Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre de 2014

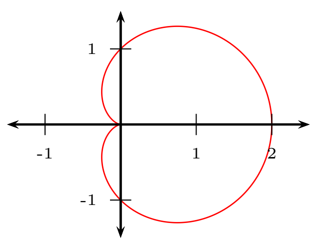
MAT1620 ⋆ Cálculo 2

Interrogación N° 2

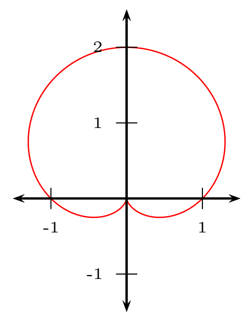
1. (a) Grafique las curvas polares $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta)$, $r = 1 + \cos(\theta)$.
   (b) Determine el área encerrada por las curvas $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta)$, $r = 1 + \cos(\theta)$, $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$.

   Solución.

   (a) La gráfica de las curvas polares es la siguiente



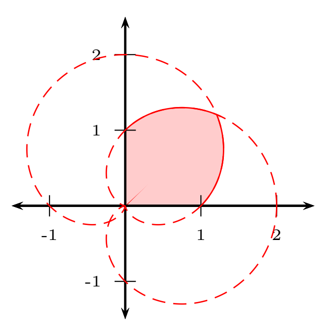
$\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$



$\rho(\theta) = 1 + \operatorname{sen}(\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

   Evaluación. (**1 pto**) por cada gráfico correcto correcto, (**1 pto**) por identidicar que $[0, 2\pi]$ es el intervalo en que se deben graficar las curvas polares.

   (b) La región que se desea determinar su área es



(**1 pto**)

   El único punto de intersección de las curvas polares, con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ es solución a la ecuación

$$1 + \cos(\theta) = 1 + \operatorname{sen}(\theta) \qquad \Leftrightarrow \qquad \tan(\theta) = 1$$

   De este modo, el ángulo de intersección es $\theta = \frac{\pi}{4}$. Luego el área está dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (1 + \operatorname{sen}(\theta))^2 \, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1 + \cos(\theta))^2 \, d\theta \qquad (\textbf{1 pto})$$
$$= \frac{7}{4} + \frac{3}{8}\pi - \sqrt{2} \qquad (\textbf{1 pto})$$

2. Evalúe, si es posible, las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$

Solución. (a) La integral es impropia (de segunda especie) en 1. Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \lim_{a\to 1^-}\int_0^a \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)\,dx \qquad \textbf{(1 pto)}\\
&= -\lim_{a\to 1-}\int_0^a \ln(1-x)\,dx\\
&\qquad \text{(integramos por partes con } u=\ln(1-x);\;\; v'=1)\\
&= -\lim_{a\to 1-}\left(x\ln(1-x)\Big|_0^a + \int_0^a \frac{x}{1-x}\,dx\right) \textbf{(1 pto)}\\
&= -\lim_{a\to 1-}\left(a\ln(1-a) \;+\; \int_0^a \left(\frac{1}{1-x} - 1\right)\,dx\right)\\
&= -\lim_{a\to 1-}\left(a\ln(1-a) \;-\; \ln(1-x)\Big|_0^a - a\right)\\
&= -\lim_{a\to 1-}\left(\,(a-1)\ln(1-a) - a\,\right) \;=\; -(\,-1\,) \;=\; 1\textbf{(1 pto)}
\end{aligned}
$$

pues

$$\lim_{a\to 1-}(a-1)\ln(1-a) \underbrace{=}_{x=1-a} -\lim_{x\to 0+} x\ln(x) \;=\; 0 \quad \text{(puede verificarse fácilmente por L'Hopital)}$$

Luego, la integral converge a 1.

Nota. Si tiene el procedimiento bueno pero no cambio la integral impropia por el límite de una propia, se otorgarán solo (**2 pto**).

