Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2017

# MAT 1620 – Cálculo II

## Solución Interrogación 2

1. Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 5 m y 12 m, y el error posible en la medición es de cuanto mucho $0,2$ cm en cada uno. Use diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado del área del triángulo.

   **Solución.** El área de del triángulo es $A(x,y) = \dfrac{xy}{2}$ donde $x$ e $y$ son las medidas de los catetos del triángulo rectángulo. Entonces,

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = \frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy$$

   y $|\Delta x| \leqslant 0,002$, $|\Delta y| \leqslant 0,002$. Luego el error máximo en el calculo del área es

$$dA = 6 \cdot (0,002) + \frac{5}{2} \cdot (0,002) = 0,017\mathrm{m}^2 \, .$$

**Puntaje Pregunta 1.**

- 2 puntos por dar la función área del triángulo
- 2 puntos por calcular la diferencial del área.
- 2 puntos por estimar el error.

2. Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\arctan\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] A & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Calcule el valor de $A$ para que la función $f$ sea continua en $(0,0)$.

**Solución.** Usando coordenadas polares $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$ se obtiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right)\\
&= \lim_{r\to 0}\arctan\left(\frac{r^4\cos^4\theta+r^4\operatorname{sen}^4\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\operatorname{sen}^2\theta}\right)\\
&= \lim_{r\to 0}\arctan\left(\frac{r^4(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta)}{r^2\underbrace{(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}_{1}}\right)\\
&= \lim_{r\to 0}\arctan\big(r^2(\cos^4\theta+\operatorname{sen}^4\theta)\big)\\
&= \arctan(0)=0
\end{aligned}$$

Se sigue que $f$ es continua en $(0,0)$ si $A=0$.

**Puntaje Pregunta 2.**

- 2 puntos por concluir que $A=\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
- 1 punto por utilizar coordenadas polares.
- 3 puntos por calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

3. Considere la función $f(x,y) = bx^{\alpha}y^{\beta}$, donde $b, \alpha, \beta$ son constantes reales. Calcule el valor de

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - (\alpha+\beta)f(x,y)\,.$$

**Solución.** Tenemos que

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - (\alpha+\beta)f(x,y) &= x\left(b\alpha x^{\alpha-1}y^{\beta}\right) + y\left(b\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}\right) - (\alpha+\beta)(bx^{\alpha}y^{\beta}) \\ &= b\alpha x^{\alpha}y\beta + b\beta x^{\alpha}y^{\beta} - \alpha bx^{\alpha}y^{\beta} - \beta bx^{\alpha}y^{\beta} = 0 \end{aligned}$$

**Puntaje Pregunta 3.**

- 1,5 puntos por calcular $f_x$
- 1,5 puntos por calcular $f_y$
- 3 puntos por reemplazar y obtener que la expresión es igual a cero.

4. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico $V$ está definido por $V(x,y,z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

   *a*) Determine la razón de cambio del potencial en $P(3,4,5)$ en la dirección del vector $\vec{x} = i + j - k$.

   *b*) ¿En qué dirección cambia $V$ con mayor rapidez en $P$?

   *c*) ¿Cuál es la razón máxima de cambio de $P$?

**Solución.** Tenemos que $\nabla V(x,y,z) = (10x - 3y + yz, xz - 3x, xy)$, y $\nabla V(3,4,5) = (38,6,12)$.

*a*) La razón de cambio es

$$D_v V(3,4,5) = \nabla V(3,4,5) \cdot \frac{v}{|v|} = (38,6,12) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

*b*) La dirección en que $V$ cambia con mayor rapidez en $P$ ocurre cuando $v = \nabla V(3,4,5) = (38,6,12)$.

*c*) La razón máxima de cambio de en $P$ es $|\nabla V(3,4,5)| = \sqrt{38^2 + 6^2 + 12^2} = \sqrt{1624}$.

