Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026
Ayudantía 6
25 de Abril de 2019

1. Sea (X,Y) vector aleatorio con densidad
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\Gamma(y)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(k)\Gamma(y-k+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{k+\alpha-1}(1-x)^{y+\beta-k-1}$$
con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{N}, y \in \{k, k+1, \ldots\}$ y $x \in [0,1]$. Encuentre la distribución marginal de X e Y.

2. Sea (X,Y) un vector aleatorio absolutamente continuo con función de densidad
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(y^2-x^2)e^{-y} & \text{si } y>0,\ -y<x<y \\ 0 & \text{si no} \end{cases}.$$
   a) Calcule $P(2X > Y)$.
   b) Encuentre la distribución marginal de Y e X.
   c) Decida si X e Y son independientes o no.

3. Sea (X,Y) un vector aleatorio absolutamente continuo cuya función de densidad esta dada por
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)}x^{\alpha_1-1}y^{\alpha_2-1}(1-x-y)^{\alpha_3-1}$$
con $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ y $0 \leqslant x+y \leqslant 1$.
   a) Determine las distribuciones marginales de X e Y.
   b) Determine si X e Y son independientes.

4. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{Geom}(p)$. Defina la variable aleatoria $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$.
   a) Encuentre la distribución de Y_2.
   b) Encuentre la distribución de Y_n.

5. *a)* Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes y $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pruebe que $g_1(X_1), \ldots, g(X_n)$ son variables aleatorias independientes.
   b) Sean $X_1, X_2 \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \text{N}(\mu, \sigma^2)$. Muestre que
$$W_1 = \frac{X_1+X_2}{2}, \quad W_2 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{2}(X_k - W_1)^2$$
son independientes e identifique sus distribuciones.

6. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución $\mathrm{U}[0,1]$. Sean $R = \sqrt{2\log(1/(1-X))}$ y $\Theta = \pi(2Y-1)$.

   a) Muestre que $\Theta \sim \mathrm{U}[-\pi,\pi]$ y que R tiene distribución Rayleigh con densidad
   $$f_R(r) = re^{-r^2/2}, \quad r > 0.$$

   b) Muestre que Z y W, definidas por $Z = R\cos(\Theta)$ y $W = R\sin(\Theta)$ son independientes y con distribución $\mathrm{N}(0,1)$.