PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Temporada Académica de Verano 2022

MAT1620 ⋆ Cálculo 2
Solución Examen

1. a) Determine si la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ es convergente o divergente.

   b) Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ es convergente o divergente.

Solución 1:

a) Notemos que para $x \geq 1$:

$$0 < \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1} < \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4} \leq \frac{\sqrt{x^5+3x^5+5x^5}}{x^4} = \frac{3\sqrt{x^5}}{x^4} = 3\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

Luego, dado que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ es convergente, concluimos por el criterio de comparación que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ también converge.

Por otra parte, notamos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ no es impropia y, por lo tanto, converge (por ser la integral definida de una función continua).

Finalmente, concluimos que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ es convergente.

b) Notemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^4}{e^{(n+1)^2}}\cdot\frac{e^{n^2}}{n^4}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{n^4}\cdot\frac{e^{n^2}}{e^{n^2+2n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^4\cdot\frac{1}{e^{2n+1}} = 0
\end{aligned}$$

Luego, por el criterio de la razón, la serie es absolutamente convergente.

Solución 2:

a) Consideremos $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+2x^2+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$. Claramente, $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y positivas para $x \geq 1$. Además, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+2x^2+1} \cdot \frac{\sqrt{x^3}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^8+3x^6+5x^4}}{x^4+3x^2+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^4}}}{1+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}} = 1\end{aligned}$$

Luego, dado que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx$ es convergente, concluimos por el criterio de comparación en el límite que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ también converge.

Por otra parte, notamos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ no es impropia y, por lo tanto, converge (por ser la integral definida de una función continua).

Finalmente, concluimos que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5+3x^3+5x}}{x^4+x^2+1}\,dx$ es convergente.

b) Consideremos $a_n = \dfrac{n^4}{e^{n^2}}$ y $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Notemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{e^{n^2}} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6}{e^{n^2}} = 0$$

Luego, dado que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, concluimos por el criterio de comparación en el límite que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ también converge.

2. a) Demuestre que no existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$$

usando las trayectorias $y = x$ e $y = -xe^x$ para acercarse al punto $(0,0)$.

b) Sea S la superficie definida por la ecuación:

$$x^3z + x^2y^2 + \operatorname{sen}(yz) + 3 = 0$$

Encuentre una ecuación del plano tangente a S en el punto $(-1,0,3)$.

Solución:

a) Si consideramos la trayectoria $y = x$, obtenemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^3+x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2} = 0$$

Por otra parte, al considerar la trayectoria $y = -xe^x$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2(-xe^x)^2}{x^3+(-xe^x)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4e^{2x}}{x^3\left(1-e^{3x}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{xe^{2x}}{1-e^{3x}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}+2xe^{2x}}{-3e^{3x}} = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

Luego, dado que obtuvimos valores distintos para estas trayectorias, concluímos que el límite no existe.

b) Sea $F(x,y,z) = x^3z + x^2y^2 + \operatorname{sen}(yz) + 3$. Notemos que:

$$\begin{aligned} F_x(x,y,z) &= 3x^2z + 2xy^2 & F_x(-1,0,3) &= 9 \\ F_y(x,y,z) &= 2x^2y + z\cos(yz) & F_y(-1,0,3) &= 3 \\ F_z(x,y,z) &= x^3 + y\cos(yz) & F_z(-1,0,3) &= -1 \end{aligned}$$

Luego, una ecuación del plano tangente a la superficie S en el punto $(-1,0,3)$ es:

$$\begin{aligned} 9(x+1) + 3y - (z-3) &= 0 \\ 9x + 3y - z + 12 &= 0 \end{aligned}$$

3. a) Sea $f(x,y) = xy(2x+4y+1)$. Encuentre y clasifique los punos críticos de f como máximo relativo, mínimo relativo o punto silla.

   b) Encuentre el punto de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 14$ donde $f(x,y,z) = 3x-2y+z$ alcanza su máximo valor.