**Puntaje Pregunta 4.**

- 2 puntos por obtener correctamente la derivada direccional $D_v V(3,4,5)$.
- 2 puntos indicar que la dirección en que $V$ cambia con mayor rapidez en $P$ es $\nabla V(3,4,5)$.
- 2 puntos por obtener correctamente la razón máxima de cambio.

5. Si las derivadas parciales de segundo orden de $z = f(x, y)$ son continuas y $x = r^2 + s^2$ y $y = 2rs$. Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$.

**Solución.** La regla de la cadena da

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}(2r) + \frac{\partial z}{\partial y}(2s)\,.$$

Al aplicar la regla del producto a la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\frac{\partial z}{\partial x} + 2s\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\,.\end{aligned}$$

Aplicamo la regla de la cadena una vez más para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(2s)\\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(2s)\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones obtenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,.\end{aligned}$$

**Puntaje Pregunta 5.**

- 1,5 puntos por calcular $\partial z/\partial r$.
- 1,5 puntos por obtener la igualdad $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) + 2s\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.
- 1 punto por calcular $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$.
- 1 punto por calcular $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.
- 1 punto por concluir que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2} = 2\dfrac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4s^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

6. Determine las ecuaciones de la recta normal y el plano tangente en el punto $(-2, 1, -3)$ al elipsoide $\dfrac{x^2}{4} + y^2 + \dfrac{z^2}{9} = 3$ .

**Solución.** El elipsoide es la superficie de nivel de

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3\,.$$

Tenemos que

$$F_x(x, y, z) = \frac{x}{2} \qquad F_y(x, y, z) = 2y \qquad F_z(x, y, z) = \frac{2z}{9}$$

$$F_x(-2, 1, -3) = -1 \qquad F_y(-2, 1, -3) = 2 \qquad F_z(-2, 1, -3) = -\frac{2}{3}$$

Entonces, la ecuación del plano tangente en $(-2, 1, -3)$ es

$$-1(x + 2) + 2(y - 1) - \frac{2}{3}(z + 3) = 0 \Longleftrightarrow 3x - 6y + 2z = 18\,.$$

Finalmente, las ecuaciones de la recta normal son:

**1 Forma:** Simétrica (o cartesiana)

$$\frac{x + 2}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z + 3}{-\frac{2}{3}}\,.$$

**2 Forma:** Vectorial

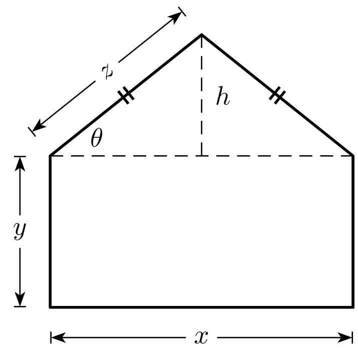
$$x = -t - 2\,, \qquad y = 2t + 1\,, \qquad z = -\frac{2}{3}t - 3$$

**Puntaje Pregunta 6.**

- 2 puntos por obtener las derivadas de primer orden de $F$ en el punto $(-2, 1, -3)$
- 2 puntos por obtener la ecuación del plano tangente.
- 2 puntos por obtener la ecuación de la recta normal (cualquiera de las dos formas).

7. Se forma un pentágono con un triángulo isósceles y un rectángulo, como se ilustra en la figura. Si el pentágono tiene un perímetro fijo $P$, determine las longitudes de los lados del pentágono que maximice el área de la figura.

**Solución.** Considere la siguiente figura




Se tiene que la altura del triángulo es $h = z \operatorname{sen}\theta$ y la función área de la figura es $f(x,y,z) = xy + \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta)xz$ .
Usando el teorema de Pitágoras, vemos que $h^2 + (\frac{1}{2}x)^2 = z^2 \Longleftrightarrow z^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{4}x^2 = z^2$ despejando la función seno se obtiene que $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{4z^2-x^2}}{2z}$ se obtiene que la función área es

$$f(x,y,z) = xy + \frac{1}{2}xz \cdot \frac{\sqrt{4z^2-x^2}}{2z} = xy + \frac{1}{4}x\sqrt{4z^2-x^2}\,.$$

