Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 6

1. (a) (3pts) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones biyectivas. Pruebe que $f\circ g$ es biyectiva y que

$$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}.$$

(b) (3pts) Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ la función definida por

$$f(x)=x-2\sqrt{x}+1.$$

Sabiendo que f es estrictamente decreciente, **lo que no debe probar**, demuestre que f es biyectiva y calcule su inversa.

Solución.

(a) Sea $x\in\mathbb{R}$. Veamos que

$$(f\circ g)\circ(g^{-1}\circ f^{-1})(x)=f\circ[(g\circ g^{-1})(f^{-1}(x))]=f\circ f^{-1}(x)=x. \tag{1}$$

y que

$$(g^{-1}\circ f^{-1})\circ(f\circ g)(x)=g^{-1}\circ[(f^{-1}\circ f)(g(x))]=g^{-1}\circ g(x)=x. \tag{2}$$

Luego, dado que $(f\circ g)\circ(g^{-1}\circ f^{-1})=(g^{-1}\circ f^{-1})\circ(f\circ g)=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, concluimos que $(f\circ g)$ es biyectiva y su inversa está dada por $g^{-1}\circ f^{-1}$.

(b) Dado que f es estrictamente decreciente, deducimos que f es inyectiva. Por lo tanto, para probar que es biyectiva, basta con mostrar que es sobreyectiva. Sea $y\in[0,1]$. Afirmamos que $\exists x\in[0,1]$ tal que $y=f(x)$. En efecto,

$$y=f(x)\iff y=x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x}-1)^2\iff\sqrt{y}=|\sqrt{x}-1|=1-\sqrt{x}\iff(1-\sqrt{y})^2=x\in[0,1].$$

Luego, f es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. Además, $f^{-1}:[0,1]\to[0,1]$ está definida por

$$f^{-1}(x)=(1-\sqrt{x})^2.$$

Puntaje Pregunta 1.

(a) 1 punto por (1), 1 punto por (2) y 1 punto por concluir.

(b) 0.5 puntos por indicar que f es inyectiva, 1.5 puntos por probar que f es sobreyectiva y 1 punto por encontrar f^{-1}.

2. Sea $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ y considere la función biyectiva $f : \mathbb{R} \to \mathrm{Rec}(f)$ definida por

$$f(x) = \frac{b^x - b^{-x}}{2} \, .$$

Halle la inversa de la función $f(x)$.

Solución. Debemos despejar x en función de y en la ecuación

$$y = f(x) \Longleftrightarrow y = \frac{b^x - b^{-x}}{2} \, .$$

Multiplicando por $2b^x$, obtenemos

$$2yb^x = b^{2x} - 1 \Longleftrightarrow b^{2x} - 2yb^x - 1 = 0 \, .$$

Esta última ecuación es de forma cuadrática, ya que si hacemos $z = b^x$, resulta $z^2 - 2yz - 2 = 0$. Por tanto, despejando z, o sea b^x, aplicando la fórmula de la ecuación cuadrática, se obtiene que

$$b^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \, .$$

Descartamos el signo menos ya que b^x es siempre positivo y $\sqrt{y^2 + 1} > y$, se sigue que

$$b^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Longleftrightarrow x = \log_b(y + \sqrt{y^2 + 1}) \, .$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \log_b(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Puntaje Pregunta 2.

- 2 puntos por resolver $y = f(x)$ y obtener una ecuación cuadrática realizando el cambio $z = b^x$.
- 2 puntos por usar la ecuación cuadrática y descartar el signo menos.
- 2 puntos por resolver la ecuación $b^2 = y + \sqrt{y^2 + 1}$ y exhibir la inversa de $f(x)$.