PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

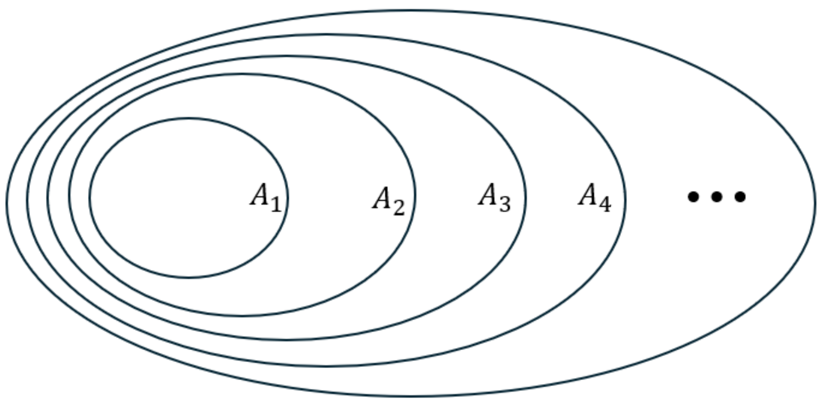
Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Solución Ayudantía 2

1. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Demuestre que

   (a) Si $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \in \mathcal{A}$, entonces $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

   Podemos dibujar lo que tenemos.



Nos piden la unión de todo, esto se puede descomponer de la siguiente forma

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots\right)$$

note que $A_{i-1} \cap (A_i - A_{i-1}) = \emptyset$, por lo cual podemos aplicar el axioma 3 de una medida de probabilidad e ir desarrollando

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots\right) \\ &= P(A_1) + P(A_2 - A_1) + P(A_3 - A_2) + \cdots \end{aligned}$$

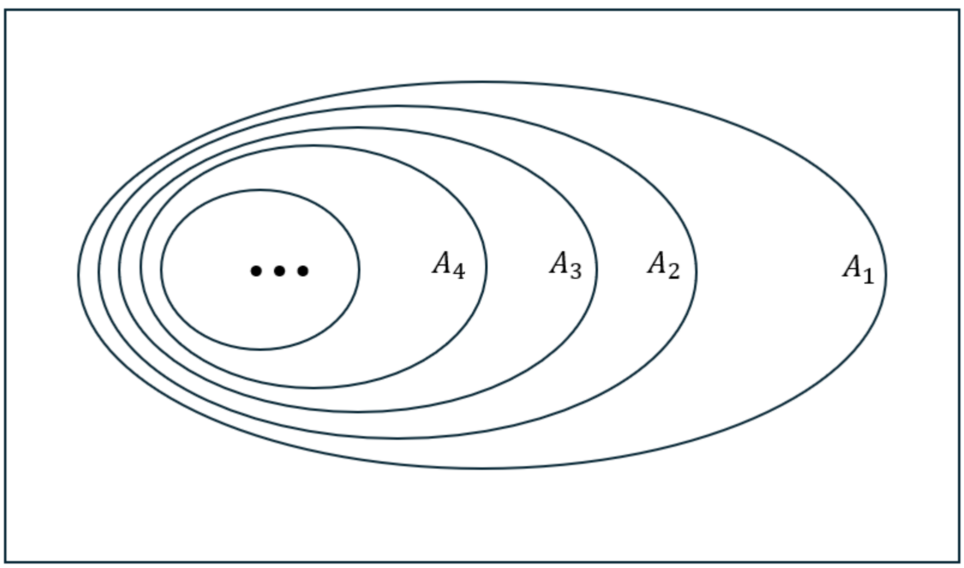
$$
\begin{aligned}
&= P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i - A_{i-1}) \\
&= P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) - P(A_i \cap A_{i-1}) \\
&= P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_i) - P(A_{i-1}) \\
&= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} P(A_i) - P(A_{i-1}) \\
&= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} P(A_n) - P(A_{2-1}) \\
&= P(A_1) - P(A_1) + \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_n)
\end{aligned}
$$

(b) Si $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \in \mathcal{A}$, entonces $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$

Para esto podemos escribir $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ de la siguiente manera

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots = \cdots \subset A_3 \subset A_2 \subset A_1$$

y esto corresponde a



Para esto, podemos usar lo demostrado anteriormente de una forma bien conveniente. Se tiene que

$$A_1^c \subset A_2^c \subset A_3^c \subset \cdots$$

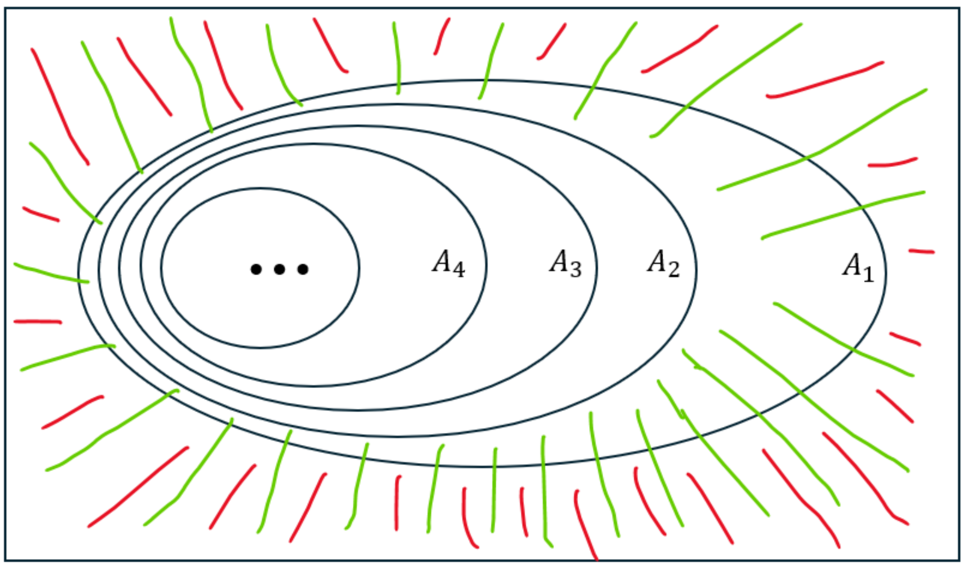
Entonces se cumple que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n^c\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$$

Desarrollamos esto de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n^c\right) &= \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) \\
P\left(\left[\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n\right]^c\right) &= \lim_{n\to\infty} 1 - P(A_n) \\
1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n\right) &= \lim_{n\to\infty} 1 - P(A_n) \\
\Rightarrow\ P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_n\right) &= \lim_{n\to\infty} P(A_n)
\end{aligned}
$$

La siguiente imagen intenta retratar $A_1^c \subset A_2^c$



El color rojo representa A_1^c y el color verde representa A_2^c. Claramente $A_1^c \subset A_2^c$. Funciona de igual forma para el caso general.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una secuencia de medidas de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{A})$. Defina

$$\lambda(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(B)}{2^i}, \quad B \in \mathcal{A}$$

¿Es λ una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{A})$?

Debemos corroborar los tres axiomas de una medida de probabilidad.

- $\lambda(\Omega) = 1$

  Por enunciado a_i son medidas de probabilidad, por lo cual ya cumplen que $a_i(\Omega) = 1$.

Entonces

$$\begin{aligned}\lambda(\Omega) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(\Omega)}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \\ &= \frac{1/2}{1-1/2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Se cumple la primera propiedad.

- $\lambda(B) \geq 0$

  Esto es claro, pues la suma tiene solo terminos positivos, además que $a_i(B) \geq 0$, ya que por enunciado son medidas de probabilidad.

  Se cumple la segunda propiedad.

- $\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$

$$\begin{aligned}\lambda\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right)}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^{\infty} a_i\left(A_j\right)}{2^i} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_i(A_j)}{2^i} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i(A_j)}{2^i} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)\end{aligned}$$

  Se cumple la tercera propiedad.

Luego, se concluye que $\lambda(B)$ es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{A})$

3. Suponga el experimento de lanzar una moneda honesta y luego un dado equilibrado.

   (a) Defina un modelo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ para este experimento.

   Se puede proponer

$$\begin{aligned}\Omega &= \{\{c, s\} \times \{1,2,3,4,5,6\}\} \\ \mathcal{A} &= \mathcal{P}(\Omega) \\ P(\{w\}) &= \frac{1}{N(\Omega)} = \frac{1}{12}, \forall \omega \in \Omega\end{aligned}$$

(b) Calcule la probabilidad de que salga un numero par en el dado.

Sabemos que los números pares del dado son $2, 4, 6$. Los resultados posibles de Ω se cumplen esto son

$$\begin{matrix} \{c,2\}, & \{c,4\}, & \{c,6\} \\ \{s,2\}, & \{s,4\}, & \{s,6\} \end{matrix}$$

Luego, la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{c,2\}) + P(\{c,4\}) + P(\{c,6\}) + P(\{s,2\}) + P(\{s,4\}) + P(\{s,6\}) \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c) Defina los siguientes eventos

$$\begin{aligned} A &= \text{Sale cara y un numero primo} \\ B &= \text{Sale cara y un numero impar} \end{aligned}$$

Calcule la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos eventos.

