Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo Semestre del 2020

Modelos Probabilísticos (EYP1027)
Ayudantía 4

Camilo González Rojas

1. Una prueba estandarizada consiste en 20 preguntas de selección múltiple, cada una con 4 posibles respuestas. Encuentre la probabilidad de que el estudiante obtenga al menos 10 respuestas correctas, dado que está tratando de adivinar cada respuesta.

2. Sea $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ un espacio muestral y $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Se puede definir una función de probabilidad P_X en $\mathcal{X}$ de la siguiente manera. Se observa $X = x_i$ si y solo si el valor de salida de un experimento aleatorio es un $s_j \in S$ tal que $X(s_j) = x_i$. De esta manera se tiene:

$$P_X\left(X = x_i\right) = P\left(\{s_j \in S : X\left(s_j\right) = x_i\}\right)$$

   Demuestre que esta probabilidad inducida es una probabilidad legítima que satisface los axiomas de Kolmogorov.

3. Cierto río se inunda todos los años. Suponga que la marca de agua baja se establece en 1 y la marca de agua alta Y tiene función de distribución

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - \frac{1}{y^2}, \quad 1 \leq y < \infty$$

   a) Verifique que $F_Y(y)$ sea una CDF.

   b) Encuentre $f_Y(y)$, la PDF de Y

   c) Si la marca de agua baja se restablece en 0 y usamos una unidad de medida que es $frac110$ de la dada anteriormente, la marca de agua alta se convierte en $Z = 10(Y-1)$. Encuentra $F_Z(z)$.

4. Considere una secuencia de lanzamientos de monedas independientes, cada uno de los cuales tiene una probabilidad p de salir cara. Defina una variable aleatoria X como el largo de los lanzamientos (de cara o sello) seguidos de una resultado contrario. (Por ejemplo, $X = 3$ si se observa (C, C, C, S) o (S, S, S, C)). Encuentre la distribución de X y encuentre $\mathrm{E}(X)$.

5. Una mediana de una distribución es un valor m tal que $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ y $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$. (Si X es continua, m satisface $\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = \int_{m}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.) Realice lo siguiente:

   a) Encuentre la mediana de $f(x) = 3x^2, \quad 0 < x < 1$.

   b) Si X es una variable aleatoria continua y m es la mediana, demuestre que

$$\min_a \mathrm{E}|X - a| = \mathrm{E}|X - m|.$$

Solución

1. Una prueba estandarizada consiste en 20 preguntas de selección múltiple, cada una con 4 posibles respuestas. Encuentre la probabilidad de que el estudiante obtenga al menos 10 respuestas correctas, dado que está tratando de adivinar cada respuesta.

Nos piden $P(X \geq 10 \mid \text{adivinando})$

$$= 1 - P(X < 10 \mid \text{ad.})$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{20}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{20-k}$$

$$= 1 - \underbrace{\text{pbinom}(9, 20, (1/4))}_{R} = 0.1386$$

2. Sea $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ un espacio muestral y $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Se puede definir una función de probabilidad P_X en $\mathcal{X}$ de la siguiente manera. Se observa $X = x_i$ si y solo si el valor de salida de un experimento aleatorio es un $s_j \in S$ tal que $X(s_j) = x_i$. De esta manera se tiene:

$$P_X(X = x_i) = P(\{s_j \in S : X(s_j) = x_i\})$$

Demuestre que esta probabilidad inducida es una probabilidad legítima que satisface los axiomas de Kolmogorov.

Usemos $P(\mathcal{X})$ pues $\mathcal{X}$ es finito

↳ cjto potencia

i) Si $A \in P(\mathcal{X})$

$$P_x(A) = P\left(\bigcup_{x_i \in A} \{s_j \in S : X(s_j) = x_i\}\right) \geq 0$$

↑ es prob.

ii) $P_X(\mathcal{X}) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} \{s_j \in S : X(s_j) = x_i\}\right)$

$= P(S) = 1$

prob. con S el esp. muestral.

iii) Sean $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ disj.

$P_X\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \bigcup_{x_i \in A_k} \{s_j \in S : X(s_j) = x_i\} \right\}\right)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\bigcup \{s_j \in S : X(s_j) = x_i\}\right)$

$= \sum_{k=1}^{\infty} P_X(A_k)$ $\quad \therefore P_X$ es prob.

