Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

EYP1016 - Introducción a la Estadística
Pauta Ayudantía 6

Profesora	:	Anita Araneda
Ayudante	:	Pilar Tello
Fecha	:	19 de Abril del 2016

1. Suponga que se lanza una moneda honesta tres veces de manera sucesiva e independiente.

   a) Determine la función de distribución conjunta de X: Número de caras observadas en el primer lanzamiento y sea Y: Número total de caras observadas en los tres lanzamientos.
   Solución: Se sabe que $\Omega = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SSS, SSC, SCS, SCC\}$. Luego $x = 0, 1$ e $y = 0, 1, 2, 3$. Por lo que la función de probabilidad conjunta es de la siguiente forma:

y/x	0	1
0	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
3	0	$\frac{1}{8}$

   b) Determine la función de probabilidad condicional de X dado $Y = 1$.
   Solución: $\mathbb{P}(X = x|Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\mathbb{P}(X=x,Y=1)}{\frac{3}{8}}$, luego:

   $$\mathbb{P}(X = x, Y = 1) = \begin{cases} \frac{2}{3} & x = 0 \\ \frac{1}{3} & x = 1 \end{cases}$$

   c) Si usted recibe \$3um por cada cara obtenida más \$2um adicionales si una de ellas fue en el primer lanzamiento. ¿Cuál es la esperanza, o valor esperado, del dinero que ganará?
   Solución: Sea $g(X, Y)$ a la función de la ganancia. Luego $g(X, Y) = 3Y + 2X$ por lo que lo pedido es:
   $\mathbb{E}(g(X, Y)) = \mathbb{E}(3Y + 2X) = 3\mathbb{E}(Y) + 2\mathbb{E}(X)$.
   Donde:
   $\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
   E(Y)=$0\times\mathbb{P}(Y = 0) + 1 \times \mathbb{P}(Y = 1) + 2 \times \mathbb{P}(Y = 2) + 3 \times \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{3}{2}$.
   Luego $\mathbb{E}(g(X, Y)) = 3 \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$.
   Luego la esperanza del dinero ganado por los lanzamientos de las tres monedas es \$5.5um.

2. Suponga que el par de variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta:

		X		
		1	2	3
	2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
Y	3	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
	4	0	$\frac{1}{3}$	0

a) Encuentre las funciones de probabilidad marginales de X e Y.
Solución: Las funciones de probabilidad son las siguientes:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & x = 1 \\ \frac{1}{2} & x = 2 \\ \frac{1}{4} & x = 3 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 2 \\ \frac{1}{3} & x = 3 \\ \frac{1}{3} & x = 4 \end{cases}$$

b) Encuentre $\mathbb{E}(X|Y = 4)$ y $\mathrm{Var}(X|Y = 4)$.
Solución:
La función de probabilidad de $X|Y = 4$ queda de la siguiente manera:

$$\mathbb{P}(X/Y = 4) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = 1|Y = 4) = \frac{\mathbb{P}(X=1,Y=4)}{\mathbb{P}(Y=4)} = \frac{0}{1/3} = 0 & x = 1 \\ \mathbb{P}(X = 2|Y = 4) = \frac{\mathbb{P}(X=2,Y=4)}{\mathbb{P}(Y=4)} = \frac{1/3}{1/3} = 1 & x = 2 \\ \mathbb{P}(X = 3|Y = 4) = \frac{\mathbb{P}(X=3,Y=4)}{\mathbb{P}(Y=4)} = \frac{0}{1/3} = 0 & x = 3 \end{cases}$$

Luego:
$\mathbb{E}(X/Y = 4) = 1 \times \mathbb{P}(X = 1|Y = 4) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2|Y = 4) + 3 \times \mathbb{P}(X = 3|Y = 4) =$
$1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 0 = 2$
$\mathrm{Var}(X|Y = 4) = -(1 - 2)^2 \times 0 + (2 - 2)^2 \times 1 + (3 - 2)^2 \times 0$

