Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Temporada Verano 2019

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 2

1. *a*) Sea A una matriz cuadrada de 3×3 tal que $\det(A) = 5$. Calcule $\det(3^3 A)$ y $\det(\det(A)A^{-1})$.

   b) Se dice que una matriz A es ortogonal si su inversa es igual a su tranpuesta. Demuestre que si A es ortogonal, entonces $\det(A) = \pm 1$.

Solución.

a) Utilizando propiedades de determinantes, $\det(3^3 A) = 3^9 \det(A) = 3^9 \cdot 5$.
Para el otro determinante, utilizando propiedades se tiene que

$$\det(\det(A)A^{-1}) = 5^3 \det(A^{-1}) = 5^3 \cdot \frac{1}{5} = 25.$$

b) Como $A^t = A^{-1}$ entonces $\det(A^t) = \det(A^{-1})$. De este modo, utilizando propiedades se tiene que

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Por lo tanto, $(\det(A))^2 = 1$, por lo que el determinante de A es 1 o -1.

Puntaje:

- En la parte a) asignar 1 punto por sacar el escalar del determinante de forma adecuada. Para el segundo determinante, asignar 1 punto por sacar el escalar del determinante de forma adecuada y 1 punto por utilizar que $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
- En la parte b) asignar 2 puntos por llegar a la conclusión de que $(\det(A))^2 = 1$. Asignar 1 punto por concluir lo pedido.

2. *a*) Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Encuentre las bases para $Col(A)$, $Fil(A)$ y $Nul(A)$.

b) Si $\{u, v, w\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en $\mathbb{R}^5$ y

$$A = [u \quad v \quad w \quad u + v + w].$$

Encuentre las bases para $Col(A)$ y $Nul(A)$.

Solución.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Luego una base para $Col(A)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$ una base para $Fil(A)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ (tambien es muy probable que respondan $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$)y para encontrar una base para el $Nul(A)$ debemos solucionar el sistema homogeneo asociado a A

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to x - 2y - 4z + 3t - 2w = 0 \quad \wedge \quad 3y + 9z - 12t + 12w = 0$$

$$\to x = -2z + 5t - 6w \quad \wedge \quad y = -3z + 4t - 4w$$

luego una base para $Nul(A)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

b) Sabemos que $Col(A)$ es generado por todas las columnas de A, luego es evidente que la ultimo columna es una combinación de las otras tres las cuales por hipotesis forman un conjunto linealmente independiente, luego una base para $Col(A)$ es $\{u, v, w\}$. Ahora como $dim(Col(A)) + dim(Nul(A)) = 4$ tenemos que $dim(Nul(A)) = 1$ y

$$[u \quad v \quad w \quad u+v+w] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego una base para $Nul(A)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Puntaje:

- 1 pto por determinar una base para $Col(A)$.
- 1 pto por determinar una base para $Fil(A)$.
- 1 pto por determinar una base para $Nul(A)$.
- 1 pto por determinar una base para $Col(A)$.
- 1 pto por argumentar que $dim(Nul(A)) = 1$.
- 1 pto por determinar una base para $Nul(A)$.

3. Sea $T : M_{2\times 2} \to P_2(\mathbb{R})$ una transformación lineal tal que, $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + (b+c)x + dx^2$

a) **[2]ptos** Demuestre que $T(A) = T\left(A^T\right)$

b) **[4]ptos** Determine una base para el núcleo de T.

Solución.

a)
$$T(A) = T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + (b+c)x + dx^2$$

y

$$T(A^T) = T\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = a + (c+b)x + dx^2$$

por lo cual $T(A) = T(A^T)$.

b) $Nul(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a + (b+c)x + dx^2 = 0 \right\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a = 0,\ -b = c,\ d = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \right\}$

luego una base para $Nul(T)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

Puntaje:

- 2 ptos por demostar a).
- 1 pto por describir el $Nul(T)$.
- 2 ptos por determinar una base para $Nul(T)$.

