Ahorro y préstamos

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

6 de Junio de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Ahorro y Préstamos

Leibniz escribió numeros trabajos científicos sobre los temas del interés, los seguros y las matemáticas financieras. Sin embargo, nuestra civilización no es la primera que ha considerado estas cuestiones.

En 1933, una excavación arqueológica en Irán dirigida por Contenau y Mecquenem descubrió varias tablillas babilónicas. Estas tablillas fueron muy estudiadas durante las siguientes décadas, y varias de ellas tenían contenido matemático. En particular, una de las tablillas hablada del cálculo del interés compuesto y de las anualidades. Estas tablillas fueron datadas a finales de la primera dinastía babilónica, un poco después de Hammurabi (1793-1750 a.C.).

Por lo tanto, los problemas que se tratan sobre ahorro y préstamos se encuentran seguramente entre las aplicaciones más antiguas de las matemáticas.

Ahorro y Préstamos

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Muchas personas piden dinero prestado para pagar cosas caras, como auto, electrodomésticos, educación y casas. Por eso es útil entender cómo funcionan los distintos préstamos.
Los banco suelen dejar que los clientes elijan el periodo de amortización del préstamo, al que se asociará un tipo de interés mensual r_m y una cuota mensual Δ.

Definición.

El **monto insoluto** es la parte del crédito que aún se encuentra pendiente de pagar.
Estas son las variables que intervienen:

- p_i: monto insoluto del crédito después de haber pagado las primeras i cuotas mensuales.
- r_m: tipo de interés mensual.
- Δ: monto de la cuota mensual.
- N: periodo de amortización (en años).

Ahorro y Préstamos

Supongamos que un banco declara ofrecer créditos hipotecarios a una tasa anual de $r_a = 3,17\,\%$.

Este número debe leerse con cuidado: se presenta como una tasa anual pero, en realidad, el banco cobra intereses mensuales.

El significado que se le da a la tasa hipotecaria anual varía de un país a otro.

En Chile, al menos en el Banco Estado, la tasa mensual r_m correspondiente a esa tasa anual declarada de r_a se calcula mediante la fórmula

$$(1 + r_m)^{12} = 1 + r_a \Longleftrightarrow (1 + r_m)^{12} = 1 + \frac{3,17}{100}$$

La tasa mensual, entonces es

$$r_m = (1 + r_a)^{1/12} - 1 = (1,0317)^{1/12} - 1 \approx 0,2604\,\%\,.$$

Ahorro y Préstamos

La cantidad p_0 representa la cantidad inicial de dinero prestada por el banco (en UF). Al final de cada mes se calcula el interés adeudado:

$$\text{interés del mes} := r_m \cdot p_i = 0{,}26\,\% \cdot (\text{monto insoluto})\,.$$

El capital adeudado aumenta gracias a ese interés, pero a la vez disminuye gracias a la cuota Δ del dividendo que se le paga puntualmente. Esto da lugar a la fórmula

$$\begin{aligned}\text{Nuevo monto insoluto} \quad &= \quad \text{Monto insoluto anterior} + \text{interés del mes} \\ &\quad\quad -\text{cuota pagada al banco} \\ p_{i+1} \quad &= \quad p_i + r_m \cdot p_i - \Delta\end{aligned}$$

eso es

$$p_{i+1} = p_i(1 + r_m) - \Delta\,.$$

Ahorro y Préstamos

Pagar el crédito en N años significa que habrá una cantidad de $m = 12 \cdot N$ pagos Δ. Pagar el crédito en N años significa que

$$p_m = 0 \Longleftrightarrow p_{12 \cdot N} = 0 \,.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0(1 + r_m) - \Delta \\ p_2 &= p_1(1 + r_m) - \Delta \\ &= [p_0(1 + r_m) - \Delta](1 + r_m) - \Delta \\ &= p_0(1 + r_m)^2 - \Delta\,(1 + (1 + r_m)) \end{aligned}$$

Ahorro y Préstamos

Es posible intuir un patrón en esta fórmula mirando el siguiente término de la sucesión $\{p_n\}$

$$\begin{aligned} p_3 &= p_2(1+r_m) - \Delta \\ &= [p_0(1+r_m)^2 - \Delta\,(1+(1+r_m))](1+r_m) - \Delta \\ &= p_0(1+r_m)^3 - \Delta(1+(1+r_m)+(1+r_m)^2) \end{aligned}$$

