Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026
Ayudantía 11
30 de Mayo de 2019

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24xy & \text{si } (x,y) \in [0,1]^2, 0 \leqslant x+y \leqslant 1 \\ 0 & \text{si e.o.c} \end{cases}.$$

   a) Calcule $\rho(X, Y)$.
   b) Sean $W = X + Y, Z = X - Y$. Calcule $\rho(W, Z)$.

2. El objetivo de este problema es encontrar el mejor predictor lineal de una variable aleatoria Y utilizando otra variable aleatoria X.

   a) Sean X e Y variables aleatorias con segundos momentos finitos. Encuentre los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ que minimizan la expresión $E[(Y - a - bX)^2]$.
   b) Sean $\hat{a}, \hat{b}$ los valores obtenidos en *a*). Calcule $\text{Var}(\hat{a} + \hat{b}X)$.
   c) Sean $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{U}(0,1)$. Defina

$$U = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i, \quad V = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i.$$

   Encuentre el mejor predictor lineal de V a partir de U y su respectiva varianza.

3. Sean $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{U}(0,1)$, $G_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$.

   a) Demuestre que $-2n\log(G_n) \sim \chi^2_{2n}$.
   b) Calcule $\text{Var}(G_n)$.

4. Sea $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n) \sim \text{Dir}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ con función de densidad

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^{n} \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i - 1}.$$

   Encuentre la matriz de varianza-covarianza de $\mathbf{X}$.

5. Sean $Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. Defina $Z = HY$ donde

$$h_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{(i(i+1)}} & j \leqslant i \\ -\sqrt{\dfrac{i}{i+1}} & j = i+1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

a) Pruebe que H es ortogonal.

b) Usando el hecho de que $Z_n = \sqrt{n}\bar{Y}$, pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$$

c) Utilizando lo anterior, pruebe que $\bar{Y}$ y S^2 son independientes.