PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

I3 MAT1203 - Álgebra Lineal

Junio 17, 2013

1. *a)* Sean $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases de $\mathbb{P}_2$ (el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2) donde $\mathcal{B} = \{1+t, 1+t^2, t+t^2\}$ y

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz de cambio de coordenadas tal que para $p \in \mathbb{P}_2$ se tiene

$$[p]_{\mathcal{C}} = Q\ [p]_{\mathcal{B}}.$$

Determine la base $\mathcal{C}$

b) Si la matriz que representa a la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ con respecto a la base

$$\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$$

es

$$A = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

determine $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2)$.

Solución

a) Si $[p]_{\mathcal{C}} = Q\ [p]_{\mathcal{B}}$ entonces $Q^{-1}[p]_{\mathcal{C}} = [p]_{\mathcal{B}}$. Por lo tanto $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}} = Q^{-1}$ y las columnas de Q^{-1} indican como combinar los elementos de la base en $\mathcal{B}$ para obtener la base $\mathcal{C}$

Como

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

tenemos que $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, p_3\}$ donde

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 \cdot (1+t) + 0 \cdot (1+t^2) + 0 \cdot (t+t^2) = 1+t \\ p_2 &= 1 \cdot (t+1) + 1 \cdot (1+t^2) - 1 \cdot (t+t^2) = 2 \\ p_3 &= (-2) \cdot (t+1) + (-1) \cdot (1+t^2) + (2) \cdot (t+t^2) = t^2 - 3 \end{aligned}$$

Asignación de puntos:

- $\boxed{\textbf{2.5 pts.}}$ por el método correcto y $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ por cálculos aritméticos.
- Si combinan los elementos de $\mathcal{B}$ usando los elementos de las columnas de Q en vez de las columnas de Q^{-1} $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

b) Sean $p_1 = 1, p_2 = 1+t, p_3 = 1+t+t^2$. Sea $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$. Entonces $p = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2)p_2 + a_2 p_3$ y por lo tanto

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_0 - a_1 \\ a_1 - a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

Entonces,

$$[T(p)]_{\mathcal{B}} = A[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 - a_1 \\ a_1 - a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a0 - 2\,a1 + a2 \\ 2\,a0 - a1 \\ a1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} T(p) &= (a_0 - 2a_1 + a_2) \cdot p_1 + (2a_0 - a_1)p_2 + a_1 p_3 \\ &= (a_0 - 2a_1 + a_2) + (2a_0 - a_1)(1+t) + a_1(1+t+t^2) \\ &= (3a_0 - 2a_1 + a_2) + (2a_0)t + a_1 t^2 \; \boxed{\textbf{1.0 pts.}} \end{aligned}$$

Criterio general: Asignar 2.5 puntos por el método correcto y 0.5 por la aritmética. Por ejemplo, si el método está correcto y nombran los resultados intermedios usando correctamente a éstos en las fórmulas posteriores sin evaluar las expresiones, asignar 2.5 pts y 0.5 por la evaluación.

Otra manera de resolver el problema es la siguiente:

- La matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{B}$ a la base canónica es

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [\textbf{0,5pts.}]$$

- La matriz que representa a la transformación lineal con respecto de la base canónica es entonces

$$B = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

- Evaluando esta expresión se obtiene

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boxed{\textbf{0.5 pts.}}$$

- Entonces

$$B \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_0 - 2a_1 + a_2 \\ 2a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

  Por lo tanto $T(p) = (3a_0 - 2a_1 + a_2) + (2a_0)t + (a_1)t^2$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

El criterio general para este método es similar al primer método: Si el método es correcto asignar 2.5 puntos y 0.5 por que la aritmética es correcta. Si usan erróneamente la formula $B = Q^{-1}AQ$ y todo el resto está correcto asignar 1.5 puntos.

Notar que también es correcto $B = P^{-1}AP$, etc...

2. *a*) Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. Diagonalice A y use esta factorización para calcular A^{2013}.

   b) Si los valores propios de A son reales y $Av = \lambda v$, con $v \neq \vec{0}$ demuestre que $A^2 + I$ tiene inversa y que $(\lambda^2 - 2\lambda + 3)/(\lambda^2 + 1)$ es valor propio de

$$C = (A^2 - 2A + 3I)(A^2 + I)^{-1}$$

   con vector propio v.

Solución

a) La ecuación característica es

$$P_A(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ -2 & -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 4\,\lambda^2 - 4\,\lambda = -\lambda\,(\lambda - 2)^2 = 0$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 2$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

Para $\lambda_1 = 0$, el subespacio propio es $W_{\lambda_1} = Nul(A - 0 \cdot I) = Nul(A)$. Puesto que la escalonada reducida de A es

$$rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tenemos que $Nul(A) = Gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$.

