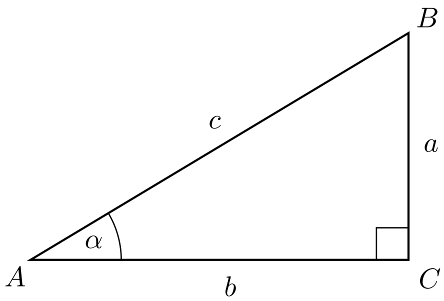
Razones Trigonométricas

1 Las Razones Trigonométricas

DEFINICIÓN Dado el siguiente triángulo rectángulo,



Definimos las siguentes razones:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}\,, \qquad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}\,, \qquad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$
$$\csc(\alpha) = \frac{c}{a}\,, \qquad \sec(\alpha) = \frac{c}{b}\,, \qquad \cot(\alpha) = \frac{b}{a}\,.$$

PROPOSICIÓN 1 Se tienen las siguientes identidades:

1. $\csc(\alpha) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\alpha)}$
2. $\sec(\alpha) = \dfrac{1}{\cos(\alpha)}$
3. $\cot(\alpha) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$
4. $\tan(\alpha) = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
5. $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
6. $\tan^2(\alpha) + 1 = \sec^2(\alpha)$
7. $\cot^2(\alpha) + 1 = \csc^2(\alpha)$

Demostración Las primeras cuatro propiedades salen inmediatamente de la definición de las razones trigonométricas. Para ver que $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$, notemos que

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}\,.$$

Pero usando el teorema de Pitágoras, tenemos que

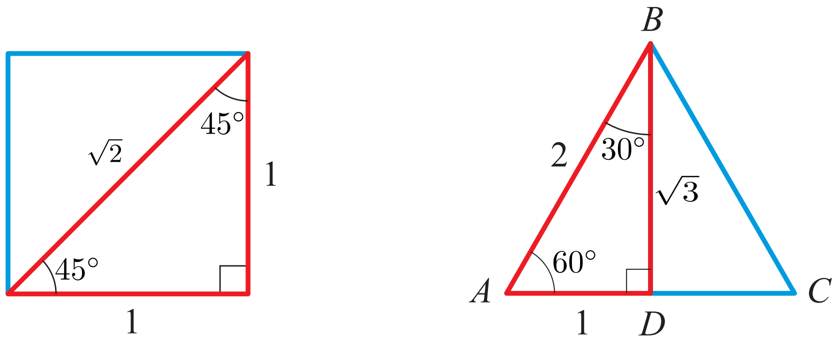
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Por lo tanto, $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. De manera similar se demuestran las últimas tres identidades.

EJEMPLO 1 Si en un triángulo ABC, rectángulo en C, se tiene que $\tan(\alpha) = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$ y $c = \sqrt{70}$, calcular el valor del cateto a.

2 Deducción de los valores de las razones trigonométricas

Veamos como deducir algunas razones trigonométricas de algunos ángulos importantes, en particular, de los ángulos de 30, 45 y 60 grados. Tomemos un triángulo equilátero y tracemos su altura desde B como lo muestra la figura



Observando el triángulo de la derecha, vemos que $\operatorname{sen}(60°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cos(60°) = \dfrac{1}{2}$. Lo mismo se puede hacer con el triángulo de la izquierda. Podemos resumir esto en la siguiente tabla:

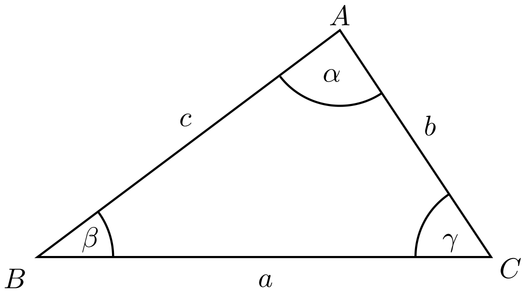
Grados	0	30	45	60	90
$\operatorname{sen}(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

A partir de los pocos valores que acabamos de calcular, podemos notar que

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \neq \operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta)\ .$$

3 Resolución de triángulos

En lo que sigue de esta sección, se considerará el triángulo ABC dado en la siguiente figura:

