PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2020

Ayudantía 9 - MAT1610

1. Demostrar que si $x > 0$, entonces, $\frac{x}{1+x} < ln(x+1) < x$.
Solución:
Una forma
Sea $x > 0$, considere la función $f(x) = \ln(x)$, $a = 1$, $b = x + 1$. Notar que f es continua y derivable en $(0, +\infty)$ y, en particular, es continua en $[a, b] = [1, 1 + x]$ y derivable en $(a, b) = (1, 1 + x)$. Por lo tanto, por el TVM, existe un valor c, $c \in (a, b) = (1, 1 + x)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(1+x)-f(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)-ln(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)-0}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$,
es decir, existe un valor c, $c \in (1, 1 + x)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

y, $f'(c) = \frac{1}{c}$, entonces

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

para algún valor c, $c \in (1, 1 + x)$.

Por lo tanto, $1 < c < 1 + x$ y, en consecuencia, se tiene que,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{1}$$

es decir,

$$\frac{1}{1+x} < f'(c) < 1$$

o,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

o, como $x > 0$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Otra Forma: Análoga a la anterior
Sea $x > 0$, considere la función $f(x) = \ln(x + 1)$, $a = 0$, $b = x$. Notar que f es continua y derivable en $(-1, +\infty)$ y, en particular, es continua en $[a, b] = [0, x]$ y derivable en $(a, b) = (0, x)$. Por lo tanto, por el TVM, existe un valor c, $c \in (a, b) = (0, x)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\ln(1+x)-ln(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)-0}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$,
es decir, existe un valor c, $c \in (0, x)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

y, $f'(c) = \frac{1}{c+1}$, entonces

$$\frac{1}{c+1} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

para algún valor c, $c \in (0, x)$.

Por lo tanto, $0 < c < x$ ó $1 < c+1 < x+1$ y, en consecuencia, se tiene que,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c+1} < \frac{1}{1}$$

es decir,

$$\frac{1}{1+x} < f'(c) < 1$$

o,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

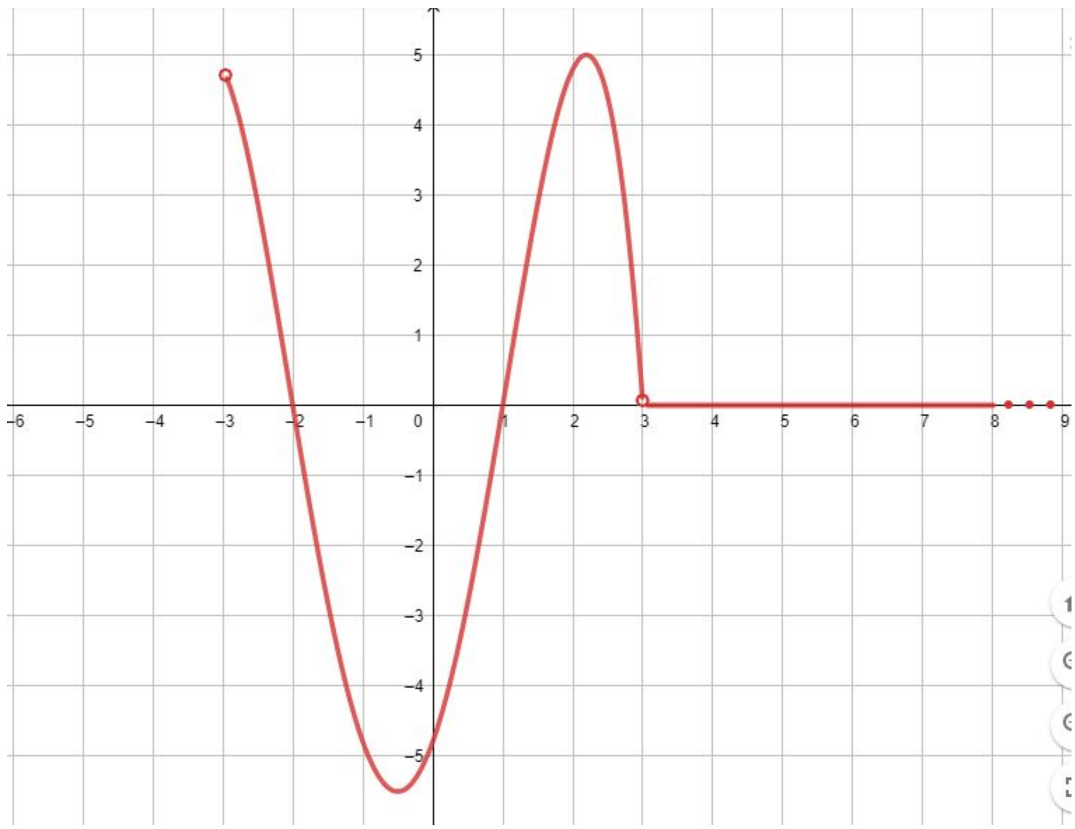
o, como $x > 0$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