(b) La integral es impropia de primera especie y también de segunda especie (en 0). Luego,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}\\
&= \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} + \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)}. \qquad \textbf{(1 pto)}
\end{aligned}
$$

Mediante el cambio de variables $u = \sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ tenemos que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} \;=\; 2\int \frac{du}{1+u^2} \;=\; 2\arctan(u) \;=\; 2\arctan(\sqrt{x}) \qquad \textbf{(1 pto)}$$

de modo que

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\epsilon}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} \;=\; \lim_{\epsilon\to 0+}(2\arctan(1)-2\arctan(\sqrt{\epsilon})) \;=\; \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{M\to\infty}\int_{1}^{M}\frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+x)} \;=\; \lim_{M\to\infty}(2\arctan(M)\;-\;2\arctan(1)\,) \;=\; \pi\;-\;\frac{\pi}{2} \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

y así la integral converge a π.

Nota. Si tiene el procedimiento bueno pero no cambio la integral impropia por el límite de una propia, se otorgarán solo (**2 pto**).

3. Estudie la convergencia de las siguientes series, en caso de ser convergentes, determine si dicha convergencia es absoluta o condicional

 (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$

 (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)\,(n+2)}$

 Solución.

 (a) Si $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x+1)}$ entonces, es claro que, para $x\geq 1$,

$$f(x)\;>0;\quad f(x)\text{ es decreciente}\quad\text{y}\quad\lim_{x\to\infty}f(x)=0 \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

 de modo que podemos usar el Criterio de la integral. Tenemos que

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\ln(x+1)} > \int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} \;=\; \lim_{M\to\infty}\int_{1}^{M}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}$$

 y como

$$\int_{1}^{M}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)}\underbrace{=}_{u=x+1}\int_{2}^{M+1}\frac{du}{u\ln(u)}\underbrace{=}_{t=\ln(u)}\int_{\ln 2}^{\ln(M+1}\frac{dt}{t} \;=\; \ln(M+1)-\ln(2)$$

 tenemos que

$$\lim_{M\to\infty}\int_{1}^{M}\frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} \;=\; \lim_{M\to\infty}(\,\ln(M+1)-\ln(2)\,) \;=\; \infty \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

 de modo que la integral diverge y por tanto, como la integral original es mayor, por comparación se tiene que $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x\ln(x+1)}$ diverge y por ende, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+1)}$ diverge también. (**1 pto**)

(b) Por una parte, la serie de términos positivos $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$ diverge pues es comparable a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+1)}$ que es divergente

$$\text{en efecto,} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)/(n+1)(n+2)}{2/(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)}{(2n+4)} = 1 \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

luego ambas series se comportan igual en términos de convergencia/divergencia.

Por otra parte, $\displaystyle\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$ de modo que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left((\frac{1}{1}+\frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}+\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}+\frac{1}{4}) + \cdots \pm (\frac{1}{N}+\frac{1}{N+1}) \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(1 \pm \frac{1}{N+1} \right) = 1 \qquad (\mathbf{1\ pto})
\end{aligned}$$

de modo que la suma converge (y lo hace a 1).

(*Nota*: La convergencia de la serie alternante también se puede establecer mediante el Criterio de Leibniz, mostrando que la sucesión $a_n = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}$ es de términos positivos, decreciente y tiende a cero).

Como sea, tenemos que la serie original converge, pero la convergencia es condicional. (**1 pto**)

Nota. Si el alumno demuestra que la serie converge por el Criterio de la serie alternante (probando primero que la sucesión decrece a cero) se asignará (**1 pto**). Si no demuestra que la sucesión es decreciente, aunque enuncie el criterio, no tendrá puntaje.

4. (a) Demostrar que

$$\frac{1}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{3}{2}$$

(b) Demostrar que

$$\frac{9}{8} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}$$

Solución.

(a) Ya que $a_n = 1/n^3$ es una sucesión decreciente, se cumple que

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^3} \leq \frac{1}{n^3} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^3} \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

Luego,

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \leq 1 + \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} \qquad \textbf{(1 pto)}$$

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} \leq \frac{3}{2} \qquad \textbf{(1 pto)}$$

(b) Ya que $a_n = 1/n^3$ es una sucesión decreciente, se cumple que

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^3} \leq \frac{1}{n^3} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^3} \qquad \textbf{(1 pto)}$$

Luego,

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n^3} \leq 1 + \frac{1}{8} + \int_3^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{5}{4} \qquad \textbf{(1 pto)}$$

y

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3} = 1 + \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n^3} \geq 1 + \int_2^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{9}{8} \qquad \textbf{(1 pto)}$$

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa