PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
SEGUNDO SEMESTRE 2019

INTERROGACIÓN 2
MAT1620 ⋆ CÁLCULO 2

La siguiente evaluación consta de 6 preguntas, dispone de 120 minutos para responderla.

1. Analice la convergencia, absoluta o condicional, de las siguientes series númericas.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n (n+1)!}{3^n \cdot n!}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+n} - n)$.

2. Considere la siguiente serie de potencias.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \ln(n+1)} x^n.$$

   Determine su radio e intervalo de convergencia.

3. *a*) Calcule los tres primeros términos, distintos de cero, de la serie de Taylor centrada en cero, de la función

$$f(x) = e^{-x^2} \operatorname{sen}(5x).$$

   b) Encuentre una representación en serie de potencias para la función

$$f(x) = Arctg(x/3),$$

   indique donde es válida dicha representación.

4. Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0),\\[2ex] 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Determine si es continua en $(0,0)$.

b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

c) Determine si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

5. a) (4pts.) Considere las rectas de ecuaciones,

$$L_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad L_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad t,s\in\mathbb{R}.$$

Determine la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

b) (2 pts.) Considere la función

$$f(x,y)=\sqrt{20-x^2-7y^2}.$$

Determine la ecuación del plano tangente a la gráfica de $z=f(x,y)$ en el punto correspondiente a $(x,y)=(2,1)$. Utilice esto para estimar el valor de $f(1,95;1{,}08)$.

6. Considere $w=w(x,y,z)$ una función dos veces diferenciable. Suponga además que

$$x=s^2-t^2, \qquad y=s^2+t^2, \qquad z=s+t$$

a) Si $\dfrac{\partial w}{\partial x}(1,0)=1, \dfrac{\partial w}{\partial y}(1,0)=-2, \dfrac{\partial w}{\partial z}(1,0)=5$, calcule

$$\frac{\partial w}{\partial s}(1,0)+\frac{\partial w}{\partial t}(1,0).$$

b) Calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial s\partial t}(s,t)$.

Una solución

1. *a*) El termino general de la serie se puede simplificar cómo sigue:

$$a_n = \frac{n \cdot 2^n (n+1)!}{3^n \cdot n!} = n(n+1)\frac{2^n}{3^n}$$

Aplicando el criterio de la razón, para verificar la convergencia consideramos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{2^n} = \frac{2}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = \frac{2}{3},$$

y siendo $\frac{2}{3} < 1$ sigue que la serie converge.

b) Consideramos la convergencia condicional de la serie, utilizando el facto que se trata de una serie alternante, osea de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ con

$$a_n = \sqrt{n^2 + n} - n > 0.$$

Una serie alternante cómo arriba converge si y solo si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. En nuestro caso vale

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\frac{1}{2}\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx, \tag{1}$$

y aquí observamos que para $n \leq x \leq n+1$ vale $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ entonces por comparación de integrales,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} dx = \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \tag{2}$$

De nuevo por comparación de limites, (2) insertada en el último termino de (1) nos entrega:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_n^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \geq \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2} > 0.$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n \geq \frac{1}{2} > 0$, y por el criterio de convergencias para series alternantes, nuestra serie no converge.

Asignación de puntaje:

- Parte a (total: 3pts)
  - 1 pt por simplificar fórmula de a_n correctamente,
  - 1 pt por escribir criterio (de la razón o otro) que se está ocupando correctamente,
  - 1 pt por escribir y justificar correctamente la conclusión que la serie converge.
- Parte b (total 3pts)
  - 1 pt por observar que se trata de serie alternante, y ocupar criterio correspondiente,
  - 1 pt por escribir porlomenos un pasaje del límite de a_n correctamente,
  - 1 pt por obtenecer correctamente que la serie no converge.
- Adjuntar 1 pt base.

2. *a*) Para calcular el radio de convergencia, ocupamos el criterio de la razón. El termino general de la serie es $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n \ln(n+1)} x^n$, entonces necesitamos encontrar condiciones sobre $|x|$ para que el siguiente límite sea < 1:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}.$$

Para calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$ observamos que este límite es igual (aplicando l'Hopital) a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1.$$

Entonces obtenecemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x|}{2} < 1 \quad \Leftrightarrow |x| < 2,$$

y el radio de convergencia de la serie es 2.

Para calcular el intervalo de convergencia, falta considerar los casos $x = 2$ y $x = -2$:

- Por $x = 2$ nuestra serie es igual a la serie alternante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)},$$

  y el criterio de convergencia para series alternantes nos dice que esta serie converge si y solo si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$, lo que es cierto. Entonces $x = 2$ está en el intervalo de convergencia.
- Por $x = 2$ obtenecemos la serie

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)},$$

  y por comparación con la serie harmonica, observando que $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{\ln(n+1)}$, obtenecemos que la serie diverge. Entonces $x = -2$ no está en el intervalo de convergencia.

