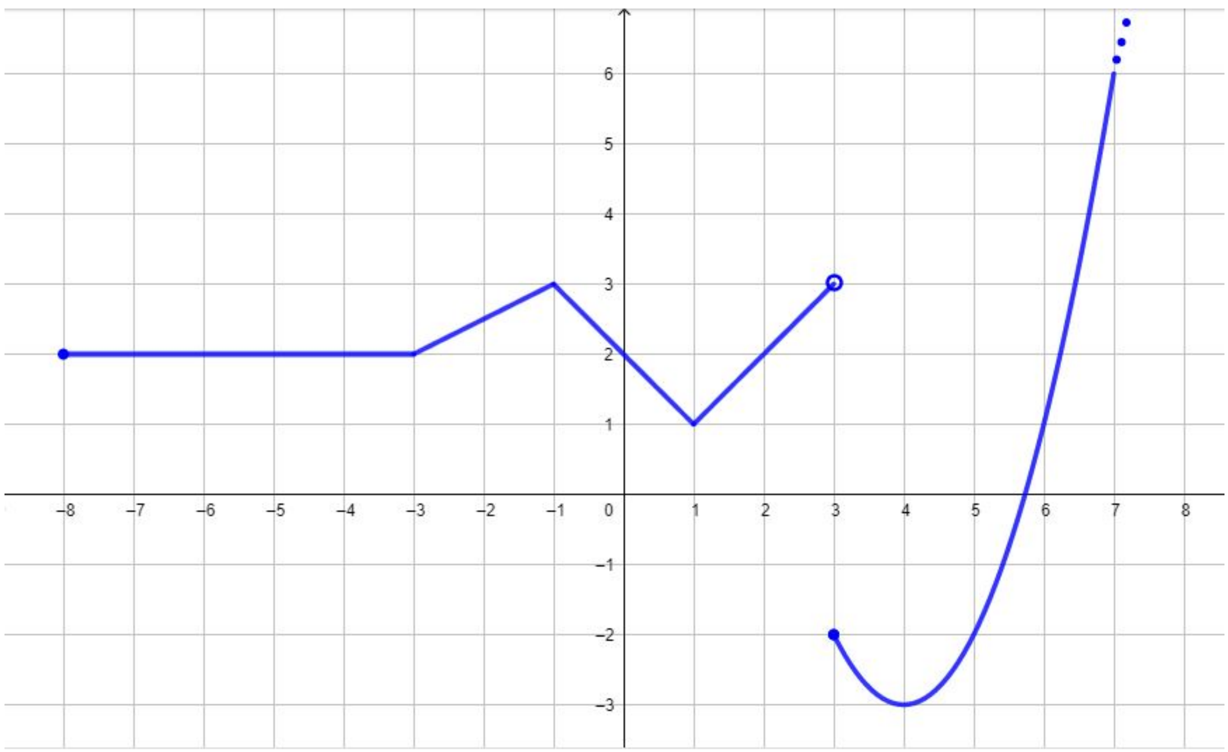
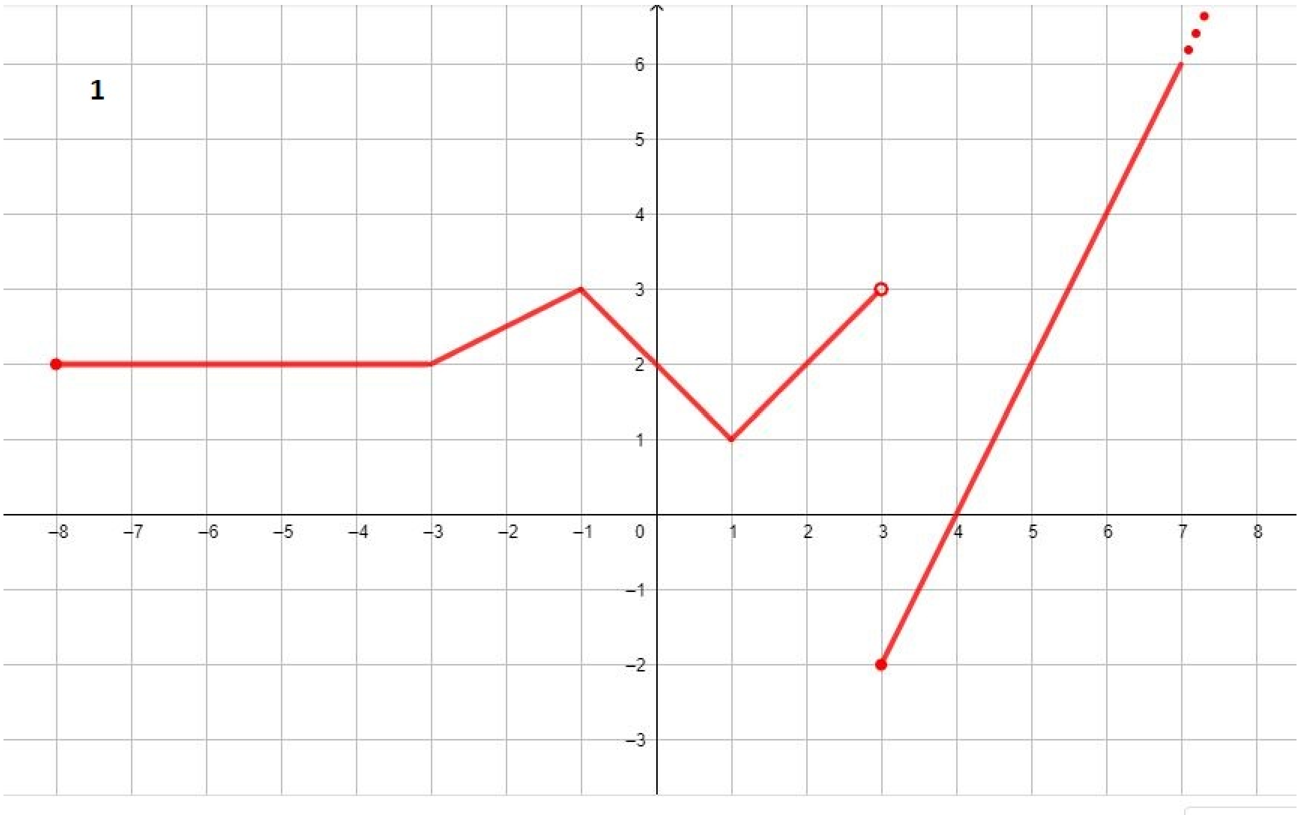
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2020

