CLASE 29: SUBSUCESIONES

- **Obs**: recordamos lo siguiente:

  Si $a_n \longrightarrow 0$ y $(b_n)_n$ acotada,

  entonces $a_n b_n \longrightarrow 0$.

  ¿Qué pasa si $b_n \longrightarrow \infty$?

  $$\left.\begin{array}{l} a_n \longrightarrow 0 \\ b_n \longrightarrow \infty \end{array}\right] \Longrightarrow ?$$

  Ej: i) $a_n = \frac{1}{n^2} \longrightarrow 0$

  $b_n = n \longrightarrow \infty$

  $a_n b_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

ii) $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

$b_n = n^2 \longrightarrow \infty$

$a_n b_n = n \longrightarrow \infty$

iii) $a_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

$b_n = n \longrightarrow \infty$

$a_n b_n = 1 \longrightarrow 1$

• <u>DEF</u>: Sea $(a_n)_n$ una sucesión.
Una <u>subsucesión</u> de $(a_n)_n$ es una sucesión del tipo $(a_{n_k})_k$ donde $(n_k)_k$ es una sucesión estrictamente creciente de naturales.

• **Ej.:** i) $a_m = m^2$

$\bullet\ m_k = 3k \longrightarrow a_{m_k} = m_k^2 = (3k)^2$

$\bullet\ m_k = 2k^3+4 \longrightarrow a_{m_k} = m_k^2$
$$= (2k^3+4)^2$$

ii) $a_m = (-1)^m$

$\bullet\ m_k = 2k \longrightarrow a_{m_k} = (-1)^{m_k} = (-1)^{2k} = 1$

$\bullet\ m_k = 2k-1 \longrightarrow a_{m_k} = (-1)^{m_k} = (-1)^{2k-1} = -1$

• **Lema**: Sea $(a_m)_m$ una sucesión tal que

$$\lim_{m\to\infty} a_m = L.$$

Sea $(a_{m_k})_k$ una subsucesión de $(a_m)_m$.

Luego, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_{m_k} = L$.

- <u>Corolario</u>: Si existen dos subsucesiones de $(a_n)_n$ con límites distintos, entonces $(a_n)_n$ no tiene límite.

- <u>Ej</u>: $a_n = (-1)^n$
  - $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1 \xrightarrow{k \to \infty} 1$
  - $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1 \xrightarrow{k \to \infty} -1$

$\Rightarrow (a_n)_n$ no tiene límite.

- <u>DEM. DEL LEMA</u>:

Sea $\varepsilon > 0$. Como $a_n \xrightarrow{n \to \infty} L$, sabemos que existe $n_0 \geq 1$ tal que

$$n \geq n_0 \rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Sea $(a_{n_k})_k$ una subsucesión.

Como $n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, existe $k_0 \geq 1$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow n_k \geq n_0$$

Luego, si $k \geq k_0$, tenemos que

$$|a_{n_k} - L| < \varepsilon,$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L.$$

$\square$

- <u>Obs</u>: Toda la discusión anterior es válida bajo la hipótesis $a_n \longrightarrow \infty$.
  - $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty \Rightarrow a_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$
  - $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\not\longrightarrow} \infty \Rightarrow a_n \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \infty$

- <u>PROPOSICIÓN</u>: Toda sucesión tiene al menos una subsucesión monótona. //

- <u>Consecuencia</u>:
  - Sea $(a_n)_n$ una sucesión acotada.
  - $(a_n)_n$ tiene alguna subsucesión monótona $(a_{n_k})_k$
  - Luego, $(a_{n_k})_k$ es monótona y acotada
  - Por lo tanto, $(a_{n_k})_k$ converge.

Es decir, toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.