Función Inversa

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1] Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2] LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

10 de mayo de 2023

Función Inversa

EJEMPLO 1 Considere la función $f : [-2, 4) \to [1, \infty)$ definida por

$$f(x) = 1 + \sqrt{\frac{x+2}{4-x}}\,.$$

a Demuestre que f es biyectiva.

b Demuestre que f es estrictamente creciente.

c Halle la inversa de f.

Función Inversa

a PD: f es inyectiva. En efecto, sean $x_1, x_2 \in [-2, 4)$ entonces

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) \quad &\iff \quad 1 + \sqrt{\frac{x_1 + 2}{4 - x_1}} = 1 + \sqrt{\frac{x_2 + 2}{4 - x_2}} \\
&\iff \quad \sqrt{\frac{x_1 + 2}{4 - x_1}} = \sqrt{\frac{x_2 + 2}{4 - x_2}} \\
&\iff \quad \frac{x_1 + 2}{4 - x_1} = \frac{x_2 + 2}{4 - x_2} \\
&\iff \quad (x_1 + 2)(4 - x_2) = (x_2 + 2)(4 - x_1) \\
&\iff \quad 4x_1 - x_1x_2 + 8 - 2x_2 = 4x_2 - x_1x_2 + 8 - 2x_1 \\
&\iff \quad 6x_1 = 6x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2 \, .
\end{aligned}$$

Luego f es inyectiva.

Función Inversa

PD: f es sobreyectiva. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned}
y \in \mathrm{Rec}(f) &\iff (\exists\, x \in [-2,4))(f(x) = y) \\
&\iff (\exists\, x \in [-2,4))\left(1 + \sqrt{\frac{x+2}{4-x}} = y\right) \\
&\iff (\exists\, x \in [-2,4))\left(\sqrt{\frac{x+2}{4-x}} = y - 1\right) \\
&\iff (\exists\, x \in [-2,4))\left(\frac{x+2}{4-x} = (y-1)^2\right) \wedge (y - 1 \geqslant 0) \\
&\iff (\exists\, x \in [-2,4))(y - 1 \geqslant 0) \\
&\qquad\quad \wedge \left(x + 2 = (4-x)(y^2 - 2y + 1)\right) \\
&\iff (\exists\, x \in [-2,4))(y - 1 \geqslant 0) \\
&\qquad\quad \wedge \left(x + 2 = 4y^2 - 8y + 4 - xy^2 - 2xy - x\right)
\end{aligned}$$

Función Inversa

$$
\begin{aligned}
y \in \operatorname{Rec}(f) \quad &\iff \quad (\exists\, x \in [-2,4))(y-1 \geqslant 0) \\
&\qquad\qquad \wedge \left(x(y^2-2y+2) = 4y^2-8y+4)\right) \\
&\iff \quad (\exists\, x \in [-2,4))(y-1 \geqslant 0) \\
&\qquad\qquad \wedge \left(x = \frac{4y^2-8y+4}{(y-1)^2+1)}\right) \\
&\iff \quad y \geqslant 1
\end{aligned}
$$

Luego $\operatorname{Rec}(f) = [1,\infty) = \operatorname{Codom}(f)$ por lo que f es sobreyectiva. Por lo tanto, f es biyectiva.

Función Inversa

b

Sean $x_1, x_2 \in [-2, 4)$ tales que $x_1 < x_2$. Usaremos el siguiente hecho:

$$0 < a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2 \,.$$

Note que lo que queremos probar es equivalente con:

$$\begin{aligned}
1 \leqslant f(x_1) < f(x_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant f(x_1) - 1 < f(x_1) - 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad (f(x_1) - 1)^2 < (f(x_2) - 1)^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad (f(x_1) - 1)^2 - (f(x_2) - 1)^2 < 0
\end{aligned}$$

Función Inversa

En efecto, se tiene que

$$
\begin{aligned}
(f(x_1)-1)^2-(f(x_2)-1)^2 &= \frac{x_1+2}{4-x_1}-\frac{x_2+2}{4-x_2}\\
&= \frac{(x_1+2)(4-x_2)-(4-x_1)(x_2+2)}{(4-x_1)(4-x_2)}\\
&= \frac{6(x_1-x_2)}{(4-x_1)(4-x_2)}<0
\end{aligned}
$$

ya que $x_1-x_2<0$ por hipótesis y los denominadores son positivos ya que $x_1,x_2\in[-2,4)$.

Función Inversa

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Proposición.

Sean $g : A \to B$ y $f : B \to C$ funciones reales.

1. Si $f \circ g$ es inyectiva, entonces g es inyectiva.
2. Si $f \circ g$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

Función Inversa

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

EJEMPLO 2 ¿Existen funciones no biyectivas $f : A \to B$ y $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$?

EJEMPLO 3 ¿Existen una función biyectiva $f : A \to B$ y una funcion no biyectiva $g : B \to A$ tal que $f \circ g = id_B$?

Función Inversa

EJEMPLO 4 Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{|x|}{1 + |x|} \, .$$

a Demuestre que f es par.

b Muestre que f no es inyectiva.

c Determine el mayor conjunto $B \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f : B \to f(B)$ sea biyectiva y calcule f^{-1}.

d Trace las gráficas de f y f^{-1}.