Clase 7

viernes, 16 de agosto de 2024 10:33

Soluciones a Sistemas Lineales

El objetivo de esta clase y la siguiente es desarrollar una metodología (más precisamente, un algoritmo) que permita resolver un sistema de ecuaciones lineales. Esto nos permitirá además entender mejor el conjunto solución y el tipo de conjuntos que podríamos obtener.

Operaciones Elementales por fila

Recordemos de las clases anteriores que utilizamos ciertas operaciones sobre un SEL para encontrar su conjunto solución. Estas eran: 1) Multiplicar una ecuación por $\alpha \neq 0$ 2) Sustituir una fila por la suma de sí misma y un múltiplo de otra. También observamos que intercambiar el orden en que aparecen las ecuaciones no afecta el conjunto solución.

En resumen, si es que pensamos en la matriz aumentada del sistema, obtenemos las siguientes operaciones:

OPERACIONES ELEMENTALES DE FILA (OEF)

1. (Remplazo) Sustituir una fila por la suma de sí misma y un múltiplo de otra fila. → Tipo 1
2. (Intercambio) Intercambiar dos filas. → Tipo 2
3. (Escalamiento) Multiplicar todos los elementos de una fila por una constante diferente de cero. → Tipo 3

Ejemplo:

1-

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{rrr:r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array}\right]$$

4·[ecuación 1]:	$4x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 0$
+ [ecuación 3]:	$-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9$
[nueva ecuación 3]:	$-3x_2 + 13x_3 = -9$

El resultado de este cálculo se escribe en lugar de la tercera ecuación original:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

2.- En el ultimo sistema podemos intercambiar la 2^{da} y 3^{ra} fila

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{array}\right]$$

3.- Podemos multiplicar la ultima ecuación por $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -3x_2 + 13x_3 &= -9 \\ x_2 - 4x_3 &= 4 \end{aligned} \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right]$$

Las OEF serán el ingrediente principal para resolver un SEL. Una propieda fundamental es que son reversibles (es decir, se pueden "deshacer").

Lema 1: Supongamos que aplicando una OEF de Tipo i a $[A \vdots b]$ obtenemos $[A' \vdots b']$. Luego existe una OEF de tipo i que transforma $[A' \vdots b']$ en $[A \vdots b]$

(En otras palabras, se "reversa" o "deshace" la operación original)

Dem: Veamos por tipo

Tipo 1 (Reemplazo):

Supongamos que, solo por simplicidad de notación, que aplicamos a $[A \vdots b]$ la siguiente variación, que aplicamos a $[A:b]$ la siguiente OEF:

Reemplazamos la segunda fila de $[A:b]$ por la segunda fila mas α veces la primera.

Es decir, la segunda fila de $[A':b']$ es

$$\left[\, a_{21}+\alpha a_{11} \quad a_{22}+\alpha a_{12} \quad a_{23}+\alpha\cdot a_{13} \quad \cdots \quad a_{2n}+\alpha a_{1n} \,\right]$$

(las otras filas de $[A':b']$ son iguales a las de $[A:b]$).

Si ahora aplicamos a $[A':b']$ la siguiente OEF:

Reemplazamos la segunda fila de $[A':b']$ por la segunda veces más $(-\alpha)$ veces la primera.

La segunda fila de la nueva matriz es

$$\left[\, (a_{21}+\cancel{\alpha a_{11}})+\cancel{(-\alpha) a_{11}} \quad \cdots \quad (a_{2n}+\cancel{\alpha\cdot a_{1n}})+\cancel{(-\alpha)\cdot(a_{1n})} \,\right]$$

Esta fila es igual a la segunda fila de $[A:b]$

<u>Tipo 2 (intercambio)</u>:

Claramente si intercambiamos la fila i con la j para pasar de $[A:b]$ a $[A':b']$, volver a intercambiar la fila i con la j en $[A':b']$ nos entrega $[A:b]$.

<u>Tipo 3 (escalamiento)</u>

Si multiplicamos la fila i por $\alpha\neq 0$, al volver a multiplicarla por $\frac{1}{\alpha}$ obtenemos la fila original ▨

Teorema 2: Considere un sistema lineal con matriz ampliada $[A:b]$. Sea $[A':b']$ la matriz ampliada obtenida al aplicar una operación elemental por fila a $[A:b]$. Luego,

$$Ax=b \qquad\qquad A'x=b'$$

$A x = b$ y $A' x = b'$
tienen el mismo conjunto solución

Dem: Es fácil ver que si $x \in \mathbb{R}^n$ es solución de la ecuación

$$A x = b$$

entonces el mismo x es solución de

$$A' x = b'$$

para cada uno de los tipos de OEF (para los tipos 1 y 3, multiplicamos o sumamos lo mismo a ambos lados de la ecuación del sistema que cambia. Para el tipo 2 solo intercambiamos el orden de las operaciones).

