Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer semestre 2014.

MAT 1610 ⋆ Cálculo 1
Pauta Interrogación 2

1. *a*) Sea $p \in \mathbb{R}$. Pruebe que la ecuación $x^3 - 3x + p = 0$ no posee dos raíces distintas en el intervalo $(0,1)$.

Solución:
En primer lugar notemos que si

$$f(x) = x^3 - 3x + p$$

entonces

$$f'(x) = 3(x^2 - 1)$$

ésta última es negativa en el intervalo $(0,1)$ por lo tanto la función f es decreciente en dicho intervalo.

Se concluye que en caso de tener raíces no pueden ser dos, ya que en este caso la derivada tendría al menos un cambio de signo.

b) Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$, tal que $f(0) = 2$, $f'(0) = -1$, $f(1) = f'(1) = 2$, determine $g'(0)$, para la función g definida por: $g(x) = f(e^x)\, e^{f(x)}$

Solución:
Usando la regla de la cadena, se tiene:

$$g'(x) = f'(e^x) \cdot e^x\, e^{f(x)} + f(e^x)\, e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$\Longrightarrow g'(0) = f'(e^0) \cdot e^0\, e^{f(0)} + f(e^0)\, e^{f(0)} \cdot f'(0)$$

$$\Longrightarrow g'(0) = f'(1) \cdot e^{2} + f(1)\, e^{2)} \cdot f'(0)$$

$$\Longrightarrow g'(0) = e^2 + e^2 \cdot 2 = 3\, e^2$$

2. *a*) Dada $y = f(x) = e^{3x}\cos(2x)$, determine $y''(x) - 6\,y'(x) + 13\,y(x)$.

Solución:
Se tiene:

$$y(x) = e^{3x}\cos(2x) \Longrightarrow y'(x) = 3\,e^{3x}\cos(2x) - 2\,e^{3x}\operatorname{sen}(2x)$$

$$\Longrightarrow y''(x) = 3\left(3\,e^{3x}\cos(2x) - 2\,e^{3x}\operatorname{sen}(2x)\right) - 2\left(3\,e^{3x}\operatorname{sen}(2x) + 2\,e^{3x}\cos(2x)\right)$$

$$\Longrightarrow y''(x) = 5\,e^{3x}\cos(2x) - 12\,e^{3x}\operatorname{sen}(2x)$$

De donde

$$y''(x) - 6\,y'(x) + 13\,y(x) = 5\,e^{3x}\cos(2x) - 12\,e^{3x}\operatorname{sen}(2x) - 18\,e^{3x}\cos(2x)$$

$$+12\,e^{3x}\operatorname{sen}(2x) + 13e^{3x}\cos(2x) = 0$$

Así: $y''(x) - 6\,y'(x) + 13\,y(x) = 0$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con f'' continua y $f(0) = 0$. Considere

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & , \text{ si } \quad x \neq 0 \\[2ex] f'(0) & , \text{ si } \quad x = 0 \end{cases}$$

Determine $g'(x)$ donde exista.

Solución:
Si $x \neq 0$ se tiene que $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

Para calcular la derivada en $x = 0$, utilizamos la definición de derivada, es decir:

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{f(h)}{h} - f'(0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - hf'(0)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{2x} = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x)}{2}$$

Lo anterior se obtiene de ocupar L'Hospital dos veces.

Finalmente el límite pedida es $\dfrac{f''(0)}{2}$ ya que la función $f''(x)$ es continua.

3. Considere la función $f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - 3\frac{\ln(x)}{x}$ definida en $(0, \infty)$.

a) Determine, en caso que existan, las asíntotas verticales y horizontales del gráfico de f.

b) Determine los intervalos de crecimiento, decrecimiento, así como la concavidad de f.

Solución:

a) La posible existencia de asintota vertical puede darse en $x = 0$, calculamos para ello el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + x - (2 + 3\ln(x))}{x} = \infty.$$

Es decir la recta $x = 1$ es una asintota vertical de la gráfica de f.

