Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2018

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 3

1. Sean $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \{X \in M_2(\mathbb{R}) |\ BX = 0\}$. Determine una base y la dimensión C.

Solución.

$$C = \{X \in M_2(\mathbb{R}) |\ BX = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} |\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a - c = 0 \text{ y } b - d = 0 \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a = c \text{ y } b = d \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ a & c \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son linealmente independiente, entonces una base para C es $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y luego su dimensión es 2.

Puntaje:

- 2 ptos por describir al conjunto C como el generado de matrices.
- 1 pto por argumentar que las matrices de la base deben ser li y lo son.
- 1 pto por dterminar una base para C.
- 2 ptos por determinar la dimensión de C

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Determine una matriz P invertible y una matriz D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$.

Solución.

Primero calculamos el polinomio característico de A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Luego los valores propios de de A son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$. Ahora calculamos el espacio de vectores propios asociado a $\lambda_1 = 3$, para esto calculamos la nulidad de la matriz $A - 3I$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to Nul(A-3I) = Gen\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Con esto podemos afirmar que la matriz es diagonalizable, ya que la dimensión de cada espacio de vectores propios coincide con la multiplicidad algebraica de cada valor propio asociado. Ahora calculamos el espacio de vectores propios asociado a $\lambda_1 = 3$, para esto calculamos la nulidad de la matriz $A - 2I$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to Nul(A-2I) = Gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \right\}$$

Luego $A = PDP^{-1}$ donde $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Puntaje:

- 0.5 ptos por calcular correctamente el polinomio característico de A.
- 0.5 ptos por calcular correctamente cada valor propio de A. (total 1pto)
- 1.5 ptos por calcular coorectamente el espacio de vectores propios asociado a 3.
- 1 pto por calcular coorectamente el espacio de vectores propios asociado a 2.
- 1.5 ptos por mostrar la matriz P.
- 0.5 ptos por mostrar la matriz D.

3. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ una transformación lineal cuya matriz de transformación respecto a la base $B = \{1, t, t^2\}$, esta dada por

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Determine $T(t^2+1)$ y el espacio Nulo de T.

Solución.

Para determinar $T(t^2+1)$, primero debemos calcular $[t^2+1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, luego calculamos

$[T]_B\,[t^2+1]_B = [T(t^2+1)]_B$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Asi $T(t^2+1) = 2 - t - 3t^2$.

Para determinar el espacio Nulo de T primero debemos calcular el espacio Nulo de $[T]_B$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el espacio Nulo de $[T]_B$ es $Gen \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, asi el espacio Nulo de T es $Gen\,\{-1 + t - 2t^2\}$

Puntaje:

- 0.5 ptos por calcular $[t^2+1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- 1 ptos por calcular $[T(t^2+1)]_B$.
- 1.5 ptos por calcular $T(t^2+1)$.
- 1.5 ptos por calcular el espacio Nulo de $[T]_B$
- 1.5 ptos por calcular Nulo de T

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) [4 **ptos**] Encuentre una matriz P invertible y una matriz C de la forma $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ tal que la matriz A tenga la forma $A = PCP^{-1}$.

b) [2 **ptos**] La transformación $T(x) = Cx$ es la composición de una rotación y de un escalamiento. Si ϕ el ángulo de la rotación, determine $\tan(\phi)$ y el factor de escala r.

Solución.

a) Primero calculamos los valores propios de la matriz

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \to \lambda = 2 \pm i$$

Ahora calculamos un vector propio asociado a $\lambda = 2 - i$

$$\begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1+i & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ i-1 \end{pmatrix}$$

Asi $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Como la matriz A es similar a la matriz C tienen los mismos valores propios. Luego ϕ es el argumento de $\lambda = 2 + i$ es decir $\tan(\phi) = \dfrac{1}{2}$ y $r = \|\lambda\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Puntaje:

- 1 pto por calcular los valores propios de la matriz A.
- 1 pto por calcular un vector propio de la matriz A.
- 1 pto por calcular la matriz P.(existen muchas matrices que cumplen lo pedido y se encuentran de la misma forma que en la pauta)
- 1 pto por calcular la matriz C.
- 1 pto por encontrar $\tan(\phi)$.
- 1 pto por encontrar r.

5. Determine todos los valores de h en $\mathbb{R}$ para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix}$

es diagonalizable.

Solución.

Calculamos los valores propios de A

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ h & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 \rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 2$$

Como $\lambda_2 = 2$ es una raíz del polinomio caracteristico con multiplicidad 2 para que el la matriz A sea diagonalizable necesitamos que el espacio propio asociado a $\lambda_2 = 2$ tenga dimensión 2. Para calcular la dimensión del espacio de vectores propios de $\lambda_2 = 2$, necesitamos calcular la nulidad de la matriz

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ h & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que la nulidad de esta matriz sea 2 necesitamos que $h = -1$ y bajo esta condición A es diagonalizable.

Puntaje:

- 0.5 ptos por calcular correctamente el polinomio característico de A.
- 0.5 ptos por calcular correctamente cada valor propio de A. (total 1pto)
- 1.5 por argumentar para que la matriz A sea diagonalizable se necesita que el espacio propio asociado a $\lambda_2 = 2$ tenga dimensión 2.
- 1 por buscar la dimensión del espacio nulo de $A - 2I$.
- 2 ptos por determinar que $h = -1$

Continúa en la siguiente página.

6. Sea A una matriz de 3×3 tal que el polinomio característico de la matriz A es $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3)$ y la dimensión del $Col(A)$ es 1.

   a) [4 **ptos**] Demuestre que A es diagonalizable.

   b) [2 **ptos**] Determine si A es similar a la matriz $B = T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}T$. Justifique su respuesta.

Solución.

a) Como el polinomio caracteristica de la matriz A es $P_A(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3)$ los valores propios de A son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 3$.

Como la dimensión del $Col(A)$ es 1 y $dim(Col(A)) + dim(Nul(A)) = 3$ tenemos que la dimensión del espacio Nulo de A es 2. Así la dimensión del espacio de vectores propios asociados al valor propio 0 es 2.

Luego la matriz A es diagonalizable ya que existe una base para $\mathbb{R}^3$ de vectores propios.

b) Del inciso anterior tenemos que existe P y D tal que $A = P^{-1}DP$ donde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Así $A = P^{-1}DP \to D = PAP^{-1}$ y $B = T^{-1}DT \to D = TBT^{-1}$ luego

$$PAP^{-1} = TBT^{-1} \to B = T^{-1}PAP^{-1}T = \left(P^{-1}T\right)^{-1} A \left(P^{-1}T\right)$$

Luego A es similar a B

Puntaje:

- 0.5 pto por argumentar que 0 es valor propio de A.
- 1 pto por argumentar que la dimensión del espacio Nulo es 2.
- 1 ptos por argumentar que el espacio nulo de A es el espacio de vectores propios asociados a 0.
- 1.5 ptos por concluir y argumentar que la matriz A es diagonalizable.
- 1 pto por argumentar que la matriz D es similar a A.
- 1 pto por mostrar (encontrando la matriz $P^{-1}T$) que A es similar a B.

7. Demuestre que si A es invertible y similar a B, entonces B es invertible y A^{-1} es similar a B^{-1}.

Solución.

Si A es similar a B implica que existe una matriz P invertible tal que $B = P^{-1}AP$ luego B se escribe como producto de matrices invertibles lo que implica que B es invertible.

Así tambien

$$B = P^{-1}AP \to B^{-1} = \left(P^{-1}AP\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}\left(P^{-1}\right)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$$

La que demuestra que A^{-1} es similar a B^{-1}.

Puntaje:

- 1 pto por determinar que $B = P^{-1}AP$.
- 1 pto por argumentar que B es invertible.
- 4 ptos por demostrar que A^{-1} es similar a B^{-1}.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

   a) El conjunto $\{1 - 3t + 5t^2, -1 + 5t - 6t^2, 2t - t^2\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$.

   b) Si cada vector e_j en la base estándar para $\mathbb{R}^n$ es un vector propio de A, entonces A es una matriz diagonal.

   c) Sea W un sub-espacio de $\mathbb{R}^n$.Si x está en W y $W^\perp$, entonces $x = 0$.

Solución.

a) Falso. El conjunto $\{1 - 3t + 5t^2, -1 + 5t - 6t^2, 2t - t^2\}$ es ld ya que si trabajamos con los vectores coordenados de este conjunto en la base $B = \{1, t, t^2\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \\ 5 & -6 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

notamos que estos vectores coordenados son ld, así el conjunto $\{1 - 3t + 5t^2, -1 + 5t - 6t^2, 2t - t^2\}$ es ld, por lo cual no puede ser una base de $\mathbb{P}_2$. (Tambien se puede argumemtar encontrando una combinación lineal de los polinomios con coeficientes distintos de cero que nos de el polinomio 0).

b) Verdadero. Si cada vector e_j en la base estándar para $\mathbb{R}^n$ es un vector propio de A implica que $Ae_j = \lambda_j e_j$ donde Ae_j es la columna j-esima de A y $\lambda_j e_j$ es un vector que tiene puros ceros excepto el la j-esima componente, luego A es una matriz diagonal.

c) Verdadero. Recordemos que si $u \in W$ y $v \in W^\perp$ cumplen que $u \cdot v = 0$ y que $\|u\|^2 = u \cdot u$, por lo que si $x \in W$ y $x \in W^\perp$ entonces $\|x\| = 0$ y por definición de norma, necesariamente $x = 0$.

Puntaje:

2 ptos por cada item contestado correctamente y justificado.