Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2020

MAT1610 - Cálculo I
Interrogación 2

Problema 1.

La ecuación
$$x^2 + xy + y^2 = 3$$
representa una "elipse girada", es decir, una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes de coordenadas. Encuentre los puntos en que esta elipse cruza el eje x y demuestre que las rectas tangentes en estos puntos son paralelas.

Solución:

Puntos de intersección de la curva con el eje x: $y = 0$, entonces,
$x^2 + x \cdot 0 + 0^2 = 3$, es decir, $x^2 = 3$ y por lo tanto, $x = \pm\sqrt{3}$.

Puntos $P_1 = \left(\sqrt{3}, 0\right)$ y $P_2 = \left(-\sqrt{3}, 0\right)$

Se debe demostrar que la recta tangente a la curva en el punto P_1 es paralela a la recta tangente a la curva en el punto P_2, es decir, que ambas rectas tienen la misma pendiente. Entonces, si la pendiente de la recta tangente a la curva en P_1 es m_1 y la pendiente de la recta tangente a la curva en P_2 es m_2, se debe mostrar que

$$m_1 = \frac{dy}{dx}|_{x=\sqrt{3}} = \frac{dy}{dx}|_{x=-\sqrt{3}} = m_2$$

Cálculo de de la derivada:

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 = 3 \quad &\Rightarrow \quad 2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Rightarrow \quad (2x + y) + (x + 2y)\frac{dy}{dx} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \end{aligned}$$

Cálculo de la pendiente de la recta tangente a la curva en P_1: m_1

$$\begin{aligned} m_1 &= -\frac{2\sqrt{3} + 0}{\sqrt{3} + 2 \cdot 0} \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Cálculo de la pendiente de la recta tangente a la curva en P_2: m_2

$$\begin{aligned} m_2 &= -\frac{2\left(-\sqrt{3}\right)+0}{-\sqrt{3}+2\cdot 0} \\ &= -\frac{-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $m_1 = m_2$, entonces la recta tangente a la curva en el punto P_1 es paralela a la recta tangente a la curva en el punto P_2

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por determinar correctamente las abscisas de los puntos.
- **(0.5 punto)** Por exhibir los puntos con coordenadas correctas.
- **(1.5 puntos)** Por derivar implícitamente de forma correcta.
- **(1 punto)** Por determinar expresión correcta para la derivada de la función y
- **(1 punto)** Por determinar correctamente valor de la derivada en los puntos P_1 y P_2
- **(1 punto)** Por concluir correctamente (las rectas son paralelas ya que sus pendientes son iguales)

Problema 2.

Un foco de luz está instalado en el suelo a 32 metros de un edificio. Una mujer que mide 1,6 metros camina desde la luz en dirección al edificio a una velocidad constante de 2 metros por segundo. ¿a qué velocidad disminuye su sombra sobre el edificio en el instante en que la mujer está a 24 metros del edificio?

Solución:

Forma 1:

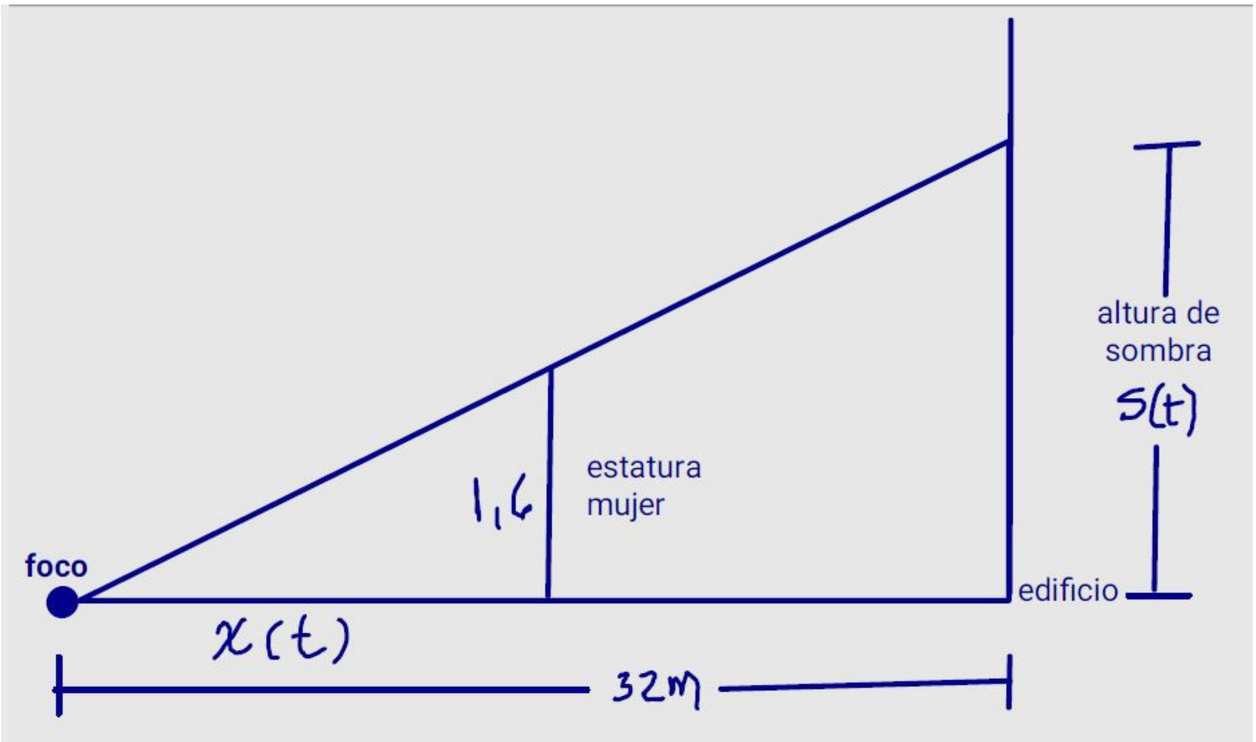
Variables:

