Funciones reales

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1] Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2] LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

30 de Marzo de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Funciones

Definición.

Una función $f : A \to B$ consta de tres partes:

1. un conjunto A llamado el **dominio** de la función (o el conjunto donde la función está definida),
2. un conjunto B llamado el **recorrido** de la función (o el conjunto donde la función toma valores) y
3. una regla que permite asociar de modo bien determinado, a cada elemento $x \in A$, un único elemento $f(x) \in B$, llamado el valor que la función asume en x.

En símbolos, $f : A \to B$ es función si y solo si

$$(\forall\, x \in A)(\exists! y \in B)(y = f(x)) \,.$$

Funciones

EJEMPLO 1 Sea P el conjunto de todos los polígonos del plano, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y $f : P \to \mathbb{R}$ la función que asocia a cada polígono x su área $f(x)$.

EJEMPLO 2 Sea T el conjunto de todos los triángulos en el plano y $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números reales positivos. Consideramos la tentativa de definir la función $f : \mathbb{R}^+ \to T$ por la siguiente regla: a cada número real $x > 0$ le hacemos corresponder el triángulo $f(x)$ cuya área es x. Evidentemente hay ambigüedad: dado $x > 0$ hay una infinidad de triángulos cuya área es A. La regla no define una función.

Funciones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Observación

- $y = f(x)$ se llama **imagen** de x por f o variable dependiente.
- x se llama **variable** de la función o variable independiente.

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Definición.

Dos funciones $f : A \to B$ y $g : A' \to B'$ son iguales si y solo si $A = A'$, $B = B'$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

O sea que dos funciones son iguales cuando tienen el mismo dominio, el mismo recorrido y la misma regla de asignación.

EJEMPLO 3 Consideremos las funciones f y g definidas por

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \quad \text{y} \quad g(x) = x + 2\,.$$

Aunque a primera vista ambas funciones nos parecen iguales, esto no es así. Ya que no poseen el mismo dominio.

Funciones

Definición.

El gráfico de una función $f : A \to B$ es el subconjunto $G(f)$ del producto cartesiano $A \times B$ formado por los pares ordenados $(x, f(x))$ donde $x \in A$ es arbitrario. Es decir,

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B \mid y = f(x)\}\,.$$

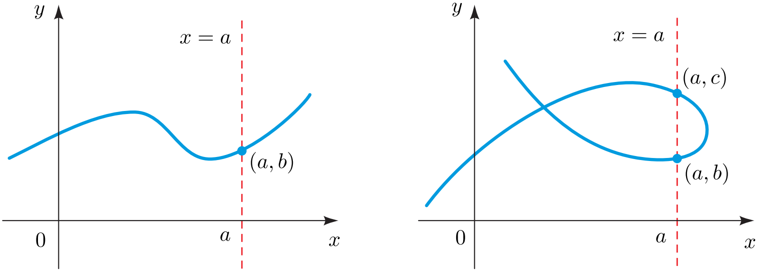
Se sigue de la definición de igualdad de funciones que dos funciones son iguales si y solo si poseen el mismo gráfico.
El gráfico es una curva que está contenida en $\mathbb{R}^2$.

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Observación Una curva en el plano de coordenadas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.

EJEMPLO 4 Gráfica de curvas que no son funciones

.



Gráfica de una función

No es la gráfica de una función

Observación Una función puede especificarse dando sólo la ley $y = f(x)$ que permite calcular la imagen de x. Cuando esto suceda, entenderemos que el dominio de la función es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la ley es aplicable para calcular $f(x)$, es decir

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid y = f(x) \in \mathbb{R}\} .$$

EJEMPLO 5

1. Si $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ entonces

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, \infty[.$$

2. Si $f(x) = \sqrt{x}$ entonces $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} = [0, +\infty[$.

EJEMPLO 6 Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x-3}{x^2-1}}\,.$$

Encontrar el dominio de la función real f.

Solución Tenemos que

$$x \in \operatorname{Dom}(f) \Longleftrightarrow f(x) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{2x-3}{x^2-1} \geqslant 0 \ \wedge \ (x^2-1 \neq 0)$$

Note que $x^2 - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \pm 1$. Resolviendo la inecuación racional se ve que

$$\frac{2x-3}{x^2-1} \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \in]-1, 1[\cup [3/2, \infty[\,.$$

Por lo tanto, $\operatorname{Dom}(f) =]-1, 1[\cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$.

Observación Una función puede especificarse dando la ley $y = f(x)$ que permite calcular la imagen de x y su dominio sin especificar el conjunto donde la función toma valores, es decir sin indicar su recorrido. Cuando esto suceda, entenderemos que el recorrido de la función es el menor subconjunto B de $\mathbb{R}$ en donde se cumpla que para todo $y \in B$ exista $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Es decir, asumiremos que

$$\mathrm{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{existe } x \in \mathrm{Dom}(f) \text{ tal que } y = f(x)\} .$$

EJEMPLO 7 Sea $f : [1, \infty[\to B$, $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$. Hallar el recorrido de f.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Rec}(f) \quad &\iff \quad \text{existe } x \in \operatorname{Dom}(f) \text{ tal que } f(x) = y \\ &\iff \quad \text{existe } x,\ x \geqslant 1 \text{ tal que } \sqrt{x-1}+3 = y \end{aligned}$$

De $\sqrt{x-1}+3 = y$ se obtiene que $x = (y-3)^2+1$. Vemos que $x \geqslant 1$, por lo tanto $x \in \operatorname{Dom}(f)$, además este x debe ser tal que $f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) \quad &= \quad f((y-3)^2+1) = \sqrt{(y-3)^2+1-1}+3 = \sqrt{(y-3)^2}+3 \\ &= \quad |y-3|+3 \end{aligned}$$

para que esto resulte igual a y, debe ser necesariamente $y \geqslant 3$. Luego, $\operatorname{Rec}(f) = [3, \infty[$.

EJEMPLO 8 Determine el recorrido de la función $f : \mathbb{R} \to B$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Solución Tenemos que

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Rec}(f) &\iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = \frac{x}{x^2+1} \\ &\iff \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y} \\ &\iff 1 - 4y^2 \geqslant 0 \wedge y \neq 0 \\ &\iff -\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \wedge y \neq 0 \end{aligned}$$

Notemos que $f(0) = 0$ por lo tanto $0 \in \operatorname{Rec}(f)$, por lo tanto

$$B = \operatorname{Rec}(f) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] .$$