Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 8

1. Considere la sucesión $a_n = \dfrac{n + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1}$, encuentre $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   Solución. Sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

   $$-1 \leqslant \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leqslant 1$$

   Se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

   $$n - 1 \leqslant n + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leqslant n + 1 \Longleftrightarrow \frac{n-1}{2n+1} \leqslant \frac{n + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1} \leqslant \frac{n+1}{2n+1}$$

   Ahora bien, como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$ entonces por el Teorema del Sandwich se sigue que

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por acotar la sucesión a_n.
- 2 puntos por calcular los límites $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{2n+1}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n+1}$
- 2 puntos por usar el teorema del sandwich y concluir que la sucesión converge a 1/2.

2. Considere la sucesión definida mediante la recurrencia

$$s_1 = 1, \quad s_{n+1} = \sqrt{72 + s_n}.$$

   (a) (3pts) Es fácil ver que $0 < s_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que la sucesión está bien definida. Demuestre (usando inducción) que $s_n < 9 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

   (b) (3pts) Pruebe que $s_{n+1} - s_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, es decir, que $(s_n)_n$ es estrictamente creciente.

Solución.

(a) Procedemos por inducción. El paso base se tiene de forma directa, dado que $s_1 = 1 < 9$. Asumimos que $s_n < 9$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que lo anterior es cierto para s_{n+1}. Tenemos

$$s_n < 9 \Rightarrow 72 + s_n < 81 \Rightarrow \sqrt{72 + s_n} = s_{n+1} < \sqrt{81} = 9.$$

(b) Tenemos

$$s_{n+1} - s_n = \sqrt{72 + s_n} - s_n = \sqrt{72 + s_n} - s_n \frac{\sqrt{72 + s_n} + s_n}{\sqrt{72 + s_n} + s_n} = \frac{(72 + s_n) - s_n^2}{\sqrt{72 + s_n} + s_n} = \frac{(9 - s_n)(8 + s_n)}{\sqrt{72 + s_n} + s_n} > 0,$$

donde en la última desigualdad usamos que $s_n \in (0, 9) \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Puntaje Pregunta 2.

(a) 0.5 pts por el paso base y 2.5 pts por el paso inductivo (asignar 0.5 pts a la hipótesis inductiva).

(b) 1 pto por racionalizar, 1 pto por factorizar el nominador y 1 pto por concluir.

3. Considere la sucesión definida en la pregunta anterior. Concluya de 2. (a) y 2. (b) que converge y calcule su límite.

Solución. Dado que $(s_n)_n$ es una sucesión monótona y acotada, por teorema visto en clases deducimos que converge a un límite, el que denotaremos por L. Dado que $s_n \in (0, 9)\ \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que $L \in [0, 9]$. Usando la relación de recurrencia, concluimos que

$$L^2 = \lim_{n\to\infty} s_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (72 + s_n) = 72 + L,$$

donde usamos álgebra de límites y el hecho de que $(s_{n+1})_n$ es una subsucesión de $(s_n)_n$, por lo que converge a L. Luego, $L = -8$ ó $L = 9$. La primera solución se descarta, dado que $L \in [0, 9]$, y por lo tanto, $L = 9$.

Alternativamente, la relación $L^2 = 72 + L$ se pude obtener de la siguiente forma: dado que $s_n > 0$ y por lo tanto $L \geq 0$, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{72 + s_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} (72 + sn)} = \sqrt{72 + L},$$

y por lo tanto

$$L = \lim_{n\to\infty} s_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{72 + s_n} = \sqrt{72 + L} \Rightarrow L^2 = 72 + L.$$

Puntaje Pregunta 3.

- 1 pto por concluir que $(s_n)_n$ converge, 1 pto por mostrar que $L \in [0, 9]$, 1 pto por indicar que $(s_{n+1})_n$ converge a L al ser subsucesión de $(s_n)_n$, 1 ptp por utilizar correctamente álgebra de límites, 1 pto por obtener $L^2 = 72 + L$ y 1 pto por concluir que $L = 9$.