EYP 1027 Modelos Probabilísticos

Clase 3

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2020

Contenido I

1. Modelo de Probabilidad: Definición y Propiedades
   - Medida de probabilidad
   - Ejemplos
   - Propiedades básicas de P
   - Ejemplos
   - Modelo de probabilidad discreto
   - Modelo de probabilidad equiprobable
   - Técnicas de conteo
   - Aplicación al muestreo aleatorio

Modelo de Probabilidad

Medida de probabilidad

Definición 1.1

Medida de Probabilidad: Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$, una **medida de probabilidad** es una función real valorada P definida sobre $\mathcal{A}$ que verifica los siguientes axiomas:

A1) $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$,

A2) $P(\Omega) = 1$,

A3) $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$ para toda secuencia contable $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ de eventos dos a dos disjuntos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall\, i \neq j$.

Nota: $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ es tal que a cada $A \in \mathcal{A}$ le asigna un número $P(A) \in [0, 1]$ llamado probabilidad de ocurra el evento A

Nota: La terna $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se llama **modelo de probabilidad** o **espacio de probabilidad.**

Ejemplo 1.1

Sea $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$. Entonces, la función $P(A)$, $A \in \mathcal{A}$, definida por

$$P(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } 3 \in A \\ 0 & \text{si } 3 \notin A \end{cases}$$

es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ (Tarea: verifique esta afirmación!)

Modelo de Probabilidad

Ejemplo 1.2

Sean $\Omega = \{0, 1, \cdots\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ y P una función definida sobre $\{i\}$ como

$$P(\{i\}) = (1-q)q^i, \quad i = 0, 1, \cdots, \quad 0 < q < 1.$$

Ya que los axiomas A1), A2) y A3) de la Definición 1.1 son satisfechos, P es una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. Además, notando que cada evento $A \in \mathcal{A}$, puede representarse como $A = \bigcup_{i:i\in A}\{i\}$, entonces la probabilidad de $A \in \mathcal{A}$ se calcula como

$$P(A) = P(\bigcup_{i:i\in A}\{i\}) = \sum_{i:i\in A} P(\{i\}) = (1-q)\sum_{i:i\in A} q^i.$$

Ejemplo 1.3

Sea $(\Omega, \mathcal{A})$, donde $\Omega = \{1, 2, ..., ...\}$ y $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Considere la función definida por

$$P(\{i\}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Entonces, P no define una medida de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. Ya dado que $\{1\}, \{2\}, \ldots$ es una partición de Ω, entonces $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{i\}$, de modo que

$$P(\Omega) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{i\}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\{i\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{2}{3}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{1-1/2} = \frac{4}{3} > 1,$$

lo cual contradice el axioma A3) de una medidad de probabilidad.

Modelo de Probabilidad

Ejemplo 1.4

Sea $\Omega = (0, \infty)$ y $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Defina la medida de probabilidad P como:

$$P(B) = \int_B e^{-x} dx, \quad B \in \mathcal{B}.$$

Entonces:

A1) Claramente $P(B) \geq 0$, $\forall B \in \mathcal{B}$,

A2) $P(\Omega) = \int_\Omega e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$,

A3) Sea $B_1, B_2, \cdots$ es una sucesión de intervalos disjuntos en $\mathcal{B}$; luego

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \int_{\bigcup_{i=1} B_i} e^{-x} dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{B_i} e^{-x} dx = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i).$$

Teorema 1.1

Sea $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ un modelo de probabilidad. Entonces:

P1) $P(\emptyset) = 0$,

P2) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ para toda secuencia finita $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ de eventos dos a dos disjuntos, es decir, $A_i \cup A_j = \emptyset\ \forall\, i \neq j$.

Nota: $P(A) = 0 \ \not\Rightarrow\ A = \emptyset$.

Demostración 1.1

P1) Como $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$, entonces $P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots$, por el axioma A3). Además, por el axioma A1), $P(\emptyset) \geq 0$. Suponga que $P(\emptyset) > 0$. Entonces,

$$P(\emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset) + \cdots > P(\emptyset) + P(\emptyset),$$

lo cual es una contradicción. Luego, se concluye que $P(\emptyset) = 0$.

