CLASE 5 : RAÍCES Y PROMEDIO

• **DEF**: Sea $a \geq 0$. Decimos que $b \geq 0$ es la <u>raíz cuadrada</u> de a, si $b^2 = a$.

<u>Notación</u>: $b = \sqrt{a}$

• <u>Obs</u>: • No sabemos si tal número $\sqrt{a}$ existe (Existencia: pendiente)

• Si $a < 0$, entonces no tiene raíz cuadrada.

<u>DEM</u>: Supongamos que existe $b \geq 0$ tq $b^2 = a$.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ a < 0 \\ \cdot\ b \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \times$$

Luego, no existe tal b $\square$

- La raíz cuadrada es única.

<u>DEM</u>:

Sean b y c dos raíces cuadradas de a.

Supongamos que $b \neq c$.

Sin pérdida de generalidad, suponemos

$$(0 \leq)\ b < c$$

Sabemos que

$$0 \leq b < c \implies 0 \leq b^2 < c^2$$

Pero $b^2 = a = c^2$ $\rightarrow\!\!\times$

Luego, $b = c$

$\square$

- <u>Postulado</u>: Todo número no negativo tiene una raíz cuadrada.

- <u>Obs</u>: • $0 \leq a < b \implies 0 \leq \sqrt{a} < \sqrt{b}$

<u>DEM</u>: Supongamos que $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ (≥ 0)

$$\implies (\sqrt{a})^2 \geq (\sqrt{b})^2 \implies a \geq b \rightarrow\!\!\times$$

$\square$

- Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $\sqrt{a^2} = |a|$

DEM:
- $|a| \geq 0$ ✓
- $|a|^2 = a^2$ ✓

$\square$

Ej: $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$

- **DEF**: Promedios.

Sean $a, b > 0$. Definimos:

i) Promedio aritmético:

$$PA = \frac{a+b}{2}$$

ii) Promedio geométrico:

$$PG = \sqrt{ab}$$

iii) Promedio harmónico:

