



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PRIMER SEMESTRE DE 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026

Ayudantía 14

20 de Junio de 2019

1. Sean $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d}}{\sim} \text{Poisson}(\lambda)$. Calcule el límite en probabilidad de

$$Y_n = \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n}.$$

2. Sean $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d}}{\sim} N(0, 1)$. Calcule el límite casi seguro de

$$\frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{(X_1 - 1)^2 + \dots + (X_n - 1)^2}$$

3. Sean X_1, \dots, X_n i.i.d con $E(X_1) = 0$ y $E(X_1^2) = 2$. Encuentre el límite en distribución de

$$\frac{\sqrt{n}(X_1 + \dots + X_n)}{X_1^2 + \dots + X_n^2}.$$

4. Sean X_1, X_2, \dots i.i.d con $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2}$. Demuestre que

$$\sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k} \xrightarrow{D} U(-n, n).$$

5. Sean $U_1, \dots, U_n \stackrel{\text{i.i.d}}{\sim} U\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ constantes conocidas. Defina las variables

$$Y_i = c_i + U_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- a) Demuestre que $\bar{Y} \xrightarrow{\text{c.s.}} \bar{c}$.
b) Sea $\delta > 0$. Encuentre el valor aproximado de $P(|\bar{Y} - \bar{c}_i| \leq \delta)$.
c) Encuentre el valor mínimo de n para el cual $P(|\bar{Y} - \bar{c}_i| \leq 0,1) \approx 0,85$.
6. Sean $X_1, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d}}{\sim} U(0, n)$. Considere

$$W_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{2n} > X_{2n-1} \\ 0 & \text{si } X_{2n} \leq X_{2n-1} \end{cases}.$$

- a) Calcule $P(W_n = 1)$.
b) Pruebe que

$$\frac{W_1 + \dots + W_n}{n} \xrightarrow{\text{c.s.}} \frac{1}{2}.$$