Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2017

MAT1203 $\star$ Álgebra Lineal

Solución a la Interrogación N° 2

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (3x - y, -x + 4y - z, -y + 3z)$.

   a) [1 pto.] Encuentre la matriz A tal que $T(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = A\overrightarrow{\mathbf{x}}$ para todo $\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$.

   b) [2 pts.] Calcule el determinante de A.

   c) [3 pts.] ¿Es T es invertible? Justifique su respuesta y, en caso de que esta sea afirmativa, encuentre la matriz estándar de su inversa.

Solución:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

b)

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{-f_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$\underset{f_2 - 3f_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 11 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \underset{f_2 \leftrightarrow f_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 11 & -3 \end{vmatrix}$$
$$\underset{-f_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 11 & -3 \end{vmatrix} \underset{f_3 - 11f_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 30 \end{vmatrix}$$

Este último determinante es el de una matriz triangular superior, por lo que es el producto de los elementos de la diagonal, o sea,

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 30 = 30.$$

c) T es invertible, ya que su matriz estándar (A) lo es. Esto puede ser justificado apelando al hecho de que $\det A = 30 \neq 0$, o bien escalonando la matriz y probando que tiene 3 pivotes.

Para encontrar A^{-1}, escalonamos

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{f_1 \longleftrightarrow f_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{-1 \cdot f_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{f_2 + -3 f_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{f_2 \longleftrightarrow f_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 11 & -3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{-1 \cdot f_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 11 & -3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{f_3 + -11 f_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 30 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{30} \cdot f_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{11}{30} \end{array}\right]$$

$$\underset{f_2 + 3 f_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{11}{30} \end{array}\right] \underset{f_1 + 4 f_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{11}{30} \end{array}\right]$$

$$\underset{f_1 + -1 f_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{30} & \frac{1}{10} & \frac{1}{30} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{11}{30} \end{array}\right]$$

Así, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{11}{30} & \frac{1}{10} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{11}{30} \end{bmatrix}$.

Puntaje:

a) Se da 1 punto si la matriz está enteramente correcta, 0 si no.

b) Se dan los dos puntos si el determinante está correctamente calculado. Si hay algún error *menor* en el cálculo que lleva a una respuesta incorrecta, se da un punto.

Comentario a los correctores: El puntaje en esta pregunta se da por calcular el determinante de la matriz hallada en (a). Si esa matriz fue escrita incorrectamente, el determinante que deben calcular es el que corresponde al de la matriz incorrecta, no el de la matriz que aparece en esta pauta.

c)
- Por indicar correctamente que la matriz es invertible, *incluyendo una justificación adecuada*, 1 punto.
- Por encontrar su inversa, 2 puntos. Si hay algún error *menor* en el cálculo que lleva a una respuesta incorrecta, se da un punto.
  Comentario a los correctores: En esta parte, también importa cuál es la matriz encontrada en (a). El puntaje se da por decidir si esa matriz es invertible, y por encontrar su inversa.

A lo anterior se le suma el punto base.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

a) Escriba A como producto de matrices elementales.

b) Encuentre una factorización del tipo $A = LU$, y úsela para resolver $Ax = \vec{\mathbf{b}}$ donde $\vec{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -12 \end{bmatrix}$

Solución:

a) Escalonando la matriz hasta reducirla a la matriz identidad, descubrimos que, llamando

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} \end{bmatrix},$$
$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

se tiene

$$E_6E_5E_4E_3E_2E_1A = I$$

(cada una de estas matrices elementales corresponde a una de las operaciones que llevan a A a su forma escalonada reducida), por lo que

$$E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}E_5^{-1}E_6^{-1} = A,$$

donde

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix},\ E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix},$$
$$E_4^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_6^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O sea:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nota: Es posible realizar las operaciones elementales en un orden diferente y por lo tanto la factorización que a la que se llegue puede ser distinta a la mostrada aquí.

b) Observamos que las dos primeras operaciones elementales de la secuencia anterior transforman A en una matriz triangular superior:

$$U = E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

mientras que

$$L = E_1^{-1}E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

es tal que $A = LU$.

Para resolver el sistema pedido, resolvemos primero $L\overrightarrow{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -12 \end{bmatrix}$, o sea, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix} \overrightarrow{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ -12 \end{bmatrix}$. Sustituyendo hacia adelante, tenemos

$$y_1 = 5, \quad y_2 = -7 + y_1 = -7 + 5 = -2, \quad y_3 = -12 - \frac{5}{2}y_2 = -12 + 5 = -7.$$

Así, para este sistema, $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$.

