PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
SEGUNDO SEMESTRE 2019

INTERROGACIÓN 1
MAT1620 ⋆ CÁLCULO 2

La siguiente evaluación contiene 6 preguntas, dispone de 120 minutos para responderla.

1. *a*) Analice la convergencia de la siguiente integral impropia.

$$\int_1^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx.$$

   b) Calcule, en caso que exista, el valor de la siguiente integral impropia.

$$\int_2^\infty \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1}\right)\,dx.$$

2. Analice la convergencia de la siguiente integral impropia.

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(x-1)^{2/3}}\,dx.$$

3. Determine la convergencia o divergencia de las sucesiones cuyo término general está dado por:

$$b_n = \frac{\operatorname{sen}(2n)}{1+\sqrt{n}}, \qquad c_n = \frac{(\ln(n))^2}{n}.$$

4. Considere la sucesión dada por:

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \quad \text{para todo} \quad n \geq 1.$$

   a) Pruebe que esta sucesión es acotada superiormente.

   b) Suponga que la sucesión dada es creciente. Demuestre que es convergente y determine el valor de su respectivo límite.

5. a) Analice la convergencia de la siguiente serie númerica. En caso que sea convergente, calcule la respectiva suma.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right).$$

b) Determine los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente serie es convergente. En los casos que sea convergente calcule la respectiva suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n.$$

6. Analice la convergencia de las siguientes series númericas.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+2)}{(n+3)^2}$,

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{e^n}$.

Una solución

1. *a*) Tenemos que la integral dada se puede escribir como:

$$\int_1^{\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx = \int_1^{2} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx + \int_2^{\infty} \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,dx.$$

Para analizar la convergencia de la primera integral utilizaremos el criterio de comparación con la función $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, de la cual su respectiva integral divergente en $(1,2)$. Comparamos,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\dfrac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}}{\dfrac{1}{x-1}} = 2,$$

Por lo tanto ambas integrales tienen el mismo comportamiento.

b) Para calcular la integral dada notamos que

$$\int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1} \right) dx = 2\ln(x-1) - \ln(x^2+1) - Arctg(x) + c.$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}\lim_{c\to\infty} \int_2^{\infty} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1} \right) dx &= \lim_{c\to\infty} \ln \left(\frac{(c-1)^2}{c^2+1} - Artg(c) + \ln(5) + Arctg(2). \right), \\ &= -\frac{\pi}{2} + + \ln(5) + Arctg(2)\end{aligned}$$

Asignación de puntaje:

a) Asignar 1 punto por separar la integral en dos integrales impropias y analizarlas por separado.

a) Asignar 1 punto por determinar la divergencia de la primera integral. Si solamente se concluye la convergencia de la segunda integral esto entrega 0.5 puntos.

a) Asignar 1 punto por concluir la divergencia de la integral dada.

b) Asignar 1 punto por utilizar de manera correcta la definición de integral impropia para realizar el calculo pedido.

b) Asignar 1 punto por el calculo correcto de la respectiva primitiva.

b) Asignar 1 punto por calcular de manera correcta el limite pedido.

a)+b) Agregar 1 punto base y colocar la nota en el cuadernillo respectivo.

2. Para analizar la integral dada, comenzamos separando como sigue,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(x-1)^{2/3}}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(x-1)^{2/3}}\,dx + \int_{1/2}^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(x-1)^{2/3}}\,dx.$$

Para la primera integral utilizaremos el criterio de comparación con la función

$$g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

y calculando se tiene,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}(x-1)^{2/3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = 1.$$

Con lo cual la primera integral es convergente. Para el caso de la segunda integral realizamos un proceso análogo comparando con la función

$$g_2(x) = \frac{1}{(x-1)^{2/3}}.$$

Se tiene que, por comparación al límite, la segunda integral tambien es convergente y se puede concluir que la integral dada tambien lo es.

Asignación de puntaje:

- Entregar 1 punto por separar la integral en dos integrales impropias.
- Entregar 2 puntos por analizar de manera correcta cada una de las integrales impropias obtenidas.
- Entregar 1 punto por concluir la convergencia de la integral dada.
- Agregar 1 punto base y colocar la nota en el cuadernillo respectivo.

