PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Solución Ayudantía 13

1. Sea $X_i \overset{ind}{\sim} Gamma(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, 2, ..., n$. Defina

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_m}{X_1 + X_2 + \cdots + X_m + X_{m+1} + \cdots + X_n}$$

con $m < n$.

(a) Muestre que Z es independiente de $\sum_{i=1}^{n} X_i$

(b) Con lo anterior deduzca que $Z \sim Beta\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i, \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i\right)$

(c) Encuentre la fdp de $Y^* = \dfrac{Z}{1-Z}$

(a) Note que la suma $X_1 + \cdots + X_m$ aparece tanto en el numerador como el denominador, por lo que llamemos X a esto, es decir,

$$X = X_1 + \cdots + X_m$$

y por otro lado,

$$Y = X_{m+1} + \cdots + X_n$$

Ahora, como $X_i \overset{ind}{\sim} Gamma(\alpha_i, \beta)$ podemos encontrar las distribuciones de X y Y. Usando generadora de momentos se tiene

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) \\
&= \mathbb{E}(e^{t(X_1+\cdots+X_m)}) \\
&= \mathbb{E}(e^{tX_1} \cdots e^{tX_m}) \\
&= \mathbb{E}(e^{tX_1}) \cdots \mathbb{E}(e^{tX_m}) \\
&= M_{X_1}(t) \cdots M_{X_m}(t) \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha_m} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_m} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i}
\end{aligned}$$

Esta ultima es la función generadora de momentos de una Gamma con parámetros $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ y λ, por lo que

$$X \sim Gamma\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i, \lambda\right)$$

Para encontrar la distribución de Y hacemos lo mismo

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{tY}) \\
&= \mathbb{E}(e^{t(X_{m+1}+\cdots+X_n)}) \\
&= \mathbb{E}(e^{tX_{m+1}} \cdots e^{tX_n}) \\
&= \mathbb{E}(e^{tX_{m+1}}) \cdots \mathbb{E}(e^{tX_n}) \\
&= M_{X_{m+1}}(t) \cdots M_{X_m}(t) \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha_{m+1}} \cdots \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha_n} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha_{m+1}+\cdots+\alpha_m} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\sum_{i=m+1}^n \alpha_i}
\end{aligned}$$

Luego,

$$Y \sim Gamma\left(\sum_{i=m+1}^n \alpha_i, \lambda\right)$$

Teniendo esto ya en consideración, la transformación pedida se reduce a

$$Z = \frac{X}{X+Y}$$

y acá ya es fácil proceder. Tomamos la variable auxiliar $W = X + Y$. Ahora calculamos las inversas

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{X}{X+Y} \\
Z &= \frac{X}{W} \\
X &= ZW
\end{aligned}$$

Para Y se tiene

$$\begin{aligned}
W &= X + Y \\
W &= ZW + Y \\
Y &= W - ZW
\end{aligned}$$

Ahora calculamos el Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial z}(zw) & \frac{\partial}{\partial z}(w - zw) \\ \frac{\partial}{\partial w}(zw) & \frac{\partial}{\partial w}(w - zw) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & -w \\ z & 1 - z \end{vmatrix} = |w - wz + wz| = |w| = w$$

Ahora debemos encontrar el recorrido de Z, W. Para esto vamos a proceder de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
&0 < x \\
&0 < x < y + x \\
&0 < \frac{x}{x+y} < \frac{y+x}{x+y} \\
&0 < \frac{x}{x+y} < 1 \\
&0 < Z < 1
\end{aligned}$$

Ahora W

$$\begin{aligned}
&0 < x \\
&x < y + x < \infty \\
&0 < x < W < \infty \\
&0 < W < \infty
\end{aligned}$$

