Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2019

MAT 1610 $\star$ Cálculo 1

Pauta Interrogación 2

1. *a*) La parte superior de una escalera se desliza por una pared a una rapidez vertical de 0.15 m/s. En el momento en que la parte inferior de la escalera está a 3 m de la pared, se desliza alejándose de ésta con una rapidez de 0.2 m/s. ¿Cuál es la longitud de la escalera?

   b) Calcule $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\pi/2 - \arctan\sqrt{x})$.

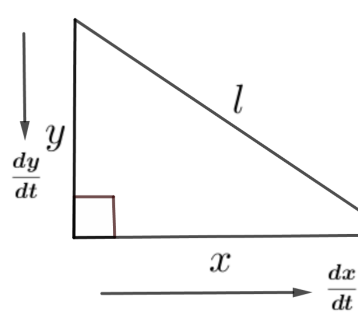
Solución:

a) **(3 puntos)** Sea l la longitud de la escalera. Según el enunciado se tiene que $\frac{dy}{dt} = -0{,}15$ m/s y $\frac{dx}{dt} = 0{,}2$ m/s. Usando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},$$

Por lo que reemplazando se obtiene $\frac{dy}{dx} = -3/4$. Por otra parte, dada la configuración de la escalera apoyada en la pared sabemos que se cumple la siguiente relación pitagórica $x^2 + y^2 = l^2$, por lo que derivando implícitamente tenemos que $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$, de donde reemplazando en $x = 3$ y $\frac{dy}{dx} = -3/4$ se tiene que $y = 4$. Por lo tanto

$$l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ m}.$$



b) **(3 puntos)** Dado que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\pi/2 - \arctan\sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi/2 - \arctan\sqrt{x}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}},$$

es de la forma 0/0 y las funciones $f(x) = \pi/2 - \arctan\sqrt{x}$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$ son derivables con $g'(x) = -1/2x^{3/2} \neq 0$ en cualquier vecindad abierta que no contiene a $x = 0$, podemos aplicar L'Hospital y tenemos que si existe el límite es igual a:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{(\pi/2 - \arctan\sqrt{x})'}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2(1+x)x^{1/2}}}{\dfrac{1}{2x^{3/2}}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} = 1. \end{aligned}$$

2. *a*) Considere la curva $y = f(x)$ definida implícitamente por

$$y + x\sin(y) = x^2 - 1.$$

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(1, 0)$.

b) Dada la función invertible $f(x) = x^3 + 2x - 5$, calcule $(f^{-1})'(-5)$ y $(f^{-1})''(-5)$.

Solución:

a) **(3 puntos)** Derivando implícitamente se obtiene

$$y' + \sin(y) + x\cos(y)y' = 2x,$$

por lo que evaluando en $x = 0$ e $y = 0$ encontramos que $y'(1) = 1$. Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(1, 0)$ es

$$y = x - 1.$$

b) **(3 puntos)** Sabemos que si $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ entonces

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Luego, calculamos $f'(f^{-1}(-5))$. Por definición, $f^{-1}(-5) = x$ si y sólo si $f(x) = -5$, es decir, $x^3 + 2x - 5 = -5 \Leftrightarrow$ si $x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, es decir $f^{-1}(-5) = 0$. Por otra parte se tiene que $f'(x) = 3x^2 + 2$. Así, obtenemos que $f'(f^{-1}(-5)) = f'(0) = 2 \neq 0$. Por lo tanto

$$(f^{-1})'(-5) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-5))} = \frac{1}{2}.$$

Por otro lado, derivando una vez más encontramos la segunda derivada de f^{-1}

$$\begin{aligned}(f^{-1})''(x) &= -[f'(f^{-1}(x))]^{-2} f''(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) \\ &= -\frac{f''(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^3}.\end{aligned}$$

De aquí, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ calculamos $f''(x) = 6x$. Por lo tanto, tenemos que

$$(f^{-1})(-5) = -\frac{f''(f^{-1}(-5))}{[f'(f^{-1}(-5))]^3} = -\frac{f''(0)}{[f'(0)]^3} = 0.$$

3. *a*) Demuestre usando el teorema del valor medio que $\dfrac{x}{1+x} < \log(x+1) < x, \quad x > 0.$

   b) Usando a) calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(x+1)}{x}$.

Solución:

a) **(3 puntos)** Sea $f(x) = \log(x+1)$. Como f es una función derivable en $(-1, +\infty)$. Aplicando el Teorema del valor medio en $(0, x)$, con $x > 0$ sabemos que existe un $c \in (0, x)$ tal que $f'(c) = (f(x) - f(0))/x$, es decir existe $c \in (0, x)$ tal que

$$\frac{1}{c+1} = \frac{\log(x+1)}{x}.$$

Luego como $0 < c < x$ se tiene que

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c+1} < 1,$$

por lo tanto

$$\frac{x}{1+x} < \log(x+1) < x, \quad x > 0.$$

b) **(3 puntos)** Inmediato usando el teorema del sandwich, ya que dada la relación en a), se tiene que

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\log(x+1)}{x} < 1, \quad x > 0.$$

y como

$$\lim_{x\to 0} = \frac{1}{1+x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

se concluye que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

4. Traze la gráfica de la función:
$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1},$$
indicando dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales, concavidad, puntos de inflexión y asíntotas.

