

EYP 1025-1027 Métodos Probabilísticos

Clase 20

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile



Contenido I

1 Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

- Algunos modos de convergencia
- Convergencia en probabilidad
- Ejemplos
- Convergencia en media cuadrática
- Ejemplos
- Ejemplos
- Ejemplos
- Convergencia casi segura

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Algunos modos de convergencia

El principal objetivo de este tópico, es estudiar el comportamiento estocástico de una secuencia de variables (o vectores) aleatorias $\{Z_n; n \geq 1\}$ cuando $n \rightarrow \infty$.

La secuencia Z_n puede estar asociada a un estadístico muestral o alguna función de dicho estadístico que tenga algún interés inferencial, en cuyo caso el subíndice n representa el tamaño muestral.

A pesar que la noción de un tamaño de muestra infinito es un concepto teórico, el sentido práctico es obtener aproximaciones útiles en el contexto de muestras finitas, ya que generalmente las expresiones se simplifican en el límite.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplo 1.1

Sea $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$, donde para cada $n \geq 1$, X_1, \dots, X_n son variables aleatorias iid $Ber(p)$. Entonces, $\{Z_n; n \geq 1\}$ es una secuencia de variables aleatorias tales que, para cada $n \geq 1$, $Z_n \sim Bin(n, p)$.

En este caso, se puede demostrar, por ejemplo, que:

$$\text{a) } \forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty;$$

$$\text{b) } \forall z \in \mathbb{R}, \quad P\left(\frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq x\right) \rightarrow \Phi(z), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

La propiedad en a) implica que para " n lo suficientemente grande", la probabilidad de que $\frac{Z_n}{n} = \bar{X}_n$ (media muestral) difiera de $p = E(X_1)$ (media poblacional) en una cantidad (positiva) arbitrariamente pequeña es despreciable.

Mientras que la propiedad b) implica que para " n lo suficientemente grande", se tiene que, $P\left(\frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq z\right) \simeq \Phi(z)$, es decir, que la distribución de la variable aleatoria $\frac{Z_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}}$ puede aproximarse por la distribución de una variable aleatoria $Z \sim N(0, 1)$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

La demostración de a) se basa en el siguiente lema (ya enunciado):

Lema 1.1

Desigualdad de Chebyshev Si X es una variable aleatoria con segundo momento finito y c es una constante real arbitraria, entonces,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - c| \geq \varepsilon) \leq \frac{E\{(X - c)^2\}}{\varepsilon^2}.$$

En particular, si $c = \mu := E(X)$, entonces $E\{(X - c)^2\} = \text{Var}(X) := \sigma^2$; luego,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Así, si $Z_n \sim \text{Bin}(n, p)$, entonces $E\left(\frac{Z_n}{n}\right) = p$ y $\text{Var}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n}$, para cada $n \geq 1$. Luego, para cada $n \geq 1$ y cada $\varepsilon > 0$, se tiene que,

$$\begin{aligned} 0 &\leq P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \\ \implies 0 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} = 0 \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) &= 0. \end{aligned}$$

La propiedad en b) es una consecuencia del Teorema del Límite Central (TLC) clásico, el cual será enunciado más tarde.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Convergencia en probabilidad

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , y sea θ una constante en \mathbb{R} .

Definición 1.1

Se dice que Z_n converge en probabilidad para θ si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty;$$

o, equivalentemente, si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) \rightarrow 1, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty;$$

Notación: $Z_n \xrightarrow{P} \theta$ o $\text{plim} Z_n = \theta$.

Nota: Si $Z_n = T(X_1, \dots, X_n)$ es un estadístico muestral tal que $Z_n \xrightarrow{P} \theta$, se dice que Z_n es un **estimador consistente** del parámetro poblacional θ .

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Notas:

- 1) De la definición anterior, es claro que, $Z_n \xrightarrow{P} \theta \iff Z_n - \theta \xrightarrow{P} 0$.
- 2) Si $\{Z_n := \theta_n; n \geq 1\}$, es una secuencia no-aleatoria, y $\theta_n \rightarrow \theta$, cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $\theta_n \xrightarrow{P} \theta$.
- 3) La convergencia en probabilidad de Z_n también puede ser para una variable aleatoria Z , definida en el mismo espacio de probabilidad que la secuencia $\{Z_n; n \geq 1\}$; es decir:

Definición 1.2

Se dice que Z_n converge en probabilidad para una variable aleatoria Z , y se denota por $Z_n \xrightarrow{P} Z$, ssi, $Z_n - Z \xrightarrow{P} 0$.