P2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots$. Por lo tanto, la prueba se concluye aplicando el axioma A3) y la propiedad P1)

Modelo de Probabilidad

Teorema 1.2

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un modelo de probabilidad. Entonces:

P3) Para cualquier $A \in \mathcal{A}$, $P(A^c) = 1 - P(A)$

P4) Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$ $\quad$ (P no es decreciente)

P5) Para cualquier $A, B \in \mathcal{A}$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Notas: Del axioma A1) y la propiedad P4), se desprende que:

a) Si $A \subset B$, entonces

$$P(B \backslash A) = P(A^c \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A)$$

b) Para todo $A \in \mathcal{A}$, $\quad 0 \leq P(A) \leq 1$

Modelo de Probabilidad

Demostración 1.2

P3) $P(A) + P(A^c) = P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1.$

P4) $B = A \cup (B \backslash A)$, entonces, por P2) y A1),

$$P(B) = P(A) + P(B \backslash A) \geq P(A)$$

P5) Ejercicio para el lector. *Idea:* Use que $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$ y $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$.

Notación usual:

$A \cap B = AB$

$B \backslash A = A^c \cap B = A^c B = B - A$ (diferencia)

Si $AB = \emptyset$, entonces $A \cup B = A + B$ (unión disjunta).

Modelo de Probabilidad

El siguiente lema será útil en algunas demostraciones.

Lema 1.1

Sea $A_1, A_2, \ldots$ una secuencia contable de eventos en $\mathcal{A}$. Defina los eventos,

$$B_1 = A_1 \ \text{ y } \ B_i = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i \ \text{ para} = 2, 3, \ldots$$

Entonces,

i) $B_i \cap B_j \; \forall \, i \neq j$ (los B_i's son disjuntos por pares),

ii) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Tarea: Demuestre el Lema 1.1. *Idea:* Recuerde que

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

Teorema 1.3

Sea P es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{A})$. Entonces:

P6a) Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia creciente de eventos en $\mathcal{A}$, es decir, $A_n \in \mathcal{A}$ y $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$; entonces $P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$ donde $\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (es decir, P **es continua por arriba**);

P6b) Si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia decreciente de eventos en $\mathcal{A}$, es decir, $A_n \in \mathcal{A}$ y $A_n \supseteq A_{n+1}$ para todo $n = 1, 2, \ldots$; entonces $P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$ donde $\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (es decir, P **es continua por abajo**).

Nota: Las propiedades P6a) y P6b) establecen la continuidad de P

Demostración 1.3

P6a) Como $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ $(A_n \uparrow)$, sabemos que $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Además, del Lema 1.1, con $B_1 = A_1$ y $B_i = A_{i-1}^c \cap A_i$ para $i = 2, 3, \ldots$, se tiene que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Luego,

$$
\begin{aligned}
P(\lim_{n\to\infty} A_n) &= P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \overset{A3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = P(A_1) + \sum_{i=2}^{\infty} P(A_{i-1}^c \cap A_i) \\
&= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} P(A_i - A_{i-1}) \quad (A_{i-1}^c \cap A_i = A_i - A_{i-1}) \\
&= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \{P(A_i) - P(A_{i-1})\} \quad (A_{i-1} \subseteq A_i) \\
&= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \{\sum_{i=2}^{n} P(A_i) - \sum_{i=2}^{n} P(A_{i-1})\} \\
&= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \{P(A_n) - P(A_1)\} = \lim_{n\to\infty} P(A_n).
\end{aligned}
$$

P6b) Ejercicio para el lector. ***Idea:*** Si $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, entonces $A_1^c \subseteq A_2^c \subseteq \cdots$. Luego, use P6a) y P3) para concluir que P también es continua por abajo.

Teorema 1.4

Si P es una medida de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{A})$, entonces:

P7) $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap B_i)$ para cualquier partición $B_1, B_2, \ldots$ de Ω;

P8) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ para cualquier secuencia de eventos $A_1, A_2, \ldots$ (Desigualdad de Boole)

Demostración 1.4

P7) Como $B_i \cap B_j = \emptyset \; \forall \, i \neq j$, y $\Omega = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$, basta notar que,

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap B_i) \,.$$

P8) Ejercicio para el lector. *Idea:* Use el Lema 1.1 y luego P3).

