Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2015

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución y pauta de corrección de la Interrogación N° 2

Justifique sus respuestas.

1. Sea $\mathbf{A} = LU$ donde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Use esta factorización y, sin calcular explícitamente $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$, ni la inversa de ninguna matriz, determine la segunda fila de $\mathbf{A}^{-1}$.

Solución:

La segunda fila de $\mathbf{A}^{-1}$ es la segunda columna de $(\mathbf{A}^{-1})^T = \left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}$.

Llamemos $\mathbf{c}_2$ a esta columna. Sabemos que $\mathbf{A}^T\mathbf{c}_2 = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, por lo que $\mathbf{c}_2$ es la solución del sistema de ecuaciones $\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Como este sistema es equivalente a $(LU)^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, o sea a $U^TL^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, lo podemos resolver como sigue:

(i) Resolvemos el sistema $U^T\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(ii) Resolvemos el sistema $L^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Ambos sistemas son triangulares, y por lo tanto simples de resolver.

En efecto: el primer sistema tiene por matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde $y_1 = 0$, $2y_1 + 2y_2 = 1 \to y_2 = 1/2$ y finalmente $y_1 + y_2 - y_3 = 0 \to y_3 = y_2 = 1/2$.

El segundo sistema es $L^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, por lo que su matriz ampliada es

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

de donde $x_3 = 1/2$, $x_2 - x_3 = 1/2 \to x_2 = 1$ y finalmente $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \to x_1 = 2x_2 - x_3 = 2 - 1/2 = 3/2$. Así, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, que es la segunda columna de $(\mathbf{A}^{-1})^T$ de donde la segunda fila de $\mathbf{A}^{-1}$ es

$$\mathbf{c}_2^T = \begin{bmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Puntaje:

Suponiendo que lo hacen por el método mostrado aquí:

- Por indicar que $\mathbf{c}_2$ es la solución del sistema de ecuaciones $\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 1 punto.
- Por plantear correctamente el método para resolver el problema, 1 punto.
- Por resolver $U^T\mathbf{y} = \mathbf{e}_2$, 2 puntos.
- Por resolver $L^T\mathbf{x} = \mathbf{y}$, 2 puntos.

A lo anterior se suma el punto base.

Si lo hacen por otro método *correcto* (que no calcule explícitamente $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$, ni la inversa de ninguna matriz), consultar por el puntaje.

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 6 & 3 \\ 0 & \beta & 2 \end{bmatrix}$$

a) ¿Qué condición deben cumplir α y β para que sea posible realizar la factorización $A = LU$?

b) ¿Qué condición deben cumplir α y β para que la matriz no tenga inversa?

Solución:

a) Observamos en primer lugar que, tras pivotear en la primera columna se tendrá

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6-\alpha & 3 \\ 0 & \beta & 2 \end{bmatrix}.$$

Si $\alpha \neq 6$, entonces es posible factorizar $A = LU$ (el pivote de la segunda fila es $6 - \alpha$).

Así, el único problema posible se puede presentar si $\alpha = 6$. En este caso, si $\beta = 0$ entonces el 3 de la tercera columna sirve como pivote, por lo que el caso $\alpha = 6, \beta = 0$ también permite la factorización $A = LU$. El único caso en que esto no ocurre es cuando $\alpha = 6$ y $\beta \neq 0$, en cuyo caso es necesario permutar la segunda y la tercera fila.

Así, la respuesta a la pregunta planteada (la condición que deben cumplir α y β para que sea posible realizar la factorización $A = LU$) es que $\alpha \neq 6$ o $\beta = 0$.

b) Para que la matriz no tenga inversa, es suficiente y necesario que su determinante sea cero. Pero

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 6 & 3 \\ 0 & \beta & 2 \end{vmatrix} = 12 - 3\beta - 2\alpha,$$

de donde A es singular (no tiene inversa) si y solo si $2\alpha + 3\beta = 12$.

