Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo Semestre de 2013

MAT 1620 – Cálculo II
Pauta Interrogación 3

Problema 1.
Considere la función
$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

a) Desarrollar en series de potencias centrada en $x = 0$ la función f y determine el radio de convergencia.

b) Calcule el valor de la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$.

Solución.

a) Sabemos que para $|x| < 1$ se tiene que
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n .$$
Derivando con respecto a x obtenemos que para $|x| < 1$,
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} .$$
Por lo tanto, la serie de potencias centrada en $x = 0$ para f es
$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = x\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$
válida para $|x| < 1$ y se sigue que el radio de convergencia es $R = 1$.

b) Notemos que
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} .$$
Como $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ entonces $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ y entonces
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\right) - \frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} .$$

Problema 2.

Considere la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{n2^n}\,.$$

a) Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie.

b) Determine la función f asociada a la serie.

Solución.

a) Sea $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{(x-2)^n}{n2^n}$ entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(x-2)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n2^n}{(-1)^{n+1}(x-2)^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}|x-2|=\frac{1}{2}|x-2|$$

Por el criterio del cuociente esta serie converge si $\frac{1}{2}|x-2|<1\Longleftrightarrow|x-2|<2$ y diverge si $|x-2|>2$ y se sigue que el radio de convergencia es $R=2$.

Ahora bien, para determinar el intervalo de convergencia, tenemos que la serie convege si se cumple que $|x-2|<2\Longleftrightarrow 0<x<4$ y resta analizar el comportamiento en los extremos.

Si $x=0$, se obtiene la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(-2)^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,.$$

y se sigue que la serie diverge para $x=0$.

Si $x=4$ se obtiene la serie alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

que por el criterio de la serie alternate es convergente.

Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $I=]0,4]$.

b) Si $\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{n2^n}}$(*) entonces derivando con respecto a x obtenemos que

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-2)^{n-1}}{2^{n-1}}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{2-x}{2}\right)}=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Integrando con respecto a x obtenemos que

$$f(x)=\int\frac{dx}{x}=\ln(x)+C$$

donde C es una constante. Ahora bien, si $x=2$ en la igualdad (*) obtemos que $f(2)=0$ entonces $0=f(2)=\ln(2)+C$ lo que implica que $C=-\ln(2)$ y por lo tanto la función f asociada a la serie es

$$f(x)=\ln(x)-\ln(2)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)\,.$$

Problema 3.
Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ vectores en $\mathbb{R}^3$

a) Muestre que el conjunto de vectores $\vec{r}$ en $\mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{r}-\vec{b})=0,$$

es una esfera. Determinar el radio y centro de dicha esfera.

b) Muestre que

$$(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Deduzca que el área del paralelogramo que forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tiene la mitad del área del que forma los vectores $\vec{a}-\vec{b}$ y $\vec{a}+\vec{b}$.

Solución.

a) Por distributividad y conmutatividad del producto punto tenemos que

$$\begin{aligned}(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{r}-\vec{b})&=0\\ \vec{r}\cdot\vec{r}-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{r}+\vec{a}\cdot\vec{b}&=0.\end{aligned}$$

Completando cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\vec{r}-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{r}+\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}&=0\\ \left(\vec{r}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot\left(\vec{r}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)+\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{4}\left[\|\vec{a}\|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2\right]&=0\\ \left\|\vec{r}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right\|^2-\frac{1}{4}\|\vec{a}-\vec{b}\|^2&=0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto descrito es una esfera de ecuación,

$$\left\|\vec{r}-\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right\|^2=\frac{1}{4}\|\vec{a}-\vec{b}\|^2,$$

es decir, su centro es $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ y su radio es $\dfrac{1}{2}\|\vec{a}-\vec{b}\|$.

b) Por propiedades del producto cruz, se tiene que

$$\begin{aligned}(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})&=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{b}\\ &=2(\vec{a}\times\vec{b}),\end{aligned}$$

usando que $\vec{x}\times\vec{x}=\vec{0}$ para cualquier $\vec{x}$ y que $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times a$. Por otro lado, se sabe que el área $A(\vec{x},\vec{y})$ de un paralelogramo formado por los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ esta dada por

$$A(\vec{x},\vec{y})=\|\vec{x}\times\vec{y}\|.$$

Por lo tanto, usando la propiedad anterior

$$A(\vec{a},\vec{b})=\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\frac{1}{2}\left\|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})\right\|=\frac{1}{2}A(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+\vec{b}).$$

Problema 4.
Sean los planos

$$\prod_1 \quad : \quad 4x + y - kz = 1$$

$$\prod_2 \quad : \quad 3x + ky + 5z = 2$$

a) Encuentre el valor de k para que los planos sean ortogonales.

b) Halle la ecuación vectorial de la recta contenida en ambos planos para el valor de k encontrado en a).

c) Determine la distancia del punto $P(1, 5, 9)$ a la recta encontrada en b).

Solución.

a) De las ecuaciones para $\prod_1$ y $\prod_2$ se tiene que sus vectores normales son $\vec{n}_1 = (4, 1, -k)$ y $\vec{n}_2 = (3, k, 5)$, respectivamente. Luego, para que $\prod_1$ sea ortogonal a $\prod_2$ es necesario que $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Lo que es equivalente a $12 + k - 5k = 0$, por lo que $k = 3$.

b) Como $k = 3$, la recta viene dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 1 \\ 3x + 3y + 5z = 2 \end{cases}.$$

Un vector director de la recta debe ser perpendicular a $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$, por lo que podemos tomar a

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 4 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (14, -29, 9)$$

como el vector director. Ahora buscamos un punto de la recta resolviendo

$$\begin{cases} 4x + y = 1 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases},$$

para $z = 0$. Luego, $\vec{r}_0 = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, 0\right)$ y la ecuación vectorial de la recta es

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t\vec{v} = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, 0\right) + t(14, -29, 9)$$

c) Sabiendo que la recta pasa por $\vec{r}_0$ y tiene a $\vec{v}$ como vector director, entonces la distancia del punto P a dicha recta viene dada por

$$d = \frac{\|\overrightarrow{r_0P} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Ahora, se tiene que

$$\overrightarrow{r_0P} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{8}{9} & \frac{41}{9} & 9 \\ 14 & -29 & 9 \end{vmatrix} = (302, 118, -38)$$

y por lo tanto,

$$d = \frac{\sqrt{302^2 + 118^2 + 38^2}}{\sqrt{14^2 + 29^2 + 81}}.$$