A continuación, resolvemos $U\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$, o sea

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

Vemos que:

- $x_3 = \dfrac{7}{16}$.
- $2x_2 + 6x_3 = -2$, o sea, $x_2 = -1 - 3x_3 = -1 - \dfrac{21}{16} = -\dfrac{37}{16}$.
- $x_1 + 6x_3 = 5$, o sea, $x_1 = 5 - 6x_3 = 5 - \dfrac{42}{16} = 5 - \dfrac{21}{8} = \dfrac{19}{8}$.

Así, la solución de este sistema es

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{8} \\ -\frac{37}{16} \\ \frac{7}{16} \end{bmatrix}.$$

Puntaje:

a)
- Por encontrar las matrices elementales que corresponden a las operaciones elementales realizadas, 1,5 ptos.
- Por invertir correctamente las matrices elementales y escribir A como el producto de ellas, 1,5 ptos.

b)
- Por encontrar correctamente la factorización $A = LU$, 1 pto.
- Por encontrar $\overrightarrow{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$, 0,5 ptos.
- Por plantear correctamente el sistema $U\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{y}}$, 0,5 puntos.
- Por encontrar $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{19}{8} \\ -\dfrac{37}{16} \\ \dfrac{7}{16} \end{bmatrix}$, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

3. *a*) [2 pts.] Sea A una matriz de $n \times n$ tal que existe una matriz $B \neq \mathbf{0}$ tal que $AB = \mathbf{0}$ (aquí, $\mathbf{0}$ representa a la matriz en que todos los elementos son cero).

Demuestre que A no es invertible.

Solución:

Que A no es invertible sale de las equivalencias entre invertibilidad (afirmación (a)) y otras condiciones (afirmaciones (b) – (f)) del teorema 2.8.

Así, por ejemplo, podemos demostrar que A no es invertible porque en el teorema 2.8 no se cumple (por ejemplo):

d) ya que como alguna de las columnas de B es $\overrightarrow{\mathbf{b}}_i \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tiene una solución no trivial, a saber $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}_i$.

f) ya que existen al menos dos vectores distintos $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ (a saber, $\overrightarrow{\mathbf{u}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ cualquier columna $\neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ de B) tales que $A\overrightarrow{\mathbf{u}} = A\overrightarrow{\mathbf{v}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$, por lo que la transformación $\overrightarrow{\mathbf{x}} \mapsto A\overrightarrow{\mathbf{x}}$ no es uno a uno.

j) Si existiera C de $n \times n$ tal que $CA = I$ entonces $B = IB = (CA)B = C(AB) = C\mathbf{0} = \mathbf{0}$, lo que contradice la hipótesis.

b) [4 pts.] Sea A una matriz de 4×4 cuyas columnas son, respectivamente, los vectores $\overrightarrow{\mathbf{a}}_1$, $\overrightarrow{\mathbf{a}}_2$, $\overrightarrow{\mathbf{a}}_3$ y $\overrightarrow{\mathbf{a}}_4$, y de la que se sabe que $2\overrightarrow{\mathbf{a}}_1 - \overrightarrow{\mathbf{a}}_2 - 3\overrightarrow{\mathbf{a}}_3 + 4\overrightarrow{\mathbf{a}}_4 = \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Use esta informacion para explicar por qué A no es invertible y para encontrar una matriz $B \neq \mathbf{0}$, de 4×4 tal que $AB = \mathbf{0}$.

Solución:

Note que $A \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Esto implica que la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tiene una solución no trivial (lo que a su vez implica que la transformación $\overrightarrow{\mathbf{x}} \mapsto A\overrightarrow{\mathbf{x}}$ no es uno a uno) lo que prueba que A no es invertible.

Esto nos da la idea de tomar $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$, que efectivamente satisface lo pedido.

En realidad, cualquier matriz no nula en que las columnas sean múltiplos de $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ también funciona. Por ejemplo, podríamos tomar $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 20 \\ -1 & 1 & 0 & -10 \\ -3 & 3 & 0 & -30 \\ 4 & -4 & 0 & 40 \end{bmatrix}$ y también se satisfará la condicion pedida.

Puntaje:

1) Por dar una justificación correcta de que A no es invertible, 2 puntos.
   Si la justificación dada es poco clara (o está explicada de manera insuficiente), se da 1 punto.

2)
- Por dar una explicación de por qué A no es invertible, 1 punto.
- Por dar una matriz con la propiedad pedida, 3 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

4. Sea A una matriz de 5×3 tal que existe una matriz C de 3×5 tal que $CA = I_3$, y sea $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^5$ tal que la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ tiene solución.