- 4) Si Z, Z_1, Z_2, \dots son vectores aleatorios p -dimensionales definidos en el mismo espacio de probabilidad, entonces, $Z_n \xrightarrow{P} Z$ ssi $\|Z_n - Z\| \xrightarrow{P} 0$, donde $\|z\| = \sqrt{z^\top z}$ es la norma usual en \mathbb{R}^p .

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplos

Ejemplo 1.2

Sea $Z_n \sim \text{Bin}(n, p)$, $n \geq 1$. Vimos que,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

Ya que $\frac{Z_n}{n}$ corresponde al promedio muestral $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, donde X_1, \dots, X_n es una ma(n) de la distribución $\text{Ber}(p)$, entonces, se concluye que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} p$, es decir, \bar{X}_n es un estimador consistente de p .

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplo 1.3

Suponga que $P(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n}$ y $P(Z_n = \theta + n^2) = \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Entonces, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

En efecto, del enunciado,

$$P(Z_n = z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \text{si } z = \theta, \\ \frac{1}{n}, & \text{si } z = \theta + n^2, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) &= P(\theta - \varepsilon < Z_n < \theta + \varepsilon) \\ &= P(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplo 1.4

Sea $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, donde $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$ ($\theta > 0$). Entonces, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$, es decir, $\max\{X_1, \dots, X_n\}$ es un estimador consistente del parámetro θ .

En efecto, sabemos que la fda marginal de los X_i 's es,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \frac{x}{\theta}, & \text{si } 0 \leq x < \theta, \\ 1, & \text{si } x \geq \theta. \end{cases}$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Además, vimos que la fda $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ es,

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= \{F(z)\}^n \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } z < 0, \\ \left(\frac{z}{\theta}\right)^n, & \text{si } 0 \leq z < \theta, \\ 1, & \text{si } z \geq \theta. \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) &= P(-\varepsilon < Z_n - \theta < \varepsilon) \\ &= P(\theta - \varepsilon < Z_n < \theta + \varepsilon) \\ &= F_{Z_n}(\theta + \varepsilon) - F_{Z_n}(\theta - \varepsilon) \quad (F_{Z_n} \text{ es continua}), \end{aligned}$$

donde $F_{Z_n}(\theta + \varepsilon) = 1$, ya que $\theta + \varepsilon \geq \theta$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo $\theta > 0$, y

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

$$F_{Z_n}(\theta - \varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{si } \theta - \varepsilon < 0 \Leftrightarrow \varepsilon > \theta, \\ \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n, & \text{si } 0 \leq \theta - \varepsilon < \theta \Leftrightarrow \varepsilon \leq \theta. \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) &= \begin{cases} 1, & \text{si } \varepsilon > \theta, \\ 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n, & \text{si } \varepsilon \leq \theta, \end{cases} \\ &\rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Convergencia en media cuadrática

Definición 1.3

Una secuencia de variables aleatorias $\{Z_n; n \geq 1\}$ converge en media cuadrática (mc) para una constante θ si,

$$E\{(Z_n - \theta)^2\} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Notación: $Z_n \xrightarrow{\text{mc}} \theta$ o, equivalentemente, $Z_n - \theta \xrightarrow{\text{mc}} 0$

Nota: Similarmente, se dice que Z_n converge en media cuadrática para una variable aleatoria Z (definida en el mismo espacio de probabilidad de la secuencia $\{Z_n; n \geq 1\}$), y se denota como $Z_n \xrightarrow{\text{mc}} Z$, ssi $Z_n - Z \xrightarrow{\text{mc}} 0$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Teorema 1.1

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias. Si,

$$Z_n \xrightarrow{\text{mc}} \theta, \text{ entonces } Z_n \xrightarrow{\text{P}} \theta.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E\{(Z_n - \theta)^2\} &= 0, \text{ entonces,} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) &= 0 \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Demostración 1.1

Usando el Lema 1.1 (desigualdad de Chebyshev), se tiene que,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq P(|Z_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{E\{(Z_n - \theta)^2\}}{\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Corolario 1.1

Si se cumple que, (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} E(Z_n) = \theta$ y (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(Z_n) = 0$, entonces $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

Demostración 1.2

Use que $0 \leq E\{(Z_n - \theta)^2\} = \text{Var}(Z_n) + \{E(Z_n) - \theta\}^2$.