Ahora reemplazamos todo en la conjunta

$$\begin{aligned}
f_{Z,W}(z,w) &= |J|\, f_{X,Y}(zw, w - zw) \\
&= w f_X(zw) f_Y(w - zw) \\
&= w \frac{\lambda^{a_1}(zw)^{a_1-1}e^{-zw\lambda}}{\Gamma(a_1)} \frac{\lambda^{a_2}(w-zw)^{a_2-1}e^{-(w-zw)\lambda}}{\Gamma(a_2)} \\
&= \lambda^{a_1+a_2} w^{a_1+a_2-1} e^{-w\lambda} \frac{z^{a_1-1}(1-z)^{a_2-1}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \\
&= \frac{\lambda^{a_1+a_2} w^{a_1+a_2-1} e^{-w\lambda}}{\Gamma(a_1+a_2)} \frac{z^{a_1-1}(1-z)^{a_2-1}}{\frac{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}{\Gamma(a_1+a_2)}} \\
&= \frac{\lambda^{a_1+a_2} w^{a_1+a_2-1} e^{-w\lambda}}{\Gamma(a_1+a_2)} \frac{z^{a_1-1}(1-z)^{a_2-1}}{B(a_1,a_2)} \\
&= Gamma(a_1+a_2, \lambda) \times Beta(a_1, a_2)
\end{aligned}$$

Reemplazamos $a_1 = \sum_{i=1}^m \alpha_i$ y $a_2 = \sum_{i=m+1}^n \alpha_i$, notando que $a_1 + a_2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

$$f_{Z,W}(z,w) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n \alpha_i} w^{\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1} e^{-w\lambda}}{\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i)} \frac{z^{\sum_{i=1}^m \alpha_i - 1}(1-z)^{\sum_{i=m+1}^n \alpha_i - 1}}{B(\sum_{i=1}^m \alpha_i, \sum_{i=m+1}^n \alpha_i)}, \quad 0 < w < 1, z > 0$$

Luego, como se puede factorizar, se tiene que Z, W son independientes. Ahora, note que

$$W = X + Y = \sum_{i=1}^m X_i + \sum_{i=m+1}^n X_i = \sum_{i=1}^n X_i$$

por lo que Z es independiente de $\sum_{i=1}^n X_i$, mostrando así lo pedido.

(b) Como se puede factorizar, basta con reconocer las distribuciones de cada una, pero lo hicimos, por lo que

$$W \sim Beta(a_1, a_2) = Beta\left(\sum_{i=1}^m \alpha_i, \sum_{i=m+1}^n \alpha_i\right)$$

Otra forma de verlo es

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty f_{W,Z}(w,z)dw \\
&= \int_0^\infty \frac{\lambda^{a_1+a_2} w^{a_1+a_2-1} e^{-w\lambda}}{\Gamma(a_1+a_2)} \frac{z^{a_1-1}(1-z)^{a_2-1}}{B(a_1,a_2)} dw \\
&= \frac{z^{a_1-1}(1-z)^{a_2-1}}{B(a_1,a_2)} \int_0^\infty \frac{\lambda^{a_1+a_2} w^{a_1+a_2-1} e^{-w\lambda}}{\Gamma(a_1+a_2)} dw \\
&= \frac{z^{a_1-1}(1-z)^{a_2-1}}{B(a_1,a_2)} \cdot 1 \\
&= \frac{z^{a_1-1}(1-z)^{a_2-1}}{B(a_1,a_2)}
\end{aligned}$$

y esta ultima es una beta.

(c) Debemos encontrar la inversa y luego la derivada, entonces

$$\begin{aligned}
y &= \frac{z}{1-z} \\
y - yz &= z \\
y &= z + yz \\
z &= \frac{y}{1+y} \\
g^{-1}(y) &= \frac{y}{1+y} \\
\frac{d}{dy} g^{-1}(y) &= \frac{1}{(1+y)^2}
\end{aligned}$$

Evaluamos todo en la formula

$$\begin{aligned}
f_{Y^*} &= \left| \frac{1}{(1+y)^2} \right| f_Z\left(\frac{y}{1+y}\right) \\
&= \frac{1}{(1+y)^2} \frac{1}{B(a_1,a_2)} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{a_1-1} \left(1 - \frac{y}{1+y}\right)^{a_2-1} \\
&= \frac{1}{B(a_1,a_2)} \frac{1}{(1+y)^2} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{a_1-1} \left(\frac{1}{1+y}\right)^{a_2-1}
\end{aligned}$$

Ahora el recorrido, tenemos que $w \in (0,1)$, entonces

$$\begin{aligned}
Y^* &= \frac{0}{1-0} = 0 \\
Y^* &= \frac{1^-}{1-1^-} = \infty
\end{aligned}$$

Luego, la fdp de Y^* es

$$f_{Y^*}(y) = \frac{1}{B(a_1,a_2)} \frac{1}{(1+y)^2} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{a_1-1} \left(\frac{1}{1+y}\right)^{a_2-1}, \quad y > 0$$

