PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre 2015

MAT1203 - Álgebra Lineal
Interrogación 1 - miércoles 1 de abril - solución

1. a) Sea $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ r \end{bmatrix}$, $u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ s \end{bmatrix}$ y $u_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{bmatrix}$. Determine todas las condiciones posibles sobre los parámetros r y s tales que $u_4 \in \text{Gen}\{u_1, u_2, u_3\}$.

Solución:

El problema es equivalente a que el siguiente sistema tenga solución:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & r & s \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{bmatrix}.$$

Escalonando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & s & s \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & r & s-1 & s \end{bmatrix}. \Big\} 0{,}5p$$

Si $r = 0$, entonces:

$r = 0 \wedge$ Para $s = 1$ de la tercera fila no hay solución. 0,5p

$r = 0 \wedge$ Para $s \neq 1$ hay tres pivotes y por lo tanto hay solución. 0,5p

Si $r \neq 0$ se sigue escalonando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r & s & s \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & s-1-r & s-r \end{bmatrix}. \Big\} 0{,}5p$$

Para $s - r = 1$ de la tercera fila no hay solución. 0,5p

Para $s - r \neq 1$ hay tres pivotes y por lo tanto hay solución. 0,5p

Desde aquí en adelante
podría incluir lo anterior y queda 1p
1p
1p

b) Sea $\{v_1, v_2\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ linealmente independiente. Demuestre que el conjunto $\{2v_1 + 4v_2, 3v_1 + av_2\}$ es linealmente dependiente si y sólo si $a = 6$.

Solución:

2p $(\rightarrow)$.

Si $\{2v_1 + 4v_2, 3v_1 + av_2\}$ es L.D., entonces existe α no nulo tal que

$$(2v_1 + 4v_2) = \alpha(3v_1 + av_2).$$

Esto último implica que $(2 - 3\alpha)v_1 + (4 - a\alpha)v_2 = \vec{0}$.

Pero $\{v_1, v_2\}$ es L.I., entonces $(2-3\alpha) = (4-a\alpha) = 0$, es decir $\alpha = 2/3$ y $a = 6$.

1p $(\leftarrow)$.

Si $a = 6$, entonces $3(2v_1 + 4v_2) - 2(3v_1 + 6v_2) = \vec{0}$. Luego el conjunto es L.D.

no hay divisiones

2. Sea A de 3×4 tal que la suma de todas sus columnas es $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ y su forma escalonada reducida es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

   a) Escriba la solución general del sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

   Solución:

1p Del enunciado se tiene que la solución general del sistema $Ax = \vec{0}$ es Gen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

1p También del enunciado se tiene que $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

1p Entonces la solución general es de la forma: $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Determine, justificadamente, tres veces la segunda columna de A más cuatro veces la tercera columna de A.

Solución:

Se pide $A \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$. 1p

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ 1p}}{=} A \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \underbrace{= A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \vec{0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{1p}$$

3. *a*) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una función tal que para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene $F(u + \alpha v) = F(u) + \alpha F(v)$. Determine una matriz A tal que para todo vector $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ se cumpla

$$F\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Solución:

0,5p

Sea $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Se tiene que $u = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

0,5p

Aplicando F se tiene:

$$F(u) = F\left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = aF \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + bF \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1p

Esto último es por definición el producto de una matriz de 3×2 cuyas columnas son $F \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ multiplicada por el vector $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

1p

Por lo tanto basta tomar $A = \left[F \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; F \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$.

b) Sea $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$.

Calcule la imagen por M del hiperplano definido por $x_1 + x_2 = 1$. ¿ Corresponde este conjunto a un hiperplano? Justifique

Solución:

Sea x un vector en el hiperplano, entonces

0,5p

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 - x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1p

$$Mx = M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 M \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 M \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando:

0,5p

$$Mx = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

0,5p

Pero $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Por lo tanto la imagen es Gen $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$.

0,5p

Como es un conjunto generado por dos vectores L.I. en $\mathbb{R}^3$, entonces es un hiperplano.

4. Decida justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Sea A matriz de 4×3 y $b \in \mathbb{R}^4$. Si el sistema $Ax = b$ tiene solución única, entonces A tiene rango 3.

Solución:

Verdadero:

1,5p

Si el sistema tiene solución única, entonces la forma escalonada reducida de la amtriz ampliada $[A \mid b]$ no puede tener variables libres, por lo tanto debe el número de pivotes debe ser igual al número de variables que es 3.

b) Si A es una matriz tal que $A\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ y $A\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$, entonces el sistema $Ax = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ es consistente.

1,5p

Solución:

Verdadero:

Se tiene que

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}.$$

Reemplazando queda:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 2A\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} - A\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = A\left(2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right).$$

Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Descontar 0,5p si hay un error numérico pero el argumento es el correcto.

c) Sean A, B y C matrices tales que $AB = C$. Si las columnas de C forman un conjunto linealmente independiente, entonces las columnas de B forman un conjunto linealmente independiente.

1,5p

Solución:

Verdadero:

Si las columnas de B son L.D., entonces existe $u \neq \vec{0}$ tal que $Bu = \vec{0}$.

Entonces existe $u \neq \vec{0}$ tal que $ABu = A\vec{0} = \vec{0}$.

Luego las columnas de C son L.D. y eso es una contradicción.

d) Sea A una matriz de 2×3. Si la forma escalonada reducida de A tiene 2 pivotes, entonces el sistema $A^t x = \vec{0}$ tiene solución única.

1,5p

Solución:

Verdadero:

1p Si la forma escalonada reducida de A tiene 2 pivotes, entonces como A tiene 2 filas, estas son L.I.

0,5p Pero las filas de A son las columnas de A^t, luego las columnas de A^t son L.I.

Por lo tanto el sistema $A^t x = \vec{0}$ tiene solución única.

En la c) se puede otorgar 0,5p si saben que columnas L.I. es equivalente a sistema $[\ ]x = \vec{0}$ sol. única