

MAT1620 ★ Cálculo II
Interrogación N° 1

Corrección

- Pregunta 1: Cristian Cornejo.
- Pregunta 2: Sebastián Urrutia.
- Pregunta 3: Diamela Peña.
- Pregunta 4: Ignacio Labarca.
- Pregunta 5: Nicolás Morales.
- Pregunta 6: Ignacio Madrid.
- Pregunta 7: Matías Henríquez.

Consideraciones de la corrección. Soluciones alternativas a la pauta, venir a conversarlas con el coordinador del curso. No se otorgarán puntajes diferentes a los propuestos por la pauta de evaluación. Leer, al final del problema asignado la nota de **Evaluación**. Revisar el desarrollo de la pauta antes de comenzar a corregir. Cualquier duda sobre la corrección hacerla saber vía mail: wcrivera@mat.puc.cl

1. Determine el área de la superficie obtenida al hacer girar la curva $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$, $1 \leq y \leq 2$, respecto al eje X .

Solución. La fórmula que utilizaremos es

$$2\pi \int_1^2 y \sqrt{1 + (x')^2} dy$$

En este caso x' está dada por

$$x' = y\sqrt{y^2 + 2} \quad (\mathbf{2 \text{ ptos}})$$

Luego el área de la superficie está dada por el valor numérico de la integral

$$2\pi \int_1^2 y \sqrt{1 + 2y^2 + y^4} dy \quad (\mathbf{2 \text{ ptos}})$$

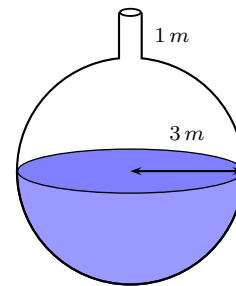
Finalmente, calculando la integral tendremos

$$2\pi \int_1^2 y \sqrt{1 + 2y^2 + y^4} dy = 2\pi \int_1^2 y(1 + y^2) dy = \frac{21}{2}\pi \quad (\mathbf{2 \text{ ptos}})$$

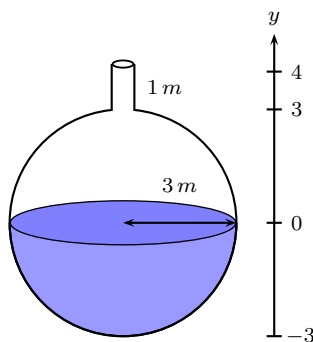
Evaluación. Asignar (**2 ptos**) por determinar correctamente x' y (**2 ptos**) por expresar correctamente la integral que calcula el área de la superficie. Si los dos pasos anteriores están correctos, asignar (**2 ptos**) en caso que la integral haya sido calculada correctamente.

Un tanque tiene aceite hasta la mitad con densidad de 920 kg/m^3 (ver la figura). Determine el trabajo necesario para que, mediante bombeo, el aceite salga por el tubo de descarga.

Nota. El tanque tiene forma esférica de radio 3 metros, y está unido a un tubo de largo 1 metro. Suponer que la constante de gravedad $g = 10 \text{ m/seg}^2$



Solución. Considerando el centro de la circunferencia como $y = 0$, como muestra la figura,



Luego el volumen infinitesimal de cada sección transversal se puede aproximar por

$$\pi(9 - y_k^2)(y_k - y_{k-1}) \quad \text{o bien} \quad \pi(9 - y^2) \Delta y \quad (2 \text{ ptos})$$

De este modo, la fuerza (peso) de cada sección transversal se aproxima por

$$9200\pi(9 - y_k^2)(y_k - y_{k-1}) \quad \text{o bien} \quad 9200\pi(9 - y^2) \Delta y$$

Por otro lado, la distancia que debe recorrer cada sección transversal es $4 - y_k$ (o bien $4 - y$), por lo tanto el trabajo de subir cada sección transversal se aproxima por

$$9200\pi(4 - y_k)(9 - y_k^2)(y_k - y_{k-1}) \quad \text{o bien} \quad 9200\pi(4 - y)(9 - y^2) \Delta y \quad (2 \text{ ptos})$$

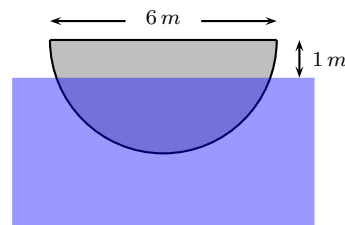
Finalmente, el trabajo necesario para subir el aceite es

$$\begin{aligned} 9200\pi \int_{-3}^0 (4 - y)(9 - y^2) dy &= 9200\pi \left(36y - \frac{9}{2}y^2 - \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 \right) \Big|_{-3}^0 \quad (2 \text{ ptos}) \\ &= 9200\pi \left(36 \cdot (-3) - \frac{9}{2}(-3)^2 - \frac{4}{3}(-3)^3 + \frac{1}{4}(-3)^4 \right) \end{aligned}$$

