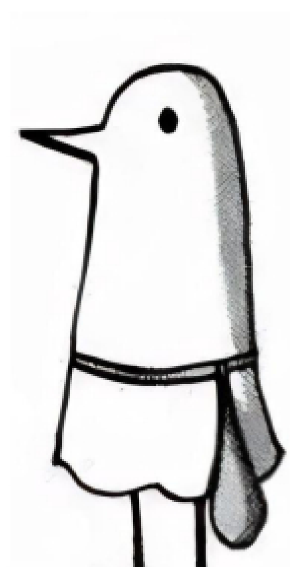
Cálculo 2

Sebastián Rengifo

Dudas consultar a srengifo@uc.cl



Índice

Recomendaciones para pasar el ramo:

En realidad, las recomendaciones son las mismas que para cálculo 1, estudiar del Stewart, realizar los ejercicios propuestos, ver vídeos en YouTube de matefacil, julioprofe, Ronny online esta vez, ya que es el único que tiene integrales triples, pero lo más importante es asegurar la I1, es la más fácil de todas, simplemente hay que saberse los criterios, lo ideal es llegar al examen sin necesitar arriba de un 5, porque la última materia es muy complicada, al menos yo no pude entender todos los ejercicios.

Nuevamente puedes asistir a tutorías del Pimu, ir a las SAI a pedir ayuda, también puedes ver las ayudantías grabadas, pero eso más que nada, a mí me fue muy relevante el Stewart para poder pasar el ramo, pero con el material adjunto entenderán perfectamente.

Éxito en todo, de seguro pasarán el ramo si logran hacer los ejercicios presentes (:

$Integrales\ Impropias$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \ Converge\ para\ p > 1\ y\ Diverge\ para\ p \leq 1$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^p} dx = \ Converge\ para\ p \leq 1\ y\ Diverge\ para\ p > 1$$

$Tipo\ 1$

$Tipo\ 2$

$La\ integral\ tipo\ 1,\ tiene\ intervalos\ de\ números$
$La\ integral\ tipo\ 2,\ tiene\ intervalos\ \ de\ infinitos$

$El\ teorema\ de\ comparación\ nos\ dice\ que$

$$\int_a^{\infty} f(x) < \int_a^{\infty} g(x),\ Si\ g(x)\ es\ mayor\ y\ converge,\ entonces\ la\ otra\ converge$$

$$\int_a^{\infty} g(x) < \int_a^{\infty} f(x),\ Si\ g(x)\ es\ menor\ y\ diverge,\ entonces\ la\ otra\ diverge$$

$g(x)\ es\ la\ función\ que\ tú\ inventarás\ y\ f(x)\ la\ que\ te\ da\ el\ enunciado$

$I1\ 2022 - TAV$

Determine si cada una de las siguientes integrales es convergente o divergente. Evalúe las que sean convergentes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+3\sin^4(2x)}{\sqrt{x^3}}dx$

Tip

$Siempre\ que\ haya\ un\ Sen\ o\ Cos\ en\ la\ integral$
$impropia,\ tendrás\ que\ usar\ comparación$

$Primero\ acotamos,\ (Si\ no\ lo\ hacemos\ nos\ bajan\ puntos)$

$$0 \leq 3Sen^4(2x) \leq 3$$

$$Y\ Notamos\ que\ \frac{1}{\sqrt{x^3}} < \frac{1+3Sen^4(2x)}{\sqrt{x^3}}$$

$Por\ series\ P,\ la\ de\ la\ izquierda\ diverge,\ por\ ende\ la\ otra\ también\ diverge$

$También\ dan\ puntos\ por\ decir\ que\ es\ tipo\ 2,\ no\ olvidar!$

$I1\ 2022 - TAV$

En algunos casos, la integral será sencilla, como las que veíamos en cálculo 1, por ende, lo único que deberás hacer, es separar con el Lim cuando t tiende a la discontinuidad

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{6x^3}{(x^4+1)^2}dx$

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^0 \frac{6x^3}{\left(x^4+1\right)^2}dx + \lim_{t \to \infty} \int_0^t \frac{6x^3}{\left(x^4+1\right)^2}dx$$

Para resolver la integral, usamos $u = x^4 + 1$, *y luego integramos.*

La de la izquierda nos da $-\dfrac{3}{2}$ *y la de la derecha* $\dfrac{3}{2}$, *sumamos y es* $= 0$

$I1\ 2019 - 1$

a) Analice la convergencia de la siguiente integral.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

Comparación al Límite nos dice que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{an}{bn} = C, \text{ si } C > 0 \text{ entonces ambas convergen o ambas divergen}$$

an está dada por el problema, bn tú lo elegirás, para elegirlo, hay un truco, en caso de que al realizar la desigualdad, no puedas concluir nada, porque el de la derecha te daba que divergía, entonces tú usarás comparación al límite con esa función

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} < \frac{1}{x\sqrt{x^2}} < \frac{1}{x^2}$$

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}dx$ *Converge por Series P, Tipo 1, por ende, lo anterior también converge*

Ahora, en este caso no fue necesaria la comparación al Límite, pero la podemos usar para obtener el valor, ya que,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{\left(x\sqrt{x^2-4}\right)}}{\frac{1}{x^2}} = 1$$

Sucesiones e Inducción

*I*1 2022 – *TAV*

En las sucesiones te pueden pedir, revisar la convergencia o resolver por inducción

2. Determine si las siguientes sucesiones son convergente o divergentes, en caso de ser convergentes determine su límite:

   a) $\left\{\dfrac{(-1)^{n-2}n^2}{4+n^3}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

   b) $\left\{\dfrac{\ln(n+2)}{\ln(1+4n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

En las sucesiones, el Límite con Valor Absoluto será igual al Límite sin el valor absoluto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4+n^3} = 0, \text{ por ende converge}$$

Recordar que acá no podemos usar Lhopital porque es una sucesión, por ende dividimos todo por n^3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(1+4n)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(1+4x)}$$

Para poder usar Lhopital, lo asociamos a una función
Luego de usar Lhopital, vemos que el resultado es $= 1$

Vídeo explicando la Inducción
https://www.youtube.com/watch?v=YzqOWuyf2Ik&ab_channel=IsmaelGarc%C3%ADa

Criterio de la Divergencia

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \rightarrow \text{Diverge}$$

Si tienes una serie, le sacas el Límite tendiendo al infinito y resulta distinto de 0 o no existe, entonces diverge

$I1$ 2019 – 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}} = \pm\frac{1}{2}$$

Como es -1^n simplemente al final le ponemos $\pm$ al resultado y como es diferente de 0, por criterio de divergencia, diverge

$I1$ 2019 – 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(n+3)^2} = \frac{n^2+2n}{n^2+6n+9} = 1$$

Como es distinto de 0, diverge

$I1$ 2022 – 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n}{e^{-n}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n}{e^{-n}+n} = \frac{9}{-\frac{1}{e^n}+1} = 9$$

