Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2017

COLOCAR NOTAS
NO PUNTAJE.

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución a la Interrogación N° 3

1. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.

   Demuestre que Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

   Solución:

   Denotaremos $W = Gen\{u, v\}$. Para probar que W es un subespacio probaremos:

   - $\mathbf{O} \in W$.
   - Si $w_1, w_2 \in W$ entonces $w_1 + w_2 \in W$.
   - Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $w \in W$ entonces $\lambda w \in W$.

   Para la primera parte basta considerar la combinación lineal,

$$\mathbf{0} = 0 \cdot u + 0 \cdot v \in W.$$

2pt por probar no vacío.

   Para la segunda parte, recordamos que W es por definición el conjunto de todas las combinaciones lineales de u, v, luego si $w_1, w_2 \in W$ se tiene que, para algún $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}$

$$w_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v, \qquad w_2 = \alpha_2 u + \beta_2 v,$$

   de donde

$$w_1 + w_2 = \alpha_1 u + \beta_1 v + \alpha_2 u + \beta_2 v = (\alpha_1 + \alpha_2) \cdot u + (\beta_1 + \beta_2) \cdot v \in W.$$

2pt

   Finalmente si $w = \alpha u + \beta v \in W$ entonces

$$\lambda \cdot w = \lambda(\alpha u + \beta v) = (\lambda\alpha) \cdot u + (\lambda\beta) \cdot \in W$$

2pt

   Puntaje:

   PENDIENTE

2. Denotamos por $\mathcal{M}_{2\times 2}$ al espacio vectorial de todas las matrices de 2×2. Sea $T:\mathcal{M}_{2\times 2}\to\mathcal{M}_{2\times 2}$ definida por $T(A)=A-A^T$, donde A es una matriz de 2×2.

   a) [1 pto.] Demuestre que T es una transformación lineal.

   b) [2 pts.] Encuentre una base para el núcleo[1] de T.

   c) [1.5 pts.] Demuestre que, si $A\in\mathcal{M}_{2\times 2}$ y $B=T(A)$ entonces $B^T=-B$.

   d) [1.5 pts.] Sea B cualquier elemento de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ tal que $B^T=-B$. Encuentre una matriz A tal que $T(A)=B$.

Solución:

a) Para probar que la transformación es lineal, consideremos $\lambda\in\mathbb{R}$ y B,C matrices de 2×2.

$$\begin{aligned}T(\lambda B+C)&=(\lambda B+C)-(\lambda B+C)^t\\&=\lambda B+C-\lambda B^t-C^t\\&=\lambda(B-B^t)+(C-C^t)\\&=\lambda T(B)+T(C).\end{aligned}$$

1pt.

b) Dada una matriz $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ buscamos determinar el conjunto de las matrices tales que $T(A)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Es decir,

$$T(A)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

O equivalentemente,

$$\begin{pmatrix}0&b-c\\c-b&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

de donde

$$b-c=0,\qquad b=c.$$

1pt

Es decir, el núcleo de T está formado por los elementos de la forma:

$$\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Se concluye que una base del núcleo es:

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

1pt

c) Si $B=T(A)$ entonces

$$\begin{aligned}B&=A-A^t,\qquad\text{de donde}\\B^t&=(A-A^t)^t\\B^t&=A^t-A\\B^t&=-(A-A^t)\\B^t&=-B.\end{aligned}$$

0.5

1.0

[1] También llamado "*espacio nulo*".

d) Para una matriz B dada, consideremos $A = \dfrac{B - B^t}{4}$ la cual satisface: 0.5

$$
\begin{aligned}
T(A) &= T\left(\frac{B - B^t}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(B - B^t - (B^t - B)\right) \\
&= \frac{1}{4}(2B - 2B^t), \qquad \text{usando} \quad -B = B^t \\
&= \frac{1}{4} \cdot 4B \\
&= B
\end{aligned}
$$

1.0

Puntaje:

PENDIENTE

En lo que sigue, $\mathbb{P}_n$ es el conjunto de polinomios de grado $\leq n$.

