CLASE 22: TEOREMA DEL BINOMIO

- META: Encontrar una fórmula para

$$(a+b)^m, \; m \geq 0$$

Concretamente

$$(a+b)^m = c_m a^m + \text{potencias menores de } a \text{ con potencias de } b + c_0 b^m$$

$$\rightsquigarrow c_k = ?$$

- Ej.: $m=0$ $\quad (a+b)^0 = 1$

$m=1$ $\quad (a+b)^1 = a + b$

$m=2$ $\quad (a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2$

$m=3$ $\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 b^3$

$m=4$ $\quad (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Siguiendo el patrón:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Aparentemente, el coeficiente que acompaña a^k se puede inferir de la siguiente pirámide

$\underline{n=0}$						1					
$\underline{n=1}$					1		1				
$\underline{n=2}$				1		2		1			
$\underline{n=3}$			1		3		3		1		
$\underline{n=4}$		1		4		6		4		1	
$\underline{n=5}$	1		5		10		10		5		1

<u>Dos problemas</u>: i) Hay que demostrarlo

ii) En la práctica, esto sirve solo para potencias pequeñas de n

→ Necesitamos una manera más "práctica" de calcular estos coeficientes.

- Preliminar: $a = x,\ b = 1$

$$(x+1)^n = \ ?$$

- $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1)$

x^2 : $(x+1)(x+1)$ 1 posibilidad

$2x$: $(x+1)(x+1)$ 2 posibilidades

1 : $(x+1)(x+1)$ 1 posibilidad

- $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)(x+1)(x+1)$

x^3 : $(x+1)(x+1)(x+1)$ 1 posibilidad

$3x^2$: $(x+1)(x+1)(x+1)$ 3 posibilidades

$3x$: $(x+1)(x+1)(x+1)$

1 : $(x+1)(x+1)(x+1)$ 1 posibilidad

<u>Moraleja</u>: $(x+1)^m = x^m + \cdots + c_k x^k + \cdots + 1$

$\rightarrow$ c_k = el número de formas de escoger $\underline{k}$ de los x's entre los $\underline{m}$ disponibles.

<u>Obs</u>: En rigor, c_k también depende de $m \rightsquigarrow C_k^m$

<u>Conclusión</u>: $(x+1)^m = \sum_{k=0}^{m} C_k^m x^k$

donde C_k^m es el número de grupo de k objetos que se pueden formar a partir de m objetos.

- <u>Caso general</u>:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots(a+b)(a+b)}$$

- a^k : # elegir k de las a's entre las n disponibles

- elegir k a's $\Leftrightarrow$ elegir $n-k$ b's

  $\rightsquigarrow C^n_k a^k b^{n-k}$

  <u>Obs</u>: $C^n_k = C^n_{n-k}$

- <u>Conclusión</u>:

$$(a+b) = \sum_{k=0}^{n} C^n_k \, a^k \, b^{n-k}$$

donde C^n_k es como antes.

• Pregunta. ¿Cómo calcula C_k^m ?

• m objetos: ① ② ③ ...... (m-1) (m)

Tenemos que seleccionar k objetos distintos

• Primero : m posibilidades

• Segundo : $m-1$ posibilidades

• Tercero : $m-2$ posibilidades

⋮

• k-ésimo : $m-k+1$ posibilidades

$\rightarrow$ $m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)$ posibilidades

$$= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)(m-k)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(m-k)(m-k-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{m!}{(m-k)!}$$

donde $m!$ = factorial de $m = m\cdot(m-1)\cdots 2\cdot 1$

- **Hay un problema:**

$$\{1, 2, 4\} = \{2, 1, 4\} = \dots = \{4, 1, 2\}$$

→ Estamos contando el mismo grupo muchas veces

→ Hemos contado las maneras de escoger los k objetos ordenados

→ Tenemos que dividir por el número de formas de ordenar estos k objetos

\# escoger el primero : k

\# escoger el segundo : $k-1$

\# escoger el tercero : $k-2$

$\vdots$

\# escoger el último : 1

→ # maneras de ordenar k objetos: $k(k-1)\cdots 2\cdot 1 = k!$

- **Conclusión:** $C_k^n = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

- **DEF:** Coeficientes binomiales

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,, \quad n \geq 1,\ 0 \leq k \leq n$$

Obs: $0! = 1$

- **TEOREMA** (Teorema del binomio)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

DEM: Pendiente

$\square$

- Volvemos a la pirámide:

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!\cdot 0!} = 1$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\cdot(m-k)!}$$

$$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!\cdot 1!} = 1 \qquad \binom{1}{1} = \frac{1!}{1!\,0!} = 1$$

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{0!\cdot 2!} = 1 \qquad \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!\cdot 1!} = 2 \qquad \binom{2}{2} = \frac{2!}{2!\cdot 0!} = 1$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!\cdot 3!} = 1 \qquad \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!\cdot 2!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$m=3$
$k=0$
$m-k=3$

$m=3$
$k=1$
$m-k=2$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 1} = 3 \qquad \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!\cdot 0!} = 1$$

- Obs:

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\cdot(m-k)!} = \frac{m!}{(m-k)!\cdot k!} = \binom{m}{m-k}$$

- **Obs**:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{0} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & \cdots & & & & & \\
\binom{m}{0} & \cdots & \binom{m}{k} & & \binom{m}{k+1} & \cdots & \binom{m}{m} \\
\binom{m+1}{0} \quad \binom{m+1}{1} & \cdots & & \binom{m+1}{k+1} & & \cdots & \binom{m+1}{m+1}
\end{array}
$$

$$\rightarrow \quad \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \binom{m+1}{k+1}$$

DEM:

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!\,(m-k-1)!}$$

$$= \frac{m!}{k!\,(m-k)\cdot(m-k-1)!} + \frac{m!}{(k+1)\cdot k!\,(m-k-1)!}$$

$$= \frac{m!\,(k+1)}{\underbrace{(k+1)\cdot k!\cdot (m-k)(m-k-1)!}_{(k+1)!\,(\underbrace{m-k}_{m-k=(m+1)-(k+1)})!}} + \frac{m!\,(m-k)}{\underbrace{(k+1)!\,k!\,(m-k)(m-k-1)!}_{(k+1)!\,(m-k)!}}$$

$$= \frac{m!\,(m+1)}{(k+1)!\,(m+1-(k+1))!}$$

$$= \binom{m+1}{k+1} \qquad \square$$