PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2023

Ayudantía 5 - MAT1610

1. Sea f una función continua y derivable en $x=-1$ tal que la ecuación de la recta tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(-1,f(-1))$ es $y=3x+1$. Determine:

   (a) El valor de $f(-1)$ y $f'(-1)$

   (b) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{xf(x)-2}{x+1}$

   (c) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\frac{f(x)}{x}-2}{x+1}$

   (d) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{f(-x^2)+2}{x+1}$

   (e) El valor de $g'(1)$, con $g(x)=\sqrt{f(-x)+6}$

   Solución:

   (a) La función coincide con la recta $y=3x+1$ en el punto de tangencia $(-1,f(-1))$ entonces, $f(-1)=3(-1)+1=-3+1=-2$
   $f'(-1)$ es igual a la pendiente de la recta tangente a f en el punto $(-1,f(-1))$, entonces, $f'(-1)=3$.

   (b) Note que si $g(x)=xf(x)$ entonces $g(-1)=(-1)f(-1)=2$ y

   $$\lim_{x\to -1} \frac{xf(x)-2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = g'(-1)$$

   y, como $g'(x)=f(x)+xf'(x)$, $g'(-1)=f(-1)+(-1)f'(-1)=-2+(-1)3=-5$. Así,

   $$\lim_{x\to -1} \frac{xf(x)-2}{x+1} = -5$$

   (c) Si $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, entonces $g(-1)=\frac{f(-1)}{-1}=2$ y

   $$\lim_{x\to -1} \frac{\frac{f(x)}{x}-2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = g'(-1)$$

   y $g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$ y $g'(-1)=\frac{f'(-1)(-1)-f(-1)}{(-1)^2}=\frac{3(-1)-(-2)}{1}=-1$

   $$\lim_{x\to -1} \frac{\frac{f(x)}{x}-2}{x+1} = g'(-1) = -1$$

(d) Si $g(x) = f(-x^2)$, entonces $g(-1) = f(-(-1)^2) = f(-1) = -2$, entonces

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(-x^2)+2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)} = g'(-1)$$

Como $g'(x) = f'(-x^2)(-2x)$, entonces $g'(-1) = f'(-1)(-2(-1)) = 3 \cdot 2 = 6$

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(-x^2)+2}{x+1} = 6$$

(e) $g'(x) = -\frac{f'(-x)}{2\sqrt{f(-x)+6}}$, entonces $g'(1) = -\frac{f'(-1)}{2\sqrt{f(-1)+6}} = -\frac{3}{2\sqrt{-2+6}} = -\frac{3}{4}$

2. Determine el polinomio $P(x)$ tal que $P(x) + P'(x) + P''(x) = 3x^2 + 1$.
Solución:
Notar que si $grad\,(P(x)) = n$, entonces

$$grad\,(P'(x)) = grad\,(P(x)) - 1 = n - 1$$

y

$$grad\,(P''(x)) = grad\,(P(x)) - 2 = n - 2$$

Por lo tanto, $grad\,(P(x) + P'(x) + P''(x)) = n$, es decir, $n = 2$, entonces $P(x)$ es un polinomio de grado 2. Suponga que $P(x) = ax^2 + bx + c$, entonces $P'(x) = 2ax + b$ y $P''(x) = 2a$. Las constantes a, b y c son tales que $P(x) + P'(x) + P''(x) = 3x^2 + 1$ y

$$\begin{aligned}
P(x) + P'(x) + P''(x) = 3x^2 + 1 \;&\Leftrightarrow\; ax^2 + bx + c + 2ax + b + 2a = 3x^2 + 1\\
&\Leftrightarrow\; ax^2 + (b + 2a)x + (c + b + 2a) = 3x^2 + 1\\
&\Leftrightarrow\; a = 3 \wedge b + 2a = 0 \wedge c + b + 2a = 1\\
&\Leftrightarrow\; a = 3 \wedge b = -6 \wedge c = 1
\end{aligned}$$

Así, el polinomio es $P(x) = 3x^2 - 6x + 1$.
Nota: resaltar que la función derivada de un polinomio es un polinomio.

