PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I1 MAT1203 - Algebra Lineal
Septiembre, 2017

PROBLEMAS CUADERNILLO 1

1. Sean a, b vectores en $\mathbb{R}^3$.

   a) [**3 pts.**] Si $|a| = 2$, $|b| = 3$ y $|a + b| = \sqrt{19}$, determine $a \cdot b$ y el ángulo entre los vectores a y b.

   b) [**3 pts.**] Demuestre que $(a - b) \times (a + b) = 2(\ a \times b)$

Solución

a) $|a+b|^2 = (a+b)\cdot(a+b)$ 0.5 pts

$= a\cdot a + a\cdot b + b\cdot a + b\cdot b$ 0.5 pts

$= |a|^2 + 2a\cdot b + |b|^2$ 0.5 pts

$\therefore (\sqrt{19})^2 = 2^2 + 2a\cdot b + 3^2$

$\therefore a\cdot b = 3$ 0.5 pts

$\cos(\measuredangle(a,b)) = \dfrac{a\cdot b}{|a||b|}$

$= \dfrac{3}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{2}$ 0.5 pts

$\measuredangle(a,b) = \dfrac{\pi}{3}$ o 60° 0.5 pts

b) $(a-b)\times(a+b) = (a-b)\times a + (a-b)\times b$

$= a\times a - b\times a + a\times b - b\times b$ 1.5 pts

Pero $a\times a = b\times b = 0$, $-b\times a = a\times b$

0.5 pts 0.5 pts.

$\therefore (a-b)\times(a+b) = 2(a\times b)$

0.5 pts.

2. Dos móviles se desplazan en forma rectilínea con vectores posiciones al instante t dados por

$$p(t) = (-2,3,1) + t(1,2,1)\ , \quad q(t) = (-4,8,-4) + t(1,-1,2)$$

.

a) [**3 pts.**] Demuestre que las trayectorias se intersecan, pero los móviles no chocan.

b) [**3 pts.**] Determine la ecuación cartesiana del plano donde yacen las trayectorias.

a) Las trayectorias se cruzan sii existen t_1, t_2 tal que $p(t_1) = q(t_2)$ (Los moviles pasan por un mismo punto, posiblemente a distinto tiempo) [1 pts]

(Asignar el punto si el método está implícito en el desarrollo.)

$$(-2,3,1) + t_1(1,2,1) = (-4,8,-4) + t_2(1,-1,2)$$

$$\Updownarrow$$

1) $-2 + t_1 = -4 + t_2$

2) $3 + 2t_1 = 8 - t_2$ [0.5 pts]

3) $1 + t_1 = -4 + 2t_2$

De las ecuaciones 1), 3) se obtiene $t_1 = 1$, $t_2 = 3$

Como $p(1) = q(3) = (-1,5,2)$ tenemos que las trayectorias se intersecan en el punto $(-1,5,2)$ [1 pts] (*)

Los moviles no chocan pues pasan por el punto a distinto tiempo [0.5 pts]

(*) Nota: La solución al problema sólo requiere demostrar que $t_1 = 1$, $t_2 = 3$ satisfacen las ecuaciones 1), 2), 3) y no requiere determinar el punto de intersección de las trayectorias en forma explícita.

b) El plano que contiene a ambas rectas tiene una normal $\perp$ a los vectores directrices de las rectas y entonces podemos tomar $n = (1,2,1) \times (1,-1,2)$ [0.8 pts]

$$n = (1,2,1) \times (1,-1,2) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 5\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$$

$$= (5,-1,-3)$$ [0.8 pts]

El plano pasa por $(-1,5,2)$ y su ecuación es
(es posible usar otros puntos)

$$((x,y,z) - P_0) \cdot n = 0 \iff (x+1)5 + (y-5)(-1) + (z-2)(-3) = 0$$ [0.7 pts]

$$\iff 5x - y - 3z = 16$$ [0.7 pts]

(o múltiplo de ella)

Nota: Hay puntos por métodos (0.8+0.7) y puntos por resultados correctos (0.8+0.7). Estos son indivisibles son todo o nada.

3. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= 1 \\ y + 4z &= k \\ 7x + 2z &= 2 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

a) [~~1.5~~ **pts.**] Escriba el sistema de ecuaciones en la forma matricial $A\,u = b$, y determine una forma escalonada de la matriz ampliada $[A\ b]$

b) [~~4.5~~ **pts.**] Encontrar los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que el sistema tenga: una única solución, infinitas soluciones, no tenga soluciones. Justifique sus respuestas.

