Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

MAT 1203 – Álgebra lineal

Solución Interrogación 2

1. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre una factorización del tipo $A = LU$ y **úsela** para determinar la segunda columna de A^{-1}.(Sin calcular A^{-1})

Solución.

Una factorización A=LU para A está dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para determinar la segunda columna de la inversa debemos resolver el sistema $Ax = e_2$, para esto usaremos la factorización anterior haciendo $y = Ux$ y resolviendo primero el sistema

$$Ly = e_2$$

obteniendo que $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ si ahora resolvemos el sistema $Ux = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ obtenemos que $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ que corresponde a la segunda columna de la inversa de la matriz A.

Puntaje:

- 1.5 pts por encontrar L correctamente.
- 1.5 pts por encontrar U correctamente.
- 1 pto por argumentar que se debe resolver el sistema $Ax = e_2$.
- 1 pto por resolver correctamente el sistema $Ly = e_2$.
- 1 pto por resolver correctamente el sistema $Ux = y$.

2. Determine que condición debe cumplir α para que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -7 & 4 & \alpha \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -5 & 3 & -5 \\ 5 & 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

sea invertible.

Solución. Expandimos el determinante usando su segunda fila:

$$\det A = 2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & \alpha \\ -8 & 4 & 3 & -5 \\ 5 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Para calcular el determinante 4×4 que aparece arríba usamos su segunda columna:

$$\det A = -2 \cdot 4(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & \alpha \\ 5 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Finalmente, para calcular el determinate 3×3 podemos usar su primera columna

$$\det A = -8 \left(3 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & \alpha \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right) = -8\big(3 \cdot 5 - 5 \cdot \big(-4 + \alpha\big)\big) = -8\big(35 - 5\alpha\big).$$

Luego para que una matriz sea invertible el determinante de esta debe ser distinto de cero. Entonces

$$-8\big(35 - 5\alpha\big) \neq 0 \rightarrow \alpha \neq 7$$

Puntaje:

- 1 pts por cada etapa del calculo del determinante (3×1 pts).
- 1.5 pts por argumentar que el determinante debe ser distinto de cero para que la matriz sea invertible.
- 1.5 pts por encontrar que $\alpha \neq 5$ con la argumentación previa.

3. Sea A una matriz de 3×3 tal que $\mathrm{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -9 \end{pmatrix}$ y $det(A) > 0$.

   a) Ocupando la identidad $A \cdot Adj(A) = det(A) \cdot I_3$, encuentre el valor del $det(A)$.

   b) Determine si el sistema $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene solución y si es que la tiene encuéntrela.

Solución.

a) Como

$$A \cdot Adj(A) = det(A)I \to det(A) \cdot det(Adj(A)) = det(A)^3 \to det(Adj(A)) = det(A)^2$$

y

$$det(Adj(A)) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} = 9$$

Tenemos que $det(A)^2 = 9$ como $det(A) > 0$, concluimos que $det(A) = 3$

b) Como $det(A) \neq 0$, A es una matriz invertible y el sistema $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene solución de la forma $x = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, donde

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} Adj(A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

luego la solución es

$$x = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puntaje:

- 1 pto por demostrar que $det(Adj(A)) = det(A)^2$.
- 1 pto por encontrar $det(Adj(A))$.
- 1 pto por encontrar $det(A)$.
- 0.5 pto por justificar que el sistema tiene solución.
- 1 pto por determinar A^{-1} o si determina A
- 1.5 pto por determinar correctamente la solución del sistema.

4. Sea F una matriz fija de 2×3, y sea H el conjunto de todas las matrices A de 3×2 con la propiedad de que $FA = 0$ (la matriz cero de 2×2).

   a) Demuestre que H es un subespacio de $M_{3\times 2}$.

   b) Si $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine una base para H.

Continúa en la siguiente página.

Solución.

a) Observemos que:

   i) Si $A = 0$, tenemos que $FA = 0$ para cualquier matriz F, por lo tanto $0 \in H$.

   ii) Suponga que A y B pertenecen a H, entonces $F(A + B) = FA + FB = 0 + 0 = 0$, entonces $A + B \in H$.

   iii) Si $A \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $F(\alpha A) = \alpha(FA) = \alpha 0 = 0$, luego $\alpha A \in H$.

   De i), ii) y iii) tenemos que H es un subespacio de las matrices de orden 3×2.

b) Si $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ entonces $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ pertenece a H si y sólo si

$$FA = \begin{pmatrix} a + c + e & b + d + f \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en otras palabras, si y sólo si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto $H = Gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y el conjunto $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente independiente, luego es una base para H.

Puntaje:

- 1 pto por demostrar cada propiedad que debe cumplir un subespacio.
- 1 pto por mostrar las condiciones que deben cumplir los coeficientes de una matriz que pertenezca a H.
- 1.5 pto por encontrar un conjunto que genere a H.
- 0.5 ptos por mostrar una base de H(argumentando que los vectores son li)

5. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ la función definida por

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + b - 2c \\ a - b + 6c \\ b - 4c \end{pmatrix}$$

encuentre el núcleo de esta transformación lineal.
Solución. Para encontrar el núcleo de T debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a + b - 2c \\ a - b + 6c \\ b - 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz ampliada del sistema anterior es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Al escalonar esta matriz se obtiene la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lo que muestra que bajo las condiciones que $a = -2c$ y $b = 4c$ el polinomio $a + bx + cx^2$ pertenece al núcleo de T.
Luego el núcleo de T es el conjunto

$$\left\{a + bx + cx^2 \mid a = -2c, b = 4c\right\} = \left\{-2c + (4c)x + cx^2 \mid c \in \mathbb{R}\right\} = Gen\left\{-2 + 4x + x^2\right\}.$$

Y así una base para el núcleo de T es $\{-2 + 4x + x^2\}$

Puntaje:

- 1 pto por argumentar que los polinomios que pertenecen al núcleo de T son los que al aplicar la transformación, su imagen es el vector $\vec{0} \in \mathbb{R}^3$.
- 2 pts por determinar las condiciones que satisfacen los coeficientes de los polinomios que pertenecen al núcleo de T.
- 3 pts por mostrar un base para el núcleo de T.

