Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 6

1. Considere funciones $f : \mathbb{R} \to [3, +\infty)$ y $g : [3, +\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = (x-1)^2 + 3 \qquad , \qquad g(x) = \sqrt{x-3} + 1.$$

Determine las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$, y decida si f es o no invertible.

Solución. Notemos que ambas composiciones están bien definidas. Si $x \in [3, +\infty)$, entonces

$$(f \circ g)(x) = \left(\sqrt{x-3} + 1 - 1\right)^2 + 3 = \left(\sqrt{x-3}\right)^2 + 3 = x - 3 + 3 = x.$$

Por lo tanto, $f \circ g = \mathrm{id}_{[3,+\infty)}$.

Ahora sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 3 - 3} + 1 = \sqrt{(x-1)^2} + 1 = |x-1| + 1.$$

Como $g \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, f y g no son inversas una de la otra. De hecho, f no es invertible porque no es inyectiva (por ejemplo, se cumple que $f(0) = f(2)$).

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 2 puntos por determinar $f \circ g$.

CC 2. 2 puntos por determinar $g \circ f$.

CC 3. 2 puntos por mostrar que f no es invertible.

2. Considere la sucesión $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por los términos iniciales $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y la recursión

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \forall n \geq 3.$$

a) Demuestre que

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} \leq 2 \qquad \forall n \geq 2.$$

b) Demuestre que

$$\frac{3}{2} \leq \frac{F_n}{F_{n-1}} \qquad \forall n \geq 3.$$

Solución.

a) Notemos que todos los términos de la sucesión son positivos, pues $F_1 > 0$, $F_2 > 0$ y los demás términos se obtienen sumando los dos términos que lo preceden (esto se puede justificar usando inducción). De esto concluimos también que la sucesión es no decreciente, pues para todo $n \geq 3$ tenemos que

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geq F_{n-1} + 0 = F_{n-1}.$$

Si $n = 2$, entonces $\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{1}{1} = 1 \leq 2$. Por otro lado, si $n \geq 3$, tenemos que

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \leq 1 + \frac{F_{n-1}}{F_{n-1}} = 1 + 1 = 2.$$

b) Si $n \geq 3$, por la parte (a) tenemos que

$$0 < \frac{F_{n-1}}{F_{n-2}} \leq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2} \leq \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}.$$

Con esto, tenemos que

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \geq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Obsevación: No es necesario que el estudiante justifique por inducción que la sucesión es positiva.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 1,5 puntos por mostrar que la sucesión $\{F_n\}$ es no decreciente.

CC 2. 1,5 puntos por mostrar que $F_n/F_{n-1} \leqslant 2$ para todo $n \geqslant 2$.

CC 3. 1,5 puntos por concluir que $F_{n-2}/F_{n-1} \geqslant 1/2$.

CC 4. 1,5 puntos por mostrar que $F_n/F_{n-1} \geqslant 3/2$ para todo $n \geqslant 3$.