PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Solución Ayudantía 5

1. Sea $\Omega = \{1,2,3,4\}$ y $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3,4\}\}$. ¿Es $X(\omega) = 1 + \omega$ una variable aleatoria con respecto de $\mathcal{F}$? En caso de que no, defina alguna función que si sea una variable aleatoria.

   Para esto debemos corroborar que la imagen inversa de $X(\omega)$ exista en $\mathcal{F}$. Primero encontremos $X(\omega)$. Podemos hacer la siguiente tabla

ω	1	2	3	4
$X(\omega)$	1+ 1	1+2	1+3	1+4

Equivalentemente

ω	1	2	3	4
$X(\omega)$	2	3	4	5

Note que

$$X^{-1}(2) = \{1\}$$
$$X^{-1}(3) = \{2\}$$
$$X^{-1}(4) = \{3\}$$
$$X^{-1}(5) = \{4\}$$

Ahora debemos corroborar que estos elementos pertenezcan a la sigma álgebra.

$$X^{-1}(2) = \{1\} \in \mathcal{F}$$

Pero note que

$$X^{-1}(3) = \{2\} \notin \mathcal{F}$$

Luego, como la imagen inversa de un elemento no esta en $\mathcal{F}$, se tiene que $X(\omega) = 1 + \omega$ no es una variable aleatoria con respecto de $\mathcal{F}$.

Nota: Una propiedad de una variable aleatoria es que la inversa debe existir en la sigma algebra considerada. En el ejercicio 2 y 3 se utilizan definiciones alternativas de v.a, pero equivalentes.

Podemos tomar la siguiente variable aleatoria

ω	1	2	3	4
$X(\omega)$	-1	1	1	1

donde tenemos

$$X^{-1}(-1) = \{1\}$$
$$X^{-1}(1) = \{2, 3, 4\}$$

Claramente cada elemento está en $\mathcal{F}$.

2. Sea X una variable aleatoria real definida sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) ¿Es $aX + b$ una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$?
   Una variable aleatoria es una función real valorada tal que

   $$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

   para todo numero real x. Entonces debemos corroborar esto. En nuestro caso $X(\omega) = aX(\omega) + b$, entonces

   $$\begin{gathered} \{\omega \in \Omega : aX(\omega) + b \leq x\} \\ \{\omega \in \Omega : aX(\omega) \leq x - b\} \\ \left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \frac{x-b}{a}\right\} \\ \Rightarrow \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x^*\} \in \mathcal{A} \end{gathered}$$

   pero note que x^* sigue siendo un numero real, pues a, b son constantes en los reales, y como X es una v.a, se cumple la definición, concluyendo así que $aX + b$ también es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (b) ¿Es X^2 una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$?
   Para este caso vamos a utilizar una definición equivalente de v.a. Esta es

   $$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\} \in \mathcal{A}$$

   Ahora, que la v.a al estar al cuadrado, y $x \in \mathbb{R}$, debemos corroborar varios casos.

   - $x < 0$

     $$\begin{gathered} \{\omega \in \Omega : X^2(\omega) > -x\} \\ \{\omega \in \Omega : |X(\omega)| > \sqrt{-x}\} \end{gathered}$$

     pero esta ultima raíz no existe, por lo que

     $$\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| > \sqrt{-x}\} = \emptyset$$

     y recordamos que por definición de sigma algebra el vacio debe estar en esta, por lo que se cumple el primer caso.

     $$\Rightarrow \{\omega \in \Omega : X^2(\omega) < -x\} = \emptyset \in \mathcal{A}$$

- $x = 0$

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega : X^2(\omega) > 0\} \\
&\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| > 0\} \\
&\{\omega \in \Omega : X(\omega) > 0 \text{ o } \omega \in \Omega : X(\omega) < 0\} \\
&\{\omega \in \Omega : X(\omega) > 0\} \cup \{\omega \in \Omega : X(\omega) < 0\}
\end{aligned}$$

  Luego, como $X(\omega)$ es una variable aleatoria, entonces estos dos conjuntos pertenecer a la sigma algebra.

- $x > 0$

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega : X^2(\omega) > x\} \\
&\{\omega \in \Omega : |X(\omega)| > \sqrt{x}\} \\
&\{\omega \in \Omega : X(\omega) > \sqrt{x} \text{ o } \omega \in \Omega : X(\omega) < -\sqrt{x}\} \\
&\{\omega \in \Omega : X(\omega) > \sqrt{x}\} \cup \{\omega \in \Omega : X(\omega) < -\sqrt{x}\}
\end{aligned}$$

  Luego, como $X(\omega)$ es una variable aleatoria, entonces estos dos conjuntos pertenecer a la sigma algebra.