Es posible demostrar que

$$p_i = p_0(1+r_m)^i - \Delta \sum_{j=0}^{i-1} (1+r_m)^j \,.$$

para todo i entre 1 y $12N$. Usando la fórmula para la suma de las primeras i potencias de un número

$$\sum_{j=0}^{i-1} x^j = \frac{1-x^i}{1-x} \quad x \neq 1\,.$$

Ahorro y Préstamos

Usando la fórmula anterior obtenemos

$$\begin{aligned} p_i &= p_0(1+r_m)^i - \Delta \sum_{j=0}^{i-1}(1+r_m)^j \\ &= p_0(1+r_m)^i - \Delta \frac{1-(1+r_m)^i}{1-(1+r_m)} \\ &= p_0(1+r_m)^i - \Delta \frac{(1+r_m)^i - 1}{r_m} \end{aligned}$$

La relación $p_{12 \cdot N} = 0$ se convierte en

$$0 = p_0(1+r_m)^{12N} - \frac{\Delta}{r_m}((1+r_m)^{12N} - 1)\,.$$

Por lo tanto,

$$p_0 = \frac{\Delta}{r_m} \cdot \frac{(1+r_m)^{12N} - 1}{(1+r_m)^{12N}}\,.$$

Ahorro y Préstamos

Reemplazando el valor de $r_m = (1 + r_a)^{1/12} - 1$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \frac{\Delta}{r_m} \cdot \frac{(1 + r_m)^{12N} - 1}{(1 + r_m)^{12N}} = \frac{\Delta}{r_m} \cdot \frac{(1 + r_a)^{N} - 1}{(1 + r_a)^{N}} \\
&= \frac{\Delta}{r_m} \cdot \left(1 - (1 + r_a)^{-N}\right)
\end{aligned}
$$

Por ejemplo, si $r_a = 3,17\,\%$ entonces la ecuación se simplifica a

$$
p_0 = \frac{\Delta}{r_m} \cdot \left(1 - 1,0317^{-N}\right) .
$$

Observando la fórmula tiene sentido matemático aún si N se trata como una variable continua. Considerendo a Δ, r_m constaste podemos graficar esta relación entre N y p_0.

Ahorro y Préstamos

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Se observa que aunque vivieran para siempre, no pueden pedir prestado más alla de un cierto monto, inferior a Δ/r_m. Si por ejemplo, $\Delta = 9$ UF obtenemos un monto máximo de

$$\frac{\Delta}{r_m} = \frac{9}{(1,0317)^{1/12} - 1} \approx 3460\text{UF} .$$

Ahorro y Préstamos

La tabla muestra cual es el monto que puede prestar el banco que depende del periodo de amortización N:

N (en años)	p_0 (en UF)
8	764
15	1293
20	1606
25	1874
30	2103

EJEMPLO 1 En un crédito a 25 años, con 9 UF mensuales, a un interés hipotecario anual de $3,17\,\%$ se pueden pedir prestados alrededor de 1874 UF. A valor de la UF del 06/06/2022, esto corresponde a $61,4$ millones de peso. (9 UF=294908 pesos)

Ahorro y Préstamos

EJEMPLO 2 Considere un préstamo de 1000 UF pagado a lo largo de un período de 20 años con tipo de interés mensual de $\frac{2}{3}\,\%$. Determine los pagos mensuales que deberá realizar el prestatario y el monto total que paga.

Solución Se tiene que $r_m = 2/3\,\%$ entonces

$$r_a = (1 + r_m)^{12} - 1 = \left(1 + \frac{2/3}{100}\right)^{12} - 1 \approx 0,083$$

Entonces las cuotas mensuales son

$$\Delta = \frac{p_0 \cdot r_m}{1 - (1 + r_a)^{-N}} = \frac{1000 \cdot \frac{2/3}{100}}{1 - (1,083)^{-20}} \approx 8,36\text{UF}$$

El monto total que paga el prestatario es

$$M = \Delta \cdot N \cdot 12 = 2006,4\text{UF}$$

más del doble del préstamo!