PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Examen MAT1203 - Álgebra Lineal
Diciembre 5, 2013

1. Sea $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$) el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 2.

   a) [**3 pts.**] Demuestre que

   $$W = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : \quad 2a_0 - 3a_1 + a_2 = 0\}$$

   es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_2[\mathbb{R}]$

   b) [**3 pts.**] Determine una base para W e indique la dimensión de W.

Si dem que W es subespacio mediante

i) $0 \in W$ ii) $p,q \in W \Rightarrow p+q \in W$ iii) $\alpha \in \mathbb{R}, p \in W \Rightarrow \alpha p \in W$

se asignan 3 pts: 1 pto por cada parte i) ii) iii)
1 pto 1 pto 1 pto

otra manera de demostrar que W es subespacio es dem que W es un conjunto generado 3 pts

$-2a_0 - 3a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 2a_0 + 3a_1 \therefore p = a_0 + a_1 t + (-2a_0 + 3a_1)t^2$

$\therefore W = \langle -2t^2+1, t+3t^2 \rangle$ 1 pto

Puesto que $-2t^2+1$, $t+3t^2$ no son uno un múltiplo del otro $\beta = \{-2t^2+1, t+3t^2\}$ es l.i. Como β genera a W, es base de W 1 pto y $\dim W = 2$ 1 pto

2. a) [**3 pts.**] Sea $P = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. Demuestre que P es matriz de proyección y determine una base del espacio W donde P proyecta y otra base para $W^{\perp}$.

b) [**3 pts.**] Encuentre una base ortonormal para el espacio columna de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \\ -1 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$ y una factorización $A = QR$.

2a) Métodos para dem que P es matriz de proyección

(M1) $P^2 = P$, $P^T = P$ $\Rightarrow$ P es matriz de Proyección

(M2) $P^T = P$, $\lambda = 0, 1$ son v.p de P $\Rightarrow$ P es matriz de Proyección

(M3) $\operatorname{Im}(P) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = W$ y de aquí se calcula la matriz de proyección a W, que resulta ser P.

Usando método 1:

$$P = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow P^T = P$$

$$P^2 = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ -6 & 6 & -12 \\ 12 & -12 & 24 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} = P$$

Como $P^2 = P$, $P^T = P$, P es matriz de proyección (1pto)

$$W = \operatorname{Im}(P) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = \operatorname{Col}(P)$$

$\therefore \beta_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ (1pto)

$\vec{x} \in W^{\perp} \Leftrightarrow \vec{x} \perp \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow x - y + 2z = 0$, $x = y - 2z$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\therefore W^{\perp} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\therefore \beta_{W^{\perp}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (1 pto)

2b/ Usamos Gram-Schmidt y su relación con QR.

$$v_1 = u_1$$
$$v_2 = u_2 - v_{1,2}\, v_1$$

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad \hat{v}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$$

$$v_{1,2} = \frac{u_2 \cdot u_1}{v_1 \cdot v_1}$$

La relación con QR es.

$$u_1 = v_1$$
$$u_2 = v_{1,2} v_1 + v_2 \iff A = (u_1, u_2) = [v_1\ v_2]\begin{bmatrix} 1 & v_{1,2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{v_1}{\|v_1\|} & \frac{v_2}{\|v_2\|} \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \|v_1\| & v_{1,2}\|v_1\| \\ 0 & \|v_2\| \end{bmatrix}}_{R}$$

$$= QR.$$

$\therefore \quad u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$

$v_1 = u_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} - v_{1,2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 0,5

$v_{1,2} = \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} = \frac{-40}{20} = -2 \quad \therefore v_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ 0,5

$\therefore \quad \|v_1\| = \sqrt{9+1+1+9} = \sqrt{20} \quad \therefore \hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\|v_2\| = \sqrt{1+9+9+1} = \sqrt{20} \quad \therefore \hat{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ Base ortonormal $= \left\{ \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ 0.5

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 3/\sqrt{20} & 1/\sqrt{20} \\ 1/\sqrt{20} & 3/\sqrt{20} \\ -1/\sqrt{20} & 3/\sqrt{20} \\ 3/\sqrt{20} & -1/\sqrt{20} \end{bmatrix}}_{0.5} \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{20} & \sqrt{20}(-2) \\ 0 & \sqrt{20} \end{bmatrix}}_{0.5}$$

¡+0.5 por método!

