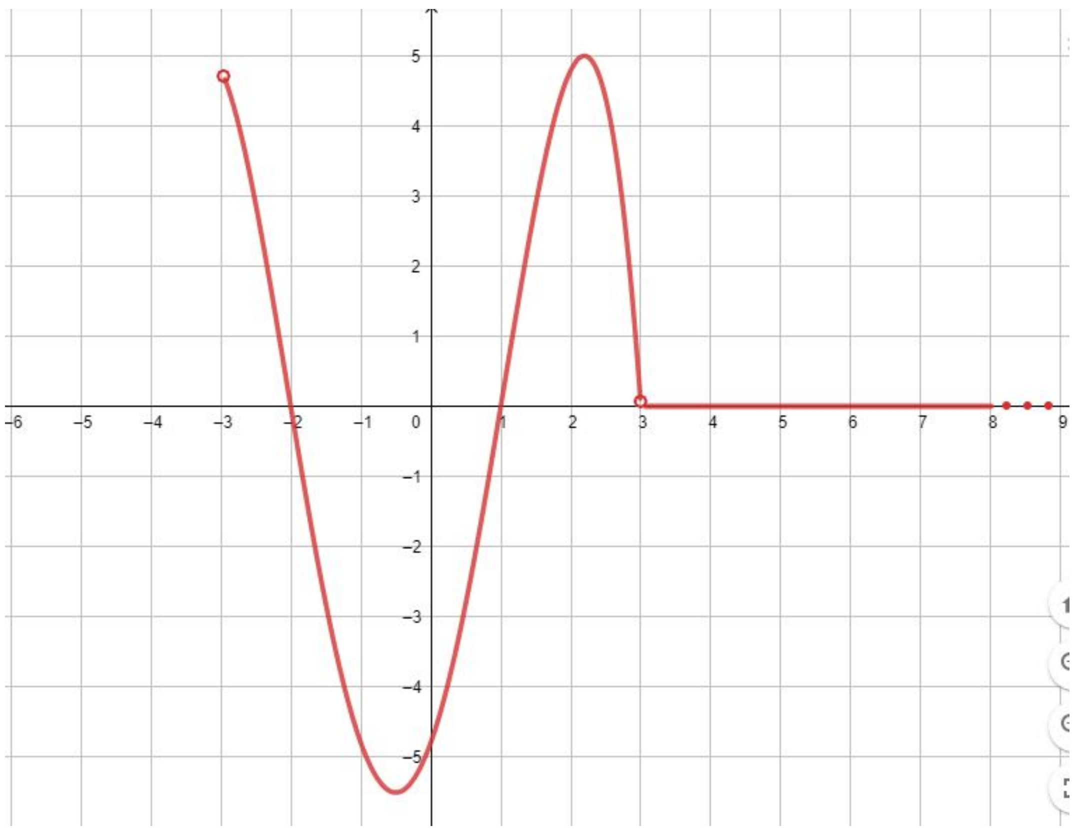
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2023

Ayudantía 9 - MAT1610

1. En la figura se muestra la gráfica de la función derivada (g') de una función g :



   (a) Determine los intervalos donde g es creciente y los intervalos donde g es decreciente.
   (b) Determine los valores críticos donde existe g' y clasifíquelos.
   (c) Determine los intervalos donde $g(x)$ es cóncava hacia arriba y los intervalos donde $g(x)$ es cóncava hacia abajo.
   (d) Basado en la gráfica, explique por qué en el intervalo $(-2, 0)$ existe un valor donde la segunda derivada de g es igual a $-\frac{5}{2}$

Solución

   (a) $g'(x) > 0$ en $(-3, -2)$ y en $(1, 3)$, entonces g es creciente en $(-3, -2)$ y g es creciente en $(1, 3)$.
   Nota: Resaltar que no se pueden usar unión de los dos intervalos y explicar la razón.
   $g'(x) < 0$ en $(-2, 1)$ entonces, g es decreciente $(-2, 1)$.

(b) Valores críticos donde existe g': $x = -2$ y $x = 1$, para clasificarlos se puede usar la primera o la segunda derivada:
Usando g'
g' cambia de positiva(g creciente) a negativa (g decreciente) en $x = -2$, entonces en $x = -2$ se alcanza un máximo local.
g' cambia de negativa(g decreciente) a positiva (g creciente) en $x = 1$, entonces en $x = 1$ se alcanza un mínimo local.
Usando g''
La recta tangente a g' en $(-2, g'(-2))$ tiene pendiente negativa, es decir, $g''(-2) < 0$ por lo que, en $x = -2$, g alcanza un máximo local.
La recta tangente a g' en $(1, g'(1))$ tiene pendiente positiva, es decir, $g''(1) > 0$ por lo que, en $x = 1$, g alcanza un mínimo local.

(c) $g''(x) < 0$ en $(-3, m)$, $-1 < m < 0$ y en $(2, 3)$ entonces, g es cóncava hacia abajo en $(-3, m)$ y en $(2, 3)$
$g''(x) > 0$ en $(m, 2)$, $-1 < m < 0$ entonces, g es cóncava hacia arriba en $(m, 2)$, $-1 < m < 0$.

(d) Notar que g' en continua en $[-2, 0]$ y derivable en $(-2, 0)$ (es continua y no hay puntas), entonces por el TVM, existe un valor c, en $(-2, 0)$ tal que

$$g''(c) = \frac{g'(0) - g'(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-5 - 0}{2} = -\frac{5}{2}$$

Resaltar que el TVM se está aplicando al la función g'.

Observación: La función g es constante en el intervalo $(5, \infty)$.
El valor de m puede tomarse como $-\frac{1}{2}$, solo que en la escala del gráfico no se especifica.

2. (a) Determine los valores de b y c para que la función $f(x) = \sqrt{c + bx - x^2}$ tenga su máximo global en el punto $(1, 2)$.

   (b) Para los valores de b y c hallados, determine, si existen, los intervalos donde f es creciente y los intervalos donde f es decreciente.

Solución:

(a) Notar que debe ocurrir que $f(1) = 2$, es decir, $\sqrt{c + b - 1} = 2$
Dado que la función polinlomial el coeficiente de x^2 es -1 (abre hacia abajo o es cóncava hacia abajo), entonces el dominio de la función f es $[r_1, r_2]$ con $r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4c}}{-2}$, note que debe ocurrir que $b^2 + 4c > 0$ para que existan las dos raíces.
En este caso, $f'(x) = \frac{b-2x}{2\sqrt{c+bx-x^2}}$
Entonces, los valores críticos son: $x = \frac{b}{2}$, $x = r_1$, $x = r_2$, para que el máximo global se alcance en $x = 1$ debe ocurrir que $\frac{b}{2} = 1$, es decir, $b = 2$. Al reemplazar el valor de b en $\sqrt{c + b - 1} = 2$ se obtiene que $c = 3$.
Notar que $f''(x) = -\frac{b^2+4c}{4\sqrt{(c+bx-x^2)^3}} < 0$ para todo $x \in (r_1, r_2)$, es decir, que efectivamente, en $x = 1$ se alcanza máximo global (también se puede argumentar usando la primera derivada).

(b) Note que para $b = 2$ y $c = 3$ se obtiene que $r_1 = -1$ y $r_2 = 3$, entonces
$f'(x) > 0$ si $x \in (-1, 1)$, entonces f es creciente en dicho intervalo.
$f'(x) < 0$ si $x \in (1, 3)$, entonces f es decreciente en dicho intervalo.

3. (a) Estudie $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$.

(b) Determine los valores de a para que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = e$$

Solución

(a) Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^{x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{2xe^{x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{6}{4xe^{x^2}+8xe^{x^2}+8x`3e^{x^2}}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

(b) Sea $y=\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x$, entoonces

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln(y)=\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}{\frac{1}{x}}$

Note que

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)=\ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-a}{x+a}\right)=\ln(1)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ y

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x+a}{x-a}\frac{2a}{(x+a)^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax^2}{a^2-x^2}=-2a$

Así,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} e^{ln(y)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln(y)}=e^{-2a}$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=e$ si $e^{-2a}=e$, es decir, $-2a=1$,o, $a=-\frac{1}{2}$.