Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer semestre de 2014

Interrogación N° 3, Cálculo II - MAT1620

5 de junio de 2014

1. *a*) Desarrolle la serie de Taylor de $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ en torno a $x = 0$.

Solución. Sea $f(x) = \cosh x$. Se tiene que $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{senh} x$ y $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$, luego

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par y} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}.$$

Reemplazando en $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ obtenemos la serie de Taylor de $\cosh x$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Evaluación:

- Recordar la fórmula de la serie de Taylor en torno a un punto: 1pt
- Saber derivar $\cosh x$ y $\operatorname{senh} x$: 0,5pt
- Comprender que hay que evaluar las derivadas en $x = 0$: 0,5pt
- Descubrir la fórmula para $f^{(n)}(0)$: 0,5pt
- Escribir la serie (en cualquiera de las dos versiones, como una sumatoria o en forma extendida): 0,5pt

$\square$

b) Sean

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1 - \cosh x}{x^2}, & x \neq 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{2}, & x = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) := \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Desarrolle la serie de Taylor de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ alrededor de $x = 0$.

Solución. ▪ **[1,5pt]**

$$\frac{1-\cosh x}{x^2} = \frac{1-1-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}-\cdots}{x^2} \tag{1}$$

$$= -\frac{1}{2!}-\frac{x^2}{4!}-\frac{x^4}{6!}-\cdots \tag{2}$$

(también es válido trabajar con la serie escrita como una sumatoria).

Si alguien dice $f'(x) = \dfrac{x^2\operatorname{senh} x - 2x(1-\cosh x)}{x^4}$ y demostrara que $f'(0) = 0$ usando la regla de l'Hôpital, asignar 0,5pt (sólo 0,5pt aunque derive más veces).

Si alguien dice $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1-\cosh x}{x^2}-\frac{1}{2}}{x}$ y demostrara que $f'(0) = 0$ usando la regla de l'Hôpital, asignar 0,5pt (sólo 0,5pt aunque derive más veces).

▪ **[1,5pt]**

$$g(x) = \int_0^x \left(-\frac{1}{2!}-\frac{t^2}{4!}-\frac{t^4}{6!}-\cdots\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{x}{2!}-\frac{x^3}{3\cdot 4!}-\frac{x^5}{5\cdot 6!}-\cdots$$

(también es válido trabajar con la serie escrita como una sumatoria).

□

2. *a*) Sea Π el plano que pasa por el punto P_0 de coordenadas (x_0, y_0, z_0) y es perpendicular al vector $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$. Sea Q la proyección ortogonal de un punto P de coordenadas (x, y, z) sobre el plano Π. Demuestre que

$$\overrightarrow{QP} = \frac{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)}{A^2+B^2+C^2}\overrightarrow{N}.$$

Solución. 1) **[0,5pt]** $\overrightarrow{QP} = \lambda\overrightarrow{N}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$

2) ya que $\overrightarrow{QP} \parallel \overrightarrow{N}$ (esto es porque, por definición de proyección ortogonal, $\overrightarrow{QP}$ es perpendicular a Π)
Si está la fórmula $\overrightarrow{QP} = \lambda\overrightarrow{N}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, dar los 0,5pt aunque no haya justificación. Si no está la fórmula pero sí la justificación, dar 0,25pt.

3) **[0,5pt]** Tomando el producto punto con $\overrightarrow{N}$ obtenemos que $\lambda\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{QP}$.

4) **[0,2pt]** Puesto que $\overrightarrow{N} = (A, B, C)$, el lado izquierdo es $(A^2+B^2+C^2)\lambda$.

5) **[0,5pt]** Para encontrar una expresión para el lado derecho de la ecuación en términos de cantidades conocidas, escribimos $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QP_0} + \overrightarrow{P_0P}$.

6) **[0,5pt]** Como $\overrightarrow{QP_0}$ es un vector del plano y $\overrightarrow{N}$ es perpendicular al plano, se tiene que $\overrightarrow{QP_0} \cdot \overrightarrow{N} = 0$.
7) **[0,2pt]** Uniendo lo anterior obtenemos $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{N} = \overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{N}$,
8) **[0,2pt]** Se tiene que $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$,
9) **[0,2pt]** de modo que $\lambda = \frac{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)}{A^2+B^2+C^2}$.
10) **[0,2pt]** Reemplazando en $\overrightarrow{QP} = \lambda\overrightarrow{N}$ obtenemos la fórmula del enunciado.

