PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I1 MAT1203 - Algebra Lineal
Septiembre 5, 2013

1. *a*) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -m \\ 0 & 2\,m-2 & 2\,m \\ 0 & 3\,m-3 & 3\,m \\ 0 & 0 & m^2-4 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 1-m \\ 2\,m \\ 3\,m \\ m-2 \end{bmatrix}$$

Determine las condiciones para $m \in \mathbb{R}$ para las cuales el sistema $Ax = b$ tiene una única, infinitas o ninguna solución.

b) Sea $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^n$ linealmente independiente. Decida si

$$\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_1 + v_4\}$$

es un conjunto linealmente independiente o linealmente dependiente.

Solución:

a) Sumando -3/2 veces la fila 2 a la fila 3 de la matriz ampliada asociada al sistema y luego inteercambiando las filas 3 y 4 obtenemos

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m & 1-m \\ 0 & 2\,m-2 & 2\,m & 2\,m \\ 0 & 3\,m-3 & 3\,m & 3\,m \\ 0 & 0 & m^2-4 & m-2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m & 1-m \\ 0 & 2\,m-2 & 2\,m & 2\,m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^2-4 & m-2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -m & 1-m \\ 0 & 2\,m-2 & 2\,m & 2\,m \\ 0 & 0 & m^2-4 & m-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad [\mathbf{0{,}6pts}.]$$

- Si $m = 2$ entonces $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, el sistema es consistente y tiene infinitas soluciones [**0.6 pts.**] .
- Si $m = -2$ entonces $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, el sistema es inconsistente pues aparece la ecuación $0 = -4$ [**0.6 pts.**] . Si $m = 1$ entonces $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, el sistema es inconsistente pues aparece la ecuación $0 = 2$ [**0.6 pts.**]
- Si $m \neq 1$, $m \neq 2$ y $m \neq -2$ entonces $[A|b]$ tiene sus 3 primeras columnas con pivotes distintos de cero y la cuarta columna no es pivote y por lo tanto el sistema tiene solución y es única [**0.6 pts.**] .

b) Sea $\{v_1, v_2.v_3, v_4\}$ es LI. Debemos determinar si

$$x_1(v_1+v_2)+x_2(v_2+v_3)+x_3(v_3+v_4)+x_4(v_1+v_4) = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \quad [\mathbf{0{,}7pts.}]$$

Tenemos

$$\begin{aligned} x_1(v_1+v_2)+x_2(v_2+v_3)+x_3(v_3+v_4)+x_4(v_1+v_4) &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (x_1+x_4)v_1+(x_1+x_2)v_2+(x_2+x_3)v_3+(x_3+x_4)v_4 &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow x_1+x_4=0,\ x_1+x_2=0,\ x_2+x_3=0,\ x_3+x_4 &= 0(*) \quad [\mathbf{1{,}0pts.}] \\ \Leftrightarrow Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Escalonamos la matriz A. Restando la fila 1 a la 2, luego la 2 a la 3, luego la 3 a la 4, obtenemos

$$FER(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que hay una columna no pivote, el sistema $Ax = 0$ tiene soluciones no nulas (x_4 variable libre) [**0.8 pts.**] y entonces los vectores son linealmente dependientes [**0.5 pts.**]

(No es necesario escalonar, se puede resolver el sistema (*) directamente obteniendo $x_1 = -x_4, x_3 = -x_4 x_2 = x_4$, con x_4 libre, y también tiene todos los puntos)

2. Sea A matriz tal que la escalonada reducida de $[A|I]$ es

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

a) Determine las soluciones generales de $Ax = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y de $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) Decida si la transformación lineal $T(x) = Ax$ es 1-1 y/o sobre. Justifique

Solución:

a) La conjunto solución de Ax=0 son todos los vectores $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, donde $x_1 = -2x_3 - x_4$, $x_2 = 3x_3 - 2x_4$ con x_3, x_4 libres [**1.5 pts.**]

El conjunto solución de $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ son todos los vectores $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, donde $x_1 = -2x_3 - x_4 + 1$, $x_2 = 3x_3 - 2x_4 + 1$ con x_3, x_4 libres. [**1.5 pts.**]

b) La escalonada reducida de A es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Puesto ella tiene dos columnas no pivotes, la matriz A no es 1-1 [**1.5 pts.**] (Alternativa: puesto que $Ax = 0$ tiene infinitas soluciones A no es 1-1).

Puesto que la escalonada reducida de A tiene filas nula s A no es sobre [**1.5 pts.**] (Alternativa: El escalonar $[A|I]$ se resuelven al mismo tiempo los sistemas $Ax = e_i$, $i =, 2, 3$, donde e_i son los vectores canónicos. De la escalonada de $[A|I]$ se ve que el sistema $Ax = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ no tiene solución, pues para este sistema se obtiene la ecuación 0=1. Entonces A no es sobre)

3. *a)* Sean $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \ x + 2y - z = 1\}$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$. Determine la imagen del plano P bajo A y establezca el valor de α para que la imagen de P bajo A encontrada sea una recta en $\mathbb{R}^3$

b) Sea A una matriz no nula de $n \times n$ tal que $A^2 = 5A$. Si $B = A^2 + 3A + I$ y $C = kA + I$ determine los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $C = B^{-1}$.

Solución:

a)
- $x + 2y - 2z = 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 + z - 2y$ con y, z variables libres
- $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2y + z \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ [**1.0 pts.**]
- Por lo tanto para $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in S$ se tiene

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= A(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) \\ &= A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + yA \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + zA \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{1{,}0pts}.] \end{aligned}$$

- Entonces

$$A(S) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \langle \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} +, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} \rangle$$

- Para que $A(S)$ sea una recta debe cumplirse que $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$ es un múltiplo de

$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -9$ [**1.0 pts.**]

b) Supongamos que $A^2 = 5A$, $B = A^2 + 3A + I$, $C = kA + I$. Entonces

$$\begin{aligned} C = B^{-1} \quad &\Leftrightarrow \quad BC = I \\ &\Leftrightarrow \quad (A^2 + 3A + I)(kA + I) = I \quad [\mathbf{1{,}0pts}.] \\ &\Leftrightarrow \quad (8A + I)(kA + I) = I \quad [\mathbf{0{,}5pts}.] \\ &\Leftrightarrow \quad 8kA^2 + (8 + k)A + I = I \\ &\Leftrightarrow \quad 40kA + (8 + k)A = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (41k + 8)A = 0 \quad [\mathbf{1{,}0pts}.] \end{aligned}$$

Entonces para $k = -\dfrac{8}{41}$ se tiene que $C = B^{-1}$ [**0.5 pts.**]

4. Determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA y justifique su respuesta.

a) Las únicas matrices de la forma $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ que cumplen con $A^2 = I$ son $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Si A, B son matrices de 4×3 y existen vectores b, c tales que los sistemas $Ax = b$, $Bx = c$ tienen solución única, entonces las escalonadas reducidas de A y B son iguales.

c) Si A, B son matrices invertibles de $n \times n$ y $B^T X^T A^T = I$ entonces $X^{-1} = AB$

d) Si una matriz A de $n \times n$ tiene columnas linealmente independientes entonces A^2 es sobre.

Solución:

a) FALSO: Si $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}$ entonces $A^2 = \begin{bmatrix} x^2 & (x+z)y \\ 0 & z^2 \end{bmatrix} =$ [**0.5 pts.**] y entonces la matriz $A \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ cumple con la condición $A^2 = I$ pero no está en la lista dada [**1.0 pts.**] . (También $A^2 = I$ sii $x^2 = z^2 = 1, (x+z)y = 0$, entonces para $x = 1$, $z = -1$, con y arbitrario la matriz A cumple la condición dada. Para $y \neq 0$ la matriz no está en la lista indicada.)

b) VERDADERO Si A es de 4×3 y $Ax = b$ tiene solución única para algún vector b todas las columnas de A son columnas pivotes en su escalonada reducida y por lo tanto $FER(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. El mismo argumento aplica a B y entonces $FER(A) = FER(B)$. [**1.5 pts.**]

c) FALSO
$B^T X A^T = I$ implica $(B^T X A^T)^T = I^T$ implica $AXB = I$ [**0.3 pts.**] implica $X = A^1 B^{-1}$ [**0.4 pts.**] implica $X^{-1} = (A^1 B^{-1})^{-1} = BA \neq AB$ [**0.8 pts.**] en general.

d) Si A tiene columnas linealmente independientes y es cuadrada entonces A tiene inversa [**0.5 pts.**] y como el producto de matrices invertibles tiene inversa tenemos que $A^2 = A\,A$ tiene inversa, [**0.5 pts.**] pero la matrices invertibles son 1-1 y sobre, y por lo tanto A^2 es sobre [**0.5 pts.**]