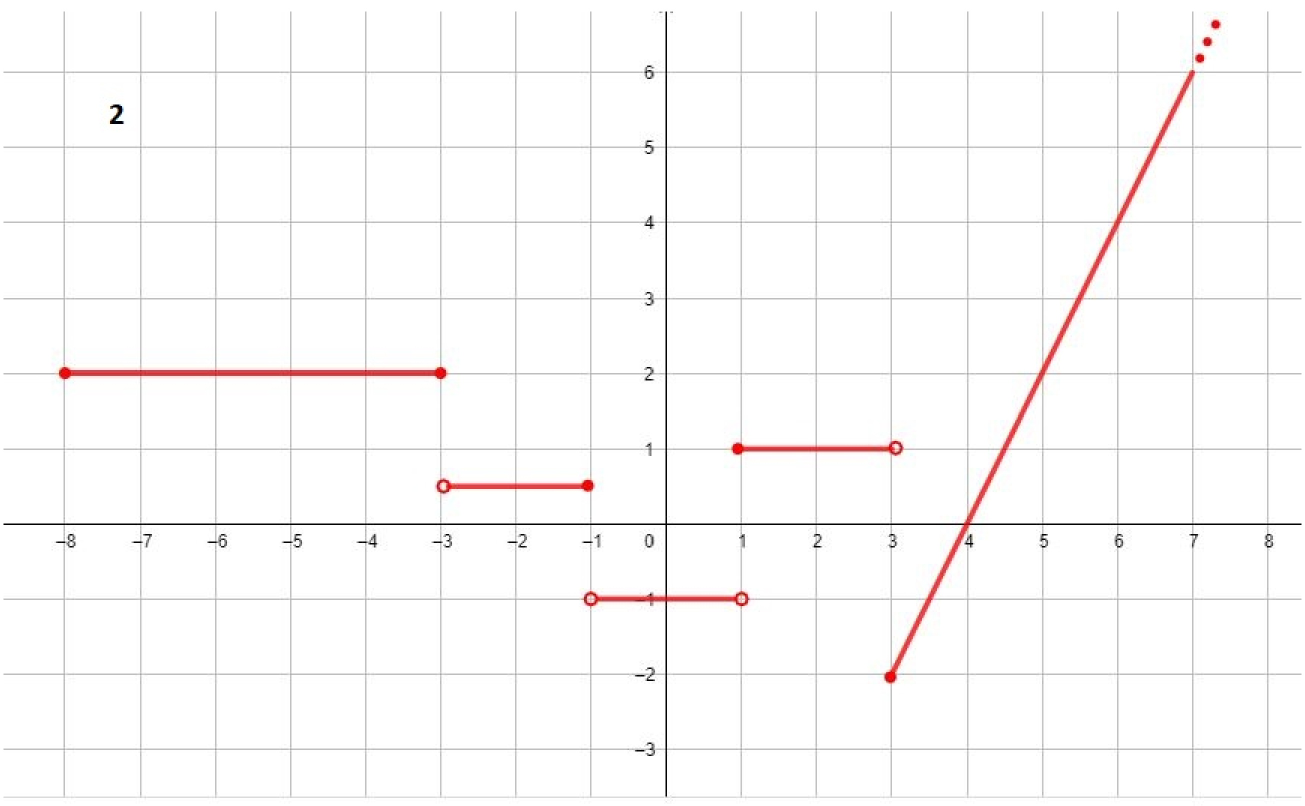
Ayudantía 4 - MAT1610

