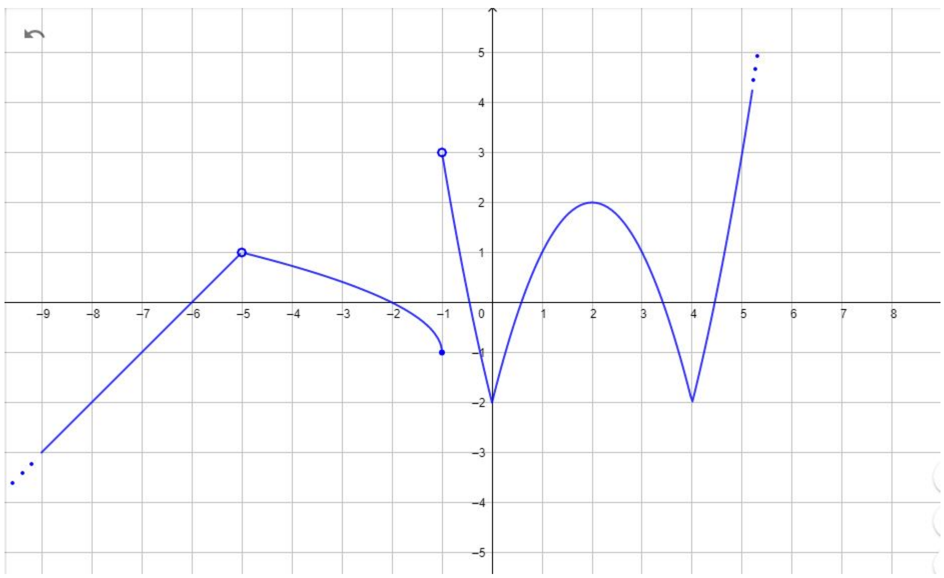
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2023

Ayudantía 8 - MAT1610

1. Para la función f cuya gráfica está dada en la figura, determine:

   (a) Los números o valores críticos de f y su imagen bajo f.

   (b) El mínimo y el máximo en cada uno de los siguientes intervalos: $[1, 4]$; $[1, 5]$; $[-9, -2]$; $[-1, 3]$;.



Solución

(a) Números Críticos:
Valores x del dominio de f tales que $f'(x) = 0$: $x = 2$.
Valores x del dominio de f tales que $f'(x)$ no existe: $x = -1$, $x = 0$ y $x = 4$.
Valores de f en los números críticos: $f(2) = 2$; $f(0) = -2$; $f(-1) = -1$, $f(4) = -2$

(b) En el intervalo $[1, 4]$ la función f es continua, los valores de f en los extermos del intervalo son: $f(1) = 1$, $f(4) = -2$, y los valores de f en los números críticos contenidos en $[1, 4]$ son $f(2) = 2$ y $f(4) = -2$. Entonces, el mínimo de f es $f(4) = -2$ y el máximo de f es $f(2) = 2$.
En el intervalo $[1, 5]$ la función f es continua, los valores de f en los extermos del intervalo son: $f(1) = 1$, $f(5) = 3$, y los valores de f en los números críticos contenidos en $[1, 5]$ son $f(2) = 2$ y $f(4) = -2$. Entonces, el mínimo de f en $[1, 5]$ es $f(4) = -2$ y el máximo de f en $[1, 5]$ es $f(5) = 3$.
Note que f NO es continua en el intervalo $[-9, -2]$. El mínimo de f en $[-9, -2]$ es

$f(-9) = -3$ y el máximo de f en $[-9, -2]$ no existe.
En el último caso se tiene que f NO es continua en el intervalo $[-1, 3]$. El mínimo de f en $[-1, 3]$ es $f(0) = -2$ y el máximo de f en $[-1, 3]$ no existe.

2. Determine los números críticos de la función f en cada caso:

   (a) $f(x)$ es una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $e^{1+x^2}f(x)+\frac{(f(x))^5}{5}+\pi\left(f(x)+1\right)=\pi$.

   (b) $f(x)=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}$, con $a\in\mathbb{R}$.

Solución:

(a) Dado que f es derivable en $\mathbb{R}$, los únicos números críticos, si existen, corresponden a aquellos valores tales que $f'(x)=0$. En este caso, la función derivada se obtiene derivando implicitamente, como sigue

$$
\begin{aligned}
e^{1+x^2}f(x)+\frac{(f(x))^5}{5}+\pi\left(f(x)+1\right)=\pi \quad &\Rightarrow \quad e^{1+x^2}2xf(x)+e^{1+x^2}f'(x)+\left(f(x)\right)^4f'(x)+\pi f'(x)=0\\
&\Rightarrow \quad e^{1+x^2}2xf(x)+f'(x)\left(e^{1+x^2}+\left(f(x)\right)^4+\pi\right)=0\\
&\Rightarrow \quad f'(x)=-\frac{e^{1+x^2}2xf(x)}{e^{1+x^2}+\left(f(x)\right)^4+\pi}(\text{denominador no nulo})
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
f'(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{e^{1+x^2}2xf(x)}{e^{1+x^2}+\left(f(x)\right)^4+\pi}=0\\
&\Leftrightarrow \quad e^{1+x^2}2xf(x)=0\\
&\Leftrightarrow \quad xf(x)=0\\
&\Leftrightarrow \quad x=0\vee f(x)=0\\
&\Leftrightarrow \quad x=0\vee x=f^{-1}(0)(\text{está garantizada su existencia **})
\end{aligned}
$$

** Se garantiza la existencia de $x=f^{-1}(0)$ porque si $f(x)=0$, se cumple la ecuación original ya que,

$$e^{1+x^2}f(x)+\frac{(f(x))^5}{5}+\pi\left(f(x)+1\right)=e^{1+x^2}\cdot 0+\frac{(0)^5}{5}+\pi\left(0+1\right)=0+0+\pi=\pi$$

Así, los valores críticos de f son: $x=0$ y $x=f^{-1}(0)$

(b) Dominio de f: $\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{4ax-3x^2}{3\sqrt[3]{\left(2ax^2-x^3\right)^2}}=\frac{x\left(4a-3x\right)}{3\sqrt[3]{\left(2ax^2-x^3\right)^2}}$$

Dominio de f': $R-\{0,2a\}$ y

$$
\begin{aligned}
f'(x)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x\left(4a-3x\right)}{3\sqrt[3]{\left(2ax^2-x^3\right)^2}}=0\wedge x\neq 0\wedge x\neq 2a\\
&\Leftrightarrow \quad x\left(4a-3x\right)=0\wedge x\neq 0\wedge x\neq 2a\\
&\Leftrightarrow \quad 4a-3x=0\\
&\Leftrightarrow \quad x=\frac{4a}{3}
\end{aligned}
$$

Así, los valores críticos de f son: $x=0$, $x=2a$ y $x=\frac{4a}{3}$

3. Determine, el máximo y el mínimo de la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ en el intervalo $[-1, 3]$
Solución:
Valor de f en los extremos del intervalo:
$f(-1) = \frac{1}{1+|-1|} + \frac{1}{1+|-1-1|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$
$f(3) = \frac{1}{1+|3|} + \frac{1}{1+|3-1|} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$
Se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2-x} & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2-x} & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

y,

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} & si \quad x < 0 \\ -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(2-x)^2} & si \quad 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Notar que f no es derivable en $x = 0$ y $x = 1$ y que

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-6x+5}{(1-x)^2(2-x)^2} & si \quad x < 0 \\ \frac{-3+6x}{(2-x)^2(1+x)^2} & si \quad 0 < x < 1 \\ \frac{-2x^2-2x-1}{(1+x)^2x^2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Entonces, $f'(x) = 0$ sólo si $-3 + 6x = 0$, es decir, $x = \frac{1}{2}$. Note que los polinomios $2x^2 - 6x + 5$ y $-2x^2 - 2x - 1$ no tienen raíces reales.

Por lo tanto, los números críticos de f en el intervalo $[-1, 3]$ son $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = 1$ y $f(0) = \frac{3}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}$ y $f(1) = \frac{3}{2}$. Por otro lado, $f(-1) = \frac{5}{6}$ y $f(3) = \frac{7}{12}$. Entonces:
El máximo de la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ en el intervalo $[-1, 3]$ es $f(0) = f(1) = \frac{3}{2}$
El mínimo de la función $f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-1|}$ en el intervalo $[-1, 3]$ es $f(3) = \frac{7}{12}$.

4. Demostrar que si $x > 0$, entonces, $\frac{x}{1+x} < ln(x + 1) < x$.
Solución:
Una forma
Sea $x > 0$, considere la función $f(x) = \ln(x)$, $a = 1$, $b = x + 1$. Notar que f es continua y derivable en $(0, +\infty)$ y, en particular, es continua en $[a, b] = [1, 1 + x]$ y derivable en $(a, b) = (1, 1 + x)$. Por lo tanto, por el TVM, existe un valor c, $c \in (a, b) = (1, 1 + x)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(1+x)-f(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)-ln(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)-0}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$,
es decir, existe un valor c, $c \in (1, 1 + x)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

y, $f'(c) = \frac{1}{c}$, entonces

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

para algún valor c, $c \in (1, 1+x)$.

Por lo tanto, $1 < c < 1+x$ y, en consecuencia, se tiene que,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{1}$$

es decir,

$$\frac{1}{1+x} < f'(c) < 1$$

o,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

o, como $x > 0$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

Otra Forma: Análoga a la anterior
Sea $x > 0$, considere la función $f(x) = \ln(x+1)$, $a = 0$, $b = x$. Notar que f es continua y derivable en $(-1, +\infty)$ y, en particular, es continua en $[a, b] = [0, x]$ y derivable en $(a, b) = (0, x)$. Por lo tanto, por el TVM, existe un valor c, $c \in (a, b) = (0, x)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\ln(1+x)-ln(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)-0}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$,
es decir, existe un valor c, $c \in (0, x)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

y, $f'(c) = \frac{1}{c+1}$, entonces

$$\frac{1}{c+1} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

para algún valor c, $c \in (0, x)$.

Por lo tanto, $0 < c < x$ ó $1 < c+1 < x+1$ y, en consecuencia, se tiene que,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c+1} < \frac{1}{1}$$

es decir,

$$\frac{1}{1+x} < f'(c) < 1$$

o,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

o, como $x > 0$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

5. Demuestre que la ecuación $\arctan(x-1)+x^3-3=0$ tiene una única raíz.
Solución
Considere $f(x)=\arctan(x-1)+x^3-3$ y note que f es continua en $\mathbb{R}$,
$f(0)=\arctan(-1)-3=-\frac{\pi}{4}-3<0$ y $f(2)=\arctan(1)+8-3=\frac{\pi}{4}+5>0$,
entonces, por el teorema del valor intermedio, existe un valor tal que $f(c)=0$, lo cual garantiza la existencia de la raíz.

Para la unicidad, suponga que existen dos raíces, r_1 y r_2, entonces, $f(r_1)=f(r_2)=0$ y como f es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por el teorema de Rolle, existe un valor c, $c\in(r_1,r_2)$ tal que $f'(c)=0$ pero, $f'(x)=\frac{1}{1+(x-1)^2}+3x^2>0$, entonces $f'(c)=0$ implica una contradicción que proviene de suponer que existen dos raíces de la ecuación, por lo que se concluye que la raíz es única.
Nota: También se puede usar $f(1)=-2<0$