Inecuaciones

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

15 de Marzo de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Gráfico de subconjuntos de $\mathbb{R}$

En virtud de la relación menor o igual definida en $\mathbb{R}$ se puede pensar en ordenar esquemáticamente los números reales de menor a mayor. Los números reales se representan sobre una recta horizontal tal que a cada x en $\mathbb{R}$ se le asocia un punto sobre la recta siguiendo las siguientes convenciones:

1. Si $x < y$ entonces x está a la izquierda de y.
2. Si $x < y$ entonces $m = \dfrac{x+y}{2}$ es punto medio del trazo $\overline{xy}$.

Gráfico de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definición. (Intervalos)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leqslant b$. Los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ se llaman intervalos:

1. Intervalo abierto a coma b:
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\} .$$
2. Intervalo cerrado a coma b:
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leqslant x \leqslant b\} .$$
3. Intervalo a coma b cerrado por la derecha y abierto por la izquierda:
$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x \leqslant b\} .$$

Gráfico de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definición. (continuación)

4. Intervalo a coma b cerrado por la izquierda y abierto por la derecha:
$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x < b\}\,.$$

5. Intervalos no acotados:
$$\begin{aligned}
(-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leqslant a\}\,,\\
(-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < a\}\,,\\
[a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leqslant x\}\,,\\
(a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\}\,.
\end{aligned}$$

Gráfico de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Observación

1. Para denotar un intervalo abierto (a, b) también se puede ocupar los paréntesis $]a, b[$.
2. Se puede anotar el conjunto $\mathbb{R}$ como el intervalo no acotado $(-\infty, \infty)$.
3. Si $a = b$ entonces $(a, a) = (a, a] = [a, a) = \varnothing$ y $[a, a] = \{a\}$.

Inecuaciones

Definición. (Inecuación)

Una **inecuación de una incógnita** es una desigualdad que puede ser verdadera o falsa dependiendo del valor asignado a la incógnita. Resolver una inecuación de una incógnita consiste en determinar todos los números reales para los cuales la inecuación es verdadera.

Inecuaciones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Enunciaremos un método para resolver algunas inecuaciones del tipo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < 0\,,$$

donde el signo $<$ puede ser también > 0, $\leqslant$ o $\geqslant$.
Nos concentraremos en el caso en que $P(x)$ y $Q(x)$ son productos de factores lineales de primer orden del tipo $(ax + b)$. Diremos que el $x = -b/a$ es un punto crítico para este factor y corresponde al valor en el cual el factor es cero.

Resolución de Inecuaciones

El método para resolver estas inecuaciones es:

1. Determinar todos los puntos críticos de los factores lineales involucrados.
2. Ordenar los puntos críticos de menor a mayor y formar los intervalos encerrados entre ellos.
3. Mediante una tabla de signos determinar el signo de la expresión $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en los intervalos dados por el paso 2.
4. Escoger los intervalos para los cuales se satisface la inecuación dada.

EJEMPLO 1 Resuelva las siguientes inecuaciones

1. $x^2 + x > 2$

Solución Notemos que

$$x^2 + x > 2 \Longleftrightarrow x^2 + x - 2 > 0 \Longleftrightarrow (x+2)(x-1) > 0\,.$$

Los factores lineales se anulan cuando $x = -2$ y $x = 1$ y estos son los puntos críticos de la inecuación. Ahora realizamos una tabla de signos con los factores lineales involucrados:

	$-\infty$ a -2	-2 a 1	1 a ∞
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

El conjunto solución para la inecuación es

$$S =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[\,.$$

2. $\dfrac{2x+1}{x+2} \leqslant 1$

Solución Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x+2} \leqslant 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x+2} - 1 \leqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} \leqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{(2x+1)-(x+2)}{x+2} \leqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+2} \leqslant 0\,. \end{aligned}$$

En este caso los puntos críticos son $x = 1$; $x = -2$. Note que en este caso tenemos que el punto crítico $x = -2$ es una restricción para la inecuación.

Inecuaciones

Realizando la tabla de signos

	$-\infty$ a -2	-2 a 1	1 a ∞
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

En este caso el conjunto solución es $S =]-2, 1]$. Note que el punto $1 \notin S$ ya que es una restricción de la inecuación.

Inecuaciones

3. $\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x - 4} < 0$

Solución Notemos que

$$\frac{x^2 - 8x + 15}{x - 4} < 0 \Longleftrightarrow \frac{(x-3)(x-5)}{x-4} < 0\,.$$

- Puntos críticos: $x = 3$, $x = 4$, $x = 5$.
- Restricción: $x \neq 4$.

Inecuaciones

- Tabla de signos

	$-\infty$ — 3	3 — 4	4 — 5	5 — ∞
$x-3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

- Conjunto solución: $S =]-\infty, 3[\cup]4, 5[$.

Inecuaciones

4. $3 + \dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{2x+1}$

Solución Notemos que tenemos la siguientes equivalencias con la inecuación original

$$\begin{aligned}
&\iff\quad 3 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x+1} > 0\\
&\iff\quad \frac{3(x-1)(2x+1) + (2x+1) - (x-1)}{(x-1)(2x+1)} > 0\\
&\iff\quad \frac{6x^2 - 2x - 1}{(x-1)(2x+1)} > 0\,.
\end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación $6x^2 - 2x - 1 = 0$ son $x_1 = \frac{1-\sqrt{7}}{6} = -0,274\ldots$ y $x_2 = \frac{1+\sqrt{7}}{6} = 0,607\ldots$ por lo que podemos realizar la factorización

$$6x^2 - 2x - 1 = 6(x - x_1)(x - x_2)$$

Inecuaciones

La inecuación nos queda

$$\frac{6\left(x-\frac{1-\sqrt{7}}{6}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{7}}{6}\right)}{(x-1)(2x+1)}>0\,.$$

- Puntos críticos: $x_1=\dfrac{1-\sqrt{7}}{6}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}$, $x=1$, $x=-\dfrac{1}{2}$
- Restricciones: $x\neq 1$ y $x\neq -\dfrac{1}{2}$.

Tabla de signos

	$-\infty$ a $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ a x_1	x_1 a x_2	x_2 a 1	1 a ∞
$x - x_1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto el conjunto solución es

$$S = \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1-\sqrt{7}}{6}, \frac{1+\sqrt{7}}{6}\right[\cup]1, +\infty[\,.$$