Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre de 2014

MAT1620 ⋆ Cálculo 2

Propuesta Interrogación N° 1

1. (a) Calcular la longitud de arco de la curva

$$y(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^{-1}}{2}$$

desde $x = 1$ hasta $x = 2$.

Solución. La longitud del arco está dada por

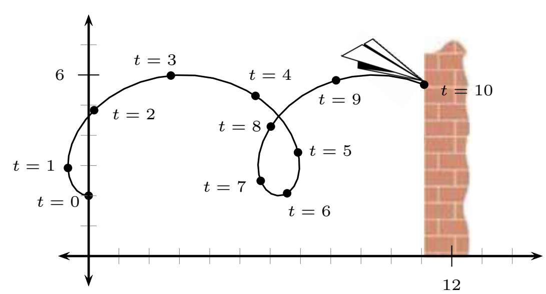
$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx \\ &= \int_1^2 \sqrt{\frac{x^4 + 2 + x^{-4}}{4}}\, dx \qquad (\mathbf{1\ pto}) \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 (x^2 + x^{-2})\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - x^{-1}\right)\Bigg|_1^2 \qquad (\mathbf{1\ pto}) \\ &= \frac{17}{12} \qquad (\mathbf{1\ pto}) \end{aligned}$$

(b) Un avión de papel sigue la trayectoria dada por las ecuaciones

$$x(t) = t - 2\operatorname{sen}(t)$$
$$y(t) = 4 - 2\cos(t)$$

y el avión se accidenta en el tiempo $t = 10$.

¿En qué instantes el avión vuela horizontal?, ¿en qué instantes el avión vuela vertical?



Solución. Los instantes en que el avión vuela vertical son cuando $y'(t) = 0$, que entrega la ecuación

$$\cos(t) = \frac{1}{2} \qquad (\mathbf{0.5\ pto})$$

que tiene por solución $t = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ (**0.5 pto**). Finalmente, los instantes en que el avión vuela verticalmente son:

$$t = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \qquad (\mathbf{0.5\ pto})$$

Los instantes en que el avión vuela horizontal son cuando $x'(t) = 0$, que entrega la ecuación

$$\sin(t) = 0 \qquad (\mathbf{0.5\ pto})$$

que tiene por solución $t = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$ (**0.5 pto**). Finalmente, los instantes en que el avión vuela horizontalmente son:

$$t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \qquad (\mathbf{0.5\ pto})$$

2. (a) Un resorte es tal que la fuerza necesaria para mantenerlo estirado s metros es de $9s\,N$. ¿Cuánto trabajo se realiza en estirarlo $20\,cm$?

   Solución. La fuerza $F = kx$, luego

   $$ks = 9s \quad \Longrightarrow \quad k = 9 \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

   Luego, para estirarlo $20\,cm$ se tendrá un trabajo de

   $$\begin{aligned} T &= \int_0^{0.2} 9x\,dx \qquad (\mathbf{1\ pto}) \\ &= 0.18\,J \qquad (\mathbf{1\ pto}) \end{aligned}$$

   (b) Calcular el trabajo necesario para sacar el agua de un caldero semiesférico de 5 metros de radio, sabiendo que el caldero está lleno de agua. Considere que la densidad del agua es $1000\,Kg/m^3$.

   Solución. Sea $x = 0$ la superficie del caldero y eje positivo hacia el fondo del mismo. Definimos x_k partición del intervalo $[0, 5]$ y S_k las secciones transversales que define la parción. Luego, la fuerza F_k que actúa sobre la sección S_k es aproximadamente

   $$F_k \approx m_k g = 1000 \cdot \pi(25 - x_k^2)(x_{k+1} - x_k)g \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

   De este modo, el trabajo T necesario para sacar el agua de un caldero es aproximadamente

