Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Enero de 2017

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Solución Interrogación 2

1. *a*) Determine si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}$ existe y en tal caso encuéntrelo.

   b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $g(4) = 3$, $g'(4) = -3$. Encuentre la ecuación del plano tangente al gráfico de $g \circ f$ en el punto que $x = 2$ e $y = 0$ siendo $f(x, y) = x^2 e^y$.

Solución:

a) Utilizando coordenadas polares el límite queda:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\sin(r^2)} = \cos 2\theta$$

y entonces observamos que el límite depende del valor de θ. En conclusión, el límite no existe.

b) Sea $F(x, y) = (g \circ f)(x, y)$. De la regla de la cadena se obtiene que

$$F_x(x, y) = g'(f(x, y))f_x(x, y) = 2xe^y g'(f(x, y)),$$

$$F_y(x, y) = g'(f(x, y))f_y(x, y) = x^2e^y g'(f(x, y));$$

y por lo tanto $F_x(2, 0) = g'(4) \cdot 4 = -12 = F_y(2, 0)$. Además $F(2, 0) = g(f(2, 0)) = g(4) = 3$. En consecuencia, la ecuación del plano tangente queda

$$z - 3 = -12(x - 2) - 12y.$$

2. Considere la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^6}{x^6+y^6} & \text{si } \ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f en el origen.

b) Calcular $\nabla f(0,0)$.

c) En caso de que existan, calcule las derivadas parciales mixtas $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$.

Solución:

a) Notemos que

$$0 \leq \left| \frac{xy^6}{x^6+y^6} \right| \leq |x|.$$

Se deduce entonces del Teorema del Sandwich que el límite pedido es 0 y que por lo tanto la función es continua en el origen.

b) Por definición,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h\cdot 0^6}{h(h^6+0^6)} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{0\cdot h^6}{h(0^6+h^6)} = 0$$

por lo tanto $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

c) Si $(x,y) \neq 0$, entonces de las reglas de derivación se tiene que

$$f_x(x,y) = \frac{y^{12} - 5x^6y^6}{(x^6+y^6)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{6x^7y^5}{(x^6+y^6)^2}.$$

Luego

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{12}}{h^{13}}$$

y por lo tanto, no existe. Por otro lado,

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{6h^7\cdot 0^5}{h(h^6+0^6)^2} = 0.$$

3. *a*) Determine y clasifique los máximos y mínimos locales o puntos silla de la función
$$f(x,y) = x^3 + 2xy - 2y^2 - 3x - 2y + 20$$

b) Encuentre los extremos absolutos de la función $f(x,y,z) = 3x + 5y - 4z$ si (x,y,z) se encuentra en el manto de la superficie
$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 + (z-1)^2 = 75$$

Solución:

a) Primero encontraremos los puntos críticos usando criterio de la primera derivada para esto calculamos las primeras derivadas parciales
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 2y - 3 \\ f_y(x,y) &= 2x - 4y - 2 \end{aligned}$$

luego las condiciones de primer orden son
$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y - 3 &= 0 \\ 2x - 4y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Los puntos críticos son $(1,0)$, $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}\right)$. Calcularemos las segundas derivadas parciales para poder usar el criterio de las segundas derivadas
$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 6x \\ f_{yy}(x,y) &= -4 \\ f_{xy}(x,y) &= 2 \end{aligned}$$

Ahora para $(1,0)$ tenemos $D = -28 < 0$, luego $(1,0)$ es punto silla. Y para $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}\right)$ tenemos $D = 28 > 0$ y $f_{xx}\left(-\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}\right) = -8 < 0$, luego $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}\right)$ máximo local.

b) Encontraremos los puntos los puntos usando multiplicadores de Lagrange cuya condición es
$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z),$$
con $g(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + (z-1)^2 - 75$, en este caso será
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x \\ y \\ 2(z-1) \end{bmatrix}$$
luego los puntos críticos serán las soluciones del sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} 3 &= 2\lambda x \\ 5 &= \lambda y \\ -4 &= 2\lambda(z-1) \\ x^2 + \frac{1}{2}y^2 + (z-1)^2 - 75 &= 0 \end{aligned}$$

los puntos críticos son $(3, 10, -3)$ y $(-3, -10, 5)$, evaluando

$$f(3, 10, -3) = 71$$

$$f(-3, -10, 5) = -79$$

Por lo tanto el máximo absoluto se alcanza en $(3, 10, -4)$ y el mínimo absoluto en $(-3, -10, 4)$.

4. *a*) Sea $z = f(x,y)$ una función continua con segundas derivadas parciales continuas, $x = r^2 - s^2$ e $y = rs$. Encuentre $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s^2}$

   b) Sea $w(u,v) = h(u,v,g(u,v))$. Determine $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}$.

Solución:

a) Usando regla de la cadena

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

reemplazando

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}(-2s) + \frac{\partial f}{\partial y}r$$

derivamos nuevamente

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s}\right)(-2s) + \frac{\partial f}{\partial x}(-2) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)r + \frac{\partial f}{\partial y}0$$

reemplazando

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2s) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}r\right)(-2s) + \frac{\partial f}{\partial x}(-2) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2s) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}r\right)r + \frac{\partial f}{\partial y}0$$

reordenando

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = 4s^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (-4rs)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + r^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial x}$$

b) Usando regla de la cadena

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial u} \\
&= \frac{\partial h}{\partial u}1 + \frac{\partial h}{\partial v}0 + \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial u} \\
&= \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial u}
\end{aligned}$$

derivamos nuevamente obteniendo

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial g \partial u}\frac{\partial g}{\partial u} + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u \partial g} + \frac{\partial^2 h}{\partial g^2}\frac{\partial g}{\partial u}\right)\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial g}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$$