Conclusión: *El intervalo de convergencia de nuestra serie es*

$$(-2, 2]\,.$$

Asignación de puntaje:

- 1 pt por utilizar correctamente el criterio que permite calcular el radio de convergencia (criterio de la raíz en este caso).
- 1 pt por calcular correctamente el límite que permite de calcular el radio de convergencia
- 1 pt por encontrar el valor 2 del radio de convercencia.
- 1 pt por justificar correctamente el hecho que para $x = 2$ la serie converge.
- 1 pt por justificar correctamente el hecho que para $x = -2$ la serie no converge.
- 1 pt por identificar cómo intervalo de convergencia $(-2, 2]$.
- Adjuntar 1 pt base.

3. *a*) Es claro que $f(0)=0$, luego

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x\sin(5x) + 5\cos(5x)) \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 5$$
$$f''(x) = e^{-x^2}((4x^2-27)\sin(5x) - 20x\cos(5x)) \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = e^{-x^2}(5(-31+12x^2)\cos(5x) + 2x(81-4x^2)\sin(5x)) \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -155$$
$$f^{(4)}(x) = e^{-x^2}(-40x(-31+4x^2)\cos(5x) + (937-648x^2+16x^4)\sin(5x)) \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = 0$$
$$f^{(5)}(x) = e^{-x^2}(25(237-248x^2+16x^4)\cos(5x) - 2x(4685-1080x^2+16x^4)\sin(5x)) \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(0) = 25\cdot 273$$

De este modo, los tres primeros términos no cero de la serie son:

$$\frac{5}{1!}x, \quad -\frac{155}{3!}x^3, \quad \frac{25\cdot 273}{5!}x^5,$$

Otra alternativa:

$$e^{-x^2}\operatorname{sen}(5x) = \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots\right)\left(5x - \frac{5^3x^3}{3!} + \frac{5^5x^5}{5!} - \frac{5^7x^7}{7!} + \frac{5^9x^9}{9!} - \dots\right)$$

Luego los tres primeros términos no cero son:

$$5x, \quad -\left(\frac{5^3}{3!}+5\right)x^3, \quad \left(\frac{5^5}{5!}+\frac{5^3}{3!}+\frac{5}{2}\right)x^5$$

b) Usando la serie de la arcotangente:

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$$

que converge para $|x|\le 1$, haciendo el cambio de variable $x = x/3$ tendremos

$$\arctan(x/3) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3^{2k+1}(2k+1)}x^{2k+1}$$

que converge para $|x|\le 3$

Asignación de puntaje:

a) Asignar 1,5 puntos por obtener de manera correcta las respectivas derivadas para el calculo de la serie de Taylor.

a) Asignar 1,5 puntos por concluir que el primer y tercer terminos pedidos son cero y el segundo es $5x$.

b) Asignar 1 punto por utilizar de manera correcta la serie de Arctan.

b) Asignar 1,5 puntos por expresa de manera correcta la serie pedida.

b) Asignar 0,5 puntos por el respectivo radio de convergencia.

- Agregar 1 punto base.

4. *a*) Por definición,

$$|f(x)-0| = \frac{x^2|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}^5}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}^3 < \varepsilon$$

De este modo, si se elige $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$ se deduce el límite y por tanto continuidad.

Alternativa: Haciendo el cambio a polares,

$$\lim_{\rho\to 0} f(\rho\cos(t), \rho\sin(t)) = \lim_{\rho\to 0} \rho^3\cos^2(t)\sin^3(t) = 0$$

siendo que la existencia (y unicidad del límite) independiente del valor de t, por lo tanto el límite existe y f continua en $(0,0)$.

b) Si $(x,y) \neq 0$ entonces

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}$$

mientras que si $(x,y) = (0,0)$ entonces

$$f_x(0,0) = \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

c) Calculemos

$$\lim_{\rho\to 0} f_x(\rho\cos(t), \rho\sin(t)) = \lim_{\rho\to 0} 2\rho^2\cos(t)\sin^5(t) = 0$$

que es igual a cero, independiente del valor de t elegido (en cualquier momento del cálculo). Por lo tanto, es continua.

