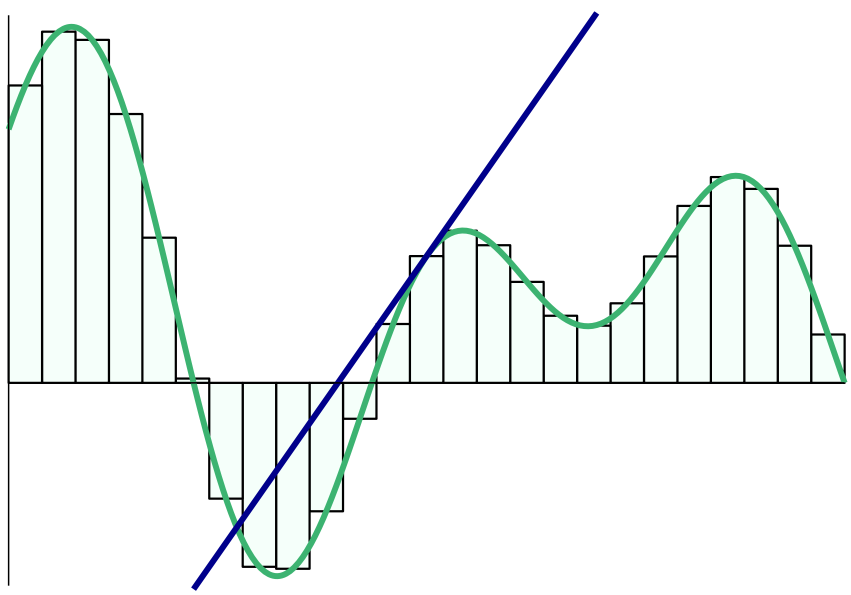
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas – Departamento de Matemática
Primer Semestre 2014

Cálculo I

Resumen de conceptos y problemas resueltos



Sebastián Soto Rojas
Estudiante de Ingeniería Civil Electricista
(spsoto@uc.cl)

Segunda versión.

© 2013 – 2014 Sebastián Soto R.

Índice

Introducción

El modelamiento matemático es una de las herramientas básicas en las Ciencias de la Ingeniería, por lo que todo estudiante de la carrera debe tener un dominio mínimo de conocimientos de Álgebra y Cálculo.

En muchos ámbitos de la Ingeniería, al ser un modelo matemático una simplificación y/o idealización de la realidad podemos tratar las partes del modelo como si fueran ideales. Una esfera imperfecta en la realidad (debido a, por ejemplo, las distancias interatómicas) se vuelve una esfera ideal en el modelo, y es a partir de la idealización que se pueden encontrar regularidades y/o situaciones de convergencia que presentan un estrecho margen de error con la realidad. Es ahí donde herramientas como el cálculo muestran todo su esplendor para el análisis de estas situaciones.

El presente texto nace como un compilado mejorado de los problemas recopilados en las ayudantías que realicé durante el Primer Semestre de 2013, y tras su preparación se agregó material adicional semestre a semestre. De esta forma, el libro contiene resúmenes conceptuales (breves) para cada tópico del curso Cálculo I (MAT1610) de Ingeniería, 159 problemas de desarrollo y 86 problemas de alternativas desarrollados detalladamente en aproximadamente 300 páginas.

Este libro fue elaborado como solamente un complemento de estudio para los alumnos del curso y en ningún caso como un reemplazo al material entregado por el equipo docente del curso. Cada problema fue elegido con un propósito pedagógico particular (desarrollar una habilidad y/o concepto) y desarrollado de tal forma que el lector tenga que atar la menor cantidad de cabos posibles. En otras palabras, la solución de cada problema tiene como intención ser lo más explícita posible.

Sin desmedro de lo anterior, en este texto −a pesar de que se recuerdan conceptos− se asumen como asimilados y aprendidos los conceptos y herramientas básicas de un curso de Precálculo, por lo cual en caso de surgir dificultades de este tipo, se recomienda revisar la bibliografía adecuada al tópico respectivo.

Esta no es una obra terminada y será revisada y actualizada de forma continua. Es por esta razón que toda sugerencia, comentario y/o error detectado (en especial de tipografía) son absolutamente bien recibidos y agradecidos. Para estos fines se puede contactar a mi correo personal, spsoto@uc.cl.

Quisiera agradecer a todas las personas que apoyaron el desarrollo de este texto, a todos aquellos que aportaron feedback durante la elaboración de las ayudantías en el transcurso del primer semestre de 2013 y concretamente al profesor Iván Huerta G. por todos sus consejos pedagógicos en el arte de enseñar.

Espero que esta sea un trabajo de gran utilidad para las próximas generaciones que rinden el curso, de modo que adquieran de la mejor forma posible las herramientas básicas necesarias en la carrera. Esta obra no tiene fines de lucro, solamente el fin de compartir el conocimiento y apoyar en el aprendizaje a todos quienes lleguen a necesitarlo. Mucho éxito en el estudio y trabajo personal del curso.

Cordialmente,

Sebastián Soto R.
Marzo de 2014

Notas de la segunda versión: En esta segunda versión fueron corregidos numerosos errores numéricos y de tipografía. Se corrigió y mejoró sustancialmente el formato del texto para facilitar su lectura y se agregaron problemas adicionales. A modo de ejemplo, se notó que en la práctica los operadores diferenciales se leen mejor escribiendo la letra "d" de forma no cursiva. Es decir, se cambió:

$$\frac{df}{dx} \to \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \quad \text{y} \quad \int f(x) dx \to \int f(x)\, \mathrm{d}x$$

Adicionalmente, se agregaron 14 nuevos problemas de alternativas y aproximadamente 20 problemas de desarrollo repartidos en los numerosos tópicos de este texto, de modo de abarcar nuevas tipologías de problemas.

Se agradecen a todos quienes hicieron las observaciones y comentarios pertinentes. Esta obra se encuentra en constante trabajo, por lo cual como siempre son bien recibidos todos los comentarios, sugerencias y observaciones en mi correo personal.

1. Límites y continuidad

1.1. Concepto de límite

Una nota conceptual: Imaginemos que tenemos un bloque metálico y lo cortamos en la mitad. Evidentemente el volumen de cada uno de los trozos se redujo a la mitad. Ahora cortemos por la mitad cada uno de estos dos trozos. Nuevamente el volumen de cada trozo se redujo a la mitad de lo anterior.

Es evidente que si seguimos haciendo esto reiteradas veces, el volumen de cada trozo se irá haciendo cada vez más cercano a cero. Por simple conservación de la materia sabemos que el volumen nunca podrá ser cero, siempre habrá una cantidad mínima de materia en cada trozo.

Sin embargo, acabamos de descubrir cierta **regularidad** en el volumen de cada trozo al dividirlos. Esta regularidad es precisamente de la que trata el concepto de límite: al realizar reiteradas veces una operación o acercanos a determinado número, ¿cuál es el valor esperado idealmente que se puede obtener del número a pesar de no poder alcanzar ese valor extremo?

En el contexto del bloque metálico, evidentemente no podemos cortarlo infinitas veces en la práctica, pero sabemos que por la regularidad del corte y del volumen, al hacerlo infinitas veces se puede esperar que el volumen sea efectivamente cero. El límite se puede entender intuitivamente como este valor esperado de la función al hacer la aproximación, sin llegar a dicho valor.

Bajo este preámbulo nacen dos conceptos importantes:

Definición: Sea $f(x)$ una función definida en una vecindad de a, entonces decimos que el *límite* de $f(x)$ cuando x tiende a a es ℓ si podemos obtener valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a ℓ al tomar x lo suficientemente cercano a a. Se anota matemáticamente como

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

Definición: Sea $f(x)$ una función $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces se dice que $f(x)$ es una *forma indeterminada* en $x = a$ si $f(a)$ es de la forma $0/0$, ∞/∞, 0^∞, $0/\infty$, etc.

Con estos conceptos intuitivos trabajaremos los siguientes problemas:

Problema 1.1: Para cada una de las siguientes funciones, explique intuitivamente qué ocurre con el valor de la función cuando x se acerca a 1 y 2 sin tomar dichos valores:

(a) $f(x) = x^2$.

(b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

(c) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Solución:

Se dejan los valores respectivos a los cuales debiera llegarse por directa inspección: (se evalúa en el valor de la función)

(a) 1 y 4.

(b) $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

(c) $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{5}$.

Problema 1.2: Mediante una tabla de valores adecuada y evidencia gráfica cuando sea necesaria, conjeture el valor para los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Solución:

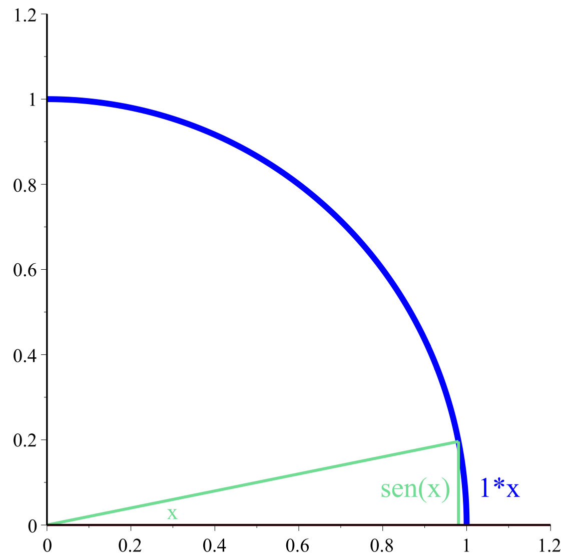
(a) Anotamos una tabla con los valores más relevantes:

x	$f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$
2	16,89949
1,5	10,56754
1,1	6,781557
1,01	6,075313
1,001	6,007503
1,0001	6,00075
1,00001	6,000075
0,99999	5,999925
0,9999	5,99925
0,999	5,992503
0,99	5,925312
0,9	5,280932
0,5	2,987437
0	1

A partir de esta información podemos conjeturar que a pesar de tener una expresión de la forma $f(x) \approx \frac{0}{0}$ en $x = 6$ la expresión se aproxima a 6, con lo cual decimos que:

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1} = 6}$$

(b) Para observar esto, tracemos una circunferencia unitaria como en la siguiente figura:

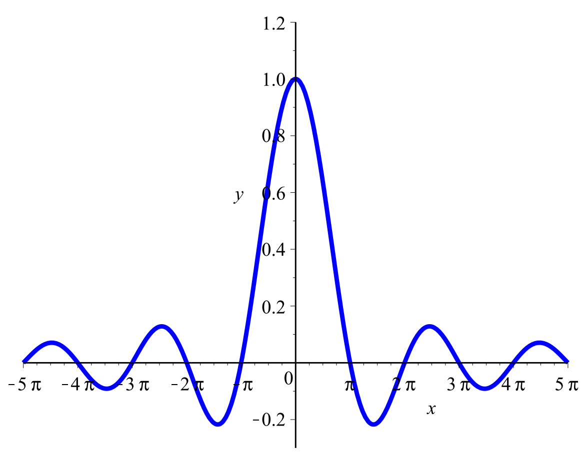


Se puede observar que $\sin(x)$ representa la altura del cateto del triángulo rectángulo inscrito (en color azul marino) y $x =$ (radio) $\times$ (ángulo) $= 1 \times x$ la longitud del arco que barre (en azul). Luego, para x muy pequeño si bien siempre se puede observar que $x \geq \sin(x)$, se tiene que $\sin(x) \approx x$.

Esto es argumento suficiente para conjeturar que si bien la expresión es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ en $x = 0$, se tiene que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1}$$

Esto se puede comprobar con un gráfico computacional de dicha función:



donde se puede observar que al aproximarnos a cero, la curva se comporta como si se aproximara a 1, a pesar de no estar definida en dicho punto.

Problema 1.3: Use el resultado de $2.\,b)$ para demostrar que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Solución:

Observe que en $x=0$ la expresión es de la forma $^0/_0$, razón por la cual se requiere de un análisis más sofisticado para poder calcular el límite. Como se sugiere hacerlo a partir del límite anterior, debemos lograr convertir la expresión anterior a términos de la forma $\frac{\sin(x)}{x}$. Esto lo podemos lograr multiplicando y diviendo por $1+\cos(x)$, pues

$$\begin{aligned}
\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\\
&= \frac{1-\cos^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}\\
&= \frac{\sin^2(x)}{x^2\,(1+\cos(x))}\\
&= \frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}
\end{aligned}$$

Tomando el límite a la expresión cuando $x\to 0$, se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}$$

Como los tres límites existen, el resultado corresponde por propiedad de límites al producto de los tres límites por separado:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)}\right)\\
&= 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\to \boxed{L=\frac{1}{2}}$$

demostrando asi lo pedido. ■

Problema 1.4: [**Propuesto**] Demostrando que para todo $v\in[0,1]$, $0\leq\arcsin(v)\leq\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}$, calcule el valor de

$$\lim_{v\to 0}\frac{\arcsin(v)}{v}$$

1.2. Cálculo de límites y sus propiedades

Propiedades de álgebra de límites: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes y $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones reales tales que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \mathcal{A}$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \mathcal{B}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

(a) Límite de una constante: $\lim\limits_{x \to a} \alpha = \alpha$.

(b) Homogeneidad: $\lim\limits_{x \to a} \alpha f(x) = \alpha \mathcal{A}$.

(c) Superposición: $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

(d) Linealidad: $\lim\limits_{x \to a} [\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathcal{A} + \beta \mathcal{B}$.

(e) Producto: $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right] \cdot \left[\lim\limits_{x \to a} g(x)\right] = \mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$.

(f) Cuociente: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}$ si y solo si $\mathcal{B} \neq 0$.

Problema 1.5:

(a) Suponga que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ no existe. ¿Qué puede decir de $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$?

(b) Sea $f(x)$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^m}$ existe.
¿Qué puede decir de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? ¿Y de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^n}$ con $n \leq m$?

Solución:

(a) Supongamos que $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x)$ existe. Entonces, por álgebra de límites $\lim\limits_{x \to a} f(x) + g(x) - \lim\limits_{x \to a} f(x)$ también existe. En efecto, por las propiedades anteriormente estudiadas se tiene que:

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) - \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$$

Sin embargo, tenemos que el límite de la izquierda existe por propiedades pero el límite de la derecha no por hipótesis. Esto es una contradicción y por lo tanto concluimos que el límite en cuestión **no existe**. Se puede concluir exactamente lo mismo del segundo límite.

(b) Digamos que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^m} = \ell$$

Como el límite existe y $\lim_{x\to 0} x^m = 0$, entonces por álgebra de límites:

$$\lim_{x\to 0} x^m \cdot \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^m} = \boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = \ell \cdot 0 = 0}$$

Análogamente, tenemos que $\lim_{x\to 0} x^{m-n} = 0$ (incluso si $m \leq 0$) con lo cual

$$\lim_{x\to 0} x^{m-n} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^m} = \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = \ell \cdot 0 = 0}$$

En efecto, si la rapidez con que $f(x)$ tiende a cero es la misma con la cual x^m tiende al orígen, entonces como x^n $(n \leq m)$ tiende más

---

Problema 1.6: Haciendo uso de técnicas de álgebra de límites, calcule los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[4]{x^2 - 8} - 1}{\sqrt{x^2 - 8} - 1}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}$.

Solución:

(a) Evaluando en $x = 2$ se obtiene una expresión de la forma $0/0$. Por esta razón, debemos analizar de otra forma el límite. Observe inmediatamente que $x = 2$ es raíz de ambos polinomios. Luego, factorizando:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+2} \end{aligned}$$

Por teorema, estos límites son equivalentes, ya que ambas funciones difieren solo en en el punto del límite en cuestión. Finalmente,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{2-1}{2+2}$$

$$\to \boxed{\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}}$$

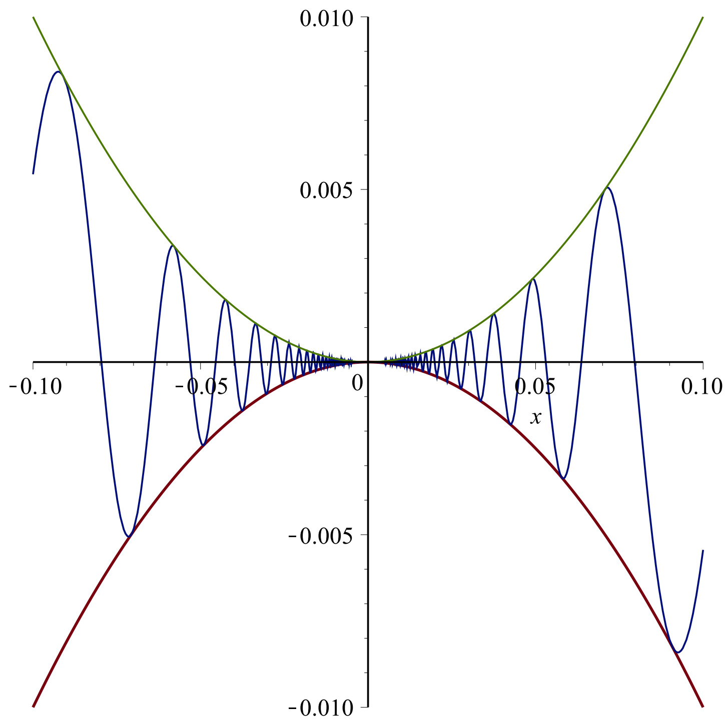
(b) Observe que para todo $x \neq 0$ se cumple que

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

pues seno es una función acotada independiente del argumento que se le introduzca. Multiplicando por $x^2 \geq 0$, una cantidad positiva, se conserva el sentido de la igualdad. Es decir, para todo $x \neq 0$ se cumple que

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

lo cual se puede ver gráficamente como en la figura:



Gráficamente, la función del límite a calcular (en azul) está contenida entre x^2 y $-x^2$ (curvas contenidas en verde y rojo respectivamente)[1]. Como estas últimas ambas tienden a cero cuando x tiende a cero, la función se ve forzada a tomar también el valor cero.

Este interesante resultado se puede generalizar a cualquier función y se conoce como *Teorema del Sandwich*. Luego, como

$$\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

concluimos que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$$

(c) Procedemos por analogía a (a). Sin embargo, ahora tenemos la dificultad de factorizar esta expresión y lograr generalizar esto a n cualquiera. Observe que a partir de una conocida propiedad algebraica (y a su vez de división de polinomios para lograr deducirla), tenemos que:

$$x - a = \left(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}\right) \underbrace{\left[\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1} + \left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-2}\sqrt[n]{a} + \cdots + \sqrt[n]{x}\left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-2} + \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n-1}\right]}_{n \text{ términos}}$$

[1]Formalmente, se puede decir que x^2 y $-x^2$ son *envolventes* de $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$x-a=(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$$

Luego, despejando los términos de interés, podemos reescribir el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} &= \lim_{x\to a}\frac{(x-a)\,(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)\left[(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\,\sqrt[n]{a}+\cdots+\sqrt[n]{x}\,(\sqrt[n]{a})^{n-2}+(\sqrt[n]{a})^{n-1}\right]}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\left[(\sqrt[n]{x})^{n-1}+(\sqrt[n]{x})^{n-2}\,\sqrt[n]{a}+\cdots+\sqrt[n]{x}\,(\sqrt[n]{a})^{n-2}+(\sqrt[n]{a})^{n-1}\right]}
\end{aligned}$$

Gracias a esta factorización, nos encontramos ante la división de dos expresiones continuas, las cuales nunca se indeterminan ya que son una suma de términos positivos. Por propiedad de límites, sin mayor dificultad:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\frac{2\sqrt{a}}{n\,\sqrt[n]{a}^{\,n-1}}}$$

(d) En analogía al ejercicio anterior, observe que:

$$\begin{aligned}
x^2-8-1 &= \left(\sqrt[4]{x^2-8}-1\right)\left(\sqrt[4]{x^2-8}^{\,3}+\sqrt[4]{x^2-8}^{\,2}+\sqrt[4]{x^2-8}+1\right)\\
x^2-8-1 &= \left(\sqrt{x^2-8}-1\right)\left(\sqrt{x^2-8}+1\right)
\end{aligned}$$

Luego, el límite puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-9}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-8}+1\right)}{\left(\sqrt[4]{x^2-8}^{\,3}+\sqrt[4]{x^2-8}^{\,2}+\sqrt[4]{x^2-8}+1\right)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2-8}+1\right)}{\left(\sqrt[4]{x^2-8}^{\,3}+\sqrt[4]{x^2-8}^{\,2}+\sqrt[4]{x^2-8}+1\right)}
\end{aligned}$$

$$\to \boxed{L=\frac{1}{2}}$$

(e) El límite evaluado en cero es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Sin embargo, observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}\cdot\frac{5x}{3x}\cdot\frac{3}{5}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{3}{5}\\
&= \frac{3}{5}\frac{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}}{\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}}
\end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}=1$$

ya que en ambos casos la velocidad con la que tanto el numerador como el denominador se van a cero es la misma. Si el lector tiene la interrogante de por qué se tiene que hacer este trabajo para dejar ambos términos tanto arriba como abajo, use el argumento geométrico visto en el apartado anterior y compare $\sin(3x)$ con x y a la vez con $3x$. Esto le permitirá esclarecer cuál es la comparación que da 1 como límite.

Finalmente,

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} = \frac{3}{5}}$$

Una técnica que es habitual en cursos de Cálculo es la **sustitución**. La idea detrás de realizar esta operación es siempre la misma: una expresión complicada de trabajar y/o analizar es reemplazada pertinente y correctamente por otra expresión mucho más sencilla de observar.

No existe regla general para esclarecer los fines para los cuales se utilizan, el momento en que es adecuado utilizarlas y cuál es la sustitución adecuada. Salvo contadas excepciones, esto generalmente se adquiere con la adecuada práctica.

En el contexto de cálculo de límites, la propiedad se enuncia como:

Teorema: Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que:

- $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ con $f(x) \neq \ell$ en una vecindad reducida de a.
- $\lim_{y \to \ell} g(y) = m$.

Entonces:

$$\lim_{x \to a} g[f(x)] = m$$

Más que concentrarnos en los detalles de este teorema, hay que concentrarse en cómo aplicar adecuadamente esta técnica, siempre cuidando que ambas hipótesis se cumplan.

Problema 1.7: Mediante la sustitución adecuada, calcule el valor de los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\tan(\pi x)}{x-2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^4-1}$.

Solución:

(a) En $x = -2$ se tiene que $\tan(\pi x) = -\tan(2\pi) = 0$ y el límite es de la forma $0/0$. Para poder realizar un mejor análisis, es más conveniente dejar el término del denominador sin el -2 que acompaña.

Con este fin en mente, hacemos la sustitución $u = x - 2$, lo cual implica que $x = u + 2$ y a su vez que $\tan(\pi x) = \tan(\pi(u+2)) = \tan(\pi u)$ por la periodicidad de la función tangente.

Cuando $x \to -2$, se tiene que $u \to 0$. Luego, el límite queda reescrito como

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to 0} \frac{\tan(\pi u)}{u} &= \lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi u)}{u} \cdot \frac{1}{\cos(\pi u)} \\
&= \left(\lim_{u\to 0} \pi \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)\left(\lim_{u\to 0} \frac{1}{\cos(\pi u)}\right)
\end{aligned}$$

$$\to \boxed{\lim_{u\to 0} \frac{\tan(\pi u)}{u} = \pi}$$

(b) El límite en $x = 1$ es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Inmediatamente desprendemos que 1 es raíz de tanto el numerador como el denominador. Observe que el límite puede ser reescrito como:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^4-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2+1} \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1}$$

El límite de la izquierda es inmediatamente $\frac{1}{2}$ y para calcular justificadamente el de la derecha podemos hacer la sustitución $u = x^2 - 1$ notando luego que si $x \to 1$ entonces $u \to 0$. Es decir, el límite se convierte en:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

Finalmente, el límite buscado es:

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^4-1} = \frac{1}{2}}$$

Bajo todas las propiedades anteriores, ahora debemos ser capaces de identificar sin necesidad de indicaciones los siguientes límites:

Problema 1.8: Usando las diversas propiedades estudiadas, calcule los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin(4x)}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\tan(\pi x)}{x-2}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[4]{x^2-8}-1}{\sqrt{x^2-8}-1}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[1-\cos(x)]^3}{\tan^2 x} \cot\left(\frac{x^4}{2}\right)$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin(\pi/4 - x)}{1-\cot(x)}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - xe^x}{x-x^2}$.

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}2^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}$.

(h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x^3+x-2}$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos x}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solución:

(a) Este límite evaluado en cero es de la forma $0/0$. Observamos dos expresiones que llaman la atención: la raíz, la cual sugiere ser racionalizada, y $\sin(4x)$, la cual nos induce a buscar una expresión como $4x$. Partimos haciendo lo primero:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin(4x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin(4x)} \cdot \frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+x+1-1}{\sin(4x)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} \\
& \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(4x)} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} \\
& \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(4x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} \\
& \lim_{x\to 0} \left[\frac{4x}{4\sin(4x)}\right] \cdot \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\to \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sin(4x)} = \frac{1}{8}}
$$

(b) En $x=-2$ se tiene que $\tan(\pi x) = -\tan(2\pi) = 0$ y el límite es de la forma $0/0$. Para poder realizar un mejor análisis, es más conveniente dejar el término del denominador sin el -2 que acompaña.

Con este fin en mente, hacemos la sustitución $u = x-2$, lo cual implica que $x = u+2$ y a su vez que $\tan(\pi x) = \tan(\pi(u+2)) = \tan(\pi u)$ por la periodicidad de la función tangente.

Cuando $x \to -2$, se tiene que $u \to 0$. Luego, el límite queda reescrito como

$$
\begin{aligned}
\lim_{u\to 0} \frac{\tan(\pi u)}{u} &= \lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi u)}{u} \cdot \frac{1}{\cos(\pi u)} \\
&= \left(\lim_{u\to 0} \pi \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right)\left(\lim_{u\to 0} \frac{1}{\cos(\pi u)}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\lim_{u\to 0} \frac{\tan(\pi u)}{u} = \pi}
$$

(c) En analogía al ejercicio anterior, observe que:

$$
\begin{aligned}
x^2-8-1 &= \left(\sqrt[4]{x^2-8}-1\right)\left(\sqrt[4]{x^2-8}^3 + \sqrt[4]{x^2-8}^2 + \sqrt[4]{x^2-8}+1\right) \\
x^2-8-1 &= \left(\sqrt{x^2-8}-1\right)\left(\sqrt{x^2-8}+1\right)
\end{aligned}
$$

Luego, el límite puede ser reescrito como:

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-9} \cdot \frac{\left(\sqrt{x^2-8}+1\right)}{\left(\sqrt[4]{x^2-8}^3 + \sqrt[4]{x^2-8}^2 + \sqrt[4]{x^2-8}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt{x^2-8}+1\right)}{\left(\sqrt[4]{x^2-8}^3 + \sqrt[4]{x^2-8}^2 + \sqrt[4]{x^2-8}+1\right)}
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow \boxed{L = \frac{1}{2}}$$

(d) El mejor camino para comenzar es dejar toda la expresión en términos de $\sin(x)$ y $\cos(x)$, ya que conocemos límites para estas expresiones. Entonces:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^3}{\tan^2 x} \cot\left(\frac{x^4}{2}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{[1-\cos(x)]^3}{\sin^2(x)} \cdot \cos^2(x) \cdot \frac{\cos\left(\frac{x^4}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x^4}{2}\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left[\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right]^3 \cdot \frac{x^2}{\sin^2(x)} \cdot \cos^2(x) \cdot \cos\left(\frac{x^4}{2}\right) \cdot 2 \cdot \frac{\frac{x^4}{2}}{\sin\left(\frac{x^4}{2}\right)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)^3}{\tan^2 x} \cot\left(\frac{x^4}{2}\right) = \frac{1}{4}}$$

observe que ambas expresiones son equivalentes y nacen al generar los límites ya conocidos. En particular, se genera el límite de $1-\cos(x)$.

(e) Primero, notamos que el límite es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ya que $\cot(\pi/4) = 1$. Observe que al aparecer expresiones trigonométricas, lo ideal se simplificar y aplicar propiedades al límite conocido

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Sin embargo, se complica el problema por el hecho de que aparece $\sin(\pi/4 - x)$ y el límite tendiendo a $\pi/4$. Como no estamos acostumbrados a trabajar con $x \to \pi/4$, lo ideal es encontrar una sustitución u de modo que $u \to 0$ cuando $x \to \pi/4$. De la forma del problema, es apropiado hacer $u = \pi/4 - x \to x = \pi/4 - u$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin(\pi/4 - x)}{1-\cot(x)} &= \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{1-\cot(\pi/4 - u)} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{1-\dfrac{\cos(\pi/4-u)}{\sin(\pi/4-u)}} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)\sin(\pi/4-u)}{\sin(\pi/4-u)-\cos(\pi/4-u)} \cdot \frac{\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}} \\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} \cdot \lim_{u\to 0} \sin(\pi/4-u) \cdot \lim_{u\to 0} \frac{1}{\dfrac{\sin(\pi/4-u)}{u} - \dfrac{\cos(\pi/4-u)}{u}}
\end{aligned}$$

donde aplicamos la última separación suponiendo que los límites existen por separado. Trabajemos un poco el tercer término. Como nos complica la aparición de senos de la suma y/o diferencia, expandamos estos términos a partir de las propiedades del seno de la suma y la diferencia.

$$\sin(\pi/4-u) - \cos(\pi/4-u) = \sin(\pi/4)\cos(u) - \cos(\pi/4)\sin(u) - \cos(\pi/4)\cos(u) - \sin(\pi/4)\sin(u)$$

Como $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, entonces la expresión anterior se convierte en

$$\sin(\pi/4 - u) - \cos(\pi/4 - u) = -\sqrt{2}\sin(u)$$

Es decir,

$$\lim_{u\to 0} \frac{1}{\dfrac{\sin(\pi/4-u)}{u} - \dfrac{\cos(\pi/4-u)}{u}} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{-\sqrt{2}\dfrac{\sin(u)}{u}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Finalmente, como

$$\begin{aligned} \lim_{u\to 0} \sin(\pi/4 - u) &= \sin(\pi/4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

entonces,

$$\boxed{\lim_{x\to \pi/4} \frac{\sin(\pi/4 - x)}{1 - \cot(x)} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}}$$

(f) El límite es de la forma $0/0$, y en ella aparece un límite exponencial. El límite conocido para el caso exponencial corresponde a

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Entonces, nuestro propósito es lograr dejar la expresión del límite de forma similar a esta expresión. El primer paso más intuitivo que se puede realizar es factorizar:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x - xe^x}{x - x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x(1 - e^x)}{x(1 - x)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{1 - x} \end{aligned}$$

Este límite, para nuestra sorpresa, es de la forma $0/1$. En realidad, no reuslta tan sorpresivo, puesto que la función involucrada es continua en $x = 0$. Por lo tanto, concluimos que

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x - xe^x}{x - x^2} = 0}$$

(g) Partamos por observar que se nos pide estudiar el límite lateral derecho ya que es imposible calcular $\sqrt{x}$ más allá del cero. Por otra parte, tenemos en la función exponencial una función seno, la cual sabemos que oscila entre 1 y -1. Como no disponemos de otras herramientas, y sabemos el comportamiento oscilatorio de la función seno, nuestra mejor opción es hacer uso del Teorema del Sandwich. Para ello, nuestro objetivo es calcular las cotas inferior y superior. En base a todo lo anteriormente dicho, sabemos por donde tenemos que partir:

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1 \quad &\to \quad 2^{-1} \leq 2^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq 2 \\ &\to \quad \sqrt{x}2^{-1} \leq \sqrt{x}2^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq \sqrt{x}2 \end{aligned}$$

Como sabemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}2^{-1} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}2 = 0$$

concluimos finalmente que

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}2^{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0}$$

Nota: si el lector duda de la validez del Teorema del Sandwich para límites laterales, puede imaginar la situación gráficamente tal como hechos en casos anteriores. También queda como opción realizar la demostración para este caso, algo que no es para nada complicado teniendo claras las definiciones de límite, pero que escapa a los propósitos intuitivos que se tienen que tener para el estudio del límite.

(h) Observe que esta es una expresión de la forma $0/0$, lo cual nos dice inmediatamente que 1 es raíz del denominador. Realizando la división polinomial, obtenemos que

$$x^3 + x - 2 = \left(x^2 + x + 2\right)(x-1)$$

Es decir, el límite queda reescrito como:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{(x^2+x+2)(x-1)}$$

El primer paso a realizar tras esto, es deshacernos de la expresión trigonométrica a partir del (muy) conocido límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Con este propósito en mente, convertimos el límite a senos y cosenos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x^3+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{(x^2+x+2)(x-1)\cos(x-1)}$$

Haciendo la sustitución pertinente, podemos notar fácilmente que

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1$$

ya que es la misma función del límite ya conocido, pero desplazado en una unidad hacia la derecha. Por otra parte, las otras dos expresiones que aparecieron no se indeterminan en $x = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x^3+x-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x^2+x+2)\cos(x-1)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\to \boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x^3+x-2} = \frac{1}{4}}$$

(i) El límite evidentemente corresponde a una forma indeterminada. Se tiene que:

$$\frac{1-\cos x}{4x^2} \to \frac{1}{8}$$

Entonces el límite se comporta de la forma $0 \cdot \cos\left(\dfrac{1}{0}\right)$. Por lo tanto, como el coseno es acotado podemos conjeturar inmediatamente que el límite estudiado es cero. En efecto, tenemos que:

$$-\left(\frac{1-\cos x}{4x^2} - \frac{1}{8}\right) \leq \left(\frac{1-\cos x}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left(\frac{1-\cos x}{4x^2} - \frac{1}{8}\right)$$

Como cada uno de los límites de los extremos tiende a cero, concluimos por *teorema del sándwich* que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{4x^2}-\frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0}$$

Problema 1.9: *(I1-2013-1)* Dadas las funciones f y g definidas por $f(x)=x-2$ y $g(x)=x^2+x$, calcule

$$\lim_{x\to 2}\frac{(f\circ g)(x-1)}{(g\circ f)(x)}$$

Solución:

Lo primero que debemos observar es que $(f\circ g)(x-1)=f[g(x-1)]$ y no representa el producto de la composición por $(x-1)$. Análogamente el denominador corresponde a $g[f(x)]$. Calculamos por separado:

$$\begin{aligned} f[g(x)] &= g(x)-2 \\ &= x^2+x-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \to (f\circ g)(x-1) &= (x-1)^2+(x-1)-2 \\ &= x^2-2x+1+x-3 \\ &= x^2-x-2 \\ &= (x-2)(x+1) \end{aligned}$$

Y por otra parte,

$$\begin{aligned} g[f(x)] &= f(x)^2+f(x) \\ &= (x-2)^2+(x-2) \\ &= x^2-4x+4+x-2 \\ &= x^2-3x+2 \\ &= (x-2)(x-1) \end{aligned}$$

De esta forma, el límite buscado es:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2}\frac{(f\circ g)(x-1)}{(g\circ f)(x)} &= \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x-1)} \\ &= \frac{2+1}{2-1} \end{aligned}$$

$$\to \boxed{\lim_{x\to 2}\frac{(f\circ g)(x-1)}{(g\circ f)(x)}=3}$$

1.3. Definición y existencia de límites

1.3.1. Límites por definición

Definición: *(Definición formal de límite)* El límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a c es L si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo número real x en el dominio de la función

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Problema 1.10: Usando definición de límite, demuestre formalmente que:

(a) $\lim\limits_{x \to a} (cx + b) = ac + b$.

(b) $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, $a > 0$. Si $f(x) = cx^2 + dx + e$, ¿cómo calcular $\lim\limits_{x \to a} f(x)$?

(c) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \lfloor x \rfloor = 1$.

Solución:

Como marco teórico previo, recordamos la definición precisa de límite. Se tiene que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si y solo si

$$(\forall \epsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\; 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Es decir, para cualquier ϵ positivo que representa la distancia de $f(x)$ a ℓ −en particular lo suficientemente pequeño−, podemos encontrar un δ también positivo de modo que si x está más cerca de a que δ unidades (sin ser a), entonces la distancia de $f(x)$ al límite ℓ será menor que ϵ.

Por lo tanto, si encontramos δ como función (exclusiva) de ϵ, habremos demostrado efectivamente que el límite conjeturado es efectivamente ese, ya que para ϵ positivo cualquiera habremos encontrado el δ que satisfaga la condición pedida. Es decir, en este tipo de ejercicios nuestro problema se reduce a demostrar que

$$\delta = \delta(\epsilon)$$

y que con este δ efectivamente se cumplirá que

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

(observe **bien** el sentido de la implicancia, ya que no hacerlo genera muchas confusiones). Siguiendo caminos de equivalencia lógica a partir de ϵ podemos llegar al valor de δ, y luego, como la equivalencia es una doble implicancia, habremos demostrado el sentido necesario de la implicancia también.

Cabe prestar especial atención en este ultimo detalle, ya que una vez encontrado el $\delta(\epsilon)$ debemos demostrar que a partir de este podemos llegar a que epsilon satisface la condición de acotar superiormente la distancia entre $f(x)$ y el límite. No tener claro este concepto puede generar muchas confusiones y dudas respecto a los procedimientos utilizados para validar las desigualdades.

Con todo esto señalado, podemos proceder a desarrollar cada uno de los apartados.

(a) Para demostrar que $\lim_{x\to a} cx + b = ac + b$, nuestro objetivo es demostrar entonces que

$$(\forall\epsilon > 0)\,(\exists\delta > 0)\;\; 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |cx + b - ac - b| < \epsilon$$

Observe que:

$$|cx + b - ac - b| < \epsilon \Leftrightarrow c\,|x - a| < \epsilon$$

Luego,

$$\begin{aligned} |cx + b - ac - b| < \epsilon &\Leftrightarrow\; c\,|x - a| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow\; |x - a| < \frac{\epsilon}{c} \end{aligned}$$

Se realiza este paso bajo la lógica de que queremos hacer $|2x - 2a|$ lo más similar posible a $|x - a|$ de modo de poder asociar ϵ y δ. En este caso, notar que si tomamos

$$\delta = \frac{\epsilon}{c}$$

habremos demostrado necesariamente lo pedido, ya que a partir de este mismo δ llegaremos a que $|cx + b - ac - b| < \epsilon$ y como $\epsilon > 0$, entonces δ también lo será.

Hecho esto, queda entonces demostrado. ■

(b) Procediendo por analogía, ahora podemos encontrar $\delta = \delta(\epsilon)$ de modo que

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow \left|x^2 - a^2\right| < \epsilon$$

Una forma inmediata de hacer "aparecer" $x - a$ es factorizando el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} \left|x^2 - a^2\right| < \epsilon &\Leftrightarrow\; |(x - a)(x + a)| < \epsilon \\ &\Leftrightarrow\; |x - a| \cdot |x + a| < \epsilon \end{aligned}$$

La dificultad en este caso es que aparece el término $x + a$, el cual nos impide hacer lo que hicimos en el caso anterior. Sin embargo, si encontramos una constante c tal que

$$|x - a| \cdot |x + a| < |x - a|\, c < \epsilon$$

podemos realizar lo mismo que en el ejercicio anterior y llegar a nuestra demostración (recordar que nos basta encontrar un δ tal que se llegue a la desigualdad $|x^2 - a^2| < \epsilon$). En realidad, no es relevante si $|x - a| \cdot |x + a| < |x - a|\, c$, ya que habiendo demostrado cualquiera de las dos habremos demostrado la desigualdad en cuestión. Recapitulando, ¿cómo determinamos c?

Supongamos que nos encontramos a distancia $\bar{\delta} = 1$ de a, entonces

$$|x - a| < 1 \Rightarrow a - 1 < x < a + 1$$

Luego, para observar el comportamiento de $x + a$ debemos sumar a a todos los lados de la desigualdad.

$$2a - 1 < x + a < 2a + 1$$

Es decir, como $a > 0$, el mayor valor que tomará $x + a$ será $2a + 1$, ya que es una función creciente. Luego, una buena opción es tomar $c = 2a + 1$, ya que acabamos de notar que

$$|x - a|\,|x + a| < |x - a|\,(2a + 1) \quad \text{para } \bar{\delta} = 1$$

Bajo la lógica del ejercicio anterior, estamos tentados a pensar entonces que

$$\delta = \frac{\epsilon}{2a + 1}$$

Sin embargo, cabe recordar que $2a + 1$ se obtuvo suponiendo que $\delta = \bar{\delta} = 1$, pues de esta forma

$$\begin{aligned} |x - a| < \frac{\epsilon}{2a + 1} \quad &\Rightarrow \quad |x - a|\,(2a + 1) < \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \left|x^2 - a^2\right| < |x - a|\,(2a + 1) < \epsilon \end{aligned}$$

El problema es que si $\delta > |x - a| > \bar{\delta} = 1$ la desigualdad **no** se cumple, pues en dicho caso $x + a < 2a - 1$ ó $x + a > 2a + 1$. Sin embargo, podemos arreglar este error tomando

$$\delta = \text{mín}\left\{1, \frac{\epsilon}{2a + 1}\right\}$$

Lo que significa que si el valor de ϵ es muy grande y se obtiene que $\delta = \dfrac{\epsilon}{2a + 1} > 1$ (lo cual, como vimos, produce un error), entonces forzamos a δ a tomar el valor de $\bar{\delta}$, o en otras palabras, forzamos a que x siga estando a lo más a distancia 1 de a (y satisfaciendo de cualquier forma el entorno cerca de x para el cual $f(x)$ está a distancia de ℓ menor que ϵ).

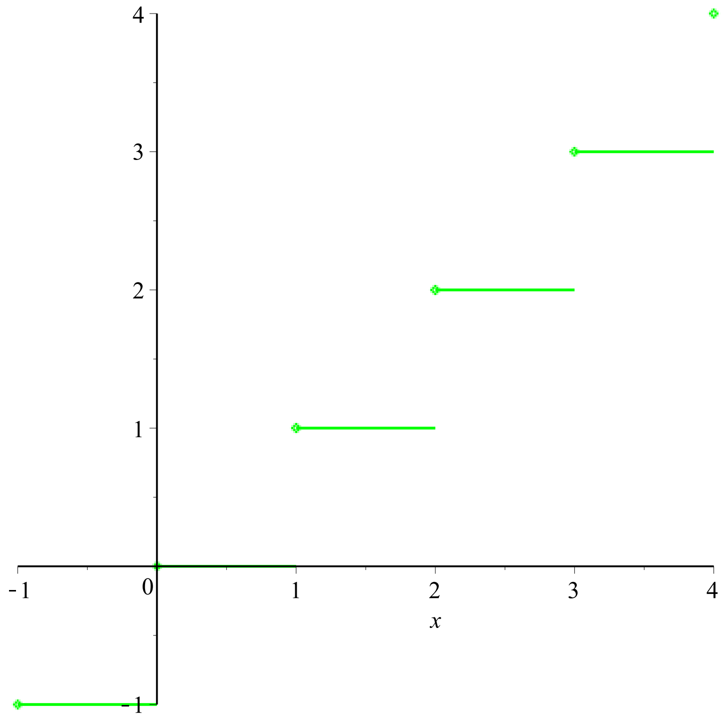
De esta forma, queda entonces demostrado. Para una función polinomial de grado 2 como la presentada, no hay mayor necesidad que aplicar la linealidad del límite para separar los coeficientes y los límites en cada uno de los términos. De esta forma, el objeto de interés es realmente el estudio del límite de la función potencia x^n en cada caso, y no de la suma de ellas o los factores que las acompañan. ■

(c) Nuestro problema se reduce a demostrar que:

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\;\; 0 < \left|x - \frac{3}{2}\right| < \delta \Longrightarrow |\lfloor x \rfloor - 1| < \epsilon$$

El propósito de este ejercicio es darse cuenta que muchas veces se pueden utilizar herramientas gráficas para la resolución de problemas, y no ser siempre dependiente de metodologías sistemáticas y/o analíticas. En este caso, no perderemos rigurosidad pues llegaremos a un resultado formal, pero ayudándonos de la información que el gráfico nos aporta.

Dicho esto, observemos la gráfica de la función en cuestión en la siguiente figura:



Observe que para $\epsilon \in (0,1]$ basta tomar $\delta = \frac{1}{4}$ (o cualquier número positivo menor que $\frac{1}{2}$ para no generar ambigüedades). Para $\epsilon \in (1,2]$, basta tomar $\delta = \frac{1}{4} + 1$ (¡e incluso $\delta = \frac{1}{4}$!). En general, para respetar el marco téorico previo, se puede tomar $\delta = \lfloor \epsilon \rfloor + \frac{1}{4}$. De esta forma, para ϵ cualquiera se verifica que:

$$\begin{aligned}
0 < \left| x - \frac{3}{2} \right| < \lfloor \epsilon \rfloor + \frac{1}{4} \quad &\Rightarrow \quad \frac{5}{4} + \lfloor \epsilon \rfloor < x < \lfloor \epsilon \rfloor + \frac{7}{4} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{4} + (1 + \lfloor \epsilon \rfloor) < x < (\lfloor \epsilon \rfloor + 1) + \frac{3}{4} \\
&\Rightarrow \quad \lfloor x \rfloor = 1 + \lfloor \epsilon \rfloor \\
&\Rightarrow \quad \left| \lfloor x \rfloor - 1 \right| = \lfloor \epsilon \rfloor < \epsilon
\end{aligned}$$

De esta forma, queda demostrado lo pedido. ■

Problema 1.11: Demuestre formalmente que:

(a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$.

(b) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x+5}{1+x} = \frac{7}{3}$.

Solución:

(a) Nuestro objetivo es demostrar que

$$(\forall \epsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\ \ 0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

Tal como en ejercicios anteriores, para ello encontraremos $\delta(\epsilon)$ que cumpla la implicancia en el sentido $\Longrightarrow$ partiendo del lado derecho de la implicancia. Observemos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\epsilon & \rightarrow \left|\frac{2x-x-1}{2x+2}\right|<\epsilon \\ & \rightarrow \left|\frac{x-1}{2x+2}\right|<\epsilon \\ & \rightarrow \frac{|x-1|}{|x+1|}<2\epsilon \end{aligned}$$

Como el término del denominador nos complica, buscamos una constante apropiada C de modo que

$$C\,|x-1|<2\epsilon$$

y

$$\frac{|x-1|}{|x+1|}<C\,|x-1|$$

De esta forma, tendríamos que

$$\delta=\frac{2\epsilon}{C}$$

y el lector podría observar que haciendo esta sustición en el lado izquierdo de la implicancia, llegaríamos inmediatamente al derecho, demostrando lo pedido. Al igual que para el cálculo de un límite cuadrático, supongamos que

$$|x-1|<\bar{\delta}$$

donde $\bar{\delta}$ es un número arbitrario escogido a elección de forma partinente (i.e. el lector escoge el más pertinente). Esto implica que:

$$1-\bar{\delta}<x<\bar{\delta}+1 \quad\rightarrow\quad 2-\bar{\delta}<x+1<\bar{\delta}+2$$

La elección adecuada sería un $\bar{\delta}<2$ tal como hemos podido observar. Entonces,

$$\frac{1}{2-\bar{\delta}}>\frac{1}{|x+1|}>\frac{1}{\bar{\delta}+2}$$

Observamos que el número C a elegir corresponde a

$$C=\frac{1}{2-\bar{\delta}}$$

Para ser coherentes con este resultado, hemos impuesto dos restricciones a $|x-1|$:

$$\begin{aligned} |x-1| &< \bar{\delta} \\ |x-1| &< 2\epsilon\left(2-\bar{\delta}\right) \end{aligned}$$

Debemos elegir el δ adecuado de modo que se cumplan ambas restricciones simultáneamente. ¿Cómo hacerlo? Tomamos la más pequeña de las dos, i.e.

$$\delta(\epsilon)=\text{mín}\left\{\bar{\delta},2\epsilon\left(2-\bar{\delta}\right)\right\}$$

Hecho esto, hemos encontrado un δ para todo $\epsilon > 0$ de modo que

$$0 < |x-1| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

Esta implicancia el lector puede verificarla fácilmente, y de hecho se recomienda para verificar coherencia. Hecho esto, queda entonces demostrado lo pedido. ■

(b) Resolveremos este problema mediante el mismo procedimiento anteriormente descrito, demostrando así su universalidad de empleo. Por demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-2| < \delta \Longrightarrow \left| \frac{x+5}{1+x} - \frac{7}{3} \right| < \epsilon$$

Pues bien, tenemos que:

$$\frac{x+5}{1+x} - \frac{7}{3} = \frac{3x+15-7-7x}{3(x+1)} = \frac{-4x+8}{3(x+1)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x-2}{x+1}$$

De esta forma, tenemos que demostrar que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{x+5}{1+x} - \frac{7}{3} \right| = \frac{2}{3} \left| \frac{x-2}{x+1} \right| < \epsilon$$

Digamos que $|x-2| < \bar{\delta}$ con $\bar{\delta}$ cualquiera (adecuado) siguiendo la idea del problema anterior. De esta forma,

$$2 - \bar{\delta} < x < \bar{\delta} + 2 \to 3 - \bar{\delta} < x + 1 < \bar{\delta} + 3$$

Suponiendo que $3 - \bar{\delta}$ ya que en particular trabajamos con valores de ϵ y δ pequeños se tiene que:

$$\frac{1}{3-\bar{\delta}} > \frac{1}{x+1} > \frac{1}{3+\bar{\delta}} \to \frac{1}{3+\bar{\delta}} < \frac{1}{|x+1|} < \frac{1}{3-\bar{\delta}}$$

Se sigue que

$$\frac{2}{3} \left| \frac{x-2}{x+1} \right| < \frac{2}{3\left(3-\bar{\delta}\right)} |x-2|$$

Podemos encontrar un δ tal que

$$\frac{2}{3\left(3-\bar{\delta}\right)} |x-2| < \epsilon$$

y por transitividad de las desigualdades se cumplirá que $\frac{2}{3} \left| \frac{x-2}{x+1} \right| < \epsilon$. En efecto, analizando lo anterior:

$$|x-2| < \frac{3\left(3-\bar{\delta}\right)}{2} \epsilon$$

con lo cual nos basta tomar $\delta = \frac{3\left(3-\bar{\delta}\right)}{2} \epsilon$ con $\bar{\delta}$ **arbitrario** (nosotros lo elegimos). Digamos por ejemplo que $\bar{\delta} = 2$. De esta forma, podemos tomar $\delta = \frac{3}{2}\epsilon$. Pero recordemos que entonces se tiene que cumplir simultáneamente que:

$$|x-2| < \frac{3}{2}\epsilon$$

$$|x-2| < \bar{\delta} = 2$$

y podria ocurrir que $\frac{3}{2}\epsilon > 2$ con lo cual no necesariamente se cumpliría la suposición hecha en todo el desarrollo. Para que se cumplan ambas restricciones simultáneamente hacemos finalmente:

$$\delta = \delta(\epsilon) = \text{mín}\left\{1, \frac{3}{2}\epsilon\right\}$$

Como para todo $\epsilon > 0$ hemos encontrado un δ positivo que cumpla la implicancia anteriormente expuesta al comienzo de la demostración, queda entonces demostrado que el límite de dicha función en 2 es efectivamente 7/3. ■

Problema 1.12:

(a) Demuestre formalmente que si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ entonces $\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$

(b) ¿Es cierto que si $\lim_{x\to a} |f(x)|$ existe y es L entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe? Si su respuesta es afirmativa demuéstrelo, si su respuesta es negativa entregue un contraejemplo. ¿Existiria algún L para el que esto sí se cumpla?

Solución:

(a) Por demostrar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow ||f(x)| - |\ell|| < \epsilon$$

Como siempre, basta encontrar $\delta = \delta(\epsilon)$ para demostrar que efectivamente para todo ϵ existe un δ que cumple la propiedad.

Recordemos la desigualdad triangular:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Entonces,

$$|a - b| = |a + (-b)| \leq |a| + |-b| \to |a - b| \leq |a| + |b|$$

Entonces $|a - b| - |a| \leq |b|$. Digamos que $u = a - b$ y $v = a$. Entonces $b = a - u = v - u$ con lo cual

$$|u| - |v| \leq |v - u| = |u - v|$$

Análogamente $|a - b| \leq |a| + |b| \to -|b| \leq |a| - |a - b|$. Sea $a = u$ y $a - b = v \to b = a - v = u - v$ con lo cual

$$-|u - v| \leq |u| - |v|$$

Como en cada una de estas demostraciones a y b son números cualesquiera, entonces u y v también lo son. Entonces, para números u y v cualesquiera se cumple que

$$-|u - v| \leq |u| - |v| \leq |u - v|$$

Por lo tanto, $||u|-|v|| \leq |u-v|$. ¿De qué nos sirve todo esto? Sabemos por hipótesis que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Pero

$$|f(x) - \ell| \geq ||f(x)| - |\ell|| \to ||f(x)| - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| < \epsilon$$

por lo tanto basta tomar $\delta = \delta(\epsilon)$ que existe para el límite sin el módulo. Por lo tanto, también para todo ϵ positivo existe un δpositivo tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow ||f(x)| - |\ell|| < \epsilon$$

En particular, es el mismo δ tal que $0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$. Con lo anterior, queda entonces demostrado. ■

(b) Basta tomar un contraejemplo sencillo para ver que el límite no necesariamente existe. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Evidentemente (se puede comprobar incluso de forma gráfica) que

$$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 1$$

Sin embargo, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **no existe** pues al acercanos al cero por la derecha obtenemos un límite distinto que al obtenido al acercanos a cero por la izquierda. Profundizaremos más esta idea en la próxima sección.

Observe que si $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0$ entonces el límite sí existe y es cero, i.e. $\lim_{x \to a} |f(x)| = 0 \to \lim_{x \to a} f(x) = 0$. En efecto, sabemos que para todo número real, en particular $f(x)$, se cumple que:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Como cada uno de los límites de los extremos tiende a cero por hipótesis, entonces concluimos por teorema del sándwich que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Problema 1.13: [**Propuesto**] Usando la definición, demuestre que

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Indicación: Para $\epsilon > 0$, escoja $m = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)$. Recuerde que $\arctan(x)$ es creciente y acotada superiormente. (*¿Por qué número?*)

1.3.2. Existencia de límites

Teorema: Sea $f(x)$ una función definida en una vecindad de x_0, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe y es ℓ si y solo si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

Problema 1.14: Decida justificadamente si el siguiente límite existe:

$$\lim_{x \to 0} \frac{|2x-1| - |2x+1|}{x}$$

Solución:

Evaluando en cero se obtiene una expresión indeterminada de la forma $\frac{0}{0}$. Se suma dentro de las dificultades que el módulo presenta comportamientos diferentes de acuerdo a cómo se esté aproximando al número.

Como cerca de la raíz el módulo puede presentar un comportamiento diferente dependiendo del lado de la recta por el cual se aproxime, es una buena idea hacer estudio de los límites laterales.

Para ello, recordamos un importante teorema que plantea que $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe y es L si y solo si

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = L$$

Bajo esta idea trabajaremos los límites laterales para decidir si el límite existe o no.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - 2x - 2x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-4x}{x} = -4$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1 - 2x - 2x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-4x}{x} = -4$$

Luego, por teorema el límite necesariamente existe y es -4. Cabe notar que el ejercicio permite repasar de forma fácil el concepto de límites laterales, ya que como 0 no correspondía a la raíz de ningún límite, no había grado de compromiso en los límites laterales. Bastaba solo notar cómo se comportaban ambos módulos en un entorno de cero.

Debemos ser capaces de reconocer en una situación genérica cuando el límite puede existir o no. Por esta razón, examinemos los siguientes problemas:

Problema 1.15: Calcule los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(|x|)}$. (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(\cos^2(x))}{1-\sin(x)}$.

Solución:

(a) El límite es una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Si el límite a calcular fuera en realidad

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(x)}$$

podríamos calcularlo sin mayor dificultad a través de las técnicas ya vistas en casos anteriores. Como este no es el caso, nos enfrentamos a un módulo que dificulta los cálculos.

Cabe notar que cuando nos aproximamos por la derecha a cero el módulo se comportará de una forma y cuando nos acercamos por la izquierda este se comportará de otra. Por lo tanto, es una buena idea hacer el estudio de los límites laterales.

Por teorema, sabemos que el límite que se solicita existirá si y solo si

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(|x|)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(|x|)} = L$$

Estudiamos cada uno de estos casos. En primer lugar,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(|x|)} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-x-1}{\sin(x)\left(1+\sqrt{x+1}\right)} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(|x|)} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(-x)} \longleftarrow \text{paridad del seno} \\
&= -\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(x)} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(x)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Finalmente, como los límites laterales no coinciden, concluimos que el límite pedido **no existe**.

(b) El límite es de la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Muchos elementos complican la dificultad de su cálculo. Por una parte, el numerador tiene una función trigonométrica dentro de una trigonométrica. Por otra, en el denominador tenemos la expresión $\sin(x) - 1$ que no podemos asociar con ningún limite trigonométrico ya conocido, ya que todos están asociados por el producto.

Como último candidato nos queda hacer una sustitución. Sin embargo, ¿cómo lo hacemos? Si notamos que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = (1 - \sin(x))(1 + \sin(x))$ podemos darnos cuenta que $u = \cos(x)$ es una buena sustitución, ya que involucra también al término del denominador a la vez que simplifica el numerador.

Cuando $x \to \frac{\pi}{2}$ se cumple que $u \to 0$. Entonces, el límite se reescribe preliminarmente como

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u^2)}{1 - \sin(x)}$$

¿Cómo escribimos $\sin(x)$ en términos de u? Notar que $\sin(x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(x)}$. En este caso, como nos estamos aproximando a $x \to \frac{\pi}{2}$, y en un entorno cercano el seno es mayor a cero, tomamos el signo positivo. Es decir, $\sin(x) = \sqrt{1 - u^2}$. El límite queda reescrito como

$$\begin{aligned}
\lim_{u \to 0} \frac{\sin(u^2)}{1 - \sqrt{1 - u^2}} &= \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u^2)}{1 - \sqrt{1 - u^2}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - u^2}}{1 + \sqrt{1 - u^2}} \\
&= \lim_{u \to 0} \frac{\sin(u^2)}{1 - 1 + u^2} \cdot \lim_{u \to 0} 1 + \sqrt{1 - u^2} \\
&= 1 \cdot 2 \\
&\to \boxed{L = 2}
\end{aligned}$$

Problema 1.16: Encuentre números reales a y b tales que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$$

Solución:

Observe que para cualquier valor de a y b, el límite será de la forma $f(x)/0$. Por esta razón, debemos escoger valores de a y b que anulen esta singularidad en el cálculo del límite y que a su vez en efecto hagan que el límite sea 1. Racionalizando:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{ax + b - 4}{x\left(\sqrt{ax + b} + 2\right)} \\
&= \lim_{x \to 0} \left[\frac{ax}{x\left(\sqrt{ax + b} + 2\right)} + \frac{b - 4}{x\left(\sqrt{ax + b} + 2\right)}\right]
\end{aligned}$$

El término de la derecha presentará una singularidad en cero y hará que el limite se vaya a infinito. La única forma de que, por lo tanto, el límite completo no se vaya a infinito es haciendo "desaparecer" este término. Para eso, hacemos $b - 4 = 0 \to b = 4$.

Luego, por lo tanto, debemos preocuparnos de determinar el valor de a tal que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x\left(\sqrt{ax+b}+2\right)} &= 1\\
\to \lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2} &= 1\\
\to \frac{a}{4} &= 1\\
\to a &= 4
\end{aligned}$$

Por lo tanto, los valores necesarios para que el límite sea 1 son $\boxed{a=b=4}$.

Problema 1.17: Hallar los valores del parámetro $k\in\mathbb{R}$ para los cuales existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{1-\cos(kx)}{x^2} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Solución:

Por teorema, el límite existirá si y solo si los siguientes límites existen y son iguales:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=L\in\mathbb{R}$$

Por lo tanto, tenemos que hacer estudio de los límites laterales para poder determinar si es que el límite existe o no. Observe que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos(kx)}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(kx)}{x^2} \quad \text{pues el límite existe.}\\
&= k^2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(kx)}{k^2x^2}\\
&= \frac{1}{2}k^2
\end{aligned}$$

Por el otro lado,

$$\lim_{x\to 0^{-1}} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}$$

el cual es de la forma $0/0$. Sin embargo, podemos racionalizar arriba y abajo. Observe que:

$$\begin{aligned}
(x+1)-1 &= \left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left[\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right]\\
(x+1)-1 &= \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} &= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x+1-1} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x+1}+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x+1}+1} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

De acuerdo al teorema que establecimos al comienzo, se debe cumplir entonces que

$$\frac{1}{2}k^2 = \frac{2}{3} \to \boxed{k = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

Ambas raices son válidas, pues harán que se cumpla la igualdad.

Problema 1.18: [**Propuesto**] Determine para qué valores de a el siguiente límite existe:

$$\lim_{x\to 0} |x|^a \left(1-e^x\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1.4. Continuidad

1.4.1. Concepto de continuidad

Definición: Sea f una función $\mathcal{D} \to \mathbb{R}$, entonces f se dice *continua* en $x_0 \in \mathcal{D}$ si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

De esto se desprenden tres condiciones para demostrar continuidad:

(a) $x_0 \in \mathcal{D}$. Es decir, que x_0 pertenezca efectivamente al dominio de la función.

(b) Que $\lim_{x\to x_0} f(x)$ exista. No tiene sentido hablar de continuidad sin límites de por medio.

(c) Que se cumpla la igualdad de la definición.

Problema 1.19: Demuestre que si para todo x e y reales se cumple que

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

entonces f es función continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución:

Una función se dice *continua* en x_0 si

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Lo cual, de acuerdo a la definición epsilon-delta (vista en clases) significa que:

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Como sabemos que

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces, si tomamos $\delta = \epsilon$ se cumplirá la siguiente afirmación:

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\ \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

pues debido a la propiedad de la hipótesis se cumplirá que si $|x - y| < \epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ por transitividad para epsilon cualquiera.

La demostración que hemos realizado no es mas que la definición de continuidad. Entonces hemos demostrado que la $\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, de acuerdo a la definición la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Así, queda entonces demostrado. ■

Las funciones *parte entera*, denotadas por $\lfloor x \rfloor$ y evidentemente discontinuas para todo $x \in \mathbb{Z}$ son un ejemplo clásico para estudiar la continuidad y diferenciabilidad de funciones. Siempre vale la pena tener presentes las siguientes propiedades de estas funciones:

- $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$.
- $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$.
- $\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n$ y $\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$.

Veamos un buen ejemplo al respecto:

Problema 1.20: Sea $n \in \mathbb{Z}$ y sea $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor$. Calcule (si existe) $\lim_{x \to n} f(x)$ y estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

Solución:

Recordando que $x - \lfloor x \rfloor$ es la parte decimal de x y $\lfloor x \rfloor$ la parte entera, podemos proceder a analizar la función. Como en este caso las funciones son evidentemente discontinuas en los puntos enteros, debemos analizar el límite por medio de los límites laterales para determinar si existen o no.

Estudiemos primero $\lim\limits_{x \to n^+} f(x)$: en este caso, $x - \lfloor x \rfloor \to 0$ y $\lfloor x \rfloor \to n$ cuando $x \to n^+$. Por lo tanto, como $\sqrt{x}$ es una función continua, aplicando propiedades se tien que

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \sqrt{0} + n = n$$

Ahora, el caso $\lim\limits_{x \to n^-} f(x)$: ahora se tendrá que $x - \lfloor x \rfloor \to 1$ y $\lfloor x \rfloor \to n - 1$ cuando $x \to n^-$. Aplicando las mismas propiedades, se tiene que

$$\lim_{x \to n^-} f(x) = \sqrt{1} + n - 1 = n$$

Esto implica por teorema que

$$\lim_{x \to n} f(x) = \lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^-} f(x) = n$$

Observe que las funciones individuales que analizamos, si bien no tienen límites definidos por separado en números enteros, su composición si genera que los límites existan. Es decir, la existencia de los límites por separado es una condición suficiente pero no necesaria para que su composición genere límites que existan.

Con estas ideas en mente, tenemos que:

- $f(x)$ es continua en $x \neq n$, $n \in \mathbb{Z}$, ya que representa la composición de funciones que en estos casos de x son conocidamente continuas en $\mathbb{R}$: $\sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ (composición de dos funciones continuas) y $\lfloor x \rfloor$.
- $f(x)$ es continua para todo $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$, ya que hemos demostrado que $f(n) = \lim_{x \to n} f(x) = n$.

Concluimos por lo tanto que la función es continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 1.21: Estudie la continuidad de la siguiente función en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{[1 - \cos(x)]\,(x^3 + 4x^2)}{x^4} & \text{si } x < 0 \\[2ex] 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

Nuestro objetivo es determinar todos los puntos de $f(x)$ en los cuales f es continua. Evidentemente nos enfrentamos a un número no contable de puntos, por lo cual es imposible hacerlo punto a punto.

Recordamos las tres condiciones necesarias para que $f(x)$ sea continua en x_0.

- $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$.
- $\lim_{x\to x_0} f(x)$ exista (por lo tanto los límites laterales existen y deben coincidir y $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \infty$).
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (por la definición de continuidad).

La mejor idea es ir encontrando generalidades a partir de todo lo aprendido de continuidad. Como nos enfrentamos a una función a tramos lo mejor es analizar lo que ocurre tramo por tramo y luego estudiar la continuidad en cada una de las separaciones. Por lo tanto, lo que haremos será lo siguiente:

- Estudiar la continuidad en $x < 0$ por separado.
- Estudiar la continuidad en $x > 0$.
- Estudiar la continuidad en $x = 0$.

Partimos estudiando la continuidad en $x < 0$. En este caso, se tendrá que

$$f(x) = \frac{[1-\cos(x)]\,(x^3+4x^2)}{x^4}$$

el cual es el cuociente de dos funciones continuas: el producto de dos funciones indiscutiblemente continuas en el numerador, y un polinomio en el denominador, el cual solo se indetermina en $x = 0$. Como no es el caso, concluimos que la función es continua en todo este tramo.

Ahora procedemos para el caso $x > 0$. Notar que

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}$$

El cual nuevamente es el cuociente de funciones continuas, con la restricción de que:

$$\begin{aligned} 2x+1 &\geq 0 \\ x+1 &\geq 0 \\ \sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1} &\neq 0 \end{aligned}$$

Las primeras desigualdades se cumplen para todo $x > 0$. Resolvemos la igualdad:

$$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x+1} \to x = 0$$

Luego, la raíz del denominador nunca se indetermina y la función es continua en todo el intervalo.

Nos falta solamente estudiar la continuidad de la función en 0. Para ello, aplicamos las condiciones descritas anteriormente. Notamos que $f(0) = 2$ y por lo tanto $0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x+1-x-1} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

y por el otro extremo:

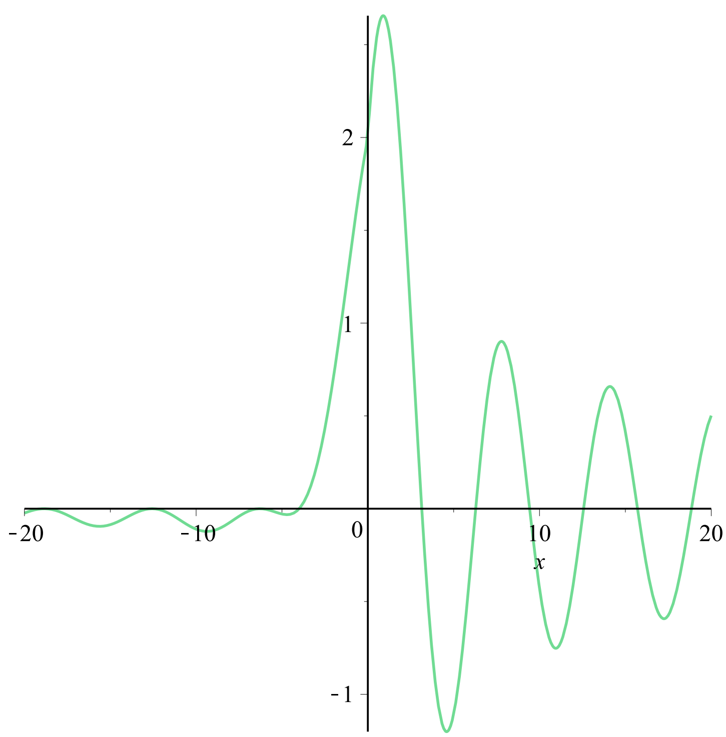
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{[1-\cos(x)]\,(x^3+4x^2)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^3+4x^2}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} (x+4) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Luego, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 = f(0)$$

Razón por la cual $f(x)$ también es continua en $x = 0$. Concluimos por lo tanto que la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Finalizamos con el gráfico computacional de $f(x)$, que evidencia lo anteriormente dicho:



Cuando en una función $f(x)$ se genera una discontinuidad en x_0, esta puede ser de dos tipos:

- Discontinuidad esencial: aquella discontinuidad para la cual no existe una función $g(x)$ continua tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \neq x_0$. Es decir, no se puede "reparar" la discontinuidad asignándole un valor en el punto. Se puede deber a dos causas:
  - Límites laterales no coinciden. Ejemplo: $\dfrac{|x|}{x}$ en $x = 0$.
  - La función diverge en el punto. Ejemplo: $\dfrac{1}{x}$ en $x = 0$.
- Discontinuidad reparable: aquella discontinuidad no esencial. Un ejemplo claro es $\dfrac{\sin(x)}{x}$. Basta definir la función como 1 en $x = 0$ y se repara la disctoninuidad.

Revisemos un problema conceptual al respecto, muy sencillo si es que se tienen claros estos conceptos:

Problema 1.22: Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

Demuestre que no existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$.

