



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: TOMÁS FÜHRER – AYUDANTE: AGUSTÍN GILBERT

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207-4 Ayudantía 2 - 21-03-2023

Ejercicio 1: Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $8^n - 3^n$ es divisible por 5

Resolución:

□

Ejercicio 2: Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \leq \frac{5}{6}$$

Resolución:

□

Ejercicio 3: Para enteros no negativos n , definimos u_n recursivamente como

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_{k+1} &= 3u_k + 3^k \quad \text{para } k \geq 0 \end{aligned}$$

Demuestre que $u_n = n3^{n-1}$ para todo n entero no negativo

Resolución:

□

Ejercicio 4: Consideremos el nuevo símbolo \downarrow e interpretamos la proposición $(p \downarrow q)$ como “ni p ni q ”. Es decir, $(p \downarrow q)$ es verdadera si y solo si p y q son falsas. Demostrar las siguientes equivalencias lógicas:

- a) $\neg p \Leftrightarrow (p \downarrow p)$.
- b) $(p \vee q) \Leftrightarrow ((p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q))$.
- c) $(p \wedge q) \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q))$

Ejercicio 5: Demuestre las siguientes afirmaciones sin usar tablas de verdad

- 1. $\neg p \vee (q \wedge \neg r) \equiv p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$
- 2. $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- 3. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ es una tautología

Resolución:

□

Ejercicio 6:

- 1. Demuestre que no existe el número natural “más grande”
- 2. Demuestre que no existe el número real “más pequeño”

Resolución:

□

Ejercicio 7: Demuestre las siguientes afirmaciones según se indica:

- a) Si $a^2 + 4b^2$ es impar, entonces a es impar (por contradicción).
- b) Si ab es impar, entonces a y b tienen que ser impares (por contrapositiva).
- c) Si a, b, c son pares, entonces $2a + 3b + 5c$ es par (directamente).