Cálculo II (MAT 1620)
Pontificia Universidad Católica de Chile
Pauta del examen

26.11.2013

Problema 1. Calcular el area de la superficie de revolución obtenida al girar la cicloide

$$x(t) = a\big(t - \operatorname{sen}(t)\big), \quad y(t) = a\big(1 - \cos(t)\big), \quad a > 0,\ t \in [0, 2\pi],$$

alrededor del eje x.

Solución. Sabemos por el curso que el area A pedido vale

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} 2\pi y(t) \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} \big(1 - \cos(t)\big)\sqrt{\big(1 - \cos(t)\big)^2 + \operatorname{sen}(t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2^{3/2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} \big(1 - \cos(t)\big)\sqrt{1 - \cos(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= 2^{3/2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}(t/2)^2 \sqrt{2\operatorname{sen}(t/2)^2}\,\mathrm{d}t \qquad \big(1 - \cos(t) = 2\operatorname{sen}(t/2)^2\big) \\
&= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\theta)^3\,\mathrm{d}\theta \qquad (\theta = t/2 \Rightarrow \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t/2).
\end{aligned}$$

Ahora, la integral de $\operatorname{sen}(\theta)^3$ vale

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}(\theta)^3\,\mathrm{d}\theta = \int \big(1 - \cos(\theta)^2\big)\operatorname{sen}(\theta)\,\mathrm{d}\theta &= \int \big(\operatorname{sen}(\theta) - \cos(\theta)^2\operatorname{sen}(\theta)\big)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\big(-\cos(\theta) + \cos(\theta)^3/3\big)\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\cos(\theta) + \cos(\theta)^3/3 + \text{Const.}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$A = 16\pi a^2\big(-\cos(t) + \cos(t)^3/3\big)\Big|_0^{\pi} = 16\pi a^2\big(1 - 1/3 + 1 - 1/3\big) = \frac{64\pi a^2}{3}.$$

Problema 2. (a) Sea la curva en $\mathbb{R}^3$ dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3y^2 - 4z = -1. \end{cases}$$

Determinar la ecuación del plano normal a la curva en el punto $(1, 1, 1)$.

Solución (a). Pongamos primero la curva en forma paramétrica.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3y^2 - 4z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2 - 2x + y \\ z = \frac{1}{4} + \frac{3y^2}{4} \end{cases} \implies 2 - 2x + y = \frac{1}{4} + \frac{3y^2}{4}$$
$$\iff x = \frac{7}{8} - \frac{3y^2}{8} + \frac{y}{2}.$$

Notando $y = t$, obtenemos entonces la curva paramétrica

$$C(t) = \left(\frac{7}{8} - \frac{3t^2}{8} + \frac{t}{2}, t, \frac{1}{4} + \frac{3t^2}{4}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Su vector tangente está dado por

$$C'(t) = \left(-\frac{3t}{4} + \frac{1}{2}, 1, \frac{3t}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La curva pasa por el punto $(1, 1, 1)$ cuando $t = 1$, y $C'(1) = \big(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\big)$. Entonces, la ecuación del plano normal a la curva en el punto $(1, 1, 1)$ es

$$\big((x, y, z) - (1, 1, 1)\big) \cdot \left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\right) = 0 \iff (x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (-1, 4, 6) = 0$$
$$\iff -x + 4y + 6z = 9.$$

(b) Sea la curva en cordenadas polares

$$r(\theta) = \frac{1}{1 + \theta}, \quad \theta \in [0, \infty).$$

Determinar si la longitud total de la curva es finita o infinita. Si es finita, calcular su valor.

Solución (b). Como $r'(\theta) = \frac{-1}{(1+\theta)^2}$, la longitud total de la curva es

$$\begin{aligned} L = \int_0^\infty \sqrt{r(\theta)^2 + r'(\theta)^2}\, \mathrm{d}\theta &= \int_0^\infty \sqrt{\frac{1}{(1+\theta)^2} + \frac{1}{(1+\theta)^4}}\, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_1^\infty \underbrace{\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t^4}}}_{\geq 1/t}\, \mathrm{d}t \qquad (t = 1 + \theta \Rightarrow \mathrm{d}t = \mathrm{d}\theta) \\ &\geq \int_1^\infty \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \\ &= \ln(t)\Big|_1^\infty \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Pues, $L \geq \infty$, lo que significa que la longitud total de la curva es infinita.