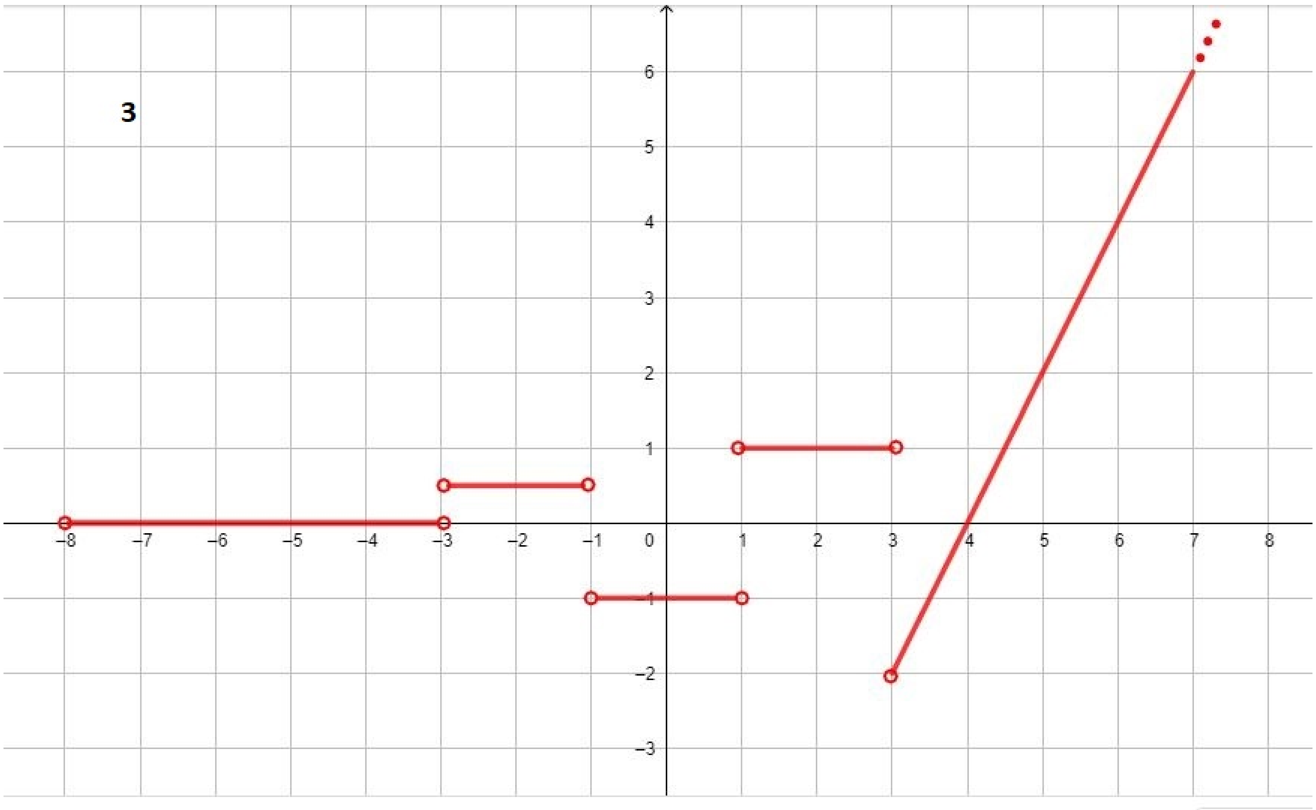
1. Para la función f cuya grafica está dada

