

Funciones racionales

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

¹Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

²LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

17 de Abril de 2022



Laboratorio
Interdisciplinario de
Estadística Social

Definición (Funciones racionales)

Una función racional es de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

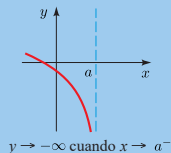
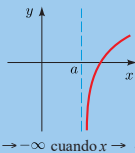
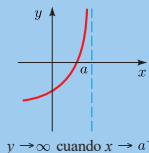
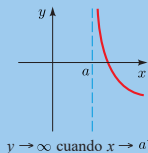
donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas.

El dominio de una función racional es \mathbb{R} salvo los puntos en donde la función Q se anula, es decir

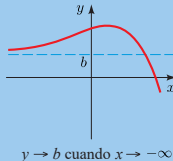
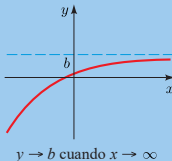
$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}.$$

Definición. (Asíntotas verticales y horizontales)

- ❶ La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a $\pm\infty$ cuando x se aproxima a a por la derecha o la izquierda



- ❷ La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a b cuando x se aproxima a $\pm\infty$.



Observación Una función racional de la forma

$$r(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

puede graficarse al desplazar, estirar o reflejar la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$.

EJEMPLO 1 Grafique la función racional, y exprese el dominio y recorrido

❶ $r(x) = \frac{2}{x - 3}$

❷ $s(x) = \frac{3x + 5}{x + 2}$

Teorema. (Asíntotas de Funciones racionales)

Sea r la función racional

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

- ❶ Las asíntotas verticales de r son las recta $x = a$, donde a es un cero del denominador.
- ❷
 - a Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.
 - b Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \frac{a_n}{b_m}$.
 - c Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

EJEMPLO 2 Hallar las asíntotas vertical y horizontal de

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}.$$

Trazado de gráficas de funciones racionales

- 1 **Factorizar.** Factorice el numerador y denominador.
- 2 **Puntos de intersección.** Encuentre los puntos de intersección x al determinar los ceros del numerador, así como los puntos de intersección y a partir del valor de la función en $x = 0$.
- 3 **Asíntotas verticales.** Encuentre las asíntotas verticales al determinar los ceros del denominador y , a continuación, vea si $y \rightarrow \infty$ o $y \rightarrow -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical mediante el uso de valores de prueba.
- 4 **Asíntota horizontal.** Encuentre la asíntota horizontal (si la hay).
- 5 **Trazar la gráfica.** Grafique la información dada por los primeros cuatro pasos.

EJEMPLO 3 Grafique $r(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$ y exprese dominio y recorrido.

EJEMPLO 4 Grafique $r(x) = \frac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$ y exprese dominio y recorrido.