Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2016

MAT1620 ⋆ Cálculo II
Interrogación N° 1

1. Determine la longitud de la curva $y = \ln(\sec(x))$, $0 \leq x \leq \pi/4$.

Solución. La longitud de la curva es

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx = \ln(\sec x + \tan x) \mid_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Criterio de corrección:

- Asignar **2 puntos** por integral que representa el largo de la curva, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + (\tan(x))^2} dx$
- Asignar **2 puntos** por $1 + (\tan(x))^2 = \sec^2(x)$.
- Asignar **2 puntos** por calcular correctamente la integral.

2. Suponga que se necesitan $2\,J$ de trabajo para estirar un resorte desde su longitu natural de $30\,cm$ hasta una longitud de $42\,cm$. ¿Cuánto trabajo se requiere para estirarlo desde $35\,cm$ hasta $40\,cm$?

   Solución. Por la ley de Hooke sabemos que la fuerza F para mantener estirado el resorte una distancia x es $F(x) = kx$. Si en $x = 0$ se tiene el largo natural del resorte, entonces cuando x varía de 0 a 12 el trabajo es de $2\,J$. Es decir:

$$2 = \int_0^{12} kx\,dx,$$

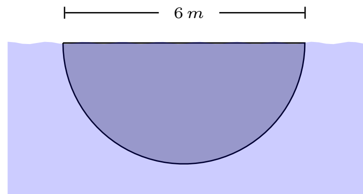
   de donde obtenemos que $k = \frac{1}{36}$. Por lo que $F(x) = \frac{1}{36}x$, y así el trabajo que se requiere para estirarlo desde $35\,cm$ hasta $40\,cm$ es de

$$\int_5^{10} \frac{1}{36}x = \frac{25}{24}\,J$$

   Criterio de corrección:

   - Asignar **2 puntos** por expresar $2 = \int_0^{12} kx\,dx$ o $2 = \int_0^{0.12} kx\,dx$.
   - Asignar **2 puntos** por encontrar función fuerza.
   - Asignar **2 puntos** por respuesta correcta.

3. Una placa vertical se sumerge en agua, como muestra la figura. Determine la fuerza hidrostática que el agua ejerce sobre la placa.



Nota. Suponer que la constante de gravedad es $g = 10\, m/seg^2$ y la densidad del agua $\rho = 1000\, kg/m^3$.

Solución. Coloquemos el origen en el centro de la circunferencia con sentido positivo hacia abajo y así representar la media circunferencia con ecuación $y = -\sqrt{9 - x^2}$.
Al dividir la región en tiras horizontales, como muestra la figura, obtenemos que la fuerza hidrostática sobre esta tira es aproximadamente

$$F_i = \rho \cdot g \cdot d_i \cdot A_i,$$

donde

$$A_i = 2\sqrt{9 - y_i^2}\triangle y_i$$

y

$$d_i = y_i$$

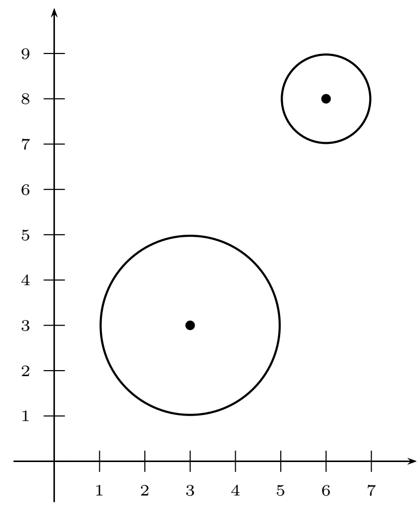
Es decir la fuerza total es

$$F = 2\rho \cdot g \int_0^3 y \cdot \sqrt{9 - y^2} dy = 180000N$$

Criterio de corrección:

- Asignar **2 puntos** por el área de la sección transversal $A_i = 2\sqrt{9 - y_i^2}\Delta y_i$
- Asignar **2 puntos** por obtener la integral $\int_0^3 y \cdot \sqrt{9 - y^2} dy$
- Asignar **2 puntos** por respuesta correcta.

4. El dibujo muestra 2 circunferencias, una con centro $A(3,3)$ y radio 2, y otra centro $B(6,8)$ y radio 1. Si ambos discos giran alrededor del eje Y, ¿cuál de los dos sólidos que se forman tiene mayor volumen?. Justifique su respuesta.



Solución. Por teorema de Pappus obtenemos que el volumen del primer sólido es

$2\pi\cdot$(coordenada x centro de masa)$\cdot$(área circunferencia)$=2\pi \cdot 3 \cdot 4\pi = 24\pi^2$

y de la misma manera, el volumen del segundo sólido es

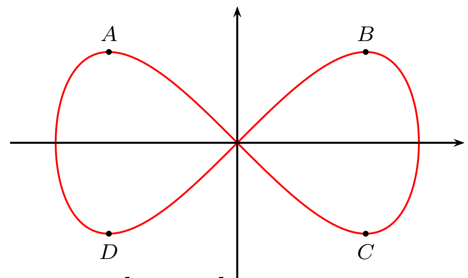
$2\pi\cdot$(coordenada x centro de masa)$\cdot$(área circunferencia)$=2\pi \cdot 6 \cdot \pi = 12\pi^2$

Por lo que se concluye que el volumen del sólido que se forma al girar la circunferencia con centro $A(3,3)$ y radio 2 tiene mayor volumen.

Criterio de corrección:

- Asignar **4 puntos** por usar correctamente teorema de Pappus en cada círculo.
- Asignar **2 puntos** por respuesta correcta.

