Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
Interrogación 1 - PAUTA

1. Determinar, usando matrices, qué condición o condiciones deben cumplir a, b, c para que el siguiente sistema de variables x_1, x_2, x_3 tenga infinitas soluciones:

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + a^2x_3 = 0 \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 = 0 \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 = 0 \end{aligned}$$

Solución A la matriz de coeficientes del sistema homogéneo le aplicamos dos operaciones elementales:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix}$$

Si $a = b$ o $a = c$, al menos una fila se anula por lo que el sistema tiene infinitas soluciones. Supongamos que $a \neq b$ y $a \neq c$. Se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 0 & c-b \end{bmatrix}.$$

Nuevamente, si $c = b$, la tercera fila se anula, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones.

En conclusión, el sistema del enunciado tiene infinitas soluciones si y sólo si $a = b$ o $a = c$ o $b = c$.

Puntaje (6 puntos en total)

- 2 puntos por plantear correctamente el problema usando matrices.
- 2 puntos por obtener una forma escalonada correcta de la matriz.
- 2 puntos por obtener las condiciones correctas sobre a, b, c que garantizan que el sistema tenga infinitas soluciones.

2. Encuentre el valor o los valores de h de manera que el vector $\mathbf{y}$ esté afuera del plano generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{bmatrix}.$$

Solución Necesitamos determinar para qué valores de h el vector $\mathbf{y}$ es linealmente independiente de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Esto es equivalente a estudiar la consistencia del sistema dado por la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -4 \\ -1 & -4 & 3 \\ -2 & -7 & h \end{array}\right].$$

La forma escalonada es $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & h-5 \end{array}\right]$ por lo que el sistema es inconsistente, o equivalentemente, el vector $\mathbf{y}$ está fuera del plano generado por $\mathbf{v_1}$ y $\mathbf{v_2}$, si y sólo si $h \neq 5$.

Puntaje (6 puntos en total)

- 2 puntos por plantear una manera de determinar los valores buscados de h.
- 2 puntos por entregar valores de h, aunque no sean correctos.
- 2 puntos por encontrar los valores correctos de h.

3. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas y/o falsas. Si es verdadera, demuéstrelo en general y si es falsa, dé un contraejemplo.

   (a) Si $\mathbf{w}$ es una solución del problema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces existe un vector $\mathbf{q}$ tal que $\mathbf{w} - \mathbf{q}$ es una solución no nula del problema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

   (b) Si el sistema lineal $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ tiene infinitas soluciones, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ también tiene infinitas soluciones.

Solución

(a) Falso. Defina $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. El problema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ únicamente tiene la solución $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ únicamente la solución nula. Por lo tanto no existe $\mathbf{q}$ tal que $\mathbf{w} - \mathbf{q}$ sea solución no nula de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Verdadero. Por el teorema de soluciones de sistemas lineales no homogéneos, el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ es una translación del conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Por lo tanto, si el problema no homogéneo tiene infinitas soluciones, el homogéneo también.

Puntaje (6 puntos en total)

- 1 punto por indicar correctamente el valor de verdad en cada proposición y entrega un argumento, sea correcto o no. (2 puntos en total)
- 2 puntos si el argumento entregado es correcto en cada ítem. (4 puntos en total)

4. Determine si la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_2 \\ x_1 - 3 \\ 2x_1 - 5x_2 \end{bmatrix}$$

es lineal o no.

Solución Demostraremos que T no es lineal. Para ello basta notar que

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \neq 2T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En efecto:

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\implies 2T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Puntaje (6 puntos en total)

- 2 puntos por establecer una manera de demostrar que T no es lineal.
- 2 puntos verificar correctamente que T no es lineal.
- 2 puntos por concluir que T no es lineal.

5. Determine la matriz estándar de la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que consiste en una reflexión en la recta $y = x$, seguida por rotación de $30°$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj, seguida por reflexión con respecto del eje Y (Debe calcular las funciones trigonométricas que correspondan).

Solución La matriz estándar de una transformación lineal en el plano se calcula como

$$\begin{bmatrix} T(\mathbf{e_1}) & T(\mathbf{e_2}) \end{bmatrix}.$$

El vector $\mathbf{e_1}$ primero es transformado en el vector $\mathbf{e_2}$ a través de la reflexión en la recta $y = x$. Posterior a la rotación de 30° dicho vector se transforma en

$$\begin{bmatrix} \cos(90+30) \\ \sin(90+30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(60) \\ \sin(60) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

Finalmente dicho vector se refleja con respecto al eje Y y termina en $\begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$.

De manera similar, el vector $\mathbf{e_2}$ primero se refleja hacia el vector $\mathbf{e_1}$ por la recta $y = x$, luego se rota en 30° convirtiéndose en $\begin{bmatrix} \cos(30) \\ \sin(30) \end{bmatrix}$ y finalmente se refleja en torno al eje Y obteniendo el vector $\begin{bmatrix} -\cos(30) \\ \sin(30) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$.

En conclusión, la matriz estándar de T es

$$\begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Puntaje (6 puntos en total)

- 1 punto por indicar, implícita o explícitamente, cómo se define la matriz estándar.
- 3 puntos por determinar correctamente en cuál vector se transforma finalmente cada vector canónico.
- 1 punto por calcular las funciones trigonométricas correspondientes
- 1 punto por escribir la matriz estándar.

6. Encuentre la fórmula de definición de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Solución Primero notamos que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

lo que implica

$$T \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

y

$$T\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}.$$

Por otro lado

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{x}{2}T\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + \frac{y}{2}T\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \frac{x}{2}\begin{bmatrix}2\\8\end{bmatrix} + \frac{y}{2}\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x+y\\4x-y\end{bmatrix}.$$

Puntaje (6 puntos en total)

- 2 puntos por establecer la relación entre los vectores dados y el vector $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.
- 2 puntos por aplicar correctamente la transformación T a la relación encontrada usando la linealidad.
- 2 puntos por escribir explícitamente la fórmula de definición correcta.

7. Determine si la siguiente transformación lineal es inyectiva y/o sobreyectiva

$$T\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1+2x_2\\2x_2+x_4\\x_2-x_4\end{bmatrix}.$$

Solución La transformación T tiene dominio en $\mathbb{R}^4$ y codominio en $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto no puede ser inyectiva. Otra manera de ver esto es mirar la matriz estándar de T:

$$\begin{bmatrix}T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Ya que la matriz estándar tiene una columna sin pivote, el problema homogéneo tiene infinitas soluciones, por lo que la transformación T no es inyectiva.

De igual manera, una forma escalonada de dicha matriz es $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & -3/2\end{bmatrix}$ la cual si presenta un pivote en cada fila. Por lo tanto, la transformación T es sobreyectiva.

Puntaje (6 puntos en total)

- 3 puntos por argumentar y concluir correctamente si T es inyectiva.
- 3 puntos por argumentar y concluir correctamente si T es sobreyectiva.

8. Encuentre la matriz X sabiendo que $X^T - B^2 = (AB^T - 3X)^T$ y

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución Reescribimos la ecuación matricial:

$$\begin{aligned} X^T - B^2 = (AB^T - 3X)^T &\iff X^T - B^2 = BA^T - 3X^T \\ &\iff 4X^T = B^2 + BA^T \end{aligned}$$

Además: $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $BA^T = BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Es decir,

$$4X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

lo cual implica que $X^T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$ y por lo tanto $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$.

Puntaje (6 puntos en total)

- 2 puntos por establecer una manera correcta de encontrar X aunque no logre terminarlo.
- 1 punto por tener todas las operaciones de potencias y multiplicaciones de matrices correctas.
- 1 punto por tener todas las operaciones de matrices transpuestas correctas.
- 2 puntos si determina la matrix X de manera correcta.