PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I2 MAT1203 - Algebra Lineal
Octubre, 2017

PROBLEMAS CUADERNILLO 1

1. Determine condiciones en a para que $A = \begin{pmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3a-1 \\ 0 & 1 & a-1 & 2a-1 \\ a & 2a & 0 & a \end{pmatrix}$ sea invertible

Solución:

$$\begin{bmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3a-1 \\ 0 & 1 & a-1 & 2a-1 \\ a & 2a & 0 & a \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{bmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3a-1 \\ 0 & 1 & a-1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - F_2} \begin{bmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

1 pto método
1 pto resultado correcto

Para que A tenga inversa al escalonar debe obtenerse 4 pivotes y esto sucede sólo si $a \neq 0$, $a-1 \neq 0$
1 pto 1.5 pts 1.5 pts

Alternativa:

- $\mathrm{Det}(A) = (a-1)a^2$ (1 pto método 1 pto resultado correcto)
- A tiene inversa $\iff \det(A) \neq 0 \iff a-1 \neq 0,\ a \neq 0.$
1 pto 1.5 pts 1.5 pts

Nota: No asignar pts por resultados correctos si no están precedidos por métodos/razonamientos correctos.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$. Escriba a A como el producto de matrices elementales (muestre explícitamente las matrices elementales).

<u>Método I</u>:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - 2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow F_2 + 4F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftarrow F_1 - 3F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 \leftarrow \frac{F_3}{-1}]{F_2 \leftarrow \frac{F_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2 pts por método correcto.

Por lo tanto

0.3 pts por cada matriz elemental E_i $(i=1 \to 6)$ $\Rightarrow$ 1.8 pts

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{E_6} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_5} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_4} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_3} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} A = \mathbb{I}$$

$\therefore \quad E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A = \mathbb{I}$

$\therefore \quad A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} E_4^{-1} E_5^{-1} E_6^{-1}$ 1.2 pts

0.3 por cada matriz elemental $\Rightarrow$ 1.8 pts

$$\therefore \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- El orden en el producto no es único. Se indica con $\leftrightarrow$ los que se pueden conmutar
- Si se permutan filas se obtiene una factorización diferente.

3. a) Demuestre que si las columnas de B son linealmente dependientes entonces las columnas de AB son linealmente dependientes

b) Demuestre que si B^t es la inversa de A^2 entonces B es la inversa de $(A^t)^2$

a) Alternativa 1)

- Columnas de B son LI $\iff \exists x \neq 0$ tal que $Bx = \vec{0}$ 1pto
- Pero $Bx = 0 \Rightarrow A(Bx) = A0 = 0$ 1pto
- $\therefore (AB)x = A(Bx) = 0$ 1pto

$\therefore$ Las columnas de AB son L.D.

Alternativa 2)

- Sea $B = [b_1\ b_2 \ldots b_n]$ $\quad b_i = $ col i de B.
- Si las cols de B son LD entonces existen x_i no todos nulos tal que $x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n = 0$ 1pto
- $\therefore A(x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n) = A0 = 0$ 1pto

$x_1 Ab_1 + \cdots + x_n Ab_n = 0$ (Por linealidad de A)

$\therefore$ Las columnas de A son LD. 1pto

b) B^t es la inversa de $A^2 \iff B^t A^2 = I$ 1pto

$\therefore (B^t A^2)^t = I^t = I$ 0.5 pt

$\therefore (A^2)^T (B^t)^T = I$ 0.5 pts

$\therefore (A^T)^2 B = I$ 0.5 pts

$\therefore B$ es la inversa de $(A^T)^2$. 0.5 pts

Alternativa:

Puesto que $(C^{-1})^T = (C^T)^{-1}$ tenemos que

$(A^2)^{-1} = B^T \Rightarrow ((A^2)^{-1})^T = (B^T)^T = B$. 1pto

$\Rightarrow ((A^2)^T)^{-1} = B$ 1pto

$\Rightarrow ((A^T)^2)^{-1} = B \quad \therefore B$ es la inversa de $(A^T)^2$ 1pto

4. Sea $A = LU$ donde

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando esta factorización, y sin calcular explícitamente A, A^T, ni la inversa de ninguna matriz resuelva $A^T x = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix}$

Sol:

- $A = LU \Rightarrow A^T = (LU)^T = U^T L^T$
- $A^T x = b \iff U^T \underbrace{L^T x}_{y} = b \iff \begin{cases} U^T y = b \\ L^T x = y. \end{cases}$ 2pts por método
- Resolvemos primero $U^T y = b$ y luego resolvemos $L^T x = b$
- $U^T y = b \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & +1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix} \iff \begin{aligned} -y_1 &= 1 \\ 2y_1 - 2y_2 &= -12 \\ y_1 + y_2 + y_3 &= 4 \end{aligned}$

$-y_1 = 1 \Rightarrow y_2 = \dfrac{2y_1 + 12}{2} = 5 \Rightarrow y_3 = 4 - (y_1 + y_2) = 4 - (5-1) = 0$

$\therefore\ y = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ 2pts

$L^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ x_2 + x_3 &= 5 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore\ x_3 = 0,\ x_2 = 5,\ x_1 = -1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 + 2 \cdot 5 = 9.$

$\therefore\ x = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ 2pts

Nota: Descontar 1pts si hay errores aritméticos menores y el método es correcto.

PROBLEMAS CUADERNILLO 2

5. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Determine una factorización $A = LU$ y en base a este resultado calcule $det(A)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1 pto (método)

$\therefore A = LU$ con $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 1.5 pts $\quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 1.5 pts

$|L| = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$ 0.5 pts

$|U| = 1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 8$ 0.5 pts

$\therefore |A| = |LU| = |L||U| = 1\cdot 8 = 8$ 1 pto

Nota: Si la matriz L, U se obtienen sólo realizando los primeros pivoteos y luego L, U se obtienen "deduciendo" por regularidad de los resultados preliminares no asignar la puntuación por L y U.—

6. *a*) Sea A matriz de $n \times n$ tal que $det(A) = -4$.

(i) Sea B la matriz que se obtiene al multiplicar a A por la derecha por $2(A^T)^{-1}A^3$. Calcule $det(B)$.

iv) Sea C la matriz que se obtiene de A multiplicando la segunda fila por -2, luego intercambiando las filas 1 y 3 y finalmente multiplicando la primera columna por 1/3. Calcule $det(C)$.

b) Calcule la inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ por el método de la matriz adjunta.

a) i) $B = A\, 2(A^T)^{-1} A^3$

$|B| = |A\, 2(A^T)^{-1}A^3| = 2^n\, |A|\, |(A^T)^{-1}|\, |A^3|$ 0.6 pts

Pero: $\cdot\ |A^3| = |A A A| = |A||A||A| = |A|^3$ 0.3 pts

$\cdot\ |(A^T)^{-1}| = \frac{1}{|A^T|} = \frac{1}{|A|}$ 0.3 pts

$\therefore |B| = 2^n \frac{|A|}{|A|} \cdot |A|^3 = 2^n |A|^3 = 2^n \cdot (-4)^3$ 0.3 pts

$= -2^{n+6}$

ii) • Al multiplicar una fila por -2 se multiplica el determinante de la matriz por -2 0.3 pts

• " " " col " 1/3 " " , 0.3 pts

• " " " " " por 1/3. 0.3 pts

• Al intercambiar filas se cambia el signo del determinante. 0.3 pts

$\therefore |C| = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1) \cdot (-4) = -\frac{8}{3}$. 0.3 pts

b) $A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|} = \frac{(\text{matriz de cofactores})^T}{|A|}$

1pto por aplicar la fórmula (No hay puntos si no la aplica))

$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -3 + 2 = -1$

0.5 pts

$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T}{|A|} = \frac{\begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T}{-1}$

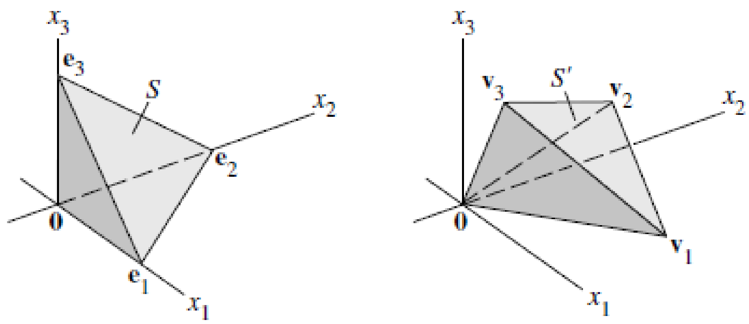
1pto

$= \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

0.5 pts

Los puntos son indivisibles.

7. Sea S el tetraedro en $\mathbb{R}^3$ con vértices en los vectores $\vec{0}, \vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ y sea S' el tetraedro con vértices en los vectores $\vec{0}, \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Véase la figura



a) Determine la matriz A que respresenta a la transformación lineal tal que $T(S) = S'$

b) Dado que el volumen de S es $1/6$ determine el volumen del tetraedro S'

a) $\left.\begin{matrix} A e_1 = v_1 & A e_2 = v_2 & A e_3 = v_3 \end{matrix}\right\}$ 1.5 pts $\Rightarrow A = [v_1 v_2 v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 1.5 pts

b) $\mathrm{Vol}(S') = \mathrm{Vol}(S) \cdot \big| |A| \big|$

$= \frac{1}{6} \cdot \big| |A| \big|$ 1.5 pts

Pero $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 2 - 2 + 4 = 4.$ 1 pto

$\therefore \mathrm{Vol}(S') = \frac{1}{6} \cdot |4| = \frac{4}{6}.$ 0.5 pts

Nota: También es posible tomar $A(e_2) = v_1$, $A(e_1) = v_3$, $A(e_3) = v_2$ con lo cual cambia el orden de las columnas de A. y $\det(A)$ podría cambiar de signo.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justicación adecuada no tiene puntos):

   a) [**2 pts.**] Si A es una matriz de 3×3 y la ecuación $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ tiene infinitas soluciones, entonces $det(A) \neq 0$.

   b) [**2 pts.**] Si A es de 7×3 entonces $A\,A^T$ es simétrica de 7×7

   c) [**2 pts.**] Si $B^2 - 2B - 3I = 0$ entonces B tiene inversa

a) Si $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ tiene infinitas soluciones y A es de 7x3

entonces A no tiene inversa $\therefore |A| = 0$

$\therefore$ ES FALSA

2 pts

b) . A de 7x3 $\Rightarrow$ A^T es de 3x7 $\therefore$ AA^T es de $(7\times3)(3\times7) = 7\times7$.

. $C = AA^T \Rightarrow C^T = (AA^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = AA^T = C$

Como $C^T = C$, $C = AA^T$ es simétrica

ES VERDADERO

2 pts

c) $B^2 - 2B - 3I = 0 \Rightarrow B^2 - 2B = 3I$

$\Rightarrow (B - 2I)B = I$

$\Rightarrow \left(\frac{B - 2I}{3}\right) B = I$

2 pts

$\therefore$ $\frac{B-2I}{3}$ es la inversa de B

ES VERDADERO

$\therefore$ B tiene inversa

Bajar un punto si $\frac{B-2}{3}$ es la inversa de B.

a) b) c) Requieren demostraciones para asignar los puntos