P1.

a) $(x-9)(x-\sqrt{3})^3(x^2+1)(x-3) = P(x)$.

Raíces y multiplicidad:

$x = 9$, mult. 1 (impar)
$x = 3$, mult. 1 (impar)
$x = \sqrt{3}$, mult. 3 (impar).

} son las intersecciones con el eje x.

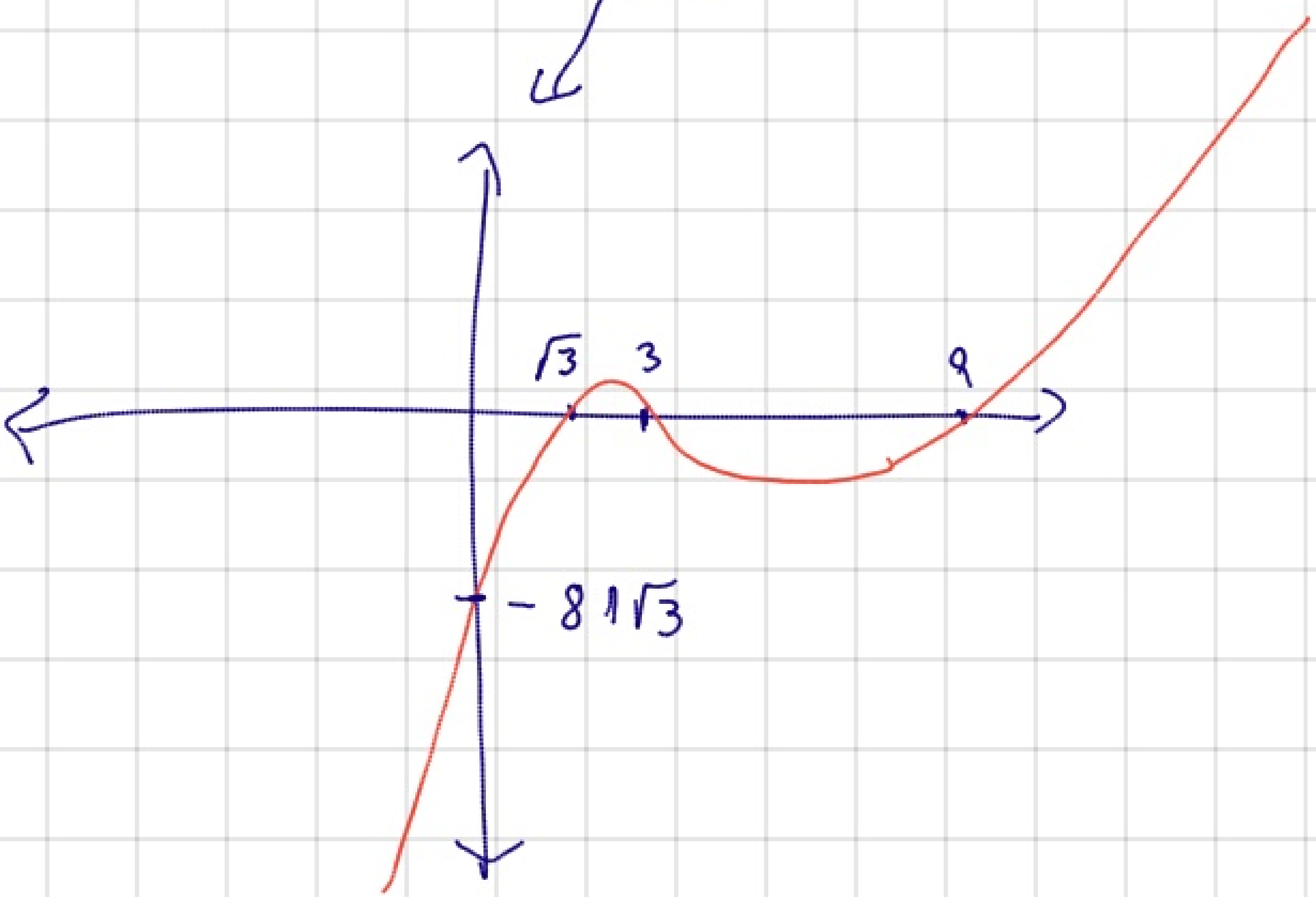
$x=0 \Rightarrow P(0) = -81\sqrt{3}$. (int. eje Y).

P tiene grado $7 = 1+3+2+1$ (impar).

y el x^7 tiene coeficiente 1, positivo.