Para $\lambda_2 = 2$, el subespacio propio es $W_{\lambda_2} = Nul(A - 2 \cdot I)$. Puesto que

$$B_{\lambda_2} = A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

tenemos que

$$W_{\lambda_2} = Gen\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\} \boxed{\textbf{0.5 pts.}}$$

Como para λ_1, λ_2, las multiplicidades algebraicas son iguales a las multiplicidades geométricas A es diagonalizable y

$$A = VDV^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad \boxed{\textbf{0.5 pts.}}$$

Entonces

$$A^{2013} = VD^{2013}V^{-1}A = VDV^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2013} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2013} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \quad \boxed{\textbf{0.5 pts.}}$$

b) Sea $v \neq \vec{0}$ y $Av = \lambda v$. Entonces

- $(A^2 + I)v = A^2 v + v = \lambda^2 v + v = (\lambda^2 + 1)v$ $\boxed{\textbf{0.6 pts.}}$

  - Suponiendo A diagonalizable: (no descontar puntos si no suponen esto), puesto que $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda^2 > 0$ y tenemos que los valores propios de $(A^2 + I)$ son de la forma $\lambda^2 + 1 > 0$ y entonces $A^2 + I$ tiene inversa pues 0 no es valor propio. $\boxed{\textbf{0.6 pts.}}$
  - Además de (*) se tiene $(A^2 + I)^{-1}v = \frac{1}{\lambda^2 + 1}v$ $\boxed{\textbf{0.6 pts.}}$
- También $(A^2-2A+3I)v = A^2v-2Av+3v = \lambda^2v-2\lambda v+3v = (\lambda^2-2\lambda+3)v$ $\boxed{\textbf{0.6 pts.}}$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
(A^2 - 2A + 3I)(A^2 + I)^{-1}v &= (A^2 - 2A + 3I)(\frac{1}{\lambda^2 + 1})v \\
&= \frac{1}{\lambda^2 + 1}(A^2 - 2A + 3I)(v) \\
&= \frac{1}{\lambda^2 + 1}(\lambda^2 - 2\lambda + 3)(v) \\
&= \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 3}{\lambda^2 + 1}(v) \ \boxed{\textbf{0.6 pts.}}
\end{aligned}$$

Entonces $\frac{\lambda^2 - 2\lambda + 3}{\lambda^2 + 1}$ es valor propio de $(A^2 - 2A + 3I)(A^2 + I)^{-1}$ con vector propio v.

3. *a*) Sea A una matriz de coeficientes reales de 2×2 tal que $\lambda = 1-i$ es valor propio con vector propio $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}$. Determine A.

b) Sean $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ son vectores de longitud 1 tales que $\vec{x}\perp\vec{y}$, $\vec{x}\cdot\vec{z} = 1/3$, $\vec{y}\cdot\vec{z} = 1/2$. Demuestre que $\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ es linealmente independiente.

Solución:

a) Hay dos posibles maneras de calcular A. El primer método es que si A es real de 2×2 y $\lambda = a - bi$ es un valor propio complejo con vector propio $v = p + iq$ entonces para $V = [p\ q]$ y $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ se tiene $A = VCV^{-1}$ $\boxed{\textbf{1.5 pts.}}$ (ya sea explícito o implícito, con el propósito de usarlo para resolver el problema (es la estrategia)).

Puesto que $\lambda = 1-i$ tenemos que $a = b = 1$. Además $v == [1, 1-i]^T$ implica que $p = [1,1]^T, q = [0,-1]^T$ y por lo tanto

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \quad \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

Pero

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Evaluando el producto se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} [\mathbf{0{,}5pts}.]$$

El segundo método es que si A es real de 2×2 y $\lambda = 1-i$ es un valor propio complejo con vector propio $v = [1, 1-i]^T$ entonces su otro valor propio es $\overline{\lambda} = 1+i$ con vector propio $\overline{v} = [1, i+i]^T$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$. Entonces A es diagonalizable en los complejos pues tiene dos valores propios distintos y

$$A = VDV^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}^{-1} \quad \boxed{\textbf{1.5 pts.}}$$

Pero

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1-i & i \\ 1+i & -i \end{bmatrix}}{2} \quad \boxed{\textbf{0.5 pts.}}$$

Evaluando el producto se obtiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

b) En el enunciado hubo un error. Los datos dados fueron $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ son vectores de longitud 1 tales que $\vec{x} \perp \vec{y}$, $\vec{x} \cdot \vec{z} = 3$, $\vec{y} \cdot \vec{z} = 2$.(era 1/3 y 1/2 respectivamente)

