PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2021

Interrogación 1 - MAT1610

1. Determine, en caso que existan, todas las asíntotas verticales y horizontales, de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x}{x - 1}$$

Solución:

Observamos que f es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$, por lo tanto, de existir una asíntota vertical debería ser $x = 1$, para ver si es asíntota estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x}{x - 1} = -\infty$$

ya que el numerador tiende a un número negativo y el denominador a cero por positivos, por lo tanto la recta $x = 1$ es asíntota vertical.

Para ver las asíntotas horizontales estudiamos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x}{x - 1} &= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2(4 - 3/x + 1/x^2)} - 2x}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{x\sqrt{(4 - 3/x + 1/x^2)} - 2x}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{(4 - 3/x + 1/x^2)} - 2}{1 - 1/x} \\
&= 0
\end{aligned}$$

y también vemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 2x}{x - 1} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2(4 - 3/x + 1/x^2)} - 2x}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{(4 - 3/x + 1/x^2)} - 2x}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{(4 - 3/x + 1/x^2)} - 2}{1 - 1/x} \\
&= -4
\end{aligned}$$

por lo tanto existen dos asíntotas horizontales $y = 0$ e $y = -4$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por indicar que en $x = 1$ es la única asíntota vertical que podría existir.
- (1 punto) por determinar que alguno de los laterales es no acotado y por tanto hay asíntota vertical.
- (1 punto) por el desarrollo algebraico para el calculo del $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
- (1 punto) por determinar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y concluir que $y = 0$ es asíntota.
- (1 punto) por el desarrollo algebraico para el calculo del $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
- (1 punto) por determinar que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -4$ y concluir que $y = -4$ es asíntota.

2. Calcule los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, 3^{\cos(\pi/x)}$

   Solución:

   Observamos que para todo $x \neq 0$ se tiene que

   $$-1 \leq \cos(\pi/x) \leq 1$$

   por lo tanto

   $$\frac{1}{3} \leq 3^{\cos(\pi/x)} \leq 3$$

   luego,

   $$\frac{\sqrt{x}}{3} \leq \sqrt{x}\, 3^{\cos(\pi/x)} \leq 3\sqrt{x}$$

   ya que

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{3} = \lim_{x\to 0^+} 3\sqrt{x} = 0$$

   por lo tanto, por el Teorema del Sandwich tenemos que

   $$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\, 3^{\cos(\pi/x)} = 0$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) por acotar correctamente la función.
   - (1 punto) por calcular el límite de las cotas.
   - (1 punto) por concluir que el límite pedido es 0.

b) $\lim_{x\to -5} \dfrac{(x+5)}{\operatorname{sen}(\pi x)}$.

Solución:

Si hacemos un cambio de variable de la forma $u = x + 5$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -5} \frac{(x+5)}{\operatorname{sen}(\pi x)} &= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\operatorname{sen}(\pi(u-5))} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{u}{-\operatorname{sen}(\pi u)} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

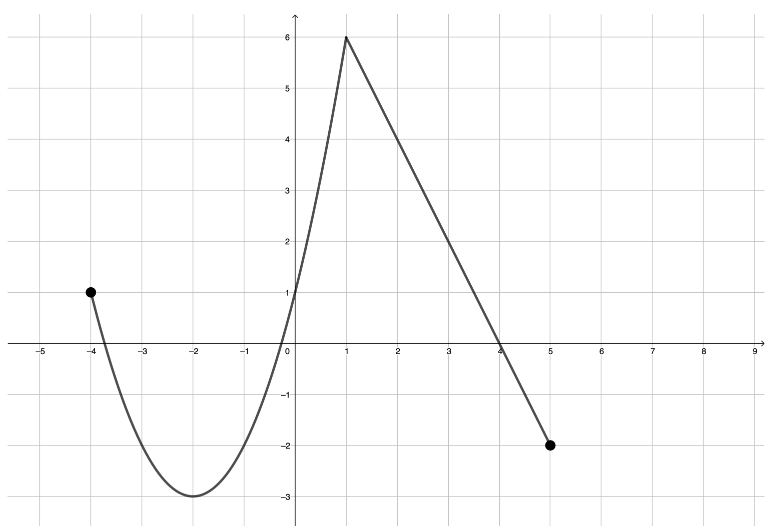
Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por usar cambio de variable apropiado.
- (1 punto) por transformar correctamente el límite en la nueva variable.
- (1 punto) por determinar el valor del límite.

