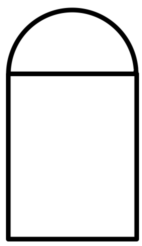
Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2020

MAT1610 - Cálculo I
Interrogación 3

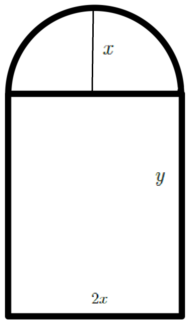
Instrucciones: Esta prueba incluye 5 problemas en total.
Desarrolle sus respuestas justificadamente.

Problema 1.
Se quiere construir el marco de una ventana con forma de un rectángulo con un semicírculo en su lado superior, como muestra la figura:



Si se necesita que el área de la ventana sea de 8 pies^2, encuentre las dimensiones de la ventana para que la cantidad de material de fabricación sea mínima. (Note que el marco de la ventana incluye al segmento horizontal donde se apoya el semicírculo).
Solución:
La cantidad de material de construcción está formada por el material para cubrir el área y el material para construir el marco de la ventana. Dado que el área está fija, la cantidad de material el material para cubrir el área de la ventana es constante, entonces se debe minimizar la cantidad de material para construir el marco de la ventana. La cantidad de material usada para construir el marco de la ventana está dada por la suma del perímetro del rectángulo y el perímetro del semicírculo.

Primera Forma :



Si se denota por $P(x,y)$ a la cantidad de material usada para construir el marco de la ventana con base del rectángulo $2x$ y altura del rectángulo y, se tiene que esta cantidad está dada por la suma del perímetro del rectángulo y el perímetro del semicírculo y puede expresarse en términos de x e y, como sigue:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \underbrace{4x+2y}_{\text{perímetro rectángulo}} + \underbrace{\frac{2\pi x}{2}}_{\text{perímetro semicírculo}} \\ &= 4x+2y+\pi x \end{aligned}$$

La función $P(x,y)$ puede escribirse en términos de x, usando la información dada sobre el área, de la cual se tiene que

$$\begin{aligned} 8 &= \underbrace{2xy}_{\text{área rectángulo}} + \underbrace{\frac{\pi x^2}{2}}_{\text{área semicírculo}} \\ &= \frac{4xy+\pi x^2}{2} \end{aligned}$$

Es decir,

$$16 = 4xy + \pi x^2$$

e

$$y = \frac{16-\pi x^2}{4x}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= 4x+2y+\pi x \\ &= 4x+2\left(\frac{16-\pi x^2}{4x}\right)+\pi x \\ &= (4+\pi)x+\frac{8}{x}-\frac{\pi}{2}x \\ &= \left(4+\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{8}{x} \\ &= \frac{1}{2}\left((8+\pi)x+\frac{16}{x}\right) \end{aligned}$$

y,

$$P'(x) = \frac{1}{2}\left((8+\pi) - \frac{16}{x^2}\right)$$

Valores críticos: $P(x)$ es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$, entonces sus valores críticos corresponde a los números tales que $P'(x)=0$

$$\begin{aligned}
P'(x)=0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left((8+\pi) - \frac{16}{x^2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow (8+\pi) - \frac{16}{x^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(8+\pi)x^2 - 16}{x^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow (8+\pi)x^2 - 16 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{16}{(8+\pi)}} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{4}{\sqrt{8+\pi}}
\end{aligned}$$

Como $P''(x) = \frac{16}{x^3} > 0$, si $x>0$, entonces $P''\left(\frac{4}{\sqrt{8+\pi}}\right) > 0$ y, por lo tanto, en $x = \frac{4}{\sqrt{8+\pi}}$ la función $P(x)$ alcanza su valor mínimo $P\left(\frac{4}{\sqrt{8+\pi}}\right)$
Valor de y:

