Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2014

MAT1620 ⋆ Cálculo 2

Interrogación N° 4

> **Preguntas 1 a la 8.** Para obtener todo el puntaje debe tener un desarrollo impecable. Si comete un error de arrastre optará a lo mucho nota 5,0.
>
> **Preguntas 9 a la 12.** Se evaluará la estrategia que se utiliza para solucionar el problema. Si la estrategia es la correcta y se plantea correctamente la parte algebraica entonces la nota comienza en 5,0. Los errores de cálculo que no alteren el análisis del problema no bajarán mucho la nota en caso de no ser reiterativos.

1. Determine el punto de intersección de las curvas $\mathbf{r_1}(t) = (t, 1-t, 3+t^2)$ y $\mathbf{r_2}(t) = (3-t, t-2, t^2)$ y el ángulo formado por sus tangentes en dicho punto.

   Solución. Para determinar la intersección es necesario resolver el sistema

$$\begin{cases} t = 3 - s \\ 1 - t = s - 2 \qquad (\mathbf{1ptos}) \\ 3 + t^2 = s^2 \end{cases}$$

   que tiene por solución $t = 1$ y $s = 2$ (**1 ptos**). Luego el punto de intersección es $(1, 0, 4)$. (**1 ptos**)
   Los tangentes son

$$\mathbf{r_1}'(t) = (1, -1, 2t) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r_2}'(s) = (-1, 1, 2s) \qquad (\mathbf{1ptos})$$

   luego el producto punto de los tangentes, para $t = 1$ y $s = 2$, es

$$\mathbf{r_1}'(1) \cdot \mathbf{r_2}'(2) = (1, -1, 2) \cdot (-1, 1, 4) = 6$$

   Por lo tanto, el ángulo entre los tangentes está dada por

$$6 = \|(1, -1, 2)\| \|(-1, 1, 4)\| \cos(\alpha) \qquad (\mathbf{1ptos}) \qquad \iff \qquad 6 = 6\sqrt{3}\cos(\alpha) \qquad \iff \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} = \cos(\alpha)$$

   Por lo tanto $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3})$ (**1 ptos**)

2. Calcule la longitud de la curva $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ para $0 \leq t \leq 2\pi$.

   Solución. Si

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = e^t(1, \cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t)) \qquad (\mathbf{2ptos})$$

   entonces

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{3}e^t \qquad (\mathbf{2ptos})$$

   Por lo tanto

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| \, dt \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} e^t \, dt \\ &= \sqrt{3}(e^{2\pi} - 1) \qquad (\mathbf{2ptos}) \end{aligned}$$

3. Reparametrice respecto a la longitud de arco la curva

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2t, 3 + t, -5t)$$

medida desde el punto en que $t = 0$ en la dirección que t incrementa.

Solución. Si $\dot{\mathbf{r}}(t) = (2, 1, -5)$ (**1 ptos**) entonces

$$s(t) = \int_0^t \|\dot{\mathbf{r}}(u)\| \, du = \sqrt{30}t \qquad \textbf{(2ptos)}$$

Luego $t = s/\sqrt{30}$ (**1 ptos**) y la reparametrización es

$$\dot{\mathbf{r}}(s) = \left(1 + \frac{2s}{\sqrt{30}}, 3 + \frac{s}{\sqrt{30}}, -5\frac{s}{\sqrt{30}}\right) \qquad \textbf{(2ptos)}$$

4. Determine el punto de la curva $x = t^3, y = 3t, z = t^4$ en que su plano normal es paralelo al plano de ecuación $6x + 6y - 8z = 12$.

