PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027
Solución Ayudantía 11

1. Considere la siguiente distribución de probabilidades del vector aleatorio (X, Y):

Y/X	1	2	3
2	0.1	0.2	0.1
4	0.1	0.2	0.3

(a) Encuentre las distribuciones marginales de X y de Y

(b) ¿Son X e Y variables aleatorias independientes?

(c) Calcule $P(Y = 2X)$

(d) Calcule $P(X \geq \sqrt{Y})$

(a) Para esto es útil hacer una tabla. Para obtener la marginal de X hay sumar en este caso hacia abajo, mientras que para obtener la marginal de Y hay que sumar hacia el lado. Esto queda de la siguiente forma

Y/X	1	2	3	Y
2	0.1	0.2	0.1	0.4
4	0.1	0.2	0.3	0.6
X	0.2	0.4	0.4	

Entonces de aca tenemos

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.2, & x = 1 \\ 0.4, & x = 2 \\ 0.4, & x = 3 \end{cases}$$

$$P(Y = y) = \begin{cases} 0.4, & y = 2 \\ 0.6, & y = 4 \end{cases}$$

(b) Para esto debemos corroborar que $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$, para todo x, y. Pero, para evitar ir probando valor por valor podemos notar que

$$P(X = 1, Y = 2) = 0.1$$

mientras que

$$P(X = 1)P(Y = 2) = 0.2 \cdot 0.4 = 0.08$$

mas aun

$$\begin{aligned} P(X = 1, Y = 2) &= P(X = 1)P(Y = 2) \\ 0.1 &\neq 0.08 \end{aligned}$$

por lo que no son independientes.

(c)

$$\begin{aligned} P(Y = X) &= P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) \\ &= 0 + P(Y = 2) + 0 \\ &= 0 + 0.4 + 0 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P(X = Y - 1) &= P(X = 2 - 1) + P(X = 4 - 1) \\ &= P(X = 1) + P(X = 3) \\ &= 0.2 + 0.4 \\ &= 0.6 \end{aligned}$$

2. Muestre que si X, Y son independientes, entonces $g(X), h(Y)$ también son independientes.

Seamos un tanto rigurosos. Para esto vamos a a usar la conjunta de $P(g(X), h(Y))$ y $P(X, Y)$.

$$\begin{aligned} P(g(X) \in A, h(Y) \in B) &= P(X \in g^{-1}(A), Y \in h^{-1}(B)) \\ &= P(X \in g^{-1}(A))P(Y \in h^{-1}(B)) \\ &= P(g(X) \in A)P(h(Y) \in B) \end{aligned}$$

Luego, como se puede factorizar de la forma

$$p_{g(X),h(Y)}(x, y) = p_{g(X)}(x)p_{h(Y)}(y)$$

se concluye que $g(X), h(Y)$ son independientes.

3. Sea X, Y variables aleatorias con distribución conjunta

$$P(X = m, Y = n) = \frac{1}{2^{m+1}}, \quad m \geq n$$

para $m, n = 1, 2, ...$

(a) Encuentre la marginal de X

(b) Encuentre la marginal de Y

(c) Discuta sobre si X, Y son independientes o no

(a) Para esto se pude hacer un análogo al caso continuo, note que si

$$m \geq n; \quad n = 1, 2, ...$$

entonces

$$1 \leq n \leq m; \quad m = 1, 2, ...$$

de este modo podemos obtener las marginales de forma sencilla.

$$\begin{aligned} P(X = m) &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \frac{m}{2^{m+1}} \end{aligned}$$

Luego,

$$P(X = m) = \frac{m}{2^{m+1}}, \quad m = 1, 2, ...$$

(b) La marginal de Y es directa

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{2^m} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+n}} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - 1/2} \\ &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

(c) Note que el recorrido conjunto es

$$m \geq n$$

por lo que existe una dependencia entre las variables, pues si $n = 1$

$$m \geq 1$$

si $n = 2$

$$m \geq 2$$

por lo que m depende del valor de n, concluyendo así que X, Y no son independientes. Recuerde además, que para que X, Y sean independientes, un requisito necesario, pero no suficiente, es que el recorrido de las v.a.s sea igual al producto cartesiano del recorrido conjunto, en este caso

$$\{1, 2, ...\} \times \{1, 2, ...\} \neq \{m \geq n\}$$

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} e^{-\frac{x^2}{2a}} I(0 < y < x^2)$$

con $a > 0$.

