PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Solución Ayudantía 10

1. Para los siguientes casos encuentre como distribuye Y

   (a) $X \sim Beta(a, 1); \quad Y = -ln(X)$
   (b) $X \sim Gamma(\alpha, \beta); \quad Y = 1/X$
   (c) $X \sim Cauchy(0, 1); \quad Y = |X|$

   (a) Recordemos que si $X \sim Beta(\alpha, \beta)$ entonces

   $$f_X(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, \quad 0 < x < 1$$

   con $\alpha = a$ y $\beta = 1$ tenemos

   $$f_X(x) = ax^{a-1}, \quad 0 < x < 1$$

   Para este caso procederemos de forma intuitiva.

   $$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(-ln(X) \leq y) \\ &= P(ln(X) > -y) \\ &= P(X > e^{-y}) \\ F_Y(y) &= 1 - P(X \leq e^{-y}) \\ F_Y(y) &= 1 - F_X(e^{-y}) \quad \Big/ \frac{d}{dy} \\ f_Y(y) &= e^{-y} f_X(e^{-y}) \\ &= e^{-y} a (e^{-y})^{a-1} \\ &= ae^{-ay} \end{aligned}$$

   Ahora falta lo mas importante, el recorrido de Y. Para esto note que $x \in (0, 1)$, entonces hay que evaluar los extremos en la transformación.

$$Y = -ln(0) = \infty$$
$$Y = -ln(1) = 0$$

Luego, $y \in (0, \infty)$. Finalmente, la densidad de Y corresponde a

$$f_Y(y) = ae^{-ay}, \quad y > 0$$

Esta ultima es una exponencial de parámetro a. Luego,

$$Y = -ln(X) \sim Exp(a)$$

(b) Recordemos que si $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ entonces

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0$$

Para este caso podemos aplicar la formula vista en clases. Buscamos lo necesario

$$\begin{aligned} y &= 1/x \\ x &= 1/y \\ g^{-1}(y) &= 1/y \\ \frac{d}{dy} g^{-1}(y) &= -\frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

Reemplazamos todo en la formula

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| f_X(g^{-1}(y)) \\ &= \left| -\frac{1}{y^2} \right| f_X(1/y) \\ &= \frac{1}{y^2} \frac{\beta^\alpha (1/y)^{\alpha-1} e^{-(1/y)\beta}}{\Gamma(\alpha)} \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{y^{\alpha+1}} e^{-\beta/y} \end{aligned}$$

Ahora el recorrido, tenemos $x \in (0, \infty)$. Entonces

$$Y = \frac{1}{0^+} = \infty$$
$$Y = \frac{1}{\infty} = 0$$

Luego, $y \in (0, \infty)$. Finalmente la densidad de Y corresponde a

$$f_Y(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{y^{\alpha+1}} e^{-\beta/y}, \quad y > 0$$

A esta distribución se le denomina Gamma-Inversa.

(c) Recordemos que si $X \sim Cauchy(0,1)$ entonces

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Para esto procederemos de forma intuitiva.

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(|X| \leq y) \\
&= P(-y \leq X \leq y) \\
&= P(X \leq y) - P(X \leq -y) \\
F_Y(y) &= F_X(y) - F_X(-y) \quad \Big/ \frac{d}{dy} \\
f_Y(y) &= f_X(y) + f_X(-y) \\
&= \frac{1}{\pi(1+y^2)} + \frac{1}{\pi(1+(-y)^2)} \\
&= \frac{2}{\pi(1+x^2)}
\end{aligned}$$

Ahora el recorrido, para esto hay varias formas de proceder, pero vamos por la fácil, la función $y = |x|$ transforma cualquier valor x en positivo, por lo que transforma va de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, y en nuestro caso el recorrido de X es $\mathbb{R}$, por lo que el recorrido de Y es $y > 0$. Entonces la densidad de Y es

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi(1+x^2)}, \quad y > 0$$

Nota: Se pudo haber encontrado el recorrido de Y del mismo modo que en los ejercicios anteriores.

2. Sea $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Encuentre expresiones para

   (a) $P(X \leq a), \quad a \in \mathbb{R}$

   (b) El cuantil p

   (c) $P(a \leq X < b)$

   (a) Como X es normal, vamos a estandarizar.

$$\begin{aligned}
P(X \leq a) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{a-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)
\end{aligned}$$

(b) Nos interesa encontrar x_p tal que

$$P(X \leq x_p) = p$$

entonces

$$\begin{aligned}
P(X \leq x_p) &= p \\
P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{x_p-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) &= p \\
P\left(Z \leq \frac{x_p-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) &= p \\
\Phi\left(\frac{x_p-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) &= p \\
\frac{x_p-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} &= \Phi^{-1}(p) \\
x_p &= \sigma\Phi^{-1}(p) + \mu
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
P(a \leq X < b) &= P(X < b) - P(X \leq a) \\
&= P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{a-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{\sigma^2}} \leq \frac{b-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) \\
&= P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) - P\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)
\end{aligned}$$

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con fdp conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} k\alpha e^{-\alpha y(x+1)}, & 0 < x < 1, y > 0 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

(a) Encuentre el valor de k

(b) Calcule $P(X > 1/2 | Y > 0)$

(a) Debemos corroborar que integre 1. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^\infty k\alpha e^{-\alpha y(x+1)} dydx &= 1 \\
k\int_0^1 \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha(x+1)y} dydx &= 1 \\
k\int_0^1 \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)} \cdot a(x+1) e^{-\alpha(x+1)y} dydx &= 1 \\
k\int_0^1 \frac{1}{1+x} \cdot 1 dx &= 1 \\
kln(2) &= 1 \\
k &= \frac{1}{ln(2)}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
P(X > 1/2|Y > 0) &= \frac{P(X > 1/2 \cap Y > 0)}{P(Y > 0)} \\
&= \frac{\displaystyle\int_{1/2}^{1}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{ln(2)} \alpha e^{-\alpha y(x+1)} dydx}{\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{ln(2)} \alpha e^{-\alpha y(x+1)} dydx} \\
&= \frac{\displaystyle\frac{1}{ln(2)}\int_{1/2}^{1} \frac{1}{1+x} dx}{1} \\
&= \frac{ln(4/3)}{ln(2)}
\end{aligned}$$

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio con fdp conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}, & 0 < x < y \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

(a) Muestre que $\kappa e^X \sim Pareto(\lambda, \kappa)$

(b) Calcule $P(Y \geq X/2|Y \geq 1)$

(a) Para esto debemos encontrar $f_X(x)$, es decir, la marginal de X. Primero dibujemos el recorrido conjunto de X, Y.

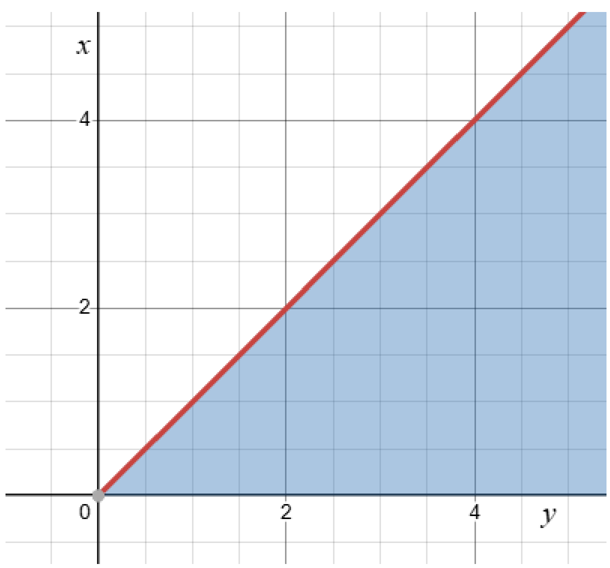


Figure 1: Recorrido conjunto 1

pues se tiene que $0 < x < y$, y en consecuencia, $y > 0$. Para encontrar la marginal de X, nos interesa que x vaya en un intervalo numerico, no entre funciones, por lo que debemos dar vuelta el recorrido.

