Clase 4

viernes, 9 de agosto de 2024 16:37

Intersecciones de Planos en $\mathbb{R}^3$: Una Introducción a los sistemas lineales

Recordemos de la clase pasada que la ecuación normal de un plano esta dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot n = p \cdot n$$

o equivalentemente

$$a \cdot x + by + c \cdot z = d$$

donde $n = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ y $d = p \cdot n$.

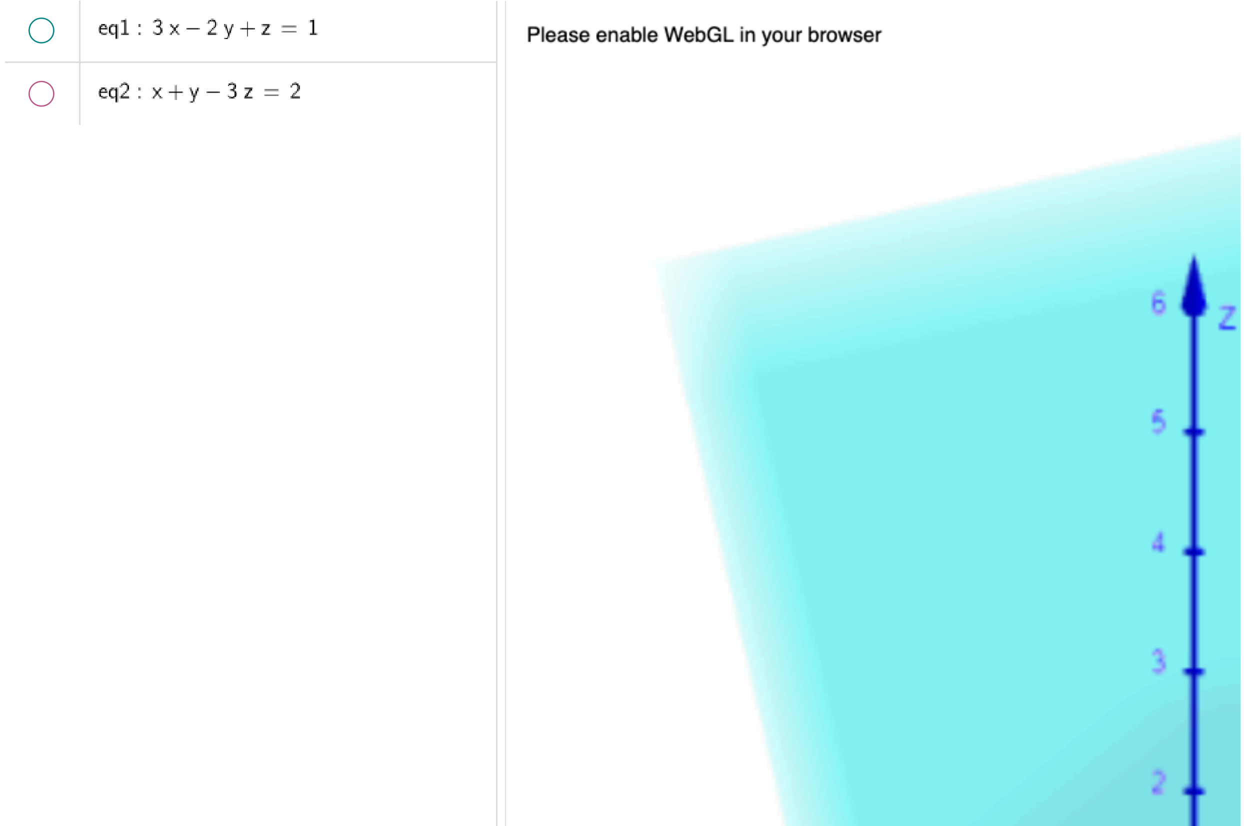
¿Qué obtenemos al intersectar dos planos?

Ejemplo: Consideremos los planos dados las ecuaciones

$$3x - 2y + z = 1$$
$$x + y - 3z = 2$$

Puede visualizar los planos aquí (con el mouse se puede rotar la imagen).

[Interseccion de Planos]



La intersección de ambos planos corresponde a los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que satisfacen ambas ecuaciones simultaneamente. Es decir, debemos resolver el sistema de ecuaciones lineales (SEL):

$$\begin{aligned} \text{Eq. 1:} \quad 3x - 2y + z &= 1 \\ \text{Eq. 2:} \quad x + y - 3z &= 2 \end{aligned}$$

El conjunto solución del SEL es el conjunto de vectores que satisfacen ambas ecuaciones (es decir, la intersección de ambos planos).

Para ello podemos realizar los siguientes pasos (tal como aprendimos en la enseñanza media). En cada paso reemplazamos una ecuación del sistema por otra, sin cambiar el conjunto solución.
Al mismo tiempo, graficaremos los planos obtenidos en cada paso

Paso 1: Multiplicamos Eq. 2 por 2. Llamamos a la ecuación resultante Eq. 2`.

$$\text{Eq. 1:} \quad 3x - 2y + z = 1$$

Eq. 2': $3 \cdot x + 3y - 9z = 6$

Paso 2: Reemplazamos Eq 2' por la resta de la Eq 2' menos Eq. 1.

$$\begin{aligned} \text{Eq. 1}: \quad & 3x - 2y + z = 1 \\ \text{Eq. 2''}: \quad & \quad\;\; 5y - 10z = 5 \end{aligned}$$

Paso 3: Despejamos la variable y de la Eq. 2''

$$5y = 5 + 10z \qquad / \cdot \tfrac{1}{5}$$

$$\boxed{y = 1 + 2z}$$

Paso 4: Despejamos la variable x de la Eq. 1 usando la expresión de y para dejarlo en función de la variable z solamente:

$$3x = 1 + 2y - z \qquad / \cdot \tfrac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} y - \frac{1}{3} \cdot z$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot (1 + 2z) - \frac{1}{3} z$$

$$\vdots \; \boxed{x = 1 + z}$$

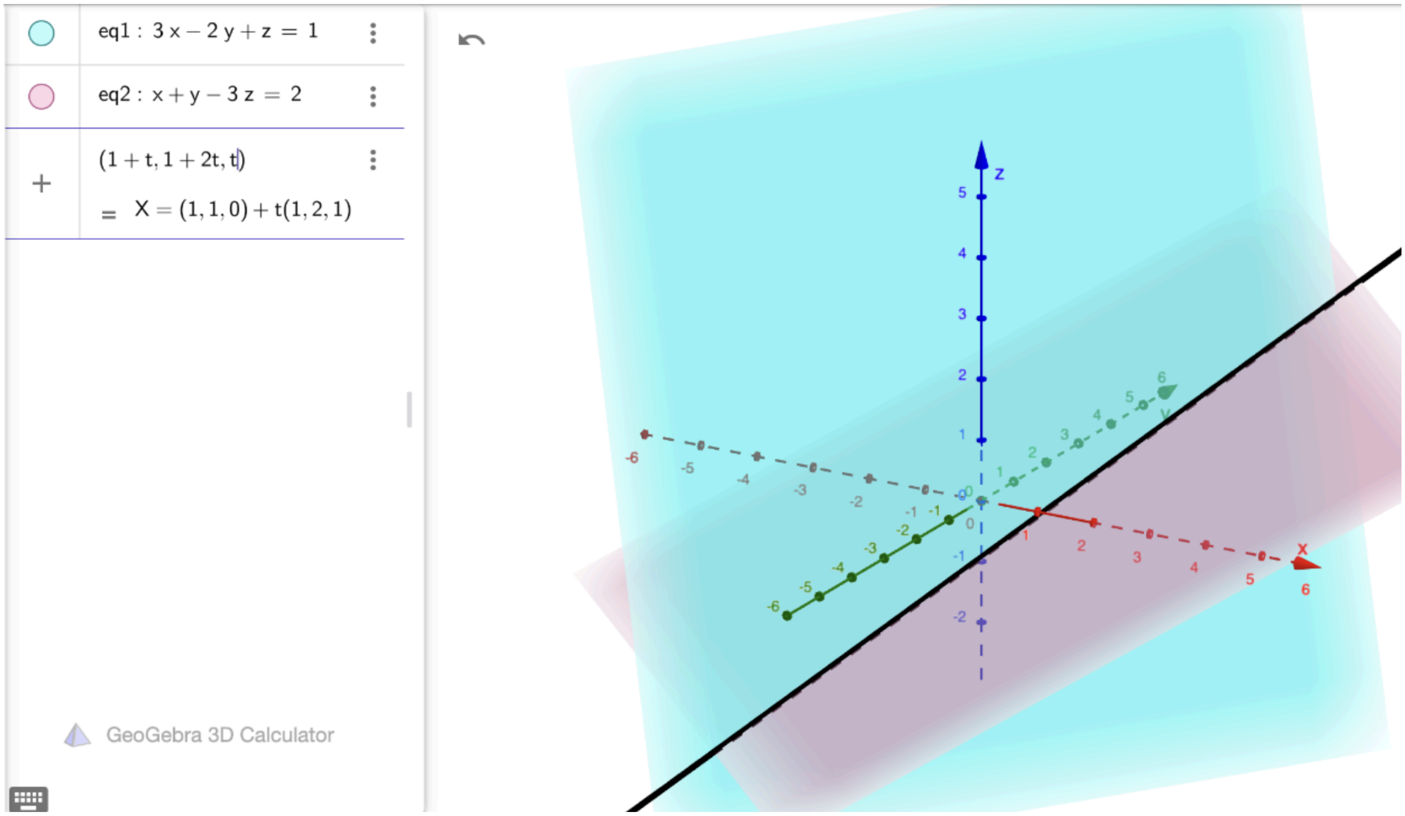
Paso 5: Escribimos la solución en forma vectorial. Los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que satisfacen las ecuaciones Eq 1 y Eq. 2 son

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + z \\ 1 + 2z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ donde}$$

z es cualquier número en $\mathbb{R}$. Es decir, el conjunto solución es la recta:

$$\boxed{L := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} ; \; t \in \mathbb{R} \right\}}$$

En la siguiente figura se muestra la solución geométricamente.



¿Cómo podemos interpretar geométricamente los pasos que seguimos? ¿Cambiaron los planos en cada pas

Paso 1:

Aunque la ecuación cambió, el plano que representa no ha cambiado: los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ que satisfacen Eq.2 y Eq.2' son los mismos. Sin embargo, observamos que el vector normal es el triple para la Eq. 2''. En otras palabras, hemos hecho el siguiente cálculo

$$n \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = n \cdot p \qquad / \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\left(n \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 3(n \cdot p)$$

$$\Leftrightarrow \quad (3n) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (3n) \cdot p$$

Paso 2:

Como vemos en la figura de Geogebra, la Eq 2 representa un plano distinto que el de la Eq 2'. Sin embargo, la intersección de los planos (es decir, el conjunto solución) se mantiene.
Más aún el plano de la Eq 2'' es mas simple que el de la Eq 2' ya que su expresión no depende de la variable x.

[Interseccion 3 planos]

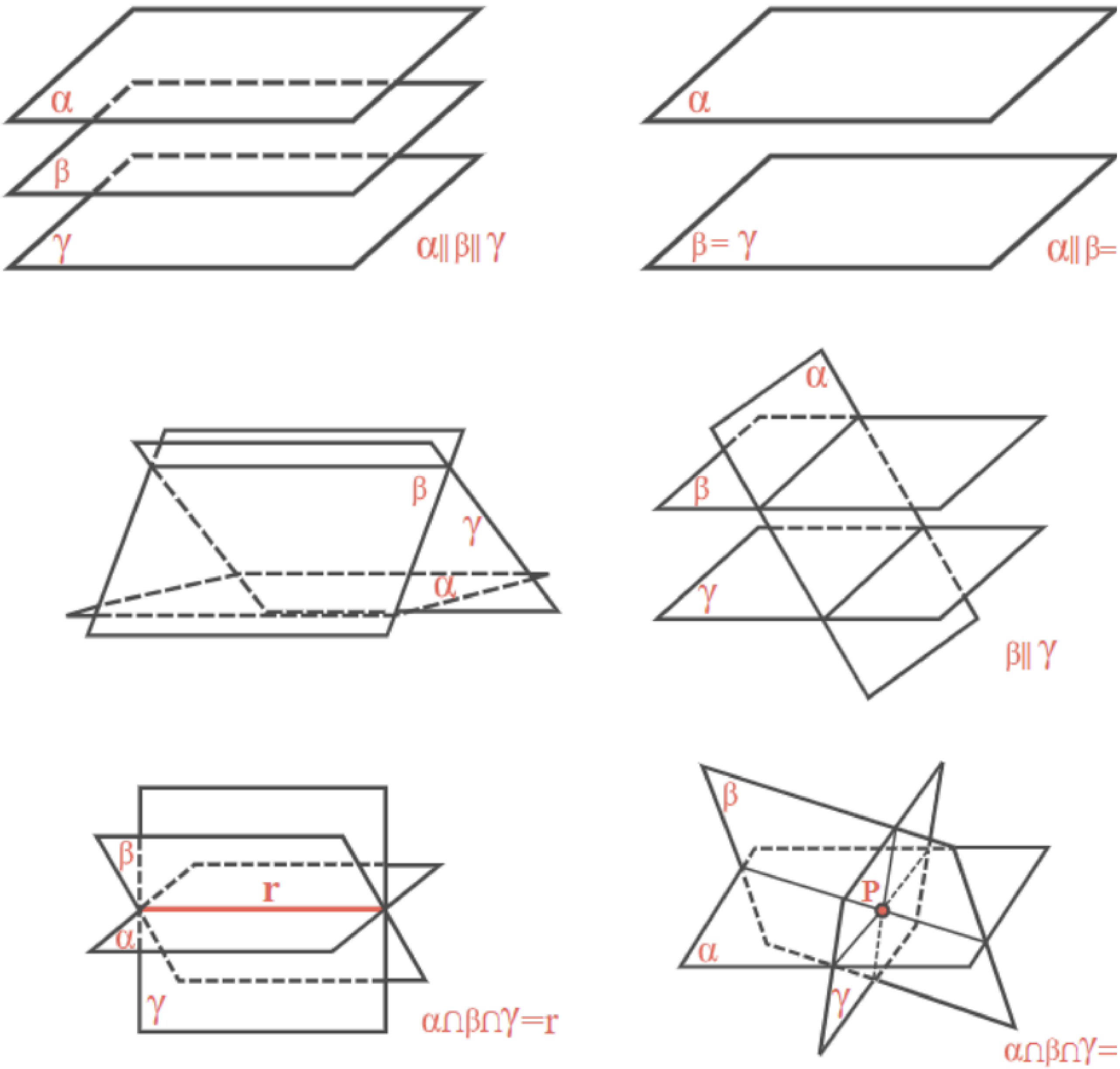
- eq1 : $3x - 2y + z = 1$
- eq2' : $x + y - 3z = 2$
- f : $X = (1 + t,\ 1 + 2t,\ t)$
  $= X = (1, 1, 0) + t\,(1, 2, 1)$
- eq2'' : $5y - 10z = 5$
- eq2 : $x + y - 3z = 2$

Los pasos 3-5 no tienen una interpretación geométrica tan clara ya que es solamente despejar variables.

Discusión:

¿Cuantas soluciones hubieran tenido el sisten de ecuaciones si los planos hubieran sido co siguen ?

¿Qué pasa con la pregunta anterior si ahora in-
sectamos 3 planos?



- ¿Qué significa que en la ecuación de un plano no aparezca la variable x?
- ¿Qué ocurre si se elimina la variable y o la variable z en el proceso de eliminación?
- Resuelva el problema de la clase eliminando y y eliminado z. ¿Cómo son las ecuaciones paramétri

la recta de intersección?

- ¿Es posible que un problema de intersección de planos tenga exactamente dos soluciones?