Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2017

MAT 1620 – Cálculo II

Solución Interrogación 1

1. Determine si la integral es convergente o divergente

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}\,.$$

Evalúe la integral en el caso que sea convergente.

Solución. **Solución 1.** Notemos que el integrando tiene una discontinuidad en $x = 1$ y usando el criterio de comparación al límite, escogemos $g(x) = 1/(x-1)$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/(x-1)(x^2+4)}{1/(x-1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{x^2+4}\,.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x^2+4} = \dfrac{1}{5} \neq 0$. Como $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x-1}$ diverge, la integral dada inicialmente también diverge.

Solución 2. Usando el método de fracciones parciales

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+4}\right)\,.$$

Entonces, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{x^3-x^2+4x-4} &= \lim_{a\to 1}\int_a^2 \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{1}{5}\lim_{a\to 1}\int_a^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2+4}\right)\,dx \\ &= \frac{1}{5}\lim_{a\to 1}\left[\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4| - \frac{1}{4}\arctan\left(\frac{x}{4}\right)\right]_a^2\end{aligned}$$

Este último límite es divergente de donde se sigue que la integral dada inicialmente es divergente.

Puntaje Pregunta 1. (Solución 1)

- 1 punto por indicar que la integral es impropia de tipo II.
- 2 punto por comparar con la función $1/(x-1)$.
- 1 punto por calcular el límite del cociente $f(x)/g(x)$.
- 2 punto por indicar que la integral impropia $\int_1^2 g(x)dx$ es divergente y concluir.

Puntaje Pregunta 1. (Solución 2)

- 1 punto por indicar que la integral es imporpia de tipo II.
- 2 punto por usar el método de fracciones parciales.
- 2 punto por calcular las primitivas de las integrales involucradas.
- 1 punto por concluir que la integral es divergente.

2. Si f' es continua en $[0,+\infty[$ y $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, muestre que $\displaystyle\int_0^\infty f'(x)\,dx=-f(0)$.

Solución. Usando el Teorema fundamental del Cálculo, vemos que

$$\int_0^\infty f'(x)\,dx \;=\; \lim_{b\to\infty}\int_0^b f'(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}[f(b)-f(0)]=\lim_{b\to\infty} f(b)-f(0)=0-f(0)=-f(0)\,.$$

Puntaje Pregunta 2.

- 1,5 puntos por usar la definición de integral impropia de tipo I y obtener:

$$\int_0^\infty f'(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_0^b f'(x)\,dx$$

- 3 puntos por utilizar el Teorema Fundamental del Cálculo y obtener:

$$\int_0^b f'(x)\,dx=[f(b)-f(0)]$$

- 1,5 puntos por usar la hipótesis $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$ y concluir.

3. Demostrar que la sucesión $a_n = \displaystyle\int_1^2 (\ln(x))^n \, dx$ converge a cero.

Solución. La función $f(x) = \ln(x)$ es creciente, luego $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2)$ para todo $x \in [1, 2]$. Entonces, para todo $x \in [1, 2]$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$0 \leqslant (\ln(x))^n \leqslant (\ln(2))^n \Longleftrightarrow 0 \leqslant \int_1^2 (\ln(x))^n \, dx \leqslant (\ln(2))^n \Longleftrightarrow 0 \leqslant a_n \leqslant (\ln(2))^n \, .$$

Ahora bien, $\lim\limits_{n \to \infty} (\ln(2))^n = 0$ ya que $(\ln(2)) < 1$.
Usando el Teorema del Sandwich obtenemos que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Puntaje Pregunta 3.

- 1 punto por utilizar que la función $\ln(x)$ es creciente.
- 1 punto por obtener la desigualdad $0 \leqslant (\ln(x))^n \leqslant (\ln(2))^n$ para todo $x \in [1, 2]$.
- 1 punto por integrar y conlcuir que $0 \leqslant a_n \leqslant (\ln(2))^n$.
- 1 punto por verificar que $\lim\limits_{n \to \infty} (\ln(2))^n = 0$.
- 2 puntos por usar el Teorema del Sandwich y concluir que la serie a_n converge a cero.

4. Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ es convergente o divergente.

Solución. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$. Entonces f es continua, positiva y decreciente en el intervalo $[2, +\infty[$, luego usando el criterio integral

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx \quad = \quad \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$$

Usando el cambio de variables $u = \ln(x)$, $du/dx = 1/x$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}} &= \lim_{b\to\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} u^{-1/2}\,du = \lim_{b\to\infty} \left[2\sqrt{u}\right]_{\ln(2)}^{\ln(b)} \\ &= \lim_{b\to\infty} (2\sqrt{\ln(b)} - 2\sqrt{\ln(2)}) = \infty\,.\end{aligned}$$

luego la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}}$ es divergente.

