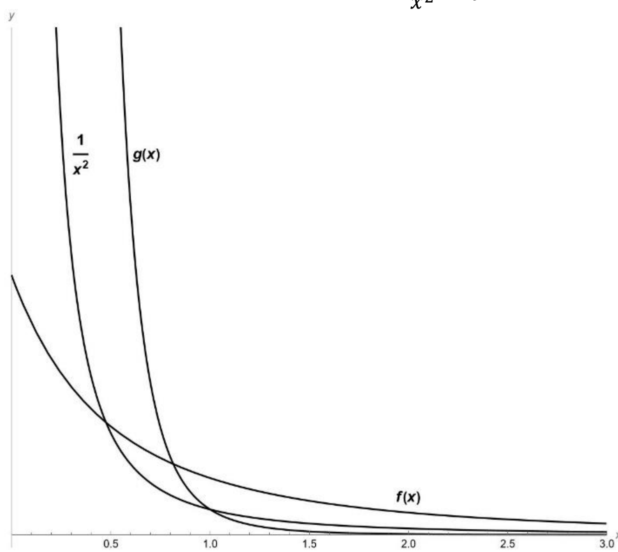
MAT1620 ★ Cálculo 2

Interrogación 1

1.

a) Considere las funciones $f(x)$ y $g(x)$, tales que:

- $f(x)$ es continua y $\mathrm{Dom}(f) = [0,\infty)$.
- $g(x)$ es continua y $\mathrm{Dom}(g) = (0,\infty)$
- $g(x) > 0$ para todo $x > 0$.
- $\frac{1}{x^2} \leq g(x)$ para $0 < x < \frac{1}{2}$.
- $g(x) \leq \frac{1}{x^2}$ para $1 < x$.
- $\frac{1}{x^2} \leq f(x)$ para $1 < x$.



A partir de la información dada acerca de $f(x)$ y $g(x)$, indique si las siguientes integrales son impropias o no. Además, si la integral es impropia, indique si es convergente o divergente justificando con un criterio apropiado. Si no hay suficiente información para determinar la convergencia o divergencia escriba "falta información".

I. $\int_1^\infty f(x)dx$

II. $\int_1^\infty g(x)dx$

III. $\int_0^1 f(x)dx$

IV. $\int_0^1 g(x)dx$

Solución.

I. $\int_1^\infty f(x)dx$. La integral **es impropia**, falta información.

II. $\int_1^\infty g(x)dx$. La integral **es impropia**. Aplicando el teorema de comparación con $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$, se concluye que la integral es **convergente**.

III. $\int_0^1 f(x)dx$. La integral **no es una integral impropia**.

IV. $\int_0^1 g(x)dx$. La integral **es impropia**. Aplicando el teorema de comparación con $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$, se concluye que la integral es **divergente**.

b)

I. Demuestre que si $t \in [1,+\infty)$, entonces $\cos\left(\frac{1}{t}\right) \geq \cos(1)$.

II. Determine si la siguiente integral impropia es convergente o divergente.

$$\int_1^\infty \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}\,dt$$

Solución.

I. Basta observar que

$$t \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{t} \leq 1$$

Luego, como la función $f(x) = \cos(x)$ es decreciente en el intervalo $(0,1]$, tenemos

$$\cos\left(\frac{1}{t}\right) \geq \cos(1)$$

II. Por la desigualdad anterior y como $\cos(1) > 0$

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}} \geq \frac{\cos(1)}{\sqrt{t}} > 0$$

Además, la integral impropia

$$\int_1^\infty \frac{\cos(1)}{\sqrt{t}}\,dt = \cos(1)\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$$

es divergente ya que es una integral impropia de la forma $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$, con $p = \frac{1}{2} \leq 1$

Por lo que podemos concluir que la integral

$$\int_1^\infty \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}\,dt$$

es divergente, aplicando la prueba por comparación.

2.

a) Determine si la sucesión converge o diverge. Si converge, encuentre el límite:

$$a_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n - n}$$

b) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^{n-1}}$$

Solución.

a) Dividiendo el numerador y denominador por n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}((-1)^n + n)}{\frac{1}{n}((-1)^n - n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(-1)^n}{n} + 1}{\frac{(-1)^n}{n} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

Así, la sucesión es convergente a -1.

b) Primero notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Luego, ajustando los índices de la suma se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$$

donde ambas sumas son series geométricas convergentes, así

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^{n-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{2}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}$$

3. Sea $b_n = \frac{n^2}{n^r+4}$ donde r es un número real.

a) Pruebe que la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$$
es absolutamente convergente para $r > 3$.

b) Si sabemos que la sucesión b_n decrece con el tiempo, pruebe que la serie es condicionalmente convergente para $2 < r \leq 3$.

Solución.

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n^2}{n^r+4}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^r+4}$ tiene el mismo comportamiento que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{r-2}}$, en efecto, la prueba por comparación del límite nos dice que
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^r+4}}{\frac{1}{n^{r-2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^r}{n^r+4} = 1$$
Por lo que ambas series convergen cuando $r-2>1$, de donde se obtiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^r+4}$ es **absolutamente convergente para $r > 3$**.

b) La sucesión $b_n = \frac{n^2}{n^r+4}$ es decreciente en el tiempo para todo r, en particular, cuando $r > 2$.
Además
$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^r+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^r}(n^2)}{\frac{1}{n^r}(n^r+4)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{2-r}}{1+\frac{4}{n^r}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^{2-r}}}{1+\frac{4}{n^r}} = \frac{0}{1} = 0$$
Por lo que la prueba de la serie alternante nos dice que
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$$
es convergente en este caso y así, como la serie es absolutamente convergente para $r > 3$ (por la parte a)), podemos concluir que la serie es **condicionalmente convergente para $2 < r \leq 3$**.

4.

a) El radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3^n n}$$

es $R = 3$. Encuentre el intervalo de convergencia de la serie.

b) La serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x+3)^n$$

converge cuando $x = -6$ y diverge cuando $x = 1$. ¿Cuáles son el mayor y el menor valor posible para el radio de convergencia de la serie?

Solución.

a) La serie de potencias está centrada en $c = -2$, luego, como el radio de convergencia es $R = 3$, para obtener el intervalo de convergencia debemos analizar la convergencia en $x = -2 + 3 = 1$ y $x = -2 - 3 = -5$

Si $x = 1$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es la serie armónica divergente.

Si $x = -5$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5+2)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

es una serie alternante convergente.

Así, el intervalo de convergencia de la serie de potencias es

$$(-5,1]$$

b) La serie está centrada en $c = -3$.
Por lo tanto, si R es el radio de convergencia de la serie y si converge para $x = -6$, debemos tener

$$-3 - R \leq -6 \leq -3 + R$$

Y así

$$3 \leq R$$

Por otro lado, si diverge para $x = 1$, debemos tener

$$1 \leq -3 - R \quad \text{o bien} \quad -3 + R \leq 1$$

- Si $1 \leq -3 - R$, entonces $1 \leq -3 - R \leq -6$, lo cual no es posible ya que $-6 < 1$.
- Si $-3 + R \leq 1$, entonces $R \leq 4$, de donde se sigue que

$$3 \leq R \leq 4$$