Funciones Trigonométricas

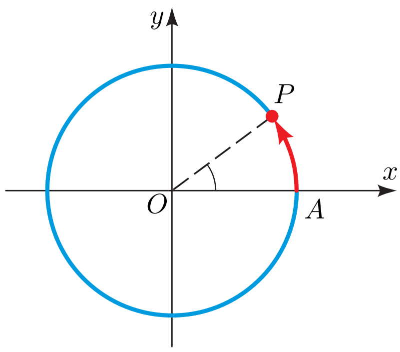
1 Medición de ángulos

DEFINICIÓN Un ángulo es la unión de dos segmentos de recta con un extremo común. La medida de un ángulo se define como una medida de la abertura que forman los segmentos de tal manera que si los segmentos forman un ángulo extendido, entonces este ángulo tiene una medida de 180 grados.

La medición de ángulos mediante grados ha sido útil ya que permite realizar una correspondencia entre ángulos y grados. De tal manera que a cada ángulo le corresponde un único grado. Como nuestro objetivo es introducir las funciones trigonométricas como funciones de números reales y los grados no son números reales debemos hacer corresponder cada ángulo con un número real. Para esto consideremos la circunferencia unitaria que tiene ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

y sobre ella consideramos un punto P arbitrario. Este punto determina el ángulo $\measuredangle AOP$ que está formado por el eje X y el segmento de recta que une el origen O y el punto P como lo muestra la figura:



Note que el punto P también determina el arco AP donde $A = (1, 0)$.

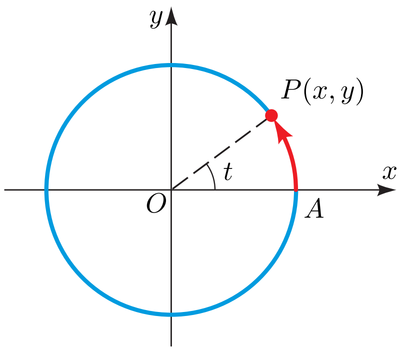
DEFINICIÓN Definimos la medida del ángulo $\measuredangle AOP$ en radianes como la longitud del arco AP que está sobre la circunferencia unitaria.

Note que si $P = (-1, 0)$ entonces el eje X y el segmento OP forman un ángulo extendido y el largo del arco AP es la mitad del perímetro de una circunferencia de radio 1, lo cual es π. Así, a los 360 grados le corresponde una longitud de arco sobre la circunferencia unitaria de 2π unidades de longitud. Esto nos permite, usando un razonamiento de proporciones directas, tener una fórmula que trasforme grados en radianes y viceversa.

$$\frac{\text{ángulo en radianes}}{\text{ángulo en grados}} = \frac{2\pi}{360}\,.$$

2 Funciones trigonométricas

DEFINICIÓN Sean t un número real y $P(x, y)$ el punto P sobre la circunferencia unitaria determinado por t de manera que t es la medida en radianes del ángulo AOP como lo muestra la figura:



Definimos la funciones

$$\operatorname{sen}(t) = y \qquad \text{y} \qquad \cos(t) = x\ .$$

Algunos valores especiales de las funciones trigonométricas se dan en la siguiente tabla.

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{sen}(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

EJEMPLO 1 Encuentre el valor de lo siguiente

a) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

b) $\operatorname{sen}\left(\frac{19\pi}{4}\right)$

c) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

d) $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

e) $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

f) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

PROPOSICIÓN 1 Se tienen las siguientes propiedades de las funciones trigonométricas

1. **Periodicidad.**
   Para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que
   $$\begin{aligned} \operatorname{sen}(t + 2\pi k) &= \operatorname{sen}(t) \\ \cos(t + 2\pi k) &= \cos(t) \end{aligned}$$
   donde k es cualquier número entero.

