PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

INTERROGACIÓN 1
MAT1620 $\star$ CÁLCULO II

La siguiente evaluación consta de 8 preguntas. Dispone de 120 minutos para responderla.

1. Analice la convergencia de la siguiente serie.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}.$$
2. Analice la convergencia de la siguiente serie.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$
3. Analice la convergencia de la siguiente serie.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+4}.$$
4. Considere una sucesión definida cuyo termino general a_n satisface:
$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}, \qquad n \geq 1.$$
   a) Pruebe que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente.
   b) Suponga que $0 \leq a_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $\{a_n\}$ es convergente y calcule el valor al cual converge.

5. Considere la representación decimal de un número,

$$0, d_1 d_2 d_3 ... = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + ...$$

donde d_i es alguno de los digitos $0, 1, 2, ..,9$. Pruebe que la serie anterior es siempre convergente.

6. Analice la convergencia de la siguiente integral.

$$\int_1^3 \frac{x+1}{\sqrt{x^3-1}}\, dx.$$

7. Analice la convergencia de la siguiente integral. En caso que sea convergente, calcule su respectivo valor.

$$\int_0^\infty x e^{-x^2} dx.$$

8. Determine la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Justifique sus afirmaciones.

   a) La serie $\sum_{n\geq 1} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$, es divergente.

   b) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{5^k} = \frac{15}{2}$.

   c) Si $f(x) \leq g(x)$ y $\int_1^\infty g(x)\, dx$ es divergente entonces $\int_1^\infty f(x)\, dx$ tambien lo es.

UNA SOLUCIÓN.

1. Para analizar la serie dada, comenzamos notando que la función

$$f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2},$$

es positiva y decreciente en $[2, \infty)$ ya que $h(x) = x(ln(x))^2$ es positiva y creciente. Luego por el Criterio de la integral, la convergencia de la serie depende de la convergencia de la integral,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^2},$$

para esta última integral es posible calcular su valor, ya que:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^2} = \lim_{x\to\infty} \int_2^c \frac{dx}{x(\ln(x))^2} = \lim_{c\to\infty} \frac{-1}{\ln(c)} + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{1}{\ln(2)}.$$

Se concluye que la integral y por lo tanto la serie dada es convergente.
Asignación de puntaje:

- Asignar 4 puntos por la correcta utilización del criterio (el que se presenta en esta solución u otro).
- Asignar 2 puntos por concluir correctamente que la serie es convergente.

2. Para la esta segunda serie consideraremos la serie de termino general $b_n = \frac{1}{n}$, la cual es divergente. Luego utilizando el criterio de comparación al límite, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(1 + 1/n)}{1/n} = 1,$$

por lo tanto ambas series tienen el mismo tipo de comportamiento. Se concluye que la serie dada es divergente.
Asignación de puntaje:

- Asignar 4 puntos por la correcta utilización del criterio de comparación al limite.(u otro).
- Asignar 2 puntos por concluir correctamente que la serie es divergente.

3. Para analizar la serie alternante comenzamos notando que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3 + 4} = 0$$

y por otro lado la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x^3+4},$$

satisface que para $x >> 0$

$$f'(x) = \frac{-3x^4+8x}{(x^3+4)^2} < 0,$$

y por lo tanto es decreciente la sucesión $a_n = \dfrac{n^2}{n^3+4}$.
Por el Criterio de Leibnitz, para series alternantes, se tiene que la serie dada es convergente.

Asignación de puntaje:

- Asignar 4 puntos por la correcta utilización del criterio para series alternates. 2 puntos por el decrecimiento y 2 puntos por la convergencia a 0.
- Asignar 2 puntos por concluir correctamente que la serie es convergente.

4. *a*) Probaremos por inducción que la sucesión dada es decreciente.
El caso base $n = 1$,

$$a_1 > a_2,$$

el cual se verifica ya que

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \frac{1}{2}.$$

Consideremos por hipotesis de inducción que

$$a_k > a_{k+1},$$

y probemos que

$$a_{k+1} > a_{k+2}.$$

Para ello comenzando desde la Hipotesis de inducción,

$$\begin{aligned} a_k &\geq \frac{1}{3-a_k} \\ -a_k &\leq \frac{-1}{3-a_k} \\ 3-a_k &\leq \frac{-1}{3-a_k}+3 \\ \frac{1}{3-a_k} &\geq \frac{3-a_k}{-1+3(3-a_k)} \\ a_{k+1} &\geq a_{k+2} \end{aligned}$$

b) Por otro lado si asumimos que la sucesión es acotada y utilizamos la parte a), el Teorema de las sucesiones monótonas nos asegura que la sucesión es convergente. En particular

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L,$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3-a_n},$$

es decir

$$L = \frac{1}{3-L},$$

de donde $L = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 3 puntos por la correcta utilización del principio de inducción. 1 punto por el caso base y 2 puntos por el paso inductivo.
- b) Asignar 1.5 puntos por concluir que la sucesión es convergente.
- b) Asignar 1.5 puntos por calcular de manera correcta el limite pedido.

5. En primer lugar notamos que

$$0, d_1 d_2 d_3 ... = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{10^i}.$$

Por otro lado para todo $i = 1, 2, ...$ se tiene que $d_i \leq 10$. Luego se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i}{10^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10}{10^i},$$

y esta última es una serie convergente, en virtud del Criterio de Comparación.
Asignación de puntaje:

- Asignar 4 puntos por la correcta utilización del criterio de comparación para analizar la serie dada (pueden utilizar otro).
- Asignar 2 puntos por concluir correctamente que la serie es convergente.

6. Consideremos la función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, se tiene que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\dfrac{x+1}{\sqrt{x^3-1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Por lo tanto la integral dad y la integral $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ tienen el mismo comportamiento. Pero esta última integral es convergente, por el p-criterio.

Asignación de puntaje:

- Asignar 1 punto por identificar de manera correcta el tipo de integral impropia
- Asignar 3 puntos por la correcta utilización de un criterio para analizar la convergencia (el que se presenta en esta solución u otro).
- Asignar 2 puntos por concluir correctamente que la integral es convergente.

7. Trateremos de calcular el valor de la integral dada. Para ello, haciendo uso de la difinición, se tiene que

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^c xe^{-x^2}\,dx$$

haciendo la sustitución $u = -x^2$ se tiene que

$$\lim_{c\to\infty} \int_0^c xe^{-x^2}\,dx = \lim_{c\to\infty} \frac{-1}{2}\left(e^{-c^2/2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto la integral es convergente y su valor es el calculado.
Asignación de puntaje:

- Asignar 1.5 puntos por la correcta utilización de la definición de integral impropia para calcular el valor de esta.
- Asignar 3 puntos por calcular de manera correcta el valor pedido.
- Asignar 1.5 punto por concluir que la integral dada es convergente.

8. *a*) La primera afirmación es verdadera, ya que la serie dada es tal que

$$\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0.$$

b) La segunda afirmación es falsa ya que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{5^k} = 3\sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{5^k} = 3\frac{3/5 - \frac{3^n}{5^n}}{1 - \frac{3}{5}},$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{5^k} = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \frac{3/5 - \frac{3^n}{5^n}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{9}{2}.$$

c) La afirmación es falsa, ya que por ejemplo $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$ son un contraejemplo a la afirmación.

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por cada una de las correctas justificaciones de las afirmaciones dadas.