PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I3 MAT1203 - Algebra Lineal
*Noviembre, 2017*

## *PROBLEMAS CUADERNILLO 1*

1. Sea $\mathcal{C} = \{1+x^2, x+x^2, 1+2x+x^2\} \subset \mathbb{P}_2$.

   *a)* [ **3 pts.**] Demuestre que $\mathcal{C}$ es base de $\mathbb{P}_2$

   *b)* [ **3 pts.**] Si $\mathcal{B} = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ es otra base de $\mathbb{P}_2$ y la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ es

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

   determine $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$

a) Puesto que $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ y $\mathcal{C}$ tiene 3 elementos en $\mathbb{P}_2$, para demostrar que $\mathcal{C}$ es base de $\mathbb{P}_2$ basta con demostrar que $\mathcal{C}$ es un conjunto l.i. [1 pto]

Para demostrar que $\mathcal{C}$ es l.i. basta con demostrar que los vectores coordenados con respecto a la base canónica $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ son l.i.

$$[1+x^2]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [x+x^2]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [1+2x+x^2]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ [1 pto]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Puesto que una escalonada de A tiene 3 pivotes tenemos que sus columnas son l.i. y por lo tanto los polinomios son l.i. [1 pto]

Alternativa para demostrar independencia lineal

$$\alpha(1+x^2) + \beta(x+x^2) + \gamma(1+2x+x^2) = 0 \Rightarrow$$ [1 pto]

$$\alpha + \gamma + (\beta + 2\gamma)x + (\alpha+\beta+\gamma)x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 0 \\ \beta + 2\gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ [1 pto]

Resolviendo el sistema (Deben mostrar el procedimiento, ya sea comprobando que la matriz de coeficientes tiene inversa o escalonando) se obtiene $\alpha = \beta = \gamma = 0$ [1 pto]

b) Puesto que

$$\underset{\mathcal{E}\leftarrow\beta}{P} = \left[ [p_1]_{\mathcal{E}} \quad [p_2]_{\mathcal{E}} \quad [p_3]_{\mathcal{E}} \right]$$

tenemos que

$$[p_1]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow p_1 = 0\cdot(1+x^2) + 1\cdot(x+x^2) + 4(1+2x+x^2)$$
0.5 pts
$$= 4 + 9x + 5x^2$$ 0.5 pts

$$[p_2]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow p_2 = 1(1+x^2) + 0(x+x^2) - 3[1+2x+x^2]$$
0.5 pts
$$= -2 - 6x - 2x^2$$ 0.5 pts

$$[p_3]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow p_3 = 2(1+x^2) + 3(x+x^2) + 8(1+2x+x^2)$$
0.5 pts
$$= 10 + 19x + 13x^2$$ 0.5 pts

2. [ **6 pts.**] Sean $H$, $K$ subespacios de un espacio vectorial $V$. Sea

$$H + K = \{w : \ w = u + v, \ u \in H, v \in K\}.$$

Demuestre que $H + K$ es subespacio de $V$.

Solución:

Para demostrar que $W = H+K$ es subespacio de $V$ demostramos

i) $0_V \in W$

ii) $u, v \in W \Longrightarrow u + v \in W$

iii) $u \in W$, $\alpha$ escalar $\Longrightarrow \alpha u \in W$.

[1.5 pts] (Aplicación del método)

i) Puesto que $H, K$ son subespacios de $V$ se tiene que $\vec{0} \in H, \vec{0} \in K$

Por lo tanto $0 = \underbrace{0}_{\in H} + \underbrace{0}_{\in K} \in H+K$ [1.5 pts]

ii) Sean $u, v \in H+K$. Entonces

$$u = u_1 + u_2 \quad , u_1 \in H, \ u_2 \in K$$
$$v = v_1 + v_2 \quad \ \ v_1 \in H, \ v_2 \in K$$

$$\therefore \quad u + v = u_1 + u_2 + v_1 + v_2$$
$$= \underbrace{u_1 + u_2}_{\in H} + \underbrace{v_1 + v_2}_{\in K}$$

