Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2016

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución a la Interrogación N° 1

1. Encuentre un punto y una dirección de la recta dada por la intersección de los planos de ecuaciones $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ y $x_1 - x_2 = 3$, y úselos para encontrar las ecuaciones simétricas de dicha recta.

   Primera Solución:

   Para encontrar un punto en la intersección de los dos planos, reemplazamos una de las variables (por ejemplo x_3) por un valor arbitrario, por ejemplo $x_3 = 0$, y resolvemos el sistema resultante:

   $$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 &=& 2 \\ x_1 - x_2 &=& 3 \end{array}\right|$$

   Como la solución de este sistema es $x_1 = 5/2$, $x_2 = -1/2$, un punto en la intersección de los dos planos es $(x_1, x_2, x_3) = (5/2, -1/2, 0)$.

   Para encontrar una dirección de la recta, nos basta encontrar otro punto, lo que puede ser hecho reemplazando x_3 por otro valor, por ejemplo, $x_3 = 1$, que lleva al sistema

   $$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 &=& 1 \\ x_1 - x_2 &=& 3 \end{array}\right|$$

   que tiene por solución $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, lo que nos da el punto $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 1)$.

   Así, finalmente, la dirección de la recta está dada por el vector $(5/2, -1/2, 0) - (2, -1, 1) = (1/2, 1/2, -1)$, o equivalentemente, por el vector $\overrightarrow{\mathbf{d}} = (1, 1, -2)$.

   Del punto y la dirección obtenemos las ecuaciones simétricas de la recta:

   $$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{1-z}{2}.$$

   Segunda Solución:

   También es posible resolver el sistema en general (escalonando la matriz, llegando a la solución general

   $$\left.\begin{array}{rcl} x_1 &=& \frac{5}{2} - \frac{x_3}{2} \\ x_2 &=& -\frac{1}{2} - \frac{x_3}{2} \end{array}\right|$$

   Aquí, de nuevo, podemos encontrar dos puntos dando a x_3 valores arbitrarios, por ejemplo, $x_3 = 1$ y $x_3 = -1$, que dan respectivamente los puntos $(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 1)$ y $(x_1, x_2, x_3) = (3, 0, -1)$. Y una dirección está dada por

   $$\overrightarrow{\mathbf{d}} = (3, 0, -1) - (2, -1, 1) = (1, 1, -2).$$

Tercera Solución:

Una forma alternativa de encontrar la dirección de la recta buscada es tomando el producto cruz de los vectores normales a los planos.

En otras palabras:

$$\overrightarrow{\mathbf{d}} = (1, 1, 1) \times (1, -1, 0) = (1, 1, -2).$$

2. Exprese paramétricamente las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 & = & 10 \end{array}\right|$$

Solución:

La matriz ampliada del sistema es

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Escalonando la matriz, la llevamos a su forma escalona reducida por filas:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & 7 & 4 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta última matriz nos permite expresar el sistema como

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 \quad & = 1 + x_3 \\ x_2 & = 1 - x_3 \end{array}\right|$$

Tomando x_3 como parámetro, la solución queda

$$x_1 = 1 + x_3, \qquad , x_2 = 1 - x_3, \qquad x_3 = x_3.$$

3. Sea $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right\}$ un conjunto linealmente independiente. Demuestre que $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ es un conjunto linealmente independiente.

   Solución:

   Supongamos que $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right\}$ es linealmente independiente.

   Sea (α, β) una solución de la ecuación vectorial $\alpha(\overrightarrow{\mathbf{u}} + \overrightarrow{\mathbf{v}}) + \beta(\overrightarrow{\mathbf{u}} - \overrightarrow{\mathbf{v}}) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

   Pero entonces $(\alpha + \beta)\overrightarrow{\mathbf{u}} + (\alpha - \beta)\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, por lo que la combinación lineal $(\alpha + \beta)\overrightarrow{\mathbf{u}} + (\alpha - \beta) + 0 \times \overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, por lo que, ya que $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right\}$ es linealmente independiente, debe tenerse $(\alpha + \beta)\overrightarrow{\mathbf{u}} + (\alpha - \beta) = 0$, de donde $\alpha = \beta = 0$, por lo que $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}\right\}$ es linealmente independiente.

4. Sea T una transformación lineal tal que

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad T\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine la matriz que representa a T.

Solución:

Buscamos la matriz $\begin{bmatrix} T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \dots & T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$.