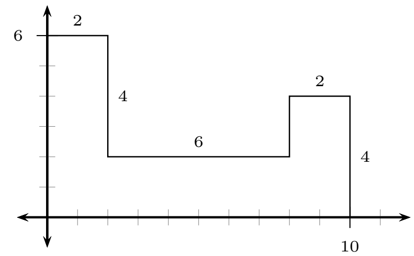
   $$T \approx \sum_{k=1}^{n} F_k x_k = 1000g\pi \sum_{k=1}^{n} (25 - x_k^2)(x_{k+1} - x_k)x_k \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

   Por lo tanto,

   $$T = 1000g\pi \int_0^5 (25 - x^2)x\,dx = 1000g\pi \frac{625}{4} \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

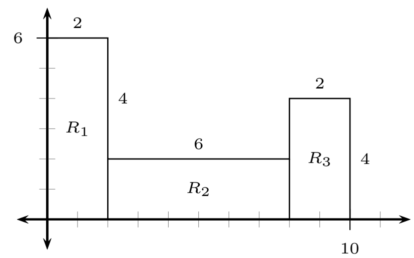
Continua...

3. (a) Una región es la combinación de rectángulos de densidad constante ρ (ver dibujo).



Encontrar el centro de masa de la región.

Solución. Podemos subdividir la figura en los rectángulos que la componen,



Luego, las regiones R_1, R_2, R_3 tiene por centro de masa

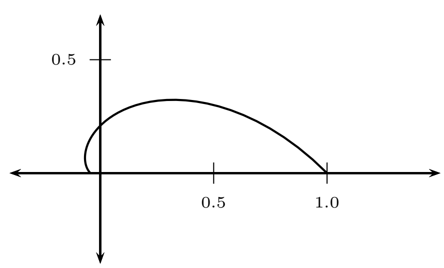
$$R_1 : (1,3) \qquad (\mathbf{0.5\ pto})$$
$$R_2 : (5,1) \qquad (\mathbf{0.5\ pto})$$
$$R_3 : (9,2) \qquad (\mathbf{0.5\ pto})$$

Por lo tanto, el centro de masa de la figura es

$$(\overline{x}.\overline{y}) = \frac{12(1,3) + 16(5,1) + 8(9,2)}{12 + 16 + 8} \qquad (\mathbf{0.5\ pto})$$
$$= \frac{1}{11}(41, 17) \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

(b) Determine el <u>**área**</u> de la superficie de revolución que resulta de rotar la curva paramétrica

$$x(t) = e^{-t}\cos(t)$$
$$y(t) = e^{-t}\sin(t)$$



en torno al eje X, con $0 \leq t \leq \pi$.

Solución. El área está dada por

$$A = 2\pi \int_0^\pi y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$
$$= 2\pi \int_0^\pi e^{-t}\sin(t)\sqrt{2e^{-2t}\sin^2(t) + 2e^{-2t}\cos^2(t)}\, dt \qquad (\mathbf{1\ pto})$$
$$= 2\sqrt{2}\pi \int_0^\pi e^{-2t}\sin(t)\, dt \qquad (\mathbf{1\ pto})$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\pi}{5}(1 + e^{-2\pi}) \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

4. Si $\overline{x}$ es la abscisa del centro de masa de la región que se encuentra bajo la gráfica de una función continua y positiva f, donde $a \leq x \leq b$. Demuestre que

$$\int_a^b (cx+d)f(x)\,dx = (c\overline{x}+d)\int_a^b f(x)\,dx$$

Solución. A partir de la definición de centro de masa tendremos que

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx} \qquad (\textbf{2 pto})$$

Luego,

$$\begin{aligned}
(c\overline{x}+d)\int_a^b f(x)\,dx &= \left(c\frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}+d\right)\int_a^b f(x)\,dx \qquad (\textbf{2 pto})\\
&= c\int_a^b xf(x)\,dx + d\int_a^b f(x)\,dx \qquad (\textbf{1 pto})\\
&= \int_a^b (cx+d)f(x)\,dx \qquad (\textbf{1 pto})
\end{aligned}$$

TIEMPO: 120 MINUTOS

SIN CONSULTAS

SIN CALCULADORA

PROHIBIDO TENER CELULAR SOBRE LA MESA