Solución:

Partamos por estudiar la función $f(x)$. Note que

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|} = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x > 1 \\ \\ -(x+1) & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

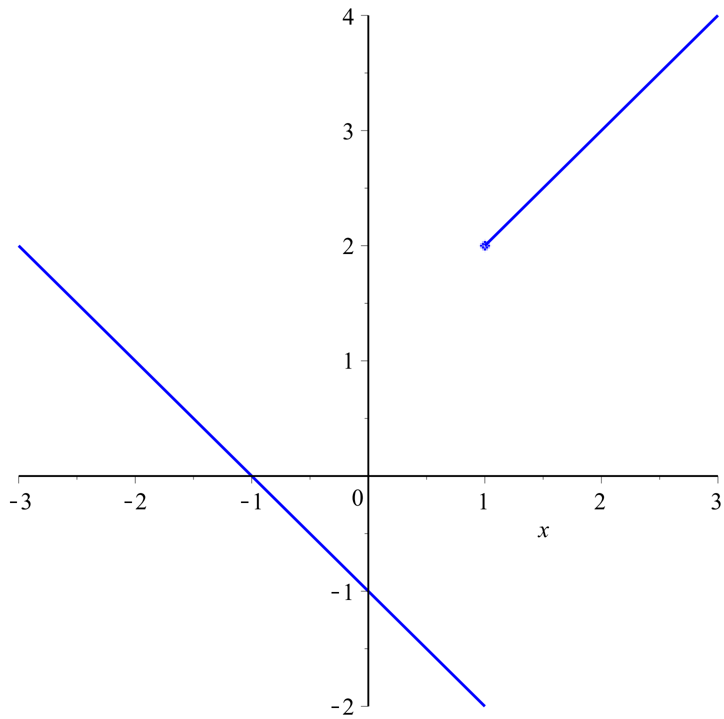
y observe que la pertenencia al dominio y la continuidad de f están aseguradas para todo $x \neq 1$. Por lo tanto, una idea natural (y, de hecho, el único camino posible) sería definir g de modo que sea igual a f en todos los puntos $x \neq 1$. De forma adicional, le damos un valor en $x = 1$ de modo que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = g(1)$$

y de esta forma g sería continua en todo $\mathbb{R}$. Sin embargo, aquí es donde ocurre la falla. Observe que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -2$$

Es decir, en $x = 1$ hay una *discontinuidad escencial* (irreparable) ya que $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe, y por lo tanto no se puede considerar una función $g(x)$ que repare esta discontinuidad en 1. Esto se puede comprobar gráficamente:



Con esto, queda entonces demostrado. ■

Problema 1.23: Sea la función

$$f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)\,(1 - \cos x)}{(\sqrt{x} - 1)\, x \sin x}$$

(a) Estudie la continuidad de f.

(b) Dados los x en los cuales f es discontinua, redefina f en todos aquellos sea posible de modo que f sea continua en dichos puntos.

Solución:

(a) Primero observemos que cada uno de los términos por separado son funciones continuas:

- $\sqrt[3]{x} - 1$ es una resta de funciones continuas para todo $x \in \mathbb{R}$ que se anula en $x = 1$.
- $1 - \cos x$ es una resta de funciones continuas para todo $x \in \mathbb{R}$ que se anula en $\cos x = 1$, i.e.

$$x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{R}$$

- $\sqrt{x} - 1$ es una resta de funciones continuas para todo $x \geq 0$ que se anula en $x = 1$.
- x es una función continua para todo $\mathbb{R}$ que se anula en $x = 0$.

- $\sin x$ es una función continua para todo $\mathbb{R}$ que se anula en los x tales que $\sin x = 0$, i.e.

$$\sin x = 0 \to x = k\pi \quad k \in \mathbb{R}$$

Luego, en todo punto donde el denominador no se anula genera inmediatamente funciones continuas. La función será discontinua en todos aquellos puntos en que el denominador sí se anula. Es decir, la función f es discontinua en $x = 0$, $x = 1$ y $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$ (no todos los enteros, pues la función solo está definida para los reales positivos por efecto de la raíz).

Cabe notar que si bien acabamos de identificar de forma fácil las discontinuidades, lo relevante acá es determinar la naturaleza de estas discontinuidades de acuerdo a las definiciones anteriormente presentadas. Esto será el objetivo de la segunda parte del ejercicio.

(b) Si en los puntos que mencionamos anteriormente la función sí tiene límite, entonces estaremos ante una discontinuidad reparable y podremos redefinir allí la función. En caso contrario, nos encontraremos ante una discontinuidad esencial, no reparable.

Para $x = 0$ debemos calcular:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)(1 - \cos x)}{\left(\sqrt{x} - 1\right) x \sin x}$$

Primero observemos que hay factores que no se anulan. Una buena idea puede ser reordenar aquellos términos que sí se anulan. De esta forma,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)(1 - \cos x)}{\left(\sqrt{x} - 1\right) x \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}
\end{aligned}$$

Este último límite es de la forma $0/0$ y puede calcularse rápidamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la función puede redefinirse como $\dfrac{1}{2}$ en $x = 0$.

Ahora estudiemos qué ocurre en $x = 1$. Para ello tomamos el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)(1 - \cos x)}{\left(\sqrt{x} - 1\right) x \sin x} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \lim_{x\to 1} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} \\
&= \frac{1 - \cos 1}{1 \cdot \sin 1} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}
\end{aligned}$$

Tenemos que el límite faltante es de la forma $0/0$. Utilizamos el truco ya conocido:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + 1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + 1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x}^2 + \sqrt[3]{x} + 1} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Es decir, la función puede definirse como $2/3$ en $x = 1$.

Finalmente, estudiamos qué ocurre para $x = n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$. Observe que si n es impar, entonces la función es de la forma $M/0$, por lo cual diverge inmediatamente. Sin embargo, si n es par entonces el coseno del numerador también se anula.

$$\lim_{\substack{x\to 2m\pi\\ m\in\mathbb{N}}} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(1-\cos x)}{(\sqrt{x}-1)\, x \sin x} = \frac{\sqrt[3]{2m\pi}-1}{\sqrt{2m\pi}-1} \cdot \frac{1}{2m\pi} \lim_{\substack{x\to 2m\pi\\ m\in\mathbb{N}}} \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

Pero,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 2m\pi\\ m\in\mathbb{N}}} \frac{1-\cos x}{\sin x} &= \lim_{\substack{x\to 2m\pi\\ m\in\mathbb{N}}} \frac{1-\cos x}{(x-2m\pi)^2} \cdot \frac{(x-2m\pi)^2}{\sin x} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \lim_{\substack{x\to 2m\pi\\ m\in\mathbb{N}}} (x - 2m\pi) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Entonces para $x = 2m\pi$ la función puede definirse como 0. Finalmente, la función $\bar{f}$ con las discontinuidades reparadas es:

$$\boxed{\bar{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\[2ex] \dfrac{2}{3} & \text{si } x = 1 \\[2ex] 0 & \text{si } x = 2m\pi \quad m \in \mathbb{N} \\[2ex] \dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)(1-\cos x)}{(\sqrt{x}-1)\, x \sin x} & \text{en otro caso.} \end{cases}}$$

Problema 1.24: [**Propuesto**] Demuestre que si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la propiedad

$$(\exists L > 0)\, (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})\ \ |f(x_1) - f(x_2)| \leq L\, |x_1 - x_2|$$

entonces para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x_0)$ es continua. Verifique que $f(x) = x$ y $g(x) = \sin(x)$ satisfacen la identidad, pero no así $f(x) = x^2$. Concluya sobre el carácter de esta propiedad.

Problema 1.25: [**Propuesto**] Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Demuestre que el conjunto $\{f(x) \,|\, x \in [a, b]\}$ es un intervalo.

1.4.2. Condiciones de continuidad

En problemas de continuidad los problemas típicos son aquellos de determinación de condiciones de continuidad, ya sea por caracteristicas de la función o por determinación de parámetros. Revisemos algunos problemas al respecto.

Problema 1.26:

(a) Se define la función

$$F(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq 1 \\ x + b & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ g(x-1) + 2b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Si g es continua en todo $\mathbb{R}$, determine b de modo que F sea continua en todo $\mathbb{R}$.

(b) Se define la función

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)+2} & \text{si } x \leq 3 \\ b + x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Si f es continua en todo $\mathbb{R}$ y $f(3) = 4$. ¿Bajo qué condiciones adicionales F es continua en todo $\mathbb{R}$?

(c) Se define la función

$$F(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \leq 1 \\ g(x) - 2 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

Determine condiciones en g para que F sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución:

La lógica de análisis para este tipo de problemas es siempre la misma:

- Se estudia la continuidad en cada uno de los tramos por separado (funciones individuales) y respetando las restricciones que se tienen para x (todas desigualdades estrictas).
- Se estudia la continuidad en los puntos de cambio de los tramos.

De esta forma, determinamos la continuidad en todo el dominio o esclarecemos las condiciones necesarias para que pueda serlo.

(a) Notamos que las funciones en cada uno de los tramos son continuas: $g(x)$ y $g(x-1)+2b$ indiscutiblemente lo son y $x+b$ es una función polinomial, también trivialmente continua. Luego, nos falta solamente analizar qué es lo que ocurre en los puntos en que ocurren los cambios de tramos.

Si los límites existen y coinciden con el valor de la función, entonces la función F efectivamente será continua en todo $\mathbb{R}$. Partamos estudiando la continuidad en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = \underbrace{\lim_{x \to 1} g(x) = g(1)}_{\text{continuidad}}$$

$$\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1} x + b = b + 1$$

Luego, se tiene que cumplir que

$$b + 1 = g(1)$$

Haciendo el mismo estudio para el otro extremo del intervalo, se tiene que

$$\lim_{x \to 2^-} F(x) = \underbrace{\lim_{x \to 2} x + b = 2 + b}_{\text{continuidad}}$$

$$\lim_{x \to 2^+} F(x) = \lim_{x \to 2} g(x-1) + 2b = g(1) + 2b$$

Entonces,

$$g(1) + 2b = 2 + b \to g(1) + b = 2$$

Es decir, hemos obtenido el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} g(1) + b &= 2 \\ g(1) - b &= 1 \end{aligned}$$

Sumando ambas ecuaciones, se tiene que

$$2g(1) = 3 \to \boxed{g(1) = \frac{3}{2}} \to \boxed{b = \frac{1}{2}}$$

Es decir, $b = \dfrac{1}{2}$ y adicionalmente $g(1) = \dfrac{3}{2}$, pero este último resultado es inherente al problema bajo la suposición de que F es continua.

(b) Bajo la lógica de analizar la continuidad en funciones a tramos se tiene que:

- $\dfrac{1}{f(x)+2}$ debe ser continua para $x > 3$. Como sabemos que $f(x)$ es continua, entonces el cuociente anterior también lo será si y solo si $f(x) \neq -2$ para $x \geq 3$ (ahora la desigualdad es estricta, pues en caso contrario tendríamos de inmediato una discontinuidad en $x = 3$).
- $x + b$ es una función indiscutiblemente continua en $x < 3$, ya que es polinomial.

Nos falta solo analizar la continuidad en $x = 3$. Se debe cumplir que

$$\lim_{x \to 3} F(x) = F(3) = \frac{1}{f(3)+2} = \frac{1}{6}$$

Para estudiar lo que ocurre con el límite, estudiamos los límites laterales. Observe que

$$\lim_{x \to 3^+} F(x) = \lim_{x \to 3^+} b + x = b + 3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} F(x) &= \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{f(x) + 2} \longleftarrow \text{debe ser continua} \\ &= \frac{1}{f(3) + 2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Entonces, debe ocurrir que

$$b + 3 = \frac{1}{6} \to \boxed{b = -\frac{17}{6}}$$

(c) Primero, notemos intuitivamente que en el punto en que se cambia de tramo, $x = 1$, la función $g(x)$ está variando en 2 unidades. Por lo tanto, $F(x)$ no puede ser continua por ningún motivo si g lo es en 1. Lo correcto será condicionar a g de acuerdo a los límites laterales para que puedan coincidir.

Nuevamente, para el análisis de las funciones tramos, se tiene que cumplir que

- El tramo izquierdo independientemente sea continuo $\longrightarrow g(x)$ continua en $(-\infty, 1)$. No podemos tomar el intervalo completo, ya que en este tramo individual no sabemos nada sobre el límite por la derecha en 1.
- El tramo derecho debe ser continuo $\longrightarrow g(x) - 2$ continua en $(1, \infty)$. Por lo tanto, $g(x)$ debe ser necesariamente continua en $(-\infty, 1)$, ya que un desplazamiento en 2 unidades hacia abajo no "corregiría" una eventual discontinuidad en $g(x)$.
- $\lim_{x \to 1} F(x) = F(1)$. Como F debe ser continua, entonces deberá cumplirse que $\lim_{x \to 1} F(x) = g(1)$. A partir de estas condiciones determinamos más condiciones aún para $g(x)$, pues podemos tomar los límites laterales.

Si $\lim_{x \to 1} F(x)$ existe, entonces por teorema los límites laterales también existen y coinciden con el límite. Esto implica que

$$\lim_{x \to 1^-} F(x) = \lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1)$$

Observe

$$\lim_{x \to 1^+} F(x) = \lim_{x \to 1^+} [g(x) - 2] = g(1) \to \lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1) + 2$$

Por lo tanto, concluimos que las condiciones serán:

(a) $1 \in \mathrm{Dom}(g)$.

(b) $g(x)$ continua para $\mathbb{R} - \{1\}$.

(c) $\lim_{x \to 1^-} g(x) = g(1)$.

(d) $\lim_{x \to 1^+} g(x) = g(1) + 2$.

Problema 1.27: Determine todos los valores de a, b y c para los cuales

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(3x)}{1-\cos(5x)} & \text{si } x<0\\ a & \text{si } x=0\\ \dfrac{x^2+bx+c}{x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

es continua en $x=0$. Estudie la continuidad de $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$ con los valores obtenidos.

Solución:

Partiremos por estudiar la continuidad en $x=0$. Para que la función efectivamente lo sea, se deben cumplir las siguientes afirmaciones:

(a) que $\lim_{x\to 0} f(x)$ exista. Esto lo logramos por medio del cálculo de límites laterales, y se tiene que cumplir que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)$$

(b) que $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=a$ (y que por lo tanto $0\in \mathrm{Dom}(f)$.

Analizando la primera condición, debemos calcular los límites laterales. Para ello, observemos que:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{1-\cos(5x)}$$

pues el límite de la derecha existe y coincide con su límite lateral izquierdo. Este lo podemos calcular mediante técnicas ya conocidas:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{1-\cos(5x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{9x^2}\cdot\frac{25x^2}{1-\cos(5x)}\cdot\frac{9}{25}\\ &= \frac{9}{25}\end{aligned}$$

Es decir, $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\frac{9}{25}$. Ahora, calculamos el límite lateral derecho aplicando las mismas propiedades:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+bx+c}{x}$$

Podemos hacer fácilmente la división polinomial entre x^2+bx+c obteniendo que $x^2+bx+c=x(x+b)+c$.

Es decir,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+bx+c}{x}=\lim_{x\to 0} x+b+\frac{c}{x}$$

Para que el límite exista y no sea indeterminado por la singularidad (al tender $x\to 0$), tenemos que hacer necesariamente que $c=0$. Ratificamos esta conclusión observando que al tomar c este valor, la simplificación del límite de la izquierda de la igualdad anterior es evidente. Luego,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=b$$

Es decir, se tiene que cumplir que

$$\frac{9}{25} = b$$

y sumado a $c = 0$ desdeja dos de nuestras incógnitas. Para determinar a tenemos que usar la parte *b)*. Es decir,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= f(0) = a \\ \to \frac{9}{25} &= a \end{aligned}$$

Concluimos por lo tanto que $f(x)$ es continua en $x = 0$ si y solo si $\boxed{a = b = \frac{9}{25}}$ y $\boxed{c = 0}$.

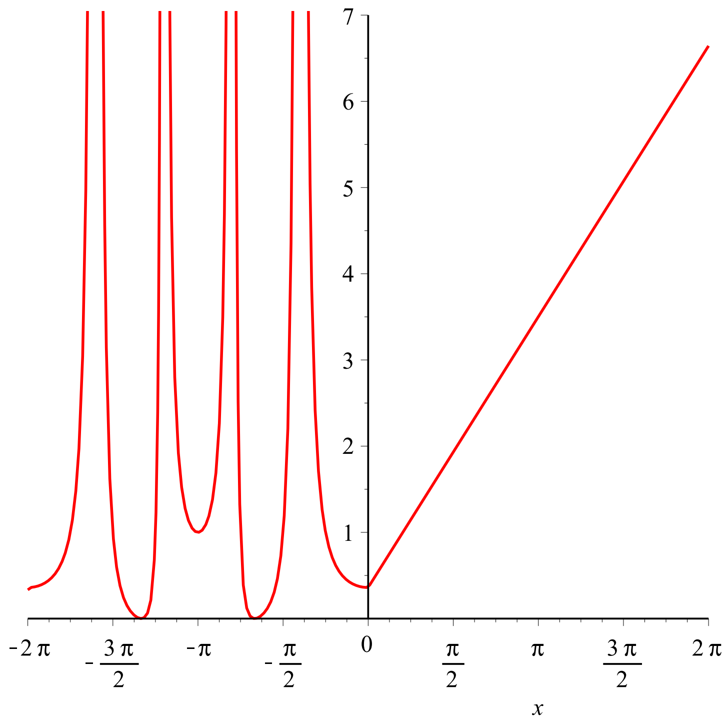
Para estudiar la continuidad en todo $\mathbb{R}$ de la función, realizamos un análisis en cada uno de los tramos:

- Ya sabemos que $f(x)$ es continua en $x = 0$ bajo las condiciones dadas.
- Para $x > 0$, se tiene que $f(x) = \dfrac{x^2 + \frac{9}{25}x}{x}$ la cual es una división de polinomios continuos y distintos de cero en $x > 0$. Por lo tanto, $f(x)$ es continua para todo $x > 0$.
- Para $x < 0$, se tiene que $f(x) = \dfrac{1 - \cos(3x)}{1 - \cos(5x)}$, la cual también es una división de funciones continuas. Sin embargo, existen puntos en los cuales el denominador se indetermina. Estos satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} \cos(5x) = 1 \quad &\leftrightarrow \quad 5x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{2k\pi}{5}}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

  como $x < 0$, restringimos los k posibles a $\mathbb{Z}^-$.

Finalmente, concluimos que para dichos valores de a, b y c, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R} - \left\{\frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}^-\right\}$. Esto se puede verificar en su gráfica computacional:



Problema 1.28: Determine el valor de las constantes a y $b \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente función es continua en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin(x) & \text{si } x < -\frac{\pi}{2} \\ a\sin(x) + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 3\cos^2(x) & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Solución:

Nuevamente, la lógica para desarrollar estos problemas es asumir que $f(x)$ es continua en todo su dominio y desde ahí desprender hipótesis que nos llevan a obligar a los parámetros a tomar ciertos valores. Teniendo esto en consideración, para que $f(x)$ —función a tramos— sea continua en todo su dominio tiene que cumplirse que:

- $f(x)$ sea continua en los tramos por separado. Esto es evidente, ya que las funciones involucradas en los tramos son ponderaciones y composiciones de funciones trigonométricas, sabidamente continuas.

- $f(x)$ sea continua en los puntos donde se cambia el tramo. Es decir, los límites deben existir y

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Esta última observación es en la cual debemos concentrarnos. Estudimos primero el primer límite estudiando, como puede esperarse, sus límites laterales:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} -2\sin(x) = 2$$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} a\sin(x) + b = -a + b$$

Luego, debe cumplirse que

$$-a + b = 2$$

Estudiamos el segundo límite:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} a\sin(x) + b = a + b$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 3\cos^2(x) = 0$$

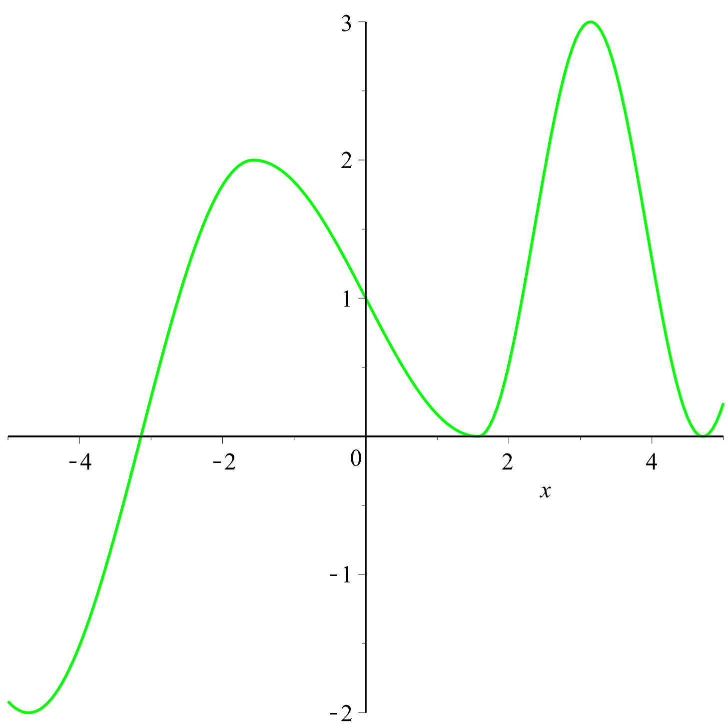
Es decir,

$$a + b = 0$$

Tenemos por lo tanto el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} -a + b &= 2 \\ a + b &= 0 \end{aligned}$$

De donde, sumando las ecuaciones, desprendemos inmediatamente que $\boxed{b = 1}$ y $\boxed{a = -1}$. Estas serán las condiciones necesarias para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio, lo cual podemos comprobar gráficamente:



1.4.3. Teorema del Valor Intermedio

Teorema: *(del Valor Intermedio)* Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$. Entonces para cada u tal que $f(a) < u < f(b)$ existe al menos un c dentro de (a,b) tal que $f(c) = u$.

Problema 1.29:

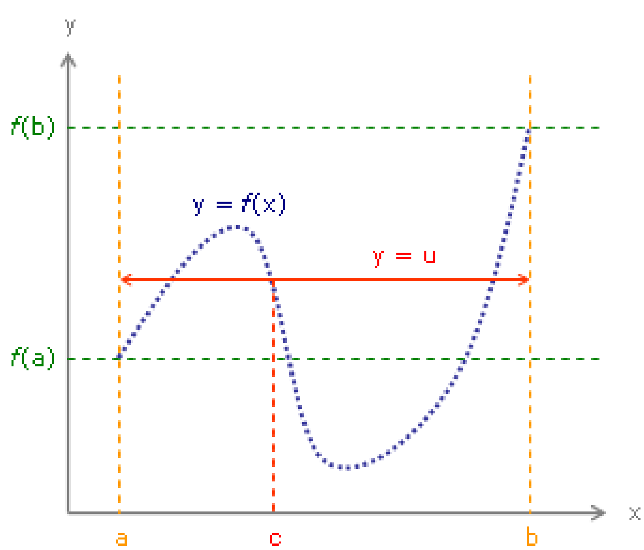
(a) Demuestre que si f es continua en $[a,b]$ tal que $a \leq f(a)$ y $f(b) \leq b$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

(b) Demuestre que el polinomio $p(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ tiene tres raíces reales.
Indicación: **no** intente calcularlas.

Solución:

El *Teorema del Valor Intermedio* es un importante resultado del análisis matemático por el cual se construyen posteriormente todos los teoremas que generan los cimientos del cálculo diferencial e integral. En particular, el Teorema Fundamental del Cálculo.

El teorema plantea que si f es continua en $[a,b]$, entonces para todo ξ tal que $f(a) < \xi < f(b)$ con $f(a) \neq f(b)$ y suponiendo sin pérdida de generalidad que $f(a) < f(b)$ (no habría ningún problema si la desigualdad es al revés), existe un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \xi$. La situación se puede ilustrar como en la figura a continuación:



Fuente: Wikipedia.

Al respecto, cabe realizar tres importantes observaciones:

- Si $f(a)$ y $f(b)$ difieren en signo, entonces inmediatamente supondremos que f tiene raíz entre a y b. Por lo tanto, el T.V.I. es una buena forma de garantizar la existencia de raíces a partir del cambio de signo, lo que al lector puede resultarle la simple formalización de una idea bastante intuitiva.

- Las condiciones plantedas anteriormente son suficientes, pero no necesarias. Puede existir c tal que $f(c) = \xi$ sin ser f continua (¿por qué no podría ser posible?), solo que el teorema no puede garantizarlo.

- Si $f(a) = f(b)$ entonces solo podemos garantizar que la función sí tomará el valor de $f(a)$ ó $f(b)$ en algún punto en (a, b) al menos una vez.

En este apartado utilizaremos este importante resultado para desarrollar dos aplicaciones de este teorema.

(a) La pregunta que todo lector no familiarizado con el T.V.I. suele realizarse es: ¿cómo podemos relacionar toda esta información con el teorema del valor intermedio? Primero, partamos por ordenar todas las hipótesis necesarias:

- f continua.
- $f(x_1) \neq f(x_2)$.

El problema es que las desigualdades e igualdades de la hipótesis relacionan la identidad con la función en cuestión, por lo que poco podemos hacer con la información tal como está. Una buena propuesta de solución consiste en medir entonces la diferencia entre la identidad y la función por medio de una nueva función que denominaremos $h(x) = f(x) - x^3$. A partir de esta podemos realizar en análisis con el teorema aprendido.

Observe h es una función continua, puesto que consiste en al diferencia de dos funciones continuas, f por hipótesis y la función polinomial x^3. De forma adicional,

$$h(a) = f(a) - a \geq 0 \quad \text{por hipótesis}$$

Análogamente,

$$h(b) = f(b) - b \leq 0 \quad \text{por hipótesis}$$

Por lo tanto, se satisfacen las hipótesis del T.V.I. para h y existe (tal como notamos en la observación) un $c \in (a, b) \subset [a, b]$ tal que

$$h(c) = 0 = f(c) - c \Longleftrightarrow f(c) = c$$

Así, queda entonces demostrado. ■

(b) Aplicando la misma idea que en el ejercicio anterior, si encontramos cambios de signos en la función, podremos demostrar la existencia de raices. Como $p(x)$ es una función polinomial, que como sabemos es continua, entonces basta encontrar números en los que se pueda observar el cambio de signo.

Podemos ordenar la información en una tabla de valores:

x	$p(x) = x^3 + 3x^2 - 1$	
-3	-1	
-1	1	$\longleftarrow$¡cambio de signo!
0	-1	$\longleftarrow$¡cambio de signo!
1	2	$\longleftarrow$¡cambio de signo!

Partimos tomando un número pequeño pero razonablemente negativo ya que para $x \to -\infty$ predominará el x^3 en el polinomio y este tomará un valor negativo. Luego, podemos ir aumentando de 1 en 1 los valores de x.

Observe que con esta tabla hemos encontrado tres cambios de signo para una función continua, lo cual formalmente se ve como

- En $[-3, -1]$ se cumple que $p(-3) \leq 0$ y $p(-1) \geq 0$. Entonces, por T.V.I. existe un $\xi_1 \in \mathbb{R}$ en el intervalo $(-3, -1)$ tal que $p(\xi_1) = 0$.
- En $[-1, 0]$ se cumple que $p(-1) \geq 0$ y $p(0) \leq 0$. Entonces, por T.V.I. existe un $\xi_2 \in \mathbb{R}$ en el intervalo $(-1, 0)$ tal que $p(\xi_2) = 0$.
- En $[0, 1]$ se cumple que $p(0) \leq 0$ y $p(1) \geq 0$. Entonces, por T.V.I. existe un $\xi_3 \in \mathbb{R}$ en el intervalo $(0, 1)$ tal que $p(\xi_3) = 0$.

Hemos demostrado la existencia de necesaria de 3 raíces $-\xi_1, \xi_2, \xi_3-$ haciendo uso de la continuidad de las funciones polinomiales y del T.V.I. Por lo tanto, queda entonces demostrado lo pedido. ■

Veamos un problema de aplicación del T.V.I. en que puede ser en parte util en análisis gráfico, y por otra parte se puede ver que el T.V.I. también puede ser utilizado en demostraciones por contradicción:

Problema 1.30: *(Control 1 - 2013 -1)* Sea f función continua en $[1, 5]$ tal que las únicas soluciones de la ecuación $f(x) = 6$ son $x = 1$ y $x = 4$. Si $f(2) = 8$, demuestre que $f(3) > 6$.

Solución:

Es de nuestro interés ver cuándo se anula la función $f(x) - 6$ (equivalente a $f(x) = 6$), por lo cual consideramos la función $g(x) = f(x) - 6$.

Sabemos que $g(1) = g(4) = 0$. Adicionalmente, $f(2) = 8$ implica que $f(2) - 6 = 2 > 0$, con lo cual $g(2) > 0$. Se nos está pidiendo entonces demostrar que $g(3) > 0$.

Demostremos por contradicción. Supongamos que $g(3) < 0$. Como $g(2) > 0$ y $g(x)$ es una función evidentemente continua en $[2, 3]$ (ya que $f(x)$ y -6 lo son), entonces existiría $\xi \in [2, 3]$ tal que $g(\xi) = 0 \to f(\xi) = 6$, lo cual es una contradicción ya que las únicas dos raices se ubican en 1 y 4.

De esta forma, queda entonces demostrado. ■

Problema 1.31: *(I1-2013-1)* Sea f una función continua en $[0, 2]$ tal que $f(0) = f(2)$. Demuestre que existe $x_1 \in [0, 1]$ tal que $f(x_1) = f(x_1 + 1)$.

Indicación: Considere la función $g(x) = f(x+1) - f(x)$ en el intervalo $[0,1]$.

Solución:

Hagamos caso a la indicación y consideremos dicha función. Para demostraciones por igualdad es una buena idea usar el T.V.I. La hipótesis de continuidad ya la tenemos garantizada puesto que $g(x)$ es una resta de funciones continuas, $f(x+1)$ y $f(x)$.

Nos queda solamente encontrar los puntos relevantes en los cuales ocurre el cambio de signo. A partir de las hipótesis, se observa que puede ser de gran utilidad utilizar $f(0)$ y $f(2)$, por lo cual estos debiesen ser los puntos que debemos hacer aparecer en $g(x)$. ¿Cómo lo logramos? Por inspección, evaluando en $x=0$ y $x=1$. Observe que:

$$\begin{aligned} g(1) &= f(2) - f(1) \\ g(0) &= f(1) - f(0) \end{aligned}$$

Pero como $f(2) = f(0)$, entonces podemos observar que $g(1) = -g(0)$. Es decir, siempre habrá un cambio de signo entre 1 y 0 indistintamente de los signos de $g(1)$ y $g(0)$ (e incluso si ambos son cero). De esta forma, se cumple la tercera hipótesis del T.V.I., con lo cual existe $x_1 \in [0,1]$ tal que $g(x_1) = 0$. Es decir, tal que

$$f(x_1+1) = f(x_1)$$

demostrando así lo pedido. ■

Observación: También es válido separar por casos asumiendo que $g(0) < 0$, $g(0) > 0$ y $g(0) = 0$ respectivamente, obteniendo el mismo resultado por T.V.I. para cada caso.

Revisemos algunos problemas de dificultad algo mayor:

Problema 1.32:

(a) Demuestre que la ecuación $x^2 - 1 = \sin(x)$ posee al menos dos raices reales.

(b) Sea $f(x)$ una función continua en $[0,1]$ con $0 \leq f(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,1]$, i.e. el gráfico de $y = f(x)$ está contenido en el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(1,1)$. Demuestre que el gráfico de $y = f(x)$ corta ambas diagonales de dicho cuadrado.

Solución:

(a) Para demostrar la existencia de raíces basta comprobar el cambio de signo de la función en intervalos dados. De esta forma, aprovechando la continuidad de la función hacemos uso del Teorema del Valor Intermedio.

Consideramos $h(x) = x^2 - 1 - \sin(x)$, la cual evidentemente se encuentra acotada entre $x^2 - 2$ y x^2. Procedemos en analogía a otros ejercicios: encontrando signos. Cabe notar que nuestra única opción es ir evaluando la función seno en los valores conocidos:

$$\begin{aligned} h\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{4} - 1 + \frac{\pi}{2} > 0 \\ h(0) &= -1 < 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{\pi^2}{4} - 2 \approx \frac{9,2}{4} - 2 > 0 \end{aligned}$$

Nótese que escogimos este intervalo de evaluación ya que para valores mayores y/o menores la expresión cuadrática toma valores muy grandes que no se ven contrarrestados por el valor que $-1-\sin(x)$ puede tomar.

Como ocurrieron dos cambios de signo, y la función es continua, entonces:

- Por T.V.I., existe $\xi_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ tal que $f(\xi_1) = 0 \to \xi_1^2 - 1 = \sin(\xi_1)$.
- Por T.V.I., existe $\xi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(\xi_2) = 0 \to \xi_2^2 - 1 = \sin(\xi_2)$.

Concluimos entonces que la función presenta *al menos* dos raíces. ■

(b) La primera pregunta que hay que realizarse es: ¿cuáles son las diagonales del cuadrado de dichos vértices? La primera tiene que cortar en $(0,0)$ y $(1,1)$. Por lo tanto, podemos escribir dicha diagonal como $y = x$.

La segunda diagonal tiene que pasar por los vértices $(0,1)$ y $(1,0)$. Por esta razón, escogemos la ecuación $y = 1 - x$ para representar dicha diagonal.

La ventaja se hace evidente al ver qué es lo que intentamos demostrar: sea $f(x)$ continua tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para $x \in [0,1]$, entonces probar que $f(x)$ intersecta a $y = 1 - x$ e $y = x$ para algún $x \in (0,1)$. ¿Qué herramienta podemos usar? Teorema del Valor Intermedio.

Primero demostremos que intersecta a la recta $y = x$. Consideremos primero el caso en que la función es muy pronunciada hacia uno de los vértices del cuadrado. En dicho caso, la función no cortará a la diagonal pero estará obligada al menos a hacerlo en los vértices. Pensemos en esto formalmente: si $f(0) = 0$ ó $f(1) = 1$ entonces no habrá que demostrar nada, pues ya habremos probado inmediatamente que corta a la diagonal.

Suponiendo que este caso no se cumple, y siguiendo la misma idea de ejercicios anteriores, consideremos la función

$$h_1(x) = x - f(x)$$

Lo próximo que debemos realizar es evaluar la función en dos puntos relevantes para probar su cambio de signo. En el contexto de este ejercicio, ¿cuáles son los puntos relevantes? Evidentemente 0 y 1, pues acotan tanto al intervalo como al valor de la función.

Observe que $h_1(0) = 0 - f(0) = -f(0)$. Como $0 \leq f(x) \leq 1$, entonces $-f(x) \leq 0$ para todo $x \in [0,1]$ y por consiguiente $h_1(0) \leq 0$. De la misma forma,

$$h_1(1) = 1 - f(1)$$

Sin embargo, como $f(x) \leq 1$ por la misma desigualdad anterior, entonces $-f(x) \geq -1$ y por lo tanto, $1 - f(1) \geq 1 - 1$. De esta forma, tenemos que

$$h_1(0) \leq 0 \qquad \text{y} \qquad h_1(1) \geq 1$$

Como $h_1(x)$ es una función continua (diferencia de funciones continuas), entonces por T.V.I. existe $\xi_1 \in (0,1)$ tal que $h_1(\xi_1) = 0$, i.e. $\xi_1 = f(\xi_1)$. Por lo tanto, demostramos que f corta a la diagonal creciente.

Tenemos que proceder en analogía para demostrar el mismo resultado en la otra diagonal. Nuevamente, si $f(1) = 0$ ó $f(0) = 1$ (i.e. la función corta a las diagonales en los vértices del cuadrado), se habrá probado inmediatamente lo pedido. Ahora consideramos el caso en que no se cumpla, para ello definimos la función

$$h_2(x) = 1 - x - f(x)$$

la cual es una función continua, por tratarse una resta de funciones continuas. Evaluamos en los puntos relevantes:

$$h_2(0) = 1 - f(0)$$

que como sabemos, tiene que ser necesariamente mayor o igual que cero. Es decir, $h_2(0) \geq 0$. Análogamente,

$$h_2(1) = 1 - 1 - f(1) = -f(1)$$

que necesariamente es menor o igual que cero. Por lo tanto, $h_2(1)$. bajo todas estas hipótesis, se satisface el Teorema del Valor intermedio y por lo tanto existe $\xi_2 \in (0,1)$ tal que $h_2(\xi_2) = 0 \to 1 - \xi_2 = f(\xi_2)$. Es decir, la función continua también corta esta diagonal.

Finalmente, concluimos que $f(x)$ corta ambas diagonales, ya sea en los vértices o dentro del cuadrado. ■

Finalmente, a partir del T.V.I. podemos obtener un resultado interesante:

Problema 1.33: Demuestre e ilustre gráficamente la denominada *propiedad del punto fijo*: si f y g son funciones continuas en $[a,b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, pruebe que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

Solución:

Nos piden demostrar que existe $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = g(c)$$

Lo cual, como ya sabemos para este tipo de ejercicios, es igual a resolver:

$$f(c) - g(c) = 0$$

Esto nos hace notar que la resolución de toda ecuación no es más que calcular las raíces de otra función. En este caso, llamemos

$$h(x) = f(x) - g(x) = 0$$

Entonces, nuestro problema se reduce a demostrar que h posee una raíz en el intervalo $[a, b]$. Para ello, la mejor herramienta a nuestra disposición es el Teorema del Valor Intermedio (TVI). Partamos por observar que $h(x)$ es una función continua, ya que es la resta de dos funciones continuas.

Por otra parte, sabemos que

$$f(a) > g(a) \rightarrow h(a) = f(a) - g(a) > 0$$

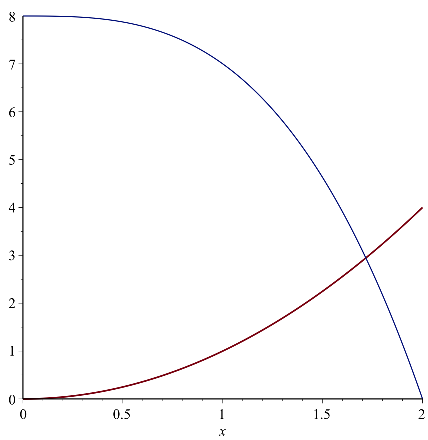
y por otra,

$$f(b) < g(b) \rightarrow h(b) = f(b) - g(b) < 0$$

Es decir, la función cambia de signo en el intevalo $[a, b]$. Como es continua, no le queda más opción que cruzar por el cero en algún punto del intervalo. En otras palabras, gracias al TVI, existe $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$. Esto implica, tal como queriamos demostrar que

$$f(c) = g(c) \blacksquare$$

Sean $f(x)$ y $g(x)$ las funciones continuas en azul y rojo respectivamente, observamos gráficamente como esta propiedad se cumple:



Problema 1.34:

(a) Sea f una función continua en $[a, b]$ cuyo máximo valor en dicho intervalo es a^2 y cuyo mínimo valor es b^2. Pruebe que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c^2$.

(b) Demuestre que por lo menos existen dos soluciones reales distintas de la ecuación

$$(\cos x)^2 - 3x^2 = -\sin x$$

Solución:

(a) Como primera observación, el enunciado no está señalando de forma alguna que $f(a) = a^2$ ni que $f(b) = b^2$. Solo está diciendo que el máximo valor que alcanza la función es a^2 y el valor mínimo es b^2. Es decir, lo correcto es decir que para todo $x \in [a, b]$ se cumple que:

$$b^2 \leq f(x) \leq a^2$$

Buscamos demostrar que existe c tal que $f(c) = c^2$ o bien que $f(c) - c^2 = 0$. Es decir, en otras palabras, podemos hacer uso del T.V.I. para demostrar lo pedido siguiendo las ideas de los problemas anteriores. En efecto, consideremos la función auxiliar $h(x) = f(x) - x^2$. Observe que:

$$h(a) = f(a) - a^2 \leq 0$$

por la información del enunciado. Análogamente, $h(b) = f(b) - b^2 \geq 0$. Por lo tanto, como existe un cambio de signo para h en el intervalo $[a, b]$ y trabajamos con un función evidentemente continua, podemos deducir que existe $c \in [a, b]$ tal que $h(c) = 0$. Es decir,

$$f(c) - c^2 = 0 \to f(c) = c^2$$

demostrando así lo pedido. ■

(b) Se sigue la misma idea para demostrar la existencia de raíces. Demostrar que existen soluciones a dicha ecuacion es equivalente a demostrar que la ecuación

$$(\cos x)^2 - 3x^2 + \sin x = 0$$

tiene al menos dos raices. Pues bien, podemos demostrar que existen 3 intervalos con signos distintos para la función auxiliar $f(x) = \cos^2 x - 3x^2 + \sin x$ y asi demostrar la existencia de tres raíces a la luz del T.V.I. En efecto, esta es una función continua para la cual debemos encontrar tres absisas con signos distintos para f. Probamos con los más sencillos de acuerdo a lo que sugiere la función:

- $x = 0 \to f(x) = 1 - 0 + 0 = 1 > 0.$
- $x = \dfrac{\pi}{2} \to f(x) = 0 - 3\dfrac{\pi^2}{4} + 1 < 0.$
- $x = -\dfrac{\pi}{2} \to f(x) = 0 - 3\dfrac{\pi^2}{4} - 1 < 0.$

Observe que no se consideró $x = \pi$ pues evidentemente en estos casos la participación de $-3x^2$ ya se hace predominante (versus al coseno y el seno que son acotados) y por lo tanto la expresión será siempre negativa. Luego, haciendo uso del T.V.I. tenemos que existe $x_1 \in [0, \pi/2]$ y $x_2 \in [-\pi/2, 0]$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. demostrando asi lo pedido. ■

1.5. Límites en infinito

1.5.1. Límites en infinito

Definición: Sea f una función definida en (a, ∞). Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$$

si podemos tomar valores de $f(x)$ lo suficientemente cercanos a ℓ haciendo x lo suficientemente grande.

La definición no nos aporta mucho desde el punto de vista práctico, por lo cual nos basta considerar que se cumplen las mismas propiedades vistas anteriormente y revisamos ejercicios que nos aporten en este sentido:

Problema 1.35: Calcule mediante todas las propiedades conocidas los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x+3} - \sqrt{x^2+x+2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x+\sqrt{x}}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor x\rfloor} i^r\right)^{\frac{1}{x}}$, $r\in\mathbb{N}$ fijo.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Solución:

(a) Esta es una expresión de la forma $\infty-\infty$. Sin embargo, notar que ambas expresiones en $x\to\infty$ adquieren valores similares, por lo cual es posible esperar que el límite de la diferencia de ambas sea finito. Para analizar este fenómeno, es conveniente convertir la expresión a fracción por medio de la *desracionalización*, pues asi obtenemos una fracción que ya sabemos cómo analizar:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+x+2}\right) &= \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+x+2}\,\frac{\sqrt{x^2+2x+3}+\cdots}{\sqrt{x^2+2x+3}+\cdots}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3-x^2-x-2}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}
\end{aligned}$$

Ahora multiplicamos y dividimos por el x^m tal que m es el grado mayor que aparece en la expresión. En este caso, multiplicamos y dividimos por x. Es decir,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+x+2}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}\cdot\frac{x}{x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2+x+2}}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+2x+3}+\frac{1}{x}\sqrt{x^2+x+2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}
\end{aligned}$$

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^m} = 0$ para todo $m > 0$ y haciendo uso de álgebra de límites, concluimos que

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+x+2}\right) = \frac{1}{2}}$$

Es decir, la función $f(x) = \left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2+x+2}\right)$ presenta una asíntota horizontal cuyo valor es $\frac{1}{2}$.

(b) Nos enfrentamos a la forma indeterminada $\dfrac{\infty\cdot\infty}{\infty}$. La mejor idea para comenzar es dejar todo escrito como suma de términos arriba y abajo, de modo que se pueda aplicar la misma técnica utilizada en el ejercicio anterior. Es decir,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}
\end{aligned}$$

En $x\to\infty$ se tiene que $\sqrt{x^2+x}\approx x$ y por lo tanto el cuociente se comportará como $x/2x$. Esto nos lleva a conjeturar que el límite corresponde a $1/2$. Lo comprobamos multiplicando y dividiendo por $1/x$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\cancel{1}}{\cancel{x}}+1}}
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} = \frac{1}{2}}$$

De esta forma comprobamos el resultado conjeturado.

(c) Después de llegar fácilmente a la conclusión de que las técnicas usadas anteriormente no son útiles en este caso para calcular el límite, debemos recurrir a conjeturar a partir de límites ya conocidos, como es el caso de $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x} = 1$.

En $x\to\infty$ $\sqrt[x]{x+\sqrt{x}}$ se comporta aproximadamente como $\sqrt[x]{x}$ ya que x aportará más a la suma que $\sqrt{x}$. Por lo tanto, podemos conjeturar que en efecto $\sqrt[x]{x+\sqrt{x}}$ también tenderá a 1. Nuestro único recurso restante para hacer esto es usar el Teorema del Sandwich. Observe que para $x > 1$ (podemos partir de donde queramos, ya que estamos evaluando el límite en ∞):

$$x \leq x+\sqrt{x} \leq x+x$$

Luego, aplicando $\sqrt[x]{\cdots}$ (y suponiendo $x > 1$) se sigue manteniendo la desigualdad:

$$\sqrt[x]{x} \leq \sqrt[x]{x+\sqrt{x}} \leq \sqrt[x]{2x}$$

Observe que:

- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$.
- $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{2x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{2} \cdot \sqrt[x]{x} = 1 \cdot 1$.

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del *Teorema del Sándwich* y concluimos que

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x+\sqrt{x}} = 1}$$

(d) Tomemos un número muy grande. Por ejemplo, $x = 1{,}000{,}000{,}000{,}000,2 \to \lfloor x \rfloor = 1{,}000{,}000{,}000{,}000$. ¿Qué ocurre con el coeficiente del límite? Se tendrá evidentemente que

$$\frac{\lfloor x \rfloor}{x} \approx 1 \text{ pero } \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$$

La mejor forma de garantizar un límite con una parte entera es haciendo teorema del sándwich, ya que esta función la podemos acotar fácilmente. Observe que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$$

Como es de nuestro interés el límite cuando $x \to \infty$, podemos tomar $x \neq 0$ lo suficentemente grande y positivo, por lo cual dividir por este número no altera el sentido de la desigualdad. Esto es,

$$\frac{x-1}{x} \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$$

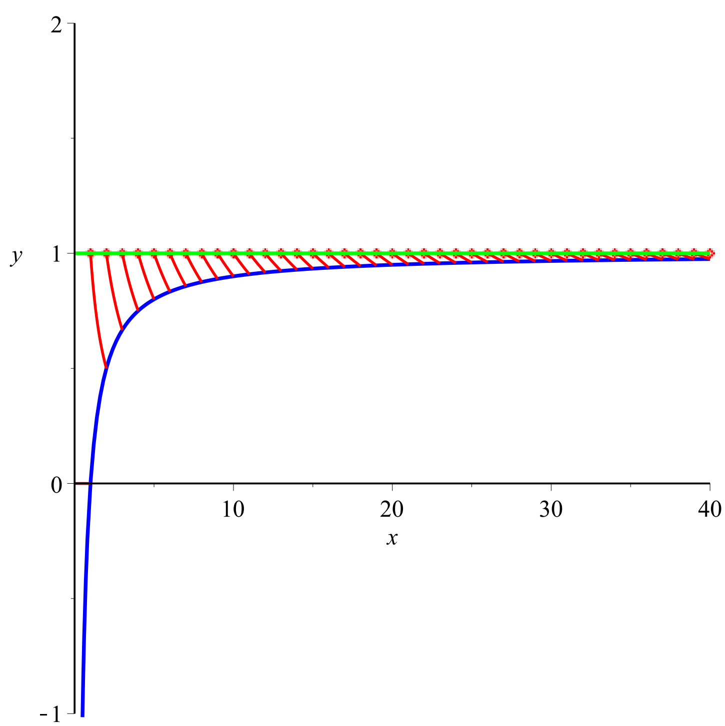
Observe que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x}}{1} = 1$$

Entonces, por *Teorema del Sandwich* concluimos formalmente que

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1}$$

Observe este gráficamente este resultado ($f(x)$ en rojo):



(e) La dificultad más evidente de este problema radica en la notación utilizada. ¿El límite de qué función nos están pidiendo calcular? Notemos que teniendo claro que la parte entera en la expresión de la sumatoria solo se utiliza para ser coherentes con la definición, tenemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i^r\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{1^r + 2^r + \cdots + \lfloor x \rfloor^r}$$

Es decir, estamos realizando una suma de cantidades enteras hasta el piso de x. ¿Qué ocurre cuando hacemos tender esta expresión a infinito? Notamos que la expresión dominante será $\lfloor x \rfloor^r$, por lo que toda la expresión anterior se comportará aproximadamente como $\sqrt[x]{\lfloor x \rfloor^r}$, y como podemos esperar, este límite tiende a 1 por propiedades conocidas (ya que el denominador se va a cero).

¿Cómo garantizamos esto? Utilizamos la única herramienta que nos queda disponible: Teorema del Sándwich. Partimos por notar que

$$1^r + 2^r + \cdots + \lfloor x \rfloor^r$$

es una suma de $\lfloor x \rfloor$ términos donde, como dijimos, el término dominante es $\lfloor x \rfloor^r$. Por esta razón,

$$1^r + 2^r + \cdots + \lfloor x \rfloor^r \leq \lfloor x \rfloor \cdot \lfloor x \rfloor^r = \lfloor x \rfloor^{r+1}$$

y por otra,

$$\lfloor x \rfloor^r \leq 1^r + 2^r + \cdots + \lfloor x \rfloor^r$$

Al aplicar $\sqrt[x]{\cdot}$, la desigualdad evidentemente se conservará para x muy grande. Por lo tanto, vemos que ocurre con los límites en el infinito. Notamos que

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{\lfloor x \rfloor^r} = 1$$

y si bien lo notamos intuitivamente, podemos usar el hecho de que $(x-1)^r \leq \lfloor x \rfloor^r \leq x^r$ para garantizar (por otro Teorema del Sandwich) que efectivamente tiende a 1. Asimismo, y bajo la misma argumentación,

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[x]{\lfloor x \rfloor^{r+1}} = 1$$

Por lo tanto, haciendo uso del Teorema del Sandwich, concluimos que

$$\boxed{\lim_{x \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor} i^r\right)^{\frac{1}{x}} = 1}$$

(f) Siguiendo las mismas ideas vistas anteriormente, analicemos en primer lugar el comportamiento asintótico del límite. Tenemos que para valores de x muy grandes ocurre que:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \approx \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

Por lo tanto, podemos conjeturar fácilmente que el límite en cuestión es 1. En efecto, podemos seguir el *truco* regular para resolver este límite. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}}
\end{aligned}$$

Por álgebra de límites concluimos que el límite es igual a $\dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = 1$. Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = 1}$$

Problema 1.36: Sean a, b y c reales no negativos, entonces demuestre que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a^x+b^x+c^x} = \max\{a,b,c\}$$

Propuesto: Generalice este resultado para un conjunto $S = \{x_1,\ldots,x_n\}$ de n elementos no negativos.

Solución:

Partamos pensando que a es el más grande de los tres números reales. Entonces, para todo $x > 1$ se cumplirá que

$$\sqrt[x]{a^x} \leq \sqrt[x]{a^x+b^x+c^x} \leq \sqrt[x]{3a^x} = \sqrt[x]{3}\cdot a$$

Observe que:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a^x} = \lim_{x\to\infty} a\sqrt[x]{3} = a$$

Bajo la misma lógica que los límites de números finitos, podemos aplicar el *Teorema del Sandwich*, obteniendo que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a^x+b^x+c^x} = a$$

Sin embargo, a no tiene por qué ser el mayor de los tres números, por lo que nuestro resultado no es del todo correcto. Sin embargo, si notamos la misma lógica anterior la podemos aplicar a cualquiera del mayor de los tres números, obteniendo el mismo resultado. Por lo tanto, tomamos $\max\{a,b,c\}$ y con esto concluimos que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a^x+b^x+c^x} = \max\{a,b,c\} \blacksquare$$

Problema 1.37: *(I1-2013-2)* Determine $a \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+ax+1} - x = 2$$

Solución:

Calculemos el límite en términos de a, luego supongamos que el valor es efectivamente 2 y a partir de esto obtendremos una ecuación para determinar el valor de a en cuestión. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+ax+1}-x &= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+ax+1}+x}{\sqrt{x^2+ax+1}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+ax+1-x^2}{\sqrt{x^2+ax+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax+1}{\sqrt{x^2+ax+1}+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{a+1/x}{\sqrt{1+a/x+1/x^2+1}} = \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

Luego, se tiene que necesariamente

$$\frac{a}{2} = 2 \to \boxed{a=4}$$

para que el límite efeticamente sea 2.

1.5.2. Asíntotas horizontales y verticales

Definición: Distinguimos tres tipos de *asíntotas*:

- Asíntotas verticales: las cuales son producto de una singularidad en un x determinado. Por ejemplo, una división por cero que hace tender a la expresión a $\pm\infty$ en un x particular.
- Asíntotas horizontales: la función $f(x)$ tiende a un número real particular cuando $x \to \pm\infty$, razón por la cual se asemeja a una recta horizontal en particular.
- Asíntotas oblicuas: la función $f(x)$ se asemeja a una recta de la forma $ax+b$ cuando $x \to \pm\infty$. Esto es,

  $$\lim_{x\to\infty} \left[f(x)-(ax+b)\right] = 0 \longrightarrow f(x) \approx ax+b \text{ cuando } x\to\infty$$

  Se pueden realizar observaciones sofisticadas a un límite para identificarlas. Sin embargo, para determinarlas correcta y formalmente se requiere hacer uso de derivadas. Observe que las asíntotas horizontales son un caso particular de asíntotas oblicuas (con pendiente 0).

Problema 1.38: Encuentre las asíntotas verticales de la función

$$f(x) = \frac{x^2+1}{3x-2x^2}$$

y use esta información para esbozar el gráfico de f.

Solución:

Al tratarse de una función racional, la única forma de que $f(x)$ tienda a $\pm\infty$ es en las singularidades. Para poder determinarlas, partimos por medio de nuestros candidatos que son las raíces del denominador. Esto es,

$$3x - 2x^2 = x\,(3 - 2x) = -2x\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Observe que en $x = 0$, el numerador toma el valor 1 y en $x = \frac{3}{2}$ el numerador toma el valor $\frac{13}{4}$. Por lo tanto, en estos valores de las raíces del denominador nos encontramos ante expresiones de la forma

$$\frac{\alpha}{0}$$

que evidentemente tenderán a infinito de acuerdo a cómo nos estemos aproximando al límite. Por lo tanto, ambos candidatos encontrados son en efecto asíntotas verticales.

Es de nuestro interés estudiar los signos que puede tomar $f(x)$ para los diversos valores en las raíces / singularidades, ya que de esta forma podemos analizar intuitivamente cómo se comportan las asintotas en cada uno de los candidatos.

Observando que para todo x real se tiene que $x^2 + 1 > 0$, es suficiente analizar los signos por medio del estudio del comportamiento del denominador. Como nos enfrentamos a una parábola que se abre hacia abajo, entonces notamos que

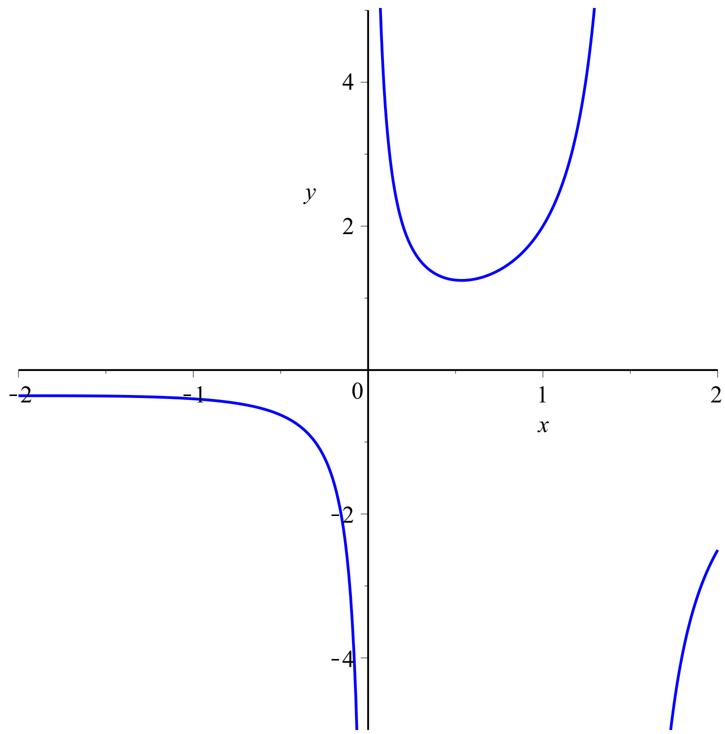
$$f(x)\,:\,\begin{cases} > 0 & \text{si } x \in \left(0, \frac{3}{2}\right) \\ < 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Con esta observación, podemos analizar el comportamiento de los límites laterales cerca de los puntos singulares:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to \frac{3}{2}^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to \frac{3}{2}^-} f(x) = +\infty$$

Con esta información podemos esbozar el gráfico fácilmente enfocándonos primordialmente en las asíntotas, y recordando que entre cada una de las singularidades los trazos deben realizarse sin la necesidad de levantar el lápiz (propiedad que más adelante llamaremos *continuidad* de la función).

Finalmente, para propósitos de verificación, el esbozo debe ser similar a la gráfica computacional que se puede generar para $f(x)$, tal como se muestra en la siguiente figura:



Problema 1.39: Estudie continuidad y determine asíntotas horizontales y verticales de la función

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + 2x - 8}$$

Solución:

La mejor técnica para la identificación de **asíntotas verticales** es factorizar la función racional:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + 2x - 8} = \frac{2x(x-1)}{(x-2)(x+4)}$$

Es imposible realizar simplificaciones, razón por la cual se producen singularidades en $x = 2$ y $x = -4$ y tendremos expresiones de la forma $2x(x-1)/0$. Analizamos los límites laterales en estos casos para esclarecer si la función tiende a $+\infty$ ó $-\infty$:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{2\overbrace{x}^{>0}\overbrace{(x-1)}^{>0}}{\underbrace{(x-2)}_{>0}\underbrace{(x+4)}_{>0}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{2\overbrace{x}^{>0}\overbrace{(x-1)}^{>0}}{\underbrace{(x-2)}_{<0}\underbrace{(x+4)}_{>0}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -4^+} \frac{2\overbrace{x}^{<0}\overbrace{(x-1)}^{<0}}{\underbrace{(x-2)}_{<0}\underbrace{(x+4)}_{>0}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -4^-} \frac{2\overbrace{x}^{<0}\overbrace{(x-1)}^{<0}}{\underbrace{(x-2)}_{<0}\underbrace{(x+4)}_{<0}} = +\infty$$

Para obtener estos resultados se evaluó el signo de cada expresión lo suficientemente cerca del punto al que tiende la función. Luego, a partir de esto se obtiene el signo final que acompaña a ∞. Hecho esto, hemos verificado que $x = 2$ y $x = -4$ son asíntotas verticales y el carácter de signos que se tienen.

Para determinar **asíntotas horizontales** tomamos el límite cuando $x \to \infty$ y también cuando $x \to -\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2+2x-8} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2+2x-8}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \longleftarrow \textbf{truco: } \text{elegir el } x^m \text{ de mayor grado} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}-\frac{8}{x^2}}\end{aligned}$$

Sabiendo que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ y usando álgebra de límites concluimos qu

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x}{x^2+2x-8} = 0$$

Para calcular el límite cuando $x \to -\infty$ hay que tener cierta precaución: si aparecen términos de grado impar, nuestra simplificación usada en el caso anterior puede omitir el signo de la función. Por esta razón, y para tener absoluta seguridad del resultado, se aconseja realizar la sustitución $x = -u$, de modo que $u \to \infty$ cuando $x \to -\infty$. El límite en este caso queda reescrito como

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x}{x^2+2x-8} &= \lim_{u\to\infty} \frac{2u^2+u}{u^2-2u-8} \\ &= \lim_{u\to\infty} \frac{2+\frac{1}{u}}{1-\frac{2}{u}-\frac{8}{u^2}} \\ &= 2\end{aligned}$$

En este caso el límite es exactamente el mismo, pero podría no haberlo sido necesariamente. Observe que haciendo tener a infinito obtuvimos números particulares, y por lo tanto nos encontramos ante asíntotas horizontales. Sin embargo, si hubiésemos obtenido una expresión de la forma

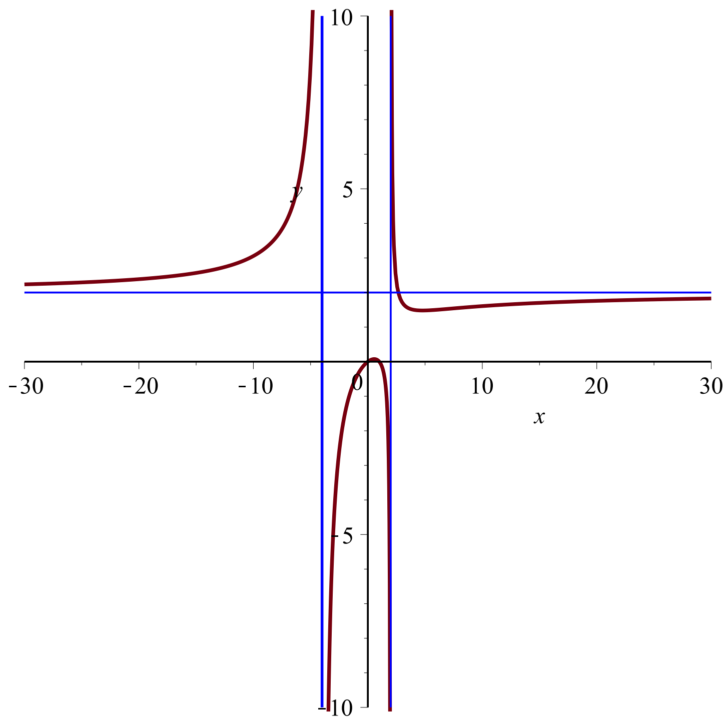
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} ax + b + g(x)$$

nos enfrentariamos indiscutiblemente ante una asíntota oblicua. *Nota:* Se propone al lector estudiar el caso

$$h(x) = \frac{x^3 + x^2 - x}{x^2 + 2x - 8}$$

Hechos todos estos análisis, la **continuidad** de f es evidente: como es una división de fracciones continuas, el cuociente lo será siempre y cuando el denominador no se iguale a cero. Es decir, $f(x)$ es continua para todo $x \neq -4, 2$.

Con esta información y teniendo en cuenta la continuidad de la función (no levantar el lápiz al trazar el gráfico), no se deben tener grandes dificultades en intentar esbozar el gráfico de $f(x)$. En efecto, comprobamos la información anterior con un gráfico de $f(x)$ (función en rojo y asíntotas en azul):



Se puede verificar rápidamente que la función cumple los comportamientos de signos y los comportamientos asintóticos en $\pm\infty$.

2. Derivadas y diferenciabilidad

2.1. Definición de derivada y recta tangente

2.1.1. Definición de derivada y diferenciabilidad

Definición: Una función $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definida en el abierto $\mathcal{D}$ se dice *derivable* (o *diferenciable*) en $x_0 \in \mathcal{D}$ si el siguiente límite existe

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

el cual se anota como $f'(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$ (en Física) ó $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

Observación: Para todos los puntos $x \in \mathcal{D}$ tales que $f(x)$ es diferenciable, se genera una función $f'(x)$ que llamamos *función derivada* de f.

Teorema: Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.

Bajo la definición y/o otras técnicas podemos determinar fácilmente el valor de las siguientes funciones derivadas:

Función	Función derivada	Función	Función derivada
$c \in \mathbb{R}$	0	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$ con $x > 0$
$(x+a)^r$, $r \in \mathbb{R}$	$r(x+a)^{r-1}$	$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x)$
e^x	e^x	$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln(a)$	$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$		

Problema 2.1:

(a) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función derivable en todo (a,b). Sea $x_0 \in (a,b)$ fijo. Se define

$$\phi(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$$

Demuestre que $\lim_{h \to 0} \phi(x_0) = f'(x_0)$.

(b) Sea $f(x)$ una función derivable en x_0. Determine para qué valores $\lambda \in \mathbb{R}$ existe

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+\lambda h) - f(x_0)}{h}$$

y calcúlelo cuando corresponda.

Solución:

(a) La única información que a priori sabemos es la definición de derivada:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Nos están pidiendo demostrar entonces que

$$\lim_{h\to 0} \phi(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Notar que al término del centro le falta la presencia de $f(x_0)$ para lucir más "parecido" a la expresión de la izquierda. Una forma inteligente de hacerla "aparecer" es sumando y restando $f(x_0)$ (sumando cero):

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0-h)}{2h}$$

Los dos primeros términos se relacionan efectivamente con la derivada de $f(x)$ que, como sabemos, es diferenciable. Entonces,

$$\lim_{h\to 0} \phi(x_0) = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{\text{existe y es } f'(x_0)} + \frac{1}{2} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}$$

Nos falta calcular el límite de la derecha. Como nos piden demostrar que el límite de $\phi(x_0)$ cuando h tiende a cero es $f'(x_0)$, debemos demostrar entonces que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = f'(x_0)$$

¿Qué podemos hacer al respecto? Dejar la expresión de la izquierda como la definición de derivada de $f'(x_0)$. Para ello, podemos hacer la sustitución $u = -h$. Entonces,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+u)}{-u} = f'(x_0)}_{\text{por definición}}$$

Por lo tanto, reemplazando este resultado en la expresión anterior, concluimos que

$$\lim_{h\to 0} \phi(x_0) = f'(x_0) \quad \blacksquare$$

(b) Sabemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

La dificultad de este ejercicio radica en la aparición del factor λ. El lector comprenderá que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{h}\neq f'(x_0)$$

principalmente por el hecho de que la velocidad con la que λh se acerca a cero ($\approx f(x_0+\lambda h)\to f(x_0)$) es diferente a como h se aproxima a cero. La comparación "justa" se logra premultiplicando por $1=\lambda/\lambda$. Es decir,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{h}=\lambda\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{\lambda h}$$

Observe sin embargo que esta operación solo es válida cuando $\lambda\neq 0$ ($0/0$ es una singularidad antes que 1). Por lo tanto, tenemos que observar qué ocurre cuando $\lambda=0$. Se tendrá que $f(x_0+\lambda h)=f(x_0)$ y por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{f(x_0)-f(x_0)}^{\text{constante}=0}}{h}=0$$

Retomando para los casos en que $\lambda\neq 0$, podemos realizar sin dificultad la sustitución $u=\lambda h$:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{h}&=\lambda\lim_{u\to 0}\frac{f(x_0+u)-f(x_0)}{u}\\&=\lambda f'(x_0)\end{aligned}$$

Concluimos entonces que

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{h}=\begin{cases}\lambda f'(x_0) & \text{si } \lambda\neq 0\\ 0 & \text{si } \lambda=0\end{cases}}$$

Problema 2.2: *(I2-2013-2)* Sea f una función tal que $f(a)=3$ y $f'(a)=-1$. Calcule:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$$

Solución:

Este problema no es más que una aplicación del problema anterior. En la información anterior lo que sabemos es que:

$$f'(a)=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}=-1=\lim_{x\to 0}\frac{f(a)-f(a-x)}{x}$$

Luego expresamos lo que se pide en términos de la información conocida:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)+f(a)-f(a-x)}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(a)-f(a-x)}{x}\\&=f'(a)+f'(a)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{f\left(a+x\right)-f\left(a-x\right)}{x} = 2f'(a) = -2}$$

Al igual que como hicimos en continuidad, existe un conjunto de problemas típico de "condiciones de diferenciabilidad". Veamos algunos ejemplos:

Problema 2.3: Determine los valores de a, b para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} 5+\sqrt{2x} & \text{si } x \in (0,8] \\ \\ bx+a & \text{si } x \in (8,\infty) \end{cases}$$

es diferenciable en $x = 8$.

Solución:

Observe que una función diferenciable en x_0 es continua en ese punto, ya que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad &\to \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h}{h} = 0 \\ &\to \quad \lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h = 0 \\ &\to \quad \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} \left[f(x_0)+f'(x_0)h\right] \\ &\to \quad \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \end{aligned}$$

Luego, una función diferenciable es continua. Si bien, tomando el caso $f(x) = |x|$ se puede observar que la expresión recíproca no es necesariamente cierta, cabe notar que si la función no es continua no puede ser diferenciable (piense el lector en una función a tramos discontinua en el punto de cambio: ¿puede existir la derivada en dicho punto?).

Por lo tanto, de todo este preámbulo desprendemos que la primera condición es que $f(x)$ sea continua en $x = 8$. Para esto, los límites laterales deben coincidir:

$$\lim_{x\to 8^+} f(x) = \lim_{x\to 8} 5+\sqrt{2x} = 9$$

$$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8} bx+a = 8b+a$$

Con esto, la primera condición que debe cumplirse es que

$$9 = 8b+a$$

Para que la función sea diferenciable en $x = 8$, adicionalmente debe cumplirse que el siguiente límite exista:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(8+h)-f(8)}{h}$$

Este límite evidentemente será diferente dependiendo de cómo nos aproximemos a cero. Tomando el límite por la derecha:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(\overbrace{8+h}^{\geq 8}) - f(8)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{5+\sqrt{16+2h}-9}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{16+2h}-4}{h} \cdot \frac{\sqrt{16+2h}+4}{\sqrt{16+2h}+4} \\
&= \frac{1}{8} \lim_{h\to 0} \frac{16+2h-16}{h} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Por la izquierda:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(\overbrace{8+h}^{\leq 8}) - f(8)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{8b+bh+a-8b-a}{h} \\
&= b
\end{aligned}$$

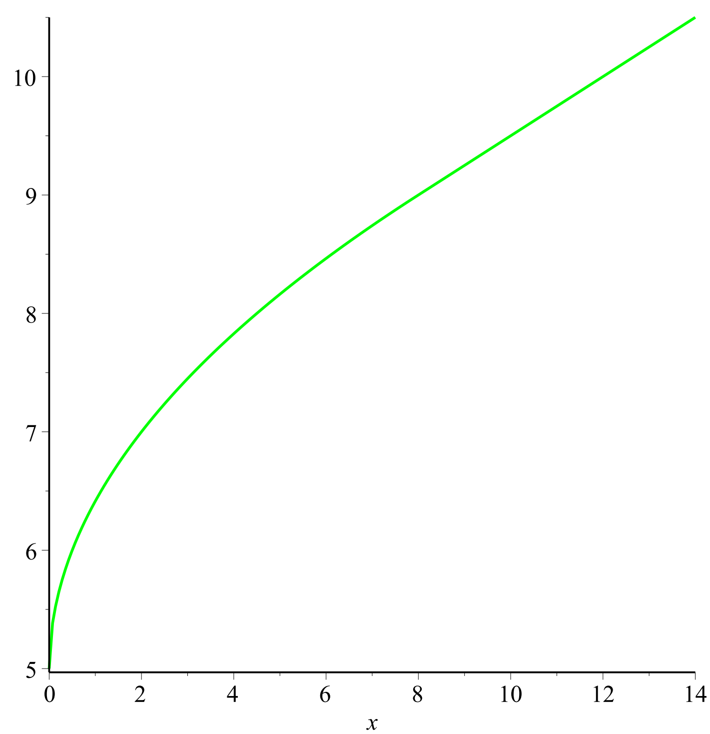
De aquí se genera la condición

$$\boxed{b = \frac{1}{4}}$$

Reemplazando en la primera ecuación concluimos que

$$\boxed{a = 7}$$

Podemos comprobar gráficamente que con estos parámetros se cumple lo pedido (la función se ve *suave*):



Problema 2.4: *(I1-2013-1)* Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-p}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \\ x^2 + qx & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Determine los valores de p y q en los reales de manera que f sea derivable en $x = 0$.