6. Sean $\{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes y A una matriz de 3×4 de la forma $A = [v_1 \quad v_1 + 2v_2 \quad v_2 \quad v_3 - v_1]$. Determine una base para $Col(A)$ y una base para $Nul(A)$.

Solución.

El espacio $Col(A) = Gen\{v_1,\ v_1 + 2v_2,\ v_2,\ v_3 - v_1\} = Gen\{v_1, v_2, v_3\}$ luego como $\{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes que generan a $Col(A)$ es una base para este espacio.

$$Nul(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid [v_1 \quad v_1 + 2v_2 \quad v_2 \quad v_3 - v_1] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 \cdot v_1 + x_2(v_1 + 2v_2) + x_3 \cdot v_2 + x_4 \cdot (v_3 - v_1) = \vec{0} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid (x_1 + x_2 - x_4) \cdot v_1 + (2x_2 + x_3)v_2 + x_4 \cdot v_3 = \vec{0} \right\}$$

Como $\{v_1, v_2, v_3\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 - x_4 = 0, 2x_2 + x_3 = 0, x_4 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = Gen \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Así una base para $Nul(A)$ es $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Puntaje:

- 1 pto por mostrar y argumentar que vectores generan el $Col(A)$.
- 1 pto por mostrar y argumentar que vectores de los escogidos son linealmente independientes.
- 1 pto por mostrar y argumentar una base para $Col(A)$.
- 1 pto por describir $Nul(A)$ o al menos un vector que pertenezca a $Nul(A)$.
- 1 pto por mostrar y argumentar que vectores generan el $Nul(A)$.
- 1 pto por mostrar y argumentar una base para $Nul(A)$. (0.5 ptos si la muestran sin argumentar.)

7. Sea A una matriz de 2×2 que se reduce mediante remplazos (sumar un múltiplo de una fila a otra) e intercambios de fila a la matriz escalonada

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcule $\det(B)$, donde B es la matriz 4×4

$$B = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & -A \end{pmatrix}.$$

Solución.

Aplicando las mismas operaciones de fila en reducir A a U a las primeras 2 filas de B y después a las segundas 2, obtenemos la matriz

$$B \sim V = \begin{pmatrix} U & -2U \\ 0 & -U \end{pmatrix},$$

la cual ya está en forma escalonada. Para llegar a esta forma escalonada de B se utilizaron remplazos (sumar un múltiplo de una fila a otra) que no alteran el determinante de B e intercambios de fila, que multiplican por -1 el determinante cada vez que se intercambia una fila. Digamos que en el proceso de transformar A en U se usan r intercambios de fila. Entonces, en reducir B a V hemos usado $2r$ intercambios de fila. Ahora sabemos que

$$\det B = (-1)^{2r} \times \det(V)$$

Luego como V es una matriz triangular superior su determinante es el producto de sus pivotes.

$$\det B = (-1)^{2r} \times \text{Producto de pivotes en } V$$

Ya que los pivotes en V constan de los pivotes en U y los pivotes en $-U$, tenemos que

$$\text{Producto de pivotes en } V = \big(3 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot 1\big) = 9.$$

Concluimos

$$\det B = (-1)^{2r} 9 = 9.$$

Puntaje:

- 1 pts por reducir B a V.
- 1 pto por argumentar que remplazos de filas no alteran el determinante de B.
- 1 pto por argumentar que por cada intercambios de fila se multiplica por -1 el determinante de B.
- 1 pto por ocupar que el determinante de matrices triangulares es el producto de sus pivotes.
- 1 pto por analizar el número de intercambios de fila.
- 1 pts por concluir el valor del determinante de B argumentando lo anterior.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas demúestrelas y si son falsas de un contraejemplo.

a) Si A y B son matrices simétricas entonces AB es una matriz simétrica.

b) Si A es una matriz cuadrada de $n \times n$, invertible , tal que $A^{-1} = \dfrac{1}{4} A^t$ entonces $\det(A) = \pm 2^n$.

c) Si S es el paralelogramo determinado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ entonces el área de la imagen de S bajo el mapeo $T : x \to Ax$ es 48 .

Solución.

a) Falso.
Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ entonces

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq (AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Verdadero.
Usando las propiedades de los determinantes nos da

$$|A^{-1}| = \left| \frac{1}{4} A^t \right| = \frac{1}{4^n} |A^t| = \frac{1}{4^n} |A| \,.$$

Hemos obtenido que $|A^{-1}| = \frac{1}{4^n} |A|$ lo cual es equivalente a

$$\frac{1}{|A|} = \frac{1}{4^n} |A| \Longrightarrow |A|^2 = 4^n \Longrightarrow |A| = \pm 2^n \,.$$

c) Verdadero.
El área se transforma bajo $x \to Ax$ así:

$$\text{Área}(T(S)) = |\det A| \text{Área}(S).$$

Calculamos que $\det A = 6$ y nos queda calcular sólo el área del paralelogramo S determinado por los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ cuya área es el valor absoluto de $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -8$.
Entonces,

$$\text{Área}(T(S)) = 6 \cdot 8 = 48.$$

Puntaje:

- 2 ptos por contestar correctamente cada item.