4. Si $A^2 = \begin{bmatrix} 12 & 7 & -3 \\ 24 & -14 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

   a) Demuestre que A es invertible.

   b) Encuentre por el método de cramer la segunda componente del vector x tal que $A^2x = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución.

a) Como el $det(A^2) = 144 \to det(A^2) \neq 0$ y por lo tanto A^2 es invertible.

b) Como el $det(A^2) \neq 0$ podemos aplicar el método de cramer luego

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 16 & -3 \\ 24 & 16 & 6 \\ -3 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & 7 & -3 \\ 24 & -14 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{144}{144} = 1$$

Puntaje:

- 1 punto por argumentar que si $det(A) \neq 0$ entonces A es invertible.
- 1 punto por argumentar que $det(A^3) = (det(A))^3$
- 1 punto por encontrar que $det(A) = 12$
- 1 punto por mostrar la forma que debe tener x_2, aplicando el método de cramer.
- 2 ptos por encontar correctamente x_2. (si ocupa otro método 0 puntos)

5. Sea $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ y sea $\mathbb{B} = \{z_1, z_2, z_3\}$ tal que $z_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $z_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Encuentre una base $\mathbb{D} = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que P es la matriz de cambio de coordenadas de $\mathbb{B}$ a $\mathbb{D}$.

Solución.

Las columnas de P corresponden a los vectores $\mathbb{D}$-coordenados de la base $\mathbb{B}$, de modo que se tienen las siguientes ecuaciones para determinar la base requerida:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} &= w_1 - 3w_2 + 4w_3 \\ \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} &= 2w_1 - 5w_2 + 6w_3 \\ \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} &= -w_1 + w_3, \end{aligned}$$

lo cual matricialmente puede representarse como

$$\begin{bmatrix} -2 & -8 & -7 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} = [w_1 \ \ w_2 \ \ w_3] \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

de modo que la base $\mathbb{D}$ viene dada por la matriz

$$\begin{aligned} [w_1 \ \ w_2 \ \ w_3] &= \begin{bmatrix} -2 & -8 & -7 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -8 & -7 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 8 & 5 \\ -3 & -5 & -3 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 28 & 38 & 21 \\ -9 & -13 & -7 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Puntaje:

- 2 puntos por interpretar las columnas de la matriz P correctamente.
- 2 puntos por plantear un sistema de ecuaciones para calcular w_1, w_2 y w_3
- 1 punto por calcular la inversa de la matriz P.
- 1 punto por los resolver el sistema y obtener la base solicitada.

6. Sea W un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$W = \{\vec{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \vec{w} \times (-2, 1, 2) = 0\}.$$

Demuestre que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Luego encuentre una base para este subespacio y calcule su dimensión.

Solución. Debemos demostrar lo siguiente para que W sea un subespacio de $\mathbb{R}^3$:

a) $(0, 0, 0) \in W$ pues, de hecho, el vector nulo tiene producto cruz igual a cero con cualquier vector.

b) Como el producto cruz es lineal, dados w_1, w_2 en W, $(w_1 + w_2) \times (-2, 1, 2) = w_1 \times (-2, 1, 2) + w_2 \times (-2, 1, 2)$, lo cual es igual a cero, pues ambos vectores están en W, de modo que la suma es cerrada en W.

c) Nuevamente, por la linealidad del producto cruz, dado $w \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda w) \times (-2, 1, 2) = \lambda(w \times (-2, 1, 2)) = 0$, por lo que $\lambda w \in W$.

Otra alternativa para demostrar que W es subespacio vectorial, es darse cuenta que todos los elementos en W son vectores paralelos a $(-2, 1, 2)$, de modo que $W = Gen\{(-2, 1, 2)\}$.

Por último, todos los vectores que tienen producto cruz cero con el vector $(-2, 1, 2)$ son vectores paralelos a este, es decir, los vectores en W son de la forma $\alpha(-2, 1, 2)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, de modo que una base para W es $\{(-2, 1, 2)\}$ y $\dim(W) = 1$.

