PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
SEGUNDO SEMESTRE 2018.

INTERROGACIÓN 3
CALCULO II ⋆ MAT1620

La siguiente evaluación consta de 7 preguntas, dispone de 120 minutos para responderla.

CUADERNILLO 1

1. Considere $z = f(x, y)$, donde f es una función dos veces diferenciable. Además considere,
$$x(u, v) = 2uv, \quad y(u, v) = u^2 + uv.$$
Calcule
$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}.$$

2. Calcule el plano tangente en un punto arbitrario (x_0, y_0, z_0) de la superficie,
$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}.$$
Demuestre que la suma de las intersecciones con el eje X, con el eje Y, con el eje Z de cualquier plano tangente a la superficie es una constante.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales continuas. Consideremos los puntos
$$A(1, 3); \quad B(3, 3); \quad C(1, 7); \quad D(6, 15).$$
La derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AB}$ es 3 y la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AC}$ es 26. Determine la derivada direccional de f en A en la dirección del vector $\overrightarrow{AD}$.

4. Determine y clasifique los puntos críticos de la función,
$$f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

CUADERNILLO 2

5. Determine los valores máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2 - 2y + 2xy,$$

sobre el conjunto

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 2\}.$$

6. El plano $x + y + 2z = 2$ al intersectar al paraboloide $z = x^2 + y^2$ determina una elipse. Encuentre los puntos de la elipse que se encuentran mas cercanos y mas lejanos del origen.

7. *a*) Sea $f(x,y)$ una función continua. Escriba la siguiente integral intercambiando el orden de integración.

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dydx.$$

   b) Considere la función

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

   Calcule la integral anterior, utilizando el orden

$$\int\int f(x,y)\, dxdy.$$

Una solución

1. Utilizando la regla de la cadena se tiene que,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = z_x \cdot 2v + z_y \cdot (2u + v).$$

A continuación,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(z_x \cdot 2v + z_y \cdot (2u+v)\right), \\
&= (z_{xx}x_u + z_{xy}y_u)2v + z_x \cdot 0 + (z_{yx}x_u + z_{yy}y_u)(2u+v) + z_y \cdot 2, \\
&= (z_{xx} \cdot 2v + z_{xy} \cdot (2u+v))2v + (z_{yx}2v + z_{yy} \cdot (2u+v))(2u+v) + z_y \cdot 2.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} &= \frac{\partial}{\partial v}\left(z_x \cdot 2v + z_y \cdot (2u+v)\right), \\
&= (z_{xx}x_v + z_{xy}y_v) \cdot 2v + z_x \cdot 2 + (z_{yx}x_v + z_{yy}y_v)(2u+v) + z_y \cdot 1, \\
&= (z_{xx} \cdot 2u + z_{xy} \cdot u) \cdot 2v + z_x \cdot 2 + (z_{yx} \cdot 2u + z_{yy} \cdot u)(2u+v) + z_y \cdot 1.
\end{aligned}$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por el correcto cálculo de la primera derivada parcial z_u.
- Asignar 2 puntos por cada una de las derivadas de segundo orden calculadas de manera correcta.
- Correcta implementación de la regla de la cadena, pero con errores de calculo entrega 1 punto por cada derivada de segundo orden.

2. Como la superficie dada es una superficie de nivel, digamos $F(x,y,z) = \sqrt{c}$, podemos utilizar como vector normal al respectivo plano tangente al vector

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{z}}\right).$$

Sea ahora (x_0, y_0, z_0) un punto que pertenezca a la superficie, luego el plano tangente en dicho punto será:

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0.$$

Las respecitvas intersecciones con los ejes X, Y, Z serán:

$$x = \sqrt{x_0}(\sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} + \sqrt{x_0}) = \sqrt{x_0}\sqrt{c},$$

analogamente

$$y = \sqrt{y_0}\sqrt{c}, \qquad z = \sqrt{z_0}\sqrt{c}.$$

La suma pedida será:

$$\sqrt{x_0}\sqrt{c} + \sqrt{y_0}\sqrt{c} + \sqrt{z_0}\sqrt{c} = c.$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 2 puntos por determinar de manera correcta la ecuación del plano tangente.
- Asignar 2 puntos por calcular de manera correcta las intersecciones con los ejes.
- Asignar 2 puntos por el correcto calculo de la constante pedida.

3. En primer lugar notamos que, las direcciones normalizadas, son

$$v_1 = \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(2,0) = (1,0), \qquad v_2 = \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(0,4) = (0,1).$$

Por otro lado se tiene,

$$D_{v_1}f = (f_x, f_y)\cdot(1,0) = 3, \qquad D_{v_2}f = (f_x, f_y)\cdot(0,1) = 26,$$

de donde

$$f_x = 3, \qquad f_y = 26.$$

Finalmente la dirección pedida es

$$v_3 = \overrightarrow{AD} = \frac{1}{13}(5,12).$$

Con lo cual,

$$D_{v_3}f = (3,26)\cdot\frac{1}{13}(5,12) = \frac{15}{13} + 24.$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 1,5 puntos por el correcto calculo correcto de cada una de las derivadas parciales f_x, f_y.
- Asignar 3 puntos por calcular la derivada direccional pedida.

4. Comencemos calculando los puntos críticos de la función f.

$$f_x(x,y) = 6x^2 + y^2 + 10x = 0, \qquad f_y(x,y) = 2xy + 2y = 0.$$

Resolvemos el sistema anterior para encontrar los siguientes puntos críticos,

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (-\frac{5}{3}, 0), \quad P_3 = (-1,2), \quad P_4 = (-1,-2).$$

A continuación debemos calcular la respectiva matriz Hessiana, para ello en primer lugar:

$$f_{xx} = 2(6x+5), \qquad f_{xy} = f_{yx} = 2y, \qquad f_{yy} = 2(x+1),$$

y evaluamos en los puntos encontrados anteriormente,

a) $Hf(P_1) = 20, \qquad f_{xx}(P_1) > 0$. De aquí P_1 resulta ser un mínimo local.

b) $Hf(P_2) = 40/3, \qquad f_{xx}(P_2) < 0$. De aquí P_2 resulta ser un máximo local.

c) $Hf(P_3) = -16$. De aquí P_3 resulta ser un punto tipo silla.

d) $Hf(P_4) = -16$. De aquí P_4 resulta ser un punto tipo silla.

Asignación de puntaje:

- Asignar 3 puntos por calcular de manera correcta los respectivos puntos criticos, Descontar 0,5 por cada error en los calculos de los puntos.
- Asignar 1 puntos por calcular de manera correcta la matriz Hessiana.
- Asignar 2 puntos por clasificar de manera correcta los puntos criticos.

5. Para determinar los máximos y mínimos, comenzamos revisando en el interior de la región dada, para ello debemos calcular:

$$\nabla f(x,y) = (0,0),$$

o bien,

$$2x - 2 + 2y = 0 \qquad 4y - 2 + 2x = 0.$$

Encontramos que la única solución es el punto $(1,0)$ el cual no pertenece al interior de la región, por lo tanto no clasifica como punto crítico. A continuación revisaremos en la frontera de la región,

a) $x = -1$

$$f(-1,y) = 3 + 2y^2 - 4y,$$

donde tenemos que $f_y = 0$ lo satisface $y = 1$. Por lo tanto tenemos que $(-1,1)$ es un punto crítico en el borde de D.

b) $x = 1$

$$f(1,y) = 2y^2 - 1,$$

donde tenemos que $f_y = 0$ lo satisface $y = 0$. Por lo tanto el punto que encontramos es $(1,0)$, pero como es uno de los vértices no clasifica como punto crítico.

c) $y = 0$

$$f(x,0) = x^2 - 2x,$$

donde tenemos que $f_x = 0$ lo satisface $x = 1$. Por lo tanto $(1,0)$ es nuestro candidato a punto crítico, pero tambien es otro de los vértices de D.

d) $y = 2$

$$f(x,2) = x^2 + 2x + 4,$$

donde tenemos que $f_x = 0$ lo satisface $x = -1$ y obtenemos el punto $(-1,2)$, otro de los vértices.

En conclusión tenemos 5 puntos, incluyendo los 4 vértices de D.

$$(-1,1), \quad (-1,0), \quad (1,0), \quad (-1,2), \quad (1,2).$$

Evaluamos en la función dada obtenemos que,

$$\begin{aligned} f(1,2) &= 7, && \text{corresponde al valor máximo de la función,} \\ f(1,0) &= -1, && \text{corresponde al valor mínimo de la función} \end{aligned}$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 1 punto por la verificacion en el interior de la region dada.
- Asignar 0,5 puntos por el correcto analisis en cada uno de los segmentos que forman la frontera de la region D.
- Asignar 1 puntos por agregar los vertices de D.
- Asignar 2 puntos por concluir de manera correcta.

6. Consideraremos la función $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ para determinar los máximos y mínimos buscados. Las restricciones del problema estaran dadas por las superficies de nivel,

$$g(x,y,z) := x + y + 2x = 2, \qquad h(x,y,z) := x^2 + y^2 - z = 0.$$

Como la intersección es una elipse, la cual es una región cerrada y acotada, y además la función F es continua, podemos afirmar que el máximo y el mínimo existen.
Luego utilizando el Método de los multiplicadores de Lagrange, el máximo y mínimo pedido deben verificar:

$$\begin{aligned} \nabla F(x,y,z) &= \lambda \nabla g(x,y,z) + \mu \nabla h(x,y,z) \\ g(x,y,z) &= 2 \\ h(x,y,z) &= 0, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

o de manera equivalente,

$$\begin{aligned}
2x &= \lambda + 2\mu x, \\
2y &= \lambda + 2\mu y, \\
2z &= 2\lambda - \mu, \\
x + y + 2z &= 2, \\
x^2 + y^2 - z &= 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, se obtienen por solución los puntos

$$P_1 = (-1, -1, 2), \qquad P_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Finalmente evaluamos en la función,

$$F(P_1) = 6, \qquad F(P_2) = \frac{3}{4},$$

para concluir que el punto P_1 es el punto mas lejano del origen a distancia $\sqrt{6}$ y que el punto P_2 es el punto más cercano del origen a distancia $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Asignación de puntaje:

- Asignar 2.5 puntos por plantear de manera correcta la condicion de Lagrange. Si no se justifica la existencia de maximos y minimos, usando la continuidad de la función descontar 1 punto.
- Asignar 2 puntos por resolver de manera correcta el sistema respectivo.
- Asignar 1,5 puntos por concluir correctamente lo pedido.

7. Se tiene que,

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\, dydx = \int_0^1 \int_0^y f(x,y)\, dxdy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\, dxdy.$$

Y al reemplazar con la función dada,

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-y^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Asignación de puntaje:

- Asignar 3 puntos por el correcto cambio de orden de integración.
- Asignar 3 puntos por el correcto calculo de la integral dada con la función pedida.