(b) Para los valores de p y q encontrados en a), determine la función f' indicando su dominio.

Solución:

(a) Se procede por analogía a los problemas anteriores, y siempre bajo la lógica de suponer que $f(x)$ es derivable en dicho punto y luego extraer conclusiones a partir de ello. Primero verificamos que se cumpla la condición de continuidad. Para ello, evaluamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 + qx = 0$$

lo cual se cumple para q cualquiera. Para el límite por la derecha,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x-p}{x+1} = -p$$

Entonces, de la condición de continuidad se obtiene que

$$\boxed{p = 0}$$

Ahora exigimos la condición de diferenciabilidad. Para ello, debe existir el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

Como la función es a tramos, debemos exigir que los límites laterales coincidan. Evaluémoslos por separado:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{h-p}{h+1} - 0}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(h+1)} = 1 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + qh}{h} = q$$

Igualando límites laterales, debe cumplirse que

$$\boxed{q = 1}$$

Es decir, la única función derivable en $x = 0$ es:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \\ x^2 + x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$

(b) Calculamos la función derivada usando Reglas de derivación (lo cual se verá en un próximo apartado). Primero derivamos cada uno de los tramos. Para el tramo superior:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

El tramo izquierdo:

$$f'(x) = 2x + 1$$

Observe que en $x = 0$ se cumple que $f'(0) = 0$. Con ello, resulta sencillo obtener los tramos:

$$\boxed{f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \\ \\ 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}}$$

Adicionalmente notar que $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ se indetermina en $x = -1$, por lo que debería descartarse $x = -1$, pero este tramo está definido solo para $x > 0$, por lo cual el dominio del a función son <u>todos los reales</u>.

Problema 2.5: *(I1-2013-2)* Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \\ \\ ax + b & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Encuentre los valores de a y b de modo que f sea derivable en $x = 1$.

Solución:

Seguiremos la misma línea de desarrollo que se presenta en los problemas anteriores. Primero observamos que cada uno de los tramos por separado es diferenciable por tratarse de funciones claramente diferenciables.

Por lo tanto, lo único que debemos estudiar (y para lo cual se deben imponer condiciones) es $x = 1$. En efecto, la función debe ser derivable en $x = 1$ y para ello debemos imponer dos condiciones:

- $f(x)$ debe ser continua en $x = 1$.
- $f(x)$ debe cumplir que:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

Estudiemos la primera condición. Para que f sea continua basta que los siguientes límites existan y sean iguales:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

Calculamos entonces:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^{-1}} ax+b = a+b$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{1-x} \cdot \left(1+\sqrt{x}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

Como estamos suponiendo que la función es diferenciable en $x = 1$, entonces debe ser continua y por lo tanto los límites laterales coincidir, i.e.

$$a+b=2 \tag{2.1}$$

De la misma forma calculamos:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{x\to 0^-} \frac{a\,(1+h)+b-a-b}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{ah}{h} = a$$

Luego,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f\,(1+h)-f\,(1)}{h} \quad = \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{\dfrac{1-(1+h)}{1-\sqrt{1+h}} - a - b}{h} \leftarrow a+b=2$$

Usemos el hecho de que $\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = 1+\sqrt{x}$ para $x = 1$ tal como vimos anteriormente. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^+} \frac{f\,(1+h)-f\,(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1+\sqrt{1+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{1+h-1}{h\left(\sqrt{1+h}+1\right)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Es decir, además debe cumplirse que:

$$a = \frac{1}{2} \tag{2.2}$$

Con esto concluimos que los valores de a y b requeridos son respectivamente:

$$\boxed{a = \frac{1}{2}} \quad \text{y} \quad \boxed{b = \frac{3}{2}}$$

Problema 2.6: [**Propuesto**] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x) - f(y)| \leq a(x-y)^2$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $a \geq 0$. Pruebe que $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe y $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.1.2. Rectas tangentes

Definición: Como la derivada de f en x_0 representa la tangente de la recta en dicho punto, entonces la ecuación de la recta tangente a x_0 existe solo si f es diferenciable en x_0 ($f(x_0) \leq \infty$) y viene dada por

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Veremos la deducción y los procedimientos básicos en los siguientes problemas:

Problema 2.7: Haciendo uso de la definición de derivada, calcule la recta tangente al punto dado de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 6}$ en $x = 2$.

(b) $f(x) = \cos(3x)$ en $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Solución:

Sabemos que la ecuación de toda recta que pasa por el punto (x_0, y_0) está dada por

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

donde m representa la pendiente de la recta. Esta ecuación nos dice que todo punto contenido en la recta tiene que generar una pendiente de (x_0, y_0) del valor de m. En el contexto del cálculo de rectas tangentes a las funciones, tenemos que para calcularla en un punto x_0 se tiene que cumplir que

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0) \to y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

donde x_0 e $y_0 = f(x_0)$ los podemos calcular fácilmente en el contexto de este ejercicio. La dificultad radicará en calcular $f'(x_0)$, lo cual será nuestro principal trabajo en cada ejercicio.

Cabe además recordar la definición de derivada, tal como se nos pide:

$$f(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Haciendo la sustitución $x_0 + h = u \to h = u - x_0$ (y luego $u \to x_0$ cuando $h \to 0$) llegamos a la segunda definición de derivada:

$$f'(x_0) = \lim_{u \to x_0} \frac{f(u) - f(x_0)}{u - x_0}$$

Dependiendo del límite a calcular, es más conveniente utilizar una definición u otra. En estos ejercicios se utilizará preferentemente la primera definición, ya que la segunda requiere hacer uso de factorizaciones en vez de desarrollo de productos.

(a) Nuestro objeto de interés es calcular $f'(2)$. Sin embargo, hagámoslo para x_0 cualquiera:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x_0+h)^2+6} - \sqrt{x_0^2+6}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(x_0+h)^2+6} - \sqrt{x_0^2+6}}{h} \cdot \frac{\sqrt{(x_0+h)^2+6} + \sqrt{x_0^2+6}}{\sqrt{(x_0+h)^2+6} + \sqrt{x_0^2+6}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2+6-x_0^2-6}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{(x_0+h)^2+6} + \sqrt{x_0^2+6}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0^2+6}} \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x_0^2+6}} \cdot 2x_0
\end{aligned}$$

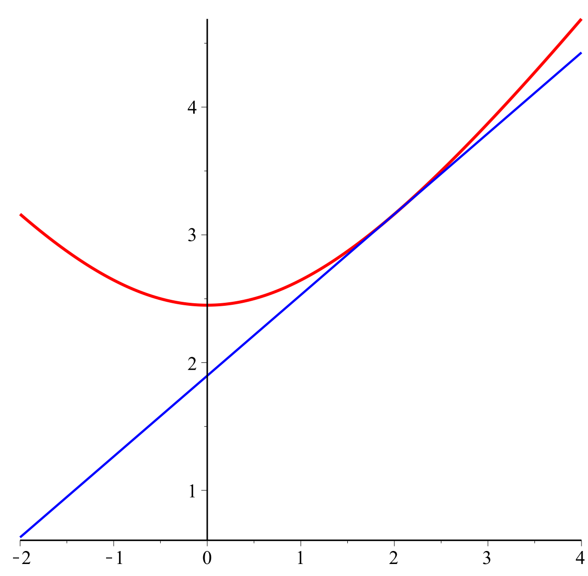
Entonces,

$$f'(x_0) = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+6}} \to f'(2) = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

Finalmente, la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$ viene dada por

$$\boxed{y = \frac{2}{\sqrt{10}}(x-2) + \sqrt{10}}$$

Podemos verificar gráficamente la situación:



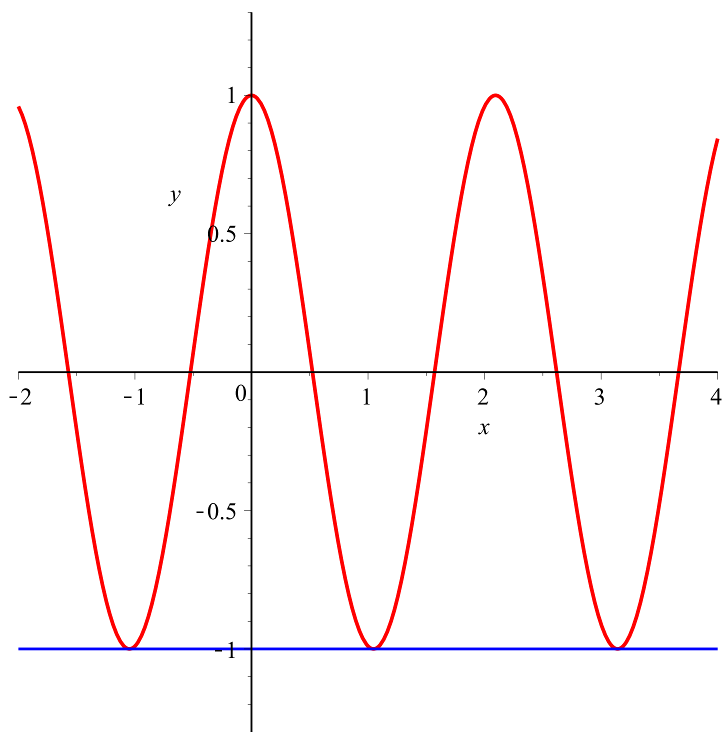
(b) Trabajamos bajo la misma lógica anterior, ahora para $f(x) = \cos(3x)$.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(3(x+h)) - \cos(3x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(3x+3h) - \cos(3x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(3x)\cos(3h) - \sin(3x)\sin(3h) - \cos(3x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(3x)\,(1-\cos(3h))}{h} - \frac{\sin(3x)\sin(3h)}{h} \\
&= -\sin(3x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(3h)}{h} \cdot \frac{3}{3} \\
&= -3\sin(3x)
\end{aligned}$$

Luego, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\sin(\pi) = 0$. Por lo tanto, la recta tangente está dada por

$$\boxed{y = \cos(\pi) = -1}$$

Graficamos la situación para comprobarlo:



Problema 2.8: Determine la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ a la función

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

Como tenemos una función a tramos y necesitamos saber $f'(0)$ para determinar la ecuación de la recta tangente, derivamos haciendo uso de la definición:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h-h^2\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[1-h\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)\right] \end{aligned}$$

Nuestra principal interrogante ahora es calcular

$$\lim_{h\to 0} h\cos\left(\frac{\pi}{h}\right)$$

Para ello, notamos que

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{h}\right) \leq 1 \to -h \leq h\cos\left(\frac{\pi}{h}\right) \leq h$$

Como

$$\lim_{h\to 0}(-h) = \lim_{h\to 0} h = 0$$

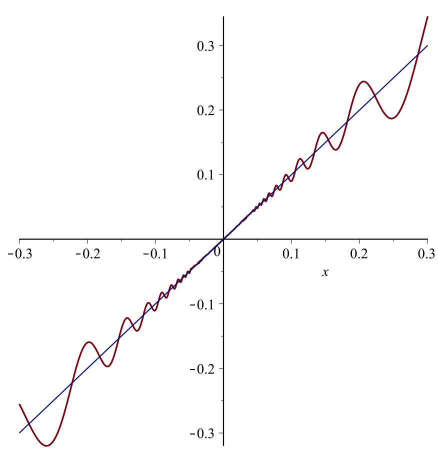
Entonces, por Teorema del Sandwich, concluimos que

$$f'(0) = 1$$

La ecuación de la recta tangente viene dada por

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = f'(0) \to \frac{y-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$$

Entonces, la ecuación de la recta tangente corresponde a $\boxed{y=x}$. Podemos comprobar esto gráficamente:



Problema 2.9: *(I1-2013-1)* Encuentre todos los puntos de la curva $y = \dfrac{1}{x+1}$ en los cuales la tangente a la curva en dichos puntos pasa por $(0, -1)$.

Solución:

Primero debemos determinar qué es lo que nos están preguntando. **No** nos están pidiendo encontrar la recta tangente en un punto específico, sino que nos están pidiendo determinar los puntos x_0, y_0 tales que su recta tangente pasa por el punto $(0, -1)$. Es decir, debemos obtener la recta tangente en puntos (x_0, y_0) cualesquiera y luego simplemente imponer que la ecuación obtenida debe pasar por $(0, -1)$, despejando así los puntos pedidos.

Obtengamos la recta tangente, primero calculando la derivada (ya sea por reglas de derivación como más adelante veremos o a partir de la tabla dada):

$$y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

Luego, en x_0 la recta tangente viene dada por

$$y = -\frac{1}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + y_0$$

La recta tangente debe pasar por el punto $(0, -1)$, obteniendo la ecuación

$$-1 = \frac{x_0}{(x_0+1)^2} + y_0$$

pero $y_0 = \dfrac{1}{1+x_0}$, con lo cual se obtiene la ecuación

$$-1 = \frac{x_0}{(x_0+1)^2} + \frac{1}{x_0+1}$$

$$\to -(x_0+1)^2 = x_0 + x_0 + 1$$

o equivalentemente,

$$x_0^2 + 4x_0 + 2 = 0$$

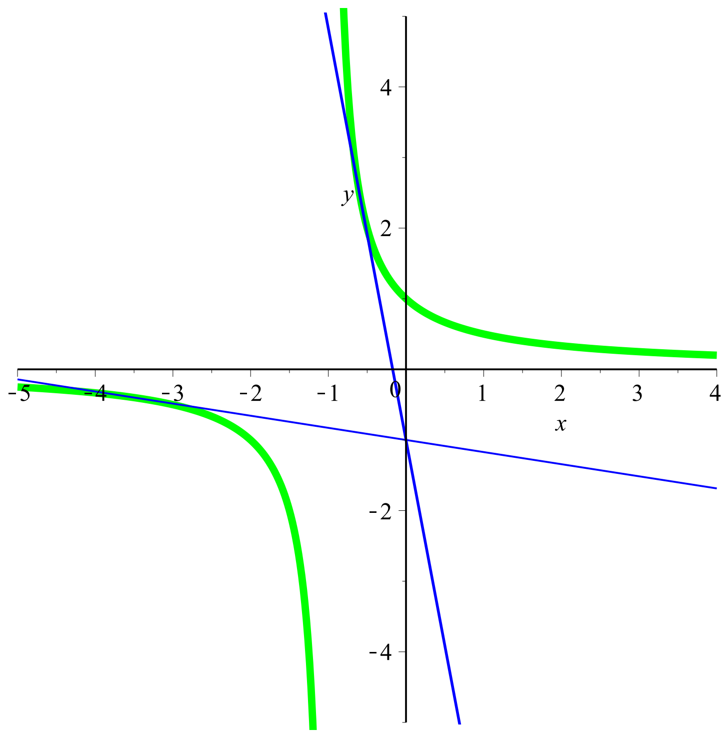
Las soluciones vienen dadas por

$$x_0 = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} \to \boxed{x_0 = -2 + \sqrt{2}} \vee \boxed{x_0 = -2 - \sqrt{2}}$$

evaluamos directamente y_0 con los x_0 obtenidos y de esta forma concluimos que los puntos buscados son

$$\boxed{P_1\left(-2+\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)} \quad \text{y} \quad \boxed{P_2\left(-2-\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)}$$

Podemos comprobarlo gráficamente:



2.1.3. Derivadas y álgebra de límites

Problema 2.10: Suponga que f es una función que satisface la ecuación

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

para todos x, y reales. Suponga además que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

Determine $f(0)$, $f'(0)$ y $f'(x)$ para x cualquiera.

Solución:

A partir de la ecuación, tenemos que

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) + 0 + 0 \to f(0) = 2f(0) \to f(0) = 0$$

Lo cual también se desprende de la segunda condición: la única forma de "contrarrestar" la singularidad del denominador es que $f(x)$ también tienda a cero.

A partir de la información dada, la única forma de determinar las funciones derivadas es a partir de la definición:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Análogamente,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

pero, por la ecuación

$$f(x+h) = f(x) + f(h) + x^2h + xh^2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) + x^2h + xh^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} + x^2 + xh \\ &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

Observación: Si $f'(x) = 1 + x^2$, entonces podemos pensar que $f(x) = x + x^3/3 + c$ (realizamos el proceso inverso a derivar: ¿de que función $f'(x)$ es derivada?

Problema 2.11: *(I1-2013-1)* Sea f una función derivable en $x = 1$ tal que $f(1) = 0$ y $f'(1) = 3$. Calcule el valor de

$$\lim_{x \to -1} \frac{f(x^2)}{2x+2}$$

Solución:

Estamos tentados a encontrar una función tal que $f'(1) = 3$ y $f(1) = 0$. Rápidamente podemos decir

$$\to f(x) = 3x + c$$

y como $f(1) = 3 \cdot 1 + c = 0$, entonces $c = 3$. Es decir, podríamos usar la función $f(x) = 3x - 3$ y resolver inmediatamente el problema. Este procedimiento es **erróneo** porque habremos obtenido un resultado para una función en particular, siendo que en el enunciado se especifíca una función cualquiera.

Por esta razón es que el procedimiento correcto es mediante álgebra de límites, ya que es asi como estaremos trabajando efectivamente con una función $f(x)$ cualquiera derivable en $x = 1$. Del enunciado sabemos que

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 3 \to \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 3$$

Escrito así, esta información ya nos aporta al momento de determinar el valor del límite. Trabajemos un poco la expresión a calcular para hacer aparecer el valor del límite conocido. Para ello, apliquemos propiedades conocidas:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1} \frac{f(x^2)}{2x+2} &= \frac{1}{2} \lim_{x \to -1} \frac{f(x^2)}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x-1} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \to -1} \frac{f(x^2)}{x^2-1} \cdot (x-1) \end{aligned}$$

Suponiendo que los límites existen por separado:

$$\lim_{x\to -1} \frac{f\left(x^2\right)}{2x+2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to -1} \frac{f\left(x^2\right)}{x^2-1} \cdot \lim_{x\to -1} (x-1)$$

Escribiéndolo así hemos ganado dos cosas: la primera es que el primer límite es *casi* el que ya conocemos, solo basta hacer la sustitución $u = x^2$. Ahí es donde aparece el otro beneficio, al separar los límites solo tenemos que hacer la sustitución en el primero y no dejar el segundo, $(x-1)$, escrito en términos de raíces. De hecho, al ser continua la función $x-1$, el límite se evalua directamente sin dificultad.

Aplicando la sustitución al primer limite, tenemos que $u \to 1$ cuando $x \to -1$, de modo que

$$\lim_{x\to -1} \frac{f\left(x^2\right)}{2x+2} \quad = \quad \frac{1}{2}\lim_{u\to 1} \frac{f\left(u\right)}{u-1} \cdot (-2) = -\frac{2}{2}\cdot 3$$

Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to -1} \frac{f\left(x^2\right)}{2x+2} = -3}$$

Problema 2.12: *(I1-2013-1)* Para las siguientes preguntas f es una función continua en $x=0$ tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f\left(x\right)}{x} = 2$$

(a) Demuestre que $f\left(0\right) = 0$ y calcule $f'\left(0\right)$.

(b) Calcule el valor del límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left[f\left(x\right)\right]}{x^2}$$

Solución:

Nuevamente, dado el valor del límite estamos tentados a decir que una función adecuada es $f\left(x\right) = 2x$. Sin embargo, también lo es $\sin\left(2x\right)$, $2\sin\left(x\right)$ y un infinito conjunto de funciones, por lo que es incorrecto trabajar con una función en particular.

Debemos recurrir efectivamente la álgebra de límites para trabajar estas expresiones.

(a) Para demostrar que $f\left(0\right) = 0$ primero podemos hacer una observación intuitiva: en primer lugar $f\left(x\right)$ es continua, por lo que en particular existe en $x=0$. Notemos que la expresión $1/x$ por sí sola diverge, por lo que para que el límite exista, $f\left(x\right)$ no tiene ninguna otra opción más que tender a cero, de modo de *compensar* esa divergencia. Intuitivamente vemos que $f\left(0\right) = 0$.

También podemos hacerlo formalmente considerando que

$$f\left(0\right) = \lim_{x\to 0} f\left(x\right)$$

ya que $f(x)$ es continua. Sin embargo,

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \lim_{x\to 0} x \end{aligned}$$

ya que ambos límites existen por separado. Finalmente,

$$f(0) = 2 \cdot 0 = 0 \quad \blacksquare$$

Para calcular $f'(0)$ lo hacemos directamente de la definición:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 2$$

Es decir,

$$\boxed{f'(0) = 2}$$

(b) Recordemos el límite conocido

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Este límite lo podíamos obtener directamente de $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Lo que aquí era relevante era el hecho de que $\sin(x)$ se acercaba a cero a la misma velocidad que x, por lo cual podemos usar cualquier función continua $f(x)$ tal que $f(0) = 0$ y de esta forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin[f(x)]}{f(x)} = 1$$

Es decir, lo importante es que la velocidad en que ambos se aproximan sea la misma (en caso contrario no es una comparación justa). Si al lector le quedan dudas al respecto, refiérase al Problema 1.2. Luego, por el mismo procedimiento podemos llegar a que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[f(x)]}{[f(x)]^2} = \frac{1}{2}$$

Solo nos falta jugar como siempre hemos hecho con estas expresiones para obtener el límite pedido, esto debido a que el denominador es x^2 y no $[f(x)]^2$ como el del límite conocido. De esta forma,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[f(x)]}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[f(x)]}{[f(x)]^2} \cdot \frac{[f(x)]^2}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[f(x)]}{[f(x)]^2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos[f(x)]}{x^2} = 2}$$

2.2. Reglas de derivación

Resumimos las más importantes reglas de derivación en el siguiente cuadro:

Sean f y g funciones diferenciables en $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathbb{R}$ y $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathbb{R}$ respectivamente y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

(a) Homogeneidad: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\alpha f(x) = \alpha \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$, $x \in \mathcal{D}_1$.

(b) Superposición: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x) + g(x)] = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)$, $x \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

(c) Multiplicación: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x) \cdot g(x)] = g(x) \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) + f(x) \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)$ o equivalentemente $(f \cdot g)' = f'g + fg'$. $x \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

(d) Inverso multiplicativo: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{1}{f(x)}\right] = -\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$, $x \in \mathcal{D}_1 \setminus \{0\}$.

(e) División: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, $x \in (\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2) \setminus \{0\}$.

Sintetizamos otro resultado importante en el siguiente teorema:

Teorema: *(Regla de la cadena)* Bajo la misma definición anterior

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ g)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} \quad \text{o alternativamente} \quad (f \circ g)'(x) = f'[g(x)]\, g'(x)$$

con $x \in \operatorname{Rec}\{g(x)\} \cap \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$.

En los próximos problemas el lector podrá notar que la derivación es una operación prácticamente mecánica tras la debida ejercitación, por lo que aquí solo se enfatiza en problemas con un nivel de dificultad más interesante. En las referencias bibliográficas mínimas del curso se puede encontrar una gran cantidad de funciones derivadas para ejercitación.

Problema 2.13: Demuestre que para f, g funciones diferenciables se cumple que

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Luego,

(a) Verifique este resultado para $f(x) = \alpha x^2$ con α constante.

(b) Use este resultado para calcular $f'(x)$ si $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.

Solución:

Se tiene, por definición que

$$(f \cdot g)' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} f' \cdot g + f \cdot g' &= g(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + g(x+h)f(x) - f(x)g(x)}{h} \end{aligned}$$

Esto nos permite darnos cuenta de la conexión que tiene que haber entre ambos resultados. Observe que si a la primera expresión le sumamos y le restamos $f(x+h)g(x)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} f \cdot g' &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\left[g(x+h) - g(x)\right] + g(x)\left[f(x+h) - f(x)\right]}{h} \\ &= \underbrace{\lim_{h \to 0} f(x+h)}_{f(x) \text{ es continua}} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{g'(x)} + \underbrace{\lim_{h \to 0} g(x)}_{\text{constante}} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{f'(x)} \\ &= f \cdot g' + f' \cdot g \end{aligned}$$

Queda entonces demostrado. ■

(a) Aplicando el resultado anterior, hacemos que $h(x) = \alpha$ (función constante) y $g(x) = x^2$. Entonces,

$$f(x) = h(x) \cdot g(x)$$

Usando la regla del producto vista anteriormente, se tiene que

$$f'(x) = (h \cdot g)' = h' \cdot g + h \cdot g'$$

Notando que $h'(x) = 0$ (derivación de función constante) y que $g'(x) = 2x$ (derivación de función polinomial), se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \cdot x^2 + \alpha \cdot 2x \\ &= 2\alpha x \end{aligned}$$

El cual es el resultado esperable de la propiedad de homogeneidad de la derivada. Es decir, si α es constante, entonces

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

(b) Si hacemos $g(x) = \sin(x) \to g'(x) = \cos(x)$ y $h(x) = \cos(x) \to h'(x) = -\sin(x)$, entonces

$$f = g \cdot h \to f' = g' \cdot h + g \cdot h' = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

A partir de las reglas de multiplicación y división podemos aplicar fuerza bruta y obtener rápidamente algunas derivadas. Con ello observamos que la integración por lo general genera expresiones más complicadas de trabajar.

Problema 2.14: Calcule la función derivada de la función

$$f(x) = \frac{3x^2e^x + x^3\tan(x)}{4x^2 + 9\sec(x)}$$

Solución:

Sean g y h funciones cualesquiera, entonces por regla del cuociente se tiene que:

$$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$$

Por lo tanto, aplicamos esta regla considerando:

- $g(x) = 3x^2e^x + x^3\tan(x)$.
- $h(x) = 4x^2 + 9\sec(x)$.

Al derivar, se hace evidente que necesitaremos usar la regla del producto:

$$(m \cdot n)' = m'n + mn'$$

y la linealidad de la derivada:

$$(\alpha m + \beta n)' = \alpha m' + \beta n'$$

Entonces,

$$g'(x) = 6xe^x + 3x^2e^x + 3x^2\tan(x) + x^3\tan'(x)$$
$$h(x) = 8x + 9\sec'(x)$$

Donde,

$$\tan'(x) = \left[\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right]' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

y

$$\sec'(x) = \left[\frac{1}{\cos(x)}\right]' = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \tan(x)\sec(x)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 6xe^x + 3x^2e^x + 3x^2\tan(x) + x^3\sec^2(x) \\ h'(x) &= 8x + 9\tan(x)\sec(x) \end{aligned}$$

Con estos valores y realizando las simplificaciones pertinentes, concluimos que

$$f'(x) = \frac{6xe^x + 3x^2e^x + 3x^2\tan(x) + x^3\sec^2(x)}{4x^2 + 9\sec(x)}$$

$$\rightarrow \boxed{f'(x) = -\frac{\left[3x^2e^x + x^3\tan(x)\right]\left[8x + 9\sec(x)\tan(x)\right]}{\left[4x^2 + 9\sec(x)\right]^2}}$$

Se pueden extender las reglas anteriores a derivadas algo más interesantes desde el punto de vista práctico:

Problema 2.15: Calcule la función derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \sin(x)\exp\left(\sqrt{x+\cos(2x)}\right)$.

(b) $f(x) = \left(\sqrt{\tan(x)}\right)^{x+1}$.

(c) $f(x) = \dfrac{2^x \tan(x)}{x^3+6x+7}$.

(d) $f(x) = \sin(x^{\cos x}) + \cos(x^{\sin x})$.

Solución:

(a) Lo primero que se nota es el producto de dos funciones. Por lo tanto, aplicamos regla del producto:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin(x)\right) \cdot \exp\left(\sqrt{x+\cos(2x)}\right) + \sin(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\left(\sqrt{x+\cos(2x)}\right)$$

donde $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x)$. Por calcular la derivada de $\exp\left(\sqrt{x+\cos(2x)}\right)$. Se hace evidente la necesidad de utilizar regla de la cadena:

$$x \to x+\cos(2x) \to \sqrt{x+\cos(2x)} \to \exp\left(\sqrt{x+\cos(2x)}\right)$$

Luego,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp\left(\sqrt{x+\cos(2x)}\right) = \exp\left(\sqrt{x+\cos(2x)}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+\cos(2x)}} \cdot (1 - 2\sin(2x))$$

Finalmente,

$$\boxed{f'(x) = \cos(x)\exp\left(\sqrt{x+\cos(2x)}\right) + \frac{\sin(x)\left[1-2\sin(2x)\right]\exp\left(\sqrt{x+\cos(2x)}\right)}{2\sqrt{x+\cos(2x)}}}$$

(b) La función es de la forma $g(x)^{x+1}$, donde como evidentemente podemos observar, radica la dificultad de derivar una función que es exponencial y a la vez potencia. Una forma posible de hacerlo es derivando la función exponencial que ya conocemos: e^x. Por lo tanto, hacemos un cambio de base a:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\tan(x)}\right)^{x+1} &= \exp\left(\ln\sqrt{\tan(x)}\right)^{x+1} \\ &= \exp\left((x+1)\ln\sqrt{\tan(x)}\right)\end{aligned}$$

Luego, por regla de la cadena tendremos que

$$f'(x) = \exp\left((x+1)\ln\sqrt{\tan(x)}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+1)\ln\sqrt{\tan(x)}$$

Nos preocupamos de calcular la segunda derivada. Para ello, aplicamos en primer lugar la regla del producto:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+1)\ln\sqrt{\tan(x)} = \ln\sqrt{\tan(x)} + (x+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\sqrt{\tan(x)}$$

Siguiendo el esquema de composición

$$x \to \tan(x) \to \sqrt{\tan(x)} \to \ln\sqrt{\tan(x)}$$

obtenemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln \sqrt{\tan(x)} = \frac{1}{\sqrt{\tan(x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\tan(x)}} \sec^2(x)$$

Con esto,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+1) \ln \sqrt{\tan(x)} = \ln \sqrt{\tan(x)} + (x+1)\frac{\sec^2(x)}{2\tan^2(x)}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left((x+1)\ln\sqrt{\tan(x)}\right) \cdot \left[\ln\sqrt{\tan(x)} + (x+1)\frac{\sec^2(x)}{2\tan^2(x)}\right] \\ &\to \boxed{f'(x) = \left(\sqrt{\tan(x)}\right)^{x+1} \cdot \left[\ln\sqrt{\tan(x)} + (x+1)\frac{\sec^2(x)}{2\tan^2(x)}\right]} \end{aligned}$$

(c) Este es un ejercicio de simple aplicación de reglas del producto y la división. Recordando que:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Tenemos que:

$$f'(x) = \frac{(2^x \tan(x))' \cdot (x^3+6x+7) - 2^x \tan(x) \cdot (x^3+6x+7)'}{(x^3+6x+7)^2}$$

donde

$$\begin{aligned} (2^x \tan(x))' &= (\exp(\ln(2)x)\tan(x))' \\ &= \ln(2)\exp(\ln(2)x)\tan(x) + \exp(\ln(2)x)\sec^2(x) \\ &= \ln(2)2^x \tan(x) + 2^x \sec^2(x) \end{aligned}$$

y

$$\left(x^3+6x+7\right)' = 3x^2+6$$

De esta forma,

$$\boxed{f'(x) = \frac{[\ln(2)2^x \tan(x) + 2^x \sec^2(x)](x^3+6x+7) - 2^x \tan(x) \cdot (3x^2+6)}{(x^3+6x+7)^2}}$$

(d) Por linealidad,

$$f'(x) = \sin(x^{\cos x})' + \cos(x^{\sin x})'$$

Calculamos la derivada del primer sumando: bajo el esquema de composición:

$$x \to x^{\cos x} \to \sin(x^{\cos x})$$

Urge calcular la derivada de $x^{\cos x}$, procediendo de forma análoga al ejercicio anterior. De esta forma,

$$\begin{aligned} (x^{\cos x})' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(\cos x \ln x) \\ &= \exp(\cos x \ln x) \cdot \left[\frac{\cos(x)}{x} - \sin(x)\ln(x)\right] \\ &= x^{\cos x} \cdot \left[\frac{\cos(x)}{x} - \sin(x)\ln(x)\right] \end{aligned}$$

De esta forma,

$$\sin(x^{\cos x})' = \cos\left(x^{\cos x}\right) \cdot x^{\cos x} \cdot \left[\frac{\cos(x)}{x} - \sin(x)\ln(x)\right]$$

Análogamente,

$$\cos(x^{\sin x})' = -\sin\left(x^{\sin x}\right) \cdot x^{\sin x} \cdot \left[\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)\ln(x)\right]$$

Concluimos que:

$$\boxed{f'(x) = \cos\left(x^{\cos x}\right) \cdot x^{\cos x} \cdot \left[\frac{\cos(x)}{x} - \sin(x)\ln(x)\right] - \sin\left(x^{\sin x}\right) \cdot x^{\sin x} \cdot \left[\frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)\ln(x)\right]}$$

Problema 2.16: Sea $a \in \mathbb{R}$ y la función

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \arctan \frac{\sin(x)}{a + \sqrt{a^2-1} + \cos x}$$

pruebe que $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

Solución:

Derivamos directamente la expresión, observando que $\sqrt{a^2-1}$ **es un número fijo** pues estamos derivando en función de x. De esta forma,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \frac{1}{1 + \dfrac{\sin^2(x)}{\left(a + \sqrt{a^2-1} + \cos x\right)^2}} \cdot \frac{\cos x \cdot \left(a + \sqrt{a^2-1} + \cos x\right) + \sin^2 x}{\left(a + \sqrt{a^2-1} + \cos x\right)^2}$$

donde se aplicó correctamente la regla de la cadena y la regla de derivación de un cociente de funciones. Ahora simplificamos factorizando por $1/\sqrt{a^2-1}$:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \left[1 - 2\frac{\cos x \cdot \left(a + \sqrt{a^2-1} + \cos x\right) + \sin^2 x}{\left(a + \sqrt{a^2-1} + \cos x\right)^2 + \sin^2 x}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \left[\frac{\left(a + \sqrt{a^2-1} + \cos x\right)^2 - 2\cos x \cdot \left(a + \sqrt{a^2-1} + \cos x\right) - \sin^2 x}{\left(a + \sqrt{a^2-1} + \cos x\right)^2 + \sin^2 x}\right] \leftarrow \text{factorizamos} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \left[\frac{\left(a + \sqrt{a^2-1} + \cos x\right)\left(a + \sqrt{a^2-1} - \cos x\right) - \sin^2 x}{\left(a + \sqrt{a^2-1} + \cos x\right)^2 + \sin^2 x}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \left[\frac{\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)^2 - \cos^2 x - \sin^2 x}{\left(a + \sqrt{a^2-1} + \cos x\right)^2 + \sin^2 x}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \left[\frac{\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)^2 - 1}{\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)^2 + 2\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)\cos x + 1}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \left[\frac{a^2 + 2a\sqrt{a^2-1} + a^2 - 1 - 1}{2a^2 + 2a\sqrt{a^2-1} + 2\left(a + \sqrt{a^2-1}\right)\cos x}\right]
\end{aligned}$$

Reagrupando términos:

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{2}{\sqrt{a^2-1}} \frac{a^2 + a\sqrt{a^2-1} - 1}{2a\left(a+\sqrt{a^2-1}\right) + 2\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\cos x} \\
&= \frac{a^2 + a\sqrt{a^2-1} - 1}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\sqrt{a^2-1}\,(a+\cos x)} \\
&= \frac{a^2 + a\sqrt{a^2-1} - 1}{\left(a^2 + a\sqrt{a^2-1} - a\right)(a+\cos x)}
\end{aligned}
$$

Finalmente, $y' = \dfrac{1}{a+\cos x}$, demostrando así lo pedido. ■

Las reglas de derivación no solo deben ser utilizadas apropiadamente para la obtención de funciones derivadas, sino que también para la demostración de propiedades. Veamos algunos ejemplos:

Problema 2.17:

(a) Sean f y g funciones reales tales que

$$f'(x) = g(x)$$

$$g'(x) = f(x)$$

y $f(0) = 0$, $g(0) = 1$. Demuestre que $F(x) = (f(x))^2 - (g(x))^2$ es constante y determine su valor.

(b) Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables y definidas en $\mathbb{R}^+$ tales que $f'(x) = \arctan(x)$ y $g'(x) = 1/x$. Si se define

$$h(x) = \frac{1}{2}g(1+x^2) - xf'(x)$$

Demuestre que $f+h$ es función constante en $\mathbb{R}^+$.

Solución:

Recordamos que para $f(x) \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, i.e. f es una función constante, se tiene que

$$f'(x) = 0$$

Por lo tanto, en ambos problemas podemos demostrar que la función es constante demostrando que su derivada es cero para todo x en su dominio.

(a) Tenemos que demostrar que $F(x)$ es constante, lo que es equivalente a demostrar que

$$F'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(F)$$

Por lo tanto, es necesario derivar $F(x)$:

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)\right)^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(g(x)\right)^2$$

donde utilizamos la linealidad de la derivada para llegar a este resultado. Nos urge ahora calcular cada una de las derivadas individuales. Observe que $(f(x))^2$ es una composición de funciones, especificamente de x^2 y $f(x)$. Es decir,

$$x \to f(x) \to (f(x))^2$$

La regla de la cadena nos dice que debemos derivar cada una de estas operaciones, evaluarla en el paso anterior e ir multiplicando los resultados. En este caso,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x)\right)^2 = \underbrace{2f(x)}_{2x \leftarrow f(x)} \cdot f'(x)$$

Por lo tanto,

$$F'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2g(x) \cdot g'(x)$$

pero $g(x) = f'(x)$ y $g'(x) = f(x)$, luego,

$$F'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 2f'(x) \cdot f(x) = 0$$

por lo tanto, $F(x)$ es efectivamente constante. Para determinar el valor de esta constante, utilizamos la información adicional que se nos entrega: f y g evaluadas en cero. Tal como está definida F, es directo en qué punto tenemos que evaluarla (y por lo tanto, será el mismo en todos los demás):

$$\begin{aligned} F(0) &= (f(0))^2 - (g(0))^2 \\ &= 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Luego, la función vale -1 en todo su dominio. ■

(b) Tenemos que demostrar que la derivada de $f + h$, $f' + h'$ es cero en todo su dominio. Nos falta conocer solamente la derivada de h:

$$h'(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(1+x^2) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}xf'(x)$$

Notando las operaciones involucradas:

$$x \to 1 + x^2 \to g'(1+x^2)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(1+x^2) &= g'(1+x^2)\cdot 2x \quad \text{como } g'(x) = \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Por otra parte, por regla de la cadena:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}xf'(x) = f'(x) + xf''(x)$$

donde $f''(x) = \dfrac{d}{dx}f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Por lo tanto,

$$h'(x) = \frac{x}{1+x^2} - \arctan(x) - \frac{x}{1+x^2}$$

Es decir,

$$f' + h' = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} - \arctan(x) - \frac{x}{1+x^2}$$

con lo cual

$$f' + h' = 0$$

y así hemos demostrado que es una función constante. ■

Finalizamos este apartado con dos problemas que integran apropiadamente todas las propiedades vistas:

Problema 2.18: *(Control 2 - 2013 - 1)* Calcule la función derivada de $f\left(x\right) = \arctan\left(2x\right) x^{\ln\left(x^2\right)}$.

Solución:

La primera expresión dominante es el producto de dos funciones, $\arctan\left(2x\right)$ y $x^{\ln\left(x^2\right)}$. La primera expresión es extremadamente sencilla de derivar por regla de la cadena:

$$x \to 2x \to \arctan\left(2x\right)$$

Es decir,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan\left(2x\right) = \frac{1}{1+\left(2x\right)^2}\cdot 2$$

La segunda expresión es relativamente más complicada, pero aplicamos el truco anteriomente visto:

$$g\left(x\right) = x^{\ln\left(x^2\right)} = e^{\ln(x)\ln\left(x^2\right)}$$

Derivamos haciendo uso de la regla de la cadena:

$$x \to \ln\left(x\right)\ln\left(x^2\right) \to e^{\ln(x)\ln\left(x^2\right)}$$

De esta forma,

$$g'\left(x\right) = e^{\ln(x)\ln\left(x^2\right)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x\right)\ln\left(x^2\right)$$

Derivamos la expresión faltante mediante regla del producto y regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(x\right)\ln\left(x^2\right) &= \frac{\ln\left(x^2\right)}{x} + \frac{2\ln\left(x\right)}{x} \\
\to g'\left(x\right) &= x^{\ln\left(x^2\right)}\frac{1}{x}\left[\ln\left(x^2\right) + 2\ln\left(x\right)\right]
\end{aligned}$$

Luego, aplicando regla del producto en la expresión global y factorizando obtenemos finalmente,

$$\boxed{f'\left(x\right) = 2x^{\ln\left(x^2\right)}\left[\frac{1}{1+4x^2} + \frac{\arctan\left(2x\right)}{x}\ln\left(x^2\right)\right]}$$

Problema 2.19: [**Propuesto**] Haciendo uso de inducción, demuestre la fórmula de Leibniz:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

donde $h^{(n)}$ representa la derivada $n-$ésima de la función h, es decir,

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}_{n \text{ veces}} h$$

2.3. Derivación implícita

En los siguientes problemas se asume que se tiene una expresión de la forma $F(x, y) = 0$ (por ejemplo, $x^2 + y^2 - 25 = 0$). Asumimos que $y = f(x)$, i.e. y depende de x. Es de nuestro interés determinar y' a partir de la relación $F(x, y) = 0$. Esto se puede lograr teniendo siempre presente:

(a) Reglas de derivación: se deriva por los medios habituales, se hace la excepción de considerar $y = y(x)$.

(b) En particular, la regla de la cadena: usamos y' en la notación. Ejemplo: y^2 al ser derivado es $2y \cdot y'$ y no $2y$ ya que $y = y(x)$.

(c) Agrupación de términos: $y' \cdot y' = (y')^2$.

(d) y' al ser derivado se convierte en y''. Análogamente: $y^{(n)} \to y^{(n+1)}$.

2.3.1. Curvas implícitas

Partamos con un ejemplo en el que se pueda entender apropiadamente la idea. Para propósitos directos partiremos reemplazando y por $f(x)$.

Problema 2.20: Se define la relación

$$\sin(x + y) = y^2 \cos(x)$$

donde y se define implícitamente como función de x. Calcule $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Solución:

El lector ya debe estar familiarizado con el hecho de que muchos objetos matemáticos no pueden ser descritos mediante una función. El caso más claro es la circunferencia, la cual representamos mediante la ecuación cartesiana implícita $x^2 + y^2 = 1$.

Si asumimos que y depende de x, entonces $y = f(x)$ y esta puede ser despejada según el signo que corresponda. Una de las necesidades que pueden surgir es calcular las ecuaciones de las rectas tangentes o similares, por lo cual se hace necesaria encontrar una técnica para calcularla directamente a partir de la ecuación inicial. En este caso, $x^2 + y^2 = 1$, que si bien es fácil de despejar, no representa la complejidad que pueden tener las expresiones implícitas, tal como se demuestra en la relación del enunciado. Aquí es donde entra en juego la derivación implícita.

La derivación implícita se puede interpretar como una aplicación o caso particular de la regla de la cadena. Digamos que $y = f(x)$ (por la definición de y función implícita). Entonces, si hacemos

$$g(x) = \sin(x+y) \to g(x) = \sin[x + f(x)]$$

$$h(x) = y^2 \cos(x) \to h(x) = [f(x)]^2 \cos(x)$$

Por lo tanto, la relación implícita se reduce a

$$g(x) = h(x)$$

Como esta igualdad sugiere que las funciones son iguales, entonces sus funciones derivadas también tienen que serlo. Es decir,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} h(x)$$

donde, por regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin[x + f(x)] \\ &= \cos[x + f(x)] \cdot (1 + f'(x)) \\ &= \cos(x+y) \cdot (1 + y') \end{aligned}$$

Si hacemos lo mismo para $h(x)$, observamos que bajo esta técnica aparece $y' = dy/dx$, la podemos tratar como un elemento algebraico y despejar.

Observación: Notemos que es muy esperable que y' aparezca en términos de y y x. Sin embargo, esto no debiera ser problema. La relación nos dice

$$\sin(x+y) = y^2 \cos(x)$$

y esto genera un objeto matemático correspondiente a una colección de puntos (x, y) que satisfacen la ecuación. Es decir, a priori sabremos cuáles son los x e y respectivos o se puede despejar y dado un x.

Con toda esta introducción, podemos aplicar derivación implícita aplicando la regla de la cadena en las expresiones dependientes de y:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= y^2 \cos(x) \qquad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ \cos(x+y)(1+y') &= 2y \cdot y' \cos(x) - y^2 \sin(x) \end{aligned}$$

Finalmente, de aquí podemos despejar con facilidad y':

$$y' (\cos(x+y) - 2y\cos(x)) = -\cos(x+y) - y^2 \sin(x)$$

$$\rightarrow \boxed{y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\cos(x+y) + y^2\sin(x)}{\cos(x+y) - 2y\cos(x)}}$$

Problema 2.21: *(Control 2 - 2013 - 1)* Dada la ecuación $f(x) + \dfrac{xf(x)}{1+f(x)} = \dfrac{8}{3}$ y $f(1) = 2$, entonces calcule el valor de $f'(1)$.

Solución:

Este problema resulta aún más explícito que el anterior en cuanto a cómo debe ser aplicada la derivación implícita. Como la relación anterior es una igualdad, derivamos sin mayores complicaciones cada uno de los extremos y aplicamos apropiadamente las propiedades aprendidas:

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{xf(x)}{1+f(x)} &= \frac{8}{3} \quad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ f'(x) + \frac{[f(x) + xf'(x)][1+f(x)] - xf(x)f'(x)}{[1+f(x)]^2} &= 0 \end{aligned}$$

Buscamos en particular el valor de $f'(1) = y$. Como sabemos que $f(1) = 2$, reemplazamos:

$$\begin{aligned} y + \frac{(2+y)(1+2) - 2y}{(1+2)^2} &= 0 \\ \leftrightarrow y + \frac{y+6}{9} &= 0 \\ \leftrightarrow \frac{10}{9}y + \frac{2}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{f'(1) = -\frac{3}{5}}$$

Problema 2.22:

(a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada por la expresión

$$x^3 - y^2 + \sqrt{xy} = 1$$

en el punto $(1,1)$.

(b) Encuentre todos los puntos de la curva de ecuación $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ donde $y' = 0$.

Solución:

(a) No vale la pena gastar nuestros esfuerzos en intentar despejar y en términos de x o viceversa. Sabemos que la relación presentada describe una curva implícita en el plano. Asumimos y como función de x y derivamos usando derivación implícita:

$$\begin{aligned} x^3 - y^2 + \sqrt{xy} &= 1 \quad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ 3x^2 - 2y \cdot y' + \frac{y + xy'}{2\sqrt{xy}} &= 0 \end{aligned}$$

Despejando y':

$$\left(\frac{x}{2\sqrt{xy}} - 2y\right) y' = -\frac{y}{2\sqrt{xy}} - 3x^2$$

$$\rightarrow y' = \left(-\frac{y}{2\sqrt{xy}} - 3x^2\right) \cdot \left(\frac{x}{2\sqrt{xy}} - 2y\right)^{-1}$$

Como buscamos la recta tangente en el punto $(1,1)$, podemos introducir los valores de x e y:

$$\begin{aligned} y' &= \left(-\frac{1}{2} - 3\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2\right)^{-1} \\ &= \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Sabemos que la ecuación de la recta tangente está dada por

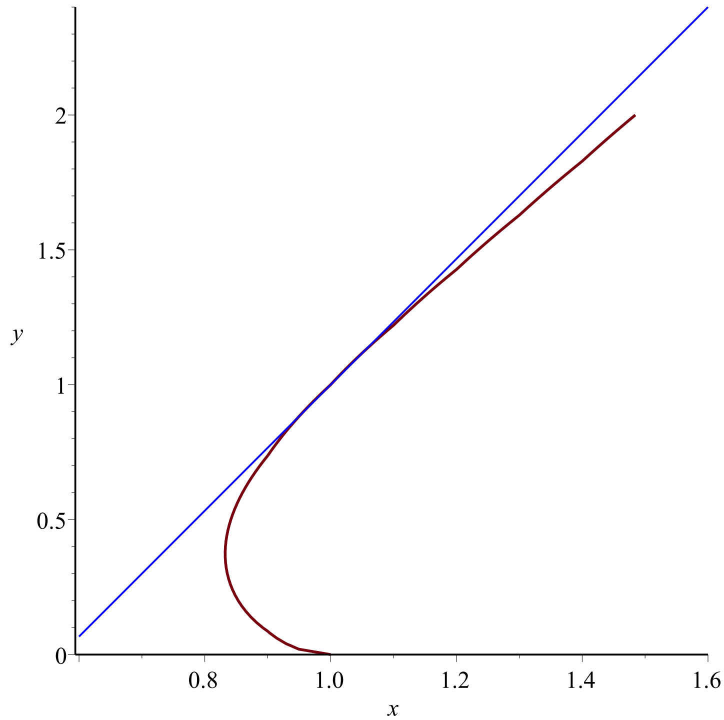
$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m = y'$$

Reemplazando con $x_0 = y_0 = 1$ y $y' = 7/3$, obtenemos la ecuación

$$y = \frac{7}{3}(x - 1) + 1$$

$$\boxed{y = \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}}$$

Podemos comprobar este resultado de forma gráfica:



(b) Nuevamente no queda más que aplicar correctamente derivación implícita:

$$\begin{aligned} \left(x^2+y^2\right)^2 &= 2(x^2-y^2) \quad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ 2\left(x^2+y^2\right)(2x+2y\cdot y') &= 2\left(2x-2y\cdot y'\right) \end{aligned}$$

Los puntos donde $y'=0$ satisfacerán la ecuación: (se reemplaza $y'=0$ en la ecuación anterior)

$$4x\left(x^2+y^2\right)=4x$$

Pero se suma adicionalmente que los puntos deben estar en la curva implícita del enunciado, por lo cual se genera el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x\left(x^2+y^2\right) &= 4x \\ \left(x^2+y^2\right)^2 &= 2(x^2-y^2) \end{aligned}$$

Estamos tentados a simplificar la primera ecuación, pero para ello debe cumplirse que $x\neq 0$. Por lo tanto, resolvamos primero $x=0$ para no perder las soluciones. La segunda ecuación queda

$$y^4=-2y^2 \to y^4+2y^2=0 \to y^2\left(y^2+2\right)=0$$

La única solución real es $y=0$. Por lo tanto, $(0,0)$ es una solución posible pero descartable, ya que al despejar y' de la relación observamos que se produce una indeterminación al evaluar en $x=y=0$. Digamos ahora que $x\neq 0$. Entonces, simplificando:

$$\begin{aligned} \left(x^2+y^2\right) &= 1 \\ \left(x^2+y^2\right)^2 &= 2\left(x^2-y^2\right) \end{aligned}$$

Reemplazando la primera en la segunda,

$$\frac{1}{2}+y^2=x^2$$

Reemplazamos con esto en la primera, y obtenemos

$$2x^2 = \frac{3}{2} \to x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Luego tomamos estos valores y los ubicamos en la ecuación anterior, obteniendo que

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

De esta forma, los cuatro puntos posibles son:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}}$$

Problema 2.23: Considere la curva $y = f(x)$ definida por la ecuación

$$x^2 + \frac{x}{1+y^2} - \arctan(y) = 2$$

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de ordenada $y = 0$ con $x > 0$.

Solución:

Recuerde el lector que en el punto (x_0, y_0) la ecuación de la recta tangente viene dada por:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

De donde ya conocemos $y_0 = 0$. Por determinar x_0 y $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)$. Reemplazando en la ecuación con $y = 0$:

$$x_0^2 + \frac{x_0}{1+0^2} - \arctan(0) = 2 \to x_0^2 + x_0 = 2$$

O bien, $x_0^2 + x_0 - 2 = (x_0+2)(x_0-1) = 0$. Como se impone en la curva que $x > 0$, entonces necesariamente $x_0 = 1$. Esto en efecto evidencia que existen dos abscisas en la curva que tienen ordenada cero.

Luego debemos determinar el valor de la derivada. Para ello, realizamos derivación implícita de la ecucación, considerando que $y = f(x)$ y que estamos derivando en función de x:

$$2x + \frac{(1+y^2) - x \cdot 2y \cdot y'}{(1+y^2)^2} - \frac{y'}{1+y^2} = 0$$

Evaluando en $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ queda la ecuación algebraica:

$$2 + 1 - y' = 0 \to y' = 3$$

Finalmente, la ecuación de la recta tangente a dicho punto se escribe como:

$$\frac{y-0}{x-1} = 3 \to \boxed{y = 3x - 3}$$

2.3.2. Funciones inversas

Consideremos una función inyectiva y diferenciable $f(x)$, de modo que $y = f(x)$. Al haber inyectividad, garantizamos la existencia de una función inversa, de modo que $x = f^{-1}(y)$. ¿Cuál es el valor de la función derivada de $f^{-1}(x)$? Supongamos que

$$y = f^{-1}(x) \rightarrow x = f(y)$$

Haciendo derivación implícita:

$$1 = f'(y)\, y' = f'\left[f^{-1}(x)\right] y'$$

Despejando y', lo que buscamos:

$$\boxed{y' = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}}$$

Se aconseja siempre recordar la deducción de la fórmula en vez de su simple memorización. A continuación veremos algunos problemas al respecto.

Problema 2.24:

(a) Calcule las funciones derivadas de $\ln(x)$ y $\sin^{-1}(x)$. *Propuesto:* Haga lo propio para $\tan^{-1}(x)$.

(b) Se sabe que $\forall x \in \mathbb{R}$, la función $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3$ es derivable e invertible. Se define $g(x) = f(x^{10} + x^2 + 1) - f^{-1}(x)$. Calcule $g'(3)$.

Solución:

(a) Tenemos que

$$y = \ln(x) \longleftrightarrow x = e^y$$

donde queremos calcular y'. Por derivación implícita, derivamos a ambos lados y consideramos y como función implicita de x:

$$1 = e^y \cdot y' = x \cdot y'$$

Entonces,

$$y' = \frac{1}{x}$$

De forma análoga, queremos calcular y' para

$$y = \sin^{-1}(x) \longleftrightarrow x = \sin(y)$$

Derivando implícitamente,

$$1 = \cos(y) \cdot y'$$

Es decir,

$$y' = \frac{1}{\cos(y)}$$

Sin embargo, ¿qué es $\cos(y)$ en términos de x? Sabemos que:

$$\begin{aligned}\cos(y) &= \sqrt{1-\sin^2(y)} \leftarrow \text{positivo, pues } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ &= \sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

(b) Tenemos que

$$g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\left(x^{10} + x^2 + 1\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x)$$

El minuendo lo podemos calcular por regla de la cadena. El sustraendo en cambio requiere otro tipo de análisis. Notemos que si queremos calcular y' en

$$y = f^{-1}(x)$$

Podemos usar derivación implícita para dejarla expresada en términos de $f(x)$, pues

$$x = f(y) \to 1 = f'(y)y' \to y' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

De esta forma,

$$g'(x) = f'(x^{10} + x^2 + 1) \cdot \left(10x^9 + 2x\right) - \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Calculamos $f^{-1}(3)$: ¿para qué valor de x se cumple $f(x) = 3$? Evidentemente para $x = 0$. Luego, $f^{-1}(3) = 0$. Considerando

$$f(x) = -x^3 + x^2 - x + 3 \to f'(x) = -3x^2 + 2x - 1$$

Vamos evaluando:

$$\begin{aligned}\left[x^{10} + x^2 + 1\right]_{x=3} &= 3^{10} + 3^2 + 1 = a \\ \left[10x^9 + 2x\right]_{x=3} &= 10 \cdot 3^9 + 2 \cdot 3 = b \\ \left[-3x^2 + 2x - 1\right]_{x=0} &= -1 \\ \left[-3x^2 + 2x - 1\right]_{x=a} &= -3\left(3^{10} + 3^2 + 1\right)^2 + 2\left(3^{10} + 3^2 + 1\right) - 1 = c\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}g'(3) &= b \cdot c + 1 \\ &= -\left(3\left(3^{10} + 3^2 + 1\right)^2 - 2\left(3^{10} + 3^2 + 1\right) + 1\right)\left(10 \cdot 3^9 + 2 \cdot 3\right) + 1\end{aligned}$$

$$\to \boxed{g'(3) = \left(-3^{21} - 20 \cdot 3^{11} - 281\right)\left(10 \cdot 3^9 + 6\right) + 1}$$

Problema 2.25: Sean f y g funciones derivables e inyectivas. La tabla adjunta muestra los valores de f, g y sus derivadas sobre algunos valores:

	f	g	f'	g'
1	3	2	4	1
2	1	3	3	2
3	2	4	2	4
4	4	1	1	2

A partir de esta información, calcule:

(a) $(g \circ g)'(2)$.

(b) $(f^{-1} \circ g)'(4)$.

Solución:

(a) Tenemos, por regla de la cadena, el siguiente esquema:

$$x \to g(x) \to g'(x)$$

Luego,

$$(g \circ g)'(x) = g'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Evaluando en $x = 2$:

$$(g \circ g)'(2) = g'(g(2)) \cdot g'(2) = g'(3) \cdot 2$$

$$\boxed{(g \circ g)'(2) = 8}$$

(b) Recordamos primero la fórmula para derivada de función inversa, por medio de derivación implícita:

$$y = f^{-1}(x) \to x = f(y) \to 1 = f'(y)y' \to y' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Bajo el esquema

$$x \to g(x) \to f^{-1}(g(x))$$

calculamos la derivada aplicando regla de la cadena

$$\left(f^{-1} \circ g\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(g(x))\right)} \cdot g'(x)$$

e introducimos los valores respectivos:

$$g(4) = 1 \to f^{-1}(g(4)) = f^{-1}(1) = 2 \to f'(f^{-1}(g(4))) = 3$$

$$g'(4) = 2$$

por lo cual,

$$\boxed{\left(f^{-1} \circ g\right)'(4) = \frac{2}{3}}$$

Problema 2.26: Calcule de la forma más simplificada posible la función derivada de

$$f(x) = \sinh^{-1}(\tan\, x)$$

Solución:

Recordamos que la fórmula para calcular la derivada de la función inversa corresponde a:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g^{-1}(x) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}$$

De esta forma, bajo el esquema de derivación

$$x \to \tan(x) \to \sinh^{-1}(\tan(x))$$

tenemos por la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(x)\bigg|_{x=\tan(x)} \cdot \sec^2(x)$$

Para poder aplicar la regla de función inversa tenemos que primero determinar la derivada de $\sinh(x)$. Para ello, aplicamos la definición:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \to \sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

Luego,

$$f'(x) = \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(\tan x))}\sec^2(x)$$

Como sabemos que

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \to \cosh(x) = \sqrt{1+\sinh^2(x)} \text{ (} \cosh(x) \text{ es siempre positivo)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\sinh^{-1}(\tan(x)))}}\sec^2(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}\sec^2(x) \\ &= \frac{\sec^2(x)}{\sqrt{\sec^2(x)}} = \frac{\sec^2(x)\sqrt{\sec^2(x)}}{\sec^2(x)} \end{aligned}$$

Finalizamos:

$$\boxed{f'(x) = |\sec(x)|}$$

Problema 2.27: *(I2-2013-1)* Sea $f(x) = 2x + \sin(x)$ y sea g su función inversa. Calcule $g'(2\pi)$.

Solución:

Tenemos que $g(x) = f^{-1}(x)$. Recordando la fórmula de derivada de función inversa, tendremos que

$$g'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}$$

Luego,

$$g'(2\pi) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(2\pi)\right]}$$

Nos preguntamos: ¿cuál es el valor de $f^{-1}(2\pi)$? Buscamos un x_0 tal que $f(x_0) = 2\pi$. Por simple inspección podemos determinar que $x_0 = \pi$ satisface lo pedido. Luego,

$$g'(2\pi) = \frac{1}{f'(2\pi)} = \frac{1}{2 + \cos(\pi)} = \frac{1}{2 - 1}$$

Es decir,

$$\boxed{g'(2\pi) = 1}$$

Problema 2.28: Dada la función invertible $f(x) = x^3 + 3x + 6$. Calcule $\left(f^{-1}\right)'(6)$

Solución:

Ya sabemos que:

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(x)\right]}$$

Luego, calculamos lo requerido. En primer lugar,

$$f^{-1}(6) = 0$$

por simple inspección pues asumimos cierto que la función es invertible[2] y además $f(0) = 6$. Adicionalmente,

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$

Entonces,

$$\left(f^{-1}\right)'(6) = \frac{1}{f'\left[f^{-1}(6)\right]} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

$$\rightarrow \boxed{\left(f^{-1}\right)'(6) = \frac{1}{3}}$$

---

[2]De todas formas, basta ver que la función es monótona creciente (por su derivada) y por lo tanto invertible.

3. Aplicaciones de la derivada

En este capítulo se aplican los conocimientos teóricos vistos en el capítulo anterior para darle usos prácticos a la diferenciación. Son muchas las aplicaciones directas de la derivada, por lo cual este capítulo se puede entender como una miscelánea de diversos tipos de problemas.

Desde el punto de vista Ingenieril este apartado es de gran importancia, ya que es una de las pocas instancias en que se puede realizar una conexión con el modelamiento matemático y problemas y modelos reales en los que los contenidos del curso pueden ser aplicados.

3.1. Tasas de cambio

La idea en estos problemas es determinar la tasa de cambio de una cantidad en términos de la tasa de cambio de otra cantidad (que puede ser, por ejemplo, más facil de medir). El procedimiento siempre consiste en encontrar una ecuación que relacione ambas cantidades y luego utilizar apropiadamente la regla de la cadena para derivar ambos lados con respecto al tiempo.

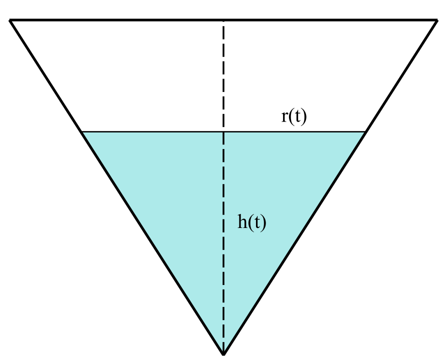
Problema 3.1:

(a) En un depósito cónico recto entra a razón de 8 $[m^3/s]$ cierto líquido incompresible. El radio y la altura del depósito son 21 $[m]$ y 35 $[m]$ respectivamente. Calcule la tasa de crecimiento de la altura cuando ésta toma un valor de $h = 6$ $[m]$.

(b) El lanzamiento de un cohete es seguido por una cámara situada en el suelo a 3 km. del punto de lanzamiento. Cuando el cohete ha subido 4 $[km]$ y viaja a 300 m/seg, ¿con qué rapidez varía el ángulo de la cámara (medido respecto a la horizontal)?

Solución:

(a) Partamos presentando un gráfico de la situación:



A partir de la situación graficada, notamos que el volumen y la altura de agua son inmediatamente funciones del tiempo. La tasa de crecimiento de altura (lo que nos piden calcular) se mide como

$$\mu = \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

Es decir, la variación de la altura por unidad de tiempo. Como esta será una variación evidentemente instantánea, hacemos $\Delta t \to 0$ teniendo que

$$\mu = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

Para el depósito lleno hasta una altura h, el volumen de agua ocupado en el depósito viene dado por la expresión

$$V_{\text{agua}} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

donde r representa el radio del estanque para la altura h, i.e. $r = r(h) = r(h(t)) = r(t)$. Es decir, r y h en este caso están relacionadas. ¿Cómo lo hacemos? Por proporcionalidad (teorema de Thales):

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} \to r(t) = \frac{3}{5}h(t)$$

Sabemos la tasa a la cual entra agua al estanque:

$$\frac{\mathrm{d}V_{\text{agua}}}{\mathrm{d}t} = 8\,[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$$

por lo cual, podemos determinar μ derivando la expresión para el volumen de agua con respecto al tiempo. Note que tanto V_{agua} como h son funciones del tiempo, razón por la cual se debe realizar derivación implícita:

$$\begin{aligned} V_{\text{agua}}(t) &= \frac{\pi r(t)^2 h(t)}{3} = \frac{\pi}{3}\frac{9}{25}h(t)^2 h(t) \quad / \frac{d}{dt} \\ \dot{V}_{\text{agua}} &= \frac{3\pi}{25} 3h^2(t)\dot{h} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\dot{h} = \mu = \frac{25}{9\pi h^2(t)}\dot{V}_{\text{agua}}$$

Nos piden la tasa para la cual $h(t) = 6 \to h^2(t) = 36$ y por enunciado $\dot{V}_{\text{agua}} = 8\,[\mathrm{m}^3/\mathrm{s}]$. Finalmente,

$$\mu = \frac{25 \cdot 8}{9 \cdot 36\pi}\,[\mathrm{m/s}]$$

$$\therefore \boxed{\mu = \frac{50}{81\pi}\,[\mathrm{m/s}]}$$

(b) A partir de la gráfica de la situación, tenemos que la altura del cohete y el ángulo son funciones del tiempo, i.e. $h = h(t)$ y $\theta = \theta(t)$ donde buscamos $\theta'(t)$ a partir de $h(t)$ y $h'(t)$ conocidos. El siguiente paso es relacionar la altura con el ángulo.

Como sabemos el valor del cateto adyacente a θ y queremos relacionar h con θ, la mejor idea es hacerlo por medio de la tangente:

$$\tan\theta = \frac{h}{3}$$

Derivando implícitamente:

$$\sec^2\theta \cdot \theta'(t) = \frac{h'}{3} \to \theta'(t) = \frac{h'(t)}{3}\cos^2\theta$$

Sabemos que el cohete viaja a $300\,[\text{m/s}] = 0,3\,[\text{km/s}] = h'(t)$ y que buscamos medir la variación del ángulo cuando se encuentra a 4 [km] de altura. Por lo tanto, nos falta determinar $\cos^2\theta$. Como la hipotenusa del triángulo formado es evidentemente 5, tenemos que

$$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$$

con lo cual

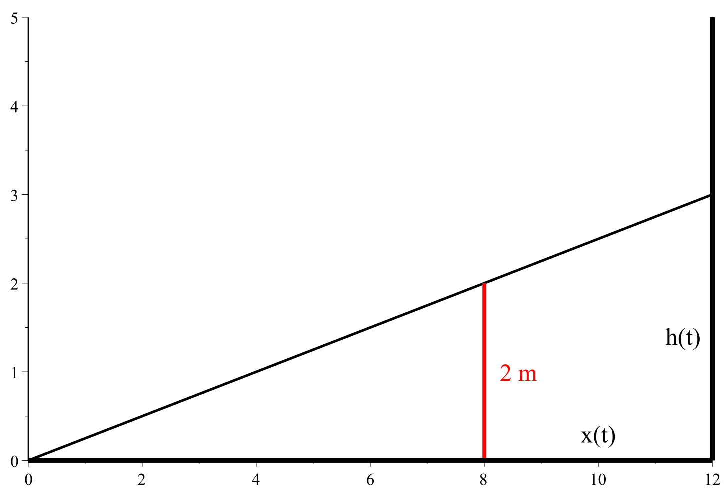
$$\theta'(t) = \frac{0,3}{3}\frac{9}{25}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]$$

$$\to \boxed{\dot{\theta}(t) = \frac{9}{250}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right]}$$

Problema 3.2: *(I2-2013-1)* Un reflector en el piso alumbra un muro a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de estatura camina del reflector hacia el muro a una velocidad de 1,6 m/s. ¿Con qué velocidad disminuye la altura de su sombra cuando el hombre está a 4 m de la pared?

Solución:

Grafiquemos la situación como sigue:



Sea h la altura de la sombra del hombre y x su distancia a la pared. Evidentemente $x = x(t)$ y $h = h(t)$. Por Teorema de Thales tendremos que

$$\frac{h(t)}{12} = \frac{2}{12 - x(t)}$$

Es decir,

$$h(t)[12 - x(t)] = 2 \cdot 12$$

Buscamos $h'(t)$, para ello derivamos:

$$h'(t)[12 - x(t)] - h(t)x'(t) = 0 \to h'(t) = \frac{h(t)x'(t)}{12 - x(t)}$$

En dicho instante, tendremos que $x'(t) = 1{,}6$, $x(t) = 4$ y por la primera ecuación $h(t) = \dfrac{24}{12-4} = 3$. Es decir,

$$h'(t) = \frac{1{,}6 \cdot 3}{8} = \frac{16 \cdot 3}{10 \cdot 8} = \frac{3}{5}$$

Es decir, h decrece a razón de 0,6 m/s.

Problema 3.3: [**Propuesto**] Sea el triángulo $\triangle ABC$ con los lados a, b y c y los ángulos α, β y γ. Considere que a y b son constantes y α variable. Demuestre que

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\alpha} = h_a$$

en la cual h_a es la altura del triángulo correspondiente a la base a. ¿Cómo interpretaría geométricamente este resultado?

Indicación: Recuerde la ley del coseno: en todo triángulo $\triangle ABC$ se cumple que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$.

3.2. Teoremas de Rolle y del Valor Medio

Partiremos estudiando el Teorema de Rolle:

Teorema: *(de Rolle)* Sea f una función

- continua en un cerrado $[a, b]$.
- derivable en el abierto (a, b).
- $f(a) = f(b)$

Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

El resultado de este teorema resulta de enorma de importancia, ya que su corolario, el Teorema del Valor Medio, guarda una profunda idea de análisis matemático que es utilizada en la demostración del Teorema Fudamental del Cálculo.

Notamos además que el teorema le exige una condición muy fuerte a la función: que sea igual en los extremos del intervalo. Sin embargo, el resultado que nos entrega es muy útil, ya que nos asegura un punto en que la función derivada se iguala a cero, lo que a su vez es tremendamente útil, al igual que el T.V.I., para demostrar igualdades entre funciones.

Una de las aplicaciones directas del Teorema de Rolle es en la demostración de la existencia de raices en derivadas y/o funciones derivadas. Veamos la tipología típica de problemas:

Problema 3.4:

(a) Demuestre que si f es una función dos veces diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y tiene tres raíces reales distintas, entonces existe un punto c en el cual $f''(c) = 0$.

Use este resultado para demostrar que si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones dos veces derivables en (a, b) tales que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ y $f(c) = g(c)$, entonces $(\exists \xi \in (a, b))\ f''(\xi) = g''(\xi)$.

(b) Sea f una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b) = 0$. Demuestre que, dado cualquier número real k existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = kf(c)$.
Indicación: Utilice la función $f(x)e^{-kx}$.

(c) Sea $f(x)$ una función tal que $f''(x) > 0$ en el intervalo $[a.b]$. Demuestre que $f'(x)$ tiene a lo sumo un cero en (a, b).

Solución:

(a) Si consideramos $g(x) = f'(x)$, se nos está pidiendo en otras palabras demostrar que existe un punto c tal que $g'(c) = 0$. Es decir, podemos utilizar el Teorema de Rolle. Tres hipótesis son necesarias para poder utilizarlo:

- Continuidad en un cerrado: para un abierto cualquiera tenemos que g es continua, puesto que $g = f'(x)$, la cual es una función continua al ser derivable (f es dos veces derivable en $\mathbb{R}$).
- Diferenciabilidad en un abierto: como f es dos veces diferenciable en todo $\mathbb{R}$, entonces g es diferenciable en cuaalquier abierto que tomemos.
- Igualdad en los extremos del intervalo: necesitamos encontrar dos puntos a, b en los cuales $g(a) = g(b) \leftrightarrow f'(a) = f'(b)$.

¿Cómo solucionamos este último problema? A partir de la infomación del problema podemos encontrar de inmediato dos puntos en los cuales $f'(a) = f'(b)$. En estos valores, la función valdrá cero.

Este resultado podemos obtenerlo de inmediato a partir de las hipótesis: como $f(x)$ es continua y diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y tiene tres raíces, podemos aplicar dos veces el teorema de Rolle y encontrar dos puntos a y b en los cuales $f'(a) = f'(b) = 0$.

Formalicemos esto: sean ξ_1, ξ_2 y ξ_3 dichas raíces de modo que $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$. Entonces, tenemos que $f(\xi_1) = f(\xi_2)$. Se satisfacen las hipótesis de continuidad y diferenciabilidad, razón por la cual a partir del teorema de Rolle aseguramos que existe $a \in (\xi_1, \xi_2)$ tal que $f'(a) = 0$. Análogamente, probamos que existe $b \in (\xi_2, \xi_3)$ tal que $f'(b) = 0$.

De esta forma, hemos cumplido la última hipótesis y por lo tanto, por Teorema de Rolle, existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0 \rightarrow f''(c) = 0$, demostrando así lo pedido. ■

Para la segunda parte, definiendo $h(x) = f(x) - g(x)$ y notando que a, b y c son raices de h, concluimos inmediatamente por el resultado anterior que existe $\xi \in (a, c)$ tal que $h''(\xi) = 0 \rightarrow f''(\xi) = g''(\xi)$.

(b) Definimos tal como se da en las indicaciones $g(x) = f(x)e^{-kx}$. Para demostrar una igualdad estamos tentados a hacer uso del Teorema de Rolle. Notamos que:

- $g(x)$ es continua en $[a, b]$, puesto que es el producto de dos funciones que son trivialmente continuas.
- Por la misma razón, $g(x)$ es derivable en (a, b).
- $g(a) = g(b)$, lo cual se nota evaluando:

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a)e^{-ka} = 0 \\ g(b) &= f(b)e^{-kb} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle y existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Es decir, derivando

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} \\ &= \left[f'(x) - kf(x)\right] e^{-kx} \end{aligned}$$

Como $e^{-kx} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente si $g'(c) = 0 \rightarrow f'(c) - kf(c) = 0$. Así concluimos que

$$f'(c) = kf(c)$$

(c) Supongamos, por contradicción, que existen dos raíces. Como $f''(x) > 0$ existe en $[a, b]$, entonces $f'(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en $[a, b]$, en particular en (a, b). Luego, como suponemos que existen dos raíces, entonces se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle y por lo tanto existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f''(\xi) = 0$, lo cual es una evidente contradicción con el enunciado. Con este argumento queda entonces demostrado. ■

Problema 3.5: Si c es un número real cualquiera, pruebe que $f(x) = x^4 + 4x - c$ tiene a lo más 2 raices reales.

Solución:

Observe que $f(x)$ es una función continua y diferenciable infinitas veces. Supongamos que la función tuviera 3 raíces reales, las cuales denotaremos en orden x_1, x_2 y x_3. Por el Teorema de Rolle tenemos que existirian $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ y $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ tales que $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

Pero

$$f'(x) = 4x^3 + 4x = 4\left(x^3 + 1\right)$$

Sin embargo, $x^3 + 1$ tiene una sola solución real pues $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$ donde dado que $x^2 - x + 1$ no tiene raices reales, concluimos que $x = -1$ es la única solución real posible. Esto contradice el hecho de que ξ_1 y ξ_2 eran las raices reales encontradas.

El argumento para cualquier $n \geq 2$ es exactamente el mismo, y se sustenta en el ehcho de que $f'(x)$ solo tiene una raíz. Con esto queda demostrado que $x^4 + 4x - c$ tiene a lo más 2 raíces reales. ■

Problema 3.6: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Demuestre que si $\dfrac{f(a)}{a} = \dfrac{f(b)}{b}$, entonces

$$[\exists x_0 \in (a,b)]\;\; x_0 f'(x_0) = f(x_0)$$

Solución:

Al estar demostrando una igualdad, se sugiere inmediatamente que tenemos que utilizar el teorema de Rolle. Elijamos la función que elijamos, ya tenemos por el enunciado obtenidas las hipótesis de continuidad y diferenciabilidad. Por lo tanto, lo que nos resta es escoger adecuadamente la función para obtener lo pedido y verificar que son iguales en dos puntos.

El enunciado evidentemente nos da la respuesta. Escogemos $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ e inmediatamente:

$$\begin{cases} g(x) & \text{es continua en } [a,b] \\ g(x) & \text{es diferenciable en } (a,b) \\ g(a) & = g(b) \end{cases} \Longrightarrow \textbf{Teo. Rolle}\text{: } [\exists x_0 \in (a,b)]\;\; g'(x_0) = 0$$

Esto es,

$$g'(x_0) = \underbrace{\frac{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}{x_0^2}}_{\text{regla del cuociente}} = 0$$

Luego, como la fracción es cero el numerador debe serlo y asi concluimos que

$$x_0 f'(x_0) = f(x_0) \;\blacksquare$$

Ahora veremos el Teorema del Valor Medio, el cual es una generalización del Teorema del Rolle. Vale la pena enunciarlo y demostrarlo:

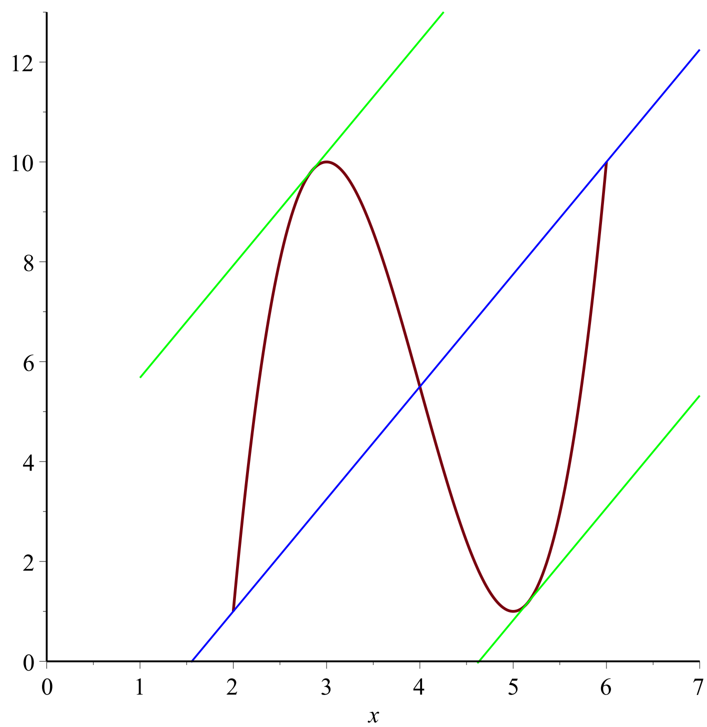
Teorema: *(del Valor Medio)* Sea f una función

- continua en $[a, b]$.
- derivable en (a, b).

Entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración: Más que darnos vuelta en la demostración formal, primero entendamos gráficamente lo que está ocurriendo. El teorema dice que existe un punto en el intervalo tal que la recta tangente en este punto tiene la misma pendiente que la recta que une los puntos extremos del intervalo $[a, b]$. Esto se puede ilustrar gráficamente sin mayor dificultad: (en verde la tangente, en azul la recta que une los puntos)



Esto se puede demostrar inmediatamente del Teorema de Rolle si es que encontramos la función adecuada que se iguale a cero. Para hacer esto, lo primero que cabe preguntarse es: ¿cuál es la recta que une a los puntos a y b? Evidentemente,

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{pendiente}} \rightarrow y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Por otra parte, sabemos que $f(x)$ pasa por $f(a)$ y $f(b)$ al igual que la recta. Es decir, la función

$$h(x) = f(x) - \underbrace{\left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right]}_{\text{recta que une}}$$

es la adecuada para aplicar el teorema de Rolle. Es evidente que $h(a)$ y $h(b)$ son cero, pues la recta que une los puntos de la función en los extremos tiene que coincidir con la función. Bajo las supuestas hipótesis de continuidad y diferenciabilidad demostramos que existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$ y de esta forma se llega a que

$$\text{pendiente de la tangente} \to f'(c) = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{pendiente recta}}$$

y concluimos así la demostración. ■

De aquí notamos inmediatamente que el Teorema del Valor Medio y el Teorema de Rolle enuncian exactamente la misma idea pero en contexto diferente. Cabe preguntarse entonces, ¿por qué se enuncian dos teoremas diferentes? Pues porque exactamente sus usos son diferentes.

Ya vimos en ejercicios anteriores que el Teorema de Rolle es una buen herramienta para demostrar igualdades. El Teorema del Valor Medio, en cambio, es una excelente herramienta para demostrar desigualdades. Sin embargo, como veremos a continuación en los problemas siguientes, la dificultad inherente es lograr asociarlas a las hipótesis y la conclusión de este.

Problema 3.7: *(Control 2 - 2013 - 1)* Demuestre que la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ satisface las condiciones del Teorema del Valor Medio en $[a, b]$ con $0 < a < b$ y encuentre el o los puntos que satisfacen el teorema.

Solución:

Podríamos decir que este problema es bastante directo en cuanto a lo que pregunta, ya que solo pide identificación oportuna del T.V.M. Observemos entonces si es que se cumplen las condiciones:

- $x + \dfrac{1}{x}$ es una suma de funciones continuas salvo en $x = 0$ ya que el segundo término diverge. Sin embargo, $x \in [a, b]$ con $0 < a < b$ y por lo tanto se cumple la continuidad.
- Análogamente, $x + \dfrac{1}{x}$ es diferenciable bajo la misma argumentación en (a, b).

Luego, por T.V.M. existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Es decir, derivando y reemplazando:

$$1 - \frac{1}{c^2} = \frac{b - a + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{a}}{b - a} = 1 - \frac{1}{ab}$$

Buscamos despejar los c que cumplen la condición, ya que esto es lo que se pide. Finalmente,

$$\boxed{c = \pm\sqrt{ab}}$$

Problema 3.8:

(a) Sea $f(x)$ una función continua en $[0,4]$, derivable en $(0,4)$ y tal que $f(0) = 0$. Demuestre que si $f'(x) \leq x$, entonces $f(4) \leq 16$.

(b) Suponga que $f(0) = 3$ y que $f'(x) \leq 5$ para todo valor de x. ¿Cuál es el mayor valor que $f(2)$ puede tomar?

Solución:

(a) Al tratarse de una igualdad, tenemos que utilizar el Teorema del Valor Medio. Observe que al tener que $f(0) = 0$ es una buena idea tomar el valor medio entre 0 y 4 y aplicar el teorema. Como $f(x)$ es continua en $[0,4]$ y derivable en $(0,4)$ tenemos las hipótesis cubiertas. Es decir, existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{f(4)}{4} = f'(\xi) \leq \xi$$

Como $f'(\xi) \leq \xi$ y el máximo valor que ξ puede tomar está en un entorno de 4 por la izquierda, entonces

$$\frac{f(4)}{4} \leq \xi < 4 \rightarrow f(4) \leq 16 \blacksquare$$

(b) Como $f'(x) \leq 5$, entonces $f'(x)$ existe y por lo tanto $f(x)$ es derivable y continua en todo $\mathbb{R}$. Luego, podemos tomar el valor medio entre 0 y 2 ya que el primero es información dada y el segundo es un punto de interés. Es decir, existe $\xi \in (0,2)$ tal que

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{f(2) - 3}{2} \leq f'(\xi) \leq 5 \rightarrow f(2) \leq 13$$

y por lo tanto 13 es el mayor valor que puede tomar $f(2)$.

Ahora veamos un juego de problemas de un nivel de dificultad algo mayor:

Problema 3.9:

(a) Demuestre el denominado *Principio del Hipódromo*: sean f y g funciones diferenciables en (a,b) tales que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $f(x) > g(x)$ para todo $x \in (a,b)$.

Use este resultado para probar que $(\forall x \geq 0)\ e^x \geq 1 + (1+x)\log(1+x)$. *Propuesto*: Haga lo propio para demostrar que $(\forall x \geq 0)\ x - x^2/2 < \ln(1+x) < x$

(b) Demuestre que si $0 < u < v < \dfrac{\pi}{2}$, entonces

$$\frac{u}{v} < \frac{\sin(u)}{\sin(v)}$$

(c) Demuestre que para $0 < a < b$ se tiene

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan(b) - \arctan(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$$

De aquí deduzca que

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

Solución:

(a) La idea intuitiva del Principio del Hipódromo es evidente: si parametrizamos la función posición de dos caballos en una pista, sabemos que parten desde el mismo punto y sabemos que uno siempre tiene mayor velocidad que el otro, entonces evidentemente la distancia al origen de aquél que va más rapido será siempre superior a la de aquél que va más lento.

Notemos que lo que se piede demostrar es que $f(x) > g(x) \to f(x) - g(x) > 0$. Es una buena idea escribirlo de esta forma, ya que analizar los signos de una desigualdad siempre resulta más facil. Definamos pues, la función $h(x) = f(x) - g(x)$. La demostración equivalente es a probar que $h(x) > 0$.

Para demostrar esto utilizaremos el TVM. Consideremos $\xi \in (a, b)$ cualquiera. Sabemos que:

- h es continua en $[a, \xi]$ pues es una resta de funciones continuas.
- h es derivable en (a, ξ) pues es una resta de funciones derivables.

Luego, por TVM existe $\zeta \in (a, \xi)$ tal que

$$h'(\zeta) = \frac{h(\xi) - h(a)}{\xi - a}$$

Tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{h(\xi) - h(a)}{\xi - a} &= \frac{f(\xi) - g(\xi) \cancel{- f(a)} + \cancel{g(a)}}{\xi - a} \\ &= \frac{f(\xi) - g(\xi)}{\xi - a} \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$h'(\zeta) = f'(\zeta) - g'(\zeta) > 0$$

pues $f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Luego, tenemos que

$$h'(\zeta) = \frac{f(\xi) - g(\xi)}{\xi - a} > 0$$

Como $\xi \in (a,b)$, entonces $\xi > a \to \xi - a > 0$. Además la división tiene que ser positiva, entonces necesariamente

$$f(\xi) - g(\xi) > 0 \to f(\xi) > g(\xi)$$

Finalmente, como ξ es un número cualquiera en (a,b) y la variable es muda, concluimos que

$$f(x) > g(x) \quad (\forall x \in (a,b)) \ \blacksquare$$

Con este ejercicio se hace evidente la utilidad del TVM: a partir del análisis de signos en la derivada podemos generar desigualdades en los términos de la función sin derivar.

Probar la desigualdad $(\forall x \geq 0)\ e^x \geq 1 + (1+x)\log(1+x)$ no debiese significar mayor dificultad con el resultado obteriormente antenido. En efecto, sean

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ g(x) &= 1 + (1+x)\log(1+x) \end{aligned}$$

Notamos que ambas funciones son diferenciables $\forall x \geq 0$ y que $f(0) = g(0) = 1$. Luego, nos basta probar que $f'(x) \geq g'(x)$ para poder hacer uso del Principio del Hipódromo (en su versión no estricta).

En otras palabras, tenemos que probar que

$$e^x \geq \log(1+x) + 1 \longleftarrow (*)$$

Para ello, nuevamente usamos el Principio del Hipódromo: ambas son funciones diferenciables y evaluadas en 0 valen 1. Probamos la desigualdad de sus derivadas:

$$e^x \geq \frac{1}{1+x} \longleftrightarrow e^x(1+x) \geq 1 \quad \text{pues } x \geq 0$$

Luego, como $e^x \geq 1$ y $1 + x \geq 1$ para $x \geq 1$, entonces evidentemente $e^x(1+x) \geq 1$. De esta forma hemos probado la desigualdad $*$ y con esto la hipótesis necesaria para hacer uso del Principio del Hipódromo. Concluimos finalmente:

$$(\forall x \geq 0)\ e^x \geq 1 + (1+x)\log(1+x) \ \blacksquare$$

(b) Procediendo como en el ejercicio anterior, la primera dificultade que surge viene dada por el hecho de que no reconocemos funciones de una sola variable en cada uno de los lados de la desigualdad. Por lo tanto, aprovechando que tenemos que $0 < u < v < \frac{\pi}{2}$ reordenamos términos:

$$\frac{u}{v} < \frac{\sin(u)}{\sin(v)} \to \frac{\sin(v)}{v} < \frac{\sin(u)}{u} \to \frac{\sin(v)}{v} - \frac{\sin(u)}{u} < 0$$

Consideremos la función

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Si consideramos dos puntos u, v arbitrarios en $(0, \frac{\pi}{2})$ tales que $v > u$, tenemos evidentemente probadas las hipótesis de continuidad y diferenciabilidad. Luego, por TVM se tiene que $\exists \xi \in (u,v)$

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = \frac{\dfrac{\sin(v)}{v} - \dfrac{\sin(u)}{u}}{v - u} = f'(\xi)$$

Aparece en el numerador la expresión para la cual queremos probar su negatividad. Como $v-u>0$, entonces basta probar que $f'(\xi)<0$ para asegurar la negatividad del denominador. Tenemos que

$$f'(\xi)=\frac{\cos(\xi)\xi-\sin(\xi)}{\xi^2}$$

Como $\xi^2>0$, esto se reduce a probar que

$$\cos(\xi)\xi<\sin(\xi)$$

Para ello, hagamos $g(x)=x\cos(x)$ y $h(x)=\sin(x)$, ambas funciones diferenciables y continuas en todo $\mathbb{R}$. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos(x)-x\sin(x) \\ h'(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

Observemos que $g(0)=h(0)=0$ y que $g'(x)<h'(x)$ en $(0,\frac{\pi}{2})$ pues es equivalente a notar que

$$\cos(x)-x\sin(x)<\cos(x)\leftrightarrow 0<\underbrace{x\sin(x)}_{>0 \text{ en } (0,\frac{\pi}{2})}$$

Luego, por principio del hipódromo $\cos(\xi)\xi<\sin(\xi)$ para todo $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$. Es decir, $f'(\xi)<0$ en este intervalo y por lo tanto:

$$\frac{\sin(v)}{v}-\frac{\sin(u)}{u}<0$$

que es lo que equivalentemente se queria probar. ■

Nota: Se podria haber llegado al mismo resultado demostrando que $f(x)$ era una función decreciente en este intervalo a partir de la primera derivada, pero el lector notará que el procedimiento es prácticamente el mismo. Se puede observar que a partir del TVM se pueden garantizar los comportamientos y crecientes y decrecientes de las funciones a partir de sus derivadas, algo que no debiera extrañar, menos sabiendo que otro de los nombres que recibe este teorema es el de las *diferencias finitas*.

(c) Como $a<b\to b-a>0$ y por lo tanto podemos reordenar términos. La demostración es equivalente a probar que

$$\frac{1}{1+b^2}<\frac{\arctan(b)-\arctan(a)}{b-a}<\frac{1}{1+a^2}$$

El término de al medio es exactamente una expresión de valor medio. Como $\arctan(x)$ es una función continua y diferenciable en todo $\mathbb{R}$, lo es en particular en $[a,b]$. Por TVM, sabemos que existe un $\xi\in(a,b)$ tal que

$$\frac{\arctan(b)-\arctan(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

Como sabemos que

$$f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}$$

Entonces

$$\frac{\arctan(b)-\arctan(a)}{b-a}=\frac{1}{1+\xi^2}$$

pero como $\xi \in (a,b)$ con $a>0$, esto quiere decir que

$$\begin{aligned} a<\xi<b \;&\rightarrow\; a^2<\xi^2<b^2 \\ &\rightarrow\; \frac{1}{1+a^2} > f'(\xi) > \frac{1}{a+b^2} \end{aligned}$$

Así, concluimos que

$$\frac{1}{1+b^2} < f'(\xi) = \frac{\arctan(b)-\arctan(a)}{b-a} < \frac{1}{1+a^2}$$

que es equivalente a lo que se pedia. ■

Tenemos que utilizar este resultado para probar que:

$$\frac{\pi}{4}+\frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4}+\frac{1}{6}$$

Notamos que $\frac{\pi}{4}$ es una medida angular y está asociada a $\arctan(1)$, i.e. $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$. Es decir, lo anterior es equivalente a

$$\frac{3}{25} < \arctan\left(\frac{4}{3}\right) - \arctan(1) < \frac{1}{6}$$

Haciendo $b=\dfrac{4}{3}$ y $a=1$ se demuestra lo anterior a partir de lo pedido pues

$$b-a=\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{b-a}{1+b^2} = \frac{1}{3\left(1+\frac{16}{9}\right)} = \frac{3}{25} \quad ; \quad \frac{b-a}{1+a^2} = \frac{1}{3(1+1)} = \frac{1}{6} \quad ■$$

Problema 3.10: [**Propuesto**] Demuestre el *Teorema del Valor Medio de Cauchy*[3]: sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe al menos un punto $\xi \in (a,b)$ tal que

$$[f(b)-f(a)]\,g'(\xi) = [g(b)-g(a)]\,f'(\xi)$$

Finalizamos el apartado con un problema propuesto que integra de forma interesante ambos problemas:

Problema 3.11: [**Propuesto**] *(y muy interesante)* En este problema demostraremos que si $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ continua es dos veces derivable en (a,b) y $P(x)$ es un polinomio de grado 1 tal que $P(a)=f(a)$ y $P(b)=f(b)$, entonces se cumple que

$$[\forall\varsigma\in(a,b)]\,[\exists\xi\in(a,b)]\;\; f(\varsigma)=P(\varsigma)+\frac{f''(\xi)}{2}(\varsigma-a)(\varsigma-b)$$

Es decir, se puede obtener el error entre la función y su interpolación polinomial de primer orden haciendo uso de la segunda derivada de f. Para cumplir, se debe proceder como sigue:

[3]Este es un importante resultado utilizado para demostrar la *Regla de l'Hôpital*, una propiedad útil para el cálculo de límites.

(a) Dado $\varsigma \in (a,b)$, pruebe que existe un único $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$h(x) = f(x) - P(x) - \lambda(x-a)(x-b)$$

se anula en ς, i.e. $h(\varsigma) = 0$.

(b) Pruebe que $\exists \xi \in (a,b)$ tal que $h''(\xi) = 0$.

Indicación: Utilice el T.V.M. en $[a,\varsigma]$ y $[\varsigma,b]$ y luego el T.V.M. o el teorema de Rolle pertinentemente.

(c) Utilice el resultado anterior para escribir λ en función de ξ. Concluya con todos los resultados anteriores.

3.3. Máximos, mínimos y gráficos de funciones

3.3.1. Repaso conceptual

MÁXIMOS, MÍNIMOS E INTERVALOS DE MONOTONÍA

A partir del Teorema del Valor Medio ya tenemos los argumentos matemáticos suficientes para trabajar este apartado. Resumimos algunos conceptos y/o teoremas importantes:

Definición:

(a) La función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en x_0 si existe un intervalo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $(\forall x \in I)\ f(x) \leq f(x_0)$.

(b) La función $f(x)$ tiene un *mínimo relativo* en x_0 si existe un intervalo $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $(\forall x \in I)\ f(x) \geq f(x_0)$.

Podemos demostrar la siguiente proposición:

Proposición: Si $f(x)$ tiene un máximo o mínimo relativo en x_0 entonces $f'(x_0)$ no existe ó $f'(x_0)$ existe y $f'(x_0) = 0$.

De aquí es que nace la siguiente definición:

Definición: Si $f(x)$ existe en x_0 y es tal que $f'(x_0) = 0$ ó $f'(x_0)$ no existe, entonces x_0 es un *punto crítico* o *valor extremo* de la función.

Observemos que la proposición anterior es una condición necesaria y **no** suficiente. Es decir, los puntos en los cuales $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0)$ no existe son solo candidatos a máximos y/o mínimos relativos. Un ejemplo claro de ello es la función $f(x) = 0$ ó la función $f(x) = 1/x$.

Luego, a partir del T.V.M. se pueden demostrar las siguientes proposiciones:

Proposición: Sea $f(x)$ una función diferenciable en (a, b), entonces:

- $[\forall x \in (a, b)]\ f(x) > 0 \longrightarrow f(x)$ es estrictamente creciente en (a, b).
- $[\forall x \in (a, b)]\ f(x) < 0 \longrightarrow f(x)$ es estrictamente decreciente en (a, b).

¿Cómo garantizamos entonces que es un máximo o un mínimo? A partir del siguiente teorema, que por lo demás es un resultado bastante intuitivo, razonable y fácil de analizar:

Teorema: *Criterio de la primera derivada.*

(a) Si la función $f'(x)$ existe y $f'(x) > 0$ en $(x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x)$ existe y $f'(x) < 0$ en $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces $f(x)$ tiene un máximo relativo en x_0.

(b) Si la función $f'(x)$ existe y $f'(x) < 0$ en $(x_0 - \delta, x_0)$ y $f'(x)$ existe y $f'(x) > 0$ en $(x_0, x_0 + \delta)$, entonces $f(x)$ tiene un mínimo relativo en x_0.

Bajo este teorema podemos aseverar entonces que si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces los valores extremos se alcanzan en los puntos

- donde $f'(x)$ no existe, pero sí $f(x)$.
- donde $f'(x) = 0$.
- extremos del intervalo.

Disponemos adicionalmente de una segunda herramienta para determinar el carácter de un punto extremo a partir de su segunda derivada:

Teorema: *Criterio de la Segunda Derivada.* Si $f'(x_0) = 0$ y

- $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.
- $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.

Concavidad de una función

La segunda derivada también nos aporta información sobre la concavidad de la función. Partamos con una definición:

Definición: *Concavidad de una función.*

(a) Diremos que el gráfico de una función es *cóncavo hacia arriba* en un intervalo si en ese intervalo la función está por encima de las tangentes.

(b) Diremos que una función es *cóncava hacia abajo* en un intervalo, si en ese entervalo la función está por debajo de las tangentes.

(c) Si $f(x_0)$ existe, entonces x_0 es un *punto de inflexión* si se presenta un cambio de concavidad en el entorno de ese punto.

Luego a partir del T.V.M. y la segunda derivada podemos mostrar que:

Proposición:

(a) Si x_0 es un punto de inflexión, entonces $f''(x_0) = 0$ ó $f''(x_0)$ no existe.

(b) Si $f''(x) > 0$ en (a, b), entonces $f(x)$ es cóncava hacia arriba en ese intervalo

(c) Si $f''(x) < 0$ en (a, b), entonces $f(x)$ es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

Es importante nuevamente notar que nuevamente el hecho de que $f''(x_0) = 0$ o $f''(x_0)$ no garantiza que el punto sea efectivamente una inflexión. Esta es solo una condición necesaria, i.e. si hay un punto de inflexión en x_0, entonces se tiene que anular la segunda derivada o no existir (y no al reves). Por esta razón es que la condición necesaria la utilizamos para identificar los candidatos y luego verificamos su carácter de punto de inflexión verificando que efectivamente haya un cambio de concavidad.

Asíntotas oblicuas

Definición: Sea f una función real, diremos que la recta $y = m \cdot x + n$ es una *asíntota oblicua* si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx - n) = 0$.

Notar que en el caso de $m = 0$ tenemos una asíntota horizontal, por lo cual una asíntotal horizontal es un caso particular de asíntota oblicua. La pregunta subsecuente es, ¿cómo determinamos si tiene asíntota oblicua (no sabemos los valores de m y n)? o bien ¿cómo determinamos m y n?

Supongamos que existen valores de m y n tales que se cumple la condición del límite, i.e.

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx - n] = 0$$

Entonces, podemos multiplicar un límite conocido y que existe, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ y aplicar propiedades:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x} \right] = 0$$

Nuevamente, bajo la suposición de que el límite existe, como m y $\dfrac{n}{x}$ existen por separado, entonces $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$ también debe existir:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \to \pm\infty} m - \lim_{x \to \pm\infty} \frac{n}{x} = 0$$

$$\to \boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m}$$

Es decir, la asíntota oblicua existe solo si el límite anterior existe y es menor (estricto) que ∞. A partir de este test no solo podemos determinar asíntotas oblicuas, sino que también determinar inmediatamente el valor de m. Adicionalmente, n se puede obtener directamente de la primera ecuación una vez obtenido m:

$$\boxed{n = \lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx\right]}$$

Observación:

(a) Ante asíntota horizontal, si $f(x)$ es continua, el límite nos dará 0, ya que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) < \infty$ (es un número acotado).

(b) Evidentemente solo puede existir una asíntota oblicua en infinito ya que el límite de una función es único. Por lo tanto, considerando $+\infty$ y $-\infty$, una función puede tener a lo más dos asíntotas oblicuas. (Las asíntotas verticales **no** son un caso particular de asíntotas oblicuas ya que no se evaluan en $\pm\infty$)

Consideraciones en el gráfico de funciones

(a) **Dominio:** aunque no se pida, intentar calcularlo, pues da cuenta de los tramos de la función.

(b) **Determinar asíntotas:** Ver puntos de indeterminación de la función, por la singularidad $\frac{1}{x}$, estos determinan todas las asíntotas verticales. Asíntotas oblicuas también debieran ser calculadas. Permiten de inmediato delimitar la función. *¡No confundir!* Si la derivada tiende a infinito en determinado punto, no implica que la función lo haga en ese punto también.

(c) **Calcular derivadas:** En particular, la primera y la segunda.

(d) **Encontrar intervalos de monotonía:** Determinar dónde la derivada es positiva y dónde negativa.

(e) **Encontrar puntos críticos:** Determinar todos los puntos críticos. Tener en consideración de que si no hay un cambio e crecimiento en los puntos en que se iguala a 0, entonces no es un máximo o un mínimo. Evaluar en base a la segunda derivada. Sólo sirve un punto crítico en que la derivada no existe si es que esta es continua en ese punto.

(f) **Encontrar intervalos de concavidad:** Una cambio de crecimiento a decrecimiento en la derivada determina un cambio de concavidad. Un cambio de signo en la concavidad determina un punto de inflexión.

(g) **Concentrarse y graficar:** Graficar todas las asíntotas, ubicar bien los máximos y los mínimos, luego considerar la concavidad y el crecimiento/decrecimiento. Considerar los puntos de discontinuidad.

Consideraciones para análisis de gráficos de primera derivada

- Una función derivada puede no ser suave en un punto, pero tener mucho cuidado en que si existe la derivada, la función sí es suave en ese punto.
- Los máximos y mínimos de la función derivada son puntos de inflexión.
- Las raíces de la función derivada son posibles casos de máximos y mínimos: si la función derivada no cambia de signo, entonces es un punto de inflexión, pues la función cambia de crecimiento a decrecimiento.
- Si se asume que la función es continua, y la derivada no lo es en un punto, sólo implica que la función no es suave en tal punto.
- Un valor más grande en la función derivada sólo implica una curva más pronunciada.
- Si la derivada es creciente en un intervalo, entonces la función es cóncava hacia arriba en él, y viceversa.
- Si existe un intervalo constante en la función derivada, entonces la función es una recta en ese intervalo, y no tiene concavidad en él.

3.3.2. Problemas

Partamos con un problemas bastante básico si es que todos los conceptos anteriores se encuentran bien asimilados:

Problema 3.12: *(I2-2013-1)* Sea f una función derivable y tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x)$ dada por $g(x) = f(x^2)$.

Solución:

Los puntos donde la función es creciente son aquellos en que $g'(x) > 0$ y aquellos donde es decreciente son aquellos en que $g'(x) < 0$. Es inmediato que una buena opción puede ser derivar (más rápida que analizar crecimiento/decrecimiento directamente). Considerando la regla de la cadena,

$$g'(x) = f'\left(x^2\right) \cdot 2x$$

Como $f'(x) < 0$ para x cualquiera por hipótesis, entonces también $f'(x^2) < 0$. Luego, el carácter de $g'(x)$ queda determinado por $2x$. Si $x > 0$, entonces $g'(x) < 0$ y si $x < 0$, entonces $g'(x) > 0$. De esta forma, podemos obtener fácilmente los intervalos de crecimiento:

$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$\nearrow$	$\searrow$

y existe un máximo local en 0.

Problema 3.13: Sea $f(x)$ una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$ cuyos intervalos de crecimiento/decrecimiento se resumen en la tabla siguiente:

$y\backslash x$	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

y sea $g(x) = x\,(x-2)$. Calcule los intervalos de crecimiento/decrecimiento de $h(x) = f\,[g(x)]$.

Solución:

Es evidente que para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de esta función requerimos calcular su derivada. Entonces, se tiene por regla de la cadena que:

$$h'(x) = f'\,[g(x)]\,g'(x)$$

Es decir,

$$h'(x) = f'\left(x^2-2x\right)\cdot 2x$$

Luego, se sigue que los signos de $h'(x)$ determinan la monotonía de los intervalos. Por lo tanto, requerimos estudiar los signos de $f'\,(x^2-2x)$ para determinar los intervalos de x que cumplen lo pedido. A priori, a partir de la tabla sabemos que:

$y\backslash x$	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,3)$	$(3,\infty)$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$f'(x)$	>0	<0	>0	<0

Primera pregunta que nos hacemos: ¿cuando $f'(x^2-2x)>0$? De la tabla se observa que cuando:

- $x^2-2x<-1 \to x^2-2x+1 = (x-1)^2 < 0$. Para ningún x en este caso.
- $0 < x^2-2x < 3$. Pero $x^2-2x = (x-1)^2-1$. Es decir, buscamos aquellos x tales que

  $$0 < (x-1)^2 - 1 < 3$$

  Intersectamos $(x-1)^2-1 = 0 \to (x-1)^2 = 1 \to x = 2$ ó $x=0$. Análogamente, $(x-1)^2-1 = 3 \to x-1 = \pm 2$ por lo cual $x=3$ ó $x=-1$. Por simple inspección gráfica observamos que la solución a la inecuación es $(-1,0)\cup(2,3)$.

Análogamente, ¿cuándo $f'\,(x^2-2x)<0$? Por complementariedad se tiene que esto se cumple para $x\in(-\infty,-1)\cup(0,2)\cup(3,\infty)$. Es decir, en otras palabras los signos de $f'(x^2-2x)$ y $2x$ se pueden resumir en la siguiente tabla:

$y\backslash x$	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
$f'(x^2-2x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$h'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

Finalmente, concluimos que los intervalos de monotonía son los siguientes:

$y\backslash x$	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
$h(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Problema 3.14: Considere la función

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$

Esta curva se conoce como *Serpentina de Newton*. Determine:

(a) Dominio, raíces, signos y paridad.

(b) Máximos, mínimos e intervalos de crecimiento/decrecimiento.

(c) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad.

(d) Asíntotas horizontales.

(e) Esbozo de su gráfico.

Solución:

(a) Esta parte sirve como repaso de contenidos de precálculo:

- Dominio: suponemos todo $\mathbb{R}$ y restamos aquellos puntos donde ocurren indeterminaciones. En este caso, como $x^2+1 \neq 0$ en $\mathbb{R}$, concluimos que el dominio es todo $\mathbb{R}$.
- Raíces: son aquellas donde $f(x) = 0$. Como esto viene dado por el numerador, tenemos que la única raíz es $x = 0$.
- Signos: como $x^2+1 > 0$, entonces el signo viene dado exclusivamente por el numerador. Es inmediato que $f(x) > 0$ para $x > 0$ y $f(x) < 0$ para $x < 0$.
- Paridad: para determinar simetrías evaluamos $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{4(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{4x}{1+x^2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Luego, la función es **impar**.

(b) Por teoremas vistos en clases, sabemos que los máximos y mínimos de la función estarán en los puntos críticos. Un punto crítico se define como aquel punto en que $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe.

Observación importante: Una condición necesaria pero **NO** suficiente para que x_0 sea un máximo/mínimo de $f(x)$ es que este sea un punto crítico. Esto quiere decir que si x_0 es un máximo/mínimo, entonces $f'(x_0) = 0$ o no existe. Sin embargo, la expresión reciproca no es cierta: si x_0 es un punto crítico este no tiene por qué ser necesariamente un máximo/mínimo. Si el lector no se convence de esto estudie qué ocurre en $x = 0$ para $f(x) = x^3$.

Luego, nuestros candidatos a máximos y mínimos vienen dados por los puntos críticos. Para ello, se hace evidentemente necesario calcular la derivada de f. Por regla del cuociente esta corresponde a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x)'(1+x^2) - (4x)(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{4 + 4x^2 - 8x^2}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{4(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Como el denominador nunca se indetermina, no existen puntos para los cuales $f'(x)$ no existe. Solo evaluamos aquellos casos en los cuales el numerador se hace cero. Es inmediato que estos son $x = \pm 1$.

La forma más directa de determinar si son máximos o mínimos es estudiando los intervalos de crecimiento o decrecimiento. Para ello, recordamos de lo visto en clases que:

- $f'(x) > 0 \rightarrow$ creciente.
- $f'(x) < 0 \rightarrow$decreciente.

Es decir, debemos analizar los signos de $f'(x)$. Como esta expresión es un cuociente, debemos evaluar los signos individualmente tanto del numerador como el denominador Al tener que $\left(1+x^2\right)^2$ es una expresión siempre positiva, observamos que el signo de $f'(x)$ viene dado exclusivamente por su numerador.

Como $1-x^2$ es una parábola que se abre hacia abajo, tenemos que es positiva en $x \in (-1, 1)$ y negativa en otro caso. Luego, podemos hacer la siguiente tabla de signos y crecimiento y decreciemiento:

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo	$-$	$+$	$-$
Crecimiento	Decreciente	Creciente	Decreciente

De aquí desprendemos el carácter de los puntos críticos:

- En $x = -1$ la función pasa de ser decreciente a ser creciente, luego corresponde a un mínimo cuyo valor es $f(-1) = -2$.
- En $x = 1$ la función pasa de ser creciente a ser decreciente, luego corresponde a un máximo cuyo valor es $f(1) = 2$ (un resultado esperable dada la imparidad de la función).

(c) Recordamos que los puntos de inflexión son aquellos en los cuales $f''(x) = 0$ y los intervalos de concavidad se determinan a partir de la segunda derivada de tal forma que:

- Si $f''(x) < 0$, entonces la primera derivada es decreciente de forma que la función f puede pasar de ser creciente a decreciente y tener un máximo. Esto quiere decir que es **cóncava hacia abajo**.
- Si $f''(x) > 0$, entonces la primera derivada es creciente de forma que la función f puede pasar de ser decreciente a creciente y tener un mínimo. Esto quiere decir que es **cóncava hacia arriba**.

De aquí efectivamente se desprende un criterio de segundo orden para determinar máximos y mínimos. Sin embargo, el lector ya debe haber notado que realizar el análisis por medio del crecimiento/decrecimiento resulta mucho más rápido que hacer el cálculo de la segunda derivada.

Calculamos $f''(x)$ bajo la misma regla y obtenemos que:

$$f''(x) = \frac{8x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

Los puntos de inflexión vienen dados por $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$. Para analizar la concavidad notamos que, al igual que en el caso anterior, los signos de $f''(x)$ vienen dados exclusivamente por el numerador. Hacemos una tabla de signos:

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x^2 - 3$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\times$	$-$	$+$	$-$	$+$
Concav.	Hacia abajo	Hacia arriba	Hacia abajo	Hacia arriba

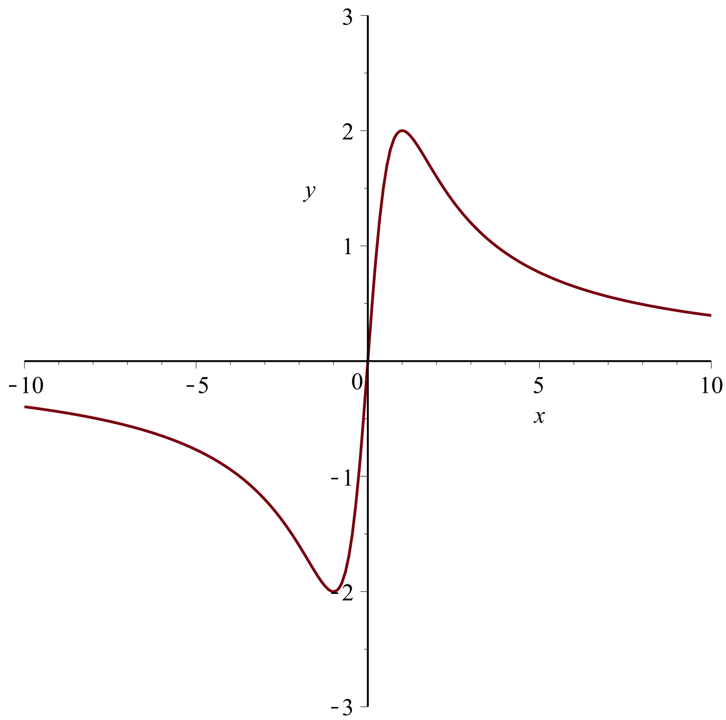
(d) Determinamos las asíntotas tomando el límite en $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x^2 + 1} = -\lim_{u\to\infty} \frac{4u}{u^2 + 1} = 0$$

y por lo tanto el eje x es la única asíntota horizontal.

(e) Considerando la paridad, máximos, mínimos, puntos de inflexión y el comportamiento en $\pm\infty$ (asíntotas horizontales), podemos determinar el siguiente gráfico:



Problema 3.15: Considere la función $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$. Determine:

(a) Dominio y raíces

(b) Máximos, mínimos e intervalos de crecimiento, decrecimiento

(c) Puntos de inflexión e intervalos de concavidad.

(d) Asíntotas.

(e) Esbozo de su gráfico.

Solución:

(a) Como $\sqrt[3]{\cdot}$ no tiene restricción de no negatividad en su dominio, podemos decir sin mayor dificultad que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Por otra parte, como $\sqrt[3]{\cdot}$ se hace cero solo en cero, para las raíces de $f(x)$ debemos determinar los x tales que $x^3 - 3x + 2$. Usando el test de los cuocientes, una raíz evidente es 1 y otra -2. Realizamos la factorización, obteniendo que.

$$\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} = \sqrt[3]{(x+2)(x-1)^2}$$

Dejamos f expresado así ya que es una expresión simplificada y para trabajar con derivadas **se recomienda siempre simplificar las expresiones antes de trabajarlas**. Luego, los ceros son 1 y -2.

(b) Máximos, mínimos e intervalos de crecimiento, decrecimiento.

Necesitamos hacer uo de la primera derivada para determinar esto. Tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2-1}{(x^3-3x+2)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{x+1}{(x+2)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{x+1}{(x+2)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Los puntos críticos están dados donde $f'(x)$ no existe o es cero:

- No existe: $x = 1$ y $x = -2$.
- Existe y es cero: $x = -1$.

Estudiamos el comportamiento de signos: $(x+2)^{\frac{2}{3}} \geq 0$, por lo tanto solo debemos estudiar cómo se comportan los otros dos términos. Al ser dos términos polinomiales de orden 1, deducimos que el comportamiento en signos será el mismo que el de una parábola. En este caso, de una parábola que se abre hacia arriba. Por lo tanto, hacemos una tabla de signos:

Intervalo	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
Signo	$+$	$+$	$-$	$+$
Crecimiento	Creciente	Creciente	Decreciente	Creciente

De aquí deducimos el comportamiento de los puntos críticos:

- $x = -2$: no hay cambio de monotonía $\rightarrow$ es un candidato a punto de inflexión.
- $x = -1$: la función pasa de creciente a decreciente $\rightarrow$ es un máximo.
- $x = 1$: la función decreciente a creciente $\rightarrow$ es un mínimo.

Nota: Podemos comprobar para mayor seguridad estos mismos resultados con la segunda derivada.

(c) Para el estudio de puntos de inflexión necesitamos la segunda derivada. Esta, por regla del cuociente, viene dada por:

$$f''(x) = -\frac{2}{(x+2)^{5/3}(x-1)^{4/3}}$$

El signo viene dado solamente por: $(x+2)^{5/3}$ ya que $(x-1)^{4/3} \geq 0$. Los candidatos a puntos de inflexión son -2 y 1. Realicemos el análisis de signos:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,1)$	$(1,\infty)$
$(x+2)^{5/3}$	$-$	$+$	$+$
Concav.	Hacia abajo	Hacia arriba	Hacia arriba

Por definición los puntos de inflexión son aquellos donde ocurre un cambio de concavidad. Es decir, en este caso $x = -2$ es el único punto de inflexión.

(d) No existen puntos en el dominio en que la expresión diverja, por lo cual no existen asíntotas verticales. En $\pm\infty$ la expresión diverge, por lo cual tampoco existen asíntotas horizontales. Lo único que nos queda es determinar asíntotas oblicuas.

Para ello, primero nos preguntas: ¿se asemeja $f(x)$ a alguna recta en el infinito? i.e.

$$¿f(x) \approx mx + n? \longleftrightarrow f(x) - mx - n \approx 0$$

Formalmente entonces, debemos estudiar la convergencia del límite:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx - n = 0$$

Si logramos determinar m y n para los cuales converge, habremos resuelto el problema. Para determinar m multiplicamos y dividimos por 1 (x/x), un número que no altera el límite:

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m + \cancel{\frac{n}{x}}^{0} = 0 \to \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m = 0$$

Es decir, calculamos m a través del límite:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Nota: Si la función no tiene asíntota oblicua, entonces no existirá valor de m para el cual la función converja.

Luego,

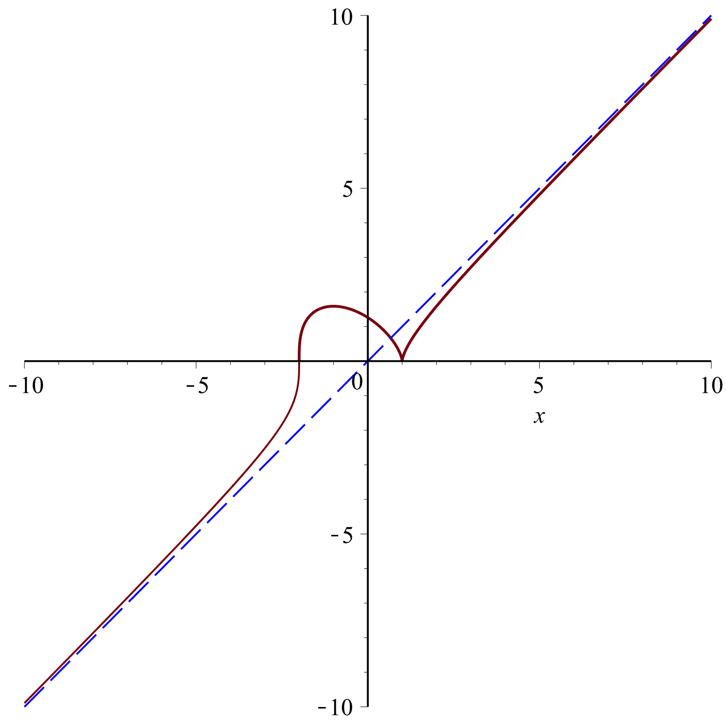
$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} - x \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x + 2 - x^3}{\left(\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2} + \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}x + x^2\right)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x + 2}{\left(\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2} + \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}x + \underline{x^2}\right)} \leftarrow \text{notar } x^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, $y = x$ es una asíntota oblícua. Podemos proceder por analogía para el caso $-\infty$:

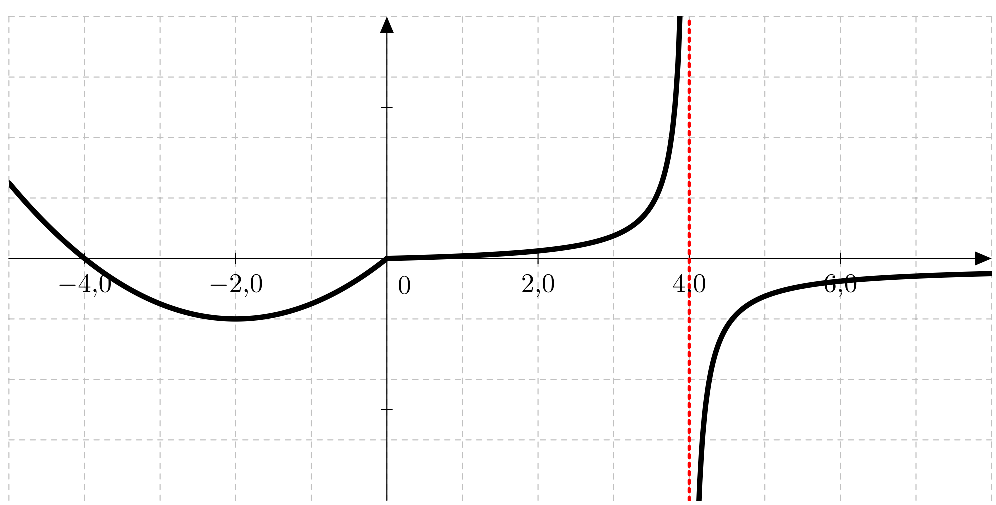
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}}{x} = \lim_{u\to\infty} \frac{\sqrt[3]{u^3 - 3u - 2}}{u} = 1 \\ n &= 0 \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $y = x$ es la única asíntota oblicua.

(e) Con la información de raíces, máximos, mínimos, concavidad y asintotas determinamos el gráfico de $f(x)$ sin mayor dificultad:



Problema 3.16: Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ con $f(0) = 1$. A continuación se presenta el gráfico de $f'(x)$:



A partir de esta información determine:

(a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(b) Valores extremos.

(c) Puntos de inflexión.

(d) Intervalos de concavidad.

(e) Esbozo del gráfico de $f(x)$.

Solución:

(a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento se desprenden inmediatamente a partir de los signos de f:

- $(-\infty, 4)$, f' positiva $\to f$ creciente.
- $(-4, 0)$, f' negativa $\to f$ decreciente.
- $(0, 4)$, f' positiva $\to f$ creciente.
- $(4, \infty)$, f' negativa $\to f$ decreciente.

Observación inmediata: en 4 se produce una discontinuidad en la derivada. Esto NO quiere decir que la función sea discontinua (de hecho, estariamos contradiciendo el enunciado), solo que no es diferenciable y en este punto se forma una "punta".

(b) Los valores extremos son aquellos en que f' no existe o es cero. Identificamos inmediatamente:

- $x = -6$: f' pasa de decreciente a creciente. Por lo tanto, corresponde a un punto de inflexión.
- $x = -4$. f' se mantiene decreciente. f pasa de ser creciente a decreciente. Por lo tanto, corresponde a un máximo.
- $x = 0$, f' se mantiene creciente. f pasa de ser decreciente a creciente. Por lo tanto, corresponde a un mínimo.
- $x = 4$ (no existe). f' se mantiene creciente. f pasa de creciente a decreciente. Por lo tanto, corresponde a un máximo.

(c) Analizamos ahora los puntos en que f' se anula, no existe o no es suave (pues ahí estarán los puntos de inflexión). Reconocemos:

- $x = -2$.
- $x = 0$.
- $x = 4$.

Separaremos en los intervalos respectivos.

- $(-\infty, -2)$: f' es decreciente. Luego $f'' < 0$ y por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia abajo.
- $(-2, 0)$: f' es creciente. Luego $f'' > 0$ y por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia arriba.
- $(0, 4)$: f' es creciente. Luego, $f'' > 0$ y por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia arriba.

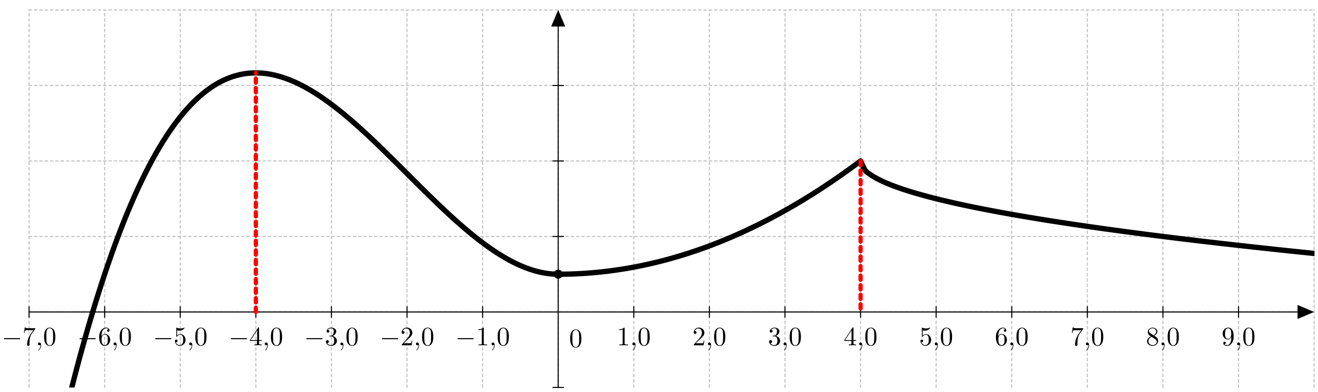
- $(4, \infty)$: f' es creciente. Luego, $f'' > 0$ y por lo tanto $f(x)$ es cóncava hacia arriba.

(d) Es inmediato que el único punto de inflexión es $x = -2$, pues es el único candidato en el que efectivamente ocurre un cambio de concavidad.

(e) Tenemos que tener varias cosas en cuentas para graficar:

- La función es continua. A pesar del comportamiento en $x = 4$ no se puede levantar el lápiz al graficar.
- Hay máximos y mínimos respectivos en $x = -4$, $x = 0$ y $x = 4$.
- Hay un punto de inflexión en $x = -2$.
- $f(0) = 1$.

Así obtenemos el gráfico de $f(x)$:



Problema 3.17: *(I2-2013-1)* Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ indicando:

- Dominio.
- Extremos locales e intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Puntos de inflexión e intervalos de concavidad.
- Asíntotas.

Solución:

Vamos trabajando punto a punto, siguiendo la misma idea de problemas anteriores:

Dominio: Suponemos que es todo $\mathbb{R}$ y vamos imponiendo restricciones. En el caso de esta función, se producen singularidades en ± 1, por lo cual el dominio es $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

Extremos locales e intervalos de monotonía: Requerimos calcular la primera derivada, que por medio de regla de cuociente viene dada por:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-2x^4}{(x^2-1)^2}$$

Como $(x^2-1)^2 > 0$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, entonces solo debemos estudiar apropiadamente el numerador.

$$3x^2\left(x^2-1\right)-2x^4 = x^2\left(x^2-3\right)$$

Los candidatos a valores extremos son inmediatamente $-\sqrt{3}$, 0 y $\sqrt{3}$. Luego, como $x^2>0$ para todo $x\neq 0$, solo consideramos el carácter de la parábola, que se abre hacia arriba. De esta forma, los intervalos de crecimiento se resumen en la siguiente tabla:

$(-\infty,-\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$	$(0,\sqrt{3})$	$(\sqrt{3},\infty)$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Observación: notar que no realizamos ningún alcanza en ± 1 ya que estos no forman parte del dominio.

De aquí desprendemos que:

- $-\sqrt{3}$ es un máximo local.
- 0 no es un punto extremo.
- $\sqrt{3}$ es un mínimo local.

Puntos de inflexión e intervalos de concavidad: Calculamos la segunda derivada, nuevamente por regla del cuociente:

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)\,2x\,(x^2-1)\,2x}{(x^2-1)^4}$$

Si simplificamos obtenemos una expresión mucho más sencilla de trabajar:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

El único candidato posible a punto de inflexión es $x=0$. Analizamos los intervalos de concavidad considerando que solo x y $(x^2-1)^3$ aportan al signo de la función. Con ello, podemos hacer la siguiente tabla de signos considerando los puntos de interés -1, 0 y 1:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x^2-1)^3$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Concav.	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Como efectivamente existe un cambio de concavidad, $x = 0$ es efectivamente un punto de inflexión.

Asíntotas: Inmediatamente reconocemos asíntotas verticales en ± 1. Calculamos las asíntotas oblicuas tomando los límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x\left(x^2-1\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} = 1 = m_+$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x\left(x^2-1\right)} = \lim_{y\to\infty} \frac{-y^3}{-y\left(y^2-1\right)} = 1 = m_-$$

Calculamos el valor de los n respectivos:

$$\begin{aligned} n_1 &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x\left(x^2-1\right)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0 \end{aligned}$$

Análogamente,

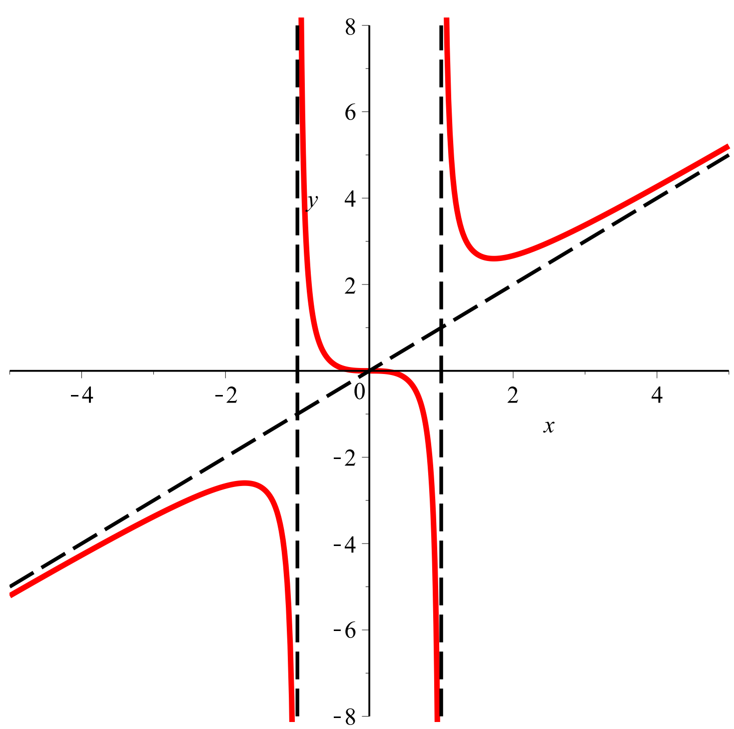
$$n_2 = 0$$

y luego $y = x$ es la única asíntota oblicua.

Gráfico: Primero graficamos los signos de la función, nuevamente considerando los puntos de interés:

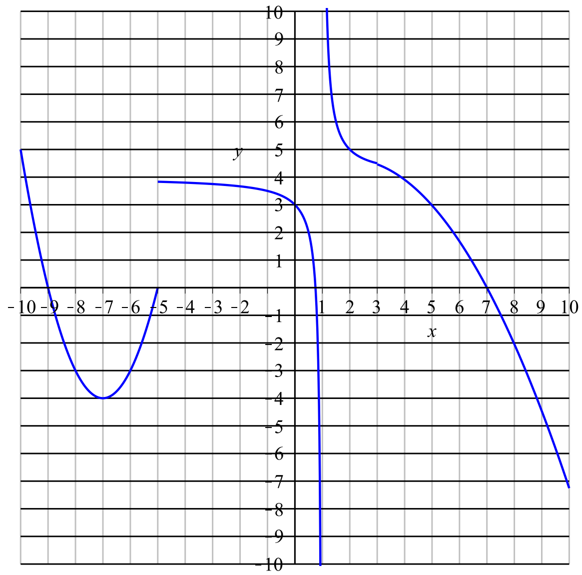
	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
x^3	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Observe además que $f(-x) = -f(x)$, por lo que la función es impar (hacemos una reflexión en torno al origen para graficar los $x < 0$). De esta forma, y con todas las consideraciones anteriores, el gráfico de $f(x)$ corresponde a:



Finalizamos este apartado con un interesante problema conceptual:

Problema 3.18: La función $f(x)$ está definida a tramos en $[-10, 10]$ y es continua en dicho intervalo. A continuación se presenta el gráfico de $y = f'(x)$.



Utilice este gráfico para decidir justificadamente la veracidad de las siguientes afirmaciones:

(a) $f''(-5)$ no existe.

(b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$.

(c) En -7 hay un mínimo local de $f(x)$.

(d) En 7 hay un máximo local de $f(x)$.

(e) $f(x)$ tiene dos puntos de inflexión en $(-10, 10)$.

(f) $f(x)$ es decreciente en $(1, 10)$.

(g) En -5 hay tanto un mínimo como un punto de inflexión de $f(x)$.

Solución:

(a) La afirmación es **verdadera**, ya que se observa del gráfico que $f'(x)$ no es continua en dicho punto. Si $f(x)$ es diferenciable, entonces es continua, por lo que por propiedad contrarrecíproca tenemos que si $f(x)$ es continua entonces no es derivable.

(b) La afirmación es **falsa**, pues en este caso, $f(x)$ no sería continua en dicho punto y esto seria una contradicción con el enunciado. Lo que aquí ocurre es que la función no es diferenciable y se genera algo similar a una punta en el gráfico de $f(x)$.

(c) La afirmación es **falsa**, pues en este punto la función derivada existe y **no** se hace cero (es decir, no se cumple la condición necesaria para ser un valor extremo). Lo que ocurre es que $f''(x) = 0$ y por lo tanto ahí f' pasa de ser decreciente a creciente, lo cual solamente refleja un cambio de concavidad.

(d) La afirmación es **verdadera**. En este punto $f'(7) = 0$ y por lo tanto efectivamente es un candidato a extremo. Por otra parte, la función f' pasa de ser positiva ($\to f$ creciente) a negativa ($\to f$ decreciente) y por lo efectivamente encontramos un máximo en $x = 7$.

(e) La afirmación es **verdadera**. Los candidatos a puntos de inflexión son aquellos donde $f''(x)$ es cero o no existe. Del gráfico desprendemos que estos son $x = -7$, $x = -5$ y $x = 7$. Ahora bien, por definición un punto de inflexión es aquel donde cambia la concavidad.

En $x = -7$ tenemos que f' pasa de ser decreciente ($\to f'' < 0$) a ser creciente ($\to f'' > 0$), por lo cual es un punto de inflexión. Análogamente, en $x = -5$ tenemos que f' pasa de ser creciente a decreciente, lo cual verifica que es un punto de inflexión. Sin embargo, en $x = 1$ la función se mantiene decreciente, por lo cual no es un punto de inflexión y solo reconocemos dos puntos en el gráfico.

(f) La afirmación es **falsa**. Tenemos que f' es decreciente. Sin embargo, f es decreciente solo donde $f' < 0$ y esto pasa de 7 en adelante.

(g) La afirmación es **verdadera**. Ya sabemos del punto *(e)* que $x = -5$ es un punto de inflexión. Como $f'(5)$ no existe, entonces es un candidato a valor extremo. Como f pasa de ser decreciente (pues $f' < 0$) a creciente ($f' > 0$), entonces se suma además que es un mínimo local. Esto verifica que un mínimo local puede ser un punto de inflexión, pero no necesariamente ambas condiciones tienen que ir ligadas.

Revisemos un problema en el que trabajamos con una función a tramos, observando qué ocurre con la diferenciabilidad, continuidad y puntos extremos.

Problema 3.19: Trace la gráfica de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-2} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{x-1}{x^2+1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

indicando dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales, concavidad, puntos de inflexión y asintotas.

Solución:

Evidentemente por simple inspección el **dominio** de la función es $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. La función es continua en todo punto salvo en $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (solo requiere atención en el origen, todos los demás puntos son sencillos de analizar).

Para los **intervalos de monotonía** calculamos $f'(x)$: Para $x > 0$ tenemos que

$$\frac{x+2}{x-2} = \frac{x-2+4}{x-2} = 1 + \frac{4}{(x-2)^2} \to \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\frac{4}{(x-2)^2}$$

Para $x < 0$ tenemos que:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \to \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{(x^2+1) - 2x\,(x-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\to \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2} = \frac{2-(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$$

Es decir,

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(x-2)^2} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{2-(x-1)^2}{(x^2+1)^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Observe que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

razón por la cual f no es derivable en el orígen. Luego, dado que los denominadores de ambos tramos son siempre positivos, hacemos una tabla de signos:

	$\left(-\infty, 1-\sqrt{2}\right)$	$\left(1-\sqrt{2}, 0\right)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$
Monotonía	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

Identificamos inmediatamente a $1-\sqrt{2}$ como un mínimo local y 0 como un máximo local. Descartamos cualquiera análisis en $x = 2$ pues este no forma parte el dominio.

Para determinar los **intervalos de concavidad** calculamos la segunda derivada (el desarrollo se deja propuesto al lector):

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{8}{(x-2)^3} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{2\,(x^3-3x^2-3x+1)}{(x^2+1)^3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es inmediato que $f''(x)$ no existe en $x = 0$ pues $f'(0)$ no existe. Además, notemos que el numerador de $f''(x)$ para $x < 0$ puede (y debe) factorizarse. Por inspección notamos que $x = -1$ es una raíz. Aplicando el algoritmo de división sintética notamos que:

$$f''(x) = \frac{2\,(x+1)\,(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3} \quad \text{si } x < 0$$

Para $x > 0$ ocurre cambio de signo en f'' para $x = 2$. Para $x < 0$ el denominador será siempre positivo. El numerador cambiará de signo en $x = -1$ y en x tal que

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

donde ambas raices son positivas, razón por la cual se descartan, i.e. $x^2-4x+1 < 0$ para todo $x < 0$. Hacemos la tabla de signos entonces con $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Concavidad	$\bigcap$	$\bigcup$	$\bigcap$	$\bigcup$

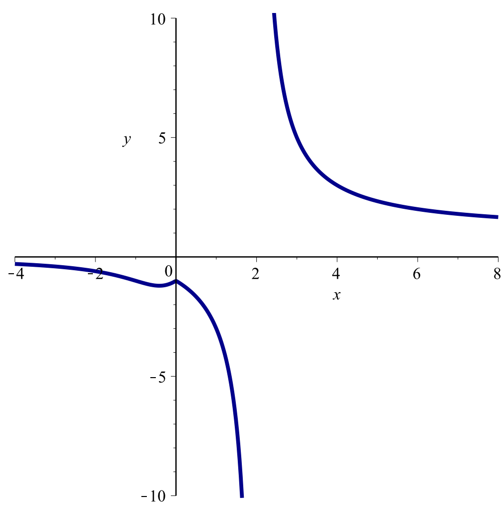
$x=-1$ es inmediatamente punto de inflexión pues allí ocurre cambio de concavidad. $x=0$ también es punto de inflexión por la misma razón. $x=2$ se descarta a pesar de haber cambio de concavidad pues no forma parte del dominio.

Tenemos que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

razón por la cual no se requiere el cálculo de asíntotas oblicuas, existen dos asíntotas horizontales, $y=0$ e $y=3$. Se incluye además la asíntota vertical evidente en $x=2$.

Con todas estas consideraciones (se recomienda hacer una tabla con todos los intervalos de monotonía y concavidad y luego graficar) se obtiene la siguiente gráfica para $f(x)$:



Problema 3.20: [**Propuesto**] Demuestre que si $f''(x_0)$ existe, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0)$$

Use esta expresión para probar que si f tiene un mínimo en x_0 entonces $f''(x_0)\geq 0$.

3.4. Regla de L'Hôpital

Varios de los límites que a continuación veremos puede calcularse de forma fácil a través de las técnicas habituales de cálculo habituales. Es aquí donde surge gracias al Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy una herramienta muy útil para calcularlos: la Regla de l'Hôpital. Revisemos el teorema asociado y sus hipótesis:

Teorema: *(Regla de l'Hôpital)* Sean f y g dos funciones definidas en el intervalo $[a,b]$ y sean $f(c)=g(c)=0$ (ó ∞) con $c\in(a,b)$ y $g'(x)\neq 0$ si $x\neq c$. Si f y g son derivables en (a,b) y existe el límite f'/g' en c y es L, entonces existe el límite de f/g en c existe y es L. Es decir,

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Cumpliendo las hipótesis anteriores la derivación debiese en general simplificar de sobremanera los cálculos, ya se suele bajar el orden de expresiones polinomiales y/o eliminar los ceros. Por esta razón, la principal dificultad de problemas de este tipo es lograr que las hipótesis se cumplan, y en particular, lograr que la expresión sea una forma indeterminada fraccional del tipo $0/0$ ó ∞/∞. Existen muchos trucos para ello y a continuación veremos algunos de ellos con los ejercicios propuestos.

