PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer semestre 2022

MAT1620 ⋆ Cálculo 2
Interrogación 3

1. a) Utilizando la regla de la cadena tenemos

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Calculamos ahora las derivadas parciales que necesitamos

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x - \frac{y}{x^2}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{x}$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = -2$$
$$\frac{\partial y}{\partial v} = 1$$

Además, como $u = v = 0 \implies x = 1$, $y = -2$, entonces

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \left(2x - \frac{y}{x^2}\right) \cdot (-2) + \left(\frac{1}{x}\right) \cdot (1)$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial v}\right|_{u=0,v=0} = \left(2 \cdot 1 - \frac{-2}{1^2}\right) \cdot -2 + \left(\frac{1}{1}\right) \cdot 1 = -7$$

b) Sea $F(x, y, z) = xy^2 - xy + 3x^3y - z$, entonces

$$\nabla F(x, y, z) = \left\langle -y + 9x^2y + y^2, -x + 3x^3 + 2xy, -1 \right\rangle$$

Un vector normal para el plano tangente es

$$\vec{n} = \nabla F(1, 3, 15) = \langle 33, 8, -1 \rangle$$

Con lo que obtenemos la ecuación del plano tangente a la superficie en $(1, 3, 15)$

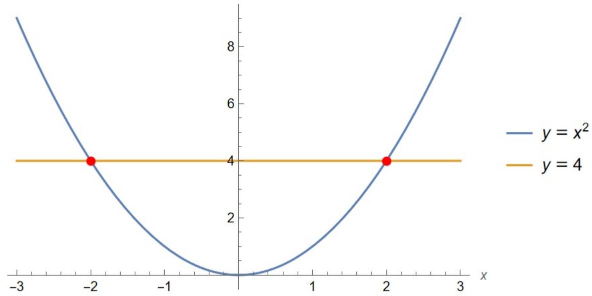
$$\langle 33, 8, -1 \rangle \cdot \langle x - 1, y - 3, z - 15 \rangle = 0$$
$$33(x - 1) + 8(y - 3) - 1(z - 15) = 0$$

Finalmente, para obtener el punto de intersección del plano con el eje z, ponemos $x = y = 0$ en la ecuación del plano

$$33(0 - 1) + 8(0 - 3) - 1(z - 15) = 0$$
$$z = -42$$

Y así obtenemos que el plano intersecta al eje z en el punto $(0, 0, -42)$.

2. La región es



Primero buscamos puntos críticos en el interior de la región, poniendo $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x = 0 \implies x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4 = 0 \implies y = 1$$

de donde obtenemos el punto crítico $P_1 = (0, 1)$.

Ahora debemos analizar los bordes de la región:

♣ Si $y = 4$ con $-2 \leq x \leq 2$, entonces

$$f(x, y) = f(x, 4) = 3x^2 + 16$$

que es una función de una variable cuyo único punto crítico se obtiene cuando

$$f'(x, 4) = 6x = 0 \iff x = 0$$

de donde obtenemos el punto $P_2 = (0, 4)$.

♣ Si $y = x^2$ con $-2 \leq x \leq 2$, entonces

$$f(x, y) = f(x, x^2) = -x^2 + 2x^4$$

que es una función de una variable cuyos puntos críticos se obtienen cuando

$$f'(x, x^2) = -2x + 8x^3 = 0 \iff 2x(-1 + 4x^2) = 0 \iff x = 0,\ x = \frac{1}{2},\ x = -\frac{1}{2}$$

de donde obtenemos los puntos

$$P_3 = (0, 0),\ P_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right),\ P_5 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$$

♣ Además, debemos considerar los puntos en los extremos del borde de la región

$$P_6 = (-2, 4),\ P_7 = (2, 4)$$

Finalmente, evaluamos la función en cada uno de los puntos obtenidos

$$f(P_1) = -2,\ f(P_2) = 16,\ f(P_3) = 0,\ f(P_4) = -\frac{1}{8},\ f(P_5) = -\frac{1}{8},\ f(P_6) = 28,\ f(P_7) = 28$$

de donde obtenemos que el valor máximo absoluto es 28 y el valor mínimo es -2.

