

Funciones polinómicas

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

¹Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

²LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

11 de Abril de 2022



Laboratorio
Interdisciplinario de
Estadística Social

Definición (Funciones polinómicas)

Una función polinómica es de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son constantes reales, que son llamados los coeficiente del polinomio.

Las funciones polinómicas tienen dominio en \mathbb{R} , aquí n es llamado el grado del polinomio.

- Si $n = 0$ el gráfico corresponde a una función constante.
- Si $n = 1$ el gráfico corresponde a una recta.
- Si $n = 2$ el gráfico corresponde a una parábola.
- Si $n > 2$ el gráfico no es conocido.

Definición.

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

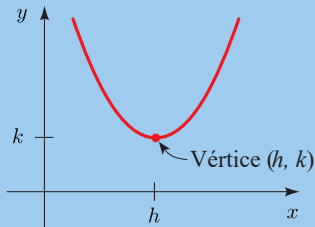
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Forma normal de una función cuadrática

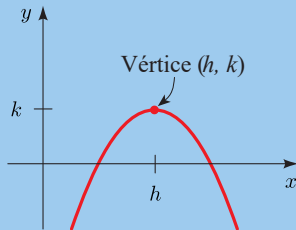
Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k) ; la parábola es convexa (se abre hacia arriba) si $a > 0$ o cóncava (se abre hacia abajo) si $a < 0$.



$$f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$$



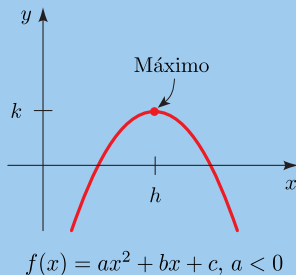
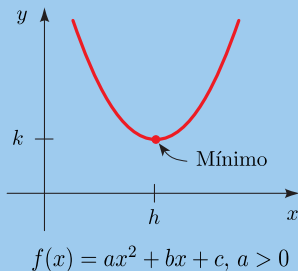
$$f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$$

EJEMPLO 1 Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$. Exprese f en su forma normal y trace la gráfica de f .

Valor MÁXIMO o mínimo de una función cuadrática

Sea f una función cuadrática con forma normal $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

- 1 Si $a > 0$ entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$.
- 2 Si $a < 0$ entonces el valor máximo de f es $f(h) = k$.



EJEMPLO 2 Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

1. Exprese f en forma normal.
2. Trace la gráfica de f .
3. Encuentre el valor mínimo de f .

Valor MÁXIMO o mínimo de una función cuadrática

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

- 1 Si $a > 0$ entonces el valor mínimo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
- 2 Si $a < 0$ entonces el valor máximo es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

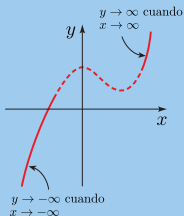
EJEMPLO 3 Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad de 15.000 espectadores. Con el precio del boleto a \$14 dólares, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9.500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000. Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.

Comportamiento final de polinomios

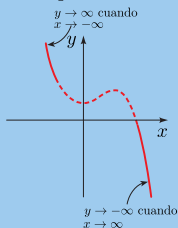
El comportamiento final de la función polinómica

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ está determinado por el grado n y el signo del coeficiente principal a_n como se indica en las siguientes gráficas

P tiene grado impar

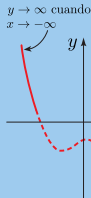


Coefficiente principal positivo

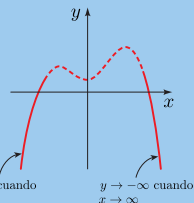


Coefficiente principal negativo

P tiene grado par



Coefficiente principal positivo



Coefficiente principal negativo

Definición (Ceros de una función)

Si $f : A \rightarrow B$ es una función, entonces c se denomina **cero** de f si $f(c) = 0$.

Si P es una función polinomial, los ceros de P son las soluciones de la ecuación polinomial $P(x) = 0$. Observe que si $P(c) = 0$, entonces en $x = c$ el gráfico de P corta al eje x .

EJEMPLO 4 Los ceros de $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$ son 0, 1 y 2.

EJEMPLO 5 Hallar los ceros y graficar la función polinomial
 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$.

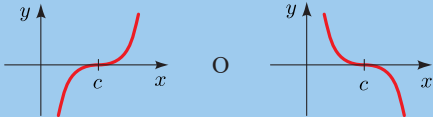
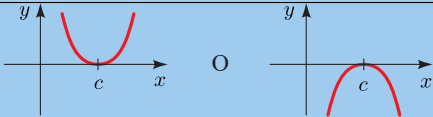
EJEMPLO 6 Hallar los ceros y graficar la función polinomial
 $Q(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$.

Definición. (Multiplicidad)

Si c es un cero de P , y le corresponde un factor $(x - c)$ se presenta exactamente m veces en la factorización de P , entonces decimos que c es un cero de multiplicidad m .

Forma de la gráfica cerca de un cero de multiplicidad m

Si c es un cero de P de multiplicidad m , entonces la forma de la gráfica de P cerca de c es como sigue.

Multiplicidad de c	Forma de la gráfica de f cerca del punto de intersección x de c
m impar, $m > 1$	
m par, $m > 1$	

EJEMPLO 7 Grafique el polinomio $f(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$.