Observación: Es muy importante verificar que se cumplan las hipótesis de la regla antes de utilizarla, ya que en caso contrario puede llegarse a resultados erróneos. Más aun, no es una herramienta perfecta ya que hay límites que son mucho más sencillos de calcular por las técnicas habituales. Dejamos dos ejemplos que verifican respectivamente cada uno de los casos anteriores:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1-\cos(x)}$ no existe, pero conduce a resultado erróneo por regla de l'Hôpital. No se están cumpliendo las hipótesis adecuadas para aplicar la regla.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(10x)^2}{\sin(3x)^2+\sin(20x)^2}$ se complicaría aún más haciendo uso de l'Hôpital.

Problema 3.21: Calcule el valor de los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\csc(x)-\frac{1}{x}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^{x^3}-1)}{1-\cos(x)}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\sin(x)^{\tan(x)}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}\left[\pi-2\arctan(\sqrt{x})\right]$.

Solución:

(a) La principal dificultad de este tipo de ejercicios es primero dejar la expresión como un cuociente de la forma ∞/∞ ó $0/0$. En este caso esto no se cumple, pero podemos solucionarlo restando ambas expresiones:

$$\begin{aligned}\csc(x)-\frac{1}{x} &= \frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\\ &= \frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}\end{aligned}$$

Y esta expresión es efectivamente de la forma indeterminada requerida. Como ambas funciones son derivables, intentamos calcular el límite de las derivadas del numerador y el denominador:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

que nuevamente es de la forma $0/0$. Derivamos nuevamente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}-\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\sin(x)}\\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, como este límite existe y es cero, entonces por Regla de l'Hopital concluimos que:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\csc(x)-\frac{1}{x}=0}$$

lo que nos dice que la diferencia entre ambas funciones se va a cero cerca de cero y divergen con una velocidad similar.

(b) La expresión es de la forma $0/0$ y tanto numerador como denominador son diferenciables. Por lo tanto, los derivamos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^{x^3}-1)}{1-\cos(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(e^{x^3}-1)e^{x^3}3x^2}{\sin(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}e^{x^3}3x\cos\left(e^{x^3}-1\right)\cancelto{1}{\frac{x}{\sin(x)}}\\ &= 0\end{aligned}$$

y por lo tanto, por Regla de l'Hôpital concluimos que

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(e^{x^3}-1\right)}{1-\cos(x)}=0}$$

(c) El límite no es inmediatamente una forma indeterminada fraccionaria. Por esta razón, el primer objetivo es lograr hacer esto y para ello, como tenemos $\tan(x)=\sin(x)/\cos(x)$ en el exponente, tomamos el logaritmo del límite aprovechando la continuidad:

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to 0^+}\sin(x)^{\tan(x)}\ /\ln(\cdot)\\ \\ \ln(L) &= \lim_{x\to 0^+}\tan(x)\ln(\sin(x))\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)\ln\left(\sin\left(x\right)\right)}{\cos(x)}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)}\end{aligned}$$

Y ahora efectivamente tenemos una expresión de la forma ∞/∞:

$$\begin{aligned}
\ln(L) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot(x)}{-\csc^2(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}}{-\dfrac{1}{\sin^2(x)}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} -\cos(x)\sin(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto, obtenemos que $\ln(L) = 0 \to \boxed{L = 1}$.

(d) La expresión no es inmediatamente fraccional pero es de la forma $\infty \cdot 0$, por lo tanto, tenemos que dejarla en su forma fraccionaria. inmediatamente se puede hacer que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left[\pi - 2\arctan(\sqrt{x})\right] &= \lim_{x\to\infty} \frac{\pi - 2\arctan(\sqrt{x})}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} \approx \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x} \\
\to \boxed{\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\left[\pi - 2\arctan(\sqrt{x})\right] = 2}
\end{aligned}$$

Problema 3.22: Calcule (si existe) el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]^{1/x^2}$$

Solución:

Este límite en $x = 0$ es de la forma $(0/0)^{\infty}$. Podriamos utilizar regla de L'Hôpital si tuviésemos una expresión de la forma $0/0$ ó ∞/∞. Para lograr esto, aplicamos la propiedad del logaritmo:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]^{1/x^2} \\
\to \ln L &= \lim_{x\to 0} \ln\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]^{1/x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin(x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\ln\sin(x) - \ln(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

la cual es de la forma $0/0$ (notar que $\ln\sin(x) - \ln(x) \to 0$ pues se comportan de forma similar al aproximarse a cero, se puede verificar fácilmente). Podemos aplicar sin mayor dificultad la propiedad enunciada anteriormente ya que ambas funciones son trivialmente diferenciables:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\sin(x) - \ln(x)}{x^2} \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{2x^2\sin(x)}$$

la cual es de la forma 0/0 y evidentemente diferenciable. Aplicamos regla de L'Hôpital nuevamente:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{2x^2\sin(x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - x\sin(x) - \cos(x)}{4x\sin(x) + 2x^2\cos(x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{4\sin(x) + 2x\cos(x)}
\end{aligned}$$

Notar que este límite puede calcularse fácilmente multiplicando por $1 = x/x$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{4\sin(x) + 2x\cos(x)} &= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{4\sin(x) + 2x\cos(x)} \cdot \frac{x}{x} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{4\sin(x) + 2x\cos(x)} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{1}{4\dfrac{\sin(x)}{x} + 2\cos(x)} \\
&= -\frac{1}{4+2} \\
&= -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(***Nota:*** se podría haber aplicado sin dificultad L'Hôpital nuevamente para llegar al mismo resultado. Sin embargo, se evitó este paso ya que el límite podía calcularse sin mayor dificultad). Por lo tanto, tenemos por transitividad que

$$\ln(L) = -\frac{1}{6} \to \boxed{L = e^{-1/6}}$$

que es el límite pedido.

Problema 3.23: *(I2-2013-1)* Calcule el valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$ siendo a una constante positiva.

Solución:

Observe que el límite es de la forma $\dfrac{0}{0}$ y ambas funciones son evidentemente diferenciables, por lo que puede utilizarse directamente la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \ln(a) \, \frac{a^x - a^{\sin(x)}\cos(x)}{3x^2}$$

Nos enfrentamos nuevamente al mismo problema y se cumplen las condiciones, por lo que nuevamente derivamos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} = \ln(a) \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln(a) - a^{\sin(x)}\cos(x)^2 \ln(a) + a^{\sin(x)}\sin(x)}{6x}$$

y nuevamente derivamos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} &= \frac{\ln(a)}{6} \lim_{x\to 0} a^x \ln(a)^2 - a^{\sin(x)}\cos(x)^3 \ln(a)^2 + 3a^{\sin(x)}\cos(x)\sin(x)\ln(a) + a^{\sin(x)}\cos(x) \\
&= \frac{\ln(a)}{6} \left[\ln(a)^2 - \ln(a)^2 + 1\right]
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} = \frac{\ln(a)}{6}}$$

3.5. Problemas de optimización

Todos los criterios que revisamos y aplicamos en el apartado 3.3 pueden ser aplicados integramente en aplicaciones directas en problemas reales, tales como problemas financieros, geométricos, físicos, etc.

Para resolver este tipo de problemas el real desafío es convertir el problema real en un problema matemático de optimización al definir una función que debe ser maximizada y/o minimizada. Este proceso es conoce como modelamiento matemático.

En este apartado revisaremos varios problemas de esta naturaleza.

Problema 3.24: Hallar las dimensiones del cilindro rectangular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono de altura h y radio basal r.

Solución:

El volumen de un cilindro es una función de dos variables: el radio y la altura, y se relacionan por la expresión:

$$V(a,b) = \pi a^2 b$$

donde a es el radio y b es la altura. Ahora bien, está inscrito en un cono de radio basal r y altura h, por lo cual al inscribirlo en este las variables se relacionan por proporcionalidad. En particular, si tomamos un radio a fijo para el cilindro, entonces se cumple por Teorema de Thales que

$$\frac{h}{r} = \frac{b}{r-a}$$

Es decir, el problema que debemos resolver es[4]

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & \pi a^2 b \\ \text{s.a.} \quad & \\ & \frac{h}{r} = \frac{b}{r-a} \\ & a, b \geq 0 \end{aligned}$$

Se agrega la última restricción pues, al tratarse de variables geométricas, estas son necesariamente positivas. Luego, despejamos la restricción:

$$b = \frac{h}{r}(r-a)$$

[4] s.a. significa "sujeto a". La notación presentada es la ampliamente utilizada en problemas de optimización.

y por lo tanto tenemos que maximizar una función de una variable:

$$
\begin{aligned}
V(a) &= \pi a^2 \frac{h}{r}(r-a) \\
& \frac{\pi h}{r}\left(a^2 r - a^3\right)
\end{aligned}
$$

Buscamos los candidatos a puntos críticos derivando:

$$V'(a) = \frac{\pi h}{r}\left(2ar - 3a^2\right)$$

Como es una función polinomial, la derivada existe en todos los puntos y basta solo igualar a cero para encontrar los candidatos:

$$2ar - 3a^2 = a(2r - 3a) = 0$$

por lo que los candidatos son $a = 0$ y $a = 2r/3$. Que un cilindro tenga radio nulo nos sugiere que no tiene espesor, y por lo tanto este no es un candidato válido. Concluimos entonces que el volumen máximo viene dado por la dimensiones:

$$\boxed{a = \frac{2r}{3}} \to \boxed{b = \frac{h}{3}}$$

(**Nota:** se puede también verificar que el candidato es un máximo a partir de los cambios de signo de la función $V'(a)$)

Problema 3.25: Encuentre los puntos de la parábola $y = x^2 - 3$ más cercanos al origen.

Solución:

Graficando la situación en lápiz y papel, notamos intuitivamente que la respuesta no es del todo trivial. Buscamos encontrar el punto $\vec{x}_0$ en la parábola tal que minimice su distancia al origen. La distancia de $\vec{x}_0$ al orígen se parametriza como:

$$
\begin{aligned}
d(\vec{x}_0, \vec{0}) &= \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - 0)^2} \\
&= \sqrt{x_0^2 + \left(x_0^2 - 3\right)^2}
\end{aligned}
$$

Luego, el problema a resolver es:

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & \sqrt{x_0^2 + \left(x_0^2 - 3\right)^2} \\
\text{s.a.} \quad & \\
& x_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Como estamos midiendo una distancia en una función creciente y no negativa, el problema es equivalente a minimizar

$$
\begin{aligned}
\text{mín} \quad & x_0^2 + \left(x_0^2 - 3\right)^2 \\
\text{s.a.} \quad & \\
& x_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Estamos enfrentándonos a un problema de optimización irrestricta, donde los máximos y mínimos vienen dados por los puntos críticos. Consideremos $f(x) = x^2 + (x^2 - 3)^2$. Los puntos criticos los buscamos derivando:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2(x^2 - 3)2x \\ &= 2x + 4x^3 - 12x \\ &= 2x(2x^2 - 5) \end{aligned}$$

Los candidatos a máximos y mínimos son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{5/2}$. Para variar con respecto a los demás problemas, analizamos signos de $f'(x)$ (crecimiento/decrecimiento) para determinar el carácter apropiado.

	$(-\infty, -\sqrt{5/2})$	$(-\sqrt{5/2}, 0)$	$(0, \sqrt{5/2})$	$(\sqrt{5/2}, \infty)$
$2x^2 - 5$	$+$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
f'	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego, es directo que los mínimos se dan exclusivamente en $x = \pm\sqrt{5/2}$. Es decir, estos son los puntos en el eje x para los cuales se minimiza la distancia al orígen. El eje y es el mismo para ambos casos dada la simétría de la parábola y corresponde a $5/2 - 3 = -1/2$. Concluimos que los puntos más cercanos al origen están dados por:

$$\boxed{\vec{x}_0 = (\sqrt{5/2}, -1/2)} \quad \text{y} \quad \boxed{\vec{x}_0 = (-\sqrt{5/2}, -1/2)}$$

Problema 3.26: *(I2-2013-1)* Se fabrica un recipiente metálico cilíndrico sin tapa de tal modo que contenga V_0 cm^3 de líquido. Calcule la superficie mínima del recipiente.

Solución:

Queremos minimizar la superficie del recipiente, por lo cual la función superficie del cilindro es la función a minimizar. La superficie del cilindro sin una tapa de radio r y altura h vendrá dada por

$$S(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h$$

con $r > 0$ y $h > 0$. Adicionalmente, sabemos que el volumen del recipiente siempre tiene que ser V_0, con lo cual

$$\pi r^2 h = V_0$$

De esta forma, el problema de optimización es

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \pi r^2 + 2\pi r h \\ \text{s.a.} \quad & \pi r^2 h = V_0 \\ & r, h > 0 \end{aligned}$$

Observe que el radio y la altura son estrictamente positivos ya que no hace sentido hablar de un radio o una altura nulas en un cuerpo tridimensional.

Evidentemente no podemos trabajar con una función de dos variables, por lo que reemplazamos la ecuación de la restricción en la función objetivo. En particular, hagamos

$$h = \frac{V_0}{\pi r^2}$$

De esta forma,

$$S = S(r) = \pi r^2 + \frac{2V_0}{r}$$

Para determinar candidatos a máximos y mínimos derivamos,

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{2V_0}{r^2}$$

Resolvemos la ecuación

$$2\pi r^3 - 2V_0 = 0 \to r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}$$

Determinamos el carácter de la función a partir de los intervalos de crecimiento y decrecimiento (con $r > 0$ y $h > 0$). Sumamos los términos de $S'(r)$ y estudiamos el carácter del numerador ($r^2 > 0$).

Observe que r^3 es una función creciente que cambia de signo en $r = 0$. Luego, $2\pi r^3 - 2V_0 = 2(\pi r^3 - V_0)$ es la misma función escalada y desplaza en V_0 unidades hacia abajo. Por esta razón es que basta notar que para $r > \sqrt[3]{V_0/\pi}$ la función S' es positiva (creciente) y S' es decreciente para $r < \sqrt[3]{V_0/\pi}$. Luego, para el problema planteado con r y $h > 0$, tenemos que el mínimo global viene dado por

$$\boxed{r = \sqrt[3]{\frac{V_0}{\pi}}}$$

Problema 3.27:

(a) Calcule el área del máximo rectángulo que es posible inscribir con sus lados paralelos a los ejes coordenados en la figura encerrada por las curvas $3y = 12 - x^2$ y $6y = x^2 - 12$.

(b) Un hombre lanza su barco desde un punto en la orilla de un río recto, de 3 km de ancho y quiere llegar a otro punto a 8 km río abajo en la orilla opuesta. Dicha persona puede remar en su barca directamente al punto B, remar hasta C y luego correr hasta B o realizar una mezcla de ambas posibilidades (remar hasta D y luego correr hasta B). Si el hombre rema a 6 km/h y corre a 8 km/h, ¿dónde debe desembarcar para realizar el trayecto lo más rápidamente posible? Suponga que la velocidad del agua es despreciable.

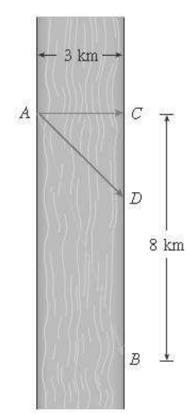


Figura P3.23

Solución:

(a) Notamos que la función a maximizar corresponde al área del rectángulo. Para un rectángulo de lados a y b esta expresión viene dada por $A(a,b) = ab$. Tenemos que lograr escribir la función en términos de una sola variable.

Consideremos un punto $x_0$fijo dentro de la figura encerrada por las curvas (las cuales son parábolas que se abren respectivamente hacia abajo y hacia arriba con diferente concavidad). Notamos que si queremos maximizar el área del rectángulo, entonces este necesariamente debe tener sus vértices contenidos en las parábolas.

Por lo tanto, la altura del rectángulo viene dada por la diferencia de alturas entre las parábolas. Esto es, la diferencia de la parábola que se abre hacia abajo (que será siempre positiva) y la parábola que se abre hacia arriba (que será siempre negativa).

$$\begin{aligned} b &= \frac{12 - x_0^2}{3} - \frac{x_0^2 - 12}{6} \\ &= \frac{24 - 2x_0^2 - x_0^2 + 12}{6} \\ &= \frac{12 - x_0^2}{2} \end{aligned}$$

Para ambas parábolas el eje de simetría estará ubicado en el orígen, por lo cual para que los bordes del rectángulo estén contenidos en las parábolas se debe cumplir que el otro punto en el eje x corresponde a $-x_0$. Con esto, tenemos que

$$a = 2\,|x_0|$$

Por esta razón,

$$A(a,b) = A(x_0) = 2x_0 \left(\frac{12 - x_0^2}{2} \right)$$

Es decir, la función objetivo corresponde a

$$A(x) = 12\,|x| - |x|^3$$

y el problema de optimización se escribe como

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad 12\,|x| - |x|^3 \\ &\text{s.a.} \\ &\quad -\sqrt{12} \leq x \leq \sqrt{12} \end{aligned}$$

(la restricción aparece pues x debe estar contenido en la figura encerrada por las parábolas). Aprovechamos la simetría del problema: la solución en los números negativos será exactamente la misma que la de los números negativos. Esto es,

$$\begin{aligned} &\text{máx} \quad 12\,|x| - |x|^3 \\ &\text{s.a.} \\ &\quad -\sqrt{12} \leq x \leq \sqrt{12} \end{aligned} \quad \sim \quad \begin{aligned} &\text{máx} \quad 12x - x^3 \\ &\text{s.a.} \\ &\quad 0 \leq x \leq \sqrt{12} \end{aligned}$$

Con esto, podemos imponer que x sea positivo y eliminamos inmediatamente el módulo. Consecuentemente, notamos que los candidatos a máximos y mínimos estarán:

(a) Donde la derivada de la función objetivo no existe o es cero.

(b) En los bordes, es decir $x = 0$ y $x = \sqrt{12}$.

Derivando:

$$A'(x) = 12 - 3x^2 = 3(4 - x^2)$$

desprendemos que los candidatos a máximo global son $x = 2$ (se descarta -2 pues no está sujeto a las restricciones), $x = 0$ y $x = \sqrt{12}$. Determinamos el máximo evaluando los puntos y escogiendo al de mayor valor:

- $A(2) = 24 - 8 = 16$.
- $A(0) = 0$. (razonable pensándolo geométricamente)
- $A(\sqrt{12}) = 12\sqrt{12} - \sqrt{12}^3 = 0$. (idem)

Por lo tanto, el área máxima del rectángulo que se puede inscribir en la figura se alcanza cuando su ancho es 4 y su valor es 16.

(b) La forma más sencilla de ver el problema es entendiéndolo como uno en que se busca minimizar el tiempo del recorrido. De esta forma, notamos que:

$$\text{tiempo total} = \text{tiempo remando} + \text{tiempo trotando}$$

como sabemos las velocidades, tenemos que:

$$\text{tiempo total} = \frac{\text{distancia remando}}{\text{velocidad remando}} + \frac{\text{distancia trotando}}{\text{velocidad trotando}}$$

Supongamos que decide remar x kilómetros con respecto a C, i.e. $CD = x$. Debido al nivel de conocimientos que disponemos, nos importa dejar expresado el segmento DB en términos de x para poder optimizar así una sola variable. Por Teorema de Pitágoras, se cumple que

$$AC^2 + CD^2 = AD^2 \to AD(x) = \sqrt{x^2 + 9}$$

Siempre se debe cumplir que que $CD + DB = 8$ pues es lo que queremos remar. Entonces, $DB = 8 - CD$. Por lo tanto,

$$DB = DB(x) = 8 - x$$

De esta forma, obtenemos el tiempo total que se demora en el recorrido:

$$T_{\text{rec}} = T(x) = \frac{1}{6}\sqrt{x^2 + 9} + \frac{1}{8}(8 - x)$$

y así, nuestro problema de optimización consiste en:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{6}\sqrt{x^2 + 9} + \frac{1}{8}(8 - x) \\ \text{s.a.} \quad & \\ & 0 \leq x \leq 8 \end{aligned}$$

donde agregamos la restricción debido a que el hombre no puede remar menos de 3 km (para cruzar el rio) ni más de $\sqrt{3^2 + 8^2}$ (remar todo el trayecto hasta destino). Por lo tanto, los candidatos los buscamos en:

- Los puntos donde $T'(x) = 0$ o no existe.
- Los extremos del intervalo.

Derivando:

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8} = 0$$

$T'(x)$ existe en todo punto. Vemos donde se iguala a cero sumando fracciones e igualando el numerador a cero:

$$T'(x) = \frac{4x - 3\sqrt{x^2+9}}{24\sqrt{x^2+9}} \to T'(x) = 0 \leftrightarrow 4\sqrt{x^2+9} = 3x$$

Resolvemos la ecuación, obteniendo:

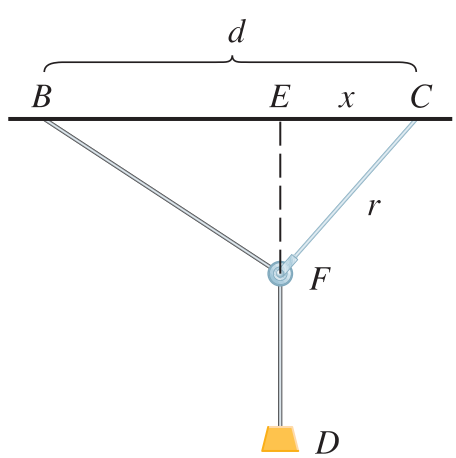
$$x = \pm\frac{9}{\sqrt{7}}$$

De esta forma, de acuerdo a las restricciones, todos los candidatos posibles a máximo global son: 3, $\sqrt{73}$ y $9/\sqrt{7}$. Reconocemos al máximo global evaluando en la función objetivo:

- $T(0) = \dfrac{1}{2} + 1 = 1{,}5.$
- $T(8) = \dfrac{\sqrt{73}}{6} + 1 - 1 = \dfrac{\sqrt{73}}{6} \approx 1{,}42.$
- $T\left(\dfrac{9\sqrt{7}}{8}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{7}}{8} \approx 1{,}33.$

Por lo tanto, recorrer $\boxed{9/\sqrt{7}\ \text{km}}$ remando minimiza el tiempo del recorrido. Es decir, debe desembarcar a $9/\sqrt{7}$ kilómetros de C.

Problema 3.28: Considere una polea colgada a un techo en un punto C por una cuerda de largo r. En otro punto, que denotamos B, a una distancia d de C, una cuerda de largo ℓ cuelga del techo que pasa a través de la polea en F y está conectada a un peso W. Se suelta este peso y llega al equilibrio en el punto D, tal como se muestra en la figura a continuación:



Marquis de l'Hôpital determinó que la situación de equilibrio ocurre cuando la distancia $|ED|$ se maximiza. Pruebe que el sistema alcanza el equilibrio cuando el valor de x corresponde a:

$$\frac{r}{4d}\left(r+\sqrt{r^2+8d^2}\right)$$

y que por lo tanto es independiente de W y ℓ.

Solución:

Evidentemente la información que da el enunciado nos sugiere que tenemos que trabajar con ED, que corresponde a una función de x. Es decir, denotemos:

$$ED = ED(x) = f(x)$$

La estrategia más adecuada es determinar el valor aprovechándose de la geometria de la función. Para eso, escribimos:

$$f(x) = EF(x) + FD(x)$$

Cada uno de los términos anteriores los podemos utilizar haciendo uso del teorema de Pitágoras. En efecto,

$$EC(x)^2 + EF(x)^2 = CF^2 \to EF(x) = \sqrt{r^2-x^2}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} BE(x)^2 + EF(x)^2 = BF(x)^2 \quad &\to \quad (d-x)^2 + \left(r^2 - x^2\right) = BF(x)^2 \\ &\to \quad BF(x) = \sqrt{d^2 - 2dx + r^2} \end{aligned}$$

pero $BF(x) + FD(x) = \ell$ y por lo tanto, obtenemos que

$$f(x) = \sqrt{r^2-x^2} + \ell - \sqrt{d^2-2dx+r^2}$$

Como esta función debe ser maximizada, buscamos sus puntos críticos calculando la función derivada:

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}} + \frac{d}{\sqrt{r^2+d^2-2dx}}$$

Los candidatos inmediatos a partir del denominador son $x = r$ y $x = \left(r^2+d^2\right)/2d$. A partir del numerador debemos en primer lugar sumar las fracciones:

$$f'(x) = -\frac{x\sqrt{r^2+d^2-2dx} + d\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{r^2+d^2-2dx}}$$

Es decir, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} x\sqrt{r^2+d^2-2dx} = d\sqrt{r^2-x^2} \quad &\to \quad x^2\left(r^2+d^2-2dx\right) = d^2\left(r^2-x^2\right) \\ &\to \quad d^2r^2 - d^2x^2 = r^2x^2 + d^2x^2 - 2dx^3 \\ &\to \quad 2dx^3 - (2d^2+r^2)x^2 + d^2r^2 \end{aligned}$$

Las soluciones a esta ecuación vienen dadas por

$$x = d \quad \text{y} \quad x = \frac{r}{4d}\left(r+\sqrt{r^2+8d^2}\right)$$

(notar que se descartaron las raíces negativas en todos los casos). En este ejercicio en particular se descartan los puntos críticos donde f no es diferenciable, ya que representan singularidades que desde la perspectiva física no pueden ocurrir (los fenómenos en la naturaleza son continuos y diferenciables). Por esta razón, aunque extraña desde el punto de vista matemático, concluimos que la unica solución posible es

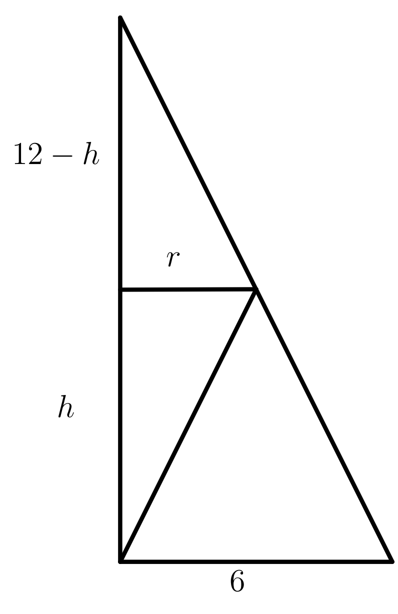
$$\boxed{x = \frac{r}{4d}\left(r + \sqrt{r^2 + 8d^2}\right)}$$

Observación: Como nos están dando la solución, basta reemplazar este x en la ecuación $f'(x) = 0$ y ver que la satisface. Luego, se puede calcular la segunda derivada y establecer el carácter del valor extremo. Esta es una solución evidentemente más extensa y se deja propuesta al lector.

Problema 3.29: Se desea inscribir un cono circular recto en otro cono circular recto más grande, de manera que sus bases sean paralelas y que el vértice del cono inscrito se encuentre en el centro de la base del cono mayor. Si las dimensiones del cono mayor son 6 cm de raido y 12 cm de altura, determine la altura h y el radio r del cono inscrito de manera que su volumen sea máximo.

Solución:

Es sabiado que un cono se genera al rotar un triángulo rectágulo en torno a sus catetos. Por lo tanto, podemos graficar la solución en términos de los triángulos como sigue:



El volumen del cono inscrito viene dado por (fórmula del volumen de un cono):

$$V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Es evidente que el cono está inscrito, se cumplen relaciones de proporcionalidad entre los triángulos. En particular, se desprende de la figura que:

$$\frac{12}{6} = \frac{12-h}{r} \to 2r = 12 - h$$

Es decir, el problema de optimización en cuestión es:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & V(r,h) = \frac{\pi}{3} r^2 h \\ \text{s.a..} \quad & 2r = 12 - h \end{aligned}$$

Reemplazando con la igualdad convertimos un problema de dos variables en un problema de solo una. Tenemos que

$$V = V(r) = \frac{\pi}{3} r^2 (12 - 2r) \quad \text{pues } h = 12 - 2r$$

Es decir,

$$V(r) = \frac{\pi}{3} \left(12r^2 - 2r^3\right)$$

Derivando una vez:

$$V'(r) = 8\pi r - 2\pi r^2 = 2\pi r (4 - r)$$

Los extremos se alcanzan en $V'(r) = 0$. Por lo tanto, los candidatos posibles son $r = 0$ y $r = 4$. Sabemos que en $r = 0$ se genera un cono con volumen cero por lo que este solo puede ser un mínimo, lo que a su vez nos lleva a concluir que el máximo se alcanza en $r = 4$. En efecto, derivando nuevamente:

$$V''(r) = 8\pi - 4\pi r$$

Se tiene que $V''(0) > 0$ y $V''(4) = -8\pi < 0$. Concluimos entonces que las dimensiones del cono inscrito de volumen máximo son:

$$\boxed{r = 4} \quad \text{y} \quad \boxed{h = 4}$$

3.6. Otros

Recopilamos una diversa tipología de problemas en este último apartado del capítulo.

Problema 3.30: Utilizando una aproximación de primer orden, estime el valor de $\sqrt{230}$.

Solución:

En analogía a cómo calculábamos rectas tangentes para una fución, la diferenciabilidad tiene una aplicación muy práctica para estimar el valor númerico de estas. En el caso de este problema, notamos que queremos calcular $f(230)$, donde

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Haciendo abuso de notación, como sabemos que esta función es diferenciable, tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x) \to \mathrm{d}f = f'(x)\mathrm{d}x$$

¿Qué está diciendo esto? Que una diferencia infinitesimalmente pequeña en f $-\mathrm{d}f-$ se puede calcular como la derivada en dicho punto multiplicada por la diferencia correspondiende en el eje x $-dx-$. ¿Podemos utilizar esto para aproximar? Evidentemente, si nos alejamos una cantidad razonable de un punto x_0, podemos tener que

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

donde $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ y $\Delta x = x - x_0$. Cabe señalar que este **no** será el valor exacto, y mientras más lejos tomemos el valor de x con respecto al de x_0, mayores son las posibilidades de que el error con respecto al valor exacto sea mayor.

¿Qué hemos ganado con todo esto? $\sqrt{230}$ no es fácil de calcular, pues no corresponde a un cuadrado perfecto. Sin embargo, si encontramos uno cercano puede resultar muy fácil calcularlo por medio de este método. En particular, si tomamos $x_0 = 225 \to f(x_0) = 15$. Por lo tanto,

$$f(x) - f(225) \approx f'(225)(x - 225)$$

$$\to f(x) \approx f(225) + f'(225)(x - 225)$$

Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} \to f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Con esto,

$$f(x) \approx 15 + \frac{1}{30}(x - 225)$$

Como nos interesa $x = 30$, tenemos finalmente

$$f(230) = \sqrt{230} \approx 15 + \frac{1}{30}(230 - 225)$$

$$\therefore \sqrt{230} \approx 15 + \frac{1}{6}$$

Calculando los resultados:

$$\begin{aligned} \sqrt{230}_{\text{exacto}} &= 15,165750888\ldots \\ \sqrt{230}_{\text{approx}} &= 15,166666666\cdots \end{aligned}$$

Notamos que el error es del orden de milésimas.

Problema 3.31: Escriba e^{2x} como $e^{2x} = P(x) + R(x)$ tal que $P(x)$ es un polinomio grado 3 y $R(x)$ es una función tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^3} = 0$$

Use este resultado para calcular:

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{2x} - 2x^3 - 2x^2 - x}{x^4}$$

Solución:

Por definición, dicho polinomio corresponderá al Polinomio de Taylor de e^{2x} de grado 3. Notar que, por principio de identidad, podemos calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de e^x, evaluarlo en $2x$ y obtener exactamente el mismo resultado que obtendriamos en otro caso.

Al ser de orden 3 y estar evaluado en cero, el polinomio se puede escribir como

$$\begin{aligned} P(x) &= a\,(x-0)^3 + b\,(x-0)^2 + c\,(x-0) + d \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + d \end{aligned}$$

d lo obtenemos inmediatamente evaluando la relación

$$e^{2x} = P(x) + R(x)$$

en cero, ya que $R(0) = 0$ para ser coherentes con el hecho que

$$\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^3} = 0$$

Así, $d = 1$. El procedimiento para obtener los otros coeficientes consiste en derivar e igualar a cero:

$$e^{2x} = P(x) + R(x) \to 2e^{2x} = 3ax^2 + 2bx + c + R'(x)$$

Evaluando en cero, notamos que por regla de L'Hôpital se cumple que $R'(0) = 0$. Entonces, $c = 2$. Procediendo análogamente:

$$4e^{2x} = 6ax + 2b + R''(x) \to b = 2$$

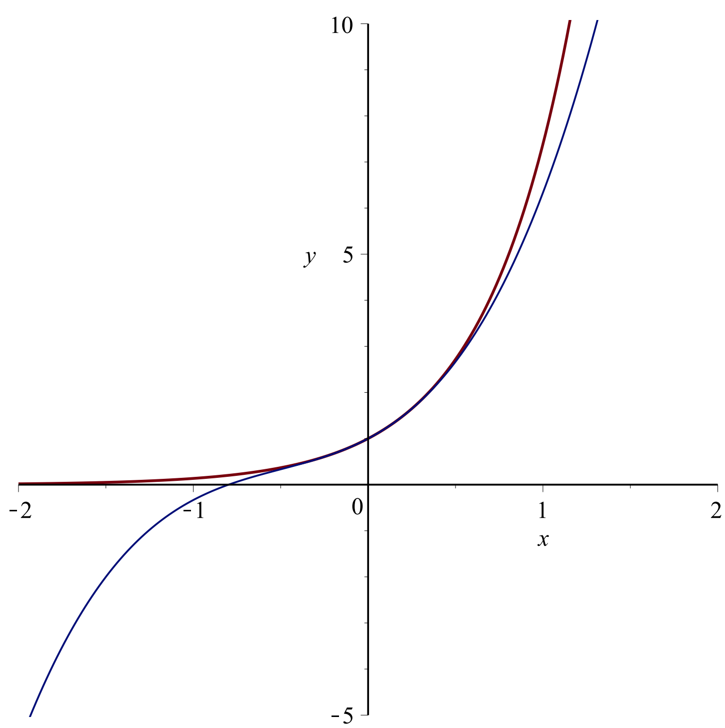
Finalmente,

$$8e^{2x} = 6a + R^{(3)}(x) \to a = \frac{4}{3}$$

Con esto,

$$\boxed{e^{2x} = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 2x + 1 + R(x)}$$

Comprobamos gráficamente la coincidencia local de ambas funciones (en azul el polinomio de Taylor):



Reemplazando en el límite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{xe^{2x} - 2x^3 - 2x^2 - x}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + 2x + 1 + R(x)\right) - 2x^3 - 2x^2 - x}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{4}{3}x^4 + xR(x)}{x^4} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{4}{3} + \cancel{\frac{R(x)}{x^3}}^{0} \\
\to \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{xe^{2x} - 2x^3 - 2x^2 - x}{x^4} = \frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

obteniendo asi el resultado pedido.

Problema 3.32: Suponga que la aceleración de una partícula que se mueve de forma unidimensional viene dada por la función $a(t) = 6t + 20 - 9\cos(3t)$. Sabiendo que la partícula en el instante cero se encontraba en el orígen con una velocidad inicial de 10 [m/s], determine la posición de la particula en t cualquiera.

Solución:

Por cinemática elemental sabemos que:

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Análogamente

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

Es decir, queremos determinar $x(t)$ a partir de $a(t)$. En otras palabras, nos estamos haciendo la pregunta: ¿de qué función f se tiene que $a(t)$ es su segunda derivada? Esta no es más que la definición de **primitiva**:

Definición: Se dice que F es la *primitiva* de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$, lo cual se denota como:

$$F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$$

Notar que existen infinitas primitivas para una función, ya que pueden diferir en una constante (la cual se anula al ser derivada). Esto quiere decir que:

$$g(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \to f(x) = \int g(x)\mathrm{d}x + c$$

donde c es una constante que debe ser determinada a partir de un valor conocido en un punto de g (llamada *condición inicial*) o por otro método adecuado. Luego, a partir de este preludio teórico tenemos que

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6t + 20 - 9\cos(3t) \rightarrow v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t + c$$

Entonces

$$v(t) = \int 6t + 20 - 9\cos(3t)\mathrm{d}t + c_1$$

Como la derivada es una aplicación lineal, es esperable que su operación inversa también lo sea, ya que cada uno de los términos por separado corresponderá a la derivada de un término.

$$\therefore\ v(t) = \int 6t\mathrm{d}t + \int 20\mathrm{d}t + \int -9\cos(3t)\mathrm{d}t + c_1$$

Para calcular cada una de las primitivas nos preguntamos: esta función dada, ¿a la derivada de qué función corresponde? Haciendo el proceso inverso, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int 6t\mathrm{d}t &= 3t^2 + \kappa_1 \\ \int 20\mathrm{d}t &= 20t + \kappa_2 \\ \int -9\cos(3t)\mathrm{d}t &= -3\sin(3t) + \kappa_3 \end{aligned}$$

Es decir,

$$v(t) = 3t^2 + \kappa_1 + 20t + \kappa_2 - 3\sin(3t) + \kappa_3 + c_1$$

Reagrupando términos notamos que como κ_1, κ_2, κ_3 y c_1 son constantes, podemos reagruparlas en una sola constante $\mathcal{C} = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + c_1$ lo que para efectos prácticos significa que podemos considerar que la constante es cero en el cálculo por separado de cada una de las primitivas y luego escribir al final una sola constante. Con esto, tenemos que

$$v(t) = 3t^2 + 20t - 3\sin(3t) + \mathcal{C}$$

Sabemos que la velocidad en el orígen es de 10 m/s, lo cual implica que

$$v(0) = \mathcal{C} = 10$$

Procediendo por analogía, notamos que

$$x(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \rightarrow x(t) = \int v(t)\mathrm{d}t + \mathcal{D}$$

Esto es,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int 3t^2 + 20t - 3\sin(t) + 10\,\mathrm{d}t \\ &= t^3 + 10t^2 + \cos(3t) + 10t + \mathcal{D} \end{aligned}$$

Como sabemos que la particula se encuentra en el orígen en el instante 0, tenemos que

$$x(0) = 1 + \mathcal{D} = 0 \rightarrow \mathcal{D} = -1$$

Así, concluimos que la función posición de la partícula viene dada por

$$\boxed{x(t) = t^3 + 10t^2 + 10t + \cos(3t) - 1}$$

4. Integrales

4.1. Sumas de Riemann

Recordemos algunos conceptos antes de abordar el capítulo:

- Se define $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ como una *partición* de $[a,b]$ si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de modo que
$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} [x_{k-1}, x_k] \quad \text{y} \quad [x_k, x_{k+1}] \cap [x_j, x_{j+1}] = \varnothing \quad \text{si } k \neq j$$
- Se dice que I_k es el $k-$ésimo intervalo definido para la partición $\mathcal{P}$.
- $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.
- Se define la *norma* de la partición como $\|\mathcal{P}\| = \text{máx}\{\Delta x_k \,:\, 1 \leq k \leq n\}$
- Sea f una función acotada en $[a,b]$. Si para todo k, $c_k \in I_k$, entonces
$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$
se define como una *suma de Riemann* de f en $[a,b]$ para la partición $\mathcal{P}$. Notar que existen infinitas sumas de Riemann para el mismo intervalo de f.

Luego, consideramos la definición de integral de Riemann:

Definición: Una función f acotada definida en un intervalo $[a,b]$ se dice *Riemann integrable* en $[a,b]$ si existe un número I en los reales tales que para todo número real positivo ϵ existe una δ positiva tal que si $\mathcal{P}$ es una partición de $[a,b]$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y $S(\mathcal{P}, f)$ es la respectiva suma de Riemann de la partición $\mathcal{P}$, entonces $|S(\mathcal{P}, f) - I| < \epsilon$.

Entonces,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Esta definición nos da la ventaja de que si la función es Riemann integrable, entonces **podemos tomar cualquier partición a conveniencia** y obtener una expresión de un límite para la integral.

Sabemos adicionalmente, que es una condición necesaria y suficiente que $f(x)$ sea continua o tenga un conjunto numerable de discontinuidades en $[a,b]$ para que $f(x)$ sea Riemann integrable. Como es el caso de esta función, solo basta elegir la partición adecuada para llegar al resultado pedido.

Agregamos algunos conceptos y proposiciones adicionales para el entendimiento teórico de la integral de Riemann.

Definición: Si f es acotada en $[a,b]$ y P es la partición $a = a_0 < \ldots < a_n = b$ y

- $m_k = \text{ínf}\{f(x) : x \in I_k\}$.
- $M_k = \sup\{f(x) : x \in I_k\}$.

Entonces tenemos que:

(a) $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta x_k$ se denomina la *integral superior*, de f en $[a,b]$ para P, con su respectiva suma superior $\overline{s}$, y se denota: $\displaystyle\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$.

(b) $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(m_k)\Delta x_k$ se denomina la *integral inferior* de f en $[a,b]$ para P, con su respectiva suma inferior $\underline{s}$, y se denota: $\displaystyle\underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x$.

Proposición: f es integrable en $[a,b]$ si tanto la suma superior como la inferior existen y:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Teorema: Si f es continua, entonces es integrable. El recíproco no necesariamente se cumple.

Teorema: Si f es integrable en $[a,b]$ y g es tal que $g(x) = f(x)$ en $[a,b]$ salvo para un número finito de puntos, entonces g también es integrable y además:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Corolario: Si f es acotada y continua a tramos, es integrable en $[a,b]$. Simplemente se integra por tramos.

Este marco teórico es más que suficiente para desarrollar los siguientes problemas:

Problema 4.1: Demuestre que si $f(x)$ es una función continua en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)$$

y luego, utilizando este resultado:

(a) Deduzca que

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(b) Calcule el valor exacto de

$$I = \int_0^1 2x\mathrm{d}x$$

Solución:

Hagamos el proceso inverso: a partir del resultado identifiquemos la partición y dejemos claro que, como cumple el hecho de ser Riemann integrable, entonces efectivamente es el resultado pedido.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f \underbrace{\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)}_{c_k}$$

Notamos que si definimos

$$c_k = a + \frac{b-a}{n}k$$

y sabemos que $c_k \in I_k$, $k = 1, \ldots, n$. Luego $c_1 = a + (b-a)/n$, $c_1 = a + 2(b-a)/n$, ..., $c_n = b$. Es decir, cada término c_k del intervalo I_k corresponde al extremo derecho de este. En particular, se está tomando la partición regular:

$$\mathcal{P} = \left\{a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, a + 3\frac{b-a}{n}, \ldots, b\right\}$$

de modo que inmediatamente $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\,\Delta x_k$$

Por teorema, como f es Riemann integrable, concluimos que el límite anterior y existe y es:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

demostrando así lo pedido. ■

(a) Tomando $b = 1$ y $a = 0$ se llega inmediatamente al resultado:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(0 + \frac{1-0}{n}k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \ \blacksquare \end{aligned}$$

(b) Con el resultado del apartado anterior

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 2\frac{k}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\int_0^1 2x\mathrm{d}x = 1}$$

Problema 4.2: Identifique los siguientes límites con una integral de Riemann:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2e}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(e^{i/n}\right)^2 \cos\left(e^{2i/n+1}\right)$.

(c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{n^3}}$.

(d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1+\frac{2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$.

(e) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\ln(n+i) - \ln(n)\right]$.

Solución:

(a) Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$$

Debemos lograr hacer aparecer dos términos:

- $f(x)$. Es decir, una función f que dependa una sola variable.
- c_k, que es una sucesión tal que $c_k \in I_k$.
- Multiplicada por un Δx_k.

Notar que

$$\frac{1}{n^2+k^2}$$

no asemeja a priori una función de una sola variable, ya que si tomásemos, por ejemplo, $f(k) = \dfrac{1}{n^2+k^2}$ tendriamos dependencia de n. Por lo tanto, un buen truco es hacer:

$$\frac{1}{n^2+k^2} = \frac{1}{n^2\left(1+\dfrac{k^2}{n^2}\right)} \to \lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$$

Así, consideramos $c_k = k/n$ y $f(x) = 1/\left(1+x^2\right)$. A partir del problema 1 notamos que este límite se asocia inmediatamente con la integral:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\
&= \arctan(1) - \arctan(0) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}}$$

(b) Nuevamente, tenemos que trabajar la expresión para encontrar los términos de interés:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2e}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(e^{i/n}\right)^2 \cos\left(e^{2i/n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} e^{2i/n+1}\cos\left(e^{2i/n+1}\right)\frac{2}{n}$$

Por un trabajo de mera intuición, podemos tomar $f(x)=e^x\cos(e^x)$ y $c_k=2i/n{+}1$. De esta forma, estamos nuevamente tomando el extremo derecho de cada intervalo de la partición $\{1, 2/n+1, 4/n+1, \ldots, 3\}$ y luego $\Delta x_k = 2/n$. Así, la expresión es de la forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

con $a=1$, $b=3$ y $f(x)=e^x\cos\left(e^x\right)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2e}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(e^{i/n}\right)^2 \cos\left(e^{2i/n+1}\right) &= \int_1^3 e^x\cos\left(e^x\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_e^{e^3} \cos(u)\mathrm{d}u = \cos\left(e^3\right)-\cos\left(e\right)\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{2e}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(e^{i/n}\right)^2 \cos\left(e^{2i/n+1}\right) = \int_1^3 e^x\cos\left(e^x\right)\mathrm{d}x}$$

(c) Primero notemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

Hicimos este paso para obtener de alguna forma el Δx_k que siempre debemos obtener. De esta forma $1/n$ puede ser efectivamente el extremo de una partición regular. ¿Qué pasa con el término al interior? No es tan facil ubicarlo en un extremo del intervalo como en el caso anterior, ya que la separación que efectuamos efectivamente no resulta.

Si suponemos que la partición es regular de $\Delta x_k = 1/n$, entonces

$$\sqrt{\frac{2k-1}{n}}$$

corresponde a una función evaluada en algún punto. Vamos probando término a término:

$$\sqrt{\frac{1}{n}}, \sqrt{\frac{3}{n}}, \sqrt{\frac{5}{n}}, \ldots, \sqrt{\frac{2n-1}{n}}$$

Es decir, la función va a término a término entre números impares y toma saltos de $2/n$. Esto no significa una gran dificultad, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{n}}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k-1}{n}}\cdot\frac{2}{n}$$

Podemos suponer, por ejemplo, que $1/n$ se encuentra en algún lugar del primer intervalo, $3/n$ del segundo y así sucesivamente. Notar que, por conveniencia, una buena idea puede ser tomar el promedio de los extremos del intervalo de una partición regular, i.e.

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{x_k + x_{k-1}}{2} = \frac{a + \dfrac{b-a}{n}k + a + \dfrac{b-a}{n}(k-1)}{2} \\ &= \frac{2a + \dfrac{b-a}{n}(2k-1)}{2} \end{aligned}$$

Tomando $a = 0$ y $b = 2$, efectivamente,

$$c_k = \frac{2k-1}{n}$$

de donde desprendemos que $f(x) = \sqrt{x}$ y $\Delta x_k = (b-a)/n = 2/n$. Es decir,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{n^3}} = \int_0^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x} = \frac{2}{3}2^{3/2}$$

(d) Observemos que $\dfrac{2}{n}$ se asocia con Δx_k y el hecho de que aparezca $1 + \dfrac{2i}{n}$ ya nos indica que la partición toma un extremo de la función. Si proponemos $f(x) = x^2$ y la partición regular

$$c_k = a + \frac{b-a}{n}k$$

Entonces,

$$b - a = 2$$

y por inspección $a = 1$, de modo que $b = 3$. De esta forma,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n} = \int_1^3 x^2 \mathrm{d}x} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

(e) Aplicando propiedades de logaritmos para ordenar esto de una forma más facil de analizar, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\ln(n+i) - \ln(n)] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{i}{n}\right)\frac{1}{n}$$

de esta forma identificamos inmediatamente la partición regular. De esta forma, proponemos $f(x) = \ln(x)$ con

$$c_k = a + \frac{b-a}{n}k$$

con $a = 1$ y $b - a = 1$, entonces $b = 2$, de modo que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\ln(n+i) - \ln(n)] = \int_1^2 \ln(x)\mathrm{d}x}$$

4.2. Propiedades de la integral

Recordamos las siguientes propiedades de la integral definida, todas demostrables a partir de sumas de Riemann.

Proposición: Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$:

(a) $\forall c \in \mathbb{R}$, cf es integrable y:

$$\int_a^b cf(x)\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(b) $(f+g)$ es integrable y:

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(c) $\forall c \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b c\mathrm{d}x = c(b-a)$$

(d) Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(e) Si $b < a$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Además podemos obtener un resultado útil para separar integrales a conveniencia:

Teoremas:

(a) Si f es integrable en $[a, c]$ y $a < b < c$, entonces f es interable en $[a, b]$ y $[b, c]$.

(b) Si f es integrable en $[a, b]$ e integrable en $[b, c]$, entonces f es integrable en $[a, c]$.

En ambos casos:

$$\int_a^c f(x)\mathtt{d}x = \int_a^b f(x)\mathtt{d}x + \int_b^c f(x)\mathtt{d}x$$

A partir de estas proposiciones podemos hacer algunas demostraciones interesantes:

4.2.1. Demostración de propiedades

Problema 4.3: Demuestre las siguientes propiedades de la integral definida:

(a) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$. ¿Con qué propiedad conocida guarda similitud?

(b) Si $f(x)$ es par, entonces
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$$

Propuesto: Haga lo propio y pruebe que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t = 0$.

Solución:

(a) La propiedad guarda una importante similitud con la desigualdad triangular:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Notamos que, por definición de integral:

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |f(c_k)|\Delta x_k$$

Pero, observando la propiedad,

$$-|f(c_k)| \leq f(c_k) \leq |f(c_k)| \quad \forall k$$

Si multiplicamos por $\Delta x_k > 0$ y sumamos términos a término se conserva la desigualdad:

$$-\sum_{k=1}^{n} |f(c_k)|\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} |f(c_k)|\Delta x_k$$

Tomando $\lim\limits_{n\to\infty}$:

$$-\underbrace{\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x}_{U} \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \underbrace{\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x}_{U} \to \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq U$$

Así, concluimos finalmente que

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \;\blacksquare$$

Nota importante: Falta la demostración de que $|f(x)|$ es en efecto integrable en $[a,b]$. Hacer la demostración de esto requiere ya de un procedimiento teórico que, si bien no es complicado y es posible realizarlo, escapa a las observaciones que se espera sean realizadas en el contexto de este curso.

(b) Gráficamente, la situación presentada es evidente, ya que simplemente se está tomando el doble del área de un extremo. Para formaliar esta idea notamos que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$$

pero $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-x)dx$. Podemos hacer la sustitución $u(x) = -x$. Entonces,

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) \to \mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x$$

Con lo cual aparece intuitivamente el teorema de sustitución:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{0} f(-x)\mathrm{d}x &= \int_{u(-a)}^{u(0)} f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{a}^{0} f(u)(-1)\mathrm{d}u \\
&= \int_{0}^{a} f(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Asi, finalmente:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x$$

Lo cual entrega ciertas ventajas prácticas al calcular integrales (la primitiva es fácil de evaluar en cero).

Demostración del teorema de sustitución: Queremos demostrar que

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$$

Notamos que si $F(x)$ es tal que $F'(x) = f(x)$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) = f(g(x))g'(x)$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x &= \int_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x))\mathrm{d}x \\
&= F(g(b)) - F(g(a)) \blacksquare
\end{aligned}$$

4.2.2. Cotas en integrales

Por teoremas y promiedades vistas en clases, tenemos que si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces existe un número M y un número m tal que

$$m \leq f(x) \leq M$$

Ya sabemos que al integrar la desigualdad se conserva:

$$\begin{aligned} \int_a^b m\mathrm{d}x &\leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\mathrm{d}x \\ m(b-a) &\leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a) \end{aligned}$$

La idea de todos estos problemas es encontrar m y M adecuadamente, ya sea (preferentemente) por un juego de desigualdades adecuado o realizando optimización del a función. Hecho esto se pueden obtener oportunamente estas cotas, útiles por lo demás cuando no podemos calcular una integral.

Partamos con un ejercicio absolutamente sencillo:

Problema 4.4: Sin calcular la integral, muestre que:

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \leq 2\sqrt{2}$$

Solución:

Observe que $1+x^2$ en $x \in [-1, 1]$ es una parábola que se abre hacia arriba e incluye el vértice en $(0, 1)$. Luego, el valor mínimo que alcanza la función es 1 y el valor máximo es 2. Luego, como $\sqrt{\cdot}$ es una función creciente, se tiene que el mínimo de $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ es 1 y su máximo es 2, i.e. $m = 1$, $M = 1$ y $b = 1$ y $a = -1$. Así, aplicando la demostración del preámbulo y reemplazando con todos los valores anteriores:

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x \leq 2\sqrt{2}$$

demostrando así lo pedido. ■

Problema 4.5: Demuestre que

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2+x^4}\mathrm{d}x \leq 2\sqrt{3}$$

Solución:

En el contexto de este ejercicio y en concordancia con el marco teórico anterior, tenemos que $b - a = 1 - -1 = 2$. Luego, basta encontrar aquellos números m y M que sean las cotas pertienentes de

$f(x) = \sqrt{1+x^2+x^4}$. Con lo ya sabido, sabemos que estos números necesariamente tienen que ser $m = 1$ y $M = \sqrt{3}$. Eso debemos probar que $1 \leq \sqrt{1+x^2+x^4} \leq \sqrt{3}$.

Para probar el resultado de m, basta notar que $x^2 \geq 0$, $x^4 \geq 0$ y luego $1+x^2+x^4 \geq 1 \to f(x) \geq 1 = m$.

Analogamente, como en $[-1,1]$ se cumplirá que $x^2 \leq 1$ y $x^4 \leq 1$, por axiomática de orden se cumplirá que $1+x^2+x^4 \leq 3$. Es decir, $f(x) \leq \sqrt{3}$. Con esto, se ha demostrado entonces lo pedido. ■

Ascendemos en dificultad con el siguiente problema:

Problema 4.6:

(a) *(Control 3 - 2013 -1)* Demuestre que

$$\frac{4\pi\sqrt{2}}{(16+\pi^2)} \leq \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2}$$

(b) *Propuesto:* Haga lo propio y demuestre que

$$\frac{3\pi}{(9+\pi^2)} \leq \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{1+x^2} \mathrm{d}x \leq \frac{2\pi}{3}$$

Solución:

(a) En primer lugar, es válido notar que no debemos concentrar nuestros esfuerzos en siquiera tratar de calcular la integral. Una opción válida a seguir es tratar de optimizar la función $\cos(x)/(1+x^2)$, lo que puede resultar demasiado complicado desde el punto de vista práctico.

Es por esta razón que nuestra mejor opción es jugar con desigualdades y propiedades conocidas hasta encontrar los m y M adecuados para esta demostración. Observemos que a partir de la integral se tiene que

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

¿Por qué partimos de esto? Porque si nos fijamos, las cotas de la integral están en términos de medidas angulares. Luego, elevando al cuadrado y sumando 1:

$$1 \leq 1+x^2 \leq 1+\frac{\pi^2}{16}$$

$$\to 1 \geq \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{1+\dfrac{\pi^2}{16}}$$

Observe que solo nos falta multiplicar por $\cos(x)$ para obtener la desigualdad que buscamos. Sin embargo, en el intervalo se tiene adicionalmente que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(x) \leq 1$$

Como todos los números son positivos, podemos multiplicar los extremos y obtener las siguientes cotas:

$$\frac{\sqrt{2}}{2\left(1+\dfrac{\pi^2}{16}\right)} = \frac{8\sqrt{2}}{16+\pi^2} \leq \frac{\cos(x)}{1+x^2} \leq 1 \quad \Big/ \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cdots \mathrm{d}x$$

$$\rightarrow \frac{8\sqrt{2}}{16+\pi^2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2}$$

y finalmente,

$$\frac{4\pi\sqrt{2}}{(16+\pi^2)} \leq \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \leq \frac{\pi}{2} \blacksquare$$

Nota: obtener las cotas adecuadas en este problema no es del todo sencillo, pero por ensayo y error se pueden terminar encontrando las cotas que se piden.

La idea para el problema ***(b)*** es exactamente la misma y es por eso que se deja propuesto su desarrollo.

Y finalizamos este apartado con un problema que plantea el uso de un truco interesante al momento de trabajar con sumas de funciones trigonométricas básicas.

Problema 4.7: Muestre que

$$\frac{2\sqrt{14}}{7} \leq \int_4^8 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-3\cos(x)-4\sin(x)}} \leq 2$$

Indicación: Pruebe que existen A y B tales que $3\cos(x)+4\sin(x) = A\cos(x-B)$ y luego use esto para acotar apropiadamente la función.

Solución:

Siguiendo la indicación, notamos que haciendo unos arreglos a la función podemos expresarla como una diferencia entre un producto de cosenos y otros de senos:

$$\begin{aligned} 3\cos(x)+4\sin(x) &= \sqrt{3^2+4^2}\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin(x)\right) \\ &= 5\left(\frac{3}{5}\cos(x)+\frac{4}{5}\sin(x)\right) \end{aligned}$$

Notamos que

$$\frac{3}{5} \leq 1 \quad , \quad \frac{4}{5} \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{3^2}{5^2}+\frac{4^2}{5^2} = 1$$

Luego, $\exists \phi \in [0, 2\pi]$ tal que $\cos(\phi) = 3/5$ y $\sin(\phi) = 4/5$:

$$\begin{aligned} 3\cos(x)+4\sin(x) &= 5\left[\cos(\phi)\cos(x) - \sin(\phi)\sin(x)\right] \\ &= 5\cos(x-\phi) \end{aligned}$$

El valor de ϕ es irrelevante, ya que solo debemos concentrarnos en la amplitud del coseno para obtener los valores máximos y mínimos. Con esto resulta muy fácil calcular las cotas, tal como hicimos en problemas anteriores:

$$4 = 9 - 5 \leq 9 - 3\cos(x) - 4\sin(x) = 9 - 5\cos(x - \phi) \leq 9 + 5 = 14$$

Como se trata de números positivos, aplicamos la función $1/\sqrt{\cdot}$ (decreciente) sin problemas:

$$\to \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\sqrt{9 - 3\cos(x) - 4\sin(x)}} \geq \frac{1}{\sqrt{14}} \quad \Big/ \int_4^8 \cdots \mathrm{d}x$$

$$\frac{8-4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7} \leq \int_4^8 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9 - 3\cos(x) - 4\sin(x)}} \leq \frac{8-4}{2} = 2$$

demostrando asi lo pedido. ■

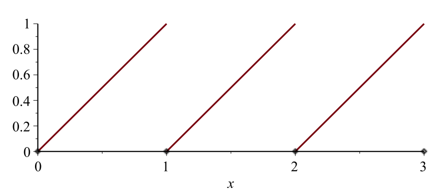
4.2.3. Teorema del Valor Medio Integral

Partamos ejercitando con una pregunta directa pero que evalua oportunamente la correcta identificación y aplicación de los conceptos involucrados en el T.F.C.

Problema 4.8: Calcule el promedio P de la función $x - \lfloor x \rfloor$ entre 0 y 3. ¿Se cumple el teorema del valor medio integral? ¿Existe $c \in [0, 3]$ tal que $f(c) = P$? Concluya.

Solución:

Partamos graficando la función involucrada:



Identificamos $x - \lfloor x \rfloor$ como la función parte decimal. Gráficamente, tal como se muestra en la figura de arriba, se puede observar que la función en el intervalo $[0, 3]$ corresponde a tres triángulos rectángulos isósceles de lado 1. Por lo tanto, considerando que el promedio se puede escribir como

$$\bar{f}(0, 3) = \frac{1}{3-0} \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$$

calcular la integral resulta muy sencillo:

$$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3\frac{1 \times 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow \bar{f}\,(0,3) = \frac{1}{2}$$

El teorema del valor medio integral plantea que si f es continua en $[a,b]$, entonces existe $\xi \in [a,b]$ tal que $f(\xi)\,(b-a) = \int_a^b f(x)dx$. Debido a que f no es continua, no podemos probar que esto se cumple haciendo uso de este teorema.

Sin embargo, podemos preguntarnos: ¿existe $\xi \in [0,3]$ tal que $f(\xi) = \bar{f}\,(0,3) = 1/2$? Trivialmente la respuesta es afirmativa, pues existen tres números entre 0 y 3 cuya parte decimal es efectivamente 0.5. Esto prueba que la continuidad es una condición suficiente para que se cumpla el teorema del valor medio integral, **pero no necesaria**. Es decir, puede no cumplirse la continuidad de la función y que aún asi la función satisfaga el teorema del valor medio integral.

Finalizamos con una pregunta de carácter teórico pero que guarda directa relación con el T.V.M.:

Problema 4.9: Sea $\bar{f}\,(a,b)$ el valor medio de f en $[a,b]$. Es decir,

$$\bar{f}\,(a,b) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Pruebe que

(a) $\bar{f}(a,b)$ es una aplicación lineal, i.e. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\left(\overline{\alpha f + \beta g}\right)(a,b) = \alpha\bar{f}(a,b) + \beta\bar{g}(a,b)$$

(b) $(\forall \lambda \in (a,b))\,(\exists \xi \in (0,1))$

$$\bar{f}(a,b) = \xi\bar{f}\,(a,\lambda) + (1-\xi)\,\bar{f}\,(\lambda,b)$$

Solución:

(a) Tomando el lado izquierdo de la igualdad y aplicando la definición:

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\alpha f + \beta g}\right)(a,b) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b \alpha f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b \beta g(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \underbrace{\frac{1}{b-a}\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}_{\alpha\bar{f}(a,b)} + \underbrace{\frac{1}{b-a}\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}_{\beta\bar{g}(a,b)} \\
&= \alpha\bar{f}(a,b) + \beta\bar{g}(a,b)
\end{aligned}$$

Notar que gracias a la linealidad de la integral y la definición concluimos que efectivamente el valor medio es una aplicación lineal. ■

(b) Como la demostración se debe efectuar para todo $\lambda \in (a,b)$, entonces tomamos un $\lambda \in (a,b)$ cualquiera. Si se cumple para este valor a través de las generalizaciones adecuadas, entonces lo habremos demostrado para todos los números en el intervalo.

En efecto, consideremos $\lambda \in (a,b)$ fijo. Notar que en la demostración se está tomando el promedio entre a y λ y b y λ. Por lo tanto, es una buena idea hacer la separación del valor medio entre a y b con las propiedades de la integral:

$$\begin{aligned}\bar{f}(a,b) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x + \int_\lambda^b f(x)\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

Escrito como valor medio (lo que necesitamos en la demostración), notamos que

$$\int_a^\lambda f(x)\mathrm{d}x = (\lambda - a)\,\bar{f}(a,\lambda) \quad \text{y} \quad \int_\lambda^b f(x)\mathrm{d}x = (b-\lambda)\,\bar{f}(\lambda,b)$$

Así,

$$\bar{f}(a,b) = \frac{\lambda - a}{b-a}\bar{f}(a,\lambda) + \frac{b-\lambda}{b-a}\bar{f}(\lambda,b)$$

Notar que con este paso no solo hemos demostrado que ξ existe, si no que además hemos encontrado su valor. Como $a < \lambda < b$, entonces graficando el intervalo se concluye rápidamente que

$$0 < \frac{\lambda - a}{b-a} < 1$$

y adicionalmente

$$1 - \frac{\lambda - a}{b-a} = \frac{b-a-\lambda+a}{b-a} = \frac{b-\lambda}{b-a} < 1$$

Entonces efectivamente,

$$\xi = \xi(\lambda) = \frac{\lambda - a}{b-a}$$

y como λ es un número cualquiera en (a,b), hemos demostrado así lo pedido. ■

4.3. Teorema Fundamental del Cálculo

4.3.1. Teorema Fundamental del Cálculo, parte I

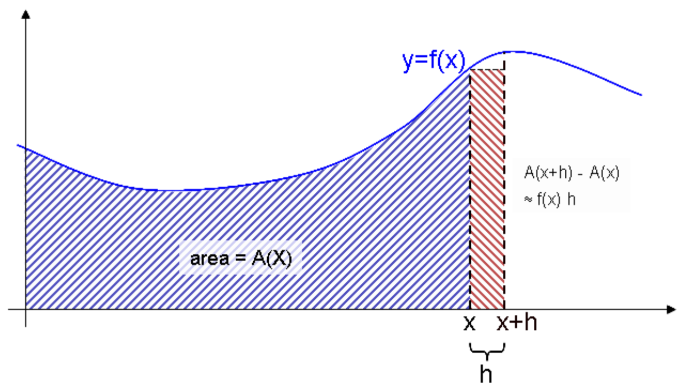
Para los siguientes dos problemas haremos uso del Teorema Fundamental del Cálculo:

> **Teorema:** Sea $f(x)$ continua en $[a,b]$ y $F(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función real definida como
>
> $$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$
>
> Entonces $F(x)$ es derivable y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.
>
> *Observación:* De la demostración será natural notar que el extremo inferior de la integral puede ser un $\lambda \in [a,b)$ cualquiera.

Demostración: Primero veamos intuitivamente qué es lo que está ocurriendo con un gráfico. $F(x)$ representa el área entre a y x de $f(x)$. Es de nuestro interés calcular $F'(x)$, que viene definido como

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

Cabe notar que la situación puede graficarse como sigue:



Fuente: Wikipedia.

Es fácil notar que $F(x+h)$ y $F(x)$ representa el área de f comprendida entre x y $x+h$. Al hacer h cada vez más pequeño, el área se comporta cada vez más como un rectángulo de altura $\approx f(x)$ y ancho h. Es decir, el área aproximada de $F(x+h) - F(x)$ es $\approx f(x) \cdot h$. Al tomar el cuociente con h estamos precisamente obteniendo una aproximación de la altura del rectángulo, $f(x)$. ¿Qué obtenemos al hacer $h \to 0$? Efectivamente $f(x)$, la altura infinitesimal de la función.

Ahora formalizaremos esto, pero siempre siguiendo la idea intuitiva. Tenemos que:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t}{h}$$

Como $f(t)$ es continua en $[a, b]$, entonces se cumple el teorema del valor medio integral y existe $\xi \in [x, x+h]$ tal que

$$f(\xi)\,(x+h-x) = \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t \to \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t = f(\xi)h$$

Notar que $\xi = \xi(h)$ pues ante una variación de h eventualmente puede variar ξ (ya que el promedio lo hace). Reemplazando en la definición de límite:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\xi(h))h}{h} = \lim_{h \to 0} f\left(\xi(h)\right)$$

Como $f(x)$ es continua, entonces

$$F'(x) = f\left(\lim_{h \to 0} \xi\left(h\right)\right)$$

Escapa a nuestros propósitos hacer una demostración formal, pero intuitivamente se puede ver que si disminuimos h (contraemos el intervalo) ξ se hace cada vez más parecido a x (el punto del intervalo que es fijo), i.e. $\xi(h) \to x$ cuando $h \to 0$. Finalmente,

$$F'(x) = f(x) \blacksquare$$

Corolario: Se puede notar inmediatamente que si $a(x)$ y $b(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)}$$

Al ser $a(x)$ y $b(x)$ derivables, entonces son continuas y por lo tanto podemos tomar un valor cualquiera en el recorrido común de ambas funciones de modo que

$$\begin{aligned}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{\epsilon}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t + \int_{a(x)}^{\epsilon} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{\epsilon}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t - \int_{\epsilon}^{a(x)} f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

con $\epsilon \in [a(x), b(x)]$. Notar que si definimos $F(x)$ tal como se hizo en la demostración anterior con la salvedad de que ϵ es el extremo inferior, entonces la primera integral corresponde a $F(b(x))$ y $F(a(x))$. Se puede usar fácilmente la regla de la cadena notando que $F'(x) = f(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\epsilon}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\epsilon}^{a(x)} f(t)\mathrm{d}t \\ &= F'(b(x))b'(x) - F'(a(x))a'(x) \\ &= f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)\end{aligned}$$

quedando así demostrado. ■

Problema 4.10:

Con este preludio, se pueden resolver sin dificultad los sigientes problemas:

(a) Determine el valor de $F'(x)$ si $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{e^x} xf(t)\mathrm{d}t$.

(b) Sea f una función tal que $f(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)^2 f(t)\mathrm{d}t$. Muestre que $f^{(3)}(x) = 2f(x)$.

Solución:

(a) Primero notamos que desde la perspectiva de la integral (la variable de integración es muda), x no representa nada dentro de la integral, i.e. se comporta como una constante que puede ser removida. Luego,

$$F(x) = x\int_{x^2}^{e^x} f(t)\mathrm{d}t$$

Aquí se hace evidente que este es un producto de funciones de x, por lo que en la derivación debemos aplicar apropiadamente la regla del producto:

$$F'(x) = \int_{x^2}^{e^x} f(t)\mathrm{d}t + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{e^x} f(t)\mathrm{d}t$$

Aplicamos el corolario recién visto:

$$\boxed{F'(x) = \int_{x^2}^{e^x} f(t)\mathrm{d}t + x\left[f\left(e^x\right)e^x - f\left(x^2\right)2x\right]}$$

que es el resultado pedido.

(b) Para hacer la demostración es evidente que la opción más fácil es simplemente derivar dos veces $f(x)$. Sin embargo, aparece una dificultad: dentro de la integral hay un término que depende de x y nos impide aplicar el T.F.C. apropiadamente. La unica opción para removerlo es abriendo el cuadrado perfecto y separando las variables x de la integral:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \left(x^2 - 2tx + t^2\right) f(t)\mathrm{d}t \\ &= x^2 \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - 2x\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t + \int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ahora se puede derivar y aplicar el T.F.C. sin dificultad:

$$f'(x) = 2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + x^2 f(x) - 2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t - 2x^2 f(x) + x^2 f(x)$$

$$\to f''(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + 2xf(x) + 2xf(x) + x^2 f'(x) - 2xf(x) - 4xf(x) - 2x^2 f'(x) + 2xf(x) + x^2 f'(x)$$

$$\therefore f''(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

Y finalmente se llega a lo pedido:

$$f^{(3)}(x) = 2f(x) \ \blacksquare$$

Problema 4.11: Sea f la función dada por

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_0^{y^2} (t-1)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y$$

Indique su dominio e intervalos de concavidad.

