PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE 2019

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 2

1. Sea A una matriz invertible tal que una descomposición en matrices elementales de A^{-1} es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sin calcular A ni A^{-1}.

a) **[4 ptos]** Encuentre una factorización $PA = LU$.

b) **[2 ptos]** Usando la factorización anterior, resuelva el sistema

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución.

a) De la descomposición de A^{-1}, haciendo $A = (A^{-1})^{-1}$, tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) El sistema $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es equivalente al sistema

$$PAx = L(Ux) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si denotamos por $y = Ux$, entonces debemos resolver el sistema $Ly = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuya solución es $y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ luego, para resolver el sistema inicial debemos resolver $Ux = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuya solución es $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Puntaje:

- 0.25 ptos por determinar cada inversa de las matrices elementales (1 pto).
- 1 pto por determinar correctamente P.
- 1 pto por determinar correctamente L.
- 1 pto por determinar correctamente U.
- 0.5 por plantear la equivalencia $PAx = L(Ux) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 0.5 por encontrar correctamente y.
- 1 pto por encontrar correctamente x.

2. Sea A una matriz de 3×3 con determinante 2 y sean B, C dos matrices de 3×3 tales que:

- B es la matriz que se obtiene al realizar la siguiente operación en A: A la fila dos se le resta la fila tres.
- C es la matriz que se obtiene al realizar la siguiente operación en A: Se intercambia la fila dos por la fila tres.

Calcular el determinante de $\left(3A^T B^{-1} C^3\right)$.

Solución.

Al realizar la operación elemental de restar a la fila dos se le resta la fila 3, el determinante de A no cambia, es decir

$$\det(B) = \det(A) = 2.$$

Al realizar la operación elemental de intercambio de filas, el determinante de A cambia el signo, es decir

$$\det(C) = -\det(A) = -2.$$

Luego, usando propiedades del determinante tenemos

$$\begin{aligned}
\det(3A^T B^{-1} C^3) &= \det(3A^T) \cdot \det(B^{-1}) \cdot \det(C^3) \\
&= 3^3 \cdot \det(A^T) \cdot \frac{1}{\det(B)} \cdot [\det(C)]^3 \\
&= 3^3 \cdot \det(A) \cdot \frac{1}{\det(B)} \cdot [\det(C)]^3 \\
&= 3^3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-2)^3 = -6^3.
\end{aligned}$$

Puntaje:

- 1 pto por determinar $\det(B)$.
- 1 pto por determinar $\det(C)$.
- 0.5 pto por ocupar que $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- 1 pto por ocupar que si $A \in M_{n \times n}$ y $t \in \mathbb{R}$ entonces $\det(tA) = t^n(A)$.
- 1 pto por ocupar que $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
- 1 pto por ocupar que $det(A^t) = \det(A)$.
- 0.5 por llegar al resultado correcto.

3. Sea

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 2\alpha & \alpha+5 & 4 \\ \alpha & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

a) Aplicando el desarrollo por cofactores, calcule el determinante de A.

b) Determine todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A es invertible.

Solución.

a) Observe que

$$|A| = \alpha \begin{vmatrix} \alpha+5 & 4 \\ 2 & \alpha \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2\alpha & 4 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2\alpha & \alpha+5 \\ \alpha & 2 \end{vmatrix} = \alpha^3 - \alpha$$

b) La matriz A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$, por lo tanto, del inciso anterior tenemos que A es invertible si y sólo si $\alpha^3 - \alpha = \alpha(\alpha^2 - 1) \neq 0$ y esto ocurre si y sólo si

$$\alpha \neq 0, \alpha \neq 1 \text{ y } \alpha \neq -1$$

Puntaje:

- 1 pto por aplicar correctamente el desarrollo en cofactores.
- 2 ptos por determinar correctamente el determinante.
- 1.5 ptos por argumentar que la matriz A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.
- 0.5 ptos por encontrar cada valor que no debe tomar α.(1.5 ptos)

4. Sean S el paralelepípedo que tiene un vértice en el origen y vértices adyacentes en $(1,0,2),(-1,2,4),(-1,1,0)$, y $T(x_1,x_2,x_3)=(\alpha x_1+x_2, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3)$ una transformación lineal. Encuentre el o los valor(es) de α tal que el volumen del paralelepípedo $T(S)$ sea 4.

Solución.

El volumen de $T(S)$ esta dado por el valor absoluto del producto entre, el determinante de la matriz de transformacion de T y el determinante de la matriz cuyas columnas son los vectores que forman el paralepípedo S. Es decir

$$\left|\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = |-2\cdot(\alpha-1)| = 4 \leftrightarrow \alpha=-1 \wedge \alpha = 3$$

Puntaje:

- 2 pto por ocupar que el volumen de $T(S)$ esta dado por el valor absoluto del producto, del determinante de la matriz de transformacion de T y el determinante de la matriz cuyas columnas son los vectores que forman el paralepípedo S
- 1 ptos por encontrar correctamente la matriz de transformación de T
- 0.5 ptos por encontrar correctamente cada determinante.(1 pto)
- 1 pto por concluir cada valor que debe tomar α. (2 ptos)

Continúa en la siguiente página.

