Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
TAV 2022

MAT1610-Cálculo I
Interrogación 3

1. Dada la curva $f(x) = -x^{4/3} + 4x^{1/3}$, determinar los intervalos de crecimiento, decrecimiento, intervalos donde es cónvaca hacia arriba, cóncava hacia abajo, extremos locales , puntos de inflexión y bosquejar el gráfico de f.

   Solución: Notar que

$$f'(x) = -\frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}\left(\frac{1-x}{x^{2/3}}\right)$$

   De aquí tenemos que:

	$x \in (-\infty, 0)$	$x = 0$	$x \in (0, 1)$	$x = 1$	$x \in (1, \infty)$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	-
$x^{2/3}$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$\nexists$	$+$	0	-

   Luego $x = 0$ y $x = 1$ son puntos críticos de f, y puesto que en $x = 1$ la derivada cambia de positiva a negativa tenemos que en $x = 1$ hay un máximo relativo , además concluimos que $x = 0$ no es extremo de f.

   f es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$.

   Ahora calculemos $f''(x)$.

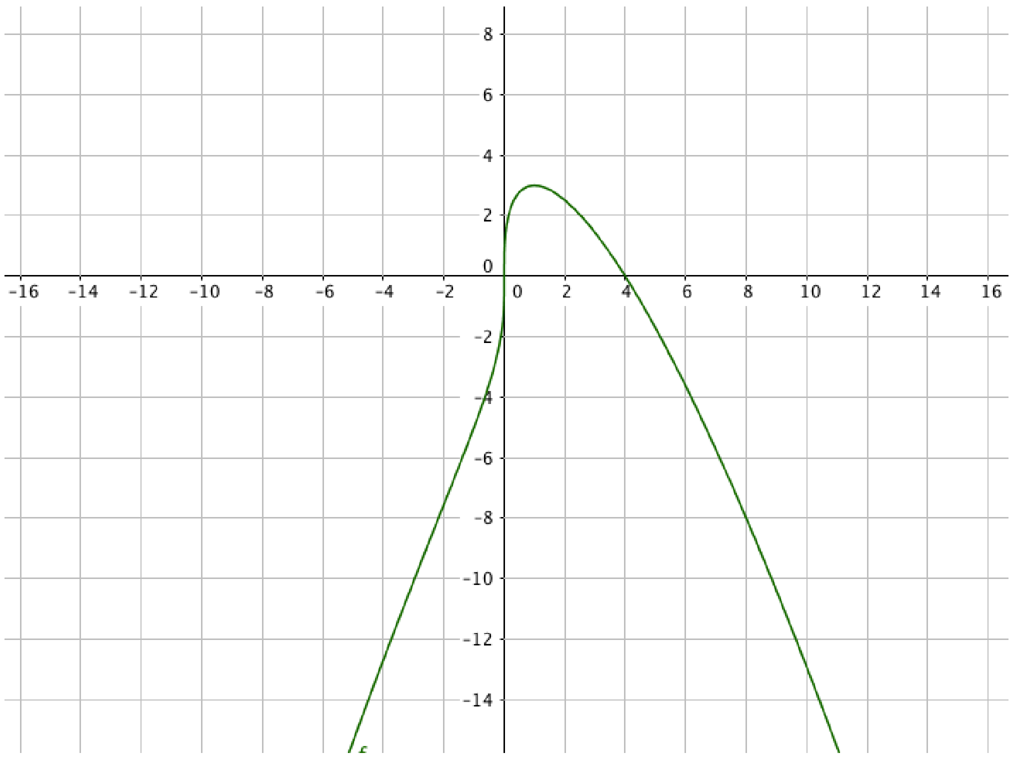
$$f''(x) = \frac{4}{3}\frac{-x^{2/3} - (1-x)(2/3x^{-1/3})}{x^{4/3}} = -\frac{4}{9}\left(\frac{x+2}{x^{5/3}}\right)$$

   Luego la segunda derivada cambia según la tabla:

	$x \in (-\infty, -2)$	$x = -2$	$x \in (-2, 0)$	$x = 0$	$x \in (0, +\infty)$
$x+2$	-	0	$+$	$+$	$+$
$-x^{5/3}$	$+$	$+$	0	-	-
f''	-	0	$+$	0	-

De la tabla concluimos que en $x = 0, x = -2$ hay puntos de inflexión y cuyas coordenadas son $(0,0)$ y $\left(-2, -(-2)^{4/3} + 4(-2)^{1/3}\right)$ y además concluimos que f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ y cóncava hacia arriba en (-2.0)

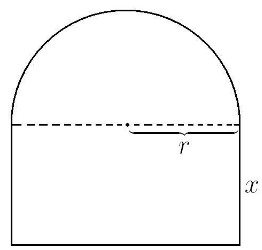
De lo anterior el gráfico de f es de la forma:



Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por concluir de la variación de f' los inverlaos de crecimiento y decrecimeinto.
- (1 Punto) Por concluir que en $x = 1$ hay un máximo relativo.
- (1 punto) Por calcular correctamente $f''(x)$.
- (1 punto) Por concluir los inverlaos de concavidad.
- (1 punto) por concluir los puntos de inflexión.
- (1 punto) Por graficar f de la información obtenida.

