PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

I2 MAT1203 - Álgebra Lineal
Mayo 22, 2013

1. *a*) [**3 pts.**] Represente la cuadrática

$$F(\vec{x}) = -2\,{x_1}^2 + 2\,x_1x_2 + 4\,x_1x_3 - 2\,{x_2}^2 - 4\,x_2x_3 - \alpha\,{x_3}^2$$

en la forma $\vec{y}^T D\vec{y}$ donde D es una matriz diagonal. Determine los valores de α para los cuales ella es positiva definida, negativa definida. Justifique.

b) [**3 pts.**] Sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de un espacio vectorial V y u_1, u_2, u_3, u_4 vectores en V tales que $[u_1]_{\mathcal{B}} = [-1, 1, 1]^T$,$[u_2]_{\mathcal{B}} = [-2, 2, 2]^T$, $[u_3]_{\mathcal{B}} = [2, 0, 1]^T$ y $[u_4]_{\mathcal{B}} = [5, 1, 4]^T$. Determine una base de $H = Gen\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ expresada en términos de los vectores v_i.

Solución

a) La forma cuadrática se escribe en su forma matricial simétrica como

$$F(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x} \quad \text{donde } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -\alpha \end{bmatrix} \qquad \boxed{\textbf{0.5 pts.}}$$

Puesto que

$$A = LDL^T, \quad \text{donde} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 2/3 & 1 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha + 8/3 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

con la sustitución $\vec{y} = L^T\vec{x}$ se obtiene $F(\vec{x}) = \vec{y}^T D\vec{y}$ [**0.5 pts.**]
La forma cuadrática es negativa definida sii todos los elementos de la diagonal de D son negativos sii $8/3 - \alpha < 0 \Leftrightarrow 8/3 < \alpha$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$. La forma cuadrática nunca es positiva definida pues la diagonal de D tiene elementos negativos [**0.5 pts.**] .

b) Sea B la matriz cuyas columnas son los vectores coordenados de u_i.

$$B = [\ [u_1]_{\mathcal{B}}\ \ [u_2]_{\mathcal{B}}\ \ [u_3]_{\mathcal{B}}\ \ [u_4]_{\mathcal{B}}\ ] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Las estructura de dendencia/independencia lineal de las columnas de B es la misma que la de los vectores u_i. Por lo tanto las columnas de B que son base de $col(B)$ definen los vectores u_i que son base de H.

Puesto que la escalonada reducida de B (también se puede usar una forma escalonada) es

$$rref(B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tenemos que las columnas pivotes son las columnas 1 y 3 y por lo tanto las columnas 1 y 3 de B son base de $col(B)$ y entonces los vectores u_1 y u_3 son base de H. Expresando estos vectores en término de los vectores v_j tenemos que $u_1 = -1v_1 + v_2 + v_3$, $u_3 = 2v_1 + v_3$ son base de H.

Criterio de Corrección

- $\boxed{\textbf{1.5 pts.}}$ por la estrategia de expresar el problema como del de determinar una base de un espacio fila o columna de la matriz de vectores coordenados y que esta base determina una base de H
- $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$ por determinar base ya sea de espacio fila o columna de la matriz planteada.
- $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ por expresar la base en términos de lo vectores v_i.
- Si el método es correcto y tienen algún error aritmético que significa que obtienen como base 3 vectores, la pregunta tiene $\boxed{\textbf{2.0 pts.}}$

2. *a*) [**3 pts.**] Sea A es una matriz de 3×3 con $det(A) = -2$ y B la matriz que se obtiene al final del siguiente proceso:

(i) se multiplica por la izquierda a A por $A^2(A^T)^{-1}$,

(ii) la matriz resultante de (i) se multiplica por el escalar $1/2$,

(iii) la matriz resultante de (ii) se invierte y luego se traspone,

(iv) a la matriz resultante de (iii) se le aplican las siguientes operaciones elementales: se multiplica la segunda fila por 3 y la segunda columna por $1/5$, y luego se intercambian las filas 2 y 3.