Para analizar la existencia de asintotas horizontales debemos calcular,

$$\lim_{x \to \infty} \left(x + 1 - \frac{2}{x} - 3\frac{\ln(x)}{x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(x + 1 - \frac{2 + 3\ln(x)}{x} \right)$$

límite que tiende a infnito ya que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 + 3\ln(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x} = 0.$$

Por lo tanto la función no posee asintotas horizontales.

b) Para determinar los intervalos de crecimiento, calculamos en primer lugar la derivada de nuestra función:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 + 3\ln(x)}{x^2}.$$

Notamos que $f'(x) = 0$ para $x = 1$ y es el único cero pues $f'(x) < 0$ en $(0, 1)$ y $f'(x) > 0$ para $x \in (1, \infty)$.

En particular $x = 1$ es un mínimo de la función.

Para analizar la concavidad de la función calculamos $f''(x)$ la cual resulta ser:

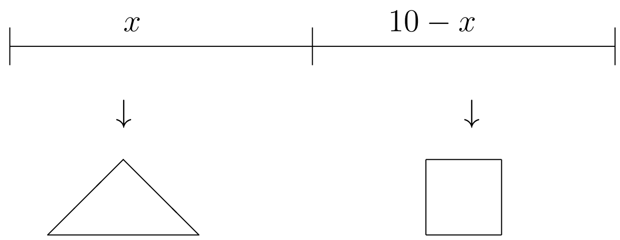
$$f''(x) = \frac{5 - 6\ln(x)}{x^3}.$$

de donde $f''(x) = 0$ para $x = e^{5/6}$ y por lo tanto la funcíón es convexa en el intervalo $(0, e^{5/6})$ y concava en el intervalo $(e^{5/6}, \infty)$.

4. Considere un trozo de alambre de 10 metros, el cual se corta en dos pedazos. Uno se dobla para formar un cuadrado y el otro se dobla para formar un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total encerrada sea máxima?.

Solución:

Se tiene:



El triángulo equilátero tiene lado $\dfrac{x}{3}$, luego su área es $A_{\Delta} = \dfrac{\left(\frac{x}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}\,x^2}{36}$

El cuadrado tiene lado $\left(\dfrac{10-x}{4}\right)$, luego su área es $A_{\square} = \left(\dfrac{10-x}{4}\right)^2$

Se desea maximizar el área total, que corresponde a la suma de las áreas, esto es:

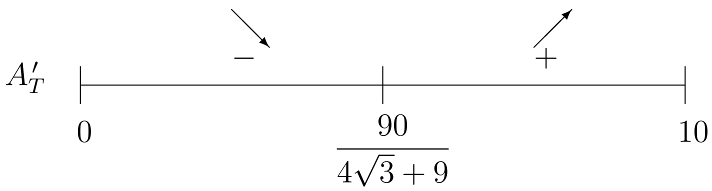
$$\text{Max:} \quad A_T(x) = \frac{\sqrt{3}\,x^2}{36} + \left(\frac{10-x}{4}\right)^2 \ , \quad 0 \leq x \leq 10$$

Ahora:

$$A_T'(x) = \frac{\sqrt{3}\,x}{18} + 2\left(\frac{10-x}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}\,x}{18} + \frac{x-10}{8}$$

$$\Longrightarrow A_T'(x) = \frac{4\sqrt{3}\,x + 9x - 90}{72} = \frac{\left(4\sqrt{3}+9\right)\,x - 90}{72} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{90}{4\sqrt{3}+9} \in (0,10)$$

Analizando los cambios de signo de A_T', se tiene:



Como en $x_0 = \dfrac{90}{4\sqrt{3}+9}$, A_T' cambia de $-$ a $+$, entonces el máximo debe alcanzarse en $x = 0$ o en $x = 10$, evaluando se tiene:

$$A_T(0) = \frac{100}{16} \qquad \text{y} \qquad A_T(10) = \frac{100\sqrt{3}}{36}$$

de donde el máximo se obtiene cuando $x = 10$, que significa que no se hace corte alguno y sólo se forma el triángulo equilátero.