Pontificia Universidad Católica de Chile
Bastián Mora - bmor@uc.cl
Matías Fernández - matias.fernandez@uc.cl

MAT1107 - Introducción al Cálculo

Ayudantía 03 - Jueves 31 de marzo del 2022

Problema 1. Determine si las siguientes funciones están bien definidas o no.

a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, $f(\frac{p}{q}) = p - q$.

b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto d$, donde d es el natural más grande que divide a n.

c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(n) = \frac{1}{n}$.

Solución:

a) Notar que las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$ representan el mismo número racional, pero $1 - 2 \neq 3 - 6$.

b) Si $n > 0$ se puede ver que $g(n) = n$ y si $n < 0$, $g(n) = |n| = -n$. Sin embargo, la función no está definida para $n = 0$, pues todo número natural divide al cero, es decir, no hay un *mayor natural* que lo divida. La función no está bien definida.

c) Primero que nada, para cada $n \in \mathbb{N}$, la fracción $\frac{1}{n}$ está bien definida y es un número real. Por otro lado, para cada n la imagen de n por h es unívoca; un argumento algo artificial de esto es:
Suponiendo que $n = m$ son el mismo número natural, podemos dividir la igualdad por $nm \neq 0$ y obtenemos $h(m) = \frac{1}{m} = \frac{1}{n} = h(n)$.

Problema 2. Sea $z > 0$ dado, y llamemos A_z al conjunto solución de la desigualdad

$$\left|x^2 + zx + z^2\right| \leq zx + 2z^2.$$

Demuestre que si $0 < z_1 < z_2$ entonces $A_{z_1} \subset A_{z_2}$.

Solución
Observemos que

$$x^2 + zx + z^2 = \frac{(x+z)^2}{2} + \frac{x^2 + z^2}{2}.$$

Esto dice que $x^2 + zx + z^2 \geq 0$ para todo $x, z \in \mathbb{R}$. En otras palabras

$$\left|x^2 + zx + z^2\right| = x^2 + zx + z^2$$

para todo $x, z \in \mathbb{R}$. Esto dice que la inecuación

$$\left|x^2 + zx + z^2\right| \leq zx + 2z^2.$$

es equivalente a

$$x^2 + zx + z^2 \leq zx + 2z^2$$

que a su vez es equivalente a

$$x^2 \leq z^2.$$

Esta última desigualdad sabemos que tiene conjunto solución

$$A_z = [-z, z]$$

porque $z > 0$. Es evidente que si $z_1 < z_2$ entonces $A_{z_1} \subset A_{z_2}$.

Problema 3. Sea a una constante real. Encuentre el conjunto solución de

$$\frac{|x-a|}{|x+a|} > 1.$$

Solución

Notar que $x \neq -a$ (ya que el denominador se vuelve 0). Luego, $|x+a|$ siempre es positivo, por lo que multiplicando por $|x+a|$ a ambos lados se tiene que lo anterior es equivalente a

$$|x-a| > |x+a|.$$

Como ambos términos son positivos, elevar al cuadrado no modifica nuestras soluciones:

$$|x-a|^2 > |x+a|^2.$$

Como $|x|^2 = x^2$, sacando el módulo y expandiendo los cuadrados se llega a

$$x^2 - 2ax + a^2 > x^2 + 2ax + a^2.$$

Sumando $-\left(x^2 - 2ax + a^2\right)$ y simplificando se tiene que

$$0 > 4ax \Leftrightarrow 0 > ax$$

Desde aquí dependemos de a :

- Si $a = 0$, tendríamos que $0 > 0, \rightarrow\leftarrow$. Por lo tanto, en este caso no hay soluciones.
- Si $a > 0$, entonces $a^{-1} > 0$, lo que implica en la inecuación anterior que $0 > x$. Luego, las soluciones son $\{x \in \mathbb{R} : x < 0 \wedge x \neq -a\}$ (el conjunto $(-\infty, 0) \backslash \{-a\}$).
- Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$, por lo que la inecuación es equivalente a $0 < x$. Aquí las soluciones son $\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x \neq -a\}$ (el conjunto $(0, \infty) \backslash \{-a\}$). Uniendo los casos tenemos lo pedido.

Problema 4. Encuentre el dominio y el recorrido de la función

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2}$$

Solución

DOMINIO: El dominio de f corresponde a

$$\text{Dom } f = \left\{x \in \mathbb{R} : 2x - x^2 \geq 0\right\}.$$

Resolviendo la inecuación, obtenemos

$$\operatorname{Dom} f = [0, 2].$$

RECORRIDO: Planteamos la ecuación

$$y = \sqrt{2x - x^2}.$$

Elevando al cuadrado, obtenemos

$$y^2 = 2x - x^2,$$

que se reordena como

$$x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

Esta ecuación tiene soluciones si y sólo si

$$4 - 4y^2 \geq 0.$$

Resolviendo la inecuación, obtenemos $-1 \leq y \leq 1$. Como $y \geq 0$, obtenemos $y \in [0, 1]$. Por lo tanto, el recorrido es $[0, 1]$.

Problema 5. Considere la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}.$$

a) Encuentre el dominio de f.

b) Calcule la imagen de f.

c) Esboce el gráfico de f.

Solución:

a) Primeramente notemos que en este caso el dominio de f no está explícito, por lo que nos están pidiendo es encontrar el *recorrido máximo* de f en $\mathbb{R}$. Para esto, observamos las restricciones naturales de f.
   Lo primero es que la raíz sólo puede tomar valores no negativos, por tanto $1 - x \geq 0$ y por tanto $x \in (-\infty, 1]$. Y la otra restricción viene de que el denominador de la fracción no puede anularse, es decir,

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1 - x} \neq 0 &\iff 1 \neq \sqrt{1 - x} \\ &\iff 1 \neq 1 - x \\ &\iff x \neq 0 \end{aligned}$$

   Así nos queda que $Dom(f) = x \in (-\infty, 1] \setminus \{0\}$.

b) Notemos que para $x \in Dom(f)$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-\sqrt{1-x}} &= \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1+\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} \\
&= \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} \\
&= \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} \\
&= 1+\sqrt{1-x}.
\end{aligned}$$

De modo que si $y \in Rec(f)$, esto significa que existe $x \in Dom(f)$ tal que $y = 1+\sqrt{1-x}$, lo que primeramente nos dice que $y \geq 1$. Y despejando, $x = 1-(y-1)^2$, lo que no nos dice mucho, sólo que no hay ninguna restricción para y más que $y \geq 1$ y que $x = 0$ no tiene imagen, o sea, $y = 1+\sqrt{1} = 2$ no está en el recorrido. Así, $Rec(f) = [1,\infty) \setminus \{2\}$.

c) Esta solución es un dibujo que estará en otro pdf.

Problema 6. Encuentre una función $f : (3,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que la siguiente proposición sea verdadera:

$$(\forall x > 3)(\forall y < 0)(4x^2y^2 = (x-3)^4 \implies y = f(x)).$$

Solución: Notemos que $4x^2y^2 = (x-3)^4$, teniendo el cuidado de que $x > 3 > 0$, es equivalente a $y^2 = \frac{(x-3)^4}{x^2}$. Tomando raíz cuadrada tenemos

$$|y| = \left|\frac{(x-3)^2}{x}\right|$$

Y como $y < 0$ y $x > 0$,

$$y = -\frac{(x-3)^2}{x}$$

Tomamos entonces $y = f(x) = -\frac{(x-3)^2}{x}$.