Nota: La esperanza $E\{(Z_n - \theta)^2\}$ se llama error cuadrático medio de Z_n con respecto a θ , y la diferencia $E(Z_n) - \theta$ se llama sesgo de Z_n con respecto a θ .

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplos

Ejemplo 1.5

Sea $Z_n \sim \text{Bin}(n, p)$, $n \geq 1$. Entonces,

$$(a) \ E\left(\frac{Z_n}{n}\right) = p \text{ para todo } n \geq 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{Z_n}{n}\right) = p,$$

$$(b) \ E\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \frac{p(1-p)}{n} \text{ para todo } n \geq 1 \implies \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}\left(\frac{Z_n}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(1-p)}{n} = 0.$$

Por lo tanto, $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow{P} p$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplo 1.6

Sea $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, donde $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$ ($\theta > 0$).
Entonces,

$$f_{Z_n}(z) = \begin{cases} \frac{n}{\theta} \left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1}, & \text{si } 0 < z < \theta, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} E(Z_n) &= \int_0^\theta z \frac{n}{\theta} \left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1} dz = \frac{n}{n+1} \theta, \\ E(Z_n^2) &= \int_0^\theta z^2 \frac{n}{\theta} \left(\frac{z}{\theta}\right)^{n-1} dz = \frac{n}{n+2} \theta^2. \end{aligned}$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Así, se tiene que,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}(Z_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \theta = \theta, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(Z_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n+2} \theta^2 - \left(\frac{n}{n+1} \theta \right)^2 \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} \theta^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \theta \right)^2 \\ &= \theta^2 - \theta^2 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplo 1.7

Caso donde el Teorema 1.1 (y por ende, el Corolario 1.1) falla:

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias tales que $P(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n}$ y $P(Z_n = \theta + n^2) = \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$. Probamos que, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

Pero, en este caso,

$$\mathbf{E}\{(Z_n - \theta)^2\} = 0 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n^4 \times \frac{1}{n} = n^3 \rightarrow \infty, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Note, sin embargo, que,

$$\mathbf{E}\{|Z_n - \theta|^{1/4}\} = 0 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) + n^{1/2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

El siguiente resultado entrega una extensión del Teorema 1.1:

Teorema 1.2

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias. Si, para algún $r > 0$, se tiene que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|Z_n - \theta|^r\} = 0, \quad (*)$$

entonces, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

Demostración 1.3

Use la desigualdad de Markov.

Nota: Si Z_n verifica (*), se dice que Z_n converge en media de orden r para θ , y se denota por $Z_n \xrightarrow{mr} \theta$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

El siguiente teorema establece que la media muestral \bar{X}_n de una ma(n) es un estimador consistente de la media poblacional μ cuando esta es finita.

Teorema 1.3

Ley débil de los grandes números (LDGN) Sea X_1, X_2, \dots una secuencia de variables aleatorias iid, con $E(|X_1|) < \infty$. Entonces,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu = E(X_1).$$

Nota: Similarmente, si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ es una secuencia de vectores aleatorios p -dimensionales iid, con vector de medias $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X}_1)$ finito, entonces,

$$\bar{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \xrightarrow{P} \boldsymbol{\mu}.$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Demostración 1.4

Asuma que $\text{Var}(X_1) = \sigma^2$ es finita. Entonces, $\text{Var}(\bar{X}_n) = \sigma^2/n$, y la desigualdad de Chebyshev implica que,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Por lo tanto, $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

La demostración sin suponer la existencia del segundo momento, se verá posteriormente.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplos

Ejemplo 1.8

1) Si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias iid $Ber(p)$, entonces

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} p.$$

2) Si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias iid $U(0, \theta)$, entonces

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \theta/2.$$

3) Si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias iid $\exp(\lambda)$, entonces

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} 1/\lambda.$$

4) Si X_1, X_2, \dots son variables aleatorias iid $N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} \mu = E(X_1) \quad \text{y} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \xrightarrow{P} \mu^2 + \sigma^2 = E(X_1^2).$$

etc.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Teorema 1.4

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias tal que $Z_n \xrightarrow{P} \theta$, y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, $g(Z_n) \xrightarrow{P} g(\theta)$.

