Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2016

MAT 1620 – Cálculo II

Solución Examen

1. Determine todos los valores de C de forma que converja la integral impropia

$$\int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{C}{x+1} \right) dx \, .$$

Solución. Tenemos que la integral es impropia de primera especie

$$\begin{aligned} I = \int_0^\infty \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{C}{x+1} \right) dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{C}{x+1} \right) dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln(x^2+1) - C\ln(x+1) \Big]_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{b^2+1}{(b+1)^C} \right) \\ &= \ln\left(\lim_{b\to\infty} \frac{b^2+1}{(b+1)^C} \right) = \ln(K) \, . \end{aligned}$$

Se tiene que

$$K = \lim_{b\to\infty} \frac{b^2+1}{(b+1)^C} = \begin{cases} 0 & \text{Si } C > 2 \\ 1 & \text{Si } C = 2 \\ \infty & \text{Si } C < 2 \end{cases}$$

Se sigue que la integral impropia I converge si y sólo si $C = 2$.

2. ¿Para que válores de p es convergente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+n^{-p})$?

Solución. Considere las sucesiones positivas $a_n = \ln(1+n^{-p})$ y $b_n = n^{-p}$ para $p > 1$, entonces haciendo el cambio de variables $x = n^{-p}$ y usando la regla de L'Hospital vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n^{-p})}{n^{-p}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1 > 0\,.$$

Como $\sum b_n$ es convergente si y sólo si $p > 1$ entonces $\sum a_n = \sum \ln(1+n^{-p})$ es convergente si y sólo si $p > 1$.

3. Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y) = \dfrac{1}{4}x^4 - x^2y^2 + y^2$ en la región $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ y $x^2+y^2 \leqslant 9$. En caso de puntos críticos interiores decida si corresponden a máximo, mínimos o puntos silla. Además determine el máximo y mínimo absolutos.

Solución. Tenemos que

$$\left.\begin{array}{rcr} f_x &=& x^3 - 2xy^2 = 0 \\ f_y &=& -2x^2y + 2y = 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x(x^2-2y^2) &=& 0 \\ 2y(1-x^2) &=& 0 \end{array}\right|$$

En la segunda ecuación, si $y = 0$ entonces $x = 0$ y obtenemos el punto $P_1 = (0,0)$. Si $1-x^2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ ya que $x \geqslant 0$ y sustituyendo en la primera ecuación se obtiene que $1 - 2y^2 = 0 \Longrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ya que $y \geqslant 0$ y obtenemos el punto $P_1(1, 1/\sqrt{2})$ que está al interior. Usando el test de las segundas derivadas parciales vemos que

$$D(x,y) = (3x^2-2y^2)(-2x^2+2) - (-4xy)^2 \Longrightarrow D\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -8 < 0\,.$$

entonces P_1 es un punto silla.
Ahora determinamos los valores extremos de $f(x,y)$ en el borde de la región

- $x = 0$, $y \in [0,3]$ se tiene $f(0,y) = y^2$ que tiene un máximo en $f(0,3) = 9$ y un mínimo en $f(0,0) = 0$.
- $y = 0$, $x \in [0,3]$ se tiene $f(x,0) = \frac{1}{4}x^4$ que tiene un máximo en $f(3,0) = \frac{81}{4}$ y un mínimo en $f(0,0) = 0$
- Si $y = \sqrt{9-x^2}$, $x \in [0,3]$ se tiene que

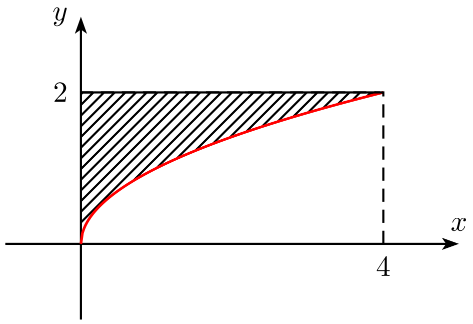
$$g(x) = f(x, \sqrt{9-x^2}) = \frac{1}{4}x^4 - x^2(9-x^2) + (9-x^2) = \frac{5}{4}x^4 - 10x^2 + 9$$

  Tenemos que $g'(x) = 5x^3 - 20x = 5x(x^2-4)$ entonces g tiene dos puntos críticos en $[0,3]$, $x = 0$ y $x = 2$. Se sigue que g tiene un mínimo en $g(2) = f(2,\sqrt{5}) = -11$ y un máximo en $g(3) = f(3,0) = \frac{81}{4}$.

Por lo tanto, los valores máximos y mínimos de f en la región son $f(2,\sqrt{5}) = -11$ mínimo abs. y $f(3,0) = \frac{81}{4}$ máximo abs.

4. Evalúe $\displaystyle\iint_S \operatorname{sen}(y^3)\, dA$, siendo S la región acotada por $y = \sqrt{x}$; $y = 2$ y $x = 0$.

Solución. La región S de integración es la región achurada del plano



Entonces,

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 4,\ \ \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 2,\ \ 0 \leqslant x \leqslant y^2\}$$

y por lo tanto

$$\iint_S \sin(y^3)\, dA = \int_0^2 \int_0^{y^2} \operatorname{sen}(y^3)\, dx dy = \int_0^2 y^2 \operatorname{sen}(y^3)\, dy = -\frac{1}{3}\cos(y^3)\Big|_{y=0}^{y=2} = \frac{1}{3}(1 - \cos(8))\,.$$

5. Calcule la masa de una esfera sólida de radio 5 si su densidad de masa en cada punto es el triple de la distancia del punto al centro de la esfera.