$\therefore$ tiene forma

$\therefore$



P1. b) $D(x) = x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 112x - 224$.

→ Primero factorizar. Para eso: buscar raíces.

→ Usando el Teorema de la raíz racional (recomiendo googlearlo), vemos que $x=-4$ es una raíz. Así, usando división de polinomios:

$$D(x) = (x+4)(x^3+4x^2-14x-56)$$

También $x=-4$ es raíz de $x^3+4x^2-14x-56$.

$$\therefore D(x) = (x+4)^2(x^2-14)$$
$$= (x+4)^2(x+\sqrt{14})(x-\sqrt{14}).$$

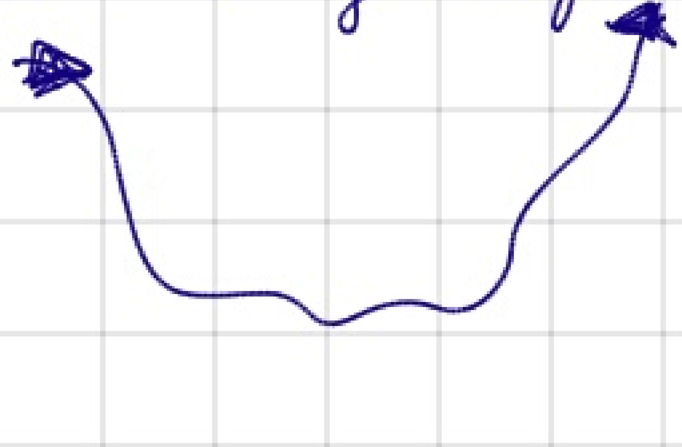
$\therefore$ Raíces:

- -4, con mult. 2 (par).
- $-\sqrt{14}$, mult. 1
- $\sqrt{14}$, mult. 1.

• Grado y coef. líder:

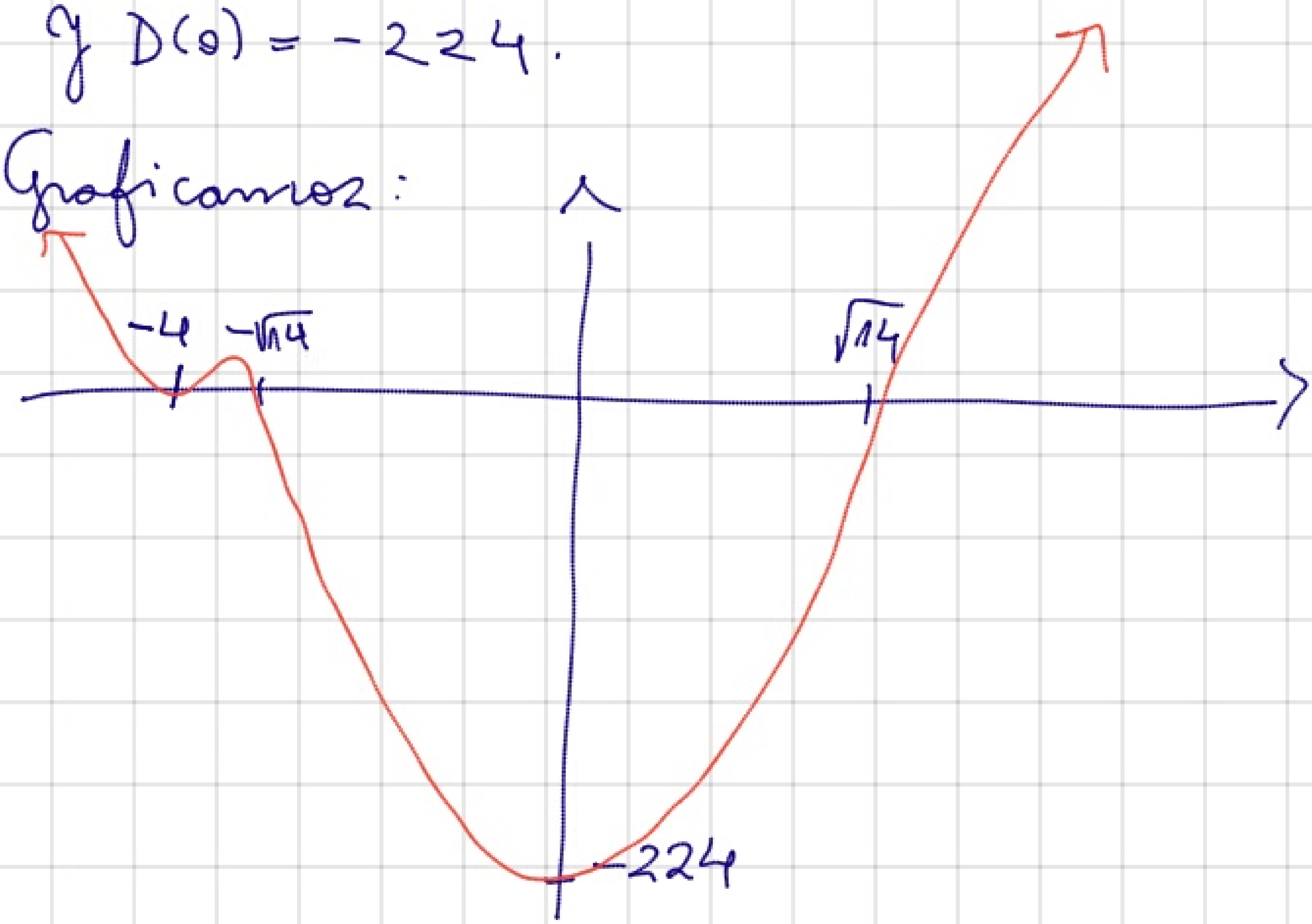
Grado 4 y coef. líder $1>0$.

$\therefore$



y $D(0) = -224$.

Graficamos:



c) $H(x) = x^5 - 6x^4 + 10x^3 - 6x^2 + 9x$

$= x(x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9)$.

Para $x = 3$, $3^4 - 6 \cdot 3^3 + 10 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 9$

$= 81 - 2 \cdot 81 + 90 - 18 + 9$

$= -81 + 90 - 9 = 0$.

$\therefore H(x) = x(x-3)(x^3 - 3x^2 + x - 3)$

evaluando en $x = 3$,

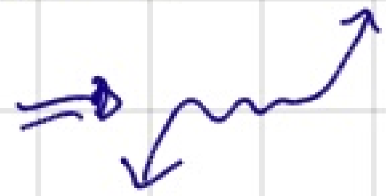
$3^3 - 3 \cdot 3^2 + 3 - 3 = 0$.

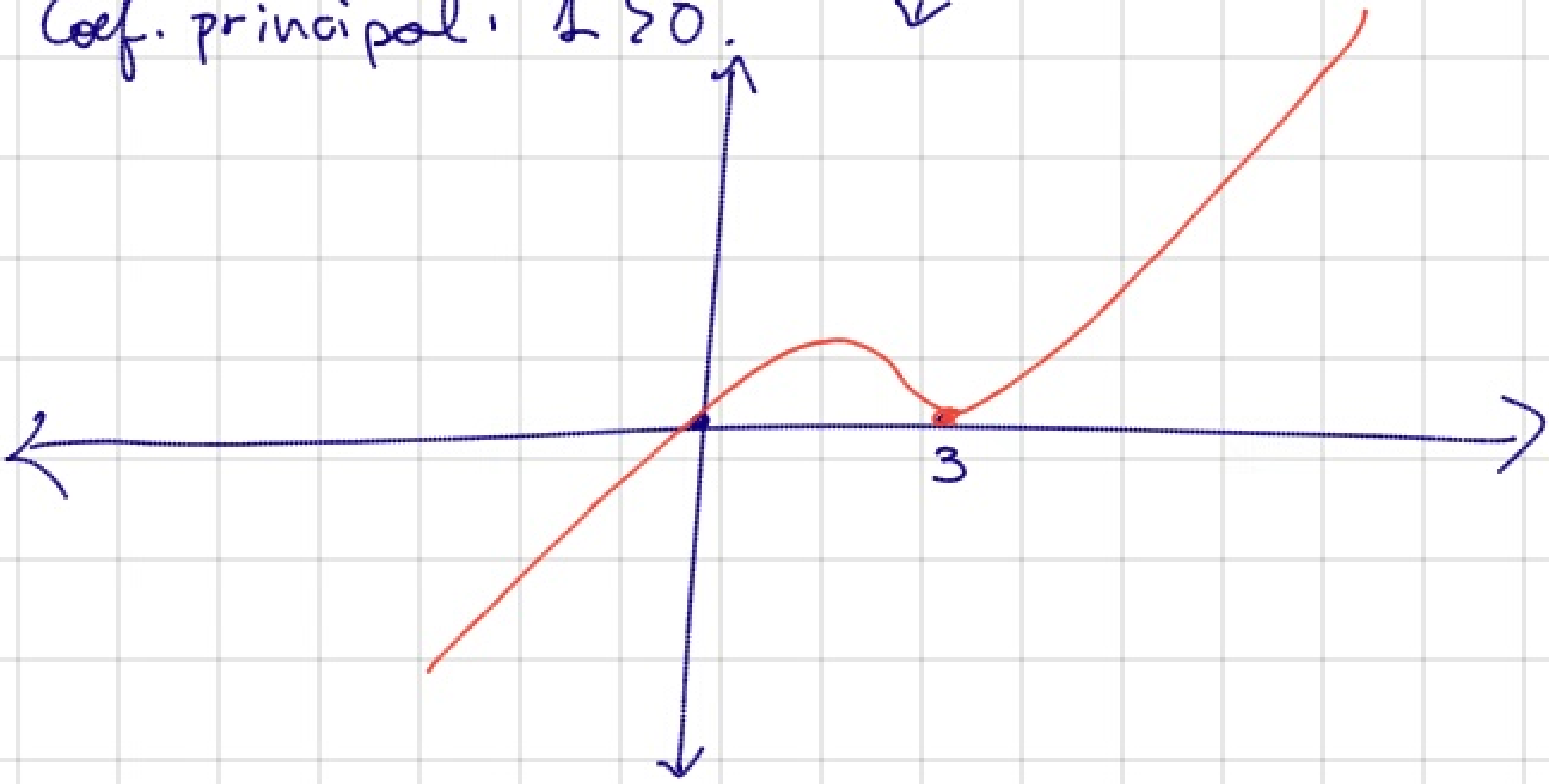
$\Rightarrow H(x) = x(x-3)^2(x^2+1)$. $\rightarrow$ no raíces.