Solución:

a) Derivando parcialmente obtenemos:

$$f_x(x,y) = y(2x+4y+1) + 2xy = y(4x+4y+1)$$
$$f_y(x,y) = x(2x+4y+1) + 4xy = x(2x+8y+1)$$

Notamos que existen 4 combinaciones para que $(f_x, f_y) = (0,0)$:

- $y = 0$, $x = 0$. De donde obtenemos el punto $P_1 = (0,0)$.
- $y = 0$, $(2x+8y+1) = 0$. De donde obtenemos el punto $P_2 = \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.
- $(4x+4y+1) = 0$, $x = 0$. De donde obtenemos el punto $P_3 = \left(0, -\dfrac{1}{4}\right)$.
- $(4x+4y+1) = 0$, $(2x+8y+1) = 0$. De donde obtenemos el punto $P_4 = \left(-\dfrac{1}{6}, -\dfrac{1}{12}\right)$.

Las derivadas parciales de segundo orden de f son:

$$f_{xx}(x,y) = 4y$$
$$f_{xy}(x,y) = 4x+8y+1$$
$$f_{yx}(x,y) = 4x+8y+1$$
$$f_{yy}(x,y) = 8x$$

Veamos ahora que:

- $D(P_1) = 0 \cdot 0 - (1)^2 = -1 < 0$ y entonces P_1 es un punto silla.
- $D(P_2) = 0 \cdot (-4) - (-1)^2 = -1 < 0$ y entonces P_2 es un punto silla.
- $D(P_3) = (-1) \cdot 0 - (-1)^2 = -1 < 0$ y entonces P_3 es un punto silla.
- $D(P_4) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} > 0$, $f_{xx}(P_4) = -\frac{1}{3} < 0$ y entonces en P_4 hay un máximo local.

b) Queremos encontrar el máximo de la función $f(x,y,z) = 2x-2y+z$ con la restricción $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 14$. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange, debemos resolver el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 3 & = & 2x\lambda & (1) \\ -2 & = & 2y\lambda & (2) \\ 1 & = & 2z\lambda & (3) \\ x^2+y^2+z^2 & = & 14 & (4) \end{array}\right.$$

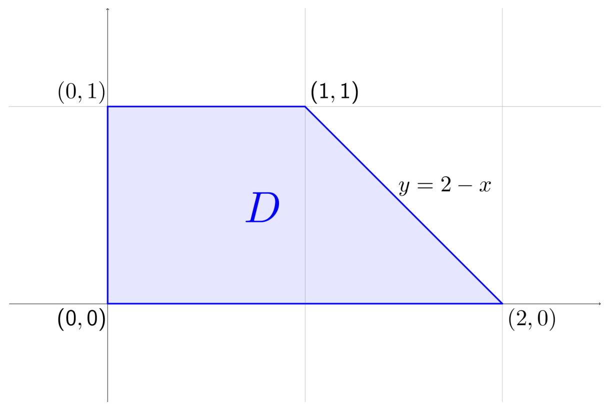
De (1), (2) y (3) es claro que $\lambda \neq 0$ y entonces podemos escribir $x = \dfrac{3}{2\lambda}$, $y = -\dfrac{1}{\lambda}$, $z = \dfrac{1}{2\lambda}$. Luego, al reemplazar en (4) y resolver, obtenemos que $\lambda = \pm\dfrac{1}{2}$. De esta manera, tenemos dos puntos candidatos a extremos de la función f, estos son $P_1 = (3,-2,1)$ y $P_2 = (-3,2,-1)$. Evaluando, obtenemos que $f(P_1) = 14$ y $f(P_2) = -14$. Por lo tanto, la función alcanza su máximo valor en el punto P_1 y dicho valor es $f(P_1) = 14$.

4. a) Determine la constante $c \in \mathbb{R}$ de modo que $\displaystyle\iint_D cxy\,dA = 1$, donde D es el trapezoide de vértices $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ y $(2,0)$.

b) Sea R la región en el primer cuadrante acotada por las circunferencias de ecuaciones $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=2x$. Calcule $\displaystyle\iint_R x\,dA$.