3. *a)* En $\mathbb{P}_2$, encuentre la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B} = \{1+t^2, t-3t^2, 1+t-3t^2\}$ a la base estándar de $\mathbb{P}_2$, $\{1, t, t^2\}$.

   b) Encuentre $\mathbf{q}$ en $\mathbb{P}_2$, sabiendo que $[\mathbf{q}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solución:

a) Denotemos por $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$ a la base estándar. Para determinar la matriz de cambio base pedida, P, esta se determina por:

$$P = \left([p_1]_C \;\vdots\; [p_2]_C \;\vdots\; [p_3]_C \right)$$

donde

$$p_1(t) = 1+t^2, \quad p_2(t) = t-3t^2, \quad p_3(t) = 1+t-3t^2.$$ 2pt

En nuestro caso,

$$\begin{aligned} p_1 &= 1\cdot\mathbf{1} + 0\cdot\mathbf{t} + 1\cdot\mathbf{t}^2 \\ p_2 &= 0\cdot\mathbf{1} + 1\cdot\mathbf{t} - 3\cdot\mathbf{t}^2 \\ p_3 &= 1\cdot\mathbf{1} + 1\cdot\mathbf{t} - 3\cdot\mathbf{t}^2. \end{aligned}$$ 1pt.

Con lo cual

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$ 1pt.

b) Para encontrar el polinomio pedido, sabemos que si $[q]_{\mathcal{B}} = (-1, 1, 2)^t$ entonces

$$q(t) = -1\cdot(1+t^2) + 1\cdot(t-3t^2) + 2\cdot(1+t-3t^2) = \mathbf{1} + 3\mathrm{t} - 10\mathrm{t}^2$$ 2pt

Puntaje:

PENDIENTE

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Calcule el polinomio característico de A, y encuentre sus raíces.

   Ayuda: Una de sus raíces es un número natural menor que 5.

b) Determine si A es diagonalizable. Si lo es, encuentre dos matrices P y D tales que D es diagonal y $A = PDP^{-1}$; en caso contrario explique por qué no lo es.

c) Utilizando lo anterior, exprese A^{2017} en términos de P y D.

Solución:

a) El polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 4-\lambda & 1 \\ -1 & =1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 18 - 21\lambda + 8\lambda^2 - \lambda^3.$$

   Usando la ayuda dada, descubrimos que 2 es una raíz de este polinomio (o que 3 es una raíz). En cualquier caso, tras dividir por $2-\lambda$ (o por $3-\lambda$) y factorizar, llegamos a que el polinomio característico es

$$18 - 21\lambda + 8\lambda^2 - \lambda^3 = (2-\lambda)(3-\lambda)^2,$$

   por lo que sus raíces son 2 y 3.

b) Los valores propios de A son $\lambda = 2$ (con multiplicidad 1) y $\lambda = 3$ (con multiplicidad 2).

   Para saber si A es o no diagonalizable, debemos verificar si la dimensión de cada espacio propio es igual a la multiplicidad algebraica del valor propio correspondiente.

   Como la multiplicidad del valor propio $\lambda = 2$ es 1, la única posibilidad de que A no sea diagonalizable es que la dimensión del espacio propio correspondiente a $\lambda = 3$ sea 1.

   Así, buscamos los vectores propios correspondientes a $\lambda = 3$. Para ello, resolvemos la ecuación $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ o —equivalentemente— $(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, lo que es lo mismo que

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

   La matriz ampliada escalonada reducida por filas es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, por lo que el sistema queda equivalente a $x_1 = -x_2 - x_3$.

   Así, una base para este espacio propio está dado por las elecciones $(x_2, x_3) = (1, 0)$ y $(x_2, x_3) = (0, 1)$, que corresponde a los vectores propios $(-1, 1, 0)$ y $(-1, 0, 1)$. Así, la dimensión de este espacio propio es 2, por lo que la matriz A es diagonalizable.

