Función Exponencial

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

4 de Mayo de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Función Exponencial

El número e se define como el valor al que se aproxima $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ cuando n se hace grande. La tabla muestra los valores de está expresión

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
5	2,48832
10	2,59374
100	2.70481
10.000	2,71815
1.000.000	2,71828

El valor aproximado a 20 lugares decimales es:

$$e \approx 2,71828182845904523536$$

Se puede mostrar que e es un número irracional, de modo que no podemos escribir de manera exacta su valor en forma decimal.

Función Exponencial

Una sucesión es una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ que tiene dominio en los números naturales. En este caso la sucesión está definida por

$$a(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Se suele emplear la notación a_n en vez de $a(n)$.
El hecho de que los valores de a_n se aproximen al número real e significa que esta sucesión es convergente.
La constante de Euler e es el número irracional, cuyo valor se aproxima la sucesión de números a_n

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

El símbolo $\lim_{n\to\infty}$ se lee el límite cuando n tiende a infinito y expresa el hecho de que el término $(1 + 1/n)^n$ se aproxima al número e a medida que n crece.

Función Exponencial

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Definición.

La función exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida mediante la expresión

$$f(x) = e^x$$

donde e es la constante de Euler.

Presentamos el primer resultado sobre la función exponcial:

Proposición. (Desigualdad Fundamental)

La función exponencial satisface la siguiente desigualdad. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que:

$$e^x \geqslant 1 + x\,.$$

Para demostrar esta desigualdad necesitamos algunos hechos que serán probados más adelante.

Función Exponencial

En el capítulo de sucesiones, demostraremos el siguiente teorema

Teorema.

Para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant e^x \, .$$

Mediante el uso de el principio de inducción matemática es posible mostrar la desigualdad de Bernoulli que establece que para todo número natural n se cumple que

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Función Exponencial

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Demostración Aplicando estos dos últimos hechos vemos que

$$e^x \geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{x}{n} = 1 + x\,.$$

Función Exponencial

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Proposición. (Acotamiento y ceros)

Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x > 0\,.$$

En consecuencia la función exponencial es positiva y no tiene ceros.

Demostración Separemos la demostración en dos casos:

- Caso 1. $x > -1 \iff x+1 > 0$.
  Usando la desigualdad fundamental obtenemos que

$$e^x \geqslant x + 1 > 0\,.$$

- Caso 2. $x \leqslant -1$.
  Para resolver este caso se necesita el principio de Arquímedes:

$$\boxed{\mathbb{N} \text{ no está acotado superiormente}}$$

o en símbolos para todo $a \in \mathbb{R}^+$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n$.

Función Exponencial

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Como $x < -1$ entonces $x < 0 \iff -x > 0$, entonces usando el principio de Arquímedes existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$-x < n \iff -\frac{x}{n} < 1 \iff 0 < 1 + \frac{x}{n} \iff 0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n .$$

La última desigualdad se debe a que el producto de n términos positivos sigue siendo positivo. Se sigue que

$$e^x \geqslant \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0 .$$

Observación El principio de Arquímedes se discutirá y será usado ampliamente en el capítulo de sucesiones y es consecuencia del axioma del supremo.

Función Exponencial

Proposición. (Crecimiento e Inyectividad)

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple que

$$x < y \Longrightarrow e^x < e^y \; .$$

En consecuencia la función exponencial es estrictamente creciente y por lo tanto inyectiva.

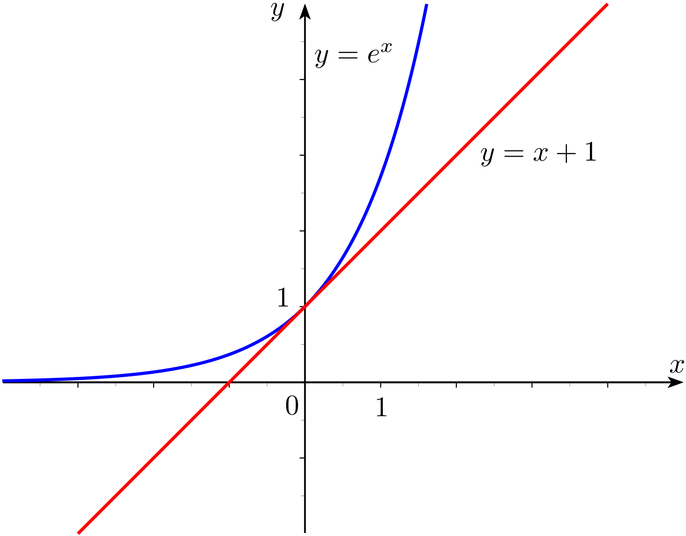
Demostración Usando el producto de exponenciales y la desigualdad $e^x \geqslant 1 + x$ se obtiene

$$e^y = e^x e^{y-x} \geqslant e^x(1 + y - x) > e^x \; .$$

De lo anterior se deduce que el recorrido de la función exponencial es $]0, \infty[$.

Función Exponencial

La gráfica de la función exponencial junto con la recta $y = x + 1$ se muestran a continuación:



Función Exponencial

EJEMPLO 1 Determine el gráfico de las siguientes funciones

a. $g(x) = e^{-x}$
b. $h(x) = \dfrac{10}{1 + e^{-x}}$

EJEMPLO 2 Una enfermedad infecciosa empieza a propagarse en una ciudad pequeña de 10.000 habitantes. Después de t días, el número de personas que han sucumbido al virus está modelada por la función

$$v(t) = \frac{10.000}{5 + 1245e^{-0,97t}} \ .$$

a. ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente?
b. Grafique la función v y describa su comportamiento.