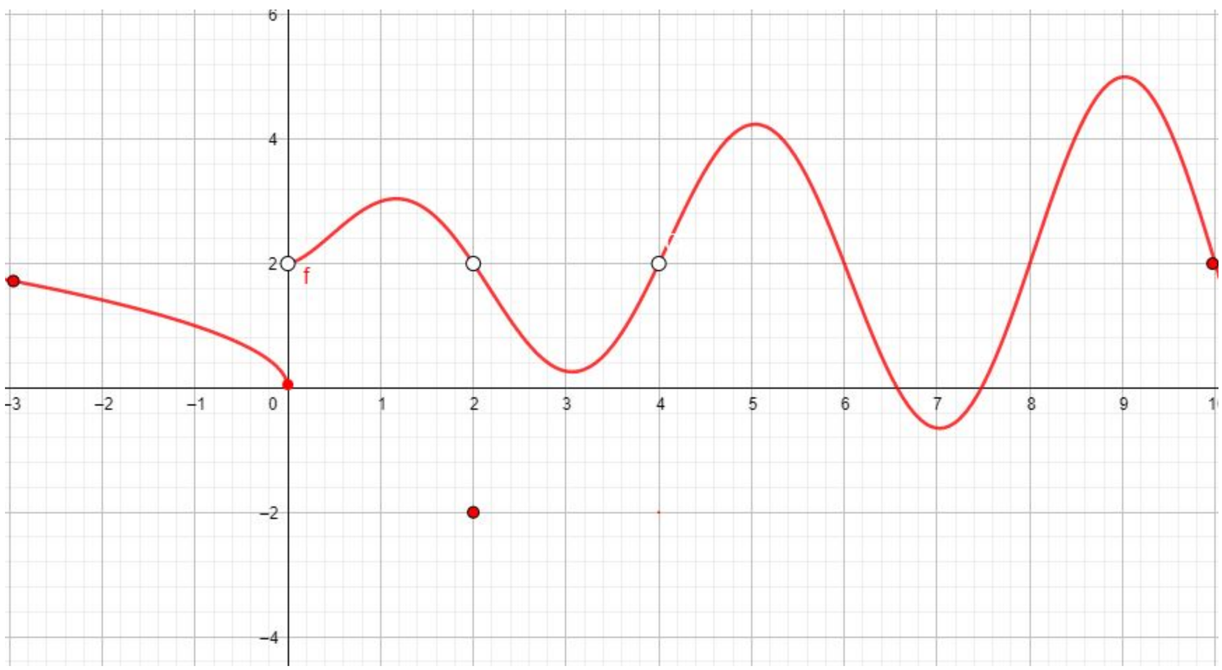
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2020

Ayudantía 1 - MAT1610

1. Para la función, $f(x)$, cuya gráfica está dada, determine, si existe, cada límite indicado. En caso de que no exista, justifique su respuesta.



$a)$ $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ $\quad b)$ $\lim_{x\to 4} f(x) = 2$ $\quad c)$ $\lim_{x\to 0} f(x) =$ no existe ya que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$

2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

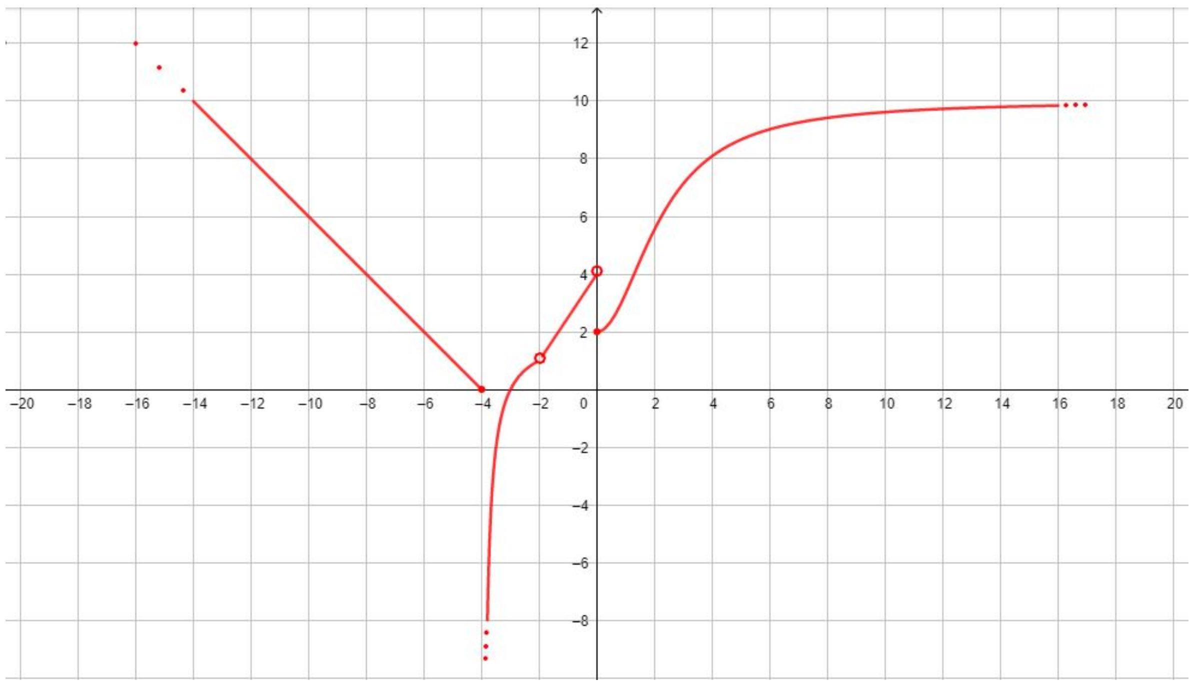
$a)$ $\lim_{x\to -4^+} f(x) = -\infty$

$b)$ $\lim_{x\to -4^-} f(x) = 0$

$c)$ $\lim_{x\to -2} f(x) =$ existe y $-2 \notin Dom(f)$

$d)$ $\lim_{x\to 0} f(x) =$ no existe

La gráfica de un ejemplo de función que cumple las condiciones dadas se muestra en la figura.



3. Para la función $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{|x-2|}$

   (a) Determine el valor de $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

   (b) ¿Existe el $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$? Justfique su respuesta. En caso afirmativo, cuál es su valor?

Note que, el dominio de la función f son los valores reales no negativos diferentes de 2 y que

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & si \quad x \geq 2 \\ \\ 2-x & si \quad x < 2 \end{cases}$$

entonces, la función f puede escribirse como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2-x} & si \quad 0 \leq x < 2 \\ \\ \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} & si \qquad x > 2 \end{cases}$$

o, equivalelentemente, como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{-(\sqrt{x}+\sqrt{2})} & si \quad 0 \leq x < 2 \\ \\ \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} & si \qquad x > 2 \end{cases}$$

ya que

$$2 - x = (\sqrt{2} - \sqrt{x})(\sqrt{2} + \sqrt{x}) = -(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$$

$$x - 2 = (\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})$$

Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-(\sqrt{x}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{-(\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} + \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{-\left(0+\sqrt{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Para la parte b) se estudian los límites laterales

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{-(\sqrt{x}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{-(\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{x} + \lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{2})} \\
&= \frac{1}{-\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x} + \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Entonces, como $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.

4. Demuestre, usando la definición, que $\lim_{x\to -1} \frac{-5+3x}{2} = -4$

Sea ε un número positivo dado. Se debe determinar un número positivo δ tal que:

$$\text{si } |x-(-1)|<\delta \text{ entonces } \left|\tfrac{-5+3x}{2}-(-4)\right|<\varepsilon$$

o, equivalentemente,

$$\text{si } |x+1|<\delta \text{ entonces } \left|\tfrac{-5+3x}{2}+4\right|<\varepsilon$$