(a) Encuentre la marginal de Y

(b) Calcule $P(Y < X \cap X > 1)$

(c) Con lo anterior muestre que

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{f_Y(y; a)}{e^{1/2a} P(Y < X \cap X > 1; a)} = 0$$

(a) Note que lo entregado corresponde simplemente a

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} e^{-\frac{x^2}{2a}}, & 0 < y < x^2 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Para obtener la marginal de Y hay que dar vuelta el intervalo, pues note que y va entre funciones, (entre 0 y x^2), y nos interesa que vaya en un intervalo numérico. El recorrido conjunto se visualiza en la figura 1

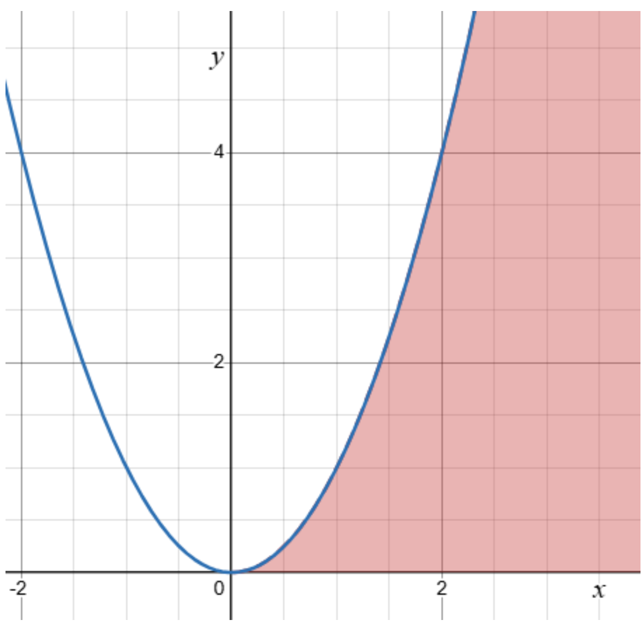

Figure 1: Recorrido conjunto 1

Lo que equivale a

$$0 < y < x^2, \quad x > 0$$

Para dar vuelta el intervalo necesitamos calcular las inversas de todos las funciones involucradas, en este caso tenemos

$$y = x^2$$

entonces

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ x &= |y| \\ x &= y \end{aligned}$$

como $y > 0$, nos quedamos con el lado positivo. Ahora graficamos la inversa.

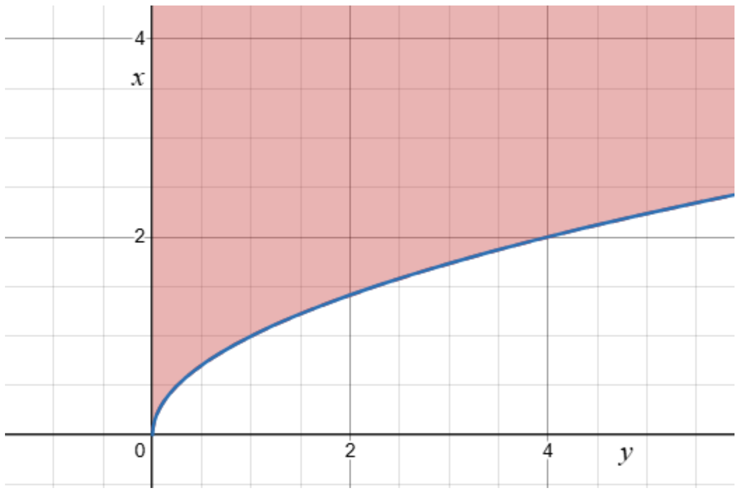

Figure 2: Recorrido conjunto 2

Lo que equivale a

$$\sqrt{y} < x < \infty, \quad y > 0$$

Entonces ahora si podemos calcular la marginal de Y.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\sqrt{y}}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} e^{-\frac{x^2}{2a}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} \int_{\sqrt{y}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2a}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} \sqrt{2\pi a} \int_{\sqrt{y}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} \sqrt{2\pi a} P(W > \sqrt{y}), \quad W \sim N(0, a) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} \sqrt{2\pi a} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}}\right)\right) \end{aligned}$$

Luego,

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} \sqrt{2\pi a} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}}\right)\right), \quad y > 0$$

(b) Nos piden

$$P(Y < X \cap X > 1)$$

Para esto podemos dibujar a que corresponde.

