PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer semestre 2022

MAT1620 ⋆ Cálculo 2
☠ Examen ☠

1. a) Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2-1}}$. Indique si es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

   Sean $a_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2-1}}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} = 1$$

   Entonces, como la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ y la serie convergente $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ tienen sus términos positivos, podemos aplicar el criterio de comparación en el límite y concluir que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ es convergente. Por lo tanto $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2-1}}$ es absolutamente convergente.

   b) Determine si la integral impropia $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x+\sin x}{x^2}\,dx$ es convergente o divergente.

   Como $\sin x \geq -1$ para todo x,

$$\frac{x+\sin x}{x^2} \geq \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

   La integral impropia

$$\int_2^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

   diverge, porque

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

   es divergente ($p \leq 1$) y

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

   es convergente ($p = 2 > 1$).
   Por lo tanto, usando el criterio de comparación, podemos concluir que $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x+\sin x}{x^2}\,dx$ es divergente.

2. Analice los siguientes límites. Si el límite existe calcúlelo, si el límite no existe demuéstrelo.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1} &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{y(x-1)-2(x-1)}{x-1}\\ &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)(y-2)}{x-1}\\ &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} (y-2)\\ &= -1\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2-y}$

Si $y = mx^2$ con $m \neq 1$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2-y} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2-mx^2}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1-m}\\ &= \frac{1}{1-m}\end{aligned}$$

De donde se obtienen distintos límites para valores diferentes de m, por lo que el límite no existe.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$

Si $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, entonces:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} &=\\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta - (r\cos\theta)(r^2\sin^2\theta)}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3(\cos^3\theta - \cos\theta\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r(\cos^3\theta - \cos\theta\sin^2\theta)}{1}\\ &= 0\end{aligned}$$

3. a) Encuentre los puntos de la superficie

$$xy + yz + zx - x - z^2 = 0$$

donde el plano tangente es paralelo al plano xy.

Sea

$$F(x, y, z) = xy + yz + zx - x - z^2$$

Si el plano tangente es paralelo al plano xy, entonces

$$\nabla F(x, y, z) =< y + z - 1, x + z, y + x - 2z >$$

es perpendicular al plano xy, es decir

$$\begin{aligned} \langle y + z - 1, x + z, y + x - 2z \rangle \cdot \langle 1, 0, 0 \rangle = 0 \\ \langle y + z - 1, x + z, y + x - 2z \rangle \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle = 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} y - z - 1 = 0 &\implies y = z + 1 \\ x + z = 0 &\implies x = -z \end{aligned}$$

Ahora, reeemplazamos en $F(x, y, z) = 0$

$$\begin{aligned} -z(z + 1) + (z + 1)z + z(-z) - (-z) - z^2 = 0 \\ z - 2z^2 = 0 \implies z = \frac{1}{2}, z = 0 \end{aligned}$$

y así para $z = \frac{1}{2}$ obtenemos el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y para $z = 0$, el punto $(0, 1, 0)$.

b) Encuentre los puntos críticos de

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$$

y clasifíquelos como mínimo, máximo o punto silla.

Si

$$f_x(x, y) = 2x - y + 2 = 0 \quad \text{ y } \quad f_y(x, y) = -x + 2y + 2 = 0$$

