Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo Semestre del 2020

Modelos Probabilísticos (EYP1027)

Ayudantía 8

Camilo González Rojas

1. Si X tiene una densidad $f_X(x)$ e Y es independiente de X y tiene una densidad $f_Y(y)$, establezca formulas similares a las de la convolución para la variable aleatoria Zen cada caso.

   a) $Z = X - Y$

   b) $Z = XY$

   c) $Z = X/Y$

2. Suponga que $\bar{X}$ y S^2 son calculados de una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ con varianza finita σ^2. Sabemos que $\mathrm{E}S^2 = \sigma^2$. Pruebe que $\mathrm{E}S \leq \sigma$,.

3. Sea $U_i, i = 1, 2, \ldots$, variables aleatorias independientes uniformes (0,1), y sea X con distribución

$$P(X = x) = \frac{c}{x!}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

   donde $c = 1/(e-1)$. Encuentre la distribución de

$$Z = \min\{U_1, \ldots, U_X\}.$$

1. Si X tiene una densidad $f_X(x)$ e Y es independiente de X y tiene una densidad $f_Y(y)$, establezca formulas similares a las de la convolución para la variable aleatoria Zen cada caso.

   a) $Z = X - Y$

   b) $Z = XY$

   c) $Z = X/Y$

$$f_{U,V}(u,v) = \sum_{i=1}^{k} f_{X,Y}\left(h_{1i}(u,v),\ h_{2i}(u,v)\right) |J_i|$$

$$|J_i| = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial u} & \frac{\partial h_1}{\partial v} \\ \vdots & \\ \frac{\partial h_k}{\partial u} & \frac{\partial h_k}{\partial v} \end{vmatrix}$$

a) $Z = X - Y \Rightarrow \begin{matrix} X = W \\ Y = X - Z \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} X = W \\ Y = W - Z \end{matrix}$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(w,\ w - z) \cdot 1$$

$$= f_X(w)\, f_Y(w - z)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w)\, f_Y(w - z)\, dw \quad //$$

b) $Z = X \cdot Y$

$$X = W \qquad Y = \frac{Z}{W} \implies |J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{w} & -\frac{z}{w^2} \end{vmatrix} = \left| -\frac{1}{w} \right|$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w)\, f_Y(z/w) \left| -\frac{1}{w} \right| dw$$

c) $Z = \frac{X}{Y}$

$$\implies X = W \qquad Y = \frac{W}{Z} \qquad |J| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{w}{z^2} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = \left| \frac{w}{z^2} \right|$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w)\, f_Y\left(\frac{w}{z}\right) \left| \frac{w}{z^2} \right| dw$$

2. Suponga que $\bar{X}$ y S^2 son calculados de una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ con varianza finita σ^2. Sabemos que $\mathrm{E}S^2 = \sigma^2$. Pruebe que $\mathrm{E}S \leq \sigma$,.

$$\boxed{E(S^2) = \sigma^2}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

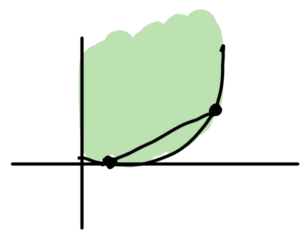
Pd: $E(S) \leq \sigma$

Desigualdad de Jensen

Sea $g(\cdot)$ una fun. convexa ($f(tx + (1-t)y$

$\leq t f(x) + (1-t) f(y)$

$\forall x,y \in C$, C conj. convexo $t \in [0,1]$



)

$$E(g(x)) \geq g(E(x))$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = E(S^2) \geq [E(S)]^2$$

$$\Rightarrow \sigma \geq E(S)$$

3. Sea $U_i, i = 1, 2, \ldots,$ variables aleatorias independientes uniformes (0,1), y sea X con distribución

$$P(X = x) = \frac{c}{x!}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

donde $c = 1/(e-1)$. Encuentre la distribución de

$$Z = \text{mín}\{U_1, \ldots, U_X\}.$$

$$X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} F \quad , \quad X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} \leq x) = P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \leq x)$$

$$= 1 - P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \geqslant x)$$

$$= 1 - P(X_1 \geqslant x, \ldots, X_n \geqslant x)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geqslant x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P(X_i \leq x)]$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - F_{X_i}(x)] = 1 - (1 - F_X(x))^n$$

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1 - F_X(x))^{n-1} \cdot f_X(x)$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = [F_X(x)]^n \quad ; \quad f_{X_{(n)}}(x) = n[F_X(x)]^{n-1} f_X(x)$$

$$P(Z > z) = \sum_{x=1}^{\infty} P(Z > z, X = x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} P(Z > z \mid x) P(X = x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} P(U_1 > z, \ldots, U_x > z \mid x) P(X = x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{x} \underbrace{P(U_i > z \mid x)}_{(1-z)\ \text{1- acumulada de una unif.}} P(X = x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} (1 - z)^x P(X = x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} (1 - z)^x \cdot \frac{1}{(e-1)x!}$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{(e-1)} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(1-z)^x}{x!}$$

$$= \frac{1}{e-1} \left[\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(1-z)^x}{x!} - 1 \right]$$

$$= \frac{1}{e-1}\left[\ e^{1-z} - 1\ \right]$$

$$= \frac{e^{1-z} - 1}{e - 1} \qquad 0 < z < 1$$

//

$$P(X = x) = \sum_{y=0}^{\infty} \underbrace{P(X = x, Y = x)}$$