PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2023

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 5

1. Considere la función real de variable real definida por

$$f(x) = -\frac{x}{(3+x^2)^2}.$$

(a) (0.4pts) Demuestre que f es impar.

(b) (2pts) Sean $x_1, x_2 \in [0,\infty)$. Muestre que

$$f(x_1) - f(x_2) = -\frac{(x_1 - x_2)}{(3+x_1^2)^2(3+x_2^2)^2}\Bigg(9 - x_1x_2(6 + x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)\Bigg).$$

(c) (0.8pts) Deduzca de (b) que f es estrictamente decreciente en $[0,1]$.

(d) (0.8pts) Deduzca de (b) que f es estrictamente creciente en $[1,\infty)$.

(e) (1pt) Deduzca de las partes anteriores la monotonía (por intervalos) de la función en $(-\infty, 0]$.

(f) (1pt) Bosqueje el gráfico de f.

Solución.

(a) $f(-x) = -\frac{-x}{(3+(-x)^2)^2} = \frac{x}{(3+x^2)^2} = -f(x)$, por lo que f es impar.

(b) Tenemos que

$$f(x_1) - f(x_2) = -\frac{x_1}{(3+x_1^2)^2} + \frac{x_2}{(3+x_2^2)^2} = -\frac{x_1(3+x_2^2)^2 - x_2(3+x_1^2)^2}{(3+x_1^2)^2(3+x_2)^2}.$$

Por otro lado,

$$x_1(3+x_2^2)^2 - x_2(3+x_1^2)^2 = x_1(9+6x_2^2+x_2^4) - x_2(9+6x_1^2+x_1^4) = 9(x_1-x_2) - 6x_1x_2(x_1-x_2) - x_1x_2(x_1^3-x_2^3).$$

Finalmente, usando que $x_1^3 - x_2^3 = (x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$, concluimos que

$$x_1(3+x_2^2)^2 - x_2(3+x_1^2)^2 = (x_1-x_2)\Bigg(9 - x_1x_2(6+x_1^2+x_1x_2+x_2^2)\Bigg),$$

de donde se deduce la igualdad pedida.

(c) Sean $x_1, x_2 \in [0,1]$ con $x_1 < x_2$. Notando que

$$9 - x_1x_2(6+x_1^2+x_1x_2+x_2^2) > 9 - 1(6+1+1+1) > 0,$$

y que $\frac{(x_1-x_2)}{(3+x_1^2)^2(3+x_2^2)^2} < 0$, obtenemos $f(x_1) - f(x_2) > 0 \iff f(x_1) > f(x_2)$, es decir, f es estrictamente decreciente en $[0,1]$.

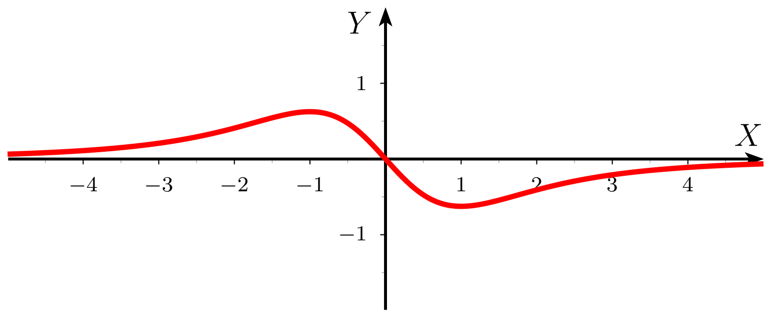
(d) Sean $x_1, x_2 \in [1, \infty)$ con $x_1 < x_2$. Notando que

$$9 - x_1 x_2(6 + x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) < 9 - 1(6 + 1 + 1 + 1) < 0,$$

y que $\frac{(x_1 - x_2)}{(3+x_1^2)^2(3+x_2^2)^2} < 0$, obtenemos $f(x_1) - f(x_2) < 0 \iff f(x_1) < f(x_2)$, es decir, f es estrictamente creciente en $[1, \infty)$.

(e) Dado que f es impar, de la parte (c) deducimos que f es estrictamente decreciente en $[-1, 0]$ y de la parte (d) que f es estrictamente creciente en $(-\infty, 1]$.

(f) f no tiene asíntotas verticales y tiene a $y = 0$ como única asíntota horizontal. Además, $(0, 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados. De las partes anteriores deducimos que el gráfico de la función es como se muestra en la siguiente figura:



Puntaje Pregunta 1.

(a) 0.4 puntos por mostrar que $f(-x) = -f(x)$.

(b) 0.5 puntos por cada una de las 4 igualdades del desarrollo.

(c) 0.3 puntos por cada una de las primeras dos desigualdades y 0.3 puntos por concluir.

(d) Análogo a la parte anterior.

(e) 0.5 por deducir cada uno de los dos intervalos de monotonía de la función

(e) 1 punto por el bosquejo.

2. Demuestre que la función $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definida por $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+4x}}{x}$ es biyectiva.

Solución.

- Para todo $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{1+4x_1}}{x_1} = \frac{\sqrt{1+4x_2}}{x_2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{1+4x_1}{x_1^2} = \frac{1+4x_2}{x_2^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad x_2^2 + 4x_1x_2^2 = x_1^2 + 4x_2x_1^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 4x_1x_2(x_2 - x_1) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 4x_1x_2) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (x_1 = x_2) \vee (x_2 + x_1 = -4x_1x_2)
\end{aligned}
$$

  Como $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ entonces $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}^+$ y $x_1x_2 \in \mathbb{R}^+$ por lo que $x_2 + x_1 \neq -4x_1x_2$. Se sigue que $x_1 = x_2$. Luego f es inyectiva.

- Tenemos que

$$
\begin{aligned}
y \in \mathrm{Rec}(f) \quad &\Longleftrightarrow \quad (\exists\, x > 0)(f(x) = y) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\exists\, x > 0)\left(\frac{\sqrt{1+4x}}{x} = y\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\exists\, x > 0)(1 + 4x = x^2y^2) \wedge (y > 0) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\exists\, x > 0)(y^2x^2 - 4x - 1 = 0) \wedge (y > 0) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\exists\, x > 0)\left(x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 4y^2}}{2y^2}\right) \wedge (y > 0)
\end{aligned}
$$

  Como para todo y se cumple que $16 + 4y^2 \geqslant 0$ entonces $\mathrm{Rec}(f) = (0, \infty) = \mathrm{Codom}(f)$. Luego f es sobreyectiva.

Por lo tanto f es biyectiva.

Puntaje Pregunta 2.

- 3 puntos por probar que f es inyectiva.
- 3 puntos por probar que f es sobreyectiva.