Usamos Lhopital, $\neq 0$, diverge

$I1$ 2017 – TAV

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n2^n}{n^2+3^{n-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+n2^n}{n^2+3^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+n\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{n^2}{3^n}+3^{-1}} =$$

Dividimos todo por 3^n ya que si usamos Lhopital será más complejo, notamos que n^2 crece más lento que lo de abajo, por ende será 0. arriba ocurre lo mismo, por ende se despeja todo y nos queda que es $= 3$

Solo a veces podemos determinar cuál criterio es más conveniente, en caso de no saber siempre parte por el de divergencia, ya que no te demoras más de un minuto

Criterio de Comparación y Comparación al Límite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{an}{bn} = C$$

Si $C > 0$ y bn Diverge, entonces an Diverge
Si $C > 0$ y bn Converge, entonces an Converge

PROTIP

A veces, cuando vamos a comparar, es útil fijarnos en el grado del numerador y el denominador, por ejemplo, si tienes x^2 arriba y x^4 abajo entonces comparas con $\frac{1}{x^2}$ (La resta de los exponentes)

$I1$ 2019 – 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}.$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}}{\frac{1}{n^4}} = 3$$

Como el resultado nos dio un $c > 0$ y $\frac{1}{n^4}$ converge, la serie pedida igual converge

$I1$ 2022 – TAV

Al igual que en las integrales impropias, cuando aparezca sen o cos en una serie, usarás comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2\cos(n)}{n^3-2n^2+7}$$

Esta comparación será por desigualdades, y sabemos que $3 + 2\cos(n)$ será como máximo 5

$\frac{3+2Cos(n)}{n^3-2n^2+7} < \frac{5}{n^3}$ *y como la de la derecha converge, la de la izquierda también*

Criterio de la Integral

Si la serie es continua, positiva y decreciente, entonces, podemos sacar la integral, si la integral converge, la serie converge si la integral diverge la serie diverge

$I1$ 2018 – 2

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}.$$

Es siempre continua, ya que la serie va desde el 2 hasta el infinito, por ende también es positiva y es obvio que es decreciente (porque la fracción aumenta) pero debes justificarlo con la primera derivada.

Ahora, simplemente integramos; $\int_2^{\infty} \frac{1}{x ln(x)^2} dx =$ *hacemos* $u = ln(x)$ *y realizando la integral tenemos* $= \frac{1}{ln(2)}$

Por ende, como la integral converge, la serie también

$I1$ 2021 – 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}.$$

Es continua, positiva, y para ver si es decreciente realizamos la primera derivada.

$\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx =$ *hacemos* $u = -x^3$ *e integramos, lo que nos da* $= \frac{1}{3e}$ *(converge)*

Si bien, no es tan usual que aparezca en pruebas, si ves un ln probablemente sea este criterio y si ves algo fácil de integrar, no pierdes casi nada de tiempo confirmando si sirve o no

$Series\ Geométricas\ ar^{n-1}$

$Si\ r \geq 1\ entonces\ diverge.$

$Si\ r < 1,\ entonces\ usaremos \dfrac{a}{1-r}$

$I1\ 2019-2$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right).$$

Recordemos que podemos separar las series, y ambas son geométricas, con un r menor a 1, por ende convergen

$$Ya\ que\ a=5,\ r=\frac{1}{2}\ entonces\ la\ primera\ serie\ será\ \frac{5}{1-\frac{1}{2}}=10$$

$$Ya\ que\ a=1,\ r=\frac{1}{3}\ la\ segunda\ serie\ será\ \frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

$$Al\ restar\ ambas,\ obtenemos\ \frac{17}{2}$$

$I1\ 2021-2$

Determine si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n}{5+11^n}$ es convergente o divergente.

Lo podemos comparar con la serie $\left(\frac{8}{11}\right)^n$ *la cual converge, por ende, la anterior también converge.*

$Series\ Alternantes\ (-1)^{n-1} bn$

$I1\ 2018-2$

Si la serie es alternante, positiva, decreciente y su límite tendiendo al infinito es igual a 0*, entonces converge*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+4}.$$

Revisamos que es positiva, con la primera derivada
vemos que es decreciente, y solo nos interesa lo que viene después del -1

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^3+4} = 0$$

$I1\ 2016-2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}.$$

Revisamos que es positiva, con la primera derivada
vemos que es decreciente, y solo nos interesa lo que viene después del -1

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

Por ende, Converge

El -1*, si está elevado a algo que haga que vaya cambiando de signo, entonces puede ser serie alternante, sinceramente es medio obvio, pero para que no hayan confusiones de porqué se usa cuando está elevado a* $n-1$ *y cuando está elevado a* n

Criterio de la Razón y de la Raíz

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{an}{an+1} \right| = L$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|an|} = L$$

$L < 1 \rightarrow$ *Converge Absolutamente*

$L > 1 \rightarrow$ *Diverge*

$L = 1 \rightarrow$ *No podemos identificar nada*

$I1$ 2021 – 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2^n * 2}{(n+1)^2} * \frac{n^2}{2^n} = \frac{2n^2}{n^2+2n+1} = 2 \text{ Por ende Diverge}$$

$I1$ 2022 – TAV

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^3}{3^n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n+n^3}}{\sqrt[n]{3^n}} = \sqrt[n]{\frac{2^n\left(1+\frac{n^3}{2^n}\right)}{3^n}} = \frac{2\sqrt{1+\frac{n^3}{2^n}}}{3} = \frac{2}{3} \text{ Converge}$$

Hacemos una factorización para sacar el 2^n de la raíz

El criterio de la raíz rara vez se usa, es medio inútil y te dificulta más que facilitarte las cosas, es mucho mejor buscar otro criterio

Si tenemos un Factorial en algún lado sí o sí deberás usar criterio de la razón, y si tienes un número elevado a n, entonces probablemente debas de usar este criterio

Intervalos de Convergencia

1) *Eliges entre usar Razón o Raíz (Obviamente usa Razón porque Raíz es inútil)*
2) *Luego de calcular el Límite, debemos sacar las constantes y el X, esto quedará en valor absoluto entre -1 y 1*
3) *Luego de despejar, tendremos nuestro intervalo, y el radio que será la mitad de la distancia total.*
4) *Evaluamos en los extremos de los intervalos, en la serie original y vemos si convergen o no*
5) *Dejamos con corchete las que si convergen y con paréntesis quien diverga*

$I1\ 2022-1$

Determine el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$$

$$Lim \frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} * \frac{n * 3^n}{x^n} = x * Lim \frac{n}{3(n+1)} = \frac{x}{3}\ Lim \frac{n}{n+1} = \frac{x}{3}$$

$$n \to \infty$$

Recordemos que el X saldrá como valor Absoluto y está entre -1 y 1

$$-1 < \frac{x}{3} < 1$$

$$-3 < x < 3$$

El Radio de Convergencia es la mitad de la total distancia de los intervalos (La distancia es 6, la mitad es 3)

