Ejercicios 2: EYP1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle Ayudante: Camilo I. González

Ejercicio 1: Sea X una variable aleatoria con fdp dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Encuentre la densidad de $Y = X^3$ y su función generadora de momentos.
(b) Encuentre la densidad de $Y = -\log(X^3)$ y su valor esperado.

Ejercicio 2: Sea X una variable aleatoria con fdp dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 2(x+1)/9, & -1 < x < 2 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la densidad de X^2.

Ejercicio 3: En una determinada localidad, la renta (en UM) de las personas es una variable aleatoria X, con fdp dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} + \frac{1}{10}, & \text{si } 0 < x \leq 2, \\ \frac{9}{20} - \frac{3x}{40}, & \text{si } 2 < x \leq 6, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Sea

$$Y = g(X) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 2, \\ 1, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Encuentre la función de probabilidad de Y.
(b) Si se elige una persona al azar, cuál es la probabilidad de que su renta sea major que 3UM ?
(c) Se elige una persona al azar y su renta es major que 2UM, cuál es la probabilidad de que su renta sea menor que 4UM ?

Ejercicio 4: Sea X una vad con valores en $\{-n, -(n-1), ..., (n-1), n\}$ y función de probabilidad dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2n+1}, & \text{si } x = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm n, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la distribución de probabilidades de $|X|$ y de X^2.

Ejercicio 5: Sea X una vad con valores en $\{0, 1, 2, ...\}$ y función de probabilidad dada por:

$$P(X = n) = p_n = \begin{cases} \alpha p_{n-1}, & \text{si } n = 1, 2, ..., \text{y } 0 < \alpha < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la distribución de X.

Ejercicio 6: Sea X una vad con función de probabilidad dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & \text{si } x = 0, 1, ..., n \text{ y } 0 < p < 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la distribución de $Y = n - X$.

Ejercicio 7: Sea X una vad con valores en $\{0, 1, 2, ...\}$ tal que $E(X)$ y $E(X^2)$ existan.
(a) Pruebe que,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X \geq k)$$

(b) Verifique que,

$$\sum_{k=0}^{\infty} kP(X > k) = \frac{1}{2}(E(X^2) - E(X))$$

Ejercicio 8: Sea X una va con media μ y varianza σ^2. Sea h una función dos veces diferenciable en $x = \mu$ e $Y = h(X)$ una va tal que $E(Y)$ y $E(Y^2)$ existan.
(a) Pruebe las siguientes aproximaciones para $E(Y)$ y $Var(Y)$:

$$E(Y) \approx h(\mu) + \frac{h''(\mu)}{2}\sigma^2 \;\; \text{y} \;\; Var(Y) \approx (h'(\mu))^2\sigma^2.$$

(b) Usando el resultado en (a) calcule la media y la varianza de la va $Y = 2(1 - 0.005X)^{1.2}$ donde X es una va con fdp dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3000x^{-4}, & \text{si } 10 \leq x < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejercicio 9: Sea X una va con fdp dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ (2-x)^3, & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcule $\mu = E(X)$ y $\sigma^2 = Var(X)$.
(b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma)$.

Ejercicio 10: Sea X una va con fdp dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 12x^3 - 21x^2 + 10x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Calcule $\mu = E(X)$ y $\sigma^2 = Var(X)$.
(b) Determine el valor de c tal que $P(X > c) = \frac{7}{16}$.

Ejercicio 11: Desigualdad de Makov. Sea X una va no-negativa tal que $E(X)$ exista. Pruebe que para todo $\alpha > 0$,

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}.$$

Ejercicio 12: Desigualdad de Chebyschev. Sea X una va con media μ y varianza σ^2.
(a) Prueve que para todo $\epsilon > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

(b) Si $\mu = \sigma^2 = 20$, qué puede decir acerca de $P(0 \leq X \leq 40)$?

Ejercicio 13: Suponga que el tiempo, en minutos, de una llamada telefónica es una va con fdp dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}\exp(-\frac{t}{5}), & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Determine la probabilidad de que una llamada dure: i) Más de cinco minutos, ii) Entre 5 y 6 minutos, iii) Menos de 6 minutos dado que duró al menos 3 minutos.
(b) Sea $C(t)$ el costo, en pesos, de una llamada que dura t minutos. Suponga que:

$$C(t) = \begin{cases} 500, & \text{si } 0 < t \leq 5, \\ 750, & \text{si } 5 < t \leq 10, \\ 100t, & \text{si } t > 10. \end{cases}$$

Calcule el costo medio de una llamada.

Ejercicio 14: Sea X una va continua con fdp

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-3}x^3}{6}, & \text{si } 0 < x < \infty, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Encuentre la función generadora de momentos de X y a partir de ella obtenga la media y la varianza de X.

Ejercicio 15: Sea X una va con función característica dada por:

$$\varphi_X(t) = \exp\{2(e^{it} - 1)\}.$$

(a) Determine $E(2X^2 - 5X + 1)$.
(b) Encuentre la función característica de $2X - 5$.

– Santiago, 27 de abril de 2018 –