Puntaje:

a)
- Por indicar que $\alpha \neq 6$ garantiza que se pueda obtener lo pedido, 1 punto.
- Por indicar que con $\alpha = 6$ todavía es posible (siempre que $\beta = 0$) también se puede, 1 punto.
- Por llegar a que la condición pedida es $\alpha \neq 6$ o $\beta = 0$ (u otra equivalente), 1 punto.

b)
- Por dar una condición equivalente a que la matriz sea (o no sea) invertible[1], y que pueda ser usada para resolver el problema, 1 punto.
- Por desarrollar lo necesario para verificar la condición en el caso de esta matriz (por ejemplo, con el método presentado, calcular el determinante), 1 punto.
- Por llegar a la condición pedida, 1 punto.

A lo anterior se suma el punto base.

[1] Por ejemplo, es invertible si y solo si su determinante no es cero, si y solo si tiene tres pivotes, si y solo si sus formas escalonadas tienen tres filas no nulas.

3. Considere la forma cuadrática

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 16x_3^2.$$

a) Escriba esta forma cuadrática como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

con A simétrica, y la factorización de Cholesky (sin raíz cuadrada) de A.

b) Escriba $f(\mathbf{x})$ como suma ponderada de cuadrados, y clasifíquela.

Solución:

a) La matriz simétrica que representa a la forma f es $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{bmatrix}$.

En otras palabras, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{bmatrix} \mathbf{x}$.

Para encontrar la factorización de Cholesky, debemos primero intentar encontrar una factorización $A = LU$, donde L sea triangular inferior y tenga 1's en la diagonal (si es necesario permutar filas en el proceso, entonces no hay factorización de Cholesky).

En nuestro caso, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad U = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Una vez logrado esto, debemos expresar $U = DU'$ donde D es diagonal y U' sea triangular superior y tenga 1's en la diagonal (de hecho, por ser A simétrica, debe tenerse $U' = L^T$):

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} , \qquad U = D \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = DL^T.$$

Con esto tenemos la factorización de Cholesky de A como

$$A = LDL^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) El cambio de variables que diagonaliza la forma cuadrática es $\mathbf{y} = L^T\mathbf{x}$, o sea:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Usando esta transformación, se tiene

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(LDL^T)\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T L)D(L^T\mathbf{x}) = (L^T\mathbf{x})^T D(L^T\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = 2y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^2,$$

o sea,

$$f(\mathbf{x}) = 2(x_1 - x_2 + x_3)^2 + 3(x_2 + 2x_3)^2 + 2x_3^2.$$

Como en esta expresión todos los ponderadores de los cuadrados son positivos, la forma es definida positiva.

Nota: Esto puede ser justificado de otras maneras, por ejemplo:

- La matriz diagonal que aparece en la factorización tiene todos los elementos de la diagonal positivos.
- Los determinantes de las sub-matrices principales son

$$D_1 = |2| = 2, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 14, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 12.$$

  Como todos los determinantes de las sub-matrices principales son positivos, la matriz A (y por lo tanto la forma f) es definida positiva.
- Cuando se hizo la eliminación de Gauss, no se necesitó hacer intercambio de filas, y todos los pivotes encontrados fueron positivos.

Puntaje:

a)
- Por escribir correctamente la matriz A: 0,5 puntos.
- Por factorizar correctamente $A = LU$: 1 punto.
- Por encontrar D: 1 punto.
- Por escribir $A = LDL^T$: 0,5 puntos.

b)
- Por encontrar el cambio de variables correcto: 1 punto.
- Por escribir $f(x)$ como $2y_1^2 + 3y_2^2 + 2y_3^3$: 1 punto.
- Por concluir (¡justificando!) que f es definida positiva: 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

4. *a*) Sea A una matriz de $3{\times}3$ con determinante $\det A = -3$, y sea $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\det(nA)$, $\det(A^n)$ y $\det(A^2((A^T)^{-1})^n)$.

b) Calcule la inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ por el método de la matriz adjunta.