Solución. En coordenadas esféricas podemos describir la esfera por

$$\Omega = \{(\rho, \theta, \phi) \ : \ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \ , \ \ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi \ , \ \ 0 \leqslant \rho \leqslant 5\} \ .$$

Dado que la densidad en (x, y, z) es el triple de la distancia del punto al centro de la esfera, la función densidad es

$$\rho(x, y, z) = 3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3\rho \ .$$

Entonces, la masa de la esfera E es

$$\begin{aligned}
m &= \iiint\limits_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dV \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{5} 3\rho \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho d\phi d\theta \\
&= 3 \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi \right) \left(\int_0^{5} \rho^3 \, d\rho \right) \\
&= 3 \cdot (2\pi)(2) \left(\frac{5^4}{4} \right) \\
&= 1875\pi \ .
\end{aligned}$$

6. Encuentre el volumen del sólido que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y arriba del plano xy y debajo del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución. Podemos escribir la ecuación de la esfera en coordenas esféricas como $\rho^2 = 4$ y la ecuación del cono se puede escribir

$$\rho \cos \phi = \sqrt{p^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta} = \rho \operatorname{sen} \phi \, ,$$

lo cual nos da $\operatorname{sen} \phi = \cos \phi$ lo que implica que $\phi = \pi/4$. Por lo tanto, la descripción del sólido en coordenadas esféricas es

$$S = \left\{ (\rho, \theta, \phi) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant 2 \, , \; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \, , \; \frac{\pi}{4} \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{2} \right\} \, .$$

Luego, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho d\phi d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen} \phi d\phi \right) \left(\int_0^2 \rho^2 d\rho \right) \\ &= (2\pi) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{2^3}{3} \right) \\ &= \frac{8\sqrt{2}\pi}{3} \, . \end{aligned}$$

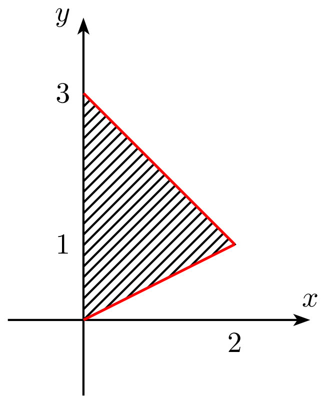
7. Sea

$$I = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)dxdy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)dxdy \ .$$

Halle y grafique una región R en el plano cartesiano de modo que el valor de I puede ser escrito como una integral doble, vale decir en la forma:

$$\iint\limits_R f(x,y)\, dxdy \ .$$

Solución. Geométricamente las regiones de integración de las dos integrales dobles dadas es



Entonces, podemos considerar la región R como la del gráfico, es decir

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2 \ , \ \frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 3 - x \right\} \ .$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \iint\limits_R f(x,y)\, dA &= \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)dxdy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^2 \int_{x/2}^{3-x} f(x,y)dydx \ . \end{aligned}$$

8. Use un cambio de variables adecuado para calcular la integral

$$\iint_S \cos(x-y)\,\operatorname{sen}(x+y)\;dA,$$

siendo S el triángulo con vértices $(0,0)$, $(\pi,\,-\pi)$ y $(\pi,\,\pi)$.

Solución. Haciendo el cambio de variables $u = x-y$, $v = x+y$ y despejando se obtiene que $x = \frac{1}{2}(u+v)$, $y = \frac{1}{2}(v-u)$. El Jacobiano de T es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\,.$$

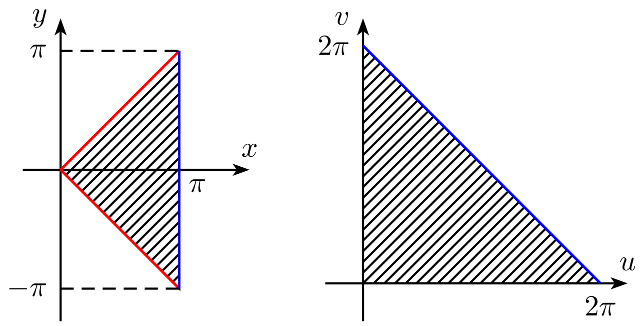
La región S del plano xy corresponde a las rectas

$$x-y=0\,, \quad x+y=0\,, \quad x=\pi$$

entonces la imagen S^* de estas recta en el plano uv son

$$u=0\,, \quad v=0\,, \quad v=2\pi-u$$

Así, la región S^* es región triangular con vértices $(0,0)$, $(2\pi,0)$ $(0,2\pi)$ que se muestra en la siguiente figura



Entonces,

$S^* = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant u\leqslant 2\pi, 0\leqslant v\leqslant 2\pi{-}u\} = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leqslant v\leqslant 2\pi, 0\leqslant u\leqslant 2\pi{-}v\}$.

Por la fórmula de cambio de variables,

$$\begin{aligned}
\iint_S f(x,y)dxdy &= \iint_{S^*} f\left(\tfrac{1}{2}(u+v), \tfrac{1}{2}(v-u)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi-v} \cos(u)\operatorname{sen}(v)\;dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(u)\operatorname{sen}(v)\Big]_{u=0}^{u=2\pi-v} dv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(2\pi-v)\operatorname{sen}(v)dv \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2(v)dv \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2v)}{2}dv \\
&= -\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$