PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2024

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 1

1. a) Dados $0 < x$, $0 < y$, $0 < w$, $0 < z$, demuestre que

$$x < y \ \wedge \ w < z \quad \Longrightarrow \quad x \cdot w < y \cdot z.$$

b) Dados $0 < a$, $0 < b$, $0 < c$, demuestre que

$$8abc \leqslant (a+b)(b+c)(c+a) \ .$$

Solución.

a) Por el axioma (O4), podemos escalar la desigualdad $x < y$ por $w \in \mathbb{R}^+$ y obtener $x \cdot w < y \cdot w$.
Por el axioma (O4), podemos escalar la desigualdad $w < z$ por $y \in \mathbb{R}^+$ y obtener $y \cdot w < y \cdot z$.
Como $x \cdot w < y \cdot w$ y $y \cdot w < y \cdot z$, usando el axioma (O2) se deduce que $x \cdot w < y \cdot z$.

b) Usando la desigualdad MA-MG tres veces, obtenemos que

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \quad \wedge \quad \sqrt{bc} \leqslant \frac{b+c}{2} \quad \wedge \quad \sqrt{ca} \leqslant \frac{c+a}{2}.$$

Como $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, también $\sqrt{ab}, \sqrt{bc}, \sqrt{ca} \in \mathbb{R}^+$. Luego podemos usar la parte (a) y multiplicar las tres desigualdades anteriores, obteniendo que

$$\sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right) \cdot \left(\frac{c+a}{2}\right).$$

Como $\sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ca} = \sqrt{a^2b^2c^2} = abc$, de la desigualdad anterior se obtiene que

$$8abc \leqslant (a+b)(b+c)(c+a).$$

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 1 punto por obtener que $x \cdot w < y \cdot w$.

CC 2. 1 punto por obtener que $y \cdot w < y \cdot z$.

CC 3. 1 punto por usar transitividad y concluir que $x \cdot w < y \cdot z$.

CC 4. 2 puntos por usar la desigualdad MA-MG tres veces

CC 5. 1 punto por deducir la desigualdad requerida.

2. Encuentre todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ tales que

$$|x-3| = |x+5|.$$

Solución.

(i) Primera solución
Lo que se pide es encontrar los $x \in \mathbb{R}$ tales que $d(x,3) = d(x,-5)$. El único punto de la recta real que cumple esto es el punto medio entre -5 y 3, es decir, $x = -1$.

(ii) Segunda solución
Separamos en casos:

- Si $3 < x$, entonces $0 < x-3$. Como $-3 < 5$, también tenemos $x-3 < x+5$, y entonces, por transitividad, también se tiene que $0 < x+5$. Luego, en este caso, la ecuación se simplifica a $x-3 = x+5$, que claramente no tiene soluciones.
- Si $-5 \leq x \leq 3$, entonces $x-3 < 0$ y $0 < x+5$. Luego, en este caso, la ecuación se simplifica a $x-3 = -(x+5)$, que tiene como unica solución $x = -1$.
- Si $x < -5$, entonces $x+5 < 0$. Como $-3 < 5$, también tenemos $x-3 < x+5$, y entonces, por transitividad, también se tiene que $x-3 < 0$. Luego, en este caso, la ecuación se simplifica a $-(x-3) = -(x+5)$, que claramente no tiene soluciones.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 6 puntos por encontrar el valor de $x = -1$.