CLASE 6: INDUCCIÓN MATEMÁTICA

- **Ej**: i) Toda mujer de un cierto pueblo tiene que asesinar a su esposo inmediatamente si descubre que es infiel
  ii) La noticia del asesinato sale el día siguiente en el diario
  iii) Todas las mujeres leen el diario
  iv) Todas las mujeres saben de todos los maridos infieles menos del suyo
  v) Nadie denuncia a los esposos infieles
  vi) Un día, el diario publica:
  "Hay al menos un hombre infiel en el pueblo"

El marido de M es infiel.

¿Qué día lo mata?

Sol:

- Sea m el número de maridos infieles y d el día en el que M mata a su esposa. (el día de la noticia es $d=1$)

- Si $m=1$, $d=1$

- Si $m=2$, $d=2$

- Conjetura: $d=m$

  ¿Cómo se demuestra?

- Principio de inducción matemática:

  $\forall m \geq 1$, sea $P(m)$ una proposición.

  Supongamos que:

  1.- $P(1)$ es verdadera

  2.- $\forall m \geq 1$, $P(m) \Rightarrow P(m+1)$

  Luego, $P(m)$ es verdadera $\forall m \geq 1$

- <u>Vuelta al ejemplo</u>:

$$P(n): \; d = m$$

1.- $P(1)$: $m=1 \Rightarrow d=1$ ✓

2.- Sea $k \geq 1$ y supongamos que
$m=k \Rightarrow d=k$

H.I. (hipótesis de inducción)

Vamos a demostrar que
$m=k+1 \Rightarrow d=k+1$

<u>DEM</u>:

- Supongamos que $m=k+1$, es decir, hay $k+1$ maridos infieles
- M conoce k maridos infieles
- M piensa: supongamos que hay k maridos infieles.
  Luego, por H.I., todos deberían morir el día k y la noticia debería salir en el diario el día $k+1$
- La noticia no sale en el diario el día $k+1$ y M mata a su esposa el día $k+1$.

__Respuesta__: Si M conoce a n maridos infieles, mata el suyo el día $n+1$.

- __Ej__: Demuestre que
$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \geq 1.$$

__Sol__:

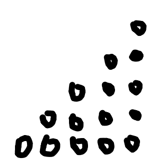
__DEM. 1__:

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
 & S_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\
+ & S_n = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 2S_n = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}
$$

$$2S_n = \underbrace{(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n}$$

$$\Rightarrow \quad 2S_n = n(n+1)$$

$$\Rightarrow \quad S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$



DEM 2: $P(n): 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1.- $\underline{n=1}$: $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ ✓

2.- Sea $k \geq 1$. Supongamos que

$$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \text{(H.I.)}$$

Demostraremos que

$$1+2+\cdots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Vamos:

$$\begin{aligned}
&1+2+\cdots+k+(k+1) \\
&= \underbrace{(1+2+\cdots+k)} + (k+1) \\
&\overset{(HI)}{=} \frac{k(k+1)}{2} + k+1 \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+2)(k+1)}{2}
\end{aligned}$$

Por inducción, $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 1$.

• **Ej:** Todos las interrogaciones de introducción al cálculo tienen la misma cantidad de preguntas.

Sol:

Sea n la cantidad de interrogaciones

$P(n)$: las n interrogaciones tienen la misma cantidad de preguntas.

En todo grupo de n interrogaciones, todos tienen la misma cantidad de preguntas.

1.- $n=1$ ✓

2.- <u>HI</u>: Sea $k \geq 1$ y supongamos que $P(k)$ es verdadera.

Demostramos $P(k+1)$

$$\boxed{I_1} + \boxed{I_2} + \cdots + \boxed{I_k} + \boxed{I_{k+1}}$$

HI: tienen la misma cantidad de preguntas

$$\boxed{I1} + \boxed{\boxed{I2} + \cdots + \boxed{Ik} + \boxed{I\,k{+}1}}$$

HI: tienen la misma cantidad de preguntas

Luego, las k+1 interrogaciones tienen la misma cantidad de preguntas.

ERROR:

$$\boxed{\boxed{I1}} \quad \boxed{I2}$$

$$\boxed{I1} \quad \boxed{\boxed{I2}}$$

El paso de inducción falla si $k=1$, es decir, la demostración de $P(1) \Rightarrow P(2)$ es errónea.

- <u>Variante:</u>

  $\forall n \geq 1$, sea $P(n)$ una proposición.

  Supongamos que:

  1.- $P(n_0)$ es verdadera

  2.- $\forall n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

  Luego, $P(n)$ es verdadera $\forall n \geq n_0$.