Clase 2

Tuesday, August 6, 2024 3:25 PM

Producto Punto: Ángulos y Distancias

El objetivo de esta clase es definir el concepto de ángulo y distancia entre vectores, tanto en el plano, espacio, y más dimensiones. Para ello partiremos definiendo un concepto clave que permitirá definir esas magnitudes.

Definición Si

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \rightarrow \text{dos vectores}$$

entonces el ***producto punto*** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define mediante

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n \rightarrow \text{un número real!!}$$

Para poder interpretar esta definición, primero damos ciertas propiedades algebraicas que nos permitirán manipularla.

Teorema 1.2 Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$, y sea c un escalar. Entonces

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ — Conmutatividad

b. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ — Distributividad

c. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = u \cdot (cv)$

d. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Argumentaremos la primera y última de estas propiedades. La justificación de las otras propiedades la pueden encontrar en el libro.

Demostración:

a) $$u \cdot v = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n$$
$$= v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + \cdots + v_n \cdot u_n$$
$$= v \cdot u$$
(conmutatividad de la multiplicación en $\mathbb{R}$).

b) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ un vector. Entonces

$$u \cdot u = u_1 \cdot u_1 + u_2 \cdot u_2 + \cdots + u_n \cdot u_n$$
$$= \underbrace{u_1^2}_{} + \underbrace{u_2^2}_{} + \cdots + \underbrace{u_n^2}_{} \geq 0$$
(suma de números no-negativos es un)

≥ 0 ≥ 0 ≥ 0 (no-negativo)

Supongamos que $u \cdot u = 0$. Luego,

$$u \cdot u = \underbrace{u_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{u_2^2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{u_n^2}_{\geq 0} = 0$$

Si $u_i \neq 0$ entonces tambien $u_i^2 > 0$. Despejando u_i^2 de la igualdad anterior:

$$\underbrace{-u_i^2}_{<0} = \underbrace{u_1^2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{u_{i-1}^2}_{\geq 0} + \underbrace{u_{i+1}^2}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{u_n^2}_{\geq 0} \geq 0$$

Lo cual es un absurdo, ya que un número no puede ser positivo y negativo simultáneamente. Por lo tanto nuestra suposición inicial de que $u_i \neq 0$ no puede ser correcta. Luego $u_i = 0$. Como el argumento sirve para cualquier coordenada u_i concluimos que

$$u = 0.$$

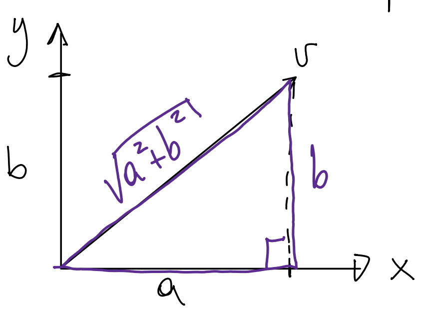
Por otra parte, si $u = 0$ entonces

$$u \cdot u = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

Esto concluye el argumento $\blacksquare$

Longitud de un vector

Observemos que, gracias al Teorema de Pitagoras podemos calcular fácilmente el largo de un vector en el plano:



$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

(Observe que el calculo tambien es valido si a o b son negativos o 0. ¿Porque?)

Con un calculo similar podemos obtener una expresión para el largo de un vector en $\mathbb{R}^3$:

si $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ es $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ → Ejercicio!

Inspirados en esto definimos la longitud (o largo) de un vector en $\mathbb{R}^n$ como sigue.

Definición La ***longitud*** (o *norma*) de un vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^n$ es el escalar no negativo $\|\mathbf{v}\|$ definido por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

Obs: Como $v\cdot v \geq 0$, la raiz cuadrada esta bien definida (sin necesidad de recurrir a números complejos).

Teorema 1.3 Sea $\mathbf{v}$ un vector en $\mathbb{R}^n$ y sea c un escalar. Entonces

a. $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

b. $\|c\mathbf{v}\| = |c|\|\mathbf{v}\|$

Ejemplo: $\left\| \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| -1/3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \left| -\frac{1}{3} \right| \cdot \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|$

$= \frac{1}{3}\sqrt{\left(1^2 + (-1)^2 + 1^2\right)}$

$= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$.

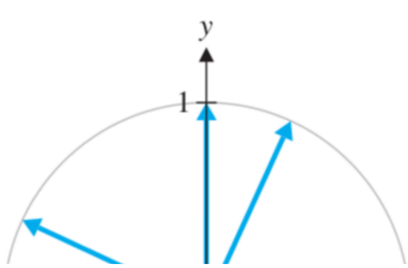
— o —

Podemos usar la segunda propiedad de este teorema para normalizar un vector $v \neq 0$, es decir encontrar un vector con la misma dirección que v pero de longitud 1. Para ello observamos que si

$c = \frac{1}{\|v\|}$ entonces (observamos que si $v \neq 0$ entonces $\|v\| \neq 0$)

$$\|c\cdot v\| = |c|\cdot\|v\| = \underbrace{\frac{1}{\|v\|}}_{c}\cdot\|v\|$$

Por lo tanto obtenemos un vector $c\cdot v = \frac{1}{\|v\|}\cdot v$ con norma 1. Tales vectores se llaman vectores unitareos.



