PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2023

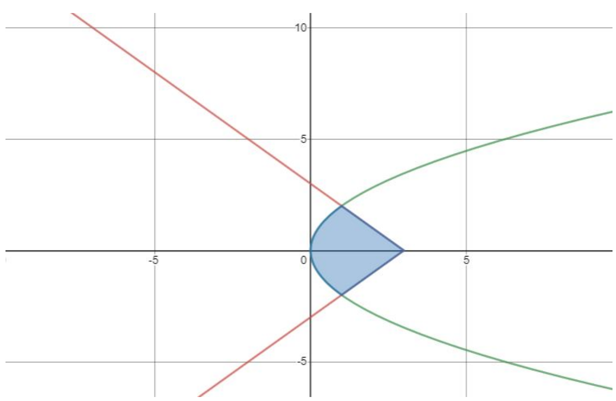
Ayudantía 14 - MAT1610

1. Determine el área de la región comprendida entre las curvas asociadas a $-|y| + 3 - x = 0$, $y^2 = 4x$.

   Solución:
   El valor del área puede expresarse como

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^2 \left(-y + 3 - \frac{y^2}{4}\right) dy \\ &= 2\left(-\frac{y^2}{2} + 3y - \frac{y^3}{12}\bigg|_0^2\right) \\ &= 2\left(-2 + 6 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

   El valor del área es $\frac{20}{3}$ unidades de área.
   Idea gráfica

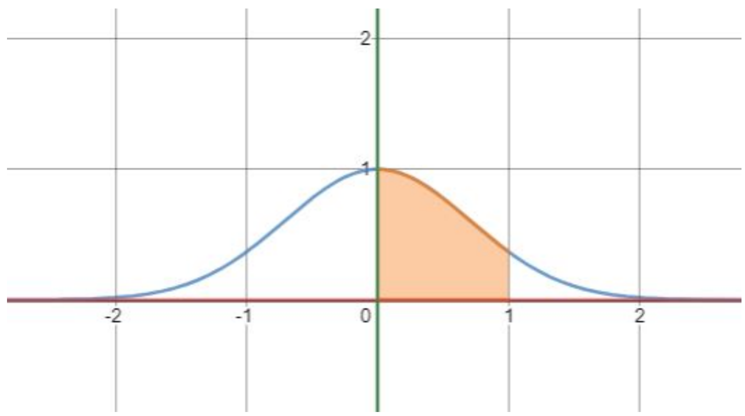


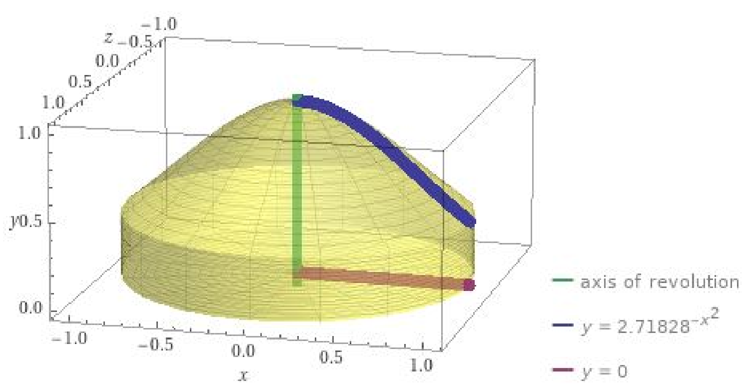
2. Determinar el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje y del área limitada por las curvas asociadas a $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^1 (2\pi x e^{-x^2})dx \\
&= \pi \int_0^1 (2xe^{-x^2})dx \\
&= -\pi \int_0^{-1} e^u du \\
&= \pi \int_{-1}^{0} e^u du \\
&= \pi \left(e^u\big|_{-1}^{0} \right) \\
&= \pi(1-e^{-1})
\end{aligned}$$

Así el volumen es $\pi(1-e^{-1})$ unidades de volumen. Idea gráfica:





3. Determine:
   (a) $\displaystyle\int e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx$
   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xe^{\operatorname{arcsen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Solución:

(a) Entonces, considerando $u = \ln(1+e^x)$ y $dv = e^{-x}dx$ se tiene que $du = \frac{e^x}{1+e^x}dx$ y $v = \int dv = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$. Así, aplicando integración por partes

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx &= -\ln(1+e^x)\,e^{-x} + \int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}dx \\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x} + \int \frac{1}{1+e^x}dx \\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x} + \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx \\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x} + \int \frac{1+e^x}{1+e^x}dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx \\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x} + \int 1dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx \\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x} + x - \ln(|1+e^x|) + C \\
&= -\ln(1+e^x)\,e^{-x} + x - \ln(1+e^x) + C \\
&= -\ln(1+e^x)\left(e^{-x}+1\right) + x + C
\end{aligned}$$

(b) Notar que $\frac{d}{dx}\text{arcsen}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces haciendo la sustitución $t = \text{arcsen}(x)$, se tiene que $dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $x = \text{sen}(t)$, si $x = 0$ entonces $t = \text{arcsen}(0) = 0$ y si $x = \frac{1}{2}$ entonces $t = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ y $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{xe^{\text{arcsen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{sen}(t)e^t dt$ cuyo valor puede obtenerse integrando por partes.
Considerando la integral indefinida, aplicando integración pr partes dos veces:
$u = \text{sen}(t)$, $dv = e^t$, $du = \cos(t)dt$, $v = e^t$
$u = \cos(t)$, $dv = e^t$, $du = -\text{sen}(t)dt$, $v = e^t$

$$\begin{aligned}
\int \text{sen}(t)e^t dt &= e^t\text{sen}(t) - \int \cos(t)e^t dt \\
&= e^t\text{sen}(t) - \left(\cos(t)e^t + \int \text{sen}(t)e^t dt\right) \\
&= e^t\text{sen}(t) - \cos(t)e^t - \int \text{sen}(t)e^t dt \\
&= e^t\left(\text{sen}(t) - \cos(t)\right) - \int \text{sen}(t)e^t dt
\end{aligned}$$

Entonces, $\displaystyle\int \text{sen}(t)e^t dt = \frac{e^t}{2}\left(\text{sen}(t) - \cos(t)\right) + C$ y

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{sen}(t)e^t dt &= \left.\frac{e^t}{2}\left(\text{sen}(t) - \cos(t)\right)\right|_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \frac{e^{\frac{\pi}{6}}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

4. Determine $\int \cos^2(8\pi x)\text{sen}^2(5x)dx$. **Solución:**

Reescribir usando primero la identidad $\cos(\alpha)\text{sen}(\beta) = \frac{\text{sen}(\alpha+\beta)-\text{sen}(\alpha-\beta)}{2}$ y después que $\text{sen}^2(\theta) = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ y $\text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) = \frac{cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
I &= \int (\cos(8\pi x)\text{sen}(5x))^2\,dx \\
&= \int \left(\frac{\text{sen}((8\pi+5)x)-\text{sen}((8\pi-5)x)}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left[\text{sen}^2((8\pi+5)x) - 2\text{sen}((8\pi+5)x)\text{sen}((8\pi-5)x) + \text{sen}^2((8\pi-5)x)\right] dx \\
&= \frac{1}{4}\int \text{sen}^2((8\pi+5)x)dx - \frac{1}{2}\int \text{sen}((8\pi+5)x)\text{sen}((8\pi-5)x)dx \\
&+ \frac{1}{4}\int \text{sen}^2((8\pi-5)x)dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos(2(8\pi+5)x))\,dx - \frac{1}{4}\int (\cos(10x)-\cos(16\pi x))\,dx \\
&+ \frac{1}{8}\int (1-\cos(2(8\pi-5)x))\,dx \\
&= \frac{1}{8}\left(x - \frac{\text{sen}(2(8\pi+5)x)}{2(8\pi+5)}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\text{sen}(10x)}{10} - \frac{\text{sen}(16\pi x)}{16\pi}\right) \\
&+ \frac{1}{8}\left(x - \frac{\text{sen}(2(8\pi-5)x)}{2(8\pi-5)}\right) + C
\end{aligned}$$