo que su área será

$$A = \frac{1}{2} ab.$$

La hipotenusa debe tener ecuación de la forma $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, por lo que

$$\frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} = 1.$$

Despejando b en esta expresión y reemplazándolo en la función de área se llega a

$$A = \frac{y_0}{2} \frac{a^2}{a - x_0}$$

y cuya derivada es

$$A' = \frac{y_0}{2} \frac{a^2 - 2ax_0}{(a - x_0)^2},$$

el cual se anula para $a = 0$ (con $b = 0$) o para $x = 2x_0$ (con $b = 2y_0$).
La factorización $a^2 - 2ax_0 = a(a - 2x_0)$ muestra que la derivada es negativa si $a < 2x_0$ y positiva si $a > 2x_0$, por lo que el mínimo es para la recta

$$\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2x_0} = 1.$$

3. Demostrar que la curva $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ tiene tres puntos de inflexión colineales.

   D)

   $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ por lo que $f'(x) = \dfrac{1-2x-2x^2}{(x^2+1)^2}, f''(x) = 2\dfrac{x^3+3x^2-3x-1}{(x^2+1)^3}$.

   Para encontrar los puntos de inflexión veremos donde $x^3+3x^2-3x-1=0$; esta ecuación es factorizable como $(x^2+4x+1)(x-1)=0$ que tiene como raíces $x_1 = -2-\sqrt{3}, x_2 = -2+\sqrt{3}, x_3 = 1$, con $x_1 < x_2 < x_3$.

   El signo de f'' está determinado por el de su numerador

   $$x^3+3x^2-3x-1 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

   Si $x < x_1$ los tres factores son negativos por lo que $f''(x) < 0$; si $x_1 < x < x_2$ hay uno positivo y dos negativos, por lo que $f''(x) > 0$ y en x_1 hay una inflexión.

   Si $x_2 < x < x_3$ hay ahora dos factores positivos y uno negativo, por lo que $f''(x) < 0$ y en x_2 hay inflexión y si $x_3 < x$ los tres factores son positivos y en x_3 también la hay.

   Por otra parte $f(x_1) = -\dfrac{\sqrt{3}+1}{8+4\sqrt{3}}, f(x_2) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{8-4\sqrt{3}}, f(x_3) = 1$.

   Sea l_1 la recta que pasa por P_1P2: ésta tiene pendiente $m_1 = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \dfrac{1}{4}$.

   Por su parte la recta l_2 que pasa por P_1P_3 tiene pendiente: $m_2 = \dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1} = \dfrac{1}{4}$.

   Ambas rectas tienen igual pendiente y pasan por un mismo punto por lo que son iguales y los puntos de inflexión sí son colineales.

4. Determinar para $f(x) = (1-x)x^{\frac{2}{3}}$, cuando corresponda:

   a) Dominio y recorrido.

   b) Comportamiento en los extremos del dominio

   c) Asíntotas verticales y horizontales.

   d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento; extremos locales y globales.

   e) Intervalos de concavidad y convexidad; puntos de inflexión.

   f) Esbozar el gráfico.

   D)

   a) Claramente el dominio es todo $\mathbb{R}$.

b) Las fronteras del dominio son $\pm\infty$.
Además $\lim_{x->-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x->+\infty} f(x) = +\infty$.
Como la función es continua, por el Teorema del Valor Intermedio, debe ser sobreyectiva y el recorrido es <u>también $\mathbb{R}$</u>.

c) Claramente no hay asíntotas verticales; para asíntotas oblicuas:

$$\lim_{x->\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x->\pm\infty} (\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} - x^{\frac{2}{3}}) = -\infty,$$

por lo que no las hay.

d) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}$ por lo que $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$
Los puntos críticos están en $x = \frac{2}{5}$ y en $x = 0$.
La derivada se puede escribir también como

$$f'(x) = \frac{2 - 5x^{\frac{1}{3}}}{x},$$

la cual, a la izquierda de 0 es negativa; entre 0 y $\frac{2}{5}$ es positiva y para valores mayores que $\frac{2}{5}$ es nuevamente negativa.
De modo que los intervalos de decrecimiento son $(-\infty, 0), (\frac{2}{5}, \infty)$ y el de crecimiento es $(0, \frac{2}{5})$.
En $x = 0$ hay mínimo local 0 y en $x = \frac{2}{5}$ hay máximo local; por el comportamiento en infinito se observa que no hay mínimo ni máximo global.

e) $f''(x) = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} - \dfrac{5}{3}x^{\frac{1}{3}} = -\dfrac{2}{9}\dfrac{5x+1}{x^{\frac{4}{3}}}$.
Esta expresión se anula en $\dfrac{-1}{5}$ y no está definida en $x = 0$. A la izquierda de $-\frac{1}{5}$ es negativa, es decir la curva es cóncava; entre $-\frac{1}{5}$ y 0 positiva (convexidad) y a la derecha de 0 nuevamente negativa.
Por tanto la curva es cóncava en $(-\infty, -\dfrac{1}{5})$ y $(0, +\infty)$ y convexa entre $(-\dfrac{1}{5}, 0)$.

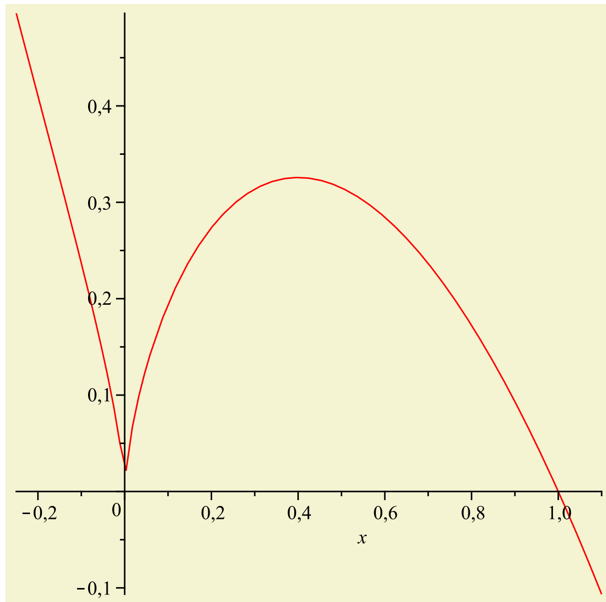
$f)$ 

Fig. 1

Sin consultas
Tiempo de duración: 2 horas