Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2016

MAT 1620 – Cálculo II
Solución Interrogación 3

1. Sea $R = \ln(u^2 + v^2 + w^2)$, donde $u = x + 2y$, $v = 2x - y$, $w = 2xy$.
   Calcule los valores de $\frac{\partial R}{\partial x}$ y $\frac{\partial R}{\partial y}$ en el punto en que $x = y = 1$.

   Solución. Al aplicar la regla de la cadena, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} \\
&= \frac{2u}{u^2+v^2+w^2} \cdot (1) + \frac{2v}{u^2+v^2+w^2} \cdot (2) + \frac{2w}{u^2+v^2+w^2} \cdot (2y) \\
&= \frac{2u + 4v + 4wy}{u^2+v^2+w^2}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial y} &= \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \\
&= \frac{2u}{u^2+v^2+w^2} \cdot (2) + \frac{2v}{u^2+v^2+w^2} \cdot (-1) + \frac{2w}{u^2+v^2+w^2} \cdot (2x) \\
&= \frac{4u - 2v + 4wx}{u^2+v^2+w^2}\,.
\end{aligned}
$$

   Cuando $x = 1$, $y = 1$, tenemos $u = 3$, $v = 1$ y $w = 2$, de modo que

$$
\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{2\cdot 3 + 4\cdot 1 + 4\cdot 2\cdot 1}{3^2+1^2+2^2} = \frac{9}{7}\,,
$$

$$
\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{4\cdot 3 - 2\cdot 1 + 4\cdot 2\cdot 1}{3^2+1^2+2^2} = \frac{9}{7}\,.
$$

   Puntaje Pregunta 1

   - 2 puntos por calcular correctamente $\partial R/\partial x$.
   - 2 puntos por calcular correctamente $\partial R/\partial y$.
   - 1 punto por calcular correctamente $\partial R/\partial x$ en el punto $x = y = 1$.
   - 1 punto por calcular correctamente $\partial R/\partial y$ en el punto $x = y = 1$.

2. a) Sea $W(s,t) = F(u(s,t), v(s,t))$, donde F, u y v son diferenciables,

$$\begin{array}{llll} u(1,0) = 2 & u_s(1,0) = -2 & u_t(1,0) = 6 & F_u(2,3) = -1 \\ v(1,0) = 3 & v_s(1,0) = 5 & v_t(1,0) = 4 & F_v(2,3) = 10\,. \end{array}$$

Determine $W_s(1,0)$ y $W_t(1,0)$.

b) Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

Solución.

a) Usando la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned} W_s(1,0) &= F_u(u(1,0), v(1,0)) \cdot u_s(1,0) + F_v(u(1,0), v(1,0)) \cdot v_s(1,0) \\ &= F_u(2,3) \cdot u_s(1,0) + F_v(2,3) \cdot v_s(1,0) \\ &= (-1) \cdot (-2) + 10 \cdot 5 = 52 \end{aligned}$$

y de manera similar

$$\begin{aligned} W_t(1,0) &= F_u(u(1,0), v(1,0)) \cdot u_t(1,0) + F_v(u(1,0), v(1,0)) \cdot v_t(1,0) \\ &= F_u(2,3) \cdot u_t(1,0) + F_v(2,3) \cdot v_t(1,0) \\ &= (-1) \cdot (6) + 10 \cdot 4 = 34 \end{aligned}$$

b) Derivando implícitamente la ecuación $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ con respecto a x obtenemos

$$2x + 6z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{3z}$$

y similarmente

$$4y + 6z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z}\,.$$

Puntaje Pregunta 2

- 1,5 puntos por calcular correctamente $W_s(1,0)$.
- 1,5 puntos por calcular correctamente $W_t(1,0)$.
- 1,5 puntos por calcular correctamente $\partial z/\partial x$.
- 1,5 puntos por calcular correctamente $\partial z/\partial y$.

3. Sea $f(x,y) = \dfrac{xy}{e^{x^2+y^2}}$.
Encuentre los máximos y mínimos locales y los puntos de silla de la función $f(x,y)$.