□

Solución alternativa. 1) **[1pt]** $\|\overrightarrow{QP}\| = \left|\overrightarrow{P_0P} \cdot \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}\right|$

- Esto puede estar justificado con palabras: al tomar el producto punto con un vector unitario se obtiene la magnitud de la proyección (tomando el valor absoluto) sobre la dirección del segundo vector; como la proyección de $\overrightarrow{P_0P}$ sobre la dirección de $\overrightarrow{N}$ es justamente $\overrightarrow{QP}$, se obtiene la relación anterior.
- También puede estar justificado sólo con un dibujo.
- *Si no hay justificación para la fórmula, descontar 0,2pt.*
- *Si no está el valor absoluto, descontar 0,2pt.*

2) $\overrightarrow{QP} = \pm\|\overrightarrow{QP}\|\frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$

- ya que $\overrightarrow{QP} \parallel \overrightarrow{N}$ (esto es porque, por definición de proyección ortogonal, $\overrightarrow{QP}$ es perpendicular a Π).
- un vector siempre puede descomponerse como el producto de su magnitud por el vector unitario que apunta en su misma dirección; como $\overrightarrow{QP} \parallel \overrightarrow{N}$, puede apuntar o bien en la dirección de $\overrightarrow{N}$ o en la de $\overrightarrow{N}$.
- **Si llega a la fórmula completa $\overrightarrow{QP} = \pm\|\overrightarrow{QP}\|\frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$, aunque no la justifique, asignar 1pt**.
- *Si falta el $\pm$, descontar 0,2pt.*
- *Si falta dividir por $\|\overrightarrow{N}\|$, descontar*
- Si sólo dice que los vectores son paralelos, o bien si sólo dice que $\overrightarrow{QP} \perp \Pi$, asignar 0,25pt.
- Si sólo dice que $\overrightarrow{QP} = \lambda\overrightarrow{N}$ para algún λ, asignar 0,5pt, aunque no explique que esto es porque son paralelos; si dice que son paralelos y por lo tanto de de la forma $\lambda\overrightarrow{N}$, dar 0,5pt en total, no sumar los 0,25pt anteriores más 0,5pt. *0,2pt.*

3) **[0,2pt]** $\overrightarrow{P_0P}$ apunta en la misma dirección que $\overrightarrow{QP}$

- *Asignar el puntaje aunque no haya dibujo ni explicación, sólo por mencionarlo.*

4) **[0,2pt]** Se concluye que $\overrightarrow{QP} = \left(\overrightarrow{P_0P} \cdot \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}\right) \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|} = \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|^2} \overrightarrow{N}$.

   - *Asignar el puntaje por llegar a esta fórmula, aunque haya errores en los pasos anteriores o aunque no justifique que como apuntan en la misma dirección, la elección de signo en* $\left|\overrightarrow{P_0P} \cdot \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}\right| = \pm \overrightarrow{P_0P} \cdot \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$ *es la misma que en* $\overrightarrow{QP} = \pm\|\overrightarrow{QP}\|\frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|}$.

5) **[0,2pt]** Observando que $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$
6) **[0,2pt]** y que $\|\overrightarrow{N}\|^2 = A^2 + B^2 + C^2$,
7) **[0,2pt]** se tiene que $\frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot \overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|^2} = \frac{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)}{A^2 + B^2 + C^2}$.

□

b) Encuentre la proyección ortogonal de $(-\frac{7}{3}, -\frac{28}{3}, -\frac{16}{3})$ sobre el plano de ecuación $5x - y + 2z = 7$ (puede usar el resultado de la parte *a*) aunque no lo haya demostrado).

Solución. 1) **[0,6pt]** El vector $\overrightarrow{N} = (5, -1, 2)$ es perpendicular al plano Π de ecuación $5x - y + 2z = 7$.