$$PH = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

• **Ej:**

- Entre $t=0$ y $t=T$: $v=a$
- Entre $t=T$ y $t=2T$: $v=b$

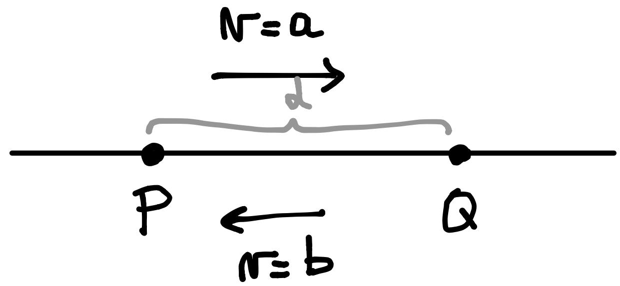
Velocidad promedio entre $t=0$ y $t=2T$

$$= \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo}}$$

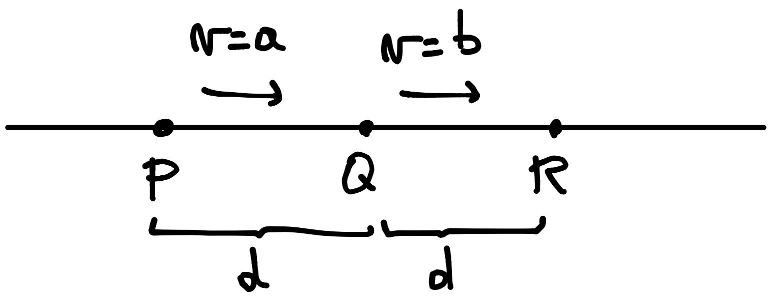
$$= \frac{a \cdot T + b \cdot T}{2T}$$

$$= \frac{a+b}{2} = PA(a,b)$$

• **Ej:**



o

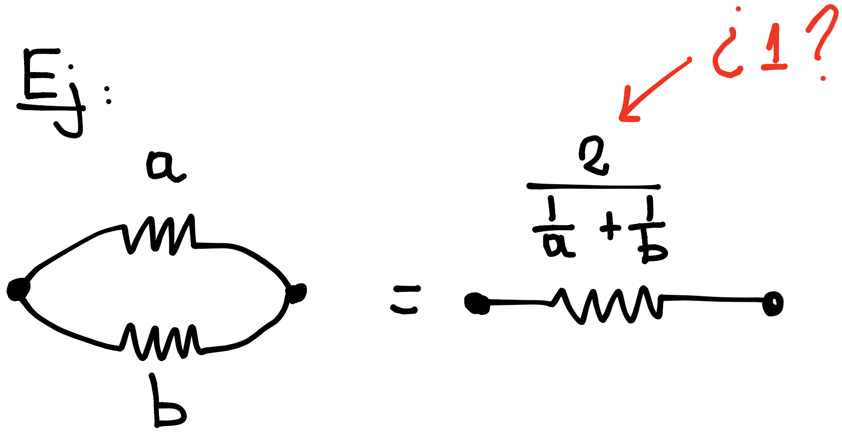


$$\text{Velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo}}$$

$$= \frac{2d}{\frac{d}{a} + \frac{d}{b}}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = PH(a,b)$$

- Ej:



- Ej: Una cierta cantidad crece
  - 80% entre $t=0$ y $t=T$
  - 25% entre $t=T$ y $t=2T$

$t=0$		$t=T$		$t=2T$
A	$\longrightarrow$	$1.8 \times A$	$\longrightarrow$	$(1.25 \times 1.8)\,A$

$$1.25 \times 1.8 = 2.25 = 1.5^2 \Rightarrow 1.5 = \sqrt{1.25 \times 1.8} = PG(1.25, 1.8)$$

$t=0$		$t=2T$
A	$\longrightarrow$	$(1.5)^2 \times A$

- **TEOREMA**: Sean $a, b > 0$. Luego,

$$PH(a,b) \le PG(a,b) \le PA(a,b),$$

es decir,

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

DEM:

$$0 \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le 2\sqrt{ab} \le a+b$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le (2\sqrt{ab}) \le (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le 4ab \le a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le 2ab \le a^2 + b^2$$

Ahora, $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \ge 0$

Por lo tanto, $PG(a,b) \le PA(a,b)$

Ahora, $$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$$

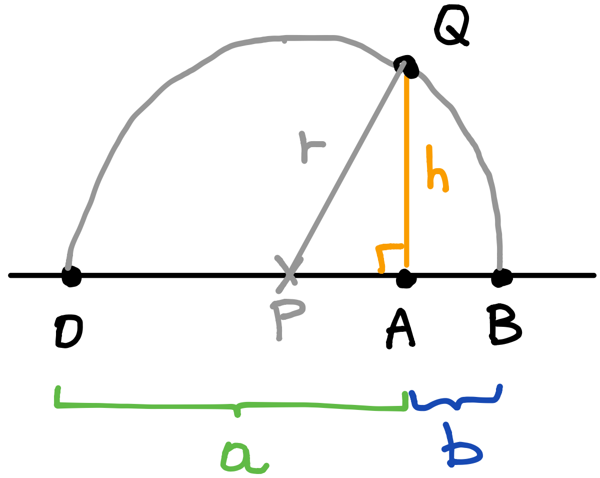
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} \leq \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}$$

$$\Leftrightarrow PG\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) \leq PA\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right) \checkmark$$

$\square$

• <u>Obs</u> :



diámetro $= a+b$

radio $= \frac{a+b}{2} = PA(a,b)$

$\Rightarrow |OP| = |PB| = \frac{a+b}{2} = r$

$$|PA| = |OA| - |OP|$$

$$= a - r = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$$

Por Pitágoras,

$$|PA|^2 + h^2 = |PQ|^2$$

$$\Rightarrow h^2 = |PQ|^2 - |PA|^2$$

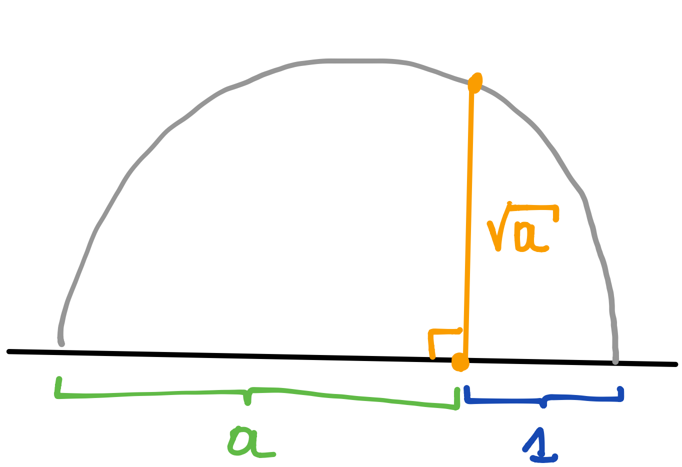
$$= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

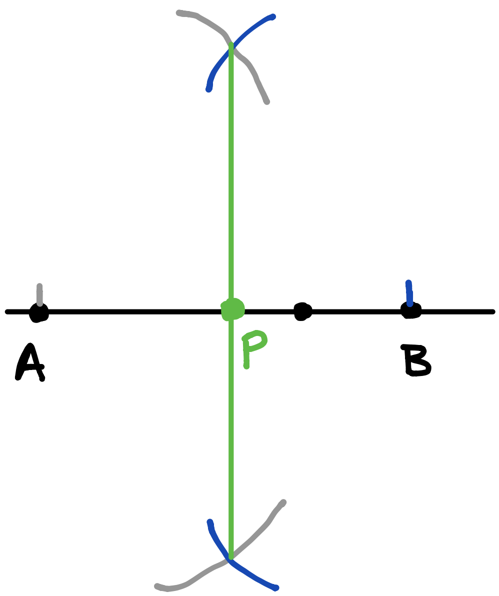
$$= \frac{(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)}{4}$$

$$= \frac{4ab}{4} = ab$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{ab} = PG(a,b)$$

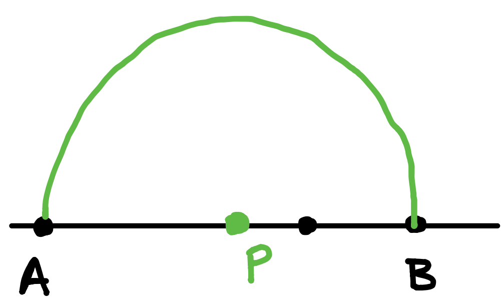
• <u>Obs</u> :

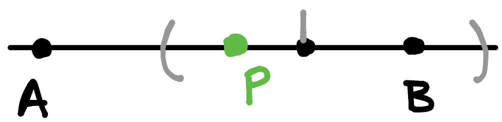


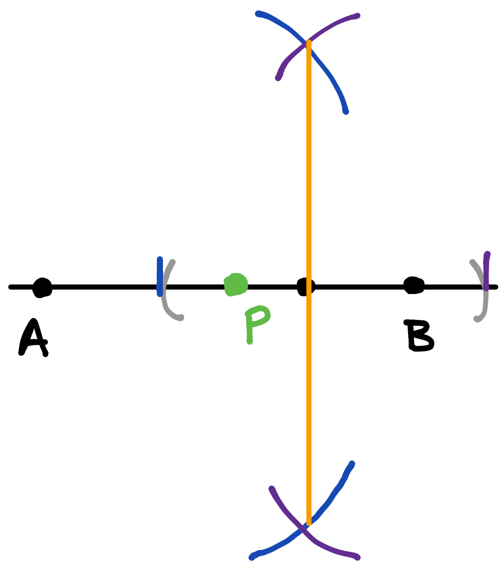


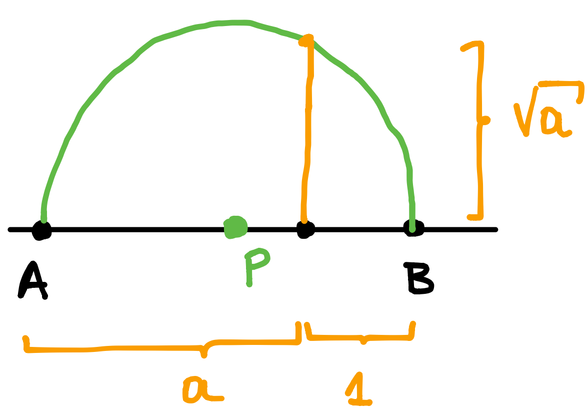
$$|AP| = |PB| = \frac{|AB|}{2}$$

Hasta acá,




A
P
B


A
P
B


$\sqrt{a}$
A
P
B
a
1