# $\mathbb{R}$ es ordenado

**Introducción al Cálculo - MAT1107**


Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile


8 de Marzo de 2023

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

# Axiomas de Orden

**EJEMPLO 1** Demuestre que si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$.

**Solución** Si $a < b$ entonces $b - a > 0$.
Por hipótesis $a > 0$ y $b > 0$ luego $a + b > 0$. (Ya que $\mathbb{R}^+$ es cerrado)
Como $b - a > 0$ y $b + a > 0$ entonces $(b - a)(b + a) > 0$. (Ya que $\mathbb{R}^+$ es cerrado).
La última desigualdad es equivalente a $b^2 - a^2 > 0$ es decir $b^2 > a^2$ como queríamos probar.

# Axiomas de Orden



**EJEMPLO 2** Pruebe la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $b > 0$.

**Solución** Por contradicción, supongamos que $\dfrac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$.

Note que $a + b > 0$ ya que $a$ y $b$ son positivos, luego $\dfrac{a+b}{2} > 0$.
Aplicando lo demostrado en el ejemplo 1 obtenemos

$$0 < \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \Longrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} < ab$$

Desarrollando los términos obtenemos

$$a^2 + 2ab + b^2 < 4ab \Longleftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 < 0 \Longleftrightarrow (a-b)^2 < 0$$

lo cual es una contradicción.

# Axiomas de Orden

**EJEMPLO 3** Demuestre que si $a$, $b$ y $c$ son positivos y no todos iguales, entonces

$$(a+b+c)(bc+ca+ab) > 9abc\ .$$

**Solución** Por demostrar que $(a+b+c)(bc+ca+ab) - 9abc > 0$. En efecto, tenemos que

$$(a+b+c)(bc+ca+ab) - 9abc$$

$$\begin{aligned}
&= abc + ca^2 + a^2b + b^2c + abc + ab^2 + bc^2 + c^2a + abc - 9abc \\
&= ca^2 + a^2b + b^2c + ab^2 + bc^2 + c^2a - 6abc \\
&= c(a^2+b^2) + b(a^2+c^2) + a(b^2+c^2) - 6abc \\
&= c(a^2-2ab+b^2) + b(a^2-2ac+c^2) + a(b^2-2bc+c^2) \\
&= c(a-b)^2 + b(a-c)^2 + a(b-c)^2
\end{aligned}$$

# Axiomas de Orden



Como los números al cuadrado son positivos ya que los números son distintos (hipótesis) y positivos, entonces

$$c(a-b)^2 > 0\,, \quad b(a-c)^2 > 0\,, \quad a(b-c)^2 > 0$$

se sigue que la suma de estos tres números positivos es positivo, es decir

$$c(a-b)^2 + b(a-c)^2 + a(b-c)^2 > 0$$

lo que equivale a que

$$(a+b+c)(bc+ca+ab) - 9abc > 0$$

como queríamos probar.

# Axiomas de Orden

**EJEMPLO 4** Demuestre que si $0 < a < b$ y $0 < c < d$ entonces $ac < bd$.

**Solución**

- Como $a < b$ y $c > 0$ por el axioma O4 se obtiene que $ac < bc$
- Como $c < d$ y $b > 0$ por el axioma O4 se tiene que $bc < bd$

Usando el axioma de transitividad se sigue que $ac < bd$.