  Finalmente, como $X^2(\omega)$ cumple todas las propiedades, se tiene que X^2 es una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

3. Se lanza 3 veces, de manera independiente, una moneda sesgada con probabilidad 3/4 de dar cara. Defina la variable aleatoria

$$X = \text{Número de sellos obtenidos}$$

   (a) Encuentre Ω

   Tenemos

$$\Omega = \{(s,s,s), (s,s,c), (s,c,s), (c,s,s), (s,c,c), (c,s,c), (c,c,s), (c,c,c)\}$$

   (b) Encuentre $X(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$

   Note que nos interesan los sellos, entonces

ω	(s,s,s)	(s,s,c)	(s,c,s)	(c,s,s)	(s,c,c)	(c,s,c)	(c,c,s)	(c,c,c)
$X(\omega)$	3	2	2	2	1	1	1	0

   De aca se tiene que el recorrido de la v.a es $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, 3\}$.

   (c) Encuentre $P_X(\{x\})$

   Note que vamos a lanzar la moneda 3 veces, y de esta cantidad nos interesa que salgan 0 sellos, 1 sello, 2 sellos o 3 sellos. Recordando las ayudantías previas tenemos que esto corresponde al modelo binomial. Primero note que

$$\begin{aligned}
P(\text{sello}) &= 1 - 3/4 = 1/4 \\
P(\text{cara}) &= 3/4
\end{aligned}$$

   Entonces

$$P_X(\{0\}) = P(X = 0) = \binom{3}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{3-0} = 0.421875$$

$$P_X(\{1\}) = P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^{3-1} = 0.421875$$
$$P_X(\{2\}) = P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{3-2} = 0.140625$$
$$P_X(\{3\}) = P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^{3-3} = 0.015625$$

(d) Dibuje F_X

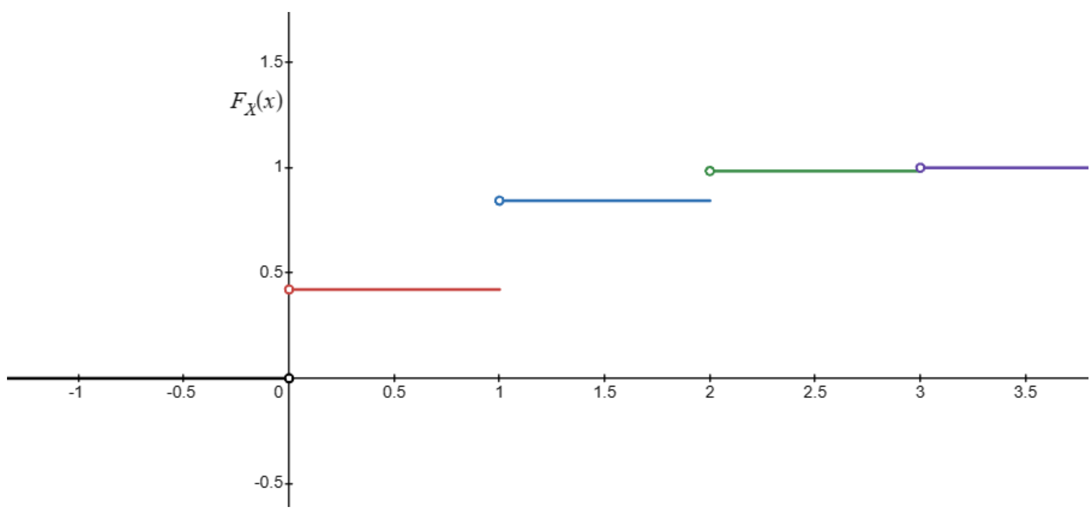
Para esto primero debemos encontrar F_X. Entonces

$P(X \leq 0) = P(X=0) = 0.421875$
$P(X \leq 1) = P(X=1) + P(X=0) = 0.421875 + 0.421875 = 0.84375$
$P(X \leq 2) = P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) = 0.140625 + 0.421875 + 0.421875 = 0.984375$
$P(X \leq 3) = P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0) = 1$

Entonces la acumulada nos queda de la siguiente forma

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.421875 & 0 \leq x < 1 \\ 0.84375 & 1 \leq x < 2 \\ 0.984375 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$

Esto corresponde a



4. Una variable aleatoria X se dice que es absolutamente continua con densidad $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ si

$$P_X((a,b]) = \int_a^b f_X(x)dx$$

para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$.

