Modelos Probabilísticos

Ayudantía 11

Camilo González

10 de Noviembre del 2020

Ejercicio 1

Sea el $S = [0, 1]$ espacio muestral con distribución de probabilidad uniforme, sea $X_n(s) = s + s^n$ y $X(s) = s$. Demuestre que X_n converge casi seguramente a X.

Convergencia Casi - Segura

$X_1, X_2, \ldots \xrightarrow{c.s.} X$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| < \varepsilon\right) = 1$

$\forall s \in [0, 1)$ $\quad s^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $\quad X_n(s) = s + \cancelto{0}{s^n}$

$X_n(s) \longrightarrow s = X(s)$, $\quad X_n(1) = 1 + 1 = 2$

$X(1) = 1$, si $X_n \longrightarrow X$ en $[0, 1)$

y $P([0,1)) = 1 \quad \therefore \quad X_n \xrightarrow{c.s.} X$

Ejercicio 2

Si $X_1, X_2, ... \overset{iid}{\sim}$ Uniforme$(0,1)$

$a)$ Demuestre que $X_{(n)}$ converge en probabilidad a 1.

$b)$ Encuentre una variable aleatoria que converja en distribución a una exponencial(1).

a) $X_1, X_2, \ldots$ Conv. en prob. a X

si $\forall \varepsilon > 0$ $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$

$|x| \geq a$

$x \leq -a$ o $x \geq a$

eq. $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$

$\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X_{(n)} - 1| \geq \varepsilon)$$

$$= \underbrace{P(X_{(n)} \geq 1+\varepsilon)}_{0} + P(X_{(n)} \leq 1-\varepsilon)$$

$$= P(X_{(n)} \leq 1-\varepsilon)$$

$$= P(X_1 \leq 1-\varepsilon, \ldots, X_n \leq 1-\varepsilon)$$

$$= P(X_1 \leq 1-\varepsilon)^n = (1-\varepsilon)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

b) Si $\varepsilon = \frac{t}{n}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} F_{x_n}(x) = F_x(x)}$$

$$P\left(X_{(n)} \leq 1 - \frac{t}{n}\right) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^{-t}$$

Consideremos

$$P\left(X_{(n)} \leq 1 - \frac{t}{n}\right) = P(n(X_{(n)} - 1) \leq -t)$$

$$= P(n(1 - X_{(n)}) \geq t)$$

$$\Rightarrow P(n(1 - X_{(n)}) \leq t) = 1 - P(n(1 - X_{(n)}) \geq t)$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 1 - e^{-t}$$

$\therefore$ $n(1 - X_{(n)})$ Conv. en dist. a una $\exp(\lambda = 1)$

Ejercicio 3

Un fabricante de folletos los empaqueta en cajas de 100. Se sabe que, en promedio, los folletos pesan 1 onza, con una desviación estándar de 0.05 onzas. El fabricante está interesado en calcular

$$P(\text{100 folletos pesen mas que 100.4 onzas})$$

un número que ayudaría a detectar si se están colocando demasiados folletos en una caja. Explica cómo calcularías el valor (¿aproximado?) de esta probabilidad.

$n = 100$

$\mu = 1$

$\sigma = 0{,}05$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > 100{,}4\right) = P\left(\frac{\sum X_i}{100} > 1{,}004\right)$$

$$= P\left(\overline{X} > 1{,}004\right) \quad \text{por TCL}$$

$$\approx P\left(Z > \frac{1{,}004 - 1}{\frac{0{,}05}{10}}\right) = P(Z > 0{,}8)$$

$$= 1 - P(Z \leq 0{,}8)$$

$$= 0{,}2119.$$

Para n suf. grande.

Ejercicio 4

Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias que converge en probabilidad a una constante a. Suponga que $P\left(X_i > 0\right) = 1$ para todos los i.

$a)$ Verifique que las secuencias definidas por $Y_i = \sqrt{X_i}$ y $Y_i' = a/X_i$ converjan en probabilidad.

$b)$ Use los resultados del inciso $a)$ para probar el hecho de que σ/S_n converge en probabilidad a 1.

a) $\forall \varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\sqrt{X_n} - \sqrt{a}\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\left|\sqrt{X_n} - \sqrt{a}\right|\left|\sqrt{X_n} + \sqrt{a}\right| \geq \left|\sqrt{X_n} + a\right| \varepsilon\right)$$

$$= P\left(|X_n - a| \geq \left|\sqrt{X_n} + a\right| \varepsilon\right)$$

$$= 1 - P\left(|X_n - a| \leq \left|\sqrt{X_n} + \sqrt{a}\right| \varepsilon\right)$$

$$= 1 - P\left(-\left|\sqrt{X_n} + \sqrt{a}\right| \varepsilon \leq |X_n - a| \leq \left|\sqrt{X_n} + \sqrt{a}\right| \varepsilon\right)$$

$$\geq 1 - P\left(-\varepsilon\sqrt{a} \leq |X_n - a| \leq \varepsilon\sqrt{a}\right)$$

$$\leq P\left(|X_n - a| \geq \varepsilon\sqrt{a}\right) \qquad \text{como } X_n \xrightarrow{P} a$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\therefore \sqrt{X_n} \xrightarrow{P} \sqrt{a}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left(\left|\frac{a}{X_n} - 1\right| \leq \varepsilon\right) = P\left(\frac{a}{1+\varepsilon} \leq X_n \leq \frac{a}{1-\varepsilon}\right)$$

$$= P\left(a - \frac{a\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq X_n \leq a + \frac{a\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\geq P\left(a - \frac{a\varepsilon}{1+\varepsilon} \leq X_n \leq a + \frac{a\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$$

$$= P\left(|X_n - a| \leq \frac{a\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 1$$

pues $X_n \xrightarrow{P} a$

$$\therefore \frac{a}{X_n} \xrightarrow{P} 1.$$

b) Como $S_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$

por a) $\sqrt{S_n^2} = S_n \xrightarrow{P} \sqrt{\sigma^2} = \sigma$, $\quad \dfrac{\sigma}{S_n} \longrightarrow 1$

Ejercicio 5

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2. Muestra que

$$\mathrm{E}\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right)}{\sigma} = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}\,\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right)}{\sigma} = 1$$

$$E\left[\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n-\mu)}{\sigma}\right] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,E(\overline{X}_n-\mu)$$

$$E\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\cdot n\,E(X_1) = E(X_1)=\mu$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\,(\mu-\mu) = 0$$

$$Var\left(\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n-\mu)}{\sigma}\right) = \frac{n}{\sigma^2}\,Var(\overline{X}_n-\mu)$$

$$= \frac{n}{\sigma^2}\,Var(\overline{X}_n)$$

$$Var\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n\,Var(X_1) = \frac{\sigma^2}{n} //$$

$$= \frac{n}{\sigma^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n} = 1 //$$