Solución:

a) (i) Ya que nA es la matriz A después de multiplicar cada una de sus tres filas por n. Cada una de estas multiplicaciones de fila tiene el efecto de multiplicar el $\det A$ por n, por lo que

$$\det(nA) = n^3 \det A = -3n^3.$$

(ii) Aplicando $n-1$ veces la propiedad $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, vemos que

$$\det(A^n) = \det(A \cdot A \cdot \cdots \cdot A) = \det A \cdot \det A \cdot \cdots \cdot \det A = (\det A)^n = (-3)^n.$$

(iii) Como $\det((A^T)^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A^T)} = \dfrac{1}{\det A}$, $\det((A^T)^{-1})^n = \dfrac{1}{(\det A)^n}$. Multiplicando esto por $\det(A^2) = (\det A)^2$, obtenemos

$$\det(A^2((A^T)^{-1})^n) = \det(A^2) \cdot \det((A^T)^{-1})^n = \frac{(\det A)^2}{(\det A)^n} = \frac{1}{(\det A)^{n-2}}.$$

b) La matriz M formada por los *menores* de A (donde m_{ij} = al determinante de 2×2 que resulta de eliminar la fila i y la columna j) es como sigue:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -8 & 2 & 5 \\ -11 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

La matriz C formada por los *cofactores* de A es aquella donde $c_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$, o sea, donde cada entrada es la correspondiente de M, a la que se le asiga un signo que va alternando:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & -5 \\ -11 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

A partir de C, calculamos la matriz adjunta de A como

$$\mathrm{Adj}(A) = C^T = \begin{bmatrix} -1 & 8 & -11 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & 8 \end{bmatrix}$$

de donde finalmente

$$A^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(A)}{\det A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 8 & -11 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -5 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{11}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

Puntaje:

a) La respuesta correcta de cada ítem ($-3n^3, (-3)^n, \dfrac{1}{(-3)^{n-2}}$) vale 1 punto si está justificada. Si no lo está, vale 0,5 puntos.

b)
- Por calcular la matriz M de menores: 0,5 puntos.
- Por calcular la matriz C de cofactores: 0,5 puntos.
- Por calcular la matriz adjunta: 0,5 puntos.
- Por calcular el determinante: 0,5 puntos.
- Por llegar a la inversa en forma correcta: 1 punto.

Los puntajes se dan aunque el cálculo no esté hecho en forma explícita: si dan la matriz adjunta pero no la de menores ni la de cofactores, reciben 1,5 puntos por eso (se da por hecho que *calcularon* la matriz de menores y la de cofactores, aunque no la hayan escrito).

A lo anterior se le suma el punto base.

5. Mediante operaciones fila, reduzca la matriz A a una matriz triangular, y calcule su determinante como producto de pivotes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \underset{\substack{f_2 \leftarrow f_2 - f_1 \\ f_3 \leftarrow f_3 - f_1 \\ f_4 \leftarrow f_4 - f_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \underset{\substack{f_3 \leftarrow f_3 - f_2 \\ f_4 \leftarrow f_4 - f_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix} \underset{f_4 \leftarrow f_4 - f_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora su determinante es simplemente el producto de los pivotes, o sea

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18.$$

Puntaje:

- Por reducir correctamente A a una matriz triangular, 4,5 puntos (se da puntaje parcial si se equivocan entre medio: 1,5 puntos por cada fila bien calculada, la primera no se cuenta).
- Por calcular correctamente el determinante *a partir de la matriz triangular a la que llegaron*: 1,5 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

6. Se sabe que A es equivalente por filas a B, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -3 & 10 & 9 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 9 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   a) Encuentre bases de $\operatorname{Nul} A$ y $\operatorname{Col} A$.

   b) Sea $w = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Decida si $w \in \operatorname{Nul} A$ y/o si $w \in \operatorname{Col} A$.

