Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2017

MAT 1620 – Cálculo II

Solución Examen

1. Demostrar que la sucesión $a_n = \displaystyle\int_3^4 (\ln(x))^n \, dx$ diverge.

   Solución. Como la función $\ln(x)$ es creciente, entonces

   $$0 \leqslant 1 \cdot (\ln(3))^n \leqslant \int_3^4 (\ln(x))^n \, dx$$

   para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(3))^n = \infty$ ya que $\ln(3) > 1$ concluimos, por comparación, que $\{a_n\}$ es divergente.

   Puntaje Pregunta 1.

   - 1 punto por utilizar que la función $\ln(x)$ es creciente.
   - 1 punto por obtener la desigualdad $0 \leqslant (\ln(3))^n \leqslant (\ln(x))^n$ para todo $x \in [3, 4]$.
   - 1 punto por integrar y conlcuir que $0 \leqslant (\ln(3))^n \leqslant a_n$.
   - 1 punto por verificar que $\lim\limits_{n\to\infty} (\ln(3))^n = \infty$.
   - 2 puntos por usar comparación y concluir que la serie a_n diverge.

2. Si k es un entero positivo, encuentre el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$.

Solución. Si $a_n = \dfrac{(n!)^k}{(kn)!} x^n$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^k (kn)!}{(n!)^k [k(n+1)]!} |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+k)^k}{(kn+k)(kn+k-1)\cdots(kn+2)(kn+1)} |x| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)}{(kn+1)} \frac{(n+1)}{(kn+2)} \cdots \frac{(n+1)}{(kn+k)} \right] |x| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)}{(kn+1)} \right] \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)}{(kn+2)} \right] \cdots \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)}{(kn+k)} \right] |x| \\
&= \left(\frac{1}{k} \right)^k |x| < 1
\end{aligned}$$

Se sigue que si $|x| < k^k$ entonces la serie es absolutamente convergente, y el radio de convergencia es $R = k^k$.

Puntaje Pregunta 2.

- 4 puntos por calcular correctamente $\lim |a_{n+1}/a_n|$.
- 2 puntos por usar el criterio de la razón y obtener el radio de convergencia.

3. Calcule el volumen de la caja rectangular más grande en el primer octante con tres caras en los planos coordenados y un vértice en el plano $x + 2y + 3z = 6$.

Solución. Sean $f(x, y, z) = xyz$, $g(x, y, z) = x + 2y + 3z$.
Usando multiplicadores de Lagrange, queremos maximizar f sujeto a la restricción $g(x, y, z) = 6$. Basta resolver el sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$ lo que equivale a $(yz, xz, xy) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$.
Entonces, $\lambda = yz = \frac{1}{2}xz = \frac{1}{3}xy$ implica que $\boxed{x = 2y}$, $\boxed{z = \dfrac{2}{3}y}$.
Sustituyendo estos valores en la restricción se obtiene que

$$2y + 2y + 2y = 6 \Longrightarrow y = 1\,, \quad x = 2\,, \quad z = \frac{2}{3}\,.$$

y el volumen máximo es $V = \dfrac{4}{3}$.

Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por plantear el sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$.
- 3 puntos por resolver el sistema.
- 1 puntos por mostrar el valor máximo.

4. Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dA$ donde D es el triángulo en el plano XY acotado por el eje X, la recta $y = x$ y la recta $x = 1$.

Solución. Notemos que la región está dada por

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ \ 0 \leqslant y \leqslant x\}\ .$$

Entonces,

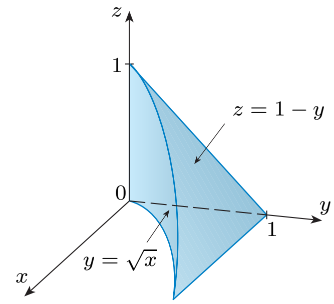
$$\iint_D \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dA \quad = \quad \int_0^1 \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dydx = \int_0^1 \operatorname{sen}(x)\, dx = 1 - \cos(1)\ .$$

Puntaje Pregunta 4.

- 3 puntos por describir el dominio.
- 3 puntos por calcular la integral.

5. La figura muestra la región de integración para la integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\, dzdydx \ .$$

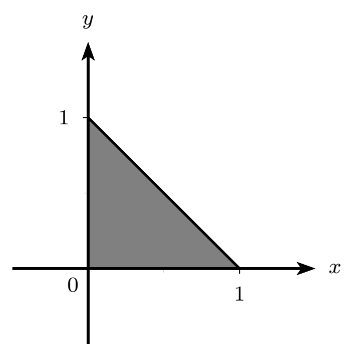


Reescriba está integral como una integral iterada equivalente en los órdenes $dxdydz$.

