GUÍA 10, INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO, MAT1107

GODOFREDO IOMMI

1. Sucesiones

(1) Demuestre que la siguiente sucesión es convergente:
$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n},$$
acote el valor de su límite.

(2) Demuestre que la sucesión definida por
$$a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + 6}{2} \text{ para } n > 1,$$
es convergente. Calcule su límite.

(3) Calcule
$$\lim_{n \to \infty} \frac{n + n^2}{n^3}.$$

(4) Calcule
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^4}{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}.$$

(5) Calcule
$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n}.$$

(6) Demuestre que la sucesión definida por
$$a_1 = \sqrt{2}\ ,\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},$$
es convergente.

(7) Calcule
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

(8) Considere la sucesión
$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$
Decida su convergencia.

(9) Considere la sucesión
$$a_n = \sqrt[n]{n}$$
Decida su convergencia.

(10) Demuestre que, si $x_n > 0$ y $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a < 1$, entonces $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$

(11) Demuestre que
$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

(12) Sea $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$. Demuestre que la sucesión es monótona creciente y acotada. Calcule su límite.

(13) Calcule los siguientes límites:

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n,$$

(b)
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{4n},$$

(c)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2n+3}{n^2+2n+1}\right)^{(n+1)^2}.$$

(14) Sean $a \geq 0$ y $b \geq 0$. Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n} = \max\{a, b\}$.

(15) Demuestre que si $(a_n)_n$ es una sucesión de términos no negativos tal que existe $K \in (0, 1)$ de modo que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_{n+1} \leq K a_n$. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(16) En 1615 Galileo notó qua la sucesión de los números impares tiene la siguiente propiedad
$$\frac{1}{3} = \frac{1+3}{5+7} = \frac{1+3+5}{7+9+11} = \cdots .$$
Galileo observó que esta es la única progresión aritmética con esta propiedad. Determine si la afirmación de Galileo es correcta. Considere sucesiones para las cuales la razón de la suma de los primeros n términos sobre la suma de los siguientes n términos es constante. (**Difícil**).

Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile (PUC), Avenida Vicuña Mackenna 4860, Santiago, Chile
E-mail address: giommi@mat.puc.cl
URL: http://www.mat.puc.cl/~giommi/