5. Determine los puntos sobre la curva de ecuaciones paramétricas $x = 2\cos(t)$, $y = \sin(2t)$, con $t \in [0, 2\pi]$, donde la recta tangente es **horizontal**.



Solución. Debemos determinar los t para los cuales

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = 0$$

Para ello comenzamos resolviendo la ecuación $y'(t) = 0$, vale decir

$$2\cos(2t) = 0, \quad t \in [0, 2\pi]$$

que tiene solución $\pi/4, 5\pi/4, 3\pi/4, 7\pi/4$.

Ahora es necesario verificar que $x'(t) \neq 0$ en los valores de t recién encontrados. Si $x'(t) = -2\sin(t)$ entonces

$$x'(\pi/4) = -\sqrt{2}, \quad x'(5\pi/4) = \sqrt{2}, \quad x'(3\pi/4) = -\sqrt{2}, \quad x'(7\pi/4) = \sqrt{2},$$

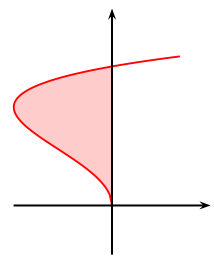
Por lo tanto, los puntos donde la recta tangente es horizontal son:

$$(\sqrt{2}, 1), \quad (-\sqrt{2}, 1), \quad (\sqrt{2}, -1), \quad (-\sqrt{2}, -1)$$

Evaluación.

- Asignar (**0.5 ptos**) por cada valor de t encontrado correctamente.
- Asignar (**0.5 ptos**) por verificar que $x'(t) \neq 0$ en los valores de t encontrados.
- Asignar (**0.5 ptos**) por cada punto sobre la curva donde la tangente es horizontal.

6. Dada la curva de ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$, determine el área de la región sobreada.



Solución.

Alternativa 1 Integrando en el eje X.

La gráfica de la curva paramétrica es para $t \in [0, 2]$, luego

$$\begin{aligned} \int_0^2 y(t)x'(t)\,dt &= \int_0^2 \sqrt{t}2(t-1)\,dt \\ &= \frac{8\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar explícita o implícitamente el intervalo de integración.
- Asignar (**2 ptos**) por obtener la integral $\int_0^2 \sqrt{t}2(t-1)\,dt$. Si llega a esta integral ya tiene (**4 ptos**).
- Asignar (**2 ptos**) por calcular correctamente la integral.

Alternativa 2 Integrando en el eje Y.

Podemos observar que $x(t) = 0$ para $t = 0$ y $t = 2$. De este modo $0 \leq y(t) \leq \sqrt{2}$.

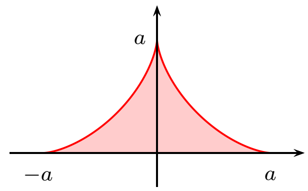
$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} x\,dy &= \int_0^2 (t^2 - 2t)\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ &= -\frac{8\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

Por lo tanto el área es $\dfrac{8\sqrt{2}}{15}$.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar explícita o implícitamente el intervalo de integración.
- Asignar (**2 ptos**) por obtener la integral $\int_0^2 (t^2 - 2t)\frac{1}{2\sqrt{t}})\,dt$. Si llega a esta integral ya tiene (**4 ptos**).
- Asignar (**2 ptos**) por determinar correctamente el área POSITIVA.

7. Determine el área de la superficie obtenida al girar la **astroide** de ecuación paramétrica $x = a\cos^3(t)$, $y = a\sin^3(t)$, con $t \in [0, \pi]$, en torno al eje X.



Solución. La fórmula del área de superficie es

$$A = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

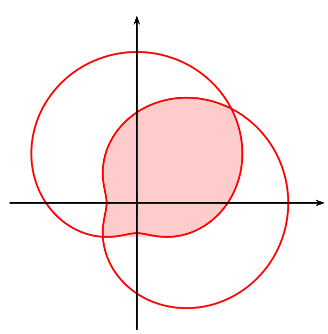
Por simetría del problema, basta con calcular la integral entre $[0, \pi/2]$ y multiplicarla por 2, vale decir

$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^{\pi} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt &= 4\pi \int_0^{\pi/2} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt \\ &= 12a^2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\cos(t)\, dt \\ &= \frac{12a^2\pi}{5} \end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por usar simetría para identificar el área total como el doble del área para $t \in [0, \pi/2]$, puede ser explícito o en la integral. Si integra entre $[0, \pi]$ debe tener presente que la raíz entrega el término $3a|\cos(t)\sin(t)|$ y debe dividir la integral.
- Asignar (**2 ptos**) por obtener la integral $\int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\cos(t)\, dt$ o bien $\int_0^{\pi} \sin^3(t)|\sin(t)\cos(t)|\, dt$.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar correctamente el área.

8. Determine el área de la región localizada al interior de las curvas $\rho = 3 + 2\cos(\theta)$ y $\rho = 3 + 2\sin(\theta)$.



Solución. Debemos comenzar resolviendo la ecuación $3 + 2\cos(\theta) = 3 + 2\sin(\theta)$ que tiene solución $\theta = \pi/4, 5\pi/4$.

Por simetría, el área es

$$2\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (3 + 2\cos(\theta))^2\, d\theta 11\pi - 12\sqrt{2}$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por usar simetría para identificar el área total como el doble del área para $\theta \in [\pi/4, 5\pi/4]$. También podría ser en otro intervalo. Puede ser explícito o en la integral.
- Asignar (**2 ptos**) por obtener la integral $\int_{\pi/4}^{5\pi/4} (3 + 2\cos(\theta))^2 \, d\theta$ o una equivalente dependiendo del intervalo.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar correctamente el área.

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa