PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2023

Pauta Examen - MAT1620

1. Determine el intervalo de convergencia de la serie. Justifique su respuesta.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{k3^k}.$$

Solución:

Para determinar el radio de convergencia calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n(x+1)}{3(n+1)}\right| = \frac{|x+1|}{3}$$

por lo tanto el radio de convergencia es 3, es decir converge si $|x+1| < 3$ y diverge si $|x+1| > 3$. Para determinar el intervalo debemos estudiar los casos en que $|x+1| = 3$.

Para $x = 2$ la serie de potencias se transforma en la serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

que diverge por criterio p.

Para $x = -4$ la serie de potencias se convierte en la serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

que converge por criterio de serie alternate.

Luego el intervalo de convergencia de la serie de potencias es $[-4, 2)$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por determinar correctamente el limite para usar el criterio de la razón (también puede ser el de la raíz).
- (1 punto) por determinar que la serie converge en $(-4, 2)$ y diverge en $(-\infty, -4)$ y $(2, \infty)$.
- (1.5 puntos) por estudiar correctamente el caso $x = 2$, justificadamente.
- (1.5 puntos) por estudiar correctamente el caso $x = -4$, justificadamente.
- (1 punto) por determinar el intervalo de convergencia.

2. Decida si el siguiente límite existe. En caso de existir, calcúlelo. Justifique su respuesta.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2}$$

Solución:

Calculamos el límite pedido por la trayectoria $y = x^2$, obteniendo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 e^{x^2}}{x^4 + 4x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}}{5} = \frac{1}{5}$$

Ahora, si calculamos el límite por el eje Y, es decir por la trayectoria $x = 0$ obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y e^y}{x^4 + 4y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{4y^2} = 0$$

de lo anterior tenemos que el límite dado no existe.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por elegir trayectoria adecuada.
- (1 punto) por calcular correctamente el límite en dicha trayectoria
- (1 puntos) por elegir una segunda trayectoria adecuada.
- (1 punto) por calcular correctamente el límite en dicha trayectoria.
- (2 punto) por concluir que el límite no existe.

3. Calcule los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x - x^2y - y + xy^2$$

y determine su naturaleza. Justifique su respuesta.

Solución:
Observe que

$$f_x = 1 - 2xy + y^2 \text{ y } f_y = -x^2 - 1 + 2xy$$

luego, resolviendo el sistema

$$f_x = f_y = 0$$

tenemos que los únicos puntos críticos son $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

para determinar la naturaleza de estos puntos críticos usaremos la prueba de la segunda derivada, partimos por calcular las derivadas de segundo orden, obteniendo que:

$$f_{xx} = -2y,\ f_{xy} = -2x + 2y,\ f_{yy} = 2x.$$

Para el punto $(1, 1)$, tenemos que $D = f_{xx}(1, 1)f_{yy}(1, 1) - f_{xy}^2(1, 1) = -4 < 0$, por lo tanto $(1, 1)$ es punto silla.

Para el punto $(-1, -1)$, tenemos que $D = f_{xx}(-1, -1)f_{yy}(-1, -1) - f_{xy}^2(-1, -1) = -4 < 0$, por lo tanto $(-1, -1)$ es punto silla.

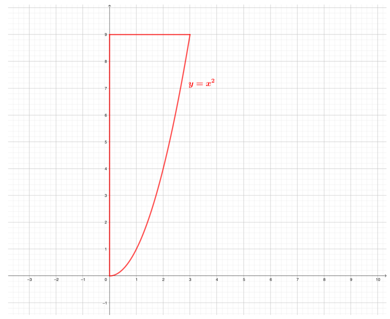
Distribución de puntajes:

- (0.5 puntos) por determinar correctamente f_x.
- (0.5 puntos) por determinar correctamente f_y.
- (2 puntos) por determinar que los únicos puntos críticos son (1,1)y (-1,-1).
- (1 punto) por determinar correctamente las derivadas de orden dos.
- (1 punto) por clasificar justificadamente el punto (1,1).
- (1 punto) por clasificar justificadamente el punto (-1,-1).

4. (a) Calcule $\int_0^3 \int_{x^2}^9 x\cos(y^2)\, dydx$. Justifique su respuesta.

Solución:

Observe que la región de integración es la descrita en la siguiente figura



la que también puede ser descrita como

$$\{(x,y) : 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 9\}$$

lo que nos permite cambiar el orden de integración, obteniendo que

$$\int_0^3 \int_{x^2}^9 x\cos(y^2)\, dydx = \int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x\cos(y^2)\, dxdy$$

y al calcular esta integral, obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^9 \int_0^{\sqrt{y}} x\cos(y^2)\, dxdy &= \int_0^9 \left[\frac{x^2}{2}\cos(y^2)\right]_0^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^9 \frac{y}{2}\cos(y^2)dy \end{aligned}$$

para resolver esta ultima integral hacemos cambio de variable $u = y^2$, obteniendo que $du = 2ydy$ y así

$$\int_0^9 \frac{y}{2}\cos(y^2)dy = \frac{1}{4}\int_0^{81} \cos(u)du = \frac{1}{4}\text{sen}(u)\Big|_0^{81} = \frac{1}{4}\text{sen}(81).$$

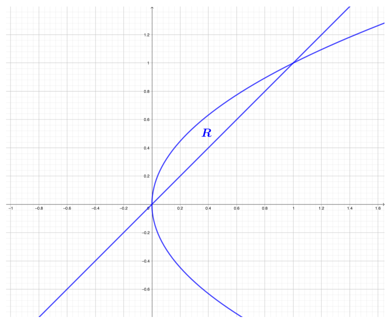
Distribución de puntajes:

- (1 punto) por realizar correctamente el cambio de orden de integración.
- (1 punto) por determinar correctamente la integral respecto a dx.
- (1 punto) por determinar correctamente la segunda integral.

