Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo Semestre del 2020

Modelos Probabilísticos (EYP1027)
Ayudantía 3

1. Se tienen n personas formadas en un círculo, dos de las cuales se llaman Ana y Berta. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana y Berta se encuentren separadas por r personas en la formación?

2. Demuestre que para cualquier partición $C_1, C_2, \ldots$ y para cualquier colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ se cumple que,

   a) $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i)$

   b) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (Desigualdad de Boole)

   c) $P(\cap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$ (Desigualdad de Bonferroni)

3. Si $A_1, \ldots, A_n$ son una familia independiente de conjuntos, demuestre que

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P(A_i))$$

4. Un par de eventos A and B no pueden ser mutuamente excluyente e independientes a la vez. Demuestre que si $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$, entonces:

   a) Si A y B son mutuamente excluyente, entonces no son independientes.

   b) Si A y B son independientes, entonces no son mutuamente excluyentes.

5. En la serie mundial de béisbol, dos equipos A y B juegan una serie de partidos uno contra otro y el primer equipo que gana un total de tres partidos es el ganador de la serie mundial. Si la probabilidad de que el equipo A gane un partido contra el equipo B es $\frac{1}{3}$

   a) Describa el espacio muestral de este experimento.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo A gane la serie mundial?

   c) Si la probabilidad de que el equipo A gane cualquier partido es p $(0 < p < 1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario jugar los 5 partidos para determinar al ganador de la serie?

   d) Si la serie termina en el cuarto juego, ¿cuál es la probabilidad de que el ganador sea el equipo B?

6. En clases se demostró que cuando $x \to \infty$, entonces $F_X(x) \to 1$, demuestre que si $x \to -\infty$, entonces $F_X(x) \to 0$ de esta manera $0 \leq F_X(x) \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$

7. Considere la siguiente función,

$$H(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \qquad \lambda > 0$$

Demuestre que

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ H(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es función de distribución acumulada (cdf).

8. Para una empresa de buses de pasajeros es importante mantener una buena frecuencia del servicio. El tiempo de recorrido X de un bus, medido en minutos, desde su salida del terminal hasta su regreso a él, tiene función densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} e^{-\frac{1}{30}(x-120)} & \text{si} \quad x > 120 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 120 \end{cases}$$

   a) Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en menos de t minutos, $t \in \mathbb{R}$

   b) Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en más de 3 horas.

   c) Un bus inicia su recorrido y tres horas despues aún no ha llegado a su destino. Calcule la probabilidad que el bus se demore a lo menos 15 minutos adicionales.

9. Una cdf F_X es estocasticamente más grande que una cdf F_Y si $F_X(t) \leq F_Y(t)$ para toda t y $F_X(t) < F_Y(t)$ para algún t. Demuestre que si $X \sim F_X$ y $Y \sim F_Y$ y se cumple la condición anterior entonces

$$P(X > t) \geq P(Y > t) \quad \text{para todo } t$$

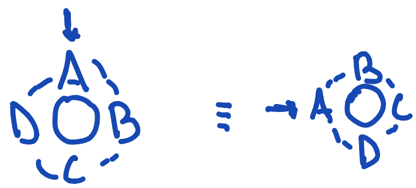
y

$$P(X > t) > P(Y > t) \quad \text{para algún } t$$

esto es, X tiende a ser más grande que Y.

Solución

1. Se tienen n personas formadas en un círculo, dos de las cuales se llaman Ana y Berta. ¿Cuál es la probabilidad de que Ana y Berta se encuentren separadas por r personas en la formación?

