Clase 9

jueves, 22 de agosto de 2024 15:25

Análisis Cualitativo del Conjunto Solución

La clase pasada vimos el teorema del rango, que nos indica el número de variables libres en relación del rango de la matriz de coeficientes:

$$\#(\text{variables libres}) = n - \text{rango}(A).$$

Esto es válido en caso de que el sistema $Ax=b$ sea consistente.

¿De qué nos sirve esto?

Obs 1: Si el sistema es consistente, habrá solución única si y solo si $\text{rango}(A) = n$

En efecto, la solución es única ssi no hay variables libres, es decir, ssi $n = \text{rango}(A)$

Obs 2: Si A es de $m \times n$ (es decir, el SEL asociado tiene m ecuaciones y n variables) y el sistema es consist.

$$\Rightarrow n - m \leq \#(\text{variables libres}) \leq n$$

En efecto, $0 \leq \text{rango}(A) \leq m$, luego

$$n - m \leq \underbrace{n - \text{rango}(A)}_{\#(\text{var. libres})} \leq n - 0$$

Ejemplo: Si un sistema tiene 5 variables y 3 ecuaciones, entonces, si es consistente, debe tener al menos 2 variables libres.

Por ej., el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

es consistente ($x=0$ es solución) por lo tanto tiene al menos 2 variables libres.

Concluimos, sin hacer ningún cálculo, que el sistema debe contener un plano en su conjunto solución (Ejercicio: Calcule el cjto. solución con el algo. de Gauss + Sust. Reversa y verifique esta afirmación). En particular el sistema no tiene sol. únic

Obs. 3: Si $Ax=b$ tiene solución única, entonces $m \geq n$.

En efecto, para que el sistema tenga solución única, necesariamente $n = \text{rango}(A) \leq m$.

En otras palabras: si $m < n$ (menos ecuaciones q variables) el sistema no puede tener solución únic

Obs 4: $\text{rango}(A) \leq n$ y $\text{rango}(A) \leq m$.

En efecto, $\text{rango}(A) = n - \#(\text{var. libres}) \leq n$

Como el rango(A) se define como el número de filas no-nulas de la forma escalonada reducida de A, entonces $\text{rango}(A) \leq m = \#$ total de filas de A.

—o—

Hasta el momento, el Tco. del Rango permite concluir ciertas propiedades del conjunto solución si asumimos que el sistema es consistente.

Luego, ¿Cómo determinamos que un sistema es costistente?

Consideremos la matriz ampliada $[A \vdots b]$ y asumamos que ya lo tenemos en forma escalonada

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \square & * & * & \cdots & & & * \\ & \square & * & \cdots & & & * \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \square & * \cdots & * \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & & & 0 & 0 & \cdots & | & 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que hay dos casos distintos.

Caso 1: Existe una entrada principal en la última columna:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \square & * & * & \cdots & & & * \\ & \square & * & \cdots & & & * \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \square & * \cdots & * \\ 0 & \cdots & & & & 0 & \boxed{b} \\ 0 & \cdots & & & & 0 & 0 \end{array}\right]$$

donde $b \neq 0$ (o si no la fila sería nula).
Tal fila corresponde a la ecuación

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = b$$

Como $b \neq 0$, la ecuación no será satisfecha por ningún vector $x \in \mathbb{R}^n$
Concluimos que el sistema no tiene solución
En otras palabras, el sistema no es consistente.

Caso 2: La entrada principal más a la derecha no está en la última columna.

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} \square & * & * & \cdots & & & * \\ & \square & * & \cdots & & & * \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \square & * \cdots & * \\ 0 & \cdots & & & 0 & 0 \cdots & 0 \end{array}\right]$$

En tal caso, podemos imaginarnos (solo momentaneamente!) que las variables libres son todas 0. Realizando sustitución reversa, determinaremos en cada ecuación el valor de la variable principal de la fila tal que la ecuación se satisfaga.
Por lo tanto encontramos una solución del

sistema. Ojo: Pueden haber más de una solución, en distintos valores para las variables li

Es decir, el sistema es consistente.

El siguiente teorema resume lo que hemos aprendido.

TEOREMA 2 **Teorema de existencia y unicidad**

Un sistema lineal es consistente si y solo si la columna más a la derecha de la ma aumentada *no* es una columna pivote, es decir, si y solo si una forma escalonad la matriz aumentada *no* tiene filas del tipo

$$[0 \ \cdots \ 0 \quad b] \quad \text{con } b \text{ diferente de cero}$$

Si un sistema lineal es consistente, entonces el conjunto solución contiene: **i.** una ú solución, cuando no existen variables libres, o **ii.** una infinidad de soluciones, cua hay al menos una variable libre.

Los siguientes ejemplos muestran los posibles casos.

– Igual cantidad de ecuaciones y variables. $(m=n)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

rango$(A)=m=n$ — Sol. única!

rango$(A)<m=n$ y sistema es consistente — ∞ soluciones

rango(A) < y sistema es consis — sin soluci

– Más ecuaciones que variables. $(m>n)$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right.$$

$m>$ rango$(A)=n$ y sistema consistente — Sol. única

$m>n>$ rango(A) y sistema consis. — ∞ soluciones

$m\geq$ rango(sistema n — sin sol

– Menos ecuaciones que variables (no puede tener solución única). (m

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|} -1 & 2 & 3 \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & | \end{bmatrix}$$

rango(A) $\leq m < n$ y sist. consistente
∞ soluciones

rango(A) $\leq$ ... y sistema ...
sin so...

Ejercicio:

Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$, si existen, para que el sistema de ecuacion

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

tenga solución única, tenga infinitas soluciones o no tenga solución.

Solución: Aplicamos el algoritmo de Gauss a la matriz ampliada.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{array}\right]$$

Intercambiando filas:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{l} F_2 \leftarrow F_2 - aF_1 \\ \sim \\ F_3 \leftarrow F_3 - F_1 \\ F_4 \leftarrow F_4 - F_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1-a} & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right]$$

Si $a = 1 \Rightarrow$ la matriz está en forma escalonada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \text{sistema consistente con 2 var. libres}$$

$\Rightarrow \infty$ soluciones

Si $a \neq 1$: Seguimos pivoteando

$$F_3 \leftarrow F_3 + F_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1-a} & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & \boxed{1-a} & 2-a-a^2 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array}\right]$$

$$F_4 \leftarrow F_4 + F_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{1-a} & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & \boxed{a-1} & a^2-a \\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 \end{array}\right]$$

Concluimos que la única opción para que el sistema sea consistente cuando $a \neq 1$ es q

$$3-2a-a^2=0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$a = \frac{+2 \pm \sqrt{4-4(3)\cdot(-1)}}{-2} = -1 \pm \frac{1}{2}\cdot 4 = -1 \pm 2 = \{$$

Por lo tanto, si $a=-3$ el sistema es consistente y no tiene var. libres $(n = \text{rango}(A))$

$\Rightarrow$ hay 1 solución.

En resumen:

$a=1$: ∞ soluciones

$a=-3$: 1 solución

En otro caso : 0 soluciones

Observación final: Nosotros definimos el rang como el número de filas no-nulas en la forı escalonada reducida A'. Luego

$$\text{rango}(A) = \#(\text{filas no-nulas de } A')$$
$$= \#(\text{posiciones pivotes de } A)$$

= # (columnas principales)

Ejemplo :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right]$$

3 filas no nulos = 3 pivotes = 3 colum principal

(= 3 variables principales).