Solución:

a) Como B es una (no la única) forma escalonada de A, el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es equivalente al sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

En este sistema, las variables dependientes (correspondientes a los pivotes) son x_1, x_3 y x_5, lo que nos dice que las columnas 1, 3 y 5 forman una base de $\operatorname{Col} A$:

$$\mathfrak{B}_{\operatorname{Col} A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}.$$

Además, una base de $\operatorname{Nul} A$ puede obtenerse tomando, para cada variable independiente (en este caso, x_2 y x_4) la asignación de 1 a dicha variable y 0 a la(s) otra(s) variables independientes, y a partir de estos valores determinar los de las variables dependientes, suponiendo que en cada ecuación el lado derecho es cero.

En nuestro caso, como las variables independientes son x_2 y x_4, las ecuaciones no nulas quedan:

$$\begin{array}{rcrrrrrr|} x_1 & = & - & 2x_2 & - & 2x_4 & - & 5x_5 \\ 3x_3 & = & & & & 6x_4 & - & 3x_5 \\ -7x_5 & = & & & & & & 0 \\ \hline \end{array}$$

o, simplificando,

$$\begin{array}{rcrrrrrr|} x_1 & = & - & 2x_2 & - & 2x_4 & - & 5x_5 \\ x_3 & = & & & & 2x_4 & - & x_5 \\ x_5 & = & & & & & & 0 \\ \hline \end{array}$$

Así, consideramos las asignaciones $(x_2, x_4) = (1, 0)$ y $(x_2, x_4) = (0, 1)$, y usamos esos valores para determinar los de las variables dependientes. En la primera asignación, obtenemos $x_5 = 0$, $x_3 = 2x_4 = 0$, $x_1 = -2x_2 - 2x_4 - 5x_5 = -2$. En la segunda asignación obtenemos $x_5 = 0$, $x_3 = 2x_4 = 2$, $x_1 = -2x_2 - 2x_4 - 5x_5 = -2$. Así, nuestra base de $\operatorname{Nul} A$ es

$$\mathfrak{B}_{\operatorname{Nul} A} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) Claramente, $w \notin \operatorname{Col} A$ ya que este último es subespacio de $\mathbb{R}^4$ y $w \in \mathbb{R}^5$.

Para decidir si $w \in \operatorname{Nul} A$ o no, basta calcular $Aw = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ para darse cuenta de que la respuesta es "SÍ".

Puntaje:

a)
- Por obtener correctamente una base de $\operatorname{Nul} A$: 1,5 puntos.
  Nota: Si determinan correctamente un vector de una base de $\operatorname{Nul} A$ y se equivocan al calcular el segundo, reciben 1 punto en lugar de 1,5.
- Por obtener correctamente una base de $\operatorname{Col} A$: 1,5 puntos.
  Nota: Si determinan correctamente un vector de de una base de $\operatorname{Col} A$ y se equivocan al calcular los otros, reciben 0,5 puntos en lugar de 1,5. Si determina dos correctos reciben 1 punto.

b)
- Por argumentar que $w \notin \operatorname{Col} A$: 1 punto.
- Por argumentar correctamente que $w \in \operatorname{Nul} A$: 2 puntos.

A lo anterior se suma el punto base.

7. Sea A una matriz simétrica definida positiva de $n \times n$. Demuestre que $3A^3 + 2I$ es simétrica definida positiva.

   Solución:

   Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ cualquiera. Debemos probar que $\mathbf{x}^T(3A^3 + 2I)\mathbf{x} > 0$.

