



Pontificia Universidad Católica de Chile  
Bastían Mora - bmor@uc.cl  
Matías Fernández - matias.fernandez@uc.cl

## MAT1107 - Introducción al Cálculo

### Ayudantía 06 - Jueves 28 de abril del 2022

**Problema 1.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente creciente, es decir, si  $x_1, x_2 \in [a, b]$  y  $x_1 < x_2$ , entonces  $f(x_1) < f(x_2)$ .

- a) Demuestre que  $f$  es inyectiva y por tanto invertible (en algún conjunto).
- b) Demuestre que  $f^{-1}$  es estrictamente creciente.

**Problema 2.** Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función definida por:

$$g(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}$$

- a) Encuentre la inversa de  $g$
- b) Sea  $f = g^{-1}$ , demuestre que  $g \circ f = id$  y  $f \circ g = id$ .

**Problema 3.** Sea  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  y  $h : C \rightarrow D$ , demuestre que:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

**Problema 4.** Consideremos ahora dos funciones,  $f : A \rightarrow B$  y  $g : B \rightarrow C$ , ambas invertibles (biyecciones):

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B, & g : B &\rightarrow C \\ f^{-1} : B &\rightarrow A, & g^{-1} : C &\rightarrow B \end{aligned}$$

Demuestre que:

$$g \circ f \text{ es invertible. Además } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

**Problema 5.** Sean  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow A$  dos funciones tales que  $f \circ g = id_B$ . Demuestre que  $f$  es sobreyectiva y que  $g$  es inyectiva.

**Problema 6.** Sea  $f : A \rightarrow B$  una función.

- a) Demuestre que si  $f$  es inyectiva, entonces existe una función sobreyectiva  $g : B \rightarrow A$ .
- b) Demuestre que si  $f$  es sobreyectiva, entonces existe una función inyectiva  $h : B \rightarrow A$ .