1. Probar que para $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ se cumple que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

Dem.: Procedemos por inducción sobre el número de términos (o sea, n).

Caso base (n=2): $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 0 \quad / - 2x_1x_2 \\
&\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2 \quad / + 2x_1x_2 \\
&\Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \geq 4x_1x_2 \\
&\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2 \quad / \cdot \tfrac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geq x_1x_2 \quad / \sqrt{} \\
&\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} .
\end{aligned}$$

Paso inductivo: Asumamos que la afirmación se cumple para k-1 términos. Hay que mostrarla para k. Antes, mostramos un lema

Lema: Si la afirmación es cierta para n elementos, también lo es para 2n.

Dem. (lema): Sabemos que la aff. es cierta para n elementos, o sea

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \geq 0 \Rightarrow \frac{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \frac{x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1}x_{n+2}\cdots x_{2n}}}$$

Usamos la desigualdad para n=2

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{x_1x_2\cdots x_{2n}} \blacksquare$$

Ahora probamos el paso inductivo. Todos los pasos siguientes son reversibles, así que podemos partir con lo que queremos mostrar (la aff es cierta para n términos). Consideremos $x_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$. Ahora,

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)} \quad / \text{ Amplificamos la parte izquierda por } (n-1)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{(n\cancel{-1})(x_1 + \cdots + x_{n-1}) + \cancel{x_1 + \cdots + x_{n-1}}}{(n-1)n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\sqrt[n]{\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}} \\
&\Leftrightarrow \frac{\cancel{n}(x_1 + \cdots + x_{n-1})}{(n-1)\cancel{n}} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}}\sqrt[n]{\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}} \quad / \div \sqrt[n]{\frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + \cdots x_{n-1}}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{n}} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_{n-1}} \quad / (\quad)^n \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + \cdots x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq x_1x_2\cdots x_{n-1} \quad / \sqrt[n-1]{} \\
&\Leftrightarrow \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1x_2\cdots x_{n-1}} .
\end{aligned}$$

Esto es lo que pedíamos $\blacksquare$

2. Compare el cjto. solución de

a) $|x^2 - 2x + 1| \geq 0$ y $x^2 - 2|x| + 1 \geq 0$
b) $|x^2 - x| < 0$ y $x^2 - |x| < 0$
c) $|x^3 - 2x^2| \geq 0$ y $|x|^3 - 2x^2 \geq 0$.

Sol.: a) • $|x^2 - 2x + 1| \geq 0 \Leftrightarrow |(x-1)^2| \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

- $x^2 - 2|x| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 2|x| \overset{|x| = \sqrt{x^2}}{\Leftrightarrow} \frac{x^2 + 1}{2} \geq \sqrt[2]{x^2 \cdot 1}$. Es cierto siempre que $x^2 \geq 0$ por el ítem anterior y esto siempre ocurre. Luego, $x \in \mathbb{R}$.

Los conjuntos solución son iguales.

b) • $|x^2 - x| < 0$. Esto nunca ocurre ($|z| \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{R}$). Luego, el cjto. sol. es $\emptyset$.

• $$\begin{aligned} x^2 - |x| < 0 \iff x^2 < |x| &\iff x^2 < x \ \vee \ -x^2 > x \\ &\iff 0 < x - x^2 \ \vee \ 0 > x + x^2 \\ &\iff 0 < x(1-x) \ \vee \ 0 > x(1+x) \\ &\iff \left(\begin{matrix} x > 0 \wedge 1 - x > 0 \ \vee \\ x < 0 \wedge 1 - x < 0 \end{matrix}\right) \vee \left(\begin{matrix} x < 0 \wedge 1 + x > 0 \ \vee \\ x > 0 \wedge 1 + x < 0 \end{matrix}\right) \\ &\iff \left(\begin{matrix} x > 0 \wedge 1 > x \ \vee \\ x < 0 \wedge 1 < x \end{matrix}\right) \vee \left(\begin{matrix} x < 0 \wedge x > -1 \ \vee \\ x > 0 \wedge x < -1 \end{matrix}\right) \\ &\iff x \in ((0,1) \cup \emptyset) \cup ((-1,0) \cup \emptyset) \\ &\iff x \in (-1,1) \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Un conjunto es vacío, el otro es unión de intervalos.

c) • $|x^3 - 2x^2| \geq 0 \iff |x^2(x-2)| \geq 0 \iff x^2|x-2| \geq 0$. Es producto de elementos en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Por cerradura, esto siempre está en $\mathbb{R}^2 \cup \{0\}$ (≥ 0). Luego, $x \in \mathbb{R}$.

• $|x|^3 - 2x^2 \geq 0 \iff |x|^3 - 2|x|^2 \geq 0 \iff |x|^2(|x| - 2) \geq 0 \iff |x| \geq 2 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Una sol. es todo $\mathbb{R}$, la otra es unión de intervalos.

3. Halle condiciones sobre $n \in \mathbb{N}$ para que la inecuación $\sqrt{x^n} + x^n \geq 0$ tenga solución.

Sol.: Supongamos que n es impar. Así, solo es posible que $x \geq 0$ (la raíz cuadrada solo admite cantidades positivas). Entonces, $x^n \geq 0$ y $\sqrt{x^n} \geq 0 \implies \sqrt{x^n} + x^n \geq 0 \iff x \in [0, +\infty)$ (hay solución).

Si n es par, $n = 2k$, $k \in \mathbb{N} \implies x^n = x^{2k} = (x^k)^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \implies \sqrt{x^n} + x^n \geq 0 \iff x \in \mathbb{R}$ (hay solución).

Luego, hay sol. $\forall n \in \mathbb{N}$.

④ a) $|5x+5|-8 \leq 17$

$|5x+5| \leq 25 \Rightarrow -25 \leq 5x+5 \leq 25$

$-30 \leq 5x \leq 20 \quad \therefore \quad -6 \leq x \leq 4 \quad \Rightarrow x \in [-6;4]$

b) $\left|\frac{x^2+5x+4}{x^2-4x-5}\right| > 2 \Rightarrow \left|\frac{(x+4)\cdot\cancel{(x+1)}}{(x-5)\cdot\cancel{(x+1)}}\right| > 2 \Rightarrow \left|\frac{x+4}{x-5}\right| > 2$

C1: $\frac{x+4}{x-5} > 2 \Rightarrow x+4 > 2x-10 \Rightarrow 14 > x \quad S_1 =]-\infty, 14[$

$\Delta\ x \neq 5$

C2: $\frac{x+4}{x-5} < -2 \quad / \cdot (x-5)$

a) $(x-5)<0 \Rightarrow x+4 > -2x+10 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2 \quad S_2 =]2;\infty[$

b) $(x-5)>0 \Rightarrow x+4 < -2x+10 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow (x-5) < 0\ \Delta$

$\therefore \quad x \in S_1 \cap S_2 =]2, 14[- \{5$

c) $|3x+2| \geq |x+1| + |2x+1| \Rightarrow |3x+2| - |x+1| - |2x+1| \geq 0$

$-\infty \quad -1 \quad -2/3 \quad -1/2 \quad +\infty$

f(x)	C1	C2	C3	C4
3x+2	−	−	+	+
x+1	−	+	+	+
2x+1	−	−	−	+

C1: $x \in]-\infty, -1]$

$\Rightarrow -(3x+2) + (x+1) + (2x+1) \geq 0$

$\Rightarrow 0 \geq 0 \quad \therefore \quad S_1 =]-\infty, -1]$

C2: $x \in]-1, -2/3] \Rightarrow -(3x+2) - (x+1) + (2x+1) \geq 0$

$\Rightarrow -2x-2 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \quad \therefore S_2 =]-\infty, -1] \cap]-1, -2/3] = \emptyset$

C3: $x \in]-2/3; -1/2] \Rightarrow (3x+2) - (x+1) + (2x+1) \geq 0$

$\Rightarrow 4x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1/2 \quad \therefore S_3 =]-2/3; -1/2] \cup [-1/2, \infty[= [-1/2]$

C4: $x \in]-1/2; \infty[\Rightarrow (3x+2) - (x+1) - (2x+1) \geq 0$

$\Rightarrow 0 \geq 0 \quad \therefore S_4 =]-1/2; \infty[$

$S_T = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 =]-\infty; -1] \cup [-1/2; \infty[$

d) $|x^2-2x| + x\cdot|x-3| \geq 3 \Rightarrow |x|\cdot|x-2| + x\cdot|x-3| \geq 3$

$-\infty$ 0 2 3 $+\infty$

x	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$		$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$

C1: $x \in (-\infty, 0)$

$\Rightarrow -x\cdot(-(x-2)) + x\cdot(-(x-3)) \geq 3$

$\Rightarrow \cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2} + 3x \geq 3$