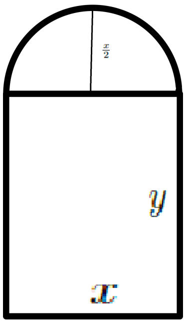
$$\begin{aligned}
y &= \frac{16-\pi x^2}{4x} \\
&= \frac{16 - \pi\left(\frac{4}{\sqrt{8+\pi}}\right)^2}{4\frac{4}{\sqrt{8+\pi}}} \\
&= \frac{16\left(1-\frac{\pi}{8+\pi}\right)}{16\frac{1}{\sqrt{8+\pi}}} \\
&= \frac{\frac{8}{8+\pi}}{\frac{1}{\sqrt{8+\pi}}} \\
&= \frac{8}{\sqrt{8+\pi}}
\end{aligned}$$

Así, las dimensiones de la ventana que hacen que la cantidad de material de fabricación sea mínima son:

$$x = \frac{4}{\sqrt{8+\pi}} \text{ pies e } y = \frac{8}{\sqrt{8+\pi}} \text{ pies}$$

Nota: La base del rectágunlo es $2x = \frac{8}{\sqrt{8+\pi}}$ pies.

Segunda Forma:



Si se denota por $P(x, y)$ a la cantidad de material usada para construir el marco de la ventana con base del rectángulo x y altura del rectángulo y, se tiene que esta cantidad está dada por la suma del perímetro del rectángulo y el perímetro del semicírculo y puede expresarse en términos de x e y, como sigue:

$$\begin{aligned} P(x,y) &= \underbrace{2x+2y}_{\text{perímetro rectángulo}} + \underbrace{\frac{2\pi\frac{x}{2}}{2}}_{\text{perímetro semicírculo}} \\ &= 2x+2y+\frac{\pi x}{2} \\ &= \frac{4x+4y+\pi x}{2} \\ &= \frac{1}{2}((4+\pi)x+4y) \end{aligned}$$

La función $P(x, y)$ puede escribirse en términos de x, usando la información dada sobre el área, de la cual se tiene que

$$\begin{aligned} 8 &= \underbrace{xy}_{\text{área rectángulo}} + \underbrace{\frac{\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}}_{\text{área semicírculo}} \\ &= xy+\pi\frac{x^2}{8} \end{aligned}$$

Es decir,

$$64 = 8xy + \pi x^2$$

e

$$y = \frac{64-\pi x^2}{8x} = \frac{8}{x} - \frac{\pi x}{8}$$

$$
\begin{aligned}
P(x) &= \frac{1}{2}((4+\pi)x + 4y) \\
&= \frac{1}{2}\left((4+\pi)x + 4\left(\frac{8}{x} - \frac{\pi x}{8}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((4+\pi)x + \frac{32}{x} - \frac{\pi x}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(4+\frac{\pi}{2}\right)x + \frac{32}{x}\right)
\end{aligned}
$$

y,

$$
P'(x) = \frac{1}{2}\left((4+\frac{\pi}{2}) - \frac{32}{x^2}\right)
$$

Valores críticos: $P(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, entonces sus valores críticos corresponde a los números tales que $P'(x) = 0$

$$
\begin{aligned}
P'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left((4+\frac{\pi}{2}) - \frac{32}{x^2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow 4 + \frac{\pi}{2} - \frac{32}{x^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{\left(4+\frac{\pi}{2}\right)x^2 - 32}{x^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(4+\frac{\pi}{2}\right)x^2 - 32 = 0 \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{32}{\left(4+\frac{\pi}{2}\right)}} \\
&\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{64}{(8+\pi)}} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{8}{\sqrt{8+\pi}}
\end{aligned}
$$

Como $P''(x) = \frac{32}{x^3} > 0$, si $x > 0$, entonces $P''\left(\frac{8}{\sqrt{8+\pi}}\right) > 0$ y, por lo tanto, en $x = \frac{8}{\sqrt{8+\pi}}$ la función $P(x)$ alcanza su valor mínimo $P\left(\frac{8}{\sqrt{8+\pi}}\right)$
Valor de y:

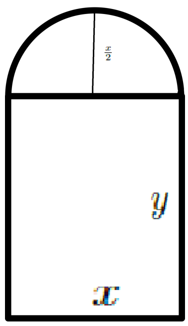
$$
\begin{aligned}
y &= \frac{8}{x} - \frac{\pi x}{8} \\
&= \frac{8}{\frac{8}{\sqrt{8+\pi}}} - \frac{\pi \frac{8}{\sqrt{8+\pi}}}{8} \\
&= \sqrt{8+\pi} - \frac{8\pi}{\sqrt{8+\pi}} \\
&= \frac{8+\pi-\pi}{\sqrt{8+\pi}} \\
&= \frac{8}{\sqrt{8+\pi}}
\end{aligned}
$$

Así, las dimensiones de la ventana que hacen que la cantidad de material de fabricación sea mínima son:

$$x = \frac{8}{\sqrt{8+\pi}} \text{ pies e } y = \frac{8}{\sqrt{8+\pi}} \text{ pies}$$

Nota: La el radio del semicírculo es $\frac{x}{2} = \frac{4}{\sqrt{8+\pi}}$ pies

Tercera Forma:



Dado que, el radio del semicírculo es proporcional a x, su perímetro y área están definidos de manera única para cada valor fijo de longitud de la base del rectángulo. Por lo tanto, la cantidad de material a minimizar corresponde al perímetro de un rectángulo de área fija. Se tiene que

$$8 = \underbrace{A_R}_{\text{área rectángulo}} + \underbrace{A_S}_{\text{área semicírculo}}$$

Entonces, se debe minimizar el perímetro del rectángulo sujeto a que su área es A_R. La respuesta a este problema es que el rectágulo debe ser un cuadrado de lado $\sqrt{A_R}$, se obtiene como sigue,

Se denota por $P(x, y)$ a la cantidad de material (perímetro) usada para construir el marco del rectángulo de la ventana con base del rectángulo x y altura del rectángulo y, se tiene que

$$
\begin{aligned}
P(x, y) &= \underbrace{2x + 2y}_{\text{perímetro rectángulo}} \\
&= 2x + 2y
\end{aligned}
$$

La función $P(x,y)$ puede escribirse en términos de x, usando que $A_R = xy$, es decir,

$$y = \frac{A_R}{x}$$

$$P(x) = 2x + 2\frac{A_R}{x}$$

y,

$$P'(x) = 2 - 2\frac{A_R}{x^2}$$

Valores críticos: $P(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, entonces sus valores críticos corresponde a los números tales que $P'(x) = 0$

$$\begin{aligned} P'(x) = 0 &\Leftrightarrow 2 - 2\frac{A_R}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{A_R}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - A_R}{x^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - A_R = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{A_R} \end{aligned}$$

Como $P''(x) = \frac{4A_R}{x^3} > 0$, si $x > 0$, entonces $P''\left(\sqrt{A_R}\right) > 0$ y, por lo tanto, en $x = \sqrt{A_R}$ la función $P(x)$ alcanza su valor mínimo $P\left(\sqrt{A_R}\right)$
Valor de y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{A_R}{x} \\ &= \frac{A_R}{\sqrt{A_R}} \\ &= \sqrt{A_R} \end{aligned}$$

Entonces, $8 = A_R + A_S = xy + \pi\frac{x^2}{8} = \sqrt{A_R}\sqrt{A_R} + \pi\frac{\left(\sqrt{A_R}\right)^2}{8} = A_R\left(1 + \frac{\pi}{8}\right)$ y por lo tanto, $A_R = \frac{8}{1+\frac{\pi}{8}} = \frac{64}{8+\pi}$, $x = y = \sqrt{A_R} = \sqrt{\frac{64}{8+\pi}} = \frac{8}{\sqrt{8+\pi}}$

Así, las dimensiones de la ventana que hacen que la cantidad de material de fabricación sea mínima son:

$$x = \frac{8}{\sqrt{8+\pi}} \text{ pies e } y = \frac{8}{\sqrt{8+\pi}} \text{ pies}$$

Nota: La el radio del semicírculo es $\frac{x}{2} = \frac{4}{\sqrt{8+\pi}}$ pies

Distribución de puntaje.