2. Una ventana sobre una pared plana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo, como indica la figura. Si el perímetro de la ventana es $12\,m$, calcule el radio r del semicírculo de la ventana de modo que se permita pasar el máximo de luz posible.



Solución:

Buscamos en este problema maximizar el área de la ventana, para ello notemos que

1) El perímetro de la figura es 12 [m], por lo que de acuerdo a la figura :

$$2r + 2x + \pi r = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12 - 2r - \pi r}{2} = 6 - \frac{(2+\pi)r}{2}.$$

El área dela ventana es la suma del área del rectángulo $x \cdot 2r = 12r - 2r^2 - \pi r^2$ con el área del semicírculo $\left(\frac{\pi r^2}{2}\right)$.
Nuestra función a maximizar es:

$$A(r) = 12r - 2r^2 - \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2} = 12r - \frac{(4+\pi)r^2}{2}$$

2) Buscamos los puntos críticos:

$$A'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12 - (4+\pi)r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{12}{4+\pi}.$$

3) Por el criterio de la segunda derivada, como

$$A''(r) = -(4+\pi) < 0 \quad \forall r,$$

esto se cumple en particular para $r = \dfrac{12}{4+\pi}$, lo que indica que en este valor, $A(r)$ alcanza un máximo relativo
Notar que puesto $A''(r) < 0 \quad \forall r$, entonces $A(r)$ es cóncava hacia abajo para $r > 0$, por lo que el máximo relativo debe ser absoluto..

4) Por lo tanto, el radio del semicírculo que maximiza el área de la ventana es $r = \dfrac{12}{4+\pi}$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por establecer la relación del perímetro.
- (2 Puntos) Por determinar $A(r)$.
- (1 punto) Por calcular el único punto crítico.
- (1 punto) Por justificar que el punto crítico es máximo local.
- (1 punto) Por concluir lo pedido.

3. a) Determine extremos globales de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}$ en el intervalo $[0, 3]$.

Solución:

Para encontrar los extremos globales necesitamos evaluar la función en los extremos del intervalo y en aquellos puntos donde la derivada es cero o no existe. Derivando tenemos que $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 - 1 + 1)^2}$, por lo tanto los puntos a evaluar son $0, 1$ y 3.

Evaluando tenemos que $f(0) = 0, f(1) = 1$ y $f(3) = 3/7$. Por lo tanto el máximo es 1 y el mínimo es 0.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por derivar correctamente.
- (1 punto) Por listar los candidatos.
- (1 punto) Por evaluar y concluir.

b) Demuestre que la función $f(x) = x^4 + 3x + 1$ tiene exactamente una raíz real en el intervalo $[-2, -1]$.

Ya que f es un polinomio tenemos que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, por lo que se cumplen las hipótesis del TVI y Rolle en el intervalos $[-2, -1]$.

Ya que $f(-2) = 11 > 0$ y $f(-1) = -1 > 0$ el TVI garantiza la existencia de al menos una raíz en el intervalo $(-2, -1)$, veamos que tiene exactamente una. Suponga que existe más de una solución en dicho intervalo y llame x_1 y x_2 a dos de ellas con $x_1 < x_2$, el teorema de Rolle asegura que existe $c \in (x_1, x_2) \subset [-2, -1]$ con $f'(c) = 0$ lo que equivale a que existe $c \in (-2, -1)$ tal que $4c^3 = -3$ lo que equivale a que $c = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \in (-2, -1)$ lo que es FALSO, por lo tanto no existe más de una raíz obtenido lo pedido.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por justificar y determinar correctamente la existencia de al menos una raíz.
- (1 punto) Por justificar el uso del teorema de Rolle.
- (1 punto) Por concluir.

4. a) Calcule el valor de $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x \dfrac{t+t^2}{x^2(1+\operatorname{sen}(t))}dt$.

Solución:

Observamos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{t+t^2}{x^2(1+\operatorname{sen}(t))}dt &= \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \frac{t+t^2}{1+\operatorname{sen}(t)}dt}{x^2}\\
\text{por ser de la forma } 0/0 \text{ podemos usar L'Hopital} &= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{2x(1+\operatorname{sen}(x))}\\
\text{usando L'Hopital otra vez tenemos que} &= \lim_{x\to 0}\frac{1+2x}{2(1+\operatorname{sen}(x))+2x\cos(x)}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por usar correctamente L'Hopital.
- (1 punto) Por derivar correctamente usando TFC
- (1 punto) Por determinar el valor.

b) Use integrales para determinar el valor de

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10}{n}3^{2/n}+\frac{10}{n}3^{4/n}+\frac{10}{n}3^{6/n}+\cdots+\frac{10}{n}3^{2}\right)$$

Solución:

Observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{10}{n}3^{2/n}+\frac{10}{n}3^{4/n}+\frac{10}{n}3^{6/n}+\cdots+\frac{10}{n}3^{2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}5\cdot\frac{2}{n}\cdot 3^{\frac{2k}{n}}\\
&= \int_0^2 5\cdot 3^x dx\\
&= 5\left(\frac{3^x}{\ln(3)}\right)\Bigg|_0^2\\
&= \frac{40}{\ln(3)}.
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar correctamente los límites de la integral definida.
- (1 punto) Por determinar la función a integrar.
- (1 punto) Por determinar el valor.