EYP 1027 Métodos Probabilísticos

Clase 21

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2020

Contenido I

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatorias definidas en un determinado espacio de probabilidad, y sea Z cualquier variable aleatoria cuya distribución no depende de n.

Definición 1.1

Se dice que Z_n converge en distribución para Z si,

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) \to P(Z \leq z) = F_Z(z), \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

para todo z donde F_Z es continua (es decir, $\forall\ z$ tal que $P(Z = z) = 0$).

Notación: $Z_n \xrightarrow{d} Z \quad \text{o} \quad F_{Z_n} \Longrightarrow F_Z.$

Nota: Similarmente, si $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \ldots$ son vectores aleatorios de dimensión p, entonces $\boldsymbol{Z}_n \xrightarrow{d} \boldsymbol{Z}$ ssi $\lim_{n\to\infty} F_{\boldsymbol{Z}_n}(\boldsymbol{z}) = F_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{z})\ \forall\ \boldsymbol{z}$ que sea punto de continuidad de $F_{\boldsymbol{Z}}$.

Ejemplo 1.1

1) $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ ssi

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right), \quad \forall\ z \in \mathbb{R}.$$

2) Sea $Z \equiv \theta$ (variable aleatoria degenerada); es decir, $P(Z=\theta)=1$ y $P(Z=z)=0$ para todo $z \neq \theta$, de modo que la fda de Z esta dada por,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < \theta, \\ 1, & \text{si } z \geq \theta. \end{cases}$$

En este caso, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
Z_n \xrightarrow{d} Z &\iff P(Z_n \leq z) \to P(Z \leq z) \;\; \forall\, z \neq \theta \\
&\iff P(Z_n \leq z) \to 0 \;\; \forall\, z < \theta \\
&\qquad\qquad\qquad\;\; \to 1 \;\; \forall\, z > \theta.
\end{aligned}
$$

Aplicación: Sea $\{Z_n; n \leq 1\}$ tal que $P(Z_n = \theta) = 1 - \frac{1}{n}$ y $P(Z_n = \theta + n^2) = \frac{1}{n}$. Entonces, $Z_n \xrightarrow{d} Z$; en efecto,

$$
F_{Z_n}(z) = P(Z_n \leq z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < \theta, \\ 1 - \frac{1}{n}, & \text{si } \theta \leq z < \theta + n^2, \\ 1, & \text{si } z \geq \theta + n^2 \end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < \theta, \\ 1, & \text{si } z > \theta \end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = F_Z(z) \;\; \forall\, z \neq \theta.
$$

3) Sea $Z_n = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$, donde $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$. Entonces, $T_n = n(\theta - Z_n) \xrightarrow{d} T \sim \exp(1/\theta)$.

Demostración: Vimos que,

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < 0, \\ \left(\frac{z}{\theta}\right)^n, & \text{si } 0 \leq z < \theta, \\ 1, & \text{si } z \geq \theta. \end{cases}$$

Luego,

$$\begin{aligned} F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) &= P(n(\theta - Z_n) \leq t) \\ &= P\left(Z_n \geq \theta - t/n\right) \\ &= 1 - P\left(Z_n \leq \theta - t/n\right) \\ &= 1 - F_{Z_n}\left(\theta - t/n\right). \end{aligned}$$

Reemplazando $F_{Z_n}(z)$ evaluada en $z = \theta - \frac{t}{n}$ en esta última expresión, se tiene que,

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \theta - \frac{t}{n} < 0 \Leftrightarrow t > n\theta, \\ 1 - \left(1 - \frac{t}{n\theta}\right)^n, & \text{si } 0 \leq \theta - \frac{t}{n} < \theta \Leftrightarrow 0 < t \leq n\theta, \\ 0, & \text{si } \theta - \frac{t}{n} \geq \theta \Leftrightarrow t \leq 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0, \\ 1 - \left(1 - \frac{t}{n\theta}\right)^n, & \text{si } 0 < t \leq n\theta. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0, \\ 1 - e^{-t/\theta}, & \text{si } 0 < t < \infty, \end{cases}$$

$$= F_T(t), \quad \text{donde } \; T \sim \exp(1/\theta).$$

Teorema 1.1

Sea $\{Z_n; n \geq 1\}$ una secuencia de variables aleatoria y Z una variable aleatoria que no depende de n.

