CLASE 14: FUNCIONES RACIONALES (Cont.)

• $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^4+x^3-2x^2}$

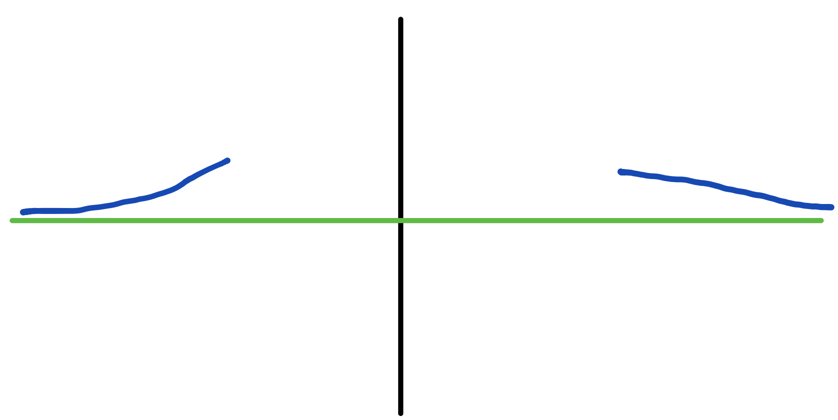
• Asíntotas horizontales

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^4+x^3-2x^2}$$

$$= \frac{x^2}{x^4} \cdot \frac{2+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

$$\approx \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{1} \longrightarrow 0 \text{ si } x \longrightarrow \pm\infty$$

Luego, la asíntota horizontal es el eje horizontal



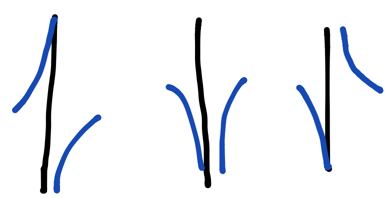
- Asíntotas verticales

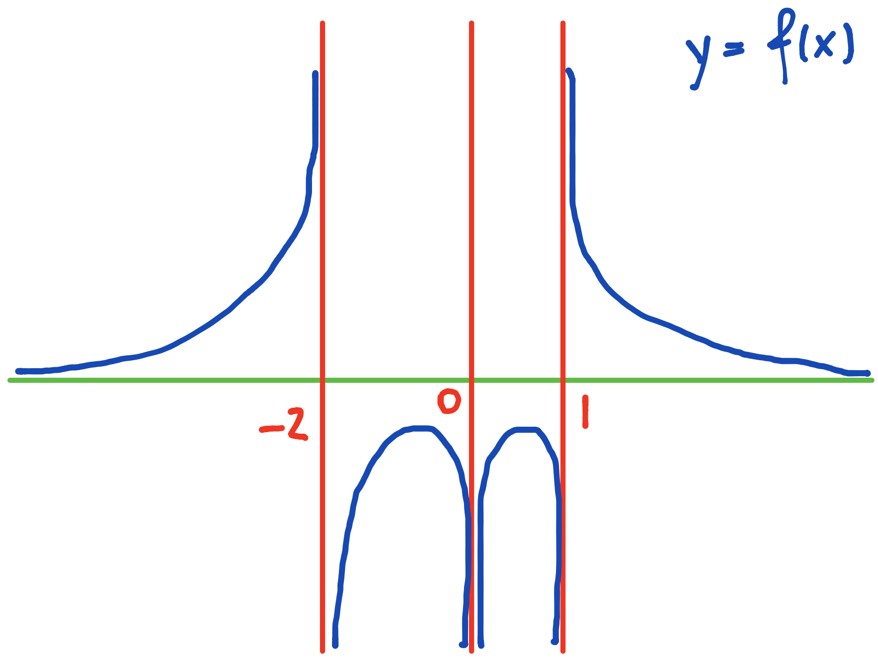
$$f(x)=\frac{2x^2+1}{x^4+x^3-2x^2}$$

$$=\frac{2x^2+1}{x^2(x^2+x-2)}$$

$$=\frac{2x^2+1}{x^2(x+2)(x-1)} \Rightarrow$$ Asíntotas verticales en $x=0, -2$ y 1

		-2		0		1	
$2x^2+1$	$+$		$+$		$+$		$+$
x^2	$+$		$+$	$\times$	$+$		$+$
$x+2$	$-$	$\times$	$+$		$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	$\times$	$+$
f	$+$	$\times$	$-$	$\times$	$-$	$\times$	$+$





