Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2022

Álgebra Lineal - MAT1203
Pauta Interrogación 2

1. Sean A, B matrices de $n \times n$ invertibles. Suponga que X es una matriz de $n \times n$ tal que

$$B^T X^T A^{-1} = I$$

donde I es la identidad. Despeje X de la ecuación y determine la inversa de X en términos de las matrices A y B.

Solución Despejamos X:

$$\begin{aligned}
B^T X^T A^{-1} = I &\Longrightarrow (B^T X^T A^{-1})A = IA \\
&\Longrightarrow (B^T X^T)(A^{-1}A) = A \\
&\Longrightarrow B^T X^T (I) = A \\
&\Longrightarrow B^T X^T = A \\
&\Longrightarrow (B^T X^T)^T = A^T \\
&\Longrightarrow XB = A^T \\
&\Longrightarrow (XB)B^{-1} = A^T B^{-1} \\
&\Longrightarrow X(BB^{-1}) = A^T B^{-1} \\
&\Longrightarrow X = A^T B^{-1}
\end{aligned}$$

Determinamos la inversa:

$$X^{-1} = (A^T B^{-1})^{-1} = (B^{-1})^{-1}(A^T)^{-1} = B(A^{-1})^T$$

Puntaje

- 4 puntos por despejar correctamente la matriz X. Asignar sólo 2 puntos si comete un único error en algún paso y 0 puntos si tiene 2 o más errores.
- 2 puntos por determinar correctamente a la matriz inversa X^{-1} a partir de la matriz X obtenida anteriormente.

2. Determine si la siguiente transformación lineal es o no invertible:

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 2y + 3z \\ -y - 2z \\ x - y \end{bmatrix}.$$

Solución La matriz estándar de la transformación lineal es $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Buscamos una forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz tiene rango 3, es invertible y por lo tanto la transformación T es invertible.

Puntaje

- 2 puntos por definir la matriz estándar de T
- 2 puntos por establecer una manera de determinar si la matriz es invertible (usar determinantes, pivotear).
- 1 punto por concluir la invertibilidad de la matriz a partir de los cálculos anteriores.
- 1 puntos por concluir la invertibilidad de T a partir de la invertibilidad de la matriz.

3. Sea A una matriz tal que al aplicar primero una operación elemental E_1, luego E_2 y finalmente E_3 se obtiene la forma escalonada $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$. Si las matrices elementales asociadas a las operaciones elementales son las siguientes:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

determine la factorización $PA = LU$ de la matriz A.

Solución De acuerdo al enunciado

$$E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

por lo que

$$E_1A = E_2^{-1}E_3^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Al calcular las inversas de las matrices elementales se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

lo que corresponde a la factorización $PA = LU$ con

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

Puntaje

- 2 puntos por establecer la relación correcta entre A, su forma escalonada y las matrices elementales E_1, E_2, E_3.
- 2 puntos por encontrar correctamente las inversas de las matrices elementales.
- 2 puntos por definir las matrices P, L y U a partir de los cálculo hechos anteriormente.

4. Calcule el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} -3a & d & g-4d \\ -3b & e & h-4e \\ -3c & f & i-4f \end{pmatrix}$$

sabiendo que $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -6$.

Solución Aplicamos operaciones elementales a la matriz:

$$\begin{vmatrix} -3a & d & g-4d \\ -3b & e & h-4e \\ -3c & f & i-4f \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} a & d & g-4d \\ b & e & h-4e \\ c & f & i-4f \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = (-3)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Como $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -6$, entonces

$$\begin{vmatrix} -3a & d & g-4d \\ -3b & e & h-4e \\ -3c & f & i-4f \end{vmatrix} = (-3)(-6) = 18.$$

Puntaje

- 6 puntos por calcular correctamente el determinante (incluso si usa cofactores).
- Descontar 2 puntos por cada error que el/la estudiante tenga en su cálculo.

5. Sea S el paralelogramo determinado por los vectores $b_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, y sea $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule el área de la imagen de S bajo la transformación $T(x) = Ax$.

