# Operaciones con límites

**Introducción al Cálculo - MAT1107**

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

1 de Junio de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

# Operaciones con límites



**Teorema.**

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}$ es una sucesión acotada entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0\,.$$

**Demostración** Existe $c > 0$ tal que $|b_n| \leqslant c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ entonces $|a_n| < \varepsilon/c$. Entonces, si $n > N$ implica que

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < (\varepsilon/c) \cdot c = \varepsilon\,.$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

# Operaciones con límites



**EJEMPLO 1** Si $a_n = \dfrac{1}{n}$ y $b_n = \operatorname{sen}(n)$ entonces $\{b_n\}$ no es convergente, sin embargo como $-1 \leqslant b_n \leqslant 1$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0\,.$$

# Operaciones con límites



**Teorema.**

Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ entonces:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L + M$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = L \cdot M$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L}{M}$, cuando $M \neq 0$.

# Operaciones con límites



**Teorema.**

Si $p > 0$ entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0.$

**Demostración** Dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar $N$ tal que si $n > N$ entonces

$$\left|\frac{1}{n^p} - 0\right| = \frac{1}{n^p}$$

debe ser menor que $\varepsilon$. Imponiendo la condición, vemos que

$$\frac{1}{n^p} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{\varepsilon^{1/p}} < n$$

Por la propiedad arquimediana, dado $a = 1/\varepsilon^{1/p}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a < N$. Luego, si $n > N$ entonces

$$\frac{1}{\varepsilon^{1/p}} < n \Longleftrightarrow \frac{1}{n^p} < \varepsilon\,.$$

# Operaciones con límites

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

**EJEMPLO 2** Determine el límite de la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

**EJEMPLO 3** Determine el límite de la sucesión $b_n = \dfrac{n^3 + 2n^2 - 4}{n^4 + 2}$

# Operaciones con límites



**Observación** Si $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios reales, entonces para encontrar el límite de el cociente entre dos polinomios en la variable $n$, esto es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

basta con amplificar por $\dfrac{1}{n^p}$ donde $p$ es el grado del polinomio $Q$

# Límites y desigualdades



**Teorema. (Teorema del Sandwich)**

Si $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para todo $n \geqslant n_0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

**Demostración** Dado cualquier $\varepsilon > 0$, existen $N_1$ y $N_2$ tales que si $n > N_1 \Longrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ y $n > N_2 \Longrightarrow L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Entonces, si $n > N$ implica que

$$L - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < L + \varepsilon \Longrightarrow b_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

luego $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

# Límites y desigualdades

**EJEMPLO 4** Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

**Solución** Por la desigualdad fundamental del logaritmo

$$\ln(x) \leqslant x - 1 < x$$

En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \ln(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n} \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant \ln(n^{1/2}) \leqslant n^{1/2} \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{1}{2}\ln(n) \leqslant n^{1/2} \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \frac{2n^{1/2}}{n} \\
&\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant \frac{\ln(n)}{n} \leqslant \frac{2}{n^{1/2}}
\end{aligned}$$

Por el teorema del Sandwich se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$

# Límites y desigualdades

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

**EJEMPLO 5** Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

**EJEMPLO 6** Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ , donde

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} \, .$$