PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2022

Interrogación 3 - MAT1610

1. Determine:

   a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx.$

   Solución:
   Considere el cambio de variable $u = x^2$, de esta forma $du = 2xdx$ obteniendo que

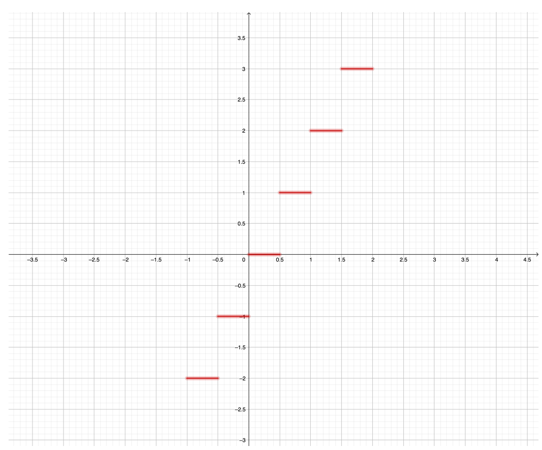
   $$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\arctan(u) + c = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + c$$

   - (1 punto) por cambio de variable adecuado.
   - (1 punto) por plantear la nueva integral
   - (1 punto) por integrar correctamente (descontar 0.5 si olvida el c)

   b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} [\![2x]\!]\,dx$, donde $[\![t]\!] :=$ mayor entero que es igual o menor que t.

   Solución:

   Observe que el gráfico de la función $[\![2x]\!]$ es:



   luego, por interpretación geométrica de la integral tenemos que $\displaystyle\int_{-1}^{2} [\![2x]\!]\,dx = \frac{3}{2}.$

   - (1 punto) por separar en varias integrales constantes o gráficar
   - (1 punto) Por darle interpretación gráfica o calcular cada una de las integrales separadas
   - (1 punto) por determinar el resultado.

2. Sea

$$f(x) = \int_0^x tg(t)dt,$$

donde

$$g(t) = \int_0^{t^3} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi u}{2}\right) du.$$

Calcule $f''(2)$.

Solución:
Por teorema fundamental del cálculo (parte 1),

$$f'(x) = xg(x). \tag{1}$$

Luego,

$$f''(x) \quad = \quad g(x) + xg'(x). \tag{2}$$

Ahora, si $h(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi u}{2})du$, entonces

$$h'(x) = \sin(\tfrac{\pi x}{2}). \tag{3}$$

Como $g(x) = h(x^3)$, aplicamos la regla de la cadena y obtenemos

$$g'(x) = 3x^2 h'(x^3) = 3x^2 \sin(\tfrac{\pi x^3}{2}). \tag{4}$$

Luego,

$$f''(x) = \int_0^{x^3} \sin(\tfrac{\pi u}{2})du + 3x^3 \sin(\tfrac{\pi x^3}{2}). \tag{5}$$

Evaluamos en $x = 2$:

$$f''(2) = \int_0^8 \sin(\tfrac{\pi u}{2})du + 24\sin(4\pi) = \int_0^8 \sin(\tfrac{\pi u}{2})du. \tag{6}$$

Como $\sin(\frac{\pi u}{2})$ está integrado sobre dos períodos completos, su integral es 0. Por lo tanto,

$$f''(2) = 0. \tag{7}$$

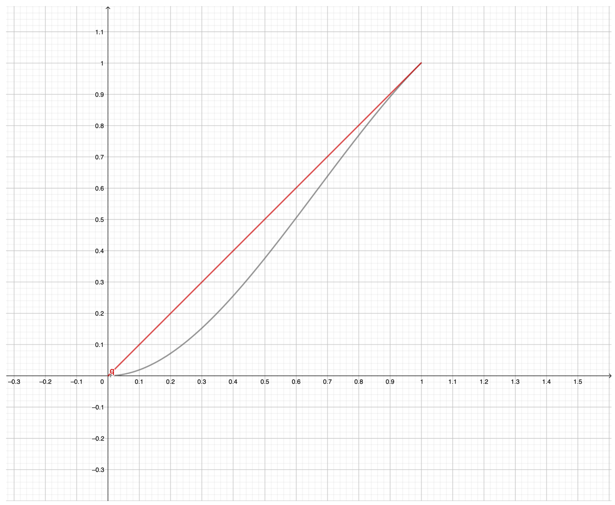
- (1 punto) Por determinar $f'(x)$
- (1 punto) por usar regla del producto para decir que $f''(x) = g(x) + xg'(x)$.
- (2 puntos) por determinar correctamente $g'(x)$.
- (1 punto) por determinar que $\int_0^8 \sin(\frac{\pi u}{2})du = 0$ ya sea argumentando por ciclos o haciendo los cálculos.
- (1 punto) por responder que $f''(2) = 0$.

3. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por la curva $y = 2x^2 - x^3$ y la recta $y = x$.

a) Determine el área de la región $\mathcal{R}$.

Solución:

Observe que la región $\mathcal{R}$ es la de la figura adjunta



por lo tanto el área se calcula como

$$\int_0^1 x - (2x^2 - x^3)dx = \frac{1}{12}.$$

- (1 punto) por los límites de integración.
- (1 punto) por la función que se debe integrar.
- (1 punto) por el resultado

b) Calcule el volumen del sólido obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno a la recta $x = 3$.

Solución:

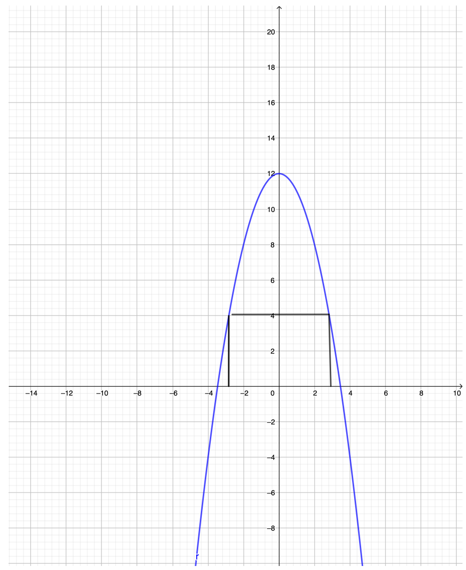
para calcular el volumen usaremos método de cascarones cilíndricos obteniendo que el volumen puede ser calculado como

$$\int_0^1 2\pi(3 - x)(x - 2x^2 + x^3)dx = \frac{13\pi}{30}.$$

- (1 punto) Por determinar que el radio es $(3 - x)$.
- (1 punto) por plantear correctamente la integral.
- (1 punto) por el resultado.

4. Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene dos vértices sobre el eje X y los otros dos en la parábola $y = 12 - x^2$, con $y \geq 0$
Solución:

Se busca las dimensiones del rectángulo que maximiza el área como en la figura adjunta



Observe que si el vértice sobre el eje X, con $x > 0$, el vértice en el primer cuadrante tiene coordenadas $(x, 12 - x^2)$, por lo tanto el área en términos de x es:

$$A(x) = 2x(12 - x^2) \text{ con } x \in (0, \sqrt{12}).$$

para determinar el máximo de está función derivamos obteniendo que

$$A'(x) = 24 - 6x^2$$

poe lo tanto $A'(x) = 0$ si y sólo si $x = 2$.

Por otro lado tenemos que $A''(x) = -12x$, luego $A''(2) = -24 < 0$, obteniendo efectivamente que el área máxima se alcanza con $x = 2$, por lo tanto los lados del del rectángulo pedido miden 4 y 8 unidades.

- (2 puntos) por determinar función a maximizar.
- (1 punto) por derivar correctamente.
- (1 punto) por determinar el punto crítico
- (1 punto) por chequear que el punto crítico es máximo (puede ser con criterio de 1era o segunda derivada).
- (1 punto) por dar las dimensiones del rectángulo.