PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2016

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución a la Interrogación N° 1

1. Sean
$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
¿Pertenece $\mathbf{u}$ al plano generado por las columnas de la matriz A?

Primera Solución:

El vector $\mathbf{u}$ pertenece al plano generado por las columnas de A si y solo si es combinación lineal de ellas; o sea, si y solo si existen escalares α, β tales que
$$\alpha \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$
o sea, si y solo si
$$\begin{bmatrix} 3\alpha + 5\beta \\ -2\alpha + 6\beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$
para algunos valores de α y β.

Pero esto es equivalente a exigir que el sistema
$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$
sea consistente.

Para verificar si este es el caso, consideramos la matriz ampliada del sistema, y aplicamos el método de eliminación Gaussiana:
$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 \\ -2 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & -8 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & -8 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Como la matriz escalonada tiene todos los pivotes antes de la última columna, el sistema es consistente, por lo que la respuesta a la pregunta original es "sí".

Segunda Solución:

Otra forma de resolver este ejercicio es como sigue:

El vector $\mathbf{u}$ pertenece al espacio generado por las columnas de A si y solo si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ es consistente. Para verificar esto último, aplicamos el mismo método que en la primera solución.

Puntaje:

- Por argumentar (en cualquiera de las dos formas mostradas, o en otra forma válida), que el problema es equivalente a determinar si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$ es consistente, 2 puntos.
- Por escalonar la matriz ampliada del sistema (o llegar a alguna otra forma que permita determinar si el sistema es consistente), 2 puntos.
- Por llegar a la conclusión correcta, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

2. Determine todas las matrices A tales que

$$A\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Claramente, ya que el dominio de la transformación $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ es $\mathbb{R}^2$, A debe tener 2 columnas; asimismo, como su recorrido es parte de $\mathbb{R}^2$, A debe tener 2 filas.

Así,

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

De la condición dada ($A\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$) se desprende que $3\alpha + 2\beta = 2$ y $3\gamma + 2\delta = 1$.

Resolviendo el sistema, llegamos a que $\alpha = 2/3 - 2\beta/3$ y $\gamma = 1/3 - 2\delta/3$.

Finalmente, llegamos a la conclusión de que

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 - 2\beta/3 & \beta \\ 1/3 - 2\delta/3 & \delta \end{bmatrix},$$

donde β y δ pueden tomar cualquier valor real.

Puntaje:

- Por concluir (con una buena justificación) que A debe ser de 2×2, 1 punto.
- Por plantear correctamente el problema, 2 puntos.
- Por llegar a la forma general que debe tener A, 3 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

3. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ 4x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ tal que $T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Así, buscamos un vector $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ que sea solución del sistema de ecuaciones que tiene por matriz ampliada a

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 4 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar esta solución, escalonamos la matriz:

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 & 13 \\ 4 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} \\ 0 & \frac{21}{5} & -\frac{21}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{21}{5} & -\frac{21}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De aquí, vemos que el sistema tiene solución única, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, por lo que el vector buscado es $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Nota: no es necesario llegar a la forma escalonada reducida; el sistema puede ser resuelto aplicando sustitución hacia atrás a partir de la escalonada (penúltimo paso del proceso mostrado).

Puntaje:

- Por indicar que el vector buscado debe ser solución del sistema de ecuaciones que se menciona: 2 puntos.
- Por escalonar correctamente la matriz, llegando a la forma escalonada o a la forma escalonada reducida por filas: 2 puntos.
- Por resolver el sistema, llegando a la única solución posible: 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

4. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, y sea T la transformación lineal definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

a) ¿Es T inyectiva?

b) ¿Es T sobreyectiva?

c) ¿Son linealmente independientes las columnas de B? ¿Qué implica esto en términos de la cantidad de soluciones del sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

Solución:

a) Sabemos (teorema 8, secc. 2.3) que T es inyectiva $\iff$ A es invertible $\iff$ A es equivalente por filas a la matriz identidad de 3×3 $\iff$ A tiene 3 posiciones pivote $\iff$ la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial $\iff$ las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente.

