PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2023

Pauta Interrogación 2 - MAT1610

1. a) Si
$$f(x)+\frac{x^2f(x)}{1+xf(x)}=\frac{3}{2}$$
y $f(-1)=3$, calcule el valor de $f'(-1)$.

Solución:

Derivando ambos lados de la igualdad obtenemos que
$$f'(x)+\frac{(2xf(x)+x^2f'(x))(1+xf(x))-(x^2f(x))(f(x)+xf'(x))}{(1+xf(x))^2}=0$$
despejando obtenemos que reemplzando en $x=-1$, tenemos que
$$f'(-1)+\frac{(-6+f'(-1))(-2)-(3)(3-f'(-1))}{4}=0$$
despejando $f'(-1)$ tenemos que $f'(-1)=-\dfrac{3}{5}$

Puntajes:

- (1 punto) Por derivar correctamente usando la regla del cociente.
- (0.5 punto) Por derivara correctamente el numerador.
- (0.5 punto) Por derivara correctamente el denominador.
- (1 punto) Por obtener el valor de $f'(-1)=-\dfrac{3}{5}$.

b) Determine la derivada de la función
$$g(x)=\left(e^{x^2}+1\right)^{\cos(x)}$$

Solución:

Al aplicar logaritmo a ambos lados de la igualdad obtenemos que:
$$\ln(g(x))=\cos(x)\ln\left(e^{x^2}+1\right)$$
ahora derivando tenemos que
$$\frac{g'(x)}{g(x)}=-\operatorname{sen}(x)\ln\left(e^{x^2}+1\right)+\cos(x)\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}$$

obteniendo que

$$g'(x) = \left(e^{x^2}+1\right)^{\cos(x)}\left[-\operatorname{sen}(x)\ln\left(e^{x^2}+1\right)+\cos(x)\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}\right]$$

Puntajes:

- (1 punto) por aplicar logaritmo.
- (1 punto) por derivar correctamente la igualdad.
- (1 punto) por determinar $g'(x)$.

2. Considere la curva en el plano xy dada por la ecuación:

$$e^{xy}-1 = \sin\left(\pi(x+y)\right)$$

Sea L_1 la recta tangente a la curva en el punto $A(1,0)$ y sea L_2 la recta tangente a la curva en el punto $B(0,1)$. Determine las coordenadas del punto de intersección C de L_1 y L_2.

Solución:

Derivando la curva tenemos que

$$(y+xy')e^{xy} = \pi\cos(\pi(x+y))(1+y')$$

reemplazando, tenemos que y' en $A(1,0)$ es $-\dfrac{\pi}{1+\pi}$ y que y' en $B(0,1)$ es $y' = -\dfrac{\pi+1}{\pi}$, de esta manera podemos ver que las ecuación de L_1 es $y = -\dfrac{\pi}{1+\pi}(x-1)$ y la de L_2 es $y = 1-\dfrac{\pi+1}{\pi}x$, por lo tanto la intersección de las rectas es en el punto $C\left(\dfrac{\pi}{2\pi+1},\dfrac{\pi}{2\pi+1}\right)$.

Puntajes:

- (1 punto) por la derivación implícita.
- (1 punto) por determinar y' en A.
- (1 punto) por determinar y' en B.
- (1 punto) por la ecuación de la recta L_1.
- (1 punto) por la ecuación de la recta L_2.
- (1 punto) por el punto de intersección.

3. Una partícula se desplaza a lo largo de la hipérbola $xy = 8$. Cuando alcanza el punto $(4, 2)$, la coordenada y se incrementa con una rapidez de $3cm/seg$. ¿Qué tan rápido cambia la coordenada x del punto en movimiento en ese instante?

   Solución:

   Observe que x e y varían en función del tiempo, y éstas están relacionadas por la ecuación $xy = 8$. Derivando, respecto al tiempo t, tenemos que

   $$x'(t)y(t) + x(t)y'(t) = 0$$

   entonces en el punto $(4, 2)$ $y'(t) = 3$, por lo tanto, al reemplazar obtenemos que

   $$x'(t) \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 0$$

   obteniendo que $x'(t) = -6$. Por lo tanto la coordenada x disminuye a una rapidez de $6cm/seg$.
   Puntajes:

   - (2 puntos) por le derivación implícita.
   - (1 punto) Por reconcoer que $y'(t) = 3$
   - (1 punto) Por los reemplazos.
   - (1 punto) Por determinar $x'(t)$.
   - (1 punto) Por responder la pregunta correctamente.

4. Considere la función

   $$f(x) = x^2 - x\text{sen}(x) - \cos(x)$$

   a) Determine el máximo y mínimo global (absoluto) de f en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
   Solución:

   Observamos que f es derivable y continua en todo $\mathbb{R}$ y que

   $$f'(x) = 2x - \text{sen}(x) - x\cos(x) + \text{sen}(x) = 2x - x\cos(x)$$

   entonces para encontrar máximos y mínimos en el intervalo debemos buscar puntos críticos ahí, observamos que $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$, obteniendo entonces que los candidatos a máximos y mínimos son $f(0) = -1, f(\pi) = \pi^2 + 1$ y $f(-\pi) = \pi^2 + 1$, obteniendo que -1 es el mínimo global y $\pi^2 + 1$ el máximo global.
   Puntajes:

   - (1 punto) por derivar correctamente.
   - (1 punto) por el punto crítico.
   - (1 punto) por concluir.

   b) Demuestre que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[0, \pi]$.
   Solución:
   Observe que f es continua en $[0, \pi]$ y que $f(0) = -1 < 0$ y que $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, por lo

tanto, por TVI, tenemos que, existe al menos una solución en el intervalo $(0, \pi)$, veamos ahora que no puede tener más de una.

Supongamos que existen dos soluciones a y b, con $a < b$ en el intervalo $[0, \pi]$. Tenemos, entonces, que las hipótesis del Teorema de Rolle se cumplen en el intervalo $[a, b]$, ya que f es continua en $[a, b]$ derivable en (a, b) y $f(a) = f(b) = 0$, por lo tanto, existe $c \in (a, b) \subset (0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$, pero esto no es posible porque $f'(c) = 0$ si y solo si $c = 0$ (ver inciso anterior), por lo tanto no puede haber más de una raíz.

Puntajes:

- (1 punto) Por usar TVI, indicando las hipótesis.
- (1 punto) Por suponer y usar Rolle en el intervalo adecuado.
- (1 punto) Por ver la contradicción y concluir.