Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2016

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución al Examen

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 18 & -10 \\ 30 & -17 \end{bmatrix}$.

   Diagonalice A, y use esta diagonalización para calcular A^{20}.

   Solución:

   El polinomio característico de A es

   $$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 18-\lambda & -10 \\ 30 & -17-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-18)(\lambda+17)+300 = \lambda^2-\lambda-306+300 = \lambda^2-\lambda-6,$$

   por lo que los valores propios de A son $\lambda = -2$ y $\lambda = 3$.

   Los vectores propios de A, correspondientes a estos valores propios, son:

   Para $\lambda = -2$: Buscamos $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ que sea una solución no trivial de

   $$\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ 30 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Es fácil ver que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es solución no trivial de $\begin{bmatrix} 20 & -10 \\ 30 & -15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y por lo tanto vector propio de A.

   Para $\lambda = 3$: Buscamos $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ que sea una solución no trivial de

   $$\begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   Es fácil ver que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ es solución no trivial de $\begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 30 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y por lo tanto vector propio de A.

   Así, una base de vectores propios es $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$, por lo que tomando $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (la matriz que tiene por columnas a los elementos de la base) y $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (la matriz diagonal que tiene los valores propios correspondientes a las columnas de P), se tiene $A = PDP^{-1}$. En otras palabras,

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Para calcular A^{20}, vemos que

$$\begin{aligned} A^{20} &= (PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1}) \\ &= (PD)(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D\dots(P^{-1}P)DP^{1} \\ &= (PD)DD\dots DP^{-1}, \end{aligned}$$

donde D aparece 20 veces, o sea,

$$\begin{aligned} A^{20} &= PD^{20}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{20} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3\cdot 2^{20} + 4\cdot 3^{20} & -6\cdot 2^{20} + 6\cdot 3^{20} \\ 2\cdot 2^{20} - 2\cdot 3^{20} & 4\cdot 2^{20} - 3\cdot 3^{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13943991876 & 20914414950 \\ -6971471650 & -10456158899 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puntaje:

- Por calcular el polinomio característico: 1 punto.
- Por encontrar los valores propios: 0,5 puntos.
- Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = -2$: 1 punto.
- Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = 3$: 1 punto.
- Por expresar la matriz A como $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$: 0,5 puntos.
- Por llegar a $A^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} D^{20} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$, 1 punto.
- Por llegar a $A^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 3^{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, 0,5 puntos.
- Por llegar a $A^{20} = \begin{bmatrix} -3\cdot 2^{20} + 4\cdot 3^{20} & -6\cdot 2^{20} + 6\cdot 3^{20} \\ 2\cdot 2^{20} - 2\cdot 3^{20} & 4\cdot 2^{20} - 3\cdot 3^{20} \end{bmatrix}$, 0,5 puntos.

2. Sean P una matriz invertible, D una matriz diagonal, $A = PDP^{-1}$ y $B = A^2 + 5A - 3I$.

   Demuestre que B es diagonalizable.

   Ayuda: Encuentre una factorización conveniente de B.

   Solución:

   Como $A = PDP^{-1}$,

   $$B = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) + 5(PDP^{-1}) - 3I = PD^2P^{-1} + 5(PDP^{-1}) - 3PP^{-1} = P(D^2 + 5D - 3I)P^{-1}.$$

   Pero $E = D^2 + 5D - 3I$ es una suma de matrices diagonales y por lo tanto es diagonal. Así, $B = PEP^{-1}$ con E diagonal, por lo que B es diagonalizable.

   Puntaje:

   - Por llegar a $B = P(D^2 + 5D - 3I)P^{-1}$, 3 puntos.
   - Por argumentar que la matriz $E = D^2 + 5D - 3I$ es diagonal, 2 puntos.
   - Por deducir que, ya que $B = PEP^{-1}$ con E diagonal, B es diagonalizable: 1 punto.

3. Sean $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   a) Construya una base ortogonal de $W = \text{Gen}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ que contenga a $\mathbf{u}_1$.

   b) Encuentre la proyección ortogonal de $\mathbf{u}_3$ sobre W.

