Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Examen

1. Determine la ecuación del plano que es perpendicular a la recta de intersección de los planos

$$\Pi_1 : 3x - 2y + z = 0 \quad \Pi_2 : x + y + z = 1$$

y que pasa por el punto $(1, -1, 1)$.

Solución.

La normal de este plano es paralela a la dirección de la recta de intersección de los planos Π_1, Π_2. La dirección de esta recta es perpendicular a las normales de los planos Π_1, Π_2, por lo cual la normal del plano pedido se puede obtener como

$$< 3, -2, 1 > \times < 1, 1, 1 >= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =< -3, -2, 5 >$$

Luego la ecuación del plano pedido es

$$< -3, -2, 5 > \cdot < x - 1, y + 1, z - 1 >= -3x - 2y + 5z = 4$$

Puntaje:

- 1 pto por argumentar que la normal del plano es paralela a la dirección de la recta de intersección de los planos Π_1, Π_2.
- 1 pto por argumentar que la dirección de la recta de intersección es perpendicular a las normales de los planos Π_1, Π_2.
- 2 pts por encontrar correctamente la normal del plano.(descontar un punto si comete un error algebraico)
- 2 pto por calcular correctamente la ecuación del plano.(descontar un punto si comete un error algebraico)

2. A una matriz B se le han realizado tres operaciones elementales en el siguiente orden:

   - Intercambio fila 1 con fila 3.
   - Fila 2 se ha intercambiado por, fila 2 menos 4 veces fila 3.
   - Fila 3 se ha multiplicado por -5.

   y se ha obtenido la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Determine el determinante de B. [**4 ptos.**]

   b) ¿El sistema $Bx = b$ tiene solución única para todo $b \in \mathbb{R}^3$? [**2 ptos.**]

Solución.

a) Si a una matriz se le intercambia fila 1 con fila 3 el nuevo determinate es menos el determinante original.
Si a una matriz la fila 2 se ha intercambia por, fila 2 menos 4 veces fila 3, el nuevo determinate es igual al original.
Si a una matriz la fila 3 se ha multiplica por -5, el nuevo determinante es -5 veces el determinante original. Luego el

$$\det(C) = -1 \cdot -5 \cdot \det(B).$$

Como el

$$det(C) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

Obtenemos que $\det(B) = -\dfrac{2}{5}$

b) Como $\det(B) \neq 0$ la matriz B es invertible por la cual para todo $b \in \mathbb{R}^3$ el sistema

$$Bx = b \rightarrow x = B^{-1}b$$

tiene solución única.

Puntaje:

- 1.5 pto por concluir que $\det(B) = -1 \cdot -5 \cdot \det(C)$. (0.5 por cada propiedad)
- 1 pto por encontrar correctamente $\det(C)$.
- 1.5 pto por concluir que $\det(B) = -10$
- 2 pts por argumentar de manera correcta que el sistema tiene única solución.

3. Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

a) Determine la matriz A tal que $T(x)=Ax$ para todo $x\in\mathbb{R}^3$.

b) Determine la dimensión del Rango (Imagen) y del Núcleo (espacio nulo) de la transformación T.

Solución.

a) Sabemos que la matriz $A=[T(e_1)\quad T(e_2)\quad T(e_3)]$, como T es una transformación lineal tenemos que

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=T\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=T\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Luego

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&0\\-1&1&1\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

b) Como

$$A=\begin{bmatrix}-1&2&0\\-1&1&1\\-1&0&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\dim(Nucleo(T))=1$ que es la cantidad de columnas no pivotes de la matriz A,
$\dim(Rango(T))=2$ que es la cantidad de columnas pivotes de la matriz A.

Puntaje:

- 1 pto por encontrar correctamente cada columna de la matriz A.(3 ptos total)(decontar 0,5 por cada error algebraico)
- 1.5 pto por concluir que la $\dim(Nucleo(T))=1$.
- 1.5 pto por concluir que $\dim(Rango(T))=2$.

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, cuyo polinomio característico es $P_A(\lambda) = (\lambda - 10)(\lambda - 1)^2$. Determine una matriz P ortogonal y una matriz D diagonal, tal que $A = PDP^T$.

Continúa en la siguiente página.

Solución.

Como el polinomio característico es $P_A(\lambda) = (\lambda - 10)(\lambda - 1)^2$ tenemos que $\lambda_1 = 10$ y $\lambda_2 = 1$ son valores propios de A. Calculando $A - \lambda_i I$, $i = 1, 2$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -5 & -4 & -2 \\ -4 & -5 & 2 \\ -2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

así que su espacio nulo tiene dimesión 1 y es generado por $v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda_2 I \sim \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

así que su espacio nulo tiene dimesión 2 y es generado por

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Obtengamos una base ortogonal para $\mathrm{Nul}(A - \lambda_2 I)$. Para hacerlo, reemplazamos $\tilde{v}_3$ por

$$v_3 = \tilde{v}_3 - \left(\tilde{v}_3 \cdot \frac{v_2}{|v_2|}\right) \frac{v_2}{|v_2|} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Así, la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ y

$$\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{9/2}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \qquad \hat{v}_i = \frac{v_i}{|v_i|}, \quad i = 1, 2, 3$$

es una base *ortonormal* para $\mathbb{R}^3$ que consta de vectores propios de la matriz simetrica A. Por lo tanto, $A = PDP^T$ donde

$$D = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P = [\hat{v}_1 \quad \hat{v}_2 \quad \hat{v}_3] = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/(3\sqrt{2}) \\ 1/3 & 0 & 2\sqrt{2}/3 \end{bmatrix}$$

Puntaje:

- 1 pto por observar que $\lambda_1 = 10$ es valor propio de A y encontrar una base de su espacio propio.
- 1.5 pts por observar que $\lambda_2 = 1$ es valor propio doble y encontrar una base de su espacio propio.
- 2 pts por encontrar una base ortogonal para el espacio propio correspondiente a $\lambda_2 = 1$;
- 1 pto por calcular una base ortonormal de vectores propios para $\mathbb{R}^3$ y escribir P;
- 0.5 pts por escribir la matriz diagonal D.