Para esto calculamos las inversas de las funciones involucradas, que en este caso solo es $x = y$, quedándonos

$$y = x$$

Graficamos todo de nuevo pero con los ejes invertidos.

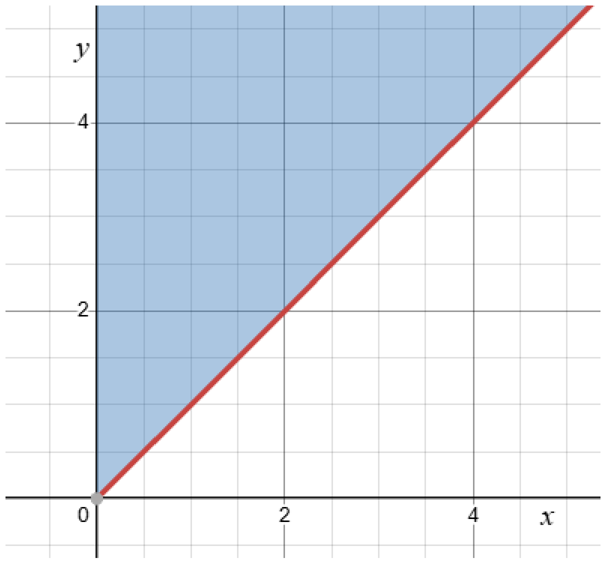


Figure 2: Recorrido conjunto 2

De modo que ahora se tiene $x > 0$ y $x < y < \infty$. Entonces

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y} dy \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Luego,

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

En particular $X \sim Exp(\lambda)$. Ahora, para encontrar la transformación $Y = \kappa e^X$ podemos usando la formula

$$\begin{aligned} y &= \kappa e^x \\ y/\kappa &= e^x \\ ln(y/\kappa) &= x \\ g^{-1}(y) &= ln(y/\kappa) \\ \frac{d}{dy} g^{-1}(y) &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Reemplazamos todo

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| f_X(g^{-1}(y)) \\ &= \left| \frac{1}{y} \right| f_X(ln(y/\kappa)) \\ &= \frac{1}{y} \lambda e^{-\lambda ln(y/\kappa)} \\ &= \frac{1}{y} \frac{\lambda \kappa^{\lambda}}{y^{\lambda}} \\ &= \frac{\lambda \kappa^{\lambda}}{y^{\lambda+1}} \end{aligned}$$

Ahora al recorrido. Tenemos que $x \in (0, \infty)$, entonces

$$\begin{aligned} Y &= \kappa e^{0} = \kappa \\ Y &= \kappa e^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

Se tiene $y > \kappa$. Luego, la densidad de Y es

$$f_Y(y) = \frac{\lambda \kappa^{\lambda}}{y^{\lambda+1}}, \quad y > \kappa$$

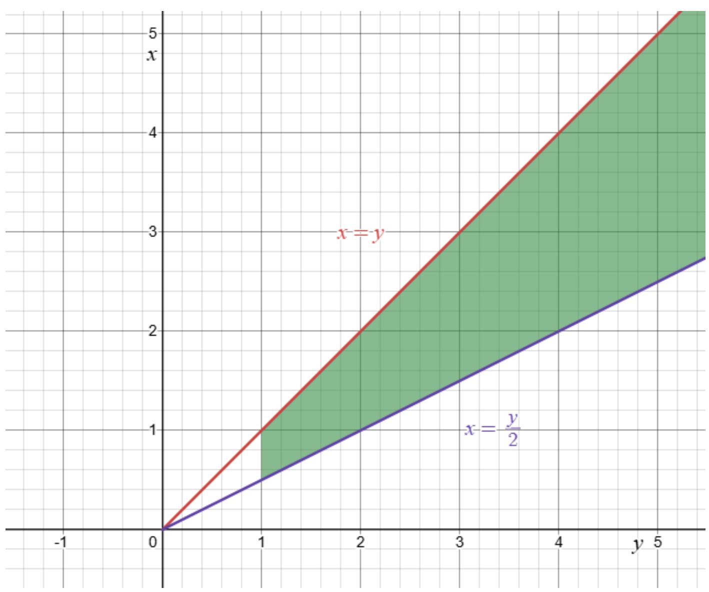
A esta distribución se le conoce como Pareto.