Sea $t_0 = 0$ el instante en el que la mujer comienza a caminar partiendo desde donde se ubica el foco.

Sea $x(t)$ la distancia recorrida por la mujer, medida desde la ubicación del foco en dirección hacia el edificio, hasta el instante de tiempo t, t medido en segundo (distancia que separa a la mujer del foco en el instante de tiempo t).

Sea $s(t)$ la altura de la sombra de la mujer sobre el edificio en el instante de tiempo t, t medido en segundo (notar que $s(t)$ es la altura de la sombra de la mujer cuando ésta se ubica a una distancia $x(t)$ del foco).

Una idea gráfica de la situación se muestra en la figura:



Valor solicitado:

Se desea determinar $\frac{ds}{dt}$ cuando la mujer se encuentra a 24 metros del edificio, como el edificio y el foco están separados por 32 metros entonces, se quiere determinar $\frac{ds}{dt}$ cuando la mujer ha recorrido 8 metros desde el foco, esto es, $\frac{ds}{dt}|_{x(t)=8}$.

Notar que, como la mujer camina a velocidad constante de 2m/s, se tiene que $\frac{dx}{dt} = 2$ m/s.

Relación entre las variables:
Usando que la estatura de la mujer $1.6m = \frac{8}{5}$ m y semejanza de triángulos se tiene que $s = s(t)$ y $x = x(t)$ están relacionadas como sigue:

$$\frac{s}{32} = \frac{\frac{8}{5}}{x}$$

u otra equivalente a la ecuación anterior.

A. Derivada manera 1:

Se tiene que $s = \frac{256}{5x}$, así

$$s(t) = \frac{256}{5x(t)}$$

Derivando respecto de t, se tiene que
$\frac{ds}{dt}(t) = -\frac{256}{5(x(t))^2}\frac{dx}{dt} = -\frac{256}{5(x(t))^2} \cdot 2 = -\frac{512}{5(x(t))^2}$
y
$\frac{ds}{dt}(t)|_{x(t)=8} = -\frac{512}{5(8)^2} = -\frac{8}{5}$ m/s

Por lo tanto, cuando la mujer se ubica a 24 metros del edificio, la altura de su sombra sobre el edificio cambia a una velocidad de $-\frac{8}{5}$ m/s.

B. Derivada manera 2:

Se tiene que $s \cdot x = \frac{256}{5}$, así

$$s(t)x(t) = \frac{256}{5}$$

Derivando respecto de t, se tiene que

$$\frac{ds}{dt}x(t) + s(t)\frac{dx}{dt} = 0$$

por lo que

$$\frac{ds}{dt}(t) = -\frac{s(t)\frac{dx}{dt}}{x(t)}$$

Así, como $x(t) = 8$ y $s(t)8 = \frac{256}{5}$ o $s(t) = \frac{32}{5}$, se tiene que

$$\frac{ds}{dt}(t)|_{x(t)=8} = -\frac{\frac{32}{5} \cdot 2}{8} = -\frac{8}{5}\text{m/s}$$

Por lo tanto, cuando la mujer se ubica a 24 metros del edificio, la altura de su sombra sobre el edificio cambia a una velocidad de $-\frac{8}{5}$ m/s.
Nota: En este planteamiento es valido usar la forma **A.**, la forma **B.** u otra equivalente a ellas.