Solución. Las derivadas parciales de primer orden son

$$f_x = \frac{y-2x^2y}{e^{x^2+y^2}} \qquad f_y = \frac{x-2xy^2}{e^{x^2+y^2}}\,.$$

De modo que para determinar los puntos críticos, necesitamos resolver

$$\begin{aligned} y(1-2x^2) &= 0 \qquad (1)\\ x(1-2y^2) &= 0 \qquad (2)\end{aligned}$$

Según la ecuación (1)

$$y=0 \quad \text{o bien} \quad 1-2x^2=0$$

En el primer caso ($y=0$), la ecuación (2) se vuelve $x=0$ y tenemos el punto crítico $(0,0)$.
En el segundo caso, $1-2x^2=0$ obtenemos $x^2=\frac{1}{2} \Longrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, sustituyendo estos valores en (2) obtenemos los puntos críticos:

$$P_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,,\quad P_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,,\quad P_3=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\quad \text{y}\quad P_4=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,.$$

Tenemos que

$$f_{xx}=\frac{2xy(2x^2-3)}{e^{x^2+y^2}}\,,\quad f_{yy}=\frac{2xy(2y^2-3)}{e^{x^2+y^2}}\,,\quad f_{xy}=\frac{1-2x^2-2y^2+4x^2y^2}{e^{x^2+y^2}}\,.$$

entonces

$$D(x,y)=f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y)-[f_{xy}(x,y)]^2=\frac{4x^2y^2(2x^2-3)(2y^2-3)-(1-2x^2-2y^2+4x^2y^2)^2}{e^{2(x^2+y^2)}}$$

- $D(0,0)=-1$ luego $(0,0)$ es un punto silla.
- $D(P_1)>0$ y $f_{xx}(P_1)<0$ entonces P_1 es un máximo local.
- $D(P_2)>0$ y $f_{xx}(P_2)>0$ entonces P_2 es un mínimo local.
- $D(P_3)>0$ y $f_{xx}(P_3)>0$ entonces P_3 es un mínimo local.
- $D(P_4)>0$ y $f_{xx}(P_4)<0$ entonces P_4 es un máximo local.

Puntaje Pregunta 3

- 1 punto por calcular correctamente las derivadas parciales de f de orden 1.
- 1 punto por calcular correctamente las derivadas parciales de f de orden 2.
- 2 puntos por obtener los 5 puntos críticos de f.
- 1 punto por calcular correctamente el determinante del Hessiano D.
- 1 punto por determinar la naturaleza de los puntos críticos mediante el test de las segundas derivadas parciales.

4. Encuentre los puntos de $\mathcal{D} = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 3\,,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ donde $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ alcanza sus valores máximo y mínimo globales, y calcule estos.

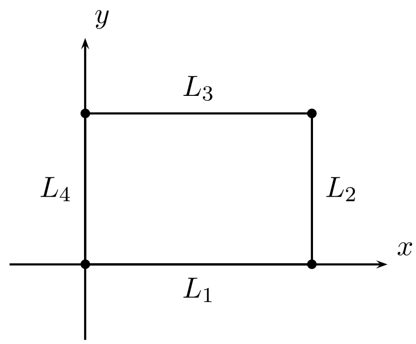
Solución. La función f es continua en $\mathcal{D}$ luego alcanza máximos y mínimos absolutos en $\mathcal{D}$. Primeros localizamos los puntos críticos de f que están al interior de $\mathcal{D}$

$$\left.\begin{array}{rcl} f_x &=& 4x^3 - 4y = 0 \\ f_y &=& 4y^3 - 4x = 0 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x^3 - y &=& 0 \\ y^3 - x &=& 0 \end{array}\right|$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda se obtiene

$$\begin{aligned} x^9 - x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x(x^8 - 1) = 0 \Longleftrightarrow x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0 \Longleftrightarrow x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0 \end{aligned}$$

Luego obtenemos tres punto críticos, pero sólo el punto $(1, 1)$ está al interior de $\mathcal{D}$ cuyo valor es $f(1, 1) = -2$.



