MAT1107 - Introducción al cálculo

GREGORIO MORENO

GRMORENO@MAT.UC.CL

$$8 \cdot x + 3 = 5 \cdot x + 6$$

$$a+b,\ a\cdot b,\ \forall a,b \in \mathbb{R}$$

- $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tq $a+0=a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
- $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b$ tq $a+b=0$

$$(8x+3)+(-3) = (5x+6)+(-3)$$

$$8x+(3+(-3)) = 5x+(6+(-3))$$

- Asociatividad de la suma

$$8X + 0 = 5X + 3$$

$$8X = 5X + 3$$

$$8X + (-5X) = (5X + 3) + (-5X)$$

- $8X + (-5X)$

$$= (8 + (-5))X$$

$$= 3X$$

- $ac + bc = (a+b)\cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

- $(5X + 3) + (-5X)$

$$= 5X + (3 + (-5X))$$

$$= 5x + (-5x + 3)$$

- $a + b = b + a, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

$$= (5x + (-5x)) + 3$$

$$= 0 + 3$$

$$= 3 + 0$$

$$= 3$$

Hosha ecd:

$$3x = 3$$

- $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0, \ \exists b \in \mathbb{R}$ hq $ab = 1$

$$3X = 3$$

$$(3 \cdot X) \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$3 \cdot \left(X \cdot \frac{1}{3}\right) = 1$$

- Producto es asociativo

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot X\right) = 1$$

- Producto es conmutativo

$$\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot X = 1$$

$$1 \cdot X = 1$$

- $1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{X = 1}$$

Axiomas de cuerpo

- Las siguientes son las propiedades que caracterizan a un *cuerpo*:

Existencia de la suma	A cada par de números a, b es posible asociar un cierto número $a+b$ al que llamaremos "la suma de a y b", o "a más b".
Conmutatividad de la suma	$a+b=b+a$ para todo par de números a y b.
Asociatividad de la suma	Dados tres números a, b y c cualesquiera se tiene que $(a+b)+c=a+(b+c)$
Neutro aditivo	Existe un número, al que representaremos con el símbolo "0", tal que $a+0=a$ para cualquier número a
Inverso aditivo	Dado cualquier número a es posible encontrar un número b tal que $a+b=0$

Existencia del producto	A cada par de números a, b es posible asociar un cierto número, al que denotaremos como ab, o como $a \cdot b$, al que llamaremos "el producto de a y b", o "a por b".
Conmutatividad del producto	Para todo par de números a y b se tiene que $ab=ba$
Asociatividad del producto	Dados tres números a, b y c cualesquiera se tiene que $a(bc)=(ab)c$
Neutro multiplicativo	Existe un número, al que representaremos con el símbolo "1", tal que $a \cdot 1 = a$ para cualquier número a
Inverso multiplicativo	Dado cualquier número $a \neq 0$ es posible encontrar un número b tal que $ab=1$
Distributividad	Dados tres números a, b y c cualesquiera se tiene que $a(b+c)=ab+ac$

- Obs:
  - $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son cuerpo
  - $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo

- <u>Notación</u>:
  - Inverso aditivo de a: $-a$
  - Inverso multiplicativo de a: $a^{-1}, \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$

- <u>Lema</u>: $0 \cdot a = 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$

<u>DEM</u>:

$$0 \cdot a = (0+0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$

$$0 \cdot a + (-0 \cdot a) = (0 \cdot a + 0 \cdot a) + (-0 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot a + (0 \cdot a + (-0 \cdot a)) \\ &= 0 \cdot a + 0 \\ &= 0 \cdot a \end{aligned}$$

$\square$

• <u>Corolario</u>: 0 no tiene inverso multiplicativo

<u>DEM</u>:

Supongamos que $\exists b \in \mathbb{R}$ tq $0 \cdot b = 1$.

<u>Pero</u> demostramos $0 \cdot b = 0$

$\Rightarrow$ Contradicción.

Por lo tanto, no existe tal $b \in \mathbb{R}$

$\square$

• <u>Lema</u> : $-a = (-1)\cdot a, \ \forall a \in \mathbb{R}$

<u>DEM</u>:

Vamos a demostrar que $(-1)\cdot a$ es un inverso aditivo de a.

$$
\begin{aligned}
a + (-1)\cdot a &= (1 + (-1))\cdot a \\
&= 0 \cdot a \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Para concluir, necesitamos saber que el inverso aditivo es único (ver lema siguiente) $\square$

- **Lema**: $\forall a \in \mathbb{R}, \exists! b \in \mathbb{R}$ tq $a + b = 0$

DEM:

- **Existencia**: es un axioma de la suma

- **Unicidad**:

Sean $b, c \in \mathbb{R}$ tq

$$a + b = 0 \ , \ a + c = 0$$

$$a + b = a + c$$

$$b + (a + b) = b + (a + c)$$

$$(b+a)+b = (b+a)+c$$

$$0 + b = 0 + c$$

$$b = c$$

$\square$