PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Solución Ayudantía 7

1. Sea X una variable aleatoria con fmp dada por

$$p_X(x) = \begin{cases} k\dfrac{x}{2^x}, & x = 1, 2, ... \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

   (a) Encuentre el valor de k tal que $p_X(x)$ sea efectivamente una fmp.
   (b) Calcule $P(X < k)$

Hints: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, si $|x| < 1$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} na^n = \frac{a\left(1 + a^{1+k}k - a^k(1+k)\right)}{(-1+a)^2}$

   (a) Para que efectivamente sea sea una fmp se debe cumplir que $p_X(x) \geq 0$ y $\sum_{\mathcal{X}} p_X(x) = 1$.

   Entonces

$$\sum_{\mathcal{X}} p_X(x) = 1$$
$$\sum_{x=1}^{\infty} k\frac{x}{2^x} = 1$$
$$k\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{2^x} = 1$$
$$k\sum_{k=1}^{\infty} x\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1$$

Usamos el hint con $x = 1/2$

$$k\frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 1$$
$$2k = 1$$
$$k = \frac{1}{2}$$

Luego, con $k = 1/2$ claramente se cumple $p_X \geq 0$, por lo que la fmp corresponde a

$$p_X(x) = \frac{x}{2^{x+1}}, \quad x = 1, 2, ...$$

(b) Esto es directo

$$\begin{aligned}
P(X < k) &= P(X \leq k-1) \\
&= \sum_{x=1}^{k-1} p_X(x) \\
&= \sum_{x=1}^{k-1} \frac{x}{2^{x+1}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{k-1} x \left(\frac{1}{2}\right)^x
\end{aligned}$$

aplicamos el hint con $a = 1/2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1/2 \left(1 + \frac{1}{2^{1+(k-1)}}(k-1) - \frac{1}{2^{k-1}}(1 + (k-1))\right)}{(1/2 - 1)^2} \\
&= 1 - \frac{1}{2^k} - \frac{k}{2^k}
\end{aligned}$$

2. Sea X una v.a con fmp dada por

$$p_X(x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, ...$$

Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $P(X > m + n | X > n)$. **Propuesto:** interprete la probabilidad anterior.
Usamos la definición de esperanza y calculamos. Note que la v.a tiene recorrido discreto, por lo que hay que usar una serie.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{\mathcal{X}} x \cdot p_X(x) \\
&= p \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1} \\
&= -p \sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dp}(1-p)^x \\
&= -p \frac{d}{dp} \left(\sum_{x=1}^{\infty} (1-p)^x \right) \\
&= -p \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{1-(1-p)} \right) \\
&= -p \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p}{p} \right) \\
&= -p \cdot -\frac{1}{p^2} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

Ahora vamos con la probabilidad

$$\begin{aligned}
P(X > m+n | X > n) &= \frac{P(X > m+n \cap X > n)}{P(X > n)} \\
&= \frac{P(X > m+n)}{P(X > n)} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{x=m+n+1}^{\infty} p(1-p)^{x-1}}{\displaystyle\sum_{x=n+1}^{\infty} p(1-p)^{x-1}} \\
&= \frac{p\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x+m+n-1}}{p\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x+n-1}} \\
&= \frac{p(1-p)^{n+m-1}\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x}}{p(1-p)^{n-1}\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x}} \\
&= \frac{p(1-p)^{n+m-1}\dfrac{1-p}{1-(1-p)}}{p(1-p)^{n-1}\frac{1-p}{1-(1-p)}} \\
&= \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^{n}} \\
&= (1-p)^{m}
\end{aligned}$$

3. Sea X una v.a con fda dada por

$$F_X(x) = \frac{1-e^{-\lambda\alpha x}}{\alpha}, \quad x > 0$$

Con $\lambda > 0$.

(a) Encuentre $f_X(x)$ y el valor de α para que efectivamente sea una fdp.

(b) Calcule $\mathbb{E}(aX+b)$. Con $a, b \in \mathbb{R}$

(a) Como la fdp es continua, simplemente derivamos.

