PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Temporada Académica de Verano 2022

MAT1620 ⋆ Cálculo 2
Solución Interrogación 2

1. Dados los planos $\Pi_1 : x + y - 3z = 0$ y $\Pi_2 : -x + 2y + 2z = 1$.

   a) Encuentre una ecuación paramétrica de la recta L que corresponde a la intersección de los planos Π_1 y Π_2.

   b) Encuentre una ecuación del plano que es perpendicular a los planos Π_1 y Π_2, que pasa por el punto $P = (1, 1, -1)$.

   Solución:

   a) Notemos que de Π_1 y Π_2 podemos despejar respectivamente:

   $$x = -y + 3z \tag{1}$$
   $$x = 2y + 2z - 1 \tag{2}$$

   De (1) y (2) tenemos que $z = 3y - 1$. Luego, al reemplazar en (1) o en (2), obtenemos que $x = 8y - 3$. De esta forma, una ecuación paramétrica de la recta L está dada por:

   $$\begin{cases} x = 8t - 3 \\ y = t \\ z = 3t - 1 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

   b) Un vector normal al plano Π_1 es $\vec{n}_1 = (1, 1, -3)$. Por otra parte, un vector normal al plano Π_2 es $\vec{n}_2 = (-1, 2, 2)$. Luego, un vector normal al plano que es perpendicular a los planos Π_1 y Π_2 es $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (8, 1, 3)$. Finalmente, una ecuación del plano buscado está dada por:

   $$\begin{aligned} 8(x-1) + 1(y-1) + 3(z+1) &= 0 \\ 8x + y + 3z - 6 &= 0 \end{aligned}$$

2. a) Calcule en caso exista o demuestre que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$$

b) Demuestre que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$$

usando las trayectorias $y=x$ e $y=-xe^x$ para acercarse al punto $(0,0)$.

Solución:

a) Notemos que si nos acercamos al punto $(1,0)$ mediante la recta $y=0$, obtenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{x\to1} \frac{x\cdot 0-0}{(x-1)^2+0^2} = \lim_{x\to1} \frac{0}{(x-1)^2} = 0$$

Por otra parte, al acercarnos mediante la recta $y=x-1$, tenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{x\to1} \frac{x(x-1)-(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)^2} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)^2} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, dado que encontramos dos caminos que nos llevan a valores distintos, el límite no existe.

b) Si consideramos la trayectoria $y=x$, obtenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \lim_{x\to0} \frac{x^2x^2}{x^3+x^3} = \lim_{x\to0} \frac{x^4}{2x^3} = \lim_{x\to0} \frac{x}{2} = 0$$

Por otra parte, al considerar la trayectoria $y=-xe^x$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} &= \lim_{x\to0} \frac{x^2(-xe^x)^2}{x^3+(-xe^x)^3} = \lim_{x\to0} \frac{x^4e^{2x}}{x^3\left(1-e^{3x}\right)} \\ &= \lim_{x\to0} \frac{xe^{2x}}{1-e^{3x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to0} \frac{e^{2x}+2xe^{2x}}{-3e^{3x}} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Luego, dado que obtuvimos valores distintos para estas trayectorias, concluímos que el límite no existe.

3. Sea S la superficie definida por la ecuación

$$x^3 z + x^2 y^2 + \operatorname{sen}(yz) + 3 = 0$$

a) Encuentre una ecuación del plano tangente a S en el punto $(-1, 0, 3)$.

b) Se llama RECTA NORMAL a una superficie S en $\mathbb{R}^3$ en el punto (x_0, y_0, z_0) a la recta que es perpendicular a S y que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0). Encuentre una ecuación paramétrica de la recta normal a la superficie S en el punto $(-1, 0, 3)$.

Solución:

a) Sea $F(x, y, z) = x^3 z + x^2 y^2 + \operatorname{sen}(yz) + 3$. Notemos que:

$$\begin{array}{ll} F_x(x,y,z) = 3x^2 z + 2xy^2 & F_x(-1,0,3) = 9 \\ F_y(x,y,z) = 2x^2 y + z\cos(yz) & F_y(-1,0,3) = 3 \\ F_z(x,y,z) = x^3 + y\cos(yz) & F_z(-1,0,3) = -1 \end{array}$$

Luego, una ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $(-1, 0, 3)$ es:

$$\begin{aligned} 9(x+1) + 3y - (z-3) &= 0 \\ 9x + 3y - z + 12 &= 0 \end{aligned}$$

b) La dirección de la recta normal debe ser la misma que tiene el vector normal al plano tangente. De esta forma, una ecuación paramétrica de la recta buscada está dada por:

$$\begin{cases} x = -1 + 9t \\ y = 3t \\ z = 3 - t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

4. Si $w = f\left(\dfrac{y-x}{xy}, \dfrac{z-y}{yz}\right)$, demuestre que $x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial w}{\partial y} + z^2\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$.

Solución: Sean $u = \dfrac{y-x}{xy}$ y $v = \dfrac{z-y}{yz}$. Luego, $w = f(u, v)$ y entonces:

$$\begin{aligned} w_x &= f_u u_x + f_v v_x = f_u \cdot \left(\frac{-xy - y(y-x)}{(xy)^2}\right) + f_v \cdot 0 = f_u \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ w_y &= f_u u_y + f_v v_y = f_u \cdot \left(\frac{xy - x(y-x)}{(xy)^2}\right) + f_v \left(\frac{-yz - z(z-y)}{(yz)^2}\right) = f_u \cdot \frac{1}{y^2} + f_v \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) \\ w_z &= f_u u_z + f_v v_z = f_u \cdot 0 + f_v \cdot \left(\frac{yz - y(z-y)}{(yz)^2}\right) + = f_v \cdot \frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

Finalmente, obtenemos que:

$$\begin{aligned} x^2\frac{\partial w}{\partial x} + y^2\frac{\partial w}{\partial y} + z^2\frac{\partial w}{\partial z} &= x^2 \cdot w_x + y^2 \cdot w_y + z^2 \cdot w_z \\ &= x^2 \cdot \left(-\frac{f_u}{x^2}\right) + y^2 \cdot \left(\frac{f_u}{y^2} - \frac{f_v}{y^2}\right) + z^2 \cdot \frac{f_v}{z^2} \\ &= -f_u + f_u - f_v + f_v \\ &= 0 \end{aligned}$$

5. Sea $f(x,y) = xy(2x+4y+1)$. Encuentre y clasifique los punos críticos de f como máximo relativo, mínimo relativo o punto silla.

Solución: Derivando parcialmente obtenemos:

$$f_x(x,y) = y(2x+4y+1) + 2xy = y(4x+4y+1)$$
$$f_y(x,y) = x(2x+4y+1) + 4xy = x(2x+8y+1)$$

Notamos que existen 4 combinaciones para que $(f_x, f_y) = (0,0)$:

- $y = 0$, $x = 0$. De donde obtenemos el punto $P_1 = (0,0)$.
- $y = 0$, $(2x+8y+1) = 0$. De donde obtenemos el punto $P_2 = \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.
- $(4x+4y+1) = 0$, $x = 0$. De donde obtenemos el punto $P_3 = \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$.
- $(4x+4y+1) = 0$, $(2x+8y+1) = 0$. De donde obtenemos el punto $P_4 = \left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right)$.

Las derivadas parciales de segundo orden de f son:

$$f_{xx}(x,y) = 4y$$
$$f_{xy}(x,y) = 4x+8y+1$$
$$f_{yx}(x,y) = 4x+8y+1$$
$$f_{yy}(x,y) = 8x$$

Veamos ahora que:

- $D(P_1) = 0 \cdot 0 - (1)^2 = -1 < 0$ y entonces P_1 es un punto silla.
- $D(P_2) = 0 \cdot (-4) - (-1)^2 = -1 < 0$ y entonces P_2 es un punto silla.
- $D(P_3) = (-1) \cdot 0 - (-1)^2 = -1 < 0$ y entonces P_3 es un punto silla.
- $D(P_4) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} > 0$, $f_{xx}(P_4) = -\frac{1}{3} < 0$ y entonces en P_4 hay un máximo local.