Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Primer Semestre 2014

MAT1620 - Cálculo 2
Solución de la Interrogación N°2

1. a) Dada la espiral en coordenadas polares $r = f(\theta) = \theta^p$, para $\theta \in [2\pi, \infty)$, determine los valores de p de modo que dicha espiral tenga longitud finita.

Solución. Sabemos que la fórmula para calcular el largo de curva de unq función polar en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ está dada por

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta.$$

Luego, aplicando lo anterior al problema que se nos presenta, obtenemos que

$$S = \int_{2\pi}^{\infty} \sqrt{\theta^{2p} + p^2\theta^{2p-2}} d\theta.$$

Por lo tanto el término dominante entre θ^{2p} y θ^{2p-2} (el mayor de ellos cuando $\theta \to \infty$) es θ^{2p}. En efecto, $\theta^{2p} > \theta^{2p-2}$ equivale a $1 > \theta^{-2}$, lo cual se cumple para todo $\theta > 1$.

Por lo tanto,

$$\theta^p \leq \sqrt{\theta^{2p} + p^2\theta^{2p-2}} \leq \sqrt{1+p^2} \cdot \ \theta^p,$$

entonces la espiral tiene longitud finita si y sólo si

$$\int_{2\pi}^{\infty} \theta^p d\theta,$$

converge, es decir, si $p < -1$.

b) Calcule el área encerrada por la espiral $r(\theta) = \exp(-\theta)$ entre θ_0 y $\theta_0 + 2\pi$, para algún θ_0 fijo.

Solución. Sabemos que la fórmula para calcular el área encerrada entre los ángulos θ_1 y θ_2 por una curva polar, está dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} [f(\theta)]^2 d\theta,$$

por lo que aplicándolo a nuestro problema obtenemos que

$$A = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} [e^{-\theta}]^2 d\theta = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-2\theta} \right) \Bigg|_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} = \frac{1}{4} \left[e^{-2\theta_0} - e^{-2\theta_0 - 4\pi} \right] = \frac{e^{-2\theta_0}}{4} [1 - e^{-4\pi}].$$

2. a) Dados dos números reales L_1 y L_2, determine una serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n,$$

donde la sucesión $(a_n)_n$ posee infinitos términos no nulos, de modo que $f(0) = L_1$ y $f(1) = L_2$. Fundamente todas sus aseveraciones.

Solución. Consideremos la serie de potencia

$$\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^2}.$$

Notemos que se cumple que $\zeta(0) = 0$ y $\zeta(1) \neq 0$, ya que

$$\zeta(1) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2},$$

la cual es una serie de términos positivos y convergente. Luego definamos la serie $f(x)$ por

$$f(x) = L_1 + \frac{(L_2 - L_1)}{\zeta(1)} \cdot \zeta(x),$$

la cual es una serie que cumple que

$$f(0) = L_1 + \frac{(L_2 - L_1)}{\zeta(1)} \cdot \zeta(0) = L_1,$$

y

$$f(1) = L_1 + \frac{(L_2 - L_1)}{\zeta(1)} \cdot \zeta(1) = L_1 + (L_2 - L_1) = L_2,$$

que es lo que se buscaba.

Nota. Lo anterior es una serie dentro de infinitas posibles series de potencia que cumplen lo pedido, basta considerar

$$\zeta_p(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^p},$$

para $p > 1$ y

$$f(x) = L_1 + \frac{(L_2 - L_1)}{\zeta_p(1)} \cdot \zeta_p(x).$$

b) Demuestre que si $r \in \mathbb{R}^+$ y la sucesión $(a_n r^n)_n$ es acotada, entonces para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - c| < r$, la serie

$$\sum_{n\geq 1} a_n (x-c)^n,$$

es absolutamente convergente.
HINT: Compare la serie anterior con una serie geométrica.

Solución. Sea M la cota de la sucesión $(a_n r^n)_n$, es decir, $|a_n r^n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces se tendrá que como $|x-c| < r$ se cumple que

$$|a_n(x-c)^n| = \left| a_n r^n \cdot \frac{1}{r^n} \cdot (x-c)^n \right| = |a_n r^n| \left| \frac{x-c}{r} \right|^n \leq M \left| \frac{x-c}{r} \right|^n.$$

Pero como $|x-c| < r$ entonces $\frac{|x-c|}{r} < 1$ y entonces la serie

$$\sum_{n\geq 1} M \left| \frac{x-c}{r} \right|^n,$$

es convergente absolutamente, y por criterio de comparación de series,

$$\sum_{n\geq 1} a_n(x-c)^n,$$

es convergente absolutamente para todo $|x-c| < r$.

