Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 1

1. Demuestre que si los vectores $u+v$ y $u-v$ son ortogonales entonces los vectores u y v tienen la misma norma. Justifique cada paso de la demostración.

Solución.

Si $u+v$ y $u-v$ son ortogonales implica que $(u+v)\cdot(u-v)=0$ luego

$$\begin{gathered}(u+v)\cdot(u-v)=0\\ u\cdot u+v\cdot u-u\cdot v-v\cdot v=0\\ u\cdot u+u\cdot v-u\cdot v-v\cdot v=0\\ \|u\|^2-\|v\|^2=0\\ \|u\|=\|v\|\end{gathered}$$

esto equivale a decir que sus longitudes sean iguales.

Puntaje:

- 2 puntos por argumentar que el producto punto entre vectores ortogonales debe ser 0.
- 2 puntos por aplicar las diferentes propiedades.
- 2 puntos por concluir que las longitudes de los vectores son las mismas.

2. Considere el punto $P(2, 4, 6)$ y π el plano de ecuación $x - y + 3z = 7$

   a) Encuentre unas ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π.

   b) Encuentre una ecuación del plano que pasa por P y es paralelo al plano π.

Solución.

a) Una recta perpendicular al plano $x - y + 3z = 7$ tiene como dirección a la normal de este plano $n =< 1, -1, 3 >$, luego como debe pasar por el punto $P(2, 4, 6)$, unas ecuaciones paramétricas de la recta son $x = 2 + t, y = 4 - t, z = 6 + 3t$ con $t \in \mathbb{R}$.

b) Un plano paralelo al plano π tiene como normal, a la normal del plano π, $n =< 1, -1, 3 >$, luego una ecuación de este es de la forma

$$x - y + 3z + e = 0$$

como el punto $P(2, 4, 6)$ debe pertenecer al plano tenemos que

$$2 - 4 + 3 \cdot 6 + e = 0 \to e = -16$$

quedando la ecuación del plano $x - y + 3z - 16 = 0$.

Puntaje:

- 1 punto por determinar que la dirección de la recta debe ser $n =< 1, -1, 3 >$.
- 2 puntos por mostrar unas ecuaciones paramétricas de la recta.
- 1 punto por determinar que la normal del plano debe ser $n =< 1, -1, 3 >$.
- 2 puntos por mostrar una ecuación del plano.

3. Determine una ecuación cartesiana para el plano que consta de los puntos que son equidistantes (están a la misma distancia) de los puntos $P(2,-1,1)$ y $Q(3,1,5)$.

Solución.

a) El punto medio entre los puntos dados es $M = \dfrac{P+Q}{2} = \left(\frac{5}{2}, 0, 3\right)$ y pertenece al plano pedido. El vector $N = \overrightarrow{PM} = M - P = \left(\frac{5}{2} - 2, 0+1, 3-1\right)$ es perpendicular al plano, luego su ecuación cartesiana es de la forma

$$\frac{1}{2}x + y + 2z = d$$

reemplazando el punto $\left(\frac{5}{2}, 0, 3\right)$ resulta:

$$\frac{1}{2}x + y + 2z = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{29}{4} \Longrightarrow x + 2y + 4z = \frac{29}{2}\ .$$

Puntaje:

- 1 punto por determinar un punto que pertenezca al plano.
- 2 puntos por determinar la normal del plano.
- 3 puntos por mostrar una ecuación del plano.

b) Si $P(x,y,z)$ pertenece al plano pedido debe cumplir que

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 10z + 25$$

$$2x + 4y + 8z = 29 \Longrightarrow x + 2y + 4z = \frac{29}{2}$$

Puntaje:

- 3 punto por mostrar la condición necesaria que deben cumplir los puntos.
- 3 punto por mostrar una ecuación del plano.

4. Determine $a, b \in \mathbb{R}$ para que el sistema en variable x_1, x_2, x_3 y x_4

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 & = & -2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + ax_4 & = & b \end{array}\right|$$

a) Tenga única solución.

b) No tenga solución.

c) Tenga infinitas soluciones. En este caso hallar la solución general.

Solución. Primero buscamos la forma escalonada de la matriz ampliada del sistema

$$\begin{aligned}
(A|b) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & a & b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & a-2 & b-2 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & a-2 & b-2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & a-2 & b-4 \end{array}\right) \\
&\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & a-2 & b-4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 & b-4 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

a) Se sigue que el sistema tiene una única solución si y solo si $a \neq -2$.

b) El sistema no posee solución si $a + 2 = 0$ y $b - 4 \neq 0$.

c) El sistema posee infinitas soluciones si $a + 2 = 0$ y $b - 4 = 0$. Para estos valores, el sistema dado es equivalente con el sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 1 \\ -x_2 - x_3 & = & -1 \\ -x_3 - x_4 & = & 0 \end{array}\right|$$

de donde se obtiene: $x_4 = -x_3$, $x_2 = 1 - x_3$ y $x_1 = 0$. La solución general es el conjunto

$$S = \{(0, 1-t, t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Puntaje:

- 0.5 puntos por mostrar la matriz ampliada del sistema.
- 1.5 puntos por mostrar una forma escalonada de la matriz ampliada.
- 1 punto por encontrar la condición para a).

