Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2017

MAT 1620 – Cálculo II

Solución Interrogación 2

1. Determine el conjunto de puntos en los cuales la función $f(x,y)$ es continua

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución. La primera parte de f es una función racional definida para todo punto del plano excepto el origen, luego f es continua en $\mathbb{R}^2$ excepto posiblemente en el origen.
Ahora bien,

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0$$

para $x \neq 0$, luego $f(x,y) \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ a lo largo del eje x.
Además,

$$f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

para $x \neq 0$, luego $f(x,y) \to \frac{1}{2}$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ a lo largo de la recta $y = x$.
Luego, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, y se sigue que f no es continua en $(0,0)$.
Por lo tanto, f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por concluir que la función es continua en $\mathbb{R}^2$ salvo posiblemente en el origen $(0,0)$.
- 3 puntos por elegir dos caminos diferentes en los cuales los límites sean distintos.
- 1 punto por concluir que la función f no es continua en $(0,0)$.

2. ¿En qué punto del paraboloide $y = x^2 + z^2$ el plano tangente es paralelo al plano $x + 2y + 3z = 1$?

Solución. El paraboloide es una superficie de nivel de la función $F(x, y, z) = x^2 + z^2 - y$.
Tenemos que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, -1, 2z_0)$ es un vector normal de la superficie en (x_0, y_0, z_0).
Un vector normal al plano $x + 2y + 3z = 1$ es $(1, 2, 3)$. Para que dos planos sean paralelos, es necesario que sus vectores normales lo sean, es decir

$$(2x_0, -1, 2z_0) = k(1, 2, 3) \Longrightarrow x_0 = \frac{k}{2}, \quad k = -\frac{1}{2}, \quad z_0 = \frac{3k}{2} \Longrightarrow x_0 = -\frac{1}{4}, z_0 = -\frac{3}{4}$$

Como $y_0 = x_0^2 + z_0^2$ entonces

$$y_0 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}\,.$$

El punto $\left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, -\frac{3}{4}\right)$ que está en el paraboloide tiene plano tangente paralelo al plano $x + 2y + 3z = 1$.

Puntaje Pregunta 2.

- 2 puntos por obtener un vector perpendicular a la superficie en todo punto.
- 1 punto por obtener el vector normal al plano.
- 2 puntos dar la condición para que el plano tangente y el plano sean paralelos.
- 1 punto por obtener correctamente las coordenadas del punto.

3. Suponga que en una cierta región del espacio el potencial eléctrico V está definido por

$$V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz\,.$$

   a) Determine la razón de cambio del potencial en $P(3, 4, 5)$ en la dirección del vector $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$.
   b) ¿En qué dirección cambia V con mayor rapidez en P?
   c) ¿Cuál es la razón máxima de cambio en P?

Solución. Tenemos que $\nabla V(x, y, z) = (10x - 3y + yz, xz - 3x, xy)$, y $\nabla V(3, 4, 5) = (38, 6, 12)$.

a) La razón de cambio es

$$D_v V(3, 4, 5) = \nabla V(3, 4, 5) \cdot \frac{v}{|v|} = (38, 6, 12) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

b) La dirección en que V cambia con mayor rapidez en P ocurre cuando $v = \nabla V(3, 4, 5) = (38, 6, 12)$.
c) La razón máxima de cambio de en P es $|\nabla V(3, 4, 5)| = \sqrt{38^2 + 6^2 + 12^2} = \sqrt{1624}$.

Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por obtener correctamente la derivada direccional $D_v V(3, 4, 5)$.
- 2 puntos indicar que la dirección en que V cambia con mayor rapidez en P es $\nabla V(3, 4, 5)$.
- 2 puntos por obtener correctamente la razón máxima de cambio.

4. Si $x - z = \arctan(yz)$, calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución. Sea $F(x, y, z) = x - z - \arctan(yz) = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{1}{-1 - \dfrac{1}{1 + (yz)^2}(y)} = \frac{1 + y^2 z^2}{1 + y + y^2 z^2} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-\dfrac{1}{1 + (yz)^2}(z)}{-1 - \dfrac{1}{1 + (yz)^2}(y)} = -\frac{\dfrac{z}{1 + y^2 z^2}}{\dfrac{1 + y^2 z^2 + y}{1 + y^2 z^2}} = \frac{z}{1 + y + y^2 z^2}
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 4.

- 3 puntos por obtener correctamente el valor de $\partial z / \partial x$
- 3 puntos por obtener correctamente el valor de $\partial z / \partial y$

5. Sean $z = x^3y^3$, $x = s\cos(t)$, $y = s\,\mathrm{sen}(t)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

Solución. Usando la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 3x^2y^3\cos(t) + 3x^3y^2\,\mathrm{sen}(t)\\
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = 3x^2y^3(-s\sin(t)) + 3x^3y^2(s\cos(t)) = -3sx^2y^3\,\mathrm{sen}(t) + 3sx^3y^2\cos(t)
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 5.

