PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TAV 2013

MAT 1610 - Cálculo I
Solución Interrogación 2

1. a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 + x\ln(x+1) + b|x+3| + 4x & \text{Si } x \geq 0 \\ \sin(a^2x) + 2x^2 + 6 & \text{Si } x < 0. \end{cases}$$

Determine condiciones sobre a y b, de modo que la función f sea diferenciable en $\mathbb{R}$.

b) La derivada de una función f, usualmente se define por

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Si cambiamos dicha definición por la siguiente

$$f^*(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(a+h))^2 - (f(a))^2}{h},$$

entonces obtenga las fórmulas correspondientes para $(f+g)^*$ y $(f \cdot g)^*$.

Solución. (a) Lo primero que debemos verificar que la función sea continua en $\mathbb{R}$, pero como notamos por la definición para $x < 0$ y $x > 0$ la función es continua, por lo que solo resta ver que es continua cuando $x = 0$. Para ello, verifiquemos usando límites laterales,

$$\lim_{x\to 0+} 3x^3 + x\ln(x+1) + b|x+3| + 4x = 3b,$$

y por otro lado

$$\lim_{x\to 0-} \sin(a^2x) + 2x^2 + 6 = 6,$$

por lo tanto, necesitamos que $b = 2$ para que la función sea continua en $\mathbb{R}$.

Luego por mismas razones que antes, la función es claramente diferenciable para $x > 0$ y $x < 0$, entonces solo debemos analizar las derivadas laterales en 0, esto es

$$\lim_{h\to 0+} \frac{3h^3 + h\ln(h+1) + 2(h+3) + 4h - 6}{h} = 6,$$

y por otro lado

$$\lim_{h\to 0-} \frac{\sin(a^2h) + 2h^2 + 6 - 6}{h} = \lim_{h\to 0-} a^2 \cdot \left(\frac{\sin(a^2h)}{a^2h}\right) + 2h = a^2,$$

por lo tanto, para que la función sea diferenciable necesitamos que $a^2 = 6$, es decir, $a = \pm\sqrt{6}$.

(b) Basta notar que

$$f^*(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h))^2 - (f(x))^2}{h} = (f'(x))^2 = 2f(x)f'(x).$$

Por lo tanto, tendremos que

$$(f+g)^*(x) = 2(f+g)(x)(f+g)'(x) = 2(f+g)(x)f'(x) + 2(f+g)(x)g'(x),$$

y por otro lado,

$$(fg)^*(x) = 2(fg)(x)(fg)'(x) = 2f(x)(g(x))^2 f'(x) + 2(f(x))^2 g(x)g'(x).$$

2. a) Calcule la derivada de

$$y = (2 + \sin(x))^{(1+\cos(x^2-3x))}.$$

b) Sea $f(x) = 2x\sqrt{4-x} - 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y suponga que esta admite inversa para $-1 < x < 1$. Calcule $(f^{-1})'(-2)$.

Solución. (a) Usando las derivadas de funciones elementales vistas en clases, tendremos que

$$y' = (2+\sin(x))^{(1+\cos(x^2-3x))}\left(-\sin(x^2-3x)(2x-3)\ln(2+\sin(x)) + \frac{(1+\cos(x^2-3x))\cos(x)}{(2+\sin(x))}\right).$$

(b) Sabemos que

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)},$$

entonces para el caso necesitamos saber para que $x \in (-1, 1)$ se tiene que $f(x) = -2$. Simplemente observando la función se puede obtener que para $x = 0$, entonces $f(0) = -2$.

Luego

$$f'(x) = 2\sqrt{4-x} - \frac{x}{\sqrt{4-x}} + 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2},$$

y como $f'(0) = 4$, entonces

$$(f^{-1})'(-2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{4}.$$

3. Considere la curva de ecuación $x^2 - xy + y^2 = 9$.

a) Muestre que las rectas tangentes a la curva, en los puntos donde esta intersecta al eje X son paralelas.

b) Calcule $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Solución. (a) Notemos que para ver donde la curva intercepta el eje de X, basta reemplazar $y = 0$ en la curva y obtendremos lo valor de x correspondientes a los puntos, es decir,

$$x^2 - x \cdot 0 + 0^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

Luego los puntos de intersección de la curva con el eje X son $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Ahora sabemos que para probar que las rectas tangentes a la curva en dichos puntos son paralelas, basta ver que y' vale lo mismo para los puntos $(3, 0)$ y $(-3, 0)$. Para ello, usaremos derivación de funciones de manera implícita, es decir,