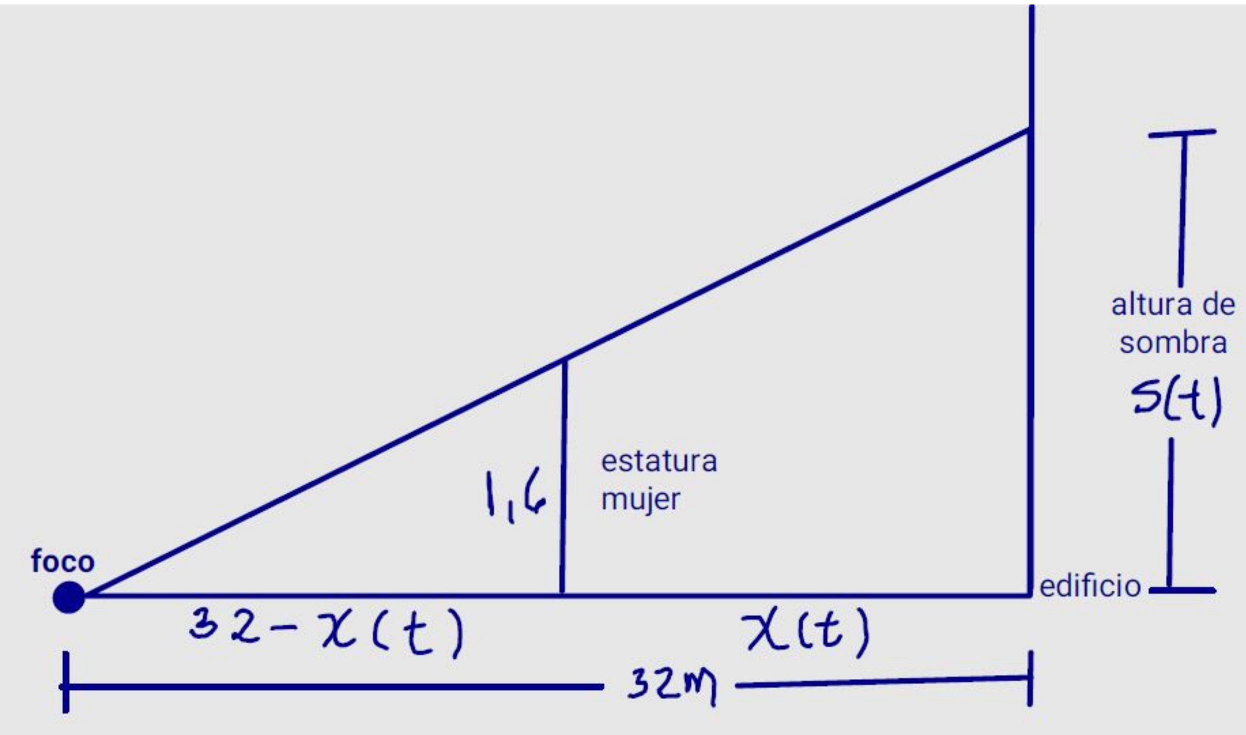
Forma 2:

Variables Sea $t_0 = 0$ el instante en el que la mujer comienza a caminar partiendo desde donde se ubica el foco.

Sea $x(t)$ la distancia que separa a la mujer del edificio en el instante de tiempo t.

En este caso, $32 - x(t)$ la distancia recorrida por la mujer, medida desde la ubicación del foco en dirección hacia el edificio, hasta el instante de tiempo t, t medido en segundo (distancia que separa a la mujer del foco en el instante de tiempo t).

Sea $s(t)$ la altura de la sombra de la mujer sobre el edificio en el instante de tiempo t, t medido en segundo (notar que $s(t)$ es la altura de la sombra de la mujer sobre el edificio cuando ésta se ubica a una distancia $x(t)$ del edificio).
Una idea gráfica de la situación se muestra en la figura:



Valor solicitado Se desea determinar $\frac{ds}{dt}$ cuando la mujer se encuentra a 24 metros del edificio, esto es, $\frac{ds}{dt}|_{x(t)=24}$.
Notar que la mujer camina a velocidad constante de 2m/s, en dirección hacia el edificio, es decir, $x(t)$ disminuye a 2m/s entonces, $\frac{dx}{dt} = -2$ m/s.