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{d}{dx}F_X(x) \\
&= \frac{d}{dx}\frac{1-e^{-\lambda\alpha x}}{\alpha} \\
&= \lambda e^{-\lambda\alpha x}
\end{aligned}$$

Para que efectivamente sea una fdp se debe cumplir que $f_X(x) \geq 0$ y $\int_{\mathcal{X}} f_X(x)dx = 1$. La exponencial es siempre positiva, por lo que solo nos falta garantizar que integre 1.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}} f_X(x)dx &= 1 \\
\int_0^{\infty} f_X(x)dx &= 1 \\
\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda\alpha x} &= 1 \\
\frac{1}{\alpha} &= 1 \\
\Rightarrow\ \alpha &= 1
\end{aligned}$$

Luego, se tiene que

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

(b) Usando propiedades de esperanza tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX + b) &= \mathbb{E}(aX) + \mathbb{E}(b) \\
&= a\mathbb{E}(X) + b \\
&= a \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx + b \\
&= \frac{a}{\lambda} + b
\end{aligned}$$

4. Sea X con fda dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - p & -1 \leq x < 0 \\ 1 - p + \dfrac{xp}{2} & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$

Calcule $\mathbb{E}(X)$ de dos formas distintas. ¿Reconoce la fda si $p = 1/2$? Pista: Vea su I1.

Note que X es una v.a mixta, pues tiene parte continua y parte discreta. En la figura 1 se ve F_X para diversos valores de p. Teniendo esto en consideración, notamos que en $x = -1$ pega un salto, y sabemos que toma el valor de $x = -1$ con la siguiente probabilidad

$$\begin{aligned}
P(X = -1) &= F_X(-1) - F_X(-1^-) \\
&= 1 - p - 0 \\
&= 1 - p
\end{aligned}$$

Ahora, para calcular la esperanza debemos encontrar el recorrido de X. Sabemos que es discreta en $x = -1$, por otro lado, el otro intervalo se comporta como una función continua. Luego,

$$Rec(X) = \{-1\} \cup (0, 2)$$

Como tenemos una parte discreta y otra continua, la esperanza se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= xP(X=x) + \int_{\mathcal{X}} f_X(x)dx \\
&= -1P(X=-1) + \int_0^2 \frac{d}{dx}\left(F_X\right)dx \\
&= -1\cdot(1-p) + \int_0^2 \frac{p}{2}dx \\
&= p-1+\frac{p}{2}\cdot 2 \\
&= 2p-1
\end{aligned}$$

Por otro lado, se puede calcular de la siguiente manera (solo cuando el recorrido/soporte es positivo, en este caso solo aplica para el lado donde la v.a es continua).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= xP(X=x) + \int_{\mathcal{X}} (1-F_X(x))dx \\
&= -1P(X=-1) + \int_0^2 (1-(1-p+\frac{xp}{2}))dx \\
&= -1\cdot(1-p) + \int_0^2 p-\frac{xp}{2}dx \\
&= p-1+p \\
&= 2p-1
\end{aligned}$$

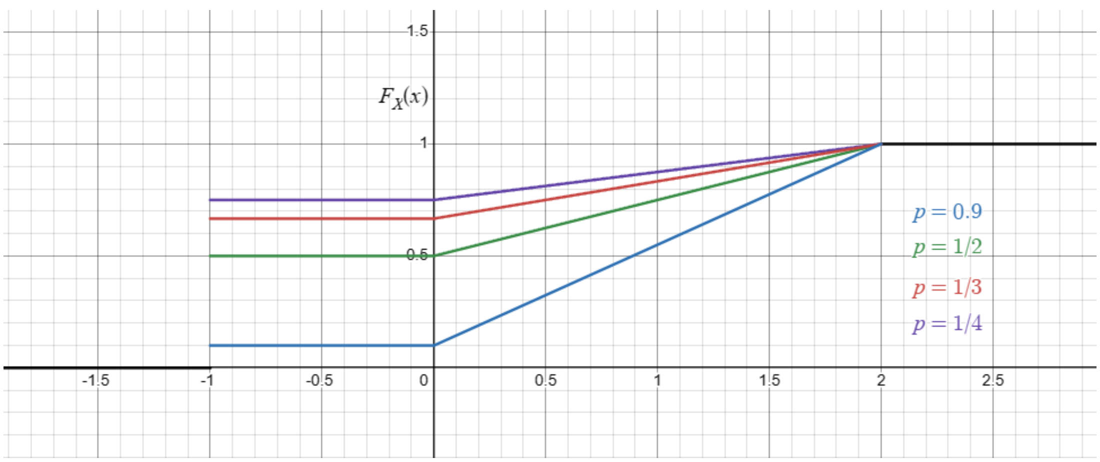

Figure 1: F_X mixta para diversos valores de p