(b) Calcule el volumen del sólido delimitado por las superficies $y^2 = x, y = x$, $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$. Justifique su respuesta.

Solución:

Usando integrales dobles para calcular el volumen del sólido tenemos que la región proyectada en el plano XY corresponde a la de la figura



por lo tanto el volumen puede ser calculado como

$$\iint_R (x^2 + y^2) dV$$

viendo lo anterior como integral iterada, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\iint_R (x^2 + y^2) dV &= \int_0^1 \int_{y^2}^{y} (x^2 + y^2) dx dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \right]_{y^2}^{y} dy \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4}{3} y^3 - y^4 - \frac{y^6}{3} \right) dy \\
&= \left[\frac{y^4}{3} - \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{21} \right]_0^1 \\
&= \frac{3}{35}
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por plantear correctamente una integral que corresponda al volumen pedido.
- (1 punto) por calcular correctamente la primera integral iterada.
- (1 puntos) por calcular correctamente la primera integral iterada y obtener el volumen.

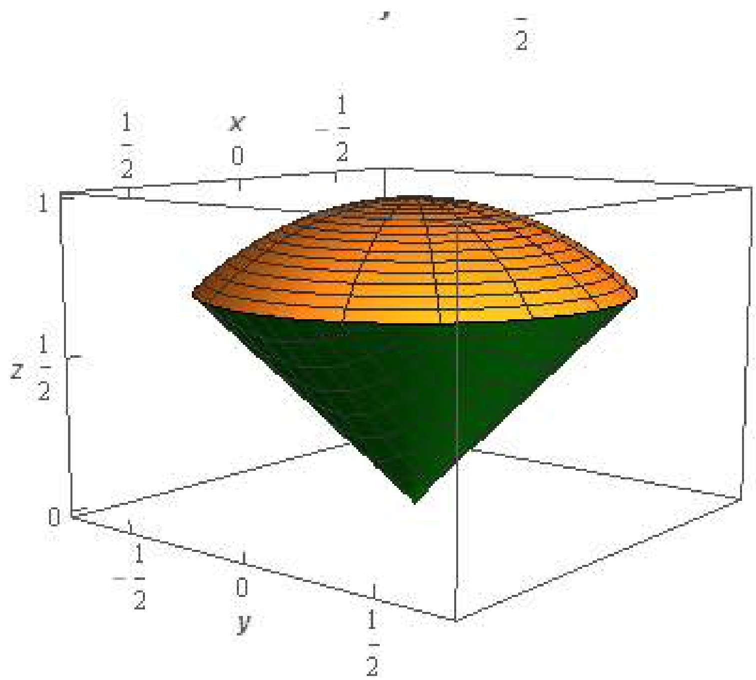
5. Calcule

$$\iiint_E 3z dV$$

donde E es el sólido acotado superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y acotado inferiormente por el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Justifique su respuesta.

Solución 1:

Usaremos coordenadas esféricas para el cálculo de la integral y notemos que la región que debemos integrar es de la forma:



De donde tenemos que:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$
$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq \rho \leq 1$$

Luego la integral buscada es dada por:

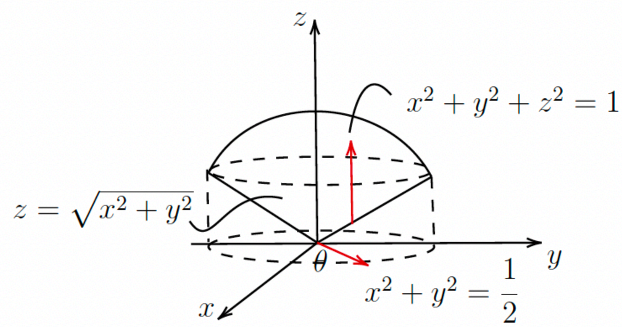
$$
\begin{aligned}
\iiint_E 3z dV &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (3\rho\cos\varphi)\left(\rho^2\sin\varphi\right) d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 3\rho^3\cos\varphi\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4}\rho^4\cos\varphi\sin\varphi\right)\Bigg|_0^1 d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\pi} \frac{3}{4}\cos\varphi\sin\varphi d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{3}{4}\theta\cos\varphi\sin\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{2}\pi\cos\varphi\sin\varphi d\varphi \\
&= \left(-\frac{3}{8}\pi\cos(2\varphi)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{8}\pi
\end{aligned}
$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por determinar correctamente el rango de ϕ.
- (1 punto) por determinar correctamente el rango de θ.
- (1 punto) por determinar correctamente el rango de ρ.
- (1 punto) por plantear correctamente la integral en coordenadas esféricas.
- (1 punto) por la primera integral iterada.
- (0.5 puntos) por la segunda integral iterada.
- (0.5 puntos) por la tercera integral iterada.

Solución 2:

Usaremos coordenadas cilíndricas para el cálculo de la integral



Intersecando la esfera y el cono resulta

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

entonces

$$E : 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}},\ r \leq z \leq \sqrt{1-r^2}$$

Así

$$\iiint_E 3z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} 3z\, dz\, r\, dr d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{3}{2} z^2 \Big|_r^{\sqrt{1-r^2}} r\, dr \ = 3\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2r^2) r\, dr$$

$$= 3\pi (\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2}) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3\pi}{8}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por determinar correctamente el rango de θ
- (1 punto) por determinar correctamente el rango de r.
- (1 punto) por determinar correctamente el rango de z
- (1 punto) por plantear correctamente la integral en coordenadas cilíndricas.
- (1 punto) por la primera integral iterada.
- (0.5 puntos) por la segunda integral iterada.
- (0.5 puntos) por la tercera integral iterada.