PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Interrogación 2 MAT1203 - 27 de octubre

Esta prueba tiene 4 preguntas.

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera, demuéstrela. Si es falsa dé un contraejemplo.

1. *a*) Sean A y B matrices de 2×2. Si A y B son antisimétricas, entonces AB es antisimétrica.

   Solución:

   La afirmación es falsa.

   Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   A y B son antisimétricas, pero:

   $-(AB)^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq AB.$

   b) Sea A una matriz cuadrada. Si $C(A) \subseteq \mathrm{Nul}(A - I)$, entonces $A^2 = A$.

   Solución:

   La afirmación es verdadera.

   Como $C(A) \subseteq \mathrm{Nul}(A - I)$, entonces para todo $v \in C(A)$ se tiene que $v \in \mathrm{Nul}(A - I)$.

   En particular si v es una columna de A, se tiene que $v \in \mathrm{Nul}(A - I)$.

   Entonces $(A - I)v = \vec{0}$ para todo vector v columna de A.

   Por definición de producto de matrices se tiene $(A - I)A$ es la matriz nula.

   Es decir $A^2 - A$ es la matriz nula, luego $A^2 = A$.

2. *a*) Sea L una matriz de 4×2 tal que $C(L) = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Si u y v son vectores tales que $Lu = Lv$, entonces $u = v$.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Como L es de 4×2 su rango máximo es 2.

Como $C(L)$ está generado por dos vectores L.I. (canónicos), entonces L es inyectiva.

Por lo tanto si $Lu = Lv$ se tiene que $u = v$.

b) Sea A una matriz de 2×2. Si $A - I$ es invertible, entonces A^2 es la matriz nula.

Solución:

La afirmación es falsa.

Si $A = 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, entonces $A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ que es invertible.

$A^2 = 4I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ es distinta a la matriz nula.

3. *a*) Sea P una matriz tal que $P^2 = P$. Si $R = 2P - I$, entonces R es invertible.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Tomando $R^2 = (2P - I)(2P - I) = 4P^2 - 2P - 2P + I$.

Pero $P^2 = P$, entonces $R^2 = 4P - 2P - 2P + I = I$.

Luego $R^2 = I$ y R es invertible. De hecho su inversa es R.

b) Sean A y B matrices de 2×2. Si B es la matriz que resulta de sumarle a la segunda columna cinco veces la primera columna en la matriz A, entonces $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B = A$.

Solución:

La afirmación es falsa.

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 + 5 \cdot 1 \\ 0 & 1 + 5 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Luego $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq A$.

4. $a)$ Sea $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ con $a_1, \cdots, a_9 \in \mathbb{R}$.

Si las matrices $[\, a_1 \,]$ y $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \end{bmatrix}$ son invertibles, entonces A admite $A = LU$.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Como $[\, a_1 \,]$ es invertible, entonces $a_1 \neq 0$ por lo tanto la primera fila de A no necesita ser intercambiada con ninguna fila para obtener U.
Además es posible hacer la operación elemental $F_2 \rightarrow F_2 - \dfrac{a_4}{a_1} F1$ y se obtiene:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_5 - \dfrac{a_4}{a_1} a_2 & a_6 - \dfrac{a_4}{a_1} a_3 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}.$$

Pero como $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \end{bmatrix}$ es invertible se tiene que $a_5 - \dfrac{a_4}{a_1} a_2$ es diatinto de cero, luego la segunda fila de A no necesita ser intercambiada con ninguna fila para obtener U.

Finalmente, como la fila 1 y la fila 2 no necesitan ser intercambiadas, entonces la fila 3 no necesita ser intercambiada para obtener U y la matriz A admite la descomposición $A = LU$.

b) Sea A una matriz de 3×3 que admite $A = LU$. Si $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, entonces el primer elemento de la tercera fila de A es cero.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Dado que $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, entonces para obtener U sólo se hizo la operación elemental $F_3 \to F_3 + (-2)F_2$.

Como U está en forma escalonada, la segunda fila no puede tener pivotes en la primera columna, luego el primer elemento de la segunda fila de A es cero.

Por lo tanto en la operación elemental $F_3 \to F_3 + (-2)F_2$, no fue alterado el primer elemento de la tercera fila y, de nuevo, como U está en forma escalonada, entonces ese elemento debe ser cero.