Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
13 de Diciembre de 2023

MAT 1107 Introduccción al Cálculo - Pauta Examen

Tiempo: 2:00 horas

1. Sea $(a_n)_n$ una sucesión creciente y $(b_n)_n$ una sucesión decreciente. Demuestre que si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n < b_n$, entonces las dos sucesiones convergen.

   Solución. Tenemos que $(a_n)_n$ es una sucesión creciente y acotada superiormente por b_1. Por lo tanto, es convergente. Por otra parte, $(b_n)_n$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por a_1. Por lo tanto, también es convergente.

2. Calcule
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}.$$

   Solución.
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^4}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4-(n-1)^4}{n(n^3-(n-1)^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^3-6n^2+4n-1}{3n^3-3n^2+n} = \frac{4}{3}.$$

3. Resuelva la siguiente inecuación,
$$\frac{(x-1)(x-2)\sqrt{x+3}}{x^2+x+1} \geq 0.$$

   Solución. Notemos en primer lugar que la inecuación está bien definida para $x \geq -3$, pues en ese caso la raíz tiene sentido. Por otra parte, para todo $x \geq -3$ tenemos que $\sqrt{x+3} \geq 0$. Además, como la función cuadrática x^2+x+1 posee discriminante negativo y evaluada en cero es positiva, tenemos que $x^2+x+1 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, basta resolver $(x-1)(x-2) > 0$. Pero esta es una parábola convexa que posee raíces $\{1, 2\}$. Por lo tanto, es no negativa en $(-\infty, 1] \cup [2, \infty)$. Luego, el conjunto solución de la inecuación es:
$$[-3,\infty) \bigcap ((-\infty, 1] \cup [2,\infty)) = [-3, 1] \cup [2, \infty).$$

4. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ y $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $\sqrt{1-x^2}$. Determine el dominio una fórumla para $g \circ f$.

   Solución. Notemos que,
$$\mathrm{dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{dom}f : f(x) \in \mathrm{dom}g\} = \{x \in \mathbb{R} : 3x+2 \in [-1, 1]\}$$
$$\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq 3x+2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq \frac{-1}{3}\} = \left[-1, -\frac{1}{3}\right].$$

   Además,
$$(g \circ f)(x) = \sqrt{1-(3x+2)^2} = \sqrt{-3-13x-9x^2}.$$