Inecuaciones con Valor absoluto

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

20 de Marzo de 2023

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Inecuaciones con valor absoluto

EJEMPLO 1 Resuelva la siguiente inecuaciones con valor absoluto

$$2|x| < |x-1|\,.$$

Solución Hay varias formas de resolver este tipo de inecuaciones, se pueden usar al menos tres métodos alternativos.

Método 1. (Uso de las propiedades de las desigualdades)

Tenemos que

$$\begin{aligned} 0 \leqslant 2|x| < |x-1| \quad &\Longleftrightarrow \quad 4|x|^2 < |x-1|^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4x^2 < (x-1)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4x^2 < x^2 - 2x + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 < -3x^2 - 2x + 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 < (x+1)(-3x+1)\,. \end{aligned}$$

- Puntos críticos: $x = -1$, $x = \dfrac{1}{3}$:

Inecuaciones

- Tabla de signos

	$-\infty$	-1	$1/3$	∞
$-3x+1$	$+$	$+$	$-$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	
	$-$	$+$	$-$	

- Conjunto solución: $S = \left]-1, \dfrac{1}{3}\right[.$

Método 2. (Uso de las propiedades del valor absoluto) Esta técnica se usa del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
2|x| < |x-1| \quad &\iff \quad -|x-1| < 2x < |x-1| \\
&\iff \quad (-2x < |x-1|) \wedge (|x-1| > 2x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \quad (x-1 < 2x \vee x-2 > -2x) \wedge (x-1 < -2x \vee x-2 > 2x) \\
&\iff \quad (x > -1 \vee 3x > 1) \wedge (3x < 1 \vee x < -1) \\
&\iff \quad (x > -1) \wedge (x < \frac{1}{3}) \\
&\iff \quad x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right) .
\end{aligned}
$$

Método 3. (Uso de los puntos críticos)

Esta método comienza buscando todos los puntos en los cuales los factores bajo los valores absolutos cambian de signo.
Si miramos la expresión

$$2|x| < |x-1|\,,$$

vemos claramente que los puntos críticos son el 0 para el primer valor abosluto y el 1 para el segundo. Estos puntos críticos se ordenan de menor a mayor y con ellos se forman los intervalos $(-\infty, 0]$, $(0, 1]$ y $(1, +\infty)$.

- Caso 1. $x \in (-\infty, 0]$, los factores x y $x-1$ son ambos menores o iguales a cero, por lo que

$$\begin{aligned} 2|x| < |x-1| \quad &\Longleftrightarrow \quad -2x < -(x-1) \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x > x-1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x > -1\,. \end{aligned}$$

  Por lo tanto en este intervalo la solución es $S_1 = (-1, 0]$.

Inecuaciones

- Caso 2. $x \in (0, 1]$, el factor x es positivo y el factor $x - 1$ es negativo, entonces

$$\begin{aligned} 2|x| < |x-1| &\iff 2x < -(x-1) \\ &\iff 3x < 1 \\ &\iff x < \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Luego en este intervalo la solución es $S_2 = \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$.

- Caso 3. $x \in (1, \infty)$, los factores x y $x - 1$ son ambos positivos, entonces

$$
\begin{aligned}
2|x| < |x-1| &\iff 2x < -(x-1) \\
&\iff x < -1\,.
\end{aligned}
$$

Esta inecuación tiene solución $(-\infty, -1)$ en $\mathbb{R}$, pero como lo estamos resolviendo en el intervalo $(1, \infty)$, se deduce que la solución es $S_3 = \varnothing$.
En consecuencia la solución final es

$$
S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-1, 0] \cup \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \varnothing = \left(-1, \frac{1}{3}\right)\,.
$$

EJEMPLO 2 Resuelva la siguiente inecuación con valor absoluto

$$|x^2 - |3 + 2x|| < 4\,.$$

Solución Usando las propiedades de valor absoluto, se tiene que

$$\begin{aligned} |x^2 - |3+2x|| < 4 &\iff -4 < x^2 - |3+2x| < 4 \\ &\iff \begin{cases} -4 < x^2 - |3+2x| \\ x^2 - |3+2x| < 4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |3+2x| < x^2 + 4 \\ x^2 - 4 < |3+2x| \end{cases} \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente las propiedades del valor absoluto se tiene que la primera inecuación equivale a:

$$\begin{aligned} |3+2x| < x^2+4 &\iff -(x^2+4) < 3+2x < x^2+4 \\ &\iff (0 < x^2+2x+7) \wedge (0 < x^2-2x+1) \end{aligned}$$

mientras que la segunda inecuación es equivalente a:

$$\begin{aligned} x^2-4 < |3+2x| &\iff (3+2x < -(x^2-4)) \vee (3+2x > x^2-4) \\ &\iff (x^2+2x-1 < 0) \vee (0 > x^2-2x-7) \end{aligned}$$