PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2023

Interrogación 1 - MAT1610

1. Estudie los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x \operatorname{sen}^2(x)}$

   Solución:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \operatorname{sen}(x)}{x \operatorname{sen}^2(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} - \operatorname{sen}(x)}{x \operatorname{sen}^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\left(\frac{1}{\cos(x)} - 1\right)}{x \operatorname{sen}^2(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\,(1-\cos(x))}{x \operatorname{sen}^2(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x \operatorname{sen}(x)\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))\,(1+\cos(x))}{x \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{x \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x \cos(x)\,(1+\cos(x))} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos(x)} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por factorizar y simplificar.
   - (1 punto) Por multiplicar por un uno adecuado y simplificar.
   - (1 punto) Por determinar el correctamente el valor del límite.

   b) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-\pi}\right)$

   Solución:
   Observamos que para todo $x \neq \pi$:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-\pi}\right) \leq 1$$

   por lo tanto:

$$-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \leq \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-\pi}\right) \leq \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

por otra parte:

$$\lim_{x\to\pi} -\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\pi} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

luego, por el Teorema del Sándwich, tenemos que:

$$\lim_{x\to\pi} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-\pi}\right) = 0$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por acotar adecuadamente la función/por acotar una de las funciones.
- (1 punto) Por determinar el límite de las cotas intensificar que son iguales/ por determinar que el límite no acotado es cero
- (1 punto) Por concluir usando el teorema del sandwich/ Por concluir usando cero por acotado

2. Determine, en caso existan, todas las asíntotas verticales y horizontales de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^6+3x^2}-2x}{(x-1)(x+1)^2}$$

Solución:

Observamos que f es continua en $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, por lo tanto, de existir asíntotas verticales estas deberían ser $x=-1$ y/o $x=1$. Notamos que:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^6+3x^2}-2x}{(x-1)(x+1)^2} = -\infty \quad \left(\sim \frac{\sqrt{4}+2}{-2\cdot 0^2}\right)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^6+3x^2}-2x}{(x-1)(x+1)^2} &= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{x^6+3x^2}-2x\right)\left(\sqrt{x^6+3x^2}+2x\right)}{(x-1)(x+1)^2\left(\sqrt{x^6+3x^2}+2x\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^6+3x^2-4x^2}{(x-1)(x+1)^2\left(\sqrt{x^6+3x^2}+2x\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^6-x^2}{(x-1)(x+1)^2\left(\sqrt{x^6+3x^2}+2x\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x^4-1)}{(x-1)(x+1)^2\left(\sqrt{x^6+3x^2}+2x\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)^2\left(\sqrt{x^6+3x^2}+2x\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2(x^3+x^2+x+1)}{(x+1)^2\left(\sqrt{x^6+3x^2}+2x\right)} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Luego, la única asíntota vertical de la función es la recta $x=-1$. Por otra parte, para determinar si existen asíntotas horizontales, analizamos los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^6+3x^2}-2x}{(x-1)(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x^6+3x^2}-2x}{x^3}}{\dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x^6+3x^2}}{\sqrt{x^6}}-\dfrac{2x}{x^3}}{\dfrac{(x-1)}{x}\dfrac{(x+1)^2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\dfrac{3}{x^4}}-\dfrac{2}{x^2}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+0}-0}{(1-0)(1+0)^2} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^6+3x^2}-2x}{(x-1)(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x^6+3x^2}-2x}{x^3}}{\dfrac{(x-1)(x+1)^2}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x^6+3x^2}}{-\sqrt{x^6}}-\dfrac{2x}{x^3}}{\dfrac{(x-1)}{x}\dfrac{(x+1)^2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\dfrac{3}{x^4}}-\dfrac{2}{x^2}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2} = \frac{-\sqrt{1+0}-0}{(1-0)(1+0)^2} = -1$$

Por lo tanto, las rectas $y=1$ e $y=-1$ son asíntotas horizontales de la función.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por indicar que las únicas posibles asíntotas son $x=1$ o $x=-1$
- (1 punto) Por determinar, justificadamente que $x=-1$ es asíntota
- (1 punto) Por calcular correctamente el límite en $x=1$.
- (1 punto) por concluir que x=1 no es asíntota
- (1 punto) Por determinar, justificadamente, que y=1 es asíntota
- (1 punto) Por determinar, justificadamente, que y=-1 es asíntota

3. Demuestre que la ecuación $x^3=x^2+x+1$ tiene al menos una solución real y determine un intervalo de longitud $\frac{1}{2}$ que contenga dicha solución.

Solución:
Consideramos la función $f(x)=x^3-x^2-x-1$. Es claro que f es una función continua en $\mathbb{R}$ por tratarse de un polinomio. Por otra parte, notamos que:

$$\begin{array}{rcrcl} f(0) & = & -1 & < & 0 \\ f(1) & = & -2 & < & 0 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) & = & -\frac{11}{8} & < & 0 \\ f(2) & = & 1 & > & 0 \end{array}$$

Luego, por Teorema del Valor Intermedio, existe c en $\left(\frac{3}{2},2\right)$ tal que $f(c)=0$. Es decir, $c^3-c^2-c-1=0$, con lo cual, $c^3=c^2+c+1$ y entonces c es una solución de la ecuación.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por definir la función f.
- (1 punto) Por justificar la continuidad de la función f.
- (1 puntos) Por encontrar un intervalo donde f cambie de signo.
- (1 punto) Por encontrar intervalo donde f cambie de signo de largo 1/2
- (1 punto) Por concluir usando el TVI que existe hay al menos una raíz de f.
- (1 punto) Por concluir que la ecuación dada tiene al menos una solución real.

4. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & , \quad x<1 \\ c & , \quad x=1 \\ 2x^2 & , \quad x>1 \end{cases}$$

a) Establezca condiciones sobre a, b y c de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}$. Justifique su respuesta.

b) Determine si existen valores de a, b y c de modo que f sea derivable en $x=1$.

Solución:
Notamos primero que f es continua para $x<1$ y para $x>1$ ya que corresponde a funciones polinomiales. Por otra parte, para que f sea continua en $x=1$, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) = & \lim_{x\to 1^+} f(x) & = f(1) \\ \lim_{x\to 1^-} ax+b = & \lim_{x\to 1^+} 2x^2 & = c \\ a+b = & \quad 2 & = c \end{aligned}$$

Para que f sea derivable en $x=1$ debe existir $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$. Analizando los límites laterales y usando la condición de continuidad ($\star$) tenemos que:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a(1+h)+b-c}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a+ah+b-c}{h} \stackrel{\star}{=} \lim_{h\to 0^-} \frac{ah}{h} = a$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(1+h)^2-c}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2+4h+2h^2-c}{h} \stackrel{\star}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{4h+2h^2}{h} = 4$$

Concluimos entonces que f será derivable en $x=1$ si $a=4$, $b=-2$ y $c=2$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por justificar que f es continua para $x \neq 1$.
- (1punto) Por la definición de continuidad en $x=1$.
- (1 punto) Por establecer correctamente las condiciones sobre a, b y c.
- (1 punto) Por la definición de derivabilidad en $x=1$.
- (1 punto) Por las condiciones de a, b y c concluidas del punto anterior
- (1 punto) Por determinar correctamente los valores de a, b y c.