Pero $u_1 + u_2 \in H$, pues $H$ es subespacio
$v_1 + v_2 \in K$ " $K$ " "

$\therefore \quad u + v \in H+K$ [1.5 pts]

iii) Sea $u \in H+K$, $\alpha$ escalar. Entonces

$$u = u_1 + u_2 \quad , u_1 \in H, \ u_2 \in K$$

$$\therefore \quad \alpha u = \alpha(u_1 + u_2) = \underbrace{\alpha u_1}_{\in H} + \underbrace{\alpha u_2}_{\in K}$$

Pero $\alpha u_1 \in K$ pues $K$ es subespacio
$\alpha u_2 \in H$ " $H$ " "

$\therefore \quad \alpha u \in H+K$. [1.5 pts]

3. Si $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ está definida por $T(p) = xp(1) + x^2 p(0)$

*a*) [ **3 pts.**] Determine la $\mathcal{B}$-matriz que representa a $T$ con respecto a la base (en dominio y recorrido)

$$\mathcal{B} = \{1, -x, 1 - x^2\}.$$

*b*) [ **3 pts.**] Determine bases de los espacios $Nul(T)$ e $Im(T)$.

a) $\quad p_1(x) = 1 \;,\; p_2(x) = -x \quad p_3(x) = 1 - x^2$

Entonces la $\beta$-matriz que representa $T$ es

$$A = \Big[\, [T(p_1)]_\beta \;\; [T(p_2)]_\beta \;\; [T(p_3)]_\beta \,\Big]$$

[1 pto por el método]
No asignar el pto si no inlcuta el método establecido por la Fórmula

- $T(p_1) = x \underbrace{p_1(1)}_{1} + x^2 \underbrace{p_1(0)}_{1} = x + x^2$

pero $x + x^2 = (1)1 + (-1)(-x) + (-1)(1 - x^2)$

$$\therefore\; [T(p_1)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [0.5 \text{ pts}]$$

$\cancel{1} + x + x^2 - \cancel{1} = x + x^2$

- $T(p_2) = x \cdot \underbrace{p_2(1)}_{-1} + x^2 \underbrace{p_2(0)}_{0} = -x$

pero $-x = 0 \cdot (1) + 1 \cdot (-x) + 0(1 - x^2)$

$$\therefore\; [T(p_2)]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [0.5 \text{ pts}]$$

- $T[p_3] = x \underbrace{p_3(1)}_{0} + x^2 \underbrace{p_3(0)}_{1} = x^2$

pero $x^2 = 1 \cdot (1) + 0 \cdot (-x) + (-1)(1 - x^2)$ $\qquad 1 + x^2 - 1 = x^2$

$$\therefore\; [T(p_3)]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [0.5 \text{ pts}]$$

$$\therefore\; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [0.5 \text{ pts}]$$

Método Alternativo:

- Primero calcular la matriz que representa a $T$ con respecto a la base Canónica $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$

$$T(1) = x + x^2 \qquad [T(1)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(x) = x \qquad [T(x)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(x^2) = x \qquad [T(x^2)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore C = [T]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0.4 pts por el método, 0.2 pts por cada col correcta $= (1.0$ pts$)$

- La matriz de cambio de base es $B = \left[ [1]_{\mathcal{E}} \; [-x]_{\mathcal{E}} \; [1-x^2]_{\mathcal{E}} \right]$

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \qquad [1]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-x = 0 \cdot 1 + (-1)x + 0 \cdot x^2 \qquad [-x]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1 - x^2 = 1 \cdot 1 + 0x + (-1)x^2 \qquad [1-x^2]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

0.4 pts por el método, 0.2 pts por cada col correcta $= (1.0$ pts$)$

- La matriz que representa a $T$ c.r.a la base $\mathcal{B}$ es

$$A = B^{-1} C B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [0.5 \text{ pts}]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [0.5 \text{ pts}]$$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

