Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2016

MAT 1620 – Cálculo II
Solución Examen

1. Para cada una de las siguientes series, determine si ella es convergente o divergente:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$. *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^2}$. *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^6+n^2+1}}$.

Solución.

a) Si $f(x) = e^{-x}$ entonces f es continua, positiva y decreciente en el intervalo $[1, +\infty[$. Luego, aplicando el criterio integral obtenemos

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty} [-e^{-x}]_1^b = \lim_{b\to\infty} [e^{-1} - e^{-b}] = e^{-1}$$

y como la integral impropia es convergente se sigue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ es convergente.

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\ln(n^{1/4}) < n^{1/4}$. Como $\ln(n^{1/4}) = \frac{1}{4}\ln(n)$, se deduce que $\ln(n) < 4n^{1/4}$. Elevando al cuadrado resulta $(\ln(n))^2 < 16n^{1/2}$ y dividiendo por n^2 resulta

$$\frac{(\ln(n))^2}{n^2} < 16\frac{1}{n^{3/2}}\ .$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ es convergente, por el criterio de comparación la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n^2}$ es convergente. Otra forma: usar el criterio integral para obtener que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x^2} = 2$.

c) Si $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{\sqrt{n^6+n^2+1}}$ y $b_n = \dfrac{1}{n}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2+n}{\sqrt{n^6+n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n+1/n^2}{\sqrt{1+1/n^4+1/n^6}} = 1 > 0\,,$$

luego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^6+n^2+1}}$ diverge por el criterio de comparación al límite ya que la serie armónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Puntaje Pregunta 1a)

(i) **1 punto** por verificar las hipótesis del criterio integral

(ii) **1 punto** por calcular la integral y concluir.

Puntaje Pregunta 1b)

(i) Si usan el criterio integral asignar puntaje como en el problema 3a)

(ii) Si usan el criterio de comparación otorgar **2 puntos** por obtener correctamente la desigualdad y concluir.

Puntaje Pregunta 1c)

(i) **1 punto** por elegir b_n y calcular el límite

(ii) **1 punto** por usar el criterio de comparación y concluir.

2. Encontrar la distancia más corta entre las rectas de ecuaciones simétricas:

$$\begin{aligned} \ell_1 &: \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-2}{1} \\ \ell_2 &: \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-3} \, . \end{aligned}$$

Solución. Las rectas no son paralelas porque los vectores paralelos correspondientes $\vec{v}_1 = (3, -4, 1)$ y $\vec{v}_2 = (1, 2, -3)$ no son paralelos.

$$\begin{aligned} \ell_1 &: \vec{r}_1 = (-2, 2, 2) + t(3, -4, 1) \, , \\ \ell_2 &: \vec{r}_2 = (-2, 1, 1) + s(1, 2, -3) \, . \end{aligned}$$

Si ℓ_1 y ℓ_2 tuvieran puntos de intersección, habría valores de s y t tales que

$$\left. \begin{array}{rcl} -2+3t &=& -2+s \\ 2-4t &=& 1+2s \\ 2+t &=& 1-3s \end{array} \right|$$

Si se resuelve las dos primeras ecuaciones, se obtiene $t = \frac{1}{2}$ y $s = \frac{3}{2}$, y estos valores no satisfacen la tercera ecuación. Por tanto, ℓ_1 y ℓ_2 son rectas oblicuas. Luego yacen en planos paralelos P_1 y P_2 y $d(\ell_1, \ell_2) = d(P_1, P_2)$. El vector normal común a ambos planos es

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 10\hat{\imath} + 10\hat{\jmath} + 10\hat{k} = (10, 10, 10) \, .$$

La ecuación del plano P_1 es

$$10(x+2) + 10(y-2) + 10(z-2) = 0 \Longleftrightarrow x + y + z - 2 = 0 \, .$$

El punto $(-2, 1, 1)$ pertenece al plano P_2, entonces

$$d(\ell_1, \ell_2) = d(P_1, P_2) = d(P_1, (-2, 1, 1)) = \frac{|-2+1+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \, .$$

Puntaje Pregunta 2.

- **2 puntos** por verificar que las rectas son oblicuas.
- **2 puntos** por determinar la ecuación de uno de los planos que contiene a una de las rectas.
- **2 puntos** por obtener correctamente la distancia entre las rectas.

3. El plano $x + y + 2z = 2$ intersecta al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse. Encuentre los puntos de la elipse que son los más cercanos y los más lejanos al origen.