3. Debemos optimizar el volumen $V(x, y, z) = xyz$ con la restricción $2x + y + 4z = 24$.

   El sistema de ecuaciones que debemos analizar es

$$\begin{gathered} \nabla V(x, y, z) = \lambda \cdot \nabla G(x, y, z) \\ G(x, y, z) = 24 \end{gathered}$$

   donde $G(x, y, z) = 2x + y + 4z$.

$$\begin{gathered} yz = 2\lambda \\ xz = \lambda \\ xy = 4\lambda \\ 2x + y + 4z = 24 \end{gathered}$$

   de donde obtenemos

$$\frac{yz}{2} = \lambda = xz \implies yz - 2xz = 0 \implies z(y - 2x) = 0 \implies y = 2x$$

   y

$$xy = 4\lambda = 2yz \implies xy - 2yz = 0 \implies y(x - 2z) = 0 \implies z = \frac{x}{2}$$

   Ahora, reemplazando estas dos últimas igualdades en $2x + y + 4z = 24$

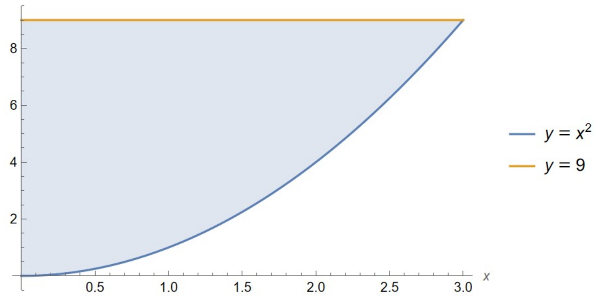
$$2x + 2x + 4\left(\frac{x}{2}\right) = 24 \implies x = 4$$

   luego $y = 2x \implies y = 8$ y $z = \frac{x}{2} \implies z = 2$ y obtenemos el volumen máximo

$$V(4, 8, 2) = 64\left[\mathrm{u}^3\right]$$

   Para asegurar que es el volumen máximo basta con tomar cualquier otro punto que satisfaga la condición, calcular el volumen y verificar que se obtiene un volumen menor. Por ejemplo, con $(x, y, z) = (1, 10, 3)$ se obtiene $V(1, 10, 3) = 30$.

4. a) El gráfico de la región de integración es



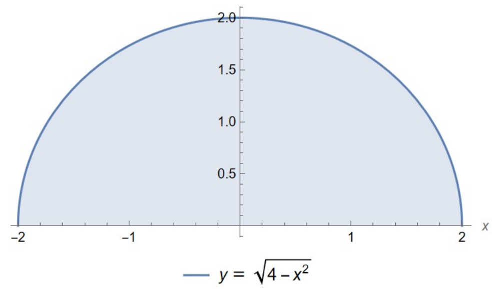
de donde se puede obtener

$$\begin{array}{c} x^2 < y < 9 \\ 0 < x < 3 \end{array} \iff \begin{array}{c} 0 < x < \sqrt{y} \\ 0 < y < 9 \end{array}$$

y así

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_{x^2}^9 \frac{x}{\sqrt{3x^2+y}}\, dydx &= \int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{\sqrt{3x^2+y}}\, dxdy \\
&= \int_0^9 \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+y}\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{y}}\, dy \\
&= \int_0^9 \frac{\sqrt{y}}{3}\, dy \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2y^{3/2}}{3}\Big|_{y=0}^{y=9} \\
&= 6
\end{aligned}$$

b) El gráfico de la región de integración es el semi círculo



Así, el cambio de variables en coordenadas polares está dado por

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 2$$

y la integral pedida es

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} e^{x^2+y^2}\,dydx &= \int_0^\pi \int_0^2 e^{r^2} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^\pi \left.\frac{e^{r^2}}{2}\right|_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}\,d\theta \\
&= \pi \cdot \left(\frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$