Como las OEF son reversibles, por el mismo argumento, si $x \in \mathbb{R}^n$ es solución de

$$A' x = b'$$

entonces x es solución de

$$A x = b$$

(conclusión) $\therefore$ $Ax = b$ y $A'x = b'$ tienen el mismo conjunto solución $\blacksquare$

Def: Dos matrices se dicen equivalentes por fila si existe una secuencia de operaciones elementales por fila que transforma una matriz en otra.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Fila 3}]{\text{Fila 1} \leftrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Fila 2} \to \text{Fila 2} + \text{Fila 1}} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Fila 3} \to 3F3} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ es equivalente por fila con $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

Teorema 3: Si $[A \vdots b]$ y $[A' \vdots b']$ son equivalentes por fila entonces

$$Ax = b \quad y \quad A'x = b'$$

tienen el mismo conjunto solución.

Dem: Basta con aplicar el Teo. 2 las veces que sean necesarias.

Matrices Escalonadas

Nuestro método para resolver SEL se basará en convertir una matriz ampliada $[A \vdots b]$ en una matriz equivalente por fila "más sencilla". Esta forma más sencilla nos permitirá resolver el sistema fácilmente. La forma se basa en la siguiente definición.

Def:

i) Una fila o columna es no-nula o distinta de cero si y solo si alguna coordenada es distinta de 0

ii) La entrada principal de una fila no-nula es la primera coordenada (o entrada) que es distinta de cero.

Ejemplo

entradas principales

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{3} & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \text{fila no-nula} \\ \to \text{fila no-nula} \\ \to \text{fila nula (o cero)} \end{matrix}$$

Definición:

Una matriz rectangular está en **forma escalonada** (o **forma escalonada por filas**) si tiene las siguientes tres propiedades:

1. Todas las filas diferentes de cero están arriba de las filas que solo contienen ceros.
2. Cada entrada principal de una fila está en una columna a la derecha de la entrada principal de la fila superior.
3. En una columna todas las entradas debajo de la entrada principal son ceros.

Si una matriz de forma escalonada satisface las siguientes condiciones adicionales, entonces está en **forma escalonada reducida** (o **forma escalonada reducida por filas**):

4. La entrada principal en cada fila diferente de cero es 1.
5. Cada entrada principal 1 es la única entrada distinta de cero en su columna.

Ejemplo

$\square$: entrada principal

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & -3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5/2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 29 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 16 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada — Matriz escalonada reducida

Teorema 4: Cada matriz es equivalente por fila a una y solo una matriz escalonada reducida.

La demostración de este teorema es algo técnica y la omitiremos. La pueden encontrar en el apéndice A del Lay.

Def: Las columnas principales de una matriz son las columnas que contienen entradas principales en su forma escalonada (reducida)

Las variables principales de $Ax=b$ son las variables asociadas a columnas principales de $[A \vdots b]$.

Las variables que no son principales se dicen variables libres.

Ejemplo: Retomemos el ejemplo al inicio de la clase:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

Vimos que la matriz ampliada era equivalente por filas a (Paso 1)

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

Multiplicamos la 2da fila por $\frac{1}{2}$ $\left(F_2 \leftarrow \frac{1}{2} \cdot F_2\right)$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array}\right]$$

Le sumamos a la 3ra fila 3 veces la segunda

$$\left[\begin{array}{ccc:c} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -4 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right]$$

Como veremos la próxima clase, podemos seguir realizando operaciones por fila hasta obtener una matriz escalonada reducida. Sin embargo, estas operaciones no cambian la posición de las entradas principales

$\therefore$ Las columnas principales son las columnas 1, 2 y 3.

Las variables principales son x_1, x_2 y x_3.

En este sistema no hay variables libres.

Ejemplo: La matriz escalonada reducida

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right]$$

representa al sistema

$$x_1 + 2x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5 = 2$$
$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + x_4 + 0\,x_5 = 1$$
$$0\,x_1 + 0\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + x_5 = 3$$

Las columnas principales son la 1, 4 y 5

" variables " " x_1, x_4, x_5

" " libres son x_2, x_3.