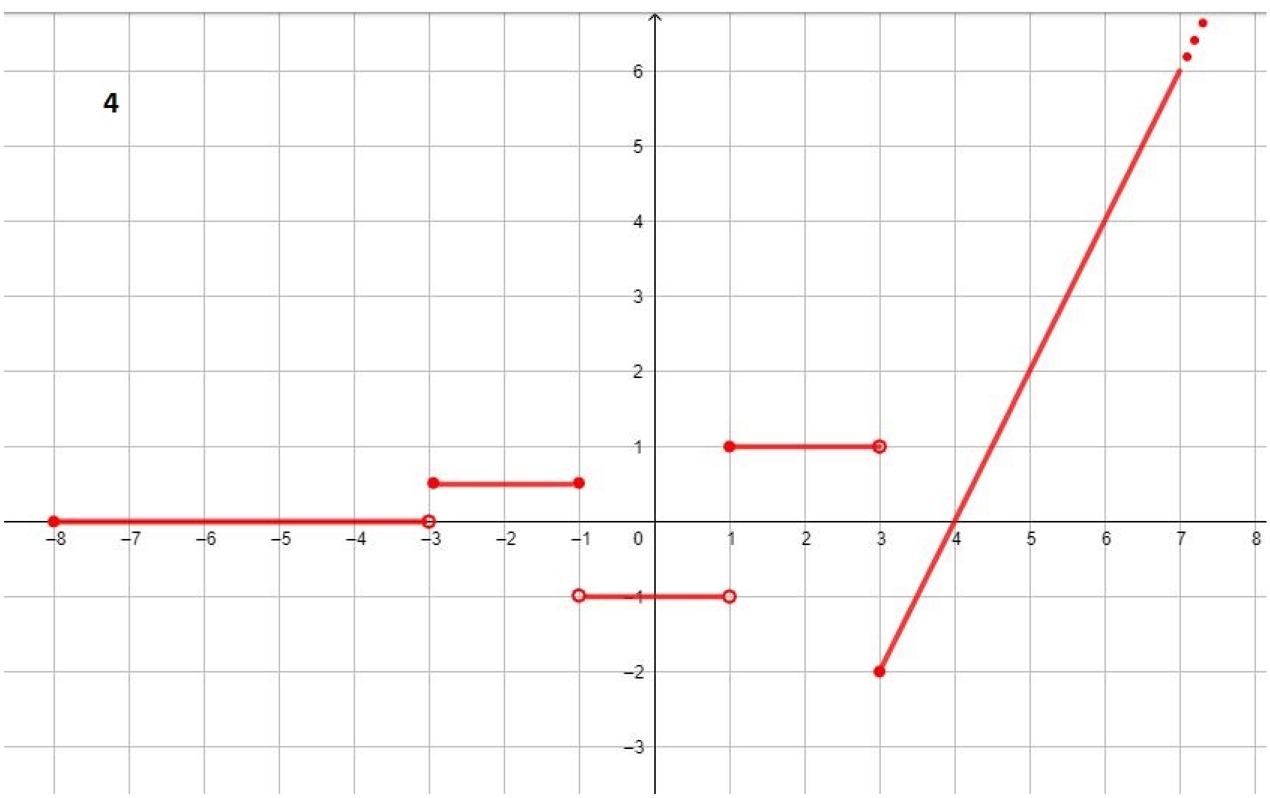


   (a) Ordene, de menor a mayor, los siguientes valores $f'(-\frac{7}{2})$, $f'(-2)$, $f'(0)$ y $f'(2)$. Justifique.
   (b) Determine, si existe, el valor de $f'(-3)$, $f'(3)$, $f''(-2)$. Justifique.
   (c) Determine el valor de $g'(4)$ donde $g(x) = \dfrac{f(x)}{x + f(x)}$.
   (d) Determine cuál de las siguientes gráficas corresponde a la gráfica de la función $f'(x)$.


1
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8


2
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8


3
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8


4
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8

Solución

(a) Orden correcto

$$f'(0) < f'(-\frac{7}{2}) < f'(-2) < f'(2)$$

ya que
$f'(-\frac{7}{2}) = 0$
$f'(0) < 0$ (sencillo gráficamente y se puede calcular la pendiente de la recta, es -1)
$f'(-2) = \frac{1}{2}$ calcular la pendiente de la recta, es $\frac{1}{2}$.
$f'(2) = 1$ calcular la pendiente de la recta, es 1.

(b) $f'(-3)$ no existe, sencillo de observar graficamente y mostrar lo que representan los límites $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = 0$ y $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \frac{1}{2}$
$f'(3)$ no existe, ya que f no es continua en $x = 3$.
$f''(-2) = 0$ f, ya que en el intervalo $[-3,-1]$ es un polinomio de grado 1 entonces f' es constante $\left(\frac{1}{2}\right)$ en ese intervalo y f'' es constantemente igual a 0 en ese intervalo, en particular en $x = -2$.

(c)

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\frac{f(x)}{x+f(x)}\right)' \\ &= \frac{f'(x)\,(x+f(x)) - f(x)\,(x+f(x))'}{(x+f(x))^2} \\ &= \frac{f'(x)\,(x+f(x)) - f(x)\,(1+f'(x))}{(x+f(x))^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(4) &= \frac{f'(4)\,(4+f(4)) - f(4)\,(1+f'(4))}{(4+f(4))^2} \\ &= \frac{0\,(4-3)-(-3)\,(1+0)}{(4+(-3))^2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

(d) Alternativa correcta opción 3.
Notas:
Resaltar cómo descartar las demás opciones.
Resaltar que -8, -3,-1, 1 y 3 no pertenecen al dominio de f'.
Hacer notar que en el intevalo $(-3,-1)$ la recta tangente a f coincide con f pero, $f'(x)$ es el valor de la pendiente, por ello es constante. Análogo para los intervalos $(-1,1)$ y $(1,3)$.
Explicar la razón por la que en el tramo de f a la derecha, la derivada crece y el pasa por el punto $(4,0)$.
Remarcar la diferencia entre las opciones 3 y 4.

