Función Inversa

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

27 de Abril de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Función Inversa

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Definición.

Dada $f : A \to B$ una función diremos que:

1. f es **estrictamente creciente** si para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$.
2. f es **creciente** si para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
3. f es **estrictamente decreciente** si para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$.
4. f es **decreciente** si para todo $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
5. f es **monótona** en A si es creciente o decreciente.

Observación La mayoría de las funciones presentan cierto tipo de monotonía a tramos, es decir, sobre un intervalo son crecientes y sobre otro son decrecientes.

Función Inversa

Proposición.

Sea $f : A \to B$ una función. Si f es estrictamente monótona, entonces f es inyectiva.

Demostración Para fijar ideas supongamos que f es estrictamente creciente. Sean $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2$. Entonces $x_1 < x_2$ o bien $x_2 < x_1$. Como f es estrictamente creciente, entonces $f(x_1) < f(x_2)$ o bien $f(x_2) < f(x_1)$ y en cualquier caso $f(x_1) \neq f(x_2)$. Esto muestra que f es inyectiva.

Función Inversa

Definición. (Función Inversa)

Dada $f : A \to B$ una función biyectiva, se define la función inversa de f, denotada por $f^{-1} : B \to A$, como la función de B en A dada por:

$$(\forall\, x \in A)(\forall y \in B)(f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x))\,.$$

Función Inversa

Proposición

Si $f : A \to B$ es función biyectiva, entonces su inversa $f^{-1} : B \to A$ es tal que

1. $(\forall\, x \in A)(f^{-1}(f(x)) = x$.
2. $(\forall\, y \in B)(f(f^{-1}(y)) = y$.

Proposición

Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces f^{-1} es biyectiva y $(f^{-1})^{-1} = f$.

Función Inversa

Si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces sabemos que existe una función $g : B \to A$ que es la inversa de f (es decir, $g = f^{-1}$) que satisface las siguientes tres propiedades

1. $g \circ f = id_A$.
2. $f \circ g = id_B$.
3. g es biyectiva.

El siguiente resultado establece un recíproco.

Proposición

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones reales. Si de las condiciones 1, 2 y 3, las funciones f y g satisfacen dos cualesquiera, entonces f es biyectiva y su inversa es g (es decir, $g = f^{-1}$).

Función Inversa

Recuerde que la ecuación que define la inversa de una función biyectiva es

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

Esta ecuación provee de un método para hallar la inversa.

Cómo hallar la inversa de una función biyectiva

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Despeje x de esta ecuación en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x e y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Función Inversa

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

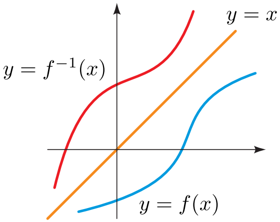
Sabemos que

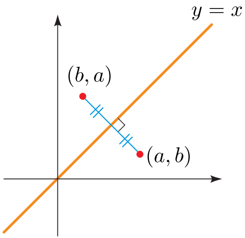
$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

En otras palabras, si $(a, b) \in \text{Graf}(f)$ si y solo si $(b, a) \in \text{Graf}(f^{-1})$. Se sabe que el punto (b, a) se obtiene de (a, b) al reflejar con respecto a la recta $y = x$. Hemos obtenido el siguiente resultado:

Gráfica de una función inversa

La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.





Función Inversa

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

EJEMPLO 1 Sea $h : [0, \infty[\to]-\infty, -2]$ definida por $h(x) = -\sqrt{x^4 + 4}$. Defina, si existe, la función inversa de h.

EJEMPLO 2 Sea

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Halle, si existe, la inversa de f.

Función Inversa

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

EJEMPLO 3 Considere la regla de asignación $f(x) = \dfrac{x}{2} + \sqrt{\dfrac{x^2}{4} - 1}$.

1. Determine el dominio de la función f.
2. Determine la gráfica de la función f y deduzca su recorrido.
3. Determine si la función f es biyectiva, de lo contrario restringa el dominio y el codominio para que la función sea biyectiva.
4. Calcule la inversa de f y gráfiquela.

Función Inversa

EJEMPLO 4 Considere la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}\,.$$

1. Calcule la inversa de g
2. Verifique que $g \circ f = id$ y $f \circ g = id$, donde $f = g^{-1}$.
3. Deduzca que g es biyectiva.