Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
13 de Septiembre de 2023

MAT 1107 Introducccción al Cálculo - Pauta Interrogación 1

Tiempo: 2:00 horas

1. Resuelva,
$$\sqrt{(x+2)(x+3)} < \sqrt{2}.$$

   Solución. Notemos que para que la raíz $\sqrt{(x+2)(x+3)}$ esté bien definida es necesario que $(x+2)(x+3) \geq 0$. Por lo tanto, las soluciones de la inecuación deben buscarse en el conjunto:
$$\mathcal{R} = (-\infty, -3] \cup [-2, +\infty).$$

   Suponiendo que $x \in \mathcal{R}$ tenemos que,
$$\begin{aligned} \sqrt{(x+2)(x+3)} &< \sqrt{2} && \text{si y sólo si} \\ (x+2)(x+3) &< 2 && \text{si y sólo si} \\ x^2+5x+6-2 &< 0 && \text{si y sólo si} \\ (x+4)(x+1) &< 0. \end{aligned}$$

   El producto de $(x+4)$ con $(x+1)$ es negativo cuando x pertenece al conjunto,
$$\mathcal{S}_1 = (-4, -1).$$

   Luego, el conjunto solución de la inecuación es:
$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \mathcal{S}_1 = (-4, -3] \cup [-2, -1).$$

2. Resuelva la siguiente inecuación
$$\frac{|x^2-3|\sqrt{2x-2}}{x^2-x-2} \geq 0.$$

   Solución Notemos, en primer lugar, que la raíz solo tiene sentido si $x \geq 1$. Además, como $x^2-x-2 = (x-2)(x+1)$ y el denominador no puede ser igual a cero, es necesario que $x \neq 2$ y $x \neq -1$.

   El valor absoluto es siempre mayor o igual a cero. Así, para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $|x^2-3| \geq 0$. Tenemos, además, que la raíz cuadrada es siempre mayor o igual a cero. Por otra parte, $x^2-x-2 > 0$ si y sólo si $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Así,
$$\frac{|x^2-3|\sqrt{2x-2}}{x^2-x-2} \geq 0,$$
   si y sólo si $(2, \infty) \cup \{1, \sqrt{3}\}$.

3. Demuestre que si $x, y, z, r \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$ y $z < r$ entonces $x+z < y+r$.

   Demostración Por la monotonía de la suma tenemos que, si $x < y$ entonces $x+z < y+z$. Por la misma razón, como $z < r$ tenemos que $y+z < y+r$. Por la transitividad de la relación de orden, tenemos que
$$x+z < y+r.$$

4. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Solución. Por la desigualdad triangular tenemos que:

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Es decir,

$$|x| - |y| \leq |x - y|. \tag{1}$$

Del mismo modo,

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|.$$

Es decir, $|y| - |x| \leq |y - x|$. Como $|y - x| = |x - y|$, tenemos que $-(|y| - |x|) \geq -|x - y|$. Luego

$$|x| - |y| \geq -|x - y| \tag{2}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (1) y (2) conclulímos que:

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

Lo que equivale a,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$