- 1 punto por encontrar la condición para b).
- 1 punto por encontrar la condición para c).
- 1 punto por encontrar la solución general para c).

5. Encuentre todos los valores de h para los cuales los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ h \end{bmatrix}$ son linealmente *dependientes.*

Solución.

Denote los tres vectores por a_1, a_2 y a_3, respectivamente. Quisiéramos saber cuándo la ecuación vectorial

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 0$$

tiene solución distinta de la trivial, esto ocurre si y sólo si la matriz ampliada del sistema de ecuaciones correspondiente a la ecuación vectorial, tiene menos columnas pivotes que el número de columnas correspondientes.

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \\ -4 & 6 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & h+8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & h+38 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto esto ocurre cuando $h + 38 = 0$, i.e. $h = -38$.

Puntaje:

- 1 punto por escribir el problema como un sistema homogeneo.
- 1 punto por mencionar la condición necesaria y suficiente.
- 2 puntos por calcular correctamente una forma escalonada.
- 2 puntos por encontrar h.

6. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que primero refleja los puntos a través de la recta $x_1 = x_2$ y luego los refleja a través del eje vertical x_2.

   a) Determine la matriz A tal que $T(x) = Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

   b) Argumente por que T es invertible y determine la transformación inversa $T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Solución.

a) Al aplicar el primer efecto de la transformación a e_1 queda el vector $< 0, 1 >$ y al aplicar el segundo efecto queda como $< 0, 1 >$ entonces $T(e_1) =< 0, 1 >$, al aplicar el primer efecto de la transformación a e_2 queda el vector $< 1, 0 >$ y al aplicar el segundo efecto queda como $< -1, 0 >$ entonces $T(e_2) =< -1, 0 >$, luego

$$A = (T(e_1)\ T(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Como la matriz que representa a T posee columnas linealmente independientes esta matriz es invertible por lo cual la transformación T es invertible. Y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \to T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$$

Puntaje:

- 3 puntos por encontrar la matriz de la transformación.
- 1 punto por argumentar que la transformación es invertible.
- 2 puntoa por determinar T^{-1}.

7. Sean π el plano cuya ecuación vectorial es $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$. Determine para qué valor de α la imagen de π bajo A, $A(\pi) = \left\{ A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi \right\}$, es una recta. Justifique su respuesta.

Solución.

Los vectores que pertenecen al plano π son de la forma

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Al multiplicar estos vectores por la matriz A

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_2 A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3+2\alpha \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Luego

$$A(\pi) = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3+2\alpha \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Para que $A(\pi)$ determine una recta necesitamos que el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3+2\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ sea linealmente dependiente es decir que exista un $k \in \mathbb{R}$ tal que la ecuación $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3+2\alpha \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ tenga solución, y esto se cumple solo si $\alpha = 3$

Puntaje:

- 3 puntos por encontrar $A(\pi)$.
- 1.5 puntos por argumentar que los vectores deben del ld.
- 1.5 puntos por determinar que $\alpha = 3$.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas demúestrelas y si son falsas de un contraejemplo.

   a) Si A y B son matrices de 2×2 entonces $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

   b) Si $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^2$ y A una matriz de 2×2 tal que $A \cdot e_1 = u$, $A \cdot (e_1 + e_2) = v$ entonces A es invertible.

   c) Si A es una matriz de 3×5 cuya forma escalonada reducida tiene 3 posiciones pivote, entonces la ecuación $Ax = 0$ tiene al menos una solución no trivial.

Solución.

a) Falsa.

Tomar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Además,

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esto muestra que $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$.

b) Verdadero.

Si $A = [a_1\, a_2]$ tenemos que $Ae_1 = a_1 = u$ y $A \cdot (e_1 + e_2) = a_1 + a_2 = v \to a_2 = v - u$, demostrar que A es invertible es equivalente a demostrar que sus columnas son li, es decir que $x_1 a_1 + x_2 a_2 = 0$ tiene solo la solución trivial, luego

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 = x_1 \cdot u + x_2 \cdot (v - u) = (x_1 - x_2) \cdot u + x_2 \cdot v = 0$$

como $\{u, v\}$ es li tenemos que $x_1 - x_2 = 0$ y $x_2 = 0$, por lo cual la ecuación vectorial $x_1 a_1 + x_2 a_2 = 0$ tiene solo la solución trivial.

c) Verdadero

La ecuación homogenea tiene soluciones no triviales si y sólo si tiene al menos una variable libre. Ya que 3 de los 5 variables son variables básicas, 2 son libres. Por eso, la ecuación tiene una solución no trivial.

Puntaje:

- 2 puntos por dar contraejemplo en a)
- 2 puntos por demostrar b).
- 2 puntos por demostrar c).