PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Segundo Semestre 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
PAUTA Interrogación 3

1. Las matrices que se muestran a continuación son equivalentes por filas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 9 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Determine rango A y $\dim \operatorname{Nul} A$

(b) Encuentre bases para $\operatorname{Col} A$ y Fila A.

Solución

(a) Ya que A y B son equivalentes por filas, entonces $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$. Ya que B tiene 2 posiciones pivotes, entonces $\operatorname{rank}(A) = 2$.

Por otro lado, según el Teorema del Rango, como A es de 4×5 entonces

$$5 = \operatorname{rank}(A) + \dim \operatorname{Nul} A$$

por lo que $\dim \operatorname{Nul} A = 3$.

(b) Ya que $A\mathbf{x} = 0$ y $B\mathbf{x} = 0$, las columnas generadoras de $\operatorname{Col}(B)$ se corresponden con las columnas generadoras de $\operatorname{Col}(A)$. Por lo tanto, una base de $\operatorname{Col}(A)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$. Por otro lado, las filas de B son combinaciones lineales de las filas de A. De esta forma, una base de $\operatorname{Fil}(A)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \\ -12 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$.

Puntaje

- 1.5 puntos por determinar correctamente el rango de A.
- 1.5 puntos por determinar correctamente la dimensión de $\operatorname{Nul}(A)$
- 1.5 puntos por determinar correctamente una base para $\operatorname{Col}(A)$
- 1.5 puntos por determinar correctamente una base para $\operatorname{Fil}(A)$

2. Explique a través de un contraejemplo por qué las siguientes afirmaciones son falsas:

   (a) Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es un conjunto LD de V, entonces $\dim V \leq p$.

   (b) Sea A una matriz de 4×3. El rango de A es 3 si y sólo si $\operatorname{Nul}\left(A^T\right) = \{\overrightarrow{0}\}$.

Solución

(a) Sea $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. El conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es LD en $\mathbb{R}^3$ pero $\dim \mathbb{R}^3 = 3 > 2$.

(b) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. El rango de A es 3, sin embargo $\dim \operatorname{Nul}(A^T) = 1$.

Puntaje

- 1 punto si entrega un contraejemplo pero no explica correctamente. (2 puntos en total)
- 2 puntos si argumenta correctamente usando el contraejemplo. (4 puntos en total)

3. Los vectores $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

(a) Encuentre la matriz de cambio de las coordenadas de $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ a la base estándar.

(b) Escriba la ecuación matricial que relaciona un vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con su vector de coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$.

(c) Calcule el vector de coordenadas de $\begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ con respecto de la base $\mathcal{B}$.

Solución

(a) La matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base estándar es

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Para cada $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ se cumple

$$P_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}$$

o equivalentemente

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

(c) Resolvemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$3\gamma = 3 \Rightarrow \gamma = 1$$
$$4\beta - 6 = 2 \Rightarrow \beta = 2$$
$$\alpha - 3(2) + 3 = -8 \Rightarrow \alpha = -5$$

Por lo tanto el vector de coordenadas de $\begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ con respecto de la base $\mathcal{B}$ es $\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Puntaje

- 2 puntos por escribir la matriz de cambio de base correcta.
- 2 puntos por escribir la ecuación vectorial correcta.
- 1 punto por plantear una manera de determinar el vector de coordenadas.
- 1 punto por encontrar correctamente el vector de coordenadas pedido.

4. El conjunto $\mathcal{B} = \{1+t, 1+t^2, t+t^2\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$. Encuentre el vector de coordenadas de $\mathbf{p}(t) = 6+3t-t^2$ en relación con $\mathcal{B}$.

Solución 1 Sea $[\mathbf{p}(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ el vector de coordenadas buscado. Por definición,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= \alpha(1+t) + \beta(1+t^2) + \gamma(t+t^2) \\ \Leftrightarrow 6+3t-t^2 &= (\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma)t + (\beta+\gamma)t^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha+\beta = 6, \alpha+\gamma = 3, \beta+\gamma = -1 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 5, \beta = 1, \gamma = -2. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[\mathbf{p}(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Solución 2 Sea $[\mathbf{p}(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$ el vector de coordenadas buscado. La matriz de cambio de base desde $\mathcal{B}$ hacia la base canónica es $P_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} [1+t] & [1+t_2] & [t+t^2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Luego, $[\mathbf{p}(t)] = P_{\mathcal{B}}[\mathbf{p}(t)]_{\mathcal{B}}$ lo que implica $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$. Resolviendo el sistema se tiene $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Puntaje

- 2 puntos por establecer una manera de determinar el vector de coordenadas.
- 2 puntos por obtener ecuaciones que satisfagan las coordenadas α, β y γ.
- 2 puntos por calcular las entradas correctas del vector de coordenadas.

5. Encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de la matriz A de 2×2 dada por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

de modo que admita a $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y a $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ como vectores propios.

Solución Primero, tenemos que

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3\alpha + \beta \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{3\alpha+\beta}{4} \end{bmatrix}$$

Así, $\mathbf{v}_1$ es vector propio de la matriz si y sólo si $\dfrac{3\alpha + \beta}{4} = 1$. Por otro lado,

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2\alpha + \beta \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{2\alpha+\beta}{5} \end{bmatrix}$$

por lo que $\mathbf{v}_2$ es vector propio de A si y sólo si $\dfrac{2\alpha + \beta}{5} = 1$.