- **(0.5 punto)** Por definir variables del problema (puede ser gráficamente).
- **(1 punto)** Por determinar función en dos variables a optimizar.
- **(1 punto)** Por determinar una relación válida entre la dos variables de la función.
- **(1 punto)** Por determinar función en una variable a optimizar.
- **(1 punto)** Por determinar valor crítico.
- **(1 punto)** Por mostrar que en el valor crítico se alcanza el valor mínimo.
- **(0.5 punto)** Por concluir correctamente (dimensiones en unidades correctas).

Problema 2.
Demuestre la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{28}}\leq\int_1^3\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx\leq\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Solución: Usando siguiente
Teorema: Para f continua en el intervalo $[a,b]$ se cumple que $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\leq M(b-a)$, donde m y M son el valor mínimo absoluto y el valor máximo absoluto de f en $[a,b]$, respectivamente.
Sea $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$
Considerando el intervalo $[a,b]=[1,3]$, se tiene que, como f es decreciente en dicho intervalo, $M=f(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b-a=3-1=2$ y, por lo tanto, usando el teorema,

$$\int_1^3\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx\leq\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Por otra parte, como $\int_1^3\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$
Tomando el intervalo $[a,b]=[1,2]$, se tiene que, como f es decreciente en dicho intervalo, $m=f(2)=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$, $b-a=2-1=1$ y, por lo tanto, usando el teorema,

$$\frac{1}{3}\leq\int_1^2\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$$

Tomando el intervalo $[a,b]=[2,3]$, se tiene que, como f es decreciente en dicho intervalo, $m=f(3)=\frac{1}{\sqrt{28}}$, $b-a=2-1=1$ y, por lo tanto, usando el teorema,

$$\frac{1}{\sqrt{28}}\leq\int_2^3\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$$

Así,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{28}}\leq\int_1^2\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx+\int_2^3\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx=\int_1^3\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{\sqrt{28}}\leq\int_1^3\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx\leq\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Distribución de puntaje.

- **(2 puntos)** Por acotar superiormente (cota indicada) la integral de 1 a 3 de f.
- **(1 punto)** Por escribir la integral de 1 a 3 de f como la suma de la integral de 1 a 2 de f y la integral de 2 a 3 de f .
- **(1 punto)** Por acotar inferiormente la integral de f en el intervalo $[1,2]$.
- **(1 punto)** Por acotar inferiormente la integral de f en el intervalo $[2,3]$.
- **(1 punto)** Por acotar inferiormente (cota indicada) la integral en el intervalo $[1,3]$. (Si obtiene cota inferior de manera correcta, usando un procedimiento diferente al expuesto aquí, asignar también el puntaje de los tres items anteriores)

Problema 3.

Calcule el siguiente límite justificando cada paso:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_{x^2}^{x^3}\cos(\sqrt[3]{1+t^2})dt$$

Solución
Note que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_{x^2}^{x^3}\cos(\sqrt[3]{1+t^2})dt=\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\cos(\sqrt[3]{1+t^2})dt}{x^2}$$

por lo que se tiene que cuando x tiende a 0, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.
La función $x\mapsto x^2$ (denominador) en continua y derivable en $\mathbb{R}$,
Por otra parte, como $\cos(\sqrt[3]{1+t^2})$ es continua en $\mathbb{R}$, por el Teorema Fundamental del Cáculo (TFC), la función $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\cos(\sqrt[3]{1+t^2})dt$ (numerador) es continua y derivable en $\mathbb{R}$
Lo antes expuesto demuestra que se cumple la hipótesis de la regla de L'Hopital, por lo cual la misma puede aplicarse para calcular el límite. Para ello, se requerirá la derivada del numerador y la derivada del denominador. Para obtener la derivada del numerador, se usa el TFC.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{x^3}\cos(\sqrt[3]{1+t^2})dt\right) &= \frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{u}\cos(\sqrt[3]{1+t^2})dt\right)\Bigg|_{u=x^3}\frac{d}{dx}\left(x^3\right)\\ &- \frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{u}\cos(\sqrt[3]{1+t^2})dt\right)\Bigg|_{u=x^2}\frac{d}{dx}\left(x^2\right)\\ &= \cos(\sqrt[3]{1+x^6})3x^2-\cos(\sqrt[3]{1+x^4})2x\\ &= \cos(\sqrt[3]{1+x^6})3x^2-\cos(\sqrt[3]{1+x^4})2x\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\cos(\sqrt[3]{1+t^2})dt\right)}{\frac{d}{dx}x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt[3]{1+x^6})3x^2-\cos(\sqrt[3]{1+x^4})2x}{2x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}x\cos(\sqrt[3]{1+x^6})-\cos(\sqrt[3]{1+x^4})\\ &= \frac{3}{2}\cdot 0\cdot\cos\left(\sqrt[3]{1}\right)-\cos\left(\sqrt[3]{1}\right)\\ &= -\cos(1)\end{aligned}$$

