Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2013

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 2

1. a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$ siendo a una constante positiva.

Solución
Dado que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$ es de la forma $\dfrac{0}{0}$, podemos aplicar L'Hospital y tenemos que si existe el límite es igual a:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln(a) - a^{\operatorname{sen}(x)} \cos(x) \ln(a)}{3x^2}$$

(**1.0 pts**)

que nuevamente es de la forma $\dfrac{0}{0}$, y volvemos a aplicar L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x(\ln(a))^2 - a^{\operatorname{sen}(x)} \cos^2(x)(\ln(a))^2 - \operatorname{sen}(x) a^{\operatorname{sen}(x)} \ln(a)}{6x}$$

(**1.0 pts**)

y nuevamente es de la forma $\dfrac{0}{0}$ aplicando nuevamente L'Hospital:

$\ln(a) \lim\limits_{x\to 0}$
$\dfrac{a^x(\ln(a))^2 - (\ln(a))^2 a^{\operatorname{sen}(x)} \cos^3(x) + 2\ln(a) a^{\operatorname{sen}(x)} \cos(x)\operatorname{sen}(x) + a^{\operatorname{sen}(x)} \cos(x)\operatorname{sen}(x)\ln(a) + a^{\operatorname{sen}(x)} \cos(x)}{6}$

$= \dfrac{\ln(a)}{6}$. (**1.0 pts**)

NOTA: 0.2 pts menos cada vez que ocupan L'Hospital y no lo justifican.

b) Sea $f(x) = 2x + \operatorname{sen}(x)$ y sea g su función inversa. Calcule $g'(2\pi)$.

Solución
Dado que $Df^{-1}(f(x_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ y $f(\pi) = 2\pi$ es decir $x_0 = \pi$
(**1.0 pts**)
entonces derivando f tenemos que

$$f'(x_0) = 2 + \cos(\pi) = 2 - 1$$

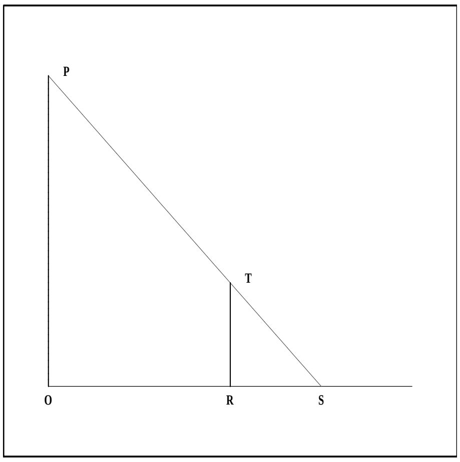
(**1.0 pts**)
Por lo tanto

$$g'(2\pi) = \frac{1}{2-1} = 1$$

(**1.0 pts**)

2. a) Un reflector en el piso alumbra un muro a 12 m de distancia. Si un hombre de 2m de estatura camina del reflector hacia el muro a una velocidad de 1.6 m/s. ¿Con que velocidad disminuye la altura de su sombra en el muro cuando está a 4 m de la pared?

Solución



En la figura del lado $\overline{RT}$ es el hombre que camina y $\overline{OP}$ su sombra en el muro arrojada por el foco ubicado sobre el piso, en el punto S.

Sea $h = \overline{OP}$ y sean además $y = \overline{0R}$ (la distancia del hombre al muro) y $x = \overline{RS}$ (la distancia del hombre al foco).

Entonces, como $x + y = 12$ tenemos que $y = 12 - x$.

$$\frac{h}{12} = \frac{2}{x} \quad \longrightarrow \quad h = \frac{24}{x}\,.$$

(**1.0 pts**)

Notando que x y h son funciones del tiempo t derivamos obteniendo

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{24}{x^2}\,x'(t)\,.$$

(**1.0 pts**)

Pero, por hipótesis, $x'(t) = 1.6 = 8/5$ m/2 de modo que

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{24}{x^2} \cdot \frac{8}{5} = -\frac{192}{5x^2}\,.$$

(**0.6 pts**)

Así, cuando $y = 4$ se tiene que $x = 8$, tenemos que h decrece a razón de $\frac{3}{5} = 0.6$ m/s.