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0 \Leftrightarrow y'(2y - x) = y - 2x \Leftrightarrow y' = \frac{y - 2x}{2y - x}.$$

Luego la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(3, 0)$ es

$$y'(3, 0) = \frac{-6}{-3} = 2,$$

y en el punto $(-3, 0)$ es

$$y'(-3, 0) = \frac{6}{3} = 2,$$

es decir, $y'(3, 0) = y'(-3, 0)$ y por lo tanto, las rectas tangentes en los puntos donde la curva intersecta el eje X son paralelas.

(b) Para esto, derivamos nuevamente de manera implícita obteniendo

$$2 - y' - y' - xy'' + 2(y')^2 + 2yy'' = 0 \Leftrightarrow y''(2y - x) = 2y' - 2(y')^2 - 2 \Leftrightarrow y'' = \frac{2y' - 2(y')^2 - 2}{2y - x}.$$

Luego reemplazando y' (que obtuvimos antes) en la expresión anterior, obtenemos

$$y'' = \frac{2\left(\dfrac{y - 2x}{2y - x}\right) - 2\left(\dfrac{y - 2x}{2y - x}\right)^2 - 2}{2y - x} = \frac{2(y - 2x)(2y - x) - (y - 2x)^2 - 2(2y - x)^2}{(2y - x)^3}$$

$$= \frac{-6y^2 + 6xy - 6x^2}{(2y - x)^3}.$$

4. a) Demuestre que para $0 < a < b$ se tiene la siguiente desigualdad

$$1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1.$$

b) Determine las dimensiones del trapecio de área máxima que puede ser inscrito en un semicírculo de radio r.

Solución. (a) Para entender mejor el problema, podemos manipular la expresión de la siguiente manera

$$1 - \frac{a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b}{a} - 1 \Leftrightarrow \frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} < \frac{1}{a}.$$

Luego usando el teorema del valor medio, se tiene que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} = \ln'(c) = \frac{1}{c}.$$

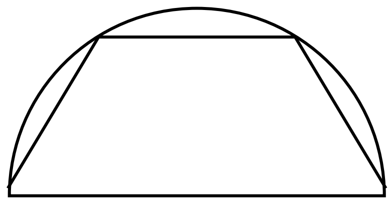
Ahora como la función $\frac{1}{x}$ es estrictamente decreciente, se tiene la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a},$$

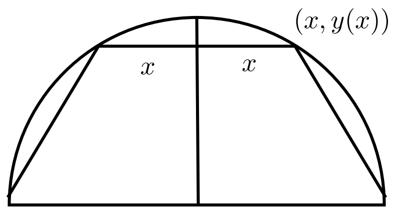
para todo $x \in (a, b)$, y en particular para $x = c$, de lo que obtendremos que

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} < \frac{1}{a}.$$

(b) La primera observación que debemos notar es que en un trapecio, las bases son paralelas y usando el diámetro como una de las bases, la figura queda de la siguiente forma



y llamando x al largo de la base que no es el diámetro combinado con la simetría de la figura, obtendremos que



donde $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ (la ecuación del semicírculo superior). Por lo tanto, la altura del trapecio esta dada por

$$h = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Luego, como el área del trapecio es la semi-suma de las bases por la altura, tendremos que para el caso será

$$A(x) = \left(\frac{2x + 2r}{2}\right)\sqrt{r^2 - x^2} = (x + r)\sqrt{r^2 - x^2},$$

por lo tanto derivando

$$A'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} + (x + r) \cdot \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - x^2 - x(x + r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{(r + x)(r - 2x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Luego necesitamos que $A'(x) = 0$, por lo que obtendremos que $x = -r$ ó $x = r/2$, y como x es una longitud, solo nos sirve el valor $x = r/2$.
Luego es claro notar que este punto es el que maximiza la expresión ya que la derivada pasa de ser positiva a ser negativa. Luego para obtener las dimensiones del trapecio pedido basta reemplazar el valor de x en las ecuaciones anteriores para obtener el valor de y (altura) y con la altura se pueden sacar los lados (el trapecio es isósceles).