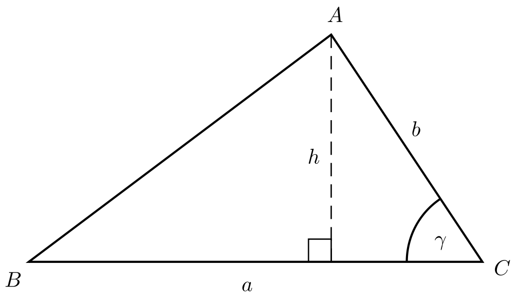


TEOREMA 1 El área de un triángulo es

$$A(\triangle ABC) = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen}(\gamma) \,.$$

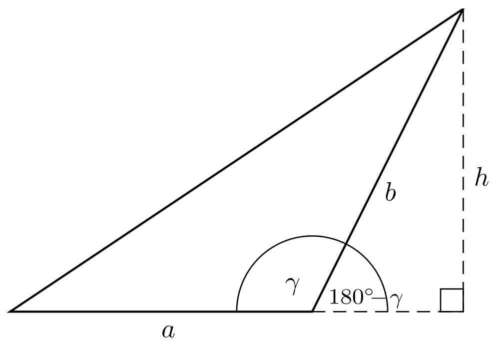
Demostración Consideraremos dos casos separados:

- El ángulo γ es agudo. Esta situación se refleja en la siguiente figura:



En este caso tenemos que $\operatorname{sen}(\gamma) = \frac{h}{b}$, con lo cual $h = b \operatorname{sen}(\gamma)$ y por lo tanto el área es $\frac{1}{2} ab \operatorname{sen}(\gamma)$.

- El ángulo γ no es agudo. La siguiente figura refleja esta situación:



En este caso, vemos que $\operatorname{sen}(180° - \gamma) = \frac{h}{b}$ por lo tanto $h = b \operatorname{sen}(\gamma)$ y nuevamente el área es $\frac{1}{2} ab \operatorname{sen}(\gamma)$.

TEOREMA 2 (Teorema del seno)
En todo triángulo ABC se cumple:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{b} = \frac{\operatorname{sen}(\gamma)}{c} \,.$$

Demostración Por el teorema anterior, tenemos que el área del triángulo ABC es $\frac{1}{2}ab\,\text{sen}(\gamma)$ pero también es $\frac{1}{2}ac\,\text{sen}(\beta)$ y también $\frac{1}{2}bc\,\text{sen}(\alpha)$. Luego

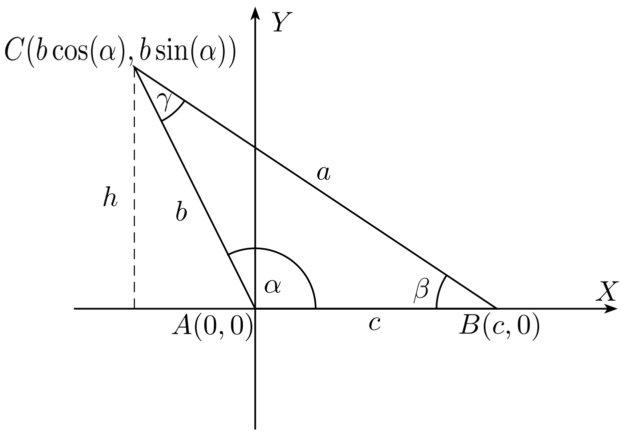
$$ab\,\text{sen}(\gamma) = ac\,\text{sen}(\beta) = bc\,\text{sen}(\alpha)\ .$$

Dividiendo estas igualdades por abc se obtiene el resultado.

TEOREMA 3 (Teorema del coseno)
En todo triángulo ABC se cumple:

1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$
2. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$
3. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

Demostración Demostraremos la primera igualdad, el resto se hace en forma análoga. Colocamos el triángulo ABC en el plano, poniendo el vértice A en el origen, tal como muestra la siguiente figura:



Entonces calculamos la longitud de a como la distancia entre dos puntos del plano:

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\cos(\alpha) - c^2) + (b\,\text{sen}(\alpha) - 0)^2 \\ &= b^2\cos^2(\alpha) - 2bc\cos(\alpha) + c^2 + b^2\cos^2(\alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)\ . \end{aligned}$$

4 Guía de Ejercicios

1. Sea α un ángulo agudo. Si $\tan(\alpha) = \dfrac{2pq}{p^2 - q^2}$, exprese $\cos(\alpha)$ y $\csc(\alpha)$ en términos de p y q.

2. Si $a\cos^2(\alpha) + b\,\mathrm{sen}^2(\alpha) = c$, demuestre que
$$\tan^2(\alpha) = \frac{c-a}{b-c}\,.$$

3. Si en un triángulo ABC, rectángulo en C, se tiene que $\cot(\alpha) = \frac{25}{4}$ y $c = 7$, calcular el valor del cateto b.

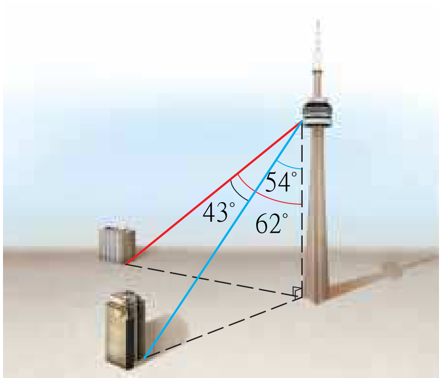
4. Si $u = \sec(\alpha)$ y $v = 3\tan^2(\alpha)$, calcular el valor de $3u^2 - v$.

5. Si $\cot(\alpha) = a$, calcular el valor de
$$\sec^2(\alpha) - 2\left(a + \frac{1}{a}\right) + \csc^2(\alpha)\,,$$
en términos de a.

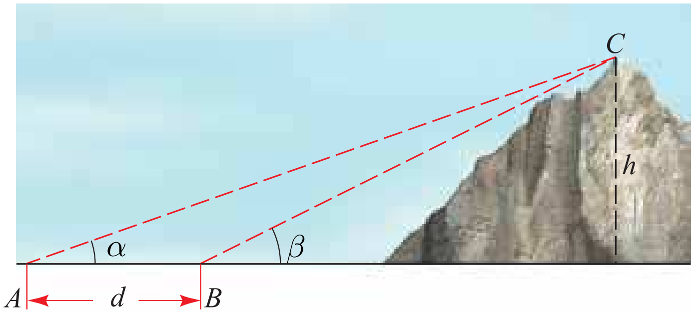
6. Calcular el valor de
$$\frac{\tan^2(\alpha)}{1+\tan^2(\alpha)} \cdot \frac{1+\cot^2(\alpha)}{\cot^2(\alpha)}\,.$$

7. Un asta de bandera está enclavada verticalmente en lo alto de un edificio; a $12m$. de distancia, los ángulos de elevación de la punta del asta y de la parte superior del edificio son de 60º y 30º respectivamente. Hallar la longitud del asta.

8. La torre Entel es una torre de telecomunicaciones ubicada en la comuna de Santiago. Una mujer que está en la plataforma de observación, a 127 metros sobre el suelo, desea determinar la distancia entre dos puntos de referencia que están al nivel del suelo. Ella observa que el ángulo formado por las líneas de vista a estos dos puntos de referencia es de 43°; también observa que el ángulo entre la vertical y la línea de vista a uno de los puntos de referencia es de 62° y el del otro punto de referencia es de 54°. Encuentre la distancia entre los dos puntos de referencia.



9. Para calcular la altura h de una montaña, se miden el ángulo α, β y la distancia d, como se ve en la siguiente figura.



a) Demuestre que $h = \dfrac{d\,\mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta)}{\mathrm{sen}(\beta-\alpha)}$.

b) Use las fórmulas del inciso (a) para hallar la altura de una montaña si $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ y $d = 40$ metros.

10. Determine la distancia de un punto A a otro punto C inaccesible por C. Por ejemplo, C está al otro lado de un río que no podemos pasar.

11. Determine la distancia entre dos puntos innaccesibles D y C. Por ejemplo, C y D están en el otro lado de un río que no podemos pasar.