PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV2024

Pauta Interrogación 3 - MAT1620

1. Encuentre los puntos de la región rectangular de vértices $(0,0),(3,0),(0,2)$ y $(3,2)$ donde la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ alcanza sus valores máximo y mínimo globales, y calcule estos.

   Solución:

   Primero localizamos los puntos críticos de f que están al interior del rectángulo, para eso debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4y = 0 \\ f_y = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}$$

   sustituyendo la primera ecuación en la segunda se obtiene

$$\begin{aligned} x^9 - x = 0 \quad &\iff \quad x(x^8 - 1) = 0 \\ &\iff \quad x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = 0 \\ &\iff \quad x = 0, x = 1, x = -1 \end{aligned}$$

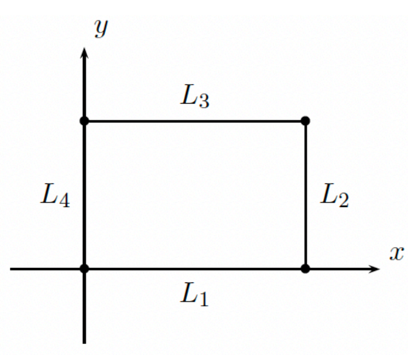
   Por lo tanto el único punto crítico en el interior del rectángulo es $(1,1)$.

   Para clasificar este punto critico observamos que

$$Hf(1,1) \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$$

   por lo que tenemos $D(1,1) > 0$, $f_{xx}(1,1) > 0$, por lo tanto $f(1,1) = -2$ es un mínimo local.

   Ahora estudiaremos cada parte de los bordes:



   - En L_1: $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.
     $f(x,0) = x^4$ un polinomio que alcanza un mínimo en $(0,0)$ cuyo valor es $f(0,0) = 0$ y un valor máximo en $(3,0)$ cuyo valor es $f(3,0) = 81$.

- En L_2: $x = 3$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.
  $f(3, y) = y^4 - 12y + 81$, una polinomio en y la cual alcanza un máximo en $(3, 0)$ con $f(3, 0) = 81$ y un mínimo en $(3, \sqrt[3]{3})$ con $f(3, \sqrt[3]{3}) = 81 - 8\sqrt[3]{3}$.
- En L_3: $y = 2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.
  $f(x, 2) = x^4 - 8x + 16$ una función polinomica que alcanza un máximo en $(3, 2)$ con $f(3, 2) = 73$ y un mínimo en $(\sqrt[3]{2}, 2)$ con $f(\sqrt[3]{2}, 2) = 16 - 6\sqrt[3]{2}$.
- En L_4: $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.
  $f(0, y) = y^4$ un polinomio que alcanza un máximo en $(0, 2)$ con $f(0, 2) = 16$ y un mínimo en $(0, 0)$ con $f(0, 0) = 0$.

Por lo tanto el máximo absoluto es 81 que se alcanza en $(3, 0)$ y el mínimo absoluto es -2 que s alcanzado en $(1, 1)$. **Asignación de Puntaje:**

- (0,5 ptos.) Por encontrar el punto crítico interior.
- (0,5 ptos.) Por clasificar el punto crítico interior.
- (1 pto.) Por estudiar L_1.
- (1 pto.) Por estudiar L_2.
- (1 pto.) Por estudiar L_3.
- (1 pto.) Por estudiar L_4.
- (1 pto.) Por concluir.

2. Determine, usando multiplicadores de Lagrange, los puntos de la superficie $xy^2z = 32$ más cercanos al origen. ¿A qué distancia se encuentran?

   Solución:

   Sea (x, y, z) un punto sobre la superficie, la distancia de este punto al origen es dado por: $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, sin embargo podemos trabajar con la distancia al cuadrado, de este modo nuestro problema es:

$$\text{Minimizar } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$
$$\text{Con la restricción } xy^2z = 32.$$

   Aplicamos multiplicadores de Lagrange, por lo que debemos resolver:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 32 \end{cases}$$

   Lo cuál es equivalente:

$$\begin{cases} 2x = \lambda y^2 z \ (1) \\ 2y = \lambda 2xyz \ (2) \\ 2z = \lambda xy^2 \ (3) \\ xy^2 z = 32 \ (4) \end{cases}$$

Notar que si (1) multiplicamos por x, (2) multiplicamos por y y (3) multiplicamos por z y usamos (4) Obtenemos: $z^2 = \lambda \cdot 16$; $x^2 = \lambda \cdot 16$; $y^2 = \lambda \cdot 32$.

Por otro lado si la ecuación (3) la reemplazamos en (1) nos dá:

$$\begin{aligned}
&2x = \lambda y^2 \cdot \left(\frac{\lambda}{2} xy^2\right) \\
&4x = x\left(\lambda^2 \cdot y^4\right) \\
&x\left(4 - \lambda^2 y^2\right) = 0 \\
&x = 0 \text{ o } \cdot y^4 \cdot \lambda^2 = 4
\end{aligned}$$

Claramente $x = 0$ no es solución. Reemplazando $y^2 = \lambda \cdot 32$ en la última ecuación nos dá:

$$\begin{aligned}
&(\lambda \cdot 32)^2 \cdot \lambda^2 = 4 \\
&\lambda = \pm\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$\lambda = -\dfrac{1}{4}$ no aporta soluciones por lo que:

$$\text{si } \lambda = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm 2, z = \pm 2, y = \pm\sqrt{2}$$

Los puntos P buscados son:

$$\begin{aligned}
&(-2, 2\sqrt{2}, -2), (-2, -2\sqrt{2}, -2) \\
&(2, 2\sqrt{2}, 2), (2, -2\sqrt{2}, 2) \\
&\text{Y en todos } f(P) = 16.
\end{aligned}$$

Por lo que la distancia mínima es 4.

