

# Función Inversa

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

<sup>1</sup>Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

<sup>2</sup>LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

8 de mayo de 2023



Laboratorio  
Interdisciplinario de  
Estadística Social

## Definición. (Función Inversa)

Dada  $f : A \rightarrow B$  una función biyectiva, se define la función inversa de  $f$ , denotada por  $f^{-1} : B \rightarrow A$ , como la función de  $B$  en  $A$  dada por:

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)) .$$

## Proposición

Si  $f : A \rightarrow B$  es función biyectiva, entonces su inversa  $f^{-1} : B \rightarrow A$  es tal que

- ❶  $(\forall x \in A)(f^{-1}(f(x)) = x.$
- ❷  $(\forall y \in B)(f(f^{-1}(y)) = y.$

## Proposición

Si  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva, entonces  $f^{-1}$  es biyectiva y  $(f^{-1})^{-1} = f.$

Si  $f : A \rightarrow B$  es biyectiva, entonces sabemos que existe una función  $g : B \rightarrow A$  que es la inversa de  $f$  (es decir,  $g = f^{-1}$ ) que satisface las siguientes tres propiedades

- ①  $g \circ f = id_A$ .
- ②  $f \circ g = id_B$ .
- ③  $g$  es biyectiva.

El siguiente resultado establece un recíproco.

## Proposición

Sean  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow A$  funciones reales. Si de las condiciones ①, ② y ③, las funciones  $f$  y  $g$  satisfacen dos cualesquiera, entonces  $f$  es biyectiva y su inversa es  $g$  (es decir,  $g = f^{-1}$ ).

Recuerde que la ecuación que define la inversa de una función biyectiva es

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Esta ecuación provee de un método para hallar la inversa.

## Cómo hallar la inversa de una función biyectiva

- 1 Escriba  $y = f(x)$ .
- 2 Despeje  $x$  de esta ecuación en términos de  $y$  (si es posible).
- 3 Intercambie  $x$  e  $y$ . La ecuación resultante es  $y = f^{-1}(x)$ .

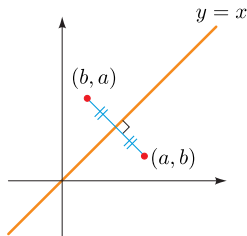
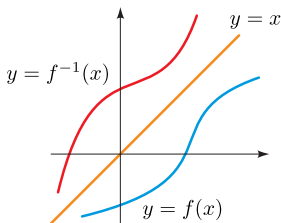
Sabemos que

$$b = f(a) \iff a = f^{-1}(b)$$

En otras palabras, si  $(a, b) \in \text{Graf}(f)$  si y solo si  $(b, a) \in \text{Graf}(f^{-1})$ . Se sabe que el punto  $(b, a)$  se obtiene de  $(a, b)$  al reflejar con respecto a la recta  $y = x$ . Hemos obtenido el siguiente resultado:

## Gráfica de una función inversa

La gráfica de  $f^{-1}$  se obtiene al reflejar la gráfica de  $f$  en la recta  $y = x$ .



**EJEMPLO 1** Sea  $h : [0, \infty[ \rightarrow ]-\infty, -2]$  definida por  $h(x) = -\sqrt{x^4 + 4}$ . Defina, si existe, la función inversa de  $h$ .

**EJEMPLO 2** Sea

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Halle, si existe, la inversa de  $f$ .

**EJEMPLO 3** Considere la regla de asignación  $f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$ .

- 1 Determine el dominio de la función  $f$ .
- 2 Determine la gráfica de la función  $f$  y deduzca su recorrido.
- 3 Determine si la función  $f$  es biyectiva, de lo contrario restrinja el dominio y el codominio para que la función sea biyectiva.
- 4 Calcule la inversa de  $f$  y gráfiquela.



**EJEMPLO 4** Considere la función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$g(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}.$$

- 1 Calcule la inversa de  $g$
- 2 Verifique que  $g \circ f = id$  y  $f \circ g = id$ , donde  $f = g^{-1}$ .
- 3 Deduzca que  $g$  es biyectiva.