Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2017

MAT 1620 – Cálculo II

Solución Examen

1. Muestre convergencia o divergencia

   a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$

   Solución.

   a) Tenemos que para todo $x \in [1,+\infty[$ se cumplen las siguientes desigualdaddes

   $$-1 \leqslant \operatorname{sen}(x) \leqslant 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 1 \leqslant 2+\operatorname{sen}(x) \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2+\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}\,.$$

   Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ es divergente, por el criterio de comparación, se sigue que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2+\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}dx$ es divergente.

   b) Para todo $x \in [1,+\infty[$ se tiene que

   $$x^4 \leqslant 1+x^4 \Longleftrightarrow x^2 \leqslant \sqrt{1+x^4} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \leqslant \frac{1}{x^2}\,.$$

   Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ es convergente, por el criterio de comparación, se sigue que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$ es convergente.

   Puntaje Pregunta 1.

   - 3 puntos por utilizar correctamente el teorema de comparación y concluir que la integral impropia *a*) es divergente.
   - 3 puntos por utilizar correctamente el teorema de comparación y concluir que la integral impropia *b*) es convergente.

2. Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Solución. Usando las propiedades de la función logaritmo natural vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] . \tag{1}$$

Ahora bien, usando la propiedad telescópica para sumas

$$\sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln(k)] = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) .$$

Entonces, se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$$

y la serie dada es divergente.

Puntaje Pregunta 2

- **3 puntos** por utilizar las propiedades del logaritmo natural y la definición de serie para obtener la expresion (1).
- **3 puntos** por utilizar la propiedad telescópica y concluir que la serie es divergente.

3. Si $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-3/2}e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, determine $f_x(1,0)$.

Solución. Observe que vamos a calcular la derivada de f con respecto a la variable x. Por consiguiente podemos reemplazar por $y=0$ en la expresión de f. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} f_x(x,0) &= \frac{\partial}{\partial x}(x(x^2+y^2)^{-3/2}e^{\operatorname{sen}(x^2y)})\Big|_{y=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x(x^2)^{-3/2}e^{0}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^{-2}) \\ &= -2x^{-3} \end{aligned}$$

Entonces, $f_x(1,0) = -2$.

Puntaje Pregunta 3.

- 6 puntos por calcular correctamente la derivada parcial solicitada.

4. Evalue $\displaystyle\iiint_E e^{z/y} dV$ con $E = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\ ,\ \ y \leqslant x \leqslant 1\ ,\ \ 0 \leqslant z \leqslant xy\}$.

Solución. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
\iiint_E e^{z/y}\, dV &= \int_0^1 \int_y^1 \int_0^{xy} e^{z/y} dz dx dy \\
&= \int_0^1 \int_y^1 \left[y e^{z/y} \right]_{z=0}^{z=xy}\, dx dy \\
&= \int_0^1 \int_y^1 \left[y e^{x} - y \right]\, dx dy \\
&= \int_0^1 \left[y e^{x} - yx \right]_{x=y}^{x=1}\, dy \\
&= \int_0^1 \left[(ye - y) - (ye^y - y^2) \right]\, dy \\
&= \int_0^1 \left[ye - y - ye^y + y^2 \right]\, dy \\
&= \left[\frac{y^2 e}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} - \underbrace{\int_0^1 y e^y\, dy}_{I_1} = \frac{e}{2} - \frac{1}{6} - I_1\ .
\end{aligned}
$$

Para calcular I_1, usamos integración por partes

$$
I_1 = \left. y e^y \right|_0^1 - \int_0^1 e^y\, dy = e - \left[e^y \right]_0^1 = 1\ .
$$

Por lo tanto, se obtiene que

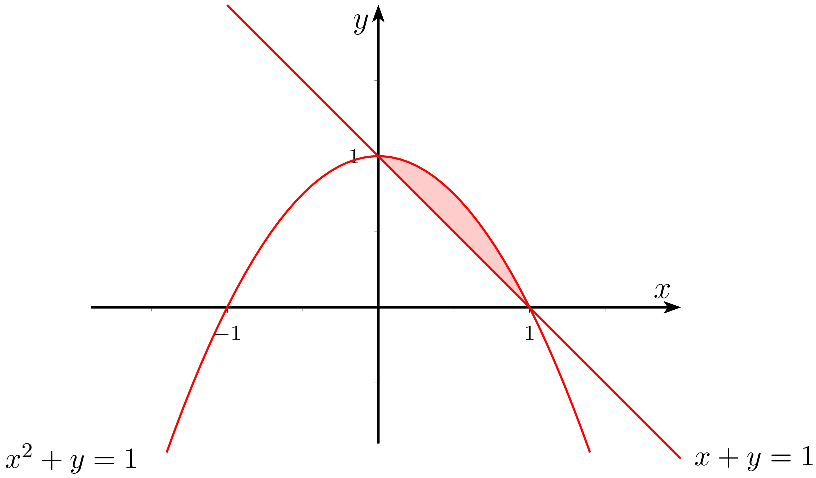
$$
\iiint_E e^{z/y}\, dV = \frac{e}{2} - \frac{1}{6} - 1 = \frac{3e - 7}{6}\ .
$$

Puntaje Pregunta 4.