Ejemplo 1.5

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, con $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ y $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ tal que $P(A) = p$ algún $p \in (0,1)$. Entonces,

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1, \quad P(A) = p, \quad P(A^c) = 1 - p,$$

donde $0 < p < 1$; si la moneda es justa, entonces $p = \frac{1}{2}$. Por ejemplo, si $\Omega = \{c, s\}$ y $A = \{c\}$, entonces $p = P(\{c\})$ (con $p = \frac{1}{2}$ si la moneda justa)

Modelo de Probabilidad

Ejemplo 1.6

Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, donde $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \Omega\}$ y $P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$
es definida por:

$$P(A) = \sum_{i:i \in A} p_i \ \ \forall\, A \in \mathcal{A} \quad (p_i \geq 0 \ \forall\, i, \ \sum_{i=1}^{6} p_i = 1).$$

Si el dado es equilibrado, entonces $p_i = \frac{1}{6} \ \forall\, i$, y se tiene que

$$P(A) = \frac{N(A)}{6} \quad \forall\, A \in \mathcal{P}(\Omega),$$

donde $N(A)$ es el número de elementos en A. Por ejemplo, si al lanzar el dado apostamos al evento $A = \{$ sale un número par$\} = \{2, 4, 6\}$, entonces $N(A) = 3$ y por lo tanto $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Teorema 1.5

Sea $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_M\}$ un espacio muestral finito. Sea $\mathcal{A}$ cualquier $\sigma-$álgebra sobre Ω. Sean $p_1, \ldots, p_M$ números no negativos que suman 1, y defina:

$$P(A) = \sum_{\{i:\omega_i \in A\}} p_i, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Entonces, P es una medida de probabilidad sobre $\mathcal{A}$. Esto sigue siendo cierto si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ es un conjunto infinito contable y $p_1, p_2, \ldots$ son números no negativos tales que $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. En estos casos, $(\Omega,\ \mathcal{A}\ P)$ se llama **modelo de probabilidad discreto**.

Demostración 1.5

Ejercicio para el lector.

Note que $A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$; luego $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$, donde $p(\omega) = P(\{\omega\})$; es decir, P esta completamente determinada por $p(\omega)\ \forall\, \omega \in \Omega$.

Modelo de Probabilidad

Ejemplo 1.7

Sea $(\Omega, \mathcal{A}\ P)$ un modelo de probabilidad, con $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$ y $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$ tal que

$$P(\{1\}) = \frac{1}{4}, \quad P(\{2, 3\}) = \frac{1}{2}, \quad P(\{4\}) = \frac{1}{4}.$$

Entonces, $P(\{1, 2, 3\}) = \dfrac{3}{4}$, $P(\{2, 3, 4\}) = \dfrac{3}{4}$ y $P(\{1, 4\}) = \dfrac{1}{2}$.

Ejemplo 1.8

Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espacio de probabilidad discreto con $\Omega = \{a, b, c\}$ y P dado por el vector de probabilidad $p = \left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7}\right)$. Entonces,

$$P(\{a, b\}) = \frac{5}{7}, \quad P(\{b, c\}) = \frac{6}{7}, \quad P(\{a, c\}) = \frac{3}{7}$$

Modelo de Probabilidad

Ejercicio 1.1

Sea $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ un espacio de probabilidad. Si A y B son eventos tales que

$$P(A) = p, \quad P(B) = q \quad \text{y} \quad P(A \cup B) = r,$$

donde $0 < p, q, r < 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= p + q - r, \\ P(A \backslash B) &= r - q, \\ P\left(A^c \cap B^c\right) &= 1 - r, \\ P\left(A \cup B^c\right) &= p - r + 1. \end{aligned}$$

Consideremos experimentos aleatorios con un número finito de resultados posibles y donde cada uno de ellos tiene la misma probabilidad de ocurrir.

El lanzamiento de una **moneda justa** o un **dado equilibrado** un **número finito de veces** son ejemplos clásicos de experimentos de este tipo.

Definición 1.2

Modelo de Probabilidad Equiprobable: Un modelo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con Ω finito, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ y $P(\{\omega\}) = \frac{1}{N(\Omega)}$ para todo $\omega \in \Omega$, donde $N(\Omega)$ es número (resultados posibles) de elementos en Ω, se llama **modelo de probabilidad equiprobable (o de Laplace)**.

En tal caso, la medida de probabilidad P se llama distribución uniforme o clásica sobre Ω.

Modelo de Probabilidad

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un modelo de probabilidad equiprobable, y sea $N(A)$ el número de elementos en el evento $A \subseteq \Omega$. Entonces,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

En otras palabras,

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables a } A}{\text{número de casos posibles}} \quad (*).$$

Nota: $(*)$ no es una definición de probabilidad; sólo es una consecuencia de suponer que Ω es finito y equiprobable. Se desprende de $(*)$ que, en un espacio de probabilidad de Laplace, el cálculo de probabilidad se reduce a contar los elementos en conjuntos finitos, es decir, a un problemas de combinatoria o de técnicas de conteo.

Teorema 1.6

Principio Multiplicativo: Suponga un experimento aleatorio compuesto por dos etapas, E_1 y E_2. Si E_1 tiene N_1 resultados posibles, con $\Omega_1 = \{x_1, \ldots, x_{N_1}\}$, e, independientemente de cuál de estos resultados ocurra, E_2 tiene N_2 resultados posibles, con $\Omega_2 = \{y_1, \ldots, y_{N_2}\}$. Entonces, el espacio muestral Ω asociado al experimento compuesto tiene $N(\Omega) = N_1 \times N_2$ posibles resultados.

Demostración 1.6

Basta notar que $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 := \{(x, y) : x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\}$ (producto cartesiano), cuyos elementos son los siguientes pares ordenados:

$$
\begin{array}{cccc}
(x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \cdots & (x_1, y_{N_2}) \\
(x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \cdots & (x_2, y_{N_2}) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(x_{N_1}, y_1) & (x_{N_1}, y_2) & \cdots & (x_{N_1}, y_{N_2})
\end{array}
$$

.

Teorema 1.7

Extensión del Principio Multiplicativo: Considere un experimento aleatorio compuesto por n etapas, $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_n$. Suponga, además, que la etapa E_i tiene N_i posibles resultados, $i = 1, 2, ..., n$; y que cada uno de los posibles resultados de E_1 puede ser seguido por cualquiera de los posibles resultados de E_2 y asi sucesivamente, hasta E_n. Luego, el espacio muestral Ω asociado a este experimento compuesto, tiene $N(\Omega) = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_n$ posibles resultados.

Demostración 1.7

Ejercicio para el lector.

Modelo de Probabilidad

Ejemplo 1.9

1. Para n lanzamientos de una moneda, se tiene que

$$\Omega = \{c, s\}^n \quad \text{y} \quad N(\Omega) = 2^n$$

2. Para n lanzamientos de un dado, se tiene que

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n \quad \text{y} \quad N(\Omega) = 6^n$$

3. Lanzar primero una moneda, y luego un dado; entonces

$$\Omega = \{c, s\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{y} \quad N(\Omega) = 2 \times 6 = 12$$

Muestreo aleatorio: Selección al **azar** de una **muestra** de sujetos de una determinada **población**. La selección al azar garantiza que cada sujeto de la población tenga la misma oportunidad (probabilidad) de quedar (o no) en la muestra, lo que a su vez permite que todas las muestras posibles de un mismo tamaño tengan la misma probabilidad de ocurrir. Es decir, el modelo de probabilidad asociado es **equiprobable**.

Experimento: Extraer una **muestra aletoria** de n elementos de una población de N elementos, digamos $\{1, 2, \ldots, N\}$. El espacio muestral Ω es el conjunto (finito) de todas las muestras posibles con n sujetos extraídos de $\{1, 2, \ldots, N\}$. Cada $\omega \in \Omega$ es un n-tuple de la forma $\omega = (s_1, \ldots, s_n)$, con $s_i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

Modelo de Probabilidad

Si $N(\Omega)$ es el número de elementos en Ω, entonces $N(\Omega)$ es número de posibles muestras de tamaño n extraídas de una población de N sujetos. Si el muestro es aleatorio, entonces la medida de probabilidad definida sobre $\mathcal{P}(\Omega)$ queda determinada por

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{N(\Omega)}\,\forall\,\omega \in \Omega \implies P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}\,\forall\,A \in \mathcal{P}(\Omega).$$

Luego, necesitamos determinar $N(A)$ y $N(\Omega)$. A su vez, esta cantidades dependen de la forma de seleccionar los sujetos de la muestra. Hay cuatro posibilidades:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \nearrow & \text{sin devolución} \\
 & \nearrow & \text{ordenado} & & \\
 & & & \searrow & \text{con devolución} \\
\text{muestreo} & & & & \\
 & & & \nearrow & \text{sin devolución} \\
 & \searrow & \text{no ordenado} & & \\
 & & & \searrow & \text{con devolución}
\end{array}$$

