



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: TOMÁS FÜHRER – AYUDANTE: AGUSTÍN GILBERT

Introducción al Álgebra y Geometría - MAT1207-4 Ayudantía 4 - 04-04-2023

Ejercicio 1: Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- a) $\exists z \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, zx = z$.
- b) $\forall p \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, p < q$.
- c) $\exists p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}, p < q$
- d) $\forall a \in \mathbb{Q}, \forall b \in \mathbb{Q}, a < b \implies \exists x \in \mathbb{Q} : a < x < b$.

Ejercicio 2: Niegue las siguientes proposiciones:

- a) $\exists m \in A, \forall x \in A, x \leq m$.
- b) $\forall n \in \mathbb{N}, n^{-1} \leq n \leq n^2$.
- c) $\forall a \in \mathbb{Q}, \forall b \in \mathbb{Q}, a < b \implies \exists x \in \mathbb{Q} : a < x < b$

Ejercicio 3: Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A \neq \emptyset$, determine el valor de verdad de la siguiente proposición:

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A)((x^2 + y) \text{ es par})$$

Ejercicio 4: Pruebe que $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ es divisible por $x + 2$.

Ejercicio 5: Pruebe que $x^5 - 3x^4 - x^2 - 2x - 3$ es divisible por $x - 3$.

Ejercicio 6: En cada uno de los siguientes casos, determine si Q es factor de P .

- a) $P(x) = x^4 + 3x^2 - 5x^2 + 2x - 24$; $Q(x) = x - 2$.
- b) $P(x) = x^3 - 4x^2 - 18x + 19$; $Q(x) = x + 3$.
- c) $P(x) = 2x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 8x + 12$; $Q(x) = 2x + 3$.

Ejercicio 7: (Propuesto) Sean A , B , y C conjuntos. Demuestre que si se cumple

$$(A \cap C = B \cap C) \wedge (A \cup C = B \cup C)$$

Entonces $A \subseteq B$.

Ejercicio 8: (Propuesto) En una delegación formada por 44 deportistas, encontramos algunos que participarán en las siguientes disciplinas: salto alto, 100 metros planos y salto con garrocha, la participación de ellos es la siguiente:

- 24 participan en salto alto;
- 18 participan en salto alto y/o 100 metros, pero no en garrocha;
- 25 participan en garrocha;
- 7 participan en todas las disciplinas;
- 9 participan en 100 metros, pero no en garrocha;
- 12 no participan ni en salto alto ni en 100 metros;

- 15 participan en salto alto, pero no en garrocha.

Determine:

- ¿Cuántos no participan en ninguna de las disciplinas?
- ¿Cuántos deportistas participan en salto alto y garrocha?
- ¿Cuántos deportistas participan en más de un deporte?

(Hint: realice el diagrama de Venn).

Ejercicio 9: Sea U el conjunto universo. Considere los conjuntos fijos $A, B \subseteq U$, con $A \neq \emptyset$. Para cualquier conjunto $X \subseteq U$ se define un nuevo conjunto $C(X)$ de la siguiente manera:

$$C(X) = \begin{cases} X \setminus B & \text{si } A \cap X \neq \emptyset \\ X \cup B & \text{si } A \cap X = \emptyset \end{cases}$$

- Pruebe que $C(A) = A \setminus B$.
- Pruebe que $C(A^c) = (C(A))^c$.
- Pruebe que $C(A) \cup C(B) \subseteq A \cup B$