2. Sea X, Y variables aleatorias independientes, con X discreta.

   (a) Derive una formula para encontrar la marginal de $Z = X + Y$

   (b) Aplique la formula anterior cuando $X \sim Bernoulli(p)$ y $Y \sim N(1, \sigma^2)$

   (c) Aplique la formula anterior cuando $X \sim Bin(n, p)$ y $Y \sim Bin(m, p)$

   (a) Para esto vamos a recordar la marginalización. Recuerde que si tenemos la conjunta $P(X = x, Y = y)$, y nos interesa la marginal de X, entonces

$$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

   Ahora vamos hacer algo similar, pero con $P(X = x, Z = z)$. Entonces

$$\begin{aligned}
P(Z = z) &= \sum_x P(X = x, Z = z) \\
&= \sum_x P(X = x, X + Y = z) \\
&= \sum_x P(X = x, Y = z - X) \\
&= \sum_x P(X = x, Y = z - x) \\
&= \sum_x P(X = x)P(Y = z - x)
\end{aligned}$$

   (b) En este caso Y es continua, y X es bernoulli, por lo que se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
P(Z = z) &= \sum_{x=0}^{1} P(X = x) f_Y(z - x) \\
&= P(X = 0) f_Y(z - 0) + P(X = 1) f_Y(z - 1) \\
&= (1 - p)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} + p\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z-1)^2}{2\sigma^2}}
\end{aligned}$$

   (c) En este caso ambas son discretas, entonces

$$\begin{aligned}
P(Z = z) &= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \binom{m}{z - x} p^{z-x} (1 - p)^{m-z+x} \\
&= \sum_{x=0}^{z} \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \binom{m}{z - x} p^{z-x} (1 - p)^{m-z+x} \\
&= p^z (1 - p)^{n+m-z} \sum_{x=0}^{z} \binom{n}{x} \binom{m}{z - x} \\
&= p^z (1 - p)^{n+m-z} \binom{n + m}{z} \\
&= \binom{n + m}{z} p^z (1 - p)^{n+m-z}
\end{aligned}$$

   Luego,

$$Z \sim Bin(m + n, p)$$

   En el siguiente link puede ver la propiedad utilizada para calcular la suma.

3. Sea (Y_1, Y_2) un vector aleatorio con función conjunta dada por

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-y_2}, & \text{si } 0 < y_1 < y_2 < \infty \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

(a) Encuentre la conjunta de $(U, V) = (Y_2/2, Y_1 + 1)$

(b) Obtenga las marginales de U, V

(c) Obtenga la función generadora conjunta de X, Y y encuentre las fgm marginales

(d) **Propuesto** Encuentre una expresión para $P(Y_2 > 2|2 < Y_1 < Y_2^2)$

(e) Sea $U_1, U_2, ..., U_n$ una muestra aleatoria. Calcule $\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{2} + 1\right)$

(a) Calculamos las inversas. Para Y_2

$$\begin{aligned} u &= y_2/2 \\ y_2 &= 2u \end{aligned}$$

para Y_1

$$\begin{aligned} v &= y_1 + 1 \\ y_1 &= v - 1 \end{aligned}$$

Calculamos el jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial u} & \frac{\partial y_2}{\partial u} \\ \frac{\partial y_1}{\partial v} & \frac{\partial y_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(v-1) & \frac{\partial}{\partial u}2u \\ \frac{\partial}{\partial v}(v-1) & \frac{\partial}{\partial v}2u \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

Ahora el recorrido. Para esto note que tenemos

$$\begin{aligned} 0 < y_1 < y_2 \\ 0 < y_2 < \infty \end{aligned}$$

procedemos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &0 < y_1 < y_2 \\ &1 < y_1 + 1 < y_2 + 1 \\ &1 < v < 2u + 1 \end{aligned}$$

para u se tiene

$$\begin{aligned} 0 < y_2 < \infty \\ 0 < \frac{y_2}{2} < \infty \\ 0 < u < \infty \end{aligned}$$

La conjunta entonces es

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= 2f_{Y_1,Y_2}(v - 1, 2u) \\ &= 2e^{-2u} \end{aligned}$$

