Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2016

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 1

1. *a*) Determine si el siguiente límite existe, y de ser así, calcúlelo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\operatorname{sen}(x)}$$

Solución

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos(x)}}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos^2(x)}}{\operatorname{sen}(x)\sqrt{1+cos(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{\operatorname{sen}(x)\sqrt{1+\cos(x)}}$$

(**1.0 pts**)

Para ver la existencia de este límite, debemos calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{\operatorname{sen}(x)\sqrt{1+\cos(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(**1.0 pts**)

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{\operatorname{sen}(x)\sqrt{1+\cos(x)}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{\sqrt{1+\cos(x)}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Dado que son distintos, éste límite no existe. (**1.0 pts**)

b) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x+\operatorname{sen}(x)}$$

Solución

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x+\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{1+\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}} = 1 \qquad (\textbf{3.0 pts})$$

2. Dada la curva $g(x) = \dfrac{f(x^2)}{x}$, $x \neq 0$ donde $f(9) = 9, f'(9) = -2$, encuentre la ecuación de la tangente a la curva $y = g(x)$, en el punto donde $x = 3$.

Solución

$g(x) = \dfrac{f(x^2)}{x}$, $x \neq 0$ luego $g(3) = \dfrac{f(9)}{3} = 3$.

(**0.5 pts**)

Para encontrar la pendiente de la recta tangente debemos derivar la función y luego evaluarla en el punto $x = 3$.

$g'(x) = \dfrac{f'(x^2)2x^2 - f(x^2)}{x^2}$

(**4.0 pts**)

Luego $g'(3) = -5$.

(**0.5 pts**)

Ecuación de la tangente es

$$y = -5x + 18.$$

(**1.0 pts**)

3. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones derivables tales que:

   a) $f(a) = 0 = g(a)$
   b) $g'(a) \neq 0$
   c) $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq a$

   Demuestre que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

   Solución

$$\text{lím}_{x\to a} \tfrac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to a} \tfrac{f(x)-f(a))}{g(x)-g(a)} = \text{lím}_{x\to a} \frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

   (**2.0 pts**)

   Dado que f y g son derivables, entonces :
   (**1.0 pts**)

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{lím}_{x\to a} \dfrac{f(x)-g(x)}{x-a}}{\text{lím}_{x\to a} \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

   (**3.0 pts**)

4. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-p}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \\ x^2 + qx & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   a) Determine los valores de p y q en los reales de manera que f sea derivable en $x = 0$
   b) Para los valores de p y q encontrados en a), determine la función f' indicando su dominio.

   Justifique sus repuestas.
   Solución

   a) Para que sea derivable en cero, primero necesitamos que sea continua en cero, por lo tanto necesitamos que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

   Esto significa que

$$p = 0$$

(**1.0 pts**)

Además:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = 1$$

(**1.0 pts**)

sea igual que el límite por la derecha, es decir:

$$1 = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2+qh}{h} = q$$

(**1.0 pts**)

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \\ \\ 2x+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(**2.0 pts**)

y su dominio son todos los reales. (**1.0 pts**)

Deben llenar sus datos en los dos cuadernillos y contestar las preguntas 1 y 2 en el cuadernillo que así lo dice y las preguntas 3 y 4 en el correspondiente.
Duración: 2 horas.
Sin uso de calculadoras.
Recuerde escribir sólo con tinta indeleble y no usar corrector. Justifique todas sus respuestas.