PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
TEMPORADA ACADÉMICA DE VERANO 2019

INTERROGACIÓN 1
MAT1620 ⋆ CÁLCULO II

1. Analice la convergencia de la siguiente integral.

$$\int_1^\infty \frac{Arctg(x)}{x^2}\,dx.$$

2. Analice los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la integral,

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^a}\,dx.$$

es convergente.

3. *a*) Calcule .

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}(2n^2+8)}{3^n+5^n}.$$

b) Analice la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n+2}{(n+1)^3}.$$

4. Analice la convergencia absoluta o condicional de la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}.$$

5. *a*) Analice la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

b) Determine el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+c)^{-n} = 2.$$

6. *a*) Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

b) Determine una representación en serie de potencias para la función

$$f(x) := \frac{x^2}{(1-2x)^2},$$

y detemine su radio de convergencia.

Una solución.

1. Para analizar la convergencia de la primera integral consideramos $f(x) = \dfrac{Arctg(x)}{x^2}$ y la función auxiliar $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. A continuación notamos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{Arctg(x)}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

   Luego por el Criterio de comparación al límite la integral pedida tiene el mismo comportamiento que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x}$, la cual es convergente.

   Asignación de puntaje:

   - Asignar 3 puntos por utilizar de manera correcta algún criterio para realizar el analisis respectivo.
   - Asignar 3 puntos por concuir de manera correcta la divergencia de la integral.

2. La función a analizar es $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^a}$ y consideraremos $g(x) = \dfrac{1}{x^{a-2}}$, luego,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{1+x^a}}{\frac{1}{x^{a-2}}} = 1,$$

   por lo tanto el comportamiento de nuestra función es similar al comportamiento de la función $g(x) = \dfrac{1}{x^{a-2}}$ la cual es convergente solo en los caso que $a-2 > 1$. Por lo tanto los valores para los cuales la integral es convergente es para $a \in (3, \infty)$.
   Asignación de puntaje:

   - Asignar 3 puntos por utilizar de manera correcta algún criterio para realizar el analisis respectivo.
   - Asignar 3 puntos por concuir de manera correcta la divergencia de la integral.

3. *a*) Para calcular el límite de la sucesión dada, consideraremos la siguiente desigualdad,

$$\left|\frac{2^n \operatorname{sen}(2n^2+8)}{3^n+5^n}\right| \leq \frac{2^n}{3^n+5^n} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n,$$

   luego se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \operatorname{sen}(2n^2+8)}{3^n+5^n} = 0$$

   ya que $\dfrac{2}{5} < 1$.

b) Para analizar la convergencia de la serie dada, consideraremos la siguiente desigualdad,

$$\frac{n+1}{(n+1)^3} \leq \frac{n+n}{n^3} = \frac{2}{n^2},$$

y como la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ es convergente, se tiene que la serie dada tambien lo es.

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 1.5 puntos por acotar o utilizar el Teorema del Sandwich.
- a) Asignar 1.5 puntos por concluir de manera correcta que la sucesión converge a 0.
- b) Asignar 1.5 puntos por comparar de manera correcta.
- b) Asignar 1.5 puntos por concluir de manera correcta la convergencia de la serie.

4. Comenzaremos analizando la serie de los valores absolutos,

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n},$$

para ello consideraremos la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ la cual es derivable y por ende continua en $(1, \infty)$ con derivada

$$f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} < 0,$$

y por lo tanto es decreciente. Luego el comportamiento de la serie dada es similar al de la integral,

$$\int_1^\infty \frac{\ln(x)}{x}\, dx,$$

la cual se puede expresar como,

$$\lim_{c\to\infty} (\frac{\ln^2(x)}{2} - \ln^2(1)) = \infty,$$

y por lo tanto la integral, y la serie, son divergentes.
Por otro lado, analizaremos la opción de la convergencia condicional. Para ello, nos basta notar que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0,$$

y el Criterio de Leibnitz nos permite asegurar que la serie es convergente de manera condicional.

Asignación de puntaje:

- Asignar 3 puntos por verificar que la serie no converge de manera absoluta.
- Asignar 3 puntos por verificar la convergencia condicional de la serie.

5. *a*) Para la primera serie utilizaremos el criterio de la raíz, es decir,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = e > 1.$$

   Por lo tanto la serie dada es divergente.

   b) Para determinar el valor de c pedido, recordamos en primer lugar que

$$\sum_{n\geq 1} r^n = \frac{r}{1-r}, \qquad |r| < 1,$$

   Luego si buscamos que

$$\frac{r}{1-r} = 2,$$

   se tendrá que $r = \dfrac{2}{3}$. Por otro lado se debe tener que

$$\frac{1}{1+c} = \frac{2}{3},$$

   luego el valor buscado es $c = \dfrac{1}{2}$.

   Asignación de puntaje:

   - a) Asignar 1.5 puntos por utilizar de manera correcta algún criterio para realizar el análisis.
   - a) Asiganr 1.5 puntos por concluir de manera correcta la divergencia.
   - b) Asignar 1.5 puntos por reconocer la serie geometrica y realizar el análisis respectivo.
   - b) Asignar 1.5 puntos por calcular el valor de c pedido.

6. *a*) Comenzamos determinando el radio de convergencia de la serie dada, para ello sea

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+2}} : \frac{3^n}{\sqrt{n+1}} = 3,$$

   luego el radio buscado será $R = \dfrac{1}{3}$. A continuación revisamos en los bordes del intervalo respectivo,
   Para $x = \dfrac{7}{3}$ la serie que se obtiene es

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \qquad \text{la cual es convergente.}$$

Para $x = \frac{5}{3}$ la serie será

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad \text{la cual es divergente.}$$

Se concluye que el intervalo de convergencia es $\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right]$

b) Haciendo uso de series conocidas, se tiene que

$$g(x) = \frac{1}{1-2x} = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n, \qquad |x| < \frac{1}{2}.$$

En el intervalo donde esta es convergente, podemos derivar, con lo cual,

$$g'(x) = \frac{2}{(1-2x)^2} = \sum_{n\geq 0} 2^{n+1}(n+1)x^n,$$

finalmente

$$f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} = \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot g'(x) = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 0} 2^{n+1}(n+1)x^{n+2}, \qquad |x| < \frac{1}{2}.$$

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 1.5 puntos por calcular el radio de convergencia.
- a) Asignar 1.5 puntos por calcular de manera correcta el intervalo de convergencia.
- b) Asignar 2 punto por reconocer una serie conocida y utilizar la derivación o integración para realizar el calculo pedido.
- b) Asignar 1 punto por encontrar la serie y el radio pedido.