Para ello debemos encontrar $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, y para esto necesitamos expresar $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ como combinaciones lineales de $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. En otras palabras, buscamos α, β, γ y δ tales que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \gamma\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \delta\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O sea, debemos resolver los sistemas

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta &= 1 \\ \alpha + \beta &= 0 \end{aligned}\right| \qquad \text{y} \qquad \left.\begin{aligned} 2\gamma + 3\delta &= 0 \\ \gamma + \delta &= 1 \end{aligned}\right|$$

Resolviendo los sistemas, llegamos a $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$, $\delta = -2$. O sea:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Así, como T es una transformación lineal,

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} - T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

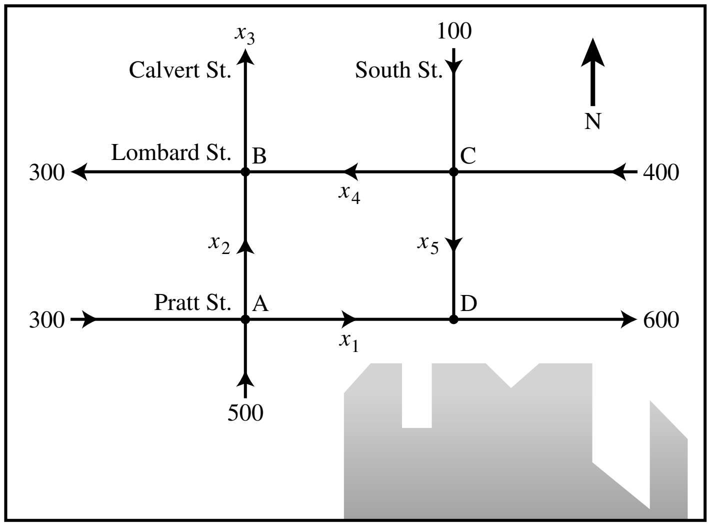
y

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - 2T\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},$$

por lo que la matriz buscada es

$$\begin{bmatrix} T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \dots & T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

5. La red de la figura representa el flujo del tránsito (en vehículos por hora) en varias calles de un solo sentido en el centro de una ciudad, en un momento típico.



Determine el patrón de flujo general para la red, dejando x_5 como variable independiente. ¿Puede x_5 tomar un valor > 500? Justifique.

Solución:

En cada intersección (A, B, C, D) el flujo total que entra debe ser igual al flujo que sale, por lo que:

A**:** $x_1 + x_2 = 800.$

B**:** $x_2 + x_4 = 300 + x_3.$

C**:** $x_4 + x_5 = 500.$

D**:** $x_1 + x_5 = 600.$

Así, debemos resolver el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl|}
x_1 & + & x_2 & & & & & & & = & 800 \\
 & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & & & = & 300 \\
 & & & & & & x_4 & + & x_5 & = & 500 \\
x_1 & & & & & & & + & x_5 & = & 600 \\
\hline
\end{array}$$

Al escalonar su matriz ampliada, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -200 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 800 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 500 \end{bmatrix}$$

de donde

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 600 - x_5 \\ x_2 \qquad &= 200 + x_5 \\ x_3 \quad &= 400 \\ x_4 &= 500 - x_5 \end{aligned}\right|$$

lo que expresa los flujos x_1, x_2, x_3 y x_4 en términos de x_5.

Finalmente, x_5 no puede ser > 500 porque en ese caso x_4 sería negativo, lo que es imposible (un flujo vehicular nunca es negativo).

6. Suponga que $AD = I_m$ (la matriz identidad de $m \times m$).

   a) Demuestre que para toda $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ en $\mathbb{R}^m$, la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ tiene una solución.
   Ayuda: Calcule $AD\overrightarrow{\mathbf{b}}$.

   b) Explique por qué A no puede tener más filas que columnas.

Solución:

a) Sea $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ en $\mathbb{R}^m$ cualquiera. Usando la ayuda, tenemos por una parte que $AD\overrightarrow{\mathbf{b}} = (AD)\overrightarrow{\mathbf{b}} = I_m\overrightarrow{\mathbf{b}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$. Por otra parte, $AD\overrightarrow{\mathbf{b}} = A(D\overrightarrow{\mathbf{b}})$, por lo que tomando $\overrightarrow{\mathbf{x}} = D\overrightarrow{\mathbf{b}}$ se tiene $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ como se pide.

b) Supongamos que A tiene más filas que columnas. Entonces como al escalonar A en cada columna hay a lo más un pivote, es imposible que haya un pivote en cada fila. Así, al escalonar A necesariamente encontraremos al menos una fila formada por puros ceros.

