PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Examen MAT1203 - 17 de diciembre

1. *a*) Sean A y B matrices. Si $\text{Im}(B)$ está contenida en $\text{Nul}(A)$, entonces el producto AB es la matriz nula.

   Solución:

   La afirmación es verdadera.

   Sea v un vector columna de B. Se tiene que $v \in \text{Im}(B)$.

   Como $\text{Im}(B)$ está contenida en $\text{Nul}(A)$, entonces $v \in \text{Nul}(A)$.

   Luego Av es el vector cero.

   Entonces AB es una matriz tal que todas sus columnas son el vector cero, por lo tanto es la matriz nula.

b) En el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a tres, el conjunto

$$\{1 - t + t^3, 1 + t + 2t^2 - t^3, 1 - t - 4t^2, 3t^3\},$$

es un conjunto linealmente independiente.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Se construye una matriz cuyas columnas son los vectores coordenados de los polinomios del conjunto respecto a la base canónica $\{1, t, t^2, t^3\}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Se escalona esta matriz para contar el número de pivotes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como quedan 4 pivotes, los vectores coordenados de los polinomios son L.I. por lo tanto los polinomios del conjunto son L.I.

2. *a*) Sea A matriz cuadrada de 2×2. Si $\text{Det}(A) = 5$, entonces $\text{Det}(3A) = 15$.

Solución:

La afirmación es falsa.

Si $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ se tiene que $\text{Det}(A) = 5$.

Entonces $3A = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $\text{Det}(3A) = 45 \neq 15$.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $a > 1$, entonces la matriz $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ es definida positiva.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Los determinantes de las submatrices principales son:

$\text{Det}(A_1) = a$, $\text{Det}(A_2) = a^2 - 1$ y $\text{Det}(A_3) = (a-1)^2$.

Si $a > 1$ entonces $a > 0$, $a^2 - 1 > 0$ y $(a-1)^2 > 0$.

Por lo tanto A es definida positiva.

3. *a*) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$. Si $b \neq 0$, entonces A es diagonalizable.

Solución:

La afirmación es falsa.

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ con $a = c = 0$ y $b \neq 0$.

$\mathrm{Det}(A - xI) = x^2$ y entonces A tiene solo el valor propio 0.

El espacio propio es $\mathrm{Nul}(A - 0I) = \mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Como solo hay un vector propio L.I. y la matriz es de 2×2, entonces la matriz no es diagonalizable.

b) Sea A una matriz de 3×3. Si

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ y } A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces A es diagonalizable.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Del enunciado el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio asociado al valor propio 2 y los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son vectores propios asociados al valor propio 0.

Entonces se tiene tres vectores propios L.I. pues:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ tiene determinante $-1 \neq 0$.

4. *a*) Sea U subespacio de dimensión 1 en $\mathbb{R}^3$. Si P es la matriz de proyección sobre U, entonces P es invertible.

Solución:

La afirmación es falsa.

Sea $U = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ subespacio de $\mathbb{R}^3$. U tiene dimensión 1.

Sea A la matriz cuyas columnas forman una base de U, es decir $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Entonces la matriz de proyección sobre U es $P = A(A^T A)^{-1} A^T$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (1)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que es no invertible pues tiene determinante 0.

b) El mínimo de la norma entre el vector cero y todos los vectores del hiperplano de ecuación $x_1 + x_2 - x_4 = 1$, es 1.

Solución:

La afirmación es falsa.

El mínimo de la norma entre el vector cero y todos los vectores del hiperplano de ecuación $x_1 + x_2 - x_4 = 1$, se escribe como:

$$\min_{x_1+x_2-x_4=1} \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|.$$

Es decir:

$$\min \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|.$$

Escribiendo el problema como un problema de mínimos cuadrados queda:

$$\min \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|.$$

Entonces el sistema inconsistente es $Ax = b$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Se resuelve $A^T A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^T b$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución es $x_1 = \dfrac{1}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$ y $x_3 = 0$. Reemplazando:

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\frac{1}{3}} \neq 1.$$