   (a) Muestre que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$
   Para esto recordemos que $P_X(\Omega) = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} f_X(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} P_X((-n,n]) \\
&= P_X((-\infty,\infty]) \\
&= P_X(\mathbb{R}) \\
&= P_X(\Omega) \\
&= 1
\end{aligned}$$

   (b) Muestre que $P_X(\{y\}) = 0$ para cualquier $y \in \mathbb{R}$
   Note que convenientemente podemos expresar $\{y\}$ de la siguiente forma

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[y - \frac{1}{n}, y\right] = \{y\}$$

   Ahora, podemos aplicar esto al ejercicio 1 b) de la ayudantía 2, pues

$$\cdots [y - 1/3, y] \subset [y - 1/2, y] \subset [y - 1, y]$$

   teniendo entonces

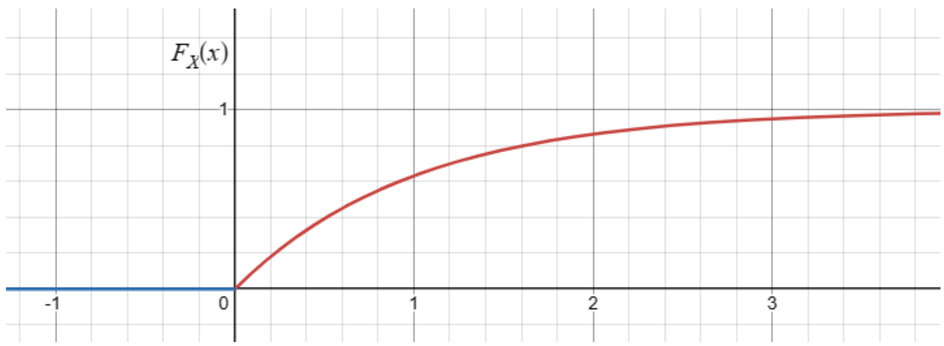
$$\begin{aligned}
P_X(\{y\}) &= P_X\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[y - \frac{1}{n}, y\right]\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P_X([y - 1/n, y]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{y-\frac{1}{n}}^{y} f_X(x)dx \\
&= \int_y^y f_X(x)dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

   (c) Encuentre una formula para $F_X(y)$ en terminos de f_X

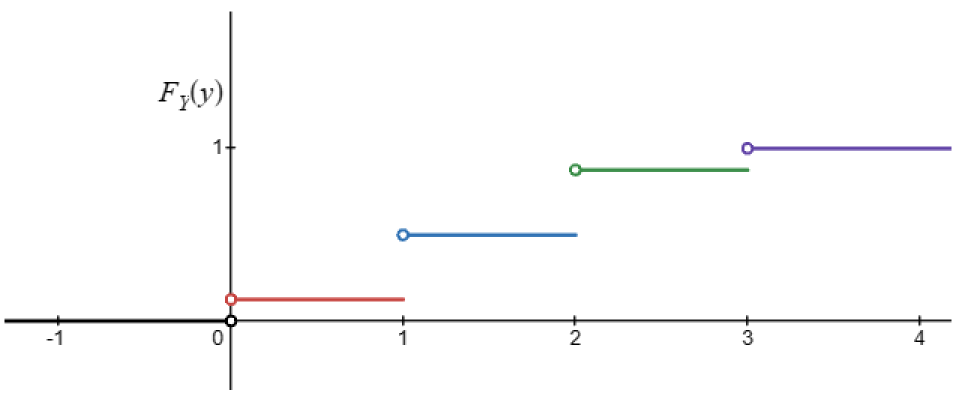
$$\begin{aligned}
F_X(y) &= P_X((-\infty, y]) \\
&= \lim_{n\to\infty} P_X((-n, y]) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{y} f_X(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{y} f_X(x)dx
\end{aligned}$$

5. Dibuje la función de distribución acumulada para los siguientes casos

(a) $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$



(b) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y < 0 \\ 1/8, & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1/2, & \text{si } 1 \leq y < 2 \\ 7/8, & \text{si } 2 \leq y < 3 \\ 1, & \text{si } y \geq 3 \end{cases}$



(c) $F_Z(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z \leq 0 \\ \dfrac{z^2}{2}, & \text{si } 0 < z \leq 1/2 \\ \dfrac{z+1}{3}, & \text{si } 1/2 < z \leq 1 \\ 1, & \text{si } z > 1 \end{cases}$