Pero entonces es posible encontrar un vector $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ que haga que la matriz ampliada del sistema $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ tenga un pivote más que A, lo que hace que el sistema sea inconsistente.

Esto contradice lo demostrado en la parte (a).

7. Sea $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Determine la imagen del plano de ecuación $x_1 + x_3 = 1$ por T.

Solución:

El plano tiene ecuación paramétrica (tomando como parámetros x_2 y x_3) $(x_1, x_2, x_3) = (1 - x_3, x_2, x_3)$, por lo que los puntos $P_0(1,0,0)$ (correspondiente a $x_2 = x_3 = 0$), $P_1(1,1,0)$ (correspondiente a $x_2 = 1$, $x_3 = 0$) y $P_2(0,0,1)$ (correspondiente a $x_2 = 0$, $x_3 = 1$) están en el plano.

De esta forma, dos vectores directores del plano son $\overrightarrow{\mathbf{d}}_1 = \overrightarrow{P_0P_1} = (0,1,0)$ y $\overrightarrow{\mathbf{d}}_2 = \overrightarrow{P_0P_2} = (-1,0,1)$, por lo que todo punto del $P(x_1, x_2, x_3)$ del plano puede ser escrito como

$$\overrightarrow{\mathbf{p}} = \overrightarrow{\mathbf{p}}_0 + \alpha \overrightarrow{\mathbf{d}}_1 + \beta \overrightarrow{\mathbf{d}}_2.$$

Así, dado $P(x_1, x_2, x_3)$ en el plano,

$$T\overrightarrow{\mathbf{p}} = T\overrightarrow{\mathbf{p}}_0 + \alpha T\overrightarrow{\mathbf{d}}_1 + \beta T\overrightarrow{\mathbf{d}}_2.$$

Como

$$\begin{aligned} T\overrightarrow{\mathbf{p}}_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ T\overrightarrow{\mathbf{d}}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \\ T\overrightarrow{\mathbf{d}}_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

tenemos que $T\overrightarrow{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 2\alpha - 2\beta \\ 2 + 4\alpha - 4\beta \end{bmatrix} = (1 + 2\alpha - 2\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. En otras palabras, la imagen del plano es el conjunto de los ponderados del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, vale decir, la recta que pasa por el origen y tiene dirección dada por el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

a) Si A es una matriz de 3×4, entonces A no es inyectiva.

Solución:

VERDADERO.

Si A es de 3×4, entonces la ecuación vectorial $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tiene infinitas soluciones, ya que —al escalonar A— al menos una de sus columnas no puede contener un pivote, por lo que el sistema tiene al menos una variable libre.

b) Dadas dos matrices cuadradas A y B, entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si y solo si $AB = BA$.

Primera Solución:

VERDADERO.

Demostración. Supongamos primero que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Entonces $A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$, por lo que —cancelando los términos que aparecen a ambos lados— llegamos a $BA = AB$.

Por otra parte, si $AB = BA$ entonces

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

$\square$

Segunda Solución:

Otra forma de demostrar que la afirmación es verdadera es simplemente partir de una de las igualdades dadas e irla reemplazando por afirmaciones equivalentes:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad AB + BA = 2AB \iff BA = AB.\end{aligned}$$

c) Si $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

entonces la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$ tiene infinitas soluciones.

Primera Solución:

VERDADERO.

Sea $t \in \mathbb{R}$.

Así,

$$\begin{aligned} A\left(2t\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}+(1-t)\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}\right) &= 2tA\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}+(1-t)A\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix} \\ &= 2t\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+(1-t)\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}2t+2(1-t)\\4t+4(1-t)\\6t+6(1-t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}, \end{aligned}$$

lo que muestra que hay una cantidad infinita de soluciones.q

Segunda Solución:

Vemos que $A\begin{bmatrix}3\\-3\\6\end{bmatrix}=A\left(3\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right)=3A\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}\right)=3\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}$, y

$$A\begin{bmatrix}3\\0\\3\end{bmatrix}=A\left(\frac{3}{2}\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}\right)=\frac{3}{2}\cdot A\left(\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}\right)=\frac{3}{2}\cdot\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix},$$

por lo que la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}$ tiene al menos dos soluciones distintas. Pero una ecuación vectorial (o un sistema de ecuaciones) puede tener cero, una o infinitas soluciones. Ya que este sistema tiene al menos dos soluciones, debe tener infinitas.