(**0.4pts**)

NOTA: Si colocan negativo el decrecimiento, quitar 0.1 pts.

b) Sea f es función derivable y tal que $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función g(x) dada por:

$$g(x) = f(x^2)$$

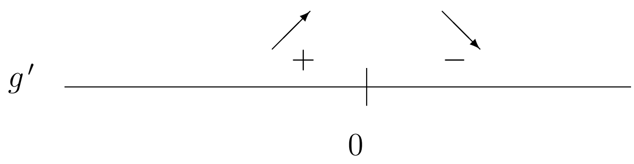
Solución

Usando la regla de la cadena, se tiene:

$$g'(x) = 2x\,f(x^2)$$

(**1.5 pts**)

Como por hipótesis $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces $g'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, analizando los cambios de signo de g' y usando el que $f'(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, se tiene:



Por lo tanto g es creciente en $\mathbb{R}^-$ y decreciente en $\mathbb{R}^+$

(1.5 pts)

3. a) Demostrar que si f es una función que admite 3 raíces distintas en un intervalo abierto I, entonces f'' tiene por lo menos una raíz en I.

Solución:

Sea $I = (a, b)$ con $a < b$. Entonces por hipótesis

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (a, b)(f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = f(\alpha_3)) = 0$$

(**0.5 pts**)

Como f es función 2 veces derivable en I entonces cumple con las condiciones del teorema de Rolle y por lo tanto:

$$\exists \alpha_4, \alpha_5 \in (a, b)\Big(f'(\alpha_4) = \frac{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} = 0 \text{ y } f'(\alpha_5) = \frac{f(\alpha_3) - f(\alpha_2)}{\alpha_3 - \alpha_2} = 0.\Big)$$

(**1.5 pts**)

Luego, volviendo a usar el teorema de Rolle, se tiene que:

$$\exists \alpha \in I\Big(f''(\alpha) = \frac{f(\alpha_5) - f(\alpha_4)}{\alpha_5 - \alpha_4} = 0\Big)$$

Esto nos dice que f'' tiene por lo menos una raíz en I.

(**1.0 pts**)

b) Se fabrica un recipiente metálico cilíndrico sin tapa de tal modo que contenga $V_0 cm^3$ de líquido. Calcule la superficie mínima del recipiente.

Solución:

Consideremos el recipiente metálico cilíndrico, de altura h y radio r, entonces se trata de minimizar la superficie S del cilindro, dada por:

$$S(r, h) = 2\,\pi\, r\, h + \pi\, r^2\,,\ 0 < r\,,\ 0 < h$$

Sujeto a la condición de que

$$V_0 = \pi\, r^2\, h$$

de donde $h = \dfrac{V_0}{\pi\, r^2}$, luego:

$$S(r) = \frac{2\, V_0}{r} + \pi\, r^2\,,\ 0 < r$$

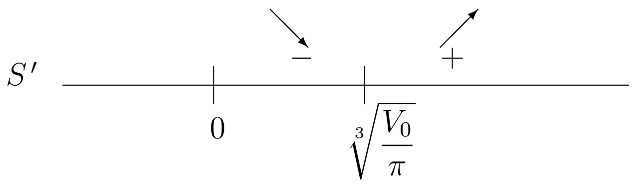
(**0.5 pts**)

Derivando con respecto a r, se tiene:

$$S'(r) = -\frac{2\, V_0}{r^2} + 2\pi\, r = 0 \Longleftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$$

(**1.0 pts**)

$r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V_0}{\pi}}$ es el único punto crítico, analizando los cambios de signo de S' (o la segunda derivada de S), se tiene:



$$f' \text{ cambia de } + \text{ a } - \text{ en } r_0 \Longrightarrow S(r_0) \text{ es un mínimo relativo de } f$$

(**1.0 pts**)

Como $\displaystyle\lim_{r\to 0} S(r) = \lim_{r\to\infty} S(r) = \infty,$ entonces r_0 es un mínimo absoluto de S, así $S(r_0) = S\left(\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{\pi}}\right) = 3\sqrt[3]{\pi}\, V_0^{2/3}$ corresponde a la superficie mínima.

Otra opción:

Dado que $S'' > 0,$ para $r > 0,$ entonces la función es cóncava hacia arriba, entonces r_0 es un mínimo absoluto de S y $S(r_0) = S\left(\sqrt[3]{\dfrac{V_0}{\pi}}\right) = 3\sqrt[3]{\pi}\, V_0^{2/3}$ corresponde a la superficie mínima.

