CLASE 19: PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

- Sucesiones: $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$

- Ej: $1, 3, 5, 7, \dots \quad a_n = 2n-1, n \geq 1$

- Ej: $F_1 = 1, F_2 = 1$

  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$

- Ej: a_n = n-ésimo número primo

  $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, \dots$

  No hay ni fórmula ni recursión

- Un poco más sobre Fibonacci:

$$\begin{cases} F_1 = 1, F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3 \end{cases}$$

$F_1 = 1$, $F_2 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

$F_6 = 5 + 3 = 8$

- **Ej.**: $\underbrace{2, 7}_{+5}, \underbrace{\,, 12}_{+5}, \underbrace{\,, 17}_{+5}, \underbrace{\,, 22}_{+5}, \dots$

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 5, & n \geq 2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

- **DEF.** Una progresión aritmética es una sucesión dada por

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d \end{cases}$$

donde $a, d \in \mathbb{R}$

- Ej: $2, 7, \underbrace{, 12}_{+5}, 17, \ldots$ es aritmética

  $a = 2, \quad d = 5$

- Ej: $3, 3, 3, 3, \ldots$ es aritmética

  $a = 3, \quad d = 0$

- Ej: $5, 1, -3, -7, -11, \ldots$ es aritmética

  $-4 \quad -4 \quad -4 \quad -4$

  $a = 5, \quad d = -4$

- Ej: $1, 5, 8, 11, \ldots$ no es aritmética

  $+4 \quad +3 \quad +3$

  $a_2 = a_1 + \underline{\underline{4}}, \quad a_3 = a_2 + \underline{3}$

- Obs: $a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1} + d, \quad n \geq 2$

$a_1 = a, \quad a_2 = a + d, \quad a_3 = (a+d) + d$
$= a + 2d$

$a_4 = (a+2d) + d = a + 3d$

Afirmación: $a_n = a + (n-1)d$

DEM: • **$n=1$**: $a_1 = a = a + 0 \cdot d$ ✓

• **HI**: Supongamos que

$$a_k = a + (k-1)d$$

• $a_{k+1} = a_k + d$

$$\overset{HI}{=} (a + (k-1)d) + d$$

$$= a + kd$$

$$= a + ((k+1)-1)d$$

• Por inducción, la fórmula es correcta para todo $n \geq 1$ $\square$

• **Sumas parciales**:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = ?$$

• **Obs**: $S_n = S_{n-1} + a_n$, $n \geq 2$

$S_1 = a_1$

• Ej: $a_1 = a$, $d = 0 \rightsquigarrow a_m = a, \forall m \geq 1$

$$S_m = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{m} = ma$$

• Ej: $a_1 = 1$, $d = 1 \rightsquigarrow a_m = m$

$$S_m = 1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

• Caso general:

$$\begin{array}{l} S_m = a + (a+d) + \cdots + (a+(m-2)d) + (a+(m-1)d) \\ \oplus\ S_m = (a+(m-1)d) + (a+(m-2)d) + \cdots + a + d + a \\ \hline 2S_m = (2a+(m-1)d) + (2a+(m-1)d) + \cdots + (2a+(m-1)d) + (2a+(m-1)d) \\ \quad = m\left(2a+(m-1)d\right) \end{array}$$

$$\rightarrow S_m = \frac{m}{2}\left(2a+(m-1)d\right) = \frac{m}{2}\left(a_1 + a_m\right)$$

- Ej: $a_1 = 3,\ d = 2$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(6 + 2(n-1)\right) = \frac{n}{2}\left(4 + 2n\right)$$

- Ej: $a_1 = 1 = d$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2 + (n-1)\right) = \frac{n}{2}(n+1)\ \checkmark$$

- Ej: $a_1 = 2,\ d = -5$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(4 - 5(n-1)\right) = \frac{n}{2}\left(9 - 5n\right)$$

- DEF: Una progresión geométrica es una sucesión dada por

$$\begin{cases} a_1 = c \\ a_n = a_{n-1} \cdot r, \ n \geq 2 \end{cases}$$

• Ej: $c=3,\ r=2$

$a_1 = c = 3$

$a_2 = a_1 \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$

$a_3 = a_2 \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$

$\rightsquigarrow\ 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ \cdots$

• Ej: $9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \cdots$

$\cdot\frac{1}{3}\quad \cdot\frac{1}{3}\quad \cdot\frac{1}{3}\quad \cdot\frac{1}{3}$

