Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo semestre de 2021

MAT1620 – Cálculo II

Solución Interrogación N° 2

1. *a)* Sea $b > 0$. Exprese la función $\ln(1 + bx^2)$ como una serie de potencias centrada en cero y encuentre su radio de convergencia.

Solución. Primero observamos que $\frac{d}{dx}\ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$ y por series geométricas tenemos que $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ si y solo si $|x| < 1$. Como la integral de una series de potencia es la serie de potencia integrada término a término y el radio de convergencia se preserva, integrando lo anterior concluimos que $\ln(1+x) = K + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ con radio de convergencia 1. Además, evaluando en $x = 0$ concluimos que $K = 0$ y por lo tanto $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ con radio de convergencia 1.

Ahora, para la expresión original, ocupamos lo que obtuvimos arriba:

$$\ln(1 + bx^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left(bx^2\right)^n}{n}$$

con radio de convergencia determinado por $|bx^2| < 1$, es decir donde el radio de convergencia de la serie encontrada (que se obtiene despejando $|x|$ en la expresión anterior) es $\frac{1}{\sqrt{b}}$.

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por expresar $\ln(1 + x)$ como una serie de potencias.
- **1 pt** Por expresar $\ln(1 + bx^2)$ como una serie de potencias.
- **1 pt** Por determinar el radio de convergencia de la serie.

b) Analice la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2}$. Justifique su respuesta.

Solución. Haciendo el cambio de variable $u = x - 1, v = y - 1$ el limite se transforma en:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2(x-1)(y-1)}{x^2+y^2-2x-2y+2} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{2uv}{u^2+v^2}$$

Claramente este limite no existe, porque los limites a través de las direcciones dadas por el eje u y el eje v valen cero y si se acerca al origen por la recta $u = v$ se obtiene 1.

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por realizar un cambio de variables llevando $(1, 1)$ al origen.
- **1 pt** Por calcular una trayectoria de limite cero.
- **1 pt** Por calcular una trayectoria de limite distinto de cero y concluir que el limite no existe.

2. Considere la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y)=\sqrt{2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}$.

   a) **(1 pt)** Determine el dominio de $f(x,y)$.

   b) **(1 pt)**) Bosqueje el dominio de $f(x,y)$.

   c) **(2 pts)** Bosqueje las curvas de nivel de alturas 0 y $\sqrt{2}$ de f; es decir, las curvas de nivel para los valores $k=0$ y $k=\sqrt{2}$.

   d) **(2 pts)** Bosqueje las curvas de nivel de altura 0 de la función $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donde $g(x,y)=\operatorname{sen}(\pi f(x,y))$.

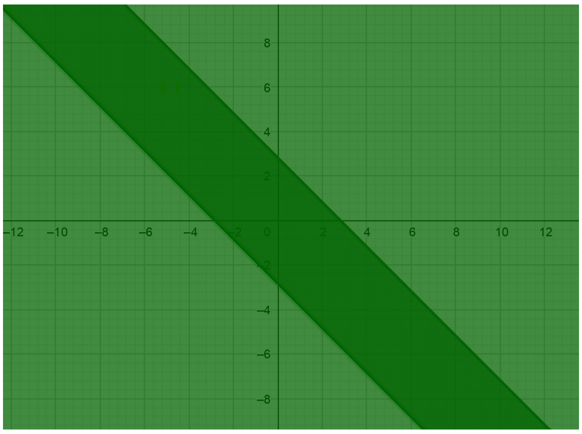
Solución.

a) De la definición de $f(x,y)$, se tiene que (x,y) está en el dominio de f si y solo si

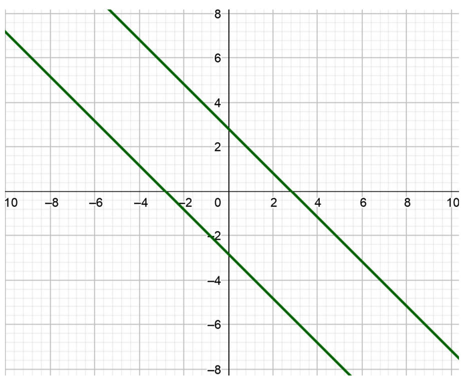
$$2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq 2 \Leftrightarrow \left|\frac{x+y}{2}\right| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow |x+y| \leq 2\sqrt{2}$$

Por lo tanto tenemos $-2\sqrt{2} \leq x+y \leq 2\sqrt{2}$.

