Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 0

1. Demuestre que si $a < 2$ y $b > 3$ entonces $3a + 2b > ab + 6$.

   Solución. Tenemos que

   - $a < 2 \iff 2 - a > 0 \iff 2 - a \in \mathbb{R}^+$
   - $b > 3 \iff b - 3 > 0 \iff b - 3 \in \mathbb{R}^+$

   Como $\mathbb{R}^+$ es cerrado bajo el producto entonces

   $$(2 - a)(b - 3) > 0 \iff 2b - 6 - ab + 3a > 0 \iff 3a + 2b > ab + 6$$

   como queríamos probar.

   Puntaje Pregunta 1.

   - 1,5 puntos por concluir que $2 - a > 0$.
   - 1,5 puntos por deducir que $b - 3 > 0$.
   - 3 puntos por mostrar que $(2 - a)(b - 3) > 0$ y concluir que $3a + 2b < ab + 6$.

2. Demuestre que si $0 < a < b$ entonces $b^{-1} < a^{-1}$.

Solución. Dado que $b^{-1} < a^{-1} \Longleftrightarrow a^{-1} - b^{-1} \in \mathbb{R}^+$, calculamos $a^{-1} - b^{-1}$. Tenemos

$$a^{-1} - b^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} = (b-a) \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \,.$$

Por hipótesis, $a < b \Longleftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$. Además, por teorema visto en clases, $0 < a \Longrightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+$ y $0 < b \Longrightarrow b^{-1} \in \mathbb{R}^+$, por lo que dado que $\mathbb{R}^+$ es cerrado para el producto, concluimos que

$$a^{-1} - b^{-1} = (b-a) \cdot a^{-1} \cdot b^{-1} \in \mathbb{R}^+ \,.$$

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por obtener que $a^{-1} - b^{-1} = (b-a)a^{-1}b^{-1}$.
- 1 puntos por deducir que $b - a > 0$.
- 1 puntos por deducir que $a^{-1} > 0$.
- 1 puntos por deducir que $b^{-1} > 0$.
- 1 puntos por deducir que $a^{-1} - b^{-1} > 0$.