- Una base de $Im(A)$ son las columnas pivotes de $A$

$$\mathcal{B}_{Im(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad [0.5\ pts]$$

$\therefore$ Una base de $Im(T)$ es $\mathcal{B}_{Im(T)} = \{ q_1, q_2 \}$ donde

$$[q_1]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [q_2]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[q_1]_\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow q_1 = 1 \cdot 1 + (-1)(-x) + (-1)\cdot(1-x^2) = x^2 + x$$

$$[q_2]_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow q_2 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-x) + 0 \cdot (1-x^2) = -x$$

$\therefore$ una base de $Im(T)$ es $\mathcal{B}_{Im(T)} = \{ x^2 + x, -x \}$

- $Nul(A) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\therefore$ $\mathcal{B}_{Nul(T)} = \{ q_3 \}$ donde $[q_3]_\beta = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore \quad q_3 = -1\,(1) + (-1)(-x) + 1 \cdot (1-x^2) = x - x^2$$

Método Alternativo:

- Claramente, de la definición $T(p) = x \cdot p(1) + x^2 p(0)$ se tiene que $Im(T) = \langle x, x^2 \rangle$ [1 pto]
- Como $x, x^2$ son L.I se tiene que una base de $Im(T)$ es $\mathcal{B}_{Im(T)} = \{ x, x^2 \}$ [0.5 pts]
- $T(p) = 0 \iff p(1) = 0,\ p(0) = 0 \iff p = \alpha(x-1)(x-0) = \alpha(x^2 - x)$

[1 pto]

$\therefore$ $NUL(T) = \langle x^2 - x \rangle$.

, una base de $NUL(T)$ es $\mathcal{B}_{NUL(T)} = \{ x^2 - x \}$. [0.5 pts]

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

*a*) [ **4 pts.**] Demuestre que $A$ es diagonalizable e indique matrices $V$ y $D$, con $D$ diagonal, tales que $V^{-1}AV = D$.

*b*) [ **2 pts.**] Determine los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales $A^n = I$.

Justifique sus respuestas.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -4 \\ -2 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)\left[-(3-\lambda)(3+\lambda) + 8\right] = -(1+\lambda)\left[\lambda^2 - 9 + 8\right]$$

$$= -(1+\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \lambda = -1$$

[0.9 pts]

- Vectores propios para $\lambda = 1$

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{Nul}(A - I) = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \therefore \lambda_1 = 1 \quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[0.9 pts]

- Vectores propios para $\lambda = -1$

$$A + I = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathrm{Nul}(A + I) = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \therefore \lambda_2 = -1 \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[0.9 pts]

A llenativo: $v_1, v_2, v_3$ son l.i. $\therefore$ tiene $\mathbb{R}^3$ tiene una base de vectores propios de $A$.

Puesto que para cada valor propio su multiplicidad algebraica es igual a la dimensión de su espacio propio se tiene que $A$ es diagonalizable y [0.3 pts]

$$V = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

[0.5 pts] [0.5 pts]

(El orden de las cols en $V$ y $D$ puede cambiarse al mismo tiempo, la base para $w_d = -1$ puede ser otra)

$$A = VDV^{-1} \Rightarrow A^n = VD^nV^{-1} \quad [1 \text{ pto}]$$

$$= V \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{bmatrix} V^{-1}$$

$$= VIV^{-1} = I$$

para $n$ par. [1 pto]

Si un alumno responde $n$ par sin justificar asignar [0.5 pts]

## *PROBLEMAS CUADERNILLO 2*

5. [ **6 pts.**] Si el polinomio característico de $A$ es $P_A(\lambda) = (1+\lambda)(2-\lambda)(3+\lambda)$, determine los valores propios y el polinomio característico de $A^{-2}$. Justifique su respuesta.

