



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PRIMER SEMESTRE DE 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026

Ayudantía 8

6 de Mayo de 2019

1. Sean $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d}}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$. Defina las variables

$$Y_1 = X_{(1)}, \quad Y_i = X_i - X_{(1)} \quad i \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

Demuestre que $X_{(1)} \sim \text{Exp}(\lambda/n)$ y $\sum_{i=2}^n Y_i = \text{Gamma}(n-1, \lambda)$. Además pruebe que estas dos variables son independientes.

2. Sea $X \sim U(0, 2\pi)$. Encuentre la distribución de $Y = \sin(X^2)$.
3. Sean X_1, X_2 con densidad conjunta

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{x_1^2} e^{-(x_2 - x_1^2)} & \text{si } x_1 \geq 1, x_2 \geq x_1^2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$

Encuentre la distribución de $Y_1 = \log(X_1), Y_2 = \frac{X_2}{X_1}$.

4. Dos jugadores lanzan monedas simultáneamente. Si las dos monedas salen cara, el Jugador I gana. En cambio, si las dos monedas salen sello, el Jugador II gana. Si la moneda del Jugador 1 es honesta y la del Jugador 2 posee probabilidad p de cara:
- a) Calcule el valor esperado del número de lanzamientos hasta ganar el juego.
 - b) Encuentre la probabilidad de que el jugador I gane el juego.
5. La densidad conjunta de X, Y esta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}, \quad x, y \geq 0.$$

Encuentre $E(X)$.