Sucesiones monótonas y acotadas

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1] Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2] LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

15 de Junio de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Sucesiones monótonas y acotadas

La demostración del siguiente teorema se apoya en el axioma de completitud de los números reales, que dice que si S es un conjunto no vacío de números reales que tiene una cota superior M, luego S tine una cota superior mínima. El axioma de completitud expresa el hecho de que no hay agujeros en la recta real.

Teorema.

Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

La idea de la demostración es ver que si la sucesión es monótona creciente y acotada por arriba entonces la sucesión se va a aproximar a la menor de las cotas superiores. (De igual manera, una sucesión decreciente que está acotada por abajo converge a la mayor de las cotas inferiores.)

EJEMPLO 1 Investigue la sucesión $\{a_n\}$ definida por la relación de recurrencia

$$a_1 = 2\,, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Solución La sucesión a_n es creciente; $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, es válido para $n = 1$ ya que $a_2 = 4 > a_1$. Suponga que se cumple para $n = k$, es decir

$$\begin{aligned} a_{k+1} > a_k \quad &\Longleftrightarrow \quad a_{k+1} + 6 > a_k + 6 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}(a_{k+1} + 6) > \frac{1}{2}(a_k + 6) \\ &\Longleftrightarrow \quad a_{k+2} > a_{k+1} \end{aligned}$$

Se dedujo que $a_{n+1} > a_n$ es válida para $n = k + 1$. Por lo tanto, la desigualdad se cumple para toda n por inducción.

Sucesiones monótonas y acotadas

La sucesión $\{a_n\}$ está acotada, es decir $a_n < 6$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, $a_1 < 6$, de modo que la afirmación es válida para $n = 1$. Suponga que se cumple para $n = k$. En tal caso

$$\begin{aligned} a_k < 6 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_k + 6 < 12 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}(a_k + 6) < \frac{1}{2}(12) = 6 \\ &\Longleftrightarrow \quad a_{k+1} < 6 \end{aligned}$$

Esto demuestra por inducción matemática que $a_n < 6$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sucesiones monótonas y acotadas

Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada, el teorema anterior garantiza que tiene un límite. El teorema no dice cuál es el valor del límite, pero ahora que sabe que $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existe, puede aplicar límite en la relación de recurrencia

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(a_n + 6) \quad &\iff \quad L = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + 6\right) \\
&\iff \quad L = \frac{1}{2}(L + 6)
\end{aligned}$$

Al resolver esta ecuación, se determina que $L = 6$.

Sucesiones monótonas y acotadas

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

EJEMPLO 2 Dada la sucesión definida por recurrencia:

$$a_1 = \sqrt{2}\,, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

1. Demuestre que $\{a_n\}$ es creciente.
2. Demuestre que $\{a_n\}$ está acotada.
3. Encuentre $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$.