Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2015

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Interrogación N° 3

Corrección

- Pregunta 1: Cristian Cornejo.
- Pregunta 2: Sebastián Urrutia.
- Pregunta 3: Diamela Peña.
- Pregunta 4: Ignacio Labarca.
- Pregunta 5: Nicolás Morales.
- Pregunta 6: Ignacio Madrid.
- Pregunta 7: Matías Henríquez.

1. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(x+1)^n$$

Solución. El radio de convergencia R satisface la siguiente relación

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \quad a_n = \frac{n}{4^n}$$

De este modo,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto, $R = 4$ y la serie converge absolutamente sobre el intervalo $(-5, 3)$.

Ahora debemos determinar si la serie converge en $x = -5$ y $x = 3$.

- $x = -5$. La serie queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$$

que diverge ya que el término general no converge a cero.

- $x = 4$. La serie queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}(-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n$$

que diverge ya que el término general no converge a cero.

Por lo tanto, la serie converge únicamente sobre el intervalo $(-5, 3)$.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar el radio de convergencia.
- Asignar (**1 ptos**) por decir (no es necesario justificar) que la serie en $x = -5$ no converge.
- Asignar (**1 ptos**) por decir (no es necesario justificar) que la serie en $x = 3$ no converge.
- Asignar (**2 ptos**) por escribir correctamente el intervalo de convergencia, siempre y cuando se haya concluido que en los extremos no hay convergencia.

2. Determine la serie de Taylor de $P(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ centrada en $a = 1$.

Solución. Sabemos que la serie de Taylor centrada en $a = 1$ de una función P está dada por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

Como P es un polinomio de grado 4 la serie se convierte en una suma finita que involucra las derivadas hasta orden 4, de este modo,

$$\begin{array}{lllll}
P(1) = -1 & & & & \\
P'(x) = 4x^3 - 6x & \Longrightarrow & P'(1) = -2 & & (\textbf{1 ptos}) \\
P''(x) = 12x^2 - 6 & \Longrightarrow & P''(1) = 6 & & (\textbf{1 ptos}) \\
P^{(3)}(x) = 24x & \Longrightarrow & P^{(3)}(1) = 24 & & (\textbf{1 ptos}) \\
P^{(4)}(x) = 24 & \Longrightarrow & P^{(4)}(1) = 24 & & (\textbf{1 ptos})
\end{array}$$

Por lo tanto, la serie de Taylor de P es

$$P(x) = \frac{-1}{0!} + \frac{-2}{1!}(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3 + \frac{24}{4!}(x-1)^4 \qquad (\textbf{2 ptos})$$

Evaluación. El alumno puede determinar una expresión equivalente en serie de Taylor, pero esta debe tener las potencias de $(x - 1)$ de forma explícita. En tal caso también se asignan los (**2 ptos**).

3. Utilice series para obtener un valor aproximado de la integral definida

$$\int_0^1 x\cos(x^3)\,dx$$

con un error menor a 0.001.

Solución. Sabemos que

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

luego,

$$x\cos(x^3) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{6n+1}$$

Integrando entre 0 y 1 obtendremos

$$\int_0^1 x\cos(x^3)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+2)(2n)!}$$

Sabemos que el error $R_n = S - S_n$ de una serie alternante satisface

$$|R_n| \leq b_{n+1}$$

Aplicando esta desigualdad a nuestra serie obtendremos

$$|R_n| \leq \frac{1}{(6n+12)(2n+2)!}$$

Si deseamos que el error sea menor a 0.001 basta con determinar n que satisface la desigualdad

$$\frac{1}{(6n+12)(2n+2)!} < \frac{1}{10^3}$$

Evaluando para diferentes valores de n,

- $n = 1$

$$\frac{1}{18 \cdot 4!} = \frac{1}{432} > \frac{1}{10^3}$$

- $n = 2$

$$\frac{1}{24 \cdot 6!} = \frac{1}{17280} < \frac{1}{10^3}$$

Por lo tanto, el valor de la integral es

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{(6n+2)(2n)!}$$

con un error menor a 0.001.

Evaluación. Este ejercicio puede tener soluciones alternativas. Es responsabilidad del ayudante verificar si las propuestas alternativas a la pauta satisfacen o no la puntuación que se entrega a continuación.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar una serie de potencias para $x\cos(x^3)$ (de forma explícita o implícita, por ejemplo dentro de la integral).
- Asignar (**1 ptos**) por determinar una serie para $\displaystyle\int_0^1 x\cos(x^3)\,dx$
- Asignar (**2 ptos**) por acotar $|R_n|$ con alguna sucesión que solo dependa de n.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar, justificadamente, algún n para el cual $|R_n| < 0.001$.

4. Determine la ecuación del plano que contiene la recta $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 8 - t$ y es paralelo al plano $2x + 4y + 8z = 17$.

Solución. Para determinar la ecuación del plano solo es necesario un punto y su normal. Dado que el plano contiene a la recta $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 8 - t$ se deduce que el punto

$$P_0 = (3, 0, 8)$$

está en el plano buscado. Además, sabemos que es paralelo al plano $2x + 4y + 8z = 17$ y por tanto su normal será

$$\vec{n} = (2, 4, 8)$$

Finalmente, la ecuación del plano buscado es

$$((x, y, z) - (3, 0, 8)) \cdot (2, 4, 8) = 0$$

o bien,

$$x + 2y + 4z - 35 = 0$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por determina algún punto del plano buscado (de forma explícita o implícita)
- Asignar (**2 ptos**) por determina alguna normal al plano. (de forma explícita o implícita)
- Asignar (**2 ptos**) por determinar alguna ecuación del plano con los datos anteriormente encontrados.

5. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos

$$x+y+z=1, \qquad x+2y+2z=1$$

y determine el ángulo entre los planos.

Solución. Alternativa 1. Resolviendo el sistema como el álgebra lineal

$$x+y+z=1, \qquad x+2y+2z=1$$

tendremos que la recta estará dada por

$$(x,y,z)=(1,0,0)+(0,1,-1)t$$

o equivalentemente

$$x=1, \qquad y=t, \qquad z=-t$$

Evaluación. Asignar (**4 ptos**) por determinar las ecuaciones paramétricas de la recta (forma vectorial o en forma de ecuaciones paramétricas).

Alternativa 2. Toda recta queda caracterizada por dos puntos. Se puede ver que

$$(1,0,0) \qquad \text{y} \qquad (1,1,-1)$$

están en la intersección de los planos y por tanto en la recta buscada. Luego, la ecuación vectorial paramétrica de la recta es

$$(x,y,z)=(1,0,0)+t(0,1,-1)$$

o equivalentemente

$$x=1, \qquad y=t, \qquad z=-t$$

Evaluación. Asignar (**1 ptos**) por cada uno de los dos puntos que general la recta. Asignar (**1 ptos**) por la dirección de la recta. Asignar (**1 ptos**) por determinar las ecuaciones paramétricas de la recta (forma vectorial o en forma de ecuaciones paramétricas).

El ángulo entre los planos está dado por el ángulo formado entre las normales. De este modo,

$$(1,1,1)\cdot(1,2,2)=\|(1,1,1)\|\|(1,2,2)\|\cos(\theta)$$

siendo θ el ángulo formado entre los planos. Por lo tanto,

$$\cos(\theta)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

y tendremos que

$$\theta=\arccos\left(\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)$$

Evaluación. Asignar (**1 ptos**) por obtener la ecuación $\cos(\theta)=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ o su equivalente. Asignar (**1 ptos**) por determinar el ángulo θ.

6. Determine el límite, si es que existe, o demuestre que el límite no existe.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+3y^4}$$

Solución. Si (x, y) tiende a $(0, 0)$ por el eje X entonces

$$\frac{x^4}{x^4+3y^4} = \frac{x^4}{x^4+3(0)^4} = 1$$

luego,

$$\frac{x^4}{x^4+3y^4} \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad (x,y)\to(0,0) \quad \text{por el eje } X$$

Similarmente, si (x, y) tiende a $(0, 0)$ por el eje Y entonces

$$\frac{x^4}{x^4+3y^4} = \frac{(0)^4}{(0)^4+3y^4} = 0$$

luego,

$$\frac{x^4}{x^4+3y^4} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x,y)\to(0,0) \quad \text{por el eje } Y$$

Puesto que $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^4+3y^4}$ tiene dos límites diferentes en dos rectas distintas, el límite no existe.

Evaluación.

- Asignar (**4 ptos**) por demostrar que la función $f(x,y) = \dfrac{x^4}{x^4+3y^4}$ tiene dos límites diferentes dependiendo de la forma en que (x, y) se acerca a $(0, 0)$, asignando (**2 ptos**) por cada una de las dos manera.

  Nota. El alumno puede elegir otras maneras de acercarse y hay que verificar si esas formas son igualmente válidas.

  Asignar (**2 ptos**) por concluir que el límite no existe. Estos dos puntos se asignarán únicamente si lo anterior está correcto.

7. Determine el conjunto de puntos en los cuales la función es continua.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{x^2+2y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Solución. Puesto que f es cociente de funciones continuas ($g(x,y)=x^3y^2$ y $h(x,y)=x^2+2y^2$) se deduce que f es continua en todos los puntos (x,y) para los cuales $x^2+2y^2\neq 0$. En otras palabras, f es continua (al menos)

$$\mathbb{R}-(0,0)$$

Falta decidir si f es continua en el punto $(0,0)$.

Alternativa 1. Probaremos que el límite vale cero por definición: Sea $\varepsilon>0$, luego

$$\left|\frac{x^3y^2}{x^2+2y^2}-0\right|\leq\left|x^3\right|\leq\sqrt{x^2+y^2}^3<\delta^3=\varepsilon.$$

Luego, para $\varepsilon>0$ se deduce que $\delta=\sqrt[3]{\varepsilon}$.

Alternativa 2. Si

$$f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))=\psi(\rho)\phi(\theta)$$

con $\phi(\theta)$ acotado y $\psi(\rho)\to 0$ cuando $\rho\to 0$, entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))=0$$

Aplicando este resulta,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y^2}{x^2+2y^2}=\lim_{\rho\to 0}\rho^3\frac{\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)}{1+\sin^2(\theta)}=0$$

ya que

$$\left|\frac{\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)}{1+\sin^2(\theta)}\right|\leq 1$$

De este modo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0\neq f(0,0)$$

y por tanto f no es continua en $(0,0)$.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por concluir que f es continua en $\mathbb{R}-(0,0)$ a causa de ser cociente de funciones continuas. Si el alumno solo deduce sin argumentar solo asignar (**1 ptos**).
- Asignar (**3 ptos**) por calcular correctmente el límite de f cuando (x,y) va a $(0,0)$.
- Asignar (**1 ptos**) por concluir que $(0,0)$ no es un punto de continuidad.

8. [MAPLE]

(a) Escriba los comandos que permiten definir los polinomios de Taylor de grado 4 y 8 centrados en el origen, para la funcion $f(x) = \cos(x)$.

(b) Escriba los comandos que permiten definir los restos asociados a los respectivos polinomios.

(c) Escriba los comandos que permiten graficar (en un mismo gráfico) los restos definidos en la parte (b).

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa