Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 1

1. Sean a, b vectores de $\mathbb{R}^3$. Demuestre que

$$(a-b)\times(a+b) = 2(a\times b)$$

Solución.
Aplicando que el producto cruz distribuye

$$(a-b)\times(a+b) = (a\times a) - (b\times a) + (a\times b) - (b\times b)$$

Aplicando que el producto cruz de vectores paralelos es $\vec{0}$.

$$(a\times a) - (b\times a) + (a\times b) - (b\times b) = -(b\times a) + (a\times b)$$

Aplicando que $(b\times a) = -(a\times b)$

$$-(b\times a) + (a\times b) = 2(a\times b)$$

Puntaje:

- 2 ptos por aplicar que el producto cruz distribuye.
- 2 ptos por aplicar que el producto cruz de vectores paralelos es $\vec{0}$.
- 2 ptos por aplicar que $(b\times a) = -(a\times b)$.

2. *a*) Encuentre una ecuación cartesiana de el plano que pasa por los puntos $(0, 2, -1), (-1, 0, 1)$ y $(1, 2, 0)$.

   b) Determine si la recta que pasa por los puntos $(0, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$ está contenida en el plano de ecuación cartesiana $-x + y + z = 2$.

Solución.

a) Sabemos que

$$d_1 = (0, 2, -1) - (-1, 0, 1) = (1, 2, -2) \quad \text{y} \quad d_2 = (0, 2, -1) - (1, 2, 0) = (-1, 0, -1)$$

son vectores que estan en la dirección del plano que debemos encontrar
luego un vector normal para el plano es

$$\overrightarrow{n} = d_1 \times d_2 = (-2, 3, 2).$$

Su ecuación cartesiana entonces es

$$-2(x - 0) + 3(y - 2) + 2(z + 1) = 0 \quad \text{o} \quad -2x + 3y + 2z = 4.$$

b) Basta notar que los punto dados si pertenecen al plano

$$0 + 1 + 1 = 2 \quad \text{y} \quad -2 + 2 + 2 = 2,$$

luego la recta que pasa por esos puntos pertenecen al plano.

Puntaje:

- 1.5 ptos por determinar una normal para el plano.
- 1.5 ptos por determinar una ecuación cartesiana del plano.
- 3 ptos por demostrar que la recta esta contenida en el plano.

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones en variables x, y, z y w

$$\begin{aligned} x - 2ay + 3z + aw &= 0 \\ -x - z - w &= b \\ -y + az + w &= 1 \\ 2x + 2z - 2aw &= 4 \end{aligned}$$

Determine que condiciones deben tener a y b para que :

a) El sistema no tenga solución.

b) El sistema tenga infinitas soluciones, en este caso determine el conjunto solución del sistema.

Solución.

Observe que la matriz ampliada asociada al sistema es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2a & 3 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2a & 4 \end{array}\right]$$

Al escalonar la matriz obtenemos, con $a \neq 0$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & b \\ 0 & -1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(a-1)(a+1) & a+1 & 2a-b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & -b-2 \end{array}\right]$$

La cual si $a = -1$ y $b \neq -2$ representa un sistema inconsistente, si $a = 1$ representa un sistema inconsistente, si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ tiene única solución y si $a = -1$ y $b = -2$ representa a un sistema con infinitas soluciones, cuyo conjunto se determina por

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

luego es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Observe que si $a = 0$ entonces la matriz queda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & | & b \\ 0 & -1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & | & 4 \end{bmatrix}$$

Que corresponde a la matriz ampliada de un sistema con unica solución no dependiendo del valor de b.

En resumen:

a) el sistema no tiene solución si y sólo si $a = -1$ y $b \neq -2$ o $a = 1$

b) el sistema tiene infinitas soluciones si y solo si $a = -1$ y $b = -2$

Puntaje:

- 0.5 pto por mostrar la matriz ampliada.
- 1.5 ptos llegar a la matriz escalonada (con $a \neq 0$).
- 1 pto por concluir que el sistema no tiene solución si $a = -1$ y $b \neq -2$.
- 0.5 pto por concluir que el sistema no tiene solución si $a = 1$.
- 1 ptos por concluir que el sistema tiene infinitas soluciones si y solo si $a = -1$ y $b = -2$
- 1 pto por determinar el conjunto solución del sistema con infinitas soluciones.
- 0.5 ptos por encontrar la matriz escalonada cuando $a = 0$ y determinar que no el sistema asociado no cumple las propiedades pedidas.