Raíces: $x=0$, mult. 1.

$x=3$, mult. 2.

Grado: 5.

Coef. principal: $1>0$. $\Rightarrow$ 



P2. a) $\alpha(x)=\dfrac{3x^4-2x^2+1}{x^2-16}$

El numerador $3x^4-2x^2+1=2x^2+(x^2-1)^2$ no tiene raíces reales.

El denominador $x^2-16=(x+4)(x-4)$ tiene raíces $x=-4, x=4$.

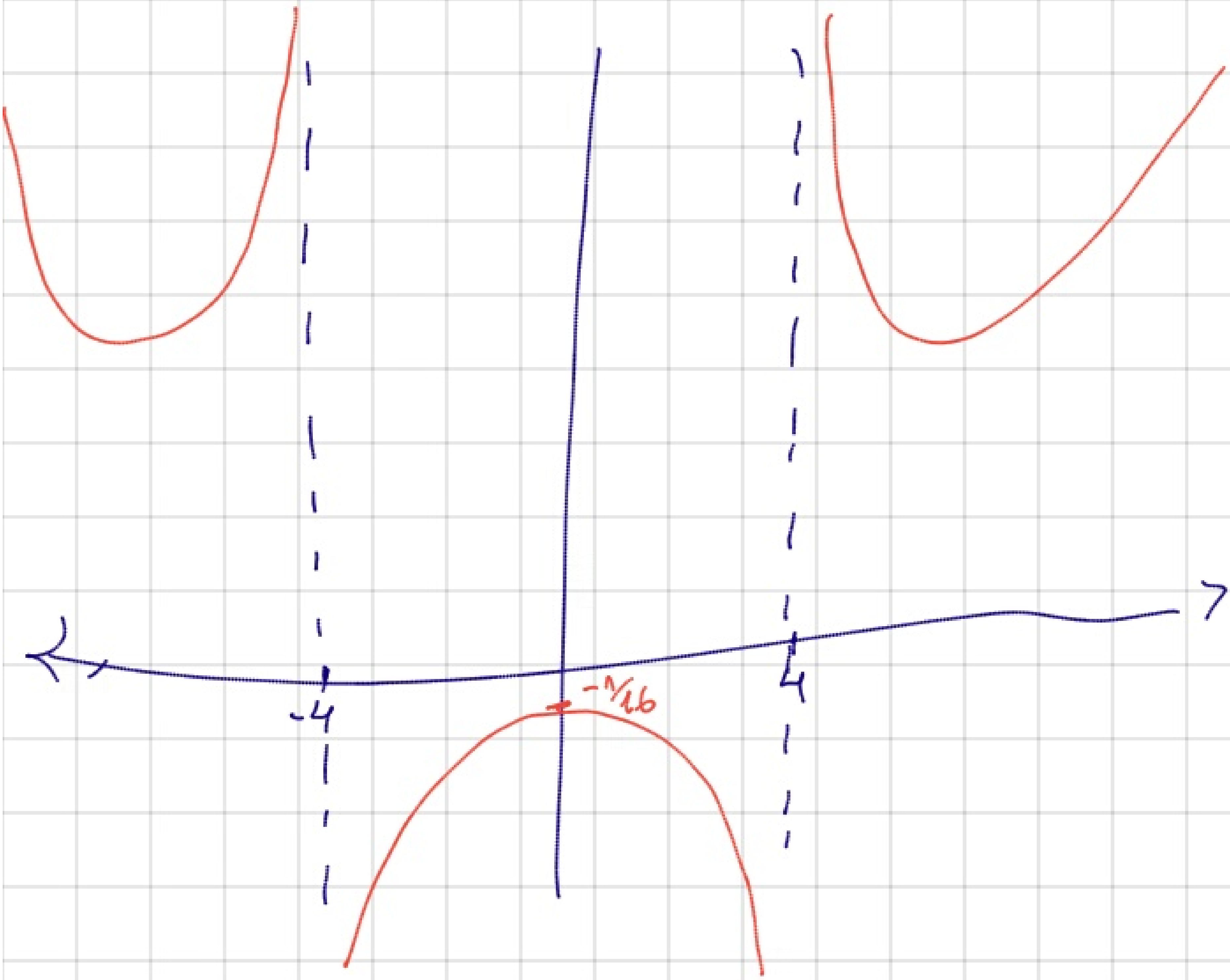
$\therefore$ Hay asíntotas verticales $x=-4$ y $x=4$.

Notar que para x "grande",

$$\alpha(x) \simeq \frac{3x^4}{x^2} = \underbrace{3x^2}_{} \Bigg\}$$ no tiene asíntotas horizontales.

α tiene este comportamiento "en el infinito".

Además, $\alpha(0) = -1/16$ y $\alpha(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 4$.



P2. b). $\beta(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x^3-x}$.

- $x^2-6x+5 = (x-5)(x-1)$
- $x^3-x = x(x^2-1) = x(x+1)(x-1)$.

$\beta(x)$ se indefine en 0, -1 y 1.

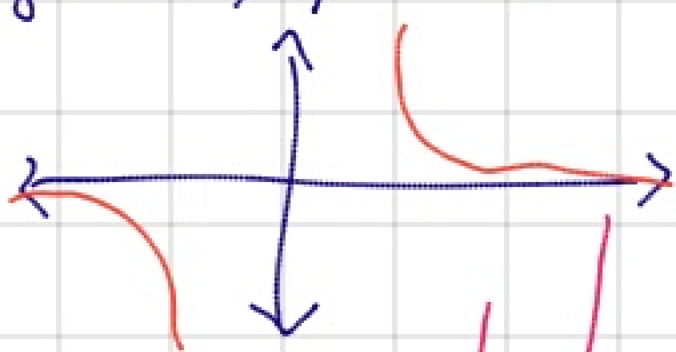
PERO, para $x \neq 1$.

$$\beta(x) = \frac{(x-5)\cancel{(x-1)}}{x(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{x-5}{x(x+1)}$$

así que NO hay asíntota en $x=1$.

