Sol. Ayudantía 1

1. a) Definimos el conjunto potencia como

$$P(S) := \{T : T \subseteq S\}$$

luego como $|P(S)|$ es la cantidad de subconjuntos de S se tiene $|P(S)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, aplicando el teo. del Binomio

$$\left((a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right)$$

Se tiene

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = |P(S)|$$

$$\therefore \quad |P(S)| = 2^n$$

b) Una familia de subconjuntos de X, representada por Σ forman una σ-álgebra si

i) $\emptyset \in \Sigma$

ii) si $E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma$

iii) si $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Sigma$

i) $\emptyset \subseteq S \Rightarrow \emptyset \in P(S)$

ii) si $E \in P(S) \Rightarrow E \subseteq S \Rightarrow E^c \subseteq S \Rightarrow E^c \in P(S)$

iii) si $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in P(S) \Rightarrow \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq S \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq S$

$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in P(S)$ $\quad \therefore P(S)$ es σ-álgebra

c) Sean B_1 y B_2 dos σ-álgebras y $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$

i) Como $\emptyset \in \mathcal{B}_1$ y $\emptyset \in \mathcal{B}_2$ por ser σ-álgebras

$\emptyset \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$

ii) Si $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A \in \mathcal{B}_1$ y $A \in \mathcal{B}_2$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{B}_1$ y $A^c \in \mathcal{B}_2$

$\Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$

iii) Si $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B} \Rightarrow \{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}_1$ y $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}_2$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{B}_1$ y $\bigcup_{i \in \mathbb{N}}^{\infty} E_i \in \mathcal{B}_2$

$\Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i \in \mathcal{B}$

$\therefore$ Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ son σ-álgebras entonces $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ también es σ-álgebra.

2. a) $S = A \cup A^c$ y $A \cap A^c = \emptyset$

$\Rightarrow \underbrace{P(S)}_{1} = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

b) $P(\emptyset) = 1 - P(\emptyset^c) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$

c) Como $A \subseteq B$, $B = A \cup (B - A)$ y $A \cap (B - A) = \emptyset$

$\Rightarrow P(B) = P(A) + \underbrace{P(B-A)}_{\geq 0} \Rightarrow P(B) \geq P(A)$ //

d) $A \subseteq S \Rightarrow P(A) \leq P(S) = P(A) \leq 1$ //

e) $A \cup B = A - B \cup B - A \cup A \cap B \Rightarrow P(A \cup B) = P(A-B) + P(B-A) + P(A \cap B)$

$P(A) = P(A-B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$ lo mismo con B.

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) + P(A \cap B)$ //

3. Primero tenemos que

$$p_0 = (1-V)(1-W)$$
$$p_1 = (1-V)W + (1-W)V$$
$$p_2 = VW$$

Si $\boxed{p_0 = p_2}$ $\quad 1 - W - V + VW = VW$

$$1 = (W+V)$$

Si $\boxed{p_1 = p_2}$ $\quad \underline{W} - VW + \underline{V} - VW = VW$

$$1 = 3VW$$
$$VW = 1/3$$

Si $\boxed{p_0 = p_2}$ $\quad (1-V)V = \frac{1}{3}$

$$V - V^2 = \frac{1}{3} \implies V^2 - V + \frac{1}{3} = 0$$

no tiene Sol.
$\therefore$ no se puede
def. $p_0 = p_1 = p_2$

4. a) Sabemos que para obtener 0 puntos se tiene prob. $1 - \frac{\pi r^2}{A}$, por ejemplo para obtener 3 puntos se tiene que

$$\frac{\pi\left(\frac{3r}{5}\right)^2 - \pi\left(\frac{2r}{5}\right)^2}{A} \implies \frac{\pi r^2}{A}\left(\frac{(6-i)^2 - (5-i)^2}{5^2}\right)$$

$$\therefore P(i \text{ puntos}) = \begin{cases} \frac{1 - \pi r^2}{A} & \text{si } i = 0 \\ \frac{\pi r^2}{A}\left(\frac{(6-i)^2 - (5-i)^2}{5^2}\right) & \text{si } i = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

b) $$P(i \text{ ptos} \mid \text{cayó en T.}) = \frac{P(i \text{ ptos} \cap \text{cayó en T.})}{P(\text{cayó en T})} = \frac{\frac{\pi r^2}{A}\left(\frac{(6-i)^2 - (5-i)^2}{5^2}\right)}{\frac{\pi r^2}{A}}$$

//

5. Primero Consideramos que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)$$

Si def. $B_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i$ tenemos que $B_{k+1} \subset B_k$

y ademas como las prob. tienen que sumar 1.

$B_k \to \emptyset$ cuando $k \to \infty$

Así:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \underbrace{\lim P(B_{n+1})}_{0}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \quad \therefore \text{ es cont aditiva.}$$