3. Calcule el radio y el intervalo de convergencia para la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(n+\sin(n))x^n}{n^2+n},$$

especificando con claridad qué pasa en los extremos del intervalo.

Solución. Lo primero es obtener el radio de convergencia de la serie de potencia anterior, el cual se obtiene utilizando el criterio del cuociente, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)+\sin(n+1)}{(n+1)^2+(n+1)}}{\frac{n+\sin(n)}{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)+\sin(n+1)}{(n+1)^2+(n+1)} \cdot \frac{n^2+n}{n+\sin(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})+\frac{\sin(n+1)}{n}}{(1+\frac{1}{n})^2+(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{\sin(n)}{n}} = 1.$$

Luego, el radio de convergencia para la serie de potencias es 1.

Para el intervalo de convergencia, debemos analizar qué pasa al evaluar la serie en -1 y 1, es decir, estudiar la convergencia de las series

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n+\sin(n))}{n^2+n} (\text{Para } x=-1) \text{ y } \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n(n+\sin(n))}{n^2+n} (\text{Para } x=1).$$

Para ello debemos notar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+\sin(n))}{n^2+n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

es decir,

$$\frac{(n+\sin(n))}{n^2+n} \sim \frac{1}{n},$$

por lo que tendremos que el estudio de las dos series anteriores se reduce a estudiar el comportamiento de las series

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} (\text{Para } x = -1) \text{ y } \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} (\text{Para } x = 1).$$

Luego, las series anteriores son la armónica y armónica alternante respectivamente, por ello la primera sabemos que diverge mientras la segunda converge.

Dicho todo lo anterior, nos permitimos concluir que la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n + \sin(n))}{n^2 + n},$$

es divergente, mientras que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n (n + \sin(n))}{n^2 + n},$$

es convergente, y así se tiene que el intervalo de convergencia es (-1,1].

4. Decida en cada una de las siguientes series o integrales, si convergen o no, justificando cada una de sus afirmaciones

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{n}$.

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x-1}{x^3 \ln(x)} dx$

Solución. a) Observamos que

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{n} \sim \frac{1}{n^4}.$$

En efecto, usando el criterio del límite se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{n}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\frac{1}{n^3}} = 1.$$

Luego como la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4},$$

es convergente, entonces la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{n},$$

también lo será.

b) Observemos que para n grande, se tiene que

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}.$$

En efecto, si tomamos en cuenta que el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

entonces como $\frac{1}{n} \to 0$ cuando $n \to \infty$, el lmite anterior nos permite deducir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Luego, se tendrá que

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^{3/2}},$$

por los mismos argumentos expresados anteriormente, y como la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}},$$

converge, podemos concluir que la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right),$$

también.

c) Observamos que la integral que se presenta en el problema c) es mixta, ya que tiene una singularidad en $x = 1$, por lo tanto debemos separar dicha integral en dos

$$I = \int_1^\infty \frac{x-1}{x^3 \ln(x)} dx = \underbrace{\int_1^2 \frac{x-1}{x^3 \ln(x)} dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^\infty \frac{x-1}{x^3 \ln(x)} dx}_{I_2}.$$

Luego, analizando la convergencia de I_1, solo debemos notar que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3 \ln(x)} = 1,$$

ya que

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^3} = 1 \text{ y } \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1.$$

Por lo que se concluye que $\frac{x-1}{x^3\ln(x)} \sim 1$, y por ello I_1 converge.

Por otro lado, observamos que para I_2 se puede hacer el cociente por la función $\frac{1}{x^2}$, obteniendo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x^3\ln(x)}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^2}{x^3\ln(x)} = 0,$$

es decir, si $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx$ converge entonces I_2 converge. Pero

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\bigg|_2^\infty = \frac{1}{2} < \infty,$$

entonces se concluye que I_2 converge. Finalmente, como $I = I_1 + I_2$ y como I_1 e I_2 convergen, se concluye que I converge.

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas, sin calculadoras.