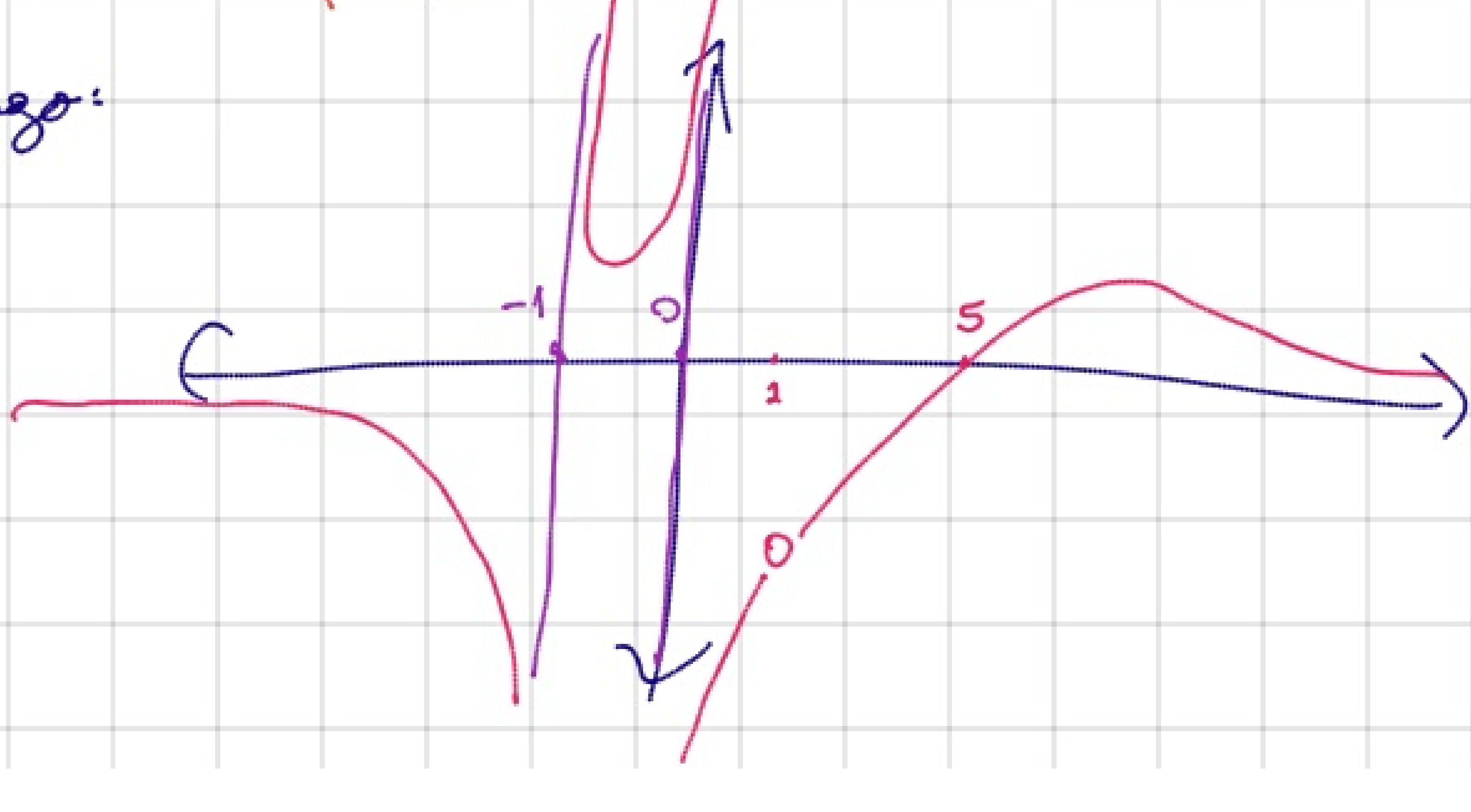
Sí hay en $x=0$ y $x=-1$.

Para x grande, $\beta(x) \approx \dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{x}$ "$\longrightarrow 0$".