3. *a*) [**3 pts.**] Determine la solución de mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$ y la distancia desde b a $Col(A)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) [**3 pts.**] Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Sabiendo que los valores propios de A^TA son 7,2 determine una descomposición de valores singulares $A = U\Sigma V^T$.

La solución de mínimos cuadrados satisface las ecuaciones normales

$$A^TAx = A^Tb$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad A^Tb = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{36}{17}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{17} = \frac{-3}{17}$$

1.5 ptos

0.5 ptos

La distancia de b a $Col(A)$ es

$$\left\| A \begin{bmatrix} \frac{36}{17} \\ \frac{-3}{17} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{17}\left\| \begin{bmatrix} -20 \\ -4 \\ -12 \\ 16 \end{bmatrix} \right\| = \frac{4\sqrt{51}}{17}$$

1 pto

3b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = B.$

Los valores propios de B son $\lambda = 7, 2$. Calculamos los subespacios propios.

$\lambda = 7$ $\quad B - 7I = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{Ker}(B - 7I) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle.$

$\lambda = 2$ $\quad B - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{Ker}(B - 2I) = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$

Una Base de vectores propios ortonormada para $B = A^TA$ es

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\} \quad \therefore \; V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 1 pto

Los valores singulares de A son $\sigma_1 = \sqrt{7}$, $\sigma_2 = \sqrt{2}$ 0.7 pts

Las dos primeras columnas de U son

$\hat{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\hat{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

Se completa a una base ortonormal $\hat{u}_3 \perp \hat{u}_1, \hat{u}_2$.

$u_3 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ $\quad u_3 \perp u_1, u_2 \Rightarrow \begin{matrix} 3x + 5y - z = 0 \\ -x - 3z = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = -3z \\ y = 2z \end{matrix}.$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore \; \hat{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{35} & -1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{14} \\ 5/\sqrt{35} & 0 & 2/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{35} & -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{14} \end{bmatrix}$ $\qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 0.3 pts

0.5 pts $\quad$ 0.5 pts

4. Determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA y justifique demostrando su respuesta.

   a) [**1.5 pts.**] La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es diagonalizable.

   b) [**1.5 pts.**] Si x, y son vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $||x+y|| = 2$, $||x|| = 1$ y $x \perp y$ entonces $||y|| = \sqrt{3}$.

   c) [**1.5 pts.**] Si Q es matriz de $n \times n$ tale que $Q^T Q = 4I$, entonces $||Qx|| = 2||x||$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

   d) [**1.5 pts.**] Si A es de $n \times n$ y A tiene una valor singular igual a cero entonces A no es 1-1 (inyectiva)

a) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \therefore \lambda = 1 \quad m_a = 2.$ 0.5

$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ker}(A-I) = \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$ 0.5 $\therefore m_g = 1 < 2 = m_a$

Como la multiplicidad geométrica de $\lambda = 1$ es menor que su multiplicidad algebraica, A NO ES diagonalizable 0.5

¡FALSO!

b) Si $||x+y|| = 2$, $||x|| = 1$ y $x \perp y$ entonces 0.5

$||x+y|| = 2 \Rightarrow ||x+y||^2 = 4 \Rightarrow (x+y)\cdot(x+y) = 4$

$\therefore \quad x \cdot x + 2x\cdot y + y \cdot y = 4 \Rightarrow ||x||^2 + 2x\cdot y + ||y||^2 = 4$

Pero $||x|| = 1 \quad x \cdot y = 0$ y $\therefore \quad ||y||^2 = 3 \therefore ||y|| = \sqrt{3}$ 1.0

¡VERDADERO!

c) $||Qx|| = \sqrt{(Qx)^T(Qx)}$ 0.5 $= \sqrt{x^T Q^T Q x}$ 0.5 $= \sqrt{x^T 4 I x} = \sqrt{4}\sqrt{x^T x} = 2||x||$ 0.5

¡VERDADERO!

d) $A = U \Sigma V^T$ y $\Sigma = \begin{bmatrix} s_1 & \\ & \ddots \\ & & 0 \end{bmatrix} \therefore |\Sigma| = 0 \therefore$

$|A| = |U \Sigma V^T| = |U| \cancel{|\Sigma|}^{0} |V^T| = 0 \therefore A$ No invertible

Como A es cuadrada, A No es 1-1. 1.5

(Hay muchos métodos!)