3. Cierto río se inunda todos los años. Suponga que la marca de agua baja se establece en 1 y la marca de agua alta Y tiene función de distribución

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = 1 - \frac{1}{y^2}, \quad 1 \leq y < \infty$$

   a) Verifique que $F_Y(y)$ sea una CDF.

   b) Encuentre $f_Y(y)$, la PDF de Y

   c) Si la marca de agua baja se restablece en 0 y usamos una unidad de medida que es ~~frac110~~ de la dada anteriormente, la marca de agua alta se convierte en $Z = 10(Y - 1)$. Encuentra $F_Z(z)$.

a) i) $\lim_{y \to -\infty} F_Y(y) = \lim_{y \to -\infty} 0 = 0$ //

$\lim_{y \to \infty} F_Y(y) = \lim_{y \to \infty} 1 - \frac{1}{y^2} = 1$ //

$\therefore \quad 0 \leq F_Y(y) \leq 1$

ii) Para $y \leq 1$, $F_Y(y) = 0$

$\Rightarrow F_Y(y)$ cte.

Para $y > 1$, $\frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{2}{y} > 0$

$\Rightarrow F_Y(y)$ es creciente.

$\therefore F_Y(y)$ es no decreciente

iii) y^2 es cont. $\qquad 1$ cont.

$\frac{1}{y^2}$ es cont. $\forall y \neq 0$ $\therefore$ $1-\frac{1}{y^2}$ es cont.

$1 - \frac{1}{1} = 0$ $\qquad \therefore$ es cont. por la der

$\therefore$ F_Y es cdf.

b) $$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^3} & \text{si } y > 1 \\ 0 & \text{si } y \leq 1 \end{cases}$$

c) $Z = 10(Y-1).$

$y = 1$, $z = 10(Y-1)$

$z = 10(1-1)$

$= 10 \cdot 0$

$= 0$

$$F_Z(z) = P(Z \leq z)$$

$$= P(10(Y-1) \leq z)$$

$$= P\left(Y \leq \frac{z}{10} + 1\right)$$

$$\therefore \quad F_Z(z) = 1 - \frac{1}{\left(\frac{z}{10} + 1\right)^2} \quad \boxed{\;} \; (0, \infty)$$

4. Considere una secuencia de lanzamientos de monedas independientes, cada uno de los cuales tiene una probabilidad p de salir cara. Defina una variable aleatoria X como el largo de los lanzamientos (de cara o sello) seguidos de una resultado contrario. (Por ejemplo, $X = 3$ si se observa (C, C, C, S) o (S, S, S, C)). Encuentre la distribución de X y encuentre $\mathrm{E}(X)$.

Dist. de X.

$$X = k \,, \quad \underbrace{C\,C\,C \ldots C}_{k}\,S \quad o \quad \underbrace{S \ldots S}_{k}\,C$$

$$P(X=k) = p^k(1-p) + p(1-p)^k \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \left[p^k(1-p) + p(1-p)^k \right] //$$

$$|\phi|<1, \quad \sum_{k=x}^{\infty} \phi^k = \frac{\phi^x}{1-\phi} \,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} k\phi^k = \frac{\phi}{(1-\phi)^2} \,, \quad |\phi|<1$$

$$E(X) = (1-p)p \sum_{k=1}^{\infty} k\, p^{k-1} + k(1-p)^{k-1}$$

$$= (1-p)p \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, p^{k} + (k+1)(1-p)^{k}$$

$$= (1-p)p \sum_{k=0}^{\infty} kq^k + p^k + k(1-p)^k + (1-p)^k$$

$$= (1-p)p \left[\frac{p}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-p)} + \frac{1-p}{p^2} + \frac{1}{p} \right]$$

$$\therefore \quad E(X) = (1-p)p \left[\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(1-p)^2} \right]$$

5. Una mediana de una distribución es un valor m tal que $P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ y $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$. (Si X es continua, m satisface $\int_{-\infty}^{m} f(x)dx = \int_{m}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}$.) Realice lo siguiente:

   a) Encuentre la mediana de $f(x) = 3x^2, \quad 0 < x < 1$.

   b) Si X es una variable aleatoria continua y m es la mediana, demuestre que

$$\min_a \mathrm{E}|X - a| = \mathrm{E}|X - m|.$$

a) $\int_0^m 3x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow m^3 = \frac{1}{2}$

$m = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

b) $E(|X-a|) = \int_{-\infty}^{\infty} |X-a| f(x)dx$

$$|y| = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

$$= \int_{-\infty}^{a} -(x-a)\, f(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} (x-a) f(x)\,dx$$

$$\frac{d}{da} E(|X-a|) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx - \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx \overset{\text{set}}{=} 0$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1 \quad \therefore \quad \int_{-\infty}^{a} f(x) = \frac{1}{2}$$

y $\quad \frac{d^2}{da^2} E(|X-a|) > 0$

$\therefore$ a es la mediana