Si un alumno dijera que los datos en el enunciado son inconsistentes, pues el producto punto de dos vectores de longitud 1 no puede exceder 1 en valor absoluto pues $u \cdot v = ||u||\ ||v||\ cos(\angle(u,v))$ y entonces $|u \cdot v| \leq ||u||\ ||v|| = 1$, y luego dice que puesto que la hipótesis es falsa se puede concluir cualquier cosa de ella. Entonces sería cierto que los vectores son LI $\boxed{\textbf{3 pts.}}$

Si un alumno no se da cuenta de la inconsistencia de los datos y resuelve correctamente el problema usando los datos dados tiene $\boxed{\textbf{3 pts.}}$

Solución: (usando los datos dados en el enunciado)

Hay que demostrar que $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = \vec{0}(*) \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0(**)$.

Tomando el producto punto en (*) por $\vec{x}$ y luego por $\vec{y}$, $\vec{z}$ se obtiene un sistema de 3 ecuaciones para las 3 incógnitas α, β, γ.

$$\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}+\gamma\vec{z} = \vec{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha\vec{x}\cdot\vec{x} + \beta\vec{x}\cdot\vec{y} + \gamma\vec{x}\cdot\vec{z} & = & 0 \\ \alpha\vec{y}\cdot\vec{x} + \beta\vec{y}\cdot\vec{y} + \gamma\vec{y}\cdot\vec{z} & = & 0 \\ \alpha\vec{z}\cdot\vec{x} + \beta\vec{z}\cdot\vec{y} + \gamma\vec{z}\cdot\vec{z} & = & 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} \alpha + 3\gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{array} \ [\mathbf{2{,}0pts}.]$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} \alpha & = & -3\gamma \\ \beta & = & -2\gamma \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow -4\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \alpha = \beta = 0$$

y por lo tanto (*) implica (**) y los vectores son LI. $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

4. Determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA y justifique demostrando su respuesta.

   a) Si la distancia de u a v es igual a la distancia de u a $-v$ entonces u y v son perpendiculares.

   b) Si $A = (a_{i,j})$ es una matriz de coeficientes reales de 2×2 y $Tr(A) = a_{1,1} + a_{2,2}$ entonces A tiene valores propios reales distintos sii $det(A) < \left(\frac{Tr(A)}{2}\right)^2$.

   c) Si A de 6×6 tiene 3 valores propios distintos de los cuales uno tiene 2 vectores propios LI y otro tiene 3 vectores propios LI entonces A es diagonalizable.

   d) Si A de $n \times n$ tiene n vectores propios linealmente independientes entonces A^T también.

Solución

a) VERDADERO: La distancia de u a v es igual a la distancia de u a $-v$ sii $||u-v|| = ||u+v||$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ sii $||u-v||^2 = ||u+v||^2$ sii $||u||^2 - 2u \cdot v + ||v||^2 = ||u||^2 + 2u \cdot v + ||v||^2$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ sii $4u \cdot v = 0$ sii $u \cdot v = 0$ sii u y v son perpendiculares. $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$

b) VERDADERO: La ecuación característica para los valores propios de una matriz A de 2×2 es

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{1,1} - \lambda)(a_{2,2} - \lambda) - a_{1,2}a2,1 \\ &= \lambda^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})\lambda + a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} \\ &= \lambda^2 - Tr(A)\lambda + det(A) \\ &= 0 \; \boxed{\textbf{0.8 pts.}} \end{aligned}$$

Los valores propios serán entonces $\lambda = \dfrac{Tr(A) \pm \sqrt{Tr(A)^2 - 4det(A)}}{2}$. Las raíces serán reales y distintas sii el discriminante de la ecuación cuadrática es positivo sii $(Tr(A))^2 - 4det(A) > 0$ sii $det(A) < \left(\dfrac{Tr(A)}{2}\right)^2$ $\boxed{\textbf{0.7 pts.}}$.

c) VERDADERO: De los valores propios de multiplicidades geométricas 2 y 3 se obtienen 5 vectores propios LI. El tercer valor propio tiene por lo menos multiplicidad geométrica 1. Al unir las bases de los 3 subespacios propios se obtendrán 6 vectores propios LI $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$. Como la matriz es de 6×6 se tendrá entonces una base de vectores propios LI y por lo tanto A es diagonalizable. $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$

d) VERDADERO: A tiene n vectores propios LI sii A es diagonalizable $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ sii existen V de $n \times n$ invertible y D diagonal tal que $A = VDV^{-1}$ sii $A^T = (V^{-1}TD^TV^T$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ sii $A^T = (P)^{-1}DP$, $P = V^T$ sii A^T es diagonalizable $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ sii A^T tiene n vectores propios LI.

<u>TIEMPO</u>: **2 horas**