EYP 1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Segundo Semestre 2020

Contenido I

Vectores Aleatorios

Al realizar un experimento aleatorio, podemos estar interesados en observar dos o más caracteristicas numéricas simultáneamente.

Por ejemplo, observar la dureza (X) y la resistencia a la tensión (Y) de una pieza manufacurada de acero elegida al azar; o bien, observar la altura (X) y el peso (Y) de una determinada persona.

En ambos casos, a cada resultado ω del experimento se le asocia un par numérico $(x, y) = (X(\omega), Y(\omega))$.

Interesa entonces extender el concepto de variable aleatoria unidimensional (con valores en $\mathbb{R}$) a variable aleatoria multidimensional o vector aleatorio (con valores en $\mathbb{R}^n$).

Se estudiarán, además, varios conceptos relacionados importantes.

Se debe recordar, sin embargo, que la representación de un experimento aleatorio se basa en un espacio o modelo de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$.

Definición 1.1

Un vector aleatorio n-dimensional es una función $(X_1, \ldots, X_n)$ desde el espacio muestral Ω en $\mathbb{R}^n$, el espacio Euclidiano n-dimensional:

$$\begin{array}{rccc} (X_1, \ldots, X_n): & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \omega & \longrightarrow & (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)). \end{array}$$

Es decir, $(X_1, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ssi $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Vectores Aleatorios

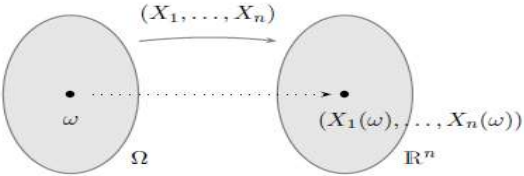

Figura 1: Un vector aleatorio es una función de Ω en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.1

Para n lanzamientos consecutivos de una moneda, defina,

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si el } i\text{-ésimo lanzamiento dio cara,} \\ 0, & \text{eoc,} \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, n$.

Entonces, $(X_1, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, donde,

$$\Omega = \{c, s\}^n, \quad \mathcal{A} = 2^{\Omega}, \quad P : P(\{c\}) = p, \quad 0 < p < 1.$$

En este ejemplo, para cada $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega = \{c, s\}^n$, se tiene que

$$X_i(\boldsymbol{\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega_i = c, \\ 0, & \text{si } \omega_i = s, \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, n$. Luego, $(X_1(\boldsymbol{\omega}), \ldots, X_n(\boldsymbol{\omega})) \in \mathcal{X} = \{0, 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$.

Por ejemplo, para $n = 2$, se tiene que,

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \in \{c, s\}^2$	$(X_1(\boldsymbol{\omega}), X_2(\boldsymbol{\omega})) \in \{0, 1\}^2$
(s, s)	$(0, 0)$
(s, c)	$(0, 1)$
(c, s)	$(1, 0)$
(c, c)	$(1, 1)$

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Entonces, para todo $B \in \mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que,

$$\{(X_1, \ldots, X_n) \in B\} = \{\omega \in \Omega : (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in B\} \in \mathcal{A},$$

es decir, es un evento. Luego,

$$P_{X_1,\ldots,X_n}(B) = P\{(X_1, \ldots, X_n) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}^n,$$

define la distribución de probabilidad del vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ o distribución de probabilidad de conjunta de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$.

De esta forma, si $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ es el recorrido conjunto de $(X_1, \ldots, X_n)$, entonces,

$$(\mathcal{X}, \mathcal{B}^n, P_{X_1,\ldots,X_n})$$

define un modelo o espacio de probabilidad multivariado.

En particular, para $B = (-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]$, se tiene que,

$\{(X_1, \ldots, X_n) \in B\} = \{X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\} \in a \ \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces, la función definida por,

$$\begin{aligned} P_{X_1,\ldots,X_n}(B) &= P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n) \\ &= F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

se llama función de distribución (acumulada) del vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ o distribución (acumulada) conjunta de las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$.

Vectores Aleatorios

Definición 1.2

Distribución de probabilidad conjunta La distribución de probabilidad conjunta de $X_1, \dots, X_n$ es la colección de probabilidades, $P\{(X_1, \dots, X_n) \in B\}$, para todos los subconjuntos B de $\mathbb{R}^n$.

Definición 1.3

Función de distribución conjunta La función de distribución (acumulada) conjunta de $X_1, \dots, X_n$, se define como,

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Note que $F_{X_1,\dots,X_n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$.

Para $n = 2$, con $X_1 = X$ y $X_2 = Y$, se tiene que,

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x,y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\ &= P_{X,Y}\{(-\infty, x] \times (-\infty, y]\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

es la función de distribución (acumulada) conjunta de las variables aleatorias X e Y, o simplemente la función de distribución (acumulada) del vector aleatorio (X, Y).

