PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE FACULTAD DE MATEMATICAS DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Primer semestre 2021

Ayudantía 2 - MAT1610

1. Determine, si existe, la ecuación de la(s) asíntota(s) horizontal(es) de la función dada:

(a)
$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 2020}}{3x - 6}$$

Note que,

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 2020}}{3x - 6}$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{2020}{4x^2}\right)}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{4x^2}\sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)}$$

$$= \frac{2|x|\sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)} \qquad (\sqrt{x^2} = |x|)$$

Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2|x| \sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x \sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)} \quad (|x| = x, \text{ si } x > 0)$$

$$= \left(\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x}\right) \left(\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{3 - \frac{6}{x}}\right) \quad \text{(Leyes limite)}$$

$$= 2\frac{\sqrt{1 + 0}}{3 - 0} \quad \text{(Leyes limite)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

y hacia menos infinito, se tiene que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2|x| \sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{2(-x) \sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{x \left(3 - \frac{6}{x}\right)} \quad (|x| = -x, \text{ si } x < 0)$$

$$= \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{-2x}{x}\right) \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{505}{x^2}}}{\left(3 - \frac{6}{x}\right)}\right) \quad \text{(Leyes limite)}$$

$$= -2\frac{\sqrt{1 + 0}}{3 - 0} \quad \text{(Leyes limite)}$$

$$= -\frac{2}{3}$$

Por lo tanto, la función f(x) tiene como asíntotas horizontales a las rectas de ecuación: $y = \frac{2}{3}$ e $y = -\frac{2}{3}$

(b)
$$f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3 - x}{x^2}}{\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

$$= \infty$$

Note que, en el numerador, el $\lim_{x\to\infty}x-\frac{1}{x}=\infty-0=\infty$ y, en el denominador, el $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=1-0+0=1$ Análogamente,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^3 - x}{x^2}}{\frac{x^2 - 6x + 5}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}}$$

$$= -\infty$$

Esto, ya que, en el numerador, el $\lim_{x\to\infty}x-\frac{1}{x}=-\infty-0=-\infty$ y, en el denominador, el $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=1-0+0=1$

Por lo tanto, como ambos límites son no finitos, la función dada no tiene asíntota horizontal.

(c)
$$f(x) = \frac{-2e^x}{e^x - 5}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{-2e^x}{e^x - 5}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x(-2)}{e^x \left(1 - \frac{5}{e^x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{e^x} \lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{1 - 5e^{-x}}$$

$$= 1 \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{-2}{1 - 5e^{-x}}$$

$$= \frac{-2}{1 - 0}$$

$$= -2$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2e^x}{e^x - 5}$$

$$= \frac{(-2) \lim_{x \to -\infty} e^x}{\lim_{x \to -\infty} e^x - \lim_{x \to -\infty} 5}$$

$$= \frac{(-2) \cdot 0}{0 - 5}$$

$$= \frac{0}{-5}$$

$$= 0$$

Por lo tanto, la función f(x) tiene como asíntotas horizontales a las rectas de ecuación: y=-2 e y=0

2. Estudie si cada uno de los límites indicados existe o no. Si existe, determine su valor, en caso contrario, explique por qué

(a)
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + x + 2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x \left(x - \sqrt{x^2 + x + 2}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 + x + 2}\right) \left(x - \sqrt{x^2 + x + 2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x \left(x - \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}\right)}{x^2 - \left(\sqrt{x^2 + x + 2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x \left(x - \left(-x\right)\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)}{-x - 2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}\right)}{x \left(-1 - \frac{2}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{-1 - \frac{2}{x}}$$

$$= (-\infty)(-2)$$

$$= +\infty$$

(b)
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{sen}(x) - \sqrt{2}}{4x - \pi}$$

Considerando el cambio de variable $t=x-\frac{\pi}{4},$ entonces se tiene que $x=t+\frac{\pi}{4},$ $t\longrightarrow 0$ conforme $x\longrightarrow \frac{\pi}{4}$ y

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{sen}(x) - \sqrt{2}}{4x - \pi} = \lim_{t \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}}{4(t + \frac{\pi}{4}) - \pi}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}}{4t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}(t + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}}{4t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}(t) \operatorname{cos}(\frac{\pi}{4}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) \operatorname{cos}(t)) - \sqrt{2}}{4t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2 \left(\operatorname{sen}(t) \cdot \operatorname{cos}(\frac{\pi}{4}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) \operatorname{cos}(t)\right) - \sqrt{2}}{4t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2 \left(\operatorname{sen}(t) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{cos}(t)\right) - \sqrt{2}}{4t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\operatorname{sen}(t) + \operatorname{cos}(t) - 1\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\operatorname{lim} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} + \operatorname{lim} \frac{\operatorname{cos}(t) - 1}{t}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + 0)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Nota: Otro cambio variable que se puede considerar es $t=4x-\pi$ y, por lo tanto, $x=\frac{t+\pi}{4}=\frac{t}{4}+\frac{\pi}{4}$.

(c)
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 + 1} \left(\cos(x) + x^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

Considere el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$, entonces se tiene que $x = \frac{1}{t}$, $t \longrightarrow 0^+$ conforme $x \longrightarrow \infty$ y

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 + 1} \left(\cos(x) + x^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{t} \right)^2 + 1} \left(\cos \left(\frac{1}{t} \right) + \left(\frac{1}{t} \right)^3 \operatorname{sen} (t) \right) \right)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(\left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \left(\cos \left(\frac{1}{t} \right) + \frac{1}{t^3} \operatorname{sen} (t) \right) \right)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(\left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \left(\cos \left(\frac{1}{t} \right) + \frac{1}{t^2} \frac{\operatorname{sen} (t)}{t} \right) \right)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(\left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \cos \left(\frac{1}{t} \right) + \left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \frac{1}{t^2} \frac{\operatorname{sen} (t)}{t} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(\left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \cos \left(\frac{1}{t} \right) + \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{1 + t^2} \right) \frac{\operatorname{sen} (t)}{t} \right)$$

$$= \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{t^2}{1 + t^2} \right) \cos \left(\frac{1}{t} \right) + \lim_{t \to 0^+} \left(\frac{1}{1 + t^2} \right) \frac{\operatorname{sen} (t)}{t}$$

Los límites L_2 y L_3 son ambos iguales a 1.

El límite L_1 la función involucra el producto de una función acotada por una función que tiende a cero cuando x tiende a 0^+ . Entonces, por el teorema de la compresión (sandwich) el límite existe y vale 0, ya que

$$-1 \le \cos\left(\frac{1}{t}\right) \le 1 \implies -\frac{t^2}{1+t^2} \le \cos\left(\frac{1}{t}\right) \frac{t^2}{1+t^2} \le \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \left(\frac{t^2}{1+t^2} > 0\right)$$

$$\implies -\lim_{t \to 0^+} \frac{t^2}{1+t^2} \le \lim_{t \to 0^+} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \frac{t^2}{1+t^2} \le \lim_{t \to 0^+} \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\implies 0 \le \lim_{t \to 0^+} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \frac{t^2}{1+t^2} \le 0$$

entonces, $L_1 = \lim_{t \to 0^+} \cos\left(\frac{1}{t}\right) \frac{t^2}{1+t^2} = 0$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 + 1} \left[\cos(x) + x^3 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x} \right) \right] = L_1 + L_2 \cdot L_3$$

$$= 0 + 1 \cdot 1$$

$$= 1$$

3. Determine si la función
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \le 1 \\ \cos\left(\pi x + 3\arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right) & si \quad 1 < x \le 2 \\ \frac{3 - 3\cos(2 - x)}{x^2 - 2x} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

es continua o discontinua en x=1 y si es continua o discontinua en x=2. En caso de discontinuidad, clasifíquela.

Se tiene que $f(1) = 1^2 = 1$,

$$\lim_{x \to 1^{-}} f(x) = \lim_{x \to 1^{-}} x^{2}$$
$$= 1$$

у

$$\lim_{x \to 1^{+}} f(x) = \lim_{x \to 1^{+}} \cos\left(\pi x + 3 \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\pi \lim_{x \to 1^{+}} x + 3 \arcsin\left(\frac{1}{\lim_{x \to 1^{+}} x}\right)\right) \quad (continuidad)$$

$$= \cos\left(\pi + 3 \arcsin\left(1\right)\right)$$

$$= \cos\left(\pi + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0$$

Entonces, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$ y, por lo tanto, f tiene una discontinuidad de salto en x=1

Por otro lado,

$$f(2) = \cos\left(2\pi + 3\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \cos\left(3\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \cos\left(3\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to 2^{-}} f(x) = \lim_{x \to 2^{-}} \cos \left(\pi x + 3 \arcsin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

$$= \cos \left(\pi \lim_{x \to 2^{-}} x + 3 \arcsin \left(\frac{1}{\lim_{x \to 2^{-}} x} \right) \right) \quad (continuidad)$$

$$= \cos \left(2\pi + 3 \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= \cos \left(3 \arcsin \left(\frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= \cos \left(3 \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$= 0$$

у

$$\lim_{x \to 2^{+}} f(x) = \lim_{x \to 2^{+}} \frac{3 - 3\cos(2 - x)}{x^{2} - 2x}$$

$$= \lim_{x \to 2^{+}} \frac{3(1 - \cos(x - 2))}{(x - 2)x} \qquad (\cos(2 - x) = \cos(x - 2))$$

$$= 3 \lim_{x \to 2^{+}} \frac{(1 - \cos(x - 2))}{(x - 2)x}$$

considerando el cambio de variables t=x-2, se tiene que $x=t+2,\,t\longrightarrow 0^+$ conforme $x\longrightarrow 2^+$ y

$$\lim_{x \to 2^{+}} f(x) = 3 \lim_{t \to 0^{+}} \frac{(1 - \cos(t))}{t (t + 2)}$$

$$= 3 \lim_{t \to 0^{+}} \frac{(1 - \cos(t))}{t} \frac{1}{t + 2}$$

$$= 3 \lim_{t \to 0^{+}} \frac{(1 - \cos(t))}{t} \lim_{t \to 0^{+}} \frac{1}{t + 2}$$

$$= 3 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 0$$

Entonces, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$ y, por lo tanto, $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$. Así,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 0 = f(2)$$

por lo que la función f es continua en x = 2.