$\approx$ 

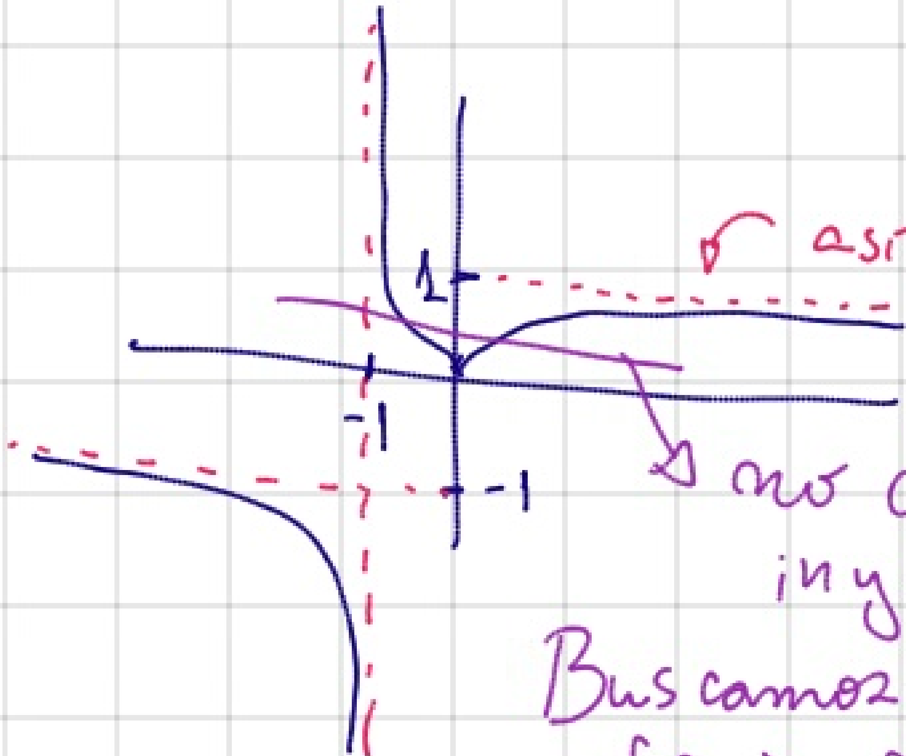
$y=0$ es asíntota horizontal o.o

Luego:



P3. (Inyectividad).

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x+1}$ ¿es inyectiva?



asíntotas

no debería ser inyectiva.

Buscamos $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2)$.

Supongamos $x_1 = 1/2$, $x_2 \in (-1,0)$.

$$f(x_1) = \frac{1/2}{1/2+1} = \frac{1}{3}. \quad f(x_2) = \frac{-x_2}{x_2+1}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 + 1 = -3x_2$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}.$$

y en efecto, $f\left(-\frac{1}{4}\right) = \dfrac{|-1/4|}{-1/4+1} = \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3} = f(1/2)$.

$\Rightarrow$ f <u>no</u> es inyectiva.

P3. b)

$g(x) = x^4 + 8x^3 + 2x^2 - 112x - 224.$

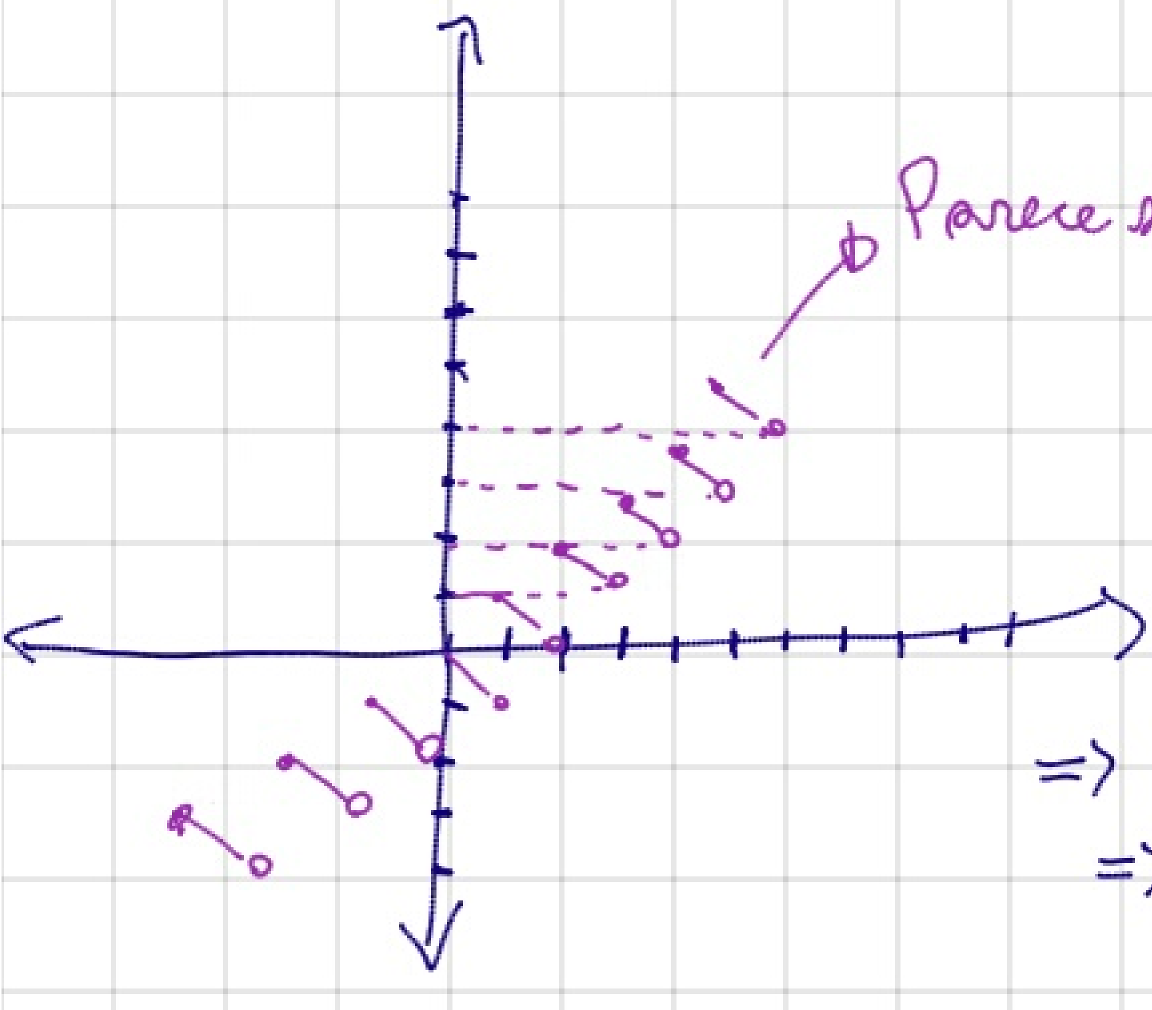
En general los polinomios de grado $n \geq 2$ suelen no ser inyectivos. Si el grado es par, nunca son inyectivos.

