Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Enero 2023

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Pauta Interrogación 1

1. Determine si cada una de las siguientes integrales es convergente o divergente. Evalúe las que sean convergentes.

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+3\sin^4(2x)}{\sqrt{x^3}}dx$

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2}dx$

   Solución:

   a) Observemos que esta integral, es una integral impropia del tipo 2 y notemos que:

   $$0 \leq 3\sin^4(2x) \leq 3,$$

   De este modo tenemos la siguiente cota para nuestra expresión:

   $$\frac{1+3\sin^4(2x)}{\sqrt{x^3}} > \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

   La integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ es una integral p del tipo 2 con $p = \dfrac{3}{2} > 1$, por lo que es una integral divergente. Luego por el criterio de comparación nuestra integral:

   $$\int_0^1 \frac{1+3\sin^4(2x)}{\sqrt{x^3}}dx \text{ es divergente.}$$

Asignación de Puntaje:

* (0.5 pts.) Por identificar que es una integral del tipo 2 .
* (0.5 pts.) Por establecer la cota inferior.
* (1 pto.) Por establecer la divergencia de la integral p .
* (1 pto.) Por concluir correctamente la divergencia de la integral por el criterio de comparación.

b) Dado que la función del integrando en una función continua en todo $\mathbb{R}$ y los límites de integración son infinitos, esta integral es una integral del tipo 1, la cual puede escribirse de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2}dx.$$

Para facilitar el cálculo de estas integrales impropias veamos la antiderivada de la función a integrar: Si hacemos $u = x^4+1$ tenemos que

$$\int \frac{6x^3}{(x^4+1)^2}dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^4+1} + c.$$

Realicemos el cálculo de cada integral por separado:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2}dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2}dx = \lim_{t\to-\infty} \left(-\frac{3}{2}\frac{1}{x^4+1}\right)\Bigg|_{t}^{0}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\frac{1}{t^4+1}\right) = -\frac{3}{2}.$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2}dx = \lim_{t\to+\infty} \left(-\frac{3}{2}\frac{1}{x^4+1}\right)\Bigg|_{0}^{t}$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\frac{1}{t^4+1} - (-\frac{3}{2})\right) = \frac{3}{2}.$$

De este modo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2} dx = 0$$

Y por lo tanto es convergente.

Asignación de Puntaje:

* (0.5 pts.) Por separar correctamente la integral en dos integrales impropias.
* (1 pto.) Por el cálculo correcto de la integral $\int_{-\infty}^{0} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2} dx$.
* (1 pto.) Por el cálculo correcto de la integral $\int_{0}^{\infty} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2} dx$.
* (0.5 pts.) Por concluir la convergencia de la integral y entregar su valor.

2. Determine si las siguientes sucesiones son convergente o divergentes, en caso de ser convergentes determine su límite:

   a) $\left\{ \dfrac{(-1)^{n-2} n^2}{4+n^3} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

   b) $\left\{ \dfrac{\ln(n+2)}{\ln(1+4n)} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

   Solución:

   a) Para el cálculo del límite de esta sucesión, calulemos primero el límite de la sucesión en valor absoluto, es decir:

   $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n-2} n^2}{4+n^3} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4+n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^3}}{\frac{4+n^3}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

   De un teorema visto en clases, sabemos que:
   " Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ".
   Por lo tanto

   $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^{n-2} n^2}{4+n^3} \right) = 0,$$

   Y la sucesión $\left\{ \dfrac{(-1)^{n-2} n^2}{4+n^3} \right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Asignación de Puntaje:

* (1.5 pts.) Por calcular correctamente el límite de la sucesión en valor absoluto.
* (1.5 pts.) Por concluir el valor del límite de la sucesión a partir del límite en valor abosulto.

b) Para calcular es límite consideremos $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{\ln(1+4x)}$ y calculemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x).$$

Notemos que este limite es de la forma $\dfrac{+\infty}{+\infty}$, luego por la regla de L' Hopital tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(1+4x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x+2}}{\dfrac{4}{1+4x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+4x}{4(x+2)} = 1.$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(1+4n)} = 1,$$

Y la sucesión $\left\{ \dfrac{\ln(n+2)}{\ln(1+4n)} \right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Asignación de Puntaje:

* (1 pto.) Por analizar la sucuesión apartir de la función $f(x)$.
* (1.5 pts.) Por calcular correctamente el limite de $f(x)$.
* (0.5 pts.) Por concluir convergencia de la sucesión apartir de el limite de $f(x)$.

