Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 3

1. (a) (2pts) Determine el dominio de la función (real de variable real) definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|-4}}{x^2-16}.$$

(b) (4pts) Determine el rango (o conjunto imagen) de la función $f : [-4,4] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 5 - \sqrt{16-x^2}.$$

Instrucción: debe calcular el rango por definición. En particular, deducir el rango a partir del gráfico de la función **no tiene puntaje.**

Solución.

(a) La expresión $\frac{\sqrt{|x|-4}}{x^2-16}$ está bien definida en $\mathbb{R}$ si $|x|-4 \geq 0$ y $x^2-16 \neq 0$. Notando que $|x| \geq 4 \iff x \in (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$ y que $x^2 \neq 16 \iff x \in \mathbb{R} \setminus \{-4,4\}$, concluimos que

$$\mathrm{Dom}(f) = [(-\infty,-4] \cup [4,\infty)] \cap [\mathbb{R} \setminus \{-4,4\}] = (-\infty,-4) \cup (4,\infty).$$

(b) Debemos determinar el conjunto $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-4,4] \text{ tal que } y = f(x)\}$. Luego, para $x \in [-4,4]$ consideramos la ecuación $y = 5 - \sqrt{16-x^2} \iff 5 - y = \sqrt{16-x^2}$. Para que esto sea cierto, necesariamente $5 \geq y$, en cuyo caso se tiene

$$(5-y)^2 = 16 - x^2 \iff x^2 = 16 - (5-y)^2.$$

Esta ecuación posee solución si y sólo si

$$16 - (5-y)^2 \geq 0 \iff 0 \geq y^2 - 10y + 9 \iff 0 \geq (y-1)(y-9) \iff y \in [1,9].$$

Finalmente, deducimos que si $y \in [1,9] \cap (-\infty,5] = [1,5]$, entonces $x = \pm\sqrt{16-(5-y)^2} \in [-4,4]$ es tal que $y = f(x)$, por lo que

$$\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [-4,4] \text{ tal que } y = f(x)\} = [1,5].$$

Puntaje Pregunta 1.

Respecto a la parte (a)

- 1 punto por obtener las restricciones $|x|-4 \geq 0$ y $x^2-16 \neq 0$.
- 1 punto por obtener el dominio de la función.

Respecto a la parte (b)

- 1 punto por obtener la condición $5 \geq y$.
- 1 punto por obtener la ecuación $x^2 = 16 - (5-y)^2$.
- 1 punto por deducir que esta ecuación posee solución si y sólo si $y \in [1,9]$.
- 1 punto por obtener el rango o imagen de la función.

2. La gráfica de $g(x) = -\sqrt{2-x} - 1$ se obtiene a partir de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ aplicando transformaciones de funciones elementales vistas en cátedra, como traslaciones horizontales y verticales, dilataciones y contracciones horizontales y verticales y reflexiones.

   a) Identifique en orden las transformaciones elementales que permiten obtener el gráfico de $g(x)$ a partir del gráfico de $f(x)$.

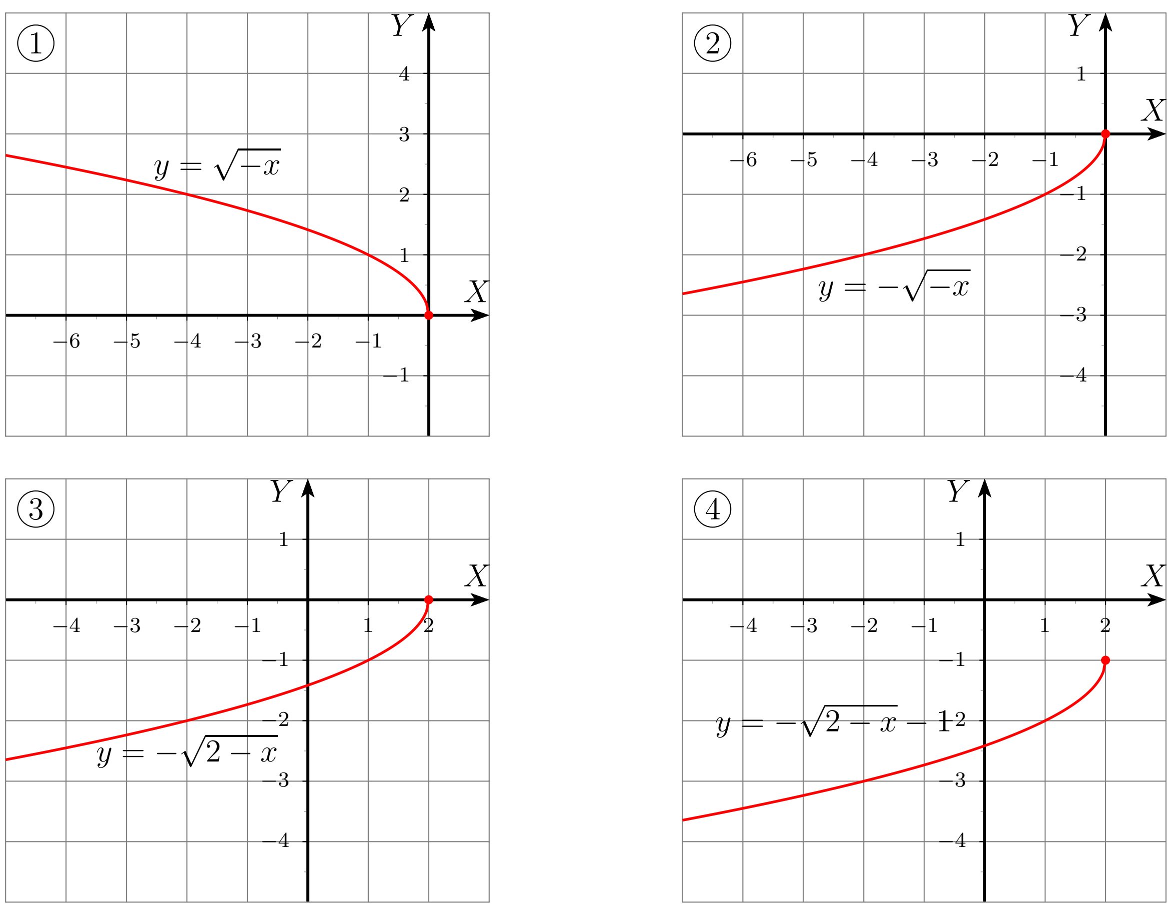
   b) Grafique cada una de estas transformaciones del inciso a), indicando los puntos donde la gráfica intersecta los ejes coordenados. Tenga en cuenta que solo se puede aplicar una transformación a la vez.

Solución.

a) Podemos ver que $g(x) = -f(-(x-2)) - 1$. Luego, una forma de identificar el orden en que se realizar las transformaciones es:

Orden	**Transformación**	**Descripción**
1	$h_1(x) = f(-x)$	Reflexión eje Y
2	$h_2(x) = -h_1(x) = -f(-x)$	Reflexión eje X
3	$h_3(x) = h_2(x-2) = -f(-(x-2))$	Traslación derecha
4	$g(x) = h_3(x) - 1 = -f(-(x-2)) - 1$	Traslación abajo

b) A continuación se muestran las transformaciones en el orden dado.



Puntaje Pregunta 2.

- 1,5 puntos por dar el orden de las reflexiones, las reflexiones pueden conmutar su orden.
- 1,5 puntos por dar el orden de las translaciones, las traslaciones pueden conmutar su orden.
- 1,5 puntos por graficar las reflexiones.
- 1,5 puntos por graficar las traslaciones.