



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: GODOFREDO IOMMI – AYUDANTE: RODRIGO GALAZ

Introducción al Cálculo - MAT1107
Ayudantía 4 - Repaso I1
8 de Septiembre de 2023

1. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x - y|$
2. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$. Demuestre que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$
3. Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que $|x^2| = |x|^2$
4. Demuestre que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales.
5. Demuestre que si $0 < a < b$, entonces $a^2 < b^2$
6. Sean a, b, c, d números reales tales que $a^2 + b^2 = 1$ y $c^2 + d^2 = 1$. Demuestre que $ac + bd \leq 1$
7. Demuestre que, si $0 < a < b$ y $0 < c < d$, entonces

$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{c+d}{2} < \frac{ac+bd}{2}$$

8. Pruebe la desigualdad

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

para cualquier $a, b > 0$.

9. Demuestre que si $a > 0$

$$a + \frac{1}{a} \leq a^3 + \frac{1}{a^3}$$

10. Si a, b, c son números reales positivos, demuestre

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

11. Demuestre que si $x, a \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, entonces

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| \leq |x - a|$$

12. Resuelva la inecuación

$$\frac{x}{x-4} < \frac{x-4}{x}$$