Modelos Probabilísticos

Ayudantía 11

Camilo González

10 de Noviembre del 2020

Ejercicio 1

Sea el $S = [0, 1]$ espacio muestral con distribución de probabilidad uniforme, sea $X_n(s) = s + s^n$ y $X(s) = s$. Demuestre que X_n converge casi seguramente a X.

Ejercicio 2

Si $X_1, X_2, \ldots \overset{iid}{\sim}$ Uniforme$(0, 1)$

$a)$ Demuestre que $X_{(n)}$ converge en probabilidad a 1.

$b)$ Encuentre una variable aleatoria que converja en distribución a una exponencial(1).

Ejercicio 3

Un fabricante de folletos los empaqueta en cajas de 100. Se sabe que, en promedio, los folletos pesan 1 onza, con una desviación estándar de 0.05 onzas. El fabricante está interesado en calcular

$$P(\text{100 folletos pesen mas que 100.4 onzas})$$

un número que ayudaría a detectar si se están colocando demasiados folletos en una caja. Explica cómo calcularías el valor (¿aproximado?) de esta probabilidad.

Ejercicio 4

Sea $X_1, X_2, ...$ una secuencia de variables aleatorias que converge en probabilidad a una constante a. Suponga que $P\left(X_i > 0\right) = 1$ para todos los i.

$a)$ Verifique que las secuencias definidas por $Y_i = \sqrt{X_i}$ y $Y_i' = a/X_i$ converjan en probabilidad.

$b)$ Use los resultados del inciso $a)$ para probar el hecho de que σ/S_n converge en probabilidad a 1.

Ejercicio 5

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza σ^2. Muestra que

$$\mathrm{E}\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right)}{\sigma} = 0 \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}\,\frac{\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mu\right)}{\sigma} = 1$$