- En L_1: $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.
  $f(x, 0) = x^4$ un polinomio que alcanza un mínimo en $(0, 0)$ cuyo valor es $f(0, 0) = 0$ y un valor máximo en $(3, 0)$ cuyo valor es $f(3, 0) = 81$.
- En L_2: $x = 3$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.
  $f(3, y) = y^4 - 12y + 81$, una polinomio en y la cual alcanza un máximo en $(3, 0)$ con $f(3, 0) = 81$ y un mínimo en $(3, \sqrt[3]{3})$ con $f(3, \sqrt[3]{3}) = 81 - 8\sqrt[3]{3}$.
- En L_3: $y = 2$, $0 \leqslant x \leqslant 3$.
  $f(x, 2) = x^4 - 8x + 16$ una función polinomica que alcanza un máximo en $(3, 2)$ con $f(3, 2) = 73$ y un mínimo en $(\sqrt[3]{2}, 2)$ con $f(\sqrt[3]{2}, 2) = 16 - 6\sqrt[3]{2}$.
- En L_4: $x = 0$, $0 \leqslant y \leqslant 2$.
  $f(0, y) = y^4$ un polinomio que alcanza un máximo en $(0, 2)$ con $f(0, 2) = 16$ y un mínimo en $(0, 0)$ con $f(0, 0) = 0$.

Por lo tanto, el máximo absoluto de f en $\mathcal{D}$ es alcanzado en $(3, 0)$ con $f(3, 0) = 81$ y el mínimo absoluto es alcanzado en $(1, 1)$ con $f(1, 1) = -2$.

Puntaje Pregunta 4

- 1 punto por calcular correctamente los puntos críticos de f al interior de $\mathcal{D}$.
- 1 punto por calcular correctamente los extremos en el lado L_1
- 1 punto por calcular correctamente los extremos en el lado L_2
- 1 punto por calcular correctamente los extremos en el lado L_3
- 1 punto por calcular correctamente los extremos en el lado L_4
- 1 punto por concluir correctamente cuales son los extremos de f en la región $\mathcal{D}$.

5. Encontrar el máximo de

$$f(x,y,z) = \ln(xyz^3)$$

sobre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5a^2$, donde a es una constante. ¿Por qué no es el mínimo?

Solución. Para maximizar $f(x,y,z)$ sujeto a la restricción $g(x,y,z) = 5a^2$ donde la función g está dada por $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, usamos multiplicadores de Lagrange

$$\left.\begin{array}{rcl} \nabla f(x,y,z) & = & \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) & = & 5a^2 \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{rcl} \dfrac{yz^3}{xyz^3} & = & \lambda(2x) \\ \dfrac{xz^3}{xyz^3} & = & \lambda(2y) \\ \dfrac{3xyz^2}{xyz^3} & = & \lambda(2z) \\ x^2+y^2+z^2 & = & 5a^2 \end{array}\right|$$

Reduciendo y despejando obtenemos que $x^2 = \dfrac{1}{2\lambda}\,, \quad y^2 = \dfrac{1}{2\lambda}\,, \quad z^2 = \dfrac{3}{2\lambda}\,.$
Sustituyendo en la restricción nos da

$$\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{3}{2\lambda} = 5a^2 \Longleftrightarrow \frac{5}{2\lambda} = 5a^2 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{2a^2}\,.$$

Entonces $x^2 = a^2$, $y^2 = a^2$ y $z^2 = 3a^2$ o equivalentemente $x = \pm|a|$, $y = \pm|a|$ y $z = \pm\sqrt{3}|a|$ y obtenemos los puntos $P_1(|a|, |a|, \sqrt{3}|a|)$ y $P_2(-|a|, -|a|, -\sqrt{3}|a|)$. Descartamos el punto P_2 ya que la función f tiene dominio para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $xyz^3 > 0$. Por lo tanto, f tiene un máximo en P_1 cuyo valor es $f(P_1) = \ln(|a| \cdot |a| \cdot (\sqrt{3}|a|)^3) = \ln(3\sqrt{3}|a|^5)$.
Por otro lado, observe que el punto $P_3 = (\sqrt{3}|a|, |a|, |a|)$ pertenece a la esfera y tiene valor $f(P_3) = (\sqrt{3}|a|^5)$ como $f(P_3) < f(P_1)$ se concluye que el extremo absoluto P_1 no puede ser un mínimo.

Puntaje Pregunta 5

- 4 puntos por plantear el sistema del método de multiplicadores de Lagrange y encontrar los puntos P_1 y P_2
- 1 punto por descartar justificadamente el punto P_2.
- 1 punto por argumentar correctamente por que el punto P_1 no es mínimo.

6. Calcule el volumen del sólido delimitado por los planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$, $z = 0$ y la superficie dada por $z = \dfrac{x}{1+xy}$.