Nuestro intervalo es $(-3,3)$ Pero debemos de evaluar en los extremos

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n * 3^n} = \frac{1}{n}, \text{ diverge por series } P\text{, por ende no está en el intervalo de convergencia.}$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n * 3^n} = \frac{(-1)^n}{n} = \text{ converge por criterio de la serie alternante. nustro intervalo será } [-3,3]$$

Representación de Series de Potencias

En estos ejercicios, debemos de recordar, que cuando derives una serie, el n que aparece abajo, suma uno, y cuando integres una serie, el n disminuye uno (Si el $n = 0$ e integras, no ocurre nada)

La idea acá es que tengamos $\frac{1}{1-x}$ o algo parecido, siendo el cambiante el $-x$ generalmente, tendrás que ir derivando o integrando para poder llegar a la serie

$I2\ 2018 - 1$

a) Determine una representación en serie de potencias para la función,

$$f(x) = \frac{1}{1+2x},$$

indicando el respectivo intervalo de convergencia.

b) Determine una representación en serie de potencias para la función,

$$f(x) = \frac{x}{(1+2x)^2}.$$

Determine el respectivo intervalo de convergencia.

$$Tenemos\ \frac{1}{1-\ (-2x)} = \sum_{n=0}^{\infty} -2^n x^n$$

Sacamos los Intervalos como lo hacíamos en ejercicios anteriores y tenemos $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

Ahora, para la segunda pregunta, nos damos cuenta que al derivar nuestra función de arriba, obtenemos algo parecido a lo que nos piden, por ende derivamos también la serie ya que anteriormente era una igualdad

$$-\frac{2}{(1+2x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -2^n n x^{n-1}$$

Como necesitamos que haya un X arriba, y que se vaya el -2, *multiplicamos por* $-\frac{1}{2}$ *y por x*

$$\sum_{n=1} (-2)^{n-1} n x^n$$

Recuerda que al multiplicar $-\frac{1}{2}$ *tenemos una división con misma base distinto exponente, por ende se resta.*

Acá será el mismo intervalo, luego de evaluar, $\frac{1}{2}$ *diverge y* $-\frac{1}{2}$ *se indefine, por ende es* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Aprende de memoria las series, sen, cos y e, y recuerda que esas tres tienen R infinito

$Series\ de\ Taylor$

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3\ldots.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

1) *Derivar la función que te dan hasta encontrar un patrón*
(en caso de no tener patrón no importa, pero hazlo 4 *o* 5 *veces)*
2) *Evaluar en donde está centrado*
3) *Realizar la expansión de taylor (Lo que tiene el factorial)*
4) *Encontrar el patrón en la expansión, acá solo tomarás en cuenta los que te dieron un valor distinto de* 0, *y los enumerarás.*
5) *Confirmar que la serie te va dando los mismos valores que la expansión*

$I2\ 2019-1$

$b)$ Determine la serie de Taylor centrada en $x=\frac{\pi}{2}$ para la función $f(x)=\text{sen}(x)$.

Derivamos, y evaluamos en $\frac{\pi}{2}$

$$f(x)=sen(x)=\ 1$$
$$f'(x)=cos(x)=\ 0$$
$$f''(x)=-sen(x)=\ -1$$
$$f'''(x)=-cos(x)=\ 0$$
$$f''''(x)=sen(x)=\ 1$$

Realizamos la expansión de taylor, $\left(a\ \frac{\pi}{2}\ \textit{le llamaré u porque sino queda feo xd}\right)$

$$1+\frac{0(x-u)}{1!}+\ -\frac{1}{2!}(x-u)^2+\frac{0}{3!}(x-u)^3+\frac{1}{4!}(x-u)^4+\frac{0}{5!}(x-u)^5+\ -\frac{1}{6!}(x-u)^6\ldots$$

Los términos no nulos son; $1-\frac{1}{2!}(x-u)^2+\frac{1}{4!}(x-u)^4-\frac{1}{6!}(x-u)^6$

Serán nuestros términos 0, 1, 2, 3

Ahora, identificamos el patrón, y realizamos nuestra serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{2n!}$$

Para identificar que es -1^n, *con el solo hecho de ver que alterna entre* $\pm$ *lo ponemos*
el resto es intuitivo, abajo siempre va de 2! *en* 2! *y en la potencia de* 2 *en* 2
Ahora, confirmamos ingresando los términos para ver si lo hicimos de forma correcta

Aunque no sepas bien qué hacer, si sigues estos pasos, rescatarás puntos

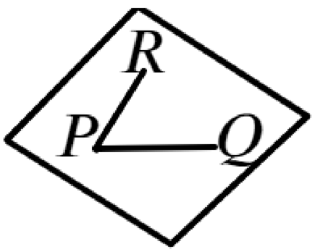
Vectores

$$\text{Producto Punto} = \text{ Multiplicar de forma normal}$$
$$\text{Producto Cruz} = \text{ Sacar el determinante}$$

$I2$ 2018 – 2

Determine la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $(3, -1, 2)$ y es perpendicular al plano que contiene a los puntos

$$(3, -1, 2), \qquad (8, 2, 4), \qquad (-1, -2, -3).$$



$$\text{Debemos realizar el producto cruz, para esto, debemos obtener}$$
$$PQ \text{ y } PR$$
$$P = (3, -1, 2)$$
$$Q = (8, 2, 4)$$
$$R = (-1, -2, -3)$$
$$PQ = (8 - 3, 2 - -1, 4 - 2) = (5, 3, 2)$$
$$PR = (-1 - 3, -2 - -1, -3 - 2) = (-4, -1, -5)$$
$$\text{Nuestro Determinante, será calculado de la siguiente forma}$$
$$\begin{matrix} I & J & K \\ 5 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -5 \end{matrix}$$

$$+[(-5 * 3) - (-1 * 2)] \ - [(-5 * 5) - (-4 * 2)] + [(5 * -1) - (-4 * 3)]$$
$$t(-13, 17, 7)$$
$$\text{Nuestro punto original era } (3, -1, 2) \text{ y el que contiene es } t(-13, 17, 7)$$
$$\text{Tendremos que la ecuación paramétrica es;}$$
$$x = 3 - 13t$$
$$y = -1 + 17t$$
$$z = 2 + 7t$$
$$\text{Si nos pidieran la simétrica simplemente despejamos } t \text{ en cada una}$$

$I2\ 2020-2$

Sean $P(1,2,3)$, $Q(1,-1,-2)$ y $R(0,0,0)$ tres puntos en $\mathbb{R}^3$.

a) Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos P, Q y R.

b) Encuentre el área del triángulo formado por PQR.

c) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano de la parte a).