Solución. La normal al plano normal es $(3t^2, 3, 4t^3)$ (**2 ptos**) el cual debe ser paralelo al vector $(6, 6, -8)$, lo que ocurre si $t = 1$ (**2 ptos**). Por lo tanto, el plano normal tiene ecuación

$$((x, y, z) - (1, 3, 1)) \cdot (3, 3, -4) = 0 \qquad \textbf{(2ptos)}$$

5. Calcule la curvatura y la torsión para la curva dada por $x = \sinh(t), y = \cosh(t), z = t$ en el punto $(0, 1, 0)$.

Solución. El punto $(0, 1, 0)$ se obtiene para $t = 0$ (**2 ptos**). Si $\mathbf{r}(t) = (\sinh(t), \cosh(t), t)$ entonces

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= (\cosh(t), \sinh(t), 1) &\implies& \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 0, 1) \qquad \textbf{(1ptos)} \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= (\sinh(t), \cosh(t), 0) &\implies& \quad \ddot{\mathbf{r}}(0) = (0, 1, 0) \qquad \textbf{(1ptos)} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\|\dot{\mathbf{r}}(0) \times \ddot{\mathbf{r}}(0)\|}{\|\dot{\mathbf{r}}(0)\|^3} \\ &= \frac{\|(1, 0, 1) \times (0, 1, 0)\|}{\|(1, 0, 1)\|^3} = \frac{1}{2} \qquad \textbf{(1ptos)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{(\dot{\mathbf{r}}(0) \times \ddot{\mathbf{r}}(0)) \cdot \dddot{\mathbf{r}}(0)}{\|\dot{\mathbf{r}}(0) \times \ddot{\mathbf{r}}(0)\|^2} \\ &= \frac{((1, 0, 1) \times (0, 1, 0)) \cdot (1, 0, 0)}{\|(1, 0, 1) \times (0, 1, 0)\|^2} = -\frac{1}{2} \qquad \textbf{(1ptos)} \end{aligned}$$

6. Determine los vectores $\mathbf{T}, \mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ para la curva $\mathbf{r}(t) = \left(t^2, \frac{2}{3}t^3, t\right)$ en el punto $\left(1, \frac{2}{3}, 1\right)$.

Solución. El punto se obtiene para $t = 0$ (**1 ptos**). Además

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= (2t, 2t^2, 1) &\implies& \quad \dot{\mathbf{r}}(1) = (2, 2, 1) \qquad \textbf{(1ptos)} \\ \ddot{\mathbf{r}}(t) &= (2, 4t, 0) &\implies& \quad \ddot{\mathbf{r}}(1) = (2, 4, 0) \qquad \textbf{(1ptos)} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{1}{3}(2, 2, 1) \qquad \textbf{(1ptos)} \\ \mathbf{B} &= \frac{\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1)}{\|\dot{\mathbf{r}}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}(1)\|} = \frac{1}{3}(-2, 1, 2) \qquad \textbf{(1ptos)} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{T} \times \mathbf{B} = \frac{1}{9}(1, -2, 2) \qquad \textbf{(1ptos)} \end{aligned}$$

7. Determine la ecuación de una parábola que tenga curvatura igual a 4 en el origen.

Solución. Si $\mathbf{r}(t) = (t, at^2 + bt, 0)$ (**2 ptos**) entonces

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{\|\dot{\mathbf{r}}(0) \times \ddot{\mathbf{r}}(0)\|}{\|\dot{\mathbf{r}}(0)\|^3} \\
&= \frac{\|(1, b, 0) \times (0, 2a, 0)\|}{\|(1, b, 0)\|^3} \qquad \textbf{(1ptos)} \\
&= \frac{\|(0, 0, 2a)\|}{\|(1, b, 0)\|^3} \\
&= \frac{2|a|}{(1 + b^2)^{3/2}} \qquad \textbf{(1ptos)}
\end{aligned}$$

Si $a = 2$ y $b = 0$ (**2 ptos**) se tiene la curvatura pedida.

8. Pruebe que si la torsión de una curva es cero, entonces la curva está contenida en un plano.

Solución. Si la torsion es cero entonces

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{b} \quad \text{constante} \qquad \textbf{(1ptos)}$$

De este modo, $\dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \mathbf{b} = 0$ (**2 ptos**) para todo t. Por tanto

$$(\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{b} = 0 \qquad \textbf{(2ptos)}$$

Por lo tanto la curva está sobre un plano. (**1 ptos**)

9. Si $\mathbf{r}$ representa una curva suave, pruebe que

$$\left\| \frac{d}{ds}\mathbf{T} \times \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{T} \right\| = \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$$

siendo κ, τ la curvatura y torsión de la curva, respectivamente.