(**0.5 pts**)

4. Traze la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$, indicando dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales, concavidad, puntos de inflexión y asíntotas.

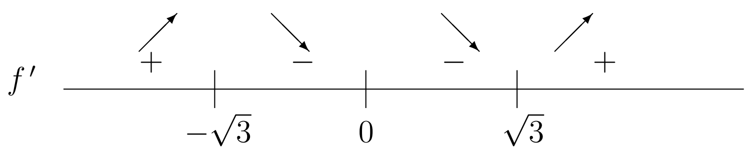
Solución:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\,,\,1\}$
  (**0.1 pts**)

- $f\,'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^2\,(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$
  (**0.5 pts**)

- $f\,'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \sqrt{3} \ \vee \ x = -\sqrt{3}$
  (**0.1 pts**)

- Analizando los cambios de signo de $f\,'$, se tiene:



  $f\,'$ cambia de $+$ a $-$ en $x = -\sqrt{3} \Longrightarrow f(-\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, es un mínimo relativo de f

  $f\,'$ cambia de $-$ a $+$ en $x = \sqrt{3} \Longrightarrow f(\sqrt{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, es un máximo relativo de f

  Como $f\,'$ no cambia en $x = 0$, entonces $f(0)$ no es un valor extremo de $f(x)$.

  (**1.0 pts**)

- $f(x)$ es creciente en $]-\infty\,,\,-\sqrt{3}[\,\cup\,]\sqrt{3}\,,\,+\infty[$ y es decreciente en $]-\sqrt{3}\,,\,\sqrt{3}[$

  (**1.0 pts**)

- $f\,''(x) = \dfrac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)\cdot 2\,(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$
  (**1.0 pts**)

$$f\,''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

  (**0.1 pts**)

- Analizando los cambios de signos de f'', se tiene:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & \cap & & \cup & & \cap & & \cup \\
f'' & - & & + & & - & & + \\
\hline
 & & -1 & & 0 & & 1 &
\end{array}
$$

f'' cambia de signo en $x = 0 \Longrightarrow (0,0)$ es un punto de inflexión de f

(**0.4 pts**)

- $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $]-1\,,\,0[\,\cup\,]1\,,\,+\infty[$ y es cóncava hacia abajo en $]-\infty\,,\,-1[\,\cup\,]0\,,\,1[$

(**0.8 pts**)

- Como
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$
y
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$$
entonces $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales de $f(x)$.

(**0.2 pts**)

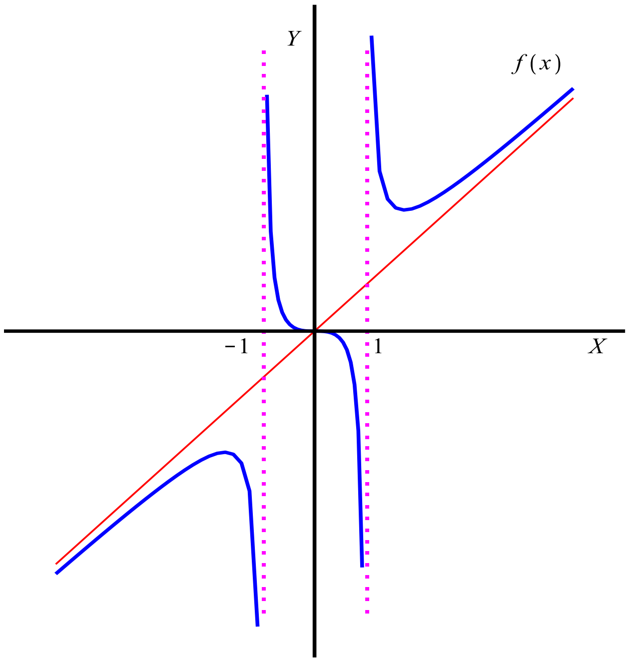
- Además como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, entonces no hay asíntotas horizontales de $f(x)$.

(**0.1 pts**)

- Sea $y = mx + n$, asíntota oblícua del gráfico de $f(x)$, entonces:
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1$$
$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 0$$
Luego $y = x$ es asíntota oblícua del gráfico de $f(x)$.

(**0.4 pts**)

- El gráfico de $f(x)$, es por lo tanto:



(**0.7 pts**)