Relación entre las variables: Usando que la estatura de la mujer $1.6m = \frac{8}{5}$ m y semejanza de triángulos se tiene que $s = s(t)$ y $x = x(t)$ están relacionadas como sigue:

$$\frac{s}{32} = \frac{\frac{8}{5}}{32 - x}$$

u otra equivalente a la ecuación anterior.

C. Derivada manera 1:

Se tiene que $s = \frac{256}{5(32-x)}$, así
$$s(t) = \frac{256}{5(32-x(t))}$$
Derivando respecto de t, se tiene que
$\frac{ds}{dt}(t) = -\frac{256}{5(32-x(t))^2}(-1)\frac{dx}{dt} = -\frac{256}{5(32-x(t))^2}(-1)(-2) = -\frac{512}{5(32-x(t))^2}$
y
$\frac{ds}{dt}(t)|_{x(t)=24} = -\frac{512}{5(8)^2} = -\frac{8}{5}$ m/s

Por lo tanto, cuando la mujer se ubica a 24 metros del edificio, la altura de su sombra sobre el edificio cambia a una velocidad de $-\frac{8}{5}$ m/s.

D. Derivada manera 2:

Se tiene que $s \cdot (32 - x) = \frac{256}{5}$, así
$$s(t)\,(32 - x(t)) = \frac{256}{5}$$
Derivando respecto de t, se tiene que
$$\frac{ds}{dt}\,(32 - x(t)) - s(t)\frac{dx}{dt} = 0$$
por lo que
$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{s(t)\frac{dx}{dt}}{(32 - x(t))}$$
Así, como $x(t) = 24$ y $s(t)8 = \frac{256}{5}$ o $s(t) = \frac{32}{5}$, se tiene que
$$\frac{ds}{dt}(t)|_{x(t)=24} = \frac{\frac{32}{5}\cdot(-2)}{8} = -\frac{8}{5}\text{m/s}$$
Por lo tanto, cuando la mujer se ubica a 24 metros del edificio, la altura de su sombra sobre el edificio cambia a una velocidad de $-\frac{8}{5}$ m/s.
Nota: En este planteamiento es valido usar la forma **C.**, la forma **D.** u otra equivalente a ellas.

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por definir variables correctamente.
- **(1.5 punto)** Por establecer relación entre las variables o definir la función (debe justificar)
- **(1 punto)** Por derivar correctamente.
- **(1 punto)** Por establecer correctamente el valor donde debe evaluar la derivada(debe justificar)
- **(1 punto)** Por obtener resultado correcto.
- **(0.5 punto)** Por responder en unidades correctas.

Problema 3.

Considere la función
$$f(x) = e^{\cosh(x)}.$$

a) Determine el polinomio de Taylor de grado 2 de f, denotado por $T_2(x)$, centrado en $x = 0$.

b) Encuentre $T_2(0), T_2'(0)$ y $T_2''(0)$.

Solución:

(a) Se tiene que

$f'(x) = \left(e^{\cosh(x)}\right)' = e^{\cosh(x)}\text{senh}(x)$

$f''(x) = \left(e^{\cosh(x)}\text{senh}(x)\right)' = e^{\cosh(x)}\text{senh}^2(x) + e^{\cosh(x)}\cosh(x) = e^{\cosh(x)}\left(\text{senh}^2(x) + \cosh(x)\right)$

$f(0) = e^{\cosh(0)} = e^1 = e$

$f'(0) = e^{\cosh(0)}\text{sen}(0) = e^1 \cdot 0 = 0$

$f''(0) = e^{\cosh(0)}\left(\text{senh}^2(0) + \cosh(0)\right) = e^1 \cdot (0 + 1) = e^1 = e$

Polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado centrado en 0

$T_2(x) = e + 0 \cdot (x - 0) + \frac{e}{2!}(x - 0)^2 = e + \frac{ex^2}{2} = e\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)$

(b) Por la definición de polinominio de Taylor, se tiene lo siguiente: $T_2(0) = f(0) = e$, $T_2'(0) = f'(0) = 0$ y $T_2''(0) = f''(0) = e$, efectivamente,

$T_2(0) = e\left(1 + \frac{0^2}{2}\right) = e$

$T_2'(x) = \left(e\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)\right)' = e(0 + x) = ex$, entonces, $T_2'(0) = e \cdot 0 = 0$.