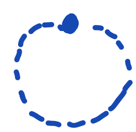


$$A\ B\ C\ D = 4!$$
$$B\ C\ D\ A$$

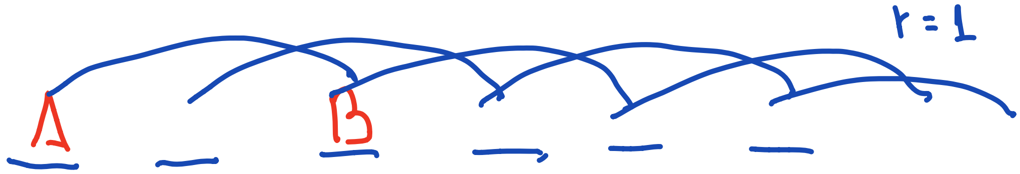
4 cortes

$$\frac{4!}{4} = 3!$$

Caso general $\quad \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$

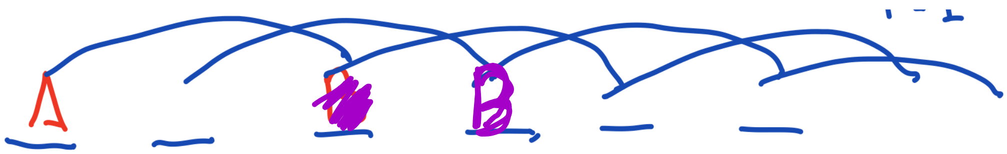


$n = 6$
$r = 1$



$$\frac{2\cancel{n}(n-2)!}{\cancel{n}} = \frac{2(n-2)!}{(n-1)!} \quad \frac{CF}{CT}$$

$n \neq 2(r+1)$



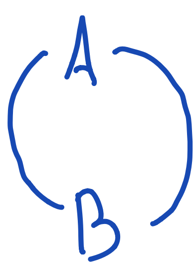
$n = 2(r+1)$

$$\frac{n(n-2)!}{n} = (n-2)!$$

$$\frac{2(n-2)!}{(n-1)!}$$

$\boxed{n \neq 2(r+1)}$

$\boxed{n = 2(r+1)}$



$$\frac{(n-2)!}{(n-1)!}$$

→ Casos totales

2. Demuestre que para cualquier partición $C_1, C_2, \ldots$ y para cualquier colección de conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ se cumple que,

a) $P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A \cap C_i)$

b) $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (Desigualdad de Boole)

c) $P(\cap_{i=1}^{n} A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)$ (Desigualdad de Bonferroni)

a) Si $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es partición

$$S = \bigcup_{i \geq 1} C_i \quad y \quad C_i \cap C_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

esp. muestral

$$\Rightarrow P(A) = P(S \cap A)$$
$$= P\left(\bigcup_{i \geq 1} C_i \cap A\right)$$
$$= P\left(\bigcup_{i \geq 1} (C_i \cap A)\right)$$
$$= \sum_{i \geq 1} P(C_i \cap A)$$

Notar que $A \cap C_i$ son colecc. disj.
pues C_i son disj.

b) Sea $\{B_i\}_{i=1}^{n}$ una colecc. tq $\bigcup_{i\geq 1} B_i = \bigcup_{i\geq 1} A_i$ pero B_i disj.

Definimos

$$B_1 = A_1 \;, \quad B_K = A_K - \bigcup_{j=1}^{K-1} A_j$$

de esta manera

$$\bigcup_{i\geq 1} B_i = \bigcup_{i\geq 1} A_i$$

Es fácil ver que $B_i \subset A_i$

$\Rightarrow \; P(B_i) \leq P(A_i) \; (*)$

$$\Rightarrow \; P\Big(\bigcup_{i\geq 1} A_i\Big) \overset{(*)}{=} P\Big(\bigcup_{i\geq 1} B_i\Big)$$

$$\overset{Ax3}{=} \sum_{i\geq 1} P(B_i) \overset{(*)}{\leq} \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

Notar que los B_i son disj pues

$$B_i \cap B_K = \underbrace{\Big(A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\Big)}_{B_i} \cap \underbrace{\Big(A_K - \bigcup_{j=1}^{K-1} A_j\Big)}_{B_K}$$

$$= \left(A_i \cap \underbrace{\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j^c}_{\bullet}\right) \cap \left(A_k \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j^c\right)$$

Si $i < K \Rightarrow \bullet \subseteq A_K^c$ y

Como $A_K \cap A_K^c = \emptyset$

tenemos $B_i \cap B_K = \emptyset$, analogo

para $i < K$

c) Si aplicamos b) a los complem.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ P\left(\left[\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right]^c\right) & & \sum_{i=1}^{n}\left[1 - P(A_i)\right] \\ \| & & \| \\ 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) & & n - \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \end{array}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1) \leq P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

que era lo pedido.

5. En la serie mundial de béisbol, dos equipos A y B juegan una serie de partidos uno contra otro y el primer equipo que gana un total de tres partidos es el ganador de la serie mundial. Si la probabilidad de que el equipo A gane un partido contra el equipo B es $\frac{1}{3}$

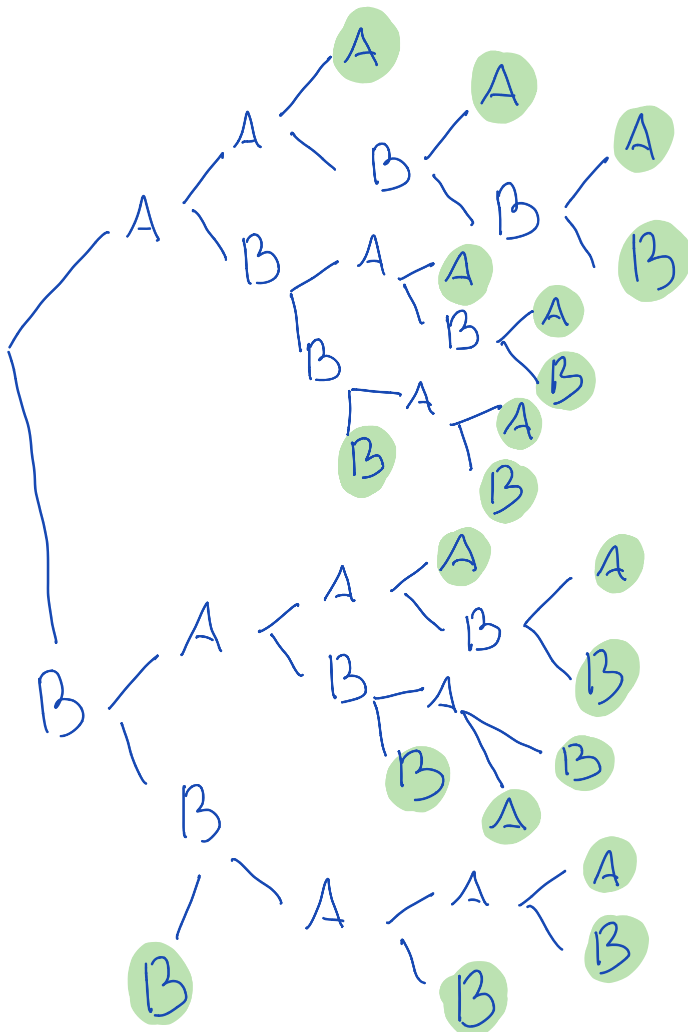
   a) Describa el espacio muestral de este experimento.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo A gane la serie mundial?

   c) Si la probabilidad de que el equipo A gane cualquier partido es p $(0 < p < 1)$. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesario jugar los 5 partidos para determinar al ganador de la serie?

   d) Si la serie termina en el cuarto juego, ¿cuál es la probabilidad de que el ganador sea el equipo B?

a) $S = \{(A,A,A), (A,A,B,A), (B,B,A,A,A), \ldots, (B,B,B)\}$



El Conj. S tiene 20 elementos

b) Tenemos a lo menos 3 partidos y a lo más 5 partidos

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right) + 6\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

c) $6p^3(1-p)^2 + 6p^2(1-p)^3$

$$= 6p^2(1-p)^2\left(\cancel{p} + (1-\cancel{p})\right)$$

$$= 6p^2(1-p)^2$$

d) $P(\text{Gane B} \mid 4 \text{ partidos})$

$$= \frac{P(B \text{ y } 4P)}{P(4P)}$$

$$= \frac{(1-p)^3 p}{3p(1-p)^3 + 3p^3(1-p)} = \frac{(1-p)^2}{p^2 + (1-p)^2}$$

7. Considere la siguiente función,

$$H(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \qquad \lambda > 0$$

Demuestre que

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ H(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es función de distribución acumulada (cdf).

primero $H(x) = \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} dt$

$$= \frac{-\cancel{\lambda} e^{-\lambda t}}{\cancel{\lambda}} \Big|_0^x$$

$$= -e^{-\lambda x} - -1$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$$

i) No decreciente si $x < 0$ ✓

si $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$ y $x \leq y$

tenemos $\quad x \leq y \qquad$ como $\lambda > 0$

$$\Rightarrow \lambda x \leq \lambda y$$

$$\Rightarrow -\lambda x \geqslant -\lambda y \qquad / e \text{ (es creciente)}$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda x} \geq e^{-\lambda y} \quad / \cdot -1$$

$$\Rightarrow -e^{-\lambda x} \leq -e^{-\lambda y} \quad / +1$$

$$\Rightarrow 1-e^{-\lambda x} \leq 1-e^{-\lambda y}$$

$$\Rightarrow F_x(x) \leq F_y(y) \quad \therefore \; F \text{ es no decreciente}$$

ii) $0 \leq F_x(x) \leq 1$

Primero se considera

$$\lim_{x \to \infty} F_x(x) = \lim_{x \to \infty} 1-e^{-\lambda x} = 1-0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} F_x(x) = \lim_{x \to 0} 1-e^{-\lambda x} = 1-1 = 0$$

iii) F_x es cont. por la derecha

$$\lim_{h \to 0} F_x(x+h) = \lim_{h \to 0} 1-e^{-\lambda(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} 1-e^{-\lambda x}\cancel{e^{-\lambda h}}^{\to 1}$$

$$= 1-e^{-\lambda x} = F_x(x)$$

$\therefore$ F es cdf.

8. Para una empresa de buses de pasajeros es importante mantener una buena frecuencia del servicio. El tiempo de recorrido X de un bus, medido en minutos, desde su salida del terminal hasta su regreso a él, tiene función densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}e^{-\frac{1}{30}(x-120)} & \text{si } \ x > 120 \\ 0 & \text{si } \ x \leq 120 \end{cases}$$

a) Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en menos de t minutos, $t \in \mathbb{R}$

b) Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en más de 3 horas.

c) Un bus inicia su recorrido y tres horas despues aún no ha llegado a su destino. Calcule la probabilidad que el bus se demore a lo menos 15 minutos adicionales.

a) $\underbrace{P(X<t)}_{P(X\leq t)} = \int_{120}^{t} f_x(x)\,dx$

con $t>120$

$$= \int_{120}^{t} \frac{1}{30} e^{-\frac{1}{30}(x-120)}\,dx$$

$u = x-120$

$du = dx$

$$= \int_{0}^{t-120} \frac{1}{30} e^{-\frac{1}{30}u}\,du$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{30}(t-120)}$$

si $t \leq 120 \Rightarrow P(X<t) = 0$

b) $P(X > 3 \text{ horas}) = P(X > 180)$

$$= 1 - P(X \leq 180)$$

$$= 1 - P(X < 180)$$

$$= 1 - 1 + e^{-\frac{1}{30}(180-120)}$$

$$= e^{-2} \text{ //}$$

c) $P(X \geq 195 \mid X > 180)$

$$= \frac{P(X \geq 195, X > 180)}{P(X > 180)}$$

$$= \frac{P(X \geq 195)}{P(X > 180)} = \frac{1 - P(X < 195)}{1 - P(X < 180)}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{30}(195-120)}}{e^{-2}}$$

$$= e^{-\frac{75}{30}+2} = e^{-\frac{15}{30}} = e^{-\frac{1}{2}} \text{ //}$$