Como el perímetro es fijo $P$, debemos maximizar $f$ sujeto a la restricción $g(x,y,z) = x + 2y + 2z = P$.
Usando multiplicadores de Lagrange, resolvemos el sistema

$$\nabla f = \lambda \nabla g \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} y + \dfrac{1}{4}\sqrt{4z^2-x^2} - \dfrac{1}{4}\dfrac{x^2}{\sqrt{4z^2-x^2}} & = & \lambda \\ x & = & 2\lambda \\ \dfrac{xz}{\sqrt{4z^2-x^2}} & = & 2\lambda \end{array}\right|$$

Si sustituimos la segunda ecuación en la tercera ecuación nos da:

$$\frac{xz}{\sqrt{4z^2-x^2}} = x \Longrightarrow z = \sqrt{4z^2-x^2} \Longrightarrow 4z^2 - x^2 = z^2 \Longrightarrow x = \sqrt{3}z$$

Similarmente, como $\sqrt{4z^2-x^2} = z$ y $\lambda = \frac{1}{2}x$ nos da $y + \dfrac{z}{4} - \dfrac{x^2}{4z} = \dfrac{x}{2}$ y como $x = \sqrt{3}z$ obtenemos $-\dfrac{z}{2} - \dfrac{\sqrt{3}z}{2} = -y \Longrightarrow y = \dfrac{z}{2}(1+\sqrt{3})$. Sustituyendo estos valores en la restricción nos da

$$2z + z(1+\sqrt{3}) + \sqrt{3}z = P \Longrightarrow 3z + 2\sqrt{3}z = P \Longrightarrow \boxed{z = \frac{P}{3+2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}P}$$

y $\boxed{y = \dfrac{(2\sqrt{3}-3)(1+\sqrt{3})}{6}P = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}P}$ y $\boxed{x = (2-\sqrt{3})P}$.

**Puntaje Pregunta 7.**

- 1 punto por plantear la restricción.
- 1 puntos por obtener el sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$.
- 1 punto por obtener la relación $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{4z^2-x^2}/2z$.
- 1 punto por obtener la función área.
- 2 puntos por resolver el sistema.

8. Mediante multiplicadores de Lagrange, encuentre los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y,z) = yz + xy$ sujeta a las restricciones $xy = 1$, $y^2 + z^2 = 1$.

**Solución.** Sean $g(x,y,z) = xy$ y $h(x,y,z) = y^2 + z^2$. Usando multiplicadores de Lagrange, basta resolver el sistema lo cual es equivalente a:

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \Longleftrightarrow (y, z+x, y) = \lambda(y, x, 0) + \mu(0, 2y, 2z) \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} y & = & \lambda y \\ z+x & = & \lambda x + 2\mu y \\ y & = & 2\mu z \end{array}\right|$$

De la primera ecuación obtenemos que $\boxed{\lambda = 1}$ de lo contrario $y = 0$, pero $y = 0$ no satisface la restricción $xy = 1$. Sustituyendo este valor para $\lambda$ en la segunda ecuación se obtiene $z = 2\mu y \Longleftrightarrow \boxed{2\mu = \frac{z}{y}}$.

Sustituyendo este valor en la tercera ecuación nos da $\boxed{y^2 = z^2}$.
Sustituyendo esta relación en la restricción $y^2 + z^2 = 1$ nos da: $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Como $xy = 1$ entonces $x = \pm\sqrt{2}$.
Hemos obtenido los puntos $\left(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Por lo tanto, $f$ alcanza un máximo bajo las restricción en $f\left(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}$ y alcanza un mínimo en $f\left(\pm\sqrt{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

**Puntaje Pregunta 8.**

- 2 puntos por plantear el sistema $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$.
- 3 puntos por resolver el sistema.
- 1 puntos por mostrar cuáles son los valores máximos y mínimos.