PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2019

MAT 1620 - Interrogación 2 - **Pauta.**

1. Determine si cada uno de los siguientes límites existen. En caso de existir, obtenga su valor.

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\sin(x)^2}{x^4+y^4}$ *b*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^{x^2-2x+1+y^2}-1}{x^2-2x+1+y^2}$

   Sol:

   a) Para las rectas $(x(t),y(t)) = (t,mt)$ con $m\in\mathbb{R}$, tenemos

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\sin(x)^2}{x^4+y^4} = \lim_{t\to 0}\frac{m^2t^2\sin(t)^2}{t^4(1+m^4)} = \frac{m^2}{1+m^4}.$$

   Luego el límite no existe.
   Puntaje:

   - **2 ptos** Por mostrar que el límite depende de algún parámetro.
   - **1 pto** Por concluir que el límite no existe.

   b) Ocupando coordenadas polares centradas en (1,0), $x = 1 + r\cos(t)$ e $y = r\sin(t)$, el límite queda

   $$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^{x^2-2x+1+y^2}-1}{x^2-2x+1+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{e^{r^2}-1}{r^2} = 0.$$

   Puntaje:

   - **1.5 ptos** Por ocupar coordenadas polares en la expresión.
   - **1.5 pto** Por concluir que el límite vale 0.

2. Sea $W(s,t) = F(u(s,t),v(s,t))$ donde F,u,v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ tales que

   $$u(1,0) = 2, u_s(1,0) = -2, u_t(1,0) = 6,$$
   $$v(1,0) = 3, v_s(1,0) = 5, v_t(1,0) = 4,$$
   $$F_u(2,3) = -1, F_v(2,3) = 1.$$

   Calcular $\nabla W(1,0)$.

   Sol: Por regla de la cadena tenemos,

   $$W_s = F_u u_s + F_v v_s \text{ y } W_t = F_u u_t + F_v v_t.$$

   Reemplazando los datos nos queda

   $$W_s(1,0) = F_u(2,3)u_s(1,0) + F_v(2,3)v_s(1,0) = 7$$
   $$W_t(1,0) = F_u(2,3)u_t(1,0) + F_v(2,3)v_t(1,0) = -2.$$

   Luego $\nabla W(1,0) = (7,-2)$.
   Puntaje:

- **4 ptos** Por calcular bien la regla de la cadena.
- **1 pto** Por reemplazar y concluir que concluir que $\nabla W(1,0) = (7,-2)$.

3. Considere la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   a) Analizar la continuidad de $f(x,y)$ en $\mathbb{R}^2$.

   b) Calcule la derivada parcial de f respecto a x en $(0,0)$, en caso que esta exista.

   c) ¿ Es f diferenciable en $(0,0)$?

   Sol:

   a) Para los puntos $(x,y) \neq (0,0)$ la función es continua por ser un cuociente de polinomios donde el denominador no se anula. Luego, por coordenadas polares

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos(t)^2\sin(t)}{r^2} = 0.$$

   Como el límite existe y vale $0 = f(0)$, la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$.
   Puntaje:
   - **2 ptos** Por concluir de manera adecuada que $f(x,y)$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

   b) Sea $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un vector. La derivada direccional de f en $(0,0)$ con respecto a v es

   $$D_vf(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3a^2b^2}{h^3(a^2+b^2)} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

   Puntaje:
   - **2 ptos** Por calcular de manera adecuada que $D_vf(0,0) = \dfrac{a^2b}{a^2+b^2}$.

   c) Consideramos $v = (1,1) = e_1 + e_2$ donde $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$. Luego,

   $$D_vf(0,0) = \frac{1}{2},\ D_{e_1}f(0,0) = 0 \text{ y } D_{e_2}f(0,0) = 0.$$

   La funcion $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$ pues no satisface $D_vf(0,0) = D_{e_1}f(0,0) + D_{e_2}f(0,0)$.
   Puntaje:
   - **2 ptos** Por concluir de manera adecuada que $f(x,y)$ no es diferenciable en $(0,0)$.

4. *a*) Muestre que todo plano que es tangente al cono $x^2+y^2 = z^2$ pasa por el origen.

   b) Determine los puntos en los cuales la dirección máxima de la derivada direccional de la función $f(x,y) = x^2+y^2-2x-4y$ es la del vector (1,1).

   Sol:

a) Sea $f(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$, así el cono se describe como el conjunto de nivel $\{f = 0\}$. De esta forma un plano tangente al cono está dado por

$$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0,$$

donde el punto (x_0,y_0,z_0) es el punto de tangencia. Luego,

$$f_x(x_0,y_0,z_0) = -2x_0,\ f_y(x_0,y_0,z_0) = -2y_0,\ f_z(x_0,y_0,z_0) = -2z_0.$$

Por tanto la ecuacion de un plano tangente al cono es

$$\begin{aligned} &-2x_0(x-x_0) - 2y_0(y-y_0) + 2z_0(z-z_0) = 0 \\ &-x_0x - y_0y + z_0z + 2\underbrace{\left(z_0^2 - x_0^2 - y_0^2\right)}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Notamos que el punto $(0,0,0)$ pertenece a $-x_0x - y_0y + z_0z = 0$.

