Pontificia Universidad Católica de Chile
Bastián Mora - bmor@uc.cl
Matías Fernández - matias.fernandez@uc.cl

# MAT1107 - Introducción al Cálculo

## Ayudantía 10 - Jueves 26 de mayo del 2022

**Problema 1.** Calcule las sumatorias

a) $\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\left(k+\frac{2^j}{j}\right)$

b) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

c) $\sum_{j=0}^{n} 6j^2-12j-3$

d) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\frac{1}{2^i\cdot 3^j}$.

**Solución:**

a)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\left(k+\frac{2^j}{j}\right) &= \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{j}k+\sum_{k=1}^{j}\frac{2^j}{j}\right]\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{j(j+1)}{2}+2^j\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j+\sum_{j=1}^{n}2^j\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2\cdot 6}+\frac{n(n+1)}{2\cdot 2}+2^{n+1}-2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot n!}{k!(n-k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{kn \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} \\
&= n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \\
&= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!} \\
&= n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\
&= n \cdot 2^{n-1}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} 6j^2 - 12j - 3 &= 6\sum_{j=0}^{n} j^2 - 12\sum_{j=0}^{n} j - 3\sum_{j=0}^{3} 1 \\
&= 6 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 12 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 3 \cdot (n+1) \\
&= n(n+1)(2n+1) - 6n(n+1) - 3(n+1)
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{2^i 3^j} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{3^j} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) \left(\sum_{j=0}^{m} \left(\frac{1}{3}\right)^j\right) \\
&= \left(\frac{1-\frac{1}{2}^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) \left(\frac{1-\frac{1}{3}^{m+1}}{1-\frac{1}{3}}\right)
\end{aligned}$$

**Problema 2.** Utilizando la propiedad telescópica, calcule las siguientes sumas:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

b) $\sum\limits_{i=j}^{k} \ln\left(1+\frac{1}{i}\right)$

c) $\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}}$

d) $\sum\limits_{k=1}^{n} k!k$

e) $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{i}{(i+1)!}$

**Solución:**

a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k+1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sum_{i=j}^{k} \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right) &= \sum_{i=j}^{k} \ln\left(\frac{i+1}{i}\right) \\ &= \sum_{i=j}^{k} \ln(i+1) - \ln(i) \\ &= \ln(k+1) - \ln(j) \\ &= \ln\left(\frac{k+1}{j}\right)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i(i+1)}(\sqrt{i+1}+\sqrt{i})} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{\sqrt{i(i+1)}(\sqrt{i+1}+\sqrt{i})(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{\sqrt{i}\sqrt{(i+1)}} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{\sqrt{i}} - \frac{1}{\sqrt{i+1}}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! &= \sum_{k=1}^{n}((k+1)-1)k! \\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - k! \\ &= (n+1)! - 1\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} \frac{i}{(i+1)!} &= \sum_{i=1}^{m} \frac{(i+1)-1}{(i+1)!} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!} - \frac{1}{(i+1)!} \\ &= 1 - \frac{1}{(m+1)!}\end{aligned}$$

**Problema 3.** Demuestre que, para todo $n \geq 2$, se tiene la desigualdad

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

**Solución.** Procedemos por inducción. Se verifica el caso $n = 2$ :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 > 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} > 1. \end{aligned}$$

Supongamos ahora que para algún $n$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &> \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n(n+1)} + 1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n^2+n} + 1}{\sqrt{n+1}} \\ &> \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

**Problema 4.** Calcule en función de $n$, el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2$$

procediendo como se indica:

a) Escriba la suma de los términos pares, usando $k = 2i$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$.

b) Escriba la suma de los términos impares, usando $k = 2i - 1$, con $i \in \{1, \ldots, n\}$. Calcule la suma pedida al inicio.

**Solución:**

a) Considerando sólo los términos pares, podemos reescribir

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{2i} (2i)^2 = 4 \sum_{i=1}^{n} i^2$$

b) Por otro lado, considerando sólo los términos impares

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i-1}(2i-1)^2 &= -\sum_{i=1}^{n}(4i^2-4i+1)\\ &= -4\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1\\ &= -4\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2n(n+1) - n\end{aligned}$$

Así que se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k^2 &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i}(2i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(-1)^{2i-1}(2i-1)^2\\ &= 4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2n(n+1) - n\\ &= 2n^2 + n\end{aligned}$$

**Problema 5.** Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci, definida por $f_1 = f_2 = 1$ y $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k$ para todo $k \geq 1$.

a) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} f_n = f_{n+2} - 1$.

b) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} f_n^2 = f_{n+1} f_n$.

**Solución:**

a) Demostraremos por inducción. Para $n = 1$

$$f_1 = 1 = 2 - 1 = f_3 - 1$$

Inductivamente, si esta fórmula se satisface para algún $n \geq 1$, es decir $\sum_{i=1}^{n} f_n = f_{n+2} - 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n+1} f_i = \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right) + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$$

b) Caso base $n = 1$:

$$f_1 = 1 = 1 \cdot 1 = f_2 f_1$$

Inductivamente, si esta fórmula se satisface para algún $n \geq 1$, es decir $\sum_{i=1}^{n} (f_n)^2 = f_{n+1} f_n$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n+1} (f_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2\right) + f_{n+1}^2 = f_{n+1} f_n + f_{n+1}^2 = f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} f_{n+2}.$$