PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2021

Examen - MAT1610

1. Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2x} \frac{\cos(t^2) - 1}{x^5} dt & \text{si } x > 0, \\ \\ e^x + a & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución:

Observamos que $e^x + a$ es una función continua en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto f es continua para $x < 0$, por otra parte el teorema Fundamental del Cálculo, asegura que $G(x) = \displaystyle\int_0^{2x} (\cos(t^2) - 1) dt$ es derivable y por tanto continua en todo $\mathbb{R}$, luego el cociente $\dfrac{\int_0^{2x} (\cos(t^2) - 1) dt}{x^5}$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ y por lo tanto f es continua para todo $x > 0$. Por lo tanto basta busacr condicones para que f sea continua en cero, para esto se debe cumplir que:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1 + a$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \int_0^{2x} \frac{\cos(t^2) - 1}{x^5} dt \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{2x} (\cos(t^2) - 1) dt}{x^5} \text{ que es de la forma } 0/0 \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(4x^2) - 1}{5x^4} \text{ que es de la forma } 0/0 \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{-8x\,(\operatorname{sen}(4x^2))}{20x^3} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{-8\,(\operatorname{sen}(4x^2))}{5(4x^2)} \\
&= -\frac{8}{5},
\end{aligned}$$

por lo tanto $a = -\dfrac{13}{5}$.

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por justificar que es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.
- (1 punto) por definición de continuidad en cero.
- (1 punto) por determinar que el primer límite es de la forma $0/0$.
- (1 punto) por derivar correctamente usando TFC.
- (1 punto) por determinar que el segundo límite es de la forma $0/0$.
- (1 punto) por determinar valor de a.

2. a) Determine todos los puntos de la curva $x^2 - xy + y^2 = 3$ cuya recta tangente a la curva es vertical.

Solución:

Derivando implícitamente tenemos que $2x - y - xy' + 2yy' = 0$, obteniendo que

$$y' = \frac{y - 2x}{2y - x}$$

por lo tanto los puntos de la curva cuya tangente es vertical son aquellos que $x = 2y$, reemplazando esta condición en la curva obtenemos

$$4y^2 - 2y^2 + y^2 = 3$$

de esta forma $y^2 = 1$ y por lo tanto los puntos de la curva son $(2, 1)$ y $(-2, -1)$.

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por deetrmianr y' o x' correctamente.
- (1 punto) por la condición paar que sea vertical
- (1 punto) por determinar los puntos de la curva.

b) Encuentre la derivada de

$$h(x) = \left(x^2 + x\cos(xe^x)\right)^4$$

Solución:

Usando las reglas de derivación tenemos que:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= 4\left(x^2 + x\cos(xe^x)\right)^3 \cdot \left(x^2 + x\cos(xe^x)\right)' \\
&= 4\left(x^2 + x\cos(xe^x)\right)^3 \cdot \left(2x + \cos(xe^x) - x\operatorname{sen}(xe^x)(xe^x)'\right) \\
&= 4\left(x^2 + x\cos(xe^x)\right)^3 \cdot \left(2x + \cos(xe^x) - x\operatorname{sen}(xe^x)(e^x + xe^x)\right)
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por la regla la primera igualdad.
- (1 punto) por la regla la segunda igualdad.
- (1 punto) por la regla la tercera igualdad.

3. a) Sea f una función tal que $f(0) = 0$, calcule el valor de

$$\int_1^0 e^s \left(f'(1-s) - f(1-s)\right) ds$$

Solución:
Haciendo integración por partes con $u = f'(1-s)$ y $dv = e^s ds$ tenemos que

$$\int_1^0 e^s f(1-s) ds = f(1-s)e^s|_1^0 + \int_1^0 e^s f'(1-s) ds$$

por lo tanto

$$\int_1^0 e^s \left(f'(1-s) - f(1-s)\right) ds = f(1-s)e^s|_0^1 = f(1)$$

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por la regla la integración por parte correcta.
- (1 punto) por despejar correctamente.
- (1 punto) por obtener el valor.

b) Calcule

$$\int \frac{2x}{x^2 - 4x + 5} dx$$

Solución:

Observe que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{x^2-4x+5} dx &= \int \frac{2x-4+4}{x^2-4x+5} dx \\ &= \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} dx + \int \frac{4}{x^2-4x+5} dx \\ &= \ln(|x^2-4x+5|) + \int \frac{4}{(x-2)^2+1} dx \\ &= \ln(|x^2-4x+5|) + 4\arctan(x-2) + C \end{aligned}$$

