Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2014

**MAT 1620 – Cálculo II**
**Examen**

1. Determinar el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = 2\sqrt{x}$, $1 \leqslant x \leqslant 2$, alrededor del eje $x$.

**Solución.** Tenemos que

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

entonces el área de la superficie generada al hacer girar la curva $y = 2\sqrt{x}$ alrededor del eje $x$ es

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 2\pi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}dx \\ &= 4\pi \int_1^2 \sqrt{x+1}dx = 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\,. \end{aligned}$$

**Puntaje:** Total 6,0 puntos

- 1,5 puntos por conocer la fórmula para determinar el área de la superficie.
- 1,5 puntos por calcular la derivada de $y$.
- 1,5 puntos por calcular la expresión $y\sqrt{1+(dy/dx)^2}$.
- 1,5 puntos por calcular la integral.

2. Considere la serie de potencias

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n}\,.$$

a) Demuestre que si una serie de potencias $\sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia $R$ entonces $\sum a_n x^{2n}$ tiene radio de convergencia $\sqrt{R}$.

b) Calcule el radio de convergencia de $S$ (puede usar la parte a) aunque no la haya demostrado). Determine el intervalo de convergencia de la serie indicando con claridad que pasa en los extremos del intervalo.

c) Determinar la función $f$ asociada a la serie.
(Se sugiere derivar la serie, calcular su valor e integrar)

**Solución.**

a) Si $f(x) = \sum a_n x^n$ tiene radio de convergencia $R$ entonces $f(x)$ converge para todo $|x| < R$ y diverge para todo $|x| > R$. Como $f(x^2) = \sum a_n x^{2n}$ entonces $f(x^2)$ converge para todo $|x^2| < R$ y diverge para $|x^2| > R$. Se sigue que el radio de convegencia de $f(x^2) = \sum a_n x^{2n}$ es $\sqrt{R}$.

**Puntaje:** a) Total 2,0 puntos

b) El radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{2n}$ es $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n} = 1$ .

Entonces, por lo mostrado en a), el radio de convergencia de la serie $S$ es $\boxed{\sqrt{R} = 1}$.

Note que en $x = 1$ y en $x = -1$ la serie es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}$.

Por el criterio de la serie alternante, la serie es convergente.

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $I = [-1, 1]$.

**Puntaje:** b) Total 2,0 puntos

- 1 punto por determinar el radio de convergencia.
- 1 punto por determinar el intervalo de convergencia.

c) Si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n}$ entonces su derivada es

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+2}x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{x}{1+x^2} .$$

Integrando con respecto a $x$ esta última expresión

$$f(x) = \int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C .$$

Para determinar la constante $C$, observe que si evaluamos la serie en $x = 0$ obtenemos el valor de $f(0)$ y usando la expresión de arriba se tiene que $0 = f(0) = \frac{1}{2}\ln(1) + C = C$. Entonces la función $f$ asociada a la serie es $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

**Puntaje:** c) Total 2,0 puntos

- 1 punto por derivar la serie y calcular el valor de la serie.
- 0,5 puntos por integrar.
- 0,5 puntos por determinar la constante de integración.

3. Considere la curva que es la intersección de las superficies

$$2x - y + z = 2 \qquad \text{y} \qquad 3y^2 - 4z = -1\ .$$

a) Encuentre una parametrización $\vec{r}(t)$.

b) Suponga que una partícula sigue la trayectoria definida por $\vec{r}(t)$ y que en el tiempo $t = 1$ sale de la trayectoria por la tangente, avanzado con rapidez constante (a la misma rapidez a la que avanzaba por la trayectoria $\vec{r}(t)$ en $t = 1$). ¿Dónde estará la partícula en el tiempo $t = 2$?