Resolviendo el sistema: $\left\{ \begin{array}{l} 3\alpha + \beta = 4 \\ 2\alpha + \beta = 5 \end{array} \right. \iff \alpha = -1, \beta = 7.$

Por lo tanto, los valores buscados son $\alpha = -1$ y $\beta = 7$.

Puntaje

- 2 punto por establecer una condición para α y β de manera que $\mathbf{v}_1$ sea un vector propio de A.
- 2 punto por establecer una condición para α y β de manera que $\mathbf{v}_2$ sea un vector propio de A.
- 1 punto por determinar correctamente α.
- 1 punto por determinar correctamente β.

6. Suponga que A es una matriz de 6×6 con polinomio característico

$$p_A(\lambda) = (1+\lambda)(1-\lambda)^2(2-\lambda)^3.$$

(a) Explique por qué no es posible encontrar tres vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^6$ tales que $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3$.

(b) Si A fuera diagonalizable, ¿cuáles son las dimensiones de los espacios propios de los valores propios $\lambda = -1$, $\lambda = 1$ y $\lambda = 2$? Entregue una respuesta justificada.

Solución

(a) La multiplicidad algebraica de $\lambda = 1$ es 2. Si existieran tres vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en $\mathbb{R}^6$ tales que $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$ y $A\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3$, el espacio propio del valor propio $\lambda = 1$ tendría dimensión al menos 3, lo cual contradeciría el hecho que la dimensión del espacio propio es menor o igual a la multiplicidad algebraica.

(b) Si A fuera diagonalizable, entonces la dimensión del espacio propio debe coincidir con la multiplicidad algebraica para cada valor propio. Por lo tanto,

$$\dim E(-1) = 1, \quad \dim E(1) = 2, \quad \dim E(2) = 3.$$

Puntaje

- 1 punto si entrega un argumento coherente en el ítem (a).
- 2 puntos si el argumento entregado en el ítem (a) es correcto.
- 1 punto si indica las dimensiones de los espacios propios.
- 2 puntos por argumentar su respuesta del ítem (b) correctamente.

7. Sea A una matriz real de 3×3 tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sabiendo que los valores propios distintos son $\lambda = 1$ y $\lambda = 5$, determine si A es diagonalizable. En caso afirmativo, calcule la matrices P y D tales que $A = PDP^{-1}$.

Soluciones Buscamos las dimensiones de los espacios propios de la matriz A.

Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in E(1) = \mathrm{Nul}(A - 1I)$. Esto equivale a que $\mathbf{v}$ sea solución del sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Es decir, $2v_1 + v_3 = 0$ y $v_1 + v_2 + v_3 = 0$, lo que implica $v_3 = -2v_1$, $v_2 = v_1$ y $v_1 \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$E(1) = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \\ -2v_1 \end{bmatrix} : v_1 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Por otro lado, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in E(5) = \mathrm{Nul}(A - 5I)$ si y sólo si $\mathbf{u}$ es solución de

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

por lo que $u_1 - 3u_2 + u_3 = 0$ y $2u_2 - u_3 = 0$, esto es, $u_3 = 2u_2$, $u_1 = u_2$ y $u_2 \in \mathbb{R}$. Es decir:

$$E(5) = \left\{ \begin{bmatrix} u_2 \\ u_2 \\ 2u_2 \end{bmatrix} : u_2 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Por lo tanto, no puede haber una base de vectores propios de A ya que ambos espacios propios tienen dimensión 1. En conclusión, A no es diagonalizable.

Puntaje

- 2 puntos por establecer una respuesta coherente para determinar si A es o no diagonalizable.
- 2 puntos por justificar que no existe una base de $\mathbb{R}^3$ formada de vectores propios de A.
- 2 puntos por concluir que A no es diagonalizable.

8. Considere los espacios vectoriales de polinomios reales $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_4$ de grados menor o igual 2 y 4, incluido el polinomio nulo, respectivamente.

Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_4$ la transformación lineal que convierte un polinomio $\mathbf{p}(t)$ en el polinomio $\mathbf{p}(t) + 2t^2\mathbf{p}(t)$.

(a) Determine la imagen de $\mathbf{p}(t) = 3 - 2t + t^2$ (simplifique la expresión). (2 pts)

(b) Encuentre la matriz para T respecto a las bases $\{1, t, t^2\}$ y $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$. (4 pts)

Solución

(a) $T(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{p}(t) + 2t^2\mathbf{p}(t) = (3 - 2t + t^2) + 2t^2(3 - 2t + t^2) = 3 - 2t + 7t^2 - 4t^3 + 2t^4$.

(b) La matriz de T con respecto de las bases estándar de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_4$ es:

$$[T] = \big[[T(1)] \quad [T(t)] \quad [T(t^2)]\big] = \big[[1 + 2t^2] \quad [t + 2t^3] \quad [t^2 + 2t^4]\big] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Puntaje

- 2 puntos por determinar correctamente la imagen de $T(\mathbf{p}(t))$.
- 1 punto por establecer correctamente como se calcula la matriz de T.
- 1 punto por calcular correctamente cada columna de $[T]$ (3 en total).