Solución $T(S)$ es un paralelógramo cuya área es

$$\text{área } T(S) = |\det(A)|(\text{área de } S)$$

Calculamos:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = 12 - (-3)(-2) = 6.$$

$$\text{área de S} = \left|\det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}\right| = \left|\det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\right| = |-10+6| = 4.$$

Por lo tanto

$$\text{área } T(S) = 24.$$

Puntaje

- 2 puntos por establecer la fórmula para encontrar área de $T(S)$.
- 1,5 puntos por encontrar correctamente el determinante de A.
- 1,5 puntos por encontrar el área de S.
- 1 punto por encontrar el área de $T(S)$.

6. Determine si el conjunto de matrices

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio de $M_{2\times 2}$

Solución 1 Todo elemento de H es de a forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo que $H = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Esto implica que H es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

Solución 2 Si $a = 0, b = 0, d = 0$, obtenemos la matriz nula como elemento de H. Por otro lado,

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

donde esta última matriz corresponde a un elemento de H. Por lo tanto, H es cerrado para la operación de suma del espacio vectorial. Finalmente,

$$\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ 0 & \alpha d_1 \end{bmatrix}$$

lo que también corresponde a una matriz de H. Por lo tanto, H es cerrado para la operación de multiplicación escalar. Por lo anterior, H es un subespacio de $M_{2\times 2}$.

Puntaje

- 3 puntos por establecer una manera de demostrar que H es un subespacio vectorial.
- 3 puntos por verificar correctamente que H es un subespacio vectorial.

7. Considere una matriz $A = MR$ donde M es una matriz invertible y

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre una base de $\mathrm{Col}(A^T)$.

(b) Encuentre una base de $\mathrm{Nul}(A)$.

Solución

(a) Ya que M es invertible, M es producto de matrices elementales. Esto implica que R es la forma escalonada reducida de A.

Como las filas de R son combinaciones lineales de las filas A, entonces $\mathrm{Col}(A^T) = \mathrm{Fil}(A) = \mathrm{Fil}(R)$. Por lo tanto una base del espacio es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(b) Un vector x pertenece a $\mathrm{Nul}(A)$ si $Ax = 0$, es decir, $MRx = 0$. Como M es invertible, tenemos

$$Ax = 0 \Leftrightarrow MRx = 0 \Leftrightarrow M^{-1}MRx = M^{-1}0 \Leftrightarrow Rx = 0$$

es decir, $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(R)$. De esta forma,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathrm{Nul}(R) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = -3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{array} \right. , \quad x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow x = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, una base de $\mathrm{Nul}(A)$ es $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Puntaje

- 1 puntos por justificar correctamente que $\mathrm{Col}(A^T) = \mathrm{Fil}(A) = \mathrm{Fil}(R)$.
- 2 puntos por determinar la base de $\mathrm{Col}(A^T)$.
- 1 puntos por justificar que $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(R)$.
- 2 puntos por determinar la base de $\mathrm{Nul}(A)$.

8. El conjunto $B = \{1+t, 1+t^2, t+t^2\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$. Encuentre el vector de coordenadas de $p(t) = 6 + 3t - t^2$ con respecto a la base B.

Solución Buscamos α, β, γ escalares tales que

$$\alpha(1+t) + \beta(1+t^2) + \gamma(t+t^2) = 6 + 3t - t^2.$$

Esto es:

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma)t + (\beta+\gamma)t^2 &= 6 + 3t - t^2\\ \Longrightarrow \alpha+\beta = 6, \quad \alpha+\gamma = 3, \quad &\beta+\gamma = -1\\ \Longrightarrow \alpha = 5, \quad \beta = 1, \quad &\gamma = -2.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$[\, p(t)]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Puntaje

- 2 puntos por plantear una manera de encontrar las coordenadas de $p(t)$. Esto puede ser por tanteo, con sistemas de ecuaciones o con matrices.
- 1 punto por determinar cada coordenada correctamente (3 en total).
- 1 punto por escribir el vector de coordenadas pedido.