Nuevamente realizamos PQ X PR (El Producto Cruz)

$$PQ = \ < 0, -3, -5 >$$

$$PR = \ < -1, -2, -3 >$$

Luego de realizar el determinante, obtenemos el vector

$$< -1{,}5, -3 >$$

Ahora, escogemos cualquiera de los puntos, y realizamos la ecuación del plano, por ejemplo (0,0,0)

$$-1\,(x-0) + 5\,(y-0) - 3\,(z-0) = 0$$

Si hubieramos elegido otro punto por ejemplo (1,2,3)

$$-1\,(x-1) + 5\,(y-2) - 3\,(z-3) = 0$$

El Área está determinado por $\frac{1}{2}$ *de la norma del producto cruz, osea*

$$\frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 5^2(-3)^2}$$

La ecuación de la recta, será el punto P + el vector dado por el producto cruz multiplicado por t

$$(1{,}2{,}3) + t\,(-1{,}5, -3)$$

A veces deberemos hacer uso del álgebra lineal, usando FER para resolver algunos ejercicios

Límites

Coordenadas Polares

$x = r\cos\theta$

$y = r\,sen\theta$

$x^2 + y^2 = r^2$

Teorema del Sándwich

Al tener Sen o Cos en un Límite

Luego de acotar, aseguramos su existencia

Rectas o Parábolas

Realizamos

$y = Mx^n$

Forma Iterada

Primero calculamos el Lim $x \to 0$ *y luego el Lim* $y \to 0$ *(O viceversa)*

Para demostrar que NO existe, con tener dos resultados distintos es suficiente

$I2$ 2018 – 2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}.$$

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lim}\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} = \underset{r\to 0}{Lim}\frac{e^{r^2}-1}{r^2} = 1$$

Al quedar en una sola variable, usamos Lhopital y da 1

$I2$ 2017 – 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$$

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{Lim}\frac{x^2-y^2}{sen(x^2+y^2)} = \underset{r\to 0}{Lim}\frac{r^2(Cos^2\theta - Sen^2\theta)}{sen\left(r^2\right)} =$$

$\frac{r^2}{sen(r^2)} = 1$ *Por Límite Notable, nos quedará todo en función de* θ*, por ende, al estar evaluando en* r*, nos dará que no existe (Porque se puede mover en todos los ángulos y siempre cambia el valor*

Siempre que veamos $x^2 + y^2$ *usamos coordenadas polares*

$I2\ 2022-2$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2(1-\cos(2x))}{x^4+y^2}$$

$$\frac{y^2(1-\cos(2x))}{x^4+y^2} < \frac{y^2(1-\cos(2x))}{y^2} < 1-\cos(2x)$$

$$\lim_{x\to 0} 1-\cos(2x) = 0 \text{ Por ende existe y vale } 0$$

Recuerda que las únicas formas de demostrar que existe, son; Teorema del Sándwich Coordenadas Polares y la demostración Formal

En ocasiones donde aparece Sen o Cos, debemos de usar Sándwich, (Aunque hay excepciones como el caso anterior)

$I2\ 2022 - TAV$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^6+y^2}$$

Si hacemos $y = x$ nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^6+x^2} = \frac{x^4}{x^2(x^4+1)} = \frac{x^2}{x^4+1} = 0$$

Si hacemos $y = x^3$ nos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6+x^6} = \frac{1}{2}$$, *ya que son distintos resultados, determinamos que no existe*

$I2\ 2022-1$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Hacemos la forma iterada (Aunque era más fácil coordenadas polares, es solo para enseñarla)

Primero vemos cuando $y = 0$, quedando

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x}{\sqrt{x^2}} = -\frac{x}{x} = -1$$

Ahora vemos cuando $x = 0$

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\sqrt{y^2}} = \frac{y}{y} = 1$$

Al ver que son distintos, determinamos que el límite no existe

Todos los ejercicios de Límites los podemos hacer de distintas formas, no es necesario quedarse con una Pero sabiendo hacer todas las formas, te será más fácil calcularlos (Esto es lo más fácil de la I2)

Continuidad

Cuando nos pidan continuidad, siempre será una función a trozos y sus Límites deben de ser iguales para que sea continua

$I2\ 2022-1$

Sea $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\cos y\sin x}{x} & x\neq 0\\ \cos y & x=0\end{cases}$

a) ¿Es f continua en $(0,0)$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(y)\,sen(x)}{x}= Cos(y) \text{ ya que lo otro es un límite notable y es } 1$$

$cos(y)=1$, y en la rama de abajo tenemos $cos(y)$ cuando y vale 0, que también es 1 por ende, como ambas son iguales, es continua

$I2\ 2022-TAV$

Considere la función:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^a}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Determine los valores $a\in\mathbb{R}$ de modo que $f(x,y)$ sea continua en $\mathbb{R}^2$.

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^a\cos^a\theta}{r^2}=r^{a-2}\cos^a\theta$$

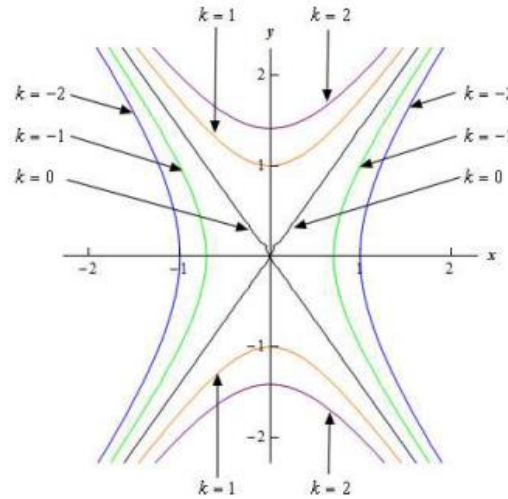
Ahora, tenemos que darnos cuenta, que si $a>2$, esto nos dará 0, que es lo que necesitamos cuando $a\leq 2$, nos quedará el cos solo, y como el teta puede tomar cualquier valor, no nos sirve

Curvas de Nivel

$I2\ 2022 - TAV$

Describa (puede ser con un esbozo) las curvas de nivel de la función:

$$g(x, y) = y^2 - 2x^2.$$



En las Curvas de Nivel, nos darán una función, y debemos de igualarla a un K,
este K se mueve entre todos los reales, pero por conveniencia
iremos eligiendo valores como $-1, 0, 1$, *por ende igualamos a cada una,*
luego despejamos Y, e iremos asignando valores al X para graficar

$$y^2 - 2x^2 = -1 \rightarrow\ y = \pm\sqrt{-1 + 2x^2}$$
$$y^2 - 2x^2 = 0 \rightarrow \pm\sqrt{2x^2}$$
$$y^2 - 2x^2 = 1 \rightarrow \pm\sqrt{1 + 2x^2}$$

Ahora, Graficamos

$I2\ 2022 - 2$

Sea $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$.

a. Encuentre las ecuaciones de las siguientes curvas de nivel para f y grafíquelas.
   i. $f(x, y) = \frac{1}{5}$
   ii. $f(x, y) = \frac{1}{10}$

b. Encuentre el valor de k, para el cuál la curva de nivel $f(x, y) = k$ es un punto.

c. Explique porque dos curvas de nivel de una función cualquiera $f(x, y)$ no pueden intersecarse.