2. Demuestre que la función $f(x) = (x+1)\,|x+1|$ es derivable en $x = -1$.
Solución:
Note que $f(x)$ es continua en $x = -1$, por ser producto de dos funciones continuas en $x = -1$. En detalles, ya que $f(-1) = (-1+1)\,|-1+1| = 0$ y como

$$|x+1| = \begin{cases} -x-1 & si \quad x < -1 \\ \\ x+1 & si \quad x \geq -1 \end{cases}$$

Se tiene que:
$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x+1)\,|x+1| = \lim\limits_{x \to -1^-} (x+1)\,(-x-1) = 0$
y
$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x+1)\,|x+1| = \lim\limits_{x \to -1^+} (x+1)\,(x+1) = 0$
Por otro lado,
$f'(-1) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+1)|x+1|-0}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \frac{(x+1)}{x+1} \lim\limits_{x \to -1} |x+1| = 1 \cdot 0 = 0$
Es decir, $f'(-1)$ existe (vale 0), f es derivable en $x = -1$.

Nota:
• Resaltar que también se puede usar la definición de $f'(-1)$ en términos de h
• Resaltar que $|x+1|$ es no derivable en $x = -1$, sin embargo, al multiplicar por $(x-1)$ se obtiene una función derivable en dicho valor.

3. Sea f una función definida en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = L$. Determine si las siguientes afirmaciones es(son) siempre verdadera(s. Justifique.

   (a) f es derivable en 0

   (b) $L = 0$.

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

   Solución:

   (a) Es siempre verdadera, ya que

   $$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = L$$

   Por lo que, si $f(0) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = L$ entonces f es derivable en $x = 0$.

   (b) No es siempre es verdadera. Contraejemplo: Si $f(x) = x\cos(x)$, se tiene que $f(0) = 0$, sin embargo,

   $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} \lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \neq 0$$

   Se pueden mostrar otros contraejemplos: $f(x) = x(x+2)$, $f(x) = x(x^2+2)$, etc.

   (c) Siempre verdadera ya que la función f es derivable en $x = 0$ y en consecuencia, continua en $x = 0$, por lo que

   $$0 = f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$$

4. Use las reglas de derivación para:

(a) Determinar la función derivada de $f(x) = \dfrac{\pi}{x^3} - 3\cot(x) - \frac{1}{\sqrt[3]{4x^2}} + 10a + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $a \in \mathbb{R}$

(b) Determinar la función derivada y el valor $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$ para $f(x) = \dfrac{[x]x^2}{x^2 + 3x + \frac{13}{4}}$

(c) Demostrar que si $f(x) = e^x \operatorname{sen}(x)$ entonces $f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 0$

Solución:

(a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{\pi}{x^3} - 3\cot(x) - \frac{1}{\sqrt[3]{4x^2}} + 10a + \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)' \\
&= \left(\frac{\pi}{x^3}\right)' - \left(3\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)' - \left(\frac{1}{\sqrt[3]{4x^2}}\right)' + (10a)' + \left(\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)' \\
&= \left(\pi x^{-3}\right)' - 3\left(\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}\right)' - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)' + 0 + 0 \\
&= -\frac{3\pi}{x^4} + 3\csc^2(x) + \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^5}}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{[x]x^2}{x^2 + 3x + \frac{13}{4}}\right)' \\
&= \frac{\left([x]x^2\right)'\left(x^2 + 3x + \frac{13}{4}\right) - [x]x^2\left(x^2 + 3x + \frac{13}{4}\right)'}{\left(x^2 + 3x + \frac{13}{4}\right)^2} \\
&= \frac{\left([x]'x^2 + 2[x]x\right)\left(x^2 + 3x + \frac{13}{4}\right) - [x]x^2\left(2x + 3\right)}{\left(x^2 + 3x + \frac{13}{4}\right)^2}
\end{aligned}$$

Note que:

- $\left[-\frac{3}{2}\right] = -2$
- $[x]' = 0$ para $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$
- $x^2 + 3x + \frac{13}{4} \neq 0, \forall x$
- $x^2 + 3x + \frac{13}{4} \mid_{x=-\frac{3}{2}} = 1$

