EYP 1025-1027 Métodos Probabilísticos

Clase 15

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle

Departamento de Estadística
Pontificia Universidad Católica de Chile

Contenido I

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Dado un vector aleatorio $(X_1, \ldots, X_n)$ en $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ y n funciones real valoradas $g_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, considere la transformación de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$,

$$(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow (Y_1, \ldots, Y_n),$$

donde

$$\begin{aligned} Y_1 &= g_1(X_1, \ldots, X_n) \\ &\vdots \\ Y_n &= g_n(X_1, \ldots, X_n). \end{aligned}$$

Entonces, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ es vector aleatorio en $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$, ya cada una de sus coordenadas, $Y_1, \ldots, Y_n$, es una variable aleatoria en $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$.

Conocida la distribución de $(X_1, \ldots, X_n)$, deseamos, ahora, determinar la distribución del nuevo vector aleatorio $(Y_1, \ldots, Y_n)$.

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Note que $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$, donde $\boldsymbol{g} = (g_1, \ldots, g_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es tal que

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), \ldots, g_n(\boldsymbol{x})).$$

Sea,

$$\boldsymbol{h}(B) = \boldsymbol{g}^{-1}(B) := \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in B\}, \quad B \subset \mathbb{R}^n.$$

Entonces, en cualquier situación, la distribución de probabilidad de $\boldsymbol{Y}$ puede detreminrase como,

$$\begin{aligned} P_{\boldsymbol{Y}}(B) =& P(\boldsymbol{Y} \in B) \\ =& P(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}) \in B) \\ =& P(\boldsymbol{X} \in \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in B\}) \\ =& P_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{g}^{-1}(B)) = P_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{h}(B)), \quad B \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Caso discreto

(I) Caso Discreto: Si $(X_1, \ldots, X_n)$ e $(Y_1, \ldots, Y_n)$ son discretos, entonces la fmp conjunta de $Y_1, \ldots, Y_n$ se determina como,

$$
\begin{aligned}
f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) &= P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) \\
&= P(g_1(X_1, \ldots, X_n) = y_1, \ldots, g_n(X_1, \ldots, X_n) = y_n) \\
&= P((X_1, \ldots, X_n) \in \{(x_1, \ldots, x_n) : g_1(x_1, \ldots, x_n) = y_1, \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n) = y_n\}) \\
&= \sum_{\{(x_1,\ldots,x_n):g_1(x_1,\ldots,x_n)=y_1,\ldots,g_n(x_1,\ldots,x_n)=y_n\}} \!\!\!\!\!\!\!\! \sum \cdots \sum \quad P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\
&= \sum_{\{(x_1,\ldots,x_n):g_1(x_1,\ldots,x_n)=y_1,\ldots,g_n(x_1,\ldots,x_n)=y_n\}} \!\!\!\!\!\!\!\! \sum \cdots \sum \quad f_{X_1,\ldots,Y_n}(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

Nota: Conviene determinar primero el recorrido o soporte de $(Y_1, \ldots, Y_n)$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Y} &= \{(y_1, \ldots, y_n) : y_i = g_i(x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots, n, \text{ para algún } (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}\} \\
&= \{y_1, \ldots, y_n) : f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) > 0\},
\end{aligned}
$$

donde $\mathcal{X} = \{(x_1, \ldots, x_n) : f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) > 0\}$ es el recorrido o soporte de $(X_1, \ldots, X_n)$.

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Ejemplo 1.1

Sean $Y_1 = X_1 + X_2$ e $Y_2 = X_1 - X_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) &= P(X_1 + X_2 = y_1, X_1 - X_2 = y_2) \\ &= P((X_1, X_2) \in \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = y_1, x_1 - x_2 = y_2\}) \\ &= \sum\sum_{\{(x_1,x_2):x_1+x_2=y_1,x_1-x_2=y_2\}} P(X_1 = y_1, X_2 = x_2) \end{aligned}$$

En este caso, $\mathcal{Y} = \{(y_1, y_2) : x_1 + x_2 = y_1, x_1 - x_2 = y_2$ algún $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}\}$.

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Por ejemplo, si:

x_1	x_2	$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$
0	2	$1/4$
3	4	$1/8$
1	6	$1/8$
2	8	$1/2$

entonces:

$y_1 = x_1 + x_2$	$y_2 = x_1 - x_2$	$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2)$
2	-2	$1/4$
7	-1	$1/8$
7	-5	$1/8$
10	-6	$1/2$

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Ejemplo 1.2

Sean X_1 e X_2 variables aleatorias con fmp conjunta dada por,

	f_{X_1,X_2}	(x_1, x_2)
$x_1 \backslash x_2$	0	1
-1	1/7	1/7
0	2/7	1/7
1	1/7	1/7

Sea $g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ y $g_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Claramente, las variables aleatorias,

$$Y_1 = g_1(X_1, X_2) = X_1 + X_2 \quad \text{e} \quad Y_2 = g_2(X_1, X_2) = X_1 X_2$$

toman valores en $\mathcal{Y}_1 = \{-1, 0, 1, 2\}$ y $\mathcal{Y}_2 = \{-1, 0, 1\}$, respectivamente.