Solución:

Observe que $t-1$ es una función continua, por lo tanto integrable. Luego,

$$\int_0^{y^2} (t-1)\,\mathrm{d}t$$

Es derivable para todo y a la luz del T.F.C. para todo y. Luego, se sigue la función es continua para todo y y por teorema integrable en todo su dominio. Se sigue entonces que $\mathrm{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$.

Dado que la función entonces es dos veces derivable, realizamos esto para obtener los intervalos de concavidad, asi:

$$\to f'(x) = \int_0^{x^2} (t-1)\,\mathrm{d}t \to f''(x) = \left(x^2-1\right)2x$$

Dado que x^2-1 es una parábola que se abre hacia arriba con raíces en -1 y 1, realizamos una tabla de signos para concluir:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
x^2-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$2x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
Concavidad	$\bigcap$	$\bigcup$	$\bigcap$	$\bigcup$

Identificamos inmediatamente a -1, 0 y 1 como puntos de inflexión.

Existen problemas interesantes desde el punto de vista práctico ya que, por ejemplo, se puede integrar el T.F.C. y la regla de l'Hôpital en un solo problema. Veamos el siguiente ejemplo:

Problema 4.12: Calcule el valor del límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x (x-1)\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \sin\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t}$$

Solución:

Al evaluar en $x=1$ la expresión es evidentemente de la forma indeterminada $0/0$ debido a que los extremos de la integral son coincidentes. Es evidente que tenemos que usar la regla de L'Hôpital para este problema. Sin embargo, primero debemos garantizar que ambas funciones son diferenciables.

A la luz del T.F.C., como $\sin\left(t^2-1\right)$ es continua, entonces la función del denominador es inmediatamente derivable. El numerador, por su parte, es en realidad el producto de dos funciones de x:

$$\int_1^x (x-1)\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t = (x-1)\int_1^x \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$$

Como $\sin\left(t^2\right)$ es continua al tratarse de una composición de funciones continuas y $(x-1)$ es una función trivialmente derivable, entonces el producto de la función integral y $(x-1)$ también será derivable. Con esto en mente, aplicamos la regla de L'Hôpital sin reparos.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x (x-1)\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \sin\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t + (x-1)\sin\left(x^2\right)}{\sin\left(x^6-1\right)3x^2 - \sin\left(x^4-1\right)2x}$$

La cual nuevamente es una expresión de la forma 0/0 y trivialmente diferenciable. Por lo tanto, aplicamos nuevamente regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x (x-1)\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \sin\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t} = \lim_{x\to 1} \frac{\sin\left(x^2\right)+\sin\left(x^2\right)+\cdots}{\cos\left(x^6-1\right)18x^7+\sin\left(x^6-1\right)6x-\cdots}\cdots$$

$$\cdots\frac{\cdots+(x-1)\,2x\cos\left(x^2\right)}{\cdots-\cos\left(x^4-1\right)8x^4-2\sin\left(x^4-1\right)}$$

Aunque es una expresión extensa, es muy fácil evaluarla en $x=1$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x (x-1)\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \sin\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t} &= \lim_{x\to 1}\frac{2\sin(1)}{18-8}\\ &= \frac{\sin(1)}{5}\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_1^x (x-1)\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \sin\left(t^2-1\right)\mathrm{d}t} = \frac{\sin(1)}{5}}$$

Problema 4.13:

(a) Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x t^2\ln\left(1+4t^2\right)\mathrm{d}t}{x^5}$$

(b) Determine los valores de a y b para que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t = 1$$

Solución:

(a) Tenemos que el límite es efectivamente de la forma 0/0 y ambas (numerador y denominador) son funciones diferenciables, la primera por ser una función integral de una función continua y la segunda por razones ya conocidas. Luego, aplicamos la Regla de L'Hôpital:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x t^2\ln\left(1+4t^2\right)\mathrm{d}t}{x^5} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\ln\left(1+4x^2\right)}{5x^4} \leftarrow \textbf{¡simplifique!}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+4x^2\right)}{5x^2}\sim\frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{8x}{1+4x^2}}{10x} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{5}\frac{1}{1+4x^2}
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x t^2\ln\left(1+4t^2\right)\mathrm{d}t}{x^5}=\frac{4}{5}}
$$

(b) Supongamos que el límite efectivamente es 1. Calculémoslo en función de a y b y luego imponemos las condiciones necesarias. Como el límite es evidentemente un cuociente de funciones diferenciables de la forma $0/0$ en $x=0$, aplicamos la Regla de L'Hôpital:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{a+x}\,(b-\cos x)}
$$

Observe que el prblema en el segundo límite no lo genera $\sqrt{a+x}$, pues esta converge a $\sqrt{a}$ (salvo en el caso $a=0$) en $x=0$. De esta forma,

$$
\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{a}}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{b-\cos x}
$$

Ahora bien, observe que:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{b-\cos x}=\begin{cases}0 & \text{si } b\neq 1 \text{ (el coseno no se anula en cero)}\\ \\ 2 & \text{si } b=1 \text{ (límite conocido)}\end{cases}
$$

Si escogemos $b\neq 1$ entonces el límite inmediatamente será 0 y por lo tanto no se cumplirá que sea igual a 1. Por lo tanto, necesariamente $b=1$. Finalmente, bajo estas condiciones obtenemos que:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=\frac{2}{\sqrt{a}}=1
$$

Se sigue de inmediato despejando a que $a=4$. Finalmente, para que se cumpla lo pedido:

$$
\boxed{a=4} \quad \text{y} \quad \boxed{b=1}
$$

Existe cierta tipologia de problemas en que el T.F.C. nos permite determinar cuál es la función involucrada en una función:[5]

Problema 4.14:

[5]Estas ecuaciones, en oposición a las *ecuaciones diferenciales*, se conocen como *ecuaciones integrales* y tienen gran campo de aplicación en Física y algunas aplicaciones en Economía.

(a) Determine una función f y un real $a > 0$ tales que

$$(\forall x > 0) \quad 6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} \mathrm{d}t = 2\sqrt{x}$$

(b) Encuentre todas las funciones derivables g tales que

$$\int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t = [2g(x)]^2$$

Solución:

(a) Dado que la función integral dificulta los cálculos, derivamos y aplicamos el T.F.C. bajo la premisa de que $f(x)$ es continua:

$$\to \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \to \boxed{f(x) = x^{3/2}}$$

Para determinar a notamos que evaluando la primera ecuación en $x = a$ se anula la integral:

$$6 + \cancel{\int_a^a \frac{f(t)}{t^2} \mathrm{d}t} = 2\sqrt{a} \to \sqrt{a} = 3$$

y así, finalmente, $\boxed{a = 9}$.

(b) La expresión integral no nos permite inferir la expresión de $g(x)$. Es por esta razón que lo mejor que podemos hacer es derivar, de modo que

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t &= [2g(x)]^2 \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \\ g(x) &= 8g(x)\, g'(x) \end{aligned}$$

Podríamos simplificar siempre y cuando $g(x) \neq 0$. Para evitar este problema, igualemos a cero y factoricemos:

$$g(x)[1 - 8g'(x)] = 0$$

De esta forma, una solución posible es que $\boxed{g(x) = 0}$ o bien que $g(x)$ sea tal que $1 - 8g'(x) = 0$. Es decir,

$$g'(x) = \frac{1}{8}$$

Nos preguntamos: ¿de qué función $\frac{1}{8}$ es derivada? i.e. ¿cuál es la primitiva de $\frac{1}{8}$? Evidentemente,

$$g(x) = \frac{1}{8}x + c$$

¿Cuál es el valor de c? Lo podemos obtener directamente de la relación del enunciado. Observe que

$$g(0) = c$$

Y además, la primera relación evaluada en $x = 0$ corresponde a

$$0 = 4g(0)^2 \to g(0) = c = 0$$

Finalmente, la última función posible es $\boxed{g(x) = \frac{1}{8}x}$.

Otro problema que sigue exactamente la misma línea de desarrollo:

Problema 4.15: *(Control 3 - 2013 - 1)* Sea g una función derivable tal que $g(0) = g'(0) = 2$ y f definida por

$$f(x) = \int_0^x (x+t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

Calcule el valor de $f''(0)$.

Solución:

Tenemos la expresión de la función directa, por lo que si queremos saber el valor de la derivada en un punto tenemos que derivar directamente, con la salvedad de que tenemos que aplicar el T.F.C. En primer lugar notemos que x está dentro de la integral y tal cual no nos permite aplicar el T.F.C. Separemos:

$$f(x) = x \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t + \int_0^x t g(t)\, \mathrm{d}t$$

donde sacamos la x de la integral ya que desde la perspectiva de la variable de integración es una constante. Ahora derivamos usando pertinentemente la regla del producto:

$$f'(x) = \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t + 2xg(x)$$

Derivando nuevamente:

$$f''(x) = g(x) + 2g(x) + 2xg'(x)$$

Evaluando en $x = 0$:

$$f''(0) = 2 + 2 \cdot 2 + 0$$

$$\to \boxed{f''(0) = 6}$$

Integrado con el T.F.C. parte II, se pueden demostrar propiedades interesantes, como la siguiente:

Problema 4.16: Se definen, para $x > 0$ las funciones

$$G(x) = \int_0^{1/x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \quad \text{y} \quad H(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Demuestre que $G'(x) = H'(x)$. Luego, concluya apropiadamente que $G(x) - H(x) = \pi/4$ y con ello deduzca la identidad

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \forall x > 0$$

Solución:

Para demostrar la igualdad basta derivar ambas funciones aplicando T.F.C. Recordamos que si

$$F(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t \to F'(x) = f\left[b(x)\right] b'(x) - f\left[a(x)\right] a'(x)$$

Con ello,

$$G'(x) = -\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$H'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Luego, es evidente que $G'(x) = H'(x)$. Recordamos que dos funciones con igual derivada difieren en a lo más una constante. Luego, para probar que $G(x) = H(x)$ basta probar que la constante en que difieren es cero. De la definición de primitiva,

$$\int H'(x)\mathrm{d}x = G(x) + c \to H(x) = G(x) + c$$

Evaluamos en cualquier valor. Por ejemplo, en $x = 1$:

$$H(1) = 0 = G(1) + c \to \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + c = 0 \to c = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + c = 0$$

Con ello,

$$c = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

Es decir,

$$G(x) - H(x) = \frac{\pi}{4}$$

Para demostrar la última relación simplemente integramos:

$$\begin{aligned} G(x) &= \arctan(x)\Big|_0^{1/x} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x > 0 \\ H(x) &= \arctan(x)\Big|_x^1 = \arctan(1) - \arctan(x) \quad \forall x > 0 \\ &= \frac{\pi}{4} - \arctan(x) \end{aligned}$$

Notar que se debe cumplir que $x > 0$ en ambos casos o de lo contrario el signo de la integral seria negativo. De la relación que obtuvimos anteriormente:

$$G(x) - H(x) = \frac{\pi}{4} \to \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4} + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$$

Y con ello, finalmente

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4} \quad (\forall x > 0) \ \blacksquare$$

Fue una coincidencia el hecho de que justo en la ocasión que se planteó este problema en un módulo de ayudantía, coincidió con el problema realizado en la siguiente evaluación:

Problema 4.17: *(I3-2013-1)* Sean $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x-1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ y $G(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ para $0 < x < 1$.

(a) Demuestre que $F'(x) + 2G'(x) = 0$.

(b) Demuestre que $F(x) + 2G(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

(a) Para obtener esta relación no basta más que derivar y aplicar correctamente el T.F.C.:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

y

$$G'(x) = \frac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}} \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x}{x}\right)$$

Observe que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}-1\right) = -\frac{1}{x^2}$$

de modo que

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\frac{1}{1+\dfrac{1-x}{x}} \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}} \frac{1}{x^2} = -\frac{x}{x+1-x} \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} \frac{1}{x^2} \\ &= -\frac{\sqrt{x}}{2x\sqrt{1-x}} = -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x^2(1-x)}} = -\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \end{aligned}$$

Luego es trivial que $F'(x) + 2G'(x) = 0$.

(b) Por linealidad de la integral, podemos observar que $F'(x) + 2G'(x)$ es una primitiva de $F(x) + 2G(x)$. O bien, como

$$F'(x) + 2G'(x) = 0 \to F(x) + 2G(x) = c$$

donde c es una constante. Es decir, se cumple que

$$\int_0^{2x-1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} + 2\int_0^{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = c$$

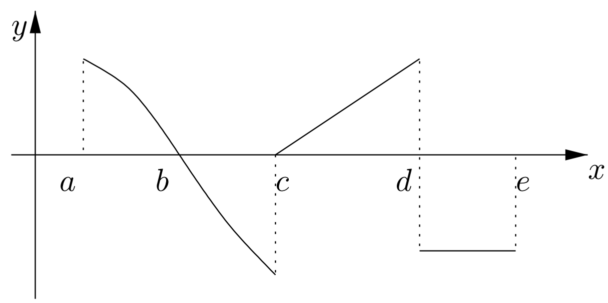
Es decir, sin importar el valor de x que escojamos, la suma siempre dará el mismo valor c. Podemos usar este hecho a nuestro favor para calcular c, pues podemos escoger un x cualquiera a conveniencia en la integral y determinar el valor. En particular, dadas las funciones a integrar, podemos tomar $x = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} + 2\int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= c \\ \rightarrow \arcsin(x)\Big|_0^1 &= c\end{aligned}$$

Es decir, $c = \frac{\pi}{2}$ y así se demuestra lo pedido. ■

Finalizamos con otro problema "combinado":

Problema 4.18: La figura a continuación muestra el gráfico de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, e]$. Con ella se define la función $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.



Determine justificadamente los intervalos de crecimiento/decrecimiento, intervalos de concavidad y la continuidad de F.

Solución:

La primera pregunta que debemos realizarnos es, ¿qué información nos entrega el gráfico de $f(x)$ sobre la gráfica de $F(x)$? Por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \rightarrow F'(x) = f(x)$$

Por otra parte, como $f(x)$ es acotada en $[a, e]$ (evidente del gráfico), entonces por teorema visto en clases sabemos que $F(x)$ será evidentemente continua en todo punto. Cabe notar entonces que una función discontinua se vuelve continua al tomar su integral entre 0 y x, en contraposición a la derivación que puede agregar discontinuidades adicionales. Es decir, la integración siempre "repara" las discontinuidades y la derivación las produce.

Luego, como hemos determinado que disponemos del gráfico de $F(x)$ podemos analizar sin mayor dificultad a partir de las técnicas ya vistas en los ejercicios de derivación.

Para los **intervalos de crecimiento**:

- $F(x)$ creciente: $f(x) > 0$. Esto se cumple en (a, b) y (c, d).
- $F(x)$ decreciente: $f(x) < 0$. Se cumple en (b, c) y (d, e).

Por lo tanto, los candidatos a puntos extremos son b, c (no existe la derivada) y d. A partir del crecimiento y decrecimiento:

- b: la función pasa de ser creciente a decreciente: $\bigcap$. Es un máximo local.
- c: la función pasa de ser decreciente a creciente: $\bigcup$. Es un mínimo local.
- d: la función pasa de ser creciente a decreciente: $\bigcap$. Es un máximo local.

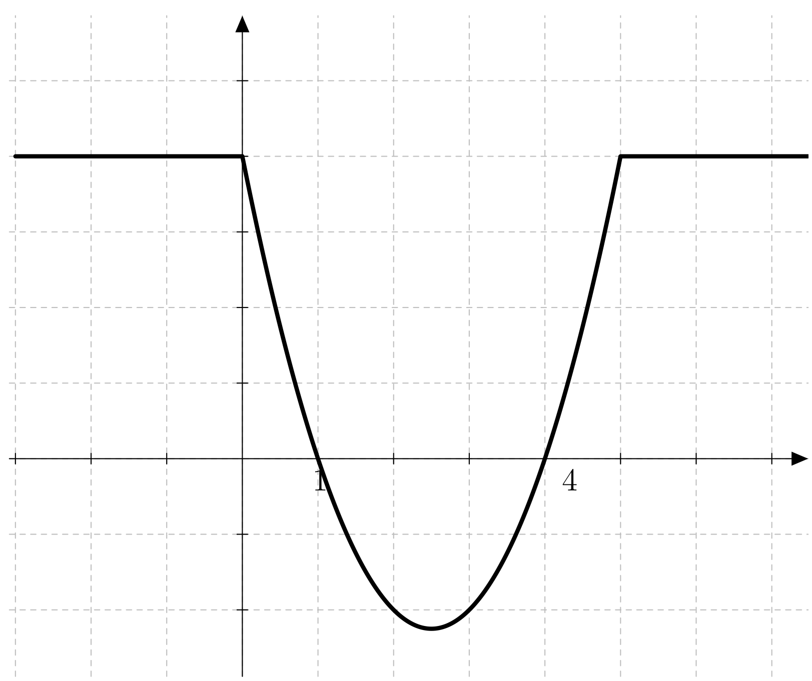
Para los **intervalos de concavidad**:

- $F(x)$ cóncava hacia arriba: $f(x)$ creciente. Se cumple en (c, d).
- $F(x)$ cóncava hacia abajo: $f(x)$ decreciente. Se cumple en (a, c).
- $F(x)$ se comporta como una recta en (d, e) (pues es $f(x)$, su derivada, es constante).

Así, los puntos de inflexión (donde efectivamente cambia la concavidad) son c y d.

El problema anterior guarda una similitud enorme con el problema presentado en la I3 del Segundo Semestre de 2013:

Problema 4.19: *(I3-2013-2)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua con el siguiente gráfico:



Nota: f **no** es necesariamente una parábola.

A partir de f se defina la función

$$G(x) = \int_{x^2}^{0} f(t)\mathrm{d}t$$

Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $G(x)$.

Solución:

Dado $G(x)$ es una función diferenciable al serlo $f(t)$, por T.F.C. $G(x)$ es diferenciable y por lo tanto el problema se reduce a simplemente calcular la derivada de $G(x)$ y concluir los intervalos de monotonía a partir de los signos de $G'(x)$. Tenemos que:

$$G'(x) = -2xf\left(x^2\right)$$

Del gráfico de $f(t)$ se observa que $f\left(x^2\right) < 0$ si y solo si $1 < x^2 < 4$. Es decir (resolviendo gráficamente esta inecuación) si $x \in (-2,-1) \cup (1,2)$. Haciendo la tabla de signos respectiva:

	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$f\left(x^2\right)$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
$-2x$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$G'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
Monotonía	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Problema 4.20: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en todo $\mathbb{R}$ tal que para todo $a \neq b$ reales:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Demuestre que $f(t) \equiv 0$ para todo t.

Solución:

Esta demostración es mucho más sencilla de lo que parece. Sea a fijo cualquiera. Entonces definamos para todo x real:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Observe que esta función es continua y diferenciable en todo su dominio pues $f(t)$ es continua. Sabemos que para todo x ($x < a$ inclusive)

$$F(x) = 0 \to F'(x) = f(x) = 0$$

demostrando así lo pedido. ■

Este es un resultado que parece evidente pero es ampliamente utilizado en algunos aspectos de Cálculo Vectorial y posteriormente en Electricidad y Magnetismo: si la integral de un campo eléctrico es cero en todo el espacio, entonces el campo eléctrico es cero en todo el espacio.

Problema 4.21: [**Propuesto**] ¿Qué condición(es) debe cumplir f de modo que

$$\int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u?$$

Utilícela(s) íntegramente para probar este resultado.

Problema 4.22: [**Propuesto**] Sea g una función dos veces derivable en $\mathbb{R}$. Se define f mediante la identidad

$$f(x) = \int_0^x g(x-t)\sin(t)\mathrm{d}t$$

Demuestre que $f(x)$ satisface la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$f''(x) + f(x) = g(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

4.3.2. Teorema Fundamental del Cálculo, parte II

Partamos este apartado calculando algunas integrales directamente por sumas de Riemann:

Problema 4.23: Utilizando sumas de Riemann, calcule el valor de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^1 3x\mathrm{d}x$.

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x$.

(c) *Propuesto*: $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)dx$. Utilice la partición $\mathcal{P}_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ definida como $x_i = q^i$, escriba la suma en términos de q, n y $\displaystyle\sum_{k=1}^n kq^k$ y concluya.

Solución:

Para la resolución de estos problemas recordamos la definición de integral definida:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\mathcal{P}\|\to 0} \sum_{k=1}^n f(c_k)\,\Delta x_k$$

(a) En particular, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 3x\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 3\frac{k}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\frac{n\,(n+1)}{n^2}
\end{aligned}$$

$$\to \boxed{\int_0^1 3x\mathrm{d}x = \frac{3}{2}}$$

(b) Bajo la misma fórmula anterior,

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$$

La idea es lograr generar una diferencia de términos consecutivos para aplicar la propiedad telescópica. Sin embargo, notaremos inmediatamente que para lograr estre objetivo ya entramos en el terreno de los "trucos":

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\sum_{k=1}^{n} 2\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Aplicamos la propiedad de prostaféresis y notamos inmediatamente que el producto de senos puede ser escrito como una diferencia de cosenos:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k+1)\right)$$

Si definimos

$$a_k = \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} - a_{k+1}$$

La sumatoria casi puede ser identificada como la adecuada para una propiedad telescópica. Sin embargo, esta exige la presencia de términos consecutivos. Reparamos este error sumando un cero especial:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} - a_{k+1} &= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} \underbrace{-a_k + a_k}_{0} - a_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} - a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k+1} \\
&= a_0 - a_n + a_1 - a_{n+1} \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}(n+1)\right)
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}(n+1)\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\
&= \pi \cancel{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}(n+1)\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \\
&= 0 \\
&\to \boxed{\int_0^{2\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0}
\end{aligned}$$

Notar que el límite de la derecha también se puede calcular mediante técnicas adecuadas como regla de L'Hôpital y sustitución, pero escapa de los propósitos de este ejercicio. Lo que debe rescatarse es que si bien mediante la partición adecuada y el uso de las propiedades de la sumatoria, tal como la propiedad telescópica, puede calcularse un amplio espectro de integrales mediante el uso de sumatorias.

Sin embargo, mediante este ejemplo puede notarse que los esfuerzos realizados son gigantescos y significan mucho tiempo desperdiciado. Por eso se hace necesaria la búsqueda de nuevas técnicas para el cálculo de integrales, de modo que las sumas de Riemann sean, quizás, una buena herramienta solo para el cálculo numérico de integrales.

Ahora es donde veremos todo el esplendor y la gran utilidad del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. Revisemos el siguiente problema:

Problema 4.24: Si $F(x)$ es una primitiva de f, i.e. $F'(x) = f(x)$, entonces demuestre el segundo Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Utilice este importante resultado para calcular el valor de los siguientes límites e integrales:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}.$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{n^3}}.$

(c) $\displaystyle\int_{\pi/12}^{\pi/6} \cos(3x)\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sec^2(x)\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

Solución:

Partiremos efectivamente por demostrar el segundo teorema fundamental del cálculo, ya que es una de las principales aplicaciones prácticas del T.F.C. Definamos la función

$$G(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

Por T.F.C. sabemos que $G'(x) = f(x)$, y por lo tanto $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$, ya que es una función que al derivarla nos entrega $f(x)$. Por esta razón, $G(x)$ y $F(x)$ (la primitiva dada) defieren en, a lo más, una constante (al derivarla esta se anula). Llamémosla c:

$$G(x) = F(x) + c$$

La pregunta es: ¿podemos determinar el valor de c? Efectivamente si, ya que si evaluamos $G(x)$ en a la integral se anula por tener sus extremos coincidentes. Es decir:

$$G(a) = 0 = F(a) + c \to c = -F(a)$$

y por lo tanto:

$$G(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x = F(x) - F(a)$$

Evaluando la ecuación en $x = b$ se llega a lo pedido:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \blacksquare$$

Nota: También se suele emplear la notación:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b$$

¿Cuál es la ventaja de el anterior resultado? Que el cálculo de un gran número de integrales se reduce simplemente a encontrar, mediante técnicas adecuadas, una de las infinitas primitivas que puede tener la función, lo cual evidentemente permite ganar mucho tiempo. Comparando con el ejemplo del ejercicio anterior:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(x)\mathrm{d}x &= -\cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) \\ &= 0\end{aligned}$$

Observación 1: Respecto a constantes, ¿cuál elegir? Da exactamente lo mismo (en particular podemos hacer $c = 0$): supongamos que tomamos $F(x) + c$ en vez de $F(x)$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)\cancel{+c} - F(a)\cancel{-c} = F(b) - F(a)$$

Observación 2: Se puede desprender una interpretación física de este resultado. Se sabe de los fundamentos de mecánica clásica que el área del gráfico de velocidad entre dos instantes t_1 y t_2 es efectivamente el desplazamiento entre t_1 y t_2. Pues bien, la posición de la particula es una de infinitas primitivas de la función velocidad (ya vimos que da lo mismo la constante que se elija) y luego, es evidente que

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t}_{\text{área}} = \underbrace{x(t_2) - x(t_1)}_{\Delta x}$$

Notar entonces que si conocemos la velocidad de una partícula y un punto de su trayectoria, por ejemplo $\bar{t}$, entonces basta integrar adecuadamente para determinar su trayectoria en cualquier punto:

$$\int_{\bar{t}}^u v(t)\mathrm{d}t = x(u) - x(\bar{t})$$

donde u es un punto cualquiera.

Observación 3: No hay que tener entusiasmo absoluto con la herramienta que acabamos de ver, pensando que es una panacea universal para el cálculo de integrales. No todas las funciones tienen primitivas fáciles de evaluar, y de hecho no todas las funciones tienen primitiva y aún así pueden ser integrables. En este curso solo se estudian las técnicas más básicas de integración, pero pueden existir técnicas particulares ampliamente estudiadas solo para cierto tipo de integrales. Por ejemplo:

$$e^{-x^2}\text{no tiene primitiva pero se puede demostrar que } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

$$\int_0^{\pi} \frac{(a\cos\theta + b)\sin\theta}{\sqrt{a^2 + 2ab\cos\theta + b^2}}\mathrm{d}\theta \text{ no tiene primitiva pero sí puede obtenerse su valor exacto.}$$

$$\text{Lo mismo para } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x = \pi$$

Más aún, ciertas integrales definidas solo pueden ser calculadas numéricamente. Solo la práctica permite identificar fácilmente si es que se puede lograr calcular la primitiva de una determinada función o no. En caso de no poderse, situación que muchas veces ocurrirá (y de hecho, casi siempre en la práctica ingenieril), se tiene que recurrir a otras técnicas de análisis.

Lo que se debe rescatar es que el cálculo de primitivas puede resultar en la mayoría de los cálculos de integrales una herramienta analítica útil y mucho más sencilla de aplicar que el cálculo de sumatorias a partir de la integral de Riemann.

(a) Recordamos de ejercicios anteriores que asociamos el límite con la integral de Riemann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

La pregunta entonces es: ¿cuál es la primitiva de $1/(1+x^2)$? O bien, ¿de qué función es derivada la función $1/(1+x^2)$. De la familia de funciones $\arctan(x) + c$ con c una constante. Como podemos tomar cualquiera, hacemos $c = 0$ y así

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \arctan(1) - \arctan(0) \\ &\to \boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

(b) Análogamente:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{n^3}} = \int_0^2 \sqrt{x}\mathrm{d}x$$

Entonces, $\sqrt{x} = x^{1/2}$, ¿de qué función es derivada? Realizando el proceso inverso a derivar, notamos que:

$$x^{3/2} \to \frac{3}{2}x^{1/2}$$

Se sigue entonces que para compensar introducimos el factor $2/3$. Con esto, notamos inmediatamente que la primitiva buscada es

$$\frac{2}{3}x^{3/2} + c$$

Haciendo $c = 0$ y evaluando obtenemos trivialmente que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{2k-1}{n^3}} = \frac{2}{3} 2^{3/2}}$$

(c) Nos preguntamos: ¿de qué función es $\cos(3x)$ derivada? Fácilmente, compensando factores, notamos que es la derivada de

$$\frac{1}{3} \sin(3x) + \text{c}$$

Con esto,

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/12}^{\pi/6} \cos(3x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{3} \sin(3x)\Big|_{\pi/12}^{\pi/6} \\
&= \frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\int_{\pi/12}^{\pi/6} \cos(3x)\mathrm{d}x = 1 - \frac{\sqrt{2}}{6}}$$

(d) Directamente notamos que $\tan(x) + c$ al derivarlo nos entrega $\sec^2(x)$. Con esto,

$$\int_0^{2\pi} \sec^2(x)\mathrm{d}x = \tan(x)\Big|_0^{2\pi}$$

$$\rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} \sec^2(x)\mathrm{d}x = 0}$$

(e) Obtener una primitiva de $\sin^2(x)\cos(x)$ no es tan sencillo, y eventualmente se recurrirá después a técnicas para la determinación de integrales de este tipo. Por ahora, cabe notar que el $\cos(x)$ aparecerá en la derivación como consecuencia de la regla de la cadena aplicada en una potencia $\sin(x)$. ¿Cuál? Pues elevamos el grado de $\sin(x)$:

$$\sin^3(x) \rightarrow 3\sin^2(x)\cos(x)$$

Compensamos con $1/3$ y obtenemos la primitiva:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin^3(x)\cos(x)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$\rightarrow \boxed{\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)\mathrm{d}x = 0}$$

(f) Nuevamente obtenemos la primitiva haciéndonos la misma pregunta. En este caso, notamos que $1/(1+x^2)$ es la derivada de $\arctan(x)$ y puede aparecer al derivar por regla de la cadena. En efecto, si derivamos $e^{\arctan(x)}$ aparecerá este término por regla de la cadena. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\mathrm{d}x &= e^{\arctan(x)}\Big|_0^{\sqrt{3}} \\
&= e^{\arctan(\sqrt{3})} - 1
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\int_0^{\sqrt{3}} \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}\mathrm{d}x = e^{\pi/3} - 1}$$

Problema 4.25: *(I3-2013-2)* Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{t}{n}\right) + \sin\left(\frac{2t}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\cdot t\right)\right] = \frac{1-\cos(t)}{t}$$

Solución:

Dado que la expresión anteriore es una sumatoria, es imperante escribirla como tal para posteriormente identificarla con una suma de Riemann. En efecto, notemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{t}{n}\right) + \sin\left(\frac{2t}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\cdot t\right)\right] = \frac{1-\cos(t)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kt}{n}\right)$$

Observe que el elemento distintivo en estas sumas de Riemann es el parámetro k, por lo cual identificamos inmediatamente la suma de Riemann donde $c_k = \dfrac{kt}{n}$ y por lo tanto $\Delta x_k = \dfrac{t}{n}$. Sin embargo, esta expresión no aparece explícita en la suma. Sin embrago, no es difícil hacerla aparecer. Tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kt}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kt}{n}\right)\frac{t}{n}$$

pero $1/t$ no depende de n por lo cual lo podemos sacar del límite, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{t}{n}\right) + \sin\left(\frac{2t}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\cdot t\right)\right] = \frac{1}{t}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kt}{n}\right)\frac{t}{n}$$

Este último limite es fácilmente asociable con una partición regular de la integral de $\sin(x)$ (integrado en x) desde $x=0$ hasta $x=t$ ($k=n \to \sin(kt/n) = \sin(t)$). Es decir,

$$\frac{1}{t}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kt}{n}\right)\frac{t}{n} = \frac{1}{t}\int_0^t \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Finalmente, una primitiva de $\sin(x)$ es $-\cos(x)$ pues $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \cos(x) = \sin(x)$. Es decir,

$$\frac{1}{t}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{kt}{n}\right)\frac{t}{n} = -\frac{1}{t}\cos(x)\bigg|_0^t = \frac{1-\cos(t)}{t}$$

con lo cual queda demostrado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{t}{n}\right) + \sin\left(\frac{2t}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n-1}{n}\cdot t\right)\right] = \frac{1-\cos(t)}{t} \quad \blacksquare$$

4.4. Técnicas de integración

En el siguiente recuadro resumimos la información más importante al momento de realizar integración:

Técnicas de integración

Sustitución

$$\text{Indefinida: } \int f(x)\mathrm{d}x = \int f(u)u'\mathrm{d}u \qquad \text{Definida: } \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(u)u'\mathrm{d}u$$

Sustituciones ideales

$$\begin{aligned} \boxed{\sqrt{a^2-u^2}} &\to u = a\sin\theta \\ \sqrt{a^2+u^2} &\to u = a\tan\theta \\ \sqrt{u^2-a^2} &\to u = a\sec\theta \end{aligned}$$

Integración por partes:

$$\text{Indefinida: } \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \qquad \text{Definida: } \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Propiedades trigonométricas importantes

- $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$.
- $\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$.
- $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$.

Sustitución ideal en funciones trigonométricas racionales:

$$t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \to \mathrm{d}t = \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{1+t^2}{2}\mathrm{d}\theta$$

Es decir, $\boxed{\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{d}\theta}$. Adicionalmente,

- $\cos(\theta) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.
- $\sin(\theta) = \dfrac{2t}{1+t^2}$.

Resumimos también en una tabla las integrales más importantes:

Tabla de integrales más usadas

(a) $\displaystyle\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ con $n \neq -1$.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \ln|x-a| + c.$

(c) $\displaystyle\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + c.$

(d) $\displaystyle\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + c.$

(e) $\displaystyle\int \sec^2(x)\mathrm{d}x = \tan(x) + c.$

(f) $\displaystyle\int \csc^2(x)\mathrm{d}x = -\cot(x) + c.$

(g) $\displaystyle\int \tan(x)\mathrm{d}x = \ln|\sec(x)| + c.$

(h) $\displaystyle\int \cot(x)\mathrm{d}x = \ln|\sin(x)| + c$

(i) $\displaystyle\int \sec(x)\mathrm{d}x = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + c.$

(j) $\displaystyle\int \csc(x)\mathrm{d}x = \ln|\csc(x) - \cot(x)| + c.$

(k) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c.$

(l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right),\ a > 0.$

Con esto en mente procedemos a resolver dos categorías de problemas: primeros unos de dificultad sencilla y o directa y luego problemas de un nivel más sofisticado, tanto para integrales definidas como para integrales indefinidas.

La idea de este texto no es resolver un gran volumen de integrales. El lector podrá encontrar en diversas fuentes tanto físicas como digitales un sinúmero de integrales resueltas para hacer la correspondiente ejercitación (la cual es especialmente fundamental en este capítulo). Los ejercicios aca propuestos fueron elegidos solamente por sus propósitos pedagógicos.

4.4.1. Técnicas de integración básicas

Problema 4.26: Calcule explícitamente el valor de las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \cos(x)\left(2+\sin(x)\right)^5 \mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \ln(x)\mathrm{d}x.$

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$

(d) $\displaystyle\int e^x \sin(x)\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int \tan^3(x)\mathrm{d}x.$

(f) $\displaystyle\int \frac{x^2\arctan(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$

Solución:

(a) Notamos que aparece la derivada de $\sin(x)$, con lo cual es pertinente hacer la sustitución

$$u = \sin(x) \to \mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Podemos despejar algebraicamente dx para reemplazarlo en la integral (una de las ventajas de la sustitución), pero en este caso es innecesario ya que du aparece explícitamente:

$$\begin{aligned} \int \cos(x)\,(2+\sin(x))^5\,\mathrm{d}x &= \int (2+u)^5\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{(u+2)^6}{6} + c \end{aligned}$$

de modo que

$$\boxed{\int \cos(x)\,(2+\sin(x))^5\,\mathrm{d}x = \frac{(\sin(x)+2)^6}{6} + c}$$

(b) Lo primero que hay que notar es que

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x \neq \frac{1}{x} + c$$

pues lo que ocurre es que $\ln'(x) = 1/x$ y no al revés. Es decir, $\ln(x)$ **no** es una derivada de $1/x$. Efectivamente, $\ln(x)$ es fácil derivarlo, lo que nos sugiere que hagamos integración por partes. De esta forma, la única posibilidad es que $\mathrm{d}v = 1 \cdot \mathrm{d}x$:

$$\begin{cases} u = \ln(x) & \to \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \to v = x \end{cases}$$

Con ello,

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int x\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\boxed{\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = x\ln(x) - x + c}$$

(c) La única forma para tratar estas expresiones es con las sustituciones trigonométricas conocidas. Sin embargo, en la forma en la que está escrita la integral no es del todo directa la sustitución. Completemos cuadrados:

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4+4x-x^2}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} \end{aligned}$$

De esta forma si se hace evidente hacer $x - 2 = \sin(t) \to \mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$. Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}} &= \int \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \\ &= \int \mathrm{d}t \\ &= t + c \end{aligned}$$

Finalmente, de la sustitución $t = \arcsin(x-2)$ y con ello escribimos en términos de x:

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-3-x^2}} = \arcsin(x-2) + c}$$

(d) e^x es fácil de derivar e integrar. Lo mismo para coseno. Por lo tanto, es sugerente utilizar integración por partes. Para acomodar los signos:

$$\begin{cases} u = \sin(x) & \to \mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = e^x \mathrm{d}x & \to v = e^x \end{cases}$$

De esta forma,

$$\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Hacemos nuevamente integración por partes en la segunda integral, pero cuidando de no regresar a la expresión original (no tiene sentido hacer un proceso y luego el inverso, volvemos a lo mismo):

$$\begin{cases} u = \cos(x) & \to \mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = e^x \mathrm{d}x & \to v = e^x \end{cases}$$

Con ello

$$\int e^x \cos(x)\,\mathrm{d}x = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Es decir,

$$\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

Finalmente,

$$\boxed{\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[e^x \sin(x) - e^x \cos(x)\right] + c}$$

(e) De esta expresión notamos que $\tan^2(x) = 1 - \sec^2(x)$, es decir, una expresión que guarda relación con la derivada de tangente. Con ello, es conveniente hacer

$$\begin{aligned} \int \tan^3(x)\,\mathrm{d}x &= \int \tan(x)\left[1 - \sec^2(x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \int \tan(x)\,\mathrm{d}x - \int \tan(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Para la primera integral notamos que:

$$\int \tan(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\mathrm{d}x$$

En el numerador aparece la menos derivada de $\cos(x)$, por lo que se sugiere hacer $u = \cos(x) \to \mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$. De esta forma,

$$\begin{aligned} \int \tan(x)\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= -\ln|\cos(x)| + c \end{aligned}$$

Por otra parte, para la segunda integral notamos que aparece la derivada de $\tan(x)$ en el diferencial, por lo que resulta conveniente hacer la sustitución $u = \tan(x) \to \mathrm{d}u = \sec^2(x)\,\mathrm{d}x$. Así,

$$\begin{aligned}\int \tan(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int u\mathrm{d}u \\ &= \frac{\tan^2(x)}{2} + c\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\int \tan^3(x)\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)| - \frac{\tan^2(x)}{2} + c}$$

(f) Notamos que aparece la derivada de arcotangente multiplicando, $1/(1+x^2)$. Es por lo tanto sugerente hacer la sustitución

$$t = \arctan(x) \to \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

y de esta forma $x = \tan(t) \to x^2 = \tan(t)$. La integral queda reescrita como:

$$\int \frac{x^2 \arctan(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int t\cdot\tan^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Ahora, al igual que en el problema anterior, hacemos $\tan^2(t) = 1 - \sec^2(t)$. Es decir,

$$\cdots = \int t\mathrm{d}t - \int t\sec^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Para calcular la segunda integral, notamos que t es fácil de derivar y $\sec^2(t)$ fácil de integrar. Luego,

$$\begin{cases} u = t & \to \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \sec^2(t)\,dt & \to v = \tan(t)\end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 \arctan(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \frac{t^2}{2} + t\cdot\tan(t) - \int \tan(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^2}{2} + t\cdot\tan(t) + \log|\cos(t)| + c\end{aligned}$$

Volviendo a las variables originales obtenemos:

$$\int \frac{x^2 \arctan(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\arctan^2(x)}{2} + x\arctan(x) + \log|\cos(\arctan(x))| + c$$

Trabajemos un poco la última expresión. Recordamos que:

$$1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \to \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\theta)}}$$

Luego, como es válido para todo θ real, en particular lo es para $\theta = \arctan(x)$. Con ello, y aprovechando que $\tan(\arctan(x)) = x$ tenemos que:

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Finalmente:

$$\boxed{\int \frac{x^2\arctan(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\arctan^2(x)}{2} + x\arctan(x) - \log\sqrt{1+x^2} + c}$$

Problema 4.27: Calcule las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{4} \left|x^2-4\right|\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x,\ m,n\in\mathbb{Z}.$

(c) $\displaystyle\int_{1}^{2} x\ln(x)\mathrm{d}x.$

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x.$

(e) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}.$

(f) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{3}} x2^{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x.$

Solución:

(a) Tenemos que:

$$\left|x^2-4\right| = \begin{cases} x^2-4 & \text{si } x^2-4\geq 0 \leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus(-2,2) \\ 4-x^2 & \text{si } x^2-4<0 \leftrightarrow x\in(-2,2) \end{cases}$$

De esta forma, debemos separar la integral según su comportamiento:

$$\begin{aligned}
\int_{-3}^{4}\left|x^2-4\right|\mathrm{d}x &= \int_{-3}^{-2}\left|x^2-4\right|\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2}\left|x^2-4\right|\mathrm{d}x + \int_{2}^{4}\left|x^2-4\right|\mathrm{d}x \\
&= \int_{-3}^{-2}\left(x^2-4\right)\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2}4-x^2\mathrm{d}x + \int_{2}^{4}\left(x^2-4\right)\mathrm{d}x \\
&= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-3}^{-2} - 4\cdot 1 + 4\cdot 4 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{2} + \left.\frac{x^3}{3}\right|_{2}^{4} - 4\cdot 2 \\
&= -\frac{8}{3} + \frac{27}{3} - 4 + 16 - \frac{8}{3} - \frac{8}{3} + \frac{64}{3} - \frac{8}{3} - 8 \\
&= \frac{71}{3}
\end{aligned}$$

$$\to \boxed{\int_{-3}^{4}\left|x^2-4\right|\mathrm{d}x = \frac{71}{3}}$$

(b) Como tenemos un producto de cosenos, lo ideal es utilizar las fórmulas de prostaféresis. Como no siempre estas pueden recordarse, deduciremos la de este caso. Recordamos que el produco $\cos(\cdot)\cos(\cdot)$ aparece en el coseno de la suma y la resta:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned}$$

Sumando ambos términos obtenemos lo que buscamos (los restamos si llegásemos a necesitar el producto de senos):

$$\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]=\cos\left(\alpha\right)\cos\left(\beta\right)$$

Es decir,

$$\cos\left(nx\right)\cos\left(mx\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\left(m+n\right)x\right)+\cos\left(\left(m-n\right)x\right)\right]$$

Esta expresión podemos integrarla con los medios habituales **con la salvedad que** $m-n\neq 0 \leftrightarrow m\neq n$. Analizaremos a continuación dicho caso.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(nx\right)\cos\left(mx\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin\left(\left(m+n\right)x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{m-n}\sin\left(\left(m-n\right)x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

Por propiedad de clausura, como $m,n\in\mathbb{Z}$, entonces $m\pm n\in\mathbb{Z}$. Adicionalmente $\sin\left(k\pi\right)=0$ para cualquier k entero. De esta forma,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(nx\right)\cos\left(mx\right)\mathrm{d}x=0\quad\text{si } m\neq n$$

Supongamos ahora que $m=n$. La fórmula de prostaféresis se convierte en:

$$\cos^2\left(nx\right)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(2nx\right)+1\right]$$

Integrando la fórmula entre $-\pi$ y π obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(nx\right)\cos\left(mx\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left[\cancel{\frac{1}{2n}\sin\left(2n\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}}+1\cdot 2\pi\right]\\ &= \pi\end{aligned}$$

En resumen:

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(nx\right)\cos\left(mx\right)\mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \text{si } m\neq n\\ \pi & \text{si } m=n\end{cases}}$$

En general, este resultado se conoce como una de las **relaciones de ortogonalidad entre funciones trigonométricas** y son un resultado muy importante para el desarrollo de las series de Fourier.

(c) Notamos que $\ln\left(x\right)$ es fácil de derivar y x fácil de derivar/integrar. Luego, aplicamos integración por partes:

$$\begin{cases}u=\ln\left(x\right) & \rightarrow \mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}\\ \mathrm{d}v=xdx & \rightarrow v=\frac{x^2}{2}\end{cases}$$

Con esto

$$\begin{aligned}\int_{1}^{2}x\ln\left(x\right)\mathrm{d}x &= x\ln\left(x\right)\Big|_{1}^{2}-\frac{1}{2}\int_{1}^{2}x\mathrm{d}x\\ &= 2\ln\left(2\right)-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2}\\ &= 2\ln\left(2\right)-1+\frac{1}{4}\\ &= 2\ln\left(2\right)-\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln(2) - \frac{3}{4}}$$

(d) El denominador de orden 4 sugiere que debemos hacer una sustitución trigonométrica. Sin embargo, solo sabemos hacerlas para términos de la forma x^2. Como el polinomio es irreductible, no nos queda más opción que intentar otro camino. Hagamos

$$x^2 = \tan(t) \rightarrow 2x\mathrm{d}x = \sec^2(t)\mathrm{d}t \rightarrow x\mathrm{d}x = \frac{\sec^2(t)\mathrm{d}t}{2}$$

Si $x^2 = \tan(t) \rightarrow t = \arctan(x^2)$, de modo que los intervalos de integración cambian a $[\arctan(0), \arctan(1)] = [0, \pi/4]$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2(t)\mathrm{d}t}{1+\tan^2(t)} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}}$$

(e) Una de las primeras complicaciones al calcular esta integral es el logaritmo. Sin embargo, notamos que aparece su derivada multiplicando, $1/x$. De esta forma, puede ser conveniente la sustitución $u = \ln(x) \rightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x/x$. El intervalo de integración cambia a $\ln(1) = 0$ a $\ln(e) = 1$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \arcsin(u)\Big|_0^1 \\
&= \arcsin(1) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

(f) Notamos que la raíz nos causa problemas para entender bien la integral o calcular su primitiva directamente. Por esta razón, intentamos la sustitución:

$$t = \sqrt{x^2+1} \rightarrow \mathrm{d}t = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x \rightarrow t\mathrm{d}t = x\mathrm{d}x$$

Los extremos de la integral se convierten en $\sqrt{0^2+1} = 1$ y $\sqrt{3+1} = 2$. Es decir,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{3}} x2^{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x &= \int_1^2 t2^t\mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 te^{t\ln(2)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Como t^2 es fácil de derivar y simplifica el problema, hacemos:

$$\begin{cases} u = t & \to \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = e^{t\ln(2)}dt & \to v = \frac{1}{\ln(2)}e^{t\ln(2)} \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x2^{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x &= \frac{t}{\ln(2)}e^{t\ln(2)}\Bigg|_1^2 - \frac{2}{\ln(2)}\int_1^2 e^{t\ln(2)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{6}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)}\int_1^2 e^{t\ln(2)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\int_0^{\sqrt{3}} x2^{\sqrt{x^2+1}}\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{6}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)^2}}$$

4.4.2. Fracciones parciales y sustituciones trigonométricas

Problema 4.28: Calcule el valor de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_{1/2}^{1} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\mathrm{d}x$.

(c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x$.

(d) $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x+2x^2+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

(e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)}$.

(f) $\displaystyle\int \frac{1+\sin(t)-\cos(t)}{1-\sin(t)+\cos(t)}\mathrm{d}t$.

Solución:

(a) Si bien de por sí esta integral no resulta sencilla de calcular, podemos identificar varias cosas:

Primero, la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

sugiere que hagamos una sustitución trigonométrica de la forma $\cos\theta$ ó $\sin\theta$.

Segundo, la expresión dentro de la acortangente nos recuerda a la identidad trigonométrica fácilmente deducible:

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

Para aprovechar esta identidad hacemos la sustitución:

$$t = \cos\theta \to \mathrm{d}t = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

Como $t = \cos\theta \to \theta = \arccos(t)$, lo cual inmediatamente nos dice que el intervalo de integración está entre $\pi/3$ y 0. Es decir,

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\pi/3}^{0} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right)\frac{\cancel{\sin\theta}\mathrm{d}\theta}{\cancel{\sqrt{1-\cos^2\theta}}} \\ &= \int_{0}^{\pi/3} \arctan\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{0}^{\pi/3} \frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta \\ &= \left.\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{2}\right|_{0}^{\pi/3} \\ &= \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{9} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\int_{1/2}^{1} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi^2}{36}}$$

(b) Tenemos que integrar una expresión de la forma $P(x)/Q(x)$ que no resulta del todo sencillo ya que nosotros solo sabemos integrar fácilmente expresiones de la forma:

$$\frac{1}{ax+b} \to \text{logaritmo}$$

$$\frac{1}{(ax+b)^n} \to \text{integración de función potencia}$$

$$\frac{1}{b^2+a^2x^2} \to \text{arcotangente}$$

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} \to \text{(irreductible) arcotangente}$$

$$\frac{ax+b}{ax^2+bx+c} \to \text{logaritmo + arcotangente}$$

Y la función a integrar no luce como ninguna expresión de esta forma. Por lo tanto, ¿qué podemos hacer al respecto? Reducir la expresión a una combinación lineal de expresiones de esta forma y luego aprovechar la linealidad de la integral para calcular el resultado. ¿Cómo hacemos esto? Por el **método de las fracciones parciales**, el cual ilustraremos resolviendo este problema.

Por Teorema Fundamental del Álgebra, sabemos que todo polinomio de grado n tiene n raíces complejas, donde las raíces complejas vienen dadas de a pares. Por esta razón, todo polinomio puede escribirse como el producto polinomios de grado 1 y grado 2. En particular, es fácil notar en nuestro problema que:

$$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \frac{2x^2-x+4}{x\left(x^2+4\right)}$$

donde x es irreductible y x^2+4 también lo es. Ahora viene el supuesto central del método. Pero para ello distinguimos dos casos:

- Si el grado del numerador es superior al del denominador entonces podemos emplear división larga, obteniendo un polinomio fácil de integrar y un residuo dividido en el denominador, que será el objeto de nuestro interés.

- Si es inferior, es precisamente a lo que le aplicaremos el método.

Suponemos que
$$\frac{2x^2-x+4}{x\left(x^2+4\right)}=\frac{a}{x}+\frac{bx+c}{x^2+4}$$
Notar que siempre, salvo en el caso en que la multiplicidad sea mayor a 1, suponemos que la diferencia de grado entre el numerador y el denominador es 1 (eventualmente puede ser menor si los ponderadores se hacen cero). Bajo la suposición de que esto es cierto, podemos determinar sin mayor dificultad los valores de a, b y c, pues deberá cumplirse que

$$\begin{aligned}\frac{2x^2-x+4}{x\left(x^2+4\right)} &= \frac{a\left(x^2+4\right)+\left(bx+c\right)x}{x\left(x^2+4\right)} \leftarrow \text{reagrupamos potencias}\\ &= \frac{\left(a+b\right)x^2+cx+4a}{x\left(x^2+4\right)}\end{aligned}$$

Como se debe cumplir para x cualquiera, y por definición de que dos polinomios son iguales si sus coeficientes lo son, tenemos que

$$\begin{aligned}a+b &= 2\\ c &= -1\\ 4a &= 4\end{aligned}$$

Entonces $a=1$, $b=1$ y $c=-1$. Hecho esto, y aprovechando la linealidad de la integral:

$$\begin{aligned}\int\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\mathrm{d}x &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\frac{x+1}{x^2+4}\mathrm{d}x\\ &= \int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+4}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+4}\\ &= \ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x/2\right)^2+1}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{I=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(c) Partamos notando que el denominador puede (y debe factorizarse):

$$\int_0^1\frac{2x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2x+3}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}\mathrm{d}x$$

Aplicando el método de las fracciones parciales tenemos que existen constantes A y B tales que:

$$\frac{2x+3}{\left(x+1\right)\left(x+2\right)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$$

De esta forma,

$$\int_0^1\frac{2x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x=A\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+B\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x+2}=A\ln\left(2\right)+B\ln\left(3\right)-B\ln\left(2\right)$$

Es decir, solo nos falta calcular A y B y el problema queda resuelto. Observe que sumando fracciones se nota que:

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{A(x+2)}{(x+1)(x+2)} + \frac{B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

Se sigue de los numeradores que

$$2x+3 = A(x+2) + B(x+1)$$

Otra forma de evaluar A y B es notando que esta ecuación debe cumplirse para todo valor de x, en particular, por ejemplo, para $x=-2$. De esta forma,

$$-4+3 = -B \to B = 1$$

Análogamente, evaluando en $x=-1$:

$$1 = A$$

Finalmente,

$$\boxed{\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \ln(3)}$$

(d) Los pasos a seguir en este problema son exactamente los mismos:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3+3x+2x^2+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)} &= \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} \\
&= \frac{(ax+b)(x^2+1)+(cx+d)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{ax^3+ax+bx^2+b+cx^3+cx^2+cx+dx^2+dx+d}{(x^2+x+1)(x^2+1)}
\end{aligned}$$

De esta forma, igualando potencias tenemos que

$$\begin{aligned}
a+c &= 2 \\
b+c+d &= 2 \\
a+c+d &= 3 \\
b+d &= 1
\end{aligned}$$

De aquí, restándole la primera ecuación a la tercera:

$$d = 1 \to b = -1 \to c = 2 \to a = -2$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\mathrm{d}x &= -\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x + \int \frac{2x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= -\log\left|x^2+x+1\right| + \int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}
\end{aligned}$$

$$\to \boxed{\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\mathrm{d}x = -\log\left(x^2+x+1\right) + \log\left(x^2+1\right) + \arctan(x) + c}$$

(e) Nos enfrentamos a una doble dificultad: por una parte aparece una expresión trigonométrica, y por otra esta aparece involucrada en una expresión racional. ¿Qué podemos hacer al respecto? Lo ideal sería dejar $\sin(t)$ en forma de un polinomio para integrar una fracción racional, la cual sí sabemos trabajar.

Existe un truco para ello: dejaremos inteligentemente $\sin(t)$ escrito en términos de $u = \tan(t/2)$, ya que sustituyendo pero esta expresión aparecerá nuevamente $\tan(t/2)$ en el diferencial du, lo que nos entrega ventajas prácticas. Para lograr esto, notemos que:

$$\begin{aligned}
\sin(t) &= 2\sin(t/2)\cos(t/2) \\
&= \frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{\sin^2(t/2)+\cos^2(t/2)} \Bigg/ \frac{\dfrac{1}{\cos^2(t/2)}}{\dfrac{1}{\cos^2(t/2)}} \\
&= \frac{2\tan(t/2)}{\tan^2(t/2)+1} \\
&= \frac{2u}{u^2+1}
\end{aligned}$$

Entonces, hagamos la sustitución

$$u = \tan(t/2) \to \mathrm{d}u = \frac{(1+\tan^2(t/2))}{2}\mathrm{d}t$$

$$\therefore\ du = \frac{1+u^2}{2}dt$$

Reemplazando algebraicamente:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)} &= \int \frac{2\mathrm{d}u}{\left(1+\dfrac{2u}{u^2+1}\right)(1+u^2)} \\
&= \int \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2+2u} \\
&= \int \frac{2\mathrm{d}u}{(1+u)^2} \\
&= -\frac{2}{1+u}+c
\end{aligned}$$

Con esto,

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin(t)} = -\frac{2}{1+\tan(t/2)}+c}$$

(f) La idea es exactamente la misma que para el problema anterior, solo que ahora debemos despejar adicionalmente coseno en términos de $u = \tan(t/2)$:

$$
\begin{aligned}
\cos(t) &= \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \Bigg/ \frac{\frac{1}{\cos^2(t/2)}}{\frac{1}{\cos^2(t/2)}} \\
&= \frac{1-u^2}{1+u^2}
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1+\sin(t)-\cos(t)}{1-\sin(t)+\cos(t)}\mathrm{d}t &= \int \frac{1+\frac{2u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1-\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= 2\int \frac{1+u^2+2u-1+u^2}{(1+u^2-2u+1-u^2)(1+u^2)}\mathrm{d}u \\
&= 2\int \frac{2u^2+2u}{(2-2u)(1+u^2)}\mathrm{d}u \\
&= 2\int \frac{u^2+u}{(1-u)(1+u^2)}\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Empleamos el método de las fracciones parciales:

$$
\begin{aligned}
\frac{u^2+u}{(1-u)(1+u^2)} &= \frac{a}{1-u} + \frac{bu+c}{1+u^2} \\
&= \frac{a(1+u^2)+(bu+c)(1-u)}{(1-u)(1+u^2)} \\
&= \frac{a+au^2+bu-bu^2+c-cu}{(1-u)(1+u^2)}
\end{aligned}
$$

De esta forma,

$$
\begin{aligned}
a-b &= 1 \\
b-c &= 1 \\
a+c &= 0
\end{aligned}
$$

Sumando las dos primeras ecuaciones, queda el sistema:

$$
\begin{aligned}
a-c &= 2 \\
a+c &= 0
\end{aligned}
$$

De donde es trivial la solución $a = 1$ y $c = -1 \to b = 0$. Luego,

$$
\begin{aligned}
I = 2\int \frac{u^2+u}{(1-u)(1+u^2)}\mathrm{d}u &= 2\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u} - 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} \\
&= -2\log|1-u| - 2\arctan(u) + c
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\boxed{I = -2\log\left|1-\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right| - t + c}
$$

4.4.3. Integrales de repaso

"Derivar es un oficio, integrar es un arte". El lector ya podrá haber notado el hecho de que la complejidad de integrar radica en decidir cuál es la técnica adecuada para tratar una integral en particular, siendo que hay muchas y no es del todo evidente la técnica a utilizar.

La idea de las siguientes integrales es tener una evaluación de cuál es la capacidad que tiene el lector de decidir apropiadametne con qué estrategia atacar cada integral sin tener una orientación previa.

Problema 4.29: Calcule las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x + x^{3/5}}$.

(b) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^3 \arcsin\left(x^2\right)}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$.

(c) $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2 - \sin^2(x)}$.

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3 + 5\cos(x)}$.

(f) $\displaystyle\int_0^1 x^3 \cos\left(1 + x^2\right)\mathrm{d}x$.

(g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}$.

(h) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

(i) $\displaystyle\int \frac{x\cos(x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

(j) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$.

(k) $\displaystyle\int x\arctan(x)\,\mathrm{d}x$.

(l) $\displaystyle\int x\arcsin(x)\,\mathrm{d}x$.

(m) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+x^2}}$.

(n) $\displaystyle\int_0^{\pi^2/16} \arctan\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

(ñ) $\displaystyle\int \frac{2-x^2}{\left(x^3-6x+1\right)^5}\mathrm{d}x$.

(o) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3+x^2+x+1}$.

(p) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{2+\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta$.

(q) $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x$.

Solución:

(a) Nuestro principal tema de complicación es el hecho de que aparezca $x^{1/5}$. Pues bien, para simplificar la expresión de la integral hagamos $y = x^{1/5} \to \mathrm{d}y = (1/5)\,x^{-4/5}\mathrm{d}x$. Es decir,

$$\begin{aligned}
I &= 5\int \frac{x^{4/5}\mathrm{d}y}{x+x^{3/5}} = 5\int \frac{y^4\mathrm{d}y}{y^5+y^3} \\
&= 5\int \frac{y}{y^2+1}\mathrm{d}y = \frac{5}{2}\int \frac{2y}{y^2+1}\mathrm{d}y \\
&= \frac{5}{2}\log\left|y^2+1\right| + c
\end{aligned}$$

Volviendo a la variable original:

$$\boxed{I = \frac{5}{2}\log\left|x^{2/5}+1\right| + c}$$

(b) Ya que aparece una expresión de la forma $\sqrt{1-x^4}$, hacemos la sustitución

$$x^2 = \sin(t) \to 2x\mathrm{d}x = \cos(t)\,\mathrm{d}t$$

Luego, $t = \arcsin(x^2)$, con lo cual los extremos de integración van de 0 a $\arcsin(1/2) = \pi/6$. Es decir,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} t\sin(t)\cos(t)\,\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} t\sin(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Para simplificar aún más la integral, notamos que t es fácil de derivar y simplifica los cálculos. Es decir, conviene realizar integración por partes:

$$\begin{cases} u = t & \to \mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \sin(t)\,\mathrm{d}t & \to v = -\cos(t) \end{cases}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left[-t\cos(t)\Big|_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6}\cos(t)\,\mathrm{d}t\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{6}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{24}}$$

(c) No podemos hacer la sustitución $u = \arctan(x)$ ya que $1/x^2$ no guarda relación con la derivada de esta. Sin embargo, notamos que $\arctan(x)$ es fácil de derivar, y $1/x^2$ es fácil de integrar, razón por la cual hacemos integración por partes.

$$\begin{cases} u = \arctan(x) & \to \mathrm{d}u = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ \mathrm{d}v = \dfrac{1}{x^2} & \to v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Es decir,

$$I = -\frac{\arctan(x)}{x} + \int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$$

La segunda integral la podemos calcular usando fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(1+x^2)} &= \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2} \\ &= \frac{a(1+x^2) + x(bx+c)}{x(1+x^2)} \end{aligned}$$

Luego, desprendemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a+b &= 0 \\
a &= 1 \\
c &= 0
\end{aligned}$$

de donde $b=-1$. Es decir,

$$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

Finalmente,

$$I = -\frac{\arctan(x)}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2x\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$\rightarrow \boxed{I = -\frac{\arctan(x)}{x} + \log|x| - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right) + c}$$

(d) En este ejercicio veremos otra forma de resolver integrales trigonométricas. Siempre se aprovecha el hecho de que al hacer una sustitución por una tangente, esta aparecerá en su derivada. En particular, para generar la tangente, multipliquemos arriba y abajo por la secante:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2-\sin^2(x)} \cdot \frac{\sec^2(x)}{\sec^2(x)} \\
&= \int \frac{\sec^2(x)\,\mathrm{d}x}{2\sec^2(x) - \tan^2(x)}
\end{aligned}$$

Aprovechamos la relación $\sec^2(x) = 1+\tan^2(x)$:

$$I = \int \frac{1+\tan^2(x)}{2+\tan^2(x)}\mathrm{d}x$$

Ahora hacemos $u=\tan(x) \rightarrow \mathrm{d}u = \left(1+\tan^2(x)\right)\mathrm{d}x$. Es decir,

$$I = \int \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \int \frac{\mathrm{d}u}{2\left[1+\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + c$$

Volviendo a la variable original:

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left[\frac{\tan(x)}{\sqrt{2}}\right] + c}$$

(e) Para trabajar integrales de funciones trigonométricas racionales solo conocemos un método: la sustitución $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$. De esta forma,

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

con ello, la integral se reescribe como

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+5\cos(x)} &= \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left(3+5\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \\
&= \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{[3(1+t^2)+5(1-t^2)]} \\
&= 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(8-2t^2)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{4-t^2}
\end{aligned}$$

Considerando que $4-t^2=(2-t)(2+t)$, aplicamos el método de las fracciones parciales.

$$\frac{1}{4-t^2}=\frac{a}{2-t}+\frac{b}{2+t} \to a(2+t)+b(2-t)=1$$

De donde desprendemos el sistema

$$\begin{aligned}
2a+2b &= 1 \\
a-b &= 0
\end{aligned}$$

La solución se puede obtener por simple inspección y es $a=b=\dfrac{1}{4}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+5\cos(x)} &= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2-t}+\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2+t} \\
&= -\frac{1}{4}\log(2-t)\Big|_0^1+\frac{1}{4}\log(2+t)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{4}\log(2)+\frac{1}{4}\log(3)-\frac{1}{4}\log(2)
\end{aligned}$$

con lo que finalmente,

$$\to \boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3+5\cos(x)}=\frac{\log(3)}{4}}$$

(f) La expresión $1+x^2$ nos molesta al momento de trabajar el coseno, razón por la cual hacemos $y=1+x^2 \to \mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x$. Con ello,

$$\int_0^1 x^3\cos\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 (y-1)\cos(y)\,\mathrm{d}y$$

Separamos la segunda integral al expandir el factor ya que podemos trabajar cada uno de los términos por separado:

$$\int_0^1 x^3\cos\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_1^2 y\cos(y)\,\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int_1^2 \cos(y)\,\mathrm{d}y$$

El cálculo de la segunda integral es directo. La primera integral la resolvemos fácilmente por partes:

$$\begin{cases} u=y & \to \mathrm{d}u=\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v=\cos(y)\,dy & \to v=\sin(y) \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^2 u\cos(u)\,\mathrm{d}u &= y\sin(y)\Big|_1^2 - \int_1^2 \sin(y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2\sin(2) - \sin(1) + \cos(2) - \cos(1)
\end{aligned}
$$

De esta forma,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^3\cos\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x &= \sin(2) - \frac{1}{2}\sin(1) + \frac{1}{2}\cos(2) - \frac{1}{2}\cos(1) - \frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{2}\sin(1) \\
&= \frac{1}{2}\sin(2) + \frac{1}{2}\cos(2) - \frac{1}{2}\cos(1)
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
\boxed{\int_0^1 x^3\cos\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\sin(2)+\cos(2)-\cos(1)\right]}
$$

(g) Dado que aparece una expresión de la forma x^2+a^2 en el denominador, hacemos la sustitución $x = a\tan(t) \to \mathrm{d}x = a\sec^2(t)\,\mathrm{d}t$, de modo que

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} &= \int \frac{a\sec^2(t)}{a^3\left[1+\tan^2(t)\right]^{3/2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sec(t)} = \frac{1}{a^2}\int \cos(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{a^2}\sin(t) + c
\end{aligned}
$$

Debemos volver a la variable original, lo cual corresponde a la real dificultad del problema. Observe que

$$
\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{x}{a} \to \frac{\sin(t)}{\pm\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \frac{x}{a}
$$

Elevando al cuadrado:

$$
\frac{\sin^2(t)}{1-\sin^2(t)} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 \to \sin^2(t)\left[1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right] = \left(\frac{x}{a}\right)^2 \to \sin(t) = \pm\sqrt{\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}}
$$

Simplificando,

$$
\sin(t) = \frac{\pm|x|}{\sqrt{a^2+x^2}}
$$

Asumiendo que trabajamos con ángulos del primer cuadrante solamente (ya que en caso contrario se pierde inyectividad), tenemos que

$$
\sin(t) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}
$$

y con ello, finalmente,

$$
\to \boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + c}
$$

(h) Primero completamos cuadrados para poder hacer una sustitución trigonométrica pertinente en el denominador:

$$
3 - 2x - x^2 = 4 - 1 - 2x - x^2 = 4 - (x+1)^2
$$

Es decir,

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\mathrm{d}x$$

Hacemos entonces la sustitución $x+1 = 2\sin(t) \to dx = 2\cos(t)\,dt$. Notemos que

$$t = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

de modo que los extremos de integración se convierten en 0 a 1:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\mathrm{d}x &= \int_{0}^{\pi/2} \frac{2\left[2\sin(t)-1\right]-1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\pi/2} 4\sin(t) - 3\mathrm{d}t \\ &= -4\cos(t)\Big|_{0}^{\pi/2} - \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\to \boxed{\int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\mathrm{d}x = 4 - \frac{3\pi}{2}}$$

(i) Observamos que x es fácil de derivar y $\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$ es facil de integrar pues aparece la derivada de seno en el numerador. Integramos por partes haciendo:

$$\begin{cases} u = x & \to \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x & \to v = -\frac{1}{\sin(x)} \end{cases}$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} \int \frac{x\cos(x)}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x &= -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \\ &= -x\csc x + \int \csc x \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\boxed{\int \frac{x\cos(x)}{\sin^2(x)}\mathrm{d}x = -x\csc x - \ln(\csc x + \cot x) + c}$$

(j) Tenemos que:

$$\int_{0}^{1} x\sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} x\sqrt{(x-1)^2+1}\mathrm{d}x$$

Hagamos la sustitución trigonométrica pertinente en este caso:

$$x - 1 = \tan t \to \mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$$

Ojo: También es valido hacer $x-1=\sinh t$. Queda a gusto y comodidad del lector la técnica empleada, pero el resultado debe ser el mismo o equivalente cualquiera sea el caso.