Luego,

$$f_{U,V}(u, v) = 2e^{-2u}, \quad 1 < v < 2u + 1; u > 0$$

(b) Como v va entre funciones y u entre valores numéricos, podemos obtener de forma directa la marginal de U. Entonces

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_1^{2u+1} 2e^{-2u} dv \\ &= 4ue^{-2u} \\ &= \frac{2^2 u^{2-1} e^{-2u}}{\Gamma(2)} \end{aligned}$$

Luego, $U \sim Gamma(2, 2)$. Para la marginal de V hay que dar vuelta el intervalo, pues tenemos que v va entre funciones, y nos interesa que vaya en un intervalo numérico. El recorrido original se encuentra en la figura 1.

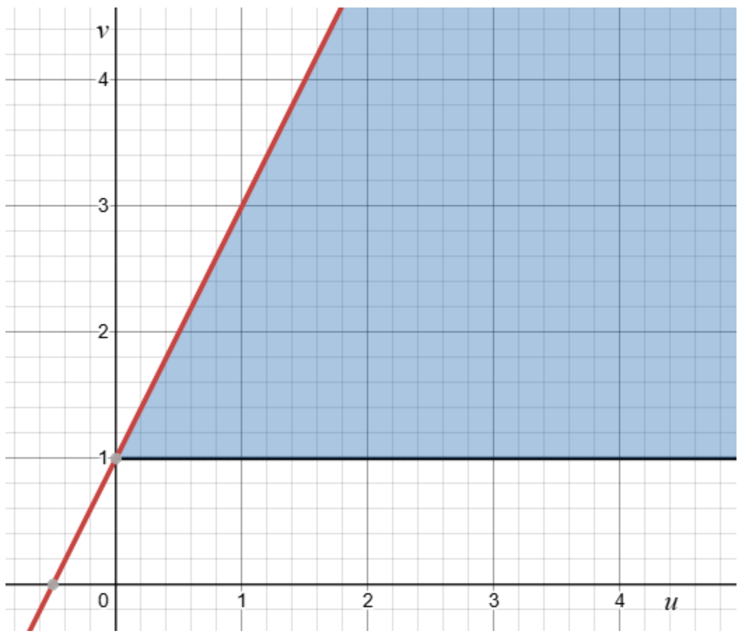

Figure 1: Recorrido conjunto 1

Para dar vuelta el intervalo necesitamos calcular las inversas.

$$v = 1$$

se queda igual.

$$\begin{aligned} v &= 2u + 1 \\ u &= \frac{v-1}{2} \end{aligned}$$

Graficando esto se obtiene la región de la figura 2. Entonces

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{\frac{u-1}{2}}^{\infty} 2e^{-2u} du \\ &= 1 \cdot e^{-1 \cdot (v-1)} \end{aligned}$$

Luego, $V \sim Shifted - Exponential(1, 1)$

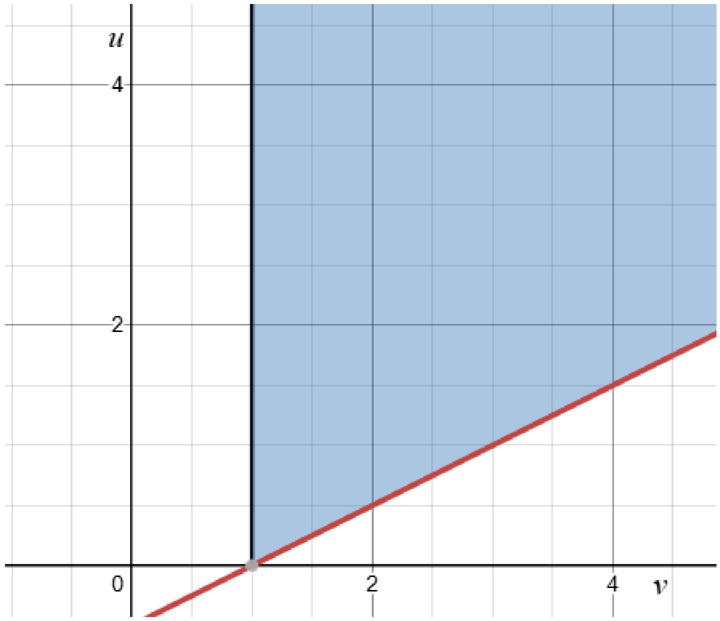

Figure 2: Recorrido conjunto 2

(c)

