PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2022

MAT1107 – Introducción al Cálculo

TAREA

1. Sean a, b y c la medida de los lados de un triángulo y A su área. Demuestre que
$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}A\,.$$

2. Resuelva la siguiente inecuación
$$\left|\frac{|x-2|-3}{|x|-1}\right| \geqslant 4\,.$$

3. Sea $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \frac{x}{1+x}\,.$$
   a) Pruebe que f es estrictamente creciente.
   b) Demuestre que f es acotada superiormente

4. Dadas las funciones
$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } \sqrt{3} \leqslant x \leqslant 2\,, \\ 1 - \sqrt{x^2-4} & \text{si } x \leqslant -4 \end{cases} \qquad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{|x^2-4|-3}\,,$$
con $\mathrm{Dom}(g) = (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup [0, 1]$ tal que $f = h^{-1} \circ g$.
   a) Demostrar que f y g son funciones inyectivas.
   b) Hallar la función h.

5. Demuestre que si $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$ entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

6. El siguiente método iterativo para obtener, con error tan pequeño cuanto se desee, raíces cuadradas de un número real $a > 0$ ya era conocido por los babilonios 17 siglos antes de la era cristiana. Se toma de forma arbitraria un valor $x_1 > 0$ y se define inductivamente
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)\,.$$
   a) Use la sucesión iterativa para calcular $\sqrt{11}$ con 6 decimales exactos tomando $x_1 = 1$.
   b) Demuestre que la sucesión (x_n) converge a $\sqrt{a}$.