PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2020

Ayudantía 12 - MAT1610

1. ¿Qué aceleración constante se requiere para incrementar la rapidez de un vehículo desde $48Km/h$ hasta $80Km/h$ en 5 segundos?
   Solución:
   Se tiene que la aceleración es constante, a, entonces la función velocidad (es antiderivada de la aceleración) es lineal, por lo que
   $$v(t) = at + b$$
   Dado que inicialmente la velocidad es $48Km/h$, esto es, $v(0) = 48Km/h$, por lo tanto, $v(t) = at + 48$ y para $t = 5s = \frac{5}{3600} = \frac{1}{720}$h, $v\left(\frac{1}{720}\right) = 80Km/h$ se tiene que $v\left(\frac{1}{720}\right) = 80Km/h = a\frac{1}{720}h + 48Km/h$ y, en consecuencia
   $$32Km/h \cdot 7201/h = a$$
   esto es
   $$a = 23040Km/h^2$$
   que equivale a:
   $$a = \frac{23040 \cdot 1000}{(3600)^2} m/s^2 = \frac{2304}{(36)^2} m/s^2 \approx 1,78m/s^2$$

2. (a) Determine una región cuya área sea igual al límite dado, identificándolo como una suma de Riemann: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{n^2+kn}}{n^2}$

(b) Determine una región cuya área sea igual al límite dado, identificándolo como una suma de Riemann: $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}$

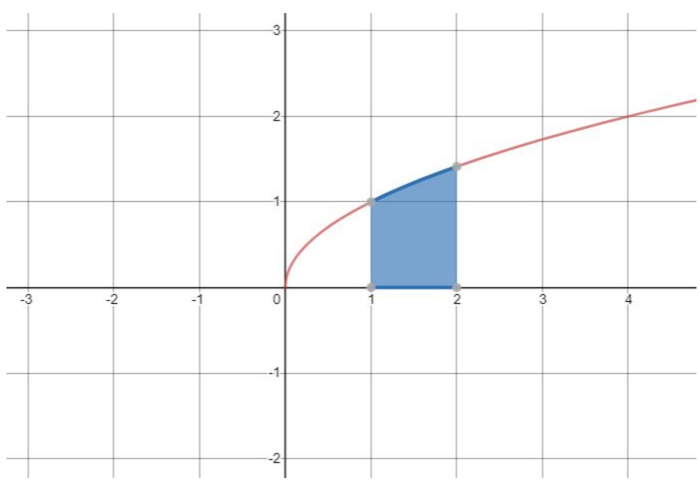
(c) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e-1}{n}\left(\dfrac{1}{1+\frac{e-1}{n}}+\dfrac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}}+\dfrac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}}+\cdots+\dfrac{1}{e}\right)$

Solución:

(a)

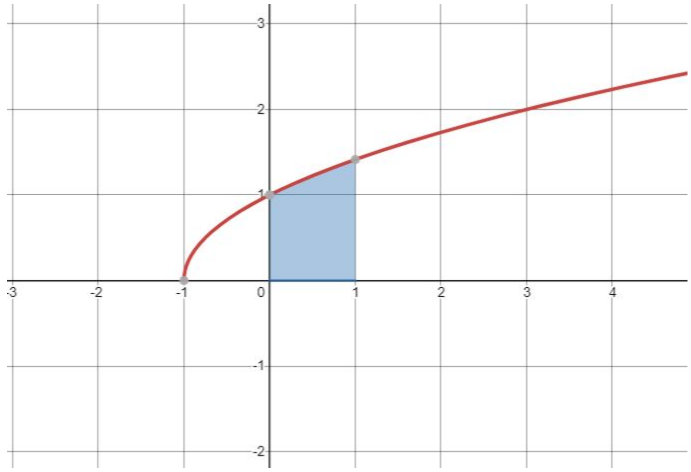
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+kn}}{n^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+kn}}{n}\frac{1}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+k\frac{1}{n}}\frac{1}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\sqrt{1+k\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}}}_{f(x_k^*)}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}
\end{aligned}$$

Así, considerando $\Delta x=\frac{1}{n}$ (note que el intervalo de intergración debe tener longitud 1) y Una opción, $[a,b]=[1,2]$, $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0^*=1$, $x_k^*=1+k\Delta x=1+k\frac{1}{n}$, $1\leq k\leq n$, $(x_n^*=2)$