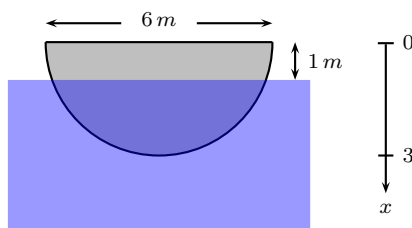
Evaluación. Asignar (2 ptos) por dar alguna representación infinitesimal correcta del volumen de las secciones transversales. Si el volumen no aparece de forma explícita pero aparece en la integral de trabajo, asignar los dos puntos correspondientes. Asignar (2 ptos) por expresar correctamente la integral de trabajo. Asignar (2 ptos) por calcular correctamente la integral de trabajo.

3. Una placa vertical está parcialmente sumergida y tiene la forma de una semi-circunferencia, como muestra la figura. Expresar la fuerza hidrostática contra un extremo de la placa como una integral, y evalúela.

Nota. El diámetro de la semi-circunferencia es de 6 metros. Suponer que la densidad del agua es $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ y la constante de gravedad $g = 10 \text{ m/seg}^2$.



Solución. Tomaremos como sistema de referencia $x = 0$ el diámetro de la circunferencia, como muestra la figura,



Luego, el área de cada sección transversal se aproxima por

$$2\sqrt{9 - x_k^2}(x_k - x_{k-1}) \quad \text{o bien} \quad 2\sqrt{9 - x^2} \Delta x \quad (2 \text{ ptos})$$

Dado que la distancia de la sección transversal a la superficie es $(x_k - 1)$ (o bien $x - 1$) la fuerza hidrostática que actúa sobre la sección se aproxima por

$$2\rho g(x_k - 1)\sqrt{9 - x_k^2}(x_k - x_{k-1}) \quad \text{o bien} \quad 2\rho g(x - 1)\sqrt{9 - x^2} \Delta x$$

Finalmente, la fuerza total está dada por

$$\begin{aligned} (2 \text{ ptos}) \quad 2\rho g \int_1^3 (x - 1)\sqrt{9 - x^2} dx &= 2\rho g \left(\int_1^3 x\sqrt{9 - x^2} dx - \int_1^3 \sqrt{9 - x^2} dx \right) \\ &= 2\rho g \left(-\frac{1}{3}(9 - x^2)^{3/2} \Big|_1^3 - \left(\frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2} \arcsin(x/3) \right) \Big|_1^3 \right) \\ &= \rho g \left(\frac{38}{3}\sqrt{2} - \frac{9\pi}{2} + 9 \arcsin(1/3) \right) \quad (2 \text{ ptos}) \end{aligned}$$

Evaluación. Asignar (2 ptos) por dar alguna representación infinitesimal correcta del área de las secciones transversales. Si el área no aparece de forma explícita pero aparece en la integral de fuerza hidrostática, asignar los dos puntos correspondientes. Asignar (2 ptos) por expresar correctamente la integral de fuerza hidrostática. Asignar (2 ptos) por calcular correctamente la integral de fuerza hidrostática.

4. Determine el centroide de la región acotada por las curvas $y = x^2$, $x = y^2$.

Solución. Las coordenadas del centroide están dados por

$$\frac{1}{\int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx} \left(\int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2) dx, \frac{1}{2} \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 dx \right)$$

Luego,

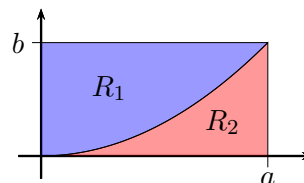
$$\begin{aligned} \int_0^1 x(\sqrt{x} - x^2) dx &= \left(\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{20} \quad (2 \text{ ptos}) \\ \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 dx &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{10} \quad (2 \text{ ptos}) \\ \int_0^1 \sqrt{x} - x^2 dx &= \left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el centroide es

$$\left(\frac{9}{20}, \frac{9}{20} \right) \quad (2 \text{ ptos})$$

Evaluación. El puntaje por el centroide se otorga únicamente si las integrales anteriores están bien calculadas.

Un rectángulo R con lados a y b se divide en dos partes R_1 y R_2 mediante un arco de parábola que tiene su vértice en la vértice inferior izquierdo de R y pasa por el vértice superior derecho de R . Determine la distancia entre los centros de masa de R_1 y R_2 .



