EYP2106 Modelos Probabilísticos

Solución de la Interrogación 3

Profesor	Fernando Quintana
Ayudante	Rubén Soza
Semestre	2019/1

1. Tenemos que $f_X(x) = (2M)^{-1} I\{-M < x < M\}$.

   (a) La f.g.m. de X es

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{2M}\int_{-M}^{M} e^{tx}\,dx = \frac{1}{2Mt}\left(e^{Mt} - e^{-Mt}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

   de donde

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= M_X(it) = \frac{1}{2Mit}\left(e^{iMt} - e^{-iMt}\right) \\
&= \frac{1}{2Mit}\left(\cos(Mt) + i\sin(Mt) - \cos(-Mt) - i\sin(-Mt)\right) \\
&= \frac{\sin(Mt)}{Mt}.
\end{aligned}$$

   Nota: cuando $t = 0$ esta última función se define como $\varphi_X(0) = 1$, y además, $\lim_{t\to 0} \sin(Mt)/(Mt) = 1$.

   (b) Se tiene que

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \frac{1}{2Mt}\left(e^{Mt} - e^{-Mt}\right) = \frac{1}{2Mt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(Mt)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-Mt)^k}{k!}\right) \\
&= \frac{1}{2Mt}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{(Mt)^k}{k!} - \frac{(-Mt)^k}{k!}\right) = \\
&= \frac{1}{2Mt}\left(1 + Mt + \frac{M^2t^2}{2!} + \frac{M^3t^3}{3!} + \cdots - 1 + Mt + \frac{M^2t^2}{2!} - \frac{M^3t^3}{3!}\cdots\right) \\
&= 1 + \frac{M^2t^2}{3!} + \frac{M^4t^4}{5!} + \frac{M^6t^6}{7!} + \cdots
\end{aligned}$$

   Como además se tiene que en general

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k(X)t^k}{k!}$$

   identificando términos tenemos en ambas series tenemos que

$$\mu_k(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ M^k/(k+1) & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

(c) Se tiene

$$E(X^k) = \frac{1}{2M}\int_{-M}^{M} x^k\,dx = \frac{1}{2M}\left(\frac{M^{k+1}-(-M)^{k+1}}{k+1}\right) = \frac{2M^{k+1}}{2M(k+1)} = \frac{M^k}{k+1}\text{si } k \text{ es par,}$$

y claramente $E(X^k) = 0$ si k es impar. Esto coincide con lo anterior.

2. Como paso preliminar, sea $D = \{(x_1, x_2) :\ |x_1| + |x_2| \leq 1\}$, y notemos que

$$\iint_D (|x_1| + |x_2|)\,dx_2\,dx_1 = 4\int_0^1\int_0^{1-x_1}(x_1+x_2)\,dx_2\,dx_1 = {}^4\!/\!_3,$$

de modo que $c = {}^3\!/\!_4$.

(a) Podemos calcular las marginales, para obtener

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \frac{3}{4}\int_{-(1-|x_1|)}^{1-|x_1|}(|x_1|+|x_2|)\,dx_2 = \frac{3}{2}|x_1|(1-|x_1|) + \frac{3}{2}\int_0^{1-|x_1|} x_2\,dx_2 \\ &= \frac{3}{2}|x_1|(1-|x_1|) + \frac{3}{4}(1-|x_1|)^2 = \frac{3}{4}(1-x_1^2), \quad \text{para } |x_1| \leq 1, \end{aligned}$$

y análogamente,

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{3}{4}(1-x_2^2), \quad \text{para } |x_2| \leq 1.$$

Estas dos densidades son simétricas en torno a 0, de modo que $E(X_1) = E(X_2) = 0$. Además:

$$E(X_1^2) = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1} x_1^2(1-x_1^2)\,dx_1 = \frac{3}{4}\left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right] = \frac{1}{5} = E(X_2^2),$$

por lo que $\mathrm{Var}(X_1) = \mathrm{Var}(X_2) = {}^1\!/\!_5$. Por último,

$$E(X_1X_2) = \frac{3}{4}\iint_D x_1x_2(|x_1|+|x_2|)\,dx_1\,dx_2 = 0$$

debido a la simetría del problema. Por lo tanto:

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} {}^1\!/\!_5 & 0 \\ 0 & {}^1\!/\!_5 \end{pmatrix}.$$

(b) Claramente $\rho(X_1, X_2) = 0$ por lo que ellas son no correlacionadas, pero *no son independientes* porque la densidad conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ no coincide con $f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$.

(c) Como $\rho(X_1, X_2) = 0$ el MPL de X_1 dado X_2 es $E(X_1) = 0$.

3. Notar que el supuesto implica que $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ y $-1 < \rho < 1$.

(a) Tenemos que $W = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{X}$, donde $\boldsymbol{a} = (1, -\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2})^T$. Luego, W debe tener distribución normal (univariada) con parámetros dados por

$$E(W) = \boldsymbol{a}^T E(\boldsymbol{X}) = \mu_1 - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2 \quad \text{y,} \quad \mathrm{Var}(W) = \boldsymbol{a}^T\mathrm{Var}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{a} = \sigma_1^2(1-\rho^2).$$

(b) Claramente $(W, X_2)^T$ es una transformación lineal de $\boldsymbol{X}$ por lo que debe tener también distribución normal bivariada, y además:

$$\operatorname{Cov}(W, X_2) = \operatorname{Cov}(X_1, X_2) - \frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}\operatorname{Cov}(X_2, X_2) = \rho\sigma_1\sigma_2 - \rho\sigma_1\sigma_2 = 0.$$

Luego, puesto que $(W, X_2)^T$ tiene distribución conjunta normal bivariada, el hecho que W y X_2 sean no correlacionadas implica que son independientes.

4. Un cambio de variable sencillo nos da inmediatamente que $Y_j = \log(X_j) \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$. Además, $\log(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n Y_j$. Luego:

$$M_{\log(Y)}(t) = \prod_{j=1}^n M_{Y_j}(t/n) = \prod_{j=1}^n e^{t\mu_j/n + t^2\sigma_j^2/(2n^2)} = e^{t\sum_{j=1}^n \mu_j/n + t^2\sum_{j=1}^n \sigma_j^2/(2n^2)},$$

de donde $\log(Y) \sim N(\sum_{j=1}^n \mu_j/n, \sum_{j=1}^n \sigma_j^2/n^2)$. Por lo tanto,

$$Y = e^{\log(Y)} \sim \text{log-Normal}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mu_j, \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n \sigma_j^2\right).$$