PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
SEGUNDO SEMESTRE 2018.

INTERROGACIÓN 2
CALCULO II ⋆ MAT1620

La siguiente evaluación consta de 8 preguntas, dispone de 120 minutos para responderla.

1. Determine si la siguiente serie converge de manera absoluta o condicional o bien es divergente.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 10^n}{(n+1)4^{2n+1}}.$$

2. Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie de potencias,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n+1)}.$$

3. *a*) Determine una representación en serie de potencias para la función,
$$f(x) = \frac{1}{1+2x},$$
indicando el respectivo intervalo de convergencia.

   b) Determine una representación en serie de potencias para la función,
$$f(x) = \frac{x}{(1+2x)^2}.$$
Determine el respectivo intervalo de convergencia.

4. Determine la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(3,-1,2)$ y es perpendicular al plano que contiene a los puntos
$$(3,-1,2), \qquad (8,2,4), \qquad (-1,-2,-3).$$

5. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}.$$

6. Considere la función

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^3-y}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

   Determine si es posible definir $f(0,0)$ de modo que f resulte ser continua en $(0,0)$. En caso que esto sea posible defina $f(0,0)$.

7. Considere la función $z = \ln(e^x + e^y)$. Verifique que es una solución de la ecuación,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

8. Determine la veracidad de las siguientes afirmaciones. Justifique sus afirmaciones.

   a) El plano tangente a la superficie $z = y\cos(x/2)$ en el punto $(\pi, 1, 0)$ tiene ecuación $2z + x = 2$.

   b) El punto $(-1, 2)$ pertenece a la curva de nivel $k = 9$ de la función $f(x,y) = x^2 + 2y^2$.

   c) Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Si la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ es convergente entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ tambien es convergente.

UNA SOLUCIÓN

1. Comenzaremos analizando la convergencia absoluta de la serie dada, es decir la serie de término general
$$a_n = \left| \frac{(-1)^n 10^n}{(n+1)4^{2n+1}} \right|.$$
Utilizando el criterio de la razón,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2}\frac{10}{16} = \frac{10}{16} < 1.$$
Luego la serie dada es convergente de manera absoluta.
Asignación de puntaje:
    - Asignar 2 puntos por analizar la convergencia con alguno de los criterios dispobibles de manera correcta.
    - Asignar 4 puntos por concluir que la serie converge de manera absoluta.

2. Comenzamos calculando el radio de convergencia, R, de la serie de potencias dada,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}.$$
Por lo tanto $R = 2$. A continuación analizamos en los puntos $x = 2, X = -2$.
En $x = 2$, se tiene la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}, \qquad \text{, la cual es divergente.}$$
En $x = -2$, se tiene la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}, \qquad \text{, la cual es convergente.}$$
Se concluye que el intervalo de convergencia es
$$[-2, 2).$$
Asignación de puntaje:
    - Asignar 3 puntos por el radio de convergencia, calculado correctamente.
    - Asignar 1.5 puntos analizar y concluir, de manera correcta, la convergencia en cada uno de los extremos del intervalo respectivo.

3. Se sabe que para $|x| < 1$,
$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n.$$
Por lo tanto,
$$\frac{1}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n, \qquad |x| < \frac{1}{2}.$$
En el interior del intervalo de convergencia es posible derivar, con lo cual,
$$\frac{-2}{(1+2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n n x^{n-1},$$
multiplicando la igualdad anterior,
$$\frac{-2x}{(1+2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n n x^n,$$
finalmente,
$$\frac{x}{(1+2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n-1} n x^n, \qquad |x| < \frac{1}{2}.$$
Notamos que en $x = \dfrac{1}{2}$ la serie es divergente y que en $x = \dfrac{-1}{2}$ la función no se encuentra definida.

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 2 puntos por encontrar la serie de potencias.
- a) Asignar 1 punto por el intervalo de convergencia respectivo.
- b) Asignar 1.5 puntos por derivar y obtener a partir de a) la serie.
- b) Asignar 1 punto por obtener la serie respectiva.
- b) Asignar 0.5 puntos por calcular el intervalo de convergencia respectivo.

4. Comenzamos calculando un vector normal, N, al plano que contiene a los tres puntos dados,
$$N = (-13, 17x, 7).$$
Por lo tanto la ecuación de la recta pedida será:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13 \\ 17 \\ 7 \end{pmatrix},$$

o bien

$$\begin{cases} x = 3 - 13t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 2 + 7t, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 3 puntos por calcular de manera correcta un vector normal al plano dado.
- Asignar 3 puntos por escribir de manera correcta la forma paramétrica correcta de la recta pedida.

5. Para calcular el límite pedido, utlizaremos coordenadas polares,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}-1}{r^2},$$

usando la regla de L'Hopital,

$$\lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}-1}{r^2} = 1.$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 3 puntos por utilizar coordenadas polares de manera correcta.
- Asignar 3 puntos por calcular de manera correcta el valor del límite.

6. Para que la función pueda ser definida en $(0,0)$ el límite en dicho punto debe existir. Calcularemos,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^3-y}.$$

Consideremos los límites,

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x-y}{x^3-y}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{-y}{-y} = 1,$$

por otro lado,

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x-y}{x^3-y}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^3},$$

y este último límite no existe. En conclusión no es posible definir $f(0,0)$ de manera que resulte ser continua.

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por plantear la existencia del límite como la condición necesaria pedida.
- Asignar 3 puntos por verificar la no existencia del límite respectivo.

- Asignar 1 punto por concluir de manera correcta.

7. Comencemos calculando las respectivas derivadas parciales de la función $z = \ln(e^x + e^y)$.

$$z_x = \frac{e^x}{e^x + e^y}, \qquad z_y = \frac{e^y}{e^x + e^y}.$$

de lo anterior se tiene que

$$z_{xx} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}, \quad z_{yy} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}, \quad z_{xy} = \frac{e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}.$$

Reemplazando se obtiene la relación pedida.

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por calcular de manera correcta las derivadas de orden 1.
- Asignar 3 puntos por calcular de manera correcta las 3 derivadas de orden 2.
- Asignar 1 punto por verificar la ecuación pedida.

8. *a*) Falso, ya que la ecuación del plano tangente es $2z + x = \pi$.

   b) Verdadero, ya que $f(-1, 2) = 9$ por lo tanto pertenece a la curva de nivel pedida.

   c) Falso, por ejemplo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

   sin embargo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

   es divergente.

Asignación de puntaje:

- Asignar dos puntos por cada afirmación justificada de manera correcta.