Así, existe el límite y

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\cos(\sqrt[3]{1+t^2})dt\right)}{\frac{d}{dx}x^2}=-\cos(1)$$

y, por la regla de L'Hopital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \cos(\sqrt[3]{1+t^2})dt}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \cos(\sqrt[3]{1+t^2})dt\right)}{\frac{d}{dx}x^2} = -\cos(1)$$

Distribución de puntaje.

- **(0.5 punto)** Por indicar que se tiene indeterminación 0/0.
- **(1 punto)** Por verificar resto de la hipótesis Regla de LHopital.
- **(2.5 puntos)** Por determinar derivada del numerador usando TFC.
- **(1.5 punto)** Por calcular límite (procedimiento correcto).
- **(0.5 punto)** Por obtener resultado correcto.

Problema 4.

Calcule la siguiente integral indefinida.

$$\underbrace{\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\ln\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)dx}_{I}$$

Ayuda: Realice primero un cambio de variable.
Solución:
Una forma:
Note que

$$I = \int \sin^2(x)\cos(x)\ln\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)dx = -\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\ln\left(\operatorname{sen}(x)\right)dx$$

Entonces, haciendo la sustitución $t = \operatorname{sen}(x)$, se tiene que $dt = \cos(x)dx$ y por lo tanto,

$$I = -\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\ln\left(\operatorname{sen}(x)\right)dx = -\underbrace{\int t^2\ln(t)\,dt}_{I_1} = -I_1$$

Ahora, integrando por partes en la integral I_1,
$u = \ln(t) \quad du = \frac{1}{t}dt$
$dv = t^2dt \quad v = \frac{t^3}{3}$
Entonces,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int t^2\ln(t)\,dt \\
&= \int \underbrace{\ln(t)}_{u}\underbrace{t^2dt}_{dv} \\
&= \ln(t)\frac{t^3}{3} - \int \frac{t^3}{3}\frac{1}{t}dt \\
&= \ln(t)\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}\int t^2dt \\
&= \ln(t)\frac{t^3}{3} - \frac{1}{3}\frac{t^3}{3} + C \\
&= \frac{t^3}{3}\left(\ln(t) - \frac{1}{3}\right) + C \\
&= \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3}\left(\ln\left(\operatorname{sen}(x)\right) - \frac{1}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)\ln\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\right)dx = -\frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3}\left(\ln\left(\operatorname{sen}(x)\right) - \frac{1}{3}\right) + C$$

Otra forma:
Haciendo la sustitución $t = \text{sen}(x)$, se tiene que $dt = \cos(x)dx$ y por lo tanto,

$$I = \int \text{sen}^2(x)\cos(x)\ln\left(\frac{1}{\text{sen}(x)}\right)dx = \underbrace{\int t^2 \ln\left(\frac{1}{t}\right)dt}_{I_1} = I_1$$

