

MAT1107 – Introducción al Cálculo
Solución Interrogación N° 1

1. Sean a, b, c, d números reales tales que $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$. Demuestre que $ac + bd \leq 1$.

Solución. Notemos que $(a - c)^2 \geq 0$ y que $(b - d)^2 \geq 0$ entonces su suma es un número no negativo, esto es

$$\begin{aligned}(a - c)^2 + (b - d)^2 \geq 0 &\iff a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 \geq 0 \\ &\iff \underbrace{(a^2 + b^2)}_1 + \underbrace{(c^2 + d^2)}_1 - 2(ac + bd) \geq 0\end{aligned}$$

Se sigue que $2 - 2(ac + bd) \geq 0 \iff ac + bd \leq 1$.

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por usar que $(a - c)^2$ y $(b - d)^2$ son no negativos.
- 2 puntos por usar la hipótesis $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$.
- 2 puntos por concluir que $ac + bd \leq 1$.

2. Resuelva la siguiente inecuación con valor absoluto

$$\left| \frac{x+2}{x-6} \right| - \left| \frac{x-1}{x-3} \right| < 0.$$

Solución. Notemos que

$$\left| \frac{x+2}{x-6} \right| - \left| \frac{x-1}{x-3} \right| < 0 \iff \left| \frac{x+2}{x-6} \right| < \left| \frac{x-1}{x-3} \right| \iff \left| \frac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} \right| < 1 \iff -1 < \frac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} < 1$$

Resolviendo separadamente cada una de estas desigualdades obtenemos

■ Tenemos que

$$-1 < \frac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} \iff 0 < \frac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} + 1 \iff 0 < \frac{2x(x-4)}{(x-6)(x-1)}.$$

Los puntos críticos de la inecuación son: $x = 0$, $x = 4$, $x = 6$, $x = 1$ y la tabla de signos es:

	$-\infty$	0	1	4	6	∞
x	—	+	+	+	+	+
$x - 4$	—	—	—	+	+	+
$x - 6$	—	—	—	—	+	+
$x - 1$	—	—	+	+	+	+
	+	—	+	—	+	+

Entonces en la primera desigualdad el conjunto solución es $S_1 = (-\infty, 0) \cup (1, 4) \cup (6, \infty)$.

■ Notemos que

$$\frac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} < 1 \iff \frac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} - 1 < 0 \iff \frac{6(x-2)}{(x-6)(x-1)} < 0$$

Los puntos críticos de la inecuación son: $x = 2$, $x = 6$, $x = 1$ y la tabla de signos es:

	$-\infty$	1	2	6	∞
$x - 2$	—	—	+	+	+
$x - 6$	—	—	—	+	+
$x - 1$	—	+	+	+	+
	—	+	—	+	+

El conjunto solución es $S_2 = (-\infty, 1) \cup (2, 6)$.

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación original es

$$S = S_1 \cap S_2 = (-\infty, 0) \cup (2, 4).$$

Puntaje Pregunta 2.

- 2,5 puntos por resolver la inecuación $-1 < \frac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)}$
- 2,5 puntos por resolver la inecuación $\frac{(x+2)(x-3)}{(x-6)(x-1)} < 1$
- 1 punto por obtener el conjunto solución.

3. Resuelva la inecuación

$$\frac{x}{x-4} < \frac{x-4}{x}.$$

Solución. Tenemos que

$$\frac{x}{x-4} < \frac{x-4}{x} \iff \frac{x}{x-4} - \frac{x-4}{x} < 0 \iff \frac{x^2 - (x-4)^2}{x(x-4)} < 0 \iff \frac{8(x-2)}{x(x-4)} < 0.$$

Los puntos críticos de la inecuación son $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$ y la tabla de signos es:

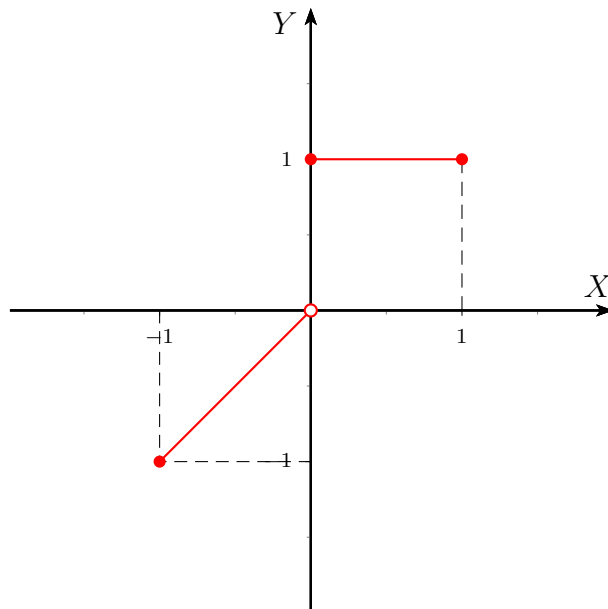
	$-\infty$	0	2	4	∞
$x-2$	—	—	+	+	
x	—	+	+	+	
$x-4$	—	—	—	+	
	—	+	—	+	

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es $S = (-\infty, 0) \cup (2, 4)$.

Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por reducir la inecuación y obtener una versión factorizada igual a: $\frac{8(x-2)}{x(x-4)} < 0$
- 1 punto por encontrar los puntos críticos de la inecuación.
- 2 puntos por realizar la tabla de signos.
- 1 punto por obtener el conjunto solución.

4. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow B$ la función definida por el siguiente gráfico:



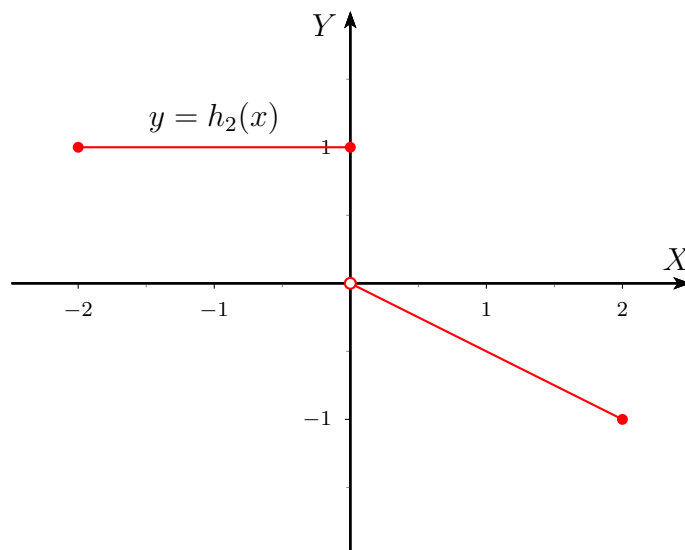
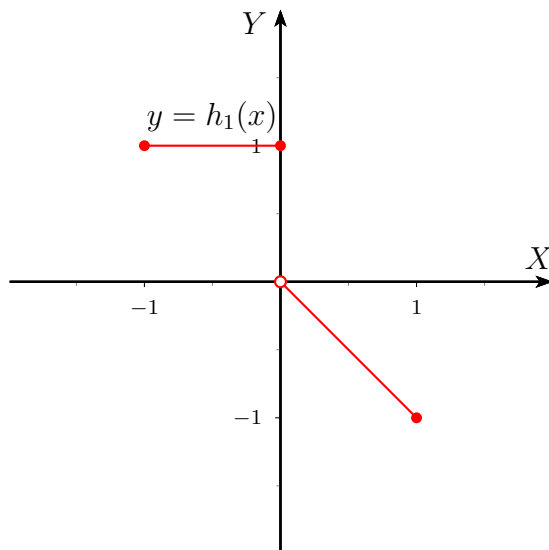
- a) Esboce el gráfico de la función $g(x) = |f(-\frac{1}{2}(x+3))|$.
 b) Encuentre el dominio y el recorrido de la función g

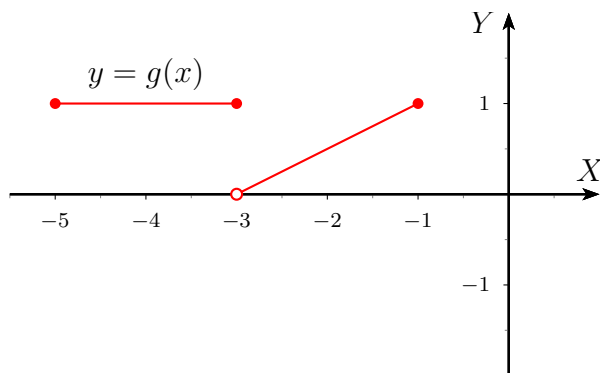
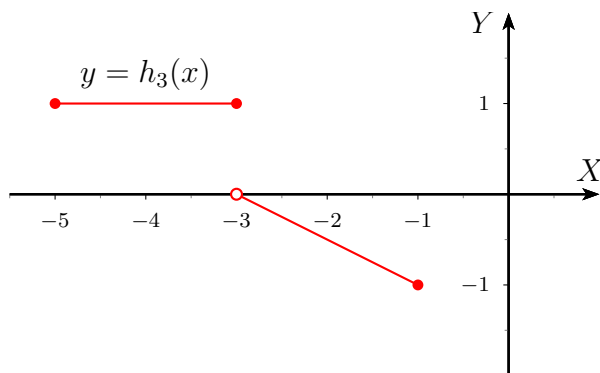
Solución.

- a) Considere las transformaciones:

$h_1(x) = f(-x)$	Reflexión con respecto al eje Y .
$h_2(x) = h_1(\frac{1}{2}x) = f(-\frac{1}{2}x)$	Elongación horizontal en un factor 2.
$h_3(x) = h_2(x+3) = h_1(\frac{1}{2}(x+3)) = f(-\frac{1}{2}(x+3))$	Traslación hacia la izquierda 3 unidades.
$g(x) = h_3(x) = f(-\frac{1}{2}(x+3)) $	Refleja con respecto al eje X las curvas que sean negativas.

A continuación se muestran las gráficas de estas transformaciones:





b) Se sigue que el dominio de g es $[-5, -1]$ y el recorrido de g es $(0, 1]$.

Puntaje Pregunta 4.

- 1 punto por describir la transformación h_1 y realizar su gráfica.
- 1 punto por describir la transformación h_2 y realizar su gráfica.
- 1 punto por describir la transformación h_3 y realizar su gráfica.
- 1 punto por describir la transformación g y realizar su gráfica.
- 1 punto por encontrar el dominio de g
- 1 punto por encontrar el recorrido de g .