2. Demuestre que la ecuación $\arctan(x-1)+x^3-3=0$ tiene una única raíz.
   Solución
   Considere $f(x)=\arctan(x-1)+x^3-3$ y note que f es continua en $\mathbb{R}$,
   $f(0)=\arctan(-1)-3=-\frac{\pi}{4}-3<0$ y $f(2)=\arctan(1)+8-3=\frac{\pi}{4}+5>0$,
   entonces, por el teorema del valor intermedio, existe un valor tal que $f(c)=0$, lo cual garantiza la existencia de la raíz.

   Para la unicidad, suponga que existen dos raíces, r_1 y r_2, entonces, $f(r_1)=f(r_2)=0$ y como f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por el teorema de Rolle, existe un valor c, $c\in(r_1,r_2)$ tal que $f'(c)=0$ pero, $f'(x)=\frac{1}{1+(x-1)^2}+3x^2>0$, entonces $f'(c)=0$ implica una contradicción que proviene de suponer que existen dos raíces de la ecuación, por lo que se concluye que la raíz es única.
   Nota: También se puede usar $f(1)=-2<0$

3. En la figura se muestra la gráfica de la función derivada (g') de una función g :



(a) Determine los intervalos donde g es creciente y los intervalos donde g es decreciente.

(b) Determine los valores críticos donde existe g' y clasifíquelos.

(c) Determine los intervalos donde $g(x)$ es cóncava hacia arriba y los intervalos donde $g(x)$ es cóncava hacia abajo.

(d) Basado en la gráfica, explique por qué en el intervalo $(-2, 0)$ existe un valor donde la segunda derivada de g es igual a $-\frac{5}{2}$

Solución

(a) $g'(x) > 0$ en $(-3, -2)$ y en $(1, 3)$, entonces g es creciente en $(-3, -2)$ y g es creciente en $(1, 3)$.
Nota: Resaltar que no se pueden usar unión de los dos intervalos y explicar la razón.
$g'(x) < 0$ en $(-2, 1)$ entonces, g es decreciente $(-2, 1)$.

(b) Valores críticos donde existe g': $x = -2$ y $x = 1$, para clasificarlos se puede usar la primera o la segunda derivada:
Usando g'
g' cambia de positiva(g creciente) a negativa (g decreciente) en $x = -2$, entonces en $x = -2$ se alcanza un máximo local.
g' cambia de negativa(g decreciente) a positiva (g creciente) en $x = 1$, entonces en $x = 1$ se alcanza un mínimo local.

Usando g''
La recta tangente a g' en $(-2, g'(-2))$ tiene pendiente negativa, es decir, $g''(-2) < 0$ por lo que, en $x = -2$, g alcanza un máximo local.
La recta tangente a g' en $(1, g'(1))$ tiene pendiente positiva, es decir, $g''(1) > 0$ por lo que, en $x = 1$, g alcanza un mínimo local.

(c) $g''(x) < 0$ en $(-3, m)$, $-1 < m < 0$ y en $(2, 3)$ entonces, g es cóncava hacia abajo en $(-3, m)$ y en $(2, 3)$
$g''(x) > 0$ en $(m, 2)$, $-1 < m < 0$ entonces, g es cóncava hacia arriba en $(m, 2)$, $-1 < m < 0$.

