Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Enero 2023

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Examen, 10:00 - 12:00

1. Considere E la región acotada por los planos $4x + y + 2z = 10$, $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$. Calcule

$$\iiint_E 6z^2 dV.$$

Solución: La intersección de los planos $y = 0$ y $4x + y + 2z = 10$ es $2x + z = 5$. En el plano xz, esta recta intersecta a la recta $z = 0$ en $x = \frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned}
\iiint_E 6z^2 dV &= \int_0^{\frac{5}{2}} \int_0^{5-2x} \int_0^{10-4x-2z} 6z^2 dydzdx \\
&= \int_0^{\frac{5}{2}} \int_0^{5-2x} 12(5-2x-z)z^2 dzdx \\
&= \int_0^{\frac{5}{2}} 4(5-2x)z^3 - 3z^4\Big|_0^{5-2x} \\
&= \int_0^{\frac{5}{2}} (5-2x)^4 dx \\
&= -\frac{1}{10}(5-2x)^5\Big|_0^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{625}{2}
\end{aligned}$$

Asignación de Puntaje:

- (4 pts.) Por los límites de integración.

- (2 pts.) Por el resultado correcto.

2. Determine si cada una de las siguientes integrales es convergente o divergente.

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+3\tan^4(x)}{\sqrt[5]{x^3}}dx$

   Solución: Como $\tan(x)$ es creciente en el intervalo $[0,1]$, tenemos

   $$\frac{1+3\tan^4(x)}{\sqrt[5]{x^3}} \leq \frac{1+3\tan^4(1)}{\sqrt[5]{x^3}}$$

   Además, por criterio $p<1$, la integral

   $$\int_0^1 \frac{1+3\tan^4(1)}{\sqrt[5]{x^3}}dx$$

   es convergente. Entonces por el criterio de comparación, la integral dada converge.

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{6x^3}{(x^2+1)^2}dx$

   Solución:

   Forma 1:

   Analicemos en principio la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{6x^3}{(x^2+1)^2}dx$.

   Notar que la antiderivada de la integral $\displaystyle\int \frac{6x^3}{(x^2+1)^2}dx$, puede calcularse haciendo

   $$u = x^2+1 \Leftrightarrow x^2 = u-1$$
   $$du = 2xdx \;\Rightarrow\; \frac{du}{2} = xdx.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^3}{\left(x^2+1\right)^2}dx = 6\int \frac{x^2xdx}{\left(x^2+1\right)^2} &= 6\int\left(\frac{(u-1)\cdot\frac{du}{2}}{u^2}\right)\\ &= 3\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)du\\ &= 3\left(\ln|u|+\frac{1}{u}\right)\\ &= 3\left(\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{x^2+1}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{6x^3}{\left(x^2+1\right)^2}dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{6x^3}{\left(x^2+1\right)^2}dx\\ &= \lim_{t\to+\infty} 3\left[\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{t^2+1}\Big|_0^t\right]\\ &= 3\lim_{t\to+\infty}\left(\ln\left(t^2+1\right)+\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{2}\right)=+\infty\end{aligned}$$

Por lo tanto la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{6x^3}{\left(x^2+1\right)^2}dx$ es divergente.

Forma 2:

Para analizar la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{6x^3}{\left(x^2+1\right)^2}dx$, usaremos comparación al límite con $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^3}{\left(x^2+1\right)^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^4}{\left(x^2+1\right)^2}=6$$

Como $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{x}dx$ diverge, la integral dada también diverge.

Asignación de Puntaje cada parte:

- (1 pto.) Por seleccionar un criterio apropiado.

- (1 pto.) Por usar correctamente el criterio.
- (1 pto.) Por concluir correctamente.

3. Obtenga un desarrollo en serie de potencias para la función y determine el intervalo de convergencia.

$$f(x) = \frac{\arctan(2x)}{x}.$$

Solución: Sabemos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

Integrando tenemos

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + C.$$

Evaluando en 0, podemos determinar que $C = 0$. Evaluando en $2x$, obtenemos

$$\arctan(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$$

Así

$$\frac{\arctan(2x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n}$$

Por el criterio del cociente, el radio de convergencia de esta serie es $\frac{1}{2}$. Cuando $x = \pm\frac{1}{2}$, la serie converge por el criterio de la serie alternante.

El intervalo de convergencia es $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Asignación de Puntaje:

- (1 pto.) Por serie para $\arctan(x)$.
- (2 pts.) Por serie para $\arctan(2x)$.
- (1 pto.) Por serie para $\frac{\arctan(2x)}{x}$.

- (1 pto.) Por radio de convergencia.
- (1 pto.) Por argumentar los extremos del intervalo.

4. Clasifique los puntos críticos de la función:

$$f(x, y) = 5x - 5y + 2xy - x^2 + 2y^4.$$

Solución: Los puntos críticos de la función se producen cuando las derivadas parciales se anulan, es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5 + 2y - 2x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -5 + 2x + 8y^3 = 0$$

Sumando ambas ecuaciones, $2y + 8y^3 = 2y(1 + 4y^2) = 0$. Así solo hay un punto crítico, el $(5/2, 0)$.

Para clasificarlo usaremos la prueba de la segunda derivada. Como $D = 48y^2 - 4$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 < 0$, concluimos que $(5/2, 0)$ es un punto silla.

Asignación de Puntaje:

- (2 pts.) Por encontrar los puntos críticos.
- (2 pts.) Por calcular el discriminante y evaluarlo en los puntos críticos.
- (2 pts.) Por clasificar los puntos críticos.