Solución. Tenemos que

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\, dzdydx = \iiint\limits_E f(x,y,z)\, dV \ ,$$

donde $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1 \ , \ 0 \leqslant z \leqslant 1-y\}$. La proyección de E sobre el plano YZ es



Se sigue que $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 1 \ , \ 0 \leqslant y \leqslant 1-z \ , \ 0 \leqslant x \leqslant y^2\}$ y por lo tanto

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x,y,z)\, dzdydx = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x,y,z)\, dxdydz \ .$$

Puntaje Pregunta 5.

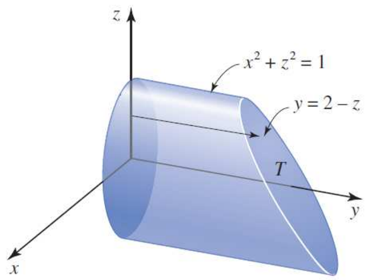
- 2 puntos por describir el intervalo de la variable x
- 2 puntos por describir el intervalo de la variable y
- 2 puntos por describir el intervalo de la variable z

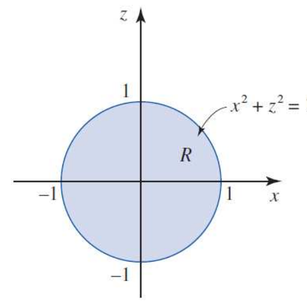
6. Calcular

$$\iiint_E \sqrt{x^2+z^2}\, dV$$

donde E es la región acotada por el cilindro $x^2+z^2=1$ y los planos $y+z=2$, $y=0$.

Solución. Geométricamente el sólido es





La figura del lado derecho corresponde a la proyección R del sólido E en el plano XZ entonces

$$I = \iiint_E \sqrt{x^2+y^2}\, dV = \iint_R \left[\int_0^{2-z} \sqrt{x^2+z^2}\, dy\right] dA = \iint_R \sqrt{x^2+z^2}(2-z)\, dA$$

Usando coordenadas polares $y = r\cos\theta$ y $z = r\operatorname{sen}\theta$ se obtiene que

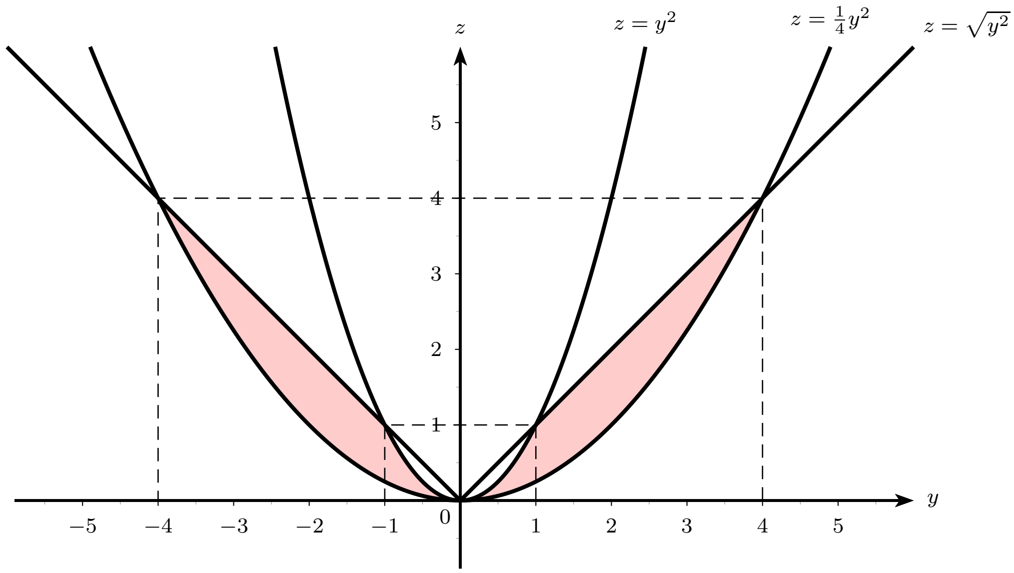
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 r(2-r\operatorname{sen}\theta)\cdot r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (2r^2 - r^3\operatorname{sen}\theta)\, dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3}r^3 - \frac{r^4}{4}\operatorname{sen}\theta\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\theta\right] d\theta = \frac{4\pi}{3}\,. \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 6.

- 2 puntos por describir la región la región E
- 1 punto por calcular $\int_0^{2-z} \sqrt{x^2+z^2}\, dy$
- 1 puntos por usar coordenadas polares.
- 2 puntos por calcular la integral doble sobre R.