Con esto $t=\arctan(-1)$ y por lo tanto el nuevo intervalo de integración es de $-\pi/4$ a 0. Con ello,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}x &= \int_{-\pi/4}^0 (\tan t+1)\sec^3 t\,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\int_{-\pi/4}^0 \tan t\,\sec^3 t\,\mathrm{d}t}_{(1)} + \underbrace{\int_{-\pi/4}^0 \sec^3 t\,\mathrm{d}t}_{(2)}
\end{aligned}$$

Calculamos (1) en primer lugar. Observe que aparece la función secante y su derivada, $\tan t\sec t$, por lo cual hacemos la sustitución $u=\sec t \to \mathrm{d}y=\tan t\sec t\,\mathrm{d}t$. Con ello,

$$\int_{-\pi/4}^0 \tan t\,\sec^3 t\,\mathrm{d}t = \int_{2/\sqrt{2}}^1 u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{3}-\frac{4}{3\sqrt{2}}$$

Ahora calculamos (2). Para ello integramos por partes:

$$\begin{cases} u=\sec t & \to \mathrm{d}u=\tan(t)\sec(t) \\ \mathrm{d}v=\sec^2 t\,\mathrm{d}t & \to v=\tan(t) \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/4}^0 \sec^3(t)\,\mathrm{d}t &= \sec(t)\tan(t)\Big|_{-\pi/4}^0 - \int_{-\pi/4}^0 \tan^3 t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} - \int_{-\pi/4}^0 \sec^3 t-\sec t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} - \int_{\pi/4}^0 \sec^3 t\,\mathrm{d}t + \ln(\tan t+\sec t)\Big|_{-\pi/4}^0
\end{aligned}$$

Despejando el valor de la integral:

$$\int_{-\pi/4}^0 \sec^3 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} - \ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Finalmente,

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}-\frac{4}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\ln\left(\sqrt{2}-1\right)$$

$$\to \boxed{\int_0^1 x\sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

(k) Observe que $\arctan(x)$ es fácil de derivar y x es fácil de itnegrar, razón por la cual integramos por partes:

$$\begin{cases} u=\arctan(x) & \to \mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\ \mathrm{d}v=x\mathrm{d}x & \to v=\dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Se sigue que:

$$\int x \arctan(x)\, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{x^2+1}$$

Para calcular la segunda integral notamos que:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

$$\to \int \frac{x^2}{1+x^2} \mathrm{d}x = x - \arctan(x)$$

Finalmente,

$$\boxed{\int x \arctan(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x^2 \arctan(x) - x + \arctan(x)\right] + c}$$

(l) Una opción válida (dentro de las varias que pueden existir para calcular la misma integral) puede ser realizar la sustitución $u = \arcsin(x)$, de modo que se obtiene la integral:

$$\int x \arcsin(x)\, \mathrm{d}x = \int u \sin(u) \cos(u)\, \mathrm{d}u = F(u)$$

Sin embargo, al regresarnos a la variable original, x, tendremos que aplicar una serie de propiedades trigonométricas que pueden complicarnos al obtener la función deseada. Es por esta razón que aplicaremos directamente el método de integración por partes, notando que si bien x es fácil de derivar, la integraremos ya que $\arcsin(x)$ no es fácil de integrar de esta forma,

$$\begin{cases} u = \arcsin(x) & \to \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} \\ & \\ \mathrm{d}v = x & \to v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

Luego,

$$\int x \arcsin(x)\, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \arcsin(x) - \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}}_{(1)}$$

Nos concentramos en calcular (1). En este caso, dada la naturaleza del denominador es conveniente aplicar la sustitución $x = \sin(t) \to \mathrm{d}x = \cos(t)\mathrm{d}t$. Con ello,

$$\int \frac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^2(t)\cos(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \int \sin^2(t)\mathrm{d}t$$

De la relación de coseno de la suma:

$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - \sin^2(t)$$

Entonces:

$$\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$$

Con lo cual,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{t}{2}-\frac{1}{2}\int \cos(2t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}+c\end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned}\int x\arcsin\left(x\right)\mathrm{d}x &= \frac{x^2}{2}\arcsin(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}\right)+c \\ &= \frac{x^2}{2}\arcsin(x)-\frac{1}{2}\left(\frac{\arcsin\,x}{2}-\frac{\sin\,\arcsin\,x\,\cos\arcsin\,x}{2}\right)+c\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\int x\arcsin\left(x\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arcsin(x)-\frac{1}{4}\left(\arcsin\,x - x\sqrt{1-x^2}\right)+c}$$

(m) Observe que siempre en este tipos de expresiones en que aparece un polinomio cuadrático dentro de una raíz en el denominador conviene realizar el proceso de *completación de cuadrados* para obtener la sustitución adecuada. En este caso,

$$\begin{aligned}4x+x^2 &= x^2+2\cdot 2x+4-4 \\ &= \left(x+2\right)^2-4\end{aligned}$$

Es decir,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+2\right)^2-4}}$$

En este caso no se pueden utilizar la sustituciones trigonométricas ya que no existe forma sencilla de simplificar, por ejemplo, $\cos^2(x)-1$ en la raíz. En este caso es conveniente realizar la sustitución con una función hiperbólica. En virtud de la identidad:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Utilizamos la sustitución $x+2 = 2\sinh\,t \to \mathrm{d}x = 2\cosh t\mathrm{d}t$. Es decir,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+x^2}} = \int \frac{2\cosh t\mathrm{d}t}{2\sqrt{\sinh^2 t-1}} = \int \mathrm{d}t \to \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+x^2}} = t+c$$

Pero de la sustitución empleada se tiene que: $t = \sinh^{-1}\left(\dfrac{x+2}{2}\right)$. Luego,

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)+c}$$

(n) No hay nada que podamos hacer con la integral respecto a sustituciones. Sin embargo, recuerde el lector que la derivada de $\arctan(x)$ es $1/\left(1+x^2\right)$, la cual es una expresión fraccionar que sí es posible trabajar. Por esta razón es que probamos integrando por partes, de modo que:

$$\begin{cases} u = \arctan\left(\sqrt{x}\right) & \to \mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x} \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \to v = x\end{cases}$$

De esta forma,

$$\int_0^{\pi^2/16} \arctan\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = x \arctan\left(\sqrt{x}\right)\Big|_0^{\pi^2/16} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\pi^2/16} \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+x}}_{(1)}$$

En la expresión anterior nos "molesta" el hecho de que aparezca una raíz, razón por la cual probamos con la sustitución $t = \sqrt{x} \to \mathrm{d}t = \mathrm{d}x/2\sqrt{x} \to 2t\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Es decir,

$$\int_0^{\pi^2/16} \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+x} = 2\int_0^{\pi/4} \frac{t^2\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int_0^{\pi/4} 1 - \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

La integración final resulta sencilla:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+x} &= 2\left(\frac{\pi}{4} - \arctan(x)\Big|_0^{\pi/4}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - 2 \end{aligned}$$

Finalizamos:

$$\boxed{\int_0^{\pi^2/16} \arctan\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = 1 + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi}{4}}$$

(ñ) Esto ya no es tan evidente, pero podemos observar que aparece $x^3 - 6x + 1$ y un múltiplo de su derivada en la expresión, $3x^2 - 6 = 3\left(x^2 - 2\right)$. Entonces hacemos:

$$u = x^3 - 6x + 1 \to \mathrm{d}u = 3\left(x^2 - 2\right)\mathrm{d}x$$

Luego,

$$\int \frac{2 - x^2}{\left(x^3 - 6x + 1\right)^5}\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^5} = \frac{1}{12u^4} + c$$

Finalmente, regresándonos a la variable original:

$$\boxed{\int \frac{2 - x^2}{\left(x^3 - 6x + 1\right)^5}\mathrm{d}x = \frac{1}{12\left(x^3 - 6x + 1\right)^4} + c}$$

(o) Es necesario factorizar el denominador. Para ello observamos por inspección que $x = -1$ es una raíz. Realizando división sintética se tiene que:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)\left(x^2 + 1\right)$$

Entonces,

$$\frac{x}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{x}{(x+1)\left(x^2+1\right)}$$

Aplicando correctamente el método de las fracciones parciales, sabemos que existe constantes A, B y C tales que

$$\frac{x}{(x+1)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx + C}{\left(x^2+1\right)} = \frac{A\left(x^2+1\right) + (Bx + C)(x+1)}{(x+1)\left(x^2+1\right)}$$

Se sigue que:
$$x = A\left(x^2+1\right) + (Bx+C)(x+1)$$
Si $x=-1$ el segundo término se anula y si tiene que:
$$-1 = 2A \rightarrow \boxed{A = -\frac{1}{2}}$$
Si $x=0$ desaparece el término que acompaña a la B. De esta forma,
$$0 = -\frac{1}{2} + C \rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$$
Si evaluamos en $x=1$:
$$1 = -1 + \left(B + \frac{1}{2}\right)2 \rightarrow B + \frac{1}{2} = 1 \rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}}$$
Es decir,
$$\frac{x}{(x+1)\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right) \quad \Big/\!\!\Big/ \int \cdots \mathrm{d}x$$
$$\rightarrow \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} - \ln|x+1|\right)$$
Para la primera integral podemos hacer $u=x^2$ pero también es posible evaluarla directamente. Concluimos entonces que:
$$\boxed{\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^3+x^2+x+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \arctan x - \ln|x+1|\right] + c}$$
(p) Hagamos la ya conocida sustitución $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1+t^2\right)\mathrm{d}\theta$. Recordemos que:
$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$$
Entonces:
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{2+\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{4t}{\left(3+t^2\right)\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t$$
Observe que antes de aplicar fracciones parciales (sigue siendo válido hacerlo directamente) se puede hacer la sustitución $u=t^2 \rightarrow \mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$. Entonces,
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{2+\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(3+u)(1+u)}$$
Aplicando el método de las fracciones parciales tenemos que existen constantes A y B tales que:
$$\frac{1}{(3+u)(1+u)} = \frac{A}{3+u} + \frac{B}{1+u}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{2+\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta &= 2A\ln(3+u)\Big|_0^1 + 2B\ln(1+u)\Big|_0^1 \\ &= 2A\ln\left(\frac{4}{3}\right) + 2B\ln(2)\end{aligned}$$

Por determinar A y B. Se tiene que:

$$1 = A(1+u) + B(3+u)$$

Haciendo $u=-1$ tenemos que:

$$1 = 2B \to \boxed{B = \frac{1}{2}}$$

Haciendo $u=-3$ tenemos que

$$1 = -2A \to \boxed{A = -\frac{1}{2}}$$

Es decir,

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(\theta)}{2+\cos(\theta)}\mathrm{d}\theta = -\ln\left(\frac{4}{3}\right) + \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

(q) Como (casi) siempre que aparecen expresiones del tipo $\sqrt{a-x^2}$, hacemos la sustitución $x = 3\sin(\theta)$. Entonces $\mathrm{d}x = 3\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ con lo cual se transforma en:

$$\int_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/6} \frac{9\sin^2\theta}{3\cos\theta}3\cos\theta\mathrm{d}\theta = 9\int_0^{\pi/6} \sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

Recordamos que $\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ con lo cual

$$\int_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/6}\right)$$

$$\to \boxed{\int_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}}$$

4.4.4. Técnicas avanzadas, aplicación y demostración de propiedades

El capítulo de integración no solo se reduce al cálculo de integrales, que de por sí ya tiene una dificultad inherente, si no que también existe un gran juego de problemas en que se deben aplicar correctamente las propiedades de la integral para llegar a resultados y/o relaciones específicas. Se puede considerar que este tipo de problemas pueden significar una dificultad mayor que el cálculo explícito de integrales, ya que pueden requerir una capacidad mayor de abstracción y una correcta comprensión de las propiedades y definiciones del capítulo.

La tipología de problemas presentada a continuación es diversa.

Problema 4.30: *(I3-2013-2)* Calcule $\displaystyle\int_1^3 \frac{f'(x)\mathrm{d}x}{1+[f(x)]^2}$ si $f(x) = \dfrac{x-3}{2x}$.

Solución:

Parta por notar que la derivación de $f(x)$ y el cálculo de $f^2(x)$ convierte la expresión involucrada a integrar en una complicada desde el punto de vista algebraico. Puede evitarse todo este tedioso trabajo siendo ingeniosos en cuanto al tratamiento de la expresión involucrada.

Observe que aparece una función que contiene a $f(x)$ multiplicado por su derivada, $f'(x)$. Luego, aunque resulte una generalización algebraica, sigue siendo válido aplicar el teorema de sustitución:

$$u = f(x) \to \mathrm{d}u = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Con ello,

$$\int_1^3 \frac{f'(x)\,\mathrm{d}x}{1+[f(x)]^2} = \int_{f(1)}^{f(3)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

con $f(3) = 0$ y $f(1) = -1$. Luego, dado que la nueva primitiva es muy sencilla de calcular, tenemos que:

$$\int_1^3 \frac{f'(x)\,\mathrm{d}x}{1+[f(x)]^2} = \arctan(0) - \arctan(-1)$$

Es decir,

$$\boxed{\int_1^3 \frac{f'(x)\,\mathrm{d}x}{1+[f(x)]^2} = \frac{\pi}{4}}$$

Problema 4.31: Sea $f(x)$ una función que admite derivada continua hasta el orden 2 y tal que $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$ y $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 4$. Haciendo uso de esta información, calcule el valor de:

$$\mathcal{I} = \int_0^1 x^2 f''(x)\mathrm{d}x$$

Solución:

Como sabemos el valor de $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$, lo ideal es hacer esta expresión. Bajo esta lógica, $f''(x)$ es "fácil" de integrar y nos ayuda a cumplir nuestros propósitos, y x^2 es fácil de derivar (y también de integrar a pesar de que no nos sirva en este caso). Luego, aplicamos integración por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 & \to \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f''(x)dx & \to v = f'(x) \end{cases}$$

Es decir,

$$\mathcal{I} = x^2 f'(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x f'(x)\mathrm{d}x$$

Notamos que no sabemos el valor de $f'(0)$, pero es irrelevante ya que en la primitiva estará multiplicado por cero. Simplificamos nuevamente por partes la segunda integral:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= f'(1) - 2\left[xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \right] \\
&= f'(1) - 2f(1) + 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Reemplazando con los valores conocidos:

$$\mathcal{I} = 1 - 2 + 2 \cdot 4 \rightarrow \boxed{\mathcal{I} = 7}$$

Problema 4.32: Pruebe que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Indicación: Pruebe primero que

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x$$

y luego utilice pertinentemente este resultado.

Solución:

Siguiendo la indicación primero demostraremos la propiedad. Esto es fácil haciendo la sustitución $u = a - x \rightarrow \mathrm{d}u = -\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int_0^a f(a-x)\mathrm{d}x &= -\int_a^0 f(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^a f(u)\mathrm{d}u \; \blacksquare
\end{aligned}$$

Luego, notemos que si $f(x) = \dfrac{\sin^n(x)}{\sin^n(x) + \cos^n(x)}$, entonces la propiedad dice que

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\pi/2 - x)\,\mathrm{d}x$$

Es decir, tenemos que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n(\pi/2 - x)\,\mathrm{d}x}{\sin^n(\pi/2 - x) + \cos^n(\pi/2 - x)}$$

Aplicando propiedades de trigonométría (ya sea la circunferencia unitaria o seno de la diferencia), tenemos que

$$\rightarrow I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n(x)}{\cos^n(x) + \sin^n(x)}\mathrm{d}x$$

Como hay una equivalencia, sumamos la integral del seno y la integral del coseno, obteniendo que

$$\begin{aligned}
2I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n(x)}{\cos^n(x) + \sin^n(x)} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} \ \blacksquare$$

Problema 4.33: Calcule el valor de

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^7 - x}$$

Solución:

Notando que:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^7 - x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^6 - 1\right)}$$

Podríamos seguir calculando raíces y así aplicar el método de fracciones parciales. Es evidente que este método puede resultar extenso y tedioso, por lo cual se desaconseja. Quizás podamos aplicar una sustitución que simplifique lo cálculos. La pregunta es: ¿qué es lo que nos molesta de esta interal? Efectivamente es x^6. Intentemos hacer la sustitución

$$u = x^6 \to \mathrm{d}u = 6x^5 \mathrm{d}x \to \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{6x^5}$$

Reemplazando con esta manipulación algebraica:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^7 - x} &= \frac{1}{6} \int \frac{\mathrm{d}u}{x^6 (u - 1)} \\
&= \frac{1}{6} \int \frac{\mathrm{d}u}{u (u - 1)}
\end{aligned}$$

Aplicarle el método de las fracciones parciales a esta expresión resulta mucho más sencillo. De hecho se puede calcular casi inmediatamente jugando con los términos:

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}$$

$$\begin{aligned}
\to \int \frac{dx}{x^7 - x} &= \frac{1}{6} \left[\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} - \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \right] \\
&= \frac{1}{6} \log|u-1| - \frac{1}{6} \log|u| + c
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{x^7 - x} = \frac{1}{6}\log\left|x^6 - 1\right| - \log|x| + c}$$

Problema 4.34: Sea $\phi(x)$ una función cualquiera. Utilice la sustitución $y = \pi - x$ para demostrar que

$$\int_0^{\pi} x\phi\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\phi\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x$$

Solución:

Efectivamente, si hacemos la sustitución obtenemos que:

$$y = \pi - x \to \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad x = \pi - y$$

Con esto,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\phi\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x &= -\int_{\pi}^{0}(\pi - y)\,\phi\left(\sin(\pi - y)\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\pi}(\pi - y)\,\phi\left(\sin(\pi - y)\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Recordamos que $\sin\left(\pi - y\right) = \sin\left(y\right)$ y aplicando la linealidad de la integral obtenemos que:

$$\int_0^{\pi} x\phi\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\phi\left(\sin\left(y\right)\right)\mathrm{d}y - \int_0^{\pi} y\phi\left(\sin(y)\right)\mathrm{d}y$$

Reordenando términos y notando que la variable de integración es muda:

$$\to 2\int_0^{\pi} x\phi\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}\phi\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x$$

Finalmente, concluimos que:

$$\int_0^{\pi} x\phi\left(\sin\left(x\right)\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\phi\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x \ \blacksquare$$

Problema 4.35: Use la propiedad ya demostrada:

$$\int_0^{\pi} x\phi\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\phi\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x$$

para calcular el valor de la integral:

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{1 + \cos^2(x)}\mathrm{d}x$$

Solución:

Ya tenemos el término x de la expresión. Nos falta identificar $\phi(t)$. Para ello, notemos que

$$\frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{2-\sin^2(x)} \to \phi(t) = \frac{t}{2-t^2}$$

Con esto,

$$\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}t$$

Notar que aparece la derivada de coseno en el numerador. Así, $u = -\cos(t) \to du = \sin(t)dt$. Con ello,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}\arctan(u)\bigg|_{-1}^{1} \\ &= \frac{\pi}{2}\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\to \boxed{I = \frac{\pi^2}{4}}$$

Problema 4.36:

(a) Sea $f(x)$ una función estrictamente creciente, positiva y con derivada continua en $[a,b]$. Demuestre que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\mathrm{d}x$$

(b) Si f es una función derivable y $g = f^{-1}$, demuestre que

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = bf^2(b) - af^2(a) - 2\int_{f(a)}^{f(b)} yg(y)\mathrm{d}y$$

Solución:

(a) Si nos fijamos que

$$bf(b) - af(a) = xf(x)\bigg|_a^b$$

entonces es muy sugerente que se hizo uso de integración por partes. Al lado izquierdo, siguiendo esta linea, tendremos que:

$$\begin{cases} u = f(x) & \to \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \to v = x \end{cases}$$

Con ello,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = xf(x)\bigg|_a^b - \int_a^b xf'(x)\mathrm{d}x$$

Como en la integral del resultado aparece $f^{-1}(x)$ y además aparecen $f(b)$ y $f(a)$ en los extremos de la integral, esto sugiere que se hizo la sustitución

$$u = f(x) \to \mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x \to x = f^{-1}(u)$$

La última implicancia se cumple ya que la función es inyectiva al ser monótona creciente y con derivada continua. Luego,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= xf(x)\Big|_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(u)\,du \\ &= bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)dx \blacksquare\end{aligned}$$

(b) Para este caso se procede por analogía. Como aparece la diferencia de términos evaluados en los extremos, hacemos

$$\begin{cases} u = f^2(x) & \to \mathrm{d}u = 2f(x)f'(x)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{d}x & \to v = x \end{cases}$$

Así se obtiene que

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = xf^2(x)\Big|_a^b - 2\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x$$

Hacemos $u = f(x) \to x = f^{-1}(u) \to du = f'(x)dx$. Con ello,

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x = bf^2(b) - af^2(a) - 2\int_{f(a)}^{f(b)} uf^{-1}(u)\,\mathrm{d}u \blacksquare$$

Problema 4.37: *(I3-2013-1)* Sea f función derivable, estrictamente creciente en $[0,a]$ con $f(a) = b$ y $f(0) = 0$. Demuestre que

$$\int_a^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = ab - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

y aplique este resultado para calcular $\displaystyle\int_0^1 \arcsin(x)\,\mathrm{d}x$.

Solución:

La idea de este problema es la misma que la del problema anterior. Primero hagamos $y = f(x)$ para deshacernos de la función inversa en la integral (ya que el resultado está en términos de f). La sustitución es válida ya que f es creciente y por lo tanto inyectiva. Adicionalmente, $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x > 0$. Con ello,

$$\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = \int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(b)} xf'(x)\,\mathrm{d}x$$

De los datos $f^{-1}(b) = a$ y $f^{-1}(a) = 0$. Hacemos integración por partes, de modo de simplificar x derivándolo y obtener f integrando la derivada:

$$\begin{cases} u = x & \to \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = f'(x)\,dx & \to v = f(x) \end{cases}$$

y así

$$\begin{aligned}\int_0^b f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y &= xf(x)\Big|_0^a - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= af(a) - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= ab - \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \blacksquare\end{aligned}$$

Demostrando así lo pedido. Para calcular la integral, digamos que $a = 1$ y $f(x) = \arcsin(x) \to f^{-1}(x) = \sin(x)$ y $b = f(a) = \dfrac{\pi}{2}$. Es decir,

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \arcsin(x)\,\mathrm{d}x \to \boxed{\int_0^1 \arcsin(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - 1}$$

Problema 4.38: *(I3-2013-1)* Sean $a > 0$ y $b > 0$. Se define la función f por

$$f(x) = \int_a^b t^x \mathrm{d}t$$

Calcule $f(-1)$ y determine si f es continua en $x = -1$.

Solución:

La dificultad de esta pregunta radica en recordar adecuadamente el concepto de continuidad y tener claro cómo se comporta la integración de t^x para distintos valores de x. Recordamos que una función $f(x)$ es continua si y solo si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Es decir, para determinar si $f(x)$ es continua debemos calcular el límite. Primero calculemos $f(-1)$,

$$f(1) = \int_a^b t^{-1}\mathrm{d}t = \ln(b) - \ln(a)$$

Sin embargo, para $x \neq -1$ la situación es distinta, ya que la función no es logaritmo. En particular,

$$\int_a^b t^x \mathrm{d}t = \frac{t^{x+1}}{x+1}\Big|_a^b = \frac{b^{x+1}}{x+1} - \frac{a^{x+1}}{x+1}$$

La pregunta que debemos hacernos entonces es

$$¿\lim_{x\to-1} \frac{b^{x+1}}{x+1} - \frac{a^{x+1}}{x+1} = \ln(b) - \ln(a)?$$

¿Cómo podemos calcular el límite? Observando que es de la forma $0/0$, la forma más directa puede ser usar regla de l'Hôpital, y eso efectivamente haremos:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1} \frac{b^{x+1}}{x+1} - \frac{a^{x+1}}{x+1} &= \lim_{x\to-1} b^{x+1}\ln(b) - a^{x+1}\ln(a) \\ &= \ln(b) - \ln(a)\end{aligned}$$

Es decir, efectivamente $f(x)$ es continua en $x = -1$.

Problema 4.39: [**Propuesto**] Sea $f(x)$ una función periódica de período τ tal que existe la siguiente integral:

$$F(s) = \lim_{\xi \to \infty} \int_0^{\xi} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

la cual se conoce como *transformada de Laplace* de $f(x)$ y es de gran utilidad en diversos ámbitos de la física, matemática e ingeniería[6]. Al respecto, pruebe que

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-\tau s}} \int_0^{\tau} f(t) e^{-st} \mathrm{d}t$$

4.4.5. Relaciones de recursividad

La idea de este tipo de problemas es que dada una integral que depende de un valor natural n, llamémosla I_n, determinar una relación (igualdad) en la que se relacione I_n con valores de n menores como $n-1$ ó $n-2$.

Estos problemas son especialmente difíciles ya que no solo requieren aplicar correctamente las propiedades de integración, sino que se tiene que aplicar a integrales mucho más generales y para obtener resultados mucho más abstractos.

Siempre puede ser una buena idea cuando nos pidan demostrar una relación hacer uso de inducción, y si nos piden determinar por nuestra cuenta la fórmula, buscar una forma de expandir adecuadamente la integral, como por ejemplo por integración por partes o bien sumando y restando términos dentro de un factor. Habitualmente la primera técnica, integración por partes, es la habitualmente empleada en este tipo de problemas.

Partamos con un problema de dificultad básica que ilustra adecuadamente este tipo de problemas.

Problema 4.40: *(I3-2013-2)* Considere $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \sin(\pi x)\, \mathrm{d}x$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Demuestre que

$$I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n$$

y luego calcule

$$\int_0^1 x^4 \sin(\pi x)\, \mathrm{d}x$$

Solución:

[6] Observe que la transformada de Laplace es un *funcional*, ya que toma la función $f(t)$ y por medio de una integral adecuada la trasnforma en una nueva función $F(s)$.

Partamos de la definición de I_{n+2} y desde ahí llegaremos a la relación buscada. Tenemos que:

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x$$

¿Como resolveríamos esta integral para n cualquiera? Evidentemente bajando del grado de x^n mediante integración por partes. Se tiene entonces que:

$$\begin{cases} u = x^{n+2} & \to \mathrm{d}u = (n+2) \, x^{n+1} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x & \to v = -\dfrac{1}{\pi} \cos(\pi x) \end{cases}$$

De esta forma,

$$I_{n+2} = \underbrace{-\frac{1}{\pi} x^{n+2} \cos(\pi x) \bigg|_0^1}_{\frac{1}{\pi} - 0} + \frac{(n+2)}{\pi} \int_0^1 x^{n+1} \cos(\pi x) \, \mathrm{d}x$$

Dado que en la nueva integral aparece un coseno e I_{n+2} está en términos de seno, derivamos nuevamente para bajar el grado de x^{n+1}:

$$\begin{cases} u = x^{n+1} & \to \mathrm{d}u = (n+1) \, x^{n} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \cos(\pi x) \, \mathrm{d}x & \to v = \dfrac{1}{\pi} \sin(\pi x) \end{cases}$$

De esta forma,

$$I_{n+2} == \frac{1}{\pi} + \frac{n+2}{\pi} \left(\cancel{\frac{x^{n+1}}{\pi} \sin(\pi x) \bigg|_0^1} - \frac{(n+1)}{\pi} \int_0^1 x^n \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x \right)$$

$$\to I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+2)(n+1)}{\pi} \underbrace{\int_0^1 x^n \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x}_{I_n}$$

Con ello demostramos que:

$$I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n \quad \blacksquare$$

Para calcular la integral pedida, que segun la definición corresponde a I_4, consideramos que $n+2=4$ en la fórmula y por lo tanto $n=2$. Es decir,

$$I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{3 \cdot 4}{\pi^2} I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{3 \cdot 4}{\pi^2} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1 \cdot 2}{\pi^2} I_0 \right)$$

donde $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \bigg|_0^1 = \frac{2}{\pi}$. Reemplazando:

$$I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^2} \left(\frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3} \right)$$

$$\to \boxed{I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^4} + \frac{48}{\pi^5}}$$

Problema 4.41:

(a) Considere la integral $I_n = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n}$. Demuestre que I_n satisface la relación

$$I_{n+1} = \frac{u}{2n\,(1+u^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n$$

(b) Encuentre una fórmula de recursión para resolver

$$\int (\sec(x))^n \,\mathrm{d}x \quad n > 2 \quad n \in \mathbb{N}$$

Propuesto: Aplíquela para calcular

$$\int (\sec(x))^5 \,\mathrm{d}x$$

Solución:

(a) Tenemos que:

$$I_n = \int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n}$$

El hecho de que aparezcan dos términos nos sugiere que debemos hacer integración por partes. No es una buena idea hacer la separación e integrar por partes, ya que al hacerlo aparecerá, por ejemplo, un término de la forma $\arctan(u)$, muy lejos de lo que realmente deseamos. Por esta razón, y en virtud de que $1/(1+u^2)^{n+1}$ es más fácil de derivar que de integrar, hacemos:

$$\begin{cases} m = \dfrac{1}{(1+u^2)^n} & \to \mathrm{d}m = -\dfrac{2nu}{(1+u^2)^{n+1}}\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}n = \mathrm{d}u & \to n = u \end{cases}$$

Es decir,

$$I_n = \frac{u}{(1+u^2)^n} + 2n \int \frac{u^2 \mathrm{d}u}{(1+u^2)^{n+1}}$$

De la identidad $u^2 = u^2 + 1 - 1$ logramos reducir el u^2 que “molesta” en la expresión:

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{u}{(1+u^2)^n} + 2n \left[\int \frac{(u^2+1)\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{n+1}} - \int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{u}{(1+u^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1} \end{aligned}$$

$$\to 2nI_{n+1} = \frac{u}{(1+u^2)^n} + (2n-1)\,I_n$$

y se concluye inmediatamente lo pedido:

$$I_{n+1} = \frac{u}{2n\,(1+u^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n \;\blacksquare$$

(b) Como siempre en el caso de tangentes y secantes, recordamos la identidad

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$$

y como es la única conocida, sumado a que la propiedad debe demostrarse para $n > 2$ (una pista en el enunciado), hacemos

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sec^{n-2}(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sec^{n-2}(x)\left(1+\tan^2(x)\right)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Como no aparece una relación función derivada en la segunda integral y sí sabemos que $1+\tan^2(x)$ resulta fácil de integrar (es la derivada de $\tan(x)$ y $\sec^{n-2}(x)$ es fácil de derivar, entonces hacemos

$$\begin{cases} u = \sec^{n-2}(x) & \to \mathrm{d}u = (n-2)\sec^{n-3}(x)\tan(x)\sec(x)\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = 1+\tan^2(x)\,dx & \to v = \tan(x) \end{cases}$$

$$\therefore\ I_n = \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2)\int \sec^{n-2}(x)\tan^2(x)\,\mathrm{d}x$$

pero $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$, lo cual nos sirve para deshacernos de la tangente en la expresión y obtener expresiones en término de I_n. Reemplazando:

$$\begin{aligned} \to I_n &= \sec^{n-2}(x)\tan(x) + (n-2)\int \sec^n(x)\,\mathrm{d}x - (n-2)\int \sec^{n-2}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sec^{n-2}(x)\tan(x) - (n-2)\,I_n + (n-2)\,I_{n-2} \end{aligned}$$

Despejando I_n de esta ecuación

$$I_n(n-1) = \sec^{n-2}(x)\tan(x) + (n-2)\,I_{n-2}$$

$$\boxed{\therefore\ I_n = \frac{n-2}{n-1}I_{n-2} + \frac{\sec^{n-2}(x)\tan(x)}{n-1}}$$

Notamos que la integración para $n = 1$ y $n = 2$ (los casos bases no sujetos a la recursión) es extremadamente sencilla:

$$\int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \tan(x) + c$$

$$\int \sec(x)\,\mathrm{d}x = \ln|\tan(x) + \sec(x)| + c \leftarrow \text{tabla}$$

Problema 4.42: Demuestre que:

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Solución:

Como las fórmulas de este tipo representan sucesiones, lo mejor es demostrarlas por inducción. Si

$$P(n)\ :\ \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

(es decir, es una proposición lógica que depende del valor de n y puede ser verdadera o falsa). Entonces, si demostramos que

- $P(1)$ es verdadera.
- $P(n) \rightarrow P(n+1)$.

Entonces como la segunda es una expresión general para n cualquiera, se generará una cadena de verdades:

$$P(1) \rightarrow P(2) \rightarrow P(3) \rightarrow \cdots \rightarrow \infty$$

Con lo cual lo habremos demostrado para todo n. Esto se conoce como **principio de inducción**. Efectivamente demostrémoslo de esta forma.

Caso base: $P(1)$. Debemos probar que:

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right) \mathrm{d}x = \frac{4}{3!} = \frac{2}{3}$$

pero

$$\int_0^1 \left(1 - x^2\right) \mathrm{d}x = 1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

demostrando así lo pedido.

Hipótesis inductiva: $\displaystyle\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x = \frac{2^{2n}\left(n!\right)^2}{(2n+1)!}$. Con ella, debemos demostrar que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^{n+1} \mathrm{d}x &= \frac{2^{2n+2}\left((n+1)!\right)^2}{(2n+3)!} \\
&= \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \frac{2^{2n}\left(n!\right)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x \\
&= \frac{2(n+1)}{(2n+3)} \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Es decir esta última igualdad es la que nos resulta más cómodo demostrar. O si

$$I_n = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x \rightarrow \text{PD: } I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{(2n+3)} I_n$$

Para encontrar la similitud es sugerente intentar en I_{n+1}:

$$u = \left(1 - x^2\right)^{n+1} \rightarrow \mathrm{d}u = -2(n+1)\left(1 - x^2\right)^n x\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = 1 \rightarrow v = x$$

De esta forma,

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= x\left(1 - x^2\right)\Big|_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n x^2 \mathrm{d}x \\
&= 2(n+1)\int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n x^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Sin embargo, la integral de la derecha no es precisamente lo que buscamos. Integrar nuevamente por partes sería contraproducente pues realizaríamos la operación inversa a lo que recién realizamos, y una sustitución tampoco resulta del todo práctica. ¿Qué podemos hacer entonces? Notar que:

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n+1} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \left(1-x^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x - \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n x^2 \mathrm{d}x \\ &= I_n - \int_0^1 \left(1-x^2\right)^n x^2 \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Pero la segunda integral la sabemos de la fórmula de arriba:

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{n+1} \mathrm{d}x = \frac{I_{n+1}}{2\,(n+1)}$$

Es decir,

$$I_{n+1} = I_n - \frac{I_{n+1}}{2\,(n+1)} \to I_{n+1}\frac{2n+2+1}{2\,(n+1)} = I_n$$

Con lo cual

$$I_{n+1} = \frac{2\,(n+1)}{2n+3} I_n$$

que es lo que se necesitaba demostrar. Luego, por principio de inducción concluimos que:

$$\int_0^1 \left(1-x^2\right)^n \mathrm{d}x = \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!} \quad \blacksquare$$

Problema 4.43:

(a) Usando la identidad $x+b = (x+a)+(b-a)$, obtenga una relación de recurrencia para

$$I_n = \int \sqrt{x+b}\,(x+a)^n \,\mathrm{d}x \quad a, b, x > 0$$

(b) Se define $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{a^2+t^2}} \mathrm{d}t$. Demuestre que

$$I_n = \frac{1}{n}\sqrt{a^2+1} - \frac{n-1}{n} a^2 I_{n-2}$$

Solución:

(a) Como es de nuestro interés obtener una relación de recurrencia, puede ser una buena idea integrar por partes, bajando el grado de la potencia, i.e.

$$\begin{cases} u = (x+a)^n & \to \mathrm{d}u = n\,(x+a)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \sqrt{x+b} & \to v = \frac{2}{3}\,(x+b)^{3/2} \end{cases}$$

Es decir,

$$I_n = \frac{2}{3}(x+a)^n (x+b)^{3/2} - \frac{2n}{3}\int (x+b)^{3/2}(x+a)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

La integral de la derecha casi se parece a I_{n-1}, de no ser por el exponente de $(x+b)$. Sin embargo, notemos que $(x+b)^{3/2} = \sqrt{x+b}\,(x+b)$. Haciendo uso de la indicación:

$$(x+b)^{3/2} = \sqrt{x+b}\,[(x+a)+(b-a)]$$

Es decir,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2}{3}(x+a)^n (x+b)^{3/2} - \frac{2n}{3}\int \sqrt{x+b}\,[(x+a)+(b-a)]\,(x+a)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}(x+a)^n (x+b)^{3/2} - \frac{2n}{3}\int \sqrt{x+b}\,(x+a)^n\,dx - \frac{2n}{3}(b-a)\int \sqrt{x+b}\,(x+a)^{n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}(x+a)^n (x+b)^{3/2} - \frac{2n}{3}I_n - \frac{2n}{3}(b-a)\,I_{n-1} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\boxed{\left(1+\frac{2n}{3}\right)I_n = \frac{2}{3}(x+a)^n (x+b)^{3/2} - \frac{2n}{3}I_{n-1}}$$

que es la relación de recurrencia pedida. Para $n=0$ el cálculo es trivial por integración de función potencia.

(b) Tenemos que

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{a^2+t^2}}\mathrm{d}t$$

donde t^n es sencillo de derivar pero $1/\sqrt{a^2+t^2}$. Sin embargo, notemos que $t/\sqrt{a^2+t^2}$ es un muy sencillo de integrar por sustitución. Hagamos:

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{n-1}\cdot t}{\sqrt{a^2+t^2}}\mathrm{d}t$$

Luego, integración por partes:

$$\begin{cases} u = t^{n-1} & \to \mathrm{d}u = (n-1)\,t^{n-2}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \dfrac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\mathrm{d}t & \to v = \sqrt{a^2+t^2} \end{cases}$$

Es decir,

$$I_n = t^{n-1}\sqrt{a^2+t^2}\Big|_0^1 - (n-1)\int_0^1 t^{n-2}\sqrt{a^2+t^2}\mathrm{d}t$$

Notamos que la segunda integral es casi I_{n-2} de no ser por el exponente de la potencia. Sin embargo, notemos que $\sqrt{a^2+t^2} = (a^2+t^2)^{1-1/2}$. Con ello,

$$\begin{aligned} I_n &= \sqrt{a^2+1} - (n-1)\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{\sqrt{a^2+t^2}}\left(a^2+t^2\right)\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{a^2+1} - (n-1)\,a^2\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{\sqrt{a^2+t^2}}\mathrm{d}t - (n-1)\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{a^2+t^2}}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Es decir,

$$I_n = \sqrt{a^2+1} - (n-1)\, a^2 I_{n-2} - (n-1)\, I_n$$

Y finalmente,

$$nI_n = \sqrt{a^2+1} - (n-1)\, a^2 I_{n-2}$$

con lo cual

$$\boxed{I_n = \frac{1}{n}\sqrt{a^2+1} - \frac{n-1}{n} a^2 I_{n-2}}$$

demostrando así lo pedido. ■

Problema 4.44: Determine una fórmula de recurrencia para

$$I_n = \int \sin^{2n}(t) \cos^{2m}(t)\, \mathrm{d}t$$

con $n, m \in \mathbb{N}$.

Solución:

Suponemos s.p.d.g. que $2n < 2m$. La forma de la expresión sugiere hacer integración por partes. Sin embargo, esto no resulta del todo sencillo ya que ninguna de las dos es fácil de integrar. Sin embargo, $\cos^{2m}(t)\sin(t)$ sí lo es. Es decir,

$$I_{n,m} = \int \sin^{2n-1}(t) \cos^{2m}(t) \sin(t)\, \mathrm{d}t$$

Luego, hacemos

$$\begin{cases} u = \sin^{2n-1}(t) & \to \mathrm{d}u = (2n-1)\sin^{2n-2}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \cos^{2m}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t & \to v = \frac{-\cos^{2m+1}(t)}{2m+1} \end{cases}$$

Con ello,

$$I_{n,m} = -\frac{\sin^{2n-1}(t)\cos^{2m+1}(t)}{2m+1} + \frac{2n-1}{2m+1}\int \sin^{2n-2}(t)\cos^{2m}(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t$$

La expresión de la derecha es similar a $I_{n-1,m}$. Sin embargo, el término $\cos^2(t)$ hace que no sea exactamente igual. Si recordamos que $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$, superamos fácilmente esta dificultad. Con ello,

$$I_{n,m} = -\frac{\sin^{2n-1}(t)\cos^{2m+1}(t)}{2m+1} + \frac{2n-1}{2m+1}\underbrace{\int \sin^{2n-2}(t)\cos^{2m}(t)\,\mathrm{d}t}_{I_{n-1,m}} - \frac{2n-1}{2m+1}\underbrace{\int \sin^{2n}(t)\cos^{2m}(t)\,\mathrm{d}t}_{I_{n,m}}$$

Es decir, despejando algebraicamente:

$$\left(1 + \frac{2n-1}{2m+1}\right) I_{n,m} = -\frac{\sin^{2n-1}(t)\cos^{2m+1}(t)}{2m+1} + \frac{2n-1}{2m+1} I_{n-1,m}$$

Para estos efectos prácticos consideramos m fijo y la sucesión solo dependiente de n. Con ello, concluimos que:

$$\boxed{I_n = -\frac{\sin^{2n-1}(t)\cos^{2m+1}(t)}{2(n+m)} + \frac{2n-1}{2(n+m)} I_{n-1}}$$

y así podemos ir despejando recursivamente el resultado hasta llegar a I_0, que corresponderá a:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \cos^{2m}(t)\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^m \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\int \cos^k 2\theta \mathrm{d}t \end{aligned}$$

donde se puede ir integrando término a término sin mayor dificultad con las técnicas vistas en clase para los k impares y recursivamente para los k pares.

Problema 4.45: Pruebe que:

$$\int x^n e^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2} + \frac{n-1}{2}\int x^{n-2}e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

y úselo para calcular $\displaystyle\int_0^1 x^5 e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Solución:

Sea $I_n = \displaystyle\int x^n e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Entonces, queremos demostrar que:

$$I_n = -\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2} + \frac{n-1}{2}I_{n-2}$$

¿Cómo calcularíamos esta integral? Tratando de bajar el grado de x^n. Para ello, observe el lector que x^n es fácil de derivar, pero ¿lo es e^{-x^2}? ¡No! De hecho esta función no tiene primitiva, pero integrar xe^{-x^2} si es sencillo. En efecto,

$$\int xe^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

Entonces hacemos integración por partes:

$$\begin{cases} u = x^{n-1} & \to \mathrm{d}u = (n-1)\,x^{n-2}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = xe^{-x^2}\mathrm{d}x & \to v = -\dfrac{1}{2}e^{-x^2} \end{cases}$$

Con ello,

$$I_n = -\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2} + \frac{n-1}{2}\underbrace{\int x^{n-2}e^{-x^2}\mathrm{d}x}_{I_{n-2}}$$

demostrando así lo pedido. ■

La integral que se pide calcular es I_5 entre 0 y 1. Aplicando la fórmula con $n = 5$:

$$I_5 = -\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} + 2I_3 = -\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} + 2\left(-\frac{1}{2}x^2e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}\mathrm{d}x\right)$$

Finalmente,

$$I_5 = -\frac{1}{2}x^4e^{-x^2} - x^2e^{-x^2} - e^{-x^2}$$

Reemplazando con los extremos se puede concluir que

$$\boxed{\int_0^1 x^5e^{-x^2}\mathrm{d}x = 1 - \frac{5}{2e}}$$

Problema 4.46: [**Propuesto**] Definamos $I_n(a)$ $(n \geq 0)$ como

$$I_n(a) = \lim_{u\to\infty}\int_0^u x^ne^{-ax}\mathrm{d}x$$

Calcule explícitamente $I_0(a)$ y luego use este resultado para encontrar $I_n(a)$.

Indicación: Considere que $I_n(a)$ es una función diferenciable.

---

5. Aplicaciones de la integral

Al igual que el capítulo de aplicaciones de la derivada, en este capítulo se recopila una miscelánea de aplicaciones geométricas de la integral. Sin lugar a dudas existen muchas más, pero se recopilan solamente las que contemplan los contenidos de este curso.

5.1. Cálculo de áreas

Problema 5.1: Determine el área de las regiones limitadas por las curvas de ecuaciones:

(a) $y^2 = x^2 - x^4$.

(b) $y = 4 - x^2$, $y = 4 - 4x$.

(c) $y = \cos(x)$ si $x < 0$, $y = 0$ y $x = -y^2 - 2y + 3$.

Solución:

La estrategia general para este tipo de problemas es:

(a) **Paso crítico:** Determinar la región a la cual se le desea calcular el área, para así poder plantear correctamente la integral y los extremos de esta.

(b) Usar la relación
$$A_{\text{total}} = \int \mathrm{d}A \quad \text{con } \mathrm{d}A = |f(x) - g(x)|\, \mathrm{d}x$$
donde el módulo mide la distancia del extremo inferior al superior y se toma el módulo para obtener una cantidad siempre positiva (el área de cualquier figura lo es).

(c) Calcular la integral.

Esta será la estrategia que usaremos en todos los siguientes problemas.

(a) Tenemos una colección de puntos (x, y) tales que cumplen la relación implícita $y^2 = x^2 - x^4$. La primera dificultad que surge es, ¿qué curva representa? No hay mucho que podamos hacer además de utilizar las técnicas ya conocidas e ir analizando. Notar que se puede despejar y fácilmente en términos de x:
$$y = \pm\sqrt{x^2 - x^4} = \pm\,|x|\,\sqrt{1 - x^2}$$
lo cual nos permite notar rápidamente que:

- $y = 0$ si $x = 0, -1, 1$.
- La relación no queda satisfecha si $1 - x^2 < 0$. Es decir, la relación se cumple para los $x \in [-1, 1]$, ya que $1 - x^2$ es una parábola que se abre hacia abajo.

- La función es simétrica no solo en el eje x, si no que también en el eje y. Para notarlo basta evaluar en la relación con $-x$ y $-y$.

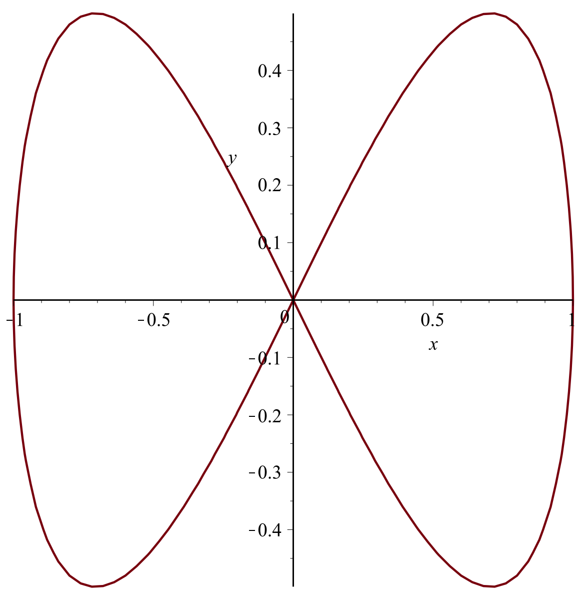
Ya sabemos que la derivada es una buena herramienta para determinar el gráfico de una función. Usémosla. Para ello, debemos obtener y', lo que se puede hacer rápidamente por derivación implícita:

$$2y \cdot y' = 2x - 4x^3 \to y' = \frac{x - 2x^3}{y}$$

Cabe notar que puede ser cualquiera de los dos valores de y, pero como estos varian en un signo, y solo producirán una diferencia en la simetria, nos preocupamos de lo más relevante, los puntos criticos. Notar que $y' = 0$ si $x\left(1 - 2x^2\right) = 0$ y y' no existe si $x = 0$ ó $x = \pm 1$. Es decir, los candidatos a puntos críticos son

- $x = \pm 1/\sqrt{2}$.
- $x = 0$.
- $x = \pm 1$.

Mediante la técnica favorita se puede determinar que $x = 0$ es un mínimo local y que $\pm 1/\sqrt{2}$ son máximos locales si $y > 0$. No nos preocuparemos de evaluar nada más, ya que solo necesitamos un esbozo del gráfico para tener claro qué integraremos y en qué extremos lo haremos. El gráfico exacto es el siguiente:



Notamos que basta obtener el área de uno de los cuatro lóbulos para obtener el resultado final. Por lo tanto,

$$A = 4A_\ell$$

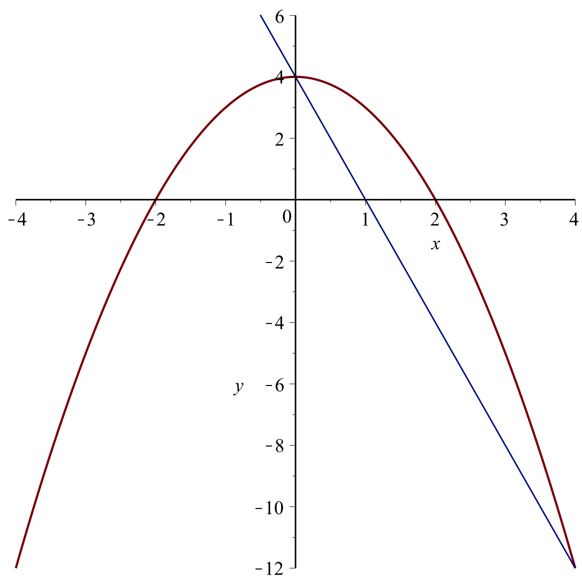
donde $A_\ell$es el área de un solo lóbulo, la cual podemos obtener intuitivamente mirando el gráfico: se integra la rama positiva de y entre 0 y 1. Es decir,

$$\begin{aligned} A_\ell &= \int_0^1 |x|\sqrt{1-x^2}dx \quad |x| = x, \text{ pues } x \in [0,1] \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx \quad u = x^2 \to du = 2xdx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-u}du \\ &= -\frac{1}{2}\frac{2}{3}(1-u)^{3/2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Y con ello concluimos que

$$\boxed{A = \frac{4}{3}}$$

(b) Ambos elementos son extremadamente sencillos de graficar, obteniendo la gráfica:



La región es aquella contenida entre las curvas roja y azul. Es decir, la parábola delimita el extremo superior y la recta el inferior. Buscamos las intersecciones en el eje x para determinar los extremos:

$$4 - x^2 = 4 - 4x \to x^2 - 4x = x(x-4) = 0$$

Luego,

$$\mathrm{d}A = 4 - x^2 - 4 + 4x = 4x - x^2 \to A = \int_0^4 4x - x^2 \mathrm{d}x$$

Finalmente,

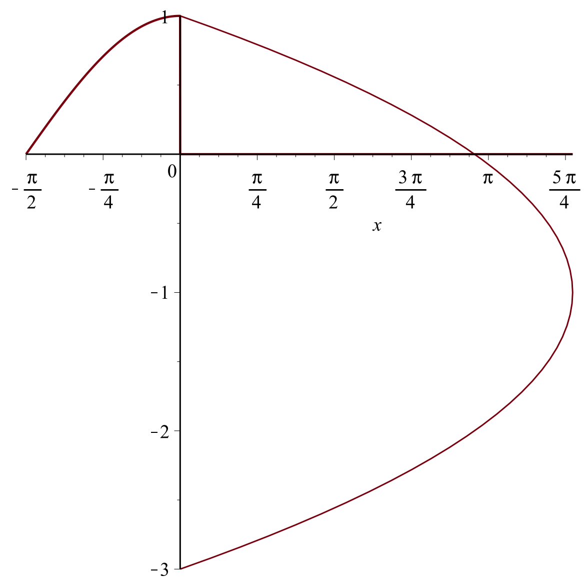
$$\begin{aligned} A &= 2x^2\Big|_0^4 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^4 \\ &= \frac{96}{3} - \frac{64}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{A = \frac{32}{3}}$$

(c) $\cos(x)$ resulta sencillo de graficar. Notamos en cambio que $x = -y^2 - 2y + 3$ si bien es una parábola, es una en la cual x depende de y. Haciendo completación de cuadrados determinamos facilmente raíces y vértices:

$$\begin{aligned} x &= -\left(y^2 + 2y\right) + 3 \\ &= -\left(y^2 + 2y + 1 - 1\right) + 3 \\ &= -(y+1)^2 + 4 \end{aligned}$$

Luego, el vértice de la parábola está en $(4, -1)$ y tiene raíces $y_1 = 1$ y $y_2 = -3$. En $y = 0$ la parábola vale 3. Con esto se puede graficar sin grandes dificultades:



Hecho esto, la región es claramente todo el lóbulo superior, sobre el eje x, el cual viene limitado por $\cos(x)$ para $x < 0$ y la parábola para $x > 0$. Es decir, es razonable calcular el área de cada uno por separado, i.e. por simple superposición:

$$A = A_1 + A_2$$

Si identificamos A_1 con la región limitada por coseno, tenemos que

$$A_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x)\Big|_{-\pi/2}^{0} = 1$$

Para calcular A_2, a priori debiésemos despejar y en función de x y luego integrar. Sin embargo, podemos aprovechar la relación como la tenemos, integrando en términos de y en vez de términos de x. Es decir,

$$\mathrm{d}A = \left(-y^2 - 2y + 3\right)\mathrm{d}y$$

Los extremos en el eje y corresponden a 0 y 1, la raíz positiva. Esto es,

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_0^1 -y^2 - 2y + 3\mathrm{d}y \\ &= -\frac{y^3}{3}\bigg|_0^1 - y^2\bigg|_0^1 + 3\left(1-0\right) \\ &= 3 - \frac{1}{3} - 1 \\ &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$A = 1 + \frac{5}{3} \to \boxed{A = \frac{8}{3}}$$

Problema 5.2: Dada la parábola $y = -x^2 + 4x$. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por la parábola y el eje X.

(a) Determinar el valor de c de modo que la recta $y = c$ divida $\mathcal{R}$ en dos partes iguales.

(b) Determinar los valores de a y b de modo que las rectas $x = a$ y $x = b$ dividan $\mathcal{R}$ en tres partes iguales.

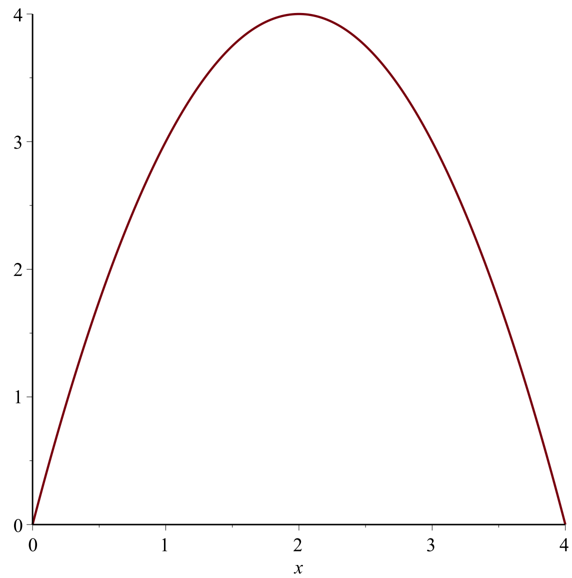
(c) Determinar el valor de d ($d > 4$) de modo que el área comprendida por la recta $y = d$ y la parábola sea igual al área de $\mathcal{R}$.

Solución:

La región de esta figura es extremadamente sencilla de obtener, ya que estamos gráficando una parábola con vértice en $(0, 4)$ y concavidad -1. Se presenta más abajo su gráfica.

(a) Buscamos hacer un corte en $y = c$ tal que el área de ambos extremos sea igual. Esto es,

$$A_1 = A_2$$



En este caso, lo que evidentemente resulta más sencillo es integrar en y. Para ello, despejamos x en función de y:

$$y = -x^2 + 4x \to x = 2 \pm \sqrt{4-y}$$

Tomemos la rama positiva para nuestros cálculos, ya que el área por simetría será el doble. Es decir, se deberá cumplir que

$$\int_0^c 2 - \sqrt{4-y}\mathrm{d}y = \int_c^4 2 - \sqrt{4-y}\mathrm{d}y \to 2c + \frac{2}{3}(4-c)^{3/2} - \frac{16}{3} = 2(4-c) - \frac{2}{3}(4-c)^{3/2}$$

Es decir,

$$\frac{4}{3}(4-c)^{3/2} = \frac{16}{3} + 8 - 4c \to (4-c)^{3/2} = 4 + 6 - 3c$$

Luego, elevando al cuadrado:

$$(4-c)^3 = (10-3c)^2$$

Las soluciones factibles de esta ecuación (algo que se deja propuesto al lector) son 3 y $-2\sqrt{3}$. Luego, por restricción de no negatividad para $\boxed{c=3}$ se cumple lo pedido.

(b) Ahora podemos integrar en el eje x. Se obtienen 3 área, digamos de izquierda a derecha, $A_1 = A_2 = A_3$, con lo que deberá cumplirse que

$$\int_0^a \mathrm{d}A = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_b^4 \mathrm{d}A$$

como la primitiva de la función es $-x^3/3 + 2x^2$, evaluamos sin mayores dificultades, generando la igualdad:

$$-\frac{a^3}{3} + 2a^2 = -\frac{b^3}{3} + 2b^3 + \frac{a^3}{3} - 2a^3 = -\frac{4^3}{3} + 2\cdot 4^2 + \frac{b^3}{3} - 2b^3$$

Las soluciones de esta ecuación, por medio de cálculo computacional son

$$\begin{aligned} a &= \frac{4}{3}2^{1/3} + \frac{2}{3}2^{2/3} - \frac{4}{3} \approx 1{,}4048... \\ b &= \frac{2}{15}\left(2^{1/3}\cdot 2250 - 900\right)^{1/3} \approx 1{,}6614... \end{aligned}$$

(c) El área de esta segunda figura será por simple superposición:

$$A = A_{\square} - A_p$$

Donde $A_{\square}$ es el área del rectángulo que contiene la parábola y A_p es el área de la parábola. Luego, deberá cumplirse que:

$$A_{\square} - A_p = A_p \rightarrow A_{\square} = 2A_p$$

¿Qué ganamos con esto? Que $A_{\square}$ no requiere integración para ser calculado y que por lo tanto solo tenemos que calcular una integral. Sin mayor dificultad:

$$\begin{aligned} A_p &= \int_0^4 -x^2 + 4x dx = -\frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 \\ A_{\square} &= y \cdot (4 - 0) \end{aligned}$$

Es decir, debemos resolver la ecuación

$$4y = -2 \cdot \frac{64}{3} + 2 \cdot 32 \rightarrow y = -\frac{32}{3} + \frac{48}{3} = \frac{16}{3} > 4$$

Por lo tanto, el número buscado es $\boxed{y = 16/3}$

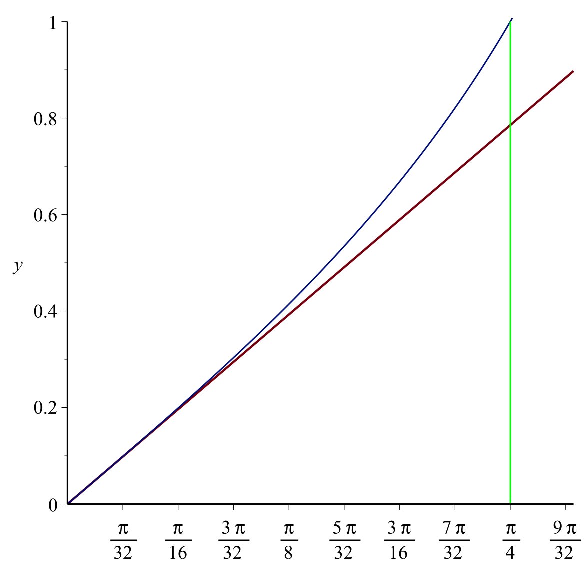
Problema 5.3:

(a) Determine el área de la región limitada por las curvas de ecuaciones $y = x$, $y = \tan(x)$ y la recta $x = \pi/4$.

(b) Determine la razón en que la parábola $y^2 = 2x$ divide al área del círculo $x^2 + y^2 = 8$.

Solución:

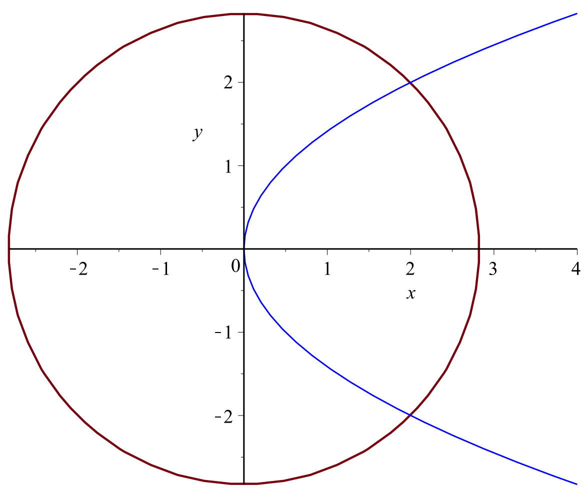
(a) Para determinar la región no podemos hacer más que graficar las funciones con los conocimientos que ya tenemos, obteniendo una gráfica como la siguiente:



Es decir, la región es lo que está entre medio de las tres curvas. La altura de la región viene dada por la función superior $\tan(x)$ restada a la inferior, x. Se integra claramente entre 0 y $\pi/4$. Con ello,

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/4} (\tan(x) - x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\log(\cos(x))\Big|_0^{\pi/4} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/4} \\
&= -\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi^2}{32} \\
&= -\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi^2}{32} \\
&\to \boxed{A = \frac{\log(2)}{2} - \frac{\pi^2}{32}}
\end{aligned}$$

(b) Primero graficamos sin mayor dificultad la parábola y la circunferencia. La ecuación $x^2 + y^2 = 8$ es una circunferencia de radio $2\sqrt{2}$:



Si llamamos $A_\odot$ al área de la circunferencia, A_1 al área mayor y A_2 al área menor, entonces nos piden

$$\Re = \frac{A_1}{A_2}$$

pero $A_1 + A_2 = A_\odot \to A_2 = A_\odot - A_1$. Es decir, solo debemos calcular el área de A_1. Para ello, notamos que existe una simetría entorno al eje x, por lo cual solo calculamos el extremo superior:

$$A_1 = 2A'$$

donde A' es el área de la región superior. Notamos que visto desde el eje x deberíamos realizar dos integrales. En cambio integrando desde el eje y deberiamos realizar una sola integral. Haremos esto último. Notamos que inferiormente la región está acotada por $x = y^2/2$ y superiormente por $\sqrt{8 - y^2}$. Es decir,

$$\mathrm{d}A = \sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2}$$

El extremo de integración inferior es claro, sin embargo para el otro deberemos resoler la ecuación

$$\sqrt{8-y^2} = \frac{y^2}{2} \to 8 - y^2 = \frac{y^4}{4} \to y^4 + 4y^2 - 8 = 0$$

Haciendo $u = y^2$ tenemos la ecuación $u^2 + 4u - 32 = 0 \to (u-4)(u+8) = 0 \to u = 4 \ \vee \ u = -8$. Como nos sirve solo el resultado positivo para despejar y, tenemos que $y = \pm 2$, de la cual consideramos $y = 2$. Luego, el área buscada es

$$\begin{aligned} A' &= \int_0^2 \sqrt{8-y^2} - \frac{y^2}{2}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^2 \sqrt{8-y^2}\mathrm{d}y - \frac{2^3}{6} \end{aligned}$$

Para calcular esta integral hacemos la sustitución $y = 2\sqrt{2}\sin(t) \to \mathrm{d}y = 2\sqrt{2}\cos(t)\,\mathrm{d}t$. Con ello,

$$\begin{aligned} A' &= 8\int_0^{\pi/4} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t - \frac{4}{3} \\ &= 8\int_0^{\pi/4} \cos^2(t)\,dt - \frac{4}{3} \\ &= 4\int_0^{\pi/4} 1 + \cos(2t)\,dt - \frac{4}{3} \\ &= 4\left[1\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \frac{1}{2}\sin(2t)\Big|_0^{\pi/4}\right] - \frac{4}{3} \\ &= 4\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{3} \\ &= \pi + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Es decir, $A_1 = 2\pi + \dfrac{4}{3}$. Considerando que $A_\odot = 8\pi$ tenemos finalmente que

$$\boxed{\Re = \frac{2\pi + \frac{4}{3}}{6\pi - \frac{4}{3}} = \frac{\pi + \frac{2}{3}}{3\pi - \frac{2}{3}}}$$

Problema 5.4: *(I3-2013-1)* Encuentre el área encerrada entre las curvas $y = x^2 - 6x + 10$ e $y = 6x - x^2$.

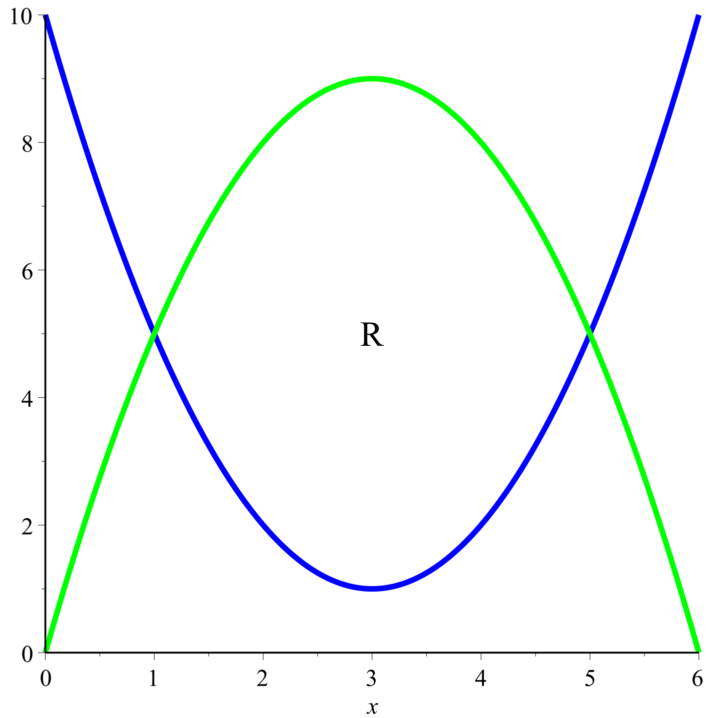
Solución:

Primero identifiquemos adecuadamente las curvas para hacer el gráfico. Por completación de cuadrados:

$$x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1$$

$$6x - x^2 = 9 - 9 + 6x - x^2 = 9 - (x-3)^2$$

Es decir, ambas son parábolas con vértices en $(3,1)$ y $(3,9)$ respectivamente. Graficando, se identifica inmediatamente la región $\mathcal{R}$:



Adicionalmente, notamos que en el extremo superior acota la curva $9 - (x-3)^2$ y en el extremo inferior la curva $(x-3)^2 + 1$. Podemos integrar sin mayor dificultad en el eje x, de modo que

$$\mathrm{d}A = \left[9 - (x-3)^2 - (x-3)^2 - 1\right] \mathrm{d}x$$

$$\rightarrow A = \int_a^b \left[9 - (x-3)^2 - (x-3)^2 - 1\right] \mathrm{d}x$$

donde a y b vienen dados por ambas intersecciones de las curvas, i.e.

$$9 - (x-3)^2 = (x-3)^2 + 1$$

$$\rightarrow (x-3)^2 = 4 \rightarrow x = 3 \pm 2$$

Es decir, $a = 1$ y $b = 5$. De esta forma,

$$\begin{aligned} A &= \int_1^5 8 - 2(x-3)^2 \, dx \\ &= 32 - 2\frac{(x-3)^3}{3}\Bigg|_1^5 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{A = \frac{64}{3}}$$

Problema 5.5: *(I3-2013-2)* Calcule el área de la región plana comprendida entre las curvas

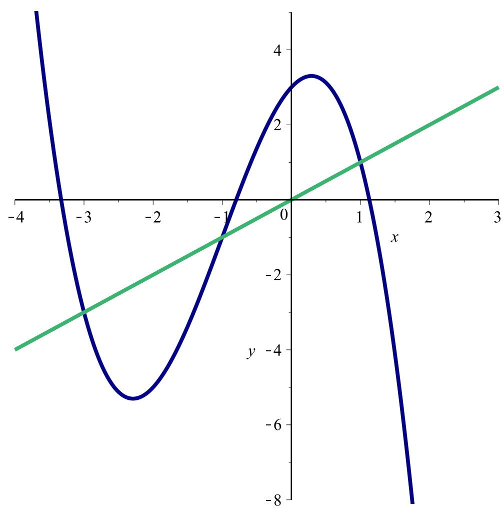
$$y + 1 = 5\,(x+1) - (x+1)^3 \quad \text{e} \quad y = x$$

Solución:

Primero debiésemos partir por graficar la situación para comprender lo que ocurre. Partamos de la gráfica de:

$$y = 5x - x^3 = x\left(5 - x^2\right)$$

Mediante el análisis de signos se puede esbozar el gráfico resultante facilmente, tal como se hace en los cursos de precálculo. Ahora bien, la primera curva del enunciado resulta de tomar esta gráfica y desplazarla una unidad a la izquierda y una unidad hacia abajo. Dado que $y = x$ es muy fácil de graficar, la gráfica resultante es:



Resulta sencillo notar que el área resultante corresponde a aquella de ambos lóbulos. El área total se escribe como dos integrales, una de la primera a la segunda intersección y la otra de la segunda intersección a la tercera.

Pues bien, debemos calcular las 3 intersecciones de ambas curvas. Es decir, como $x = y$ entonces las coordenadas x satisfacen la ecuación

$$x + 1 = 5\,(x+1) - (x+1)^3$$

Hagamos $u = x + 1$, con lo cual la ecuación queda

$$u = 5u - u^3 \to u^3 - 4u = 0 \to u\left(u^2 - 4\right) = 0$$

Luego la soluciones son $u = 0$, $u = -2$ y $u = 2$ con lo cual $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 1$. Del gráfico se deduce que:

$$A = \int_{-3}^{-1} x - 5\,(x+1) + (x+1)^3 + 1\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} 5\,(x+1) - (x+1)^3 - 1 - x\,\mathrm{d}x$$

Integrando las funciones polinomiales (el procedimiento es sencillo y se deja propuesto al lector), concluimos que:

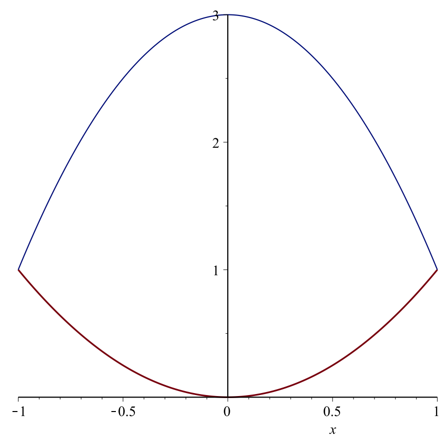
$$\boxed{A = 8}$$

5.2. Cálculo de volúmenes

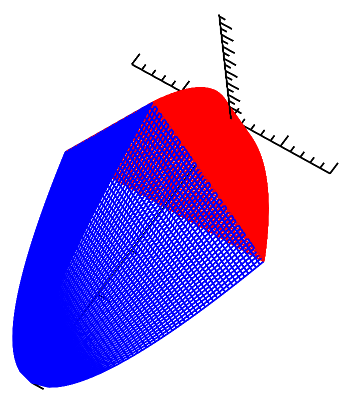
Problema 5.6: La base de un sólido es la región acotada por las parábolas $y = x^2$ e $y = 3 - 2x^2$ y sus secciones perpendiculares al eje Y son triángulos equiláteros. Hallar el volumen del sólido.

Solución:

El área de la región basal es sencilla de graficar considerando que son parábolas:



De esta forma, el gráfico visto desde de arriba y con cada una de las regiones que lo delimitan luce asi:



Sabemos luego que el volumen viene dado por

$$V = \int \mathrm{d}V$$

donde $\mathrm{d}V = A(y)\mathrm{d}y$. Cabe notar que esta es una aproximación razonable, ya que $A(y)$ representaria un elemento de base y dy viene a actuar como elemento infinitesimal de altura. Con ello, la integral nos permite calcular el volumen exacto. Escogimos dejar el área como una función de y ya que depende de la posición que estemos en el eje y el área de dicho perfil (por la definición del enunciado).