A) $\frac{1}{5}$ *y* $\frac{1}{10}$ *son los valores de K*

Luego de despejar, tenemos $x^2 + y^2 + 1 = 5$ *por ende,* $x^2 + y^2 = 4$ *serán circunferencias de radio 2*

La otra, despejando, tenemos $x^2 + y^2 = 9$ *, una circunferencia de radio 3*

B) Debemos de notar, que cuando K es = 1, tendremos $x^2 + y^2 = 0$, *por ende, será solo un punto*

C) No es posible ya que el dominio no puede tener dos imágenes distintas

Continuidad En Derivadas Parciales

$I2$ 2019 – 1

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & \text{si}\quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & \text{si}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$b)$ Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

$c)$ ¿Es continua, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$?.

Cuando nos piden la derivada parcial en la letra B) es calcular la derivada de forma normal
Pero en la letra C) debemos de hacerlo por definición

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)\ -f(0,0)}{h}=$$ *donde está el x reemplazamos por h, y donde esté el Y por un 0*

$$\frac{0}{h^3}=0,\ \textit{por ende es continua.}$$

$I2$ 2019 – 2

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & \text{si}\quad (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0, & \text{si}\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Determine si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

Hacemos lo mismo que en el ejercicio anterior, lo que resulta

$$\frac{0}{h^3}=0\ \textit{por ende es continua}$$

Plano Tangente y Aproximaciones Lineales

$$\boxed{z - z_0 = f_x(x_0,y_0)\left(x - x_0\right) + f_y(x_0,y_0)\left(y - y_0\right)}$$

$$\boxed{L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x - a) + f_y(a,b)(y - b)}$$

$I3$ 2022 – 2

Sea

$$f(x,y,z) = \frac{yz}{x}$$

a. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie

$$f(x,y,z) = 6$$

en $P(1,2,3)$.

Derivamos respecto de x, de y, y de z, luego evaluamos en (1,2,3)

$$f_x = -\frac{yz}{x^2} \to -6$$

$$f_y = \frac{z}{x} \to 3$$

$$f_z = \frac{y}{x} \to 1$$

Realizamos la ecuación del plano tangente

$$-6(x-1) + 3(y-2) + 1(z-3) = 0$$

$I3$ 2022 – TAV

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $g(0) = -1$ y $g'(0) = 2$. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = xy \cdot g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)$$

Determine la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto $(2,2,f(2,2))$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + xy \cdot g'\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\frac{-1}{x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = 2g(0) + 4g'(0) \cdot -\frac{1}{4} = -4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot g\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + xy \cdot g'\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = 2g(0) + 4g'(0) \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$\boxed{Z = -4 - 4(x-2) + 0(y-2)}$$

$I2$ 2019 – 2

(2 pts.) Considere la función

$$f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}.$$

Determine la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = f(x,y)$ en el punto correspondiente a $(x,y) = (2,1)$. Utilice esto para estimar el valor de $f(1,95;1,08)$.

$$f(2,1) = 3 \quad f_x(2,1) = -\frac{2}{3} \quad f_y(2,1) = -\frac{7}{3}$$

$$z = 3 - \frac{2}{3}(x-2) - \frac{7}{3}(y-1)$$

$$z = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}y - \frac{20}{3}$$

$$3 - \frac{2}{3}(1.95-2) - \frac{7}{3}(1.08-1) = 2.846$$

Regla de la Cadena

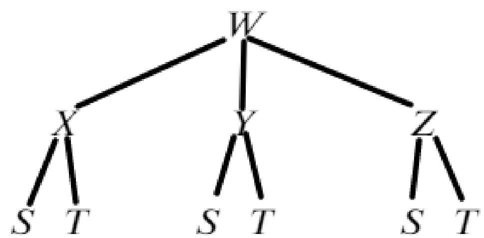
$I2$ 2019 – 2

Considere $w = w(x, y, z)$ una función dos veces diferenciable. Suponga además que

$$x = s^2 - t^2, \qquad y = s^2 + t^2, \qquad z = s + t$$

a) Si $\dfrac{\partial w}{\partial x}(1,0) = 1, \dfrac{\partial w}{\partial y}(1,0) = -2, \dfrac{\partial w}{\partial z}(1,0) = 5$, calcule

$$\frac{\partial w}{\partial s}(1,0) + \frac{\partial w}{\partial t}(1,0).$$



b) Calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}(s,t)$.

Siempre que hacemos un ejercicio de cadena, hacemos el arbolito para no confundirnos.

Nos piden; $\dfrac{\partial w}{\partial s}$*, entonces debemos desglozar el árbol, fijándonos en cada rama donde está la S*

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

Ahora, vemos que tenemos $x = s^2 - t^2$, $y = s^2 + t^2$, $z = s + t$, *entonces, debemos derivar cada una respecto de s*

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 2s, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 2s, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = 1$$

Una vez que tenemos esto, podemos reemplazar

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}2s + \frac{\partial w}{\partial y}2s + \frac{\partial w}{\partial z}1$$

Como debemos de evaluar en el punto (1,0) *Eso haremos, y además, ya nos dan los resultados de* $\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \dfrac{\partial w}{\partial z}$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 1 * 2 + (-2) * 2 + 5 * 1 = 3$$

Haremos lo mismo para $\dfrac{\partial w}{\partial t}$*, y nos dará de resultado* 5*, y la suma, es* 8

$$\frac{\partial \partial w}{\partial s \partial t} = \textit{Primero derivaremos} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -2t\frac{\partial w}{\partial x} + 2t\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Ahora, derivaremos en función de s

$$-2t\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right) + 2t\left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$-2t\left(\frac{\partial w}{\partial x}2s + \frac{\partial w}{\partial y}2s + \frac{\partial w}{\partial z}1\right) + 2t\left(\frac{\partial w}{\partial y}2s + \frac{\partial w}{\partial x}2s + \frac{\partial w}{\partial t}1\right) + \frac{\partial w}{\partial x}2s + \frac{\partial w}{\partial y}2s + \frac{\partial w}{\partial z}1$$

Se deja expresado

Derivada Direccional y Gradiente

$I3\ 2022-2$

2. Suponga que la temperatura, en grados Celsius, en el punto (x, y) de una lámina de metal es:

$$T(x, y) = 30e^{-(x^2+4y^2)}$$

b) Calcule el vector gradiente $\nabla T(x, y)$.

c) Suponga que en el punto $(1,1)$ hay una hormiga  que está a punto de moverse con velocidad unitaria. ¿En qué dirección se debe mover la hormiga de manera tal que experimente el aumento más rápido de la temperatura?