Así, verificando cualquiera de estas propiedades sabremos si T es inyectiva o no. En particular, lo más fácil parece ser verificar si A tiene 3 posiciones pivote. Para esto escalonamos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9/2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9/2 \\ 0 & 0 & -23/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

lo que nos muestra que efectivamente A tiene 3 posiciones pivote, por lo que T es inyectiva.

b) Sí: por el mismo teorema 8, T es inyectiva $\iff$ T "mapea" $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^3$, o sea, es sobreyectiva.

c) Las columnas de B no son linealmente independientes; esto puede comprobarse de varias maneras:

- Al llevar la matriz a forma escalonada reducida, obtenemos

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{19} \end{bmatrix}$$

  De aquí se obtiene directamente (llamando b_1 a la primera columna de B, b_2 a la segunda, etc.) que $b_4 = \dfrac{1}{19}(b_1 - 16b_2 + 13b_3)$, por lo que b_4 es combinación lineal de b_1, b_2 y b_3, de donde $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ es linealmente dependiente.

- Si transponemos la matriz B, y escalonamos dicha transpuesta, podemos obtener un máximo de tres pivotes (uno por columna), por lo que alguna fila no contendrá pivotes y estará formada solo por ceros.
  En efecto: en este caso concreto obtenemos

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 19/4 \\ 0 & 0 & 13/4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 13/4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  ¿Qué significa que una fila (en este caso, la cuarta) se haya transformado en puros ceros?
  En cada paso del proceso de escalonamiento en que a una fila se le suma un múltiplo de otra, estamos sumándole a dicha fila una combinación lineal de las filas originales.
  Así, en este caso, esa fila de ceros es el resultado de sumarle a la cuarta fila original una combinación lineal de las otras filas originales, por lo que la cuarta fila original ES combinación lineal de las otras. Así, las filas de B^T son l.d.

Una vez que hemos establecido que las columnas de B son l.d., concluimos que alguna combinación no trivial de las columnas da como resultado el vector de puros ceros, por lo que existe una solución no trivial de $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pero este sistema además admite la solución trivial $B\mathbf{0} = \mathbf{0}$, por lo que tiene solución pero no única. De lo anterior se desprende que dicho sistema tiene infinitas soluciones.

Puntaje:

a)
- Por establecer alguna propiedad equivalente a la inyectividad de T: 1 punto.
- Por justificar la equivalencia entre la propiedad usada y la inyectividad de T: 1 punto.

b) Si usan directamente la equivalencia entre inyectividad y sobreyectividad, 2 puntos. Si no, se asigna puntaje como en la parte a).

c)
- Por establecer correctamente que las columnas de A no son independientes: 1 punto.
- Por concluir (con una buena justificación) que la ecuación dada tiene infinitas soluciones: 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

5. Sean A y B dos matrices de $m \times n$ y $n \times p$ respectivamente. Demuestre que si las columnas de B son linealmente dependientes, entonces también lo son las columnas de AB.

   Primera Solución:

   Si las columnas de B son linealmente dependientes, entonces hay alguna combinación lineal no trivial de ellas que da como resultado $\mathbf{0}$. Esto a su vez se traduce en que existe un vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $B\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

   Pero entonces $(AB)\mathbf{u} = A(B\mathbf{u}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, por lo que existe un vector no nulo (a saber, el mismo $\mathbf{u}$) tal que $(AB)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Pero esto a su vez es equivalente a que existe una combinación lineal no trivial de las columnas de AB que da como resultado $\mathbf{0}$, por lo que las columnas de AB son linealmente dependientes.

   Segunda Solución:

   Si las columnas de B son linealmente dependientes, entonces la transformación lineal $\mathbf{x} \to B\mathbf{x}$ no es uno a uno; o sea, existen $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ tales que $B\mathbf{u} = B\mathbf{v}$.

   Pero entonces $(AB)\mathbf{u} = A(B\mathbf{u}) = A(B\mathbf{v}) = (AB)\mathbf{v}$, por lo que la transformación lineal $\mathbf{x} \to (AB)\mathbf{x}$ no es uno a uno, o lo que es equivalente, las columnas de AB también son linealmente dependientes.

   Puntaje:

   En cualquiera de las soluciones (u otras *correctas* que se les ocurran a los alumnos):

   - Por plantear una demostración correctamente estructurada, 2 puntos.
   - Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 2 puntos.
   - Por justificar adecuadamente los argumentos, 2 puntos.

   A lo anterior se le suma el punto base.

6. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Demuestre que A es invertible si y solo si $a \neq 1$.

b) Calcule la inversa de A para $a = 2$.

Solución:

a) Si $a = 1$, la matriz se transforma en

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que —en este caso— A no tiene 3 posiciones pivote, y por el teorema 8 (Secc. 2.3) no es invertible.