(a) $Z_n \stackrel{d}{\to} Z \iff \lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = M_Z(t)$ para todo t en algún intervalo que contega el 0 y donde las fgm's existen.
(b) $Z_n \stackrel{d}{\to} Z \iff \lim_{n\to\infty} \varphi_{Z_n}(t) = \varphi_Z(t)$ para todo t, donde $\varphi_{Z_n}(t)$ es la f.c. de Z_n, $n \geq 1$, y $\varphi_Z(t)$ es la f.c. de Z.

Demostración 1.1

Omitida! (T. de H-B y T. de cont. de P-L; ver el libro de Barry James)

Nota: Si $\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z}_1, \boldsymbol{Z}_2, \ldots$ son vectores aleatorias p-dimensionales, entonces, $\boldsymbol{Z}_n \stackrel{d}{\to} \boldsymbol{Z} \iff \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{Z}_n \stackrel{d}{\to} \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{Z}$ para todo $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^p$.
(Ver Teorema de Cramer-World).

Aplicación: Para demostrar que $Z_n \xrightarrow{d} Z$ es suficiente probar que $M_{Z_n}(t) \to M_Z(t)$ (o $\varphi_{Z_n}(t) \to \varphi_Z(t)$), cuando $n \to \infty$.

Ejemplo 1.2

1) $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(\mu, \sigma^2) \iff \lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

2) Sea $Z_n \sim Bin(n, p_n)$, donde $np_n = \lambda > 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$. Entonces, $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim P(\lambda)$.

Demostración: Como $M_Z(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$, $t \in \mathbb{R}$, basta con probar que $\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = e^{\lambda(e^t-1)}\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Por otro lado,

$$M_{Z_n}(t) = \{1 + p_n(e^t - 1)\}^n = \left\{1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}\right\}^n \quad (p_n = \lambda/n)$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left\{1 + \frac{\lambda(e^t - 1)}{n}\right\}^n = e^{\lambda(e^t-1)} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

3) Sea $Z_n \sim P(n)$, $n \geq 1$; por ejemplo, $Z_n = \sum_{i=1}^n X_i$, donde, para cada $n \geq 1$, $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} P(1)$. Entonces,

$$T_n = \frac{Z_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} T \sim N(0,1), \quad \text{cuando} \;\; n \to \infty.$$

Note que $\mathsf{E}(Z_n) = \mathsf{Var}(Z_n) = n$, de modo que $\mathsf{E}(T_n) = 0$ y $\mathsf{Var}(T_n) = 1$.

Demostración: La definición de la fgm de T_n implica que,

$$M_{T_n}(t) = \mathsf{E}\left\{ e^{t\left(\frac{Z_n - n}{\sqrt{n}}\right)} \right\} = e^{-t\sqrt{n}} M_{Z_n}(t/\sqrt{n}), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $M_{Z_n}(s) = e^{n(e^s - 1)}$ $s \in \mathbb{R}$, ya que $Z_n \sim P(n)$. Luego,

$$M_{T_n}(t) = e^{-t\sqrt{n}} e^{n(e^{t/\sqrt{n}} - 1)} = e^{nh(t/\sqrt{n})},$$

donde $h(t/\sqrt{n}) = e^{\frac{t}{\sqrt{n}}} - \frac{t}{\sqrt{n}} - 1$.

Una expansión de Taylor de segundo orden de $e^x|_{x=t/\sqrt{n}}$ alrededor de 0 implica que,

$$
\begin{aligned}
h(t/\sqrt{n}) &= 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{t^2}{(\sqrt{n})^2} + \frac{1}{6}\frac{t^3}{(\sqrt{n})^3}e^{\xi\frac{t}{\sqrt{n}}} - \frac{t}{\sqrt{n}} - 1 \\
&= \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + \frac{1}{6}\frac{t^3}{n^{3/2}}e^{\xi\frac{t}{\sqrt{n}}},
\end{aligned}
$$

donde $0 < \xi < 1$. Así, multiplicando por n, se tiene que,

$$
\begin{aligned}
nh(t/\sqrt{n}) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}\frac{t^3}{\sqrt{n}}e^{\xi\frac{t}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{2}t^2, \quad \text{cuando} \;\; n \to \infty \\
\Longrightarrow M_{T_n}(t) = e^{nh(t/\sqrt{n})} \to e^{t^2/2}, \quad \text{cuando} \;\; n \to \infty,
\end{aligned}
$$

donde $M_T(t) = e^{t^2/2}$ es la fgm de $T \sim N(0,1)$.