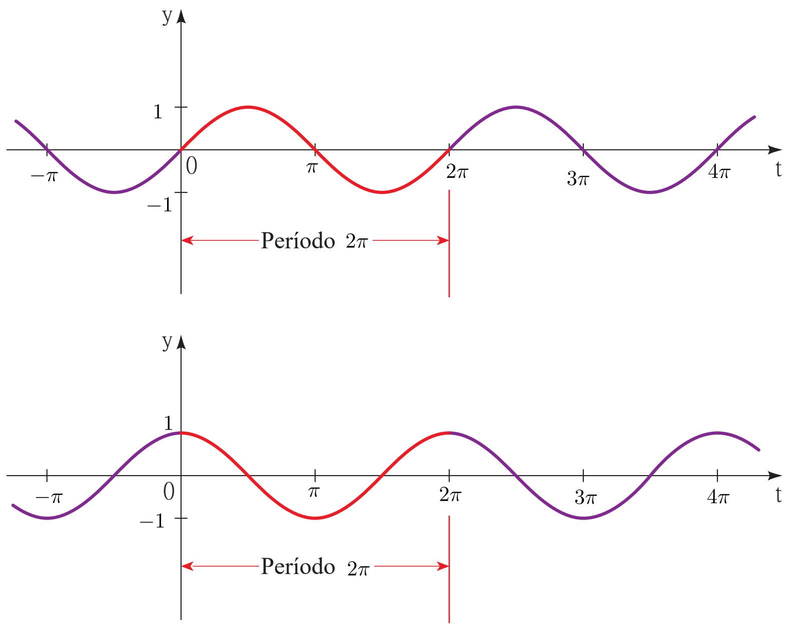
2. **Paridad de coseno e imparidad del seno**
   Para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que
   $$\cos(-t) = \cos(t) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t)\,.$$

3. **Identidad fundamental**
   Para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que $\cos^2(t) + \operatorname{sen}^2(t) = 1$.

4. **Recorrido.**
   El recorrido de las funciones seno y coseno es $[-1, 1]$.

3 Los gráficos de seno y coseno

Reuniendo la información obtenida tenemos las gráficas del seno y coseno, respectivamente.



4 Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

DEFINICIÓN

1. **La función tangente:** $\tan(t) = \dfrac{\mathrm{sen}(t)}{\cos(t)}$, cuyo dominio es

$$A = \mathsf{Dom}(\tan) = \{t \in \mathbb{R} \;:\; \cos(t) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} \;:\; n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

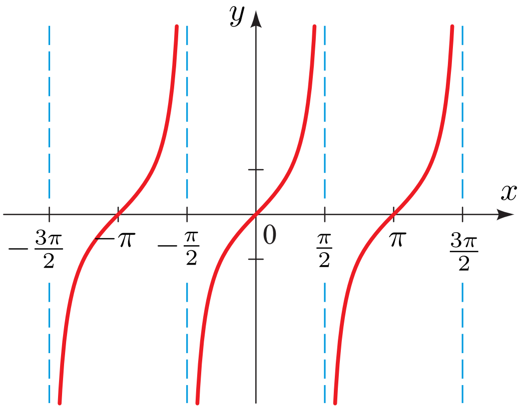
2. **La función cotangente:** $\cot(t) = \dfrac{1}{\tan(t)}$, cuyo dominio es

$$B = \mathsf{Dom}(\cot) = \{t \in \mathbb{R} \;:\; \mathrm{sen}(t) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{n\pi \;:\; n \in \mathbb{Z}\}.$$

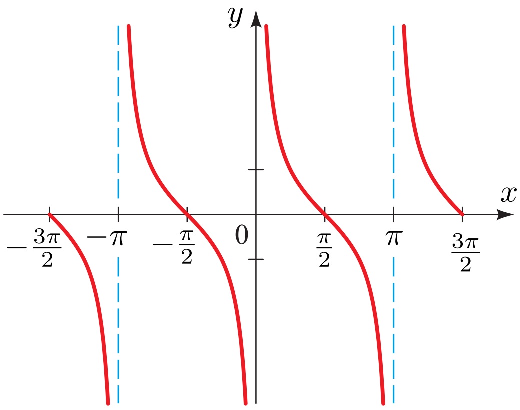
3. **La función secante:** $\sec(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}$ con dominio A.

4. **La función cosecante:** $\csc(t) = \dfrac{1}{\mathrm{sen}(t)}$ con dominio B.

