PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2015

INTERROGACIÓN I3
MAT1620 $*$ Cálculo II

1. Encuentre la serie de Taylor para la función $f(x) = (2-x)^{\frac{1}{2}}$ centrada en $x_0 = 1$ y determine su radio de convergencia.

   Solución

   Derivando sucesivamente la función $f(x)$ y evaluándola en 1, se obtiene que $f(1) = 1$, $f'(1) = -\frac{1}{2}$ y, en general,
   $$f^{(n)}(1) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-3}{2},$$
   For $n = 1, 2, \cdots$.

   La serie de Taylor pedida es entonces,
   $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n \ ,$$
   donde, $a_0 = 1$ y $a_n = -\frac{1}{n!}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-3}{2}$.

   Usando la fórmula que da el criterio de la raíz para calcular el radio de convergencia, obtenemos,
   $$R = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{2n-1} = 1.$$

2. Dados dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, demuestre que,

   a)
   $$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 + \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = 2\|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\|\overrightarrow{v}\|^2 \,.$$

   b)
   $$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2 = 4\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} \,.$$

   Solución

   a) Usando las propiedades del producto punto, se tiene que,
   $$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) =$$
   $$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}.$$
   Esto muestra que
   $$\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 + 2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}.$$

De manera similar, se verica que

$$\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}.$$

Sumando las cantidades anteriores, se verifica este item.

b) Sigue de restar ambas cantidades.

3. Encuentre el ángulo entre la diagonal de un cubo y una de sus aristas.

   Solución

   Sin pérdida de generailidad, podemos ubicar el cubo de modo que sus aristas sean los vectores canónicos $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.

   La diagonal es entonces,

$$\overrightarrow{d} = \hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}.$$

   El ángulo entre la diagonal y, por ejemplo, el vector $\hat{\imath}$ se puede encontrar de,

$$\overrightarrow{d} \cdot \hat{\imath} = (\hat{\imath} + \hat{\jmath} + \hat{k}) \cdot \hat{\imath} = 1$$

   En efecto,

$$\overrightarrow{d} \cdot \hat{\imath} = \|\overrightarrow{d}\|\|\hat{\imath}\| \cos\theta = \sqrt{3}\cos\theta$$

   Esto significa que el ángulo pedido es

$$\theta = Arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

4. *a*) Encuentre la distancia del punto $(1, 1, 1)$ a la recta que contiene a $(0, 6, 8)$ y a $(-1, 4, 7)$.

   Solución Una de los posibles procedimientos es el siguiente:
   el vector $\overrightarrow{a} = (0, 6, 8) - (-1, 4, 7) = (1, 2, 1)$ pertenece a la recta. Entonces, la proyección de $\overrightarrow{b} = (1, 1, 1)$ sobre la recta es

$$\overrightarrow{b} \cdot \hat{a}\hat{a} = \frac{5}{\sqrt{6}}\,\hat{a}$$

   La distancia pedida es entonces,

$$\|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{b} \cdot \hat{a}\hat{a}\| = \|(1 - \frac{5}{\sqrt{6}}, 1 - \frac{10}{\sqrt{6}}, (1 - \frac{5}{\sqrt{6}})\|$$

b) Encuentre la distancia el punto $(2,1,4)$ al plano que contiene a $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y a $(0,0,3)$.

Solución Una solución: dos vectores en el plano son,

$$\overrightarrow{u} = (1,0,0) \, - \, (0,2,0) = (1,-2,0)$$

y

$$\overrightarrow{v} = (0,2,0) \, - \, (0,0,3) = (0,2,-3).$$

Entonces, la proyección del vector $\overrightarrow{w} = (2,1,4)$ sobre el plano es

$$\overrightarrow{w} \cdot \hat{u}\hat{u} \, + \, \overrightarrow{w} \cdot \hat{v}\hat{v} = -\frac{10}{13}(0,2,-3).$$

La distancia pedida es, por lo tanto,

$$\|(2,1,4) - (-\frac{10}{13})(0,2,-3)\| = \frac{1}{13}\|(26,43,22)\|$$