**Solución.**

a) Tomando $y = t$ de la segunda ecuación obtenemos que

$$z = \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}\ .$$

Usando la ecuación de la primera superficie vemos que

$$x = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{8} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{8}t^2\ .$$

Por lo tanto, una parametrización de la superficie es

$$r(t) = \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{2}t - \frac{3}{8}t^2, t, \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}\right)\ .$$

**Puntaje:** a) Total 3,0 puntos

- 1 punto por elegir una función para alguna de las variables.
- 1 punto por despejar cada variable en función de la elección hecha.

b) A partir de $t = 1$ la partícula sigue la trayectoria

$$\gamma(t) = r(1) + tr'(1)$$

y observe que su rapidez es $\|\gamma'(t)\| = \|r'(1)\|$.
Entonces, la partícula estará en el tiempo $t = 2$ en

$$\gamma(1) = r(1) + r'(1) = (1, 1, 1) + \left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{4}, 2, \frac{5}{2}\right)\ .$$

**Puntaje:** b) Total 3,0 puntos

- 1,5 puntos por determinar la trayectoria de la partícula a partir de $t = 1$ con rapidez $\|r'(1)\|$.
- 1,5 puntos por determinar el lugar en donde la particula estará en $t = 2$.
  (El lugar en donde está la partícula en $t = 2$ varía dependiendo de la parametrización elegida en a))

4. Considere la curva $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{4}{5}\cos(t), 1 - \operatorname{sen}(t), -\frac{3}{5}\cos(t)\right)\ .$$

a) Calcule la curvatura $\kappa(t)$ y la torsión $\tau(t)$ de la curva $\vec{r}$.

b) Determine los vectores tangente $\vec{t}$, normal $\vec{n}$ y binormal $\vec{b}$ de la curva $\vec{r}$.

**Solución.**

a) Tenemos que

$$\begin{aligned} r'(t) &= \left(-\frac{4}{5}\operatorname{sen}(t), -\cos(t), \frac{3}{5}\operatorname{sen}(t)\right) \\ r''(t) &= \left(-\frac{4}{5}\cos(t), \operatorname{sen}(t), \frac{3}{5}\cos(t)\right) \\ r'''(t) &= \left(\frac{4}{5}\operatorname{sen}(t), \cos(t), -\frac{3}{5}\operatorname{sen}(t)\right) \end{aligned}$$

entonces $\|r'(t)\| = 1$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, es decir, la curva está arcoparametrizada.
Ahora bien, $r'(t) \times r''(t) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$ y $(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t) = 0$.
Se sigue que la curvatura y torsión de la curva son

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\|r'(t) \times r''(t)\|^2}{\|r'(t)\|^3} = \frac{\sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}}}{1^3} = 1\,, \\ \tau(t) &= \frac{(r'(t) \times r''(t)) \cdot r'''(t)}{\|r'(t) \times r''(t)\|^2} = \frac{-\frac{12}{25}\operatorname{sen}(t) + \frac{12}{25}\operatorname{sen}(t)}{1^2} = 0\,. \end{aligned}$$

**Puntaje:** a) Total 3,0 puntos

- 1,5 puntos por calcular correctamente la curvatura.
- 1,5 puntos por calcular correctamente la torsión.

b) Como la curva $r(t)$ está arcoparametrizada obtenemos que

$$\vec{t} = r'(t) = \left(-\frac{4}{5}\operatorname{sen}(t), -\cos(t), \frac{3}{5}\operatorname{sen}(t)\right)\,.$$

Sabemos que $\kappa(t) = 1$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, se sigue en virtud de las ecuaciones de Frenet-Serret que $\dfrac{d\vec{t}}{dt} = \kappa(t)\vec{n} = \vec{n}$, entonces

$$\vec{n} = r''(t) = \left(-\frac{4}{5}\cos(t), \operatorname{sen}(t), \frac{3}{5}\cos(t)\right)\,.$$

Luego, el vector binormal es

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = r'(t) \times r''(t) = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)\,.$$

**Puntaje:** b) Total 3,0 puntos

- 1 punto por calcular correctamente cada vector del triedro de Frenet.