Otra opción, $f(x)=\sqrt{1+x}$, $[a,b]=[0,1]$, $x_0^*=0$, $x_k^*=0+k\Delta x=k\frac{1}{n}$, $1\leq k\leq n$, $(x_n^*=1)$

Por lo tanto,

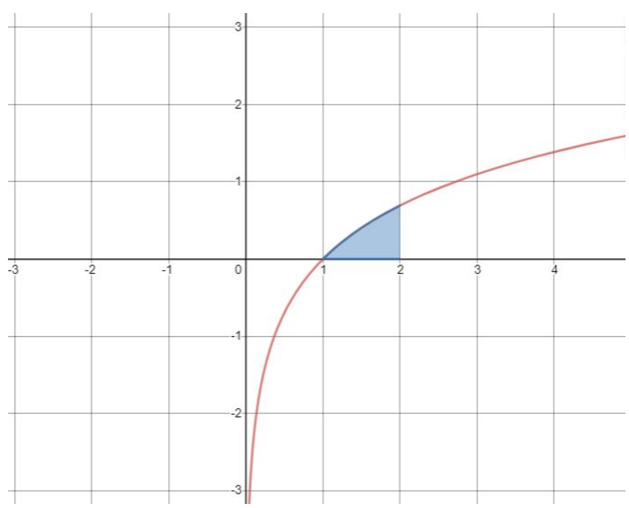


$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2+kn}}{n^2}=\int_1^2\sqrt{x}dx=\int_0^1\sqrt{1+x}dx$$

(b)

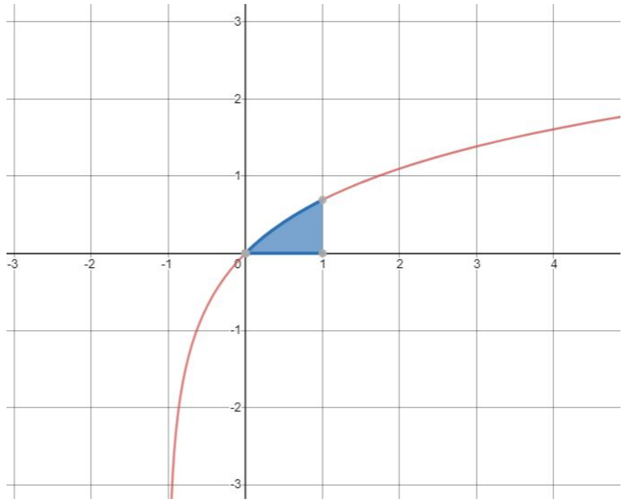
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\frac{1}{n}\ \text{propiedad}\ln \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\ln\left(1+k\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\right)}_{f(x_k^*)}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\end{aligned}$$

Así, considerando $\Delta x=\frac{1}{n}$ (note que el intervalo de intergración debe tener longitud 1) y Una opción, tomar $[a,b]=[1,2]$, $f(x)=\ln(x)$, , $x_0^*=1$, $x_k^*=1+k\Delta x=1+k\frac{1}{n}$, $1\le k\le n$, ($x_n^*=2$)
Otra opción, tomar $f(x)=\ln(1+x)$, $[a,b]=[0,1]$, $x_0^*=0$, $x_k^*=0+k\Delta x=k\frac{1}{n}$, $1\le k\le n$,



($x_n^*=1$)

Por lo tanto,

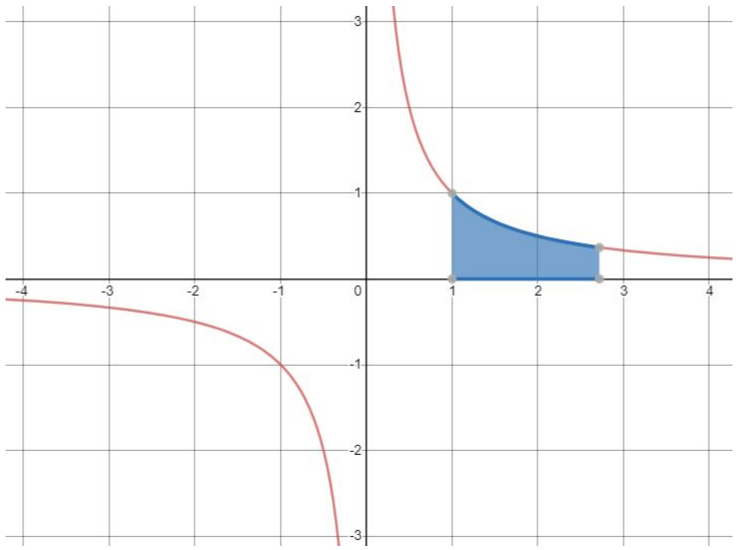


$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}=\int_1^2\ln(x)dx=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