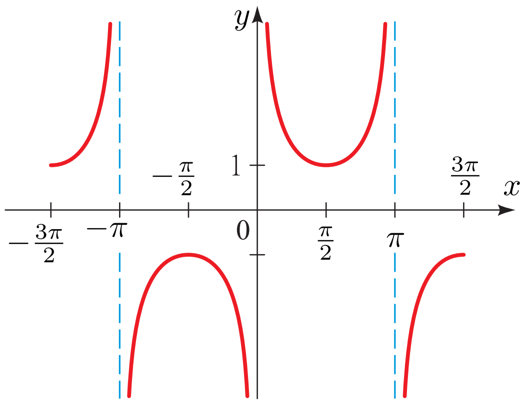
Gráficos de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante



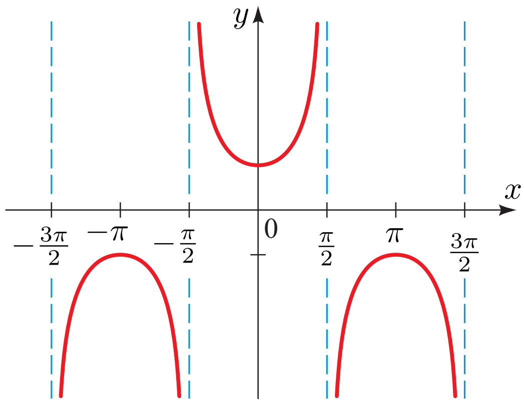
a) $y = \tan(x)$



b) $y = \cot(x)$



c) $y = \csc(x)$



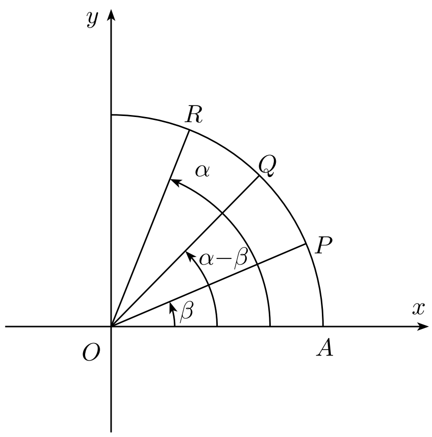
d) $y = \sec(x)$

5 Identidades Trigonométricas

TEOREMA 1 Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\ .$$

Demostración Consideremos la siguiente figura



donde $m(\measuredangle AOP) = \beta$, $m(\measuredangle AOQ) = \alpha{-}\beta$ $m(\measuredangle AOR) = \alpha$ $A = (1, 0)$, $P = (\cos(\beta), \operatorname{sen}(\beta))$, $Q = (\cos(\alpha-\beta), \operatorname{sen}(\alpha-\beta))$ y $R = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$ Los ángulos AOQ y POR son de igual medida y por tanto subtienden cuerdas de la misma longitud, entonces se tiene:

$$d^2(A, Q) = d^2(P, R)\ ,$$

es decir:

$$\begin{aligned}
&(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (sen(\alpha - \beta) - 0)^2 = (cos(\alpha) - \cos(\beta))^2 + (sen(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta)^2 \\
\iff\ & 2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)) \\
\iff\ & \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)
\end{aligned}$$

Del teorema anterior se obtiene la mayoría de las identidades fundamentales que detallaremos a continuación:

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\beta+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(\beta)=\operatorname{sen}(\beta)\\
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\cos(\alpha)\\
\operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\beta)+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{sen}(\beta)\\
&= \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta))=\cos(\alpha)\cos(-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(-\beta)\\
&= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)\\
\operatorname{sen}(\alpha-\beta) &= \operatorname{sen}(\alpha+(-\beta))=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(-\beta)+\cos(\alpha)\operatorname{sen}(-\beta)
\end{aligned}$$

A continuación daremos una lista de las identidades más trascendentales:

PROPOSICIÓN 2

1. $\sec^2(\alpha)=\tan^2(\alpha)+1$
2. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)+\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$
3. $\operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\beta)\cos(\alpha)$
4. $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$
5. $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$
6. $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

PROPOSICIÓN 3 (Fórmulas de ángulo doble)

1. $\operatorname{sen}(2\alpha)=2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$
2. $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\alpha)=1-2\operatorname{sen}^2(\alpha)$
3. $\tan(2\alpha)=\dfrac{2\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

PROPOSICIÓN 4 (Fórmulas de Argumento medio)

1. $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{2}}$
2. $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha)}{2}}$
3. $\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\alpha)}{1+\cos(\alpha)}}$

El doble signo indica que en cada caso debe seleccionar el valor que corresponda de acuerdo al cuadrante donde se encuentra α.