Ahora, integrando por partes en la integral I_1,
$u = \ln\left(\frac{1}{t}\right) \quad du = \frac{1}{\frac{1}{t}}\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt = -\frac{1}{t}dt$
$dv = t^2dt \qquad v = \frac{t^3}{3}$
Entonces,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int t^2 \ln\left(\frac{1}{t}\right)dt \\
&= \int \underbrace{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}_{u}\underbrace{t^2dt}_{dv} \\
&= \ln\left(\frac{1}{t}\right)\frac{t^3}{3} + \int \frac{t^3}{3}\frac{1}{t}dt \\
&= \ln\left(\frac{1}{t}\right)\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}\int t^2dt \\
&= \ln\left(\frac{1}{t}\right)\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}\frac{t^3}{3} + C \\
&= \frac{t^3}{3}\left(\ln\left(\frac{1}{t}\right) + \frac{1}{3}\right) + C \\
&= \frac{\text{sen}^3(x)}{3}\left(\ln\left(\frac{1}{\text{sen}(x)}\right) + \frac{1}{3}\right) + C
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \text{sen}^2(x)\cos(x)\ln\left(\frac{1}{\text{sen}(x)}\right)dx = \frac{\text{sen}^3(x)}{3}\left(\ln\left(\frac{1}{\text{sen}(x)}\right) + \frac{1}{3}\right) + C$$

Nota: Este resultado es equivalente al anterior, basta usar propiedad de logaritmo.

Distribución de puntaje.

- **(2 puntos)** Por aplicar correctamente regla de sustitución.
- **(1 punto)** Por elegir correctamente funciones para integración por partes.
- **(1.5 punto)** Por aplicar correctamente integración por partes.
- **(1 punto)** Por devolver el cambio de variable.
- **(0.5 punto)** Por obtener resultado correcto (debe incluir constante de integración).
(Si resuelve correctamente con procedimiento diferente, asignar todo el puntaje)

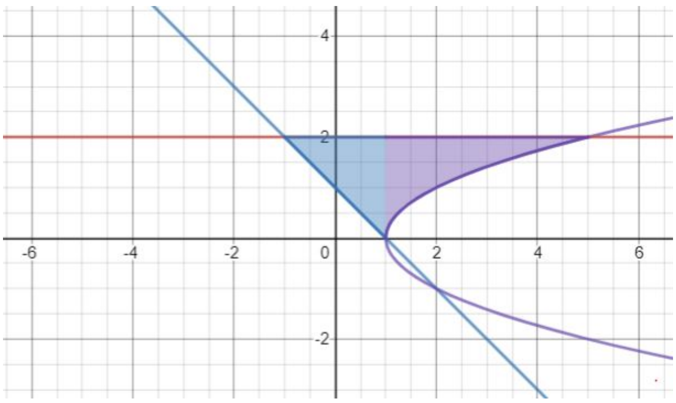
Problema 5.

La región acotada por las curvas $y^2 = x - 1$, $y = 2$ y $x + y = 1$ gira en torno a la recta $y = 2$ generando un sólido de revolución. Determine justificadamente:

a) El área de la región encerrada.

b) El volumen del sólido.

Solución:
Intersección entre las curvas $y^2 = x - 1$, $y = 2$: Si $y = 2$, entonces $4 = x - 1$, es decir, $x = 5$, punto $(5, 2)$
Intersección entre las curvas $x + y = 1$, $y = 2$: Si $y = 2$, entonces $x + 2 = 1$, es decir, $x = -1$, punto $(-1, 2)$
Intersección entre las curvas $y^2 = x - 1$, $x + y = 1$: Si $x + y = 1$, entonces $x = 1 - y$, es decir, $y^2 = -y$ o $y^2 + y = y(y + 1) = 0$, entonces $y = 0$ o $y = -1$, para este caso corresponde $y = 0$, $x = 1 - y = 1$, punto $(1, 0)$.
Gráfica:



a) **Una forma**
Integrando respecto de y, el área puede calcularse como:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 \big(y^2 + 1 - (1 - y)\big)\, dy \\ &= \int_0^2 \big(y^2 + y)\big)\, dy \\ &= \left[\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_0^2 \\ &= \left[\frac{8}{3} + 2 - (0)\right] \\ &= \frac{8}{3} + 2 \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Así, el área es $A = \frac{14}{3}$ unidades de área.