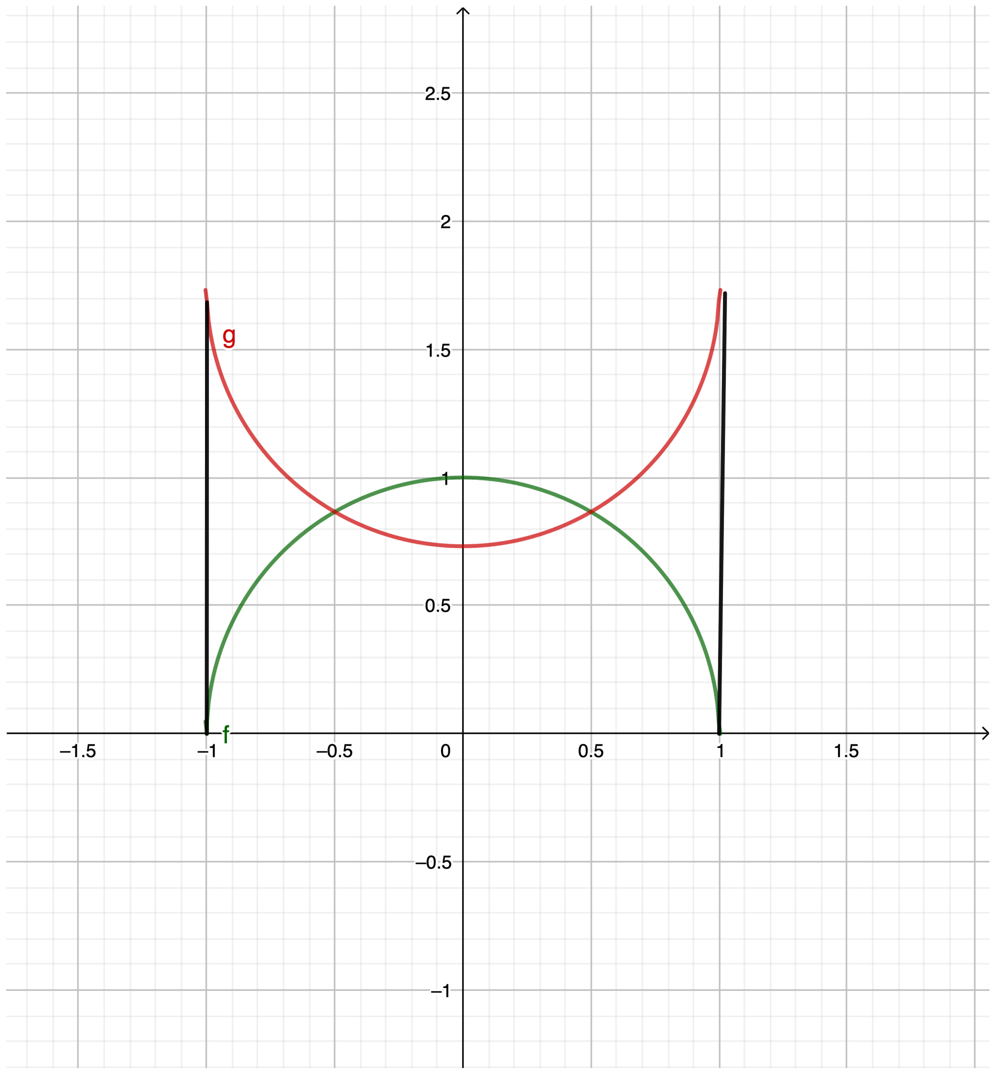
Distribución de puntajes.

- (1 punto) por acomodar para que le quede el logaritmo.
- (1 punto) por rearmar la otra integral para ver sustitución adecuada.
- (1 punto) por el resultado de la segunda integral

4. Sean $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = \sqrt{3} - \sqrt{1-x^2}$.

   a) Calcule el área encerrada entre ambas curvas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.
   Solución:

   Observe que la región a la que le queremos determinar el área es la de la figura



   por lo tanto, observando la simetría, vemos que el área corresponde a

$$2\int_0^{1/2} 2\sqrt{1-x^2} - \sqrt{3}dx + 2\int_{1/2}^{1} \sqrt{3} - 2\sqrt{1-x^2}dx$$

   para determianr el valor de esa integral necesitamos determinar $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$, para esto hacemos la sustitución trigonométrica $x = \operatorname{sen}(\theta)$, obteniendo que

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}\,x + \operatorname{arcsen}(x)\right) + C$$

por lo tanto el área pedida es $\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$.

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por plantear correctamente las integrales que dan el valor del área.
- (1 punto) por la integración de $\sqrt{1-x^2}$ o de $\cos^2(x)$.
- (1 punto) por el resultado final.

b) Determine el volumen del sólido generado al rotar la región encerrada por el eje X y la curva $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$ en torno al eje X.

Solución:

Observe que por la simetría de la región, al utilizar secciones transversales, tenemos que el volumen es:

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 \pi(h(x))^2 dx &= 2\pi\left[\int_0^{1/2}(\sqrt{3}-\sqrt{1-x^2})^2 dx + \int_{1/2}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx\right] \\
&= 2\pi\left[\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}dx + \int_0^1 (1-x^2)dx\right] \\
&= 2\pi\left[\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{2}{3}\right]
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes.

- (1 punto) por plantear correctamente la fórmula del volumen vía secciones transversales.
- (1 punto) por separar correctamente las integrales que dan el valor del volumen.
- (1 punto) por el resultado final.