$F_{X,Y}(x, y)$ es la probabilidad de que (X, Y) tome algún valor en la región $(-\infty, x] \times (-\infty, y]$, como se muestra en la Figura 2.

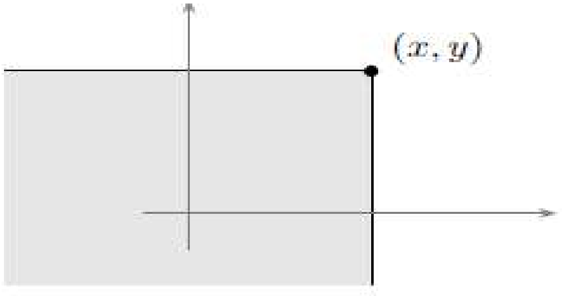

Figura 2: $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ es la probabilidad de que (X, Y) tome un valor en la región sombreada.

Vectores Aleatorios

Las funciones de distribución conjunta satisfacen propiedades similares al caso unidimensional; lo cual se ilustra en el caso bivariado.

Teorema 1.1

Sea $F_{X,Y}(x,y)$ la función de distribución conjunta de X e Y. Entonces,

F1a) $\lim_{x,y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$, ambos argumentos.

F1b) $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$, para cada valor del otro argumento.

F2) $F_{X,Y}(x,y)$ es no decreciente en cada uno de sus argumentos.

F3) $F_{X,Y}(x,y)$ es continua por la derecha en cada uno de sus argumentos.

F4) Si $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$, entonces,

$$\underbrace{F_{X,Y}(b_1,b_2) - F_{X,Y}(a_1,b_2) - F_{X,Y}(b_1,a_2) + F_{X,Y}(a_1,a_2)}_{P_{X,Y}\{(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]\}=P(a_1<X\leq b_1,a_2<Y\leq b_2)} \geq 0$$

Recíprocamente, toda función bivariada $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifique F1) a F4) es una función de distribución bivariada.

La extensión para el caso n-dimensional es inmediata.

En particular, la condición F4) exige que una función de distribución n-variada,

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = P(X_1 \leq x_1,\ldots,X_n \leq x_n), \quad (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

asigne probabilidades no-negativas a todos los rectángulos de $\mathbb{R}^n$ de la forma,

$$(a_1, b_1] \times \ldots \times (a_n, b_n],$$

donde $-\infty < a_i < b_i < \infty$ para $i = 1,\ldots,n$.

Ejemplo 1.2

Sea
$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-y}) & \text{si} \quad x,y \geq 0, \\ 0 & \text{eoc.} \end{cases}$$

(a) Pruebe que $F_{X,Y}$ verifica F1) a F4).

(b) Calcule,

$$\begin{aligned} P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) &= F_{X,Y}(1,1) - F_{X,Y}(1,0) \\ &\quad - F_{X,Y}(0,1) + F_{X,Y}(0,0) \\ &= (1-e^{-1})^2. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.3

Sea

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; x \geq 0, \; y \geq 0, \; x+y \geq 1, \\ 0 & \text{eoc.} \end{cases}$$

Es fácil ver que (tarea!) F verifica las propiedades F1) a F3); sin embargo,

$$\begin{aligned} 0 \leq P(0 < X \leq 1, 0 < Y \leq 1) &= F(1,1) - F(1,0) - F(0,1) + F(0,0) \\ &= 1 - 1 - 1 + 0 \\ &= -1 \quad \rightarrow\leftarrow . \end{aligned}$$

Luego, F no es una función de distribución bivariada, ya que no verifica F4).

Vectores aleatorios continuos y discretos

Al igual que en el caso univariado, hay varios tipos de vectores aleatorios, de acuerdo con la naturaleza de su coordenadas. A continuación, se consideran solo dos tipos, los vectores aleatorios discretos y continuos.

Definición 2.1

Vector aleatorio discreto. Un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ se dice discreto si su recorrido, $\mathcal{X}$, es un subconjunto contable (finito o infinito) de $\mathbb{R}^n$; es decir, $(X_1, \ldots, X_n)$ es dicreto ssi las coordenadas $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias discretas.

Vectores aleatorios continuos y discretos

En tal caso, la distribución de probabilidad conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ queda completamente determinada por la función de masa de probabilidad (fmp) conjunta definida por,

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n), \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

De este modo, se tiene que,

i) $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ para todo $(x_1, \ldots, x_n)$,

ii) $\sum \cdots \sum_{\{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n\}} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = 1$,

iii) $P_{X_1,\ldots,X_n}(B) = \sum \cdots \sum_{\{(x_1,\ldots,x_n) \in B\}} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ para todo subconjunto B de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 2.1