Solución. A partir de la fórmulas de Frenet-Serret se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathbf{T} &= \kappa \mathbf{N} \qquad \textbf{(1ptos)} \\
\frac{d^2}{ds^2}\mathbf{T} &= \kappa' \mathbf{N} + \kappa\left(-\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}\right) \qquad \textbf{(2ptos)}
\end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d}{ds}\mathbf{T} \times \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{T} = -\kappa^3 \mathbf{T} - \kappa^2 \tau \mathbf{B} \qquad \textbf{(2ptos)}$$

Por lo tanto

$$\left\| \frac{d}{ds}\mathbf{T} \times \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{T} \right\| = \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} \qquad \textbf{(1ptos)}$$

10. Calcule la curvatura de la cicloide $x(t) = t - \sin(t), y(t) = 1 - \cos(t)$, con $t \in [0, 2\pi)$. Determine el punto en que la curvatura de esta curva es mínima.

Solución. Si $\mathbf{r}(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t), 0)$ entonces

$$\kappa(t) = \frac{1}{2^{3/2}|1 - \cos(t)|} \qquad \textbf{(2ptos)}$$

Luego el mínimo de la curvatura se obtiene en $0 \le t \le 2\pi$ que maximiza la función $g(t) = |1 - \cos(t)|$, vale decir $t = 3\pi/2$ (**3 ptos**). Por lo tanto

$$\kappa(3\pi/2) = \frac{1}{2^{5/2}} \qquad \textbf{(1ptos)}$$

11. Demostrar que la curva con parametrización

$$\mathbf{r}(t) = (\sin^2(t), \sin(t)\cos(t), \cos(t)) \qquad 0 \leq t < 2\pi$$

está contenida en una esfera y que todos los planos normales a dicha curva contienen al origen.

Solución. Comenzaremos que está contenida en una esfera

$$\left(\sin^2(t)\right)^2 + (\sin(t)\cos(t))^2 + (\cos(t))^2 = \sin^2(t)(\sin^2(t) + \cos^2(t)) + \cos^2(t) = 1 \qquad (\mathbf{2ptos})$$

Por otra parte, el tangente de nuestra curva es

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = (\sin(2t), \cos(2t), -\sin(t))$$

que satisface

$$\mathbf{r}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) = (\sin^2(t), \sin(t)\cos(t), \cos(t)) \cdot (\sin(2t), \cos(2t), -\sin(t)) = 0 \qquad (\mathbf{3ptos})$$

Por lo tanto el tangente es perpendicular al radio de la esfera, concluyendo que el plano normal pasa por el origen. (**1 ptos**)

12. Cortamos la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con el plano $x + y + z = 1$. Determine la curvatura y la torsión de la curva de corte.

Solución. Puesto que la curvatura depende de la norma del vector $\dot{\mathbf{T}}$ entonces la curvatura resulta invariante bajo traslación y rotación. Es claro que la curva resultante es una círcunferencia cuyo radio a se determina por

$$d^2 + a^2 = 4 \qquad (\mathbf{1ptos})$$

siendo d la distancia del plano al origen, vale decir

$$\frac{1}{3} + a^2 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \sqrt{\frac{11}{3}} \qquad (\mathbf{1ptos})$$

Ahora consideremos la curva arcoparametrizada $\mathbf{r}(s) = (a\cos(s/a), a\sin(s/a), 0)$. Luego

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}(s) &= (-\sin(s/a), \cos(s/a), 0)\\ \ddot{\mathbf{r}}(s) &= \frac{1}{a}(-\cos(s/a), -\sin(s/a), 0)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\kappa = 1/a$. (**2 ptos**)

El vector binormal está en la dirección de $\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s) = (0, 0, 1/a)$, para todo s. Por lo tanto $\dot{\mathbf{B}} = 0$, concluyendo que $\tau = 0$. (**2 ptos**)

Tiempo: 180 minutos
Sin consultas