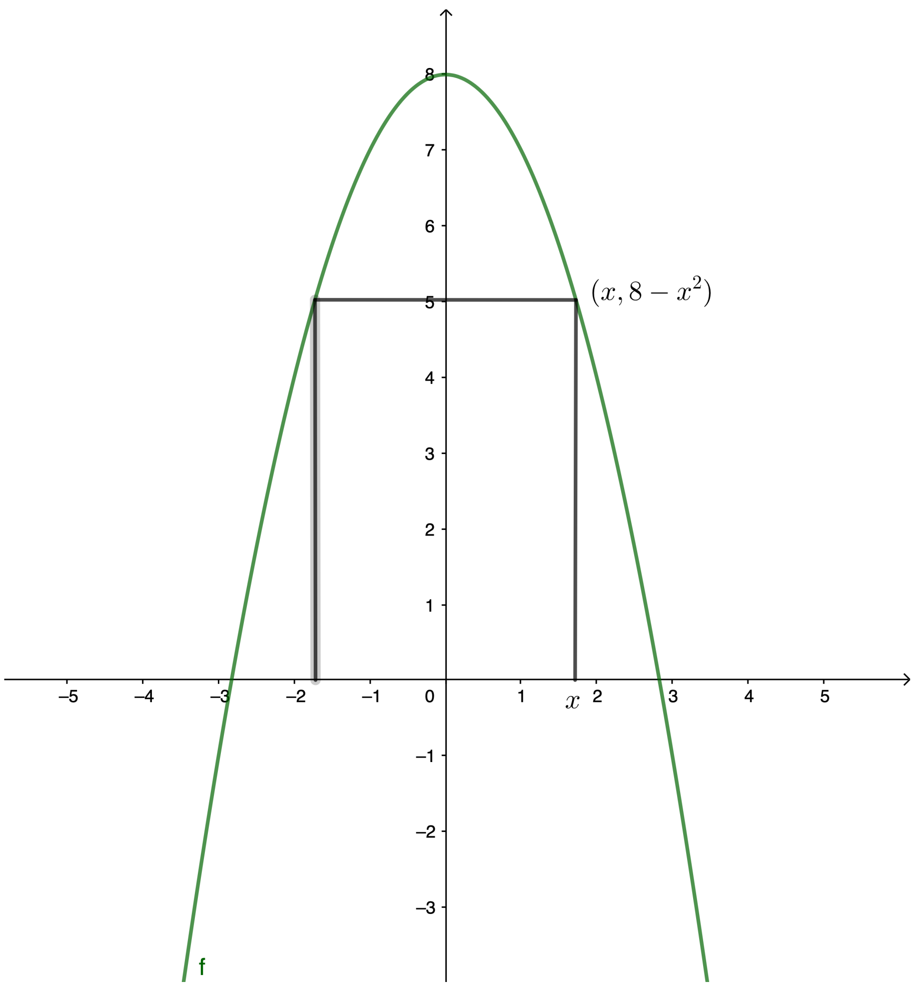
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2021

EXAMEN - MAT1610

1. ¿Cualés son las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene su base sobre el eje x y cuyos otros dos vértices pertenecen a la parábola $y = 8 - x^2$, de forma que quede encerrado por el eje X y la parabóla?

   Solución:

   Observe que la parábola descrita es simétrica respecto al eje Y por lo que si un vértice es (a, b) el otro debe ser $(-a, b)$ tal como muestra la figura.



   por lo que el área, en función de x, está dada por:

$$A(x) = 2x(8 - x^2) \text{ con } x \in (0, \sqrt{8})$$

Para buscar el máximo observamos que

$$A'(x) = 16 - 6x^2$$

por lo tanto tenemos que $A'(x) = 0$ si y sólo si $x = \sqrt{\frac{8}{3}}$, además en torno a $x = \sqrt{\frac{8}{3}}$ el signo de $A'(x)$ cambia de + a - por lo que en $x = \sqrt{\frac{8}{3}}$ se alcanza el máximo de la función.

De lo anterior tenemos que las dimensiones del rectángulo de área máxima son $2\sqrt{\frac{8}{3}}$ y $\frac{16}{3}$.

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por plantear la función de área.
- (1 punto) por justificar (puede ser con dibujo) la función de área.
- (1 punto) por determinar la derivada de la función área.
- (1 punto) por determinar puntos críticos de la función.
- (1 punto) por determinar que el punto crítico corresponde al punto donde se alcanza el máximo.
- (1 punto) por deetrminar las dimensiones del rectángulo.

2. Sean $a > 0$, $b > 0$ y f la función definida por:

$$f(x) = \int_a^b t^x dt.$$

Calcule $f(-1)$ y demuestre que f es continua en $x = -1$.

Solución:

Observe que de la definición tenemos que

$$f(-1) = \int_a^b t{-1}dt = \ln(x)|_a^b = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Por otra parte tenemos que si $x \neq -1$,

$$\int_a^b t^x dt = \left(\frac{t^{x+1}}{x+1}\right)|_a^b = \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1}$$

por lo que

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1}.$$

Observamos que el último de estos límites es de la forma indeterminada $0/0$ por lo que podemos aplicar L'Hôpital obteniendo que

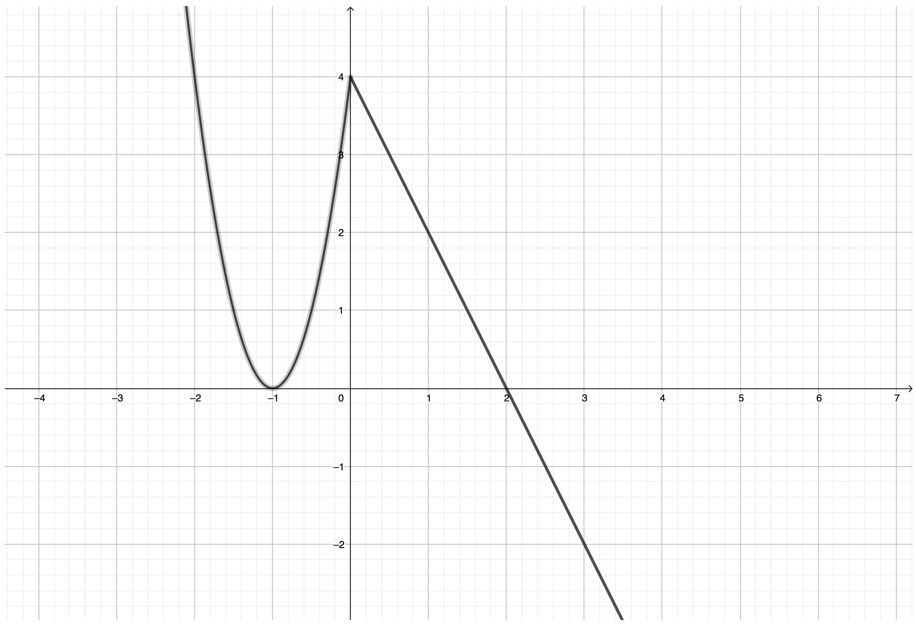
$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1} f(x) &= \lim_{x \to -1} \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{\ln(b)b^{x+1} - \ln(a)a^{x+1}}{1} \\ &= \ln(b) - \ln(a) \\ &= \ln\left(\frac{b}{a}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$ tenemos que f es continua en $x = -1$.

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por determinar $f(-1)$.
- (1 punto) por evidenciar que que debe mostrar que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = f(-1)$.
- (1 punto) por determinar la fórmula de $f(x)$ para $x \neq -1$
- (1 punto) por justificar el uso L'Hôpital.
- (1 punto) por determinar el valor del límite.
- (1 punto) por concluir.

3. Sea f la función cuyo gráfico se muestra a continuación



y G la función definida por

$$G(x) = \int_1^{x^2+1} f(t)dt$$

a) Calcule $G(1)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de G.

Solución:

Del gráfico se puede ver que $G(1) = \displaystyle\int_1^2 f(t)dt = 1$.

Del TFC tenemos que $G'(x) = 2xf(x^2+1)$, por lo tanto, para determinar los intervalos de monotonía de G debemos estudiar los signos de $2xf(x^2+1)$.

Observe que $G'(x) = 2xf(x^2+1) = 0$ si y solo si $x = 0$, $x = 1$, o $x = -1$. Al realizar una tabla de signos obtenemos por lo tanto la función G es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$, es

$G'(x)$	$+$	-	$+$	-
$f(x^2+1)$	-	$+$	$+$	-
$2x$	-	-	$+$	$+$
intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$

decreciente en el intervalo $(-1, 0)$ y en el intervalo $(1, \infty)$.

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por determinar $G(1)$.
- (2 puntos) por determinar $G'(x)$.
- (1 punto) Por determinar valores donde $G'(x) = 0$.
- (1 punto) por estudio de signo.
- (1 punto) por concluir.

4. Determine:

a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$

Solución:

Al realizar fracciones parciales obtenemos que

$$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1}$$

al integrar cada una de estas funciones tenemos

$$\int \frac{1}{x-1}dx = \ln(|x-1|) + C$$

y que haciendo la sustitución $u = x^2 + 1$, con $du = 2x\,dx$ obtenemos que

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln(|u|) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

obteniendo que

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx = \ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por determinar la descomposición en fracciones parciales.
- (1 punto) por el cálculo de la primera integral
- (1 punto) por cálculo de la segunda integral

b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$

Solución:

Haciendo la sustitución trigonométrica $x = \tan(\theta)$, obtenemos que $dx = \sec^2(\theta)d\theta$ y la integral queda

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sec^3(\theta)d\theta.$$

Para resolver esta última integral realizamos integración por partes con $u = \sec(\theta)$ y $dv = \sec^2(\theta)d\theta$ obteniendo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sec^3(\theta)d\theta &= \sec(\theta)\tan(\theta)\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \sec(\theta)\tan^2(\theta)d\theta \\
&= \sqrt{2} - \int_0^{\pi/4} \sec(\theta)(\sec^2(\theta)-1)d\theta \\
&= \sqrt{2} - \int_0^{\pi/4} \sec^3(\theta)d\theta + \int_0^{\pi/4} \sec(\theta)d\theta \\
&= \sqrt{2} - \int_0^{\pi/4} \sec^3(\theta)d\theta + \ln(\sqrt{2}+1).
\end{aligned}$$

Despejando tenemos que

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sec^3(\theta)d\theta = \frac{\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)}{2}$$

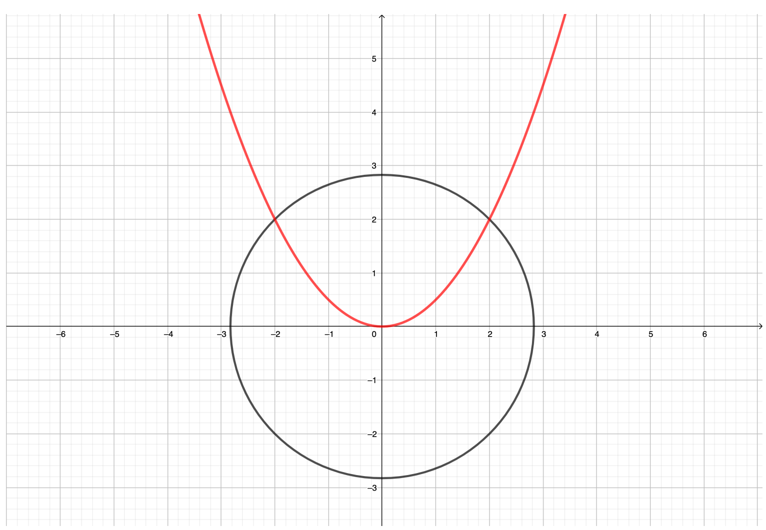
Distribución de puntaje:

- (1 punto) por realizar correctamente al sutitución trigonométrica y plantear correctamente la integral equivalente.
- (1 punto) por la integración por partes para integrar $\sec^3(\theta)$.
- (1 punto) por resultado final.

5. a) La parabóla $y = \dfrac{x^2}{2}$ divide al disco $x^2 + y^2 \leq 8$ en dos partes. Encuentre el área de la región que está sobre la parábola y bajo la circunferencia .

Solución:

Para determinar la intersección de las curvas resolvemos la ecuación $x^2 + \dfrac{x^4}{4} = 8$ obteniendo como solución $x = 2$ y $x = -2$, tal como muestra la figura



Por la simetría de la región tenemos que el área encerrada que está sobre la parábola y bajo la circunferencia se puede calcular como

$$2\int_0^2 \left(\sqrt{8-x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Para resolver $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{8-x^2}dx$ usamos la sustitución $x = \sqrt{8}\,\mathrm{sen}(\theta)$ obteniendo que

$$\int_0^2 \sqrt{8-x^2}dx = 8\int_0^{\pi/4} \cos^2(\theta)d\theta = 4\int_0^{\pi/4} (1+\cos(2\theta))d\theta = 4\left(\theta + \frac{\mathrm{sen}(2\theta)}{2}\right)_0^{\pi/4} = \pi+2.$$

Por otra parte

$$\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx = \left(\frac{x^3}{6}\right)_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Por lo tanto el área de la región descrita es $-\dfrac{8}{3} + 2\pi + 4$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por determinar correctamente los puntos de intersección.
- (1 punto) por plantear correctamente la integral que determina el área.
- (1 punto) por el resultado final.

b) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{arcsen}(x)dx$.

Solución:

Integrando por partes con $u = \mathrm{arcsen}(x)$ y $dv = dx$, obtenemos que

$$\int_0^1 \mathrm{arcsen}(x)dx = x\mathrm{arcsen}(x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$$

Para resolver esta última integral hacemos la sustitución $u = 1-x^2$ obteniendo que

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int_1^0 \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\sqrt{u}|_1^0 = 1,$$

luego

$$\int_0^1 \mathrm{arcsen}(x)dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por plantear correctamente la integración por partes.
- (1 punto) por resolver correctamente la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
- (1 punto) por el resultado final