Solución:

a) Para encontrar una base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de W, aplicamos Gram-Schmidt al conjunto $\{(1,2,-3),(2,-1,-1)\}$. Para ello, debemos:

- Tomar $\mathbf{v}_1 = (1,2,-3)$.
- Considerar $\mathbf{p}$ la proyección ortogonal de $(2,-1,-1)$ sobre Gen $\{\mathbf{v}_1\}$.
- Tomar $\mathbf{v}_2 = (2,-1,-1) - \mathbf{p}$.

Haciendo los cálculos,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{v}_1} &= \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,-3), \\ \mathbf{p} &= ((2,-1,-1)\cdot\widehat{\mathbf{v}_1})\,\widehat{\mathbf{v}_1} = \frac{1}{14}\,((2,-1,-1)\cdot\mathbf{v}_1)\,\mathbf{v}_1 \\ &= \frac{1}{14}\,((2,-1,-1)\cdot(1,2,-3))\,(1,2,-3) = \frac{3}{14}(1,2,-3), \\ \mathbf{v}_2 &= (2,-1,-1) - \mathbf{p} = (2,-1,-1) - \frac{3}{14}(1,2,-3) = \frac{5}{14}(5,-4,-1); \end{aligned}$$

Así, una base ortogonal[1] de W está dada por cualquier ponderado no nulo de $\mathbf{v}_1 = (1,2,-3)$ y cualquier ponderado no nulo de $14\mathbf{v}_2 = (5,-4,-1)$.

De hecho, es más simple renombrar $\mathbf{v}_2 = (5,-4,-1)$ y tomar como base

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1,2,-3),(5,-4,-1)\}$$

En cualquier caso, si se quiere tener una base ortonormal de W, los vectores adecuados serían $\widehat{\mathbf{v}_1} = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,-3)$, $\widehat{\mathbf{v}_2} = \pm\frac{1}{42}(5,-4,-1)$.

b) Buscamos la proyección ortogonal de $\mathbf{u}_3$ sobre W.

De acuerdo al teorema 6.10, si normalizamos la base de (a), la proyección buscada es

$$\text{proy}_W \mathbf{u}_3 = (\mathbf{u}_3 \cdot \widehat{\mathbf{v}_1})\widehat{\mathbf{v}_1} + (\mathbf{u}_3 \cdot \widehat{\mathbf{v}_2})\widehat{\mathbf{v}_2}.$$

Una forma equivalente de escribir esto es

$$\begin{aligned} \text{proy}_W \mathbf{u}_3 &= \frac{(\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{v}_1)}{||\mathbf{v}_1||^2}\,\mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{v}_2)}{||\mathbf{v}_2||^2}\mathbf{v}_2 \\ &= \frac{(1,2,3)\cdot(1,2,-3)}{||(1,2,-3)||^2}\,(1,2,-3) + \frac{(1,2,3)\cdot(5,-4,-1)}{||(5,-4,-1)||^2}(5,-4,-1) \\ &= \frac{-4}{14}\,(1,2,-3) - \frac{6}{42}(5,-4,-1) = \frac{-2}{7}\,(1,2,-3) - \frac{1}{7}(5,-4,-1) \\ &= \frac{1}{7}(-2-5,-4+4,6+1) = \frac{1}{7}(-7,0,7) = (-1,0,1) \end{aligned}$$

[1] En todo caso, no toda base ortogonal de W se obtiene de esta forma. Pero esta es quizás la forma más fácil de obtener una.

Otra forma de resolver este problema es planteando el sistema que resulta de considerar $\text{proy}_W \mathbf{u}_3$ como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (o de las dos columnas de A), digamos $\text{proy}_W \mathbf{u}_3 = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$, y a partir de aquí plantear el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}(\text{proy}_W \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_3) \cdot \mathbf{v}_1 &= 0, \\ (\text{proy}_W \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_3) \cdot \mathbf{v}_2 &= 0.\end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}(\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1, \\ (\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

que es lo mismo que

$$\begin{aligned}\alpha \, ||\mathbf{v}_1||^2 + \beta(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) &= \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1, \\ \alpha(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + \beta \, ||\mathbf{v}_1||^2 &= \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

Resolviendo para α y β y reemplazando en $\text{proy}_W \mathbf{u}_3 = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2$ se obtiene la proyección ortogonal.

Puntaje:

a) Por encontrar una base ortogonal (cualquiera, no necesariamente ortonormal) de W que contenga $\mathbf{u}_1$, 3 puntos.