7. Considere el sólido encerrado entre los paraboloides $z = x^2 + y^2$, $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ y que está debajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcule el volumen del sólido.

Solución. La proyección del sólido sobre el plano YZ es la región



Usando coordenadas cilíndricas las ecuaciones de las superficies quedan

$$z = x^2 + y^2 = r^2 , \qquad z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}r^2 \qquad \text{y} \qquad z = \sqrt{x^2 + y^2} = r .$$

Entonces, el sólido queda descrito como la unión de dos sólidos $E = E_1 \cup E_2$ donde

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi , \ 0 \leqslant r \leqslant 1 , \ r^2/4 \leqslant z \leqslant r^2\} \\ E_2 &= \{(r, \theta, z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi , \ 1 \leqslant r \leqslant 4 , \ r^2/4 \leqslant z \leqslant r\} . \end{aligned}$$

Por lo tanto, el volumen del sólido es

$$V(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2/4}^{r^2} r \, dz dr d\theta + \int_0^{2\pi} \int_1^4 \int_{r^2/4}^{r} r \, dz dr d\theta = \frac{3}{8}\pi + \frac{81}{8}\pi = \frac{21}{2}\pi .$$

Puntaje Pregunta 7.

- 3 puntos por el solido E como la uníon de dos sólidos E_1 y E_2.
- 3 puntos por calcular las dos integrales triples.

8. Calcule $\displaystyle\iint_E \frac{ye^y}{(x+y)^2}\,dxdy$, donde $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\,, x \leqslant y \leqslant 1\,, y \geqslant 1/2 - x\}$.
[Sugerencia: Considere $x + y = u$, $y = uv$]

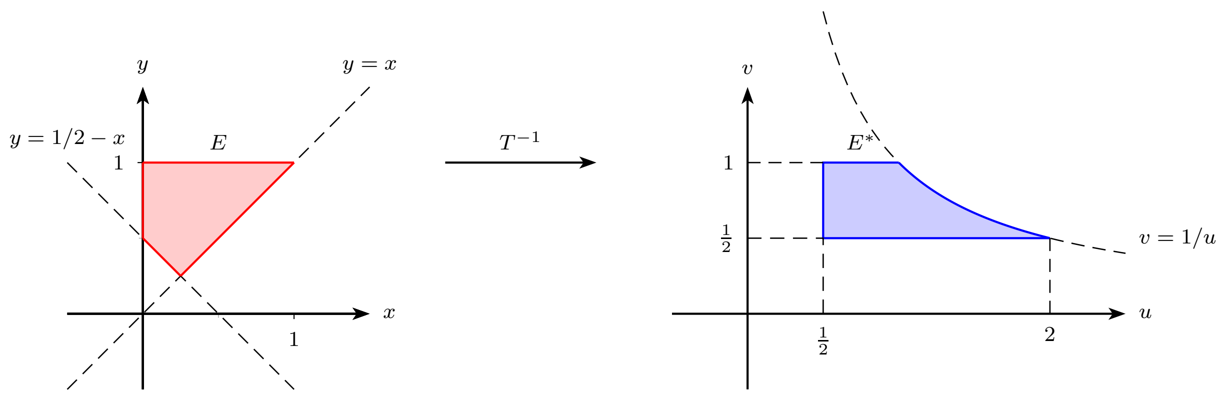
Solución. Considere $x + y = u$, $y = uv$, despejando obtenemos que $x = u - y = u - uv$. Utilizando el teorema de cambio de variable con $T(u,v) = (u - uv, uv)$ se obtiene que el Jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = (1-v)u + uv = u\,.$$

Entonces, el teorema afirma que

$$\iint_E f(x,y)\,dxdy = \iint_{E^*} f(T(u,v))|u|\,dudv$$

donde E^* es la región del plano uv determinada por $T^{-1}(E) = E^*$.



Como $u > 0$ en la región E^* se tiene

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{ye^y}{(x+y)^2}\,dxdy &= \iint_{E^*} f(T(u,v))|u|\,dudv = \int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{1/u} ve^{uv}\,dudv \\ &= \int_{1/2}^{1} (e - e^{v/2})\,dv = \frac{1}{2}e - e^{1/2} + 2e^{1/4}\,. \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 8

- 1,5 puntos por dar el cambio de variables y calcular el jacobiano de la transformación.
- 1,5 puntos establecer la regiones E y E^* y sus gráficos.
- 1 punto por utilizar correctamente el teorema de cambio de variables.
- 2 puntos por calcular correctamente la integral doble.