Calcule el $\det(B)$.

b) [**3 pts.**] Determine el determinante de la matriz B de $n \times n$, donde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

($B_{i,i} = i$ y $B_{i,j} = 2$ para $i \neq j$)

Solución:

a) (i) se multiplica por la izquierda a A por $A^2(A^T)^{-1}$: $det(A_1) = de(A) * det(A^2) * det(A^{-1}) = (det(A))^2 = 4$ $\boxed{\textbf{0.9 pts.}}$ (0.5 pts con un error, 0.0 pts con 2 errores)

(ii) la matriz resultante de (i) se multiplica por el escalar $1/2$: $det(A_2) = det(A_2) * (1|/2)^3 = 1/2$ $\boxed{\textbf{0.9 pts.}}$ (todo o nada)

(iii) la matriz resultante de (ii) se invierte y luego se traspone, $det(A_3) = 1/det(A_2) = 2$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ (todo o nada)

(iv) a la matriz resultante de (iii) se le aplican las siguientes operaciones elementales: se multiplica la segunda fila por 3 y la segunda columna por $1/5$, y luego se intercambian las filas 2 y 3: $det(B) = det(A_3) * 1/5 * 3 * (-1) = -6/5$ $\boxed{\textbf{0.7 pts.}}$ (0.4 pts un error, 0.0 pts dos errores)

b) Restando la fila 1 a las filas $2, 3, \ldots, n$ se obtiene

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} \qquad \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

Desarrollando por cofactores la matriz en el lado derecho obtenemos que $|B| = (-1)|C|$ donde C es una matriz de $(n-1)\times(n-1)$ que es triangular superior.

$$B = -|C| = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix} \quad \boxed{\textbf{1.0 pts.}} \text{ (restar 0.5 por error en el signo)}$$

Como el determinante de una matriz triangular superior es el producto de los elementos de su diagonal principal, obtenemos

$$|B| = -2\cdot 1\cdot 2\cdots(n-2) = -2(n-2)! \quad \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

Criterios generales

- Por una estrategia exitosa de hacer hartos ceros en la matriz $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$
- Por desarrollo de casos especiales con $n \geq 5$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$
- Si intenta hartos ceros y casos especiales $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$ (igual).

3. *a*) [**3 pts.**] Si A y su escalonada reducida B están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine bases para los espacios columna, fila y nulo (kernel) de A.

b) [**3 pts.**] Sea $W = \{p \in \mathbb{P}_3[x] : \quad p(2) = p(-1) = 0\}$ subespacio de $\mathbb{P}_3[x]$ (espacio de los polinomios de grado menor o igual a 3). Determine una base y dimensión de W.

Solución

a) Una base del espacio columna de A son las columnas pivotes de A: $\mathcal{B}_{col(B)} = \left\{[[1,-1,-2,0,1]^T, [0,1,1,0,1]^T, [2,-1,-2,1,4]^T\right\}$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

Una base del espacio fila de A son las filas no nulas de la escalonada reducida: $\mathcal{B}_{Fila(A)} = \{[1,1,0,1,0,-3], [0,0,1,-1,0,0], [0,0,0,0,1,1]\}$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

Resolvemos $Ax = 0$ a partir de la escalonada reducida de A. Las variables libres son x_2, x_4, x_6. Despejando las variables básicas en término de las libres obtenemos

$$x_1 = -x_2 - x_4 + 3x_6, \quad x_3 = x_4 \quad x_5 = -x_6$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_4 + 3x_6 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \\ -x_6 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una base de $nul(A)$ es

$$\mathcal{B}_{nul(A)} = \{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$$

$\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

b) Sea $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Las condiciones implican

$$\begin{aligned} p(2) &= a + 2b + 4c + 8d = 0 \\ p(-1) &= a - b + c - d = 0 \ \boxed{\textbf{1.0 pts.}} \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes del sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

cuya escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la solución del sistema es $a = -2c - 2d$, $b = -c - 3d$, con c, d variables libres. $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ Reemplazando en el polinomio $p(x)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} p(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 \\ &= (-2c - 2d) + (-c - 3d)x + cx^2 + dx^3 \\ &= c(-2 - x + x^2) + d(-2 - 3x + x^3) \end{aligned}$$

Un conjunto generador para W es entonces $\mathcal{B} = \{-2 - x + x^2, -2 - 3x + x^3\}$. Como estos dos vectores no son un múltiplo del otro son li y entonces una base para W es $\mathcal{B}$. $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$. Como la base tiene 2 elementos $\dim(W) = 2$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$

4. Determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA y justifique demostrando su respuesta.

   a) [**1.5 pts.**] El conjunto $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tales que $xy = 0\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^4$.

   b) [**1.5 pts.**] Si un sistema homogéneo de 8 ecuaciones lineales y 9 incógnitas es siempre consistente, entonces existen dos soluciones que no son múltiplos una de la otra.

   c) [**1.5 pts.**] Si B tiene inversa entonces los espacios columna de AB y A son iguales.

   d) [**1.5 pts.**] Si A, B son matrices de $n \times n$ y $AB = O$, donde O es la matriz nula, entonces $\dim(Col(A)) + \dim(Col(B)) \leq n$.

Solución

1. FALSO: $u = (1, 0, 0, 0), v = (0, 1, 0, 0) \in W$, pero $u+v = (1, 1, 0, 0) \notin W$, por lo tanto W no es cerrado bajo la suma vectorial y entonces no es subespacio. **1.5 pts.**

2. Un punto clave para determinar la respuesta es como se interpreta el que dos vectores distintos u, v sean un múltiplo uno del otro. Si se interpreta como que:

   A) u es un múltiplo de v **y** v es un múltiplo de v, entonces con esta interpretación ni u ni v pueden ser el vector nulo.

   B) u es un múltiplo de v **o** v es un múltiplo de v, entonces con esta interpretación u o v pueden ser el vector nulo (pero no ambos pues si no habría un sólo vector).

   Dependiendo de la interpretación la respuesta correcta es la siguiente:

   Caso A) FALSO: El sistema $A\vec{x} = \vec{0}$ con $A = [I_8 \ \vec{0}]$, donde I_8 es la identidad de 8×8 tiene espacio nulo de dimensión 1 y todas las soluciones no nulas son una un múltiplo de la otra. También es válida una demostración que supone una matriz de con 8 filas l.i. la que tendrá por teoría un espacio nulo de dimensión 1 y por lo tanto todas las soluciones no nulas son un múltiplo una de la otra.

   Caso B) VERDADERO: Si el sistema homogéneo es de $8x9$ entonces $dim(nul(A)) \geq 1$ y entonces el sistema tiene una solución $u \neq \vec{0}$. Como $v = \vec{0}$ es solución de todo sistema homogéneo tenemos que u no es un múltiplo de $v = \vec{0}$ y por lo tanto es verdadero.

   Otorgar **1.5 pts.** tanto para el caso A) como el B)

3. VERDADERO:

   El espacio columna de AB es el conjunto de las $\vec{b}$ tal que $AB\vec{x} = \vec{b}$ (1) es consistente. El espacio columna de A es el conjunto del los $\vec{b}$ tal que $A\vec{y} = \vec{b}$ (2) es consistente. Ambos conjuntos son iguales:

   (*) **0.5 pts.** (demostrar que $col(AB) \subset col(A)$)

   $\vec{b} \in col(AB)$ implica que existe $\vec{x}$ tal que $AB\vec{x} = \vec{b}$ y por lo tanto $A\vec{y} = \vec{b}$ con $\vec{y} = B\vec{x}$ y entonces $\vec{b} \in col(A)$. Por lo tanto $col(AB) \subset col(A)$.

   Otra manera de demostrar esto es decir que las columnas de AB son combinaciones lineales de las columnas de A y por lo tanto $col(AB) \subset col(A)$

   (**) **1.0 pts.** (demostrar que $col(A) \subset col(AB)$)

   $\vec{b} \in col(A)$ implica que que existe $\vec{y}$ tal que $A\vec{y} = \vec{b}$. Definiendo $\vec{x} = B^{-1}\vec{y}$ se tiene $AB\vec{x} = AB(B^{-1}\vec{y}) = A\vec{y} = \vec{b}$ y por lo tanto $\vec{b} \in col(A)$. Por lo tanto $col(A) \subset col(AB)$

   Otra manera de demostrar esto es si $C = AB$ entonces $A = CB^-1$ y por la parte anterior las columnas de A son combinaciones lineales de las columnas de C y por lo tanto $col(A) \subset col(C) = col(AB)$.

Por (*) y (***) $col(A) = col(AB)$

Otras consideraciones:

- $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$ si identifican los espacios columna de AB y A como el conjunto los vectores $\vec{b}$ para los cuales los sistemas $AB\vec{x} = \vec{b}$ y $A\vec{y} = \vec{b}$ son consistentes (ambos, no uno de ellos y con intención de una demostración sólida).
- $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ por concluir

4. VERDADERO

   i) $AB = 0$ implica que $col(B) \subset nul(A)$ $\boxed{\textbf{0.6 pts.}}$

   ii) $col(B) \subset nul(A)$ implica $\dim(col(B)) \leq dim(nul(A))$ $\boxed{\textbf{0.3 pts.}}$

   iii $\dim(col(A) + \dim(nu(A)) = n$ implica por ii) que $\dim(Col(A)) + \dim(Col(B)) \leq n$. $\boxed{\textbf{0.6 pts.}}$