3. Determine $f'(x)$ para $f(x) = \sec(-x) + \operatorname{sen}(x^7 \cos(2x)) + \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sec(-x) + \operatorname{sen}\left(x^7 \cos(2x)\right)) + \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)' \\ &= -\sec(-x)\tan(-x) + \cos\left(x^7\cos(2x)\right)\left(7x^6\cos(2x) - 2x^7\operatorname{sen}(2x)\right) - \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\left(x+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

4. (a) Sea $f(x) = \cos(x)$, determine el valor de $f^{(7)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(50)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

   (b) Determine la n-ésima derivada de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Solución:

(a) Como 7 mod 4 = 3 y 50 mod 4 = 2, se tiene que:

$$\begin{aligned} f^{(7)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(50)}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f^{(3)}\left(\frac{\pi}{6}\right) - f^{(2)}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b) Note que

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-2)^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{(x-2)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(x-2)^5}$$

$$f^{(5)}(x) = -\frac{120}{(x-2)^6}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x-2)^{n+1}}$$

5. Sea $f(x) = \frac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x$, demuestre que $f'(x) = \tan^4(x)$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x\right)' \\
&= \frac{3}{3}\tan^2(x)\sec^2(x) - \sec^2(x) + 1 \\
&= \tan^2(x)\sec^2(x) - \sec^2(x)) + 1 \\
&= \sec^2(x)\left(\tan^2(x) - 1\right) + 1 \\
&= \left(\tan^2(x) + 1\right)\left(\tan^2(x) - 1\right) + 1 \\
&= \tan^4(x) - 1 + 1 \\
&= \tan^4(x)
\end{aligned}
$$

Ejercicios extras para los alumnos

(Extra 1) Sea f una función par, demuestre que $f'(x)$ es una función impar y determine la ecuación de recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(-2, f(-2))$ si la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(2, f(2))$ es $y = 2 - 3x$.

Solución:

f es una función par, entonces para todo $x \in Dom(f)$, $f(x) = f(-x)$. Por lo tanto,
$f'(x) = -f'(-x)$, es decir, si $g(x) = f'(x)$ se tiene que $g(x) = -g(-x)$, lo que indica que g es una función impar.

Por otro lado, dado que la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(2, f(2))$ es $y = 2-3x$, se tiene que $g(2) = f'(2) = -3$ y g es impar, entonces, $g(-2) = f'(-2) = -g(2) = -f'(2) = 3$ y como f es par, $f(-2) = f(2) = 2-3\cdot 2 = -4$, entonces la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(-2, f(-2))$ es $y = 3(x+2) - 4 = 3x + 2$.

(Extra 2) Sea $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}}$, demuestre que $f'(x) = \pm\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}(x)}$

Solución:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}}\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}}}\left(\frac{1-\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)}\right)' \\
&= \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}}{2\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}\left(\frac{-\cos(x)\,(1+\operatorname{sen}(x)) - (1-\operatorname{sen}(x))\cos(x)}{(1+\operatorname{sen}(x))^2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}}{2\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}\left(\frac{-\cos(x)\,(1+\operatorname{sen}(x)+1-\operatorname{sen}(x))}{(1+\operatorname{sen}(x))^2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}}{2\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}\frac{(-2\cos(x))}{\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}\,(1+\operatorname{sen}(x))} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}}\frac{\cos(x)}{1+\operatorname{sen}(x)} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\cos^2(x)}}\frac{(-2\cos(x))}{1+\operatorname{sen}(x)} \\
&= -\frac{\cos(x)}{|\cos(x)|}\frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)} \\
&= \frac{\pm 1}{1+\operatorname{sen}(x)}
\end{aligned}
$$

Notar que $1+\operatorname{sen}(x) \geq 0 \Rightarrow 1+\operatorname{sen}(x) = \sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}$