Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

EYP1026 - MODELOS PROBABILÍSTICOS
Ayudantía N°6

Profesor: Guido del Pino
Ayudante: José Quinlan
Fecha: 14 de Septiembre - 2016

1. Sea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ una colección de variables aleatorias *i.i.d* del tipo Bernoulli(p) : $p \in (0,1)$. Considere $r \in \mathbb{N}$ fijo y defina las siguientes variables aleatorias (discretas):
$$T = \text{mín}\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n = 1\}$$
$$Z = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : X_0 + \cdots + X_{n-1} = r-1, X_n = 1\}.$$
Deduzca las distribuciones de T y Z. Compruebe que sus funciones de probabilidad puntual son legítimas.
Recordatorio: Mediante el Teorema de Taylor
$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} x^k : |x| < 1$$

2. Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}$. Una variable aleatoria X_T posee distribución de Poisson truncada en 0 si $\text{Rec}(X_T) = \text{Rec}(X) - \{0\} = \mathbb{N}$ y su función de probabilidad puntual satisface:
$$\mathbb{P}(X_T = k) = \frac{\mathbb{P}(X=k)}{\mathbb{P}(X>0)} : k \in \mathbb{N}.$$
   a) Deduzca la distribución de X_T.
   b) Calcule $\text{E}[X_T]$ y $\text{Var}[X_T]$.

3. Se dice que una variable aleatoria discreta X posee una distribución del tipo logarítmica con parámetro $p \in (0,1)$ si $\text{Rec}(X) = \mathbb{N}$ y su función de probabilidad puntual satisface:
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{-(1-p)^k}{\log(p)k} : k \in \mathbb{N}$$
   a) Corrobore que dicha distribución induce una función de probabilidad puntual legítima.
   b) Calcule $\text{E}[X]$ y $\text{Var}[X]$.

   Recordatorio: Mediante el Teorema de Taylor
$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} : |x| < 1.$$

4. Sea $f(x) : x \in \mathbb{R}$ una densidad de probabilidad con media $\mu \in \mathbb{R}$, varianza $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ y $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > 0\} = \mathbb{R}$. Proponga un estrategia para crear una familia de distribuciones de localización/escala $\mathcal{F}$ a partir de f, de manera que la densidad de probabilidad estándar $f_0(x) : x \in \mathbb{R}$ (generador de $\mathcal{F}$) posea media 0 y varianza 1.
Aplique lo anterior para la siguiente densidad de probabilidad:
$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2b} \exp\Big\{ -\sqrt{2}\Big|\frac{x-a}{b}\Big|\Big\} : x \in \mathbb{R}$$
con $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.