PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2022

Pauta Interrogación 3 - MAT1610

1. Calcule el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left(\sqrt{\frac{n+3}{n}}+\sqrt{\frac{n+6}{n}}+\sqrt{\frac{n+9}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+3n}{n}}\right)$$

Solución:

Si consideramos la partición regular del intervalo $[1,4]$ tenemos que cada subintervalo mide $\frac{3}{n}$ y que $x_0 = 1, x_1 = 1+\frac{3}{n}+\cdots+x_k = 1+\frac{3k}{n}+\cdots+x_n = 4$, de esta manera la suma de Riemann asociada a esta partición y a la función $f(x)=\sqrt{x}$ es

$$\sqrt{\frac{n+3}{n}}+\sqrt{\frac{n+6}{n}}+\sqrt{\frac{n+9}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+3n}{n}}$$

luego tomando límite tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left(\sqrt{\frac{n+3}{n}}+\sqrt{\frac{n+6}{n}}+\sqrt{\frac{n+9}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n+3n}{n}}\right) = \int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$

por TFC tenemos que

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_1^4 = \frac{14}{3}.$$

Distribución de puntajes:

(2 puntos) Por determinar correctamente el intervalo de integración dónde se trabajará. (ojo que no es único)
- (2 puntos) Por determinar la función que se integrará (depende del intervalo)
- (2 puntos) Por calcular con TFC el valor del límite.

2. a) Demuestre que

$$\frac{\pi}{8} \leq \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos^2(x)} dx \leq \frac{\pi}{6}$$

Demostración:
Observe que la función $\cos(x)$ es decreciente y positiva en el intervalo $[0, \pi/4]$, por tanto $\frac{1}{2} \leq \cos^2(x) \leq 1$ por lo tanto

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+\cos^2(x)} \leq \frac{2}{3}$$

como el intervalo de integración tiene largo $\pi/4$, tenemos que

$$\frac{\pi}{8} \leq \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+\cos^2(x)} dx \leq \frac{\pi}{6}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por la cota superior de la función que se va a integrar.
- (1 punto) Por la cota inferior de la función que se va a integrar.
- (1 punto) Por justificar la desigualdad final con el largo del intervalo.

b) Si $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 7$, $\int_{5}^{2} f(x)dx = 11$ y $\int_{-2}^{-1} 2f(x)dx = 26$, determine el valor de

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx$$

Solución:
Por propiedades tenemos que $\int_{-2}^{-1} f(x)dx = 13$ y que $\int_{2}^{5} f(x)dx = -11$, por otra parte sabemos que

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-1}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{2} f(x)dx = 7 - 13 = -6$$

obteniendo así que

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{5} f(x)dx = -6 - 11 = -17$$

Distribución de puntajes:

- (2 punto) Por calcular $\int_{-1}^{2} f(x)dx$ justificadamente
- (1 punto) Por determinar, justificadamente la integral pedida.

3. Una ventana normada tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo, como se muestra en la figura adjunta. Si el perímetro de la ventana es de 30 metros, encuentre las dimensiones de la ventana de modo de que se admita la mayor cantidad de luz, es decir, de modo que tenga área máxima.

Solución:

Observe que si la base rectangular de la ventana tiene longitud x entonces el radio de la media circunferencia que corona la ventana tiene radio $x/2$, por otra parte si el alto del rectángulo que forma la ventana mide y tendremos que el perímetro de ésta está dada por

$$x + 2y + \frac{\pi}{2}x$$

del enunciado tenemos que éste es 30 metros, usando esta información tenemos que el alto del rectángulo es $y = 15 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)x$, por lo tanto el área de la ventana, en función de la medida de la base, $x \in (0, 30)$, está dada por

$$A(x) = x\left(15 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)x\right) + \frac{\pi}{8}x^2 = 15x - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2$$

al derivar, tenemos que

$$A'(x) = 15 - \left(1 + \frac{\pi}{4}\right)x$$

luego, $A'(x) = 0$ si y solo si $x = \dfrac{60}{4+\pi}$, y aquí se alcanza un máximo global en el intervalo $(0, 30)$ porque la derivada solo es cero en ese punto y antes de ese punto es positiva y después negativa.

De lo anterior tenemos que las dimensiones que maximizan el área de la ventana son base de $\dfrac{60}{4+\pi}$ metros y alto de $15 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\dfrac{60}{4+\pi}$ metros.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar la medida de la altura en función de la base (u otra relación equivalente)

- (1 punto) Por la fórmula para el área.
- (1 punto) Por derivar la fórmula del área
- (1 punto) Por determinar punto crítico
- (1 punto)Por justificar por qué lo encontrado corresponde al punto donde se alcanza el máximo (distintas formas)
- (1 punto) Por dar las dimensiones pedidas.

4. Sea $F(x) = \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$. Demuestre que para todo $x \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{\sin(u)}{u}(x-u)du = \int_1^x F(u)du.$$

(*Indicación: No intente calcular ninguna integral. Demuestre, derivando, que la resta es constante e igual a 0*)

Solución:

Llamemos

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_1^x \frac{\sin(u)}{u}(x-u)du - \int_1^x F(u)du \\ &= x\int_1^x \frac{\sin(u)}{u}du - \int_1^x \sin(u)du - \int_1^x F(u)du \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema Fundamental del Cálculo parte I, y regla del producto,

$$\begin{aligned} G'(x) &= 1 \cdot \int_1^x \frac{\sin(u)}{u}du + x \cdot \frac{\sin(x)}{x} - \sin(x) - F(x) \\ &= F(x) + \sin(x) - \sin(x) - F(x) = 0. \end{aligned}$$

Como $G'(x) = 0$ para todo $x > 1$, entonces G es constante.

Finalmente, evaluando en $x = 1$, tenemos que $G(1) = 0$, por lo concluimos que $G(x) = 0$ para todo x, lo que es equivalente a lo que se busca probar.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por derivar cada una de las integrales involucradas.
- (2 puntos) Por justificar que la función es constante.(o equivalente)
- (2 puntos) Por demostrar que la función es constante cero evaluando en uno (o equivalente)