Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Departamento de Estadística
Primer Semestre de 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026
Ayudantía 12
06 de Junio de 2019

1. Sean $Y_1, \ldots, Y_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{N}(\mu, \sigma^2)$. Defina $Z = HY$ donde

$$H_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{(i(i+1)}} & j \leqslant i \\ -\sqrt{\dfrac{i}{i+1}} & j = i+1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

   a) Pruebe que H es ortogonal.

   b) Usando el hecho de que $Z_n = \sqrt{n}\bar{Y}$, pruebe que $\sum_{i=1}^{n-1} Z_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2$

   c) Utilizando lo anterior, pruebe que $\bar{Y}$ y S^2 son independientes.

2. Considere la forma cuadrática

$$Q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 4x - 10y + 26.$$

   Sea (X, Y) un vector aleatorio absolutamente continuo con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = C \exp\left\{-\frac{Q(x, y)}{2}\right\}$$

   donde $C \in \mathbb{R}^+$ es la constante de normalización respectiva.

   a) Identifique la distribución de (X, Y).

   b) Encuentre el mejor predictor lineal de X basado en Y junto con su respectiva varianza.

3. Sean $\mathbf{Y} \sim \text{N}_n(0, \sigma^2\mathbf{I})$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz idempotente de rango m. Demuestre que $\dfrac{\mathbf{Y}'A\mathbf{Y}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(\text{Tr}(A))}$.

4. Sean $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{Cauchy}(0, 1)$. Si $S_k = X_1 + \cdots + X_k$, demuestre que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k} \sim \text{Cauchy}(0, 1).$$