   Para el valor propio $\lambda = 2$, debemos resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz ampliada escalonada reducida por filas es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, por lo que el sistema queda equivalente a $x_1 = -x_2 = x_3$.
Así, un vector propio correspondiente a $\lambda = 2$ es $(1, -1, 1)$.
De todo lo anterior llegamos a que la matriz A puede ser diagonalizada como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1},$$

o sea,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

c) Claramente,

$$\begin{aligned} A^{2017} &= \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{\text{2017 veces}} = \underbrace{(PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdot (PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})}_{\text{2017 veces}} \\ &= \underbrace{PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D(P^{-1}P) \cdots (P^{-1}P)DP^{-1}}_{D \text{ aparece 2017 veces}} \\ &= \underbrace{PDI_3DI_3DI_3 \cdots I_3DP^{-1}}_{D \text{ aparece 2017 veces}} = \underbrace{PDDD \cdots DP^{-1}}_{D \text{ aparece 2017 veces}} = PD^{2017}P^{-1}. \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$A^{2017} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}^{2017} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Puntaje:

a)
- Por calcular correctamente el polinomio característico: 1 punto.
- Por factorizar correctamente el polinomio característico: 0,5 puntos.

b)
- Por indicar que la condición para que A sea diagonalizable es que la dimensión del espacio propio correspondiente a $\lambda = 3$ sea 2 (o, equivalentemente, que haya dos vectores propios l.i. correspondientes a $\lambda = 3$): 0,5 puntos.
- Por encontrar dos vectores propios l.i. correspondientes a $\lambda = 3$ (que no necesariamente deben ser los aquí mostrados): 1 punto (0,5 por cada vector).
- Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = 2$: 0,5 puntos.
- Por escribir P correctamente: 0,5 puntos.
- Por escribir D correctamente: 0,5 puntos.

c)
- Por desarrollar A^{2017} reemplazando A por PDP^{-1}, 1 punto.
- Por llegar a $A^{2017} = PD^{2017}P^{-1}$, 0,5 puntos.
  No es necesario que escriban P y D explícitamente.

A lo anterior se le suma el punto base.

5. Sea $A_{n\times n}$ una matriz que satisface $A^4 = 9A^3 - 20A^2$. Pruebe que si 4 ó 5 no son valores propios de A entonces A es no invertible.

Solución:

De la condición $A^4 = 9A^3 - 20A^2$ se deduce que $A^4 - 9A^3 + 20A^2 = 0$, o sea $A^2(A-4I_n)(A-5I_n) = 0$, o sea, dado cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $A^2(A-4I_n)(A-5I_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Si 4 o 5 no son valores propios de A, entonces dado cualquier $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \neq 0$, se tiene $\mathbf{v} = (A - 4I_n)\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{w} = (A-5I_n)\mathbf{v} = (A-5I_n)(A-4I_n)\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Pero entonces $A^2(A-4I_n)(A-5I_n)\mathbf{u} = A^2\mathbf{w} = \mathbf{0}$, por lo que A no es invertible (si lo fuera, como $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, se tendría $A\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ y por lo tanto $A^2\mathbf{w} = A(A\mathbf{w}) \neq \mathbf{0}$).

Puntaje:

- Por plantear una demostración correctamente estructurada, 2 puntos.
- Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 2 puntos.
- Por justificar adecuadamente los argumentos, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

6. Sea A una matriz tal que $\dim(\text{Nul}(A)) = 3$ y

$$A^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad A^t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determine las dimensiones de $\text{Col}(A)$, de $\text{Fila}(A)$ y de $\text{Nul}(A^T)$. Justifique.

b) Determine, en los casos en que sea posible, bases para los espacios $\text{Nul}(A^T)$ y $\text{Fila}(A)$.

Solución:

a) Antes de resolver el problema comencemos recordando algunos resultados. Para un matriz $A_{n\times m}$ dada, se tiene que:

$$dim(Nul(A)) + dim(Col(A)) = m.$$

$$dim(Nul(A^t)) + dim(Col(A^t)) = n.$$

$$dim(Col(A)) = dim(Col(A^t)).$$

Ahora en particular con los datos del problema, tenemos que $dim(Nul(A)) = 3$ y que la matriz A posee 4 filas y 5 columnas. Con lo cual, los resultados se puede resumir como sigue:

$$3 + dim(Col(A)) = 5, \quad \text{de donde,} \quad dim(Col(A)) = 2, \qquad 1\ pt.$$

$$dim(Col(A)) = dim(Col(A^t)), \quad \text{de donde,} \quad dim(Col(A^t)) = 2.$$

$$dim(Nul(A^t)) + 2 = 4, \quad \text{de donde,} \quad dim(Nul(A^t)) = 2 \qquad 1\ pt.$$

