PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Ayudantía 13

1. Sea $X_i \overset{ind}{\sim} Gamma(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, 2, ..., n$. Defina

$$Z = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_m}{X_1 + X_2 + \cdots + X_m + X_{m+1} + \cdots + X_n}$$

con $m < n$.

   (a) Muestre que Z es independiente de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$

   (b) Con lo anterior deduzca que $Z \sim Beta\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i, \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i\right)$

   (c) Encuentre la fdp de $Y^* = \dfrac{Z}{1-Z}$

2. Sea X, Y variables aleatorias independientes, con X discreta.

   (a) Derive una formula para encontrar la marginal de $Z = X + Y$

   (b) Aplique la formula anterior cuando $X \sim Bernoulli(p)$ y $Y \sim N(1, \sigma^2)$

   (c) Aplique la formula anterior cuando $X \sim Bin(n, p)$ y $Y \sim Bin(m, p)$

3. Sea (Y_1, Y_2) un vector aleatorio con función conjunta dada por

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-y_2}, & \text{si } 0 < y_1 < y_2 < \infty \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

   (a) Encuentre la conjunta de $(U, V) = (Y_2/2, Y_1 + 1)$

   (b) Obtenga las marginales de U, V

   (c) Obtenga la función generadora conjunta de Y_1, Y_2 y encuentre las fgm marginales

   (d) **Propuesto** Encuentre una expresión para $P(Y_2 > 2 | 2 < Y_1 < Y_2^2)$

   (e) Sea $U_1, U_2, ..., U_n$ una muestra aleatoria. Calcule $\mathbb{E}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{U_i}{2} + 1\right)$

4. **Propuesto:** Sea $X_1 \sim N(0, 1)$ y $X_2 \sim \chi^2_{(\nu)}$ independientes. Encuentre la fdp de

$$Y = \frac{X_1}{\sqrt{X_2/\nu}}$$

5. **Propuesto:** Se dice que un vector aleatorio (X, Y) es invariante bajo rotaciones si para alguna rotación Θ, y cualquier conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^2$ se cumple

$$P((X, Y) \in \Theta A) = P((X, Y) \in A)$$

En otras palabras si se le aplica una transformación al vector (X, Y), entonces la conjunta es la misma que antes. Sea $X, Y \overset{iid}{\sim} N(0, 1)$. Muestre que si

$$\Theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Entonces el vector (X, Y) cumple la condición mencionada anteriormente. Nota: es mas fácil de lo que parece y se pueden aplicar resultados vistos en clase.

6. **Propuesto:** Sea $X \sim Exp(1)$ independiente de $Y_1, ..., Y_n \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda/n^2)$. Encuentre la fdp de

$$Z = \sqrt{X \sum_{i=1}^{n} Y_i}$$

7. **Propuesto:** Sea (X, Y) un vector aleatorio con función conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \left(\frac{3x^2}{2} + y\right) \mathbb{I}_{\{0<x,y<1\}}$$

   (a) Calcule las marginales de X, Y
   (b) Calcule el vector de medias y matriz de varianza covarianza
   (c) ¿Son X, Y independientes?
   (d) Calcule $Cov(\omega X, (1-\omega)Y)$
   (e) Calcule $Var(2X - Y + 1)$
   (f) Calcule la correlación entre X, Y
   (g) Calcule $P(X > 1/2 | Y > \sqrt{X})$
   (h) Encuentre una expresión para $P(Y > ln(X + 1/2) + 1/2)$