Puntaje Pregunta 4.

- 1 punto por indicar que la función $f(x)$ satisface las hipótesis del criterio integral: continua, positiva y decreciente en $[2, +\infty[$.
- 1 punto por usar la definición de integral impropia, es decir, por:

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$$

- 2 puntos por calcular la integral.
- 1 punto por calcular el límite $\displaystyle\lim_{b\to\infty} (2\sqrt{\ln(b)} - 2\sqrt{\ln(2)})$
- 1 punto por concluir que la serie es divergente en virtud del criterio integral.

5. Para todos los valores de $c \in \mathbb{R}$, determine el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}(c^n - 1)x^n \, .$$

¿Para qué valores de c la serie es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$?

Solución. Si $c = 1$, la serie es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$, luego el radio de convergencia es $R = \infty$. Si $c = -1$, la serie de potencias es $-2\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$ que converge para $|x| < 1$, luego tiene radio de convergencia $R = 1$. Para los demás valores de c utilizaremos el criterio del cociente:

$$L \;=\; \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(c^{n+1}-1)x^{n+1}}{(c^n-1)x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c^{n+1}-1}{c^n-1}\right| \cdot |x| \, .$$

Si $|c| > 1$, tenemos que $L = |cx|$, así que la serie converge cuando $|x| < \frac{1}{|c|}$, luego el radio de convergencia es $R = \frac{1}{|c|}$.
Si $|c| < 1$, tenemos que $L = |x|$, luego la serie converge cuando $|x| < 1$, luego el radio de convergnecia es $R = 1$.
En resumen,

$$R = \begin{cases} 1 & \text{si } c = -1 \text{ o si } |c| < 1 \\ \dfrac{1}{|c|} & \text{si } |c| > 1 \\ \infty & \text{si } c = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, el único valor para el cual la serie converge para todos $x \in \mathbb{R}$ es $c = 1$.

Puntaje Pregunta 5.

- 1 punto por analizar el caso $c = 1$
- 1 punto por analizar el caso $c = -1$
- 1 punto por usar el criterio del cociente y obtener el límite

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c^{n+1}-1}{c^n-1}\right| \cdot |x| \, .$$

- 1 punto por analizar el caso $|c| > 1$
- 1 punto por analizar el caso $|c| < 1$
- 1 punto por responder la pregunta: ¿Para qué valores de c la serie es convergente para todo $x \in \mathbb{R}$?

6. Usando la derivación de $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Solución. La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ es convergente para $|x| < 1$ y derivando nos da $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. Multiplicando por x en la última igualdad obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}\ , \qquad |x| < 1\ .$$

Tomando $x = \frac{1}{2}$ se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2\ .$$

Puntaje Pregunta 6.

- 1,5 puntos por usar la serie geométrica: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
- 1,5 puntos por derivar la serie geométrica y obtener: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$
- 1,5 puntos por multiplicar por x y obtenre: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}\ , \qquad |x| < 1\ .$
- 1,5 puntos por sustituir en $x = \frac{1}{2}$ y concluir.

7. Determine el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(5^n) \cdot n!} x^n$.

Solución. Usando el criterio del cociente, vemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \to \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)(2n+1)}{5^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{5^n n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)} \cdot |x| \\ &= |x| \lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{5(n+1)} = \frac{2}{5}|x| < 1 \,, \end{aligned}$$

luego la serie tiene radio de convergencia $R = \frac{5}{2}$. Ahora bien, en $x = \pm\frac{5}{2}$ la serie queda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{(5^n) \cdot n!} \left(\pm \frac{5}{2} \right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!} (-1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} b_n \,.$$

Note que $|b_n| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ y por el criterio de comparación la serie $\sum b_n$ es absolutamente convergente y se sigue que el intervalo de convergencia es $I = \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

Puntaje Pregunta 7.

- 1 punto por utilizar el criterio de cociente.
- 2 punto por calcular el límite y obtener como resultado $\frac{2}{5}|x|$.
- 1 punto por concluir que el radio de convergencia es $r = \frac{5}{2}$.
- 2 puntos por analizar la convergencia en los extremos del intervalo.

8. Calcule la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n} \cdot (2n)!}$.

Solución. Usando al serie de Taylor de la función coseno, tenemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Puntaje Pregunta 8.

- 2 puntos por usar la serie de la función coseno.
- 2 puntos por determinar que $x = \frac{\pi}{6}$
- 2 puntos por obtener el resultado.