2) **[0,6pt]** El punto $P_0(0, 0, \frac{7}{2})$ está en el plano.
   - *Si el punto* P_0 *encontrado efectivamente pertenece al plano, asignar el puntaje aunque no explique que se puede encontrar un punto en el plano reemplazando cualquier par de valores de* x *e* y *en la ecuación del plano para despejar la coordenada* z.
   - *Si se equivoca en los cálculos pero explica cómo quiere obtener el punto y la explicación es correcta, asignar 0,3pt.*

3) **[0,6pt]** Por la parte *a*), la proyección ortogonal buscada Q es tal que

$$\overrightarrow{QP} = \frac{5(-\frac{7}{3} - 0) + (-1)(-\frac{28}{3} - 0) + 2(-\frac{16}{3} - \frac{7}{2})}{5^2 + (-1)^2 + 2^2}(5, -1, 2) = (-\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$$

   donde $P(-\frac{7}{3}, -\frac{28}{3}, -\frac{16}{3})$ es el punto que se pide proyectar.
   - *Por cada error de cálculo descontar 0,3pt.*

4) **[0,6pt]** Si las coordenadas de Q son (x, y, z), entonces

$$\overrightarrow{QP} = (-\frac{7}{3} - x, -\frac{28}{3} - y, -\frac{16}{3} - z),$$

5) **[0,3pt]** luego $\begin{cases} -\frac{7}{3} - x &= -\frac{10}{3}, \\ -\frac{28}{3} - y &= \frac{2}{3}, \\ -\frac{16}{3} - z &= -\frac{4}{3} \end{cases}$

- *Aquí el puntaje es por igualar componente a componente, aunque haya habido un error al obtener los números de* $\overrightarrow{QP}$.

6) **[0,3pt]** i.e. $Q = (1, -10, -4)$

- *Aquí el puntaje es por resolver correctamente el sistema anterior y dar la respuesta final, independientemente de si los números del sistema de ecuaciones estaban mal.*

□

3. *a*) Encuentre las ecuaciones en coordenadas cartesianas de la recta tangente a la curva $\vec{r}(t) = (\sqrt{3}\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, 2\cos t)$ cuando $t = \frac{\pi}{4}$.

Solución. 1) **[0,4pt]** $\vec{r}\,'(t) = (\sqrt{3}\cos t, \cos t, -2\operatorname{sen} t)$

- *La mitad del puntaje es por saber que tienen que derivar, la otra mitad por hacerlo correctamente.*

2) **[0,3pt]** $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$.

- *La mitad del puntaje es por saber que es necesario evaluar la derivada en* $t = \frac{\pi}{4}$*, la otra mitad por evaluar correctamente la expresión que obtuvieron antes (aunque hayan calculado mal la derivada anteriormente).*

3) **[0,3pt]** $\vec{r}(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$.

- *La mitad del puntaje es por saber que es necesario evaluar* $\vec{r}(t)$ *en* $t = \frac{\pi}{4}$*, la otra mitad por hacerlo correctamente.*

4) **[1pt]** La recta tiene ecuación

$$\frac{x - \frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z - \sqrt{2}}{-\sqrt{2}}.$$

- *Si la ecuación está bien, asignar el puntaje completo aunque no haya justificación.*
- *Si escribe bien las ecuaciones simétricas usando los números obtenidos en los cálculos anteriores, asignar el puntaje completo aunque los números anteriores hayan sido calculados incorrectamente.*
- *Si escribe cuáles deberían ser las ecuaciones simétricas pero copia mal los números anteriores, descontar la mitad del puntaje.*

- *Si escribe correctamente la forma paramétrica de la recta (usando los números anteriores, aunque hayan sido mal calculados), ya sea vectorialmente o como ecuaciones para las coordenadas, asignar la mitad del puntaje. Si dice bien cómo se calcula alguna representación paramétrica de la recta pero hace mal los cálculos, asignar la cuarta parte del puntaje.*
- *Si escribe cualquier sistema de ecuaciones en x, y, z (sin incógnitas adicionales) que corresponda a la recta, asignar el puntaje completo. Si la idea está bien pero los cálculos mal hechos, asignar la mitad del puntaje.*
- *Si dice que la recta tangente a la curva cuando $t = \frac{\pi}{4}$ es aquella que pasa por $\vec{r}(\frac{\pi}{4})$ y es paralela a $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{4})$ y no hace nada más, asignar 0,3pt.*

$\square$

b) Encuentre las ecuaciones en coordenadas cartesianas de la recta tangente a la curva $\vec{r}(t) = (\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{2})$ cuando $t = \frac{\pi}{6}$.

Solución. 1) **[0,4pt]** $\vec{r}\,'(t) = (-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t, 0)$

- *La mitad del puntaje es por saber que tienen que derivar, la otra mitad por hacerlo correctamente.*

2) **[0,3pt]** $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{6}) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0)$.