Solución:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 7 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[1 pto]

$$[A|b] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & k \\ 7 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \leftarrow F_4 - F_1]{F_3 \leftarrow F_3 - 7F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & k \\ 0 & 7 & -19 & -5 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4 \leftarrow F_4 - 2F_2]{F_3 \leftarrow F_3 - 7F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & k \\ 0 & 0 & -47 & -7k-5 \\ 0 & 0 & -10 & -2k-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & k \\ 0 & 0 & -10 & -2k-1 \\ 0 & 0 & -47 & -7k-5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow \frac{1}{10} F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & k \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10}(2k+1) \\ 0 & 0 & -47 & -7k-5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4 \leftarrow F_4 + 47 F_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & k \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{10}(2k+1) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{10}(8k-1) \end{pmatrix}$$

Por el método de escalonar [1pto] (0 o 1) (aún con algún error aritmético, pero no del método)

[1pto] (0 o 1) por una escalonada correcta (No es única)

Análisis:

- Si $8k-1 \neq 0$, es decir $k \neq \frac{1}{8}$ No hay soluciones. [1pto]
- Si $8k-1=0$, es decir $k=\frac{1}{8}$ hay una única solución [1pto]
- No hay valores de k para los cuales el sistema tiene infinitos soluciones [1pto]

Asignar los puntos si el análisis es correcto a partir de la escalonada obtenida siempre que el problema no cambie de dificultad.

4. [**6 pts.**] Encuentre el valor o valores de h para los cuales los siguientes vectores son linealmente dependientes. Justifque su respuesta.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ h \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Los vectores son L.D cuando existen escalares no todos nulos α, β, γ tales que

$$\alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ h \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 10 & -4 & h \\ 6 & -1 & 13 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[2pts.]

$\iff$ Las columnas de A son ld.

Escalonando obtenemos

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 10 & -4 & h \\ 6 & -1 & 13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & h-15 \\ 6 & 2 & 14 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & h-15 \\ 0 & 0 & 34-2h \end{bmatrix}$$

[2pts]

El sistema tiene soluciones no nulas (o A tiene columnas ld) cuando hay sólo 2 pivotes) $\therefore$ $34-2h=0$ $\therefore h=17$

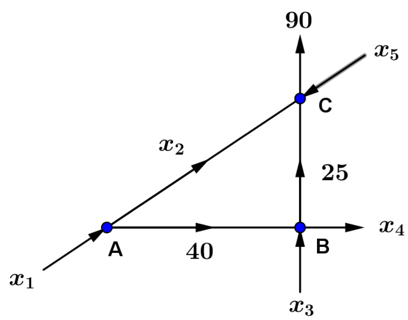
[2pts]

$\therefore$ Los vectores son ld cuando $h=17$.

PROBLEMAS CUADERNILLO 2

5. *a*) [~~**3**~~ 4 **pts.**] Encuentre el patrón de flujo general de la red que se ilustra en la figura, usando x_4, x_5 como variables libres.

   b) [~~**3**~~ 5 **pts.**] Suponiendo que los flujos deben ser en los sentidos indicados, encuentre los flujos mínimos en las ramas denotadas como x_1, x_2, x_3, x_4 y el flujo máximo de la rama denotada como x_5.



Ecuaciones de flujos en nodos.

A) $x_1 = 40 + x_2$ [0.4 pts]

B) $40 + x_3 = x_4 + 25$ [0.4 pts]

C) $x_2 + 25 + x_5 = 90$ [0.4 pts]

De C) $x_2 = 65 - x_5$ [0.9 pts]

De A) $x_1 = 40 + 65 - x_5 = 105 - x_5$

$\therefore x_1 = 105 - x_5$ [0.9 pts]

De B) $x_3 = x_4 - 15$ [0.9 pts]

Flujo máximo para x_5 es 65 [0.4 pts]

Flujo mínimo para x_4 es 15 [0.4 pts]

" " " x_3 " 0 [0.4 pts]

" " " x_2 " 0 [0.4 pts]

" " " x_1 " 40 [0.5 pts].

6. [**6 pts.**] Sea Π el plano $x + 2y - 2z = -1$ y sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Demuestre que $A(\Pi) = \{Au \mid u \in \Pi\}$ es una recta y determine su ecuación simétrica.