B) Derivamos parcialmente respecto de x y de y

$$f_x = -60xe^{-x^2-4y^2}$$

$$f_y = -240ye^{-x^2-4y^2}$$

y el Vector Gradiente será; $< -60xe^{-x^2-4y^2},\ -240ye^{-x^2-4y^2} >$

C) Debemos de evaluar el punto $(1,1)$ *en nuestro gradiente*

$$< -60e^{-5},\ -240e^{-5} >$$

Si lo simplificamos obtenemos

$< -1, -4 >$ *que será la dirección del vector*

$I3\ 2022-TAV$

$a)$ Suponga que la altura de una colina sobre el nivel del mar está dada por $z = 1000 - 0,01x^2 - 0,02y^2$. Si está en el punto $(60, 100)$ ¿En qué dirección cambia más rápidamente la elevación? ¿Cuál es la tasa máxima de cambio de elevación en este punto?

Derivamos parcialmente respecto de x y de y

$$f_x = -0{,}02x$$

$$f_y = -0{,}04y$$

y el Vector Gradiente será; $< -0.02x,\ -0.04y >$

Debemos de evaluar el punto $(60,100)$ *en nuestro gradiente*

$$< -1.2\ ,\ -4 >$$

Esta será la dirección de máxima variación.

La tasa máxima de cambio es la norma del gradiente

$$\sqrt{1.2^2 + 4^2} = \sqrt{17.44}$$

Mínimos y Máximos

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$
$$D > 0 \ y \ f_{xx} > 0 \ \rightarrow \ Mínimo\ Local$$
$$D > 0 \ y \ f_{xx} < 0 \rightarrow Máximo\ Local$$
$$D < 0\ Entonces\ es\ Punto\ Silla$$

$I3$ 2022 – 2

Encuentre y clasifique todos los puntos críticos (máximo local, mínimo local o punto silla) de la función:

$$f(x, y) = x^2y - x^2 - 2y^2$$

1) *Sacamos la primera derivada parcial respecto de x e y e igualamos a* 0

$$f_x = 2xy - 2x = 0$$
$$f_y = x^2 - 4y = 0$$

2) *Debemos despejar x e y en alguna de las dos, elegiré la primera;*

$$Si\ despejamos\ x\ tenemos \rightarrow xy - x = 0 \rightarrow x(y-1) = 0 \ \rightarrow x = 0$$
$$Si\ despejamos\ y\ tenemos \ \rightarrow xy - x = 0 \rightarrow y = \frac{x}{x} \rightarrow y = 1$$

3) *Lo colocamos en la otra, quedando* $\rightarrow 0^2 - 4y = 0 \rightarrow -4y = 0 \rightarrow y = 0$

$$Ahora,\ reemplazamos\ el\ y \rightarrow \ x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

4) *Por ende los puntos serán* $(0{,}0)$ $(2{,}1)$ $(-2{,}1)$

5) *Calculamos* f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}

$$f_{xx} = 2y - 2, \quad f_{yy} = -4, \quad f_{xy} = 2x$$

6) *Obtenemos nuestro D*

$$(2y-2)(-4) - (2x)^2 \rightarrow -8y + 8 - 4x^2$$

7) *Evaluamos en cada punto crítico que nos dio*

$(0{,}0) \rightarrow 8 \rightarrow$ *Como es positivo el D, buscamos* $f_{xx} = -2$ *Máximo Local*

$(2{,}1) \rightarrow -16 \rightarrow$ *Como es negativo el D, es Punto Silla*

$(-2{,}1) \rightarrow -16 \rightarrow$ *Como es negativo el D, es Punto Silla*

Si bien, el proceso es largo, es sencillo, y siempre son los mismos pasos

Lagrange

Siempre que nos digan "Al punto más cercano" o nos den una restricción "El área debe ser"
Son palabras que nos indican que deberemos de usar Lagrange

$I3\ 2022-2$

encuentre el punto del plano $z = 8x - y$ más cercano al punto $P(9,4,2)$.

Para que funcione, debemos de elevar al cuadrado

$$f(x,y,z) = (x-9)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2$$

El Punto del Plano será nustra restricción

$$g(x,y,z) = 8x - y - z$$

Derivamos ambas, e igualamos, y $g(x,y,z)$ estará multiplicado por λ

$$2(x-9) = 8\lambda$$
$$2(y-4) = -\lambda$$
$$2(z-2) = -\lambda$$
$$8x - y = z$$

Ahora, usando operaciones algebraicas, despejamos λ e igualamos

$$\frac{1}{4}(x-9) = -2(y-4) = -2(z-2)$$
$$y = z+2,\ x = -8z+25$$

Ahora, podemos sustituir todo en $8x - y = z$, obteniendo los valores de x, y, z

$x=1$, $y=5$, $z=3$, por ende el punto será $(1,5,3)$

$I3\ 2022-TAV$

Encuentre las dimensiones de una caja rectangular con tapa de modo que tenga volumen máximo y cuya área superficial sea $64cm^2$.

Al decir, caja rectangular, tendremos el volumen como $f(x,y,z) = xyz$

Nuestra restricción será el área $= 2xy + 2xz + 2yz = 64$

Por ende, $g(x,y,z) = xy + xz + yz = 32$

$$yz = \lambda(y+z)$$
$$xz = \lambda(x+z)$$
$$xy = \lambda(x+y)$$
$$xy + xz + yz = 32$$

Ahora, necesitamos llegar a una igualdad, entre todo, y nos damos cuenta
que si multiplicamos x por el primero, y por el segundo y z por el tercero, todo quedará en xyz

$$xyz = \lambda x(y+z)$$
$$xyz = \lambda y(x+z)$$
$$xyz = \lambda z(x+y)$$

Luego de igualar, $\lambda = 0$, $x = y = z$, por ende, reemplazamos en la última ecuación

$x^2 + x^2 + x^2 = 32 \rightarrow \pm\sqrt{\frac{32}{3}}$ *pero solo usamos los positivos por ser una dimensión*

entonces la dimensión será $(\sqrt{\frac{32}{3}}, \sqrt{\frac{32}{3}}, \sqrt{\frac{32}{3}}$

Integrales Dobles

$I3\ 2022 - TAV$

Calcule la integral:

$$\iint_D 2yx^2 + 9y^3 dA,$$

Donde D es la región acotada por las curvas: $y = \frac{2}{3}x$ e $y = 2\sqrt{x}$.

