PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2018

Pauta Interrogación 2 - MAT1610

1. a) Sea $f(x) = \ln(x^2 + 3^x)$. Determine $f'(0) + f''(0)$.

   Solución:
   Si $f(x) = \ln(x^2 + 3^x)$ tenemos que:

   $$f'(x) = \frac{2x + \ln(3)3^x}{x^2 + 3^x}$$

   y

   $$f''(x) = \frac{(2 + \ln^2(3)3^x)(x^2 + 3^x) - (2x + \ln(3)3^x)^2}{(x^2 + 3^x)^2}$$

   por lo tanto

   $$f'(0) + f''(0) = \ln(3) + 2$$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por el cálculo de $f'(x)$
   - (1 punto) por el cálculo de $f''(x)$
   - (1 punto) por evaluar.

   b) Si a y b son números positivos, encuentre el máximo de la función $f(x) = x^a(1-x)^b$ en el intervalo $[0, 1]$.

   Solución:

   Observe que $f'(x) = ax^{a-1}(1-x)^b - bx^a(1-x)^{b-1} = x^{a-1}(1-x)^{b-1}(a(1-x) - bx)$, por lo que los únicos puntos donde se puede alcanzar el máximo son $x = 0$ o $x = 1$ o $x = \dfrac{a}{a+b}$.
   Evaluando tenemos que $f(0) = f(1) = 0$ y que $f\left(\dfrac{a}{a+b}\right) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^a \left(\dfrac{b}{a+b}\right)^b$.
   Por lo tanto el máximo es $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^a \left(\dfrac{b}{a+b}\right)^b$.

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por derivar correctamente
   - (1 punto) por determinar el punto crítico
   - (1 punto) por concluir cuál es el máximo (descontar 0.5 si no estudia los extremos del intervalo)

2. a) Determine todos los puntos de la curva $x^2y + e^y = e$ cuya tangente es horizontal.

Solución:

Derivando implícitamente tenemos que

$$2xy + x^2y' + y'e^y = 0$$

de donde obtenemos que

$$y' = \frac{-2xy}{x^2 + e^y}$$

De lo anterior tenemos que los puntos cuya recta tangente a la curva es horizontal deben cumplir que $x = 0$ o $y = 0$, pero de la ecuación de la curva observamos que no exiten puntos con segunda coordenada cero, por lo tanto deben cumplir necesariamente que $x = 0$. Reemplazando $x = 0$ en la curva tenemos que $y = 1$, por lo tanto el único punto que tiene recta tangente horizontal es $(0, 1)$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por el cálculo de y'
- (1 punto) por determinar las condiciones para que $y' = 0$
- (1 punto) por determinar que el único punto es $(0, 1)$

b) Sea f una función derivable en un intervalo (a, b) tal que $f'(x) = 1 + (f(x))^2$ para todo $x \in (a, b)$. Demuestre que f es invertible y determine $(f^{-1})'(x)$.

Solución:

Del enunciado tenemos que $f'(x) = 1 + (f(x))^2 > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en dicho intervalo lo que implica que es inyectiva y por lo tanto invertible.

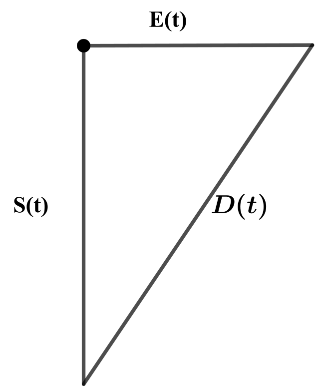
Sabemos que $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{1 + (f(f^{-1}(x)))^2} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por demostar que es invertible.
- (1 punto) por conocer la fórmula de la derivada de la inversa
- (1 puntos) por concluir la derivada de la inversa.

3. a) Dos motocicletas parten desde un mismo punto. Una de ellas se dirige hacia el sur a 60km/hr y la otra hacia el este a 25km/hr ¿Con qué rápidez se incrementa la distancia entre ellas dos horas después de comenzar su trayecto?

Solución:



Tal como se muestra la figura, si llamamos $E(t)$ la distancia recorrida por la moto que se dirige al este, después de t horas desde el punto inicial, y, análogamente, $S(t)$ a la distancia de la moto que se dirige al sur tenemos, del enunciado, que $E'(t) = 25$, y que $S'(t) = 60$. Por otra parte si $D(t)$ corresponde a la distancia entre las motos, después de t horas de iniciado el trayecto vemos que:

$$D^2(t) = E^2(t) + S^2(t)$$

y derivando esta igualdad tenemos que

$$D(t)D'(t) = E(t)E'(t) + S(t)S'(t)$$

Lo que debemos calcular es $D'(2)$, para eso observe que después de 2 horas la moto que se dirige al este ha avanzado 50km y la que va al sur 120km, y por lo tanto la distancia entre ellas es de 130 km. reemplazando esta información en la última de las igualdades obtenemos que

$$D'(2) = 65km/hr$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por detrminar como se relacionan las distancias recorridas con la distancia entre las motos.
- (1 punto) por determinar que $D(t)D'(t) = E(t)E'(t) + S(t)S'(t)$

- (1 puntos) por hacer los reemplazos correspondientes y encontar $D'(2)$

b) Use el Teorema del valor medio para demostrar que si $x > 0$ entonces

$$\arctan(x) < x$$

Solución:

Observe que $f(x) = \arctan(x)$ es una función derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto dado $x > 0$ podemos aplicar el TVM en el intervalo $[0, x]$, obteniendo que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{1 + c^2} < 1$$

Despejando, obtenemos que

$$\arctan(x) < x$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por justificar por qué se pude utilizar el TVM.
- (1 punto) por aplicar correctamente el TVM
- (1 puntos) por acotar derivada y concluir

4. Considere la función

$$f(x) = xe^{1/x}$$

a) Determine las asíntotas de f.

Solución:

Observe que la única posible asíntota vertical es $x = 0$, para verificar si es así veamos que

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x}$$

el último de estos tiene la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$, luego por la regla del H'opital tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1/x^2 e^{1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \infty$$

por lo tanto la recta $x = 0$ es asíntota vertical.

Por otra parte tenemos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1 \text{ y } \lim_{x\to\pm\infty} xe^{1/x} - x = 1$$

por lo tanto $y = x + 1$ es asíntota oblicua.

Distribución de puntaje:

- (0.5 puntos) por determinar, justificadamente la asíntota vertical
- (1 punto) por determinar, justificadamente la asíntota oblicua

b) Determine intervalos de monotonía y, en caso de existir, los extremos locales de f.

Solución:

Observe que $f'(x) = e^{1/x}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$, por lo tanto f es creciente en $(-\infty, 0)$y $(1, \infty)$ y decreciente en $(0, 1)$, además $f(1) = e$ es mínimo local de f.

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por determinar los intervalos de monotonía
- (0.5 punto) por determinar que e es mínimo local

c) Determine intervalos de concavidad y, en caso de existir, los puntos de inflexión.

Solución:

Observe que $f''(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^3}$ por lo tanto es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$. No tiene puntos de inflexión.

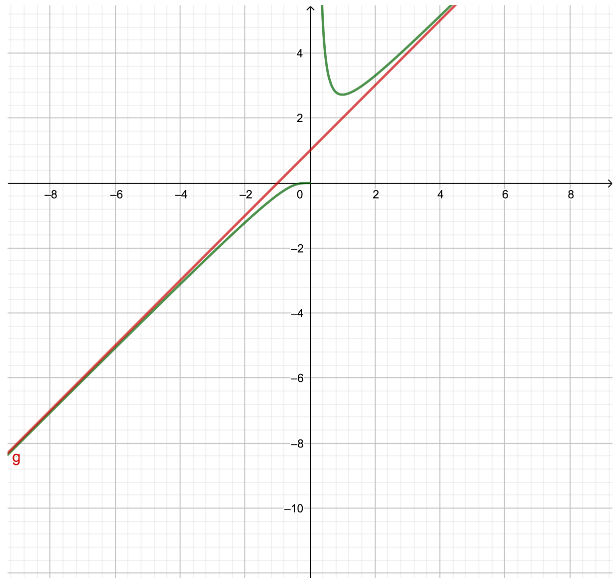
Distribución de puntaje:

- (1 punto) por determinar los intervalos de concavidad

- (0.5 punto) por determinar que no hay punto de inflexión.

d) Bosqueje el gráfico de f.

Solución:



Distribución de puntaje:

- (0.5 punto) por incluir los intervalos de monotonía
- (0.5 punto) por incluir los intervalos de concavidad
- (0.5 punto) por incluir el comportamiento asintótico