Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2015

- Pregunta 1: Ignacio Madrid
- Pregunta 2: Jorge Gómez
- Pregunta 3: Nicolás Espinoza
- Pregunta 4: Hernán González
- Pregunta 5: José González
- Pregunta 6: Erik Contreras
- Pregunta 7: Sebastián Soto
- Pregunta 8:
  - jisaldias@uc.cl, sec: 1-2
  - jspano@uc.cl, sec: 3-4
  - liespino@uc.cl, sec: 5-6
  - dborck@uc.cl, sec: 7-8
  - ainavarrete@uc.cl, sec: 9-10
  - cavenero@uc.cl, sec: 11-12
  - disantelices@uc.cl, sec: 13-14

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Examen

1. Determine el área acotada por la curva $x = t^2 - 2t$, $y = \sqrt{t}$ y el eje Y.

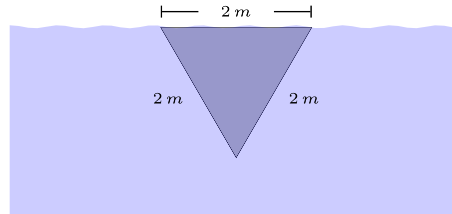
Solución. La región acotada corresponde para $t \in [0, 2]$, de este modo el área está dada por

$$\begin{aligned}\int_0^2 y(t)x'(t)\,dt &= \int_0^2 \sqrt{t}\,(2t-2)\,dt \\ &= \frac{8}{15}\sqrt{2}\end{aligned}$$

Evaluacion.

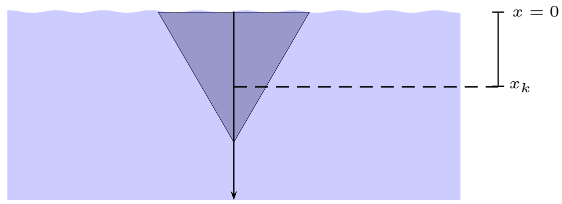
- Asignar (**2 ptos**) por determinar expícita o impícitamente el intervalo de integración.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar expícita o impícitamente $x'(t)$.
- Asignar (**1 ptos**) explicitar la integral que se va a calcular, remplazando $y(t)$, $x'(t)$ y el intervalo de integración.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar correctamente el área.

2. Una placa vertical se sumerge en agua, como se muestra en la figura. Determine la fuerza hidrostática que el agua ejerce sobre la placa.



Nota. Suponer que la constante de gravedad $g = 10\,m/seg^2$ y la densidad del agua $\rho = 1000\,kg/m^3$.

Solución. Tomamos como sistema de referencia $x = 0$ la superficie y positivo hacia abajo, como muestra la figura,



El área de cada sección transversal se aproxima por

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - x_k\right)(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{o bien} \qquad \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - x\right)\Delta x$$

Luego, la fuerza hidrostática que actúa sobre cada sección transversal se aproxima por

$$\rho g x_k \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - x_k\right)(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{o bien} \qquad \rho g x \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3} - x\right)\Delta x$$

Finalmente, la fuerza total está dada por

$$\frac{2\rho g}{\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} x\left(\sqrt{3} - x\right) dx$$

Dado que

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\left(\sqrt{3} - x\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

se concluye que la fuerza hidristática es

$$\rho g = 10000$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por dar alguna representación infinitesimal correcta del área de las secciones transversales. Si el área no aparece de forma expícita pero aparece en la integral de fuerza hidrostática, asignar los dos puntos correspondientes.
- Asignar (**2 ptos**) por expresar correctamente la integral que permite obtener la fuerza hidrostática. (con o sin las constantes)
- Asignar (**2 ptos**) por obtener el valor exacto de la fuerza hidrostática.

3. Calcule $\displaystyle\int_0^\infty te^{-st}\,dt$, siendo $s > 0$.

Solución. Para todo $s > 0$ la función $f(t) = te^{-st}$ es integrable, luego

$$\begin{aligned}\int_0^\infty te^{-st}\,dt &= \left.\frac{te^{-st}}{-s}\right|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{-s}\,dt \qquad (\textbf{2 ptos})\\ &= \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\,dt \qquad (\textbf{1 ptos})\\ &= \frac{1}{s}\cdot\left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty \qquad (\textbf{2 ptos})\\ &= \frac{1}{s^2} \qquad (\textbf{1 ptos})\end{aligned}$$

Evaluación. Todo error de arrastre será sancionado, otorgando el puntaje hasta antes de comenter el error.

4. Determine si la serie converge o diverge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$$

Solución. Racionalizando

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \qquad (\textbf{2 ptos})$$

Alternativa 1. Aplicando el criterio de comparación

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n})}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \qquad (\textbf{2 ptos})\end{aligned}$$

Esta última serie es convergente, por lo tanto la serie original converge. (**2 ptos**)

Alternativa 2. Aplicando el criterio de comparación al límite, con

$$a_n = \frac{1}{n(\sqrt{n}+\sqrt{n})} \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$$

tendremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2} \qquad (\textbf{2 ptos})$$

Como la serie de los términos b_n es convergente, se deduce que la serie de término a_n también converge. (**2 ptos**)

5. Si

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

donde $a_n = a_{n+2}$, para todo $n \geq 1$. Determine el radio de convergencia de la serie y una fórmula para $f(x)$.

Solución. La sucesión a_n depende de los valores a_1 y a_2, vale decir

$$a_{2n-1} = a_1 \qquad \text{y} \qquad a_{2n} = a_2$$

Alternativa 1. Sin pérdida de generalidad supondremos que $a_1 \leq a_2$. Para determinar el radio de convergencia usamos el criterio de la raíz

$$\sqrt[n]{|a_1|} \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{|a_2|}$$

luego, por el teorema de Sandwich se deduce que $R = 1$.