5. Utilizando el método de Cramer determine la tercera columna de la inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Solución.
Para determinar la tercera columna de la inversa de A, se debe resolver el sistema matricial $Ax = e_3$. Como el $\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 21 \neq 0$, este sistema tiene solución única. Luego aplicando la regla de cramer el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ es solución de este sistema y sus componentes son:

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{-14}{21} = \frac{-2}{3}$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}} = 0$$

$$z = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}} = \frac{21}{21} = 1$$

$$t = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}} = 0$$

luego la tercera columna de la inversa de A es $\begin{pmatrix} \frac{-2}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Puntaje:

- 1 pto por por mostrar el sistema matricial que resuelve el problema.
- 1 pto por enunciar que la solución de cada componente esta dada por $\dfrac{\det(A_i(e_3))}{\det(A)}$.
- 1 pto por calcular correctamante cada componente del vector.(4 puntos)

6. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$.

   Encuentre el espacio nulo de esta transformación y determine si T es inyectiva.

Solución.

Para determinar el respectivo espacio nulo debemos resolver, $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir, resolver el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Cuya solución se puede escribir como $x = -z$, $y = -z$ o bien

$$Si \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Nul(T) \quad \text{entonces} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad z \in \mathbb{R}.$$

De donde se tiene que

$$Nul(T) = Gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

En particular la transformación T es no inyectiva, ya que $Nul(T) \neq \{0\}$.

Puntaje:

- 1 pto por argumentar que el espacio nulo consta de los vectores tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 1 pto por argumentar que el espacio nulo consta de los vectores que satisfacen el sistema homogéneo.
- 2 ptos por mostrar el espacio nulo correctamente. (se descuenta un punto 1 punto por error)
- 2 ptos por concluir que la transformación no es inyectiva.(sino justifica no se le asigna puntaje).

7. Sea $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ el espacio de los polinomios de grado inferior o igual a 3 y

$$E = \{P \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \mid \; P(-1) = 0 \text{ y } P(1) = 0\}.$$

Demuestre que E es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

Solución.

- Una forma de demostrarlo:
  - El polinomio nulo Θ satisface $\Theta(-1) = \Theta(1) = 0$. Entonces $\Theta \in E$.
  - Sean P_1 y P_2 dos polinomios de E y sea $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Entonces

    $$(\lambda_1 P_1 + P_2)(-1) = \lambda_1 P_1(-1) + P_2(-1) = \lambda_1 \cdot 0 + 0 = 0,$$

    porque $P_1(-1) = 0$ y $P_2(-1) = 0$, y también

    $$(\lambda_1 P_1 + P_2)(1) = \lambda_1 P_1(1) + P_2(1) = \lambda_1 \cdot 0 + 0 = 0,$$

    porque $P_1(1) = 0$ y $P_2(1) = 0$. Entonces $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in E$, por lo cual E es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

  Puntaje:

  - 2 ptos por enunciar que propiedades debe cumplir para ser subespacio.
  - 1 ptos por demostrar la primera propiedad.
  - 3 ptos por demostrar la segunda propiedad.

- Otra forma de demostrarlo:

  $$\begin{aligned}
  E =& \{P \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R}) \mid \; P(-1) = 0 \text{ y } P(1) = 0\} \\
  E =& \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid \; -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \;\wedge\; a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0\} \\
  E =& \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid \; a_3 = -a_1 \wedge a_2 = -a_0\} \\
  E =& \{-a_1x^3 - a_0x^2 + a_1x + a_0\} \\
  E =& \{a_1(-x^3 + x) + a_0(-x^2 + 1)\} \\
  E =& \text{Gen}\{(-x^3 + x), (-x^2 + 1)\}
  \end{aligned}$$

  entonces E es un espacio generado por elementos de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, por lo cual es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$.

Puntaje:

- 2 ptos por encontra cada vector que genera a E.(4 puntos)
- 2 ptos por argumentar que los conjuntos generados son subespacios.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

a) Si $T : M_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la transformación definida por $T(A) = det(A)$ entonces T es una transformación lineal.

b) Si A es una matriz de 3×3 tal que $A = -A^t$ entonces $det(A) = 0$.

c) Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ entonces $Col(A) = Nul(A)$.

Solución.

a) Falsa .
El $det(A + B)$ no siempre es igual al $det(A) + det(B)$ o $det(cA) = c^2 det(A)$

b) Verdadera
$det(A) = det(-A^t) \leftrightarrow det(A) = -det(A) \leftrightarrow det(A) = 0$

c) Verdadera

$$Col(A) = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \text{ y}$$

$$Nul(A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \mid A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = Gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Puntaje:
2 ptos por argumentar cada alternativa correctamente.