INTERROGACIÓN 1
MAT1620

1. UNA SOLUCIÓN PREGUNTA DE DESARROLLO-V1

a) Determine todos los máximos locales, mínimos locales y puntos tipo silla de la función.

$$f(x, y) = xy(1 - x - y).$$

b) Sea D el triángulo de vértices $(-2, 0); (0, 2); (2, 0)$. Determine los máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x, y) = xy(1 - x - y),$$

definida sobre el conjunto D.

Solución 1:

- Los puntos críticos de la función dada son:

$$(0, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 0), \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

- El determinante de la matriz Hessiana que permite clasificar los puntos calculados anteriormente es:

$$det(H) = 4xy - (1 - 2(x + y))^2, \qquad f_{xx} = 2y.$$

- Los puntos $(0, 0), \quad (0, 1), \quad (1, 0)$ son puntos del tipo silla ya que en todos los casos se tiene que $det(H) < 0$ al evaluarlo en dichos puntos. En el caso del punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ este resulta ser un mínimo local.
- En primer lugar notamos que todos los puntos obtenidos anteriormente son puntos críticos interiores de la región D, por lo tanto

los cuatro puntos son candidatos a máximos o mínimos absolutos.
Por otro lado la región tiene una frontera formada por

$$F_1 := \{(x,y) : y = 2 - x \, x \in [0,2]\}$$
$$F_2 := \{(x,y) : y = x + 2 \, x \in [0,2]\}$$
$$F_3 := \{(x,y) : y = 0, x \in [-2,2]\}$$

Sobre el segmento F_1 el único punto candidato es $(1,1)$.
Sobre el segmento F_2 existen dos puntos críticos los cuales son

$$\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{6}, \frac{7-\sqrt{13}}{6}\right), \qquad \left(\frac{-5+\sqrt{13}}{6}, \frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)$$

Sobre el segmento F_3 la función es identicamente cero, luego no aporta puntos críticos.
Finalmente se deben considerar los puntos donde se encuentran los vértices de la región D

$$(2,0), \quad (-2,0), \quad (0,2).$$

- Evaluando en cada uno de los puntos descritos anteriormente se obtiene que el valor máximo de la función f sobre el conjunto D lo alcanza en el punto

$$\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{6}, \frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)$$

y el valor mínimo lo alcanza en el punto

$$\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{6}, \frac{7-\sqrt{13}}{6}\right).$$

2. UNA SOLUCIÓN PREGUNTA DE DESARROLLO-V2

a) Determine y clasifique todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = 12xy - 2x^3 - 3y^2.$$

b) Determine el máximo y mínimo absoluto de la función

$$f(x,y) = 2 + xy - 2x - \frac{y^2}{4},$$

definida sobre la región triangular de vértices en los puntos $(0,0); (1,0); (0,2)$.

Solución 2:

- Los puntos críticos de la función dada son:

$$(0,0), \quad (4,8).$$

- El determinante de la respectiva matriz hessiana es

$$det(Hf) = 144(x/2 - 1), \qquad f_x x = -12x.$$

- El punto $(0,0)$ es un punto del tipo silla. El punto $(4,8)$ es un punto del tipo máximo local.
- Respecto de la función definida sobre la región triangular, comenzamos notando que no posee puntos críticos en el interior de la región dada.

- La frontera de la región tiene tres partes,

$$\begin{aligned} F_1 &:= \{(x,y) : y = 0, x \in [0,1]\} \\ F_2 &:= \{(x,y) : x = 0, y \in [0,1]\}, \\ F_3 &:= \{(x,y) : y = 2 - 2x, x \in [0,1]\} \end{aligned}$$

  En las frontereas F_1, F_2 no existen puntos críticos. En la frontera F_3 encontramos el candidado $(1/3, 4/3)$.
  Tambien debemos considerar los vértices de la región dada,

$$(0,0); (1,0); (0,2)$$

- Finalmente evaluamos la función en todos los puntos encontrados anteriormente para concluir que, el valor mǩimo de f es igual a 2 y lo alcanza en el punto $(0,0)$. El valor mínimo de f es 0 y lo alcanza en el punto $(1,0)$.