   Demuestre que la solución de la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ es única.

   Solución:

   Sean $\overrightarrow{\mathbf{x}}_1$ y $\overrightarrow{\mathbf{x}}_2$ dos soluciones de la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$. En otras palabras, $\overrightarrow{\mathbf{x}}_1$ y $\overrightarrow{\mathbf{x}}_2$ son dos vectores tales que $A\overrightarrow{\mathbf{x}}_1 = A\overrightarrow{\mathbf{x}}_2 = \overrightarrow{\mathbf{b}}$.

   Así, si pre-multiplicamos la igualdad $A\overrightarrow{\mathbf{x}}_1 = A\overrightarrow{\mathbf{x}}_2$ por C, obtenemos $C(A\overrightarrow{\mathbf{x}}_1) = C(A\overrightarrow{\mathbf{x}}_2)$, o sea, $(CA)\overrightarrow{\mathbf{x}}_1 = (CA)\overrightarrow{\mathbf{x}}_2$, o lo que es lo mismo, $I_3\overrightarrow{\mathbf{x}}_1 = I_3\overrightarrow{\mathbf{x}}_2$, o $\overrightarrow{\mathbf{x}}_1 = \overrightarrow{\mathbf{x}}_2$, por lo que todas las soluciones de la ecuación son la misma.

   Puntaje:

   Por dar una demostración correcta (esta, u otra), 6 puntos.

   Si la demostración está esencialmente buena, pero tiene algunos errores menores, 4 puntos.

   A lo anterior se le suma el punto base.

5. Determine todos los valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

Primera Solución:

Desarrollando el determinante, tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = -2x^3 + 18x^2 - 52x + 48 = -2(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) = 0.$$

Así, la condición pedida es equivalente a $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$.

Las raíces de esta ecuación son exactamente $2, 3$ y 4. Esto puede ser justificado, por ejemplo, encontrando una raíz, factorizando la ecucación (y transformándola en una ecuación cuadrática). ¿Cómo encontrar una raíz de la ecuación?

- buscando las posibles raíces racionales de la ecuación, o
- buscando una raíz al tanteo, u
- observando que al reemplazar x por uno de los valores 2, 3 o 4 el determinante resultante tiene dos filas iguales y por lo tanto vale cero,

Segunda Solución:

Otra solución posible consiste en notar que el reemplazar x por 2, 3 o 4 el determinante se anula (dos filas iguales), por lo que al menos estos tres valores están entre los buscados.

Sin embargo, usando este enfoque es necesario demostrar que NO HAY OTRO valor que satisfaga la condición pedida. Una forma de justificar esto es notar que el determinante dado es un polinomio de grado 3, y por lo tanto NO PUEDE TENER MÁS DE TRES RAÍCES.

Puntaje:

- Si usan la primera solución (expresar el determinante como polinomio de grado 3 y hallar sus raíces):
  - Por calcular correctamente el polinomio cúbico que es el determinante, 2 ptos.
  - Por encontrar una raíz del polinomio, 2 ptos.
  - Por encontrar las otras raíces, 2 ptos.
- Si parten indicando que $x = 2$, $x = 3$ y $x = 4$ son soluciones:
  - Por indicar esas soluciones (con alguna justificación correcta, típicamente que en dichos casos el determinante tiene dos filas iguales), 3 puntos.
  - Por dar una justificación de que la ecuación planteada no puede tener más de tres raíces, 3 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

6. Sea A una matriz de $n \times n$, y suponga que todas las entradas de A son enteras y $\det(A) = 1$. Demuestre que todas las entradas de A^{-1} son enteras.

   Solución:

   Recordemos que, si $\det A \neq 0$, A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

   donde cada C_{ij} es uno de los *cofactores* de A, o sea, el determinante de una submatriz de A.

   Como en este caso $\det(A) = 1$,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \dots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \dots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

   Además. por el hecho de que todas las entradas de A son enteras, todos los cofactores son enteros (ya que son sumas de productos de entradas de A), por lo que todas las entradas de A^{-1} son enteras.

   Puntaje:

   Por dar una demostración correcta (esta, u otra), 6 puntos.

   Si la demostración está esencialmente buena, pero tiene algunos errores menores, 4 puntos.

   A lo anterior se le suma el punto base.

7. El volumen de un tetraedro (pirámide de base triangular) con vértices $\vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$ y $\vec{\mathbf{v}}_3$ es $\dfrac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2, \vec{\mathbf{v}}_3$.

