PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027

Solución Ayudantía 15 - Extra

1. Sea X una v.a aleatoria con

$$P(X=1)=p, \quad P(X=-1)=1-p$$

con $p \in (0,1)$. Suponga que $Y|X=x \sim N(3x,(\sigma x)^2)$. Encuentre $\mathbb{E}(Y)$, $Var(Y)$ y $\mathbb{E}(XY)$.

Para esto vamos a usar esperanza y varianza iterada. Primero note que la variable aleatoria X se puede escribir como sigue

$$P(X=x)=\begin{cases} p, & \text{si } x=1 \\ 1-p, & \text{si } x=-1 \end{cases}$$

Teniendo esto en consideración ahora calculamos todo lo pedido. Para la esperanza se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y|X)] \\
&= \mathbb{E}[3X] \\
&= 3\mathbb{E}(X) \\
&= 3\left(1 \cdot P(X=1) + (-1) \cdot P(X=-1)\right) \\
&= 3(p - 1 \cdot (1-p)) \\
&= 3(p-1+p) \\
&= 3(2p-1)
\end{aligned}$$

Para la varianza se tiene

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= \mathbb{E}[Var(Y|X)] + Var[\mathbb{E}(Y|X)] \\
&= \mathbb{E}[\sigma^2 X^2] + Var[3X] \\
&= \sigma^2\mathbb{E}(X^2) + 3^2 Var(X) \\
&= \sigma^2\mathbb{E}(X^2) + 9(\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2)(\sigma^2+9) - 9\mathbb{E}(X)^2 \\
&= \Big(1^2 \cdot p + (-1)^2 \cdot (1-p)\Big)(\sigma^2+9) - 9\,(2p-1)^2 \\
&= \sigma^2 + 9 - 9\,(2p-1)^2
\end{aligned}$$

Para lo ultimo se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}(XY|X)] \\
&= \mathbb{E}[X\mathbb{E}(Y|X)] \\
&= \mathbb{E}[X \cdot 3X] \\
&= 3\mathbb{E}(X^2) \\
&= 3 \cdot 1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

2. Retomemos el ejercicio 1 de la I3. Recordando que

$$f_{X,Y}(x,y) = 1, \quad 0 < x < 1, |y| < x$$

(a) Encuentre la conjunta de $(U,V) = (X+Y, X)$
(b) Encuentre la densidad de $U|V = v$
(c) Calcule $\mathbb{E}(U|V = v)$ y $Var(U|V = v)$
(d) Calcule $P(U > 1/2|V = 1)$
(e) Encuentre la distribución de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$ cuando $V_1, ..., V_n \sim f_V(v)$
(f) Calcule la esperanza del rango y termino medio

(a) Calculamos las inversas

$$X = V$$

reemplazamos esto en U

$$\begin{aligned}
U &= V + Y \\
Y &= U - V
\end{aligned}$$

calculamos el Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Encontremos el recorrido.

$$\begin{aligned}
0 < x < 1 \\
0 < v < 1
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
|y| &< x \\
-x < y &< x \\
-x + x < y + x &< x + x \\
0 < y + x &< 2x \\
0 < u &< 2v
\end{aligned}$$

Ahora reemplazamos todo en la conjunta

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(v, u - v)$$

Finalmente, la conjunta de U, V es

$$f_{U,V}(u,v) = 1, \quad 0 < v < 1, 0 < u < 2v$$

(b) Para esto recordamos que

$$f_{U|V=v}(u) = \frac{f_{U,V(u,v)}}{f_V(v)}$$

debemos encontrar la marginal de V. Entonces

$$f_V(v) = \int_0^{2v} 1du = 2v$$

Luego,

$$f_{U|V=v}(u) = \frac{1}{2v}, \quad 0 < u < 2v$$

Mas aun, note que

$$f_{U|V=v}(u) = \frac{1}{2v - 0}$$

Por lo que $U|V = v \sim U(0, 2v)$.

(c) Como se tiene que $U|V = v \sim U(0, 2v)$ se tiene que

$$\mathbb{E}(U|V = v) = v$$
$$Var(U|V = v) = \frac{v^2}{3}$$

Aun así se puede calcular todo a mano.

$$\mathbb{E}(U|V = v) = \int_0^{2v} u\frac{1}{2v}du = v$$

Para la varianza recordemos que

$$Var(U|V = v) = \mathbb{E}(U^2|V = v) - [\mathbb{E}(U|V = v)]^2$$

entonces

$$\mathbb{E}(U^2|V = v) = \int_0^{2v} u^2\frac{1}{2v}du = \frac{4v^2}{3}$$

Teniendo así que

$$Var(U|V = v) = \frac{4v^2}{3} - v = \frac{v^2}{3}$$

(d) Primero podemos encontrar $U|V = 1$. Reemplazando en la condicional se tiene

$$f_{U|V=1}(u) = \frac{1}{2}, \quad 0 < u < 2$$

Entonces

$$P(U > 1/2|V = 1) = \int_{1/2}^{2} \frac{1}{2}du = 3/4$$

(e) Debemos encontrar $f_V(v)$, pero ya la calculamos anteriormente, de modo que se tiene

$$f_V(v) = 2v, \quad 0 < v < 1$$
$$F_V(v) = v^2, \quad 0 < v < 1$$

Entonces

$$f_{X_{(1)}}(v) = n[1 - v^2]^{n-1}2v, \quad 0 < v < 1$$
$$f_{X_{(n)}}(v) = n(v^2)^{n-1}2v, \quad 0 < v < 1$$

(f) Recordemos que

$$R = X_{(n)} - X_{(1)}$$
$$M = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(R) &= \mathbb{E}(X_{(n)} - X_{(1)}) \\ &= \mathbb{E}(X_{(n)}) - \mathbb{E}(X_{(1)})\end{aligned}$$

Calculemos uno por uno.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{(n)}) &= \int_0^1 vn(v^2)^{n-1}2vdv \\ &= 2n\int_0^1 v^{2n}dv \\ &= \frac{2n}{2n+1}\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{(1)}) &= \int_0^1 vn[1-v^2]^{n-1}2vdv \\ &= 2n\int_0^1 v^2(1-v^2)^{n-1}dv \\ \text{Hacemos } x &= u^{1/2} \Rightarrow dx = 1/2u^{-1/2}du \\ &= 2n\int_0^1 (u^{1/2})^2[1-(u^{1/2})^2]^{n-1}1/2u^{-1/2}du \\ &= n\int_0^1 u^{1/2}(1-u)^{n-1}du \\ &= n\int_0^1 u^{(1/2+1)-1}(1-u)^{n-1}du \\ &= nB(3/2,n)\end{aligned}$$

Teniendo así que

$$\mathbb{E}(R) = \frac{2n}{2n+1} - nB(3/2,n)$$

Ahora es análogo para el termino medio.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M) &= \mathbb{E}\left(\frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}(X_{(n)}) + \mathbb{E}(X_{(1)})\Big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{2n+1} + nB(3/2,n)\right)\end{aligned}$$

Nota: Recuerde que

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto con

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/3, & \text{si } x=0, y=0 \\ 1/3, & \text{si } x=1, y=1 \\ 1/3, & \text{si } x=1, y=0 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

Encuentre $p_{X|Y=y}(x)$.
Para esto podemos hacer una tabla Ahora es mas sencillo.

X/Y	0	1	X
0	1/3	0	1/3
1	1/3	1/3	2/3
Y	2/3	1/3	

- Si $Y = 0$ tenemos

$$p_{X|Y=0}(x) = \frac{p_{X,Y}(x,0)}{p_Y(0)}$$

reemplazando con los valores se X se obtiene

$$p_{X|Y=0}(0) = \frac{p_{X,Y}(0,0)}{p_Y(0)} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2$$
$$p_{X|Y=0}(1) = \frac{p_{X,Y}(1,0)}{p_Y(0)} = \frac{1/3}{2/3} = 1/2$$

- Si $Y = 1$ tenemos

$$p_{X|Y=1}(x) = \frac{p_{X,Y}(x,1)}{p_Y(1)}$$

reemplazando con los valores se X se obtiene

$$p_{X|Y=1}(0) = \frac{p_{X,Y}(0,1)}{p_Y(1)} = \frac{0}{1/3} = 0$$
$$p_{X|Y=1}(1) = \frac{p_{X,Y}(1,1)}{p_Y(1)} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

Finalmente se tiene

$$p_{X|Y=0}(x) = \begin{cases} 1/2, & x=0 \\ 1/2, & x=1 \end{cases}$$

$$p_{X|Y=1}(x) = \begin{cases} 0, & x=0 \\ 1, & x=1 \end{cases}$$

4. En el ejercicio 2 encuentre la fmp de

$$W = g(X,Y) = \begin{cases} 0, & \text{si } X < 1/2, Y > 0 \\ 1, & \text{si } X < 1/2, Y < 0 \\ 2, & \text{si } X > 1/2, Y > 0 \\ 3, & \text{si } X > 1/2, Y < 0 \end{cases}$$

Recuerde que el recorrido conjunto es

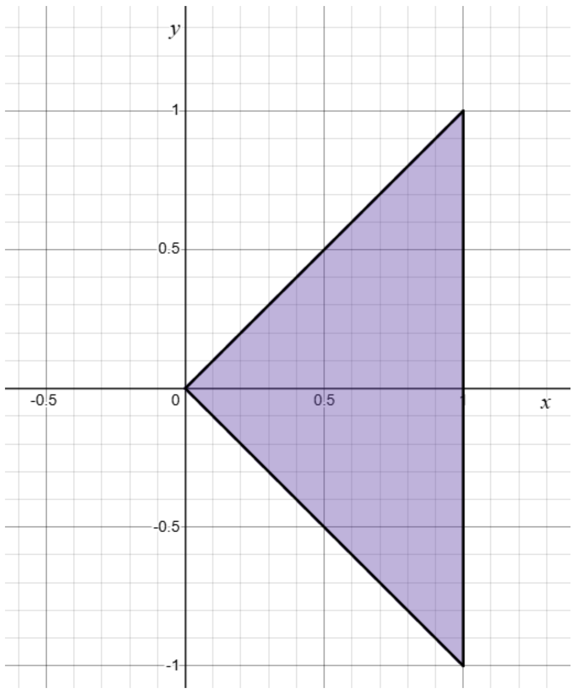

Figure 1: Recorrido conjunto

Entonces para obtener lo pedido es ir viendo la región correspondiente y calcular la probabilidad respectiva.

- $W = 0$
  Esto corresponde a la región $X < 1/2, Y > 0$, es decir, que W toma el valor de 0 con probabilidad $P(X < 1/2, Y > 0)$. La región de interés se visualiza en la figura 2. Calculamos la probabilidad respectiva.

$$P(X < 1/2, Y > 0) = \int_0^{1/2} \int_0^x 1 dy dx = 1/8$$

- $W = 1$
  Esto corresponde a la región $X < 1/2, Y < 0$, es decir, que W toma el valor de 1 con probabilidad $P(X < 1/2, Y < 0)$. La región de interés se visualiza en la figura 3. Calculamos la probabilidad respectiva.

$$P(X < 1/2, Y > 0) = \int_0^{1/2} \int_{-x}^0 1 dy dx = 1/8$$

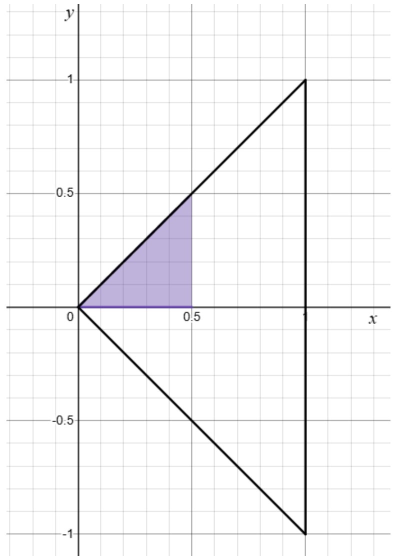

Figure 2: Región $X < 1/2, Y > 0$

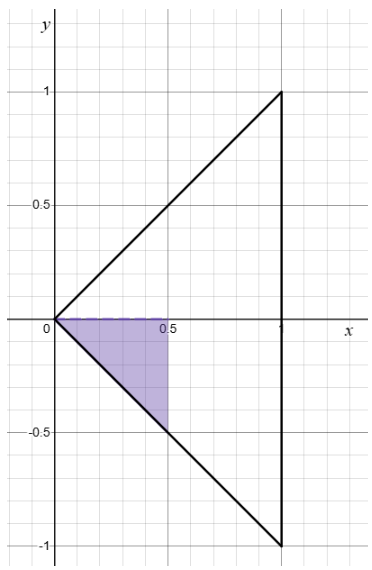

Figure 3: Región $X < 1/2, Y < 0$

- $W = 2$
  Esto corresponde a la región $X > 1/2, Y > 0$, es decir, que W toma el valor de 2 con probabilidad $P(X > 1/2, Y > 0)$. La región de interés se visualiza en la figura 4. Calculamos la probabilidad respectiva.

$$P(X > 1/2, Y > 0) = \int_{1/2}^{1} \int_{0}^{x} 1 dy dx = 3/8$$

- $W = 2$
  Esto corresponde a la región $X > 1/2, Y < 0$, es decir, que W toma el valor de 3 con probabilidad $P(X > 1/2, Y < 0)$. La región de interés se visualiza en la figura 5. Calculamos la

probabilidad respectiva.

$$P(X > 1/2, Y < 0) = \int_{1/2}^{1} \int_{-x}^{0} 1 dy dx = 3/8$$

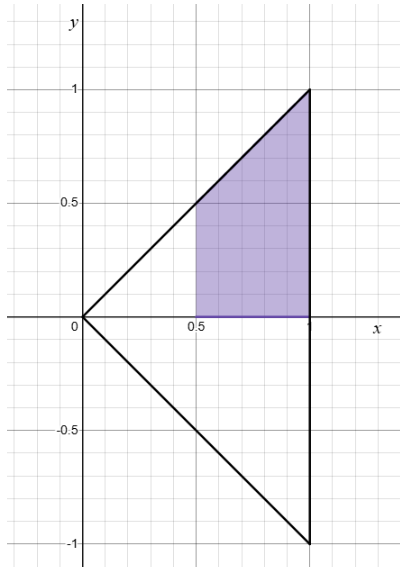

Figure 4: Región $X > 1/2, Y > 0$

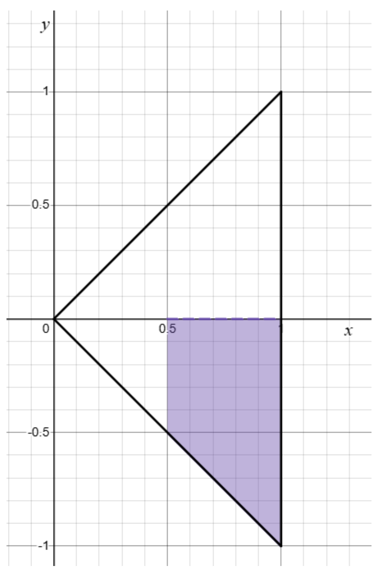

Figure 5: Región $X > 1/2, Y < 0$

Finalmente podemos escribir

$$P(W = w) = \begin{cases} 1/8, & \text{si } w = 0 \\ 1/8, & \text{si } w = 1 \\ 3/8, & \text{si } w = 2 \\ 3/8, & \text{si } w = 3 \end{cases}$$