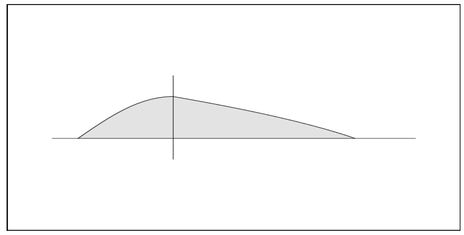
Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
28 de marzo de 2012

MAT 1620 - Cálculo II - Interrogación N° 1

1.

Hallar el área de la figura del lado, acotada a la izquierda por la curva $y = \cos(x)$, a la derecha por la curva $x = -y^2 - 2y + 3$ y abajo por el eje X.



Solución: La región D se puede separar en las regiones

$$D_1 = \{(x, y) : -\pi/2 \leq x \leq 0 \wedge 0 \leq y \leq \cos(x)\}$$

$$D_2 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1 \wedge 0 \leq x \leq -y^2 - 2y + 3\}$$

Calculamos el área de D_1 dividiendo esa región en rectángulos verticales (es región de tipo I), de modo que

$$\text{área}(D_1) \;=\; \int_{-\pi/2}^{0} \cos(x)dx \;=\; 1$$

mientras que D_2 es región de tipo II y la particionamos en rectángulos horizontales obteniendo

$$\text{área}(D_2) \;=\; \int_0^1 (-y^2 - 2y + 3)\, dy \;=\; -\frac{1}{3} - 1 + 3 \;=\; \frac{5}{3}\,.$$

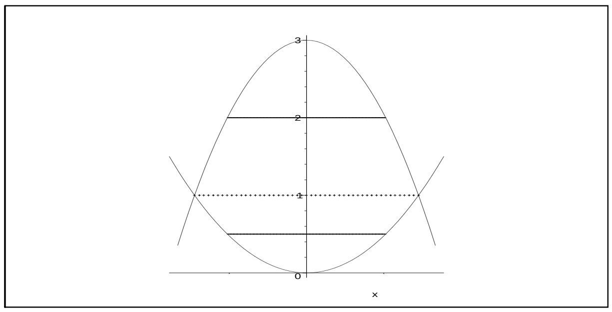
Luego,

$$\text{área}(D) \;=\; 1 + \frac{5}{3} = \frac{8}{3} \quad \blacksquare$$

2. La base de un sólido es la región acotada por las parábolas $y = x^2$ e $y = 3 - 2x^2$ y sus secciones perpendiculares al eje Y son triángulos equiláteros. Hallar el volumen del sólido.

Solución: Si el corte a la altura y, tiene área $A(y)$ entonces, como $0 \le y \le 3$ (ver figura)

$$\text{Volumen} = \int_0^3 A(y)\,dy$$



El área de un triángulo equilátero de lado a es $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,a^2$.

Cuando $0 \le y \le 1$ tenemos que

$$a = \sqrt{y} - (-\sqrt{y}) = 2\sqrt{y},$$

de modo que

$$0 \le y \le 1 \quad \Rightarrow \quad A(y) = \frac{\sqrt{3}}{4}\,(4y) = \sqrt{3}\,y$$

Mientras que si $1 \le y \le 3$ tenemos que

$$a = \sqrt{(3-y)/2} - (-\sqrt{(3-y)/2}) = 2\sqrt{(3-y)/2},$$

de modo que

$$1 \le y \le 3 \quad \Rightarrow \quad A(y) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot \frac{3-y}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(3-y).$$

Por lo tanto

$$\text{Volumen} = \sqrt{3}\int_0^1 y\,dy + \frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^3 (3-y)\,dy$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\,(1 + 2) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \blacksquare$$

3. Considere la región $\mathcal{R}$ encerrada por las rectas $x = 0$, $y = 1$ y la curva $y = \operatorname{sen}(x)$. Calcular

a) El área de $\mathcal{R}$.

Solución: El área de la región está dado por

$$A = \int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen} x)\, dx \;=\; \frac{\pi}{2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1$$

b) El centroide de $\mathcal{R}$.

Solución: Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ están dadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} x(1 - \operatorname{sen} x)\, dx \;=\; \frac{\frac{\pi^2}{8} - 1}{\frac{\pi}{2} - 1} \;=\; \frac{\pi^2 - 8}{4\,(\pi - 2)}\,,$$

ya que

$$\int_0^{\pi/2} x(1 - \operatorname{sen} x)\, dx \;=\; \left(\frac{x^2}{2} + x\cos x - \operatorname{sen} x\right)\Big|_0^{\pi/2} \;=\; \frac{\pi^2}{8} - 1.$$

Por otro lado,

$$\bar{y} = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}[1 - (\operatorname{sen} x)^2]\, dx \;=\; \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{2} - 1} \;=\; \frac{\pi}{4(\pi - 2)},$$

ya que

$$\int_0^{\pi/2} (1 - \operatorname{sen}^2 x)\, dx \;=\; \frac{1}{2}\,(x + \operatorname{sen} x \cos x)\Big|_0^{\pi/2} \;=\; \frac{\pi}{4}.$$

c) El volumen del sólido obtenido al girar la región $\mathcal{R}$ alrededor la recta $y = \dfrac{2}{\pi}\,x$.

Solución: Por el teorema de Pappus el volumen del sólido pedido es

$$V \;=\; Ad \;=\; 2\pi r A,$$

donde $d = 2\pi r$ es la distancia recorrida por el centroide y r es la distancia del centroide $(\bar{x}, \bar{y})$ a la recta $y = \dfrac{2}{\pi}\,x$, es decir,

$$\begin{aligned} r &= \frac{|\frac{2}{\pi}\bar{x} - \bar{y}|}{\sqrt{\frac{4}{\pi^2} + 1}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 4}}\left|\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2 - 8}{4\,(\pi - 2)}\right) - \frac{\pi}{4(\pi - 2)}\right| \\ &= \frac{16 - \pi^2}{4(\pi - 2)\sqrt{\pi^2 + 4}}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$V \;=\; 2\pi \cdot \frac{16 - \pi^2}{4(\pi - 2)\sqrt{\pi^2 + 4}} \cdot \frac{\pi - 2}{2} \;=\; \frac{\pi(16 - \pi^2)}{4\sqrt{\pi^2 + 4}} \quad \blacksquare.$$

4. Encuentre el largo de la curva $y = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln(x)}{2}$ entre $x = 1$ y $x = 2$.

Solución: La deriva de la curva $y(x)$ vale

$$y'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}.$$

Entonces, la longitud L buscada vale

$$\begin{aligned}
L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2} \; dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2}} \; dx \\
&= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \; dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \; dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \ln(x)\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln(2).
\end{aligned}$$