Note que,

$$\begin{aligned} \left|\frac{-5+3x}{2}+4\right| &= \left|\frac{-5+3x+8}{2}\right| \\ &= \left|\frac{3x+3}{2}\right| \\ &= \left|\frac{3}{2}(x+1)\right| \\ &= \frac{3}{2}\left|x+1\right| \end{aligned}$$

y, si $|x+1|<\delta$, entonces $\frac{3}{2}\left|(x+1)\right|<\frac{3}{2}\delta$. Es decir, que:

$$\text{si } |x+1|<\delta \text{ entonces, } \left|\tfrac{-5+3x}{2}+4\right| = \tfrac{3}{2}\left|x+1\right| < \tfrac{3}{2}\delta$$

Así, para garantizar que $\left|\frac{-5+3x}{2}+4\right|<\epsilon$, basta garantizar que $\frac{3}{2}\delta\le\varepsilon$. En particular, basta considerar $\delta=\frac{2}{3}\varepsilon$.

Para la verificación, observe que, para $\varepsilon>0$ dado, si se toma $\delta=\frac{2}{3}\varepsilon$

$$\begin{aligned} |x+1|<\delta &\implies |x+1|<\frac{2}{3}\varepsilon \\ &\implies \frac{3}{2}\left|x+1\right|<\frac{3}{2}\frac{2}{3}\varepsilon \\ &\implies \underbrace{\frac{3}{2}\left|x+1\right|}_{\downarrow}<\varepsilon \\ &\implies \left|\frac{-5+3x}{2}+4\right|<\varepsilon \end{aligned}$$

lo cual demuestra lo requerido.

5. Determine, si corresponde, la ecuación de la(s) asíntota(s) vertical(es) de la función dada:

   (a) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+2020}}{3x-6}$
   Note que el denominador de $f(x)$ es cero si $x = 2$, por lo que la recta de ecuación $x = 2$ es una posible asíntota vertical. El numerador es $\sqrt{2036}$, que es mayor que cero, y cuando x tiende a 2 por la derecha (2^+), la expresión $3x - 6$ toma valores positivos que tienden a cero. Entonces,

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{4x^2+2020}}{3x-6} = +\infty$$

   Así, la recta de ecuación $x = 2$ es una asíntota vertical de f.
   Además, debido a que cuando x tiende a 2 por la izquierda (2^-), la expresión $3x-6$ toma valores negativos que tienden a cero, se tiene que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{4x^2+2020}}{3x-6} = -\infty$$

   lo cual, también indica que la recta de ecuación $x = 2$ es una asíntota vertical de la función f.

   (b) $f(x) = \frac{x^3-x}{x^2-6x+5}$
   En este caso el denominador de la función racional dada se anula cuando $x = 1$ y cuando $x = 5$, por lo que las rectas de ecuación $x = 1$ y $x = 5$ son posibles asíntotas verticales. Sin embargo, para el caso en el que $x = 1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{x-1}\frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)} \lim_{x\to 1} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
&= 1.\left(\frac{2}{-4}\right) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   es decir, el límite es finito, por lo que la recta de ecuación $x = 1$ no corresponde a una asíntota vertical de la función f.

Para el caso de $x = 5$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5^+} f(x) &= \lim_{x\to 5^+} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)} \\
&= \lim_{x\to 5^+} \frac{(x-1)}{(x-1)} \lim_{x\to 5^+} \frac{x(x+1)}{x-5} \\
&= 1 \cdot \lim_{x\to 5^+} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
&= \lim_{x\to 5^+} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

ya que cuando x tiende a 5 por la derecha (5^+), la expresión $x(x+1)$ tiende a 30, que es mayor que cero, y la expresión $x-5$ toma valores positivos que tienden cero. Entonces, la recta de ecuación $x = 5$ es una asíntota vertical de $f(x)$.
También, observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5^-} f(x) &= \lim_{x\to 5^-} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-5)} \\
&= \lim_{x\to 5^+} \frac{(x-1)}{(x-1)} \lim_{x\to 5^+} \frac{x(x+1)}{x-5} \\
&= 1 \cdot \lim_{x\to 5^-} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
&= \lim_{x\to 5^-} \frac{x(x+1)}{(x-5)} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

ya que cuando x tiende a 5 por la izquierda (5^-), la expresión $x(x+1)$ tiende a 30, que es mayor que cero, y la expresión $x-5$ toma valores negativos que tienden cero.
El hecho de que el $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = -\infty$ también indica que la recta de ecuación $x = 5$ es una asíntota vertical de f.