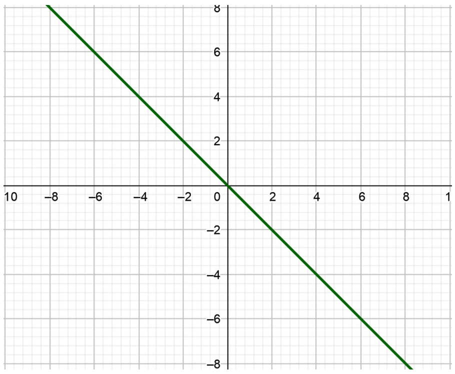
b) El conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon -2\sqrt{2} \leq x+y \leq 2\sqrt{2}\}$ corresponde a una banda en el plano (x,y) entre las rectas $x+y=2\sqrt{2}$ y la recta $x+y=-2\sqrt{2}$.



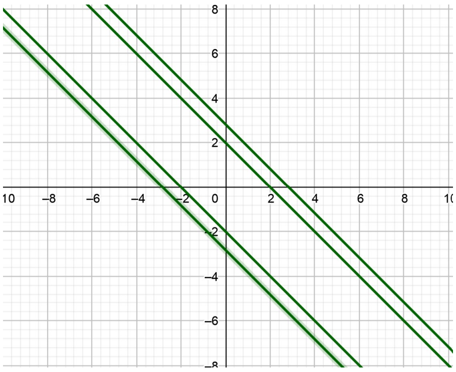
c) Se tiene que $f(x,y)=0$ si y solo si $\sqrt{2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}=0 \Leftrightarrow 2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left|\frac{x+y}{2}\right|=\sqrt{2}$. Entonces $x+y=2\sqrt{2}$ o $x+y=-2\sqrt{2}$y por lo tanto las curvas de nivel de altura 0 de f son



Mientras que las curvas de nivel $\sqrt{2}$ corresponden a $x=-y$



d) Sabemos que $\operatorname{sen}(\pi z) = 0$ si y solo si z es entero, así que $g(x, y) = 0$ si y solo si $f(x, y)$ es un entero. Notamos que los únicos valores enteros que puede tomar f son 0 y 1 y por lo tanto $g(x, y) = 0$ si y solo si $f(x, y) = 0$ o 1. En resumen, g es cero si y solo si $x + y = 2\sqrt{2}$, $x + y = -2\sqrt{2}$, $x + y = 2$, o $x + y = -2$, y la curva de nivel de altura 0 de g es:



Criterios de corrección:

- **1 pt** Por determinar el dominio de f.
- **1 pt** Por bosquejar el dominio de f.
- **1 pt** Por graficar la curva de nivel de altura 0 de f.
- **1 pt** Por graficar la curva de nivel de altura $\sqrt{2}$ de f.
- **1 pt** Por reconocer que $g(x, y) = 0$ si y solo si $f(x, y) = 0$ o 1.
- **1 pt** Por graficar la curva de nivel de altura 0 de g.

3. Considere la función diferenciable $f(x, y) = 1 - xy\cos(\pi y)$.

a) **(4 pts)** Sea π_1 el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(2, 1)$. Determine las ecuaciones paramátricas de la recta que pasa por el punto $(1, -1, 0)$ y es perpendicular al plano π_1.

b) **(2 pts)** Utilice el plano tangente en un punto apropiado para aproximar $f(2.02\ ,\ 0.97)$.

Solución.

1) Primero calculamos las derivadas parciales de $f(x, y)$ en el punto $(2, 1)$.

$$f_x(x, y) = -y\cos(\pi y) \qquad f_y(x, y) = -x\cos(\pi y) + \pi xysen(\pi y).$$

Entonces

$$f_x(2, 1) = 1 \qquad f_y(2, 1) = 2.$$

Luego observamos que la normal del plano π_1 es el vector $< 1, 2, -1 >$. Si la recta es perperdicular al plano π_1, la dirección de la recta es la misma dirección que el vector normal del plano. Entonces las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son :

$$x = 1 + t, \qquad y = -1 + 2t \qquad , z = -t \qquad donde \quad t \in \mathbb{R}$$

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por calcular la derivada parcial con respecto a x.
- **1 pt** Por calcular la derivada parcial con respecto a y.
- **1 pt** Por determinar el vector director de la recta.
- **1 pt** Por determinar las ecuaciones paramétrica de la recta.

2) El punto $(2.02\ ,\ 0.97)$ está cerca al punto $(2\ ,\ 1)$ entonces la linealización de f en el punto $(2\ ,\ 1)$ nos da una buena aproximación para $f(2.02\ ,\ 0.97)$.

La linealización de f en el punto $(2, 1)$ es

$$L(x, y) = f(2, 1) + f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1) = 3 + (x - 2) + 2(y - 1) = x + 2y - 1$$

La aproximación lineal correspondiente es

$$1 - xy\cos(\pi y) \approx x + 2y - 1$$

de modo que

$$f(2.02\ ,\ 0.97) \approx 2.02 + 2(0.97) - 1 = 2.02 + 1.94 - 1 = 2.96.$$

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por justificar que $1 - xy\cos(\pi y) \approx x + 2y - 1$.
- **1 pt** Por aproximar $f(2.02\ ,\ 0.97)$.