entonces $x = -2$, $y = -2$, y así, el único punto crítico es

$$(-2, -2)$$

Además

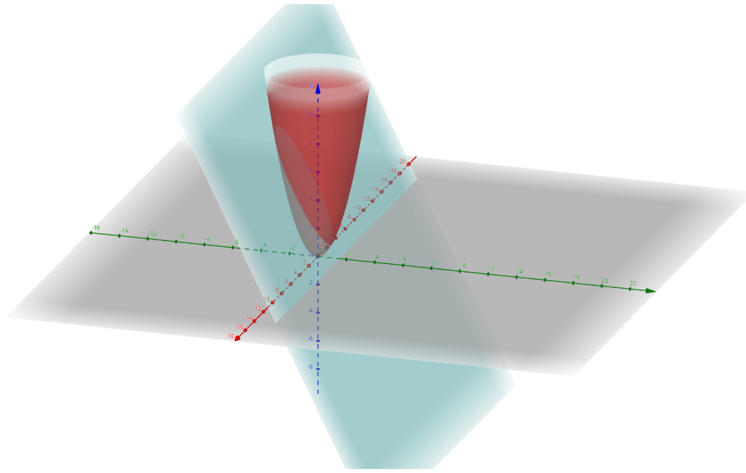
$$f_{xx}(-2, -2) = 2,\ f_{yy}(-2, -2) = 2,\ f_{xy}(-2, -2) = -1 \implies f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0$$

y como $f_{xx} > 0$, entonces f tiene un mínimo local cuyo valor es $f(-2, -2) = -8$.

4. Sea E la región tridimensional acotada por el plano $z = 3 - 2y$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

   a) Haga un bosquejo de la región E y su proyección sobre el plano xy y sobre el plano yz.

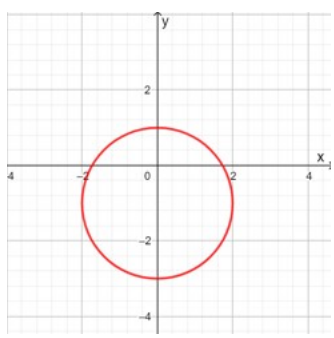
   El gráfico de la región E es el de la siguiente figura



   La proyección sobre el plano xy es la región acotada por

$$x^2 + y^2 = 3 - 2y \implies x^2 + (y+1)^2 = 4$$

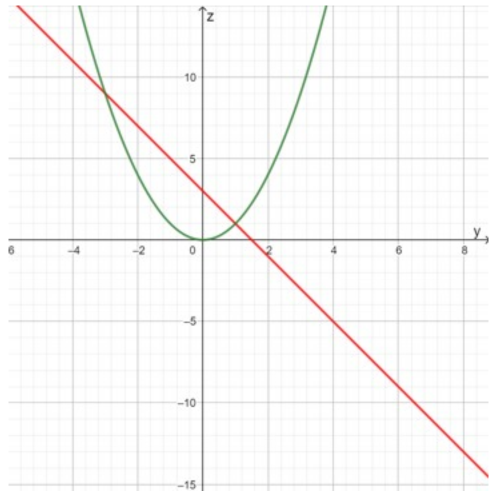
   cuya gráfica es la de la figura



La proyección sobre el plano yz es la región está acotada por

$$z = y^2, \quad z = 3 - 2y$$

cuya gráfica es la de la figura



b) Si $f(x, y, z)$ es una función de tres variables, escriba la integral triple $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ en la forma $\iiint f(x, y, z)\, dzdxdy$.

Del bosquejo de la región E, la proyección sobre el plano xy y despejando

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4 \implies y = \pm\sqrt{4 - (y + 1)^2}$$

se obtiene la integral

$$\int_{-3}^{1} \int_{-\sqrt{4-(y+1)^2}}^{\sqrt{4-(y+1)^2}} \int_{x^2+y^2}^{3-2y} f(x, y, z)\, dzdxdy$$

c) Si $f(x, y, z)$ es una función de tres variables, escriba la integral triple $\iiint_E f(x, y, z)\, dV$ en la forma $\iiint f(x, y, z)\, dxdydz$.

Observando la proyección sobre el plano yz. vemos que debemos dividir la región en dos integrales. Las curvas $z = y^2$ y $z = 3 - 2y$ se intersectan cuando

$$y + 2y - 3 = (y + 3)(y - 1) = 0 \implies y = -3,\ y = 1$$

de donde se obtiene $z = 1$, $z = 9$ y la integral

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} f(x, y, z)\, dxdydz + \int_1^9 \int_{-\sqrt{z}}^{\frac{3-z}{2}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} f(x, y, z)\, dxdydz$$