1.

a) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $(1,5,4)$ y que es perpendicular a la recta $x = 1 + 7t$, $y = t$, $z = 23t$.

b) Sean $P(1,2,3)$, $Q(1,-1,-2)$ y $R(0,0,0)$ tres puntos en R^3

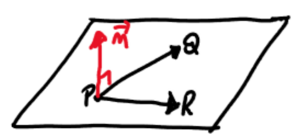
   a. Encuentre la ecuación del plano que pasa por P, Q y R.
   b. Encuentre el área del triángulo PQR
   c. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P y que es perpendicular al plano de la parte a.

a) Como la recta y el plano son perpendiculares, el vector director de la recta tiene la misma dirección que el vector normal del plano $\vec{n}$, por lo tanto, podemos tomar $\vec{n} = \langle 7,1,23 \rangle$ con $P_0 = (1,5,4)$ y obtenemos la ecuación del plano:

$$7(x-1) + 1(x-5) + 23(z-4) = 0$$

b)

   a. Para encontrar un vector normal del plano $\vec{n}$ podemos calcular $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$, ya que PQ y PR están en el plano y el producto cruz es perpendicular a ambos vectores.



$$\overrightarrow{PQ} = \langle 1-1, -1-2, -2-3 \rangle = \langle 0, -3, -5 \rangle$$
$$\overrightarrow{PQ} = \langle 0-1, 0-2, 0-3 \rangle = \langle -1, -2, -3 \rangle$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1i + 5j - 3k = \langle -1, 5, -3 \rangle$$

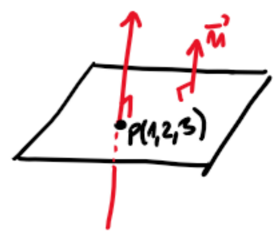
Finalmente escogemos un punto del plano y escribimos la ecuación

$$-1(x-0) + 5(y-0) - 3(z-0) = 0$$

b. Área$=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+(5)^2+(-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{35}$

c. La dirección del vector director de la recta es la misma del vector normal del plano de la parte a. $\langle -1,5,-3\rangle$, por lo tanto, la ecuación de la recta pedida es:

$$L: \langle -1,5,-3\rangle t + (1,2,3)$$



Si alguien uso la parte a) en vez de la a. La ecuación del plano es:

$$L: \langle 7,1,23\rangle t + (1,2,3)$$

2.

a) Encuentre y grafique el dominio de la función

$$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - x^2}$$

b) Sea $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$.

a. Encuentre las ecuaciones de las siguientes curvas de nivel para f y grafíquelas.

i. $f(x,y) = \frac{1}{5}$

ii. $f(x,y) = \frac{1}{10}$

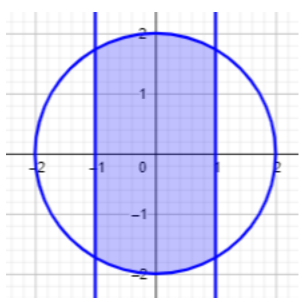
b. Encuentre el valor de k, para el cuál la curva de nivel $f(x,y) = k$ es un punto.

c. Explique porque dos curvas de nivel de una función cualquiera $f(x,y)$ no pueden intersecarse.

a) Un punto (x,y) está en el dominio si satisface simultáneamente las desigualdades:

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \text{ y } 1 - x^2 \geq 0$$

La primera nos dice que $x^2 + y^2 \leq 4$ y la segunda que $-1 \leq x \leq 1$, lo cuál se representa gráficamente en el plano como:

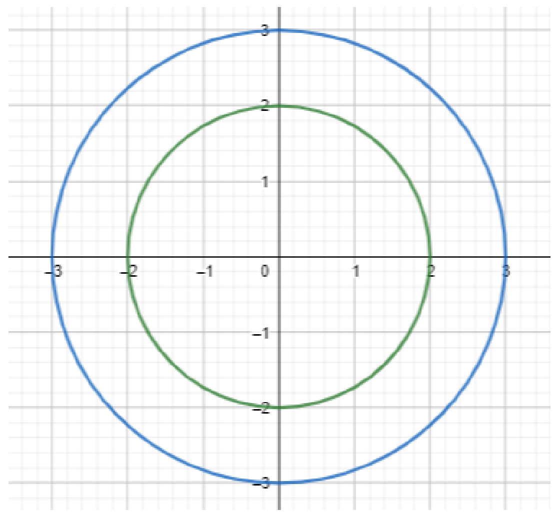


b)

a.

i. $x^2 + y^2 = 4$

ii. $x^2 + y^2 = 9$



b. $\frac{1}{x^2+y^2+1} = k \leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 = k \leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{k} - 1$, por lo tanto, la curva de nivel es un punto cuando $\frac{1}{k} - 1 = 0$, es decir, para $k = 1$.

c. Si dos curvas de nivel se intersecan, entonces existe un punto (a, b) que pertenece al gráfico de ambas curvas, es decir:

$$f(a, b) = k_1 \text{ y } f(a, b) = k_2$$

lo cuál no es posible ya que f es una función y un elemento del dominio no puede tener dos imágenes distintas.

3.

a) Calcule el límite o demuestre que no existe.

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2(1-\cos(2x))}{x^4+y^2}$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$

b) Demuestre que la función f es continua en (0,0)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a)

i) Por un lado, tenemos que $y^2 < x^4+y^2 \to \frac{y^2}{x^4+y^2} < 1$.

Por otro lado, $-1 < \cos(2x) < 1 \to 0 < 1-\cos(2x) < 2$.

Así:

$$0 \leq \frac{y^2(1-\cos(2x))}{x^4+y^2} \leq (1-\cos(2x))$$

Por lo tanto, como $(1-\cos(2x)) \to 0$ cuando $(x,y)\to(0,0)$, entonces (por acotamiento):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2(1-\cos(2x))}{x^4+y^2} = 0$$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$

$= \lim\limits_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{x^2(y+4)-x(y+4)}$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{y+4}{(y+4)(x^2-x)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,-4)} \frac{1}{(x^2-x)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

b) Debemos demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Para esto basta con notar que:

$$0 \leq \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$$

Luego, como $x^2 + y^2 \to 0$ cuando $(x,y) \to (0,0)$, entonces (por acotamiento)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Y así, $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

4.

a) Explique por qué no es posible que exista una función f cuyas derivadas parciales de segundo orden sean continuas y tal que:

$$f_x(x,y) = x + y^2 \quad \text{y} \quad f_y(x,y) = x - y^2$$

b) Calcule las derivadas parciales f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx} de la función

$$f(x,y) = x^4 + 6x - y^4$$

c) Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^4 + 6x - y^4$ con el plano $y = 1$ en el punto $P(1,1,6)$.

a) Si $f_x(x,y) = x + y^2$, entonces $f_{xy}(x,y) = 2y$ y si $f_y(x,y) = x - y^2$, entonces $f_{yx} = 1$. De donde obtenemos $f_{xy} \neq f_{yx}$, lo que contradice el Teorema de Clairaut.

b) $f_x(x,y) = 4x^3 + 6$, $f_y(x,y) = -4y^3$, $f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{yy}(x,y) = -12y^2$, $f_{xy}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = f_{yx}(x,y) = 0$.

c) La pendiente de la recta tangente a la curva es la derivada parcial

$$m = \frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 4(1)^3 + 6 = 10$$

Fin.