Solución:

$$x = -1 - 2y + 2t \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2y+2t \\ y \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1 pto)

$$\therefore \quad A\begin{bmatrix} x \\ y \\ t \end{bmatrix} = A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + yA\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + tA\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[1.5 pts]

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (y-t)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

[1.5 pts]

Entonces $A[\Pi]$ es una recta que pasa por $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ con vector director $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ [1 pto] (o un múltiplo de él)

Su ecuación cartesiana simétrica es

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-1}{-3}$$

[1 pto]

7. Sea T es una transformación lineal tal que

$$T\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad T\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix}$$

a) [**3 pts.**] Determine la matriz que representa a T

b) [**1.5 pts.**] ¿Es T uno a uno? ¿Sobre?. Justifique.

c) [**1.5 pts.**] Resuelva $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}$

a) Hay varias maneras de obtener la matriz que representa a T

Método 1: i) $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

ii) Armar los sistemas de ecuaciones para a, b, c, d. [1.5 pts]

iii) Resolver y obtener $a=-4$, $b=9$, $c=-4$, $d=9$ [1.5 pts]

Método 2: $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ donde $A=\begin{bmatrix}T(e_1) & T(e_2)\end{bmatrix}$ [1 pto]

Ec1: $T\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=2T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ [1 pto]

Ec2: $T\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=3T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix}$

Restando la Ec1 a la Ec2 se obtiene

$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-4\end{bmatrix}$$ [0.5 pts]

y reemplazando en una de las ecuaciones Ec1 o Ec2 se obtiene

$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\9\end{bmatrix}$$ [0.5 pts]

$$\therefore\quad A=\begin{bmatrix}T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} & T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&9\\-4&9\end{bmatrix}.-$$

b) • T es es 1-1 sii cada columna de rref(A) es columna pivote

$$A=\begin{bmatrix}-4 & 9\\ -4 & 9\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-4 & 9\\ 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -\frac{9}{4}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$ [0.5 pts]

Hay sólo 1 pivote ∴ No es 1-1 [0.5 pts]

• T es sobre sii cada fila de rref(A) tiene un pivote o equivalentemente la escalonada no tiene una fila nula. Esta condición no se cumple ∴ T no es sobre [0.5 pts]

c) $T\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix}-4 & 9\\ -4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 4\end{bmatrix}$ [0.8 pts]

$\iff -4x+9y=4$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-1+\frac{9}{4}y \\ y=y \end{cases}$ y libre. [0.7 pts]

$\left(\text{o} \quad \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}\frac{9}{4}\\ 1\end{bmatrix} \right)$

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justicación adecuada no tiene puntos):

   a) **[2 pts.]** Si $A = [u\ v\ w]$ con u, v y $w \in \mathbb{R}^3$ tales que $u + 2v - 3w = \vec{0}$ entonces las columnas de A generan $\mathbb{R}^3$

   b) **[2 pts.]** $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z, w) = (x + w, y + z + 1)$ es una transformación lineal.

   c) **[2 pts.]** Si T es un operador lineal uno a uno y $\{u,\ v,\ w\}$ es linealmente independiente, entonces $\{T(u),\ T(v),\ T(w)\}$ es linealmente independiente

a) Falso: Si $u+2v-3w=\vec{0}$, las columnas de A serían l.d [0.7 pts] y por lo tanto la escalonada reducida de A tiene a lo más 2 pivotes [0.6 pts] y entonces no hay un pivote en cada fila de la escalonada reducida de A y $\therefore$ A no es sobre $\therefore$ las columnas de A no generan $\mathbb{R}^3$. – (Hay otros argumentos ---) [0.7 pts]

b) Falso: T No cumple q. $T(\vec{0})=\vec{0}$ y toda T.L cumple esto

o $T(1,0,1)+T(0,1,0) \neq T(1,1,1)$

y toda T.L cumple esto

o $T(\alpha,\alpha,\alpha) \neq \alpha T(1,1,1)$

y toda T.L cumple esto

$\therefore$ T NO es una T.L.

[2 pts]

c) Verdadero:

Hipótesis: u, v, w son l.i. y T es 1-1

Por demostrar: $T(u), T(v), T(w)$ son l.i.

Si $\alpha T(u) + \beta T(v) + \delta T(w) = \vec{0}$ [0.4 pts]

(Intente demostrar correctamente que son L.I)

entonces por ser T una T.L se tiene

$$T(\alpha u + \beta v + \mu w) = \vec{0}$$ [0.6 pts]

Por ser T 1-1 se tiene $\alpha u + \beta v + \mu w = \vec{0}$ [0.5 pts]

Por ser u, v, w L.I se tiene $\alpha = \beta = \mu = 0$ [0.5]

$\therefore$ $T(u)$, $T(v)$, $T(w)$ son l.i.