CLASE 13: FUNCIONES RACIONALES

- DEF: Una función racional es una función del tipo

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_m x^m+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m+\cdots+b_1x+b_0}$$

con $\mathrm{Dom}\, f=\{x\in\mathbb{R} : q(x)\neq 0\}$.

- Ej: $f(x)=\frac{1}{x}$, $\mathrm{Dom}\, f=\{x : x\neq 0\}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Cerca de $x=0$: sea $\varepsilon>0$

$$0<x<\varepsilon \Rightarrow 0<\frac{1}{\varepsilon}<\frac{1}{x}$$

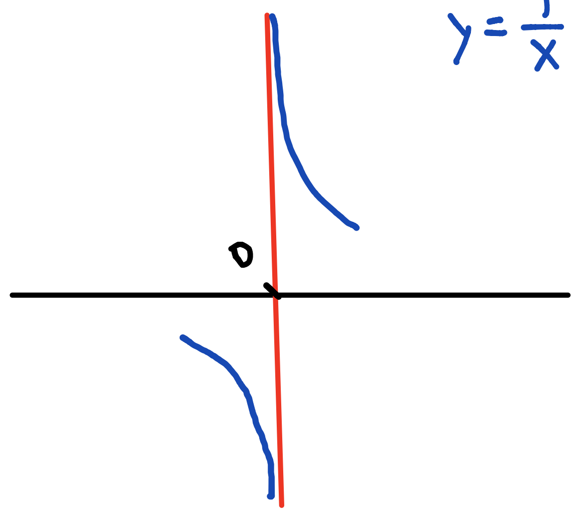
Ahora, sea $K>0$ (grande) y $\varepsilon=\frac{1}{K}$

$$0<x<\frac{1}{K} \Rightarrow \frac{1}{x}>K \text{ (grande!)}$$

Veamos el caso $x<0$:

$$-\frac{1}{K}<x<0 \Rightarrow \frac{1}{x}<-K \text{ (grande negativo!)}$$

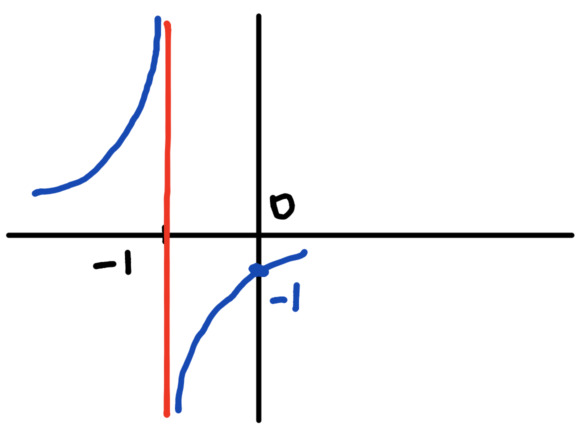
$y=\frac{1}{x}$



• **Ej**: $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $\mathrm{Dom}\, f=\{x : x\neq -1\}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

<u>Cerca de $x=-1$</u>:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}\overset{x\simeq -1}{\simeq}\frac{-2}{x+1}\begin{cases} >0 & \text{si } x<-1 \\ <0 & \text{si } x>-1 \end{cases}$$



- La recta roja $(x=-1)$ se conoce como <u>asíntota vertical</u>:

- Usaremos lo siguiente para caracterizar las "explosiones" de f:

$$f(x) \longrightarrow \infty \text{ cuando } x \uparrow -1 \quad (x \to -1^-)$$

$$f(x) \longrightarrow -\infty \text{ cuando } x \downarrow -1 \quad (x \to -1^+)$$

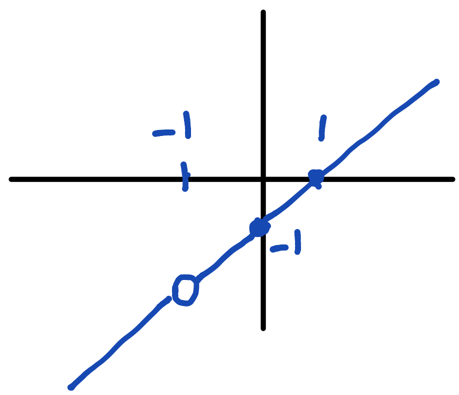
- <u>Obs</u>: En el ejemplo anterior, $f(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) \longrightarrow -\infty \text{ cuando } x \uparrow 0$$

$$f(x) \longrightarrow \infty \text{ cuando } x \downarrow 0$$

- <u>Obs</u>: $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, $\mathrm{Dom} f = \{x : x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Si $x \neq -1$, $f(x) = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = x-1$