   Pero

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T(3A^3 + 2I)\mathbf{x} &= 3\mathbf{x}^T A^3 \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T I \mathbf{x} \\ &= 3(\mathbf{x}^T A)A(A\mathbf{x}) + 2\mathbf{x}^T I \mathbf{x} \\ &= 3(A^T \mathbf{x})^T A(A\mathbf{x}) + 2\mathbf{x}^T I \mathbf{x} \\ &= 3(A\mathbf{x})^T A(A\mathbf{x}) + 2\mathbf{x}^T I \mathbf{x}. \end{aligned}$$

   (a la última línea llegamos porque $A^T = A$ por ser A simétrica).

   Ahora bien: por ser A definida positiva, se tiene —tomando $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$— que $(A\mathbf{x})^T A(A\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T A\mathbf{y} \geq 0$ (de hecho, podemos decir que esto es > 0 ya que $\mathbf{y} = A\mathbf{x} \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, pero basta usar que es ≥ 0).

   Por otra parte,por ser I diagonal con todos los elementos de la diagonal positivos, es simétrica definida positiva, por lo que $\mathbf{x}^T I \mathbf{x} > 0$.

   Así, $\mathbf{x}^T(3A^3+2I)\mathbf{x}$ que es la suma de una expresión ≥ 0 y otra > 0, por lo que $\mathbf{x}^T(3A^3+2I)\mathbf{x} > 0$ como queríamos demostrar.

   Puntaje:

   - Por demostrar que $3A^3 + 2I$ es simétrica, 0,5 puntos.
   - Por indicar que se debe probar que $\mathbf{x}^T(3A^3 + 2I)\mathbf{x} > 0$ para $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 0,5 puntos.

     Nota: Si no se menciona que $\mathbf{x}$ debe ser $\neq \mathbf{0}$, se dan 0 puntos por este ítem (o, visto de otra manera, se descuentan 0,5 puntos).
   - Por separar lo anterior en $3\mathbf{x}^T A^3 \mathbf{x}$ y $2\mathbf{x}^T I \mathbf{x}$, 1 punto.
   - Por probar que $\mathbf{x}^T A^3 \mathbf{x} > 0$ (o ≥ 0) para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 2 puntos.
   - Por argumentar que $\mathbf{x}^T I \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 1 punto.
   - Por concluir lo pedido, 1 punto.

   A lo anterior se suma el punto base.

   Alternativa de Solución:

   Es posible también demostrar que $3A^3 + 2I$ es simétrica definida positiva (SDP) simplemente aprovechándonos de las propiedades de las matrices SDP vistas en clases (o explicadas en el texto, o enunciadas en la guía correspondiente), o que son demostradas en la respuesta.

   Por ejemplo:

   - I (y por lo tanto $2I$) es SDP ya que es diagonal con todos los elementos de la diagonal positivos.
   - Por ser A simétrica, $A^2 = A^T A$ que es semi-definida positiva, y por tener A columnas l.i. (A es SDP $\rightarrow$ A es invertible) se tiene que A^2 es SDP. Alternativamente, se puede usar la propiedad siguiente (con $A = B$).

- Dadas dos matrices SDPs A y B, si $AB = BA$, entonces AB es SDP. *Esto no aparece como materia en las referencias, por lo que de usarse habría que demostrarlo.*
- Una segunda aplicación de esta propiedad (con $B = A^2$) da que A^3 (y por lo tanto $3A^3$) es SDP.
- Finalmente, como $3A^3$ es SDP y $2I$ también entonces su suma $3A^3 + 2I$ es SDP.

Puntaje:

Si se hace por el método aquí descrito, el puntaje se distribuye como sigue:

- Por demostrar que $3A^3 + 2I$ es simétrica, 0,5 puntos.
- Por mencionar que I es SDP (sin demostrarlo), 0,5 puntos.
- Por mencionar que un ponderado positivo de una matriz SDP es SDP, 0,5 puntos.
- Por mencionar que el producto de matrices SDP que conmutan es SDP, 0,5 puntos.
- Por demostrar esta propiedad, 2,5 puntos.
- Por concluir que A^3 es SDP, 0,5 puntos.
- Por mencionar que la suma de dos matrices SDP es SDP, 1 punto.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) El conjunto de las matrices de 2×2 tales que el producto de los elementos de la diagonal es cero es un subespacio del espacio vectorial de las matrices de 2×2.

   b) El conjunto de los polinomios $p \in \mathbb{P}_3$ (el espacio formado por todos los polinomios de grado menor o igual a 3) que satisfacen la condición $p(1) + p(3) = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3$.

