Pontificia Universidad Católica de Chile
Bastián Mora - bmor@uc.cl
Matías Fernández - matias.fernandez@uc.cl

MAT1107 - Introducción al Cálculo

Ayudantía 07 - Jueves 05 de mayo del 2022

Problema 1. Sea $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $e^x + e^{-x} \geq 2$.

Solución.
Como $e^x > 0$, la desigualdad es equivalente a

$$e^{2x} + 1 \geq 2e^x,$$

y, por lo tanto, equivalente a

$$e^{2x} - 2e^x + 1 \geq 0.$$

Esto último es equivalente a

$$(e^x - 1)^2 \geq 0$$

que es verdadero.

Problema 2. Usando la desigualdad de Bernoulli deduzca que

$$c^n \geq c \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, c > 1$$

Solución.
Veamos que $1 + n(c-1) \geq c$ ya que $(n-1)(c-1) \geq 0$. Luego usando la desigualdad de Bernoulli con el cambio de variable $x = c-1$ tenemos que $(1+x)^n \geq 1+nx \Leftrightarrow c^n \geq 1+n(c-1) \geq c$.

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Suponga que $f(0) \neq 0$. Demuestre que

a) $f(0) = 1$.

b) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución.

a) Observamos que $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$. Por lo tanto, $f(0) = 0$ o $f(0) = 1$. La primera alternativa está descartada por hipótesis.

b) Primero, $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$.
En segundo lugar, vemos que $1 = f(0) = f(x-x) = f(x)f(-x)$. Por lo tanto $f(-x) = f(x)^{-1}$. Luego, como $f(-x)$ está bien definida, $f(x)$ no puede ser igual a 0.

Problema 4. Sea $f : (5, \infty) \to B$ dada por $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2-9}$.

a) Determine B para que f sea sobreyectiva.

b) Pruebe que f es inyectiva.

c) Calcule f^{-1} e identifique su dominio.

Solución.

a) Notar que f es la composición de las siguientes funciones/reglas:

$$\begin{aligned} x &\mapsto x^2 \\ x &\mapsto x - 9 \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \\ x &\mapsto 1 + x \end{aligned}$$

De modo que el dominio se modifica según estas reglas: $(5, \infty) \to (25, \infty) \to (16, \infty) \to (0, \frac{1}{16}) \to (1, \frac{17}{16})$.

b) Sean $a, b \in (5, \infty)$ tales que $f(a) = f(b)$, es decir, $1 + \frac{1}{a^2-9} = 1 + \frac{1}{b^2-9}$. Desarrollando esto brevemente, obtenemos que $a^2 = b^2$ y por tanto $|a| = |b|$. Como $a, b > 0$, $a = b$, con lo que se concluye que f es inyectiva.

c) Por medio de unos breves cálculos, tenemos la siguiente equivalencia:

$$y = f(x) \iff |x| = \sqrt{\frac{1}{y-1} + 9}.$$

Y como $x > 5 > 0$, obtenemos que la inversa es $g : (1, \frac{17}{16}) \to (5, \infty)$, con $g(x) = \sqrt{\frac{1}{y-1} + 9}$.

Problema 5. Sean las funciones

$$f(x) = x + \frac{2}{x} \text{ y } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 3, x \neq 0 \\ \sqrt{x} & x \geq 3. \end{cases}$$

Determine una expresión para $g \circ f$, identificando su dominio.

Solución.
Notemos que el dominio de $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ está dado por aquellos $x \in Dom(f)$ tales que $f(x) \in Dom(g)$, de modo que la composición esté bien definida. Como el dominio de f (y también de g) es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, y además $f(x) = \frac{x^2+2}{x} \neq 0$ para todo x, entonces el dominio de $g \circ f$ es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y se tiene lo siguiente:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & f(x) < 3,\ f(x) \neq 0 \\ \sqrt{f(x)} & f(x) \geq 3. \end{cases}$$

Resolvamos ahora $f(x) < 3$ (y por ende $f(x) \geq 3$).

$$x + \frac{2}{x} < 3 \iff \frac{(x-2)(x-1)}{x} < 0$$

lo cual, usando tabla de signos (que no haré porque no sé hacerlas en *Overleaf*), tiene solución $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$ (y por tanto $f(x) \geq 3$ tiene solución $(0, 1] \cup [2, \infty)$. Así, una expresión para $(g \circ f)$ es:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+2} & x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2) \\ \sqrt{x + \frac{2}{x}} & x \in (0, 1] \cup [2, \infty) \end{cases}$$