<u>**Puntaje:**</u>

- **1 pto** Por describir la ecuación del plano tangete de un conjunto de nivel o gráfico de una función.
- **1 pto** Por calcular las derivadas de la función antes encontrada.
- **1 pto** Por mostrar que el punto $(0,0,0)$ pertenece al plano tangente del cono.

b) La función f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ por ser un polinomio, luego la dirección de máxima de la derivada direccional corresponde a ∇f. Imponemos la condición del problema,

$$\nabla f = (1,1) \iff (2x-2, 2y-4) = (1,1).$$

Esto nos da el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

<u>**Puntaje:**</u>

- **1 pto** Por mostrar que la función es diferenciable en R^2 y enunciar que ∇f es la dirección máxima de la derivada direccional.
- **1 pto** Por calcular ∇f.
- **1 pto** Por encontrar el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

5. Clasifique todos los puntos críticos (máximos locales, mínimos locales y puntos silla) de la función $f(x,y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$ en el disco unitario (i.e: los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x^2+y^2 \leq 1$).

<u>**Sol:**</u> Los puntos críticos de $f(x,y)$ son $\nabla f = (0,0)$. Luego,

$$\begin{aligned} f_x &= 2xye^{-x^2-y^2} - 2x^3ye^{-x^2-y^2} = 0 \\ f_y &= x^2e^{-x^2-y^2} - 2x^2y^2e^{-x^2-y^2} = 0, \end{aligned}$$

con esto los puntos críticos son $(0,y)$ con $y \in \mathbb{R}$ y las cuatro combinaciones de $x = \pm 1$ y $y = \pm\dfrac{1}{2}$. Los puntos críticos que pertenecen al disco unitario son $(0,y)$ con $|y| \leq 1$. Por el criterio de la segunda derivada calculamos,

$$f_{xx}(0,y) = 2ye^{-y^2},\ f_{xy}(0,y) = 0,\ f_{yy}(0,y) = 0.$$

Luego todo los puntos críticos de $f(x,y)$ en el disco unitario son degenerados pues $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$.

<u>**Puntaje:**</u>

- **2 ptos** Por calcular ∇f.
- **2 ptos** Por encontrar todos los puntos críticos de $f(x,y)$ en el disco unitario.
- **2 ptos** Por clasificar todos los puntos críticos de $f(x,y)$ en el disco unitario.

6. Maximize la función $f(x,y,z) = xyz$ con restricción $x+y+z = 3$ y (x,y,z) en el primer octante (i.e: $x > 0, y > 0$ y $z > 0$). Concluya que $\sqrt[3]{xyz} \leq \dfrac{x+y+z}{3}$.

<u>Sol:</u> Ocupamos el método de multiplicadores de Lagrange para encontrar los puntos críticos. Sea $g(x,y,z) = x+y+z$, calculamos el sistema

$$\begin{cases} \nabla f & = \lambda \nabla g \\ g & = 3 \end{cases},$$

Eso equivale a buscar $x, y, z > 0$ tal que

$$\begin{cases} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ xy = \lambda \\ x+y+z = 3 \end{cases}$$

De las primeras tres ecuaciones tenemos que $x = y = z$ y reemplazando en la ultima tenemos que $x = 1$. Con esto el punto crítco es $(1,1,1)$.
Luego ocupamos que $z = 3 - x - y$ en la función y nos queda $f(x,y) = (3-x-y)xy$. Entonces por el criterio de la seguda derivada calculamos

$$f_{xx} = -2x,\ f_{xy} = 3 - 2x - 2y,\ f_{yy} = -2x.$$

Como $D = f_{xx}(1,1)f_{yy}(1,1) - f_{xy}(1,1) = 3$ y $f_{xx}(1,1) = -2$, tenemos que $f(1,1,1) = 1$ es maximo local que al ser único es global. Finalmente, para $x, y, z > 0$ se cumple que

$$3\sqrt[3]{xyz} = 3\sqrt[3]{f(x,yz)} \leq 3\sqrt[3]{f(1,1,1)} = 3 = x+y+z.$$

<u>Puntaje:</u>

- **2 ptos** Por calcular la ecuaciones que permiten calcular el punto crítico.
- **1 pto** Por encontrar el punto crítico.
- **2.5 ptos** Por mostrar que es un máximo global.
- **0.5 ptos** Por concluir la desigualdad.

(Duración: 2 horas y 30 minutos)