PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2018

Pauta I1 - MAT1610

1. Calcule los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x - \pi/4}$

   Solución:

   Si llamamos $u = x - \pi/4$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \pi/4} \frac{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x - \pi/4} &= \lim_{u \to 0} \frac{-\sqrt{2}\operatorname{sen}(u)}{u} \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) por hacer sustitución adecuada.
   - (1 punto) por desarrollo correcto que conduzca a límites trigonométricos conocidos.
   - (1 punto) por determinar el valor del límite.

   b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{[\,x\,]}{x}$, donde $[\,x\,]$ = parte entera de x.

   Solución:

   Observe que

$$x - 1 \leq [\,x\,] \leq x$$

   por lo tanto

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x-1}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{[\,x\,]}{x} \leq \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x}$$

   como $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x} = 1$ tenemos, por el Teorema del Sandwich, que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{[\,x\,]}{x} = 1$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) por acotar correctamente.
   - (1 punto) por el calculo correcto del límte de las cotas.
   - (1 punto) por concluir correctamente el valor del límite.

2. Determine si los siguientes límites existen:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{|2x-7| - |2x-5|}{x-3}$

Solución:

Observe que cerca de $x = 3$ la función $|2x-7| = 7-2x$ y que $|2x-5| = 2x-5$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \frac{|2x-7| - |2x-5|}{x-3} &= \lim_{x \to 3} \frac{7-2x-(2x-5)}{x-3} \\
&= \lim_{x \to 3} \frac{12-4x}{x-3} \\
&= -4
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por deshacerse del valor absoluto correctamente.
- (1 punto) por el calculo correcto del límte.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}\right)$

Solución:

Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}\right) &= \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x}} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{1+1/x} + \sqrt{1/x}} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Por lo tanto el límite no existe.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por desarrollo algebraico correcto.
- (1 punto) por determinar que el límite es infinito.
- (1 punto) por concluir que el límite no existe.

3. a) Determine todos los valores de a para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} |x+a| & \text{si} \quad x \geq a \\ \\ x^2+1 & \text{si} \quad x < a \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución:

Observe que $|x+a|$ es una función continua en (a, ∞) y que x^2+1 es continua en $(-\infty, a)$ por lo tanto, para que f sea continu en todo $\mathbb{R}$ se debe cumplir que

$$\lim_{x \to a} f(x) = 2|a|$$

Por otra parte observamos que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 2|a| \text{ y que } \lim_{x \to a^-} f(x) = a^2+1$$

por lo tanto

$$2|a| = a^2+1 \iff (|a|-1)^2 = 0 \iff a = 1 \text{ o } a = -1$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por el cálculo de los límites laterales.
- (1 punto) por determinar que la condición es $a^2+1 = 2|a|$ o algo equivalente.
- (1 punto) por determinar los valores de a

NOTA: si no justifica por qué hay que preocuparse solo de lo que pasa en $x = a$ descontar 0.5.

b) Sea g una función continua en $[-1, 2]$ tal que $g(-1) > 1$ y que $g(2) < 4$. Demuestre que existe $c \in (-1, 2)$ tal que $g(c) = c^2$.

Solución:

Si $h(x) = g(x) - x^2$, tenemos que h es continua en $[-1, 2]$, además $h(-1) = g(-1) - 1 > 0$ y $h(2) = g(2) - 4 < 0$, entonces por el Teorema del Valor Intermedio tenemos que existe $c \in (-1, 2)$ tal que $h(c) = 0$, es decir, tal que $g(c) = c^2$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por construir función auxiliar para el uso del TVI.
- (1 punto) por chequear todas las hipótesis del TVI.
- (1 punto) por concluir.

4. Sea f la función definida por $f(x) = xe^x$.

a) Determine, usando la defininción, la derivada de f.
Solución:

Por definición tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)e^{x+h} - xe^x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{xe^x(e^h - 1) + he^{x+h}}{h} \\ &= xe^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} e^{x+h} \\ &= xe^x + e^x \end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por evidenciar el conocimento de la definición de la derivada.
- (1 punto) por el desarrollo algebraico correcto
- (1 punto) por determinar f'.

b) Determine todos los puntos del gráfico de f cuya recta tangente es horizontal.
Solución:

Observe que necesitamos determinar todos los valores de x para los que $f'(x) = 0$, del inciso anterior tenemos que $f'(x) = 0$ si y solo si $x = -1$. Por lo tanto el único punto del gráfico cuya tangente es horizontal es el punto (-1,-1/e).
Distribución de puntajes:

- (1 punto) por saber que la condición pedida equivale a $f'(x) = 0$.
- (1 punto) por detrminar que el único valor para el que se cumple condición es $x = 1$.
- (1 punto) por determinar el punto del gráfico.