Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2020

Interrogación 6
MAT1107 - Introducción al Cálculo

(1) Sea $a_n = \dfrac{2^n}{3}$ para $n \geq 1$ y considere la sucesión dada por

$$P_n = a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n, \quad n \geq 1.$$

Calcule P_{100}. **(3 puntos)**

Solución.

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2}{3} \times \frac{2^2}{3} \times \frac{2^3}{3} \times \cdots \times \frac{2^n}{3} \\ &= \frac{1}{3^n} \times 2 \times 2^2 \times 2^3 \times \cdots 2^n \\ &= \frac{1}{3^n} \times 2^{1+2+3+\cdots+n}. \end{aligned}$$

Juntar correctamente las potencias: **(1 punto)**

Luego,

$$P_n = \frac{1}{3^n} \times 2^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Identificar la suma de enteros: **(1 punto)**

Luego,

$$P_{100} = \frac{1}{3^{100}} 2^{\frac{100 \cdot 101}{2}}.$$

Concluir: **(1 punto)**

Obs: si el estudiante escribe directamente todo lo anterior con $n = 100$, asignar 2 puntos al resultado final.

(2) Demuestre que, para todo $n \geq 1$, se tiene la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

(3 puntos)

Solución.

Procedemos por inducción.

Se verifica el caso $n = 2$:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2} + 1 > 2 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2} > 1, \end{aligned}$$

lo que es correcto. **(0.5 puntos)**

Supongamos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

(0.5 puntos)

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} && (1) \\ &> \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}. && (2) \end{aligned}$$

(1 punto)

Solo falta verificar que

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1}.$$

De hecho,

$$\begin{aligned} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \sqrt{n+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{n(n+1)} + 1 > n + 1 && (3) \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{n(n+1)} > n, && (4) \end{aligned}$$

lo que es correcto. **(1 punto)**