

## EYP2106 Modelos Probabilísticos

### Solución de la Interrogación 2

Profesor	Fernando Quintana
Ayudante	Rubén Soza
Semestre	2019/1

1. Tenemos

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} c(x_1^2 + x_2^2) & \text{si } 0 < x_1 < 1 \text{ y } 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

que tiene claras simetrías en sus argumentos.

(a) Imponiendo la condición  $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 dx_1 = 1$  tenemos

$$\begin{aligned} 1 &= c \int_0^1 \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2) dx_2 dx_1 = c \left[ \int_0^1 x_1^2 \int_0^1 1 dx_2 dx_1 + \int_0^1 x_2^2 \int_0^1 1 dx_1 dx_2 \right] \\ &= c \left[ \int_0^1 x_1^2 dx_1 + \int_0^1 x_2^2 dx_2 \right] = \frac{2c}{3}, \end{aligned}$$

de donde  $c = \frac{3}{2}$ .

(b) Tenemos que  $f_{X_1}(x_1) = 0$  si  $x_1 \notin (0, 1)$ . Si  $x_1 \in (0, 1)$ :

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 = \frac{3}{2} \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2) dx_2 = \frac{3}{2} \left( x_1^2 + \frac{1}{3} \right).$$

Análogamente,  $f_{X_2}(x_2) = 0$  si  $x_2 \notin (0, 1)$  y si  $x_2 \in (0, 1)$ :

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{3}{2} \left( x_2^2 + \frac{1}{3} \right),$$

y claramente  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$  y  $f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$  no coinciden, por lo que  $X_1$  y  $X_2$  no son independientes.

(c) Tenemos

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2) &= \frac{3}{2} \int_0^1 \int_{x_1}^1 (x_1^2 + x_2^2) dx_2 dx_1 = \frac{3}{2} \int_0^1 \left( x_1^2(1 - x_1) + \frac{1 - x_1^3}{3} \right) dx_1 \\ &= \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Este resultado se puede intuir por la simetría del problema.

2.  $X_i$  es discreta, con soporte  $D_{X_i}$  para  $i = 1, \dots, n$ .

(a) Sabemos que variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  son independientes ssi

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i), \quad \text{para todo } B_1, \dots, B_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R}).$$

Luego, si  $X_1, \dots, X_n$  son independientes, el resultado es inmediato con  $B_i = \{x_i\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . A la inversa, si  $p_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i)$ , para todo  $(x_1, \dots, x_n) \in D_{X_1} \times \dots \times D_{X_n}$ , sean  $B_1, \dots, B_n \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$  cualesquiera. Entonces

$$\begin{aligned} P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) &= P(X_1 \in B_1 \cap D_{X_1}, \dots, X_n \in B_n \cap D_{X_n}) \\ &= \sum_{x_1 \in B_1 \cap D_{X_1}} \dots \sum_{x_n \in B_n \cap D_{X_n}} P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= \sum_{x_1 \in B_1 \cap D_{X_1}} \dots \sum_{x_n \in B_n \cap D_{X_n}} \prod_{i=1}^n p_{X_i}(x_i) \quad (\text{por hipótesis}) \\ &= \prod_{i=1}^n \sum_{x_i \in B_i \cap D_{X_i}} p_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i), \end{aligned}$$

como se quería probar.

- (b) En este caso, todos los números  $a, b, c, d$  deben ser probabilidades, es decir, deben ser números en  $[0, 1]$ , y además,  $a + b + c + d = 1$ . Calculando las distribuciones marginales tenemos

	$x_2$		
$x_1$	0	1	$p_{X_1}(x_1)$
0	$a$	$b$	$a + b$
1	$c$	$d$	$c + d$
$p_{X_2}(x_2)$	$a + c$	$b + d$	1

Luego, para que se cumpla independencia debemos tener que

$$a = (a + b)(a + c), \quad b = (a + b)(b + d), \quad c = (c + d)(a + c), \quad y \quad d = (c + d)(b + d).$$

- (c) En este caso tenemos:

$$a = \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{8}{35}, \quad b = \frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}, \quad c = \frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{35}, \quad d = \frac{3}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{35},$$

de modo  $a + c = \frac{2}{5}$ ,  $a + b = \frac{2}{5}$ , y claramente  $(a + c)(a + b) \neq a$  de modo que  $X_1$  y  $X_2$  no son independientes, pero como  $p_{X_1}(0) = p_{X_2}(0)$  y similarmente,  $p_{X_1}(1) = p_{X_2}(1)$ , ellas sí son igualmente distribuidas.

3. Tenemos  $X_1, \dots, X_n$  independientes, con  $X_i \sim \text{Weibull}(\alpha, \lambda_i)$  para  $i = 1, \dots, n$ .

- (a) El tiempo hasta que la primera máquina se averíe es  $\min(X_1, \dots, X_n)$ . Denotando por  $Y$  dicha variable tenemos que para  $y > 0$ :

$$P(Y > y) = P(X_1 > y, \dots, X_n > y) = \prod_{i=1}^n P(X_i > y) = \prod_{i=1}^n (1 - F_{X_i}(y)).$$

Como para  $y > 0$ ,  $F_{X_i}(y) = \int_0^y f_{X_i}(x) dx = 1 - \exp(-\lambda_i x_i^\alpha)$  tenemos que

$$P(Y > y) = \prod_{i=1}^n \exp(-\lambda_i y^\alpha) = \exp\left(-\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i\right\} y^\alpha\right),$$

de modo que  $Y \sim \text{Weibull}(\alpha, \lambda_+)$ , con  $\lambda_+ = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

(b) Puesto que  $F_Y(0) = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_0^\infty (1 - F_Y(y)) dy = \int_0^\infty \exp(-\lambda_+ y^\alpha) dy \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1} \exp(-\lambda_+ u) du \quad (\text{haciendo } u = y^\alpha) \\ &= \frac{\Gamma(1/\alpha)}{\alpha \lambda_+^{1/\alpha}} = \frac{\Gamma(1 + 1/\alpha)}{\lambda_+^{1/\alpha}} \end{aligned}$$

4. Tenemos que  $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = I_{(0,1)}(x_1)I_{(0,1)}(x_2)$ .

(a) Consideremos  $(Y_1, Y_2) = g(X_1, X_2) = (X_1 - X_2, X_2)$ , de modo que  $(X_1, X_2) = g^{-1}(Y_1, Y_2) = (Y_1 + Y_2, Y_2)$ , y claramente la matriz Jacobiana de  $g^{-1}$  tiene determinante 1, de modo que

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = I_{(0,1)}(y_1 + y_2)I_{(0,1)}(y_2),$$

Como nos interesa  $f_{Y_1}(y_1)$ , calculamos la densidad marginal, notando que el soporte de  $Y_1$  es  $(-1, 1)$ . Distinguiamos 2 casos:

- (i) si  $-1 < y_1 < 0$  entonces  $y_1 + y_2 \in (0, 1)$  e  $y_2 \in (0, 1)$  implican que  $-y_1 < y_2 < 1$ , de modo que

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-y_1}^1 1 dy_2 = 1 + y_1.$$

- (ii) Si  $0 \leq y_1 < 1$  entonces  $y_1 + y_2 \in (0, 1)$  e  $y_2 \in (0, 1)$  implican que  $0 < y_2 < 1 - y_1$ , de modo que

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^{1-y_1} 1 dy_2 = 1 - y_1.$$

En resumen,

$$f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} 1 + y_1 & \text{si } -1 < y_1 < 0 \\ 1 - y_1 & \text{si } 0 \leq y_1 < 1 \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

que corresponde a una densidad de tipo triangular.

(b) (i) Por definición,  $E(Y_1) = \int_{-\infty}^\infty y f_{Y_1}(y_1) dy_1$  que en este caso resulta ser 0 porque  $f_{Y_1}$  es simétrica en torno a 0 y además tiene soporte acotado (de modo que  $E(Y_1)$  existe).

(ii) Se tiene  $E(Y_1) = E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = 0$  porque  $X_1$  y  $X_2$  son idénticamente distribuidas (por lo que tienen la misma esperanza, y esta esperanza existe).