Por otra parte, si $a \neq 1$, se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}$$

donde —como $1 - a \neq 0$— la matriz tiene 3 posiciones pivote, y por lo tanto es invertible.

b) Si $a = 2$, la matriz se transforma en

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

y podemos calcular su inversa llevando a forma escalonada reducida por filas a la matriz

$$\begin{aligned}
[A \mid I] \quad &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

de donde

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Puntaje:

a)
- Por demostrar que para $a = 1$ la matriz no es invertible: 1 punto.
- Por demostrar que para $a \neq 1$ la matriz es invertible (por cualquier método válido): 2 puntos.

b)
- Si calculan correctamente la inversa: 3 puntos.
- Si se equivocan en uno o dos entradas de la inversa (por errores de cálculo) se descuenta 1 punto por cada entrada errónea de la inversa.

A lo anterior se le suma el punto base.

Nota: Los alumnos que usaron determinantes para responder la pregunta recibieron 0 puntos, ya que determinantes es una materia que ni siquiera se había mencionado al momento de dar la I_1.

Si alguien hubiera usado formas bilineales, transformaciones semi-lineales o espacios vectoriales de dimensión infinita para responder esta pregunta (u otra) el criterio sería el mismo.

7. Sean A y B dos matrices invertibles. Demuestre que si $(A+B)$ es invertible entonces $(A^{-1}+B^{-1})$ es invertible, y su inversa es $B(A+B)^{-1}A$.

Solución:

Bajo las hipótesis dadas, tanto $A+B$ como A^{-1}, B^{-1} y $(A^{-1}+B^{-1})$ son matrices cuadradas del mismo tamaño.

Además:

$$\begin{aligned}
\left(A^{-1}+B^{-1}\right)B(A+B)^{-1}A &= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + B^{-1}B(A+B)^{-1}A \\
&= A^{-1}B(A+B)^{-1}A + (A+B)^{-1}A \\
&= \left(A^{-1}B+I\right)(A+B)^{-1}A = \left(A^{-1}B+A^{-1}A\right)(A+B)^{-1}A \\
&= A^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}A = A^{-1}\left[(B+A)(A+B)^{-1}\right]A \\
&= A^{-1}IA = A^{-1}A = I
\end{aligned}$$

Así, si llamamos $X=(A^{-1}+B^{-1})$, $Y=B(A+B)^{-1}A$, entonces tenemos que X e Y son matrices cuadradas del mismo tamaño, y $XY=I$.

Esto es suficiente para probar que $X^{-1}=Y$, por lo que claramente $X=(A^{-1}+B^{-1})$ es invertible.

Puntaje:

- Por plantear una demostración correctamente estructurada, 2 puntos.
- Por llegar a la conclusión deseada, usando argumentos correctos, 2 puntos.
- Por justificar adecuadamente los argumentos, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) Si el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ también lo es.

   b) Si A es una matriz de 3×5, y T es la transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, entonces T tiene dominio $\mathbb{R}^3$.

   c) Un sistema con más ecuaciones que incógnitas es siempre consistente.

Solución:

a) **Verdadero**.

Supongamos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente pero $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente dependiente.

Entonces existe una combinación lineal $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ que es no trivial (vale decir, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ no son todos cero).

Pero entonces, tomando $\alpha_3 = 0$, vemos que $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 + \alpha_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ que es una combinación no trivial, por lo que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente dependiente, lo que contradice la hipótesis.

b) **Falso**.

Si A es una matriz de 3×5 (o sea, tiene 3 filas y 5 columnas), entonces para que $A\mathbf{x}$ tenga sentido, $\mathbf{x}$ debe tener tantas filas como columnas tiene A, vale decir 5. Así, el dominio de T es $\mathbb{R}^5$, no $\mathbb{R}^3$.

Otra forma de justificar esto es dar un contraejemplo, vale decir, exhibir cualquier matriz de 3×5 y mostrar que —para esa matriz— la transformación T tiene dominio $\mathbb{R}^5$.

c) **Falso**.

Contraejemplo: el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ x - 3y &= -3 \\ 3x + 5y &= 1 \end{aligned}\right|$$

tiene 3 ecuaciones y 2 incógnitas, y no es consistente.

Nota: por supuesto, hay infinitos contraejemplos posibles.

Puntaje:

Cada parte vale dos puntos, los que se dan solo si esta la respuesta correcta con una justificación adecuada.