Notamos también que como la región está delimitada por parábolas diferentes, entonces $A(y)$ tendrá un comportamiento a tramos según la región en la que se encuentre. Es evidente entonces que lo primero que urge determinar es $A(y)$. Esto no es tan complicado si consideramos que dicha área es un triángulo equilátero, cuya área viene dada por:

$$A_{\triangle} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

donde ℓ representa el lado. En este caso, $\ell = \ell(y)$ y viene dada por la distancia entre los puntos de la parábola. Esto es para el área el azul (1),

$$\ell_1(y) = 2x = 2\sqrt{y}$$

Es decir,

$$A_1(y) = 2\sqrt{3}y$$

Análogamente,

$$A_2(y) = 2\sqrt{3}x^2 = \sqrt{3}(3-y)$$

La siguiente pregunta es, ¿dónde ocurre el cambio de comportamiento? Es decir, ¿dónde pasamos de consider de A_1 a A_2? Evidentemente en la intersección de las parábolas. Es decir, debemos resolver la ecuación:

$$3 - 2x^2 = x^2 \to x^2 = 1 \to x = \pm 1$$

Luego, es evidente que $y = 1$ es el punto indicado. Comenzamos a integrar desde $y = 0$ y terminamos en el vértice de la parábola superior, $y = 3$. Con ello,

$$\begin{aligned} V &= 2\sqrt{3}\int_0^1 y\mathrm{d}y + \sqrt{3}\int_1^3 (3-y)\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3}\left(3\cdot 2 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{3}(6-4) \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Es decir, el volumen pedido corresponde a

$$\boxed{V = 3\sqrt{3}}$$

Problema 5.7: La base de un sólido es un círculo de radio 1 y sus secciones perpendiculares a un diámetro dado del círculo son sectores parabólicos cuya altura es igual a la base. Hallar el volumen del sólido.

Solución:

La base del sólido es trivial de graficar, lo que no es tanto son sus sectores parabólicos. Para ello, veamos qué es lo que necesitamos:

- Parábolas en función de x (o de y por simetría, usamos la variable que acostumbramos).

- Sus raíces pasarán por la circunferencia. Es decir, las raíces de esta deben estar en $x_1 = -\sqrt{1-y^2}$ y $x_2 = \sqrt{1-y^2}$.
- La altura de la parábola nos dice cuando debe valer para $x = 0$, pues la altura nos indica el vértice y por comodidad ubicamos este en el eje y para todas las parábolas.

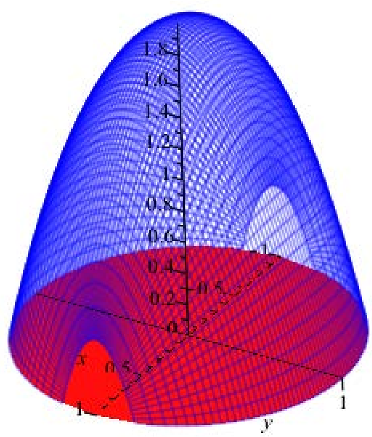
Sabemos que la parábola será de la forma:

$$z = a\,(x - x_1)\,(x - x_2) \xrightarrow{x=0} 2\sqrt{1-y^2} = a x_1 x_2$$

Despejando,

$$a = -\frac{2}{\sqrt{1-y^2}}$$

de esta forma garantizamos que la concavidad sea efectivamente hacia abajo. Con estas consideraciones, el gráfico generado es como el de la siguiente figura:



Notar que el programa no pudo graficar las parábolas de los bordes producto de las singularidades que allí se producen.

De esta forma,

$$V = \int \mathrm{d}V$$

donde $\mathrm{d}V = A\,(y)\,\mathrm{d}y$ con $A\,(y)$ representando el área de la parábola con y dado. Esto es relativamente sencillo:

$$\begin{aligned} A\,(y) &= -\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\sqrt{1-y^2}} \left(x - \sqrt{1-y^2}\right)\left(x + \sqrt{1-y^2}\right) dx \\ &= \frac{8}{3}\left(1 - y^2\right) \end{aligned}$$

Observe lo razonable de este resultado: si $y = 1$ el área evidentemente será cero ya que la parábola estará "muy cerrada". Adicionalmente, el área siempre decrece a medida que nos alejamos de $y = 0$. Finalmente,

$$V = \frac{8}{3}\int_{-1}^{1}\left(1 - y^2\right) \mathrm{d}y$$

Los extremos de integración se determinaron a partir de los extremos de la circunferencia en y (y no puede ser mayor/menor que ± 1 por el radio). Luego,

$$V = \frac{8}{3}(1+1) - \frac{8}{3} \times \frac{2}{3} \to \boxed{V = \frac{32}{9}}$$

Problema 5.8: [**Propuesto**] Calcule el volumen de intersección de los cilindros:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\} \\ \mathcal{C}_2 &= \left\{(x,y,z) \mid x^2 + z^2 \leq 1\right\} \end{aligned}$$

5.3. Sólidos de revolución

5.3.1. En torno al eje X y al eje Y: fórmula directa

Problema 5.9: Considere la región $\mathcal{R}$ encerrada por las rectas $x = 0$, $y = 1$ y la curva $y = \sin(x)$ si $x > 0$.

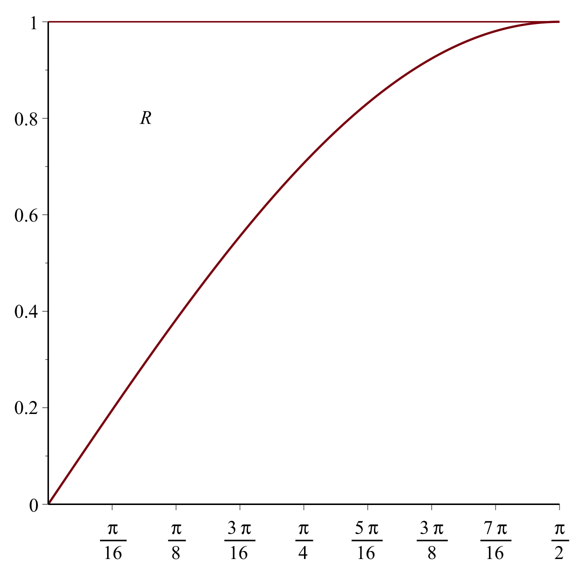
(a) Grafique y determine explícitamente $\mathcal{R}$.

(b) Calcule el área de $\mathcal{R}$.

(c) Calcule el sólido de revolución generado en torno al eje x y en torno al eje y.

Solución:

(a) Graficando todos los elementos dados concluimos que la región encerrada es aquella con la R encima.

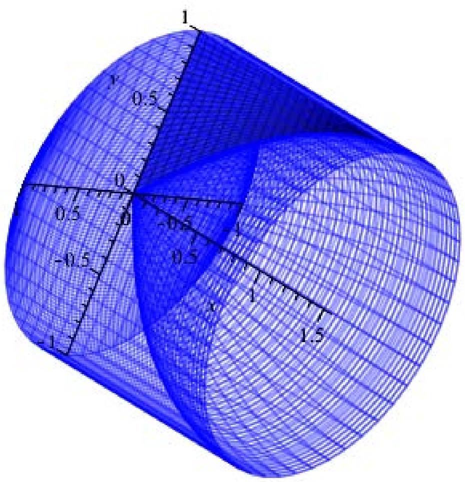


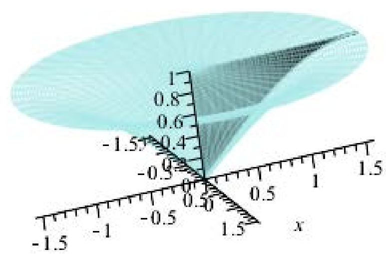
(b) El área de $\mathcal{R}$ viene dada por

$$
\begin{aligned}
A_{\mathcal{R}} &= \int \mathrm{d}A = \int_0^{\pi/2} 1 - \sin(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2} + \cos(x)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2} - \cos(0)
\end{aligned}
$$

$$
\rightarrow \boxed{A_{\mathcal{R}} = \frac{\pi}{2} - 1}
$$

(c) Los gráficos generados al revolucionar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje x y al eje y son respectivamente:





Para calcular la revolución en torno al eje x consideramos que el volumen viene dado por:

$$
V_y = \int_0^{\pi/2} \pi \left(1^2 - \sin^2(x)\right) \mathrm{d}x
$$

Observamos que esto es equivalente a calcular el volumen del cilindro y restarle el volumen de revolución generado por la curva $\sin(x)$ en torno al eje y (algo razonable). De esta forma,

$$
\begin{aligned}
V_x &= \frac{\pi^2}{2} - \pi \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} 1 - \cos(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} + \cancel{\frac{\pi}{4}\sin(2x)\Big|_0^{\pi/2}} \\
&= \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}
$$

Análogamente, como $\sin(x)$ es una función inyectiva, podemos calcular sin mayores dificultades el volumen en torno al eje Y, lo cual nos dará de hecho un resultado exacto:

$$V_y = \pi \int_0^1 x^2 \mathrm{d}y$$

pero $y = \sin(x) \rightarrow dy = \cos(x)\, dx$. Mediante esta sustitución:

$$V_y = \pi \int_0^{\pi/2} x^2 \cos(x)\, \mathrm{d}x$$

Esta integral se calcula fácilmente por partes. Ya que las técnicas de cálculo son conocidas, nos remitimos a entregar el resultado:

$$V_y = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi$$

Es decir,

$$\boxed{V_x = \frac{\pi^2}{4}} \quad \text{y} \quad \boxed{V_y = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi}$$

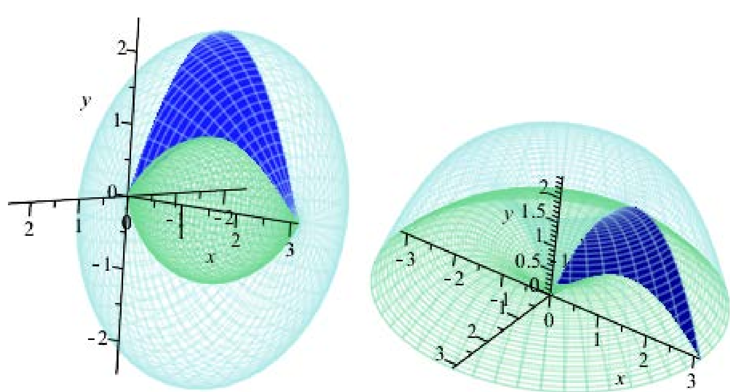
Problema 5.10: Considere las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$. Para la región $\mathcal{R}$ del primer cuadrante definida por

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in [0, \pi] \wedge y \in [f(x), g(x)]\right\}$$

Calcular el área de $\mathcal{R}$ y calcular los volúmenes de los sólidos generados por la rotación de $\mathcal{R}$ en torno al eje OX y en torno al eje OY.

Solución:

Se grafica $\mathcal{R}$ y los sólidos generados al revolucionar en torno al eje x y al eje y respectivamente. La tapa superior se marca en turquesa y la tapa inferior en color agua marina:



El enunciado es directo en cuanto a cómo tenemos que calcular el área de la región $\mathcal{R}$: $f(x)$ por abajo y $g(x)$ por arriba. Como no tenemos problemas con las curvas, integramos en todo el dominio: de 0 a π. Es decir,

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{R}} &= \int_0^{\pi} \pi x - x^2 - \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} + \cos(x)\Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^3}{6} - 1 - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{A_{\mathcal{R}} = \frac{\pi^3}{6} - 2}$$

El volumen en torno al eje x se calcula por simple superposición:

$$V_x = \pi \int_0^{\pi} \left[\left(\pi x - x^2\right)^2 - \sin^2(x)\right] \mathrm{d}x$$

Esta integral, si bien es extensa, su cálculo es prácticamente directo si consideramos que $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$. Con ello,

$$\boxed{V_x = \frac{\pi^2}{30}\left(\pi^4 - 15\right)}$$

Por otra parte, para calcular el volumen en el eje x, debemos notar que ya no podemos hacerlo por la fórmula directa ya que ninguna de las dos funciones es inyectiva. Por esta razón debemos utilizar el método de los cascarones cilíndricos. Esto es, consideramos cilindros perpendiculares al eje x, cada uno tiene su altura determinada por la diferencia de alturas entre las curvas y su espesor por un diferencial de espesor dx. Es esperable que la suma de estos cascarones de el volumen completo en torno al eje y. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}V &= \text{área cascarón} \times \text{espesor} \\ &= 2\pi x \left[g(x) - f(x)\right] \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Con ello,

$$V_y = 2\pi \int_0^{\pi} x\left[\pi x - x^2 - \sin(x)\right] \mathrm{d}x$$

Esta integral también es de cálculo directo. Para integrar $x\sin(x)$solo es necesario hacer integración por partes. De esta forma,

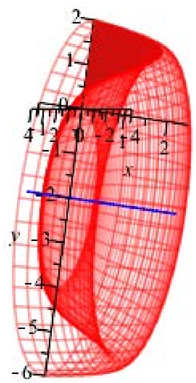
$$\boxed{V_y = \frac{\pi^5}{6} - 2\pi^2}$$

5.3.2. Por cascarones cilíndricos

Problema 5.11: Utilizando capas cilíndricas, calcular el volumen de revolución que se consigue al rotar la porción de plano del primer cuadrante encerrada por las curvas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 2y^3 - y^4$ en torno a la recta de ecuación $y = -2$.

Solución:

La región de revolución (en rojo) junto al sólido generado al revolucionarla en torno al eje $y = -2$ (paralelo a x) corresponde a:



Para obtener la región basta notar que $x = y^3 (2 - y)$ y tomamos una tabla de signos para bosquejar, evidentemente observando que ahora x es una función de y y no al revés como hemos hecho habitualmente a lo largo del curso.

El hecho que complica de todo esto es que el eje de revolución ya no es el eje x, si no que un eje arbitrario. Esto no es del todo complicado si pensamos que el volumen seguirá siendo el mismo a pesar de que desplacemos la figura. En otras palabras: desplacemos la curva $x = 2y^3 - y^4$ hacia arriba de modo que calcen los ejes. De esta forma, la nueva curva (en analogía a un desplazamiento hacia la derecha), será

$$x = 2\,(y-2)^3 - (y-2)^4$$

Ahora debemos calcular el volumen de revolución de esta figura en torno al eje x. Del gráfico se ve rápidamente que tendremos que hacerlo mediante cascarones cilíndricos, ya que $x\,(y)$ no es una función inyectiva. Entonces aplicamos al fórmula de cascarones cilíndricos, pero ahora integrando con respecto a x (y cuidando las nuevas raíces, que son los extremos de integración):

$$V_x = 2\pi \int_2^4 y \left[2\,(y-2)^3 - (y-2)^4 - 0\right] \mathrm{d}y$$

Trasladamos los extremos de integración sin mayor dificultad (en analogía a la sumatoria o mediante $u = y - 2$):

$$V_x = 2\pi \int_0^2 (y+2)\left(2y^3 - y^4\right) \mathrm{d}y$$

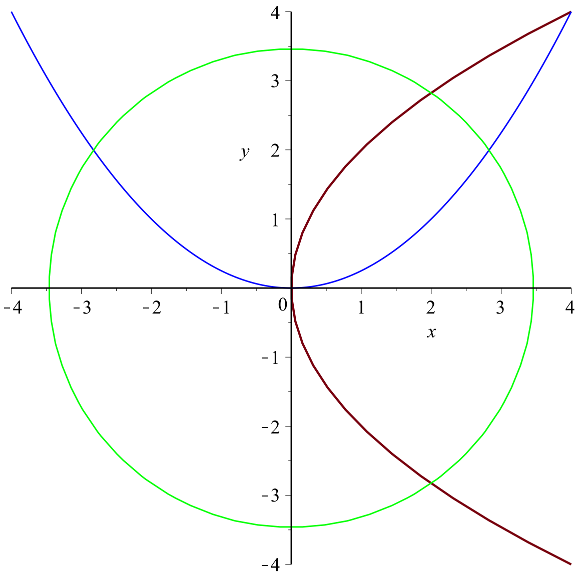
De aquí observamos que la fórmula es la misma, y solo se producirá una variación en la componente radial en los ejercicios de este tipo. Este resultado se calcula finalmente por integración directa (polinomial):

$$\therefore\ \boxed{V_x = \frac{32\pi}{3}}$$

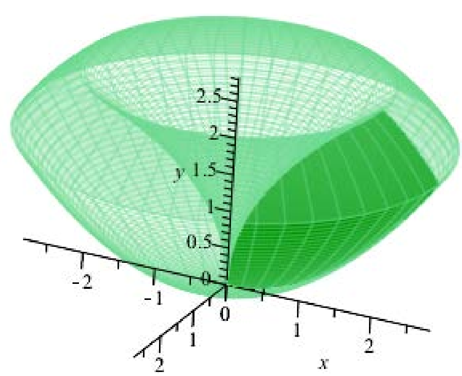
Problema 5.12: Hallar el volumen del sólido obtenido cuando la región del primer cuadrante acotada por las curvas $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$ y $x^2 + y^2 = 12$ gira alrededor del eje y.

Solución:

Lo primero que debemos hacer es determinar la región de revolución. Para ello graficamos las dos curvas considerando que las dos primeras son parábolas (de hecho son la misma parábola pero con distinta dependencia) y la última es una circunferencia de radio $2\sqrt{3}$. Con estas consideraciones, los gráficos son más o menos como sigue: y la región es muy fácil de determinar:



Al revolucionar la región, obtenemos una gráfica como la siguiente:



Luego, solo nos queda integrar. El resultado de hacer esto mediante fórmula directa en el eje y nos resultará complicado ya que no se generará una figura como la que queremos de forma directa. Por esta razón es que usaremos integración mediante cascarones cilíndricos, dividiendo la región en 2: $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ donde $\mathcal{R}_1$ es la región delimitada hasta que la curva verde se intersecta con la roja y $\mathcal{R}_2$ lo restante. La justificación de esta división pasa porque las alturas de los cascarones serán variables según la curva delimitada.

Simplemente nos falta hacer uso de las fórmulas:

$$V_{\mathcal{R}_1} = 2\pi \int_0^{\bar{x}} x \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}x$$

¿Cuánto vale $\bar{x}$? Queda determinado por el punto de intersección de ambas curvas:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 12 \\ y^2 &= 4x \end{aligned}$$

Restando:

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \to (x-2)(x+6) = 0$$

Evidentemente la única solución que nos sirve es la positiva, $x = 2$. Con ello,

$$V_{\mathcal{R}_1} = 2\pi \int_0^2 x \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}x = 2\pi \left(\frac{8}{5}\sqrt{2} - 1\right)$$

donde se calculó la integral por simple integración de funciones potencia. De forma análoga,

$$V_{\mathcal{R}_2} = 2\pi \int_2^{\tilde{x}} x \left(\sqrt{12 - x^2} - \frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}x$$

$\tilde{x}$ viene determinado por el sistema

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 12 \\ x^2 &= 4y \end{aligned}$$

Luego,

$$y^2 + 4y - 12 = 0 \to (y-2)(y+6) = 0$$

es decir $y = 2$ y con ello $x = 2\sqrt{2}$. Haciendo la sustitución $u = x^2$ obtenemos una fórmula directa de integrar:

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{R}_2} &= \pi \int_4^8 \left(\sqrt{12 - u} - \frac{u}{4}\right) \mathrm{d}u \\ &= 2\pi \left(\frac{16}{3}\sqrt{2} - \frac{17}{3}\right) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$V = V_{\mathcal{R}_1} + V_{\mathcal{R}_2} \to \boxed{V = 2\pi \left(\frac{104}{15}\sqrt{2} - \frac{30}{13}\right)}$$

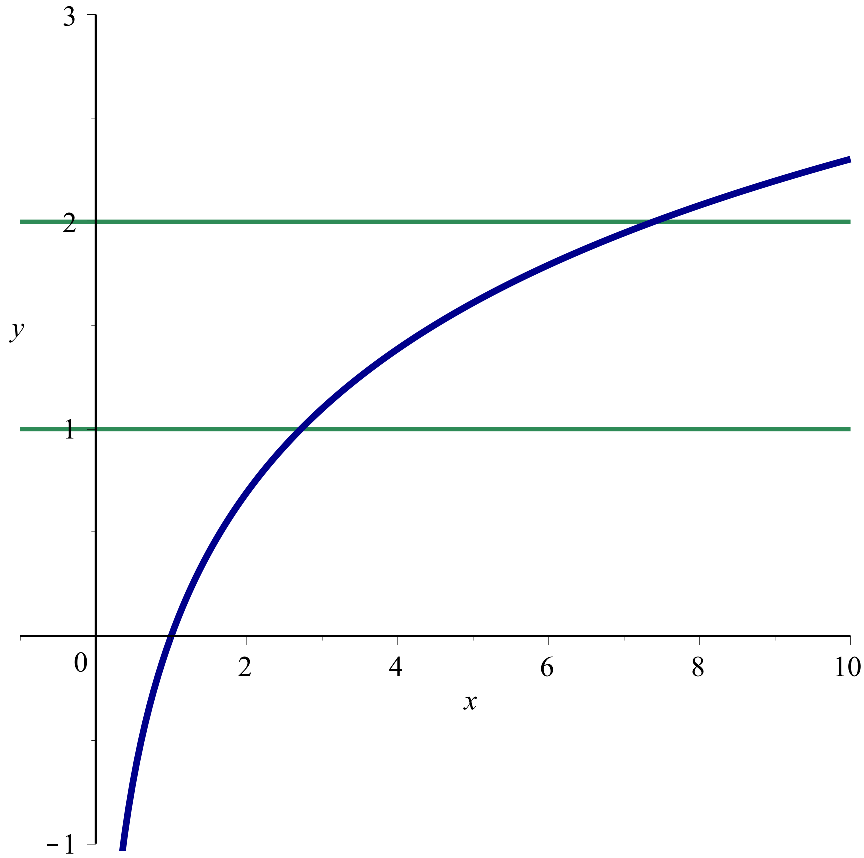
Problema 5.13: Considere la región delimitada por las curvas de ecuaciones $y = \ln(x)$, $y = 1$, $y = 2$ y $x = 0$.

(a) Dibuje y calcule el área de la región.

(b) Calcule el volumen del sólido de revolución generado al rotar dicha región en torno a la recta $x = -1$.

Solución:

(a) La región viene dada por aquello encerrado entre las tres curvas, i.e:



Podemos integrar en y ya que se simplifican los cálculos, de modo que el área viene dada por:

$$\boxed{A = \int_1^2 e^y \mathrm{d}y = e^2 - e}$$

(b) Podemos integrar mediante el método de las secciones transversales en y, lo cual es posible dada la naturaleza de la región. De esta forma,

$$V_y = \pi \int_1^2 (e^y + 1)^2 - 1 \, \mathrm{d}y = \pi \int_1^2 \left(e^{2y} + 2e^y\right) \mathrm{d}y$$

$$\rightarrow \boxed{V_y = \pi \left(\frac{e^4}{2} + \frac{3e^2}{2} - 2e \right)}$$

5.4. Una aproximación intuitiva: series de Fourier

Problema 5.14: [**Propuesto**] Un *buen producto interno* se define como una operación $\langle \cdot, \cdot \rangle : A \times A \to \mathbb{C}$ tal que es lineal en el segundo argumento, semidefinido positivo y hermíticamente conmutativo ($\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$).

(a) Pruebe que $\langle f(x), g(x) \rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) g(x) \mathrm{d}x$ es un buen producto interno.

(b) Muestre que el conjunto $\mathcal{L} = \{\cos(mx), \sin(nx)\}$ forma un conjunto ortogonal para $m, n \in \mathbb{Z}$. Calcule la norma para cada uno de los elementos de esta base.

(c) Dado que el conjunto anterior se puede entender intuitivamente como una base (esto no lo demostraremos), en particular de funciones periódicas, es razonable pensar que una función periódica cualquiera de período 2π puede escribirse como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \cos(0) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Es decir, una combinación lineal de los infinitos elementos de la base. Usando los resultados anteriores en analogía a los resultados de álgebra lineal, calcule explícitamente a_0 y a_k y b_k para todo $k \in \mathbb{N}$.[7]

(d) Calcule la expansión en series de Fourier para la función periódica de período 2π tal que $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$.

Este resultado inicial es sumamente importante no solo en la teoría, ya que los senos y cosenos son los elementos básicos para modelar una onda y por lo tanto representan frecuencias. De esta forma, la serie de Fourier es el punto de partida en la operación de tomar la base del tiempo (x) y llevar la misma función al espacio de las frecuencias. Aquí las aplicaciones prácticas son innumerables: tratamiento de audio, tratamiento de imágenes, estudio del comportamiento de lentes, ecualizadores, momentum de partículas subatómicas, etc.

Solución:

Por propósitos pedagógicos, este problema propuesto sí será solucionado.

(a) Debemos demostrar que este producto interno cumple todas las propiedades. Primero demostrar linealidad en el segundo argumento. Es decir, si α y β son constantes complejas, entonces:

$$\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle f, h \rangle$$

Esto es directo de la definición de este producto interno y de la linealidad de la integral:

$$\begin{aligned}
\langle f, \alpha g + \beta h \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \left[\alpha g(x) + \beta h(x)\right] \mathrm{d}x \\
&= \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) g(x)\, dx + \beta \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) h(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle f, h \rangle
\end{aligned}$$

[7] De esta forma, podemos calcular la *expansión en series de Fourier* de una función: expresarla como una combinación infinita de senos y cosenos cuya frecuencia es múltiplo de la frecuencia fundamental: 1.

Probamos conmutatividad hermítica, esto es:

$$\begin{aligned}
\overline{\langle g,f\rangle} &= \overline{\int_{-\pi}^{\pi}\bar{g}\left(x\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x}\\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x\\
&= \langle f,g\rangle
\end{aligned}$$

Demostramos que es semidefinida positiva: es decir, por demostrar que $\langle f,f\rangle\geq 0$ y $\langle f,f\rangle=0\leftrightarrow f\equiv 0$. Observemos que:

$$\langle f,f\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\bar{f}\left(x\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\left|f\left(x\right)\right|^2\mathrm{d}x$$

El módulo de cualquier objeto matemático será siempre positivo. La única forma de que esta integral se anule, por lo tanto, es que $f\left(x\right)=0$ para todo $x\in[-\pi,\pi]$. Es decir, $f\left(x\right)\equiv 0$.

Con esto hemos demostrado todas las propiedades y que por lo tanto $f\left(x\right)$ es un buen producto interno. ■

Una observación: Observe que las funciones se están comportando como vectores (y de ahí que se habla de espacios vectoriales o *espacios de Hillbert*, que resultan no ser otra cosa que una extensión de los conceptos de dimensión finita a dimensión infinita). Hemos definido su producto punto para caso de una forma muy interesante:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=1}^{n}f\left(c_k\right)g\left(c_k\right)\Delta x_k$$

Note el parecido entre esto y el producto de vectores de un espacio de dimensión finita $\mathbb{R}^n$: $\vec{x}\cdot\vec{y}=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$.

(b) Para demostrar esto basta demostrar que una combinación cualquiera de elementos distintos de la base da cero y si son los mismos elementos dan algo distinto de cero. Vamos haciendo todas las combinaciones (nótese que la conjugación compleja es redundante ya que estamos usando funciones reales):

- $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(mx\right)\cos\left(nx\right)\mathrm{d}x$. Si $m\neq n$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(mx\right)\cos\left(nx\right)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left[\left(m+n\right)x\right]-\cos\left[\left(m-n\right)x\right]\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{m+n}\sin\left[\left(m+n\right)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2}\frac{1}{m-n}\sin\left[\left(m-n\right)x\right]\Bigg|_{0}^{\pi}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Es fácil ver que estos términos se anulan, ya que son múltiplos enteros de π, y la función seno siempre se anula en ellos. Si $m = n$, estamos integrando:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos(2mx)}{2} \mathrm{d}x \\
&= \pi + \cancel{\frac{1}{2}\frac{1}{2m}\sin(2mx)\Big|_{-\pi}^{\pi}} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Los términos con seno se anulan ya que son solo múltiplos enteros de π.

- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$. Para cualquier combinación de m y n estamos integrando una función impar entre extremos iguales. Por lo tanto, por simetría la integral es inmediatamente cero en cualquier caso.

- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x$. Si $m \neq n$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos[(m-n)x] - \cos[(m+n)x]\,\mathrm{d}x \\
&= 0
\end{aligned}$$

por la misma razón que en el caso de los cosenos. Para $m = n$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2mx)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi
\end{aligned}$$

nuevamente por la misma razón que antes.

En todas las expansiones se hizo uso de las fórmulas de prostaféresis:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)] \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)] \\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]
\end{aligned}$$

Todos estos resultados se conocen como **relaciones de ortogonalidad** en funciones trigonométricas y son el primer resultado importante en el desarrollo de la *Trasnformada de Fourier*, un refinamiento del resultado teórico que ahora estamos obteniendo. En resumen,

$$\begin{aligned}
\langle \cos(mx), \cos(nx) \rangle &= \pi\delta_{mn} \\
\langle \sin(mx), \cos(nx) \rangle &= 0 \\
\langle \sin(mx), \sin(nx) \rangle &= \pi\delta_{mn}
\end{aligned}$$

donde δ_{mn} se conoce como *delta de Kronecker* y se define como

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

Estos resultados prueban que el conjunto dado es ortogonal (toda combinación de elementos da normal) y la norma de los elementos es $\sqrt{\pi}$ (se desprende inmediatamente del caso $m = n$). ■

(c) Observe que estamos escribiendo $f(x)$ como una combinación lineal (infinita) de senos y cosenos. En álgebra lineal de dimensión finita tenemos que si

$$\vec{u} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$$

donde $\vec{x}, \vec{y}$ son ortogonales, al aplicar el producto punto por $\vec{x}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{x} = \alpha\vec{x} \cdot \vec{x} + \beta\cancel{\vec{y} \cdot \vec{x}} \to \alpha \left\|\vec{x}\right\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{x}$$

En dimensión infinita estamos interesados en conocer el aporte de los ponderadores. Para el ejemplo anterior:

$$\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{\left\|\vec{x}\right\|^2}$$

¿Cómo procedemos en dimensión infinita? ¡Exactamente igual! Solo que ahora estamos tomando el producto interno que acabamos de definir. Tenemos la combinación lineal de elementos ortogonales:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} \cos(0) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

¿Qué pasa si queremos a_m, el ponderador de $\cos(mx)$? Tomamos el producto interno $\langle \cdot, \cos(mx) \rangle$. Tenemos ya garantizado que todos los demás términos se anularán. Es decir, obtendremos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \cos(mx)\, \mathrm{d}x = \pi a_m \to \boxed{a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \cos(mx)\, \mathrm{d}x}$$

Análogamente para los b_n, tomamos el producto interno ahora con los senos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x = \pi b_n \to \boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x}$$

Observe que acabamos de determinar el valor de los factores ponderadores en la combinación lineal. Es decir, a través de estos coeficientes sabemos una medida directa de cuánto aporta a la función total, $f(x)$, la función seno o coseno respectiva. Si entendemos los cosenos y los senos como los componentes básicos de ondas con su frecuencia respectiva, concluimos que hemos acabado de determinar cuánto aporta cada múltiplo de la frecuencia fundamental $(1/2\pi)$ a la función $f(x)$ de periodo 2π.

Notas adicionales: Este resultado anterior también lo podemos llevar a su forma compleja considerando las relaciones de Euler:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

donde nuevamente los c_k nos indican el aporte de cada una de estas exponenciales complejas (composición de senos y cosenos). El problema subsecuente es, ¿qué pasa si tenemos una función que no es periódica? Una función aperiódica se puede entender como una función de período infinito. Se puede ver gráficamente que a medida que vamos agrandando el período, la distancia entre los elementos c_k se hace cada vez menor, por lo que en infinito forman un continuo y con ello la sumatoria se convierte en una integral. Así es como se define la *Transformada de Fourier:*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)\, e^{i2\pi\xi x} \mathrm{d}\xi \rightarrow \boxed{F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i2\pi\xi x} \mathrm{d}x}$$

No se espera ver todos los desarrollos teóricos de esta transformada, solo se pretende mostrar cómo para cierto tipo de funciones, sin ser periódicas, se puede obtener el aporte de cada frecuencia para obtener la función. Tal como se describe en el enunciado, las aplicaciones de saber la composición en frecuencia facilitan muchísimo la comprensión de ciertos fenómenos en Física e Ingenieria. Más aun, este no es un solo artilugio matemático: la descomposición en frecuencias ocurre en lentes, en el oído humano y en muchas aplicaciones electrónicas y digitales.

(d) No tenemos más que hacer que integrar. Queremos determinar los a_m y b_n de modo tal que

$$x = \frac{a_0}{2}\cos(0) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

De esta forma,

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$$

por imparidad. Análogamente,

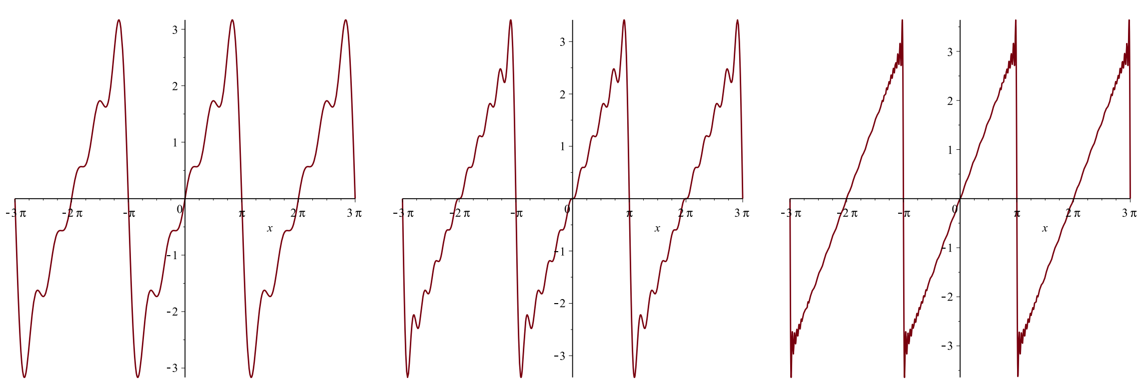
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2\left[\sin(\pi n) - \cos(\pi n)\, n\pi\right]}{\pi n^2} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{x_{[-\pi,\pi]} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)}$$

Para ilustrar esto, vamos viendo lo que ocurre con la sumatoria hasta un $k = M$ fijo y vemos qué pasa al ir aumentándolo. Es decir, estudiamos gráficamente el efecto del aumento de M en

$$f_M(x) = \sum_{k=0}^{M} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$



$M = 5$ $\qquad$ $M = 10$ $\qquad$ $M = 50$

Gráficamente se puede ver cómo a medida que M aumenta la función se parece cada vez más y más a la función periódica que definimos.

6. Problemas de alternativas

Los siguientes problemas se dejan planteados como una preparación para un examen en modalidad de alternativas. Se encuentran tanto preguntas de un nivel de dificultad histórico como preguntas de un nivel superior para el reforzamiento de conceptos importantes.

Observación: Una cantidad menor de problemas han sido adaptaciones a modalidad de selección múltiple o verdadero y falso de problemas vistos anteriormente.

6.1. Selección múltiple

1. El valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x + \sin(3x)}{19x - \sin(5x)}$ es

   (a) No existe.

   (b) 1/2

   (c) 1

   (d) 0

   (e) 5/18

2. Dado el límite $\lim_{x \to 2} 5x - 3 = 7$, el valor de δ tal que $|(5x-3)-7| < \frac{1}{10}$ si $|x-2| < \delta$ es:

   (a) $\dfrac{1}{2}$

   (b) $\dfrac{1}{50}$

   (c) $\dfrac{1}{10}$

   (d) $\dfrac{4}{5}$

   (e) $\dfrac{1}{7}$

3. El valor de b para el cual $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-b}{\sqrt{x+3}-2} - 4$ existe es:

   (a) -1

   (b) 0

   (c) 1

   (d) 4

   (e) No existe para ningún $b \in \mathbb{R}$.

4. El valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)}{1-\cos(x)}$ es:

(a) -1

(b) 0

(c) 1

(d) $\dfrac{1}{2}$

(e) No existe.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(10x)^2}{\sin(3x)^2+\sin(20x)^2} =$

(a) $\dfrac{10}{23}$

(b) $\dfrac{100}{409}$

(c) $\dfrac{1}{2}$

(d) $\dfrac{6}{23}$

(e) $\dfrac{36}{409}$

6. El valor de $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sin(\pi/4-x)}{1-\cot(x)}$ es:

(a) 1

(b) 0

(c) $-\dfrac{1}{2}$

(d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(e) No existe.

7. El valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ es:

(a) No existe

(b) $1/n$

(c) 1

(d) 0

(e) $1/(n+1)$

8. Dada la función $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor$, entonces:

   I. $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n + 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
   II $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.
   III. $f(x)$ es discontinua en $n \in \mathbb{Z}$ pues los límites laterales no coinciden.
   IV. $f(x)$ es continua para todo $n \in \mathbb{Z}$.

   Es o son verdaderas las siguientes afirmaciones:

   (a) Solo I
   (b) Solo II
   (c) I y III
   (d) II y IV
   (e) I, II y III

9. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1 - \sin(x)}{2x - \pi}\right) & \text{si } x \neq \pi/2 \\ \\ a & \text{si } x = \pi/2 \end{cases}$$

   entonces el valor de a para el cual f sea continua en $x = \pi/2$ es:

   (a) $-1/2$
   (b) $1/2$
   (c) 0
   (d) 2
   (e) $\pi/2$

10. Dada $f(x) = \begin{cases} a\dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$

   entonces la relación entre a y b para que f sea continua en $x = 0$ es:

   (a) $a = 4b$
   (b) $b = a/2$
   (c) $a = b$
   (d) $b = 4a$
   (e) $2a = b$

11. El mínimo número de raíces de la ecuación $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ en el intervalo $(0, 2)$ es:

   (a) 0
   (b) 1
   (c) 2
   (d) 3
   (e) Ninguna de las anteriores.

12. Si existe $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(3x+h) - f(3x)}{h}$, este corresponde a:

   (a) $f'(3x)$
   (b) $f'(x^3)$
   (c) $f'(x)$
   (d) $f'\left(\frac{3}{2}x^2\right)$
   (e) $\dfrac{1}{f'(3x)}$

13. Sea $f(x)$ una función continuamente diferenciable en todo $\mathbb{R}$. Considere la función:

$$\Phi(z) = \frac{f(z + \lambda h) - f(z - \lambda h)}{2h}$$

Entonces:

I. Si $\lambda = 0$, entonces $\lim_{h \to 0} \Phi(z)$ existe.
II. Si $\lambda \neq 0$, entonces $\lim_{h \to 0} \Phi(z)$ no existe.
III. $\lambda(z) = \lim_{h \to 0} \Phi(z)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Es o son verdaderas las siguientes afirmaciones:

   (a) Solo I.
   (b) Solo II.
   (c) Solo III.
   (d) I y II.
   (e) I y III.

14. Considere la función $f(x)$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + 4 & x < 0 \\ \\ a\left[\cos(3x) + 3\sin(x)\right] + b(x+1) & x \geq 0 \end{cases}$$

Entonces, los valores de a y b correctos para que $f(x)$ sea derivable en $x = 0$ son:

(a) $a = 2$ y $b = -2$.
(b) $a = -2$ y $b = 6$.
(c) $a = -2$ y $b = 2$.
(d) $a = 7$ y $b = -3$.
(e) Ninguna de las anteriores.

15. Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} a\dfrac{x-1}{x^2+1} + b & \text{si } x \leq 1 \\ \\ \sin(\pi x) + \lfloor x \rfloor & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

entonces:

I. Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces $f(x)$ es continua en $x = 1$.
II. $f(x)$ es discontinua para todo $x \in \mathbb{N}$ (**no** incluye al cero) para todo a, b.
III. Para $a = -\dfrac{\pi}{2}$ y b cualquiera $f(x)$ es diferenciable en $x = 1$.

Es o son verdaderas las siguientes afirmaciones:

(a) Solo I
(b) Solo III
(c) I y III
(d) I, II y III
(e) Ninguna de las anteriores.

16. Sea $f(x)$ una función continua en $\mathbb{R}$ con $f(0)=0$, se define

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\leq 0 \\ \\ ax+b & x>0 \end{cases}$$

entonces:

I) $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=0$.
II) g es continua en $x=0$ si y solo si $a=0$.
III) g es continua en $\mathbb{R}$ si y solo si $b=0$.

De las siguientes afirmaciones, son verdaderas:

(a) Solo I
(b) Solo II
(c) I y II
(d) I y III
(e) I, II y III

17. Sea $f(x)=\dfrac{1}{2}x|x|$, entonces:

I. $f(x)/x^2$ es continua en $x=0$.
II. $f(x)$ es diferenciable $\forall x\in\mathbb{R}$.
III. No existe $f''(0)$.

Es o son verdaderas las siguientes afirmaciones:

(a) Solo I
(b) Solo II
(c) II y III
(d) I, II y III
(e) Ninguna de las anteriores.

18. La ecuación de la recta tangente a la curva dada por la expresión $(x+1)\,y^2+\sin(xy)=1$ en el punto $x=0$, $y>0$ es:

(a) $\ell\,:\,y=-x+1$.
(b) $\ell\,:\,y=\dfrac{x}{3}+1$.
(c) $\ell\,:\,y=-\dfrac{x}{3}+1$.
(d) $\ell\,:\,y=1$.
(e) Ninguna de las anteriores.

19. Sea $f(x)$ una función tal que para todo x se cumple que $|f(x)| \leq x^2$, entonces:

    I. $f(0) = 0$.
    II. $f(x)$ es continua en $x = 0$.
    III. $f'(0) = 0$.

    Es o son verdaderas las siguientes afirmaciones:

    (a) Solo I
    (b) I y II
    (c) I y III
    (d) II y III
    (e) I, II y III

20. Si $h(x) = f(g(x))\, g(x)$ donde $f(2) = 3$, $f(5) = 1$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $f'(5) = 11$. Entonces, se cumple que

    (a) $h'(2) = 224$
    (b) $h'(2) = 59$
    (c) $h'(2) = 220$
    (d) $h'(2) = 55$
    (e) $h'(2) = 176$

21. Sean f y g funciones derivables e invertibles. La tabla adjunta muestra los valores de f, g y sus derivadas sobre algunos valores:

	f	g	f'	g'
1	3	2	4	1
2	1	3	3	2
3	2	4	2	4
4	4	1	1	2

    Entonces, el valor de $(g^{-1} \circ f)'(2)$ es:

    (a) $\dfrac{3}{2}$
    (b) 1
    (c) 3
    (d) $\dfrac{1}{2}$
    (e) $\dfrac{3}{4}$

22. El valor de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\cos(x)\right]^{x^2}$ es:

(a) $\left[\cos(x)\right]^{x^2-1} 2x\sin(x)$.

(b) $-\left[\cos(x)\right]^{x^2} \ln(\cos(x))\sin(x)$.

(c) $\left[\cos(x)\right]^{x^2} x\left[2\ln(\cos(x)) + \dfrac{x\sin(x)}{\cos(x)}\right]$.

(d) $-\left[\cos(x)\right]^{x^2} x\left[2\ln(\cos(x)) + \dfrac{x\sin(x)}{\cos(x)}\right]$.

(e) $-\left[\cos(x)\right]^{x^2} x\left[2\ln(\sec(x)) + \dfrac{x\sin(x)}{\cos(x)}\right]$.

23. Si $f(x) = x^{\sin(x)}$, entonces $f'(x)$ es:

(a) $x^{\cos(x)}$

(b) $\cos(x)\ln(x)$

(c) $x^{\sin(x)}\left[\cos(x)\ln(x) + \dfrac{\sin(x)}{x}\right]$

(d) $x^{\sin(x)}\left[\sin(x)\ln(x)\right]$

(e) $\sin(x)\, x^{\sin(x)-1}$

24. La derivada de la función $f(x) = \arctan(2x)\, x^{\ln\left(x^2\right)}$ es

(a) $x^{\ln\left(x^2\right)}\left\{\dfrac{2}{1+4x^2} + \dfrac{\arctan(2x)}{x}\left[2\ln(x) + \ln\left(x^2\right)\right]\right\}$

(b) $x^{\ln\left(x^2\right)}\left\{\dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{\arctan(2x)}{x}\left[2\ln(x) + \ln\left(x^2\right)\right]\right\}$

(c) $x^{\ln\left(x^2\right)}\left\{\dfrac{2}{1+x^2} + \dfrac{\arctan(2x)}{x}\left[\ln(x) + \ln\left(x^2\right)\right]\right\}$

(d) $x^{\ln\left(x^2\right)}\left(\dfrac{2}{1+4x^2}\right) + \dfrac{\arctan(2x)}{x}\left[2\ln(x) + \ln\left(x^2\right)\right]$

(e) $x^{\ln\left(x^2\right)}\left\{\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{\arctan(2x)}{x}\left[\ln(x) + \ln\left(x^2\right)\right]\right\}$

25. Si $f(x) = \left[\arctan\left(\dfrac{2}{1+x^2}\right)\right]^3$ entonces, $f'(1) =$

(a) $-\dfrac{3\pi^2}{32}$

(b) $\dfrac{3\pi^2}{32}$

(c) $\dfrac{-3\pi^2}{64}$.

(d) $\dfrac{3\pi^2}{64}$.

(e) $\dfrac{3\pi^2}{16}$

26. Si $f(x) = \displaystyle\int_2^x \sqrt{t^3+1}\,dt$, entonces la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(2,0)$ está dada por:

(a) $3y - x + 6 = 0$

(b) $x = 2$

(c) $y = 0$

(d) $y - 3x - 2 = 0$

(e) $y - 3x + 6 = 0$

27. Sea $f(x) = \left(1+\sin^2 x\right)^{\int_2^x \sqrt{1+t^3}\,dt}$, entonces el valor de $f'(2)$ es:

(a) 1

(b) $1+\sin^2(2)$

(c) $\ln\left[2-\cos^2(2)\right]^3$

(d) $-\left(1+\sin^2(2)\right)^{-1} 2\sin(2)\cos(2)$

(e) $f'(x)$ no es diferenciable en $x = 2$.

28. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x)}{x}\right]^{1/x^2} =$

(a) $-1/6$

(b) $e^{-1/6}$

(c) $e^{-1/3}$

(d) 1

(e) Ninguna de las anteriores.

29. Considere la función $f(x)$ diferenciable tal que $\arctan[x + f(x)] + f(x) = \dfrac{\pi}{4}$. Entonces el valor de $f'(1)$ es:

   (a) 0
   (b) $-\dfrac{1}{4}$
   (c) $-\dfrac{1}{3}$
   (d) $-\dfrac{1}{2}$
   (e) -1

30. Dada la ecuación $f(x) + \dfrac{xf(x)}{1 + f(x)} = \dfrac{8}{3}$ y $f(1) = 2$, entonces $f'(1) =$

   (a) -5
   (b) $-\dfrac{1}{8}$
   (c) $-\dfrac{3}{5}$
   (d) -6
   (e) Ninguna de las anteriores.

31. La altura de un triángulo aumenta a razón 1 cm/min, mientras que su área lo hace a razón 2 cm^2/min. ¿A qué razón cambia la base del triángulo, cuando la lautra es 10 cm y el área es de 100 cm^2?

   (a) $\dfrac{8}{5}$ cm/min.
   (b) $\dfrac{3}{5}$ cm/min.
   (c) $-\dfrac{8}{5}$ cm/min.
   (d) $-\dfrac{3}{5}$ cm/min.
   (e) Ninguna de las anteriores.

32. Considere una función f tal que $f'(x) = \dfrac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$, entonces es siempre cierto que:

I. $f(x)$ tiene discontinuidades esenciales en $x=1$ y $x=4$.
II. $x=1$ y $x=4$ son puntos de inflexión para todo a, b.
III. Si $x_0 = 2$ es un punto de inflexión y $f'(x_0) = -1$, entonces $a=1$ y $b=0$.

Es o son ciertas las siguientes afirmaciones:

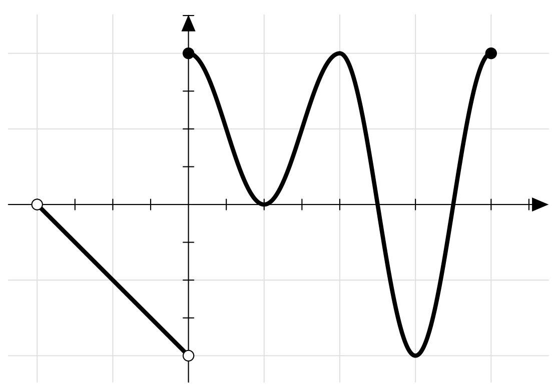
(a) Solo III
(b) I y II
(c) I y III
(d) I, II y III
(e) Ninguna de las anteriores.

33. Si $f(x) = x^4 - 4x^3$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

I) La función f no tiene máximos locales.
II) El mínimo de la función es 3.
III) La función tiene exactamente dos puntos de inflexión.

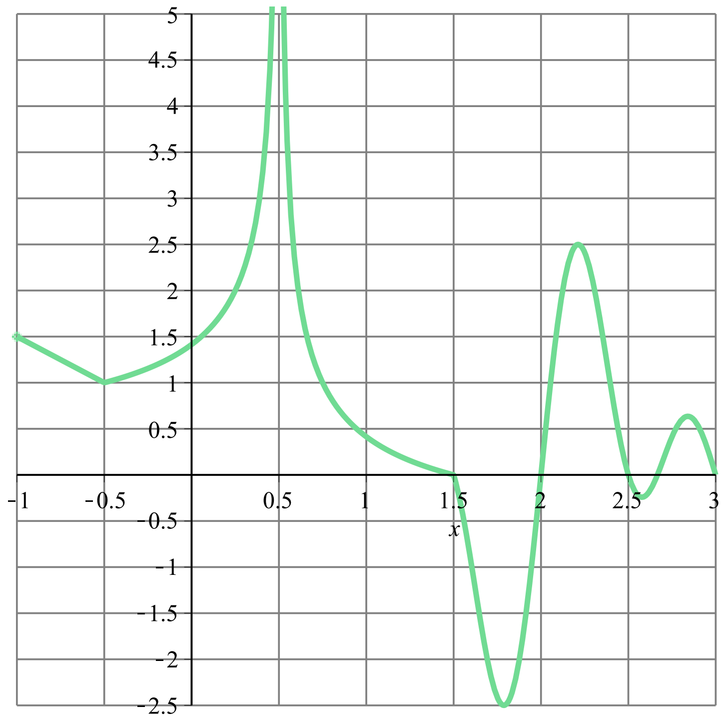
(a) Sólo I) y II).
(b) Sólo II) y III).
(c) Sólo I) y III).
(d) Todas I), II) y III).
(e) Ninguna de las afirmaciones es verdadera.

34. Si $f : (-2,4) \to \mathbb{R}$ es una función cuyo gráfica de la derivada se muestra a continuación, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?



(a) f tiene exactamente dos máximos locales en $(-2,4)$.
(b) La función f tiene un máximo local en $x=0$.
(c) La función f tiene exactamente cuatro puntos de inflexión.
(d) f es discontinua en $x=0$.
(e) Ninguna de las anteriores es verdadera.

Considere la función continua $f(x)$ diferenciable definida en $[0,3]$, tal que $g(x)$ el gráfico de $g(x) = f'(x)$ corresponde a:



Con esta información, responda las preguntas 35 a 38:

35. La asociación correcta de intervalos de crecimiento-decrecimiento para $f(x)$ es:

	$[-1,-0{,}5)$	$(-0{,}5,\ 0{,}5)$	$(0{,}5,\ 1{,}5)$	$(1{,}5,\ 1{,}75)$	$(1{,}75,\ 2)$	$(2,\ 2{,}25)$	$(2{,}25,\ 2{,}5)$	$(2{,}5,\ 2{,}6)$	$(2{,}6,\ 2{,}7)$	$(2{,}7,\ 2{,}8)$	$(2{,}8,\ 3]$
a)	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$
b)	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
c)	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
d)	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

e) Ninguna de las anteriores.

36. Respecto a $f(x)$:

I. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = +\infty$.
II. La función alcanza un mínimo local en $x = -0{,}5$.
III. $x = 0{,}5$ es tanto un máximo local como un punto de inflexión.
IV. La función alcanza 2 máximos locales.

Es o son verdaderas las siguientes afirmaciones:

(a) Solo I.

(b) Solo IV.

(c) I y IV.

(d) I, II y III.

(e) I, II, III y IV.

37. El número de puntos de inflexión de $f(x)$ es:

(a) 3
(b) 4
(c) 5
(d) 6
(e) 7

38. Definamos $h(x) = g'(x)$, entonces:

I. $x = 0{,}5$ es un punto de inflexión.
II. $h(x)$ es discontinua $x = 1{,}5$.
III. $h(x)$ es creciente en $(0{,}75,\ 2)$.

Es o son verdaderas las siguientes afirmaciones:

(a) Solo I.
(b) Solo III.
(c) I y III.
(d) I, II y III.
(e) Ninguna de las anteriores.

39. El máximo absoluto de la función $f(x) = 4 - x^{2/3}$ en el intervalo $\left[-\sqrt{8}, \sqrt{8}\right]$ se alcanza en el punto de abscisa

(a) $x = \sqrt{8}$
(b) $x = 4$
(c) $x = -\sqrt{8}$ y $x = \sqrt{8}$
(d) $x = 0$
(e) Ninguno de los anteriores.

40. Dada la función: $f(x) = e^x - x$, determine cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(a) Es creciente en $[-1, 2[$
(b) Tiene un punto de inflexión en $(0, 1)$
(c) Tiene un máximo relativo en $x = 1$
(d) Es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$
(e) Tiene infinitos puntos críticos.

41. Si y es una función definida implícitamente por la ecuación $y^3 - xy - 6 = 0$, entonces el valor de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en el punto $(1, 2)$ es:

(a) $\dfrac{2}{11}$

(b) $\dfrac{1}{11^3}$

(c) $-\dfrac{4}{11^3}$

(d) $-\dfrac{1}{12}$

(e) 0

42. El valor de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{2i}{n}\right)^2 \frac{2}{n}$ es

(a) 9

(b) 6

(c) $\dfrac{26}{3}$

(d) 2

(e) Ninguna de las anteriores.

43. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 - k^2}}{n^2} =$

(a) $1 - \cos(1)$.

(b) $1 - \sin(1)$.

(c) $\dfrac{\pi}{2}$.

(d) $\dfrac{\pi}{4}$.

(e) π.

44. Sea f una función continua con $\displaystyle\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x \geq 10$. Entonces, se cumple que:

(a) $f(x) \leq 5$, $\forall x \in [1, 3]$

(b) $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [1, 3]$

(c) $\exists x_0 \in]1, 3[$ tal que $f(x_0) < 5$

(d) $\exists x_0 \in]1, 3[$ tal que $f(x_0) \geq 5$

(e) Ninguna de las anteriores.

45. Sea $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces:

I) $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leq \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$

II) $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ no existe.

III) Si $G(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$, entonces $G'(x) = f'(x)$.

de las afirmaciones anteriores son verdaderas:

(a) Sólo I y II
(b) Sólo I y III
(c) Sólo II
(d) Todas las anteriores.
(e) Ninguna de las anteriores.

46. Sea f continua, creciente, con $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, entonces $\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y =$

(a) $-\frac{1}{3}$
(b) $\frac{1}{3}$
(c) $\frac{2}{3}$
(d) 1
(e) Ninguna de las anteriores.

47. El valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}\int_0^{x^2} \sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ es:

(a) 1/4
(b) 1/3
(c) 2/5
(d) 2/3
(e) 0

48. Sea g una función derivable tal que $g(0) = g'(0) = 2$ y f definida por

$$f(x) = \int_0^x (2x - t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$$

Entonces el valor de $f''(0)$ es:

(a) 8
(b) $\dfrac{2}{3}$
(c) 0
(d) 6
(e) Ninguna de las anteriores.

49. Si

$$a + \int_a^{x^2} \frac{f(t)}{t} \mathrm{d}t = e^x + x^2 - e$$

entonces:

(a) $a = 1$ y $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + x$.
(b) $a = 0$ y $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + x$.
(c) $a = 1$ y $f(x) = x\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 2x^{3/2}$.
(d) $a = 0$ y $f(x) = x\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 2x^{3/2}$.
(e) $a = 1$ y $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + x - \sqrt{x}e$.

50. El par $c - f(x)$ de modo que se cumpla para todo x la ecuación

$$\int_c^{x^2} \frac{f(t)}{1+t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \log \frac{1+x^2}{1-x^2} - \frac{1}{2} \log 2$$

es:

(a) $\dfrac{1}{9} - \dfrac{2x}{(1-x)(1+x^2)}$
(b) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{2\sqrt{x}}{1-x}$
(c) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{1-x^2}$
(d) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{1-x}$
(e) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{x-1}$

51. Si $I = \int_1^2 x \ln(x)\, \mathrm{d}x$ entonces se cumple que

(a) $I = 1/2$

(b) $I = \ln(2)$

(c) $I = \dfrac{x^2}{2}\ln(2) - \dfrac{1}{2}$

(d) $I = 2\ln(2)$

(e) $I = 2\ln(2) - \dfrac{3}{4}$

52. El valor de $\int \ln\left(1+x^2\right) \mathrm{d}x$ es:

(a) $\dfrac{2x}{1+x^2} + c$

(b) $(x-1)\ln(1+x^2) + c$

(c) $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) + c$

(d) $x\ln(1+x^2) + 2x\arctan(x) + c$

(e) Ninguna de las anteriores.

53. $\int_0^{\pi} x^2 \cos(x)\, \mathrm{d}x =$

(a) -2π

(b) 2π

(c) $-\pi$

(d) π

(e) $\dfrac{\pi^3}{3}$

54. El valor de la integral: $\int_0^{0{,}6} \dfrac{x^2 \mathrm{d}x}{\sqrt{9-25x^2}}$ es:

(a) $\dfrac{9\pi}{500}$

(b) $\dfrac{9\pi}{20}$

(c) $\dfrac{9\pi}{125}$

(d) $\dfrac{5\pi}{225}$

(e) Ninguna de las anteriores.

55. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2x-1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,\mathrm{d}x =$

(a) 0
(b) 4
(c) $4-\dfrac{3\pi}{2}$
(d) $8-3\pi$
(e) Ninguna de las anteriores.

56. El valor de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$ es:

(a) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+c$
(b) $-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}+c$
(c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+c$
(d) $\dfrac{1}{a^2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}+c$
(e) $\dfrac{1}{a^2}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+c$

57. El valor de la integral definida $\displaystyle\int_0^1 2x\arctan(x)\,\mathrm{d}x$ es:

(a) $\dfrac{\pi}{2}$
(b) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$
(c) $\dfrac{\pi}{4}-1$
(d) $\dfrac{\pi}{2}-1$
(e) $\pi-1$

58. El valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(x)+2\cos^2(x)}$ es:

(a) $\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
(b) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
(c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
(d) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.
(e) Ninguna de las anteriores.

59. Si $I = \int_{\sqrt{2}}^{2} \sqrt{4 - x^2}\, \mathrm{d}x$, entonces:

(a) $I = \dfrac{\pi}{2} - 1$.
(b) $I = \pi/2$.
(c) $I = 1 - \dfrac{\pi}{2}$.
(d) $I = \pi$.
(e) $I = 1$.

60. El área de la región del primer cuadrante delimitada por la curva $y = \arctan(x)$, su recta tangente en el punto $(1, \pi/4)$ y el eje OY es:

(a) $-\dfrac{1}{4}$
(b) 0
(c) $\dfrac{1}{4}$
(d) $\dfrac{\pi}{4} - \ln(2)$
(e) $\ln\sqrt{2} - \dfrac{1}{4}$

61. El área de la región acotada y delimitada por las curvas $y = \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ e $y = x^2 - 2x$ es

(a) $\dfrac{4}{3}$
(b) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{\pi}$
(c) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{\pi}$
(d) $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{2}{3}$
(e) $\dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{\pi}$

62. La base de un sólido es un cuadrado de lado $\sqrt{2}$. Si las secciones perpendiculares a la base y a una diagonal son triángulos isósceles de altura 1, entonces el volumen del sólido es:

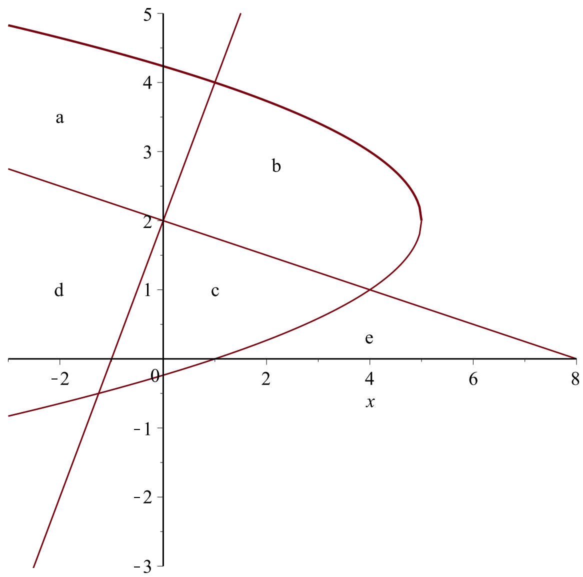
(a) 0
(b) $\dfrac{1}{2}$
(c) 1
(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
(e) 2

Considere la región $\mathcal{R}$ determinada por las desigualdades

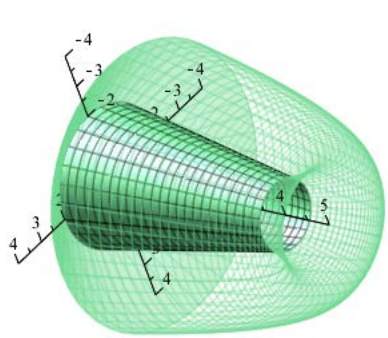
$$x \leq 5 - (y-2)^2 \quad ; \quad -\frac{x}{4} + 2 \leq y \leq 2x + 2$$

Con esta información, responda las preguntas 63 a 65:

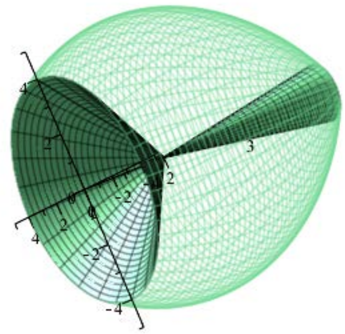
63. ¿Cuál de las siguientes alternativas señala correctamente cuál es $\mathcal{R}$?



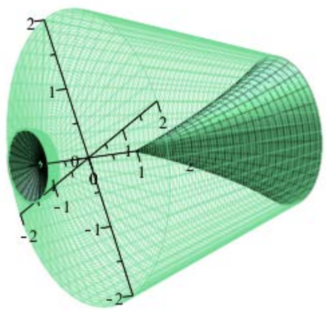
64. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde a una rotación de $\mathcal{R}$ en torno al eje X?



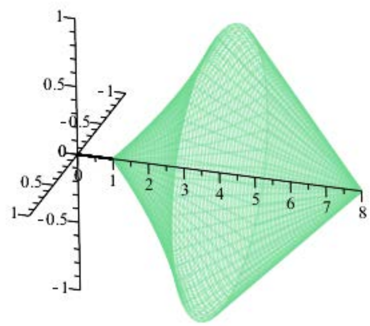
a)



b)



c)



d)

e) Ninguna de las anteriores.

65. El volumen $\mathcal{V}$ generado al rotar $\mathcal{R}$ en torno al eje $x = 1$ queda correctamente expresado por:

(a) $2\pi\left\{\int_0^1 (x+1)\left[(2x+2)-\left(-\frac{x}{4}+2\right)\right]\mathrm{d}x+\int_1^4 (x+1)\left[(2+\sqrt{5-x})-\left(-\frac{x}{4}+2\right)\right]\mathrm{d}x+\int_4^5 (x+1)\left[(2+\sqrt{5-x})-(2-\sqrt{5-x})\right]\mathrm{d}x\right\}$

(b) $\pi\left\{\int_0^1 \left[\left(-\frac{x}{4}+1\right)^2-(2x+1)^2\right]\mathrm{d}x+\int_1^4 \left[(1+\sqrt{5-x})^2-\left(-\frac{x}{4}+1\right)^2\right]\mathrm{d}x+\int_4^5 \left[(1+\sqrt{5-x})^2-(1-\sqrt{5-x})^2\right]\mathrm{d}x\right\}$

(c) $2\pi\left\{\int_0^1 (x-1)\left[(2x+2)-\left(-\frac{x}{4}+2\right)\right]\mathrm{d}x+\int_1^4 (x-1)\left[(2+\sqrt{5-x})-\left(-\frac{x}{4}+2\right)\right]\mathrm{d}x+\int_4^5 (x-1)\left[(2+\sqrt{5-x})-(2-\sqrt{5-x})\right]\mathrm{d}x\right\}$

(d) $\pi\left\{\int_0^1 \left[\left(-\frac{x}{4}+3\right)^2-(2x+3)^2\right]\mathrm{d}x+\int_1^4 \left[(3+\sqrt{5-x})^2-\left(-\frac{x}{4}+3\right)^2\right]\mathrm{d}x+\int_4^5 \left[(3+\sqrt{5-x})^2-(3-\sqrt{5-x})^2\right]\mathrm{d}x\right\}$

(e) Ninguna de las anteriores.

66. Considere la región Ω definida como:

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 1, \quad e^x \leq y \leq 1\right\}$$

El volumen generado al rotar Ω en torno al eje Y es:

(a) $\dfrac{\pi}{2}\left(e^2 - 1\right)$

(b) 2π

(c) πe^2

(d) $\pi\left(e - 1\right)$

(e) $\pi\left(e - 2\right)$

67. Considere la región $\mathcal{R}$ delimitada por el eje x y la función $f(x) = 1 - (x-2)^2$. El volumen generado al rotar $\mathcal{R}$ en torno al eje y es:

(a) $\dfrac{16}{15}\pi$
(b) $\dfrac{18}{5}\pi$
(c) $\dfrac{16}{3}\pi$
(d) $\dfrac{9}{2}\pi$
(e) $\dfrac{4}{3}\pi$

68. La región $\mathcal{R}$ acotada por las curvas $y = 2x - x^2$, $y = 0$ se hace rotar en torno al eje Y, entonces el volumen $V(\mathcal{R})$ del sólido resultante es:

(a) $V(\mathcal{R}) = \dfrac{\pi}{3}$
(b) $V(\mathcal{R}) = \dfrac{\pi}{8}$
(c) $V(\mathcal{R}) = 8\pi$
(d) $V(\mathcal{R}) = \dfrac{8\pi}{3}$
(e) Ninguna de las anteriores.

69. El volumen del sólido obtenido al hacer girar la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ sobre el eje X desde 0 hasta 2 en torno a la recta $y = 0$ es:

(a) 8π
(b) 2π
(c) 4π
(d) $\dfrac{64\pi}{3}$
(e) $\dfrac{32\pi}{3}$

70. Sea R la región del plano limitada por la curva $y = x^3$ y por las rectas $y = 8$, $x = 0$ ¿Cuál es el volumen del sólido obtenido al rotar la región R en torno al eje Y?

(a) $\dfrac{96\pi}{5}$
(b) $\dfrac{32\pi}{5}$
(c) $\dfrac{6\sqrt[3]{4}\pi}{5}$
(d) 4π
(e) Ninguna de las anteriores.

6.1.1. Soluciones

Las soluciones correctas son las siguientes:

#	✔	#	✔	#	✔	#	✔
1	*b*	21	*a*	41	*a*	61	*b*
2	*b*	22	*e*	42	*c*	62	*c*
3	*c*	23	*c*	43	*d*	63	*b*
4	*e*	24	*a*	44	*d*	64	*a*
5	*b*	25	*a*	45	*e*	65	*a*
6	*c*	26	*e*	46	*c*	66	*e*
7	*b*	27	*c*	47	*b*	67	*c*
8	*d*	28	*b*	48	*d*	68	*d*
9	*c*	29	*c*	49	*a*	69	*b*
10	*e*	30	*c*	50	*d*	70	*a*
11	*c*	31	*c*	51	*e*		
12	*a*	32	*a*	52	*c*		
13	*e*	33	*c*	53	*a*		
14	*b*	34	*c*	54	*a*		
15	*e*	35	*b*	55	*c*		
16	*d*	36	*b*	56	*e*		
17	*c*	37	*d*	57	*d*		
18	*a*	38	*d*	58	*c*		
19	*e*	39	*c*	59	*a*		
20	*a*	40	*d*	60	*e*		

6.2. Verdadero o falso

1. ___ Sea $f(x)$ una función tal que $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe y es 6. Entonces existe un número δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - 6| < 1$.

2. ___ Si $f(x) > 1$ para todo $x > 0$ y $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

3. ___ Si f es continua en $[-1,1]$, $f(-1) = 4$ y $f(1) = 3$, entonces existe un número r tal que $|r| < 1$ y $f(r) = \pi$.

4. ___ Si $|f|$ es continua en a, también lo es f.

5. ___ No existe a para el cual la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{x+a} & \text{si } x < a \\ \\ 2x - e^{x-a} & \text{si } x \geq a \end{cases}$ sea continua en $x = a$.

6. ___ Si $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x\to 0} \lfloor f(x) - g(x) \rfloor = 0$.

7. ___ Si $f(x) = (x^6 - x^4)^5$, entonces $f^{(31)}(x) = 0$.

8. ___ Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función cualquiera continua y dos veces derivable en $(0,1)$ la cual satisface $g''(x) = x^3 g(x) + g^2(x) g'(x)$ para todo $x \in (0,1)$. Si $g(0) = g(1)$, entonces $g(x) \leq 0$ en todo $[0,1]$.

9. ___ Si $f'(\xi) = 0$, entonces f tiene un máximo o mínimo local en ξ.

10. ___ Existe una función f tal que $f(x) < 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para todo x.

11. ___ Si f y g son diferenciables y $f(x) \geq g(x)$ para $a < x < b$, entonces $f'(x) \geq g'(x)$para $a < x < b$.

12. ___ Si $\theta_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [\ln(n+i) - \ln(n)]$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \theta_n = 2\ln(2) - 1$.

13. ___ Si $f(x)$ es discontinua en $x = 0$, entonces $\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ no existe en $x = 0$.

14. ___ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\sin(x)}{(1+x^4)^2} \right) \mathrm{d}x = 0$.

15. ___ $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4 + t^2 + 2}}$ es impar y creciente para los x tales que $1 - 2x^4 \geq 0$.

16. ___ Para funciones inyectivas, el volumen generado en torno al eje Y por medio de casquetes cilíndricos coincide con su fórmula regular.

6.2.1. Soluciones

Las respuestas correctas son las siguientes:

#	✔	#	✔
1	V	9	F
2	F	10	F
3	V	11	F
4	F	12	V
5	F	13	F
6	F	14	V
7	V	15	F
8	V	16	F