$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \ \lambda = 2, \ \lambda = -3$

$\therefore$ Los valores propios de $A$ son $-1, 2, -3$. [1.5 pts]

Por otra parte

$Av = \lambda v \Rightarrow A^2 v = \lambda^2 v \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} v = A^{-2} v$ [1.5 pts]

Si no se justifica que $\lambda^{-2}$ es v.p. de $A^{-2}$ No asignar el [1.5 pts] que corresponde a esto.

$\therefore$ Los valores propios de $A^{-2}$ son $\lambda_1 = \frac{1}{(-1)^2} = 1$,

$\lambda_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$, $\lambda_3 = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$. [1 pto]

Como $A$ es de $3\times3$ su polinomio característico es de grado 3 $\therefore$ $P_{A^{-2}}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$ [1 pto]

$= (1-\lambda)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right)\left(\frac{1}{9} - \lambda\right)$ [1 pto]

Método Alternativo.

- Los valores propios de $A$ son $\lambda = -1, 2, -3$. [1.5 pts]
- Como su polinomio característico de $A$ es de grado 3 $A$ es de $3\times3$ y sus 3 valores propios son distintos, $A$ es diagonalizable $\therefore$ $A = VDV^{-1}$

$\therefore A^{-2} = \left((VDV^{-1})^2\right)^{-1} = (VD^2V^{-1})^{-1} = (V^{-1})^{-1}(D^2)^{-1}V^{-1}$

$= VD^{-2}V^{-1}$ [1 pto]

$\therefore$ Los valores propios de $A^{-2}$ son $\frac{1}{(-1)^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{(-3)^2}$ [1 pto]

$\therefore$ Su polinomio característico es $P_{A^{-2}}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$ [1 pto]

$= (1-\lambda)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right)\left(\frac{1}{9} - \lambda\right)$ [1 pto]

6. Suponga que $A$ es una matriz real de $3 \times 3$ que tiene como valor propio al 0 cuyo espacio de vectores propios asociados es el $Gen\{u\}$, y también como valor propio el -1 cuyo espacio de vectores propios asociados es el $Gen\{v, w\}$ donde $\{v, w\}$ es un conjunto linealmente independiente.

   *a*) [ **4 pts.**] Encuentre bases para $Nul(A)$, $Fil(A^T)$.

   *b*) [ **2 pts.**] Diagonalice $C = 2A^3 + I$, indicando la matriz de vectores propios y matriz diagonal de valores propios para $C$.

Justifique sus respuestas.

Tenemos:

- $W_{\lambda=0} = NUL(A - 0I) = Nul(A) = \langle u \rangle$

  $\therefore \; B_{Nul(A)} = \{u\}$. [1 Pto]

- Como $\dim(Im(A)) + \dim(Nu(A)) = 3$ tenemos $\dim(Im(A)) = 2$ [1 Pto]

- Como $A(v) = -v$, $A(w) = -w$, tenemos que $v, w \in Im(A)$.

- Como $v, w$ son l.i. $B_{Im(A)} = \{v, w\}$. [1 Pto]

- Como las filas de $A^T$ son las columnas de $A$ tenemos que una base de $Fil(A^T)$ es $\{v^T, w^T\}$. [1 Pto]

Descontar 0.5 si dice $\{v, w\}$

b) $A = VDV^{-1} \Rightarrow A^3 = VD^3V^{-1}$

$\therefore \; 2A^3 + I = 2VD^3V^{-1} + I = V(2D^3 + I)V^{-1}$ [0.8 Pts]

$\therefore \; 2A^3 + I$ se diagonaliza con matriz de vectores propios $V = [u \; v \; w]$ (0.6 Pts) y matriz de valores propios

$$2D^3 + I = \begin{bmatrix} 2\cdot 0^3 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cdot(-1)^3 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cdot(-1)^3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(0.6 Pts)

(Las matrices $V$ y $D$ pueden estar con las columnas en otro orden, pero deben ser consistentes entre ellas)

7. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

*a*) [ **2 pts.**] Determine los valores propios de $A$ y sus vectores propios correspondientes.