Si se equivocan al aplicar Gram-Schmidt, *cometiendo algún pequeño error de cálculo*, pero queda en evidencia que tienen claro cómo aplicar el método, 2 puntos.

b)
- Por plantear correctamente una forma de encontrar la proyección ortogonal, 1 punto.
- Por realizar los cálculos en la forma correcta, 2 puntos. Si cometen *pequeños errores de cálculo*, reciben 1 o 1,5 puntos (a criterio del corrector).

A lo anterior se le suma el punto base.

4. Encuentre una solución de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Solución:

El conjunto de soluciones del problema de mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el conjunto de soluciones de las ecuaciones normales $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, o sea, de

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ o, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} 23 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Claramente, este último sistema tiene como única solución $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{23} \\ 1 \end{bmatrix}$, que es la solución buscada.

Puntaje:

- Por indicar que se debe resolver $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$: 2 puntos.
- Por plantear correctamente los productos a realizar para resolver lo anterior: 2 puntos.
- Por llegar al sistema diagonal que permite encontrar $\mathbf{x}$: 1 punto.
- Por llegar al valor buscado de $\mathbf{x}$: 1 punto.

Segunda Solución:

Una segunda idea de solución consiste en:

- Calcular la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre Col A. Dicha proyección es (omitimos los cálculos intermedios) $\mathbf{b}^{\perp} = \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 47 \\ 31 \\ -22 \\ 39 \end{bmatrix}$.
- Resolver la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\perp}$, o sea, $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{23} \begin{bmatrix} 47 \\ 31 \\ -22 \\ 39 \end{bmatrix}$.

  La solución de este sistema es, por supuesto, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{23} \\ 1 \end{bmatrix}$.

Puntaje:

- Por indicar que se buscará la proyección ortogonal $\mathbf{b}^{\perp}$ de $\mathbf{b}$ sobre $\operatorname{Col} A$: 2 puntos.
- Por llegar a plantear correctamente el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}^{\perp}$: 2 puntos.
- Por resolver correctamente el sistema anterior: 2 puntos.

5. Una matriz A de $n \times n$ se dice ortogonal si $A^T A = I_n$. Demuestre que todo valor propio real de una matriz ortogonal debe ser 1 o -1.

   Ayuda: Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ¿cuál es la relación entre $||\mathbf{x}||$ y $||A\mathbf{x}||$?

   Solución:

   Sea λ un valor propio de A. Así, existe un vector $\mathbf{x} \neq 0$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda x$.

   Pero entonces, por una parte

$$||A\mathbf{x}||^2 = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^T A^T)(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(A^T A)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(I_n)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = ||\mathbf{x}||^2 \, ;$$

   y por otra,

$$||A\mathbf{x}||^2 = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = (\lambda\mathbf{x})^T(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \lambda^2 \, ||\mathbf{x}||^2 \, .$$

   Así, $||\mathbf{x}||^2 = \lambda^2 \, ||\mathbf{x}||^2$ y —como $||\mathbf{x}||^2 \neq 0$— tenemos $\lambda^2 = 1$, de donde $\lambda \in \{\pm 1\}$.

   Puntaje:

   - Por llegar a $||A\mathbf{x}||^2 = ||\mathbf{x}||^2$, 2 puntos.
   - Por llegar a $||A\mathbf{x}||^2 = \lambda^2 \, ||\mathbf{x}||^2$, 2 puntos.
   - Por deducir que $\lambda^2 = 1$, 1 punto.
   - Por llegar a $\lambda \in \{\pm 1\}$, 1 punto.

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Diagonalice A ortogonalmente.

Ayuda: Puede ser útil el demostrar previamente que $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A.

Solución:

El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)\left((5-\lambda)^2 - 4\right) - 2\left(2(5-\lambda) - 4\right) + 2\left(4 - 2(5-\lambda)\right) \\ &= (5-\lambda)\left(25 - 10\lambda + \lambda^2 - 4\right) - 2\left(10 - 2\lambda - 4\right) + 2\left(4 - 10 + 2\lambda\right) \\ &= (5-\lambda)\left(\lambda^2 - 10\lambda + 21\right) + 4\left(2\lambda - 6\right) \\ &= 105 - 50\lambda + 5\lambda^2 - 21\lambda + 10\lambda^2 - \lambda^3 + 8\lambda - 24 \\ &= 81 - 63\lambda + 15\lambda^2 - \lambda^3. \end{aligned}$$

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es vector propio de A; como $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} = 9\mathbf{v}$, una de las raíces de $p(\lambda)$ es $\lambda = 9$, por lo que $p(\lambda)$ tiene a $9 - \lambda$ como factor.