- 3 puntos por obtener correctamente el valor de $\partial z/\partial s$
- 3 puntos por obtener correctamente el valor de $\partial z/\partial t$

6. Suponga que $F(x,y,z)=0$ define en forma implícita cada una de las tres variables, $z=f(x,y)$, $y=g(x,z)$, $x=h(y,z)$. Si F es derivable y $F_x, F_y, F_z \neq 0$, mostrar que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=-1\,.$$

Solución. Si $F(x,y,z)=0$ asumimos que z define una función de x e y, es esto, $z=f(x,y)$. Entonces, $F(x,y,z(x,y))=0$ y por la regla de la cadena

$$F_x\frac{\partial x}{\partial x}+F_y\frac{\partial y}{\partial x}+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Longleftrightarrow F_x+F_z\frac{\partial z}{\partial x}=0 \Longleftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}.$$

De manera similar, si asumimos que $F(x,y,z)=0$ define x como una función de y y z, esto es, $x=h(x,z)$. Entonces $F(h(y,z),y,z)=0$ y por la regla de la cadena

$$F_x\frac{\partial x}{\partial y}+F_y\frac{\partial y}{\partial y}+F_z\frac{\partial z}{\partial y}=0 \Longleftrightarrow F_x\frac{\partial x}{\partial y}+F_y=0 \Longleftrightarrow \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}$$

De manera similar, si asumimos que $F(x,y,z)=0$ define y como una función de x y z, esto es, $x=h(x,z)$. Entonces $F(x,y(x,z),z)=0$ y por la regla de la cadena

$$F_x\frac{\partial x}{\partial z}+F_y\frac{\partial y}{\partial z}+F_z\frac{\partial z}{\partial z}=0 \Longleftrightarrow F_y\frac{\partial y}{\partial z}+F_z=0 \Longleftrightarrow \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}=\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)=-1\,.$$

Puntaje Pregunta 6.

- 1,5 puntos por obtener correctamente el valor de $\partial z/\partial x$
- 1,5 puntos por obtener correctamente el valor de $\partial x/\partial y$
- 1,5 puntos por obtener correctamente el valor de $\partial y/\partial z$
- 1,5 puntos por verificar la identidad.

7. Halle los valores máximos y mínimos locales y puntos silla, si existen, de la función

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1 \,.$$

Solución. Primero hallamos los puntos críticos de la función:

$$f_x = 4x^3 - 4y = 0, \qquad f_y = 4y^3 - 4x = 0 \,,$$

o equivalentemente

$$x^3 - y = 0 \quad \text{y} \quad y^3 - x = 0$$

Resolviendo la primera ecuación de arriba nos da $y = x^3$ reemplazando este valor en la segunda ecuación se obtiene

$$0 = x^9 - x = x(x^8 - 1) = x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

luego hay tres raíces reales $x = 0, 1, -1$. Luego, los puntos críticos de f son $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$. Ahora bien, calculamos la segundas derivadas de f para hallar el determinante de la matriz Hessiana

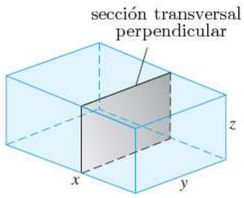
$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{xy} = -4, \quad f_{yy} = 12y^2$$
$$D(x,y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2 = 144x^2y^2 - 16$$

Como $D(0,0) = -16 < 0$ se sigue que en el origen f tiene un punto silla.
Como $D(1,1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(1,1) = 12 > 0$ se sigue que f tiene un mínimos local en $(1,1)$ de valor $f(1,1) = -1$.
Similarmente, se tiene que $D(-1,-1) = 128 > 0$ y $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0$ luego f tiene un mínimo local en $(-1,-1)$ de valor $f(-1,-1) = -1$.

Puntaje Pregunta 7.

- 3 puntos por obtener correctamente los puntos críticos de f: $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$.
- 3 puntos por clasificar los tres puntos críticos usando el criterio de las segundas derivadas parciales.

8. Un paquete en forma de una caja rectangular se puede enviar a través de servicio postal si la suma de su largo y el perímetro de una sección transversal perpendicular al largo es 108 cm como máximo.



Calcule las dimensiones del paquete con el volumen más gránde que se puede enviar por paquete postal. Justifique su respuesta.

Solución. Debemos maximizar la función volumen $V(x, y, z) = xyz$ sujeto a la restricción

$$g(x, y, z) = x + 2y + 2z \leqslant 108\,.$$

Notemos que la función V no tiene puntos críticos al interior de la región $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ y $g(x, y, z) \leqslant 108$. Por lo que basta, determinar el máximo de V con la resstricción $g(x, y, z) = 108$. Aplicando multiplicadores de Lagrange, resolvemos $\nabla V = \lambda \nabla g(x, y, z)$ lo que nos lleva:

$$\left.\begin{array}{rcl} yz &=& \lambda \\ xz &=& 2\lambda \\ xy &=& 2\lambda \\ x + 2y + 2z &=& 108 \end{array}\right|$$

Multiplicando la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z se obtiene

$$\begin{array}{rcl} xyz &=& \lambda x \\ xyz &=& 2\lambda y \\ xyz &=& 2\lambda z \end{array}$$

Observe que $\lambda \neq 0$ por que $\lambda = 0$ significaría que $xyz = 0$ pero el volumen no puede ser cero. Entonces, igualando las primeras ecuaciones se obtiene $x = 2y$ e igualando las dos últimas $y = z$. Sustituyendo en la restricción obtenemos

$$x + 2y + 2z = 108 \Longleftrightarrow 2y + 2y + 2y = 108 \Longleftrightarrow 6y = 108 \Longleftrightarrow y = 18$$

de este modo $x = 36$, $z = 18$. Entonces, las dimensiones del paquete con el volumen más grande son $x = 36$ cm , $y = 18$ cm , $z = 18$ cm.

Puntaje Pregunta 8.

- 2 puntos por obtener correctamente el sistema $\nabla V = \lambda \nabla g$.
- 1 punto por descartar el caso $\lambda = 0$
- 2 puntos por resolver el sistema y obtener la relación $x = 2y$, $y = z$.
- 1 puntos por obtener correctamente las dimensiones del paquete con el volumen máximo.