• Ej: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-3}$

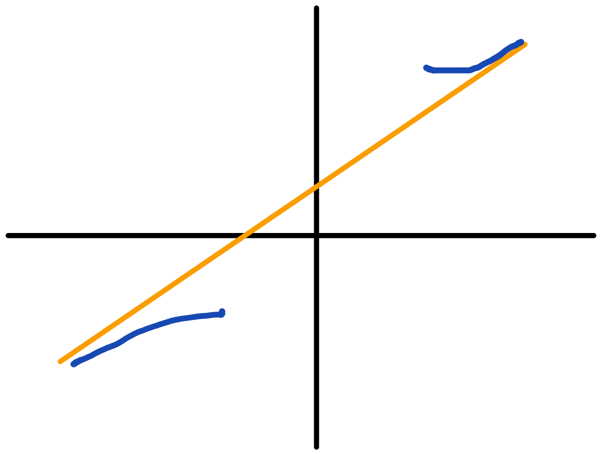
$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-3 \\ \hline \ominus\ x^2 - 3x & x+3 \\ \hline 3x & \\ \ominus\ 3x - 9 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$\Rightarrow x^2 = (x+3)(x-3) + 9$

$\Rightarrow \dfrac{x^2}{x-3} = x+3 + \dfrac{9}{x-3}$

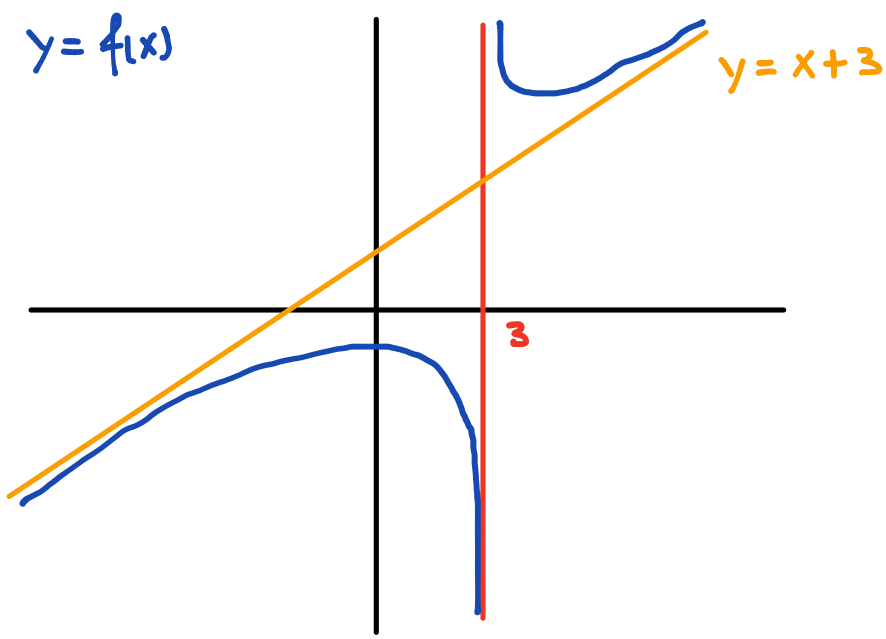
$$\Rightarrow f(x) = x+3+\frac{9}{x-3} \underset{}{\overset{x\to\pm\infty}{\simeq}} x+3$$

asíntota oblicua



Asíntota vertical en $x = 3$

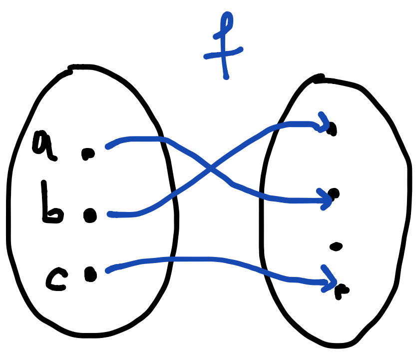
- $f(x) \longrightarrow \infty$ si $x \downarrow 3$
- $f(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \uparrow 3$



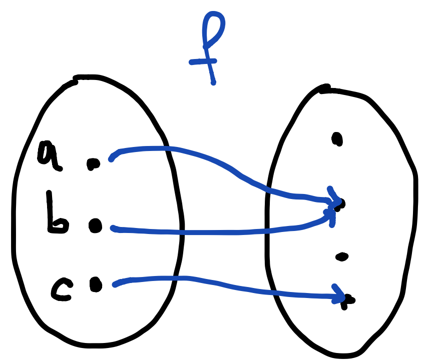
• **DEF**: Sea $f: A \longrightarrow B$ una función.

Decimos que f es inyectiva si

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



Es inyectiva



No es inyectiva: $a \neq b$, $f(a) = f(b)$

• **Ej**: i) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

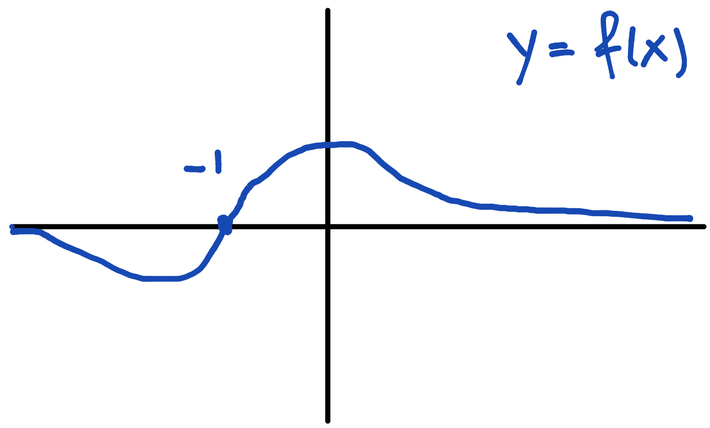
$$x \longmapsto x^2$$

no es inyectiva: $f(1) = f(-1)$, $1 \neq -1$

ii) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x+1}{x^2+1}$$

no es inyectiva: $f(0) = f(1)$, $0 \neq 1$



- <u>Obs</u>: f es inyectiva si

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

- <u>Ej</u>: $f(x) = 2x + 1$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \\ &\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \\ &\Rightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Luego, f es inyectiva

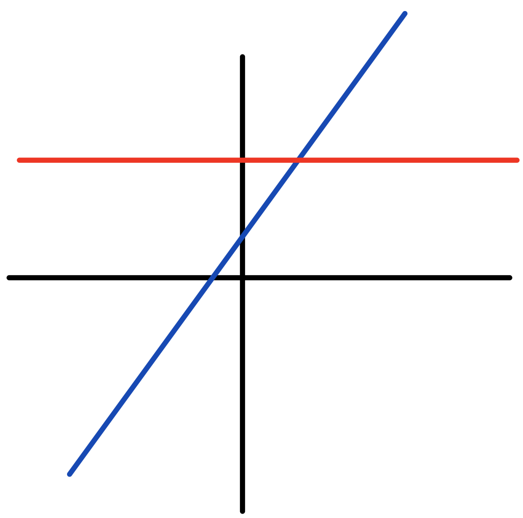
• Ej: $f:[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

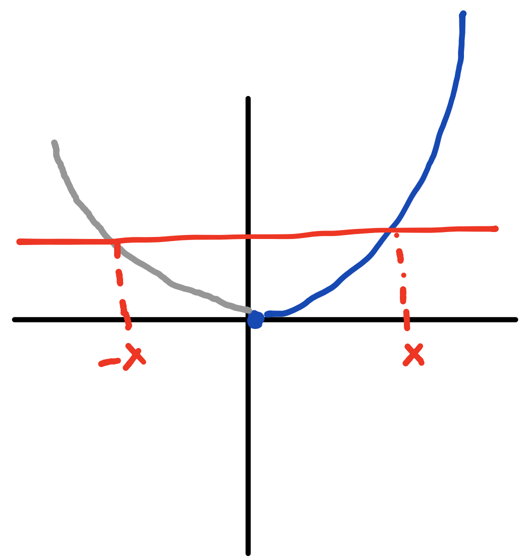
$$f(x_1)=f(x_2) \implies x_1^2 = x_2^2$$

$$\implies |x_1| = |x_2|$$

$$\implies x_1 = x_2 \quad (x_1, x_2 \geq 0)$$

• Obs:



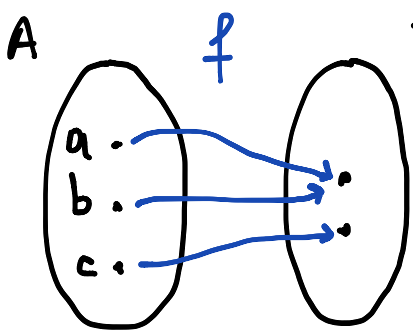


Una función es inyectiva si y solo si toda recta horizontal intersecta su gráfica a lo más una vez.

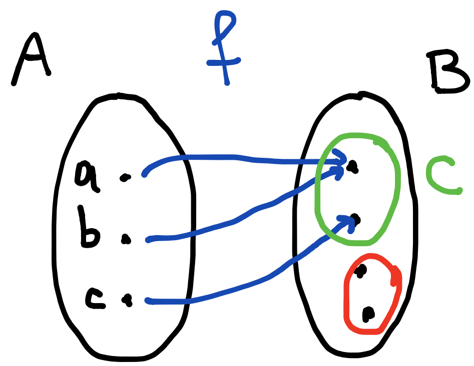
• <u>DEF</u>: Sea $f: A \longrightarrow B$ una función.

Decimos que f es <u>sobreyectiva</u> si

$$\forall y \in B, \ \exists x \in A : f(x) = y$$



Es sobreyectiva



No es sobreyectiva

Sin embargo,

$$\begin{aligned} \tilde{f} : A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

es sobreyectiva.