Problema 3. (a) Sea la función

$$f : (-1, 1) \to (0, \infty), \quad x \mapsto (1 + x)^{1/3}.$$

Calcular los tres primeros términos de la serie de Maclaurin de f.

Solución (a). Sabemos por el curso que $f(x) = (1+x)^{1/3}$ es igual a su serie de Maclaurin si $|x| < 1$. Pues,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + R_3(x) \quad \text{para } |x| < 1,$$

donde $R_3(x) = f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2\right)$ es el residuo de la serie de Maclaurin. Ahora, se tiene

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}\Big|_{x=0} = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad f''(0) = -\frac{2}{9}(1+x)^{-5/3}\Big|_{x=0} = -\frac{2}{9}.$$

Entonces,

$$f(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + R_3(x) \quad \text{para } |x| < 1.$$

(b) Determinar una aproximación del valor $(\frac{3}{2})^{1/3}$ con un error menor o igual a 0.07.

Solución (b). El punto (a) implica que

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} = f(1/2) = 1 + \frac{1/2}{3} - \frac{(1/2)^2}{9} + R_3(1/2) &= 1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} + R_3(1/2) \\ &= \frac{41}{36} + R_3(1/2).\end{aligned}$$

Pues, el valor $\frac{41}{36}$ es una aproximación de $(\frac{3}{2})^{1/3}$ con un error igual a $R_3(1/2)$. Ahora, tenemos que estimar el valor de $R_3(1/2)$. Por eso, notamos que

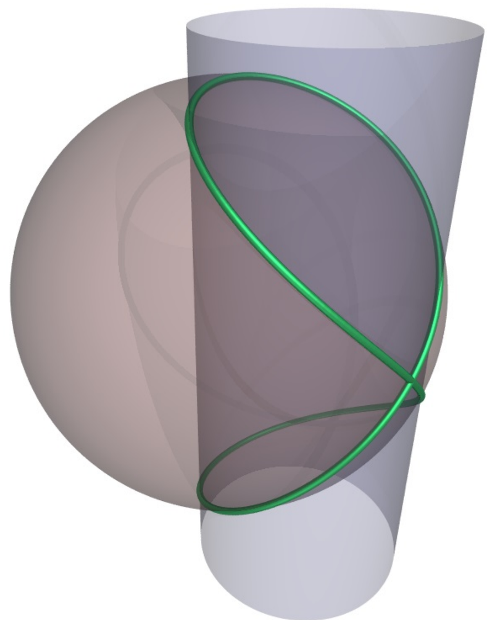
$$\left|f'''(x)\right| = \left|\frac{10}{27}(1+x)^{-8/3}\right| \leq \frac{10}{27} \quad \text{para } |x| < 1,$$

y entonces que

$$|R_3(x)| \leq \frac{10/27}{3!}|x|^3 < \frac{5}{81} \simeq 0.062 \quad \text{para } |x| < 1$$

por la desigualdad de Taylor. En particular, $|R_3(1/2)| < 0.07$ y entonces el valor $\frac{41}{36}$ es una aproximación de $(\frac{3}{2})^{1/3}$ con un error menor que 0.07.

Problema 4.



(a) Mostrar que los puntos de la curva

$$f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \big(a\big(1+\cos(t)\big), a\,\mathrm{sen}(t), 2a\,\mathrm{sen}(t/2)\big), \quad a > 0,$$

pertenecen a la intersección de la esfera de radio $2a$ centrada en $(0,0,0)$ y el cilindro vertical con radio a y centro $(a,0,0)$ en el plano xy.

