PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2020

Interrogación 10
MAT1107 - Introducción al Cálculo

(1) Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right).$$

Justifique su respuesta. **(3 puntos)**

Solución.

Primero,

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^2+3n+5}-n &= \left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+3n+5}+n}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}\\
&= \frac{3n+5}{\sqrt{n^2+3n+5}+n}\\
&= \frac{3n+5}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1\right)}\\
&= \frac{3+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}. \quad \textbf{(1punto)}
\end{aligned}$$

Por álgebra de límites,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n+5}-n\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}\\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}+1\right)} \quad \textbf{(1punto)}\\
&= \frac{3}{2}. \quad \textbf{(1punto)}
\end{aligned}$$

(2) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $1 < a < b < c$. Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}.$$

Justifique su respuesta. **(3 puntos)**

Solución.

Primero,

$$\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n} \geq \sqrt[n]{c^n} = c. \quad \textbf{(1punto)}$$

Por otro lado,

$$\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3c^n} = c\sqrt[n]{3}. \quad (\mathbf{1punto})$$

Es decir,

$$c \leq \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq c\sqrt[n]{3}.$$

Como sabemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ **(0.5 puntos)**, el teorema del sándwich implica que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c. \quad (\mathbf{0.5puntos})$$