Tarea: Si $Z_n \sim \chi^2_n$, $n \geq 1$, demuestre que $(Z_n - n)/\sqrt{2n} \stackrel{d}{\rightarrow} N(0,1)$, cuando $n \rightarrow \infty$. Pruebe también que $Z_n/n \stackrel{P}{\rightarrow} 1$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 1.2

Si $Z_n \stackrel{d}{\rightarrow} Z$, entonces $g(Z_n) \stackrel{d}{\rightarrow} g(Z)$ para toda función continua g.

Demostración 1.2

Omitida! (usa el T. de H-B y el T. de Cont. de P-L)

Ejemplo 1.3

1) Si $Z_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, donde $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} U(0, \theta)$, vimos que

$$T_n = n(\theta - Z_n) \xrightarrow{d} T \sim \exp(1/\theta), \quad \text{cuando} \;\; n \to \infty.$$

Entonces, por Teorema 1.2 se tiene que,

$$g(T_n) = \frac{T_n}{\theta} \xrightarrow{d} \frac{T}{\theta} \sim \exp(1), \quad \text{cuando} \;\; n \to \infty.$$

2) Si $Z_n \xrightarrow{d} Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces, $\frac{Z_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{d} \frac{Z-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ y, por tanto, $\left(\frac{Z_n-\mu}{\sigma}\right)^2 \xrightarrow{d} \left(\frac{Z_n-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2_1$, cuando $n \to \infty$.

Teorema 1.3

Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias iid con media $\mathrm{E}(X_1) = \mu$ y varianza $0 < \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty$. Entonces,

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1), \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq z) = \Phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

donde $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-t^2/2\} dt$ es la fda de $Z \sim N(0,1)$.

Demostración 1.3

Defina $Y_i = (X_i - \mu)/\sigma$, $i = 1, 2, \ldots$.. La secuencia $Y_1, Y_2, \ldots$ son variables aleatorias iid con $\mathrm{E}(Y_1) = 0$ y $\mathrm{Var}(Y_1) = \mathrm{E}(Y_1^2) = 1$. Sea $M_{Y_1}(t)$ la fgm común de $Y_1, Y_2, \ldots$, la cual se supone que existe para $|t| < \sigma h$, algún $h > 0$. Vimos que si la fgm de una variable aleatoria Y_1 existe en un intervalo que contiene el cero, entonces la expasión Taylor de alrededor de cero produce que,

$$M_{Y_1}(s) = 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \underbrace{M_{Y_1}^{(k)}(0)}_{\mathrm{E}(Y_1^k)} \frac{s}{k!} = 1 + \frac{s^2}{2} + \underbrace{\sum_{k=3}^{\infty} M_{Y_1}^{(k)}(0) \frac{s}{k!}}_{\text{resto}=r(s)}, \qquad (*)$$

ya que $M_{Y_1}^{(1)}(0) = \mathrm{E}(Y_1) = 0$ y $M_{Y_1}^{(2)}(0) = \mathrm{E}(Y_1^2) = 1$; y donde $r(s)/s^2 \to 0$ cuando $s \to 0$ de acuerdo con el Teorema de Taylor.

