PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2022

Pauta Interrogación 2 - MAT1610

1. a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $y^2 + x^2y + y^3x = 2 + ye^x$ en el punto $(0, -1)$.

   Solución:
   Al derivar implícitamente obtenemos que

   $$2yy' + 2xy + x^2y' + 3y^2y'x + y^3 = y'e^x + ye^x$$

   reemplazando vemos que la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(0, -1)$ es 0, luego la recta tiene ecuación

   $$y = -1.$$

   Distribución de puntajes:
   - (1 punto) por derivar correctamente.
   - (1 punto) por encontrar la pendiente.
   - (1 punto) por determinar la ecuación de la recta.

   b) Derive la función $f(x) = (x^2 + 1)^{\arctan(x)}$.

   Solución:

   Sea $y = (x^2 + 1)^{\arctan(x)}$, luego

   $$\ln(y) = \arctan(x)\ln(x^2 + 1)$$

   derivando la igualdad anterior obtenemos que

   $$\frac{y'}{y} = \frac{\ln(x^2+1)}{1+x^2} + \frac{2x\arctan(x)}{x^2+1}$$

   por lo tanto

   $$f'(x) = (x^2+1)^{\arctan(x)}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{1+x^2} + \frac{2x\arctan(x)}{x^2+1}\right)$$

   Distribución de puntajes:
   - (1 punto) por hacer algún cambio para usar el logarítmo y bajar el exponente.
   - (1 punto) por derivar el logarítmo correctamente.
   - (1 punto) por resultado final.

2. a) Considere la función $f(x) = 1 + xe^{1/x}$. Demuestre que existe un único $x_0 \in [-2, -1]$ tal que $f(x_0) = 0$.

Solución:

Observe que f es una función continua en el intervalo $[-2, -1]$ ya que $g(x) = e^{1/x}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$, $h(x) = x$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y sabemos que producto y suma de funciones continuas es continua. Además, ya que $f(-2) = 1 - 2e^{-1/2} < 0$ y que $f(-1) = 1 - e^{-1} > 0$ tenemos, por el TVI, que existe al menos un $x_0 \in (-2, -1)$ con $f(x_0) = 0$.

Si la función tuviese más de un cero en el intervalo $(-2, -1)$, dado que f es derivable en $(-2, -1)$, por el Teorema de Rolle existiría un $c \in (-2, -1)$ tal que

$$f'(c) = e^{1/c} - \frac{e^{1/c}}{c} = 0$$

pero el único real que satisface dicha igualdad es $c = 1$, como dicho punto no está en el intervalo $(-2, -1)$, tenemos que existe un único $x_0 \in (-2, -1)$ con $f(x_0) = 0$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por verificar las hipótesis y usar el TVi para ver que tiene al menos una.
- (1 punto) por verificar las hipótesis y usar correctamente Rolle.
- (1 punto) por conclusión.

b) Calcule

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}(4x) \ln(x)$$

Solución:

Observe que

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}(4x) \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\csc(4x)}$$

y este último es de la forma $\dfrac{-\infty}{\infty}$ por lo tanto podemos usar la regla del H'ôpital obteniendo que:

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}(4x) \ln(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\csc(4x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-4\csc(4x)\cot(4x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(4x)}{-4x\cos(4x)} = 0$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por llevarlo a forma adecuada para usar L'Hôpital.
- (1 punto) por usar correctamente el L'Hôpital.
- (1 punto) por resultado final.

3. El agua sale de un déposito en forma de cono invertido a razón de $10.000 cm^3/min$ al mismo tiempo que se bombea agua al déposito a razón constante. El déposito mide $6mt$ de altura, y el diámetro en la parte superior es de $4mt$. Si el nivel del agua se eleva a razón de $20cm/min$ cuando la altura del agua es de $2cm$, calcule la razón a la que el agua está siendo bombeada al estanque.

Solución:

Considere
$E(t)$: Cantidad de agua que ha **Entrado** al tanque hasta el instante t.
$S(t)$: Cantidad de agua que ha **Salido** del tanque hasta el instante t.
$V(t)$: Cantidad o volumen de agua que hay en el tanque en el instante t.
$h(t)$: Altura del nivel de agua que está en el tanque en el instante t.
$r(t)$: radio correspondiente del nivel de agua en el tanque en el instante t.