Solución. La parábola tiene ecuación

$$y = \frac{b}{a^2}x^2$$

luego el centro de masa de R_1 es

$$\begin{aligned} \frac{1}{\int_0^a b - \frac{b}{a^2}x^2 dx} \left(\int_0^a b - x \cdot \frac{b}{a^2}x^2 dx, \frac{1}{2} \int_0^a b^2 - \left(\frac{b}{a^2}x^2 \right)^2 dx \right) &= \frac{1}{ab - ab/3} \left(ab - \frac{a^2b}{4}, \frac{1}{2} \cdot \left(ab - \frac{ab^2}{5} \right) \right) \\ &= \left(\frac{3a}{4}, \frac{3b}{10} \right) \quad (2 \text{ ptos}) \end{aligned}$$

luego el centro de masa de R_2 es

$$\frac{1}{\int_0^a \frac{b}{a^2}x^2 dx} \left(\int_0^a x \cdot \frac{b}{a^2}x^2 dx, \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{b}{a^2}x^2 \right)^2 dx \right) = \frac{3}{ab} \left(\frac{a^2b}{4}, \frac{1}{2} \cdot \frac{ab^2}{5} \right) = \left(\frac{3a}{8}, \frac{3b}{5} \right) \quad (2 \text{ ptos})$$

Por lo tanto, la distancia entre los centros de masa es

$$\sqrt{(3a/8)^2 + (3b/10)^2} \quad (2 \text{ ptos})$$

Evaluación. Asignar (2 ptos) por cada centro de masa calculado correctamente. Asignar (2 ptos) por calcular correctamente la distancia entre los centros de masa.

6. Una curva se define mediante las ecuaciones paramétricas

$$x = \int_1^t \frac{\cos u}{u} du, \quad y = \int_1^t \frac{\sin u}{u} du$$

Encuentre la longitud del arco de la curva desde el origen hasta el punto más próximo donde hay una línea tangente vertical.

Solución. El t que hace la línea tangente vertical satisface la ecuación $x'(t) = 0$. Vale decir,

$$\frac{\cos(t)}{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi}{2} \quad (2 \text{ ptos})$$

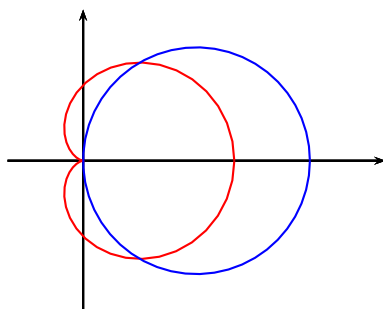
Luego la distancia es

$$\begin{aligned} \int_1^{\pi/2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt &= \int_1^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{\cos(t)}{t} \right)^2 + \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^2} dt \quad (2 \text{ ptos}) \\ &= \int_1^{\pi/2} \frac{dt}{t} \\ &= \ln(\pi/2) \quad (2 \text{ ptos}) \end{aligned}$$

Evaluación. Asignar (2 ptos) Por resolver la ecuación trigonométrica, encontrando la solución correcta $t = \pi/2$. Asignar (2 ptos) por plantear correctamente la longitud de la curva, haciendo los remplazos respectivos a las ecuaciones paramétricas derivadas. Asignar (2 ptos) por calcular correctamente la integral.

7. Calcule el área de la región que yace dentro de la curva $r = 3 \cos(\theta)$ y fuera de $r = 1 + \cos(\theta)$.

Solución. Graficando las curvas polares



(2 ptos)

Los ángulos de intersección satisfacen la ecuación

$$3 \cos(\theta) = 1 + \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \pm \frac{\pi}{3} \quad (2 \text{ ptos})$$

Luego el área es

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (3 \cos(\theta))^2 - (1 + \cos(\theta))^2 d\theta &= \int_{-\pi/3}^{\pi/3} 8 \cos^2(\theta) - 2 \cos(\theta) - 1 d\theta \\ &= \pi \quad (2 \text{ ptos}) \end{aligned}$$

Evaluación. Asignar (2 ptos) por hacer la gráfica correcta de las curvas paramétricas. Asignar (2 ptos) por determinar los ángulos de intersección de las curvas paramétricas. Asignar (2 ptos) por calcular correctamente el área.

8. [MAPLE] Considere la curva con ecuaciones paramétricas $x = \sin(t)$, $y = \sin(2t)$

- Escriba los comandos que permiten definir la curva en forma paramétrica y el comando respectivo para obtener el grafico de ella.
- Escriba un comando que permita obtener la pendiente m de la curva en el punto correspondiente a $t = \pi/3$.
- Escriba los comandos necesarios para calcular el largo de la curva.

Solución.

- ```
x := t -> sin(t);
```

definiendo  $x(t)$

```
y := t -> sin(2 * t);
```

definiendo  $y(t)$

```
plot([x(t), y(t), t = 0..2*Pi], scaling = constrained);
```

graficando
- ```
m := D(y)(t)/D(x)(t);
```

definiendo la pendiente m

```
X := x(Pi/3); Y := y(Pi/3);
```

determinando el punto al evaluar en $t = \pi/3$

```
subs(t = Pi/3, m);
```

calculando la pendiente pedida
- ```
4 * int(sqrt(D(x)(t)^2 + D(y)(t)^2), t = 0..Pi/2);
```

calculando la longitud