Nos piden $P(A \cup B)$. Entonces

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{12} + \frac{3}{12} - \frac{2}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Para eso resultaba útil ver que

$$\begin{aligned} A &= \{\{c,2\}, \{c,3\}, \{c,5\}\} \\ B &= \{\{c,1\}, \{c,3\}, \{c,5\}\} \end{aligned}$$

donde $A \cap B = \{\{c,3\}, \{c,5\}\}$

4. Suponga que 5 bolitas se distribuyen en 7 urnas. Asuma que cada bola cae de manera independiente en alguna de las urnas con igual probabilidad. Determine la probabilidad de que haya al menos una urna con mas de una bolita.

Definamos

$$A = \text{Hay al menos una urna con mas de una bolita}$$

Nos interesa $P(A)$, pero esta probabilidad es complicada de calcular, por lo cual podemos aplicar complemento

$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

donde

$$A^c = \text{No haya ninguna urna con mas de una bolita}$$

Esto significa que todas las bolita caen en diferentes urnas.

Para calcular lo pedido, podemos usar casos favorables y casos totales

$$P(A^c) = \frac{N(A^c)}{N(\Omega)}$$

Cada bolita tiene 7 posibilidades donde caer, por lo cual

$$N(\Omega) = 7^5$$

Para $N(A^c)$ hay que pensar un poco. Queremos que todas las bolitas caigan en urnas diferentes, entonces la primera bolita tiene 7 posibilidades donde caer, como ya se ocupo una urna, la segunda tiene solo 6 posibilidades donde caer, la tercera solo tiene 5, y así sucesivamente hasta la ultima bolita. Esto corresponde a

$$N(A^c) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Finalmente, la probabilidad pedida corresponde a

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \frac{N(A^c)}{N(\Omega)} \\ &= 1 - \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7^5} \\ &= 0.8500625 \end{aligned}$$

5. Una mano de poker consiste en cinco cartas seleccionadas sin reemplazo de una baraja de 52 (sin comodines). Determine la probabilidad de obtener las siguientes combinaciones:

   (a) Escalera de color real: $(10, J, Q, K, A)$ y del mismo palo

   Definamos $A =$ Escalera de color real y del mismo palo. Podemos calcular esto con casos favorables y totales.

   $$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

   Nos dan 5 cartas de un total de 52. Hay un total de $\binom{52}{5}$ formas de que ocurra esto. Entonces

   $$N(\Omega) = \binom{52}{5}$$

   Ahora, para $N(A)$, note que solo hay 4 opciones de tener esto, pues solo hay 4 palos y solo una combinación exacta para que salga $(10, J, Q, K, A)$. Entonces

   $$N(A) = 1 \cdot 4$$

   Luego, la probabilidad pedida es

   $$\begin{aligned} P(A) &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} \\ &= \frac{4}{\binom{52}{5}} \\ &= 0.001440576 \end{aligned}$$

(b) Poker: cuatro cartas con la misma numeración.

Esto corresponde que cuatro cartas tengan el mismo numero y la carta restante sea diferente. Definamos

$$A = \text{Poker}$$

Nuevamente procedemos por casos favorables y totales. Se tiene que

$$N(\Omega) = \binom{52}{5}$$

Para calcular $N(A)$ tenemos las siguientes combinaciones disponibles

$$\begin{gathered}
(A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit) \\
(2\heartsuit, 2\diamondsuit, 2\clubsuit, 2\spadesuit) \\
(3\heartsuit, 3\diamondsuit, 3\clubsuit, 3\spadesuit) \\
\vdots \\
(Q\heartsuit, Q\diamondsuit, Q\clubsuit, Q\spadesuit) \\
(K\heartsuit, K\diamondsuit, K\clubsuit, K\spadesuit)
\end{gathered}$$

Tenemos entonces 13 maneras de obtener lo pedido, y además, nos falta una carta mas, como ya sacamos 4 cartas, la carta restante tiene $52 - 4 = 48$ opciones disponibles. Entonces

$$N(A) = 13 \cdot 48$$

Luego, la probabilidad pedida es

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{N(A)}{N(\Omega)} \\
&= \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} \\
&= 0.000240096
\end{aligned}$$