- *La mitad del puntaje es por saber que es necesario evaluar la derivada en $t = \frac{\pi}{6}$, la otra mitad por evaluar correctamente la expresión que obtuvieron antes (aunque hayan calculado mal la derivada anteriormente).*

3) **[0,3pt]** $\vec{r}(\frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$.

- *La mitad del puntaje es por saber que es necesario evaluar $\vec{r}(t)$ en $t = \frac{\pi}{6}$, la otra mitad por hacerlo correctamente.*

4) **[1pt]** La recta tiene ecuación

$$\frac{x - \frac{\sqrt{6}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}; \quad z = \sqrt{2}.$$

- *Si la ecuación está bien, asignar el puntaje completo aunque no haya justificación.*
- *Si escribe bien las ecuaciones simétricas usando los números obtenidos en los cálculos anteriores, asignar el puntaje completo aunque los números anteriores hayan sido calculados incorrectamente.*
- *Si escribe cuáles deberían ser las ecuaciones simétricas pero copia mal los números anteriores, descontar la mitad del puntaje.*

- *Si escribe correctamente la forma paramétrica de la recta (usando los números anteriores, aunque hayan sido mal calculados), ya sea vectorialmente o como ecuaciones para las coordenadas, asignar la mitad del puntaje. Si dice bien cómo se calcula alguna representación paramétrica de la recta pero hace mal los cálculos, asignar la cuarta parte del puntaje.*
- *Si escribe cualquier sistema de ecuaciones en x, y, z (sin incógnitas adicionales) que corresponda a la recta, asignar el puntaje completo. Si la idea está bien pero los cálculos mal hechos, asignar la mitad del puntaje.*
- *Si dice que la recta tangente a la curva cuando $t = \frac{\pi}{6}$ es aquella que pasa por $\vec{r}(\frac{\pi}{6})$ y es paralela a $\vec{r}\,'(\frac{\pi}{6})$ y no hace nada más, asignar 0,3pt.*

□

c) Encuentre el ángulo en el que se cortan la recta tangente de la parte *a*) y la recta tangente de la parte *b*).

Solución. 1) **[1pt]** Decir que para encontrar el ángulo en que se cortan las rectas basta con calcular el producto punto de los vectores directores.

2) **[0,5pt]** Calcular bien el producto punto (debería ser cero).

3) **[0,5pt]** Calcular bien el ángulo a partir del producto punto obtenido (aunque haya calculado mal el producto punto).

□

4. Dados los vectores $\overrightarrow{OA} = (2, 1, 2)$ y $\overrightarrow{OB} = (3, 6, -2)$, calcule el área del triángulo OAB que generan y encuentre un vector $\overrightarrow{OC}$ tal que el tetraedro $OABC$ tenga un volumen igual a 2 (recuerde que el volumen de una pirámide es $base \cdot altura/3$).

Solución. *a*) **[1,5pt]** $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = (-14, 10, 9)$

- *Mitad del puntaje por saber intentar calcular el producto cruz, mitad del puntaje por hacerlo correctamente.*

b) **[1,0pt]** El área del triángulo es $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\|$

- *No es necesario justificar la fórmula.*
- *Si falta el factor $\frac{1}{2}$, descontar 0,3pt.*

c) **[0,5pt]** $= \dfrac{\sqrt{377}}{2}$.

- *El puntaje es por calcular correctamente la magnitud del vector obtenido como producto cruz, aun cuando se haya equivocado al calcular el producto cruz.*

d) **[1pt]** Sean (x, y, z) las coordenadas de C. El volumen de la pirámide es

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OC} \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}).$$

e) **[0,5pt]** $= \frac{1}{6} \cdot (-14x + 10y + 9z)$

- *El puntaje es por calcular correctamente el producto punto o producto caja/determinante; si hay un error que se deba a haber calculado mal el primer producto cruz, no descontar más puntaje.*

f) **[1pt]** Plantear una ecuación lineal: buscamos entonces x, y y z tales que $-14x + 10y + 9z = 12$.

g) **[0,5pt]** Resolver el sistema de ecuaciones. Hay infinitas soluciones, para encontrar una basta con reemplazar, por ejemplo, $x = y = 0$ en la ecuación: $z = 12/9$. Encontramos que $C(0, 0, 4/3)$ cumple las propiedades pedidas.

$\square$