   Basándose en lo anterior, encuentre una fórmula para el volumen del tetraedro que tiene por vértices a los vectores $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, $\vec{\mathbf{v}}_3$ y $\vec{\mathbf{v}}_4$,

   Solución:

   El tetraedro con vértices $\vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_2$, $\vec{\mathbf{v}}_3$ y $\vec{\mathbf{v}}_4$ es el resultado de trasladar el tetraedro con vértices $\vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_3 - \vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_4 - \vec{\mathbf{v}}_1$ según el vector $\vec{\mathbf{v}}_1$, por lo que ambos tetraedros tienen el mismo volumen.

   Así, llamando $\vec{\mathbf{w}}_2$, $\vec{\mathbf{w}}_3$ y $\vec{\mathbf{w}}_4$ respectivamente a los vectores $\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_3 - \vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_4 - \vec{\mathbf{v}}_1$, el volumen buscado es el de este último tetraedro, que por la información dada al principio del enunciado es 1/6 del volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{\mathbf{w}}_2$, $\vec{\mathbf{w}}_3$ y $\vec{\mathbf{w}}_4$.

   A su vez, el volumen de este paralelepípedo puede ser calculado como el valor absoluto de cualquiera de las siguientes expresiones:

$$\left[\ \vec{\mathbf{w}}_2\ \vec{\mathbf{w}}_3\ \vec{\mathbf{w}}_4\ \right] = (\vec{\mathbf{w}}_2 \times \vec{\mathbf{w}}_3) \cdot \vec{\mathbf{w}}_4 = \det A,$$

   donde A es la matriz de 3×3 que tiene por columnas a los vectores $\vec{\mathbf{w}}_2$, $\vec{\mathbf{w}}_3$ y $\vec{\mathbf{w}}_4$.

   Así finalmente, el volumen buscado del tetraedro es el valor absoluto de cualquiera de las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{6}\left[\ \vec{\mathbf{w}}_2\ \vec{\mathbf{w}}_3\ \vec{\mathbf{w}}_4\ \right] = \frac{1}{6}(\vec{\mathbf{w}}_2 \times \vec{\mathbf{w}}_3) \cdot \vec{\mathbf{w}}_4 = \frac{1}{6}\det A,$$

   Puntaje:

   - Por relacionar el volumen del tetraedro indicado con el del tetraedro de vértices $\vec{\mathbf{0}}$, $\vec{\mathbf{v}}_2 - \vec{\mathbf{v}}_1$, $\vec{\mathbf{v}}_3 - \vec{\mathbf{v}}_1$ y $\vec{\mathbf{v}}_4 - \vec{\mathbf{v}}_1$, 2 puntos.
   - Por dar alguna fórmula correcta para el paralelepípedo que contiene a este último tetraedro, 2 puntos.
   - Por concluir con la fórmula pedida, 2 puntos.

   A lo anterior se le suma el punto base.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) Si L es una matriz triangular inferior de $n \times n$ entonces L es invertible si y solo si todos los elementos en la diagonal de L son $\neq 0$.

   Solución:

   VERDADERO

   L es invertible si y solo si su determinante es $\neq 0$, y su determinante es igual al producto de los elementos de la diagonal. Así, L es invertible si y solo si el producto de los elementos de su diagonal es $\neq 0$, y esto se logra si y solo si todos esos elementos son $\neq 0$.

   b) Si A es una matriz de 3×3 y la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ tiene una sola solución, entonces A es invertible.

   Solución:

   VERDADERO

   Si A no fuera invertible, la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tendría infinitas soluciones por lo que, si la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ tuviera al menos una solución $\overrightarrow{\mathbf{u}}$, entonces tendría infinitas soluciones (ya que la suma de $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ con cualquier solución no nula de $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ también sería solución de $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$).

   c) Si A es una matriz de $n \times n$ que satisface la ecuación $A^2 - 2A + I = 0$, entonces $A^3 = 3A - 2I$.

   Solución:

   VERDADERO

   Supongamos que $A^2 - 2A + I = 0$. Multiplicando a ambos lados por $(A - I)$, tenemos que $(A^2 - 2A + I)(A - I) = A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$, o sea, $A^3 = 3A^2 - 3A + I$. Usando el hecho de que, ya que $A^2 - 2A + I = 0$, $A^2 = 2A - I$, llegamos a

   $$A^3 = 3(2A - I) - 3A + I = 6A - 3I - 3A + I = 3A - 2I.$$

   Puntaje:

   En cada parte, se dan los dos puntos si se da una justificación correcta.

   A lo anterior se le suma el punto base.