PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Ayudantía 4

1. Sea $\Omega = H_1 \cup H_2$ y $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Asuma que $P(A|H_1), P(A|H_2)$, $P(H_1) \neq 0, P(H_2) \neq 0$ son probabilidades conocidas. Encuentre una expresión para $P(A)$.

2. Generalicemos el ejercicio anterior, esto es, mostrar que para una partición $H_1, H_2, ...$ de Ω, con $P(H_n) \neq 0$ para $n = 1, 2, ...$, se cumple que

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)P(H_n)$$

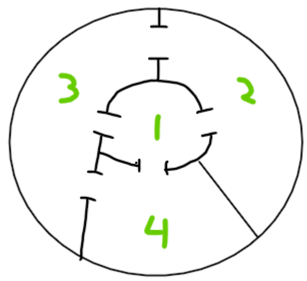
3. Se realiza una encuesta para saber el porcentaje de hombres que cantan en el baño debido a que algunas personas pueden sentirse demasiado avergonzadas para admitir abiertamente que son cantantes de baño, a cada persona interrogada se le pide que lance un dado en secreto y responda NO si el número que se muestra es 1 y SI si es 6, sin importar cuál sea la verdadera respuesta, pero a decir la verdad (SI o NO) si sale 2, 3, 4 o 5. Debido a que el número mostrado no se revela, es imposible saber a partir de la respuesta dada si la persona es un cantante de baño o no. Supongamos que la probabilidad de responder SÍ en esta encuesta es 2/3. ¿Cuál es entonces la probabilidad de ser cantante de baño?

4. Suponga que en una caja hay 99 monedas honestas y una con doble cara. Suponga que se elige una moneda al azar, se lanza n veces, y sale cara en todos los lanzamientos. ¿Cual es la probabilidad de que la moneda elegida haya sido la con doble cara, dado la información entregada? ¿Cual es el n mas pequeño tal que la probabilidad anterior es de al menos 9/10?

5. Sea A, B eventos disjuntos tales que $P(A) = p$ y $P(B) = q$ con $0 < p + q < 1$. Se realiza un experimento de ensayos independientes donde cada ensayo se observa si A, B o $(A \cup B)^c$ ocurre. Encuentre la probabilidad de que ocurra el evento A antes que el evento B.

6. Una urna contiene 12 bolas, 4 de las cuales son negras y las 8 restantes son blancas. Se juega el siguiente juego: se extrae la primera bola al azar y, tras anotar su color, se devuelve a la urna junto con un nuevo par de bolas del mismo color. Calcule la probabilidad de que en las tres primeras rondas del juego todas las bolas extraídas sean negras.

7. Suponga que un ratón entrenado se coloca en el siguiente laberinto



El ratón al estar en un sector en un instante dado elige una puerta de salida al azar y se cambia de sector. Si el lugar donde inicia el ratón es totalmente aleatorio (equiprobable), ¿Cual es la probabilidad de que en el primer paso se mueva a la puerta 4? Asuma que el ratón siempre se mueve de sector de manera equiprobable según disponibilidad de movimiento.

8. En un experimento compuesto, primero se lanza un dado honesto, y luego se lanza una moneda honesta de forma independiente tantas veces como el número indicado por el dado.
   (a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras?
   (b) Sabiendo que se han obtenido 3 caras ¿cuál es la probabilidad que el resultado del dado fue 4?

9. En la urna U_1 hay 2 bolas blancas y 3 bolas negras y en la urna U_2 hay 2 bolas negras. Seleccionamos una urna al azar y extraemos 2 bolas sin reemplazo. Calcule la probabilidad de extraer 0 bolas negras, 1 bola negra, y 2 bolas negras.

10. Sean A y B dos eventos definidos en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ tales que $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$. ¿Son A y B eventos independientes? ¿Cual es la probabilidad de que ocurra exactamente uno de los eventos A o B? ¿Cual es la probabilidad de que algún evento no ocurra?

11. Demuestre que si $P(\cdot)$ es una medida de probabilidad y B un evento con $P(B) > 0$, entonces $P(\cdot|B)$ cumple con los axiomas de Kolmogorov.

12. Una señal puede ser verde o roja con probabilidad 4/5 o 1/5, respectivamente. La probabilidad de que sea recibido correctamente por una estación es 3/4. De las dos estaciones A y B, la señal la recibe primero A y luego la estación A pasa la señal a la estación B. Si la señal recibida en la estación B es verde, entonces encuentre la probabilidad de que la señal original fuera verde.

13. Sea $\mathcal{F} = A_1 \cap A_2$ y $\mathcal{G} = A_1 \cup A_2$, donde $A_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \Omega\}$ y $A_2 = \{\emptyset, \{1,2\}, \{3\}, \Omega\}$ dos $\sigma-$álgebra de subconjuntos de $\Omega = \{1,2,3\}$. ¿Son $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ $\sigma-$álgebras de subconjuntos de Ω?