PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2023

Ayudantía 3 - MAT1610

1. Determine para qué valor(es) de la constante b, la función

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)-2\operatorname{sen}^2(x)}{3x} & si \quad x<0 \\[2ex] \dfrac{\sec\left(\dfrac{x+\pi}{3}\right)}{3} & si \quad x=0 \\[2ex] \dfrac{1-\cos(bx)}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

es continua en $x=0$

Solución: Para que la función sea continua en $x=0$ debe existir el $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

Se tiene que

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{\sec\left(\dfrac{0+\pi}{3}\right)}{3} \\ &= \frac{\sec\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{3} \\ &= \frac{\dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^-} f(x) &= \lim_{t\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(2x) - 2\operatorname{sen}^2(x)}{3x} \\
&= \lim_{t\to 0^-} \frac{2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - 2\operatorname{sen}^2(x)}{3x} \\
&= 2\lim_{t\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)\left(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right)}{3x} \\
&= \frac{2}{3}\lim_{t\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right) \\
&= \frac{2}{3}\lim_{t\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\left(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right) \\
&= \frac{2}{3}\left(\lim_{t\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right)\left(\lim_{t\to 0^-}\left(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right)\right) \\
&= \frac{2}{3}(1-0) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

y,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(bx)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos^2(bx)}{x^2\left(1+\cos(bx)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(bx)b^2}{b^2x^2\left(1+\cos(bx)\right)} \quad (\text{considerando } b \neq 0) \\
&= b^2\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx}\right)^2 \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left(1+\cos(bx)\right)} \\
&= b^2 \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{b^2}{2}
\end{aligned}$$

Así, la función f es continua si $\frac{2}{3} = \frac{b^2}{2}$, es decir, si $b = \pm 2\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Note que si $b = 0$, para $x > 0$, la función $f(x)$ es constantemente igual a cero, entonces en este caso $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ y, por ello, la función no es continua en $x = 0$.

En el $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx}$ es de notar que:

Si $b > 0$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$ y

Si $b < 0$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1$

2. Demuestre que la ecuación $\operatorname{sen}(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene al menos 2 soluciones reales.

Solución: Considere la función $f(x) = \operatorname{sen}(x) - \dfrac{1}{x}$, la cual es continua en el intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, por ser una diferencia entre funciones continuas en dicho intervalo y,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi} = y_2 > 0$$

y

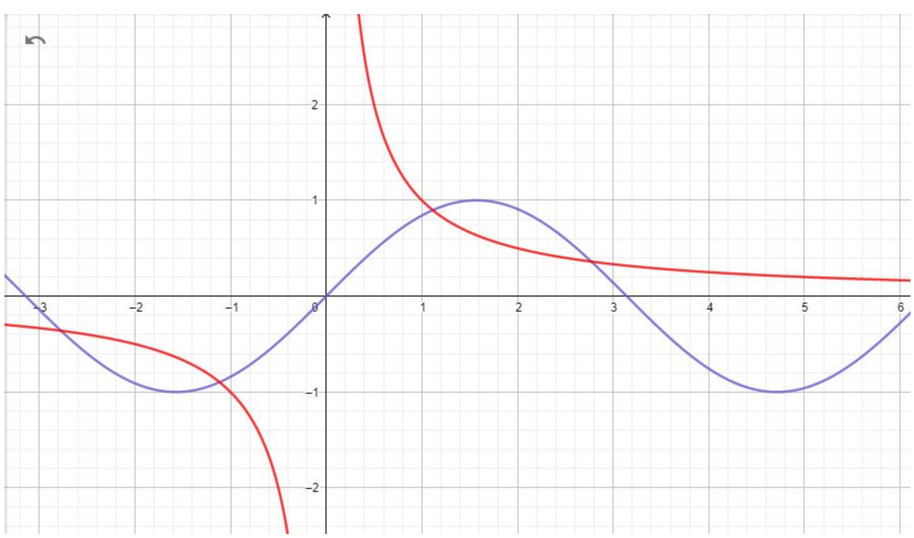
$$f(\pi) = \operatorname{sen}(\pi) - \frac{1}{\pi} = 0 - \frac{1}{\pi} = -\frac{1}{\pi} = y_1 < 0$$

y $0 \in [y_1, y_2]$. Entonces, por el teorema del valor intermedio, existe un valor c, con $\dfrac{\pi}{2} < c < \pi$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $\operatorname{sen}(c) - \dfrac{1}{c} = 0$ o, equivalentemente, $\operatorname{sen}(c) = \dfrac{1}{c}$, lo cual indica que c es solución de la ecuación dada e implica que existe al menos una solución de la ecuación.