PROPOSICIÓN 5 (Fórmulas de Prostaféresis)

1. $\operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
2. $\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
3. $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
4. $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

PROPOSICIÓN 6 (Fórmulas de reducción)

1. $\operatorname{sen}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
2. $\cos(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
3. $\tan(t) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
4. $\cot(t) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
5. $\sec(t) = \csc\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$
6. $\csc(t) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

EJEMPLO 2 Demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}4\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\cos 4\beta}=\tan\frac{\alpha-3\beta}{2}.$$

Solución Usando la fórmula de prostaféresis obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}4\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\cos 4\beta} &= \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+5\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-3\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\alpha+5\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-3\beta}{2}\right)}\\ &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-3\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-3\beta}{2}\right)}=\tan\left(\frac{\alpha-3\beta}{2}\right).\end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Demostrar que

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}.$$

Solución Usando la fómula de Prostaféresis

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Como $\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \gamma=\pi-(\alpha+\beta)$, luego

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \cos(\pi-(\alpha+\beta))\\ &= \cos\pi\cos(\alpha+\beta)-\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\\ &= -\cos(\alpha+\beta)\\ &= -\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\ &= -\left(\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{(\alpha+\beta)}{2}\right)\\ &= -\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{2}+1-\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{2}\\ &= 1-2\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1-2\cos^2\frac{(\alpha+\beta)}{2}\\ &= 2\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\left(\cos\frac{(\alpha-\beta)}{2}-\cos\frac{(\alpha+\beta)}{2}\right)+1\\ &= 1+2\cos\frac{(\pi-\gamma)}{2}\left(2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\\ &= 1+4\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\end{aligned}$$

en donde para pasar de la segunda igualdad a la tercera igualdad hemos usado la idéntidad $2\sin x \sin y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$

EJEMPLO 4 Demostrar

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}\beta}{2}}.$$

Solución Tenemos que si $2\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 2\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \beta$ entonces $\cos 2\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ y como

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

y además

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\beta$$

igualando obtenemos

$$2\cos^2\alpha - 1 = \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\operatorname{sen}\beta}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}\beta}{2}}\,.$$

EJEMPLO 5 Demostrar que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \cos^2 2\alpha + \cos^2 2\beta + \cos^2 2\gamma = 1 + 2\cos 2\alpha\cos 2\beta\cos 2\gamma.$$

Solución Usaremos la identidad

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\cos^2 2\alpha + \cos^2 2\beta + \cos^2 2\gamma &= \frac{1+\cos 4\alpha}{2} + \frac{2+\cos 4\beta}{2} + \cos^2 2\gamma \\
&= 1 + \frac{1}{2}(\cos 4\alpha + \cos 4\beta) + \cos^2 2\gamma \\
\text{(Prostaféresis)} \qquad &= 1 + \frac{1}{2}\left(2\cos\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\alpha-4\beta}{2}\right)\right) + \cos^2 2\gamma \\
&= 1 + \cos(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha-2\beta) + \cos^2 2\gamma \\
&= 1 + \cos(2\pi-2\gamma)\cos(2(\alpha-\beta)) + \cos^2 2\gamma \\
&= 1 + \cos(2\gamma)\cos(2(\alpha-\beta)) + \cos^2 2\gamma \\
&= 1 + \cos 2\gamma\{\cos(2(\alpha-\beta)) + \cos(2\gamma)\} \\
&= 1 + \cos 2\gamma\{\cos(2(\alpha-\beta)) + \cos(2(\alpha+\beta))\} \\
&= 1 + 2\cos 2\gamma\cos 2\alpha\cos 2\beta\,.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Demostrar que

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} = 4\cos\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-\beta}{4}\cos\frac{\pi+\gamma}{4}.$$

Solución Usaremos las identidades

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))\,,\\
\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))\,,\\
\operatorname{sen}\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta))\,.
\end{aligned}$$

Notemos que,

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-\beta}{4} &= \frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{2\pi+\alpha-\beta}{4}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta-\alpha}{4}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\right\}\\
&= \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\right\}\,.
\end{aligned}$$

