EYP1027 Modelos Probabilísticos

Clase 5

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Primer Semestre 2020

Contenido I

Cuando sólo interesa observar algunos aspectos **numéricos** de los resultados del experimeto aleatorio, se debe trabajar con **variables aleatorias**

Informalmente: Una variable aletoria es una función numérica (real valorada) X definida sobre el espacio muestral Ω:

$$\begin{aligned} X: \quad \Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow X(\omega) \end{aligned}$$

Es decir, X es una función que asigna a cada elemento $\omega \in \Omega$ un número $x = X(\omega) \in \mathbb{R}$

Nota: En muchos casos el recorrido (o rango) de X, $\mathcal{X}$, es un subconjunto propio de $\mathbb{R}$, es decir, $X : \Omega \longrightarrow \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$.

Variables Aleatorias

Definición formal

Formalmente, una variable aleatoria queda definida como sigue:

Definición 1.1

Variable aleatoria: Dado un modelo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, una variable aleatoria es una función real valorada X sobre Ω tal que, para todo número real x, el conjunto $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ pertenece a $\mathcal{A}$.

Las variables aleatorias son el principal insumo del análisis estadístico, es decir, para inferir sobre aspectos (parámetros) desconocidos de una población. Hay dos clases principales de variables aleatorias, **discretas** y **continuas**, aunque en algunas situaciones también se presentan las variables aleatorias **mixtas**.

Nota: Para cada $x \in \mathbb{R}$,
$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, x]\} = X^{-1}((-\infty, x])$
es la imagen inversa de $(-\infty, x]$ bajo X

Ejemplo 1.1

Experimento: Lanzar una moneda (justa) $n = 2$ veces. Entonces, $\Omega = \{(s,s)(s,c),(c,s),(c,c)\}$ con $N(\Omega) = 4$. Si sólo interesa el número de caras, podemos definir la función $X(\omega) =$ número de caras en ω

$$\Longrightarrow \; X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \omega = (s,s) \\ 1 & \text{si } \omega = (s,c) \\ 1 & \text{si } \omega = (c,s) \\ 2 & \text{si } \omega = (c,c) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ para cada $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \in \mathcal{X} = \{0,1,2\} \subset \mathbb{R}$.

Nota: Una variable aleatoria puede asignarle el mismo número a diferentes $\omega \in \Omega$; lo importante es que todos los posibles $\omega \in \Omega$ esten representados numéricamente.

Variables Aleatorias

Ejemplo 1.2

Experimento: Observar la altura (en pulgadas) una persona sleccionada al azar. Sea $X =$ altura de la persona. Entonces, X es una variable aleatoria, con valores en $(0, \infty)$

Ejemplo 1.3

Experimento: Lanzar un dado dos veces. Aquí,

$$\Omega = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Sea $\mathcal{A}= \mathcal{P}(\Omega)$, y sea X definida por $X(\omega) = i + j$ si $\omega = (i, j) \in \Omega$; entonces X es una variable aleatoria, ya que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.4

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, con $\Omega = \{a, b, c\}$ y $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$. Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega = a, \\ 1, & \text{si } \omega = b,\ c. \end{cases}$$

Entonces, X es una variable aleatoria, ya que,

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } x < 0, \\ \{a\}, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \Omega, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Mientras que la función $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por,

$$Y(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } \omega = b, \\ 1, & \text{si } \omega = a,\ c, \end{cases}$$

no es una variable aleatoria, ya que, $\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq y\} = \{b\} \notin \mathcal{A}$, si $0 \leq y < 1$. Note que si $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, \Omega\}$ es la $\sigma-$álgebra sobre Ω considerada, entonces Y es una variable aleatoria.

Notación: Por convención, las letras mayusculas $X, Y, Z, \ldots$ representan variables aletorias; mientras que las letras minusculas $x, y, z, \ldots$ denotan sus posibles valores.

Notas:

1) La condición que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$ pertenezca a $\mathcal{A}$ (sea un evento) para todo $x \in \mathbb{R}$ asegura que siempre se puede evaluar su probabilidad mediante la medida de probabilidad P sobre $(\Omega, \mathcal{A})$; es decir, se puede calcular $\Pr(X \leq x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Para esto, conviene escribir

$$\{X \leq x\} = \{X \in (-\infty, x]\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}\{(-\infty, x]\}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, y de esta forma

$$\Pr(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X^{-1}\{(-\infty, x]\}) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

En general, esta condición asegura que

$$\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A},$$

para cada subconjunto B (Borel-medible) de $\mathbb{R}$, de modo que

$$\Pr(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)) \ \forall\, B(\text{boreliano}) \subseteq \mathbb{R}$$

2) Cuando el espacio de probabilidad es discreto, la condición $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}\ \forall x \in \mathbb{R}$ se cumple automáticamente, ya que todos los subconjuntos de Ω son eventos en $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

3) La condición $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}\ \forall x \in \mathbb{R}$ nunca será un obstáculo importante, a menos que se intente construir funciones *exóticas* en espacios de probabilidad continuos. De modo que podemos adoptar la definición informal de una variable aleatoria, es decir, considerar que una variable aleatoria es cualquier función real valorada sobre los resultados de un experimento aleatorio.

4) En algunos experimentos, cada resultado en sí mismo es de interés primario. Cuando Ω es una colección contable de números reales, o un intervalo de los reales, entonces la función identidad, $X(\omega) = \omega$, es una variable aleatoria.

La definición de una variable aleatoria, induce automáticamente una nueva medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}$, la cual asigna una probabilidad a cada $B \in \mathcal{B}$, la $\sigma-$algebra de Borel de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Definición 1.2

Distribución de probabilidad: La **distribución de probabilidad** de una variable aleatoria X definida sobre un modelo de probabilidad (Ω, $\mathcal{A}$, P), se define como:

$$P_X(B) = P(\{X \in B\}) \; \forall \; B \in \mathcal{B},$$

donde para cada $B \in \mathcal{B}$, $\{X \in B\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ es la imagen inversa de B bajo X.

Nota: Por simplicida, $P(\{X \in B\})$ se escribe como $P(X \in B)$.

Ejemplo 1.5

Experimento: Lazar una moneda justa tres veces. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de caras obtenidas en los tres lanzamientos. Una enumeración completa de los valores de X para cada punto en el espacio muestral es

ω	(s,s,s)	(s,s,c)	(s,c,s)	(c,s,s)	(s,c,c)	(c,s,c)	(c,c,s)	(c,c,c)
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Es decir, $X : \Omega = \{c,s\}^3 \longrightarrow \mathcal{X} = \{0,1,2,3\}$ y es tal que,

$$\begin{aligned} P_X(\{x\}) &= P(X = x) \\ &= P(\{\omega \in \{c,s\}^3 : X(\omega) = x\}) \\ &= P(\{\omega\}) = \frac{1}{8} \quad \forall\, x \in \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Además, por la definición de P_X,

$$\begin{aligned} P_X(\{0,1\}) &= P(X \in \{0,1\}) \\ &= P(\{\omega \in \{c,s\}^3 : X(\omega) = 0 \text{ o } 1\}) \\ &= P(\{(s,s,s),(s,s,c),(s,c,s),(c,s,s)\}) = \frac{4}{8}; \\ P_X((-\infty,0]) &= P(X \in (-\infty,0]) \\ &= P(\{\omega \in \{c,s\}^3 : X(\omega) \in (-\infty,0]\}) \\ &= P(\{(s,s,s)\}) = \frac{1}{8}; \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Nota: En general, si Ω es discreto, entonces el recorrido $\mathcal{X}$ (o espacio muestral) de X también es discreto.

Teorema 1.1

Sea X una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$. La **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria X, definida como,

$$P_X(B) = P(\{X \in B\}) \ \forall \ B \in \mathcal{B},$$

es una medida de probabilidad sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$; es decir, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ es un **modelo de probabilidad** (inducido por la variable aleatoria X)

Demostración 1.1

Se deben verificar los tres axiomas de una medida de probabilidad.

A1) Es claro que $\forall\ B \in \mathcal{B}$, $P_X(B) = P(\{X \in B\}) \geq 0$

A2) $P_X(\mathbb{R}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{R}\}) = P(\Omega) = 1$

A3) Sea $B_1, B_2, \cdots$ una secuencia de eventos disjuntos en $\mathcal{B}$ (es decir $B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall\ i \neq j$.) Entonces,

$$\begin{aligned} P_X(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) &= P(\{X \in \cup_{i=1}^{\infty} B_i\}) \\ &= P(\cup_{i=1}^{\infty}\{X \in B_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\{X \in B_i\}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_X(B_i). \end{aligned}$$

Variables Aleatorias

Para cualquier variable aleatoria X, la evaluación de P_X puede restringirse (s.p.g.) a los intervalos:

$$\begin{aligned} X \in (a,b) &= a < X < b \\ X \in [a,b) &= a \leq X < b \\ X \in [a,b] &= a \leq X \leq b \\ X \in (a,b] &= a < X \leq b, \end{aligned}$$

donde $-\infty < a < b < \infty$; es decir, conocer P_X para estos intervalos, permite conocer P_X para cualquier $B \in \mathcal{B}$. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P_X((a,b]^c) &= 1 - P_X((a,b]) = 1 - P(a < X \leq b), \\ P_X((a,b] \cap (c,d]) &= P_X((c,b]) = P(c < X \leq b), \quad \text{si } a < c < b < d. \end{aligned}$$

Variables Aleatorias

En realidad, basta conocer P_X para una sola clase de estos intervalos; por ejemplo para los intervalos de la forma $(a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Esto se debe a que esta clase genera la σ-algebra de Borel $\mathcal{B}$.

En otras palabras, la probabilidad de eventos de la forma $\{a < X \leq b\}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, determina completamente y de forma única la probabilidad de eventos de la forma $\{a < X < b\}$, $\{a \leq X \leq b\}$ y $\{a \leq X < b\}$. Para demostrar esto, basta recordar que

$$
\begin{aligned}
\{a < X < b\} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{a < X \leq b - \frac{1}{n}\right\} \\
\{a \leq X \leq b\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{a - \frac{1}{n} < X \leq b\right\} \\
\{a \leq X < b\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{a - \frac{1}{n} < X \leq b - \frac{1}{m}\right\}
\end{aligned}
$$

Variables Aleatorias

En general, cada conjunto $B \in \mathcal{B}$ puede generarse a partir de uniones y/o intersecciones de secuencias (contables) de intervalos de la forma $(a_n, b_n]$. Por otro lado, cabe observar que

$$\begin{aligned} \{a < X \leq b\} &= \{X \leq b\} - \{X \leq a\} \\ \Longrightarrow P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a). \end{aligned}$$

Es decir, la probabilidad de $\{a < X \leq b\}$ puede determinarse a partir de la probabilidad de eventos de la forma

$$\{X \leq x\}, \quad -\infty < x < \infty$$

De este modo, para describir la distribución de probabilidad de una variable aleatoria X, basta conocer la función $F_X(x) = P(X \leq x) = P_X((-\infty, x])$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

Con cada variable aleatoria X, asociamos, entonces, una función llamada función de distribución acumulativa de X.

Definición 1.3

Función de distribución acumulada La función de distribución acumulada (o acumulativa) o fda de una variable aleatoria X, denotada por $F_X(x)$, se define por

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x), \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.6

Considere el experimento de lanzar tres monedas justas y sea $X =$ número de caras observadas, del ejemplo anterior. La fda de X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < x < 0 \\ \frac{1}{8} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

La función escalera $F_X(x)$ está graficada en la Figura 1. Hay varios puntos a tener en cuenta en la Figura 1. F_X se define para todos los valores de $x \in \mathbb{R}$, no solo aquellos en $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$. Así, por ejemplo,

$$F_X(2.5) = P_X(X \leq 2.5) = P_X(X = 0, 1, \text{o } 2) = \frac{7}{8}.$$

Note que F_X tiene saltos en los valores de $x \in \mathcal{X}$ y el tamaño del salto en x es igual a $P_X(X = x)$.

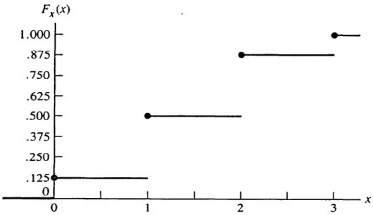

Figura 1: Fda Ejemplo 1.6. (Fuente: **?**)

Variables Aleatorias

Teorema 1.2

Sea X una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La fda F_X satisface las siguientes propiedades,

- **F1** Si $x \leq y$, entonces $F_X(x) \leq F_X(y)$ $\quad (F_X$ es no-decreciente)
- **F2** Cuando $x \to \infty$, entonces $F_X(x) \to 1$, y cuando $x \to -\infty, F_X(x) \to 0 \quad (0 \leq F_X(x) \leq 1 \; \forall \, x \in \mathbb{R})$
- **F3** Cuando $h \downarrow 0, F_X(x+h) \to F_X(x)$ $\quad (F_X$ es continua por la derecha)

Demostración 1.2

- **F1** Si $x \leq y$, defina $A = \{\omega : X(\omega) \leq x\}$ y $B = \{\omega : X(\omega) \leq y\}$. Luego se tiene que $A \subseteq B$, así $P_X(X \leq x) = P(A) \leq P(B) = P_X(X \leq y)$, y el resultado sigue. Es decir, $F_X(x)$ es una función no decreciente de x.

F2 Sea $A_n = \{\omega : X(\omega) \leq n\}$, entonces $\{A_n\} \uparrow \Omega$; o sea $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} F_X(x) &= \lim_{n\to\infty} F_X(n) \\
&= \lim_{n\to\infty} P_X(A_n) \\
&= P_X(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \\
&= P(\Omega) = 1.
\end{aligned}$$

de donde sigue la primera afirmación. Similarmente, con $B_n = \{\omega : X(\omega) \leq -n\}$ tenemos $\{B_n\} \downarrow \varnothing$, de donde sigue la segunda afirmación.

F3 Sea $A_h = \{\omega : x < X(\omega) \leq x + h\}$. Luego $A_h \to \varnothing$ cuando $h \downarrow 0$. Ya que $P_X(A_h) = F_X(x+h) - F_X(x)$, el resultado sigue. Es decir, $F_X(x)$ es continua por la derecha.

Nota 1.1

También se cumple la implicación inversa. En efecto, puede demostrarse que cualquier función $F(x)$ que satisfaga las propiedades F1, F2 y F3 del teorema anterior, es la fda de alguna variable aleatoria X. O sea el teorema puede establecerse como: La función $F(x)$ es una fda si y sólo si se cumplen las condiciones F1, F2, F3.

Corolario 1.1

Sea X una variable aleatoria definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, F_X su fda y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$; entonces,

1 $F_X(x^-) = \text{lím}_{h \to 0^+} F_X(x-h) = P_X(X < x)$.

2 $P_X(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$.

3 $P_X(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$.

4 $P_X(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.