De hecho, $p(\lambda) = (9-\lambda)(\lambda-3)^2$. Así, 9 es valor propio con multiplicidad 1 (y por lo tanto $\{\mathbf{v}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ es base del espacio propio correspondiente), y 3 es valor propio con multiplicidad 2.

Necesitamos hallar dos vectores propios correspondientes a $\lambda = 3$ que sean l.i. Para ello, resolvemos el sistema $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o sea, $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Al escalonar este sistema, queda la única ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, por lo que $x_1 = -x_2 - x_3$.

Así, dos soluciones independientes de este sistema son $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 0) = \mathbf{w}_1$ y $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1) = \mathbf{w}_2$, por lo que una base del espacio propio corespondiente al valor propio 3 es $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Estos dos vectores no son ortogonales, por lo que debemos encontrar una base ortogonal del mismo espacio. Esto puede ser hecho, por ejemplo, por Gram-Schmidt, obteniendo $\{(-1, 1, 0), (1, 1, -2)\}$ o $\{(-1, 0, 1), (1, -2, 1)\}$. Así, una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, formada por valores propios de A, es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$; otra posibilidad es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Pero estas bases no son ortonormales. Normalizándolas, obtenemos, respectivamente,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Así, $A = P \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} P^T$, donde $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ o $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

Puntaje:

- Por calcular el polinomio característico: 1 punto.
- Por factorizar el polinomio característico: 1 punto.
- Por encontrar los dos vectores propios restantes: 1 punto.
- Por encontrar una base ortogonal: 1 punto.
- Por normalizar la base: 1 punto.
- Por expresar A como PDP^T con P ortogonal: 1 punto.

7. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix}$.

a) Encuentre una matriz L cuadrada, triangular inferior con números 1 en la diagonal, y una matriz diagonal D tal que $A = LDL^T$.

Primera Solución:

Una idea es usar la factorización $A = LU$, que nos da

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Necesitamos expresar U de la forma $U = DL^T$, con D diagonal. Como L^T es invertible,

$$D = U(L^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Así, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = LDL^T$.

Segunda Solución:

Una segunda idea es usar *fuerza bruta* (sí, a veces resulta).

Si es posible escribir A como $A = LDL^T$ con L triangular inferior y 1s en la diagonal, y D diagonal, entonces existen $x, y, z \in \mathbb{R}$ que satisfacen

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 14 \end{bmatrix} = LDL^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 0 \\ xy & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & xy \\ xy & x^2y + z \end{bmatrix}.$$

De aquí se deduce que $y = 3$, $x = -2$ y finalmente $z = 2$, de donde
$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, o sea, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

b) Realice un cambio de variable adecuado (por ejemplo, $\mathbf{x} = M\mathbf{y}$ para alguna matriz invertible M) que permita expresar la forma cuadrática

$$Q\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

como una suma ponderada de cuadrados.

Solución:

Como $A = LDL^T$,

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(LDL^T)\mathbf{x} = (\mathbf{x}^T L)D(L^T\mathbf{x}) = (L^T\mathbf{x})^T D(L^T\mathbf{x}).$$

Así, si tomamos $\mathbf{y} = L^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$, o equivalentemente

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x} = (L^T)^{-1}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + 2y_2 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

(en otras palabras, tomando $M = (L^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$) tenemos que

$$Q(\mathbf{x}) = (L^T\mathbf{x})^T D(L^T\mathbf{x}) = \mathbf{y}^T D\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 3y_1^2 + 2y_2^2$$

que es una expresión sin término cruzado.

