Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

I2 – MAT 1620
7 de octubre, 2013

Problema 1.
Indique si las siguientes series convergen o divergen

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{n}\right]$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right)$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{2^n}}$

Solución:

(a) Por el criterio de la raíz,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} < 1$$

por lo cual **la serie converge**.

(b) Sean $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$; $b_n = \frac{1}{n}$. Sabemos que

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (serie geométrica convergente)
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge (serie armónica)

Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ convergiera, también lo haría

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\,(a_n - b_n) - a_n\,\right] = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n,$$

lo cual es una contradicción. Por tanto, **la serie diverge**.

(c) Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{1}{n}\right) \underbrace{=}_{n=1/x} \lim_{x\to 0+} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sec^2(x)}{1} = 1$$

por la Regla de L'Hopital.

Como el término general no tiende a cero, **la serie diverge**.

(d) Si llamamos a_n al término general de la serie, aplicamos el criterio del cuociente obteniendo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{2^{n+1}}} \cdot \frac{2^{2^n}}{n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{2^{2^n}} = 0,\end{aligned}$$

ya que la exponencial del denominador crece muchísimo más rápido que el numerador.

Por lo tanto, **la serie converge**.

Problema 2.
Dada la sucesión definida recursivamente por

$$a_1 \,=\, 1; \qquad a_{n+1} \,=\, \frac{1}{2}\,(a_n+3), \quad n=1,\,2,\,3,\,\ldots$$

demuestre que la sucesión converge y encuentre su límite.
(AYUDA: La recursión dice que cada término es el promedio entre el anterior y el número 3)

Solución: Probaremos, por inducción matemática, que la sucesión es :

1. Creciente $(a_n < a_{n+1} \quad \text{para } n \geq 1\,)$
2. Acotada superiormente por 3 $(a_n \leq 3 \quad \text{para } n \geq 1\,)$

Demostraciones

1.
   - Como $a_2 \,=\, (3+1)/2 \,=\, 2 > 1 \,=\, a_1,$ la propiedad a ser demostrada se cumple para $n=1$.
   - Supongamos ahora que $a_n < a_{n+1}$. Entonces,

     $$a_n+3 \,<\, a_{n+1}+3 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n+3}{2} < \frac{a_{n+1}+3}{2} \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} \,<\, a_{n+2}\,.$$

     Luego, la sucesión es, efectivamente, creciente.

2.
   - Claramente $a_1 \,=\, 1 \,\leq\, 3$.
   - Supongamos ahora que $a_n \leq 3$. Entonces $\underbrace{\frac{1+a_n}{2}}_{a_{n+1}} \leq \frac{3+3}{2} \,=\, 3$

     y por tanto $a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, la sucesión converge.

Cálculo del límite

Sea $L \,=\, \lim\limits_{n\to\infty} a_n \,=\, \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}\,.$

Aplicando límite a ambos lados de la regla de recurrencia obtenemos

$$L \,=\, \frac{L+3}{2} \quad \Rightarrow \quad L \,=\, \lim_{n\to\infty} a_n \,=\, 3.$$

Problema 3.

(a) Demuestre que si $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos tales que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Solución

I) <u>Método Indirecto</u>: Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y por tanto, por el test de divergencia, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

II) <u>Método Directo</u>: Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$ existe un natural m tal que, para todo $n \geq m$, se cumple que $a_{n+1}/a_n < L + \epsilon = r < 1$ de modo que $a_{n+1} < ra_n$ para $n = m, m+1, m+2, \ldots$

Así,

$$a_{m+1} < ra_m; \quad a_{m+2} < ra_{m+1} < r^2 a_m; \quad a_{m+3} < ra_{m+2} < r^3 a_m; \ldots\ a_{m+k} < r^k a_m\ \ldots$$

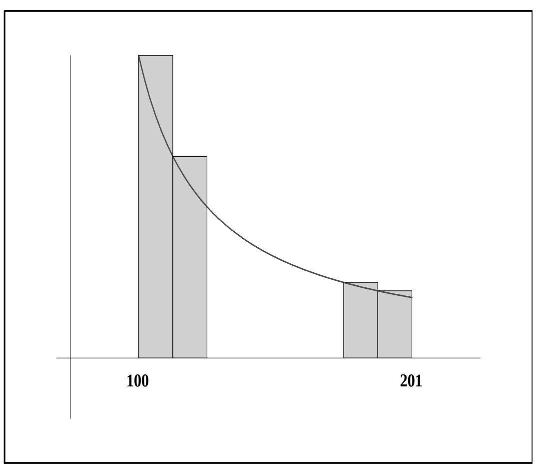
Así, la sucesión a_{m+k} satisface $0 < a_{m+k} < r^k a_m$ y como $0 < r < 1$, ésta última tiende a cero cuando $k \to \infty$, .