Solución. Definimos las función $g(x,y,z) = x + y + 2z$ y la función $h(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$. Basta determinar los extremos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a las restricciones

$$\begin{array}{rcl} g(x,y,z) & = & 2 \\ h(x,y,z) & = & 0 \end{array}$$

Usando el método de multiplicadores de Lagrange basta determinar las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y,z) & = & \lambda_1 \nabla g(x,y,z) + \lambda_2 \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) & = & 2 \\ h(x,y,z) & = & 0 \end{array}\right| \qquad (*)$$

Tenemos que $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$, $\nabla g = (2x, 2y, -1)$ y $\nabla h = (1,1,2)$, entonces la primera ecuación del sistema $(*)$ es equivalente a

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x & = & 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ 2y & = & 2\lambda_1 y + \lambda_2 \\ 2z & = & -\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{array}\right|$$

Restando las dos primeras ecuaciones obtenemos

$$2x - 2y = 2\lambda_1 x - 2\lambda_1 y \Longleftrightarrow x - y = \lambda_1(x-y) \Longleftrightarrow (x-y)(\lambda_1 - 1) = 0$$

Si $\lambda = 1$ entonces de la primera ecuación se obtiene

$$2x = 2\underbrace{\lambda_1}_{1} x + \lambda_2 \Longleftrightarrow 2x = 2x + \lambda_2 \Longleftrightarrow \lambda_2 = 0$$

y de la tercera ecuación obtenemos que

$$2z = -\underbrace{\lambda_1}_{1} + 2\underbrace{\lambda_2}_{0} \Longleftrightarrow 2z = -1 \Longleftrightarrow \boxed{z = -\frac{1}{2}}$$

y sustituyendo este valor en la segunda restricción resulta

$$h(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - z = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{1}{2} = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = -\frac{1}{2}$$

lo cual es absurdo.

Luego, necesariamente se tiene que $\boxed{x = y}$. Sustituyendo esta relación en la segunda restricción obtenemos

$$h(x,y,z) = 0 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 - z = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - z = 0 \Longleftrightarrow \boxed{z = 2x^2}$$

Por último, usando estas dos últimas relaciones en la primera restricción obtenemos

$$g(x,y,z) = 2 \Longleftrightarrow x + y + 2z = 2 \Longleftrightarrow x + x + 2(2x^2) = 2 \Longleftrightarrow 4x^2 + 2x - 2 = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática obtenemos que las soluciones son $x = \dfrac{1}{2}$ o $x = -1$ y como $x = y$ y $z = 2x^2$ obtenemos que $y = \dfrac{1}{2}$ o $y = -1$ y $z = \frac{1}{2}$ o $z = 2$. Por lo tanto, los puntos máximos y mínimos son:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{y} \quad (-1,-1,2)\,.$$

Puntaje Pregunta 3.

- **2 puntos** por plantear el sistema usando multiplicadores de Lagrange.
- **1,5 puntos** por analizar el caso $\lambda = 1$.
- **1,5 puntos** por analizar el caso $x = y$.
- **1 punto** por obtener los puntos y deducir quien es el máximo y mínimo.

4. Sea $\mathcal{R}$ el rectángulo encerrado por las rectas $x-y=0$, $x-y=2$, $x+y=0$, $x+y=3$. Evalúe la integral $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} (x+y)e^{x^2-y^2}\,dA$.

   Solución. Haciendo el cambio de variables $u=x+y$ y $v=x-y$, tenemos que $x=\frac{1}{2}(u+v)$ y $y=\frac{1}{2}(u-v)$. Entonces,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\,.$$

   La imagen de la región R es el rectángulo acotado por las rectas $u=0$, $u=3$, $v=0$ y $v=2$. Luego,

$$\begin{aligned} \iint_R (x+y)e^{x^2-y^2}\,dA &= \int_0^3\int_0^2 ue^{uv}\left|-\frac{1}{2}\right| dvdu \\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 \left[e^{uv}\right]_{v=0}^{v=2} du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^3 (e^{2u}-1)\,du \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2u}-u\right]_0^3 \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^6-3-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}(e^6-7)\,. \end{aligned}$$

   Puntaje Problema 4.

   - **2 puntos** por dar el cambio de variables y calcular el determinante del Jacobiano.
   - **1 puntos** por señalar la imagen de la región R.
   - **1 puntos** por usar el cambio de variables correctamente.
   - **2 puntos** por calcular correctamente la integral doble.

5. En el cuerpo de forma semi-esférica $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, la densidad varía proporcionalmente a la distancia del punto al centro. Encontrar el centro de gravedad del cuerpo en términos de a.

Solución. En coordenadas esféricas podemos describir el cuerpo

$$E = \left\{(\rho, \theta, \phi) \,:\, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \rho \leqslant a\right\} .$$

Dado que la densidad en (x, y, z) es proporcional a la distancia al origen, la función densidad es

$$\rho(x, y, z) = K\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = K\rho$$

donde K es la constante de proporcionalidad. Entonces, la masa de E es

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E K\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a K\rho \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= K\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^a \rho^3\, d\rho\right) = \frac{Ka^4\pi}{2} . \end{aligned}$$

Los momentos son

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_E x\rho(x, y, z)\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho\cos\theta \operatorname{sen}\phi \cdot K\rho \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= K\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta\right)}_{0}\left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^a \rho^4\, d\rho\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \iiint_E y\rho(x, y, z)\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \cdot K\rho \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= K\underbrace{\left(\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta\right)}_{0}\left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^a \rho^4\, d\rho\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_E z\rho(x, y, z)\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a \rho\cos\phi \cdot K\rho \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^a \rho^4\, d\rho\right) \\ &= 2\pi K\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(2\phi)}{2}\, d\phi\right)\frac{a^5}{5} = \frac{Ka^5\pi}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de masa es

$$(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right) = \left(0, 0, \frac{2a}{5}\right) .$$

Puntaje Pregunta 5.