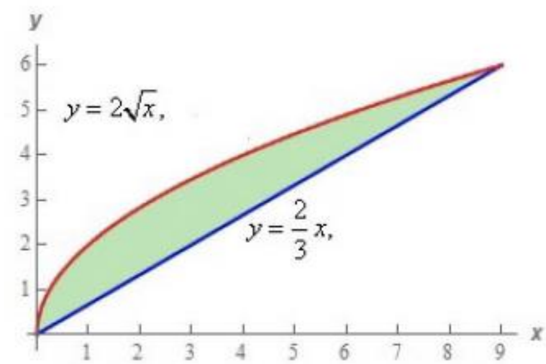
Primero graficamos, para ver quién está sobre la otra

$\frac{2}{3}x = 2\sqrt{x}$ *obtenemos el intervalo de* x*, que será de* 0 *a* 9

el y*, estará entre las dos funciones, desde la menor* $\left(\frac{2}{3}x\right)$ *hasta* $2\sqrt{x}$

$$\int_0^9 \int_{\frac{2}{3}x}^{2\sqrt{x}} 2yx^2 + 9y^3 dydx \text{ y resolviendo obtenemos;}$$

$12x^3 + x^4 - \frac{8}{45}x^5$ *y todo esto será evaluado entre* 0 *y* 9 *pero dejamos expresado*



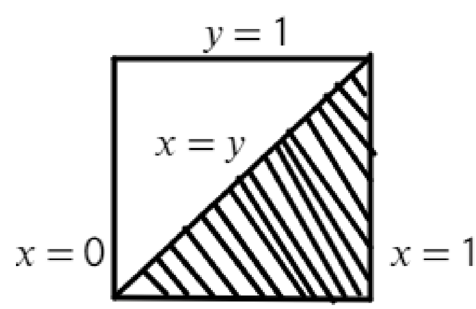
$I3\ 2017 - TAV$

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx;$$

Lo primero que debemos de hacer, es cambiar el intervalo de integración,
para hacer esto, primero notamos que
$x \leq y \leq 1$ *y también* $0 \leq x \leq 1$
Así que graficaremos esto.
Luego de graficar, enmarcamos la parte que nos sirve, y escribimos el cambio de intervalo de integración, que quedará como

$$\int_0^1 \int_0^y sen(y^2)dx\ dy$$

$\int_0^1 ysen(y^2) =$ *Hacemos sustitución* $u = y^2$*, esto dará* $\frac{1}{2}(1 - \cos(1))$



Integrales Dobles en Coordenadas Polares

$$\int\int r\, dr d\theta$$

$I3$ 2022 – TAV

Determine el volumen del sólido que yace dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$, bajo $z = 2x^2 + 2y^2$ y sobre el plano xy.

Para darnos cuenta de los intervalos de θ, basta con considerar que $x^2 + y^2 = 16$
Si te das cuenta, conforman una circunferencia completa, por ende, será de 0 a 2π
y como tenemos $x^2 + y^2 = 4^2$, entonces el radio irá de 0 a 4.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^4 2x^2 + 2y^2 \rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^4 2r^3 drd\theta = 256\pi$$

$I3$ 2020 – TAV

1. Sea $a > 0$. Calcule el volumen limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad az = 2a^2 + x^2 + y^2,$$

y el plano $z = 0$.

Nuevamente tenemos una circunferencia completa pero esta vez de radio a, ya que tenemos $x^2 + y^2 = a^2$

Tenemos $az = 2a^2 + x^2 + y^2$, debemos despejar z, quedando $z = 2a + \frac{1}{a}(x^2 + y^2) \rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^a \left(2a + \frac{1}{a}r^2\right) r\, drd\theta$

Luego de integrar obtenemos como resultado $\frac{5}{2}a^3$

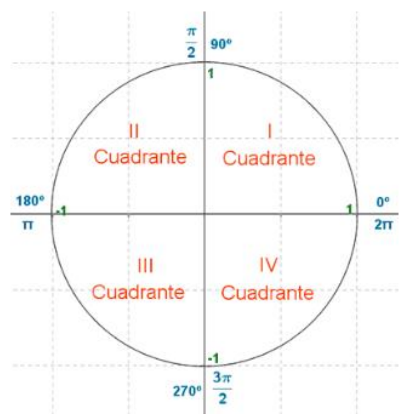
$I3$ 2019 – 1

Considere la región D, en el segundo cuadrante, acotada por las curvas

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad x^2 + y^2 = 9.$$

Calcule la integral,

$$\int_D\int \ln(1 + x^2 + y^2)\, dA$$



Tenemos una curva de radio 1, y la otra de radio 3, ese será nuestro intervalo en dr, y en $d\theta$,
como nos dice que es el segundo cuadrante debemos recordar que eso es de $\frac{\pi}{2}$ hasta π

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_1^3 ln\left(1 + r^2\right) r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}(5ln(10) - ln(2) - 4)$$

Integrales Triples
Cartesianas, Cilíndricas y Esféricas

$$\text{Cartesianas} \rightarrow dz\ dy\ dx$$
$$\text{Cilíndricas} \rightarrow r\ dz\ dr\ d\theta$$
$$\text{Esféricas} \rightarrow p^2 sen(\phi)\ dp\ d\phi\ d\theta$$

$I2\ 2018-1$ Considere la región D acotada por los paraboloides,

$$z = x^2 + y^2, \qquad z = 36 - x^2 - y^2.$$

Describa el volumen usando Coordenadas Cartesianas, Cilíndricas y Esféricas

Al tener un Paraboloide, realizaremos estos pasos :

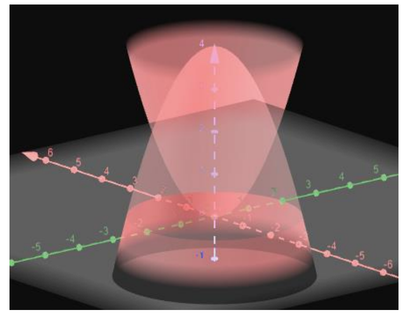
Coordenadas Cartesianas;

1) Graficamos (x,y,z)

Si bien, no nos quedará perfecto como en geogebra, lo importante es tener en consideración, que si x^2+y^2 es positivo, entonces será como una parábola concava hacia arriba si tenemos $-(x^2+y^2)$ será una parábola concava hacia abajo, en este caso, tiene un 36 agregado, y ese será el punto máximo

Lo podemos ver de forma más simple

(como si fuera 2D para entenderlo mejor, habrá una parábola concava hacia abajo sobre la otra)



2) Igualamos Z

3)luego Graficamos (x,y) (ya que tenemos una circunferencia es fácil de graficar)

4) luego despejamos Y

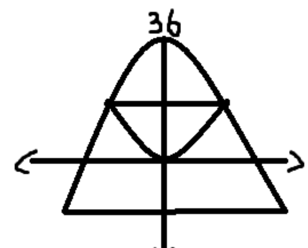
$$x^2+y^2 = 36 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2+y^2 = 18 \rightarrow \text{ el radio será } \sqrt{18}$$

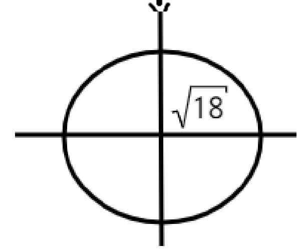
$$y = \pm\sqrt{18-x^2}$$

Para realizar la integral, tenemos que, $\pm$ radio, será nuestro Z, nuestro y, es $\pm$ la igualdad obtenida, X serán las funciones

