PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
SEGUNDO SEMESTRE 2018.

UNA SOLUCIÓN EXAMEN CALCULO II ⋆ MAT1620

1. Analice la convergencia de las siguientes series númericas.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(1+\ln(n))}{\sqrt{n^4+n+7}}.$$

2. Analice la convergencia de las siguientes integrales.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(1+x+x^2)}}, \qquad \int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)(x^2+x+1)}}.$$

3. Considere la función

$$f(x,y)=\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, \qquad (x,y)\neq(0,0).$$

Es posible definir $f(0,0)$ de modo que f resulte ser continua en $(0,0)$.

4. Determine los extremos absolutos de la función

$$f(x,y)=2x^2+3y^2-4x-5,$$

sobre la región,

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 16.\}$$

CUADERNILLO 2

5. Sea R la región acotada por las curvas

$$y = x, \quad y = 3x, \quad xy = 1, \quad xy = 3.$$

   Calcule

$$\int_R\int xy\,dA.$$

6. Sea V el sólido obtenido de intersectar las regiones

$$z \geq \sqrt{3}(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \quad |x| \leq y.$$

   Calcule el volumen de V.

7. Sea D la región en el primer cuadrante acotada entre los circulos de ecuaciones,

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad x^2 + y^2 = 2x.$$

   Calcule

$$\int_D\int x\,dA.$$

SOLUCIÓN

1. Para analizar la convergencia de la primera serie notamos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)=2\neq 0,$$

por lo tanto, la serie dada es divergente.
Para el caso de la segunda serie, se tiene que

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(1+\ln(n))}{\sqrt{n^4+n+7}}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{n^4+n+7}}\leq\frac{1}{n^2}.$$

Y por el criterio para series tipo p, con $p=2$. Se tiene que la serie dada es convergente.
Asignación de puntaje:

a) a)Asignar 1.5 puntos por el uso correcto de algún criterio.
b) a) Asignar 1.5 puntos por concluir de manera correcta.
c) b)Asignar 1.5 puntos por el uso correcto de algún criterio.
d) b) Asignar 1.5 puntos por concluir de manera correcta.

2. Para analizar la convergencia de las integrales dadas, consideraremos

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1+x)(1+x+x^2)}},$$

y $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donde calculamos,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x(1+x)(1+x+x^2)}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=1\neq 0.$$

Por lo tanto, ambas integrales tienen el mismo comportamiento. Se concluye que la integral dada es convergente.

Para analizar la segunda integral, procedemos de manera analoga. Sea $f_2(x)=\dfrac{1}{x^2}$ y calculamos,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x(1+x)(1+x+x^2)}}}{\dfrac{1}{x^2}}=1.$$

Por lo tanto ambas integrales tienen el mismo comportamiento. Se concluye que la integral dada es convergente.
Asignación de puntaje:

a) a)Asignar 1.5 puntos por el uso correcto de algún criterio.
b) a) Asignar 1.5 puntos por concluir de manera correcta.
c) b)Asignar 1.5 puntos por el uso correcto de algún criterio.
d) b) Asignar 1.5 puntos por concluir de manera correcta.

3. Comenzaremos revisando la existencia de del límite de la función dada en $(0,0)$, utilizaremo para ello coordenadas polares.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^5\cos^2(\theta)\operatorname{sen}^3(\theta)}{r^2(2\cos^2(\theta)+\operatorname{sen}^2(\theta))} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3}{1+\cos^2(\theta)} = 0.$$

Por lo tanto si es posible definir $f(0,0)$ de modo que la función dada resulte ser continua en $(0,0)$, se define $f(0,0) = 0$. **Asignación de puntaje:**

a) Asignar 3 puntos por calcular de manera correcta el límite en $(0,0)$
b) Asignar 3 puntos por definir de manera correcta la función.

4. Debemos analizar en el interior y en el borde de la región dada. Para analizar el interior, debemos encontrar los posibles puntos criticos, es decir

$$\nabla f(x,y) = (0,0),$$

$$(4x-4, 6y) = (0,0).$$

La única solución de este sistema es el $P_1 = (1,0)$. El cual pertenece a la región.
Por otro lado para analizar en la frontera, utilizaremos el método de los Multiplicadores de Lagrange, para ello, sea $f(x,y) = 2x^2+3y^2-4x-5$ y $g(x,y) = x^2+y^2$. Con lo cual, buscamos

$$\nabla f(x,y) = \lambda g(x,y), \qquad g(x,y) = 16.$$

Esto se convierte en el sistema,

$$\begin{aligned} 4x-4 &= 2\lambda x \\ 6y &= 2\lambda y \\ x^2+y^2 &= 16. \end{aligned}$$

El cual tiene por soluciones,

$$P_2 = (4,0), \quad P_3 = (-4,0), \quad P_4 = (-2, 2\sqrt{3}), \quad P_5 = (-2, -2\sqrt{3}).$$

Finalmente, evaluamos en la función dada para determinar los extremos pedidos y se concluye que,

$$f(P_1) = -7, \qquad \text{es el valor minimo absoluto.}$$

$$f(P_4) = f(P_5) = 47, \qquad \text{es el valor máximo absoluto.}$$

Asignación de puntaje:

a) Asignar 1.5 puntos por analizar en el interior de la región.

b) Asignar 2 puntos por plantear y resolver el respectivo sistema de Lagrange.

c) Asignar 1.5 puntos por encontrar los candidatos a máximos y minimos.

d) Asignar 1 punto por concluir de manera correcta.

5. Notemos que la región dada puede ser expresada como acotada por las siguientes curvas.

$$\frac{y}{x} = 1, \quad \frac{y}{x} = 3, \quad xy = 1, \quad xy = 3.$$

Además los puntos de la forma $(0, y)$ no se encuentran la región en cuestión. Consideraremos a continuación,

$$u = \frac{y}{x}, \qquad v = xy.$$

con lo cual

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{-2y}{x} = -2u,$$

y por lo tanto la integral pedida se expresa como:

$$\int_1^3 \int_1^3 v \cdot \left| \frac{-1}{2u} \right| dudv$$

calculando

$$\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)(\ln(3)) = 2\ln(3).$$

Finalmente notamos que la región calculada corresponde a la porción que se encuentra en el primer cuadrante, como en el tercer cuadrante tambien tenemos otra región semejante y la función tiene el mismo signo se tiene que

$$\int_R \int xy \, dA = 4\ln(3).$$

Asignación de puntaje:

a) Asignar 1.0 punto por el correcto cambio de variable.

b) Asignar 2 puntos por el correcto planteamiento de la integral (incluyendo el Jacobiano).

c) Asignar 2 puntos por el calculo correcto de la integral.

d) Asignar 1 punto por utlizar la simetria de la región.

6. Expresaremos el volumen pedido de dos maneras distintas. En primer lugar haciendo uso de coordenadas cilindricas,

$$Vol(V) = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^1 \int_{\sqrt{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} r\, dzdrd\theta,$$

por otro lado haciendo uso de coordenadas esféricas,

$$Vol(V) = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 r^2 \operatorname{sen}(\varphi)\, drd\varphi d\theta + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\cos(\varphi)/\sqrt{3}\operatorname{sen}^2(\varphi)} r^2 \operatorname{sen}(\varphi)\, drd\varphi.$$

Finalmente calculando en cualquiera de las expresiones anteriores,

$$Vol(V) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{8}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{4}\right).$$

Asignación de puntaje:

a) Asignar 3 puntos por plantear de manera correcta la respectiva integral en algun sistema de coordenadas.

b) Asignar 3 puntos por calcular la respectiva integral.

7. Para calcular la integral pedida utilizaremos coordenadas polares. Con esto las regiones quedan expresadas como

$$r = 2, \qquad r = 2\cos(\theta).$$

Por otro lado por la disposición geometrica de los circulos, podemos expresar nuestra integral como,

$$\int_D \int x\, dA = \cdot \int_0^{\pi/2} \int_{2\cos(\theta)}^{2} (r\cos(\theta))r\, drd\theta$$

calculando

$$\int_D \int x\, dA = \cdot \left(1 - \frac{3\pi}{16}\right)$$

Asignación de puntaje:

a) Asignar 1.5 puntos por describir la region de manera correcta (en polares u otro sistema).

b) Asignar 1.5 puntos por plantear de manera correcta la integral (esto incluye el Jacobiano).

c) Asignar 3 puntos por el calculo correcto de la integral.