En resumen,

$$dim(Col(A)) = 2, \qquad dim(Fila(A)) = dim(Col(A^t)) = 2, \quad dim(Nul(A^t)) = 2. \qquad 1\ pt.$$

b) Sabemos que $Nul(A^t)$ tiene dimensión dos y de los datos del problema, los vectores $(1, -1, 1, 1)^t$; $(2, -1, -1, 1)^t$ son elementos linealmente independientes que pertenecen al $Nul(A^t)$. Se concluye que el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad 1.5$$

es una base de $Nul(A^t)$. Por otro lado no es posible encontrar, con los datos del problema, una base para $Fila(A)$, del cual sólo sabemos su dimensión pero no conocemos vectores que puedan generarlo.

1.5

Puntaje:

PENDIENTE

7. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ vectores de $\mathbb{R}^4$, y sea V un subespacio de $\mathbb{R}^4$ tal que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es base de V. Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que su rango[2] es generado por $\mathbf{v}_1$ y

$$\mathrm{Nul}(T) = \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}.$$

Demuestre que T (o, equivalentemente, su matriz estándar) es diagonalizable.

Solución:

Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, estos tres vectores son l.i.

Si $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Nul}(T) = \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ por lo que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un conjunto l.d. de vectores, lo que contradice lo anterior. De esta contradicción deducimos que $T(\mathbf{v}_1) \neq \mathbf{0}$, o sea, $T(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{v}_1$ con $k \neq 0$.

Así, $T(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{v}_1$, $T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}_2$ y $T(\mathbf{v}_3) = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{v}_3$, por lo que la matriz de la transformación T en la base $\{\mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$ es

$$D = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo que T es diagonalizable.

Puntaje:

- Por determinar que $\mathbf{v}_1$ es vector propio de T (aunque no se diga explícitamente), 2 ptos.
- Por expresar T respecto a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, 2 ptos.
- Por llegar a la matriz diagonal que representa a T, 2 ptos.

A lo anterior se le suma el punto base.

[2]También llamado "*recorrido*" o "*imagen*".

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) El conjunto de polinomios $\mathbf{p}(t) \in \mathbb{P}_4$ qúe satisfacen $\mathbf{p}(3) \cdot \mathbf{p}(1) = 0$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_4$.

   b) Si una matriz A con entradas reales tiene un valor propio complejo (con parte imaginaria $\neq 0$), entonces todo vector propio de A correspondiente a ese valor propio debe tener al menos una coordenada compleja (con parte imaginaria $\neq 0$).

   c) Toda matriz invertible es diagonalizable.

Solución:

a) **FALSO.**
Dos polinomios que satisfacen la condición dada son $\mathbf{p}_1(t) = t - 3$ y $\mathbf{p}_2(t) = t - 1$. Sin embargo, su suma $\mathbf{p}_3 = (t-3) + (t-1) = 2t - 4$ no la cumple: $\mathbf{p}_3(1) = 2 - 4 = -2$ y $\mathbf{p}_3(3) = 6 - 4 = 2$, por lo que $\mathbf{p}_3(1) \cdot \mathbf{p}_3(3) = -2 \cdot 2 = -4 \neq 0$.
Así, el conjunto dado no es cerrado bajo suma, por lo que no es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_4$.

b) **VERDADERO.** La idea general es la siguiente:
Si la afirmación no fuera verdadera, existirían un vector $\mathbf{v}$ con coordenadas reales y un valor propio complejo de A, digamos z (con parte imaginaria $\neq 0$) tales que $A\mathbf{v} = z\mathbf{v}$. Pero todas las coordenadas del vector $A\mathbf{v}$ son reales (ya que todas las entradas de A y todas las coordenadas de $\mathbf{v}$ son reales), mientras que $z\mathbf{v}$ debe tener al menos una coordenada con parte imaginaria $\neq 0$ (de hecho, cualquier coordenada $\neq 0$ de $\mathbf{v}$, multiplicada por z tiene parte imaginaria $\neq 0$).

c) **FALSO.** Considérese la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Esta matriz es claramente invertible ($\det A = 1$). Sin embargo, no es diagonalizable (¡compruébelo!).

Puntaje:

En cada parte, por dar un buen contraejemplo (específico o genérico, como los mostrados más arriba), 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.