Pontificia Universidad Católica de Chile
Bastián Mora - bmor@uc.cl
Matías Fernández - matias.fernandez@uc.cl

MAT1107 - Introducción al Cálculo

Ayudantía 14 - Jueves 23 de junio del 2022

Problema 1. Sea $(x_n)_n$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Sea $M \in \mathbb{R}$ un número real arbitrario. Muestre que la sucesión $y_n = x_n + M$ también diverge a infinito.

Solución: Sea $A > 0$ un número real positivo. Queremos $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $y_n > A$.
Tomemos el número $\max\{A - M, A\} > 0$. Sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $x_n > \max\{A - M, A\} \Leftrightarrow y_n > \max\{A - M, A\} + M \geq A$. Por tanto $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Problema 2. Dado $\alpha \in \mathbb{R}^+$, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty$.

Solución: Primero notemos que por propiedad Arquimediana, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \geq \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha \cdot k_0 \geq 1$.
Ahora sea $A > 0$ arbitrario. Por Arquimediana (de nuevo), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$A < N \leq N^{\alpha \cdot k_0} = (N^{k_0})^\alpha$$

Luego, si $n \geq N^{k_0}$, entonces $n^\alpha \geq (N^{k_0})^\alpha > A$. Así concluimos que $\lim_{n\to\infty} n^\alpha = +\infty$.

Problema 3. Pruebe que la sucesión

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

converge (diverge) a infinito.

Solución: Usaremos el teorema de la pizza (?), o sea, acotaremos esta sucesión inferiormente por una sucesión que sabemos que tiende a infinito.
Sea $m \in \mathbb{N}$. Notemos que si $2^{m-1} \leq k < 2^m$, entonces $\frac{1}{2^m} < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2^{m-1}}$. O sea,

$$\sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{1}{k} > \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{1}{2^m} = 2^{m-1}\frac{1}{2^m} = \frac{1}{2}.$$

Luego, sumando desde $k = 1 = 2^0$ hasta $2^m - 1$ tenemos que

$$\alpha_{2^m-1} = \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{1}{k} > \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} = \frac{m}{2}.$$

Así, dado $A > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m}{2} > A$. Por lo tanto, si $n \geq 2^m - 1$, entonces

$$\alpha_n \geq \alpha_{2^m-1} > \frac{m}{2} > A$$

Por lo tanto, α_n diverge.

Problema 4. Sea $m \geq 2$ un número entero fijo. Pruebe que la sucesión

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m}$$

no diverge. ¿Converge?

Solución: Por motivos pedagógicos, primero lo probaremos para $m = 2$. Notemos entonces que para cada $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Luego,

$$\beta_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

Por lo tanto, $\beta_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como la sucesión es acotada superiormente, no puede tender a infinito.
Similarmente, si $m \geq 2$ es un natural arbitrario, entonces $\frac{1}{k^m} \leq \frac{1}{k^2}$. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2$$

Y concluimos de la misma manera.
Por otro lado, sabemos que en cada caso, todos los términos de las sumatorias son números reales positivos, de modo que las sucesiones son estrictamente crecientes. Como son sucesiones crecientes y acotadas superiormente, entonces convergen a un número real.
Como comentario general, el teorema de sucesiones monótonas y acotadas es **la** manera que tenemos de concluir que el límite existe, pues los valores de estos límites son extremadamente difíciles de calcular. Por ejemplo, se requiere de herramientas de análisis funcional y series de Fourier para concluir que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Similarmente hay fórmulas cerradas para m par, pero no se conoce ninguna expresión cerrada para los casos donde m es impar.

Problema 5. Considere la sucesión definida recursivamente

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_{n+1} &= y_n + 2 \cdot (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Estudie el comportamiento de la sucesión cuando n tiene a infinito.

Solución: Notemos que si $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$y_{n+2} = y_{n+1} + 2 \cdot (-1)^{n+1} = y_n + 2 \cdot (-1)^n - 2 \cdot (-1)^n = y_n$$

Con esto tenemos que la sucesión es periódica con período $= 2$, es decir, $y_n = 1$ para n impar, $y_n = -1$ para n par. Como y_n es una sucesión acotada, entonces no puede tener límite igual a $\pm\infty$.
Ejercicio recomendado: demostrar por definición por qué y_n no converge a ningún número real.