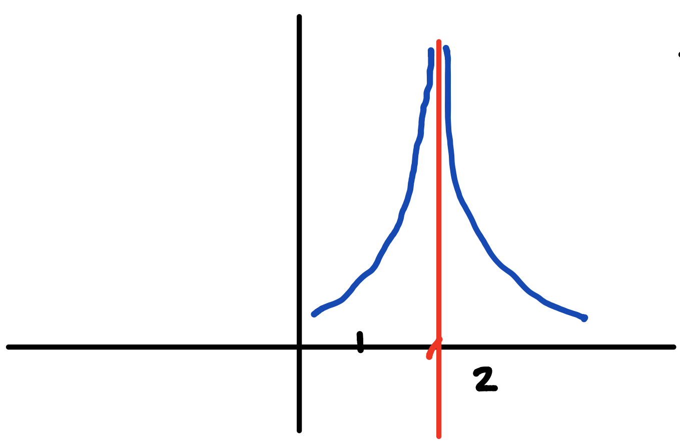
Sea $h(x) = x-1$

Recordamos que $f \neq h$ ya que $\mathrm{Dom}\, h = \mathbb{R} \neq \mathrm{Dom}\, f$.

• Ej: $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4x+4}$

$$= \frac{x+2}{(x-2)^2} \quad , \ \mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$f(x) = \frac{x+2}{(x-2)^2} \overset{x \simeq 2}{\simeq} \frac{4}{(x-2)^2} > 0$$



$f(x) \longrightarrow \infty$ si $x \uparrow 2$

$f(x) \longrightarrow \infty$ si $x \downarrow 2$

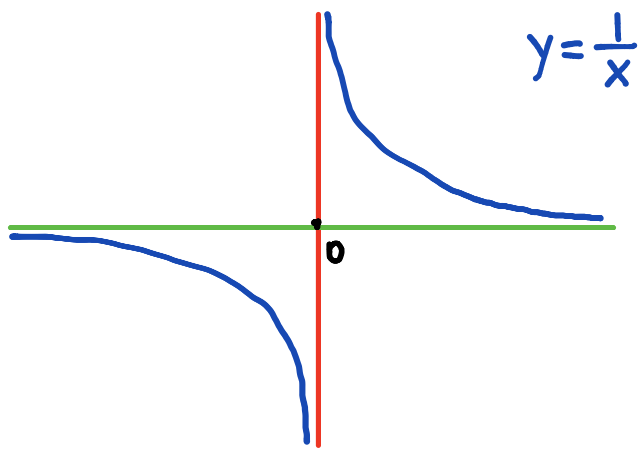
o

$f(x) \longrightarrow \infty$ si $x \longrightarrow 2$

- Para terminar de esbozar estas funciones, necesitamos su comportamiento en $\pm\infty$

Por ejemplo, si $f(x) = \frac{1}{x}$, sea $K > 0$ (grande)

- $x > K \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{K}$ (pequeño)
- $x < -K \Rightarrow -\frac{1}{K} < \frac{1}{x} < 0$ (pequeño)



$\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ si $x \longrightarrow \infty$

$\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ si $x \longrightarrow -\infty$

