Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 7

1. Sean $\{a_n\}$ una progresión geométrica y $\{b_n\}$ una progresión aritmética tales que los primeros 3 términos de cada sucesión son

$$a_1 = a\,, \quad a_2 = 10\,, \quad a_3 = c\,, \quad b_1 = a-1\,, \quad b_2 = 8\,, \quad b_3 = c-8\,,$$

donde a y c son números reales. Determine los valores de las constantes a y c.

Solución. Si $\{a_n\}$ es progresión geométrica entonces

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Longleftrightarrow \frac{10}{a} = \frac{c}{10} \Longleftrightarrow \boxed{ac = 100}^{(*)}$$

Si $\{b_n\}$ es progresión aritmética entonces

$$b_2 - b_1 = b_3 - b_2 \Longleftrightarrow 8-(a-1) = (c-8)-8 \Longleftrightarrow \boxed{a+c = 25}^{(**)}$$

Sustituyendo $(**)$ en $(*)$ se obtiene la ecuación $a^2 - 25a + 100 = 0$ cuyas soluciones son $a = 20$ o $a = 5$. Entonces, si $a = 20 \Longrightarrow c = 5$ y si $a = 5 \Longrightarrow b = 20$.

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por obtener la relación $(*)$
- 2 puntos por obtener la relación $(**)$
- 2 puntos por resolver el sistema $(*)$ y $(**)$.

2. Calcule

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k!.$$

Sugerencia: muestre primero que $(k^2+1)k! = k(k+1)! - (k-1)k!$.

Solución. Mostremos primero lo indicado en la sugerencia. Tenemos

$$k(k+1)! - (k-1)k! = k(k+1)k! - (k-1)k! = [k(k+1)-(k-1)]k! = (k^2+1)k!.$$

Definiendo $a_k = (k-1)k!$, vemos que la suma que se quiere calcular se puede escribir como una suma telescópica, y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! = \sum_{k=1}^{n}[a_{k+1}-a_k] = a_{n+1}-a_1 = n(n+1)! - 0\cdot 1! = n(n+1)!.$$

Puntaje Pregunta 2.

- 3 puntos por mostrar lo indicado en la sugerencia y 3 puntos por calcular la suma usando la estructura de una suma telescópica.

3. **Use** el teorema del binomio para mostrar que, para $n \in \mathbb{N}$ y $x \neq 0$, se tiene

$$\frac{(1+x)^{n+1}-1}{(n+1)x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^k.$$

Sugerencia: puede usar (sin demostrar) que $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Solución. Calculamos

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1}-1 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} 1^{n+1-k} x^k - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} x^{k+1} \\
&= x(n+1) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} x^k.
\end{aligned}$$

Dividiendo ambos lados por $x(n+1)$, se obtiene el resultado.

Puntaje Pregunta 3.

- 1.5 puntos por cada una de las 4 igualdades del desarrollo (no tiene puntaje dividir por $x(n+1)$).