Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 3

1. Demuestre que $B = \{1-t^2, t-t^2, 2-t^2\}$ es una base para el espacio vectorial de los polinomios de grado menor a igual a dos $\mathbb{P}_2$. Encuentre el vector de coordenadas de $p(t) = 1 + 3t + 6t^2$ respecto a la base B.

   Solución.

   Los vectores coordenadas de B en la base canonica $C = \{t^2, t, 1\}$ son $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

   Como
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   estos vectores coordenadas de B son linealmente independientes, lo que implica que los vectores de B son linealmente independientes. Luego, como $Dim(\mathbb{P}_2) = 3$ concluimos que B es una base para $\mathbb{P}_2$.

   El vector $[p(t)]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, si x_1, x_2, x_3 satisfacen que

$$x_1(1-t^2) + x_2(t-t^2) + x_3(2-t^2) = 1 + 3t + 6t^2$$

$$(x_1 + 2x_3) + (x_2)t + (-x_1 - x_2 - x_3) = 1 + 3t + 6t^2$$

$$x_1 + 2x_3 = 1,\ x_2 = 3,\ -x_1 - x_2 - x_3 = 6$$

   Así $x_1 = -19$, $x_2 = 3$, $x_3 = 10$. Con lo que obtenemos $[p(t)]_B = \begin{pmatrix} -19 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

   Puntaje:

   - 1.5 pto por demostrar que los vectores de B son linealmente independientes .
   - 1.5 pto por argumentar que la cantidad de vectores de B coincide con $Dim(\mathbb{P}_2)$.
   - 1 por encontrar cada componente del vector $[p(t)]_B$. (3 ptos)

2. Sean V un espacio vectorial, $B_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ y $B_2 = \{\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ bases de V.

   a) **[4 ptos]** Encuentre la matriz de cambio de base de coordenadas de la base B_2 a la base B_1.

   b) **[2 ptos]** Si $\vec{w}$ es un vector en V tal que $[\vec{w}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Encuentre $[\vec{w}]_{B_2}$.

Solución.

a) Por definición

$$\begin{aligned} P_{B_1 \leftarrow B_2} &= \left([\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3]_{B_1} \quad [\vec{v}_2]_{B_1} \quad [\vec{v}_3]_{B_1} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

b) Por teorema

$$P_{B_2 \leftarrow B_1} = (P_{B_1 \leftarrow B_2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por teorema

$$[\vec{w}]_{B_2} = P_{B_2 \leftarrow B_1}[\vec{w}]_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Puntaje:

- 4 ptos por determinar $P_{B_1 \leftarrow B_2}$.
- 2 ptos por determinar correctamente $[\vec{w}]_{B_2}$

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} -1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Determine condiciones en a y b para que la matriz A sea diagonalizable.

Solución.

El polinomio caracteristico de A es

$$det \begin{pmatrix} -1-\lambda & a & b \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2(1-\lambda)$$

luego los valores propios de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 1$, como la multiplicidad algebraica de -1 es dos, para que la matriz A sea diagonalizable se necesita que la dimensión del espacio de vectores propios asociado al valor propio -1 (E_{-1}) sea 2.

$$E_{-1} = Nul \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

y esto ocurre si y sólo si $b = 0$ y a puede tomar cualquier valor.

Puntaje:

- 0.5 ptos por determinar correctamente cada valor propio de A. (1 pto)
- 2 pto por argumentar que la matriz A será diagonalizable si y sólo si la dimensión del espacio de vectores propios asociado al valor propio -1 es 2.
- 1.5 ptos por dterminar que b debe ser 0.
- 1.5 ptos por dterminar que a debe ser puede tomar cualquier valor

4. Sean $\mathbb{M}_2$, el espacio vectorial de las matrices de 2×2, $\mathbb{P}_2$,el espacio vectorial de los polinomios de grado menor a igual a dos y la transformación lineal $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{M}_2$ definida por la matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

respecto a la base

$$\mathcal{B}_P = \{x^2, x-1, -1\} \text{ de } \mathbb{P}_2$$

y a la base canonica

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ de } \mathbb{M}_2.$$

Determine una base para el núcleo y para la imagen de T.

Solución.

Una forma escalonada de la matriz $[T]$ es la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto una base para el $Col\,([T])$ es el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Luego, la imagen de la transformación tiene como base el conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Y la

$$Nul([T]) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + z = 0,\ y + z = 0 \right\} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Luego, la núcleo de la transformación tiene como base el conjunto $\{x^2 + x\}$

Puntaje:

- 1 pto por determinar una base para $Col\,([T])$
- 2 ptos por determinar una base para $Im(T)$
- 1 pto por determinar una base para $Nul\,([T])$
- 2 ptos por determinar una base para núcleo de T.

