Ejercicios 3: EYP1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle   Ayudante: Camilo I. González

Ejercicio 1: Se lanza una moneda hasta que aparece una cara, cuál es la función de probabilidad del número de tiradas ? Calcule $E(X)$ y $Var(X)$

Ejercicio 2: Se lanzan dos dados, cuál es la función de probabilidad de la suma de los números que aparecen ? Calcule $E(X)$ y $Var(X)$

Ejercicio 3: Considere una va X con valores en $\{0, 1, 2, ...\}$. Suponga que $p(k) = P(X = k) = (1 - a)a^k$, para $k = 0, 1, 2, ...$
(a) Para qué valores de a, p es una función de probabilidad ?
(b) Pruebe que para dos enteros positivos cualquiera s y t $P(X > s + t|X > s) = P(X \geq t)$.

Ejercicio 4: De un lote que contiene 25 artículos, de los cuales 5 son defectuosos, se eligen 4 al azar. Sea X el número de artículos defectuosos elegidos. Obtenga la distribución de probabilidades de X si:
(a) Los artículos se escogen con sustitución.
(b) Los artículos se escogen sin sustitución.
(c) En cada caso calcule $E(X)$ y $Var(X)$, e indique una mediana.

Ejercicio 5: Considere una va X con valores en $\{1, 2, ...\}$ y $p(k) = P(X = k) = \frac{1}{2^k}$, para $k = 1, 2, ...$
Calcule $P(X \text{sea par})$; $P(X \geq 5)$, $P(X \text{sea divisible por } 3)$, e indique una mediana.

Ejercicio 6: Sea f una función definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es f una función de densidad ?

Ejercicio 7: Sea X una vac con fdp dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } -1 < x \leq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $-1 < b < 0$.
(a) Calcule $P(X > b|X < b/2)$.
(b) Encuentre b tal que $P(X > b|X < b/2) = 1/9$.
(c) Obtenga y grafique la función de distribución $F_X(x)$.
(d) Obtenga $E(X)$ y $Var(X)$.

Ejercicio 8: Sea X el tiempo de destrucción de una partícula radioactiva y suponga que su función de distribución está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Suponga que λ es tal que $P(X \geq 0.01) = 0.5$. Encuentre t de modo que $P(X \geq t) = 0.9$. Indique la media y la varianza de esta distribución.

Ejercicio 9: La "moda"de la distribución de una va X discreta o continua, es un valor de X que maximiza la fdp $f(x)$ (o $p(x)$). Si este valor es único se denomina moda de la distribución. Encuentre la moda de la fdp:

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2(1-x), & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule la media e indique una mediana para esta distrbución.

Ejercicio 10: La "mediana"de la distribución de una va X discreta o continua, es un valor de X tal que: $P(X \geq x) \geq 0.5$ y $P(X \leq x) \geq 0.5$. Encuentre una mediana de cada una de las siguientes distribuciones, e indique si es única:

(a)

$$p(x) = \begin{cases} \binom{4}{x} \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{4-x}, & \text{si } x = 0, 1, 2, 3, 4, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \text{ para todo } x \in \mathbf{R}.$$

Ejercicio 11: Para medir la velocidad del aire, se usa un tubo (conocido como el tubo estítico de Pilot) que permite medir la diferencia de presión. Esta diferencia de presión está dada por $P = \frac{1}{2}dV^2$, donde d es la densidad del aire y V es la velocidad del viento (kph) una va con fdp dada por:

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & \text{si } 10 < v < 20, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Encuentre la fdp de P.
(b) Encuentre la media y la varianza de P.

Ejercicio 12: Sea X una vad con función de probabilidad dada por:

$$p_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{si } x = 0, 1, 2, ..., \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Muestre que $E(X) = Var(X)$.

– Santiago, 4 de mayo de 2018 –