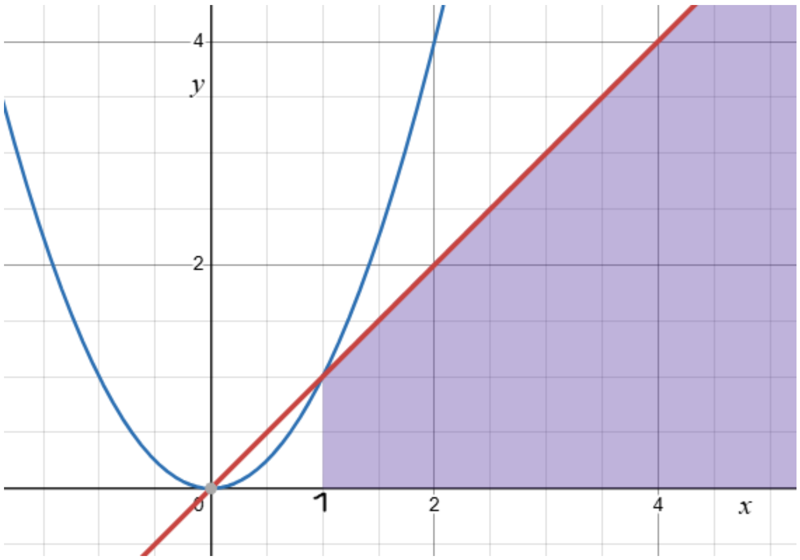

Figure 3: Región de integración

Entonces esto se calcula de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
P(Y < X \cap X > 1) &= \int_1^\infty \int_0^x \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} e^{-\frac{x^2}{2a}} dy dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} \int_1^\infty x e^{-\frac{x^2}{2a}} dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} a \int_{1/2a}^\infty e^{-u} du \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} a e^{-1/2a}
\end{aligned}$$

(c) Note que tenemos

$$\begin{aligned}
P(Y < X \cap X > 1; a) &= \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} a e^{-1/2a} \\
f_Y(y; a) &= \sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} \sqrt{2\pi a} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Entonces reemplazamos todo

$$\begin{aligned}
\lim_{a \to 0^+} \frac{f_Y(y; a)}{e^{1/2a} P(Y < X \cap X > 1; a)} &= \lim_{a \to 0^+} \frac{1}{e^{1/2a}} \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} \sqrt{2\pi a} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}}\right)\right)}{\sqrt{\frac{2}{\pi a^3}} a e^{-1/2a}} \\
&= \sqrt{2\pi} \lim_{a \to 0^+} \frac{\left(1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}}\right)\right)}{\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Note que

$$\lim_{a\to 0^+} \frac{\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}}\right)\right)}{\sqrt{a}} = \frac{\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{0}}\right)\right)}{\sqrt{0}}$$
$$= \frac{(1-\Phi(\infty))}{\sqrt{0}}$$
$$= \frac{(1-1)}{\sqrt{0}}$$
$$= \frac{0}{0}$$

por lo que hay que aplicar L'Hopital. Pero antes podemos hacer el siguiente cambio de variable

$$u = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

de modo que $u \to \infty$, entonces

$$\sqrt{2\pi} \lim_{a\to 0^+} \frac{\left(1-\Phi\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a}}\right)\right)}{\sqrt{a}} = \sqrt{2\pi} \lim_{u\to\infty} u\left(1-\Phi\left(u\sqrt{y}\right)\right)$$

Ahora si re ordenamos y aplacamos L'Hopital.

$$\sqrt{2\pi} \lim_{u\to\infty} u\left(1-\Phi\left(u\sqrt{y}\right)\right) = \sqrt{2\pi} \lim_{u\to\infty} \frac{\left(1-\Phi\left(u\sqrt{y}\right)\right)}{1/u}$$
$$= \sqrt{2\pi} \lim_{u\to\infty} u^2\sqrt{y}\phi(\sqrt{y}u)$$
$$= \sqrt{2\pi}\sqrt{y} \lim_{u\to\infty} u^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(u\sqrt{y})^2/2}$$
$$= \sqrt{y} \lim_{u\to\infty} \frac{u^2}{e^{(u\sqrt{y})^2/2}}$$
$$= 0$$

5. Sea X, Y dos variables aleatorias. Muestre que

$$\left|\mathbb{E}(XY)\right| \le \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}$$

Para esto consideremos la función

$$f(t) = \mathbb{E}([tX+Y]^2)$$

note que $f(t) \ge 0$ para todo t.
Ahora, si expandimos tenemos

$$f(t) = \mathbb{E}([tX+Y]^2)$$
$$= \mathbb{E}(X^2)t^2 + 2\mathbb{E}(XY)t + \mathbb{E}(Y^2)$$

esto corresponde a una ecuación cuadrática. Mas aun, para que $f(t)$ sea positiva se debe cumplir que $\mathbb{E}(X^2) \ge 0$, y además no tiene raíces en los reales, pues en caso contrario pasa a ser negativa. Al no tener raíces en los reales implica que una cuadrática debe cumplir que

$$\triangle = b^2 - 4ac \le 0$$

remplazando en nuestro caso tenemos

$$\begin{aligned}
4\mathbb{E}(XY)^2 - 4\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) &\leq 0 \\
\mathbb{E}(XY)^2 &\leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \\
\left|\mathbb{E}(XY)\right| &\leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}
\end{aligned}$$

mostrando asi lo pedido.