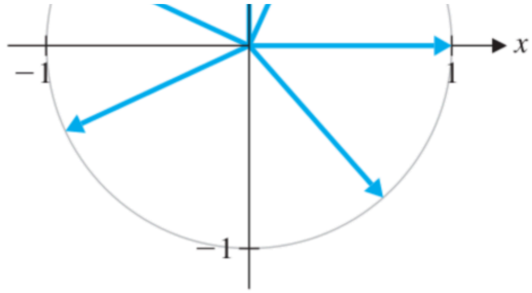


Figura 1.26
Vectores unitarios en $\mathbb{R}^2$

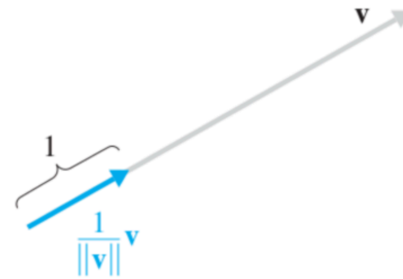


Figura 1.27
Normalización de un vector

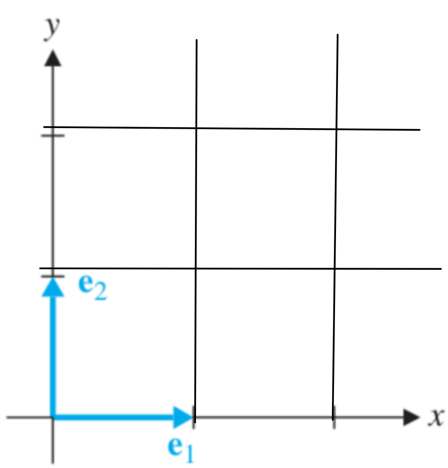
El conjunto de los vectores unitareos en $\mathbb{R}^2$ es la circunferencia de radio 1 centrada en el origen.
¿Cuál es el conjunto de los vectores unitareos en $\mathbb{R}^3$?

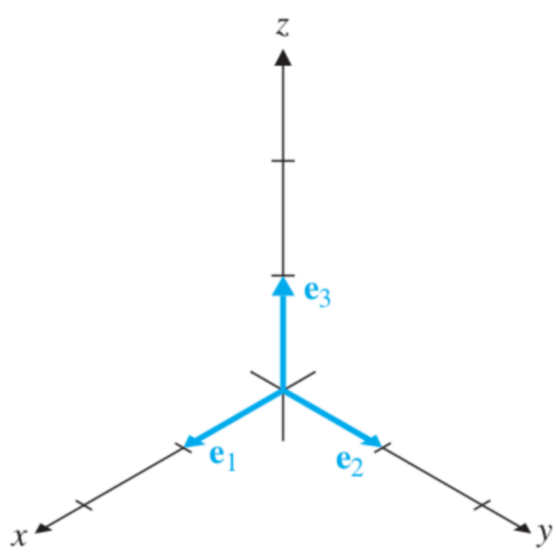
— o —

Un tipo especial de vectores unitarees son los vectores que tienen una coordenada igual a 1 y el resto de coordenadas son 0. Estos vectores se llaman vectores canónicos (o vectores unitareos estándard) y se denotan

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Obs: En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ los vectores canónicos corresponden a los ejes.





Distancia entre vectores

Recordemos que si a y b son vectores, entonces a-b es el vector que representa al desplazamiento para ir desde a hasta b

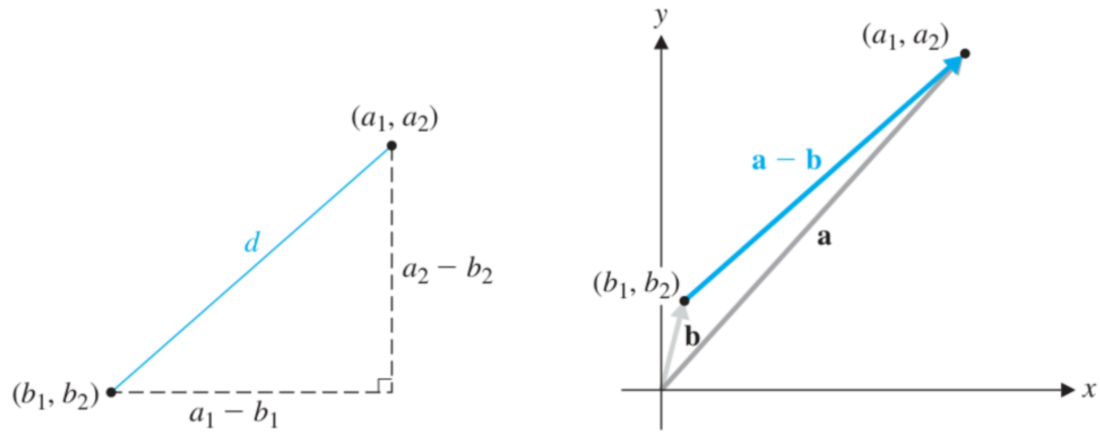


Figura 1.31
$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$

Luego, es natural definir la distancia entre a y b como la longitud de a-b.