En este caso, $g(x) = (x+4)^2(x-\sqrt{14})(x+\sqrt{14})$

Tenemos que $g(-4) = g(-\sqrt{14}) = g(\sqrt{14}) = 0$

$\therefore$ g no es inyectiva.

P3. c) $h(x) = \lfloor 2x \rfloor - x.$



Parece ser inyectiva.

Sea $m \in \mathbb{Z}$. Para $x, y \in \left[\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2}\right)$

$$h(x) = h(y)$$
$$\Rightarrow \lfloor 2x \rfloor - x = \lfloor 2y \rfloor - y$$
$$\Rightarrow m - x = m - y$$
$$\Rightarrow x = y.$$

$\therefore$ h es inyectiva en estos intervalos ✓

Ahora, si $m \neq n \in \mathbb{Z}$, $x \in [\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2})$, $y \in [\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2})$
$[\frac{m}{2}, \frac{m+1}{2}) \cap [\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}) = \phi$, entonces en particular
$x \neq y$. Queremos entonces que $h(x) \neq h(y)$.

$h(x) = m - x$, $h(y) = n - x$

Como $\frac{m}{2} \leq x < \frac{m+1}{2}$

$\rightarrow \frac{-m-1}{2} < -x \leq \frac{-m}{2}$

$\rightarrow m + \frac{-m-1}{2} < m - x \leq m - \frac{m}{2}$

$\rightarrow \frac{m-1}{2} < h(x) \leq \frac{m}{2}$

Similarmente,
$\frac{n-1}{2} < h(y) \leq \frac{n}{2}$.

Como $m \neq n$, $(\frac{m-1}{2}, \frac{m}{2}] \cap (\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}] = \phi$

$\Rightarrow h(x) = h(y)$.

$\therefore$ h es inyectiva.

P4. f, g inyectivas.

- $(f \circ g)$ está bien definida en $\mathbb{R}$ ✓

Si $x \neq y$, $g(x) \neq g(y)$ (por inyectividad de g)

$\Rightarrow f(g(x)) \neq f(g(y))$ (por inyectividad de f en $g(x)$ y $g(y)$)

$\therefore$ $(f \circ g)(x) \neq (f \circ g)(y)$.

$\therefore$ $f \circ g$ es inyectiva.

- Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Es FALSO que $af+bg$ es inyectiva (en general).
Por ejemplo: si $f(x)=x$, $g(x)=x$, $a=1, b=-1$ f y g son inyectivas, mientras que

$$(af+bg)(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

$\therefore$ $af+bg$ no es inyectiva.

- Similarmente si $f(x)=g(x)=x$, f y g son inyectivas, mientras que

$$(f\cdot g)(x)=x\cdot x=x^2.$$ Que no es inyectiva:

$(-1)^2=1^2$ pero $-1\neq 1$.

P5. Sobreyectividad.

Subiré esto completo en otro momento.