$\mathbb{R}$ es ordenado

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

6 de Marzo de 2023

Laboratorio
Interdisciplinario de
Estadística Social

Axiomas de Orden

El sistema de números reales también disfruta de una estructura de orden. Parte de nuestra imagen habitual de los reales es la sensación de que algunos números son “más grandes” que otros o más a la “derecha” que otros. Expresamos esto usando desigualdades $a < b$ o $a \leqslant b$. La estructura de orden está estrechamente relacionada con la estructura de cuerpo. Por ejemplo, cuando usamos desigualdades en cursos de primaria, usamos frecuentemente el hecho de que si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$ (es decir, que las desigualdades se pueden multiplicar por números positivos).
Esta estructura también puede axiomatizarse y reducirse a un pequeño conjunto de reglas. Cuando estas reglas se agregan a los axiomas de cuerpo, el resultado se denomina cuerpo ordenado.

Axiomas de Orden

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

El sistema de números reales es un cuerpo ordenado que satisface los cuatro axiomas adicionales. Aquí $a < b$ es ahora una declaración que es verdadera o falsa.

- O1 **Tricotomía:** Se cumple una y solo una de las siguientes tres condiciones

  1. $a = b$
  2. $a < b$
  3. $b < a$

- O2 **Transitividad:** Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
- O3 Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$, para todo $c \in \mathbb{R}$.
- O4 Si $a < b$, y $c > 0$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$.

Axiomas de Orden

Al conjunto de los números reales que son mayores que 0 lo denotaremos por $\mathbb{R}^+$ y será llamado el conjunto de los **números reales positivos**. En símbolos, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Teorema. ($\mathbb{R}^+$ es cerrado)

1. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$
2. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$

Axiomas de Orden

Demostración

1. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $a > 0$ y $b > 0$. Usando el axioma 3 tenemos

$$a > 0 \Longrightarrow a + b > 0 + b \Longrightarrow a + b > b\,.$$

Como $a + b > b$ y $b > 0$, usando el axioma de transitividad concluimos que $a + b > 0 \Longleftrightarrow a + b \in \mathbb{R}^+$.

2. Si $a \in \mathbb{R}^+$ entonces $a > 0$ y por el axioma 4 como $b > 0$ entonces

$$a \cdot b > 0 \cdot b \Longleftrightarrow a \cdot b > 0 \Longleftrightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}^+\,.$$

Axiomas de Orden

Observación Si $a < b$, sumando a ambos lados $-a$ obtenemos por axioma 3 que

$$a < b \Longrightarrow a - a < b - a \Longleftrightarrow 0 < b - a \Longleftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ .$$

Es decir, hemos obtenido la siguiente equivalencia

$$\boxed{a < b \Longleftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+}$$

Axiomas de Orden

EJEMPLO 1 Usando los axiomas de orden, pruebe que $ad + bc < ac + bd$ si $a < b$ y $c < d$.

Solución Si $a < b$ y $c < d$ entonces $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $d - c \in \mathbb{R}^+$. Como $\mathbb{R}^+$ es cerrado por multiplicación se sigue que

$$(b-a)(d-c) \in \mathbb{R}^+ \iff (b-a)(d-c) > 0$$

Desarrollando los productos obtenemos

$$bd - bc - ad + ac > 0 \iff ac + bd > ad + bc\,.$$

Definición

1. $a \leqslant b$ si y sólo si $(a < b) \vee (a = b)$
2. $a \geqslant b$ si y sólo si $(a > b) \vee (a = b)$

Axiomas de Orden

EJEMPLO 2 Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $n^2 \geqslant n$.

Solución Separamos la demostración en casos.
Caso 1: $n \neq 1$. Entonces,

$$n > 1 \quad \wedge \quad n > 0 \Longleftrightarrow n - 1 \in \mathbb{R}^+ \quad \wedge \quad n \in \mathbb{R}^+$$

Como $\mathbb{R}^+$ es cerrado por multiplicación, entonces

$$(n-1) \cdot n \in \mathbb{R}^+ \Longleftrightarrow (n-1) \cdot n > 0 \Longleftrightarrow n^2 - n \geqslant 0 \Longleftrightarrow n^2 > n\,.$$

Caso 2: $n = 1$. En este caso es claro que 1^2 es igual a 1, es decir $1^2 = 1$ luego se cumple que $1^2 \geqslant 1$.
Por la definición, obtenemos de los casos 1 y 2 que $n^2 \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Axiomas de Orden

Teorema

1. Para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple que $a^2 \geqslant 0$
2. Si $a > 0$ entonces $a^{-1} > 0$
3. Si $a < 0$ entonces $a^{-1} < 0$
4. Si $a \cdot b > 0$ si y sólo si $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$