Cálculo de límites

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

1 de Junio de 2022

Cálculo de límites

EJEMPLO 1 Calcular $\lim_{n\to\infty} a_n$, donde a_n está dada por

$$a_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n}\ .$$

EJEMPLO 2 Analice la convergencia de la sucesión $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

EJEMPLO 3 Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n^2+1}}{3n-5}$

EJEMPLO 4 Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$

Teorema.

Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

EJEMPLO 5 Evaluar $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ si es que existe.

Solución Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Entonces, por el teorema anterior

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0\,.$$

Cálculo de límites

EJEMPLO 6 Si $|x| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Solución Dado $\varepsilon > 0$ queremos encontrar N tal que si $n > N$ entonces

$$|x^n - 0| = |x|^n$$

debe ser menor que ε. Imponiendo la condición vemos que

$$|x|^n < \varepsilon \iff n\ln(|x|) < \ln(\varepsilon) \iff n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|x|)}$$

Dado $a = \ln(\varepsilon)/\ln(|x|)$, por el principio de Arquímedes existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a < N$. Se sigue que si $n > N$ entonces

$$\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|x|)} < n \iff \ln(\varepsilon) > n\ln(|x|) \iff \varepsilon > |x|^n\,,$$

como queríamos probar.

EJEMPLO 7 Si $p > 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

Solución Si $p > 1$, tomando $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. Entonces $x_n > 0$ y por la desigualdad de Bernoulli

$$p = (1 + x_n)^n \geqslant 1 + nx_n$$

luego

$$0 < x_n \leqslant \frac{p-1}{n}.$$

Por el teorema del Sandwich se sigue que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
Si $p = 1$ el resultado es trivial.
Si $0 < p < 1$ el resultado se obtiene tomando recíprocos.

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

EJEMPLO 8 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Solución Tomando $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Entonces $x_n \geqslant 0$ y por el teorema del binomio

$$n = (1 + x_n)^n \geqslant \frac{n(n-2)}{2} x_n^2 \ :$$

Luego, obtenemos que

$$0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Por el teorema del Sandwich, se sigue que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$