INTERROGACIÓN 2
MAT1620

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Considere la región D acotada por los paraboloides,

$$z = x^2 + y^2, \qquad z = 36 - x^2 - y^2.$$

   a) Describa el volumen de la región D usando coordenadas cartesianas.
   Solución.

$$Vol(D) = \int_{-2\sqrt{2}}^{3\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{18-x^2}}^{\sqrt{18-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{36-x^2-y^2} 1\, dzdydx.$$

   b) Describa el volumen de la región D usando coordenadas cilíndricas.
   Solución.

$$Vol(D) = \int_0^{2\pi} \int_0^{3\sqrt{2}} \int_{r^2}^{36-r^2} r \cdot dzdrd\theta.$$

   c) Describa el volumen de la región D usando coordenadas esféricas.
   Solución.
   Utilizando simetría respecto de $z = 18$, que es la altura a la cual se produce la intersección de los paraboloides, que se corresponde con $\phi_0 = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}/6)$ se tiene

$$Vol(D) = 2\int_0^{2\pi} \int_0^{\phi_0} \int_0^{\sec(\phi)} \rho\,\mathrm{sen}^2(\phi) d\rho d\phi d\theta + 2\int_0^{2\pi} \int_{\phi_0}^{\pi/2} \int_0^{\cos(\phi)/sen^2(\phi)} \rho\,\mathrm{sen}^2(\phi) d\rho d\phi d\theta$$

   d) Calcule el volumen de la región D.
   Solución.
   Para calcular el volumen, es posible uilizar cualquiera de los sistemas de coordenadas anteriores, en cualquier caso el volumen será:

$$Vol(D) = \pi \cdot 18^2.$$

Asignación de puntaje.

- Asignar 1 punto por la correcta descripción del volumen en coordenadas cartesianas. En caso de un error en los cálculos de los límites de integración, un error descuenta 0.5 puntos, el segundo error (o mas) descuenta el puntaje total.
- Asignar 1 punto por la correcta descripción del volumen en coordenadas cil indricas. En caso de un error en los límites de integración, descontar 0.5 puntos. En caso de colocar la expresión r (por el cambio de variable) descontar 0.5 puntos.
- Asignar 1.5 puntos por la descripción del volumen en coordenadas esféricas. Descontar 0,5 puntos por un error en los cálculos de los límites de integración. Descontar 0.5 puntos en caso que no aparezca la expresión $r^2 \operatorname{sen}(\phi)$.
- Asignar 1,5 puntos por el cálculo correcto del volumen pedido.

2. Determine el punto que se encuentra en la intersección de los planos

$$3x - 2y + 4z = 9, \qquad x + 2y = 3,$$

mas cercano al punto $(3, -1, 2)$.
El problema consiste en minimizar la función,

$$d(x, y, z) = (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2,$$

sujeto a la condiciones

$$3x - 2y + 4z = 9, \qquad x + 2y = 3.$$

Para determinar el mínimo de la función $d = d(x, y, z)$ utilizaremos el método de los multiplicadores de Lagrange, en este caso el respectivo sistema resulta ser:

$$\begin{aligned} -2(x-3) - 3\lambda - \mu &= 0, \\ -2(y+1) + 2\lambda - 2\mu &= 0, \\ -2(z-2) - 4\lambda &= 0, \\ 9 - 3x + 2y + 4z &= 0, \\ 3 - x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema tiene una único solución, a saber,

$$\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

El cual corresponde al punto donde se minimiza la distancia pedida.

Observación: Un tipo de argumento en relación a que el punto obtenido sea un mínimo podria ser del tipo $d = d(x, y, z)$ es un función positiva, creciente en todo su dominio. No se asignará (o descontará) puntaje por argumentar o no, en relación a esto.

Asignación de puntaje:

- Asignar 1 punto por la correcta elección de la función a minimizar. En la solución se utiliza la función $d(x,y,z)$ la cual corresponde a la función distancia al cuadrado. En caso que se utilice la función $\sqrt{d(x,y,z)}$ el puntaje se debe asignar de manera completa.
- Asignar 1 punto por la correcta utilización de dos multiplicadores en la respectiva expresión de Lagrange.
- Asignar 0.5 puntos por plantear el respectivo sistema.
- Asignar 2.5 puntos por resolver de manera correcta el sistema respectivo.