   Solución:

   a) **Falso**.
   Llamemos S al conjunto de las matrices de 2×2 que satisfacen la propiedad indicada. Probaremos que S no es cerrado bajo suma.
   En efecto: las matrices $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ son elementos de S, pero su suma es

   $$I = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   que claramente no es elemento de S.

   b) **Verdadero**.
   Para justificar, llamemos U al conjunto formado por todos los polinomios de grado menor o igual a 3 que satisfacen la condición $p(1) + p(3) = 0$. Debemos probar que:

   (i) $U \neq \varnothing$.
   (ii) U es cerrado bajo suma.
   (iii) U es cerrado bajo ponderación por un escalar.

   Note que una forma alternativa es probar que $U \neq \varnothing$ y es cerrado bajo "combinaciones lineales de dos de sus elementos": en otras palabras, si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in U$ entonces $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in U$.
   En efecto:

   (i) La forma más común (pero no la única posible) de demostrar que $U \neq \varnothing$ es probar que el "cero" del espacio (en este caso, el polinomio idénticamente cero) es elemento de U. En este caso, también podríamos probar que $f(x) = (x-1)(x-3) \in U$ (o cualquiera de los múltiplos de $f(x)$).
   Que cualquiera de estos polinomios pertenece a U es trivial; por ejemplo, tomando $p(x) = f(x) = (x-1)(x-3)$, se satisface $p(1) = p(3) = 0$, por lo que $p(1) + p(3) = 0$, o sea, $p(x) \in U$.

   (ii) Sean $f(x), g(x) \in U$. Entonces $f(1) + f(3) = 0$, $g(1) + g(3) = 0$ y, si tomamos $h(x) = f(x) + g(x)$, tenemos $h(1) = f(1) + g(1)$, $h(3) = f(3) + g(3)$, por lo que

   $$h(1) + h(3) = (f(1) + g(1)) + (f(3) + g(3)) = (f(1) + f(3)) + (g(1) + g(3)) = 0 + 0 = 0,$$

   de donde $h(x) \in U$. O sea, U es cerrado bajo suma.

(iii) Sean $f(x) \in U$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces $f(1) + f(3) = 0$, y si tomamos $h(x) = c\ f(x)$, tenemos $h(1) = c\ f(1)$ y $h(3) = c\ f(3)$, por lo que

$$h(1) + h(3) = c\ f(1) + c\ f(3) = c(f(1) + f(3)) = c \cdot 0 = 0,$$

de donde $h(x) \in U$. O sea, U es cerrado bajo ponderación por un escalar.

Puntaje:

a)
- Por indicar que S no es cerrado bajo suma (de hecho, es cerrado bajo ponderación por escalar), 1 punto.
- Por exhibir un contraejemplo concreto de dos matrices que están en S y cuya suma no está, 1,5 puntos.
- Por exhibir la suma de las dos matrices, y argumentar que "obviamente no está en S" o darse el trabajo de explicar por qué no, 0,5 puntos.

b)
- Por mencionar que se debe demostrar que $U \neq \varnothing$, y que U es cerrado bajo suma y bajo ponderación (o, equivalente a estos últimos dos, que U es cerrado bajo combinaciones lineales de dos de sus elementos), 0,5 puntos.
  Nota: estos 0,5 puntos se dan incluso si no se menciona *explícitamente* que hay que demostrar las tres condiciones, siempre y cuando demuestren las tres (o al menos intenten demostrarlas). Por ejemplo, si demuestran que U es cerrado bajo suma y ponderación, pero omiten demostrar que $U \neq \varnothing$, reciben solo 2 puntos, no 2,5.
- Por demostrar que $U \neq \varnothing$, 0,5 puntos.
- Por demostrar que U es cerrado bajo suma, 1 punto.
- Por demostrar que U es cerrado bajo ponderación, 1 punto.
  O, equivalente a estos últimos dos, por demostrar que U es cerrado bajo combinaciones lineales de dos de sus elementos), 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