• <u>Obs</u>: sea $f: A \longrightarrow B$. Siempre podemos transformar f en una función sobreyectiva al tomar $B = \operatorname{Rec} f$.

• Ej: $f(x) = 2x+1$, $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Sea $y \in \mathbb{R}$, buscamos $x \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = y.$$

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 2x+1 = y \\ &\iff 2x = y-1 \\ &\iff x = \frac{y-1}{2} \end{aligned}$$

Es decir, $f\left(\frac{y-1}{2}\right) = y$.

Luego, f es sobreyectiva

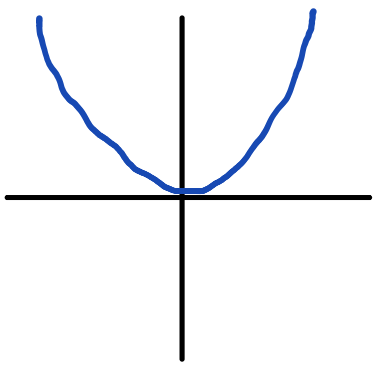
• Ej: $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$x \longmapsto x^2$$

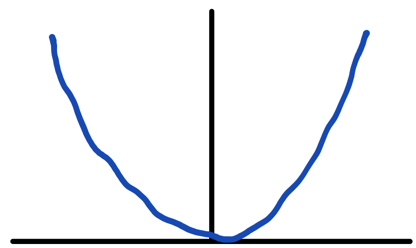
no es sobreyectiva: Como $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$,
$$-1 \notin \text{Rec } f$$

Sin embargo, $f: \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$
$$x \longmapsto x^2$$

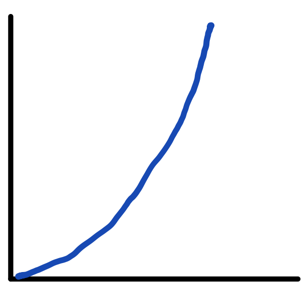
es sobreyectiva: si $y \geq 0$, entonces

$$f(\sqrt{y}) = y$$





sobreyectiva



inyectiva y sobreyectiva

- **DEF**: Sea $f: A \longrightarrow B$ una función.

Decimos que f es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva.

- **Ej**: i) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 2x+1$$

es biyectiva

ii) $f: [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$

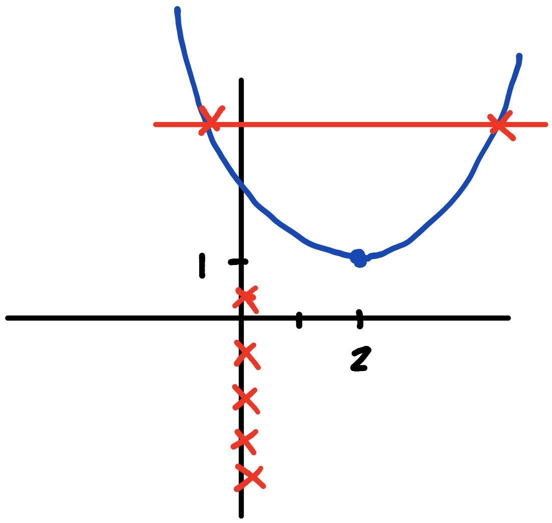
$$x \longmapsto x^2$$

es biyectiva

- **Ej**: Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2 - 4x + 5$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 4 + 1$$
$$= (x-2)^2 + 1$$



- No es inyectiva:

  $f(1) = f(3)$, $1 \neq 3$

- No es sobreyectiva:

  $f(x) \geq 1$ y, por lo tanto, $0 \notin \operatorname{Rec} f$

$$\begin{aligned} f : [2,\infty) &\longrightarrow [1,\infty) \\ x &\longmapsto (x-2)^2+1 \end{aligned}$$

es biyectiva.

- <u>Inyectiva</u>:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow (x_1-2)^2+1 = (x_2-2)^2+1 \\ &\Rightarrow (x_1-2)^2 = (x_2-2)^2 \\ &\Rightarrow |x_1-2| = |x_2-2| \\ &\overset{x_1,x_2\geq 2}{\Rightarrow} x_1-2 = x_2-2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

- Sobreyectiva:

Sea $y \geq 1$. Buscamos $x \geq 2$ tq $f(x) = y$

$$f(x) = y \iff (x-2)^2 + 1 = y$$

$$\iff (x-2)^2 = y-1$$

$$\overset{y \geq 1}{\iff} |x-2| = \sqrt{y-1}$$

$$\overset{x \geq 2}{\iff} x-2 = \sqrt{y-1}$$

$$\iff x = 2 + \sqrt{y-1}$$

Es decir, $f(2+\sqrt{y-1}) = y$

y $2+\sqrt{y-1} \in [2, \infty)$.