Asignación de puntaje:

a) Asignar 1 punto por calcular de manera correcta el limite respectivo.

a) Asignar 1 punto por concluir que la función es continua.

b) Asignar 1 punto por el correcto calculo de la derivada parcial para $(x,y) \neq (0,0)$.

b) Asignar 1 punto por el correcto cálculo de la derivada parcial para $(x,y) = (0,0)$.

c) Asignar 1,5 puntos por el correcto calculo del limite respectivo.

c) Asignar 0,5 por concluir la continuidad de la derivada parcial.

- Agregar 1 punto base.

5. *a*) Para calcular la ecuación del plano pedido, comenzaremos calculando dos puntos $P \in L_1$ y $R \in L_2$ consideraremos

$$R = (1, 0, 0), \qquad P = (0, 1, 0), \quad \text{de donde} \quad \overrightarrow{PR} = (1, -1, 0).$$

El vector normal al plano pedido debe ser perpendicular a las rectas y al vector $\overrightarrow{PR}$, es decir, un vector normal al plano se puede encontrar calculando

$$(1, 0, 1) \times (1, -1, 0) = (1, 1, -1) = \mathbf{n}.$$

Luego la ecuación de un plano con vector normal $\mathbf{n}$ será de la forma

$$1 \cdot (x - x_0) + 1 \cdot (y - y_0) + (-1) \cdot (z - z_0) = 0,$$

escogiendo un punto cualquiera de las rectas dadas se obtiene que la ecuación cartesiana del plano pedido es:

$$x + y - z = 1.$$

b) El plano tangente respectivo tiene forma,

$$z = f(2, 1) + f_x(2, 1)(x - 2) + f_y(2, 1)(y - 1),$$

Para la función en cuestión se tiene que

$$f(2, 1) = 3, \quad f_x(2, 1) = -\frac{2}{3}, \qquad f_y(2, 1) = -\frac{7}{3}.$$

Luego el plano tangente es

$$-\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}y - \frac{20}{3} = z.$$

En particular la estimación pedida será:

$$f(1, 95; 1, 08) \sim 3 + (1{,}95 - 2)\frac{-2}{3} + (1, 08 - 1)\frac{-7}{3} \sim 2, 846.$$

Asignación de puntaje

a) Asignar 1,5 puntos por calcular el vector normal al plano pedido o un ponderado de él.

a) Asignar 1 punto por determinar un punto en el plano pedido y utilizarlo para calcular la ecuación pedida.

a) Asignar 1.5 punto por determinar de manera correcta la ecuación del plano.

b) Asignar 1 punto por calcular de manera correcta la ecuación del plano tangente (no desagregar el puntaje).

b) Asignar 1 punto por la correcta estimación del valor pedido.

- Agregar 1 punto base.

6. *a*) Sabemos que,

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}.$$

En nuestro caso se tiene que,

$$x_s = 2s, \quad x_t = -2t, \quad y_s = 2s$$

$$y_t = 2t, \quad z_s = 1, \quad z_t = 1.$$

Luego evaluando en los puntos pedidos,

$$\frac{\partial w}{\partial s}(1,0) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 3.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(1,0) = 1 \cdot (0) - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 = 5,$$

Se concluye que la expresión pedida es

$$w_s(1,0) + w_t(1,0) = 8.$$

b) Para calcular la derivada pedida, comenzamos calculando

$$w_t = w_x \cdot x_t + w_y \cdot y_t + w_z \cdot z_t = w_x \cdot (-2t) + w_y \cdot (2t) + w_z \cdot 1.$$

A continuación

$$(w_t)_s = (-2t)(w_x x \cdot x_s + w_x y \cdot y_s + w_x z \cdot z_s) + (2t)(w_{yx} \cdot x_s + w_{yy} \cdot y_s + w_{yz} \cdot z_s) + (w_z x \cdot x_s + w_z y \cdot y_s + w_z z \cdot z_s)$$

de donde se obtiene,

$$w_{ts} = (-2t)(w_x x \cdot 2s + w_x y \cdot 2s + w_x z \cdot 1) + (2t)(w_{yx} \cdot 2s + w_{yy} \cdot 2s + w_{yz} \cdot 1) + (w_z x \cdot 2s + w_z y \cdot 2s + w_z z \cdot 1).$$

Asignación de puntaje

a) Asignar 1 punto por el correcto uso de la regla de la cadena para expresar w_s, w_t.

a) Asignar 1 punto por calcular de manera correcta las derivadas $x_s, y_2, z_s, \ldots$.

a) Asignar 1 punto por obtener el valor pedido.

b) Asignar 1 punto por obtener de manera correcta la expresión respectiva de w_t.

b) Asignar 1 punto por utilizar de manera correcta la regla de la cadena al momento de expresar la segunda derivada w_{ts}.

b) Asignar 1 punto por obtener la expresión correcta.

- Agregar 1 punto base.