Comentario:

Este problema no tiene una solución única. Una factorización del tipo $Q(\mathbf{x}) = (M^{-1}\mathbf{x})^T D(M^{-1}\mathbf{x})$ con D diagonal puede ser re-escrita cambiando el orden de las columnas de la matriz M e intercambiando los elementos de la diagonal de D. Por ejemplo, podemos tomar:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{o} \qquad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

También una solución puede ser transformada multiplicando M por un escalar $c \neq 0$, y dividiendo D por c^2. Esto por ejemplo se logra dividiendo M en la solución anterior por $\sqrt{2}$ y multiplicando D por 2:

$$M = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1/sqrt2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Cualquiera de estas factorizaciones nos permite transformar la forma cuadrática en otra sin términos con producto cruzado, mediante el cambio de variable $\mathbf{x} = M\mathbf{y}$.

c) Clasifique la forma cuadrática Q. ¿Es esta forma definida positiva, definida negativa, semi-definida positiva, semi-definitiva negativa o indefinida?

Solución:

Claramente, en todas las soluciones presentadas a la parte (b), la matriz diagonal correspondiente tiene los dos elementos diagonal positivos. Así, $Q(\mathbf{x}) = ay_1^2 + b \cdot 0 = ay_1^2$ con $a, b > 0$, por lo que $Q(\mathbf{x})$ es > 0 para todo $(y_1, y_2) \neq (0, 0)$. Como $\mathbf{x} = M\mathbf{y}$ y M es invertible, si $(x_1, x_2) \neq 0$ entonces $(y_1, y_2) \neq 0$.

En otras palabras, $Q(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)$, por lo que esta forma es definida positiva.

Puntaje:

a)
- Cualquier solución correcta (y completa) recibe 2 puntos.
- Si la solución está esencialmente correcta, pero hay errores *menores* de cálculo, o faltan detalles importantes, recibe 1 punto.

b)
- Una solución correcta (y completa, que muestre que la expresión final no tiene término mixto) recibe 2 puntos.
- Si la solución está esencialmente correcta, pero hay errores *menores* de cálculo, o faltan detalles importantes, recibe 1 punto.

c)
- Por decir que la forma es definida positiva, 1 punto.
- Por justificar correctamente la afirmación, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) Las matrices similares siempre tienen exactamente los mismos vectores propios.

   b) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de la matriz A asociados, respectivamente, a los valores propios λ y μ (con $\lambda \neq \mu$) entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

   c) Si los vectores del conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ son todos $\neq \mathbf{0}$ y mutuamente ortogonales, entonces S es un conjunto linealmente independiente.

Solución:

a) **FALSO**

Matrices similares tienen necesariamente los mismos valores propios, pero no necesariamente los mismos vectores propios.

Ejemplo:

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Esta matriz tiene como vectores propios a los ponderados de $(1, 0)$ (con valor propio 1) y a los ponderados de $(0, 1)$ (con valor propio 2).

Sea $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, de donde $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

La matriz A es similar a la matriz $B = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

Pero esta última matriz tiene por vectores propios a los ponderados de $(1, 3)$ (con valor propio 1) y a los ponderados de $(0, 1)$ (con valor propio 2).

Así, estas dos matrices no tienen los mismos vectores propios.

b) **FALSO**

Ejemplo:

La misma matriz B del ejemplo anterior sirve como contraejemplo en este caso:

Dos vectores propios de la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ correspondientes a valores propios distintos son $(1, 3)$ y $(0, 1)$, los que no son ortogonales: $(1, 3) \cdot (0, 1) = 3$.

c) **VERDADERO**

Demostración:

Sea $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ una combinación lineal nula de los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Multiplicando "punto $\mathbf{v}_1$" obtenemos

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \cdot \mathbf{v}_1 = 0.$$

Como $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_k$, se tiene $\alpha_1 \left|\left|\mathbf{v}_1\right|\right|^2 = 0$.

Pero $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ lleva a que $||\mathbf{v}_1|| \neq 0$, por lo que —como $\alpha_1 \left|\left|\mathbf{v}_1\right|\right|^2 = 0$— obtenemos que $\alpha_1 = 0$.

Aplicando el mismo proceso a $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$, llegamos a que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_k = 0$, lo que nos dice que S es un conjunto linealmente independiente.

Puntaje:

En cada parte, se dan los dos puntos si se da una justificación correcta. En las partes (a) y (b), una justificación correcta es un contraejemplo; en la (c) es una breve demostración.

A lo anterior se le suma el punto base.