Solución (a). La ecuaciones del cilindro y de la esfera son

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \ \text{(cilindro)} \qquad \text{y} \qquad x^2+y^2+z^2 = 4a^2 \ \text{(esfera)}.$$

Pues, los puntos de la curva pertenecen al cilindro porque

$$\big(x(t)-a\big)^2 + y(t)^2 = \big(a(1+\cos(t)) - a\big)^2 + \big(a\,\mathrm{sen}(t)\big)^2 = a^2\cos(t)^2 + a^2\mathrm{sen}(t)^2 = a^2,$$

y los puntos de la curva pertenecen a la esfera porque

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= \big(a\big(1+\cos(t)\big)\big)^2 + \big(a\,\mathrm{sen}(t)\big)^2 + \big(2a\,\mathrm{sen}(t/2)\big)^2 \\ &= a^2\big(1+2\cos(t)+\cos(t)^2\big) + a^2\mathrm{sen}(t)^2 + 4a^2\mathrm{sen}(t/2)^2 \\ &= 2a^2 + 2a^2\cos(t) + 2a^2\big(1-\cos(t)\big) \qquad \big(2\,\mathrm{sen}(t/2)^2 = \big(1-\cos(t)\big) \\ &= 4a^2. \end{aligned}$$

(b) Calcular para cada $t \in [-2\pi, 2\pi]$ la curvatura $k(t)$ de la curva f.

Solución (b). La curva f tiene derivadas

$$\begin{aligned} f'(t) &= \big(-a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t), a\cos(t/2)\big) \\ f''(t) &= \big(-a\cos(t), -a\,\mathrm{sen}(t), -a\,\mathrm{sen}(t/2)/2\big) \end{aligned}$$

y velocidad

$$\|f'(t)\| = \big\|\big(-a\,\mathrm{sen}(t), a\cos(t), a\cos(t/2)\big)\big\| = \sqrt{a^2\,\mathrm{sen}(t)^2 + a^2\cos(t)^2 + a^2\cos(t/2)^2}$$
$$= a\sqrt{1+\cos(t/2)^2}.$$

Además, se tiene

$$\begin{aligned}
&f'(t)\times f''(t)\\
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a\,\mathrm{sen}(t) & a\cos(t) & a\cos(t/2) \\ -a\cos(t) & -a\,\mathrm{sen}(t) & -a\,\mathrm{sen}(t/2)/2 \end{vmatrix}\\
&= -\hat{i}a^2\cos(t)\,\mathrm{sen}(t/2)/2 - \hat{j}a^2\cos(t/2)\cos(t) + \hat{k}a^2\mathrm{sen}(t)^2\\
&\qquad + \hat{k}a^2\cos(t)^2 - \hat{j}a^2\mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(t/2)/2 + \hat{i}a^2\cos(t/2)\,\mathrm{sen}(t)\\
&= a^2\big(\cos(t/2)\,\mathrm{sen}(t) - \cos(t)\,\mathrm{sen}(t/2)/2, -\cos(t/2)\cos(t) - \mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(t/2)/2, 1\big)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
&\|f'(t)\times f''(t)\|\\
&= a^2\sqrt{\big(\cos(t/2)\,\mathrm{sen}(t) - \cos(t)\,\mathrm{sen}(t/2)/2\big)^2 + \big(\cos(t/2)\cos(t) + \mathrm{sen}(t)\,\mathrm{sen}(t/2)/2\big)^2 + 1}\\
&= a^2\sqrt{\cos(t/2)^2 + \mathrm{sen}(t/2)^2/4 + 1}\\
&= a^2\sqrt{5/4 + 3\cos(t/2)^2/4} \qquad \big(\mathrm{sen}(t/2)^2 = 1 - \cos(t/2)^2\big)\\
&= \frac{a^2}{2}\sqrt{5+3\cos(t/2)^2}.
\end{aligned}$$

Pues,

$$k(t) = \frac{\|f'(t)\times f''(t)\|}{\|f'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{5+3\cos(t/2)^2}}{2a\big(1+\cos(t/2)^2\big)^{3/2}}\,.$$

De manera alternativa, si uno utiliza la relación $\cos(t/2)^2 = \big(1+\cos(t)\big)/2$, uno puede reescribir la última fórmula como

$$k(t) = \frac{\sqrt{13+3\cos(t)}}{a\big(3+\cos(t)\big)^{3/2}}\,.$$