



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: GODOFREDO IOMMI – AYUDANTE: RODRIGO GALAZ

Introducción al Cálculo - MAT1107
Ayudantía 7
29 de Septiembre de 2023

1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & \text{si } x \geq 0 \\ x + \beta & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- a) Demuestre que f es sobreyectiva si y solo si $\alpha \leq \beta$.
- b) Demuestre que f es inyectiva si y solo si $\alpha \geq \beta$
- c) ¿Cuál es el conjunto $B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : f \text{ es biyectiva}\}$?

2. Considere la función $f : \mathbb{R} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x+1}{|x|-1}$$

- a) Pruebe que f no es inyectiva.
 - b) Sea $g : [0, 1) \rightarrow B$ la función definida por $g(x) = f(x)$. Demuestre que g es inyectiva.
 - c) Determine el conjunto B para que la función g sea sobreyectiva.
 - d) Calcule la inversa de g .
3. Sean $f : (-\infty, 5) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ y $g : [6, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Defina la función compuesta $g \circ f$ indicando cuál es el dominio de composición.
4. Considere la función $h : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \frac{x^3}{1+x^3}$$

- a) Pruebe que h es una función inyectiva
 - b) Encuentre la inversa de la función h .
 - c) ¿Cuál es el dominio de la función inversa?
5. Sean $f : [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : (0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas por

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1}, \quad g(x) = x^2 - 3x + 2$$

- a) Determine el dominio de $g \circ f$.
- b) Encuentre una expresión para $(g \circ f)(x)$