Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2014

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 1

1. *a*) Calcular: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+2x-1}\right)$

Solución

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+2x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+2x-1})\,(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2+2x-1})}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2+2x-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\left(\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{x^2+2x-1}\right)}$$

(**1.5 pts**)

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2+2x-1}\right)} = -\frac{1}{2}.$$

(**1.5 pts**)

b) Determine las asíntotas verticales y horizontales de

$$f(x) = \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x^3-x}.$$

Solución

- Para determinar las asíntotas horizontales, veamos los límites al infinito:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x-1)(x+1)^2}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 2$$

  Por lo tanto, $y=2$ es asíntota horizontal.
  (**0.75 pts**)

- Para determinar las asíntotas verticales, veamos los límites a ± 1 y en 0.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(2x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(2x-1)(x+1)}{x(x-1)} = -\infty$$

Por lo tanto, $x = 1$ es asíntota vertical.
(**0.75 pts**)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(2x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(2x-1)(x+1)}{x(x-1)} = -\infty$$

Por lo tanto, $x = 0$ es asíntota vertical.
(**0.75 pts**)

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(2x-1)(x+1)}{x((x-1)} = 0$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{(2x-1)(x+1)^2}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(2x-1)(x+1)}{x(x-1)} = 0$$

Por lo tanto, $x = -1$ no es asíntota vertical

(**0.75 pts**)

2. *a*) Demuestre que existe al menos una solución real de la ecuación:

$$\sqrt[3]{x} = 1 - x$$

en el intervalo $]0,1[$.

Solución

Dado que $f(x)$ es función continua en todo $\mathbb{R}$ y en particular en $]0,1[$
(**0.5 pts**)
y como:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) =< 0 \quad \text{y} \quad f\left(\frac{3}{4}\right) > 0$$

Observación: Pueden ocupar cualquier para de puntos dentro del intervalo en los que f cambia de signo.
Entonces por el Teorema del Valor Intermedio, f toma el valor cero en el intervalo $[1/2, 3/4] \subset]0,1[$ y esa es una solución a esta ecuación.

(**2.5 pts**)

b) Sea $f(x) = [x] + [-x]$. Demuestre que $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe pero no es igual a $f(2)$.

Solución:

$$f(2) = [2] + [-2] == 0$$

(**0.5 pts**)

Veamos ahora los límites laterales en $x = 2$.

- $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2 - 3 = -1$
(**1.0 pts**)

- $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 - 2 = -1$
(**1.0 pts**)

Por lo tanto $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe y

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -1 \;\wedge\; f(2) = 0$$

(**0.5 pts**)

3. *a*) Dada la función continua $g(x)$ con $g(x) \neq 0$ para todo x en el dominio de $g,$ demuestre que la función:

$$f(x) \;=\; |x-a|g(x),$$

no es derivable en $x = a$.

Solución:

Para ver que no es derivable en $x = a$ debemos ver que los límites laterales siguientes son distintos:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|a+h-a|g(a+h)-0}{h} \overset{h\geq 0}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{hg(a+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} g(a+h) \;=\; g(a) \text{ por ser } g \text{ continua.}$$

(**1.0 pts**)

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|a+h-a|g(a+h)-0}{h} \overset{h\leq 0}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{-hg(a+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} -g(a+h) \;=\; -g(a) \text{ por ser } g \text{ continua.}$$

(**1.0 pts**)
Pero si $g(a) = -g(a)$ entonces $g(a) = 0$ pero por hipótesis $g(x) \neq 0$.

Por lo tanto, los límites laterales son distintos, lo que implica que no existe la derivada de f en a.
(**1.0 pts**)

b) Encuentre las dos ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^2 + 2$ que pasan por el punto $(1, -3)$.

Solución

La recta tangente a $f(x)$ en el punto (x_0, y_0)) de la curva, tiene por ecuación:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

En nuestro caso,

$$f'(x_0) = 2x_0$$

Luego la recta tangente tiene por ecuación:

$$y - y_0 = 2x_0(x - x_0).$$

Como la recta tiene que pasar por el punto $(1, -3)$ que no está sobre la curva, debe cumplir con la ecuación de la recta tangente:

$$-3 = y_0 + 2x_0(1 - x_0)$$

Además (x_0, y_0) es un punto de la curva, por lo tanto cumple con la ecuación de la curva, es decir:

$$y_0 = x_0^3 + 2$$

Reemplazando, obtenemos la ecuación:

$$x_0^2 - 2x_0 - 5 = 0$$

Sus soluciones son:

$$1 + \sqrt{6}\,,\ 1 - \sqrt{6}$$

Luego las dos rectas tangentes son:

$$T_1 : y - (9 + 2\sqrt{6}) = 2(1 + \sqrt{6})(x - (1 + \sqrt{6}))$$

(**1.5 pts**)

$$T_2 : y - (9 - 2\sqrt{6}) = 2(1 + \sqrt{6})(x - (1 - \sqrt{6})),$$

(**1.5 pts**)

4. *a)* Encontrar la derivada de

$$f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}-1}.$$

Solución

$$f'(x) \;=\; \frac{2x(\sqrt{x}-1)-(x^2+1)\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x-2\sqrt{x}+1} \;=\; \frac{4x^{3/2}(\sqrt{x}-1)-x^2-1}{2\sqrt{x}(x-2\sqrt{x}+1)}$$

(**3.0 pts**)

b) Sea f función derivable en $x=1$ tal que $f(1)=0$ y $f'(1)=3$.
Calcular

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x^2)}{2x+2}.$$

Solución

Dado que $f'(1) = 3$ esto nos dice que:

$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 3$ pero por hipótesis, $f(1)=0$, entonces tenemos que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)}{h} = 3. \Big(* \Big)$$

(**1.0 pts**)

Luego:

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x^2)}{2x+2} \;=\; \frac{1}{2} \lim_{x\to -1} \frac{f(x^2)}{x+1}$$

Haciendo cambio de variable: $x=-u$ tenemos

$$\frac{1}{2} \lim_{x\to -1} \frac{f(x^2)}{x+1} = \frac{1}{2} \lim_{u\to 1} \frac{f(u^2)}{1-u} \;=\; \frac{1}{2} \lim_{u\to 1} \frac{f(u^2)(1+u)}{1-u^2}$$

Haciendo ahora el cambio de variable $u^2 = z$ tenemos:

$$\frac{1}{2} \lim_{u\to 1} \frac{f(u^2)}{1-u} \;=\; \frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \frac{f(z)(1+\sqrt{z})}{1-z}$$

(**1.0 pts**)

y finalmente haciendo el cambio $z = 1+h$ tenemos

$$\frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \frac{f(z)(1+\sqrt{z})}{1-z} \;=\; -\frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)(1+\sqrt{1+h})}{h} \;\overset{(*)}{=}\; -\frac{1}{2}\cdot 3 \cdot (2) = \;-3.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x^2)}{2x+2} = -3$$

(**1.0 pts**)