PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
PRIMER SEMESTRE DE 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026
Ayudantía 2

21 de Marzo de 2019

Propuestos:

1. Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras, cabras. Luego de seleccionar una, el presentador abre otra puerta que contiene una cabra. Se te ofrece cambiar tu elección inicial por la puerta restante. ¿Qué decisión adoptarías? Justifica tu respuesta.

   Demostración. Véase problema de Monty Hall en Wikipedia. □

2. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y suponga que todos los siguientes conjuntos pertenecen a $\mathcal{A}$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a) Sean $A_1, A_2, \ldots$ disjuntos con $P(A_n) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $P(B \mid A_n) \geqslant c\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces
   $$P\left(B|\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geqslant c.$$

   b) Si $A_n \supset A_{n+1}$ y $P(A_{n+1}|A_n) \leqslant \frac{1}{2}\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $P(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

   c) Si $A_1, A_2, \ldots$ son disjuntos y $P(B|A_n) = P(C|A_n)$ para todo $n \geqslant 1$ entonces
   $$P\left(B \mid \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = P\left(C \mid \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

   d) Si $A_1, A_2, \ldots$ son una partición de Ω entonces
   $$P(B|C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_N|C)P(B|A_n \cap C).$$

   Demostración.

   a) En primer lugar, notemos que
   $$P(B \cap A_n) = P(B|A_n)P(A_n)$$
   Luego
   $$P\left(B \mid \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(B \cap A_n)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)} = \frac{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(B|A_n)P(A_n)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)} \geqslant \frac{c\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)}{\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)} = c$$

probando lo pedido.

b) Notemos que

$$P(A_{n+1}|A_n) = \frac{P(A_{n+1})}{P(A_N)} \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow P(A_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}P(A_n)$$

Luego, aplicando de mantera recursiva se obtiene que

$$P(A_n) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} P(A_1)$$

y haciendo $n \to \infty$ se obtiene lo pedido.

c) Basta notar que

$$\begin{aligned} P(B|C) &= P(B \cap \Omega|C) \\ &= P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B \cap A_n|C\right) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(B \cap A_n|C) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P(B \cap A_n \cap C)}{P(C)} \frac{P(A_n \cap C)}{P(A_n \cap C)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_N|C)P(B|A_n \cap C) \end{aligned}$$

lo que prueba lo pedido.

$\square$