Entonces,
$f'(x)$ está definida para $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ y

$$f'(x) = \frac{\left(2[x]x\right)\left(x^2 + 3x + \frac{13}{4}\right) - [x]x^2\left(2x + 3\right)}{\left(x^2 + 3x + \frac{13}{4}\right)^2}$$

y

$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(2(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(1) - (-2)\left(\frac{9}{4}\right)0}{1^2} = 6$$

(c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^x \operatorname{sen}(x)\right)' \\ &= e^x \operatorname{sen}(x) + e^x \cos(x) \\ &= e^x \left(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(e^x \left(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right)\right)' \\ &= e^x \left(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right) + e^x \left(\cos(x) - \operatorname{sen}(x)\right) \\ &= 2e^x \cos(x) \end{aligned}$$

Así

$$f''(x) - 2f'(x) + 2f(x) = 2e^x \cos(x) - 2e^x \left(\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\right) + 2e^x \operatorname{sen}(x) = 0$$

Desafíos... Ejercicios extras para los alumnos

Extra 1: Para función $f(x) = \frac{1}{x+2}$, determine:

(a) Si existe, algún punto donde la recta tangente a f en dicho punto es horizontal. Justifique.

(b) Si existen, valores de a y b tales que la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto (a, b) pasa por el origen.

Solución:

(a) Dado que $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$, entonces $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} \neq 0$ para todo $x \in \text{Dom}(f)$, por lo que no existen puntos sobre la gráfica de f donde la recta tangente sea horizontal

(b) La recta tangente a f en un punto (a, b) es $y = f'(a)(x - a) + b$, que para este caso es:

$$y = -\frac{1}{(a+2)^2}(x-a) + b$$

pero, como el punto (a, b) está sobre la gráfica de f, se cumple que $b = f(a) = \frac{1}{a+2}$, entonces,

$$y = -\frac{1}{(a+2)^2}(x-a) + \frac{1}{(a+2)}$$

Así, si la recta es tangente a f en (a, b) y pasa por el punto $(0, 0)$ (origen), se tiene que

$$0 = -\frac{1}{(a+2)^2}(0-a) + \frac{1}{(a+2)}$$

Ecuación con la que se puede determinar el o los valores de a, como sigue:

$$\begin{aligned} 0 = -\frac{1}{(a+2)^2}(0-a) - \frac{1}{(a+2)} \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{a}{(a+2)^2} + \frac{1}{a+2} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{2a+2}{(a+2)^2} \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = 2a+2 \\ &\Leftrightarrow \quad a = -1 \end{aligned}$$

y, con ello, $b = \dfrac{1}{-1+2} = 1$. Por lo tanto, el punto donde la recta tangente a $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$ pasa por el origen es $(-1, 1)$.

Extra 2: Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} ax + b\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(bx) + a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es continua en $x = 0$?

b) ¿Para qué valores a y b en $\mathbb{R}$ la función f es derivable en $x = 0$?

Solución

a) Para que la función f sea continua en 0, los límites laterales tiene que ser iguales a $f(0)=b$. Como $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=b$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1+a$ entonces $1+a=b$. Así, la función f es continua en $x=0$ para $a\in\mathbb{R}$ y para $b=a+1$.

b) Para que f sea una función derivable en 0 el límite $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ tiene que existir. Calculamos los límites laterales

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{ah+(a+1)\sqrt{h+1}-(a+1)}{h}\\ &= a+(a+1)\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h+1}-1}{h}\\ &= a+(a+1)\frac{1}{2}\\ &= \frac{3}{2}\,a+\frac{1}{2},\end{aligned}$$

de la misma manera

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\cos\left((a+1)h\right)+a-(a+1)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\cos\left((a+1)h\right)-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\cos\left((a+1)h\right)-1}{h(a+1)}\,(a+1)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Entonces la función f es derivable en $x=0$ si tenemos $\frac{3}{2}\,a+\frac{1}{2}=0$ o sea $a=-\frac{1}{3}$ y $b=\frac{2}{3}$.