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Entonces, la fmp conjunta de Y_1 y Y_2 queda determinada por,

	$f_{Y_1,Y_2}\ (y_1, y_2)$		
$y_1 \backslash y_2$	-1	0	1
-1	0	$1/7$	0
0	$1/7$	$2/7$	0
1	0	$2/7$	0
2	0	0	$1/7$

Por ejemplo,

i) $P(Y_1 = -1, Y_2 = -1) = P(\{\emptyset\}) = 0 \Longrightarrow$ no existe un par (x_1, x_2) tal que $x_1 + x_2 = -1$ y, simultáneamente, $x_1 x_2 = -1$.

ii) $P(Y_1 = -1, Y_2 = 0) = P(X_1 = -1, X_2 = 0) = 1/7$.

iii) $P(Y_1 = 0, Y_2 = 0) = P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 2/7$.

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Formalización para $n = 2$: Como ya sabemos, si (X_1, X_2) es un vector aleatorio discreto, entonces su soporte

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) : f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) > 0\}$$

es un subconjunto contable de valores en $\mathbb{R}^2$.

Luego, el recorrido de $(Y_1, Y_2) = (g_1(X_1, X_2), g_2(X_1, X_2))$, digamos,

$$\mathcal{Y} = \{(y_1, y_2) : y_1 = g_1(x_1, x_2),\ y_2 = g_2(x_1, x_2),\ \text{algún } (x_1, x_2) \in \mathcal{X}\},$$

también es un subconjunto contable de valores en $\mathbb{R}^2$; es decir, si (X_1, X_2) es discreto, entonces (Y_1, Y_2) también es discreto, y su fmp se determina como,

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \sum\sum_{\{(x_1,x_2)\in\mathcal{X}: g_1(x_1,x_2)=y_1,\ g_1(x_1,x_2)=y_2\}} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2).$$

Ejemplo 1.3

Sean X_1 y X_2 variables aleatorias discretas independientes. Se desea encontrar la fpm de $X_1 + X_2$.

Paso 1: Transformar $(X_1, X_2) \longrightarrow (Y_1, Y_2)$, donde $Y_1 = X_1 + X_2$ (variable de interés) e $Y_2 = X_2$ (variable auxiliar arbitraria); entonces,

$$\begin{aligned} P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) &= P(X_1 + X_2 = y_1, X_2 = y_2) \\ &= P(X_1 = y_1 - y_2, X_2 = y_2) \\ &= P(X_1 = y_1 - y_2)P(X_2 = y_2) \quad \text{(por independencia)} \end{aligned}$$

Paso 2: Marginalizar con respecto a la variable auxiliar Y_2,

$$P(Y_1 = y_1) = \sum_{\{y_2:(y_1-y_2,y_2)\in\mathcal{X}\}} P(X_1 = y_1 - y_2)P(X_2 = y_2). \quad (*)$$

Aplicación: Si $X_1 \sim P(\lambda_1)$ y $X_2 \sim P(\lambda_2)$ son va's independientes, entonces $Y = X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$. En efecto, de $(*)$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
P(Y=y) &= \sum_{\{k:k\geq 0,\ y-k\geq 0\}} P(X_1 = y-k)P(X_2 = k) \\
&= \sum_{k=0}^{y} \frac{\lambda_1^{y-k} e^{-\lambda_1}}{(y-k)!} \frac{\lambda_2^{k} e^{-\lambda_2}}{k!} \quad (x_1, x_2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq k \leq y,\ y \geq 0) \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} \sum_{k=0}^{y} \binom{y}{k} \lambda_1^{y-k} \lambda_2^{k} \quad y = 0, 1, 2, \ldots \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} (\lambda_1 + \lambda_2)^y}{y!} \quad y = 0, 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

la cual es la fmp de $Y = X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Extensión: Si $X_i \sim P(\lambda_i)$, $i = 1, \ldots, n$, son va's independientes, entonces $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

Tarea: Pruebe y extienda los siguientes resultados:

(a) Si $X_1 \sim Bin(n_1, p)$ y $X_2 \sim Bin(n_2, p)$ son va's indendientes
$\Longrightarrow Y = X_1 + X_2 \sim Bin(n_1 + n_2, p)$.

(b) Si $X_1 \sim Bin(n_1, p)$ y $X_2 \sim Bin(n_2, p)$ son va's indendientes
$\Longrightarrow Y = X_1 + X_2 \sim BN(r_1 + r_2, p)$.

(c) Pruebe que $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, p)$, donde $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} Ber(p)$.

(c) Pruebe que $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, p)$, donde $X_1, \ldots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} Geo(p)$.

Caso continuo: Suponga que $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$ son vectores aleatorios continuos. Tal como en el caso univariado, se distinguen dos casos dependiendo si la transformación,

$$\boldsymbol{g} : \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^n$$

sea uno-a-uno (biunívoca) o no sea uno-a-uno (no biunívoca), donde, igual que antes, $\mathcal{X} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) > 0\}$ e
$\mathcal{Y} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ para algún $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}\}$.

Caso biunívoco: Sea $y_i = g_i(x_1, \ldots, x_n)$ para $i = 1, \ldots, n$. Suponga que para cada $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}$ existe un único $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{Y}$ tal que,

$$x_i = h_i(y_1, \ldots, y_n) \quad i = 1, \ldots, n$$

donde $(h_1, \ldots, h_n)$ es la transformación inversa de $(g_1, \ldots, g_n)$.

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Defina el *Jacobiano de la transformación* como,

$$J = \text{det}\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

el cual es una función de $(y_1, \ldots, y_n)$, ya que

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial h_i(y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Si dichas derivadas existen y son todas continuas y $J \neq 0$ para todo $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{Y}$, entonces $Y_1, \ldots, Y_n$ tienen fdp conjunta de dada por,

$$f_{Y_1,\ldots,Y_n}(y_1, \ldots, y_n) = \begin{cases} |J| f_{Y_1,\ldots,Y_n}(h_1(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_n(y_1, \ldots, y_n)), & \text{si } (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{Y}, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Idea de la demostración: Sea $\boldsymbol{h}(B) = \boldsymbol{g}^{-1}(B) = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{g}(x) \in B\}$, $B \subset \mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\begin{aligned}
P_{\boldsymbol{Y}}(B) &= P(\boldsymbol{Y} \in B) \\
&= P(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}) \in B) \\
&= P(\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{g}^{-1}(B)) \\
&= P(\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{h}(B)) \\
&= \int_{\boldsymbol{h}(B)} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}^{-1}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})) \\
&= \int_{B} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}))|J| d\boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{h}(B) \Longrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in B), \quad (*)
\end{aligned}$$

de acuerdo con la formula para cambio de variables en integrales múltiples.

Por otro lado, como el v.a. $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X})$ también es (absolutamente) continuo, entonces

$$P_{\boldsymbol{Y}}(B) = P(\boldsymbol{Y} \in B) = \int_B f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}, \quad (**)$$

donde $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y})$ es la fdp de $\boldsymbol{Y}$.

Considerando $(*)$ y $(**)$, se concluye que

$$\int_B f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}))|J| d\boldsymbol{y} = \int_B f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}, \quad \forall\, B \subset \mathbb{R}^n,$$

y por lo tanto que $f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}))|J| = f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Formalización para $n = 2$:

Teorema 1.1

Sea (X_1, X_1) un vector aleatorio continuo con fdp conjunta $f_{(X_1,X_2)}$. Sean, $\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) : f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Suponga que,

i) $y_1 = g_1(x_1, x_2)$ e $y_2 = g_2(x_1, x_2)$ definen una transformación uno a uno de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y} = \{(y_1, y_2) : y_1 = g_1(x_1, x_2),\ y_2 = g_2(x_1, x_2)$ para algún $(x_1, x_2) \in \mathcal{Y}\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

ii) Las derivadas parciales de la trasnformación inversa $x_1 = h_1(y_1, y_2)$ y $x_2 = h_2(y_1, y_2)$ son continuas sobre $\mathcal{Y}$.

iii) El jacobiano de la transformación

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \text{ es } \neq 0 \text{ para } (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}.$$

Entonces la fdp conjunta de $Y_1 = g_1(X_1, X_2)$ y $Y_2 = g_2(X_1, X_2)$, está dada por,

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} |J| f_{(X,Y)}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2), & \text{si } (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Por ejemplo, para $n = 2$, la transformación,

$$y_1 = x_1 + x_2 \longrightarrow g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
$$y_2 = x_1 - x_2 \longrightarrow g_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

es uno-a-uno sobre todo $\mathbb{R}^2$. La transformación inversa es,

$$x_1 = (y_1 + y_2)/2 \longrightarrow h_1(x_1, x_2) = (y_1 + y_2)/2$$
$$x_2 = (y_1 - y_2)/2 \longrightarrow h_2(x_1, x_2) = (y_1 - y_2)/2,$$

y el *Jacobiano de la transformación* es,

$$J = \text{det}\begin{pmatrix} \partial x_1/\partial y_1 & \partial x_1/\partial y_2 \\ \partial x_2/\partial y_1 & \partial x_2/\partial y_2 \end{pmatrix} = \text{det}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -1/2$$