Alternativas de Solución:

a) En la parte (b), también es posible argumentar lo siguiente:
Sea $p(x)$ el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{P}_3$. Este puede ser identificado[2] con el vector $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$.
Como $p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ y $p(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3$, se tiene que $p(1) + p(3) = 2a_0 + 4a_1 + 10a_2 + 28a_3$, por lo que la condición "$p(1) + p(3) = 0$" es equivalente a pedir que $2a_0 + 4a_1 + 10a_2 + 28a_3 = 0$, o equivalentemente, que $a_0 + 2a_1 + 5a_2 + 14a_3 = 0$, lo que puede ser expresado como

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \in \mathrm{Nul}(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 10 & 28 \end{bmatrix}) = \mathrm{Nul}(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 \end{bmatrix}).$$

Pero ya sabemos que, dada cualquier matriz A de $m \times n$, $\mathrm{Nul}(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, en este caso, de $\mathbb{R}^4$. Así, el conjunto que corresponde a U en $\mathbb{R}^4$ es un subespacio

[2]La noción precisa es la de *isomorfismo*, mencionada en la sección 2.9 y que se estudia en más detalle en la sección 4.4 del texto.

de $\mathbb{R}^4$, por lo que U debe ser un subespacio de $\mathbb{P}_3$ (porque, ya que a cada polinomio de $\mathbb{P}_3$ le corresponde un vector de $\mathbb{R}^4$, y todo lo que se haga en un conjunto se puede hacer en el otro, en particular las demostraciones de que U es no vacío y cerrado bajo suma y ponderación por escalar).

Puntaje:

Esta solución (suponiendo que no hay errores de cálculo, por ejemplo al calcular $p(1)+p(3)$), tiene puntaje máximo.

b) Otra forma de demostrar (b) es encontrando un conjunto de polinomios que genera U, y después aplicar el Teorema 1 del capítulo 4 del texto (el conjunto generado por un conjunto finito de vectores de un espacio vectorial es un subespacio de este).

En nuestro caso, como $a_0 = -2a_1 - 5a_2 - 14a_3$ (ver alternativa anterior), un generador (de hecho, una base) de U es $\mathfrak{B}_U = \{x-2, x^2-5, x^3-14\}$, que corresponde a la base $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -14 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathrm{Nul}(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 14 \end{bmatrix})$.

Es fácil comprobar que todos estos polinomios forman parte de U (o sea, que satisfacen $p(1)+p(3)=0$).

Por otra parte, es necesario probar que todo polinomio de U es generado por este conjunto. En efecto, si

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in U,$$

entonces $p(x) = a_1(x-2) + a_2(x^2-5) + a_3(x^3-14) + (a_0 + 2a_1 + 5a_2 + 14a_3)$.

Pero ya sabemos que, si $p(x) \in U$, entonces $a_0 + 2a_1 + 5a_2 + 14a_3 = 0$, por lo que

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in U,$$

entonces $p(x) = a_1(x-2)+a_2(x^2-5)+a_3(x^3-14)$ y por lo tanto $p(x) \in \mathrm{Gen}(\{x-2, x^2-5, x^3-14\})$.

Puntaje:

- Por encontrar un conjunto S de polinomios que genera U (no necesariamente una base de U), 1 punto.
- Por probar que todo polinomio de S es elemento de U, 1 punto.
- Por probar que todo polinomio de U es combinación lineal de elenentos de S, 1 punto.