$$\begin{aligned}
M_{Y_1,Y_2}(t,s) &= \mathbb{E}(e^{tY_1+sY_2}) \\
&= \int_0^\infty \int_0^{y_2} e^{ty_1+sy_2} e^{-y_2} dy_1 dy_2 \\
&= \int_0^\infty e^{-y_2(1-s)} \int_0^{y_2} e^{ty_1} dy_1 \\
&= \int_0^\infty e^{-y_2(1-s)} \frac{1}{t} \int_0^{y_2} te^{ty_1} dy_1 dy_2 \\
&= \int_0^\infty e^{-y_2(1-s)} \frac{1}{t} (e^{y_2 t} - 1) dy_2 \\
&= \frac{1}{t} \int_0^\infty e^{-y_2(1-s-t)} - e^{-y_2(1-s)} dy_2 \\
&= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{1-s-t} - \frac{1}{1-s} \right)
\end{aligned}$$

Para obtener la fgm marginales solo debemos evaluar en 0 según la marginal que nos interese. Entonces

$$\begin{aligned}
M_{Y_1}(t) &= M_{Y_1,Y_2}(t,0) \\
&= \frac{1}{t} \left(\frac{1}{1-0-t} - \frac{1}{1-0} \right) \\
&= \frac{1}{t(1-t)} - \frac{1}{t} \\
&= \frac{1-(1-t)}{t(t-1)} \\
&= \frac{t}{t-1}
\end{aligned}$$

Esta corresponde a la fgm de una exponencial de parámetro 1. Luego,

$$Y_1 \sim Exp(1)$$

Para la fgm de Y_2 es análogo

$$\begin{aligned}
M_{Y_2}(s) &= M_{Y_1,Y_2}(0,s) \\
&= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1-s-t} - \frac{1}{1-s}\right)\Bigg|_{t=0} \\
&= \frac{1-s-(1-s-t)}{t(1-s-t)(1-s)}\Bigg|_{t=0} \\
&= \frac{t}{t(1-s-t)(1-s)}\Bigg|_{t=0} \\
&= \frac{1}{(1-s)^2} \\
&= \left(\frac{1}{1-s}\right)^2
\end{aligned}$$

Esta ultima es la fgm de una Gamma, en particular

$$Y_2 \sim Gamma(2,1)$$

(d)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{U_i}{2}+1\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{U_i}{2}\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}+1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbb{E}(U_i)}{2} + n \\
&= n\frac{1}{2} + n \\
&= \frac{3n}{2}
\end{aligned}$$

4. **Propuesto:** Sea $X_1 \sim N(0,1)$ y $X_2 \sim \chi^2_{(\nu)}$ independientes. Encuentre la fdp de

$$Y = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/\nu}}$$

5. **Propuesto:** Se dice que un vector aleatorio (X, Y) es invariante bajo rotaciones si para alguna rotación Θ, y cualquier conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^2$ se cumple

$$P((X,Y) \in \Theta A) = P((X,Y) \in A)$$

En otras palabras si se le aplica una transformación al vector (X, Y), entonces la conjunta es la misma que antes. Sea $X, Y \overset{iid}{\sim} N(0,1)$. Muestre que si

$$\Theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Entonces el vector (X, Y) cumple la condición mencionada anteriormente. Nota: es mas fácil de lo que parece y se pueden aplicar resultados vistos en clase.

6. **Propuesto:** Sea $X \sim Exp(1)$ independiente de $Y_1, ..., Y_n \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda/n^2)$. Encuentre la fdp de

$$Z = \sqrt{X \sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

7. **Propuesto:** Sea (X, Y) un vector aleatorio con función conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \left(\frac{3x^2}{2} + y\right) \mathbb{I}_{\{0<x,y<1\}}$$

   (a) Calcule las marginales de X, Y
   (b) Calcule el vector de medias y matriz de varianza covarianza
   (c) ¿Son X, Y independientes?
   (d) Calcule $Cov(\omega X, (1-\omega)Y)$
   (e) Calcule $Var(2X - Y + 1)$
   (f) Calcule la correlación entre X, Y
   (g) Calcule $P(X > 1/2 | Y > \sqrt{X})$
   (h) Encuentre una expresión para $P(Y > ln(X + 1/2) + 1/2)$