$\Longrightarrow |J| = +1/2$. Asi,

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{(X_1,X_2)}((y_1 + y_2)/2, (y_1 - y_2)/2), & \text{si } (y_1, y_2) \in \mathcal{Y}, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Aplicaciones:

1) Sean $X_1, X_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \exp(1)$, es decir,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} e^{-x_1-x_2}, & \text{si } x_1 > 0,\ x_2 > 0, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Queremos la fdp de $(Y_1, Y_2) = (X_1 + X_2, X_1 - X_2)$. Note que $x_1, x_2 > 0 \Longrightarrow y_1 = x_1 + x_2 > 0$. Luego,

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) &= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{y_1+y_2}{2} - \frac{y_1-y_2}{2}}, & \text{si } \frac{y_1+y_2}{2} > 0,\ \frac{y_1-y_2}{2} > 0, \\ 0, & \text{eoc,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y_1}, & \text{si } y_2 > y_1,\ y_2 < -y_1,\ y_1 > 0, \\ 0, & \text{eoc,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-y_1}, & \text{si } |y_2| < y_1,\ y_1 > 0, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases} \end{aligned}$$

Distribución de funciones de vectores aleatorios

2) Sean $X_1, X_2 \overset{\text{iid}}{\sim} U(0,1)$, es decir,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 1, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases}$$

Entonces, la fdp de $(Y_1, Y_2) = (X_1 + X_2, X_1 - X_2)$ es,

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } 0 < \frac{y_1+y_2}{2} < 1,\ 0 < \frac{y_1-y_2}{2} < 1, \\ 0, & \text{eoc,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } -y_1 < y_2 < 2 - y_1,\ 0 < y_1 < 1, \\ & -(2-y_1) < y_2 < y_1,\ 1 < y_1 < 2, \\ 0, & \text{eoc.} \end{cases} \end{aligned}$$

Tarea: En 1) y 2), bosqueje los recorridos $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$, y determine las distribuciones marginales de Y_1 e Y_2.

3) Sean $X_1, X_2 \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$, es decir,

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) = (2\pi)^{-1} e^{-x_1^2/2} e^{-x_2^2/2}, \quad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 \sim N(0,2) \\ Y_2 &= X_1 - X_2 \sim N(0,2). \end{aligned}$$

Bosqueje los recorridos en este caso. Obtenga la fdp conjunta de Y_1 e Y_2. Son Y_1 e Y_2 variables aleatorias independientes? Justifique.

Ejemplo 1.4

Sean X_1 e X_2 variables aleatorias continuas independientes. Se desea la fdp de $X_1 + X_2$.

Paso 1: Sean $Y_1 = X_1 + X_2$ (variable de interés) e $Y_2 = X_2$ (variable auxiliar arbitraria). Entonces, $y_1 = g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e $y_2 = g_1(x_1, x_2) = x_2$, con inversos $x_1 = h_1(y_1, y_2) = y_1 - y_2$ y $x_2 = h_2(y_1, y_2) = y_2$. Luego,

$$J = \begin{pmatrix} \partial x_1/\partial y_1 & \partial x_1/\partial y_2 \\ \partial x_2/\partial y_1 & \partial x_2/\partial y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

y

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(y_1 - y_2, y_2) = f_{X_1}(y_1 - y_2) f_{X_2}(y_2).$$

Paso 2: $f_{Y_1}(y_1) = \int_{\{y_2:(y_1-y_2,y_2)\in\mathcal{X}\}} f_{X_1}(y_1 - y_2) f_{X_2}(y_2) dy_2.$

Distribución de funciones de vectores aleatorios

Por ejemplo, si $Y = X_1 + X_2$, donde $X_1, X_2 \overset{\text{iid}}{\sim} \exp(\lambda)$, entonces

$$f_Y(y) = \begin{cases} \int_0^y \lambda^2 e^{-\lambda(y-z+z)} dz & \text{si } y > 0, \\ 0, & \text{eoc}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lambda^2 y e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0, \\ 0, & \text{eoc}, \end{cases}$$

es decir, $Y = X_1 + X_2 \sim Gama(2, \lambda)$

Extensión: Si $X_i \sim Gama(\alpha_i, \lambda)$, $i = 1, \ldots, n$ son va's independientes, entonces $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim Gama\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \lambda\right)$.