Solución:

a) El trapezoide D se ve como la siguiente región:



Si consideramos a D como una región de tipo II tenemos que:

$$\iint_D cxy\,dA = c\int_0^1\int_0^{2-y} xy\,dxdy = \frac{c}{2}\int_0^1 (2-y)^2 y\,dy$$
$$= \frac{c}{2}\int_0^1 4y - 4y^2 + y^3\,dy = \frac{c}{2}\left(2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{11c}{24}$$

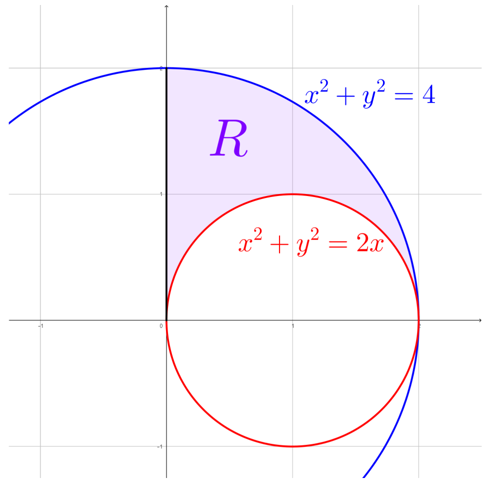
Luego, el valor de c buscado es $c = \dfrac{24}{11}$.

Por otra parte, si consideramos a D como una región de tipo I tenemos que:

$$\iint_D cxy\,dA = c\left(\int_0^1\int_0^1 xy\,dydx + \int_1^2\int_0^{2-x} xy\,dydx\right)$$
$$= c\left(\int_0^1 \frac{x}{2}\,dx + \int_1^2 2x - 2x^2 + \frac{x^3}{2}\,dx\right)$$
$$= c\left(\frac{1}{4} + \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{8}\right)\Bigg|_1^2\right)$$
$$= c\left(\frac{1}{4} + 4 - \frac{16}{3} + 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{8}\right) = \frac{11c}{24}$$

Luego, el valor de c buscado es $c = \dfrac{24}{11}$.

b) La región R es:

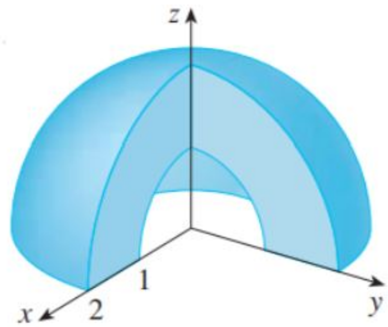


Luego, usando coordenadas polares, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R x\,dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{2\cos(\theta)}^{2} r\cos(\theta)\,r\,drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\cos(\theta)\Big|_{r=2\cos(\theta)}^{r=2} d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)-\cos^4(\theta)\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\,d\theta - \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{8}{3}-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+2\cos(2\theta)+\cos^2(2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos(4\theta)\,d\theta \\
&= \frac{8}{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{8}{3}-\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

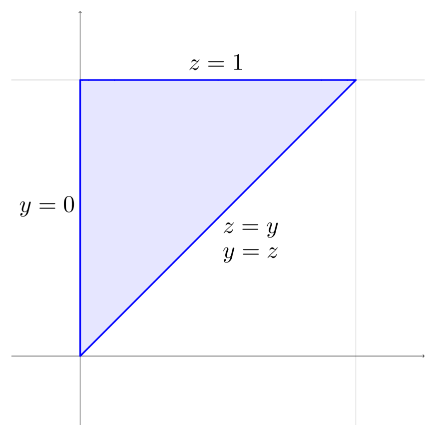
5. a) Escriba la integral triple $\int_0^1 \int_0^z \int_{y^2}^1 f(x,y,z)\, dxdydz$ como una integral de la forma $\iiint f(x,y,z)dxdzdy$.

b) Calcule utilizando una integral triple en coordenadas esféricas, el volumen de la región:



Solución:

a) Notamos que en el plano YZ tenemos la siguiente región:



Luego:

$$\int_0^1 \int_0^z \int_{y^2}^1 f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^1 \int_y^1 \int_{y^2}^1 f(x,y,z)\, dxdzdy$$

b) Una integral triple en coordenadas esféricas para el volumen de la región es:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \int_1^2 \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)\ d\rho d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(\varphi)\ d\varphi\right)\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} 1\, d\theta\right)\left(\int_1^2 \rho^2\, d\rho\right) \\ &= 1 \cdot \frac{3\pi}{2} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7\pi}{2} \end{aligned}$$