Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
Interrogación 2

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   (a) Escriba A^{-1} como un producto de matrices elementales.

   (b) Escriba A como un producto de matrices elementales.

Solución

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[-4f_1+f_2]{-6f_1+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-2f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5/3 & -2/3 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = E\left(-2f_2+f_3\right) E\left(\frac{1}{3}f_1\right) E\left(-4f_1+f_2\right) E\left(-6f_1+f_3\right) E\left(\frac{1}{2}f_1\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -2/3 & \frac{1}{3} & 0 \\ -5/3 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

(b) De acuerdo con el resultado anterior se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Puntaje

(a)
- 1,5 puntos por ejecutar una manera de obtener las matrices elementales para A^{-1}, independiente si comete errores aritméticos básicos o cambia de orden las matrices elementales.
- 1,5 puntos por escribir A^{-1} como producto de elementales correctas en el orden correcto.

(b)
- 1,5 puntos por ejecutar una manera de obtener las matrices elementales para A, independiente si comete errores aritméticos básicos o cambia de orden las matrices elementales.
- 1,5 puntos por escribir A como producto de elementales correctas en el orden correcto.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Calcular la descomposición LU de la matriz A.

(b) Usando lo anterior, calcular una matriz B escalonada y una matriz C triangular inferior tales que $B = CA$.

Solución :

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{f_2 - f_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{f_3 - \frac{1}{3} f_2}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 & 4/3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 & 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 & 4/3 \end{bmatrix} = LU.$$

(b) Ya que $A = LU$ entonces $L^{-1}A = U$. Definiendo $C = L^{-1}$ y $B = U$ entonces $CA = B$ donde $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}$.

Puntaje

(a)
- 1 punto por seguir un procedimiento para obtener adecuadamente la descomposición LU.
- 1 puntos por determinar una matriz L correcta.
- 1 puntos por determinar una matriz U correcta.

(b)
- 1 punto por definir correctamente la matriz C
- 1 punto por escribir explícitamente cuál es la matriz C
- 1 punto definir correctamente la matriz B.

3. Demuestre, usando las propiedades vistas en clases o la definición por cofactores, que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

Solución Haciendo operaciones elementales se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_2} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 0 & z-y & z^2-y^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-y & z^2-y^2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, calculando el determinante por cofactores con la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-y & z^2-y^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-y)\begin{vmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+y \end{vmatrix} = (y-x)(z-y)(z-x).$$

Solución

- 2 puntos si presenta una demostración coherente y adecuada, aunque tenga errores o esté incompleta.
- 2 puntos por aplicar correctamente propiedades de terminantes o definición de determinante por cofactores.
- 2 puntos por demostrar lo pedido correctamente, sin errores.
- 0 puntos si demuestra usando contenidos no vistos en clases.

4. Utilice el método de Cramer para encontrar únicamente la segunda columna de la A^{-1} donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución Sea el vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ la segunda columna de A^{-1}. Esto es, $x = A^{-1}e_2$, donde e_2 es el vector canónico $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Es decir, basta resolver el sistema $A\mathbf{x} = e_2$ para determinar el vector buscado.

La regla de Cramer nos asegura que

$$x_1 = \frac{|A_1(e_2)|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2(e_2)|}{|A|}, x_3 = \frac{|A_3(e_2)|}{|A|}.$$

Así:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-2) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -6 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$|A_1(e_2)| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 14.$$

$$|A_2(e_2)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -22$$

$$|A_3(e_2)| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

Por lo tanto, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 14/6 \\ -22/6 \\ 10/6 \end{bmatrix}$.

Puntaje

- 2 puntos por establecer la regla de Cramer.
- 2 puntos por resolver el sistema usando la regla de Cramer (independiente que tenga errores en los determinantes)
- 2 puntos por encontrar el vector $\mathbf{x}$ correcto.
- 0 puntos si no utiliza la regla de Cramer.

5. Considere el paralelepípedo S que tiene un vértice en el origen y vértices adyacentes en $(1,0,2), (-1,2,4), (-1,1,0)$, y la transformación lineal

$$T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre el o los valor(es) de α tal que el volumen del paralelepípedo $T(S)$ sea 4 .

Solución El volumen del paralelepípedo $T(S)$ cumple que

$$\text{Volumen de } T(S) = |\det(A)| \cdot (\text{Volumen de } S)$$

donde A es la matriz estándar de T. Así: $\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 1.$

Además,

$$\text{Volumen de } S = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| = 2$$

Por lo tanto

$$4 = |\alpha - 1| \cdot (2) \Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ o } \alpha = 3.$$

Puntaje

- 2 puntos por establecer el hecho que $\text{Vol}(T(S)) = |\det(A)|\text{Vol}(S)$.
- 1 punto por encontrar la matriz A.
- 0.5 puntos por encontrar $|A|$.
- 1 puntos por plantear cómo calcular el volumen de S.
- 0.5 puntos por encontrar $\text{Vol}(S)$.
- 0.5 puntos por encontrar cada valor correcto de α (1 punto en total).

6. Decida si S es un subespacio del espacio vectorial V y justifique su respuesta:
   (a) $S = \{A \in V \mid A^T = A\}$ con $V =$ Matrices reales de $n \times n$.
   (b) $S = \{(x,y,z,w) \mid x+y+z+w+1 = 0\}$ con $V = \mathbb{R}^4$.

Solución

(a)
- Si $A = 0$ (matriz nula) de $n \times n$, entonces $A^T = A$, por lo tanto $A \in S$.
- Si A y B pertenecen a S, entonces $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$. Por lo tanto, $A + B \in S$.
- Si $A \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A$ por lo que $\alpha A \in S$.

Esto implica que S es un subespacio vectorial.

(b) S no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ ya que el vector $(0, 0, 0, 0)$ no pertenece a S puesto que no cumple con la condición $x + y + z + w + 1 = 0$.

Puntaje

(a)
- 1 punto por enunciar las tres propiedades a verificar para que S sea subespacio.
- 2 puntos por determinar de manera correcta que S cumple con tales condiciones.

(b)
- 1 punto por decidir que S no es subespacio entregando algún argumento. aunque sea incompleto.
- 2 puntos por demostrar de manera correcta que S no es un subespacio vectorial.

7. Considere la matriz A y los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine si $\mathbf{u}$ pertenece a Nul A.

(b) Determine si $\mathbf{v}$ pertenece a Col A.

Solución

(a) $\mathbf{u} \in \text{Nul}(A)$ si y sólo si $A\mathbf{u} = 0$.

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{u} \notin \text{Nul}(A)$.

(b) $\mathbf{v} \in \text{Col}(A)$ si y sólo si $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ es consistente. La forma escalonada de A es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ -2 & -5 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & -8 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 17/2 \end{bmatrix}.$$

Como cada fila de la forma escalonada de A tiene un pivote, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ tiene solución. Por lo tanto, $\mathbf{v} \in \text{Col}(A)$.

Puntaje

(a)
- 1 punto por entregar un argumento que determine si $\mathbf{u}$ pertenece o no a $\text{Nul}(A)$, independiente que sea o no correcto.
- 2 puntos por argumentar correctamente que $\mathbf{u} \notin \text{Nul}(A)$.

(b)
- 1 punto por entregar un argumento que determine si $\mathbf{v}$ pertenece o no a $\text{Col}(A)$, independiente que sea o no correcto.
- 2 puntos por argumentar correctamente que $\mathbf{v} \in \text{Col}(A)$.

8. Defina una transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ mediante $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(0) \end{bmatrix}$.

(a) Determine una base para el núcleo de T.

(b) Determine una base para el rango de T.

Solución

(a) Sea $\mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{P}_2$.

$$\mathbf{p} \in \text{Nul}(T) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} c \\ a+b+c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = -b \text{ y } c = 0.$$

Por lo tanto,

$$\text{Nul}(T) = \{ax^2 + bx + c | a = -b, c = 0\} = \{a(x^2 - x) | a \in \mathbb{R}\} = \text{Gen}\{x^2 - x\},$$

esto es, una base para $\text{Nul}(T)$ es $\{x^2 - x\}$.

(b) Sea $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \text{Ran}(T) &\Leftrightarrow \text{ Existe } \mathbf{p} \in \mathbb{P}_2 \text{ tal que } T(\mathbf{p}) = \mathbf{x} \\ &\Leftrightarrow \text{ Existe } \mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c \text{ tal que } \begin{bmatrix} \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \text{ Existe } \mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c \text{ tal que } \begin{bmatrix} c \\ a+b+c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \alpha = c = \gamma \text{ y } a + b + c = \beta. \end{aligned}$$

Es decir, tenemos que $\alpha = \gamma$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Ran}(T) \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

por lo tanto, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ genera $\mathrm{Ran}(T)$ y además son linealmente independientes por que no son dos vectores paralelos. En conclusión, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es una base del espacio buscado.

Puntaje

(a)
- 1 punto por establecer correctamente la definición de núcleo de T.
- 1 punto si determina condiciones para los coeficientes de un polinomio en el núcleo de T.
- 1 puntos por encontrar una base de $\mathrm{Nul}(T)$ de acuerdo a las condiciones determinadas anteriormente.

(b)
- 1 punto por establecer correctamente la definición de rango de T.
- 1 punto por encontrar generadores de $\mathrm{Ran}(T)$.
- 1 punto por argumentar que dichos generadores son linealmente independientes.