La serie converge absolutamente sobre el intervalo $(-1, 1)$, y por tanto la serie se puede reordenar

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} x^{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \\
&= a_1 \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} + a_2 \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \\
&= a_1 \frac{x}{1-x^2} + a_2 \frac{x^2}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Alternativa 2. Definamos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

luego,

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} x^{2x-1} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} x^{2x} \\
&= (a_1 + a_2 x) \sum_{k=1}^{n} x^{2n-1} \\
&= (a_1 + a_2 x) \left(\frac{x - x^{2n+1}}{1 - x^2} \right)
\end{aligned}$$

y $S_{2n+1} = S_{2n} + a_2 x^{2n+1}$.

Sabemos de clase que S_n converge si y sólo si S_{2n} y S_{2n+1} convergen. Esta última sumas convergen si y sólo si $|x^2| < 1$, vale decir, el radio de convergencia es $R = 1$.

Finalmente, aplicando límite a S_{2n} tendremos

$$f(x) = (a_1 + a_2 x) \frac{x}{1 - x^2}$$

Alternativa 3. La sucesión a_n se puede rescribir

$$a_n = \frac{a_2 + a_1 + (-1)^n (a_2 - a_1)}{2}$$

De este modo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x^k = \frac{a_2 + a_1}{2} \sum_{k=1}^{n} x^k + \frac{a_2 - a_1}{2} \sum_{k=1}^{n} (-x)^k$$

que converge si y sólo si $|x| < 1$. Por lo tanto, el radio de convergencia es $R = 1$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_2 + a_1}{2} \sum_{k=1}^{n} x^k + \frac{a_2 - a_1}{2} \sum_{k=1}^{n} (-x)^k \\ &= \frac{a_2 + a_1}{2} \frac{x}{1-x} + \frac{a_2 - a_1}{2} \frac{-x}{1+x} \\ &= a_1 \frac{x}{1-x^2} + a_2 \frac{x^2}{1-x^2} \end{aligned}$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) decir explícita o implícitamente que $a_{2n-1} = a_1$.
- Asignar (**1 ptos**) decir explícita o implícitamente que $a_{2n} = a_2$
- Asignar (**2 ptos**) por determinar con argumentos válidos el radio de convergencia $R = 1$.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar una representacion algebraica para f.

6. Determine el límite, si es que existe, o demuestre que el límite no existe.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos(y)}{3x^2+y^2}$$

Solución. Si (x,y) tiende a $(0,0)$ por el eje X entonces

$$\frac{xy\cos(y)}{3x^2+y^2} = \frac{x\cdot(0)\cdot\cos(y)}{3x^2+(0)^2} = 0$$

luego,

$$\frac{xy\cos(y)}{3x^2+y^2} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad (x,y)\to(0,0) \ \text{ por el eje } \ X$$

Similarmente, si (x,y) tiende a $(0,0)$ por la recta $x=y$ entonces

$$\frac{xy\cos(y)}{3x^2+y^2} = \frac{x^2\cdot\cos(x)}{4x^2} = \frac{\cos(x)}{4}$$

luego,

$$\frac{xy\cos(y)}{3x^2+y^2} \to \frac{1}{4} \qquad \text{cuando} \qquad (x,y)\to(0,0) \ \text{ por la recta } \ x=y$$

Por lo tanto, el límite no existe.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por el primer límite calculado a lo largo de una curva dada.
- Asignar (**2 ptos**) por el segundo límite calculado a lo largo de una curva dada.
  Nota. Si el alumno elige una curva que depende de un parámetro, debe quedar muy claro que el límite resultante no es independiente de dicho parámetro. En tal caso asignar (**4 ptos**) puntos.
- Asignar (**2 ptos**) por concluir que el límite no existe, siempre y cuando lo anterior esté correcto.

7. Verifique que la función $z=\ln(e^x+e^y)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

Solución. Calculamos las derivadas parciales,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x+e^y} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x+e^y}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x}{e^x+e^y} + \frac{e^y}{e^x+e^y} = 1$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por calcular correctamente z_x.
- Asignar (**2 ptos**) por calcular correctamente z_y.
- Asignar (**2 ptos**) por demostrar explícitamente que $z_x+z_y=1$.

8. Determine los puntos del hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ donde el plano tangente es paralelo al plano $2x + 2y + z = 5$.

Solución. Una normal del plano tangente al hiperboloide en el punto (x, y, z) está dado por $(z_x, z_y, -1)$. Derivando implícitamente tendremos,

$$
\begin{aligned}
2x - 2zz_x = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad z_x = \frac{x}{z} \\
8y - 2zz_x = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad z_y = \frac{4y}{z}
\end{aligned}
$$

De este modo, tendremos las ecuaciones $z_x = -2$ y $z_y = -2$, es decir

$$\frac{x}{z} = -2 \qquad \text{y} \qquad \frac{4y}{z} = -2$$

Remplazando $x = -2z$ e $y = -z/2$ en la ecuación del hiperboloide obtendremos

$$(-2z)^2 + 4(-z/2)^2 - z^2 = 4$$

que tiene solución $z = \pm 1$.

Finalmente, los puntos pedidos son:

$$(-2, -1/2, 1) \qquad \text{y} \qquad (2, 1/2, -1)$$

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por calcular correctamente z_x.
- Asignar (**1 ptos**) por calcular correctamente z_y.
- Asignar (**1 ptos**) por la ecuación $x = -2z$.
- Asignar (**1 ptos**) por la ecuación $y = -z/2$.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar el punto $(-2, -1/2, 1)$.
- Asignar (**1 ptos**) por determinar el punto $(2, 1/2, -1)$.

Tiempo: 150 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa