Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Enero de 2017

MAT1620 ⋆ Cálculo II
Solución Interrogación 1

1. Estudie la convergencia de las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt[3]{8-x^3}}dx$ *b*) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{(|x|+1)x}dx$

   Solución:

   a) Sea $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{8-x^3}}$ y $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2-x}}$. Luego

   $$\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+2x+x^2}} = \frac{4}{12}.$$

   Como el límite anterior es positivo, del criterio de comparación al límite se tiene que la convergencia de la integral del apartado *a*) es equivalente a la convergencia de la integral

   $$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}} = \int_0^2 \frac{du}{\sqrt[3]{u}}$$

   la cual es convergente pues $p = 1/3 < 1$.

   b) Estudiemos la convergencia de la integral impropia

   $$\int_1^\infty \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{(|x|+1)x}dx.$$

   notamos que

   $$\frac{-1}{(x+1)x} \leq f(x) \leq \frac{1}{(x+1)x}.$$

   Puesto que

   $$\pm\int_1^\infty \frac{1}{(x+1)x}dx$$

   son integrales convergentes, se deduce entonces que la integral

   $$\int_0^\infty \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{(|x|+1)x}dx$$

   es convergente.

2. Encuentre todos los valores de $p \in \mathbb{R}^+$ para los cuales la integral impropia

$$\int_1^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^p} dx$$

es convergente.

Solución:

Estudiemo las integral

$$I(p) := \int_1^{\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^p} dx.$$

$I(p)$ es equivalente a la de la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

pues

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1-e^{-x}}{x^p}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to\infty} 1+e^{-x} = 1.$$

En consecuencia, $I(p)$ converge si y sólo si $p > 1$.

3. *a*) Pruebe que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n2^n}{n^2 + 3^{n-1}}$ es divergente.

   b) Sea

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}$$

   demuestre que $\{a_n\}$ es una sucesión convergente.

   Ayuda:*Pruebe que es creciente y acotada por 1.*

Solución:

a) Por la condición necesaria

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n2^n}{n^2 + 3^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + n\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{n^2}{3^n} + 3^{-1}} = 3 \neq 0$$

por lo tanto la serie diverge.

b) Tenemos que

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Además $n \leq n+k$, luego $\dfrac{1}{n+k} \leq \dfrac{1}{n}$. De esta forma

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

Ahora,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)(n+3)} > 0$$

es decir, $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada, por lo tanto converge.

4. *a*) Pruebe que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

converge.

b) Determine si las series que se indican convergen o divergen

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

Solución:

a) Comparando con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{1}{2}$$

Luego como la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge ($p>1$), entonces la serie pedida converge.

b) 1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 e^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}e^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-n}$$

Luego la serie converge, pues es la suma de tres series convergentes. La primera es una serie geométrica con razón $r=\frac{1}{e}<1$ y las dos restantes por comparación con $\sum\frac{1}{n^2}$.

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

Comparando con $\sum\frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$$

luego como la serie $\sum\frac{1}{n}$ diverge, entonces la serie pedida también diverge.

5. *a*) Determine el radio y el intervalo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^{2017}9^n}$

b) Encuentre el desarrollo en series de potencias de $f(x)=\dfrac{3x}{1+x^3}$ e indique su radio de convergencia.

Solución:

a) Para encontrar el radio de convergencia ocuparemos el criterio de cuociente.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)^{2017}9^{n+1}}}{\dfrac{(x-1)^n}{n^{2017}9^n}}\right| &= \lim_{n\to\infty}|x-1|\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2017}\left(\frac{1}{9}\right)\\
&= |x-1|\left(\frac{1}{9}\right)
\end{aligned}$$

Luego la serie converge absolutamente si $|x-1|<9$ y diverge si $|x-1|>9$, es decir, el radio de convergencia es 9. Ahora para determinar el intervalo de convergencia necesitamos analizar los bordes.

Si $x=10$ tenemos la serie

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(10-1)^n}{n^{2017}9^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n^{2017}9^n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2017}}
\end{aligned}$$

que sabemos converge.

Si $x=-8$ tenemos la serie

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-8-1)^n}{n^{2017}9^n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-9)^n}{n^{2017}9^n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2017}}
\end{aligned}$$

que converge absolutamente, pues

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^{2017}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2017}}$$

Por lo tanto el intervalo de convergencia es $[-8,9]$.

b) Primero reescribiremos la función como

$$f(x)=3x\frac{1}{1-(-x^3)}$$

Luego usando la serie geométrica, podemos decir que

$$f(x) = 3x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n$$

para $|-x^3|<1$. Reescribiendo queda

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}3(-1)^n x^{3n+1}$$

con $|x|<1$.

6. Dada

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$$

a) Encuentre la serie de Maclaurin de $f(x)$ y su radio de convergencia.

b) Exprese $f'(x)$ como serie de potencias.

c) Exprese $\int f(x)dx$ como serie de potencias.

Solución:

a) Sabemos que

$$\operatorname{sen}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

con radio de convergencia ∞, luego

$$\operatorname{sen}(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

con radio de convergencia ∞.

b) Usando la expresión de la parte *a*) obtenemos que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (4n+2) \frac{x^{4n+1}}{(2n+1)!}$$

con radio de convergencia ∞.

c) Usando la expresión de la parte *a*) obtenemos que

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(2n+1)!(4n+3)}$$

con radio de convergencia ∞.