Demostración 1.5

Como g es una función continua, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$|Z_n - \theta| < \delta \implies |g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon.$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\{|Z_n - \theta| < \delta\} \subseteq \{|g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon\}.$$

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Luego, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} P(|Z_n - \theta| < \delta) &\leq P(|g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon) \leq 1 \\ \implies 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(|Z_n - \theta| < \delta) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(|g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon) \leq 1 \\ &\implies 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(|g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon) \leq 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall \varepsilon > 0$, se tiene que, $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|g(Z_n) - g(\theta)| < \varepsilon) = 1$, lo que prueba el resultado.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Ejemplos

Ejemplo 1.9

1) Si $Z_n \sim \text{Bin}(n, p)$, probamos que $\frac{Z_n}{n} = \bar{X}_n \xrightarrow{P} p$. Sea $g(x) = x(1 - x)$, la cual es una función continua para todo $0 < x < 1$. Entonces $g(\bar{X}_n) = \bar{X}_n(1 - \bar{X}_n) \xrightarrow{P} p(1 - p)$.

2) Si $X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$, la LDGN implica que $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 1/\lambda$. Entonces, tomando $g(x) = 1/x$, se tiene que $g(\bar{X}_n) = 1/\bar{X}_n \xrightarrow{P} \lambda$.

3) Si $X_1, X_2, \dots \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, entonces $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ y, por lo tanto, $\bar{X}_n^2 \xrightarrow{P} \mu^2$

etc.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Convergencia casi segura

Un modo de convergencia más fuerte que (implica) la convergencia en la probabilidad es la denominada convergencia casi segura.

Definición 1.4

Una secuencia de variables aleatorias $\{Z_n; n \geq 1\}$ converge casi seguramente (cs) para θ , que se denota como $Z_n \xrightarrow{\text{cs}} \theta$, si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - \theta| < \varepsilon\right) = 1.$$

Equivalentemente, $Z_n \xrightarrow{\text{cs}} \theta$ si,

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n(\omega) = \theta\right\}\right) = 1.$$

Nota: Similarmente, $Z_n \xrightarrow{\text{cs}} Z$ ssi $Z_n - Z \xrightarrow{\text{cs}} 0$, donde Z es una variable aleatoria definida en mismo espacio de probabilidad de la secuencia $\{Z_n; n \geq 1\}$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

El siguiente teorema es una versión más fuerte del Teorema 1.3 (LDGN)

Teorema 1.5

Ley fuerte de los grandes números (LFGN) Sea X_1, X_2, \dots una secuencia de variables aleatorias iid, con $E(|X_1|) < \infty$. Entonces,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\text{cs}} \mu = E(X_1).$$

Es decir, $P(\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n(\omega) = \mu\}) = 1$.

Nota: Similarmente, si $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ es una secuencia de vectores aleatorios p -dimensionales iid, con vector de medias $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X}_1)$ finito, entonces,
$$\bar{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \xrightarrow{\text{cs}} \boldsymbol{\mu}.$$

Nota: $\mathbf{Z}_n = (Z_{1n}, \dots, Z_{pn})^\top \xrightarrow{\text{P o cs}} \mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_p)^\top \iff Z_{in} \xrightarrow{\text{P o cs}} Z_i$
para todo $i = 1, \dots, p$.

Convergencia Estocástica y Teoremas Límites

Teorema 1.6

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias. Si,

$$Z_n \xrightarrow{\text{cs}} \theta, \text{ entonces } Z_n \xrightarrow{\text{P}} \theta.$$

Demostración 1.6

Vea, por ejemplo, el libro de Barry James.