



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMER SEMESTRE DE 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026

Ayudantía 10

16 de Mayo de 2019

1. Sea $X \sim \text{NB}(r, p)$ con $r \in \mathbb{N}, p \in (0, 1)$.

- Encuentre la función generadora de momentos de X y deje explícito el intervalo donde t vive.
- Calcule $\text{Var}(X)$.
- Considere $Y = 2pX$. Demuestre que la distribución de Y cuando $p \rightarrow 0$ tiende a una χ^2_{2r} .
Nota: La función generadora de momentos de una $X \sim \chi^2_1$ es

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}, \quad t < \frac{1}{2}.$$

2. Sea X con función de densidad

$$f_X(x) = 2(1-x), \quad x \in [0, 1].$$

- Encuentre la función generadora de momentos de X y su función característica.
- Utilizando series de Taylor, encuentre una expresión para el k -ésimo momento de X .
- Calcule de forma directa $E(X^k)$.

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } (x, y) \in [0, 1]^2, 0 \leq x + y \leq 1 \\ 0 & \text{si e.o.c} \end{cases}.$$

- Calcule $\rho(X, Y)$.
- Sean $W = X + Y, Z = X - Y$. Calcule $\rho(W, Z)$.

4. Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias con varianza σ^2 y coeficiente de correlación ρ . Encuentre el valor de $\text{Var}(\bar{X})$.

5. El objetivo de este problema es encontrar el mejor predictor lineal de una variable aleatoria Y utilizando otra variable aleatoria X .

- Sean X e Y variables aleatorias con segundos momentos finitos. Encuentre los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ que minimizan la expresión $E[(Y - a - bX)^2]$.
- Sean \hat{a}, \hat{b} los valores obtenidos en a). Calcule $\text{Var}(\hat{a} + \hat{b}X)$.

c) Sean $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d}}{\sim} U(0, 1)$. Defina

$$U = \min_{1 \leq i \leq n} X_i, \quad V = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

Encuentre el mejor predictor lineal de V a partir de U y su respectiva varianza.