Definición La *distancia* $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$ se define por

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

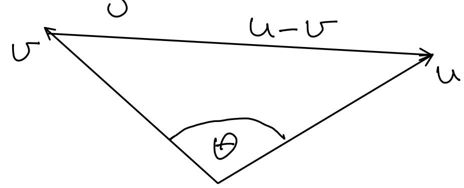
Observación:

$$\begin{aligned} d(u,v) &= \|u-v\| = \|(-1)\cdot(-1)\cdot u + (-1)\cdot v\| && ((-1)\cdot(-1)=1) \\ &= \|(-1)\cdot((-1)\cdot u + v)\| && \text{(distributividad)} \\ &= |-1|\cdot\|v-u\| && \text{(conmutatividad)} \\ &= \|v-u\| \\ &= d(v,u) \end{aligned}$$

Es decir: $\boxed{d(u,v) = d(v,u)}$

Ángulos

Si tengo u, v vectores en el plano, ¿cómo obtengo el ángulo entre ellos?



¿Como puedo determinar θ a partir de u y v?

¿Recordemos que la ley del coseno nos dice que

$$\|u-v\| = \|u\| + \|v\| - 2\|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos(\theta)$$

Por otro lado,

$$\|u-v\|^2 = (u-v)\cdot(u-v)$$
$$= (u-v)\cdot u - (u-v)\cdot v \quad \text{(distributividad del producto punto)}$$
$$= u\cdot u - v\cdot u - u\cdot v + v\cdot v$$
$$= u\cdot u + v\cdot v - 2u\cdot v \quad \text{(conmutatividad del producto punto)}$$

Igualando con la expresión de arriba, obtenemos que

$$\boxed{u\cdot v = \|u\|\cdot\|v\|\cdot\cos(\theta)}$$

En más dimensiones, definimos el angulo entre dos vectores utilizando esta expresión.

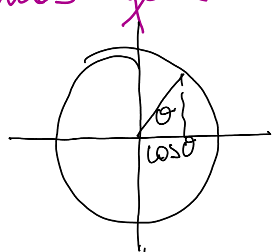
Definición Para vectores **u** y **v** distintos de cero en $\mathbb{R}^n$,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

→ Se considera la sol. con $\theta\in[0,\pi]$

Ejemplo: Calcule el ángulo entre $u=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ y $v=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

Tenemos que $\cos(\theta) = \dfrac{1\cdot(-1)+0\cdot 1+1\cdot 1}{\|u\|\cdot\|v\|} = 0$



Luego $\theta = \frac{\pi}{2}$ rad (o $\theta = 90°$)

Ortogonalidad

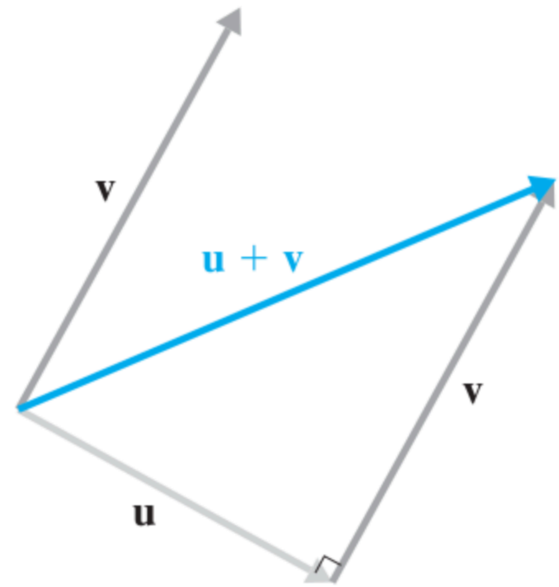
Dos vectores en $\mathbb{R}^n$ se dicen ortogonales si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$ rad (o $90°$). En otras palabras:

Definición Dos vectores **u** y **v** en $\mathbb{R}^n$ son mutuamente ***ortogonales*** si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Con esta definición obtenemos una sencilla demostración del Teo. de Pitágoras, que incluso es válida en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.6 **Teorema de Pitágoras**

Para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.



Demostración: Supongamos que $u \cdot v = 0$. Luego,

$$\|u+v\|^2 = (u+v)\cdot(u+v)$$
$$= u\cdot(u+v) + v\cdot(u+v)$$
$$= u\cdot u + \underbrace{u\cdot v + v\cdot u}_{2\cdot(u\cdot v)} + v\cdot v$$
$$= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2(u\cdot v)$$

Por lo tanto $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si y sólo si $u\cdot v = 0$

■