Otra forma
Integrando respecto de x, el área puede calcularse como:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1} (2-(1-x))\,dx + \int_{1}^{5} \left(2-\sqrt{x-1}\right)dx \\
&= \int_{-1}^{1} (1+x)\,dx + \int_{1}^{5} \left(2-\sqrt{x-1}\right)dx \\
&= \left[x+\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{-1}^{1} + \left[2x-\frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3}\right]\Bigg|_{1}^{5} \\
&= \left[\frac{3}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right] + \left[10-\frac{16}{3}-2\right] \\
&= 2+\frac{8}{3} \\
&= \frac{14}{3}
\end{aligned}$$

Así, el área es $A=\frac{14}{3}$ unidades de área.
Nota: El área del triángulo (área en azul) puede obtenerse como $A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{2\cdot 2}{2}=2$ unidades de área.

b) **Una forma:**

$$\begin{aligned}
V &= \int_{0}^{2} (2\pi(2-y)(y^2+1-(1-y))dy \\
&= 2\pi\int_{0}^{2} (2-y)(y^2+y)dy \\
&= 2\pi\int_{0}^{2} \left(-y^3+y^2+2y\right)dy \\
&= 2\pi\left[-\frac{y^4}{4}+\frac{y^3}{3}+y^2\right]\Bigg|_{0}^{2} \\
&= 2\pi\left[-\frac{16}{4}+\frac{8}{3}+4-0\right] \\
&= \frac{16\pi}{3}
\end{aligned}$$

Así el volumen es $\frac{16\pi}{3}$ unidades de volumen.

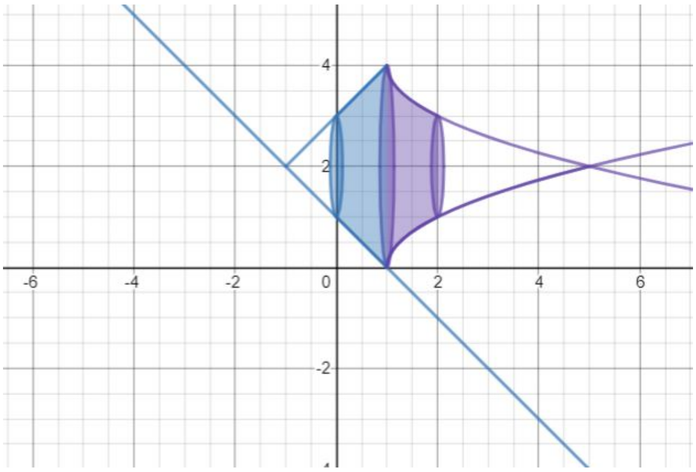
Otra forma:

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 \\
&= \int_{-1}^{1} \pi\,(2-(1-x))^2\,dx + \int_{1}^{5} \pi\left(2-\sqrt{x-1}\right)^2 dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (1+x)^2\,dx + \pi \int_{1}^{5} \left(2-\sqrt{x-1}\right)^2 dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (1+x)^2\,dx + \pi \int_{1}^{5} \left(4-4\sqrt{x-1}+x-1\right) dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (1+x)^2\,dx + \pi \int_{1}^{5} \left(3-4\sqrt{x-1}+x\right) dx \\
&= \pi \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{1} + \pi\left[3x - \frac{8\sqrt{(x-1)^3}}{3} + \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{1}^{5} \\
&= \pi\left[0 - \frac{(-2)^3}{3}\right] + \pi\left[15 - \frac{64}{3} + \frac{25}{2} - \left(3 - 0 + \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{8\pi}{3} + \pi\frac{8}{3} \\
&= \frac{16\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Así el volumen es $\frac{16\pi}{3}$ unidades de volumen.

Nota: El volumen del cono(sólido en azul) puede obtenerse como $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 2^2 \underbrace{(1-(-1))}_{h} = \frac{8\pi}{3}$ unidades de volumen.

Idea gráfica:



Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por determinar los puntos de intersección entre las curvas.
- **(1 punto)** Por expresar el área en términos de integral(es) definida(s).
- **(1 punto)** Por resolver la(s) integral(es) definida(s) asociadas al área.
- **(0.5 punto)** Por determinar resultado correcto del área.
- **(1 punto)** Por expresar el volumen en términos de integral(es) definida(s).
- **(1 punto)** Por resolver la(s) integral(es) definida(s) asociadas al volumen.
- **(0.5 punto)** Por determinar resultado correcto del volumen.