$\Rightarrow x \geq 3 \quad \therefore S_1 =]-\infty, 0[\cap [3, \infty[$

$= \emptyset$

C2: $x \in [0, 2[$

$\Rightarrow x\cdot(-(x-2)) + x(-(x-3)) \geq 3 \Rightarrow -x^2 + 2x - x^2 + 3x \geq 3$

$\Rightarrow -2x^2 + 5x - 3 \geq 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 3 \leq 0 \Rightarrow (2x-3)\cdot(x-1) \leq 0$

a) $2x - 3 \leq 0 \wedge x - 1 \geq 0$ b) $2x - 3 \geq 0 \wedge x - 1 \leq 0$

$\Rightarrow x \leq 3/2 \wedge x \geq 1$ $x \geq 3/2 \wedge x \leq 1$

$\Rightarrow x \in [1, 3/2]$ $x \in]-\infty; 1] \cap [3/2, \infty[= \emptyset$

$S_2 = [1; 3/2] \cap [0; 2[\Rightarrow [1; 3/2]$

C3: $x \in [2, 3[$

$\Rightarrow x\cdot(x-2) + x\cdot(-(x-3)) \geq 3 \Rightarrow \cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2} + 3x \geq 3$

$\Rightarrow x \geq 3 \quad : S_3 = [2, 3[\cap [3, \infty[= \emptyset$

C4: $x \in [3, \infty[$

$\Rightarrow x\cdot(x-2) + x\cdot(x-3) \geq 3 \Rightarrow x^2 - 2x + x^2 - 3x \geq 3$

$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 \geq 0 \Rightarrow (2x+1)(x-3) \geq 0$

$\Rightarrow$ a) $2x + 1 \geq 0 \wedge x - 3 \geq 0$ b) $2x + 1 \leq 0 \wedge x - 3 \leq 0$

$x \geq -1/2 \wedge x \geq 3$ $x \leq -1/2 \wedge x \leq 3$

$x \in [3, \infty[$ $x \in]-\infty, -1/2] \cap [3, \infty[= \emptyset$

$S_4 = [3, \infty[$

$\therefore S_T = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = [1; 3/2] \cup [3; \infty[$

⑤ $\frac{x}{x-4} < \frac{x-4}{x} \iff \frac{x}{x-4} - \frac{x-4}{x} < 0$

$$\therefore \frac{x^2 - (x-4)^2}{x(x-4)} = \frac{x^2 - x^2 + 8x - 16}{x \cdot (x-4)} \Rightarrow \frac{8 \cdot (x-2)}{x \cdot (x-4)} < 0$$

$$\therefore \frac{x-2}{(x-4) \cdot x} < 0$$

$x \neq 4$
$x \neq 2$

	-10		0		2		4		∞
x		−	0	+		+		+	
$x-2$		−		−	0	+		+	
x		−		−		−	0	+	
$\frac{x-2}{(x-4) \cdot x}$		−	0	+	‖	−	‖	+	

$\therefore x \in (-\infty, 0) \cup (2, 4)$

Excluidos por que indefinen la función

⑥ $\sqrt{|x+1| - |x-2|} < 2$

Primero, $\sqrt{a}$ $a \geqslant 0$

$\Rightarrow |x+1| - |x-2| \geq 0 \Leftrightarrow |x+1| \geq |x-2| \quad /(\ )^2$

$(x+1)^2 \geq (x-2)^2 = x^2+2x+1 \geq x^2-4x+4 \quad /+4x-1$

$6x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1/2$

Luego, buscamos los x que satisfacen la ecuación:

$\sqrt{|x+1| - |x-2|} < 2$

Por propiedad, $|a| - |b| < |a-b|$, si tomamos $a = x+1$
y $b = x-2$

$|x+1| - |x-2| < |x+1 - (x-2)| \Rightarrow |x+1| - |x-2| < 3 \quad /\sqrt{(\ )}$

$\sqrt{|x+1| - |x-2|} < \sqrt{3} \quad : \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$

$\therefore \sqrt{|x+1| - |x-2|} < 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x \in \mathbb{R} \cap [1/2, \infty) = [1/2, \infty)$

I.- $1/4 = 0{,}25 \quad ; \quad 1/2 = 0{,}5$

$0{,}25 < 0{,}5 \quad \therefore 1/4 \notin S$ Falsa

II.- $1/3 = 0{,}\bar{3} \quad ; \quad 1/2 = 0{,}5$

$0{,}\bar{3} < 0{,}5 \quad \therefore S \subset (1/3, \infty)$ Verdadero

III.- $[1/2, \infty) \cap (-\infty, 1/2) = \emptyset$ Falso