4. *a)* Sean g una función diferenciable con derivadas parciales constantes y $f(x,y) = g(x\cos(y), x\sin(y))$. Demuestre que $h(x,y) = \left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ no depende de y.

Solución. Sea $u = x\cos(y)$, $v = x\sin(y)$. Como las derividas parciales de g son constantes, entonces $\frac{\partial g}{\partial u} = c_1$ y $\frac{\partial g}{\partial v} = c_2$ para algunos reales c_1 y c_2. Por lo tanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = c_1\cos(y) + c_2\sin(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -c_1 x\sin(y) + c_2 x\cos(y)$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 &= c_1^2x^2\cos^2(y) + 2c_1c_2x^2\cos(y)\sin(y) + c_2^2x^2\sin^2(y) + \\ &\quad c_1^2x^2\sin^2(y) - 2c_1c_2x^2\cos(y)\sin(y) + c_2^2x^2\cos^2(y) \\ &= (c_1^2 + c_2^2)x^2.\end{aligned}$$

donde la última expresión es independiente de la variable y.

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por determinar $\frac{\partial f}{\partial x}$.
- **1 pt** Por determinar $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- **1 pt** Por demostrar que $h(x,y)$ es constante en la variable y.

b) Sea $z = z(x,y)$ la superficie determinada implicitamente por la ecuación

$$2x^2 + y^2 + 3xz^2 + yz = 5$$

cerca del punto $(1,-1,1)$. Calcule la derivada direccional de $z(x,y)$ en la dirección del vector $\vec{u} = (1,2)$ en el punto $(1,-1)$.

Solución. Primero calculamos las derivadas parciales de $z(x,y)$ en el punto $(1,-1,1)$. Si llamamos $F(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3xz^2 + yz - 5$, entonces:

$$F_x(1,-1,1) = 4x + 3z^2|_{(1,-1,1)} = 7$$
$$F_y(1,-1,1) = 2y + z|_{(1,-1,1)} = -1$$
$$F_z(1,-1,1) = 6xz + y|_{(1,-1,1)} = 5$$

de donde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{-7}{5} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{1}{5}.$$

Observamos además que $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ por lo que buscamos la derivada direccional en la dirección $\hat{u} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Luego

$$D_{\hat{u}}z(1,-1) = \nabla z \cdot \hat{u} = \left(\frac{-7}{5}, \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{5}}.$$

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$.
- **1 pt** Por determinar $\frac{\partial z}{\partial y}$.
- **1 pt** Por determinar la derivada direccional.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} + x - 2y & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Calcule la derivada direccional $D_{\hat{u}}f(x,y)$ en el punto $(0,0)$ en la dirección del vector unitario $\hat{u} = (a,b)$, donde $b \neq 0$.

b) Calcule las derivadas parciales de f en el punto $(-1,1)$.

c) Decida si existe alguna dirección en que la derivada direccional de f a partir del punto $(-1,1)$ sea igual a 3? Justifique.

Solución.

a) Por definición

$$D_{\hat{u}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t\hat{u}) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t}.$$

Ya que

$$\frac{f(ta,tb)}{t} = \frac{a^2b}{t^2a^4+b^2} + a - 2b$$

Como tenemos $b \neq 0$, entonces

$$D_{\hat{u}}f(0,0) = \frac{a^2}{b} + a - 2b.$$

b) Notamos que para cada $(x,y) \neq (0,0)$ se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy\left(x^4+y^2\right) - x^2y4x^3}{\left(x^4+y^2\right)^2} + 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2\left(x^4+y^2\right) - x^2y2y}{\left(x^4+y^2\right)^2} - 2$$

por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = -2$$

c) La máxima derivada direccional de f en el punto $(1,-1)$ es $||\nabla f(-1,1)\| = \|(1,-2)\| = \sqrt{5}$. Dado que la máxima derivada direccional de f en el punto $(-1,1)$ es $\sqrt{5}$, no existe una dirección en que la derivada direccional en este punto sea 3.

Criterios de corrección:

- **2 pts** Por aplicar correctamente la defininción y expresar la derivada direccional en el punto $(0,0)$.
- **1 pt** Por calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,1)$.
- **1 pt** Por calcular $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$.
- **1 pt** Por indicar que la máxima derivada direccional de f en el punto $(-1,1)$ es $||\nabla f(-1,1)\|$.
- **1 pt** Por concluir que no existe una dirección en que la derivada direccional en el punto $(-1,1)$ sea 3.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo