

## Ayudantía 7 - MAT1610

1. La cantidad de carga,  $Q$ , en coulombs ( $c$ ) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo  $t$  (medido en segundos) se expresa con  $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$ . Encuentre la corriente cuando  $t = 0,5s$  y cuando  $t = 1s$ . La unidad de corriente es el ampere ( $1A = 1\frac{c}{s}$ ). ¿En qué momento la corriente es la más baja?

### Solución

Se tiene que la corriente en el tiempo  $t$  es  $I(t) = \frac{dQ}{dt} = 3t^2 - 4t + 6$ . Entonces,

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\frac{1}{2} + 6 = \frac{19}{4}A$$
$$I(1) = 3 - 4 + 6 = 5A$$

Mínimo de la corriente:  $I(t)$  es una función cuadrática, es decir, alcanza su mínimo valor en

$$t = -\frac{-4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}s$$

Así, la corriente es más baja para  $\frac{2}{3}s$

2. En un depósito en forma de cono invertido el agua sale de a razón de  $10000 \frac{cm^3}{min}$  al mismo tiempo que se bombea agua al depósito a razón constante. El depósito mide  $6m$  de altura, y el diámetro en la parte superior es de  $4m$ . Si el nivel del agua se eleva a razón de  $20 \frac{cm}{min}$  cuando la altura del agua es de  $2m$ , calcule la razón a la cual el agua está siendo bombeada hacia el tanque.

**Solución:** Considere

$E(t)$ : Cantidad de agua que ha **Entrado** al tanque hasta el instante  $t$ .

$S(t)$ : Cantidad de agua que ha **Salido** del tanque hasta el instante  $t$ .

$V(t)$ : Cantidad o volumen de agua que hay en el tanque en el instante  $t$ .

$h(t)$ : Altura del nivel de agua que está en el tanque en el instante  $t$ .

$r(t)$ : radio correspondiente del nivel de agua en el tanque en el instante  $t$ .

Note que

$$V(t) = E(t) - S(t) \text{ o } E(t) = V(t) + S(t)$$

$$V(t) = \frac{\pi}{3} (r(t))^2 h(t)$$

$$\frac{dh}{dt} = 20 \frac{cm}{min}$$

$$\frac{dS}{dt} = 10000 \frac{cm^3}{min}$$

Así,

$$E(t) = \frac{\pi}{3} (r(t))^2 h(t) + S(t)$$

Para calcular,  $\frac{dE}{dt}$  se deriva la igualdad anterior pero, como no se conoce  $\frac{dr}{dt}$  en el instante de interés y, como  $r(t)$  y  $h(t)$  están relacionados, se pueden escribir a  $r(t)$  en término de  $h(t)$  ya que

$$\frac{r(t)}{2} = \frac{h(t)}{6}$$

lo cual indica que

$$r(t) = \frac{2}{6} h(t) = \frac{1}{3} h(t)$$

Por lo tanto,

$$E(t) = \frac{\pi}{3} \left( \frac{h(t)}{3} \right)^2 h(t) + S(t) = \frac{\pi}{27} (h(t))^3 + S(t)$$

derivando respecto de  $t$ ,

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi}{27} 3 (h(t))^2 \frac{dh}{dt} + \frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{9} (h(t))^2 \frac{dh}{dt} + \frac{dS}{dt}$$

Todos los valores involucrados en el lado derecho están dados para el instante de tiempo de interés, entonces,

$$\frac{dE}{dt} = \left( \frac{\pi}{9} (200)^2 20 + 10000 \right) \frac{cm^3}{min} = \left( \frac{800000\pi}{9} + 10000 \right) \frac{cm^3}{min}$$

Note que se utilizó que  $h(t) = 2m = 200cm$

3. La ley de Boyle establece que, cuando se comprime una muestra de gas a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen se mantiene constante:  $PV = C$ .
- (a) Encuentre la razón de cambio del volumen respecto a la presión.
  - (b) Una muestra de gas está en un recipiente a baja presión y se le comprime paulatinamente a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Explique.
  - (c) Demuestre que la compresibilidad isotérmica se expresa mediante  $\beta = \frac{1}{P}$

### Solución

(a)

$$\begin{aligned}
 PV = C &\Rightarrow V = \frac{C}{P} \\
 &\Rightarrow \frac{dV}{dP} = -\frac{C}{P^2}
 \end{aligned}$$

- (b) Dado que la presión va aumentando con el tiempo, al inicio hay menor presión que al final. Así, si  $P_i$  es la presión al inicio y  $P_f$  la presión al final, se tiene que  $P_i < P_f$  y, por lo tanto,  $\frac{C}{P_i^2} > \frac{C}{P_f^2}$ , por lo que,  $\left| \frac{dV}{dP} \right|_{P=P_i} = \frac{C}{P_i^2} > \left| \frac{dV}{dP} \right|_{P=P_f} = \frac{C}{P_f^2}$ , es decir, la rapidez con la que el volumen disminuye al inicio es mayor que la rapidez con la que el volumen disminuye al final.
- (c) La compresibilidad isotérmica se define como  $\beta = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP}$  y mide qué tan rápido, por unidad de volumen, decrece el volumen de una sustancia a medida que la presión aumenta, a temperatura constante. En este caso se tiene que

$$\beta = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = -\frac{P}{C} \left( -\frac{C}{P^2} \right) = \frac{1}{P}$$

4. Si  $p(x)$  es el valor total de la producción cuando hay  $x$  trabajadores en una planta, entonces la productividad promedio de la fuerza de trabajo en la planta es

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

- (a) Obtenga  $A'(x)$ . ¿Por qué quiere la empresa contratar a más trabajadores si  $A'(x) > 0$ ?  
 (b) Demuestre que  $A'(x) > 0$  si  $p'(x)$  es mayor que la productividad promedio.

### Solución

(a)

$$A'(x) = \frac{p'(x)x - p(x)}{x^2}$$

Si  $A'(x) > 0$  entonces  $\Delta A > 0$  entonces,  $A(x+n) > A(x)$ , para  $n > 0$ , que al aumentar el número de trabajadores el valor de la productividad promedio aumenta y en consecuencia,

$$A(x) = \frac{p(x)}{x} < A(x+1) = \frac{p(x+1)}{x+1}$$

Además, como  $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x}$ , se tiene que  $\frac{p(x)}{x+1} < \frac{p(x)}{x}$  y  $\frac{p(x)}{x} < \frac{p(x+1)}{x+1}$ , entonces  $\frac{p(x)}{x+1} < \frac{p(x+1)}{x+1}$ , es decir, como  $x+1 > 0$ ,  $p(x) < p(x+1)$ , es decir, la productividad aumenta y por ello, la empresa quiere contratar a más trabajadores si  $A'(x) > 0$ .

(b)

$$\begin{aligned} A'(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{p'(x)x - p(x)}{x^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow p'(x)x - p(x) > 0 \\ &\Leftrightarrow p'(x)x > p(x) \\ &\Leftrightarrow p'(x) > \frac{p(x)}{x} \quad x > 0 \\ &\Leftrightarrow p'(x) > A(x) \end{aligned}$$

5. Utilice la aproximación lineal (o diferenciales) para estimar cada uno de los siguientes valores:

(a)  $\tan(44^\circ)$

(b)  $e^{0.0021}$

**Solución:**

- (a) En este caso se debe aproximar el valor de  $\tan(44^\circ) = \tan\left(\frac{44\pi}{180} \text{ Rad}\right) = \tan\left(\frac{11\pi}{45} \text{ Rad}\right)$ , se usa la aproximación lineal de  $f(x) = \tan(x)$  en  $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$ . Como  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$  y  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ , se tiene que  $y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ , es decir,  $y = 2x - \frac{\pi}{2} + 1$ , por lo que,

$$\tan\left(\frac{11\pi}{45}\right) \approx 2\frac{11\pi}{45} - \frac{\pi}{2} + 1$$

o,

$$\tan\left(\frac{11\pi}{45}\right) \approx \frac{44\pi}{90} - \frac{45\pi}{90} + 1 = 1 - \frac{\pi}{90} = \frac{90 - \pi}{90}$$

- (b) Como se quiere la aproximación en  $e^{0.0021}$  es razonable usar la aproximación lineal de  $f(x) = e^x$  en 0. Ésta es  $f'(0) = e^0 = 1$ ,  $y - 1 = 1(x - 0)$ , es decir,  $y = x + 1$ , por lo que  $e^{0.0021} \approx 0.0021 + 1 = 1.0021$

Resaltar en este ejercicio que, cerca de  $x = 0$ ,  $e^x \approx x + 1$