PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2017

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 1

1. a) Dadas las funciones f y g continuas en $[a, b]$,tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, demuestre que existe un número c tal que $f(c) = g(c)$.

   Solución
   Sea $h(x) = f(x) - g(x)$
   Luego h es continua en $[a, b]$ porque f y h lo son, además: $h(a) = f(a) - g(a) > 0$
   $h(b) = f(b) - g(b) < 0$
   Luego $\exists c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$
   Es decir:
   $\exists c$ tal que $f(c) = g(c)$

   b) Calcule el siguiente límite

   $$\lim_{x\to 3} (x-3)\csc(\pi x)$$

   Solución

   Sea $u = x - 3$
   Entonces
   $\lim\limits_{x\to 3} (x-3)\csc(\pi x) = \lim\limits_{u\to 0} u \csc \pi(u+3)$
   $= \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u}{-\operatorname{sen}(\pi u)} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1}{\dfrac{-\pi \operatorname{sen}(\pi u)}{\pi u}} = -\dfrac{1}{\pi}.$

2. a) Un recipiente de agua tiene forma de cono invertido (con el vértice hacia abajo) de 6 m de radio y 10 m de altura. Si se llena con agua a razón de 5 litros por minuto, con qué rapidez varía la altura del agua en el recipiente cuando ésta llega a 4 m?

   Solución
   Dado que $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ es el volumen del cono, donde r es el radio y h la altura, además nos dan como dato que $\dfrac{dV}{dt} = 5$ y nos piden calcular $\left(\dfrac{dh}{dt}\right)_{h=4}$

   Además se cumple la siguiente relación:

   $$\frac{h}{r} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

   Por lo tanto

   $$r = \frac{3h}{5}$$

Reemplazando este valor de h en el volumen nos queda:

$$V = \frac{3}{25}\pi h^3$$

Entonces derivando:

$$5 = \frac{dV}{dt} = \frac{9}{25}\pi h^2 \frac{dV}{dt}$$

Luego

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{h=4} = \frac{125}{144\pi}$$

b) Las curvas $y^2 = 4x^3$ y $2x^2 + 3y^2 = 14$ se intersectan en el punto $(1, 2)$. Demuestre que sus tangentes en ese punto son perpendiculares entre si.

Solución

Por un lado tenemos que

$$2y\frac{dy}{dx} = 12x^2$$

Luego la pendiente de la tangente de la primera curva en el punto $(1,\ 2)$ es 3.

Para la segunda curva tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{3y}$$

luego la pendiente de la tangente de la segunda curva en el punto $(1,\ 2)$ es $-\frac{1}{3}$ con lo cual queda demostrado que son perpendiculares.

3. a) Son conocidos los siguientes valores de las funciones f, g, y sus derivadas:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$g(x)$	$g'(x)$
1	3	3	3	1
2	4	2	4	4
3	2	1	2	2
4	1	4	1	4

Sea $h(x) = f(g(f(x)))$. Calcule $h'(1)$.

Solución

$$h'(x) \;=\; f'(g(f(x)))\, g'(f(x))\, f'(x)$$

Por lo tanto

$$h'(1) \;=\; f'g(3))\, g'(3)\, f'(1) \;=\; 12$$

b) Considere la función $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$. Demuestre que existe una constante c tal que la ecuación $f'(x) = cf(x + \frac{\pi}{4})$ se cumple para todo x, y determine el valor de c.

Solución

$$f'(x) \;=\; e^x(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))$$

Además

$$cf(x + \pi/4) \;=\; ce^x e^{\pi/4}\Big(\operatorname{sen}(x)\frac{\sqrt{2}}{2} \;+\; \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x)\Big) = ce^{\pi/4}e^x\frac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen}(x) + \cos(x))$$

Entonces para que $f'(x) = cf(x + \frac{\pi}{4})$. Se debe cumplir que:

$$c \;=\; e^{-\pi/4}\sqrt{2}$$

Entonces

$$\forall x(f'(x) = cf(x + \tfrac{\pi}{4}))$$

4. a) Dadas las funciones $f(x) = 3 - 5x^7 + 2x^{15}$ y $g(x) = \ln(f(x))$, Calcular

$$\lim_{x\to\infty} xg'(x)$$

Solución

Tenemos que

$$g'(x) \;=\; \frac{-35x^6 + 30x^{14}}{3 - 5x^7 + 2x^{15}}$$

Luego

$$\lim_{x\to\infty} xg'(x) \;=\; \lim_{x\to\infty} \frac{-35x^7 + 30x^{15}}{3 - 5x^7 + 2x^{15}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{-35}{x^8} + 30}{\dfrac{3}{x^{15}} - \dfrac{5}{x^8} + 2} \;=\; 15.$$

b) Si $x^2y + y^3 = 2$, calcule y' e y'' en el punto $(1,1)$.

Solución
Derivando implícitamente la ecuación, tenemos que:

$$2xy + x^2y' + 3y^2y' = 0$$

Despejando y' de la ecuación, tenemos que.

$$y' = \frac{-2xy}{x^2+3y^2}$$

Por lo tanto

$$\Big(y'\Big)_{(1,1)} = -\frac{1}{2}$$

Al derivar y' implícitamente, tenemos que:

$$y'' = \frac{(-2y-2xy')(x^2+3y^2)-(2x+6yy')(-2xy)}{(x^2+3y^2)^2}$$

Luego

$$\Big(y''\Big)_{(1,1)} = -\frac{3}{8}.$$

Deben llenar sus datos en los dos cuadernillos y contestar las preguntas 1 y 2 en el cuadernillo que así lo dice y las preguntas 3 y 4 en el correspondiente.
Duración: 2 horas.
Sin uso de calculadoras.
Recuerde escribir sólo con tinta indeleble y no usar corrector. Justifique todas sus respuestas.