PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2021

Pauta Interrogación 3 - MAT1610

1. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2A}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{4A}{n}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{2(n-1)A}{n}\right)\right)$$

Solución:
Considere la partición regular del intervalo $[0,2]$, es decir, la partición

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 2$$

donde $x_k = \dfrac{2k}{n}$ y la función $f(x) = \operatorname{sen}(Ax)$. La suma de Riemann

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} f(x_{k-1}) &= \frac{2}{n}\left(\operatorname{sen}(0)+\operatorname{sen}\left(\frac{2A}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{4A}{n}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{2(n-1)A}{n}\right)\right)\\
&= \frac{2}{n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2A}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{4A}{n}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{2(n-1)A}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2A}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{4A}{n}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{2(n-1)A}{n}\right)\right) = \int_0^2 \operatorname{sen}(Ax)dx$$

por otra parte tenemos que

$$\int_0^2 \operatorname{sen}(Ax)dx = \frac{1}{A}\left(-\cos(2A)+\cos(0)\right)$$

por lo tanto tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2A}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{4A}{n}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{2(n-1)A}{n}\right)\right) = \frac{1}{A}\left(-\cos(2A)+1\right)$$

Distribución del puntaje

- (1 puntos) por describir el intervalo que se usará.
- (1 punto) por describir la función que se integrará
- (2 puntos) por igualar correctaemnte la suma apedida a la suma de Riemann
- (2 puntos) por resolver la integral $\displaystyle\int_0^2 \operatorname{sen}(Ax)dx$ correctamente.

2. Demuestre que

$$2\left(\frac{1}{82}+\frac{1}{2}\right) \leq \int_{-3}^{1} \frac{1}{1+x^4}dx \leq 4$$

Solución:

Observe que el máximo de la función $\dfrac{1}{1+x^4}$ en el intervalo $[-3,1]$ es 1, por lo tanto tenemos que

$$\int_{-3}^{1} \frac{1}{1+x^4}dx \leq 4$$

por propiedades de la integral sabemos que

$$\int_{-3}^{1} \frac{1}{1+x^4}dx = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{1+x^4}dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^4}dx$$

análogamente a lo anterior vemos que en el intervalo $[-3,-1]$ el mínimo de la función $\dfrac{1}{1+x^4}dx$ es $\dfrac{1}{82}$ y que en el intervalo $[-1,1]$ el mínimo es $\dfrac{1}{2}$, tenemos que

$$\int_{-3}^{1} \frac{1}{1+x^4}dx = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{1+x^4}dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^4}dx \geq 2\cdot\frac{1}{82} + 2\cdot\frac{1}{2}$$

obteniendo la desigualdad pedida.

Distribución del puntaje

- (2 puntos) por la desigualdad superior
- (2 puntos) por acotar inferiormente $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{1}{1+x^4}dx$
- (2 puntos) por acotar inferiormente $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^4}dx$

3. Sea f una función tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\int_5^x f(2t)dt = (x-5)e^{2x} + \operatorname{sen}(\pi(x-5))$$

Calcule:

a) $\displaystyle\int_6^8 f(t)dt.$

Solución:
Haciendo el cambio de variable $u = \dfrac{t}{2}$ tenemos que $2du = dt$, obteniendo de esta forma que

$$\int_6^8 f(t)dt = 2\int_3^4 f(2u)du = 2\int_3^5 f(2u)du + 2\int_5^4 f(2u)du$$

del enunciado tenemos que

$$\int_3^5 f(2u)du = -(3-5)e^6 - \operatorname{sen}(\pi(3-5)) = 2e^6$$

y que

$$\int_5^4 f(2u)du = (4-5)e^8 + \operatorname{sen}(\pi(4-5)) = -e^8$$

por lo tanto

$$\int_6^8 f(t)dt = 4e^6 - 2e^8$$

Otra solución:

Usando el TFC tenemos que

$$f(2x) = e^{2x} + 2(x-5)e^{2x} + \pi\cos(\pi(x-5))$$

haciendo $t = 2x$ tenemos que

$$f(t) = e^t + (t-10)e^t + \pi\cos\left(\pi\left(\frac{t}{2}-5\right)\right)$$

integrando directamente tenemos que

$$\int_6^8 f(t)dt = \int_6^8 \left(e^t + (t-10)e^t + \pi\cos\left(\pi\left(\frac{t}{2}-5\right)\right)\right)dt$$

calculando cada una de las integrales tenemos que
$\displaystyle\int_6^8 e^t dt = e^8 - e^6$
$\displaystyle\int_6^8 (t-10)e^t dt = \left((t-10)|_6^8 - \int_6^8 e^t dt\right) = -2e^8 + 4e^6$
$\displaystyle\int_6^8 \pi\cos\left(\pi\left(\frac{t}{2}-5\right)\right) dt = 0$ por lo tanto

$$\int_6^8 f(t)dt = 4e^6 - 2e^8$$

Distribución del puntaje

- (1 punto) por hacer el cambio de variable adecuado.
- (1 punto) por calcular correctamente $\displaystyle\int_3^5 f(2u)du$
- (1 punto)por calcular correctamente $\displaystyle\int_5^4 f(2u)du$

b) $f(1)$.

Solución:

Por TFC, al derivar la igualdad tenemos que

$$f(2x) = e^{2x} + 2(x-5)e^{2x} + \pi\cos(\pi(x-5))$$

reemplazando x por $1/2$, obtenemos que

$$f(1) = e - 9e + \pi\cos\left(-\frac{9\pi}{2}\right) = -8e$$

Distribución del puntaje

- (2 puntos) por usar correctamente el TFC para determinar $f(2t)$.
- (1 punto) por evaluar en $t = 1/2$ y concluir.

4. a) Determine $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Solución:

Observe que $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen}(x) + c$, además haciendo la sutitución $u = (1-x^2)$, tenemos que $du = -2xdx$, obteniendo que

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\sqrt{u} + c = -\sqrt{1-x^2} + c$$

por lo tanto

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{arcsen}(x) - \sqrt{1-x^2} + c$$

Distribución del puntaje

- (1 punto) por separar en dos integrales.
- (1 punto) por determinar $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$
- (1 punto) por determinar correctamente $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

b) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{3} 7[x] + |x^2 - 3x| dx$.

Solución:

Observe que usando la interpretación geométrica de la integral tenemos que

$$\int_{-1}^{3} [x] dx = 2$$

Por otra perte tenemos que

$$\int_{-1}^{3} |x^2 - 3x| dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - 3x) dx - \int_{0}^{3} (x^2 - 3x) dx = \frac{19}{3}$$

por lo tanto

$$\int_{-1}^{3} 7[x] + |x^2 - 3x| dx = 14 + \frac{19}{3}$$

Distribución del puntaje

- (1 punto) por determinar el valor de $\displaystyle\int_{-1}^{3} [x] dx$
- (1 punto) por separar correctamente en dos integrales la integral que involucra el valor absoluto.
- (1 punto) por el resultado final

5. Sea $\mathcal{R}$ la región, que está en el 1er y 4to cuadrante, limitada por las curvas $y = 4x - x^3$ e $y = 3x^2 - 6x$.

   a) Determine el área de la región $\mathcal{R}$.
   Solución:

   Para determinar la intersección de las curvas resolvemos la ecuación $4x - x^3 = 3x^2 - 6x$, obteniendo que la intersección se da en los puntos $(0,0), (2,0)$ y $(-5,105)$, como $\mathcal{R}$ solo corresponde a la que está 1er y 4to cuadrante, los puntos que definen los límites de la regón son solo $(0,0)$ y $(2,0)$, por arriba limita la curva $y = 4x - x^3$ y por abajo la curva $y = 3x^2 - 6x$.
   De está forma tenemos que el área es

$$\int_0^2 10x - x^3 - 3x^2 dx = \left(5x^2 - \frac{x^4}{4} - x^3\right)_0^2 = 8$$

   Distribución del puntaje

   - (1 punto) por determinar los límites de integración.
   - (1 punto) por determianr la función a integrar.
   - (1 punto) por obtener el área correctamente

b) Determine el volumen del sólido obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno a la recta $x = -2$.
Solución:

Al usar cascarones cilíndricos obtenemos que el volumen es

$$\begin{aligned}\int_0^2 2\pi(x+2)(10x - x^3 - 3x^2)dx &= 2\pi\int_0^2(-x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 20x)dx \\ &= 2\pi\left(-\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 + 10x^2\right)_0^2 \\ &= \frac{728\pi}{15}\end{aligned}$$

Distribución del puntaje

- (1 punto) por determinar correctamente el "radio" dl cascarón $(x+2)$
- (1 punto) por determinar la "altura" del cascarón $(10x - x^3 - 3x^2)$
- (1 punto) por determinar el volumen