En este caso particular se puede usar que la función f es impar y por lo tanto en el intervalo $\left(-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right)$ hay otra solución. Sin embargo, si no se tiene esta propiedad, para garantizar la existencia de otra solución, se debe considerar otro intervalo donde se pueda garantizar la hipótesis del teorema del valor intermedio.

Otro intervalo que puede se usar es, por ejemplo, $\left[1, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ya que $f(1) = \operatorname{sen}(1) - 1 < 0$ y $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$.

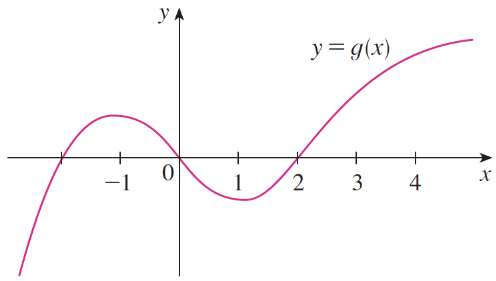
Dar idea grafica



3. Sea f una función continua en $[-1, 2]$ tal que $f(-1) > 1$ y $f(2) < 4$. Demuestre que existe un valor c, $c \in (-1, 2)$ tal que $f(c) = c^2$.

   Solución: Defina $g(x) = f(x) - x^2$, entonces $g(-1) = f(-1) - (1)^2 = f(-1) - 1 = y_2 > 0$ y $g(2) = f(2) - 2^2 = f(2) - 4 = y_1 < 0$. Entonces, como $0 \in [y_1, y_2]$, por el teorema del valor intermedio, existe un valor c, con $-1 < c < 2$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $g(c) = f(c) - c^2 = 0$ o $f(c) = c^2$

4. Sea g la función cuya gráfica se muestra a continuación



Ordene los números $0, g'(-2), g'(0), g'(2)$ y $g'(4)$ de manera creciente. Explique su razonamiento.

Solución:

De la inclinación de las rectas tangentes se puede ver que:

$$g'(0) < g'(4) < g'(2) < g'(-2)$$

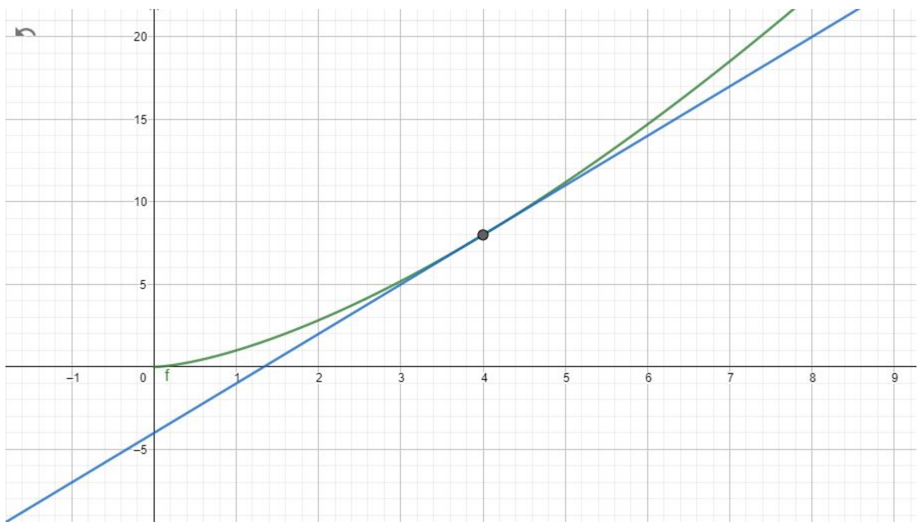
5. Determine la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = \sqrt{x^3}$ en el punto $(4, 8)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(4+h)^3} - \sqrt{4^3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(4+h)^3} - 8}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(4+h)^3 - 64}{h\left(\sqrt{(4+h)^3} + 8\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{64 + 12h^2 + 48h + h^3 - 64}{h\left(\sqrt{(4+h)^3} + 8\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{12h + 48 + h^2}{\sqrt{(4+h)^3} + 8} \\
&= 3
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a f en $x = 4$ es: $y - 8 = 3(x - 4)$, es decir, $y = 3x - 4$.

Dar idea grafica



20
15
10
5
−5
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
f