Profesor	Fernando Quintana
Ayudante	Rubén Soza
Semestre	2019/1

EYP2106 Modelos Probabilísticos

Solución de la Interrogación 1

Profesor	Fernando Quintana
Ayudante	Rubén Soza
Semestre	2019/1

1. Definamos los eventos

$$\begin{array}{rcll} A & = & \{\text{falla componente A}\}, & P(A) = 0{,}1 \\ B & = & \{\text{falla componente B}\}, & P(B) = 0{,}15, \quad P(B \mid A) = 0{,}5 \\ C & = & \{\text{falla componente C}\}, & P(C) = 0{,}2 \\ D & = & \{\text{sistema envía señal de peligro}\} & \end{array}$$

Entonces, se pide $P(D)$, donde

$$D = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C),$$

y en donde todos estos eventos son claramente disjuntos entre sí. Luego:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C^c) + P(A \cap B^c \cap C) + P(A^c \cap B \cap C) \\ &= P(A \cap B)P(C) + P(A \cap B)P(C^c) + P(A \cap B^c)P(C) + P(A^c \cap B)P(C) \\ &= P(A \cap B) + [P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)]\, P(C) \end{aligned}$$

Además,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = 0{,}1 \times 0{,}5 = 0{,}05,$$

y

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c \mid A) = P(A) \times (1 - P(B \mid A)) = 0{,}1 \times 0{,}5 = 0{,}05.$$

Por otra parte, $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$ de donde $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}15 - 0{,}05 = 0{,}1$ y entonces lo pedido es

$$P(D) = 0{,}05 + \frac{1}{5}\,[0{,}05 + 0{,}1] = 0{,}05 + \frac{0{,}15}{5} = 0{,}08 = \frac{2}{25}.$$

2. Definamos los eventos

$$\begin{array}{rcll} A_i & = & \{\text{queque que compra Pedro tiene } i \text{ pasas}\}, & i = 0, 1, 2 \ldots \\ B_j & = & \{\text{queque que compra Juan tiene } j \text{ pasas}\}, & j = 0, 1, 2 \ldots \end{array}$$

Sabemos que $P(A_i) = r_i$ y $P(B_j) = s_j$.

(a) Se pide la probabilidad del evento

$$C_k = \{\text{el total de pasas que Diego recibe es } k\}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Puesto que $C_k = \bigcup_{m=0}^{k} (A_m \cap B_{k-m})$, donde claramente los eventos $A_m \cap B_{k-m}$ son disjuntos, y como los A_i son independientes de los B_j, tenemos

$$\begin{aligned}
P(C_k) &= P(\bigcup_{m=0}^{k} (A_m \cap B_{k-m})) = \sum_{m=0}^{k} P(A_m \cap B_{k-m}) = \sum_{m=0}^{k} P(A_m)P(B_{k-m}) \\
&= \sum_{m=0}^{k} \frac{\lambda_r^m}{m!} \exp(-\lambda_r) \frac{\lambda_s^{k-m}}{(k-m)!} \exp(-\lambda_s) = \frac{\exp(-(\lambda_r + \lambda_s))}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \lambda_r^m \lambda_s^{k-m} \\
&= \frac{\exp(-(\lambda_r + \lambda_s))}{k!} (\lambda_r + \lambda_s)^k, \quad \text{por el Teorema del Binomio.}
\end{aligned}$$

(b) Se pide

$$\begin{aligned}
P(B_j \mid C_k) &= \frac{P(B_j \cap C_k)}{P(C_k)} = \frac{P(A_{k-j} \cap B_j)}{P(C_k)} \quad \text{pues } B_j \cap C_k = A_{k-j} \cap B_j \\
&= \frac{P(A_{k-j})P(B_j)}{P(C_k)} \quad \text{por independencia de } A_{k-j} \text{ y } B_j \\
&= \frac{\frac{\lambda_r^{k-j}}{(k-j)!} \exp(-\lambda_r) \frac{\lambda_s^j}{j!} \exp(-\lambda_s)}{\frac{\exp(-(\lambda_r+\lambda_s))}{k!} (\lambda_r + \lambda_s)^k} = \\
&= \binom{k}{j} \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_r + \lambda_s}\right)^j \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_r + \lambda_s}\right)^{k-j}, \quad j = 0, \ldots, k
\end{aligned}$$

3. Los eventos A_n son, por hipótesis, independientes, con $P(A_n) = \exp(-\lambda_n)$.

- Si $\lambda_n = \log(n)$ entonces $P(A_n) = \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$ y como en este caso $\sum_{n\geq 1} P(A_n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$, y dado que los A_n son independientes, por el segundo Lema de Borel-Cantelli se tiene $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(A_n \text{ i.o.}) = 1$, es decir, con probabilidad 1 una cantidad infinita de estos eventos ocurrirá.
- Si ahora $\lambda_n = 2\log(n)$ entonces $P(A_n) = \frac{1}{n^2}$ para todo $n \geq 1$ y como en este caso $\sum_{n\geq 1} P(A_n) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$, por el primer Lema de Borel-Cantelli se tiene $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(A_n \text{ i.o.}) = 0$, es decir, con probabilidad 1 a lo más una cantidad finita de los eventos ocurrirá.

4. Notar que el gráfico de la función tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$ de magnitud p. La función es nula en $(-\infty, 0)$ y se comporta suavemente en $[0, +\infty)$.

(a) La monotonía de F en $[0, +\infty)$ es consecuencia de que, en este rango, $1 - (1-p)\exp(-\lambda x) < 1 - (1-p)\exp(-\lambda y)$ ssi $\exp(-\lambda y) < \exp(-\lambda x)$ lo que equivale a $x < y$ puesto que $\exp(-\lambda x)$ es decreciente. Además, la función es continua en todo punto salvo en $x = 0$, y dada su definición, F es continua por la derecha en $x = 0$. Por último, el límite en $-\infty$ es 0 por definición, y en $+\infty$ se tiene que F converge a 1 pues $\lim_{x\to\infty} \exp(-\lambda x) = 0$.

(b) Si $X \sim F$ tenemos $F_X \equiv F$, de modo que

(i) $P(X \leq 5) = F_X(5) = 1 - (1-p)\exp(-5\lambda)$.

(ii) $P(X = 0) = F_X(0) - F_X(0^-) = 1 - (1-p) - 0 = p$.

(iii) $P(X = 5) = 0$ pues F es continua en $x = 5$.

(iv) Tenemos

$$\begin{aligned} P(X > t+s \mid X > s) &= \frac{P(\{X > t+s\} \cap \{X > s\})}{P(X > s)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} \\ &= \frac{(1-p)\exp(-\lambda(t+s))}{(1-p)\exp(-\lambda s)} = \exp(-\lambda t), \end{aligned}$$

y notemos que esta probabilidad no depende de s. Si pensamos en X como un tiempo de espera, entonces esto significa que dado que ya hemos esperado s unidades de tiempo, la probabilidad de esperar t unidades adicionales de tiempo no depende de lo que ya hemos estado esperando.