3. Suponga que en un centro telefónico, se reciben llamadas con tiempos entre llamadas sucesivas que distribuyen según una distribución exponencial con $\lambda = 0.5$. Recordar que:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

a) Calcule la probabilidad de que transcurran más de 5 minutos entre dos llamadas sucesivas cualquiera.
Solución: Sea T: tiempo entre dos llamadas sucesivas. Luego $T \sim Exponencial(0.5)$. Por lo que nos piden es $\mathbb{P}(T > 5) = 1 - (1 - e^{-0.5\times 5}) = e^{-2.5} = 0.082085$

b) Calcule la probabilidad de que transcurra más de 1 minuto y menos de 3 minutos entre dos llamadas sucesivas cualquiera.
Solución: Piden $\mathbb{P}(1 < T < 3) = \mathbb{P}(T < 3) - \mathbb{P}(T < 1) = (1 - e^{-0.5\times 3}) - (1 - e^{-0.5\times 1}) = e^{-0.5} - e^{-1.5} = 0.3834005$

c) ¿Cuál es la esperanza del tiempo entre dos llamadas sucesivas cualquiera?
Solución: $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0.5} = 2$, luego se espera que pasen 2 minutos entre dos llamadas sucesivas cualquiera.

4. Demuestre que si $X \sim Exponencial(\lambda)$:

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s),\ para\, s, t > 0$$

Si una distribución cumple con esta propiedad, se dice que dicha distribución "no tiene memoria".
Solución: Calculemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > s + t | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > s + t, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\
&= \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq s + t)}{1 - \mathbb{P}(X \leq t)} \\
&= \frac{1 - (1 - e^{-\lambda(s+t)})}{1 - (1 - e^{-\lambda t})} \\
&= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} \\
&= e^{-\lambda s} \\
&= 1 - (1 - e^{-\lambda s}) \\
&= 1 - (\mathbb{P}(X \leq s)) \\
&= \mathbb{P}(X > s)
\end{aligned}$$

Luego si X por ejemplo es el tiempo en minutos de espera de un autobús esto se traduce como: la probabilidad de esperar s minutos más dado que ya he esperado t depende sólo de s, y esta es la probabilidad de esperar s minutos.

5. Se ha comprobado que el tiempo de vida en años de un marcapasos es una variable aleatoria con distribución Exponencial de parámetro λ, donde la esperanza del tiempo de vida del marcapasos es 20 si es del tipo A, y 16 si es del tipo B. En un hospital no se tiene registro del tipo de marcapasos que se le ha implantado a un paciente, sólo se sabe que el 30 % de ellos usar marcapasos de tipo B.

   a) Si se selecciona un paciente al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su marcapasos dure más de 30 años?
   Solución: Primero definamos los eventos principales para modelas este problema. Sea $X_i = 1$ si el marcapasos es de tipo A y $X_i = 0$ si el marcapasos es de tipo B. Luego $X_i \sim Bernoulli(0.7)$, ya que el 30 % de los marcapasos son de tipo B, por ende el 70 % don de tipo A. Luego sea: T_i : tiempo de duración de marcapasos del paciente i, luego según el enunciado $T_i|X_i = 1 \sim Exponencial(1/20)$ y $T_i|X_i = 0 \sim Exponencial(1/16)$ por lo que nos piden en este problema es $\mathbb{P}(T_i > 30) = 1-\mathbb{P}(T_i \leq 30)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_i \leq 30) &= \mathbb{P}(T_i \leq 30|X_i = 1)\mathbb{P}(X_i = 1) + \mathbb{P}(T_i \leq 30|X_i = 0)\mathbb{P}(X_i = 0)\\ &= (1 - e^{-\frac{2}{3}}) \times 0.3 + (1 - e^{-\frac{15}{8}}) \times 0.7\\ &= 0.74\end{aligned}$$

   Luego $\mathbb{P}(T_i > 30) = 0.26$

   b) Si un marcapasos de tipo A lleva funcionando correctamente 5 años en un paciente, ¿cuál es la probabilidad de que siga funcionando 10 años más?
   Solución: Nos piden:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_i > 15|T_i > 5, X_i = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_i > 15, T_i > 5|X_i = 1)}{\mathbb{P}(T_i > 15|X_i = 1)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(T_i > 15|X_i = 1)}{\mathbb{P}(T_i > 15|X_i = 1)}\\ &= \frac{e^{-15/20}}{e^{-5/20}}\\ &= e^{-10/20}\\ &= \mathbb{P}(T_i > 10, X_i = 1)\\ &= 0.6065307\end{aligned}$$