$c=9,\ r=\frac{1}{3}$

• Ej: $r=1 \longrightarrow c,\ c,\ c,\ c,\ \ldots$

• Ej: $1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

$c=1,\ r=-1$

• **Obs**: $a_1 = c$, $a_n = a_{n-1} \cdot r$, $n \geq 2$

$c, cr, cr^2, cr^3, \dots$

Afirmación: $a_n = cr^{n-1}$

DEM: Por inducción $\square$

• **Obs**: Sea $a_n = cr^{n-1}$ con $c > 0$, $r > 0$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \ln a_n \\
&= \ln(cr^{n-1}) \\
&= \ln c + \ln(r^{n-1}) \\
&= \ln c + (n-1)\ln r
\end{aligned}
$$

$\longrightarrow$ $(b_n)_n$ es una progresión aritmética con $a = \ln c$ y $d = \ln r$

- <u>Sumas parciales:</u>

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \ ?$$

$$S_n = c + cr + cr^2 + \cdots + cr^{n-2} + cr^{n-1}$$

$$rS_n = cr + cr^2 + cr^3 + \cdots + cr^{n-1} + cr^n$$

$$\to \ S_n - rS_n = c - cr^n$$

$$\to \ (1-r)S_n = c(1-r^n)$$

Si $r \neq 1$:

$$S_n = c\,\frac{1-r^n}{1-r}$$

Si $r = 1$:

$$S_n = c + c + \cdots + c = cn$$

- Ej: $c=3$, $r=2$

$$S_m = 3 \cdot \frac{1-2^m}{1-2} = 3\cdot(2^m - 1) \gg 1$$

- Ej: $c=3$, $r=\frac{1}{2}$

$$S_m = 3 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 6\cdot\left(1-\frac{1}{2^m}\right) \qquad m \gg 1,\ \frac{1}{2^m} \ll 1$$

$$\simeq 6$$

- En general, si $|r|<1$

$$S_m = c\,\frac{1-r^m}{1-r} \simeq \frac{c}{1-r}$$

Es decir, $S_m \xrightarrow{m\to\infty} \dfrac{c}{1-r}$

- **Ej:**

$$0.999\ldots = 0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots$$

$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \cdots$$

$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{10} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{100} + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1000} + \cdots$$

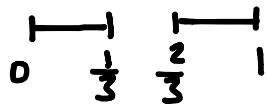
Si $c = \frac{9}{10}$, $r = \frac{1}{10}$, entonces

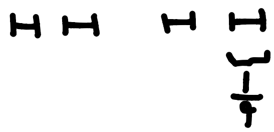
$$S_m = \frac{9}{10}\cdot\frac{1-\frac{1}{10^m}}{1-\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^m} \simeq 1$$

$\rightarrow \; 0.9999\ldots = 1$

- **Ejercicio:** $0.3333\ldots = \frac{1}{3}$

• Ej: $a_0 = $  $= 1$

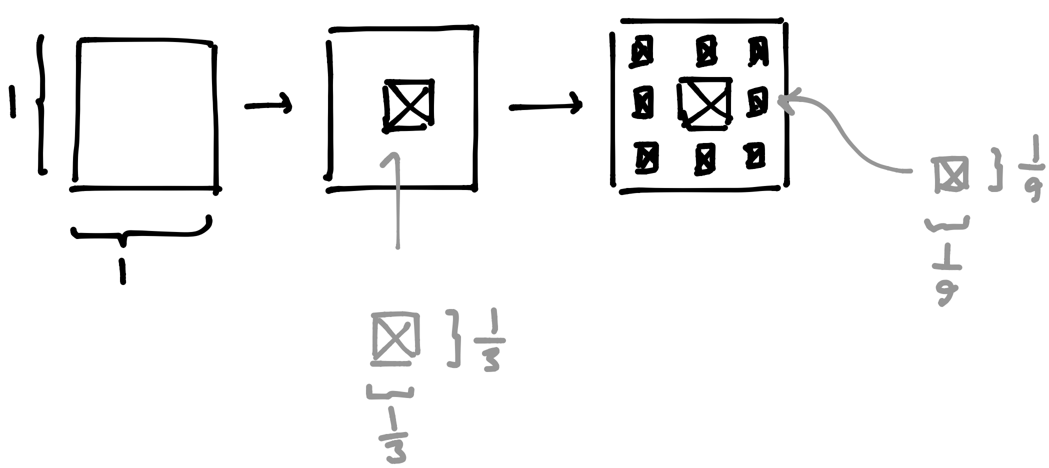
$a_1 = $  $= \frac{2}{3}$

$a_2 = $  $= \frac{4}{9}$

Encontrar una fórmula para la suma de los largos removidos en el n-ésimo paso.

¿Cuál es el largo que permanece cuando $n \to \infty$?

• Ej: Lo mismo con



- Área retirada en el n-ésimo paso = ?
- Área total retirada hasta el n-ésimo paso = ?
- ¿ Si $n \longrightarrow \infty$?