PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2015

MAT 1610 - CACULO I-Pauta I1

1. a) **Determine justificadamente el** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ **si para todo** $x > 1$ **se cumple que:**

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}.$$

Solución
Dado que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{10e^x - 21}{2e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{10 - \dfrac{21}{e^x}}{2} = 5$$

(0.75 pts)
y que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}} = 5$$

(0.75 pts)
Entonces por teorema del sandwich tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 5.$$

(0.5 pts)

b) **Calcule** $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{(x-\pi)^2}{\operatorname{sen}^2(x)}$

Solución
Sea $x - \pi = y,$ **entonces cuando** $x \to \pi$ **tenemos que** $y \to 0.$
Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{(x-\pi)^2}{\operatorname{sen}^2(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{(\operatorname{sen}(y+\pi))^2} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\left(-\dfrac{\operatorname{sen}(y)}{y}\right)^2} = 1$$

(2 pts)

c) **Calcule** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 4}{x^4 + 2x - 3}.$

Solución

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 4}{x^4 + 2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3 + 3x^2 + 4)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 3)} = \frac{4}{3}$$

(2 pts)

2. a) **Sea f una función continua en $[1,\, 6]$ tal que $f(2) = 1$ y $f(3) = 6$. Demuestre que existe $c \in (2,\, 3)$ tal que $f(c) = c$.**
Solución
Sea $g(x) = f(x) - x$, entonces g es función continua en $[1,\, 6]$
(1 pto)
y además:

$$g(2) = 1 - 2 < 0$$
$$g(3) = 6 - 3 > 0$$

(0.5 pts)
Luego por teorema de valor Intermedio, $\exists c \in (2,\, 3)$ tal que $g(c) = 0$.
Por lo tanto

$$\exists c \in (2,\, 3)(f(c) = c).$$

(1.5 pts)

b) **Analice las discontinuidades de la función**

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi(x+1))}{x - x^2}$$

determinando si son removibles.
Solución
Dado que $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi(x+1))}{x(1-x)}$, las discontinuidades se producen en $x = 0$ y $x = 1$.
(0.2 pts)
Luego

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{(\pi x)} \frac{\pi}{1-x} = -\pi$$

(1 pto)
Por lo tanto en $x = 0$ hay una discontinuidad removible.

(0.4 pts)
Para $x = 1$, tomemos $1 - x = y$, entonces cuando $x \to 1$ se tiene que $y \to 0$ luego

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi(2-y))}{y(1-y)} = -\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi y)}{\pi y} \frac{\pi}{1-y} = -\pi.$$

(1 pto)
Por lo tanto, en $x = 1$ hay una discontinuidad removible. **(0.4 pts)**

3. a) **Considere la función real definida por**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-p}{x+1} & \textbf{si } x > 0 \\ \\ x^2 + qx & \textbf{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Determine los valores de p y q en los reales de manera que f sea derivable en $x = 0$

Solución
Para que f sea derivable en $x = 0$ se deben cumplir dos condiciones, a saber:
(I): f continua en $x = 0$:
es decir,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \;=\; \lim_{x \to 0^*} f(x) \;=\; f(0) \;=\; 0$$

Pero:

$$\lim_{x \to 0} f(x) \;=\; \lim_{x \to 0} x^2 + qx \;=\; 0 \;=\; \lim_{x \to 0} \frac{x-p}{x+1} \;=\; -p.$$

Por lo tanto

$$p \;=\; 0$$

(1.5 pts)

(II):debe existir el siguiente límite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

Entonces si:

- $h > 0$ **entonces** $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h(h+1)} \;=\; 1.$
- $h < 0$ **entonces** $\displaystyle\lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + qh}{h} \;=\; q.$
  Por lo tanto

$$q \;=\; 1.$$

(1.5 pts)

b) **Sea $f(x)$ una función derivable cuyo gráfico pasa por el punto $(1,\, 1)$ tal que $f'(1) = -2$.**

Si $g(x) \;=\; \dfrac{1}{x^2(f(x))^5}$ **calcule** $g'(1)$.

Solución

$$g'(x) \;=\; \frac{-(2x(f(x))^5 + 5x^2(f(x))^4 f'(x))}{x^4(f(x))^{10}}$$

(2 pts)
Por lo tanto,

$$g'(1) \;=\; 8.$$

(1 pto)

4. Determine las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ **que pasan por el punto** $(12, 3)$.

Solución
Derivando implicitamente la ecuacin de la elipse, obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$$

(1 pto)
Sea (x_0, y_0) **un punto de la elipse, por lo tanto cumple con** $(*)x_0^2+4y_0^2 = 36$ **entonces la ecuación de las tangentes es:**

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{4y_0}(x - x_0)$$

(1 pto)
Dado que deben pasar por el punto $(12, 3)$ **entonces debe cumplirse que:**

$$3 - y_0 = -\frac{x_0}{4y_0}(12 - x_0)$$

(1 pto)
Utilizando $(*)$ **llegamos a que**

$$y_0 = 3 - x_0$$

(1 pto)
Reemplazando este valor en la ecuación de la elipse, se llega a la ecuación:

$$x_0(5x_0 - 24) = 0$$

Luego obtenemos dos puntos, a saber:

$$(0, 3)\,,\,(\frac{24}{5}, -\frac{9}{5})$$

(1 pto)
Por lo tanto, las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$y - 3 = 0,\; y - 6x = -\frac{153}{5}$$

(1 pto)