*b*) [ **4 pts.**] Escriba $A$ en la forma $A = PCP^{-1}$ donde $C$ es una matriz que representa a una transformación lineal que corresponde a la composición de un escalamiento y una rotación. Indique el factor de escalamiento y el ángulo de rotación.

a) Valores Propios

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+5 = \lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = 2 \pm 2i \quad [1 \text{ pto}]$$

Vectores Propios

$\lambda = 2+2i$ ∴ $A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-2-2i & 5 \\ -1 & -1-2i \end{bmatrix} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} -1-2i \\ 1 \end{bmatrix}$ (0.5)

El vector propio para $\bar{\lambda} = 2-2i$ es $\bar{v} = \begin{bmatrix} -1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$ [0.5]

b) Del teorema del Texto

$$P = [\operatorname{Re}(v) \; \operatorname{Im}(v)] \qquad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \qquad \lambda = a - ib$$

∴ $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ 1.0 pto por método
1.0 pto por resultado correcto
(0.5 por cada matriz)

Además,

$$C = \sqrt{2^2+(-2)^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

0.6 pts

∴ $r = \sqrt{8}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \varphi = \pi - \frac{\pi}{4}$
$= \frac{3\pi}{4}$

El factor de escalamiento es $r = \sqrt{8}$ [0.7 pts]

La rotación es de $\frac{3\pi}{4}$, [0.7 pts] (Si dicen $\frac{\pi}{4}$ asignar 0.2 pts)

Una alternativa es tomar el otro vector propio $\bar{v} = 2+2i$

$$P = [\,Re(\bar{v}) \;\; Im(\bar{v})\,] \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \sqrt{8} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Para este lado $r = \sqrt{8}$ , $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . .

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justicación adecuada no tiene puntos):

*a*) [ **2 pts.**] La dimensión del subespacio vectorial $V \subset \mathbb{P}_3$ generado por $\{1+x+x^2,\ 1-x,\ 1+3x+2x^2,\ 1+4x^3\}$es 4.

*b*) [ **2 pts.**] Si $A$ es una matriz de $n \times m$ entonces $\dim(Col(A)) + dim(Nul(A^T)) = n$

*c*) [ **2 pts.**] El vector $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es una vector propio con valor propio $\lambda = 1$ de la matriz que representa a la reflexión en torno a la recta $y = 2x$.

a) Es FALSO pues los 4 vectores dados son l.d y por lo tanto la dim de su espacio generado es a lo más 3. [0.6 por este razonamiento ∴]

Los polinomios son L.D si y sólo si sus vectores coordenadas con respecto a la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$ son L.D

(Por cols) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ∴ Las cols son l.d.

∴ Los polinomios son L.D. [1.4 pts]

b) Verdadero [0.5 pts]

i) $\dim(Im(B)) + \dim(Nul(B)) = n$ si $B$ es de $m \times n$

ii) $\dim(Col(B)) = \dim(Fil(B))$ [0.5 pts]

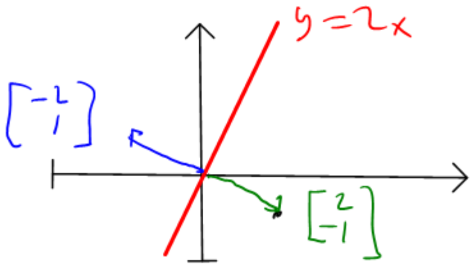
Tomando $B = A^T$ obtenemos

$\dim(Im(A^T)) + \dim(Nul\, A) = n$ [0.5 pts]

Pero $\dim(\mathrm{Im}(A^T)) = \dim(\mathrm{Fil}(A)) = \dim(\mathrm{Col}(A))$

$\therefore \quad \dim(\mathrm{Col}(A)) + \dim(\mathrm{Nul}(A^T)) = n.$ [0.5 pts]

c)




La reflexión de $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ en torno a la recta $y = 2x$ es

$$R\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio con $\lambda = -1$ de $R$.

La afirmación es Falsa. [2 pts]