Note que
$V(t) = E(t) - S(t)$ o $E(t) = V(t) + S(t)$
$V(t) = \frac{\pi}{3}(r(t))^2 h(t)$
$\frac{dh}{dt} = 20\frac{cm}{min}$
$\frac{dS}{dt} = 10000\frac{cm^3}{min}$
Así,

$$E(t) = \frac{\pi}{3}(r(t))^2 h(t) + S(t)$$

Para calcular, $\frac{dE}{dt}$ se deriva la igualdad anterior pero, como no se conoce $\frac{dr}{dt}$ en el instante de interés y, como $r(t)$ y $h(t)$ está relacionados, se puedes escribir a $r(t)$ en término de $h(t)$ ya que

$$\frac{r(t)}{2} = \frac{h(t)}{6}$$

lo cual indica que

$$r(t) = \frac{2}{6}h(t) = \frac{1}{3}h(t)$$

Por lo tanto,

$$E(t) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{h(t)}{3}\right)^2 h(t) + S(t) = \frac{\pi}{27}(h(t))^3 + S(t)$$

derivando respecto de t,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi}{27}3(h(t))^2\frac{dh}{dt} + \frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{9}(h(t))^2\frac{dh}{dt} + \frac{dS}{dt}$$

Todos los valores involucrados en el lado derecho están dados para el instante de tiempo de interés, entonces,

$$\frac{dE}{dt} = \left(\frac{\pi}{9}(200)^2 20 + 10000\right)\frac{cm^3}{min} = \left(\frac{800000\pi}{9} + 10000\right)\frac{cm^3}{min}$$

Note que se utilizó que $h(t) = 2m = 200cm$
Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por plantear el modelo correctamente.
- (1 punto) por encontrar la relación entre las variables el modelo.
- (1 punto) por derivar el modelo correctamente.
- (1 punto) por reemplazar los datos dados.
- (1 punto) por resultado final.

4. Considere la función $f(x) = x^2e^{-x}$ definida en el intervalo $[-2, 3]$.

   a) Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   b) Determine extremos locales y globales.

   c) Determine intervalos donde f es cóncava hacia arriba (convexa) y donde es cóncava hacia abajo (cóncava).

   d) Determine, en caso que existan, los puntos de inflexión.

   Solución:
   Derivando obtenemos que
$$f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$$
   por lo tanto $f'(x) = 0$ si y solo si $x = 0$ o $x = 2$. Para obtener los extremos globales evaluamos en dichos puntos y en los extremos el intervalo obteniendo
$$f(-2) = 4e^2,\ f(3) = 9e^{-3},\ f(0) = 0,\ f(2) = 4e^{-2}$$
   por lo tanto el máximo global es $4e^2$ y el mínimo global (y local) es 0. Al estudiar los signos de la derivada tenemos que $f'(x) > 0$ en $(0, 2)$ y es negativa en $(-2, 0)$ y en $(2, 3)$, por lo que f es creciente en $(0, 2)$ y decreciente en $(-2, 0)$ y en $(2, 3)$, además de que $f(2) = 4e^{-2}$ es máximo local.
   Si derivamos nuevamente tenemos que
$$f''(x) = (x^2 - 4x + 2)$$
   obteniendo que $f''(x) = 0$ si y solo si $x = 2-\sqrt{2}$ y que el signo cambia de positivo a negativo en ese punto, por lo tanto la función es cóncava hacia arriba en $(-2, 2-\sqrt{2})$ y cóncava hacia abajo en $(2-\sqrt{2}, 3)$ y el único punto de inflexión es $\left(2-\sqrt{2}, (2-\sqrt{2})^2e^{\sqrt{2}-2}\right)$.
   Distribución de puntajes:
   - (2 puntos) por los extremos globales, uno por cada extremo.
   - (1 punto) por el máximo local .
   - (1 punto) por los intervalos de monotonía.
   - (1 punto) por los intervalos de concavidad.
   - (1 punto) Por el punto de inflexión.