PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2021

Interrogación 1 - MAT1610

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{x} = 1$.

   a) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$, determine el valor de $\lim_{x\to 0} \frac{|f(\alpha x)|}{x}$.

   b) Determine si el siguiente límite existe o no y, de existir, calcule su valor

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(|f(x)|)}{x}.$$

Solución:

a) Al realizar el cambio de variable $u = \alpha x$ tenemos que $u \to 0$ cuando $x \to 0$ obteniendo que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{|f(\alpha x)|}{x} &= \lim_{u\to 0} \frac{\alpha|f(u)|}{u} \\ &= \alpha \lim_{u\to 0} \frac{|f(u)|}{u} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por realizar correctamente el cambio de variable.
- (1 punto) por realizar correctamente el álgebra.
- (1 punto) por determinar que es α.

b) Observe que al hacer el cambio de variable $u = |f(x)|$ tenemos, por hipótesis, que $u \to 0$ cuando $x \to 0$, luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(|f(x)|)}{|f(x)|} = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u} = 1$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(|f(x)|)}{x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(|f(x)|)}{x} \cdot \frac{|f(x)|}{|f(x)|} \right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(|f(x)|)}{|f(x)|} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{|f(x)|}{x} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por realizar correctamente el álgebra.
- (1 punto) por usar correctamente el límite fundamental.
- (1 punto) por determinar que es 1.

2. Se define, para todo $x \in \mathbb{R}$, la función **tangente hiperbólica**, como

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

a) Determine las asíntotas horizontales al gráfico de $y = \tanh(x)$.

b) Demuestre que, dado $c \in (0,1)$, existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x_0) = c$.

Solución:

a) Para determinar las asíntotas estudiamos los siguientes límites:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(1 - e^{-2x})}{(1 + e^{-2x})} \\ &= 1. \end{aligned}$$

por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)} \\ &= -1. \end{aligned}$$

por lo tanto existen dos asíntotas horizontales; $y = 1$ e $y = -1$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por el primer límite.
- (1 punto) por el segundo límite.
- (1 punto) por decir cuales son las asíntotas.

b) Del inciso anterior tenemos que $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$, entonces dado $c \in (0,1)$ sabemos que si x es lo suficientemente grande podemos estar lo suficientemente cerca de 1, en particular estar más cerca de 1 que c, por lo tanto existe $b > 0$ con $\tanh(b) > c$ y podemos ver que:

- $\tanh(0) = 0 < c$ y que $\tanh(b) > c$.
- $\tanh(x)$ es continua en $[0,b]$ ya que es cociente de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ cuyo denominador nunca se anula.

por el TVI, de los dos puntos anteriores tenemos que existe $x_0 \in (0,b)$ con $\tanh(x_0) = c$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por justificar la existencia del b en función del límite anterior.
- (1 punto) por chequear hipótesis de TVI.
- (1 punto) por concluir.

3. La función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) + x^2 & \text{si } x \geq 1, \\ \\ e^{3x-3} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

es continua en $x = 1$. Determine si f es derivable en $x = 1$. Basado en sus resultados, bosqueje el gráfico de la función f en torno a $x = 1$.

Solución:

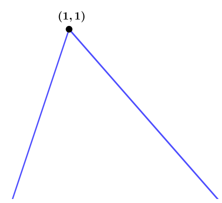
Sabemos que f es derivable en $x = 1$ si y solo si $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-1}{h}$ existe, para esto veremos los límites laterales.

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-1}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(\pi h + \pi) + h^2 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(\pi h) + h^2 + 2h}{h} \\ &= -\pi + 2. \end{aligned}$$

por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-1}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{e^{3h}-1}{h}\\ &= 3\lim_{h\to 0^-}\frac{e^{3h}-1}{3h}\\ &= 3.\end{aligned}$$

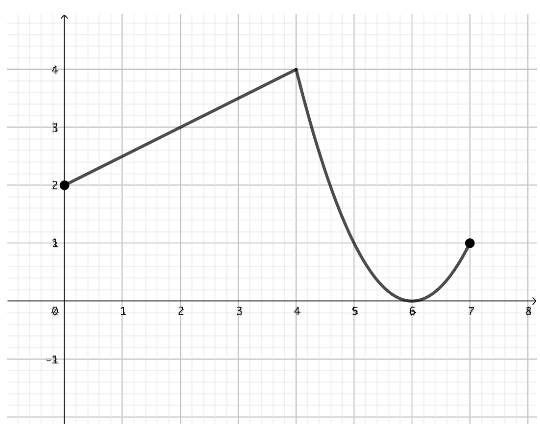
como los límites laterales son distintos tenemos que f no es derivable en $x=1$, de los límites anteriores vemos que por la derecha se aproxima a una recta de pendiente $2-\pi$ y por la izquierda a una recta de pendiente 3, por lo que el bosquejo en torno al punto $(1,1)$ es:



Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por límite lateral izquierdo.
- (2 puntos) por límite lateral derecho.
- (1 punto) por concluir que no es derivable en $x=1$.
- (1 punto) por el gráfico.

4. Sea f la función cuyo gráfico se muestra a continuación:



a) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{(f(x))^2-4f(x)+3}{(x-2)}$

b) Si $g(x)=\dfrac{2f(x)}{e^x f(x)+x^2}$, determine $g'(2)$..

Solución:

a) Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{(f(x))^2-4f(x)+3}{(x-2)} &= \lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-3)(f(x)-1)}{(x-2)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(f(x)-f(2))(f(x)-1)}{(x-2)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)}\lim_{x\to 2}(f(x)-1)\\
&= f'(2)(f(2)-1)\\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por descomponer algebraicamente
- (1 punto) por separar en dos límite conocidos
- (1 punto) por determinar el valor

b) Usando las reglas algebraicas de derivación tenemos que

$$g'(x)=\frac{2f'(x)(e^x f(x)+x^2)-2f(x)(e^x f(x)+e^x f'(x)+2x)}{(e^x f(x)+x^2)^2}$$

reemplazando tenemos que

$$g'(2)=\frac{-20-18e^2}{(3e^2+4)^2}.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por usar bien la regla del cociente.
- (1 punto) por usar bien la regla del producto.
- (1 punto) por determinar el valor.