Intro a Estadística
Ayudantía.

Martes 22/03/16.-

(1) $(\Omega, \mathcal{F})$ $\quad \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{P}(\cdot)$
$\quad A \longmapsto [0,1]$

axiomos de probabilidad: i) $P(\Omega)=1$
ii) $\mathbb{P}(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$
iii) (σ-aditividad): $A_1, \ldots$ disjuntos 2-2,
$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

pd. $\mathbb{P}(\cdot|B)$ es función de probabilidad!

i) $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$ ✓✓

ii) $P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Donde sabemos que $\mathbb{P}(\cdot)$ es medida de probabilidad $\Rightarrow P(A\cap B) \geq 0$
$P(B) > 0$

$\therefore P(A|B) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$ ✓✓

iii) Dado $A_1, A_2, \ldots$ disjuntos 2 a 2. pd. $\mathbb{P}_B(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \frac{\mathbb{P}((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \overset{\text{como } A_1, A_2, \ldots \text{ disjuntos.}}{=} \frac{\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap B))}{\mathbb{P}(B)}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i|B)$$ ✓✓

(2) Demuestre que para una colección de evento $E_1, \ldots, E_n$
$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1) \cdot \prod_{i=2} P(E_i | E_1 \cap \ldots \cap E_{i-1})$$

Vamos a hacerlo por inducción.
$\boxed{n=2}$ $\quad P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$ (Princ. multiplicativo) ✓

II

Supongamos para $n = k$

$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_k) = P(E_1) \cdot \prod_{i=2}^{k} P(E_i \mid E_1 \cap \ldots \cap E_{i-1})$$

Para $n = k+1$

$$P(E_1) \cdot \prod_{i=2}^{k+1} P(E_i \mid E_1 \cap \ldots \cap E_{i-1}) = \underbrace{P(E_1) \cdot \prod_{i=2}^{k} P(E_i \mid E_1 \cap \ldots \cap E_{i-1})} \cdot P(E_{k+1} \mid E_1 \cap \ldots \cap E_k)$$

por HI $= P(\underbrace{E_1 \cap \ldots \cap E_k}_{B}) \cdot P(E_{k+1} \mid \underbrace{E_1 \cap \ldots \cap E_k}_{B})$

$= P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{k+1})$ ■

3 A_P = "aprobar la prueba práctica"

A_T = "aprobar la prueba teórica".

$\mathbb{P}(A_T) = 0,6 \Rightarrow \mathbb{P}(A_T^c) = 0,4$.

$\mathbb{P}(A_P) = 0,8 \Rightarrow \mathbb{P}(A_P^c) = 0,2$

$\mathbb{P}(A_T \cap A_P) = 0,5$

a) Sean A, B dos eventos independientes.

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$

(1) $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{P}(A_T \cap A_P) = 0,5 \\ \mathbb{P}(A_T) \cdot \mathbb{P}(A_P) = 0,48 \end{array} \right\} \neq$

(2) $\mathbb{P}(A_T \mid A_P) = \dfrac{\mathbb{P}(A_T \cap A_P)}{\mathbb{P}(A_P)} = \dfrac{0,5}{0,8} = \dfrac{5}{8} \neq \mathbb{P}(A_T)$

Luego A_T y A_P no son independientes.

b) $\mathbb{P}(A_T^c \cap A_P^c) = 1 - \mathbb{P}(A_T^c \cap A_P^c)^c$

$= 1 - \mathbb{P}(A_T \cup A_P)$

$= 1 - (\mathbb{P}(A_T) + \mathbb{P}(A_P) - \mathbb{P}(A_T \cap A_P))$

$= 1 - 0,6 - 0,8 + 0,5 = 0,1$ ✓✓

c) $\mathbb{P}(A_P \mid A_T) = \dfrac{\mathbb{P}(A_P \cap A_T)}{\mathbb{P}(A_T)} = \dfrac{0,5}{0,6} = \dfrac{5}{6}$ ✓✓

④ transmisor → Modem → PC

T_0 = "transmisor envía un 0"
T_1 = " " " " 1"
M_0 = "modem recibe un 0"
M_1 = " " " " 1"
PC_0 = "PC recibe un cero del módem".
PC_1 = "PC recibe un 1 del módem".

$\mathbb{P}(T_1) = 0{,}56 \Rightarrow \mathbb{P}(T_0) = 0{,}44.$
$\mathbb{P}(M_1 | T_1) = 0{,}95 \Rightarrow \mathbb{P}(M_0 | T_1) = 0{,}05.$
$\mathbb{P}(M_0 | T_0) = 0{,}91 \Rightarrow \mathbb{P}(M_1 | T_0) = 0{,}09$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{P}(PC_1 | M_1 \cap T_0) \\ \mathbb{P}(PC_1 | M_1 \cap T_1)\end{array}\right\} = 0{,}98 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mathbb{P}(PC_0 | M_1 \cap T_0) \\ \mathbb{P}(PC_0 | M_1 \cap T_1)\end{array}\right\} = 0{,}02$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbb{P}(PC_0 | M_0 \cap T_0) \\ \mathbb{P}(PC_0 | M_0 \cap T_1)\end{array}\right\} = 0{,}94 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\mathbb{P}(PC_1 | M_0 \cap T_0) \\ \mathbb{P}(PC_1 | M_0 \cap T_1)\end{array}\right\} = 0{,}06.$$

a) $$\mathbb{P}(PC_0) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} \mathbb{P}(PC_0 | M_i \cap T_j) \times \mathbb{P}(M_i \cap T_j)$$

$$= \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} \mathbb{P}(PC_0 | M_i \cap T_j) \cdot \mathbb{P}(M_i | T_j) \cdot \mathbb{P}(T_j)$$

$$= \mathbb{P}(PC_0 | M_0 \cap T_0) \cdot \mathbb{P}(M_0 | T_0) \cdot \mathbb{P}(T_0) + \mathbb{P}(PC_0 | M_1 \cap T_0) \cdot \mathbb{P}(M_1 | T_0) \cdot \mathbb{P}(T_0) + \mathbb{P}(PC_0 | M_0 \cap T_1) \cdot \mathbb{P}(M_0 | T_1) \cdot \mathbb{P}(T_1) + \mathbb{P}(PC_0 | M_1 \cap T_1) \cdot \mathbb{P}(M_1 | T_1) \cdot \mathbb{P}(T_1)$$

$$= 0{,}94 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}44 + 0{,}94 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}56 + 0{,}02 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}44 + 0{,}02 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}56$$

$$= 0.414128.$$

b) $\mathbb{P}(T_0 | PC_1) = \dfrac{\mathbb{P}(T_0 \cap PC_1)}{\mathbb{P}(PC_1)}$

$= \cancel{\dfrac{\mathbb{P}(PC_1 | T_0) \cdot \mathbb{P}(T_0)}{\mathbb{P}(PC_1)}}$

$= \cancel{\dfrac{\mathbb{P}(PC_1 | T_0 \cap (M_0 \cup M_1)) \; \mathbb{P}(T_0)}{\mathbb{P}(PC_1)}}$

$= \cancel{\dfrac{\mathbb{P}(PC_1 | T_0 \cap M_0) + \mathbb{P}(C_1 | T_0 \cap M_1) \; \mathbb{P}(T_0)}{\mathbb{P}(PC_1)}}$

$* \; \mathbb{P}(T_0 \cap PC_1) = \mathbb{P}(T_0 \cap PC_1 \cap (M_1 \cup M_0))$

$= \mathbb{P}(T_0 \cap PC_1 \cap M_0) + \mathbb{P}(T_0 \cap PC_1 \cap M_1)$

$= \mathbb{P}(PC_1 \cap M_0 \cap T_0) + \mathbb{P}(PC_1 \cap M_1 \cap T_0)$

$= \mathbb{P}(PC_1 | M_0 \cap T_0) \cdot \mathbb{P}(M_0 | T_0) \cdot \mathbb{P}(T_0) +$
$\mathbb{P}(PC_1 | M_1 \cap T_0) \cdot \mathbb{P}(M_1 | T_0) \cdot \mathbb{P}(T_0)$

c) Prob. 5 de sus 8 digitos sea 0 si c/bit se recibe de manera independiente

$$\text{Un caso: } \begin{array}{cccccccc} E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 & E_8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} = A$$

$$P(A) = P(PC=0) \cdot \prod_{i=2}^{8} P(E_i | E_1 \cap \dots \cap E_{i-1})$$

como son indep. $= P(PC=0) \left(P(PC=0)\right)^4 \left(\mathbb{P}(PC=1)\right)^3$

Pero tenemos $\binom{8}{5}$ tipos de orden con esta prob.

Pe = "lo pedido"

$$P(Pe) = \binom{8}{5} \cdot \left(\mathbb{P}(PC=0)\right)^5 \left(\mathbb{P}(PC=1)\right)^3$$

$$= \binom{8}{5} \cdot (0{,}414128)^5 \cdot (1 - 0{,}414128)^3$$

(5) V = "choleco verde"
N = "choleco naranja"
X = "huinchos x"
$||$ = "huinchas en paralelo"
BC = "buena calidad"
MC = "mala calidad"

$$P(V)=0{,}6 \Rightarrow P(N)=0{,}4$$
$$P(X|V)=0{,}7 \Rightarrow P(||\,|V)=0{,}3$$
$$P(X|N)=0{,}5 \Rightarrow P(||\,|N)=0{,}5$$
$$P(BC|X)=P(BC|X\cap N)=P(BC|X\cap V)=0{,}6 \Rightarrow \underbrace{P(MC|X\cap N)}_{P(MC|X)}=P(MC|X\cap V)=0{,}4.$$
$$P(MC|\,||)=P(MC|\,||\cap N)=P(MC|\,||\cap V)=0{,}8 \Rightarrow \underbrace{P(BC|\,||\cap N)}_{P(BC|\,||)}=P(BC|\,||\cap V)=0{,}2.$$

a) $P(V\cap X)=P(V)\cdot P(X|V)$
$= 0{,}6\cdot 0{,}7 = 0{,}42.$

b) $P(V\cap X|\cancel{B}MC) \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{P(\cancel{B}MC|V\cap X)\cdot P(V\cap X)}{P(\cancel{B}MC)}$

Teo. Prob. Total.

y $P(BC) = P(BC|X)\cdot P(X) + P(BC|\,||)\cdot P(||)$
$= P(BC|X)\cdot(P(X|V)\cdot P(V)+P(X|N)\cdot P(N))$
$+ P(BC|\,||)\cdot(P(||\,|V)\cdot P(V)+P(||\,|N)\cdot P(N))$
$= 0{,}\cancel{6}4\cdot(0{,}\cancel{7}3\cdot 0{,}6+0{,}5\cdot 0{,}4)$
$+ 0{,}\cancel{8}2\cdot(0{,}3\cdot 0{,}6+0{,}5\cdot 0{,}4)$
$= 0{,}6\cdot 0{,}\cancel{62}38 + 0{,}\cancel{2}8\cdot 0{,}38 =$
$= \cancel{0{,}372} + \cancel{0{,}304} = 0{,}676.$ nou! $BC \neq MC$.
$0{,}228 + 0{,}0\cancel{7}6 = 0{,}304.$ $MC = 1-0{,}676 = 0{,}324$
$0{,}448$

$$\therefore P(V\cap X|BC) = \frac{0{,}6\cdot 0{,}42}{0{,}676} = 0{,}3728.$$