4. Sea A una matriz tal que

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}.$$

Determinar una matriz B tal que

$$AB=\begin{pmatrix}2&2\\5&6\end{pmatrix}.$$

Solución.

Como

$$AB=(Ab_1 \quad Ab_2)=\begin{pmatrix}2&2\\5&6\end{pmatrix}$$

y

$$A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\to 2\cdot A\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\to A\left(2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}\to A\begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$$

tenemos que

$$A\begin{pmatrix}0&2\\1&4\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\5&6\end{pmatrix}.$$

Puntaje:

- 3 pto por determinar cada columna de B.

Continúa en la siguiente página.

5. Sea A una matriz de 4×4, con columnas C_1, C_2, C_3 y C_4, cuya matriz escalonada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) **[2 ptos]** Demuestre que las columnas de A no son linealmente independientes.

b) **[4 ptos]** Demuestre que C_3 es combinación lineal de las columnas C_1, C_2 y C_4, indicando los coeficientes de la combinación lineal.

Solución.

a) Sabemos que las columnas de una matriz A son linealmente independientes si la ecuación vectorial $AX = 0$ tiene única solución. Del enunciado se infiere que la matriz escalonada de la matriz aumentada $[A\ 0]$ es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Como la cantidad de pivotes de A y $[A\ 0]$ es 3, y este numero es menor que la cantidad de incógnitas de la ecuación, concluimos que $AX = 0$ tiene infinitas soluciones. Es decir, las columnas de A no son linealmente independientes.

b) La operación elemental $F1 - 3F2$, seguido de las operaciones $F2 - 3F3$ y $F1 + 10F3$, muestran que la matriz escalonada reducida de la matriz aumentada $[A\ 0]$ es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De aquí se concluye que $C_3 = -C_1 + C_2 + 0 \cdot C_4$.

Puntaje:

- 2 ptos por argumentar correctamente que las columnas de A no son linealmente independientes.
- 1 pto por argumentar que C_3 es combinación lineal del las columnas C_1, C_2 y C_4.
- 3 ptos por determinar los coeficientes de la combinación lineal.

6. Sea A una matriz de 3×3 tal que

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Encuentre la matriz A^{-1}.

Solución.

Tenemos que

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-A\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}A\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}A\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

Luego

$$A\begin{pmatrix}2&-1&0\\-3&2&0\\2&-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Entonces

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-3&2&0\\2&-2&2\end{pmatrix}$$

Puntaje:

- 2 ptos por determinar cada columna de A^{-1}

7. Sea la aplicación T definida por

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

a) Determinar la matriz A asociada a T, es decir tal que $T(x) = Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Demuestre que T es invertible y encuentre la fórmula para T^{-1}.

Solución.

a) La matriz A asociada a T es:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Una matriz escalonada de A es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donde todos sus columnas poseen pivotes, luego A es invertible por lo cual T es invertible. La inversa de A es
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$T^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

Puntaje:

- 2 ptos por determinar correctamente A.
- 0.5 pto por argumentar que T es invertible.(mostrando la inversa tambien lo demuestra)
- 2.5 punto por determinar A^{-1} (descontar 1 ptos por cada posición incorrecta)
- 1 punto por determinar correctamente T^{-1}

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

a) Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son tres vectores en $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes entonces $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ también son vectores linealmente independientes.

b) Si A es una matriz de 3×3 y b un vector en $\mathbb{R}^3$ tales que la ecuación $Ax = b$ no tiene solución entonces la ecuación $Ax = 0$ tiene solución única.

c) Si $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces existe, al menos, un valor para h tal que $Gen\{v_1, v_2, v_3\} = Gen\{v_1, v_2\}$.

Solución.

a) Verdadera.
Considere la combinación lineal $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$, debemos mostrar que $\alpha = \beta = 0$. Note que la ecuación anterior se escribe como $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}$. Como $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ son linealmente independientes estonces la ecuación vectorial $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + 0 \cdot \vec{v}_3 = \vec{0}$ tiene única solución, es decir, $\alpha = \beta = 0$.

b) Falsa.
Si $Ax = b$ no tiene solución, la matriz escalonada de A debe tener menos de 3 pivotes por lo cual el sistema $Ax = 0$ tiene infinitas soluciones (Tambien sirve dar un contrejemplo)

c) Verdadero
Si $h = 0$ el vector $v_3 = v_1 + v_2$ luego $Gen\{v_1, v_2, v_3\} = Gen\{v_1, v_2\}$

Puntaje:
2 ptos por argumentar cada alternativa correctamente.