PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
Segundo Semestre 2018

EYP1026 - Modelos Probabilísticos

Ayudantía Nº 6

Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Catalina Bustamante
Fecha: 27 de Septiembre 2018

1. Un mazo contiene n cartas numeradas del 1 al n. Una persona escoge una carta al azar y la devuelve al mazo. Luego, escoge otra carta del mazo, la devuelve, y continúa así hasta obtener una misma carta por segunda. Sea X el número total de extracciones hasta obtener la repetición.

   a) Determine el soporte de X, calcule la $P(X > k)$, y use este resultado para obtener la distribución de X (función de probabilidad discreta).
   Hint: Note que $P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k)$.

   b) Pruebe que

$$E(X) = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) ... \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \quad (1)$$

   Hint:Pruebe y use el hecho que si X es una variable aleatoria con soporte en {0,1,2,...}, entonces $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$.

2. Sea X una variable con función de distribución dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2}^{i+1} & \text{si } k \leq x < k+1, k = 1, 2, ... \end{cases} \quad (2)$$

   a) Demuestre que la probabilidad condicional dada por $P(X \geq k + m | X \geq m)$, m, $k = 1, 2, ...$, no depende de m.
   Hint: $\sum_{k=1}^{infty} a\alpha^k = \frac{a\alpha}{1-\alpha}$ y $\sum_{k=1}^{infty} ak\alpha^k = \frac{a\alpha}{(1-\alpha)^2}$, $\alpha < 1$

3. Sea X el tiempo de reparación (en horas) de un cierto artículo. Supnga que X sigue una distribución de probabilidad con densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (3)$$

a) El factor de depreciación Y se define por $Y = e^{-aX}$, $(a > 0)$. Calcule la esperanza y varianza de Y.

b) El costo de reparación de un artículo es $cX + Z$, donde la constante c es un costo por unidad de tiempo y la variable aleatoria Z toma valores z_1 y z_2 con probabilidad p y $1 - p$, respectivamente. Calcule el costo de reparación esperado.

Hint: Recuerde que

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha},\ \alpha, \lambda > 0$$

.