$T_2''(x) = (ex)' = e$ entonces, $T_2''(0) = e$.

Distribución de puntaje.

- **(0.5 punto)** Por determinar valor de f en 0.
- **(1 punto)** Por calcular correctamente primera derivada y el valor de la derivada en 0 (solo si ambos son correctos)
- **(1 punto)** Por calcular correctamente la segunda derivada y el valor de la segunda derivada en 0(solo si ambos son correctos)
- **(1 punto)** Por determinar correctamente la fórmula del polinomio de Taylor.
- **(0.5 punto)** Por determinar valor de $T_2(0)$.
- **(1 punto)** Por determinar valor de $T_2'(0)$.
- **(1 punto)** Por determinar valor de $T_2''(0)$

Problema 4.

Demuestre que la desigualdad
$$e^x > x + 1$$
se cumple para cada $x > 0$.

Solución:

Sea $x > 0$, considere la función $f(x) = e^x$ y sean $a = 0$, $b = x$. Como f es continua y derivable en $(-\infty, \infty)$ y, en particular, es continua en $[a, b] = [0, x]$ y derivable en $(a, b) = (0, x)$, por el Teorema del Valor Medio (TVM), existe un valor c, $c \in (a, b) = (0, x)$ tal que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^x - e^0}{x} = \frac{e^x - 1}{x}$$
es decir, existe un valor c, $c \in (0, x)$ tal que:
$$f'(c) = \frac{e^x - 1}{x}$$
y, $f'(c) = e^c$, entonces, para algún valor c, $c \in (0, x)$
$$e^c = \frac{e^x - 1}{x}$$
Por lo tanto, como $0 < c < x$ y $f(x) = e^x$ es una función creciente, entonces se tiene que, $e^0 < e^c < e^x$ o $1 < e^c < e^x$, en particular,
$$1 < e^c$$
es decir,
$$1 < f'(c)$$
enotnces,
$$1 < \frac{e^x - 1}{x}$$
o, como $x > 0$, multiplicando por x la desigualdad,
$$x < e^x - 1$$
o, equivalentemente $x + 1 < e^x$, con lo que se demuestra que $e^x > x + 1$ para cada $x > 0$.

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por establecer la función a usar y el intervalo donde aplicará TVM.
- **(0.5 punto)** Por establecer que el x a considerar para la demostración es positivo.
- **(1 punto)** Por argumentar correctamente que la función cumple hipótesis del TVM.
- **(1 punto)** Por aplicar TVM correctamente a la función (debe indicar que está usando el teorema)
- **(1 punto)** Por acotar la derivada de la función en c, es decir, mostrar que $1 < e^c = f'(c) < e^x$ o $1 < e^c = f'(c)$
- **(1.5 puntos)** Por demostrar desigualdad solicitada con argumento correcto en cada paso.

Problema 5.

Grafique la función definida por

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 2x - 2}{x - 1}$$

indicando los siguientes elementos:

a) Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, si existen.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos locales y/o absolutos.

c) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

Solución: Dominio f: $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

(a) **Asíntotas**

Verticales: El único punto donde f podría tener una asíntota vertical es $x = 1$. Se tiene que $\lim_{x \to 1} -3x^2 + 2x - 2 = -3$, $\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ y $\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$, entonces

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{-3x^2 + 2x - 2}{x - 1} = +\infty$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{-3x^2 + 2x - 2}{x - 1} = -\infty$$

$x = 1$ es asíntota vertical de f.

Horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-3x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3x + 2 - 2/x}{1 - 1/x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x + 2 - 2/x}{1 - 1/x} = +\infty$$

Por lo tanto, como ambos límites son no finitos, la función f no tiene asíntotas horizontales.

Oblicuas: Ecuación $y = mx + b$

Como se trata de una función racional, usando el algoritmo de la división, se tiene que:

$$f(x) = \frac{-3x^2 + 2x - 2}{x - 1} = -3x - 1 + \frac{-3}{x - 1}$$

entonces, la ecuación de la asíntota oblicua es $y = -3x - 1$.

Otra forma de calcular la asíntota la oblicua es:

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-3x^2+2x-2}{x-1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^2+2x-2}{x^2-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3+2/x+-2/x^2}{1-1/x} = -3$

$$
\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to\infty} f(x) - mx \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+2x-2}{x-1} - (-3)x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+2x-2}{x-1} + 3x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+2x-2+3x^2-3x}{x-1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2-x}{x-1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-2/x-1}{1-1/x} \\
&= \frac{-1}{1} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la ecuación de la asíntota oblicua es $y = -3x - 1$
Nota: La asíntota oblicua hacia $-\infty$ también es la recta $y = -3x - 1$

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-3x^2+2x-2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+2x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3+2/x+-2/x^2}{1-1/x} = -3$

$$
\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to-\infty} f(x) - mx \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+2x-2}{x-1} - (-3)x \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+2x-2}{x-1} + 3x \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+2x-2+3x^2-3x}{x-1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2-x}{x-1} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2/x-1}{1-1/x} \\
&= \frac{-1}{1} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

(b) Derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{-3x^2+2x-2}{x-1}\right)' \\ &= \frac{(-6x+2)(x-1)-(-3x^2+2x-2)\cdot 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-6x^2+6x+2x-2+3x^2-2x+2}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-3x^2+6x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{-3x(x-2)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

Valores críticos:
Valores donde $f'(x)=0$: $x=0$, $x=2$
Valores del dominio donde $f'(x)$ no existe: No hay.

Estudio signo de la derivada
Notar que, para x en el dominio, $(x-1)^2>0$, no define signo de $f'(x)$.

Intervalo	$-3x$	$x-2$	f'	f
$(-\infty,0)$	$+$	-	-	decreciente
$(0,1)$	-	-	$+$	creciente
$(1,2)$	-	-	$+$	creciente
$(2,\infty)$	-	$+$	-	decreciente

Intervalos de crecimiento: en $(0,1)$ y en $(1,2)$
Intervalos de decrecimiento: $(-\infty,0)$ y en $(2,\infty)$

Valores máximo/ valores mínimo
$f(0)=2$ es un valor mínimo local de f.
$f(2)=-10$ es un valor máximo local de f.
No posee valor máximo absoluto ni valor mínimo absoluto porque la función es no acotada (límites hacia ∞ y hacia $-\infty$ son $-\infty$ e ∞, respectivamente).

(c) Segunda derivada

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(\frac{-3x(x-2)}{(x-1)^2}\right)' \\
&= \frac{(-6x+6)(x-1)^2 - (-3x(x-2))\,2\,(x-1)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{-6\,(x-1)(x-1)^2 - (-3x(x-2))\,2\,(x-1)}{(x-1)^4} \\
&= \frac{-6\,(x-1)^2 - (-3x(x-2))\,2}{(x-1)^3} \\
&= \frac{-6x^2+12x-6+6x^2-12x}{(x-1)^3} \\
&= \frac{-6}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

Intervalo	-6	$(x-1)^3$	f''	f
$(-\infty, 1)$	-	-	$+$	cóncava hacia arriba
$(1, \infty)$	-	$+$	-	cóncava hacia abajo

Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $(-\infty, 1)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $(1, \infty)$
Punto inflexión: No existe (el punto de inflexión debe ser un punto sobre la curva)

Distribución de puntaje.

- **(0.5 punto)** Por determinar asíntota vertical (solo si presenta cálculos).
- **(0.5 punto)** Por concluir correctamente sobre asíntotas horizontales (solo si presenta cálculos o argumentos).
- **(0.5 punto)** Por determinar ecuación de asíntota oblicua (solo si presenta cálculos).
- **(0.5 punto)** Por determinar correctamente intervalos de crecimiento (solo si presenta derivada y estudio de signo).
- **(0.5 punto)** Por determinar correctamente intervalos de decrecimiento (solo si presenta derivada y estudio de signo).
- **(0.5 punto)** Por determinar correctamente el mínimo local (solo si presenta uso prueba primera o segunda derivada).
- **(0.5 punto)** Por determinar correctamente el máximo local (solo si presenta uso prueba primera o segunda derivada).
- **(0.5 punto)** Por concluir correctamente sobre máximo absoluto y mínimo absoluto(solo si presenta argumento).
- **(0.5 punto)** Por determinar correctamente intervalos donde f es cóncava hacia arriba (solo si presenta segunda derivada y estudio de signo).
- **(0.5 punto)** Por determinar correctamente intervalos donde f es cóncava hacia abajo solo si presenta segunda derivada y estudio de signo).
- **(0.5 punto)** Por concluir correctamente sobre punto de inflexión (solo si presenta argumento).
- **(0.5 punto)** Por exhibir la gráfica correcta (si presenta análisis y las caractrísticas solicitadas).