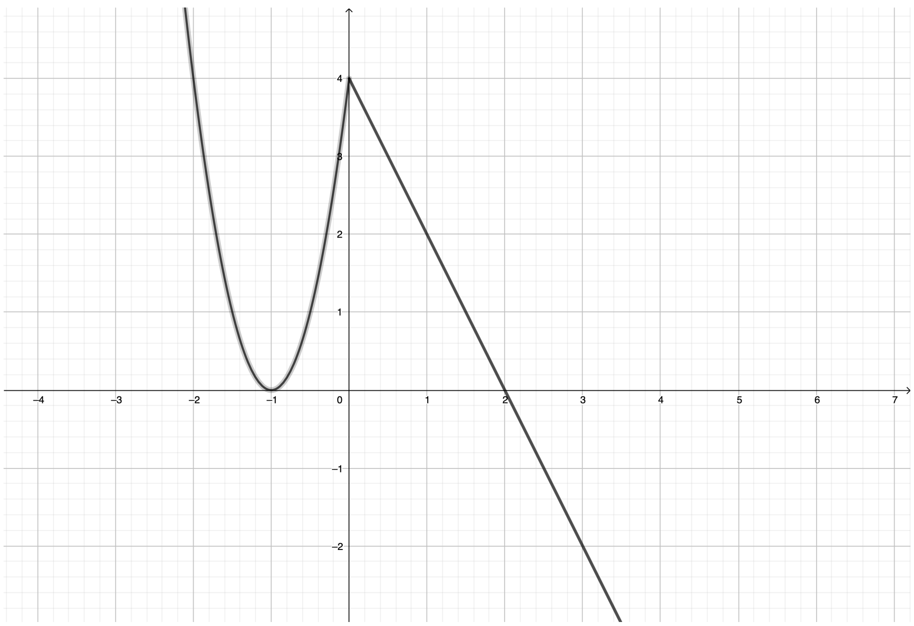
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2022

Pauta Examen - MAT1610

1. Sea f la función cuyo gráfico se muestra a continuación



y G la función definida por

$$G(x) = \int_1^x f(t)dt$$

a) Calcule $G(2)$.

Solución:

por la definición tenemos que $G(2) = \displaystyle\int_1^2 f(t)dt$ que corresponde al área de un triángulo de base 1 y altura 2, por lo tanto $G(2) = 1$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por saber evaluar en 2.
- (2 puntos) Por determinar el valor justificadamente.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de G.
Solución:

Del TFC tenemos que $G'(x) = f(x)$, por lo tanto la función G es creciente cuando f es positiva, es decir es creciente en el intervalo $(-\infty, 2)$ y decreciente en donde f es negativa, es decir en el intervalo $(2, \infty)$.
Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por usar el TFC para derivar G
- (1 punto) Por determinar los intervalos de monotonía
- (1 punto) Por la justificación del punto anterior.

2. Determine

a) $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x^2}\, dx$.
Solución:
Realizando descomposición mediante fracciones parciales tenemos que

$$\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x+3}$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x^2}\, dx = \int \frac{2}{x^2}\, dx - \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{2}{x+3}\, dx = -\frac{2}{x} - \ln(|x|) + 2\ln(|x+3|) + C$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por la descomposición de fracciones parciales.
- (0.5 puntos) Por cada integral.
- (0.5 puntos) Por la constante.

b) $\displaystyle\int \cos(x) \ln(\operatorname{sen}(x))\, dx$.
Solución:

Haciendo $t = \operatorname{sen}(x)$, tenemso que $dt = \cos(x)dx$ obteniendo que

$$\int \cos(x) \ln(\operatorname{sen}(x))\, dx = \int \ln(t)\, dt$$

para calcular esta última integral hacemos integración por partes haciendo $u = \ln(t)$ y $dv = dt$, de esta forma tenemos que

$$\int \ln(t)\, dt = t\ln(t) - \int 1\, dt = t\ln(t) - t + C$$

volviendo a la variable original tenemos que

$$\int \cos(x)\ln(\text{sen}(x))\,dx = \text{sen}(x)\ln(\text{sen}(x)) - \text{sen}(x) + C$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por la sustitución
- (1 punto) Por ls integración por partes
- (1 punto) Por resultado final.

3. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ y la parábola $y = \dfrac{x^2}{2}$.

   a) Determine el área de la región $\mathcal{R}$.
   Solución:

   Igualando las curvas obtenemos que estás intersectan en los puntos $(-2, 2)$ y $(2, 2)$, obteniendo que el área es:

   $$\int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2}\,dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\,dx - \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\,dx$$

   para resolver la primera de estas integrales hacemos la sustitución $x = \sqrt{8}\text{sen}(\theta)$, obteniendo que

   $$\int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\,dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 8\cos^2(\theta)\,d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4 + 4\cos(2\theta)\,d\theta = 4 + 2\pi$$

   por otra parte, tenemos que $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{8}{3}$, por lo tanto el área de la región es $\dfrac{4}{3} + 2\pi$.
   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por plantear la integral correcta
   - (1 punto) Por la integración de $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\,dx$
   - (1 punto) Por resultado final.

   b) Plantee una integral que corresponde al volumen del sólido obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno a la recta $x = 3$.
   Solución:

   $$2\pi \int_{-2}^{2} (3 - x)\left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx$$

   Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por la sustitución
- (1 punto) Por ls integración por partes
- (1 punto) Por resultado final.

4. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ estrictamente positiva y g una función continua en $x = 0$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{f(x)} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Calcular:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{f(x) + x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 - \dfrac{f(x)}{f(x) + x^2}\right) \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Use el teorema del Sandwich.

Solución:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{f(x) + x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{f(x)}} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{x \to 0} g(x)} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

donde la primera igualdad tiene sentido ya que $f(x) > 0$ y la penúltima igualdad viene del hecho que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0$ ya que g es continua en $x = 0$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por desarrollo algebraico.
- (1 punto) Por usar la continuidad de g o de f para el cálculo del limite.
- (1 punto) Por resultado final

b) Notamos que para cada $x \neq 0$,

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1.$$

Además,

$$0 < f(x) \leq f(x) + x^2 \Longrightarrow 0 < \frac{f(x)}{f(x) + x^2} \leq 1 \Longrightarrow 1 - \frac{f(x)}{f(x) + x^2} \geq 0$$

por lo que

$$-\left(1 - \frac{f(x)}{f(x) + x^2}\right) \leq \left(1 - \frac{f(x)}{f(x) + x^2}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left(1 - \frac{f(x)}{f(x) + x^2}\right)$$

para cada $x \neq 0$. Por el item anterior,

$$\lim_{x\to 0} \pm \left(1 - \frac{f(x)}{f(x)+x^2}\right) = \pm(1-1) = 0.$$

Por el Teorema del Acotamiento concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{f(x)}{f(x)+x^2}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por acotar la función $\sin(1/x)$
- (1 punto) Por acotar la función a la que se le quiere estudiar.
- (1 punto) Por lconcluir

TIEMPO 120 MINUTOS.