Puntaje:

- 3 puntos por demostrar que W es subespacio: 1 punto por demostrar que contiene al $(0, 0, 0)$, y 2 puntos por demostrar que W es cerrado bajo la suma y ponderación por escalar.
- 2 puntos por encontrar una base para el subespacio.
- 1 punto por encontrar su dimensión.

7. Sea $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Demuestre que existe un único valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que la matriz C es diagonalizable. Luego, para este valor de a, encuentre una matriz P invertible y una matriz D diagonal tal que $C = PDP^{-1}$.

Solución. Para encontrar los valores propios de C calculamos $\det(C - \lambda I)$, para lo cual elegimos la segunda columna de tal matriz, quedando $(1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$. Es claro que para $\lambda = 3$ existe un vector propio, por lo que evaluemos con $\lambda = 1$:

$$(C - I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Debemos resolver el sistema $(C - I) = 0$, el cual, para $a \neq 2$ entrega un generador para el espacio propio asociado al valor propio 1, por lo que $a = 2$, pues sabemos que A es diagonalizable si y solo si para todos los valores propios la multiplicidad aritmética es igual a la dimensión del espacio propio asociado.

Para este valor, el sistema entrega $x + 2z = 0$, por lo que $x = -2z$, de modo que $(x, y, z) = (-2z, y, z) = z(-2, 0, 1) + y(0, 1, 0)$. Así, $E_1 = Gen\{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

Por último, para $\lambda = 3$, se obtiene $x = 0$, $-2y + 2z = 0$, por lo que $y = z$. Por lo tanto, $E_1 = Gen\{(0, 1, 1)\}$.

Por último, las matrices P y D vienen dadas por los vectores propios y valores propios respectivamente:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Puntaje:

- 2 puntos por justificar adecuadamente que para $a = 2$ C es diagonalizable.
- 1 puntos por encontrar sus valores propios.
- 1 punto por encontrar sus vectores propios.
- 1 punto por construir la matriz P y 1 punto por construir la matriz D.

8. (V o F)

a) Si A es una matriz de $m \times n$ tal que la ecuación $Ax = b$ tiene solución para toda $b \in \mathbb{R}^m$ entonces la ecuación $A^T x = 0$ tiene solamente la solución trivial.

Solución. verdadero

Si la ecuación $Ax = b$ tiene solución para toda $b \in \mathbb{R}^m$ quiere decir que $Col(A) = \mathbb{R}^m$ lo que implica $dim(Col(A)) = m$ como

$$dim(Col(A)) = dim(Fil(A)) = dim(Col(A^T)) = m$$

y

$$dim(Col(A^T)) + dim(Nul(A^T)) = m$$

luego $dim(Nul(A^T)) = 0$ lo que implica que la ecuación $A^T x = 0$ tiene solamente la solución trivial

b) El conjunto $H = \{A \in M_{n\times n} \mid det(A) = 0\}$ es un subespacio de $M_{n\times n}$.

Solución. falso

Por ejemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son dos matrices que tienen determinante nulo, pero $A + B = I$ tiene determinante 1, por lo que la suma no es cerrada.

c) Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, existe algún $h \in \mathbb{R}$ de modo que el espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 4$ de A sea bidimensional.

Solución. verdadero

El espacio propio asociado al valor propio 4 está dado por la solución del sistema homogéneo $(A - 4I)v = 0$, de lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} -2x_4 &= 0 \\ 14x_4 &= 0 \\ -2x_2 + hx_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

De las primeras dos ecuaciones, $x_4 = 0$, por lo que las otras dos ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} -2x_2 + hx_3 &= 0 \\ 2x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Por último, para que haya solución de este sistema, $h = -3$, de modo que la solución será $v = (x_1, x_2, -2/3x_2, 0)$, de lo cual se obtendrán dos vectores generadores para tal espacio.

Puntaje:

- 2 puntos por justificar que a) es verdadera.
- 2 puntos por justificar (ya sea en palabras o algún contraejemplo) que b) es falsa.
- 2 puntos por justificar que c) es verdadera.