Por otro lado, en términos de las variables estandarizadas $Y_1, \ldots, Y_n$, tenemos que,

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n Y_i.$$

Luego, la fgm de Z_n está dada por,

$$\begin{aligned}
M_{Z_n}(t) &= M_{\sum_{i=1}^n Y_i/\sqrt{n}}(t) \\
&= M_{\sum_{i=1}^n Y_i}\left(t/\sqrt{n}\right) \\
&= \left\{M_{Y_1}\left(t/\sqrt{n}\right)\right\}^n \\
&= \left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2 + r\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right\}^n \quad \text{por } (*) \\
&= \left\{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2} + nr\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right\}^n.
\end{aligned}$$

Finalmente, tomado limite cuando $n \to \infty$, se tiene que,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} M_{Z_n}(t) &= \lim_{n\to\infty} \left\{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2} + nr\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right\}^n \\ &= \exp\{t^2/2\},\end{aligned}$$

ya que $nr\left(t/\sqrt{n}\right) = t^2 r\left(t/\sqrt{n}\right)/(t/\sqrt{n})^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Nota: La demostración presupone la existencia de la fgm de la secuencia $X_1, X_2, \ldots$ lo cual limita el alcance del TLC. Una demostración similar puede realizarse en base a la función carastarística la cual siempre existe, extendiendo la aplicación del TLC a cualquier secuencias de variables aleatorias iid con segundo momento finito.

Nota: Similarmente, si $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots$ es una secuencia vectores aleatorios p-dimensionales iid con $\boldsymbol{\mu} = \mathsf{E}(\boldsymbol{X}_1)$ y $\boldsymbol{\Sigma} = \mathsf{Var}(\boldsymbol{X}_1)$ (finita), entonces $\sqrt{n}(\bar{\boldsymbol{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} N_p(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Aplicación: Para "n lo suficientemente grande", se tiene que,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \simeq N(0,1) \text{ o, equivalentemente, } \bar{X}_n \simeq N(\mu, \sigma^2/n);$$

es decir, para "n lo suficientemente grande",

$$\begin{aligned} P\left(\bar{X}_n \leq x\right) &= P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{n}(x - \mu)}{\sigma}\right) \\ &\simeq \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(x - \mu)}{\sigma}\right) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.4

1) Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias iid $Bern(p)$.

Note que $\mathrm{E}(X_1) = p$ y $\mathrm{Var}(X_1) = p(1-p)$ son ambos finitos. Además, en este caso, se debe notar que, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, p)$, $n = 1, 2, \ldots$, es una secuencia de variables aleatorias discretas.

Sin embargo, por el TLC se tiene que,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0,1) \ \text{ cuando } \ n \to \infty.$$

Es decir, para "n lo suficientemente grande" el TLC permite aproximar la distribución $Bin(n,p)$ por una distribución $N(np, np(1-p))$, de modo que si si $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n,p)$ y $k_1 < k_2$ son enteros no negativos, entonces,

$$P(k_1 \leq S_n \leq k_2) \simeq \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Nota: Aplicando la denominada ¸corrección por continuidad", se tiene que,

$$P(k_1 \leq T_n \leq k_2) \simeq \Phi\left(\frac{k_2 + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Por ejemplo, si $n = 36$ y $p = 0.5$, un cálculo exacto da,

$$P(T_n \leq 21) = \sum_{k=0}^{21} \left(\begin{array}{c} 36 \\ k \end{array} \right) (0.5)^{36} = 0.8785$$

La aproximación sin la çorrección por continuidad", da,

$$P(T_n \leq 21) \simeq \Phi\left(\frac{21 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{21 - 18}{3}\right) = \Phi(1) = 0.8413.$$

Si se aplica la çorrección por continuidad", se tiene,

$$P(T_n \leq 21) \simeq \Phi\left(\frac{21.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{21.5 - 18}{3}\right) = \Phi(1.17) = 0.879,$$

la cual es mucho más cercana al valor exacto.

Nota: El resultado sobre la aproximación de la binomial por una normal se conoce como Aproximación (o Teorema) de Demoivre-Laplace.

2) Si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias iid χ^2_1, entonces,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Note que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_n$, con media n y varianza $2n$, $n = 1, 2, \ldots$, y para "n lo sufcientemente grande"se tiene que, $\sum_{i=1}^{n} X_i \simeq N(n, 2n)$.

3) Si $X_1, X_2, \ldots$ son variables aleatorias iid $P(1)$, entonces,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

En este caso, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n)$, con media y varianza n, $n = 1, 2, \ldots$, y para "n lo sufcientemente grande"se tiene que, $\sum_{i=1}^{n} X_i \simeq N(n, n)$.

etc.