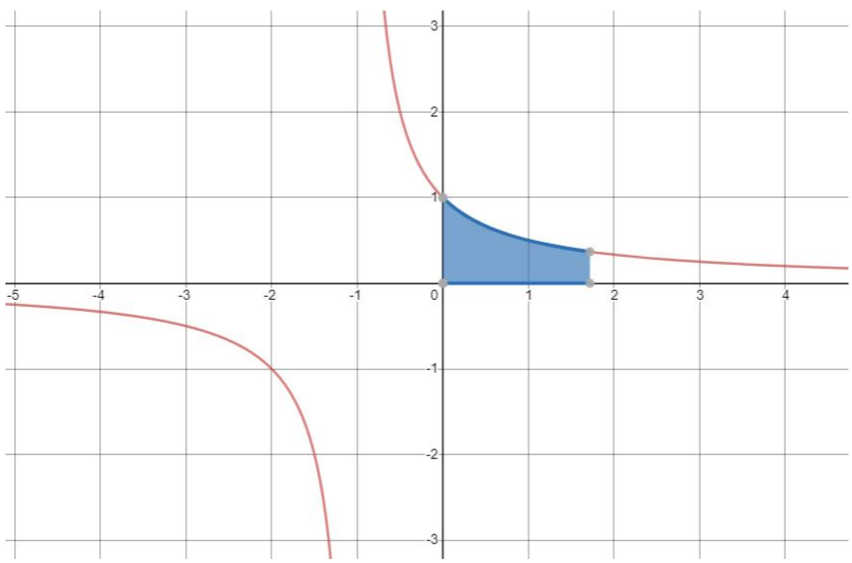
(c) Notar que $\frac{1}{e}=\frac{1}{1+\frac{n(e-1)}{n}}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{e-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}}\cdots+\frac{1}{e}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k\frac{(e-1)}{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{1+k\underbrace{\frac{(e-1)}{n}}_{\Delta x}}}_{f(x_k^*)}\underbrace{\frac{e-1}{n}}_{\Delta x}\end{aligned}$$

Así, considerando $\Delta x = \frac{e-1}{n}$ (note que el intervalo de intergración debe tener longitud $e-1$) y
Una opción, $[a,b]=[1,e]$ y $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0^*=1$, $x_k^*=1+k\Delta x=1+k\frac{e-1}{n}$, $1\leq k\leq n$, $(x_n^*=e)$



Otra opción, $f(x)=\frac{1}{1+x}$, $[a,b]=[0,e-1]$, $x_0^*=0$, $x_k^*=0+k\Delta x=k\frac{e-1}{n}$, $1\leq k\leq n$, $(x_n^*=e-1)$
Entonces,



$$\lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{e-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}}\cdots+\frac{1}{e}\right)=\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln(e)-\ln(1)=1$$

o

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e-1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{e-1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2(e-1)}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3(e-1)}{n}}\cdots+\frac{1}{e}\right)=\int_0^{e-1}\frac{1}{1+x}dx=1$$

3. (a) Calcule el valor del límite $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\displaystyle\int_{x^2}^{0} \operatorname{sen}(\sqrt{t})dt}{x^3}$

(b) Sea $g(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x^3} ln(t)dt$, para $x > 0$. Determine los valores críticos de g, los intervalos de crecimiento de g y los intervalos de decrecimiento g.

Solución:

(a) Note que cuando x tiende a 0, se tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$.
La función $x \mapsto x^3$ en continua y derivable en $\mathbb{R}$, En particular lo es en el intervalo de integración.
Por otra parte, como $\operatorname{sen}(\sqrt{t})$ es continua en $[0, \infty)$ y $x > 0$, por el TFC, la función $\displaystyle\int_{x}^{0} \operatorname{sen}(\sqrt{t})$ es continua y derivable en $(0, t), t > 0$ y al hacer la composición con la función continua y derivable $x \mapsto x^2$ se obtiene que la función del numerador es continua y derivable en $(0, t), t > 0$ por lo que se puede usar la regla de L'Hopital. Para ello, se requerirá la derivada del numerador y la derivada del denominador. Para obtener la derivada del numerador, se usa el TFC pero, antes de derivar, se debe tener en cuenta que el límite inferior de la integral debe ser constante el límite de integración superior es una función por lo que, debe usar que

$$\int_{x^2}^{0} \operatorname{sen}(\sqrt{t})dt = -\int_{0}^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})dt$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{x^2}^{0} \operatorname{sen}(\sqrt{t})dt\right)}{\frac{d}{dx}x^3} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(-\frac{d}{dx}\displaystyle\int_{0}^{x^2} \operatorname{sen}(\sqrt{t})dt\right)}{\frac{d}{dx}x^3} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2}\right)2x}{3x^2} \\
&= -\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \qquad \sqrt{x^2} = x, \text{ ya que } x > 0 \\
&= -\frac{2}{3}\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \\
&= -\frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Así, existe el límite y

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{x^2}^{0} \operatorname{sen}(\sqrt{t})dt\right)}{\frac{d}{dx}x^3} = -\frac{2}{3}$$

y, por la regla de L'Hopital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_{x^2}^{0} \operatorname{sen}(\sqrt{t})dt}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{d}{dx}\left(\displaystyle\int_{x^2}^{0} \operatorname{sen}(\sqrt{t})dt\right)}{\frac{d}{dx}x^3} = -\frac{2}{3}$$

(b) Sea $x > 0$, deivando respecto de x y usando el TFC

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}g(x) &= \frac{d}{dx}\left(\int_{x^2}^{x^3} \ln(t)dt\right) \\
&= \ln\left(x^3\right)\cdot 3x^2 - \ln\left(x^2\right)2x \\
&= \ln(x)\cdot 9x^2 - \ln(x)\,4x \quad \text{(propiedad del } \ln) \\
&= x\ln(x)\,(9x-4)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores críticos de $g(x)$ son: 1 y $\frac{4}{9}$
Como $x > 0$, el factor x no define signo de $f'(x)$

Intervalo	$\ln(x)$	$9x-4$	f'	f
$(0, \frac{4}{9})$	-	-	$+$	creciente
$(\frac{4}{9}, 1)$	-	$+$	-	decreciente
$(1, \infty)$	$+$	$+$	$+$	creciente

Intervalos de crecimiento: $(0, \frac{4}{9})$ y $(1, \infty)$
Intervalos de decrecimiento: $(\frac{4}{9}, 1)$

4. Determine la constante a y la función $f(x)$ tales que

$$\int_a^{2x-a} f(t)dt = \operatorname{sen}(x-a) + \arctan(x-a) + a - 2$$

Solución:
Sea $G(x) = \displaystyle\int_a^{2x-a} f(t)dt$ entonces, $G(a) = \displaystyle\int_a^{a} f(t)dt = 0$, es decir,
$\operatorname{sen}(0) + \arctan(0) + a - 2 = 0$ y en consecuencia $a = 2$ y

$$G(x) = \int_a^{2x-a} f(t)dt = \int_2^{2x-2} f(t)dt = \operatorname{sen}(x-2) + \arctan(x-2)$$

es decir,

$$\int_a^{2x-a} f(t)dt = \operatorname{sen}(x-2) + \arctan(x-2)$$

Entonces, derivando en ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_2^{2x-2} f(t)dt = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \quad &\Rightarrow \quad f(2x-2)\frac{d}{dx}(2x-2) = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \\
&\Rightarrow \quad f(2x-2)\cdot 2 = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \\
&\Rightarrow \quad f\,(2x-2) = \frac{\cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2}}{2} \\
&\Rightarrow \quad f(x) = \frac{\cos(\frac{x+2}{2}-2) + \frac{1}{1+(\frac{x+2}{2}-2)^2}}{2}
\end{aligned}$$

5. Demuestre que $\frac{\sqrt{2}\pi}{24} \leq \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} cos(x)dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{2}$.

Solución
Notar que en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ el valor mínimo absoluto de la función $x \mapsto \cos(x)$ es $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y la longitud del intervalo de integración es $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{24} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{12} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)dx$$

Por otro lado, para $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, como $x < 1$ entonces $1 < \frac{1}{x}$ y como $\cos(x) < 1$, por transitividad se tiene que, para $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(x) < \frac{1}{x}$ y en consecuencia,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}dx$$

Por último, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ el valor máximo absoluto de la función $x \mapsto \frac{1}{x}$ es $\frac{6}{\pi}$ y la longitud del intervalo de integración es $\frac{\pi}{12}$ entonces,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}dx \leq \frac{6}{\pi}\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}$$