



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FACULTAD DE MATEMÁTICA

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

PRIMER SEMESTRE DE 2019

Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026

Ayudantía 4

05 de Abril de 2019

1. Un individuo lanza repetidamente y en forma independiente un dado al azar sobre un tablero representado por el círculo unitario

$$C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Para $A \subset C$, se define la función $P(A) = \frac{\text{Area}(A)}{\pi}$.

- a) Pruebe que $P(\cdot)$ es una medida de probabilidad en el espacio medible $(C, 2^C)$.
- b) Pruebe que cualquiera que sea $0 < \delta < 1$, una infinidad de los lanzamientos aterrizará en una región a distancia mayor que δ del centro $(0, 0)$ del tablero.
- c) Considere los eventos

$$A_n = \left\{ \text{en el } n\text{-ésimo intento el dardo aterriza a una distancia menor que } \frac{1}{n^\alpha} \right\}, \quad n \geq 1.$$

Pruebe que si $0 < \alpha \leq 1/2$ entonces con probabilidad 1 una infinidad de dichos eventos ocurrirá, pero que si $\alpha > 1/2$, entonces con probabilidad 1 a lo más un número finito de dichos eventos ocurrirá.

2. Utilizando el contexto del problema 2 de la Ayudantía 3, describa la función de distribución del número de bolitas rojas obtenidas en 3 extracciones.
3. Sea $F_X(x)$ una función de distribución. Demuestre que

$$P_X(a < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

4. Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - k(1 - x) & \text{si } 0 \leq x < k \\ 1 & \text{si } x \geq k \end{cases}$$

- a) Determine las restricciones que debe cumplir k para que $F(x)$ sea una función de distribución. Indique a que tipo de distribución corresponde X .
- b) Calcule $P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq k\right)$.

c) Calcule $P\left(X \leq \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\right)$.

5. Verifique que para todo k entero positivo, la función F definida por

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^j e^{-x}}{(k-1)!}, \quad x > 0$$

es una función de distribución acumulada de cierta variable aleatoria.

Propuesto: Un mono se encuentra escribiendo en un teclado de forma aleatoria. Demuestre que en un tiempo infinito el mono escribirá la obra "Hamlet" de Shakespeare.