PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2014

MAT1203 - Algebra Lineal
Interrogación 1 - Lunes 31 de marzo - Solución

1. Sean $r, s \in \mathbb{R}$ y $Ax = b$ un sistema de ecuaciones tal que una forma escalonada de $[A \mid b]$ es la matriz,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & r & 0 & 1 \\ 0 & 0 & s & s & r \end{array}\right].$$

Determine todos los posibles valores de r y de s tales que:

$a)$ el sistema no tenga solución,

$b)$ el sistema tenga solución única y en tal caso encuéntrela,

$c)$ el sistema tenga infinitas soluciones y en tal caso encuéntrelas.

Solución:

Si $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ reemplazando queda $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

En este caso hay dos variables libres y el sistema tiene infinitas soluciones dadas por

$$x = \begin{bmatrix} 1 - \alpha - 2\beta \\ 1 \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ reemplazando queda $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & r & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r \end{array}\right]$.

En este caso, de la última fila, el sistema no tiene solución.

Si $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ escalonando queda $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1-(2r/s) \\ 0 & 1 & 0 & -r & 1-(r^2/s) \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (r/s) \end{array}\right]$.

En este caso hay una variable libre y el sistema tiene infinitas soluciones dadas por

$$x = \begin{bmatrix} 1-(2r/s)+\gamma \\ 1-(r^2/s)+r\cdot\gamma \\ (r/s)-\gamma \\ \gamma \end{bmatrix} \quad \text{para todo } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Por último se tiene que no hay casos para los cuales el sistema tenga solución única.

2. *a*) Sean $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $v_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Demuestre que

$$\text{Gen}\{v_1, v_2\} = \text{Gen}\{v_3, v_4, v_5\}.$$

Solución:

Primero se demuestra que $\text{Gen}\{v_3, v_4, v_5\} \subseteq \text{Gen}\{v_1, v_2\}$.

Se escalona la matriz $[v_1 v_2 v_3 v_4 v_5]$ y queda $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Entonces v_3, v_4 y v_5 pertenecen a $\text{Gen}\{v_1, v_2\}$ y entonces

$$\text{Gen}\{v_3, v_4, v_5\} \subseteq \text{Gen}\{v_1, v_2\}.$$

Segundo se demuestra que $\text{Gen}\{v_1, v_2\} \subseteq \text{Gen}\{v_3, v_4, v_5\}$.

Se escalona la matriz $[v_3 v_4 v_5 v_1 v_2]$ y queda $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Entonces v_1 y v_2 pertenecen a $\text{Gen}\{v_3, v_4, v_5\}$ y entonces

$$\text{Gen}\{v_1, v_2\} \subseteq \text{Gen}\{v_3, v_4, v_5\}.$$

b) Sean p, q números reales y $A = [w_1\, w_2\, w_3]$ una matriz de 4×3 tal que su forma escalonada reducida es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine los valores de p y q si se sabe que: $5w_1 - 7w_2 + 8w_3 = \vec{0}$.

Solución:

De la forma escalonada se tiene que para todo α en $\mathbb{R}$:

$$-p\alpha w_1 - q\alpha w_2 + \alpha w_3 = \vec{0}.$$

Por lo tanto basta tomar $p = -5/8$ y $q = 7/8$.

3. *a*) Sea $B = [b_1\, b_2\, b_3]$ con b_1, b_2 y b_3 vectores columna no nulos de $\mathbb{R}^2$. Pruebe que $\mathrm{Nul}(B) \neq \{\vec{0}\}$. (Notación: Nul = Ker)

Solución:

Si $\mathrm{Nul}(B) = \{\vec{0}\}$, entonces el sistema $Bx = \vec{0}$ tiene solución única.

Entonces las columnas de B forman un conjunto linealmente independiente.

Entonces el rango de B es 3.

Pero esto último es una contradicción pues el rango de B es como máximo 2.

b) Sean $\{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^4$ y $M = [v_1\, v_2\, v_3]$. Demuestre que el siguiente conjunto es linealmente independiente:

$$\left\{ M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Solución:

El conjunto puede escribirse como

$$\{v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + 2v_3, v_2 + v_3\}.$$

Si se hace el supuesto:

$\alpha(v_1 + v_2 + v_3) + \beta(v_1 + v_2 + 2v_3) + \gamma(v_2 + v_3) = \vec{0}.$

Reordenando queda:

$(\alpha + \beta)v_1 + (\alpha + \beta + \gamma)v_2 + (\alpha + 2\beta + \gamma)v_3 = \vec{0}.$

Pero $\{v_1, v_2, v_3\}$ es L.I. por lo tanto:

$(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta + \gamma) = (\alpha + 2\beta + \gamma)v_3 = 0.$

Resolviendo el sistema queda $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Luego $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y el conjunto es L.I.

4. *a*) Sea A una matriz tal que $A\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ y $A\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$.

Demuestre que el sistema $Ax = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ tiene solución.

Solución:

Se observa que $A\begin{bmatrix}\alpha\\2\alpha\\\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha\\2\alpha\end{bmatrix}$ y $A\begin{bmatrix}2\beta\\\beta\\-\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta\\3\beta\end{bmatrix}$.

Entonces $A\begin{bmatrix}\alpha+2\beta\\2\alpha+\beta\\\alpha-\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha+\beta\\2\alpha+3\beta\end{bmatrix}$.

Luego basta resolver $\begin{bmatrix}\alpha+\beta\\2\alpha+3\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 3 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\0 & 1 & -3\end{bmatrix}$.

Si $\alpha = 4$ y $\beta = -3$, entonces:

Entonces $A\begin{bmatrix}-2\\5\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

b) Sea $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Describa como un conjunto generado la imagen por T del hiperplano definido por $x_1 - x_2 = 0$.

Solución:

Los vectores que pertenecen al hiperplano son de la forma $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$

para todo x_1 y x_3 reales. Luego se tiene que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (3x_1 + x_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto queda Gen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.