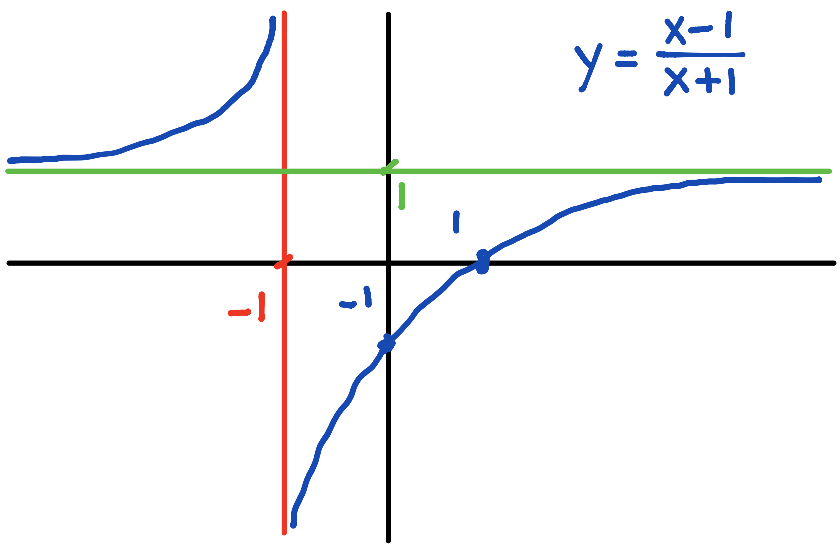
En ambos casos, $\frac{1}{x} \simeq 0$.

• Ej: $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\begin{array}{r|l} x-1 & x+1 \\ \cline{2-2} -\;\; x+1 & 1 \\ \cline{1-1} -2 & \end{array}$$

$$x-1 = x+1-2$$

$$\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} \simeq 1$$



La recta verde $(y=1)$ se conoce como <u>asíntota horizontal</u>.

$$f(x) \longrightarrow 1 \quad \text{si} \quad x \longrightarrow \pm\infty$$

• **Obs.:** Otra manera de obtener la asíntota horizontal

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \overset{x\to\pm\infty}{\simeq} \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{x-1}{x+1} = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

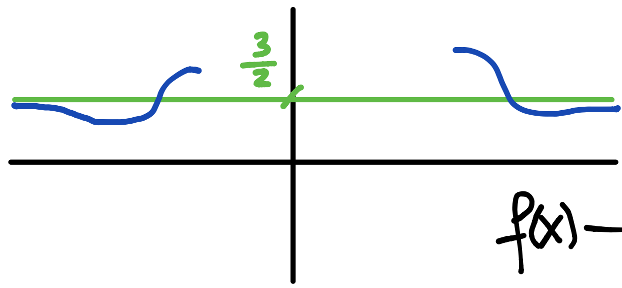
• **Ej.:** $f(x) = \dfrac{3x^2+x+1}{2x^2+2x-4}$

Veamos el comportamiento en $\pm\infty$

$$f(x) = \frac{3x^2+x+1}{2x^2+2x-4}$$

$$= \frac{x^2\left(3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} \overset{x\to\pm\infty}{\simeq} \frac{3}{2}$$

Luego, tenemos una asíntota horizontal: $y = \frac{3}{2}$.



$f(x) \longrightarrow \frac{3}{2}$ si $x \longrightarrow \pm\infty$

Buscamos las asíntotas verticales

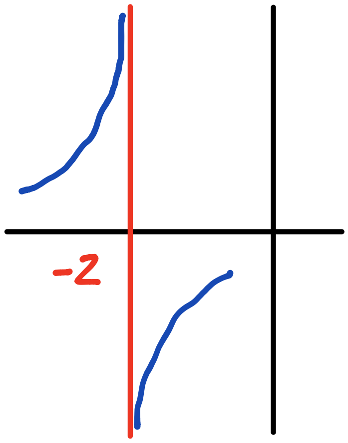
$$2x^2+2x-4=0 \iff x^2+x-2=0$$
$$\iff (x+2)(x-1)=0$$
$$\iff x=-2 \text{ o } x=1$$

$\rightarrow$ Posibles asíntotas verticales $x=-2$ y $x=1$

• <u>Cerca de $x=-2$:</u>

$$f(x) = \frac{3x^2+x+1}{(x+2)(x-1)} \overset{x\simeq -2}{\simeq} \frac{11}{(x+2)(-3)}$$

$$= -\frac{11}{3}\,\frac{1}{x+2} \begin{cases} >0 & x<-2 \\ <0 & x>-2 \end{cases}$$