Ya que, $-36-(x^2+y^2)$ está por encima de la otra, este será el intervalo superior, y ponemos un 1 para calcular el volumen

$$\int_{-\sqrt{18}}^{\sqrt{18}} \int_{-\sqrt{18-x^2}}^{\sqrt{18-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{36-x^2-y^2} 1\ dz\ dy\ dx$$



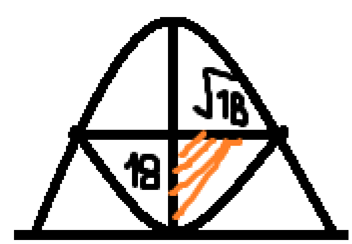


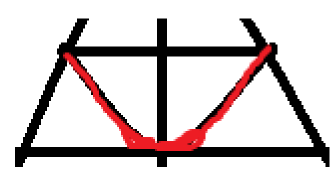
5) Para pasar a coordenadas cilíndricas, en dz el único cambio será poner todo como r

6) El r será nuestro radio, irá desde 0, hasta nuestro radio

7) $d\theta$ estará dado por cuánto recorrió la circunferencia, pero en nuestra grafica recorre todo, por ende será de 0 a 2π

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{18}} \int_{r^2}^{36-r^2} 1\ dz\ dr\ d\theta$$





8) Nuestro $d\theta$ siempre será el mismo, y debemos separar la integral en dos, y ambas se multiplicaran por un 2

9) Recordemos que $x^2+y^2 = Z = 18$, osea, el eje Z será 18, el $d\phi$ irá desde 0, hasta lo que calculamos ahora

Nos fijamos en la parte tachada, y tenemos la identidad, $Tan\theta = \dfrac{Opuesto}{Adyacente} \rightarrow \dfrac{\sqrt{18}}{18} = \dfrac{\sqrt{2}}{6} = Arctan\dfrac{\sqrt{2}}{6} = \theta$

10) Para obtener P, siempre irá desde 0 hasta algo, en este caso $Z = 18 \rightarrow pcos(\phi) = 18 \rightarrow p = 18sec(\phi)$

11) La otra zona, debemos fijarnos en la parte Roja, es $x^2+y^2 = z$, pasando a coordenadas polares

$$p^2Sen^2(\phi)Cos^2(\theta) + p^2Sen^2(\phi)Sen^2(\theta) = pCos(\phi) \rightarrow \text{Factorizamos y Resolvemos } p = \frac{cos\phi}{sen^2\phi}$$

12) $d\theta$ será el mismo $\rightarrow$ y $d\phi$ irá desde el máximo que teníamos antes, hasta $\dfrac{\pi}{2}$ ya que es el máximo valor que puede tomar ϕ porque toma todo el primer cuadrante

$$2\int_0^{2\pi} \int_0^{arctan\frac{\sqrt{2}}{6}} \int_0^{18sec\theta} p^2sen\phi\ dp\ d\phi\ d\theta + 2\int_0^{2\pi} \int_{arctan\frac{\sqrt{2}}{6}} \int_0^{\frac{cos\phi}{sen^2\phi}} p^2sen\phi\ dp\ d\phi\ d\theta$$

$$x = \rho sen(\varphi)\cos(\theta)$$
$$y = \rho sen(\varphi)sen(\theta)$$
$$z = \rho cos(\varphi)$$

$Examen\ 2022 - TAV$

Considere E la región acotada por los planos $4x + y + 2z = 10$, $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. Calcule

$$\iiint_E 6z^2 dV.$$

Para ver los intervalos de dx, irá desde 0 *y luego simplemente hacemos* $y = 0$, $z = 0$, *quedando* $4x = 10 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

Para los intervalos de dz, hacemos $y = 0$, *porque tienen que haber una variable* $\rightarrow\ 5 - 2x$

Para los intervalos de dy, simplemente despejamos, ya que debe estar dado por dos variables $\rightarrow\ 10 - 4x - 2z$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} \int_0^{5-2x} \int_0^{10-4x-2z} 6z^2 dy\, dz\, dx = \frac{625}{2}$$

$PROTIP$

Cuando te digan

$$1 \quad Esfera \rightarrow \theta = (0\ ,\ 2\pi)\ \phi = (0\ ,\ \pi)$$

$$\frac{1}{2}\ de\ Esfera \rightarrow \theta = (0\ ,\ 2\pi)\ \phi = \left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1}{4}\ de\ Esfera \rightarrow \theta = (0\ ,\ \pi)\ \phi = \left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{1}{8}\ de\ Esfera \rightarrow \theta = \left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)\ \phi = \left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$Examen\ 2018 - 1$

Calcule

$$\int\int_E\int z\, dV,$$

donde E es la región que se encuentra entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante.

Por el Tip, ya tenemos $d\theta$ *y* $d\phi$, *y dr, será los radios, nos fijamos que tenemos radio* 1 *y radio* 2

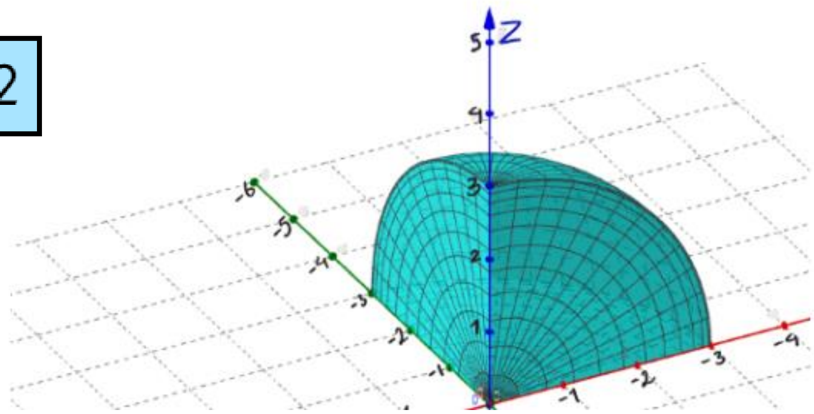
$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ *radio* 1 *y* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ *radio* 2

el Z *lo pasamos a coordenadas polares*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{2} p\cos(\phi)\, p^2 sen(\phi)\, dr d\theta d\phi$$

Sea E un octavo de una esfera descrito por el siguiente dibujo:

$I3\ 2021-2$



Escriba la integral $\iiint_E \cos(x^2+y^2)\, dV$ usando coordenadas esféricas (no requiere calcular el valor de la integral).

Por el Tip, ya tenemos $d\theta$ y $d\phi$, y dr, será los radios, viendo el dibujo, nos podemos dar cuenta que el radio máximo será 3, y el mínimo lo dejamos como 0

el $\cos(x^2+y^2)$ lo pasamos a coordenadas polares

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{3} \cos\left(p^2 sen^2\phi\right) p^2 sen(\phi)\, dr d\theta d\phi$$

Esta materia es la más difícil de todo cálculo 2, como consejo, son solo 6 puntos en el examen, tiene más relevancia priorizar y repasar lo que ya sabes que calentarte la cabeza (en caso de costarte mucho)