Al lanzar una moneda justa tres veces consecutivas, defina las variables aleatorias,
$X = \{\text{Número de caras obtenidas en los primeros dos lanzamientos}\}$,
$Y = \{\text{Número de caras obtenidas en los últimos dos lanzamientos}\}$.
Claramente, (X, Y) es un vector aleatorio discreto, con recorrido
$\mathcal{X} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$, y fmp conjunta,

$$
\begin{aligned}
&f_{X,Y}(0,0) = P(X=0, Y=0) = P((s,s,s)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(0,1) = P(X=0, Y=1) = P((s,s,c)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(1,0) = P(X=1, Y=0) = P((c,s,s)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(1,1) = P(X=1, Y=1) = P(\{(c,s,c), (s,c,s)\}) = \tfrac{1}{4},\\
&f_{X,Y}(1,2) = P(X=1, Y=2) = P((s,c,c)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(2,1) = P(X=2, Y=1) = P((c,c,s)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(2,2) = P(X=2, Y=2) = P((c,c,c)) = \tfrac{1}{8},\\
&f_{X,Y}(x,y) = 0 \quad \forall\, (x,y) \notin \mathcal{X}.
\end{aligned}
$$

La información sobre la fmp de (X, Y) puede resumirse en la siguiente tabla (de contingencia):

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Definición 2.2

Vector aleatorio continuo. Un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ se dice (absolutamente) continuo si existe una función no negativa, $f_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\ldots,X_n}(u_1, \ldots, u_n) du_n \cdots du_1,$$

para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Vectores aleatorios continuos y discretos

En tal caso, en los puntos de continuidad,

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n},$$

y se llama función de densidad de probabilidad (fdp) conjunta de $X_1,\ldots,X_n$; la cual es tal que:

i) $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) \geq 0$ para todo $(x_1,\ldots,x_n)$,

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$,

iii) $P_{X_1,\ldots,X_n}(B) = \int \cdots \int_{\{(x_1,\ldots,x_n)\in B\}} f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) dx_n \cdots dx_1$ para cada subconjunto B de $\mathbb{R}^n$.

Nota:

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ es un vector aleatorio (absolutamente) continuo, entonces las coordenas $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias (absolutamente) continuas.

Sin embargo, que $X_1, \ldots, X_n$ sean variables aleatorias (absolutamente) continuas no implica que el vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ sea (absolutamente) continuo.

Vectores aleatorios continuos y discretos

Por ejemplo, para $n = 2$, con $X_1 = X$ y $X_2 = Y$, se tiene que,

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dvdu,$$

y por el teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{X,Y}(x,y)$$

en los puntos de continuidad de $f_{X,Y}(x,y)$. Además, es claro que,

i) $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$ para todo (x,y),

ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = F_{X,Y}(\infty,\infty) = 1$, y

iii) $P_{X,Y}(B) = \int\int_{\{(x,y)\in B\}} f_{X,Y}(x,y)dydx$ para toda región B en $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.2

Sean X e Y variables aleatorias con fdp conjunta dada por,

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xy^2, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule,

i) $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}, 0 < Y \leq \frac{1}{3}\right)$

ii) $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}\right)$

iii) $P(X + Y > 1)$.

i) $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}, 0 < Y \leq \frac{1}{3}\right) = \int_0^{\frac{1}{3}} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 6xy^2 dxdy = 1.1574 \times 10^{-2}$

ii) $P\left(\frac{1}{2} < X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \int_0^1 6xy^2 dydx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} 2xdx \int_0^1 3y^2 dy = 0.3125.$

iii) $P(X+Y \geq 1) = \int\int_B f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_{1-y}^1 6xy^2 dxdy = \frac{9}{10}$, ya que,

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) : x+y \geq 1, 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \\ &= \{(x,y) : x \geq 1-y, 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \\ &= \{(x,y) : 1-y \leq x < 1, 0 < y < 1\}. \end{aligned}$$

Nota: Si (X, Y) es un vector aleatorio continuo, entonces la probabilidad del evento $\{a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d\}$ no cambia si se incluyen o no los extremos de cada intervalo, y se calcula como la integral doble que se ilustra en la Figura 3

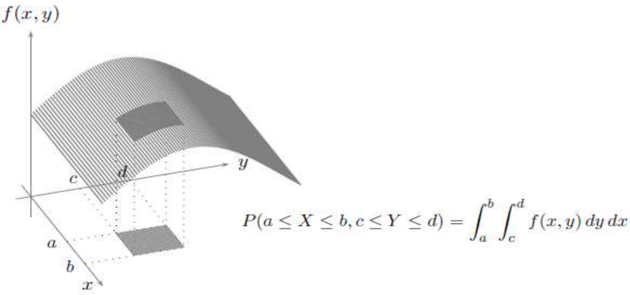

Figura 3: La probabilidad de $\{a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d\}$ como el volumen bajo una superficie.

References

Blanco, L., Arunachalam, V. y Dharmaraja, S. (2012). *Introduction to Probability and Stochastic Processes.* John Wiley, New Jersey.

Casella, G. y Berger, R.L. (2002). *Statistical Inference.* Second Edition. Duxbury, California.