3. Considere f una función tal que

x	1	-1	2
$f(x)$	10	7	3
$f'(x)$	-1	0	5

y g una la función cuyo gráfico es el de la figura adjunta



Si $h(x) = \dfrac{xf(x)+1}{g(x)}$, determine $h'(2)$.

Solución:

Observe que

$$h'(x) = \frac{(xf(x)+1)'g(x) - g'(x)(xf(x)+1)}{g^2(x)} = \frac{(f(x)+xf'(x))g(x) - g'(x)(xf(x)+1)}{g^2(x)}$$

por lo tanto

$$h'(2) = \frac{(f(2)+2f'(2))g(2) - g'(2)(2f(2)+1)}{g^2(2)} = \frac{(3+2\cdot 5)4 + 2(2\cdot 3+1)}{16} = \frac{33}{8}$$

Distribución de puntajes:

- (1 puntos) por usar correctamente la regla del cociente para determinar $h'(x)$.
- (1 puntos) por usar correctamente la regla del producto al calcular la derivada de $xf(x)+1$
- (2 punto) por determinar $g'(2)$
- (1 punto) por todos los reemplazos $f(2), f'(2)$ y $g(2)$. (todos bien)
- (1 punto) por concluir el valor de $h'(2)$.

4. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+a}{x+3} & \text{si } x \geq 0 \\ \\ b(1-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b de modo que f sea derivable en $x = 0$.

Solución:

Observamos que para que f sea derivable en $x = 0$ primero debemos determinar las condiciones para que sea continua en $x = 0$, para esto debe cumplirse que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \frac{a}{3}$$

y vemos que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{a}{3} \text{ y que } \lim_{x\to 0^-} f(x) = b$$

obteniendo que si f es continua en $x = 0$ necesariamente $a = 3b$.

Ahora observamos que de la definición de derivabilidad tenemos que f es derivable en $x = 0$ si y sólo si

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - a/3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - a/3}{h}$$

al calcular cada uno de los límites obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-a/3}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{h+a}{h+3}-\dfrac{a}{3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(3-a)h}{3h(h+3)} \\
&= \frac{3-a}{9}
\end{aligned}$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-a/3}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{b(1-h)-\dfrac{a}{3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{-bh}{h} \\
&= -b
\end{aligned}$$

obteniendo que, además de que $a=3b$ se debe cumplir que $9b=a-3$, obteniendo que $a=\dfrac{-3}{2}$ y que $b=\dfrac{-1}{2}$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por la definición de continuidad en $x=0$.
- (1 punto) por determinar las condiciones para la continuidad en $x=0$, en términos de a y b.
- (1 punto) por la definición de la derivabilidad em $x=0$.
- (1 punto) por el calculo de $\displaystyle\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-a/3}{h}$
- (1 punto) por el calculo de $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-a/3}{h}$
- (1 punto) por determinar los valores de a y b.

NOTA: el estudiante puede saltarse el paso de continuidad y sólo usar la definición de derivabilidad en $x=1$ haciendo un análisis respecto a la existencia e igualdad de los límites laterales involucrados en dicha definición, en este caso redistribuir el puntaje de continuidad.

5. Sea $f(x) = x^4 + x - e^x$. Demuestre que el gráfico de f tiene, al menos, una recta tangente paralela a la recta $y = x + 1$.

Solución:

Observamos que el gráfico de f tiene una recta tangente paralela a la recta $y = x + 1$ si y sólo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = 1$. Para demostra esto veamos que $f'(x) = 4x^3 + 1 - e^x$ es una función continua en el intervalo $[0, 1]$, además $f'(0) = 0$ y $f'(1) = 5 - e > 2$, entonces por TVI tenemos que existe $c \in (0, 1)$ con $f'(c) = 1$, por lo tanto, en el punto $(c, f(c))$ la tangente al gráfico de f tiene pendiente 1 y por lo tanto es paralela a la recta $y = x + 1$

Distribución de puntajes:

- (2 punto) por reconocer que se busca c tal que $f'(c) = 1$
- (1 punto) por derivar correctamente f.
- (1 punto) por chequear hipótesis del TVI.
- (2 puntos) por concluir.

NOTA: observe que el estudiante puede usar buscar soluciones de $f'(x) = 1$ o también de $4x^3 - e^x = 0$, en tal caso distribuir los puntos de igual forma.