3. Determine si las siguientes series convergen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2\cos(n)}{n^3-2n^2+7}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+n^3}{3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3-3n}{n!}$

Solución:

a) Como $3+2\cos(n) > 0$ y $n^3-2n^2+7 = n^2(n-2)+7 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos usar el criterio de comparación al límite de esta serie con la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Como esta serie es convergente (criterio p o comparación integral) y

$$\text{lím} \frac{\frac{3+2\cos(n)}{n^3-2n^2+7}}{\frac{1}{n^2}} = \text{lím} \frac{\frac{3}{n}+\frac{2\cos(n)}{n}}{1-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0$$

concluimos que la serie dada es convergente.

b) Por el criterio de la raíz enésima, como

$$\begin{aligned}
\text{lím} \sqrt[n]{|a_n|} &= \text{lím} \frac{\sqrt[n]{2^n+n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} \\
&= \text{lím} \frac{2\sqrt[n]{1+\frac{n^3}{2^n}}}{3} \\
&= \frac{2}{3} < 1
\end{aligned}$$

la serie es convergente.

Por el criterio del cociente, como

$$\begin{aligned}
\text{lím} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \text{lím} \frac{2^{n+1}+(n+1)^3}{3^{n+1}} \frac{3^n}{2^n+n^3} \\
&= \text{lím} \frac{2^{n+1}+(n+1)^3}{3(2^n+n^3)} \\
&= \text{lím} \frac{2+\frac{(n+1)^3}{2^n}}{3(1+\frac{n^3}{2^n})} \\
&= \frac{2}{3} < 1
\end{aligned}$$

la serie es convergente.

Por comparación al límite con la serie geométrica convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Como

$$\lim \frac{\frac{2^n+n^3}{3^n}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim 1 + \frac{n^3}{2^n} = 1$$

la serie dada es convergente.

c) Por el criterio del cociente, como

$$\begin{aligned}
\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim \frac{(n+1)^3 - 3(n+1)}{(n+1)!} \frac{n!}{n^3 - 3n} \\
&= \lim \frac{(n+1)^3 - 3(n+1)}{(n+1)(n^3+3n)} \\
&= \lim \frac{\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^3 - 3(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{3}{n^2})} \\
&= 0
\end{aligned}$$

la serie es convergente.

Asignación de Puntaje para cada parte:

* (0.5 pts.) Por elegir un criterio apropiado.
* (1.0 pts.) Por aplicar correctamente el criterio seleccionado, verificando las hipótesis necesarias y realizando los cálculos necesarios sin equivocarse.
* (0.5 ptos.) Por llegar a la conclusión correcta.

4. Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{\sqrt{n}}$$

Solución: Para usar el criterio de la raíz enésima calculamos

$$\lim \sqrt[n]{\frac{|3x+2|^n}{\sqrt{n}}} = \lim \frac{|3x+2|}{\sqrt[2n]{n}} = |3x+2|$$

La serie es absolutamente convergente si $|3x+2| < 1$ y es divergente si $|3x+2| > 1$.

Para usar el criterio del cociente calculamos

$$\lim \frac{|3x+2|^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{|3x+2|^n} = \lim \sqrt{\frac{n}{n+1}}|3x+2| = |3x+2|$$

La serie es absolutamente convergente si $|3x+2| < 1$ y es divergente si $|3x+2| > 1$.

Concluimos que la serie converge en $(-1, -\frac{1}{3})$ y que diverge fuera del intervalo $[-1, -\frac{1}{3}]$.

Falta analizar los extremos del intervalo. Si $x = -\frac{1}{3}$, la serie queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esta serie es divergente por el criterio p o por criterio integral o por comparación con la serie armónica.

Si $x = -1$, la serie queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Considerando $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ que es positiva, decreciente y convergente a 0, podemos usar el criterio de la serie alternante para concluir que es convergente.

Así el intervalo de convergencia es $[-1, -\frac{1}{3})$ centrado en $-\frac{2}{3}$. El radio de convergencia de la serie es $\frac{1}{3}$.

Asignación de Puntaje:

* (1.0 pts.) Por elegir un criterio apropiado que permita determinar el radio de convergencia.

* (1.5 pts.) Por aplicar correctamente el criterio seleccionado, realizando los cálculos necesarios sin equivocarse.
* (1.0 pts.) Por determinar correctamente el radio de convergencia (no descontar si solo escriben el intervalo).
* (1.5 ptos.) Por determinar la convergencia en -1 usando correctamente el criterio de la serie alternante.
* (1.0 ptos.) Por determinar la divergencia en $-1/3$ usando correctamente algún criterio apropiado.