3. *a*) Como la sucesión $a_n = \operatorname{sen}(2n)$ está acotada, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$-1 \leqslant \operatorname{sen}(2n) \leqslant 1 \Rightarrow -\frac{1}{1+\sqrt{n}} \leqslant \frac{\operatorname{sen}(2n)}{1+\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{n}}\,.$$

Usando el teorema del sandwich se sigue que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

b) Usando la regla de L'Hospital se tiene que

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(\ln(x))\cdot\dfrac{1}{x}}{1} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x}}{1} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Entonces, $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = L = 0$.

Asignación de puntaje:

a) 2 puntos por usar el teorema del Sandwich.

a) 1 punto por concluir que la sucesión es convergente y converge a 0.

b) 2 puntos por usar regla de L'Hospital.

b) 1 punto por concluir que la sucesión es convergente y converge a 0.

- Agregar 1 punto base y colocar la nota en el cuadernillo respectivo.

4. *a*) Por demostrar que $a_n \leqslant 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Usando inducción, se tiene que $a_1 = \sqrt{2} \leqslant 2$ luego la propopoción es verdadera para $n = 1$. Supongamos que la proposición es verdadera para n, es decir que $a_n \leqslant 2$ y demostraremos que $a_{n+1} \leqslant 2$. En efecto, se tiene que

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leqslant 2 + 2 = 2$$

la última desigualdad es consecuencia de la hipótesis inductiva. Por lo tanto, la sucesión a_n está acotada superiormente por 2.

b) Como la sucesión es creciente y acotada superiormente, entonces existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Usando la relación de recurrencia, se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} \Rightarrow L = \sqrt{2 + L} \Rightarrow L^2 = 2 + L$$

Al resolver la ecuación se obtiene que $L = 2$ o $L = -1$, como a_n es positiva se sigue que $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Asignación de puntaje:

a) 1 punto por afirmar que la sucesión está acotada por 2.

a) 0,5 puntos por verificar la proposición para $n = 1$.

a) 1,5 puntos por verificar que $a_{n+1} \leqslant 2$ usando la hipótesis inductiva.

b) 1 punto por usar el teorema de monótona y acotada y concluir que la sucesión es convergente.

b) 1 punto por establecer la relación $L^2 = 2 + L$

b) 1 punto por obtenter que $L = 2$ descartando $L = -1$.

- Agregar 1 punto base y colocar la nota en el cuadernillo respectivo.

5. *a*) Notemos que $\sum \dfrac{5}{2^n}$ y $\sum \dfrac{1}{3^n}$ son convergentes pues son geométricas con $|r| < 1$. Luego, por leyes de series,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$$

es convergente. Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^{n-1}} = \frac{5}{1 - 1/2} = 10$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2}$$

tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = 10 - \frac{3}{2} = \frac{17}{2}$$

b) La serie es geométrica con $r = 4x$, por lo que es convergente si y solo $|4x| < 1$. Entonces la serie es convergente si y solo si x es tal que

$$|x| < \frac{1}{4}$$

es decir, para x en $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Para tales valores de x calculamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (4x)^{n-1} = \frac{1}{1-4x}.$$

Asignación de puntaje:

a) 0,5 puntos por separar la serie, justificando que cada serie por separado es convergente.

a) 1 punto por calcular cada serie geométrica (2 puntos total).

a) 0,5 puntos por el resultado correcto.

b) 1 punto por identificar que la serie es geométrica.

b) 1 punto por indicar los valores de x para los cuales es convergente.

b) 1 punto por calcular la serie.

- Agregar 1 punto base y colocar la nota en el cuadernillo respectivo.

6. *a*) Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+6n+9} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{6}{n}+\dfrac{9}{n^2}} = 1$$

la serie es divergente por la Prueba de la Divergencia.

b) Comparamos $\frac{n^2}{e^n}$ con $\frac{1}{n^2}$. Notemos que, usando repetidas veces L'Hopital,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^2}{e^x}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4!}{e^x} = 0$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{n^2}{e^n}}{\dfrac{1}{n^2}} = 0.$$

Como la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, pues es una serie p con $p = 2 > 1$, por el Teorema de Comparación en el Límite $\sum \frac{n^2}{e^n}$ es convergente.

Asignación de puntaje:

a) 1 punto por calcular el límite.

a) 1 punto por mencionar la Prueba de la Divergencia.

a) 1 punto por concluir correctamente.

b) 0,5 puntos por pasar a la función con variable continua.

b) 1 punto por calcular correctamente el límite.

b) 0,5 puntos por mencionar que la series p es convergente.

b) 1 punto por concluir correctamente.