Teorema 1.8

Suponga que se extrae una muestra de n sujetos de un total de N. Entonces,

a1) El número total de muestras ordenadas sin devolución es:

$$(N)_n := \frac{N!}{(N-n)!} = N(N-1)\cdots(N-n+1) \quad \text{(variaciones s/r)}$$

a2) El número total de muestras ordenadas con devolución es:

$$N^n \quad \text{(variaciones c/r)}$$

b1) El número total de muestras no-ordenadas sin devolución es:

$$\binom{N}{n} := \frac{N!}{n!(N-n)!} \quad \text{(combinaciones s/r)}$$

b2) El número total de muestras no-ordenadas con devolución es:

$$\binom{N+n-1}{n} = \frac{(N+n-1)!}{n!(N-1)!} \quad \text{(combinaciones c/r)}$$

Modelo de Probabilidad

Esquema: Número total de posibles muestras (aleatorias) de tamaño n que se pueden extraer de una población con N elementos diferentes.

			número de muestras
muestras	ordenadas	sin devolución	$(N)_n$
		con devolución	N^n
	no ordenadas	sin devolución	$\binom{N}{n}$
		con devolución	$\binom{N+n-1}{n}$

Modelo de Probabilidad

Demostración 1.8

a1) Etapa1: Hay N formas de elegir el primer sujeto de la muestra; Etapa2: Hay $N-1$ formas de elegir el segundo sujeto de la muestra; y asi sucesivamente, en la Etapa$n$: sólo quedan $N-(n-1)$ opciones para elegir el n-ésimo sujeto de la muestra. Por el principio multiplicativo, hay $N(N-1)\cdots(N-n+1)$ de seleccionar n sujetos en forma ordenada y sin devolución.

a2) Ejercicio para el lector.

b1) Sea $M=$ Número de muestras no-ordenadas sin devolución. Sabemos que: (Número de muestras ordenadas sin devolución)$=M\times$(Número de formas de permutar los n elementos de una muestra), es decir, $(N)_n = M\times n! \implies M=\frac{(N)_n}{n!}$.

b2) Ejercicio para el lector.

Analogogía: Extraer n sujetos de una población de N elementos equivale a distribuir n bolitas en N urnas numeradas del 1 al N:

i) Extraer una muestra **(no-) ordenada** de n sujetos equivale distribuir n bolitas **(no-) diferenciables**

ii) Extraer una muestra **con (sin) devolución** de n sujetos equivale distribuir n bolitas **sin (con) exclusión** de urnas.

Nota: El número de **permutaciones** (ordenamientos) de un conjunto de n elementos distintos es $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$ (factorial de n). Además, por convencción $0! = 1$.

Ejemplo 1.10

Suponga que escogemos dos objetos al azar entre cuatro $\{a, b, c, d\}$. Entonces,

a1) Hay $(4)_2 = 12$ posibles muestras ordenadas sin devolución:
$$\Omega = \{(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d),\\ (c,a),(c,b),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c)\}.$$

a2) Hay $4^2 = 16$ posibles muestras ordenadas con devolución:
$$\Omega = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),\\ (c,a),(c,b),(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)\}.$$

b1) Hay $\binom{4}{2} = 6$ posibles mustras no-ordendas sin devolución:
$$\Omega = \{(a,b),(a,c),(b,c),(b,d),(c,d),(a,d)\}$$

b2) Hay $\binom{5}{2} = 10$ posibles muestras no-ordenadas con devolución:
$$\Omega = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,c),(c,d),(d,d)\}.$$

Modelo de Probabilidad

Ejemplo 1.11

Un urna contiene 5 bolitas numeradas del 1 al 5. Se sacan sucesivamente al azar las 5 bolitas, sin reposición. Se desea calcular la probabilidad de que al juntar los números de cada bolita según el orden de extracción resulte el número 21345. Sea A: Aparece el número 21345. Ya el modelo $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ es equiprobable, con $N(A) = 1$ y $N(\Omega) = 5! = 120$, entonces $P(A) = N(A)/N(\Omega) = 1/120$.

Ejemplo 1.12

En cierta lotería, se eligen seis números del 1 al 49. La probabilidad de que los números elegidos sean 1,2,3,4,5 y 6 es igual a,

$$1/\binom{49}{6} = 7.1511 \times 10^{-8}$$

Tarea: Calcule la probabilidad de elegir los números 4,23,24,35,40 y 45.