Vimos que tanto la convergencia en media cuandrática como la convergencia casi seguramente implican la convergencia en probabilildad. El siguiente resultado establece que la convergencia en probabilidad implica la convergencia en distribución.

Teorema 1.4

Si $\quad Z_n \xrightarrow{P} Z \Longrightarrow Z_n \xrightarrow{d} Z.$

Demostración 1.4

Se verá más despues!

Teorema 1.5

$$Z_n \xrightarrow{P} \theta \Longleftrightarrow Z_n \xrightarrow{d} \theta.$$

Demostración 1.5

($\Longrightarrow$) Suponga que $Z_n \xrightarrow{P} \theta$. Entonces, por definición de convergencia en probabilidad, se tiene que,

$$\begin{aligned} \forall\ \varepsilon > 0, \quad 1 &= \lim_{n\to\infty} P(|Z_n - \theta| < \varepsilon) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\theta - \varepsilon < Z_n < \theta + \varepsilon) \\ &= \lim_{n\to\infty} \{P(Z_n < \theta + \varepsilon) - P(Z_n < \theta - \varepsilon)\} \\ &= \lim_{n\to\infty} P(Z_n < \theta + \varepsilon) - \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq \theta - \varepsilon), \end{aligned}$$

lo cual se ocurre si, y sólo si,

$$\forall\ \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} P(Z_n < \theta + \varepsilon) = 1 \ \text{ y } \ \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq \theta - \varepsilon) = 0.$$

Es decir, si, y sólo si,

$$(*) \quad \lim_{n\to\infty} P(Z_n \le z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < \theta, \\ 1, & \text{si } z > \theta, \end{cases}$$
$$= F_Z(z), \quad \forall\ z \neq \theta,$$

donde $Z = \theta$ con probabilidad 1. Por lo tanto, $Z_n \xrightarrow{d} Z \equiv \theta$.

($\Longleftarrow$) Suponga, ahora, que $Z_n \xrightarrow{d} Z \equiv \theta$. Entonces, por la definición de convergencia en distribución, debe tenerse que,

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z < \theta, \\ 1, & \text{si } z > \theta, \end{cases}$$

para todo $z \neq \theta$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(\theta - \varepsilon < Z_n < \theta + \varepsilon) &= \lim_{n\to\infty} P(Z_n < \theta + \varepsilon) - \lim_{n\to\infty} P(Z_n \leq \theta - \varepsilon) \\ &= 1 - 0 \quad (\text{por } (*)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

Nota: La extensión del los Teoremas 1.4 y 1.5 al caso p-dimensional es inmediata.

Aplicación: Para demostrar que $Z_n \xrightarrow{P} \theta$, es suficiente probar que $Z_n \xrightarrow{d} \theta$

Ejemplo 1.5

Si $\varphi_{Z_n}(t) = \mathrm{E}(e^{itZ_n}) \to e^{it\theta}$, cuando $n \to \infty$, entonces, por la parte (b) del Teorema 1.1, se tiene que $Z_n \xrightarrow{d} \theta$ y, por lo tanto, el Teorema 1.5 implica que $Z_n \xrightarrow{P} \theta$.

Con este resultado, se puede discutir la demostración de la LDGN sin tener que suponer la existencia del segundo momento para la secuencia de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$ iid con media finita μ. En efecto, la función carasterística de $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ es,

$$\varphi_{\bar{X}_n}(t) = \{\varphi_{X_1}(t/n)\}^n \overset{(**)}{=} \left\{1 + i\mu\frac{t}{n} + o(1/n)\right\}^n,$$

donde $no(1/n) = o(1) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

La igualdad $(**)$ se debe al uso de una expansión de Taylor de primer orden alrededor de cero para $\varphi_{X_1}(t/n)$; es decir,

$$\varphi_{X_1}(t/n) = \varphi_{X_1}(0) + \varphi'_{X_1}(0)(t/n) + o(1/n), \quad \text{cuando} \quad n \to \infty,$$

donde $\varphi_{X_1}(0) = 1$ y $\varphi'_{X_1}(0) = i\mu$. Así, el resultado se obtiene al aplicar el siguiente lema:

Lema 1.1

$$\lim_{n\to\infty} \left\{1 + \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^n = e^{\lambda}.$$