5. Encuentre la ecuación $y = \beta_0 + \beta_1 x$ de la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los puntos de datos

$$(2,3),(3,2),(5,1),(6,0).$$

Solución.

Debemos encontrar la solución de mínimos cuadrados del sistema inconsistente $X\beta = y$

$$y = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

Para la solución de mínimos cuadrados de $X\beta = y$, obtenga las ecuaciones normales:

$$X^T X\beta = X^T y.$$

Calculamos

$$X^T X = \begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{bmatrix}, \qquad X^T y = \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\beta = (X^T X)^{-1}(X^T y) = \frac{1}{4 \cdot 74 - (16)^2} \begin{bmatrix} 74 & -16 \\ -16 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix} = \frac{1}{74 - 8^2} \begin{bmatrix} 37 \cdot 3 - 4 \cdot 17 \\ -4 \cdot 6 + 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,3 \\ -0,7 \end{bmatrix}.$$

Puntaje:

- 2 pts por escribir el problema en forma de aplicar mínimos cuadrados;
- 1 pto por calcular $X^T X$;
- 1 pto por calcular $X^T y$;
- 1 pto por invertir $X^T X$;
- 1 pto por calcular β.

6. Dada la forma cuadrática

$$Q_t(x_1, x_2, x_3) = (2-t)x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + (2t-4)x_1x_3 - 2x_2x_3$$

donde $t \in \mathbb{R}$.

a) Determine la descomposición de Cholesky de la matriz asociada a esta forma.

b) ¿ Cuáles son los valores de t para que Q_t sea positiva definida?

Solución.

(a) Expresamos

$$Q_t(x) = x^T A x \quad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} 2-t & 0 & t-2 \\ 0 & 1 & -1 \\ t-2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando el algoritmo de Cholesky, obtenemos $A = L^T D_t L$ donde

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D_t = \begin{bmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix}.$$

(b) Desde la descomposición arriba observamos que

$$Q_t(x) = y^T D_t y \qquad \text{con} \quad y = L^T x.$$

Entonces, Q_t es positiva definida cuando las entradas diagonales de D_t son todas positivas. Eso ocurre cuando $1 < t < 2$.

Puntaje:

- 1 pto por obtener A.
- 1 pto por obtener L.
- 1 pto por obtener D.
- 1.5 pts por argumentar que todos los valores de la diagonal deben ser positivos.
- 1.5 pts por encontrar los valores de t requeridos.

7. Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Encontrar la descomposición en valores singulares de A.

Solución.

La matriz

$$A^T A = \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}$$

tiene valores propios $\lambda_1 = 18$ y $\lambda_2 = 0$. Luego, los valores singulares de A son $\sigma_1 = \sqrt{18}$ y $\sigma_2 = 0$. El lector puede comprobar que

$$V_{18} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{y} \quad V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Así, la matriz Q esta dada por

$$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

Consideremos el vector

$$\vec{Y_1} = \frac{A \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}}{\left\| A \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\|} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} .$$

Sea $\vec{U_1}$ un vector de norma 1 ortogonal a $\vec{Y_1}$. Este vector debe satisfacer la ecuación $-x + 2y - 2z = 0$. De esta manera, tales vectores pertenecen al espacio

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Aplicando el proceso de Gram-Schmidt, y luego normalizando, tenemos que

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3\sqrt{5} \\ 4/3\sqrt{5} \\ \sqrt{5}/3 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

De esta manera, si consideramos la matriz P

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ -2/3 & 0 & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$P^T AQ = \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puntaje:

- 0.5 ptos por encontrar cada valor singular.(1 pto)
- 1 ptos por encontrar la matriz σ
- 0.5 pto por encontrar cada columna de la matriz Q.(1 ptos)
- 1 pto por encontrar cada columna de la matriz P.(3 ptos)

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas demúestrelas y si son falsas de un contraejemplo.

   a) Si A es una matriz de 3×4 con tres posiciones pivotes entonces la ecuación $Ax = b$ es consistente para todo $b \in \mathbb{R}^3$.

   b) El conjunto $\{A \in M_{2\times 2} \mid A = A^t\}$ es un sub-espacio vectorial de $M_{2\times 2}$

   c) Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal que refleja los puntos a través del eje x entonces 1 es un valor propio de esta transformación.

Solución.

a) Verdadero
Al tener A tres columnas pivotes la $\dim(Col(A)) = 3$ y $Col(A) \leq \mathbb{R}^3$ luego $Col(A) = \mathbb{R}^3$ así que el sistema $Ax = b$ es consistente para todo $b \in \mathbb{R}^3$.

b) Verdadero

- La matriz cero si se transpone es la misma matriz, luego la matriz cero pertenece al conjunto.
- Si A y B pertenecen al conjunto, α y $\beta \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T = \alpha A + \beta B$$

  luego $\alpha A + \beta B$ tambien pertenece al conjunto, así queda demostrado que este conjunto es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

c) Verdadero
Si tomamos el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y le aplicamos la transformación $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, luego 1 es un valor propio de la transformación.

Puntaje:

- 2 pto por cada item correctamente respondiddo.