Entonces, se obtiene

$$\begin{aligned}
&4\cos\frac{\pi+\alpha}{4}\cos\frac{\pi-\beta}{4}\cos\frac{\pi+\gamma}{4}\\
&= 4\cdot\frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}\right)\right\}\cos\frac{\pi+\gamma}{4}\\
&= 2\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)\cos\frac{\pi+\gamma}{4}+2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)\cos\frac{\pi+\gamma}{4}\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta+\gamma}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{4}-\frac{\alpha+\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&\quad+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{4}\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi-\alpha}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\beta}{4}-\frac{\pi-\beta}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\\
&\quad+\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi-\gamma}{4}-\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{4}\right)\\
&= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\right)+\cos\frac{\pi}{2}+\cos\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\\
&= \cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}\,.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 7 Demostrar que

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi\Rightarrow\frac{1+\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma}{1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma}=\tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}.$$

Solución Usaremos las fómulas de Prostaféresis

$$\begin{aligned}
\frac{1+\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma}{1+\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma} &= \frac{1+(\cos\alpha-\cos\beta)+\cos\gamma}{1+(\cos\alpha+\cos\beta)-\cos\gamma}\\
&= \frac{1+2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)+\cos\gamma}{1+2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\gamma}\\
&= \frac{1+\cos\gamma+2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{1-\cos\gamma+2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\\
&= \frac{2\cos^2\frac{\gamma}{2}+2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}{2\operatorname{sen}^2\frac{\gamma}{2}+2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\\
&= \frac{\cos\frac{\gamma}{2}\left\{\cos\frac{\gamma}{2}+\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right\}}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\left\{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right\}}\\
&= \frac{\cos\frac{\gamma}{2}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right\}}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right\}}\\
&= \frac{\cos\frac{\gamma}{2}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right\}}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\left\{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right\}}\\
&= \frac{2\cos\frac{\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \tan\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}\,.
\end{aligned}$$

6 Guía de Ejercicios

1. Calcule
$$\cos\left(\frac{15\pi}{6}\right)\,,\quad \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\,,\quad \tan\left(\frac{125\pi}{12}\right)\,.$$

2. Demuestre que las siguientes identidades:

   a) $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)}=\tan(\alpha)+\tan(\beta)$

   b) $3\operatorname{sen}(x)\cos^2(x)-\operatorname{sen}^3(x)=\operatorname{sen}(3x)\,.$

   c) $1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\alpha)=\dfrac{\operatorname{sen}^3(\alpha)+\cos^3(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)+\cos(\alpha)}$

   d) $\cos(3\alpha)=4\cos^2(\alpha)-3\cos(\alpha)$

   e) $\operatorname{sen}(3\alpha)=3\operatorname{sen}(\alpha)-4\operatorname{sen}^2(\alpha)$

   f) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(\alpha)$

   g) $\left[\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]^2=1-\operatorname{sen}(\alpha)$

   h) $1+\cos(2x)+\cos(4x)+\cos(6x)=4\cos(x)\cos(2x)\cos(3x).$

i) $\cos^2(x)\,\mathrm{sen}^3(x) = \dfrac{1}{16}(2\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(3x) - \mathrm{sen}(5x))$

3. Si $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, demuestrar que

$$\mathrm{sen}(2\alpha) + \mathrm{sen}(2\beta) + \mathrm{sen}(2\gamma) = 4\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta)\,\mathrm{sen}(\gamma)\,.$$

4. Sea $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Demostrar que $\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha)\tan(\beta)\tan(\gamma)$

5. Sea $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Demostrar que

$$\mathrm{sen}^2(\alpha) + \mathrm{sen}^2(\beta) - \mathrm{sen}^2(\gamma) = 2\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta)\cos(\gamma)\,.$$

6. Verifique las siguientes identidades:

a) $\dfrac{\mathrm{sen}(5\alpha) - \mathrm{sen}(4\alpha)}{\cos(5\alpha) + \cos(3\alpha)} = \tan(\alpha)$

b) $\dfrac{\mathrm{sen}(\alpha) - \mathrm{sen}(\beta)}{\cos(\alpha) + \cos(\beta)} = \tan\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)$

c) $\dfrac{\mathrm{sen}(\alpha) - \mathrm{sen}(\beta)}{\mathrm{sen}(\alpha) + \mathrm{sen}(\beta)} = \dfrac{\tan\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\tan\left(\dfrac{\alpha + \beta}{2}\right)}$