Solución. Tenemos que el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{1+xy} dydx \\ &= \int_0^1 \Big[\ln(1+xy) \Big]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= (1+x)\ln(1+x) - (1+x) \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= (2\ln(2) - 2) - (\ln(1) - 1) = 2\ln(2) - 1 \,. \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 6

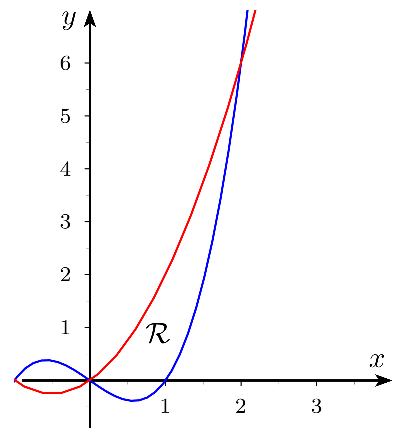
- 3 puntos por plantear correctamente la integral doble que permite calcular el volumen.
- 3 puntos por calcular correctamente las primitivas.

7. Sea $\mathcal{R}$ la región del plano encerrada por las curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ (con $x \geq 0$). Calcule el volumen del sólido definido sobre $\mathcal{R}$ y delimitado por el plano $z = 0$ y por la superficie $z = x + y$.

Solución. Las curvas se intersectan cuando

$$x^3 - x = x^2 + x \iff x^3 - x^2 - 2x = 0 \iff x(x^2 - x - 2) = 0 \iff x(x-2)(x+1) = 0$$

Como $x \geqslant 0$ obtenemos $x = 0$ y $x = 2$, geométricamente la región $\mathcal{R}$ es



que es una región tipo I y se puede describir como

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \,:\, 0 \leqslant x \leqslant 2\,,\; x^3 - x \leqslant y \leqslant x^2 + x\}\,.$$

Entonces, el volumen del sólido es

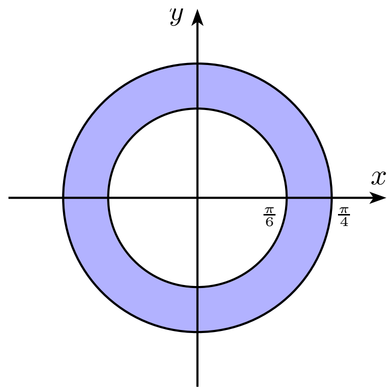
$$\begin{aligned}
V &= \iint_{\mathcal{R}} (x + y)\, dA \\
&= \int_0^2 \int_{x^3 - x}^{x^2 + x} (x + y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^2 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y = x^3 - x}^{y = x^2 + x} dx \\
&= \int_0^2 \left[\left(x(x^2 + x) + \frac{(x^2 + x)^2}{2} \right) - \left(x(x^3 - x) + \frac{(x^3 - x)^2}{2} \right) \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2 + x^2 + \frac{x^4}{2} + x^3 + \frac{x^2}{2} - x^4 + x^2 - \frac{x^6}{2} + x^4 - \frac{x^2}{2} \right] dx \\
&= \int_0^2 \left[-\frac{x^6}{2} + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x^2 \right] dx \\
&= \left[-\frac{x^7}{14} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{2} + \frac{2}{3}x^3 \right]_{x=0}^{x=2} = \frac{776}{105}
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 7

- 2 puntos por obtener la intersección de las curvas y dar el bosquejo de la región $\mathcal{R}$.
- 2 puntos por describir correctamente la región $\mathcal{R}$ como una región tipo I.
- 2 puntos por calcular correctamente las primitivas y obtener el valor del volumen.

8. Calcular $\displaystyle\iint_D \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dA$, siendo la región limitada por $x^2+y^2=\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$, $x^2+y^2=\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$.

Solución. Geométricamente la región D es



y se puede describir en coordenadas polares mediante

$$D=\left\{(r,\theta)\ :\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\ ,\ \frac{\pi}{6}\leqslant r\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}\ .$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dA &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} r}{r}\cdot r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\Big[-\cos r\Big]_{r=\frac{\pi}{6}}^{r=\frac{\pi}{4}}\,d\theta \\
&= 2\pi\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&= \pi(\sqrt{3}-\sqrt{2})\ .
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 8

- 3 puntos por describir correctamente la región en coordenadas polares.
- 3 puntos por usar correctamente el cambio de variables y calcular la integral doble.