$$Y = \kappa e^{X} \sim Pareto(\lambda, \kappa)$$

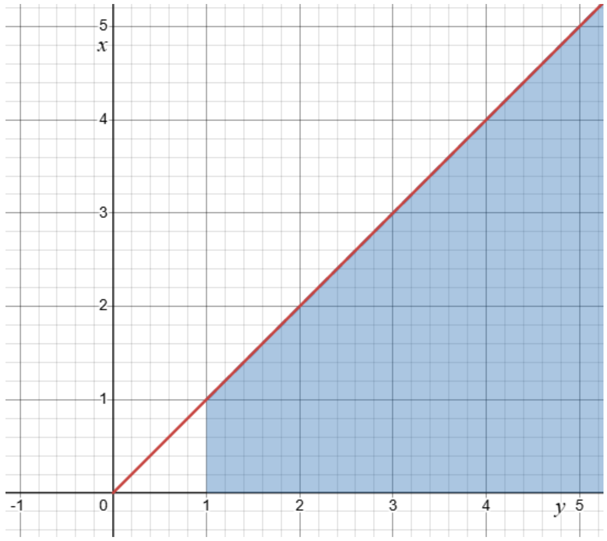
(b)

$$P(Y \geq X/2 | X \geq 1) = \frac{P(Y \geq X/2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)}$$

hay que identificar el numerador y denominador. Considerando el recorrido original de y. El numerador corresponde a



El denominador corresponde a



Entonces

$$\begin{aligned} P(Y \geq X/2 | X \geq 1) &= \frac{P(Y \geq X/2 \cap X \geq 1)}{P(X \geq 1)} \\ &= \frac{\displaystyle\int_1^\infty \int_{y/2}^y \lambda^2 e^{-\lambda y} dx dy}{\displaystyle\int_1^\infty \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda y} dx dy} \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

5. Una caja contiene tres bolas rojas, cuatro azules y dos negras. Se extraen tres bolas al azar sin reemplazo. Sea

$$\begin{aligned} X &= \text{Numero de bolas azules en la muestra} \\ Y &= \text{Numero de bolas rojas en la muestra} \end{aligned}$$

Encuentre la conjunta de X, Y.
Veamos los datos que tenemos

- 9 bolas
  - 3 rojas
  - 4 azules
  - 2 negras
- Se extraen 3

Nos interesa que X bolas sean azules, y Y bolas sean rojas. Entonces hay

$$\binom{4}{x}$$

formas en que se extraen bolas azules, y

$$\binom{3}{y}$$

formas en que se extraen bolas rojas. Y para el resto de bolitas, se tienen

$$\binom{2}{3-x-y}$$

por lo que

$$\text{casos favorables} = \binom{4}{x}\binom{3}{y}\binom{2}{3-x-y}$$

y hay un total de

$$\binom{9}{3}$$

casos totales, luego la conjunta esta dada por

$$P(X=x, Y=y) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{y}\binom{2}{3-x-y}}{\binom{9}{3}}, \quad x, y = 0, 1, 2, 3$$

En base a esto, se puede armar la siguiente tabla

X/Y	0	1	2	3
0	0	$\frac{3}{84}$	$\frac{6}{84}$	$\frac{1}{84}$
1	$\frac{4}{84}$	$\frac{24}{84}$	$\frac{12}{84}$	0
2	$\frac{12}{84}$	$\frac{18}{84}$	0	0
3	$\frac{4}{84}$	0	0	0