- 1,5 puntos por calcular correctamente la integral con respecto a z.
- 1,5 puntos por calcular correctamente la integral con respecto a x.
- 1,5 puntos por calcular correctamente la integral con respecto a y.
- 1,5 puntos por calcular usando integración por partes la integral I_1.

5. Calcule el volumen del sólido bajo el plano $x - 2y + z = 1$ y arriba de la región acotada por $x + y = 1$ y $x^2 + y = 1$.

Solución. La región D del plano acotada por las curvas $x + y = 1$ y $x^2 + y = 1$ se aprecia sombreada en la siguiente figura:



Entonces, podemos describir la región D como una región tipo I:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\,, \quad 1 - x \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}\,.$$

Por lo tanto, el volumen del sólido S es

$$\begin{aligned}
V(S) &= \iint\limits_D \left[\int_0^{1-x+2y} dz\right] dA = \int_0^1 \int_{1-x}^{1-x^2} [1 - x + 2y]\, dydx = \int_0^1 \left[y - xy + y^2\right]_{y=1-x}^{y=1-x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left[\left((1-x^2) - x(1-x^2) + (1-x^2)^2\right) - \left((1-x) - x(1-x) + (1-x)^2\right)\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[1 - x^2 - x + x^3 + 1 - 2x^2 + x^4 - 1 + x + x - x^2 - 1 + 2x - x^2\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[x^4 + x^3 - 5x^2 + 3x\right] dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{17}{60}\,.
\end{aligned}$$

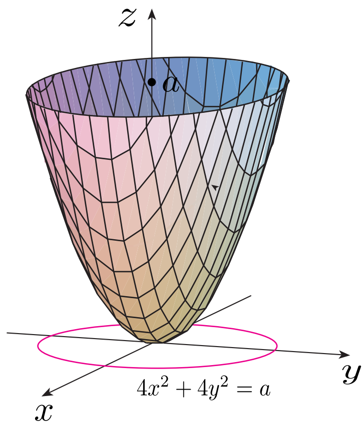
Puntaje Pregunta 5.

- 1,5 puntos por realizar un gráfico del dominio D.
- 1,5 puntos por describir la región D como tipo I.
- 3 puntos por calcular correctamente la integral.

6. Determine el centroide del sólido S acotado por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ y el plano $z = a$ $(a > 0)$.

Solución.

Primero se observa que S es el sólido que yace arriba del parabolide $z = 4x^2+4y^2$ y abajo del plano $z = a$. La proyección del sólido S sobre el plano xy corresponde al dominio



$$\begin{aligned} D &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant \frac{a}{4}\right\} \\ &= \left\{(r,\theta) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\ ,\ \ 0 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{a}}{2}\right\} \end{aligned}$$

Aquí, la densidad del sólido ρ es constante.

Luego el sólido se puede describir en coordenadas cilindricas por

$$S = \left\{(r,\theta,z) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\ ,\ \ 0 \leqslant r \leqslant \frac{\sqrt{a}}{2}\ ,\ \ 4r^2 \leqslant z \leqslant a\right\}$$

La masa del sólido E es

$$\begin{aligned} m &= \iiint_S \rho\, dV = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a}/2} \int_{4r^2}^{a} r\, dz dr d\theta = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a}/2} \Big[rz \Big]_{z=4r^2}^{z=a} dr d\theta \\ &= a\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a}/2} \left[ar - 4r^3\right]\, dr d\theta = 2\pi a\rho \left[\frac{ar^2}{2} - r^4\right]_{r=0}^{\sqrt{a}/2} = \frac{\pi a^2 \rho}{8}\ . \end{aligned}$$

Tanto el sólido E como la función de densidad son simétricas con respecto a los ejes x e y, así que el centro de masa debe estar sobre el eje z, es decir, $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 0$. La coordenada z está dada por

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{1}{m} \iiint_E \rho z\, dV = \frac{8}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a}/2} \int_{4r^2}^{a} zr\, dz dr d\theta = \frac{8}{\pi a^2} \cdot (2\pi) \int_0^{\sqrt{a}/2} \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=4r^2}^{a} r\, dr \\ &= \frac{16}{a^2} \int_0^{\sqrt{a}/2} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{16r^4}{2}\right] r\, dr = \frac{16}{a^2} \left[\frac{1}{4}a^2 r^2 - \frac{4}{3} r^6\right]_{r=0}^{r=\sqrt{a}/2} = \frac{2a}{3}\ . \end{aligned}$$

Por lo tanto, el centroide se localiza en el punto $(0, 0, 2a/3)$.