- **1 punto** por describir el cuerpo en coordenadas esféricas y por obtener la función de densidad.
- **1 punto** por calcular correctamente la masa del sólido.
- **1 punto** por calcular correctamente el momento M_{yz}.
- **1 punto** por calcular correctamente el momento M_{xz}.
- **1 punto** por calcular correctamente el momento M_{xy}.
- **1 punto** por calcular correctamente el centro de masa.

6. Evalúe la integral $\iiint\limits_E (x^3 + xy^2)\, dV$, donde E es el sólido en el primer octante $(x, y, z \geqslant 0)$ que se encuentra bajo el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

Solución. La proyección de E sobre el plano XY es la parte círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$ que está en el primer cuadrante y usando coordenadas cilindricas tenemos

$$E = \left\{(r, \theta, z)\ :\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1 - r^2\right\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_E (x^3 + xy^2)\, dV &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^{1-r^2} (r^3 \cos^3\theta + r^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta) r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos\theta (\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)(1 - r^2) dr d\theta \\
&= \left(\int_0^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta\right) \left(\int_0^1 (r^4 - r^6)\, dr\right) \\
&= \Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^5}{5} - \frac{r^7}{7}\right]_0^1 = \frac{2}{35}
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 6.

- **2 puntos** por describir correctamente el sólido E en coordenadas cilindricos.
- **2 puntos** por usar correctamente el teorema de cambio de variables.
- **2 puntos** por calcular correctamente la integral triple.

7. Use coordenadas esféricas para evaluar

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdxdy\,.$$

Solución. La región de integración corresponde a la semiesfera sólida $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ con $x\geqslant 0$, usando coordenadas esféricas se puede describir mediante

$$S=\left\{(\rho,\theta,\phi)\;:\;-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\;\;0\leqslant\phi\leqslant\pi,\;\;0\leqslant\rho\leqslant 2\right\}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdxdy\\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2}(\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta)^2\cdot\rho\cdot\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho d\phi d\theta\\
&= \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta\right)\left(\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi\,d\theta\right)\left(\int_{0}^{2}\rho^5\,d\rho\right)\\
&= \left[\frac{1}{2}\theta-\frac{1}{4}\operatorname{sen}(2\theta)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\frac{1}{3}(2+\operatorname{sen}^2\phi)\cos\phi\right]_{0}^{\pi}\left[\frac{1}{6}\rho^6\right]_{0}^{2}\\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{32}{3}\right)=\frac{64}{9}\pi\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 7.

- **2 puntos** por describir correctamente la región en coordenadas esféricas.
- **1 punto** por usar correctamente el teorema de cambio de variables.
- **1 punto** por calcular correctamente $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$.
- **1 punto** por calcular correctamente $\int_0^{\pi}\operatorname{sen}^3\phi\,d\phi$.
- **1 punto** por calcular correctamente $\int_0^2\rho^5\,d\phi$ y obtener el valor de la integral triple.

8. Use la transformación $x = u^2$, $y = v^2$, $z = w^2$ para hallar el volumen de la región acotada por la superficie $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1$ y los planos coordenados.

Solución. Haciendo el cambio de variables $x = u^2$, $y = v^2$ y $z = w^2$ vemos que la superficie queda $u + v + w = 1$ y la región E correspondiente a la región R acotada por los planos coordenados y la superficie se puede describir por

$$E = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1 - u,\ 0 \leqslant w \leqslant 1 - u - v\}\,.$$

Tenemos que

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 2u & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{vmatrix} = 8uvw\,.$$

Entonces, por el teorema de cambio de variables

$$\begin{aligned}
V &= \iiint\limits_R dV = \iiint\limits_E \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} 8uvw \; dwdvdu \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} 4uv(1 - u - v)^2 dvdu \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} [4u(1 - u)^2 v - 8u(1 - u)v^2 + 4uv^3] \; dvdu \\
&= \int_0^1 [2u(1 - u)^4 - \frac{8}{3}u(1 - u)^4 + u(1 - u)^4] \; du \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3}u(1 - u)^3 \; du \\
&= \int_0^1 \frac{1}{3}[(1 - u)^4 - (1 - u)^5] \; du \\
&= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{5}(1 - u)^5 + \frac{1}{6}(1 - u)^6 \right]_{u=0}^{u=1} \\
&= \frac{1}{90}\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 8.

- **2 punto** por dar el cambio de variables y describir la región E
- **1 punto** por calcular el determinante del Jacobiano.
- **1 puntos** por usar el cambio de variables correctamente.
- **2 puntos** por calcular correctamente la integral doble.