Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Departamento de Estadística
Primer Semestre de 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026
Ayudantía 1
14 de Marzo de 2019

Propuesto: Se dice que P es:

- **Finitamente aditiva** si para cualquier colección finita de eventos $\{A_1, \dots, A_n\}$ disjuntos a pares
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$
- **Continua en el vacío** si para cualquier secuencia de eventos $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ tal que $A_{n+1} \subset A_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ se cumple que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0.$$

Muestre que si P es finitamente aditiva y continua en el vacío, entonces P es aditiva numerable.

Demostración. Sean $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Consideremos la sucesión
$$B_n = \bigcup_{k\geqslant n} A_k \in \mathcal{F}$$
Es fácil ver que $B_n \uparrow \varnothing$ por lo cual $P(B_n) \uparrow 0$. Además, como los $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son disjuntos se tiene que B_n y $\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ son disjuntos. Luego, como P es finitamente aditiva se tiene
$$P(A) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = P\left(B_n \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = P(B_n) + P\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) = P(B_n) + \sum_{i=1}^{n-1} P(A_i)$$
Luego, haciendo $n \to \infty$ se tiene que
$$P(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$$
probando lo pedido. □