Puntaje Pregunta 6

- 1,5 puntos por determinar la proyección del sólido sobre el plano xy.
- 1,5 puntos por calcular la masa del sólido.
- 1,5 puntos por usar el principio de simetría o bien calcular que $\overline{x} = \overline{y} = 0$.
- 1,5 puntos por calcular correctamente $\overline{z}$.

7. Evalúe $\displaystyle\iiint\limits_H (9 - x^2 - y^2)\, dV$ donde H es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9$ y $z \geqslant 0$.

Solución. Puesto que H es una semiesfera, se usan coordenadas esféricas:

$$H = \left\{(\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\ ,\ \ 0 \leqslant \rho \leqslant 3\ ,\ \ 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}\ .$$

Note que $9 - x^2 - y^2 = 9 - (\rho \cos\theta \operatorname{sen}\phi)^2 - (\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)^2 = 9 - \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_H (9 - x^2 - y^2)\, dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 (9 - \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[3\rho^3 \operatorname{sen}\phi - \frac{\rho^5}{5} \operatorname{sen}^3\phi\right]_{\rho=0}^{\rho=3} d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[3^4 \operatorname{sen}\phi - \frac{3^5}{5} \operatorname{sen}^3\phi\right] d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\left[-3^4 \cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} - \frac{3^5}{5} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2\phi) \operatorname{sen}\phi \, d\phi\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[3^4 - \frac{3^5}{5} \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi \, d\phi - \int_0^{\pi/2} \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi \, d\phi\right)\right] d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[3^4 - \frac{3^5}{5} \left(\left[-\cos\phi\right]_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} + \left[\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi/2}\right)\right] d\theta \\
&= 2\pi \left[3^4 - \frac{3^5}{5} + \frac{3^4}{5}\right] = \frac{2 \cdot 3^5 \pi}{5}\ .
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 7

- 1,5 puntos por describir correctamente en coordenadas esféricas a H.
- 1,5 puntos por obtener la función $9 - x^2 - y^2$ en coordenadas esféricas
- 1 punto por utilizar correctamente el teorema de cambio de variable.
- 2 puntos por calcular correctamente la integral triple.

8. Calcular $\displaystyle\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2}\,dA$ donde R es el rectángulo encerrado por $x-y=0$, $x-y=2$, $x+y=0$, $x+y=3$.

Solución. Hacemos el cambio de variables $u=x+y$, $v=x-y$. Estas ecuaciones definen una transformación T^{-1} del plano xy al plano uv. Se obtiene al despejar x y y de las ecuaciones anteriores

$$x=\frac{1}{2}(u+v) \qquad y=\frac{1}{2}(u-v)\,.$$

El jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\,.$$

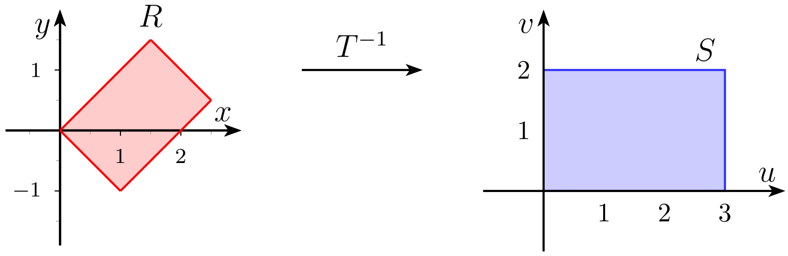
Para hallar la región S en el plano uv correspondiente a R, se nota que los lados de R están sobre las rectas

$$x-y=0, \quad x-y=2, \quad x+y=0, \quad x+y=3$$

y, de las ecuaciones anteriores, las rectas imagen en el plano uv son

$$u=0, \quad u=3 \quad v=0, \quad v=2\,.$$

La situación geométrica se aprecia en la siguiente figura:



Entonces, usando el teorema de cambio de variables obtenemos

$$\begin{aligned}
\iint_R (x+y)e^{x^2-y^2}\,dA &= \iint_S ue^{uv}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \int_0^3\int_0^2 ue^{uv}\left|\frac{1}{2}\right|\,dvdu \\
&= \frac{1}{2}\int_0^3 \left[e^{uv}\right]_{v=0}^{v=2} du = \frac{1}{2}\int_0^3 \left[e^{2u}-1\right]\,du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2u}}{2}-u\right]_{u=0}^{u=3} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{e^6}{2}-3\right)-\frac{1}{2}\right] = \frac{e^6-7}{4}\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 8

- 1,5 puntos por dar el cambio de variables y calcular el jacobiano de la transformación.
- 1,5 puntos establecer la regiones R y S y sus gráficos.
- 1 punto por utilizar correctamente el teorema de cambio de variables.
- 2 puntos por calcular correctamente la integral doble.