Ejemplo 1.13

Suponga que los 365 días del año tienen la misma probabilidad de ser el día de cumpleaños de una persona (ignorando los años bisiestos y que las tasas de natalidad no son uniformes a través de cada año). Como hay 365 fechas de cumpleaños posibles para cada una de n personas, el espacio muestral Ω tiene $N(\Omega) = 365^n$ resultados posibles, todos los cuales serán igualmente probables. La probabilidad p de que, en un grupo de n personas, ninguno de ellos tenga el mismo cumpleaños es,

$$\begin{aligned} p &= (365)_n/365^n \\ &= 365 \times 364 \times \cdots \times (365 - n + 1)/365^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{365}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad q de que al menos dos personas tengan el mismo cumpleaños es, $q = 1 - p = 1 - (365)_n/365^n$. Valores numéricos de esta probabilidad q para varios valores de n se dan en la siguiente tabla.

n	q	n	q
5	0.027	25	0.569
10	0.117	30	0.706
15	0.253	40	0.891
20	0.411	50	0.970
22	0.476	60	0.994
23	0.507		

Estas probabilidades pueden parecer sorprendentemente grandes para cualquiera que no haya pensado en ellas antes. Muchas personas adivinarían que para obtener un valor de q mayor que $1/2$, el número de personas en el grupo debería ser de aproximadamente 100. Sin embargo, de acuerdo con la Tabla anterior, tendría que haber solo 23 personas en el grupo. De hecho, para $n = 100$ el valor de q es 0.9999997.

Ejemplo 1.14

Modelo de urnas: Considere una urna (población) con N bolitas (sujetos), donde $R \leq N$ de ellas son de color rojo (tipo 1) y $N - R$ son de color blanco (tipo 2). Se extraen n bolitas aleatoriamente de la urna. Se desea calcular la probabilidad de que exactamente $k \leq n$ de las bolas extraídas sean de color rojo (tipo 1).

Para simplificar el argumento, se supondrá que las bolitas están numeradas del 1 al N de tal manera que todas las bolitas rojas están numeradas del 1 al R. Distinguimos entre dos casos importantes: extracción sin reemplazo y extracción con reemplazo.
Sea

$$A_k : \text{exactamente } k \leq n \text{ de las bolitas extraídas son rojas.}$$

Espacio de Probabilidad

Muestreo ordenado sin reemplazo: En este caso el espacio muestral es

$$\Omega = \{(s_1, s_2, \cdots, s_n) : s_i \in \{1, 2, \cdots, N\}, s_i \neq s_j, \forall\, i, j = 1, 2, \cdots, N\}$$

Aquí A_k consiste de todos los elementos de Ω que tienen exactamente k elementos menores o iguales a R (de tipo 1). Por lo tanto,

$$N(\Omega) = \binom{N}{n} \quad \text{y} \quad N(A_k) = \binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}$$

Así, se obtiene el **Modelo Hipergeométrico:**

$$P(A_k) = \frac{N(A_k)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Nota: En muestreo sin reemplazo, el resultado para $P(A_k)$ no depende de si la muestra es ordenada o no-ordenada.

Espacio de Probabilidad

Muestreo ordenado con reemplazo: En este caso, cada bolita extraída se devuelve a la urna, y después de mezclarlas, se saca una nueva bolita al azar. El espacio muestral viene dado por,

$$\Omega = \{(s_1, s_2, \cdots, s_n) : s_j \in \{1, 2, \cdots, N\}, j = 1, 2, \cdots, N\}$$

El evento A_k consiste de todas las $n-$tuplas de Ω con exactamente k componentes inferiores o iguales a R (de tipo 1). Entonces,

$$N(\Omega) = N^n \quad \text{y} \quad N(A_k) = \binom{n}{k} R^k (N-R)^{n-k}$$

y, en consecuencia, se obtiene el **Modelo Binomial:**

$$P(A_k) = \frac{N(A_k)}{N(\Omega)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{donde } p = \frac{R}{N} \quad \text{y} \quad q = 1 - p.$$

References

Blanco, L., Arunachalam, V. y Dharmaraja, S. (2012). *Introduction to Probability and Stochastic Processes.* John Wiley, New Jersey.

Casella, G. y Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference.* Second Edition. Duxbury, California.