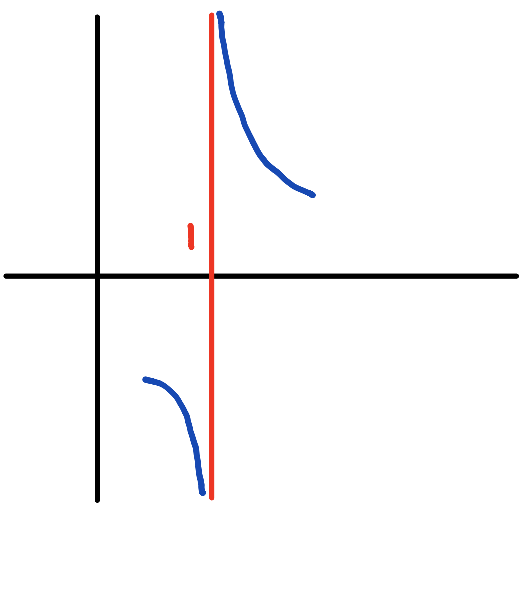


$f(x) \longrightarrow \infty$ si $x \uparrow -2$

$f(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \downarrow -2$

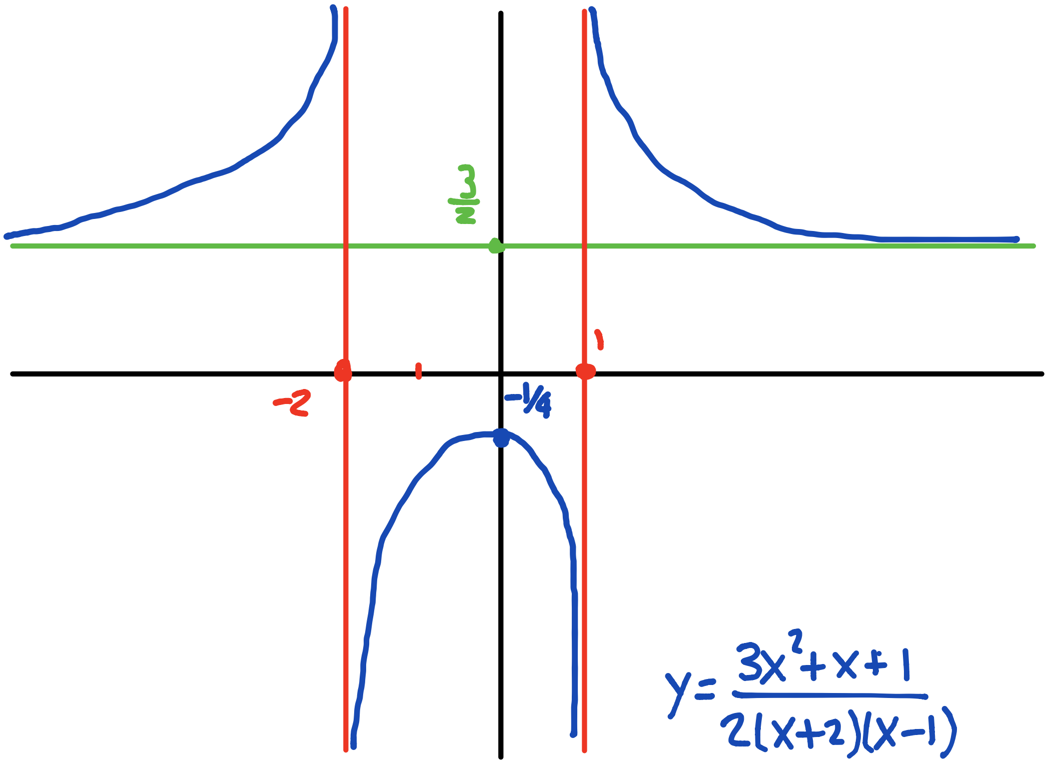
- <u>Cerca de $x=1$</u> :

$$f(x) = \frac{3x^2+x+1}{(x+2)(x-1)} \overset{x \simeq 1}{\simeq} \frac{5}{3(x-1)} \begin{cases} <0 & x<1 \\ >0 & x>1 \end{cases}$$



$f(x) \longrightarrow -\infty$ si $x \uparrow 1$

$f(x) \longrightarrow \infty$ si $x \downarrow 1$



$$y = \frac{3x^2+x+1}{2(x+2)(x-1)}$$