(d) Notar que g' en continua en $[-2, 0]$ y derivable en $(-2, 0)$ (es continua y no hay puntas), entonces por el TVM, existe un valor c, en $(-2, 0)$ tal que

$$g''(c) = \frac{g'(0) - g'(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-5 - 0}{2} = -\frac{5}{2}$$

Resaltar que el TVM se está aplicando al la función g'.

Observación: La función g es constante en el intervalo $(5, \infty)$.
El valor de m puede tomarse como $-\frac{1}{2}$, solo que en la escala del gráfico no se especifica.

4. (a) Determine los valores de b y c para que la función $f(x) = \sqrt{c + bx - x^2}$ tenga su máximo global en el punto $(1, 2)$.

(b) Para los valores de b y c hallados, determine, si existen, los intervalos donde f es creciente y los intervalos donde f es decreciente.

Solución:

(a) Notar que debe ocurrir que $f(1) = 2$, es decir, $\sqrt{c + b - 1} = 2$
Dado que la función polinlomial el coeficiente de x^2 es -1 (abre hacia abajo o es cóncava hacia abajo), entonces el dominio de la función f es $[r_1, r_2]$ con $r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4c}}{-2}$, note que debe ocurrir que $b^2 + 4c > 0$ para que existan las dos raíces.
En este caso, $f'(x) = \frac{b-2x}{2\sqrt{c+bx-x^2}}$
Entonces, los valores críticos son: $x = \frac{b}{2}$, $x = r_1$, $x = r_2$, para que el máximo global se alcance en $x = 1$ debe ocurrir que $\frac{b}{2} = 1$, es decir, $b = 2$. Al reemplazar el valor de b en $\sqrt{c + b - 1} = 2$ se obtiene que $c = 3$.
Notar que $f''(x) = -\frac{b^2+4c}{4\sqrt{(c+bx-x^2)^3}} < 0$ para todo $x \in (r_1, r_2)$, es decir, que efectivamente, en $x = 1$ se alcanza máximo global (también se puede argumentar usando la primera derivada).

(b) Note que para $b = 2$ y $c = 3$ se obtiene que $r_1 = -1$ y $r_2 = 3$, entonces
$f'(x) > 0$ si $x \in (-1, 1)$, entonces f es creciente en dicho intervalo.
$f'(x) < 0$ si $x \in (1, 3)$, entonces f es decreciente en dicho intervalo.

5. (a) Estudie $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cosh(x)}{1-cos^2(x)}$.

(b) Determine los valores de a para que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = e$$

Solución

(a) Observe que $\lim\limits_{x\to 0} 1-\cosh(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} 1-\cos^2(x)=0$ y

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cosh(x))'}{(1-cos^2(x))'} = \lim_{x\to 0}\frac{(-\text{senh}(x))}{2\cos(x)\text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(-\text{senh}(x))}{\text{sen}(2x)}$$

Además, $\lim\limits_{x\to 0} -\text{senh}(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to 0}\text{sen}(2x)=0$ y

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-\text{senh}(x))'}{(\text{sen}(2x))'} = \lim_{x\to 0}\frac{(-\cosh(x))}{2\cos(2x)} = -\frac{1}{2}$$

Así, aplicando la regla de L'Hopital dos veces, se tiene que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cosh(x)}{1-\cos^2(x)} = -\frac{1}{2}$$

(b) Sea $y=\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x$, entoonces

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln(y) = \lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}{\frac{1}{x}}$

Note que

$\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = \ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-a}{x+a}\right) = \ln(1)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ y

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x+a}{x-a}\frac{2a}{(x+a)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2ax^2}{a^2-x^2} = -2a$

Así,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty} y = \lim\limits_{x\to\infty} e^{ln(y)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln(y)} = e^{-2a}$

y por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = e$ si $e^{-2a}=e$, es decir, $-2a=1$,o, $a=-\frac{1}{2}$.