Asignación de Puntaje:

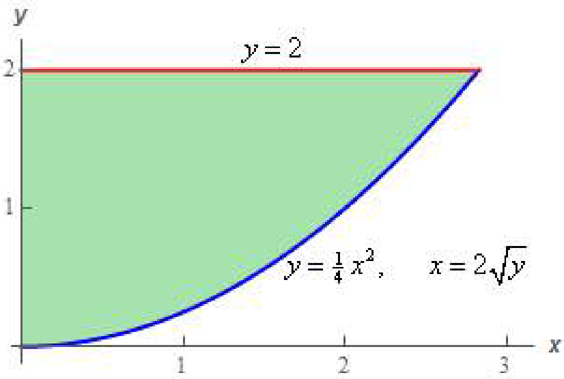
- (1 pto.) Por encontrar la función distancia a minimizar.
- (1 pto.) Por plantear el problema con restricciones a resolver.
- (1 pto.) Por escribir las 4 ecuaciones del sistema.
- (1 pto.) Por encontrar el valor de λ.
- (1 pto.) Por encontrar los 4 puntos.
- (1 pto.) Por dar la distancia mínima.

3. (a) Calcule la integral $\displaystyle\iint_D 5x^3 \cos\left(y^3\right) dA$ donde D es la región acotada por las curvas $y = 2, y = \frac{1}{4}x^2$ y el eje Y.

   (b) Use integrales dobles para calcular el volumen del sólido que está dentro de $z = x^2 + y^2$ y bajo $z = 16$.

Solución:

(a) Notar que un bosquejo de la región D es dada por:



De manera natural está región es del tipo I, sin embargo la integral que resulta no se puede integrar si intentamos primero integrar respecto y, por lo que es más fácil integrar primero respecto de x, es decir veremos nuestra región como una del tipo II:

$$0 \leq y \leq 2$$
$$0 \leq x \leq 2\sqrt{y}$$

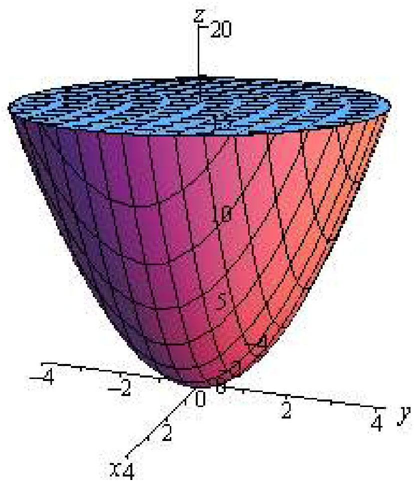
De este modo la integral a calcular es:

$$\begin{aligned}
\iint_D 5x^3 \cos\left(y^3\right) dA &= \int_0^2 \int_0^{2\sqrt{y}} 5x^3 \cos\left(y^3\right) dxdy \\
&= \int_0^2 \left(\frac{5}{4}x^4 \cos\left(y^3\right)\right)\Big|_0^{2\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^2 20y^2 \cos\left(y^3\right) dy \\
&= \left(\frac{20}{3} \sin\left(y^3\right)\right)\Big|_0^2 = \frac{20}{3}\sin(8).
\end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por graficar correctamente la region D.
- (1 pto.) Por expresar la integral como una región de tipo I o tipo II.
- (1 pto.) Por calcular la integral correctamente (necesariamente debe verse como tipo II para calcularse).

(b) Notar que un bosquejo del sólido es dado por:



Luego el volumen del sólido será dado por la integral:

$$V = \iint_D 16 - \left(x^2 + y^2\right) dA,$$

Con $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 16\}$.
Usando coordenadas polares tenemos que:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 4, \quad z = 16 - r^2$$

y por lo tanto el cálculo del volumen del sólido vendrá dado por:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D 16 - \left(x^2 + y^2\right) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 r\left(16 - r^2\right) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(8r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^4 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 64 d\theta \\ &= 128\pi \end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por platear la integral doble o triple que calcula el volumen.
- (1 pto.) Por reescribir la integral a calcular usando coordenadas polares o cilíndricas.
- (1 pto.) Por calcular el volumen correctamente.

4. Use coordenadas esféricas para evaluar la integral $\iiint_E 10xz + 3dV$ donde E es la porción de $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ con $z \geq 0$.

Solución:

Dado que E es la mitad superior de la esfera de radio 4, en coordenadas esféricas tenemos que E se describe de la forma:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq \rho \leq 4$$

Luego la integral se puede calcular de la forma:

$$\begin{aligned}
\iiint_E 10xz + 3dV &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^4 [10(\rho\sin\varphi\cos\theta)(\rho\cos\varphi) + 3] \left(\rho^2 \sin\varphi\right) d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^4 10\rho^4 \sin^2\varphi\cos\varphi\cos\theta + 3\rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \left(2\rho^5\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\theta + \rho^3\sin\varphi\right)\Big|_0^4 d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2048\sin^2\varphi\cos\varphi\cos\theta + 64\sin\varphi d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2048\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta + 64\theta\sin\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 128\pi\sin\varphi d\varphi \\
&= \left(-128\pi\cos\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 128\pi
\end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

- (0.5 pts.) Por determinar el intervalo de φ.
- (0.5 pts.) Por determinar el intervalo de θ.
- (0.5 pts.) Por determinar el intervalo de ρ.
- (1 pto.) Por escribir la integral triple usando coordenadas ésfericas.
- (1 pto.) Por integrar correctamente respecto de ρ.
- (1 pto.) Por integrar correctamente respecto de θ.
- (1 pto.) Por integrar correctamente respecto de φ.
- (0.5 pts.) Por el resultado correcto de la integral.