Solución:

- **(0.1 puntos)** $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- **(0.5 puntos)** $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$.
- **(0.1 puntos)** $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.
- **(1 puntos)** Estudiando los cambios se signo de f', se tiene que
  - $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
  - $f'(x) < 0$ si $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3})$.

  Por lo tanto, f es creciente en: $(-\infty, -\sqrt{3})$ y en $(\sqrt{3}, +\infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}, -1)$, en $(-1, 1)$ y en $(1, \sqrt{3})$.
- **(1 puntos)**
  - El signo de f' cambia de $+$ a $-$ en $x = -\sqrt{3}$, por lo tanto usando el criterio de la primera derivada se tiene que en $x = -\sqrt{3}$ se alcanza un máximo local $f(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3}/2$.
  - El signo de f' cambia de $-$ a $+$ en $x = \sqrt{3}$, por lo tanto usando el criterio de la primera derivada se tiene que en $x = \sqrt{3}$ se alcanza un mínimo local $f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}/2$.
  - Como f' no cambia de signo en $x = 0$, entonces $f(0)$ no es un valor extremo de $f(x)$.
- **(1 puntos)** $f''(x) = \dfrac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - (x^4 - 3x^2) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$
- **(0.1 puntos)** $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- **(0.8 puntos)** Estudiando los cambios se signo de f'', se tiene que
  - $f''(x) > 0$ si $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$
  - $f''(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$

  Por lo tanto, f es cóncava hacia arriba en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
- **(0.4 puntos)** f'' cambia de signo en $x = 0$, y f es continua en $x = 0$, por lo tanto $(0, 0)$ es un punto de inflexión de f.

- **(0.2 puntos)** Como

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

y

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$$

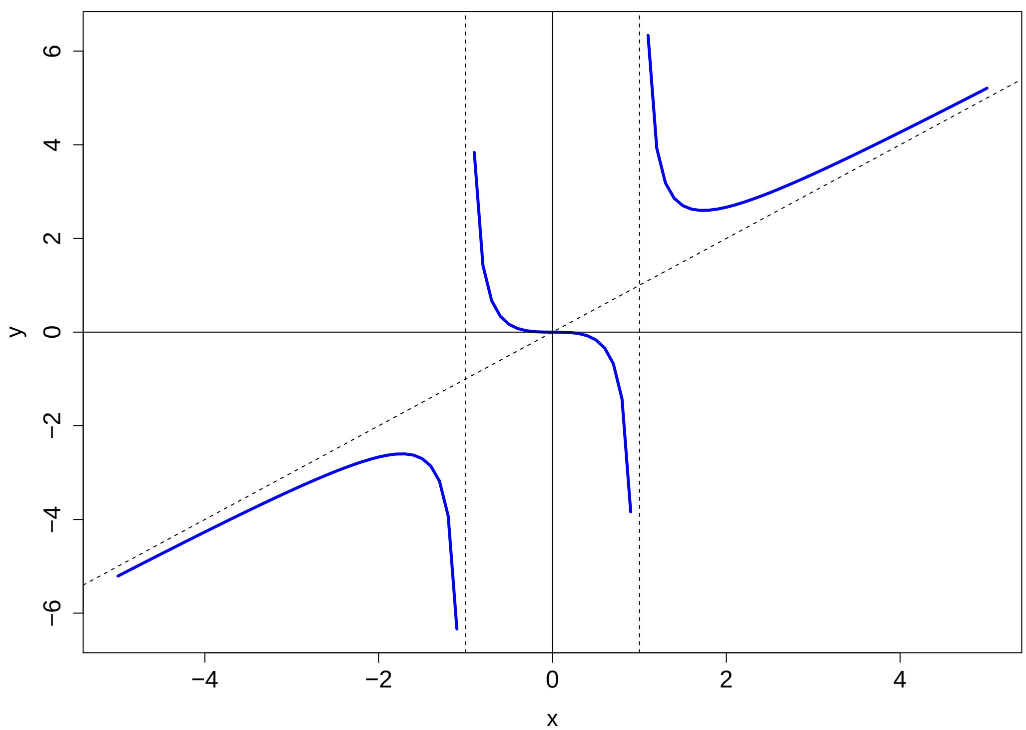
entonces $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales del $f(x)$.
- **(0.1 puntos)**Además como $\lim_{\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{\to -\infty} f(x) = -\infty$,entonces no hay asíntotas horiontales de $f(x)$
- **(0.2 puntos)** Como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

y

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$$

Se tiene que la recta $y = x$ es asíntota oblícua del gráfico de $f(x)$.
- **(0.5 puntos)** Trazamos el gráfico de $f(x)$



6
4
2
0
−2
−4
−6
y
−4
−2
0
2
4
x