Continúa en la siguiente página.

5. Sea A una matriz de 3×3 tal que $A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y la forma escalonada reducida de A es $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Determine si A es diagonalizable y si lo es encuentre una matriz P invertible y una matriz D diagonal tal que $A = P^{-1}DP$.

Solución.

Como $A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ implica que $\lambda_1 = -3$ es valor propio de matriz, y un vector propio asociado a este valor es $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Como la forma escalonada reducida de A es $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ implica que $\lambda_2 = 0$ es un valor propio de la matriz y el espacio de vectores propios asociados a este valor es

$$E_0 = Nul(A) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mid 2x + 3y - z = 0 \right\} = Gen\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

Con esto concluimos que el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ es una base de vectores propios de A para $\mathbb{R}^3$, luego la matriz A es diagonalizable.

Si $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tenemos que $A = P^{-1}DP$

Puntaje:

- 1 pto determinar cada valor propio de A.(2 ptos)
- 1 pto determinar cada vector propio de A.(3 ptos)
- 0.5 ptos por calcular correctamante D.
- 0.5 ptos por calcular correctamante P.

6. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ una matriz que actúa sobre $\mathbb{C}^2$. Determine los valores propios y una base de vectores propios de A en $\mathbb{C}^2$.

Solución.

El polinomio caractéristico de A es

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

El polinomio P_A tiene dos raices complejas conjugadas $1 \pm i$, así los valores propios de A son $1 \pm i$.

Luego el espacio propio asociado a $\lambda_1 = 1 + i$, se determina por

$$Nul \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{pmatrix} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} \right\}$$

y el espacio propio asociado a $\lambda_2 = 1 - i$, se determina por

$$Nul \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -2 & -1+i \end{pmatrix} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\}.$$

Luego una base de vectores propios para A es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\}$$

Puntaje:

- 1 pto por cada valor propio.(2 ptos)
- 2 ptos cada vector de la base de vectores propios.(4 ptos)

7. Sea $H = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - z + w = 0, -2x + z - 3w = 0\}$. Determine una base para el complemento ortogonal ($H^\perp$) de H.

Solución.

Primero notamos que

$$H = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Luego, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \in H^\perp$ si y sólo si $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ y $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$.

Así, $v_1 + 2v_3 = 0$ y $2v_2 + 3v_3 + v_4 = 0$ lo que implica que

$$v = \begin{bmatrix} -2v_3 \\ -\frac{3}{2}v_3 - \frac{1}{2}v_4 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = v_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lo que implica $H^\perp = gen \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Así una base para $H^\perp$ es $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Puntaje:

- 2 ptos por enunciar que deben cumplir los vectores que pertenecen a $H^\perp$.
- 2 por encontrar cada vector que genera $H^\perp$.(4 ptos)

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

a) Si M es una matriz de 7×5 no inyectiva entonces su forma escalonada reducida no posee 2 filas nulas.

b) Si A y B son matrices ortogonales reales entonces AB es una matriz ortogonal.

c) Si A es una matriz de 2×2 con valores propios 1 y -1 el polinomio característico de la matriz $A^2 - I$ es $(\lambda - 1)^2$.

Solución.

a) Falso .
Por el teorema de las dimensiones, tenemos que

$$5 = dim(Nul(A)) + rang(A).$$

Si A es no inyectiva, entonces su nulidad tiene a lo menos dimensión 1 por lo que su rango es a lo más 4. Si la F.E.R de A tiene 2 filas nulas, entonces A tiene 5 pivotes, por lo que $rang(A) = 5$, lo que es una contradicción. En conclusión, la afirmación es falsa.

b) Verdadero .
A y B son matrices ortogonales reales si y sólo si $A^{-1} = A^t$, $B^{-1} = B^t$ luego

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t$$

así AB es una matriz ortogonal.

c) Falso
Si v es vector propio de A asociado a el valor propio λ entonces

$$(A^2 - I)v = A(Av) - Iv = A(\lambda v) - v = \lambda^2 v - v = (\lambda^2 - 1)v$$

luego el único valor propio de la matriz $A^2 - I$ es $\lambda = 0$, si tuviera polinomio característico $(\lambda - 1)^2 = 0$ tendria como valor propio a 1. Tambien sirve dar un contra ejemplo.

Puntaje:
2 ptos por argumentar cada alternativa correctamente.