(c) $f(x) = \frac{-2e^x}{e^x-5}$
Para esta función el denominador de $f(x)$ es cero si $x = ln(5)$.
El numerador es $-2e^{ln(5)} = -2 \cdot 5 = -10$, que es menor que cero, entonces,

$$\lim_{x\to((ln(5))^+} f(x) = \lim_{x\to((ln(5))^+} \frac{-2e^x}{e^x-5} = -\infty$$

ya que cuando x tiende a $ln(5)$ por la derecha $\left((ln(5))^+\right)$, la expresión $e^x - 5$ toma valores positivos que tienden a cero. Así, la recta de ecuacón $x = ln(5)$ es una asíntota vertical de f.
Además,

$$\lim_{x\to((ln(5))^-} f(x) = \lim_{x\to((ln(5))^-} \frac{-2e^x}{e^x-5} = \infty$$

ello debido a que cuando x tiende a $ln(5)$ por la izquierda $\left((ln(5))^-\right)$, la expresión $e^x - 5$ toma valores negativos que tienden a cero.

Esto también indica que $x = ln(5)$ es una asíntota vertical de f.

6. Estudie si cada uno de los límites indicados existe o no. Si existe, determine su valor, en caso contrario, explique por qué:

   (a) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{5-\sqrt{9+x^2}}{1-\sqrt{5-x}}$.

   Note que no se puede determinar el límite por sustitución porque si $f(x) = \frac{5-\sqrt{9+x^2}}{1-\sqrt{5-x}}$, $f(4)$ no está definida. Para calcularlo se realizan, previamente, varias operaciones algebraicas.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{5-\sqrt{9+x^2}}{1-\sqrt{5-x}} &= \lim_{x\to 4} \frac{\left(5-\sqrt{9+x^2}\right)\left(5+\sqrt{9+x^2}\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(1-\sqrt{5-x}\right)\left(1+\sqrt{5-x}\right)\left(5+\sqrt{9+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{(16-x^2)}{(x-4)} \lim_{x\to 4} \frac{\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(5+\sqrt{9+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)(4+x)}{(x-4)} \lim_{x\to 4} \frac{\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(5+\sqrt{9+x^2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)}{(x-4)} \lim_{x\to 4} (4+x) \lim_{x\to 4} \frac{\left(1+\sqrt{5-x}\right)}{\left(5+\sqrt{9+x^2}\right)} \\
&= (-1)8\frac{2}{10} \\
&= -\frac{8}{5}
\end{aligned}$$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x-27}+3}$

   Al considerar $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x-27}+3}$, $f(0)$ no está definida, por lo tanto, no se puede determinar el límite por sustitución. Para calcularlo se realizan, previamente, varias operaciones algebraicas.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x-27}+3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\left(\sqrt[3]{x-27}\right)^2 - 3\sqrt[3]{x-27} + 3^2\right)}{\left(\sqrt[3]{x-27}+3\right)\left(\left(\sqrt[3]{x-27}\right)^2 - 3\sqrt[3]{x-27} + 3^2\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\left(\sqrt[3]{x-27}\right)^2 - 3\sqrt[3]{x-27} + 9\right)}{\left(\sqrt[3]{x-27}\right)^3 + 3^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\left(\sqrt[3]{x-27}\right)^2 - 3\sqrt[3]{x-27} + 9\right)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \lim_{x\to 0} \left(\left(\sqrt[3]{x-27}\right)^2 - 3\sqrt[3]{x-27} + 9\right) \\
&= 1 \cdot ((-3)^2 - 3(-3) + 9) \\
&= 27
\end{aligned}$$