Por el teorema del emparedado, $0 = \lim\limits_{k\to\infty} a_{m+k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(b) Demuestre que

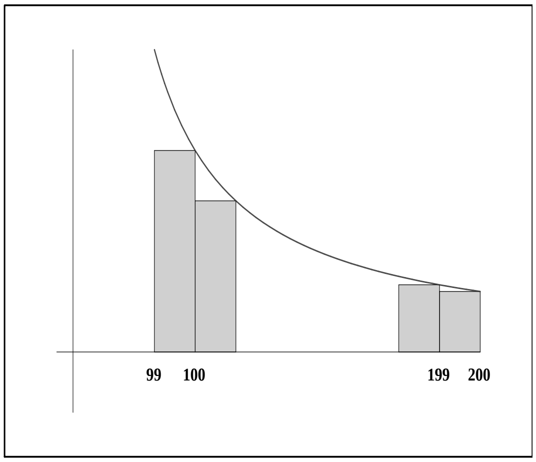
$$\ln\left(\frac{201}{100}\right) \leq \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \cdots + \frac{1}{200} \leq \ln\left(\frac{200}{99}\right).$$

Solución



La suma corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos de la figura. Como ellos son mayores que el área bajo la curva obtenemos

$$\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{200} \geq \int_{100}^{201} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{201}{100}\right).$$



La suma también puede verse como la suma de las áreas de los rectángulos de la figura. Como esta suma de áreas es menor que el área bajo la curva obtenemos

$$\frac{1}{100} + \cdots + \frac{1}{200} \leq \int_{99}^{200} \frac{dx}{x} = \ln\left(\frac{200}{99}\right).$$

Problema 4.
¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}$ es convergente la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2 + x^p}{x^4 + x^{1-p}}\, dx\,?$$

Justifique su respuesta.

Solución: Empezamos por escribir la integral en la forma

$$I \;=\; \int_0^\infty \frac{x^2 + x^p}{x^4 + x^{1-p}}\, dx \;=\; \int_0^1 \frac{x^2 + x^p}{x^4 + x^{1-p}}\, dx \;+\; \int_1^\infty \frac{x^2 + x^p}{x^4 + x^{1-p}}\, dx \;=\; I1 \,+\, I2$$

y consideremos varios casos

- Si $\mathbf{0 < p \leq 1}$ la integral es impropia de I y II especie. Por una parte tenemos que

  $$I1 \;=\; \int_0^1 \frac{x^p(x^{2-p}+1)}{x^{1-p}(x^{3+p}+1)}\, dx$$

  y el integrando se compara favorablemente con $g(x) \;=\; \dfrac{1}{x^{1-2p}}$ y como $\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx$ converge en este caso (pues $1-2p<1$) tenemos que I1 converge.

  Por otra parte

  $$I2 \;=\; \int_1^\infty \frac{x^2(1+x^{p-2})}{x^4(1+x^{-3-p})}\, dx$$

  la cual se compara favorablemente con la integral convergente $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, dx$ de modo que $I2$ también converge y por tanto toda la integral **converge**

- Si $\mathbf{p > 1}$ el integrando tiende a cero cuando $x \to 0+$ por lo que I es sólo de tipo I y su parte impropia, $I2$, es comparable a $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^\delta}{x^4}\, dx$ siendo δ el mayor entre 2 y p, de modo que en este caso, la integral **converge sólo si $\mathbf{1 < p < 3}$**.

- Si $\mathbf{p \leq 0}$ entonces $I2$ siempre convergerá al ser comparable a $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{x^4}\, dx\,.$

  Por otra parte, en este evento, amplificando el itegrando por x^{-p} obtenemos

  $$I1 \;=\; \int_0^1 \frac{x^{2-p}+1}{x^{4-p}+x^{1-2p}}\, dx$$

  la que se comporta, cerca de $x=0$, como $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ siendo α el menor entre $4-p$ y $1-2p$. Cualquiera sea el mínimo, como p es negativo $\alpha > 1$ y así $I1$ (y con ella toda la integral I) **diverge**

Resumiendo, **la integral converge si y śolo si $\mathbf{0 < p < 3}$**.

Alternativamente pueden analizar por separado las integrales $I1$ e $I2$ mostrando que

- $I1$ converge siempre que p sea mayor que cero
- $I2$ converge sólo si $p < 3$

y como la integral converge sólo si lo hacen ambas partes, se llega al resultado.