PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2021

Interrogación 2 - MAT1610

1. a) La función $h(x) = x + e^x$ es inyectiva. Determine $(h^{-1})'(1)$.

   Solución:
   Observe que $h^{-1}(0) = 0$ y que $h'(x) = 1 + e^x$, por lo tanto tenemos que

$$\left(h^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{2}.$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por determinar que $h^{-1}(1) = 0$.
   - (1 punto) Por calcular $h'(x)$.
   - (1 punto) Por determinar el valor pedido.

   b) Utilice derivadas para aproximar linealmente el valor de $(1.01)^6$

   Solución:

   Si $f(x) = x^6$ tenemos que $f'(x) = 6x^5$, haciendo la linealización de f en $x = 1$ obtenemos:

$$L(x) = 6(x-1) + 1$$

   por lo tanto

$$(1.01)^6 \approx 6(0.01) + 1 = 1.06$$

   Distribución de puntajes:

   - (2 puntos) por determinar la linealización.
   - (1 punto) por el resultado.

2. a) Demuestre que la curva $y = \operatorname{sen}(2x)$ y la recta $y = 4x - 1$ intersectan en un solo punto.

Solución:

Considere la función $h(x) = \operatorname{sen}(2x) - 4x + 1$. Observe que:

- h es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular en el intervalo $[0, 1]$.
- $h(0) = 1 > 0$
- $h(1) = \operatorname{sen}(2) + 1 - 4 < 0$

por lo tanto, por TVI, existe $c \in (0, 1)$ tal que $h(c) = 0$, es decir las curvas intersectan en al menos un punto con primera coordenada entre 0 y 1.

Por otra parte, tenemos que, si existiera más de una solución podríamos considerar dos de ellas digamos a_1 y a_2 con $a_1 < a_2$, tendríamos las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[a_1, a_2]$ por lo tanto debería existir $c \in [a_1, a_2]$ con $h'(c) = 0$, pero esto es imposible ya que $h'(x) = 2\cos(2x) - 4 < -2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego existe exactamente un número real tal que $h(x_0) = 0$ y por lo tanto sólo una intersección en las curvas planteadas.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar que existe al menos un punto de intersección.
- (1 punto) Por verificar hipótesis de Rolle en el caso de más de un punto de intersección.
- (1 punto) Por concluir.

b) Sea g una función continua en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(3) = -1$ y $f'(3) = 5$. Calcule

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + f^2(x)} - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

Solución:

Observe que el límite pedido es de la forma $0/0$ y por lo tanto podemos usar el L'Hôpital, obteniendo que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + f^2(x)} - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} &= \lim_{x \to 3} \frac{\frac{1 + 2f(x)f'(x)}{2\sqrt{x + f^2(x)}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\
&= \frac{-9}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por reconocer que es de la forma 0/0.ñ
- (1 punto) Por derivar correctamente.
- (1 punto) Por resultado final.

3. Una caja rectangular debe tener un volumen de 324cm cúbicos. Su fondo es cuadrado y cuesta el doble (por centímetro cuadrado) que la tapa y los cuatro lados. ¿Qué dimensiones minimizan el costo, en material, de la caja?

   Solución:

   Si denotamos por x el lado de la base de la caja e y a la la altura de ésta, tenemos que $324 = x^2y$ por lo tanto la altura en función de lo que mide la base es $y = \dfrac{324}{x^2}$, así podremos calcular el costo en material en función de la medida del lado del fondo.

   Si el costo por metro cuadrado de los lados es M el costo del material del fondo será 2M y por tanto el gasto total está dado por

$$G(x) = 2Mx^2 + M\left(x^2 + \frac{1296}{x}\right) = M\left(3x^2 + \frac{1296}{x}\right)$$

   al derivar está función tenemos que

$$G'(x) = M\left(\frac{6x^3 - 1296}{x^2}\right)$$

   luego $G'(x) = 0$ si y solo si $x = 6$, además $G'(x) < 0$ en $(0, 6)$ y $G'(x) > 0$ en $(6, \infty)$, por lo tanto el mínimo se alcanza en $x = 6$, es decir las medidas de la caja deben ser 6 cm el lado de la base y 9 el alto de la caja.

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por determinar al to en función de la medida del lado del fondo.
   - (2 punto) Por determinar la función gasto (podría ser sin M).
   - (1 punto) Por encontrar candidato a mínimo.
   - (1 punto) Por justificar que en $x = 6$ se alcanza el mínimo.
   - (1 punto) Por dar las dimensiones de la caja.

.

4. Sea f la función definida por:

$$f(x) = 4x + \frac{1}{x} - 3$$

   a) Determine las asíntotas al gráfico de $y = f(x)$.
   b) Determine los intervalos dónde f es creciente y dónde es decreciente.
   c) Determine los valores extremos de f.
   d) Determine los intervalos de concavidad de f.
   e) Bosqueje el gráfico de f.

   Solución:

   Observe que el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0\}$ y podemos ver que

$$\lim_{x\to\infty}\left(4x + \frac{1}{x} - 3\right) = \infty \text{ y que } \lim_{x\to-\infty}\left(4x + \frac{1}{x} - 3\right) = -\infty$$

   por lo que no existen asíntotas horizontales.

   Además, f es continua en todo su dominio, razón po la que la única posibilidad de asíntota vertical es $x = 0$, para verificar vemos que

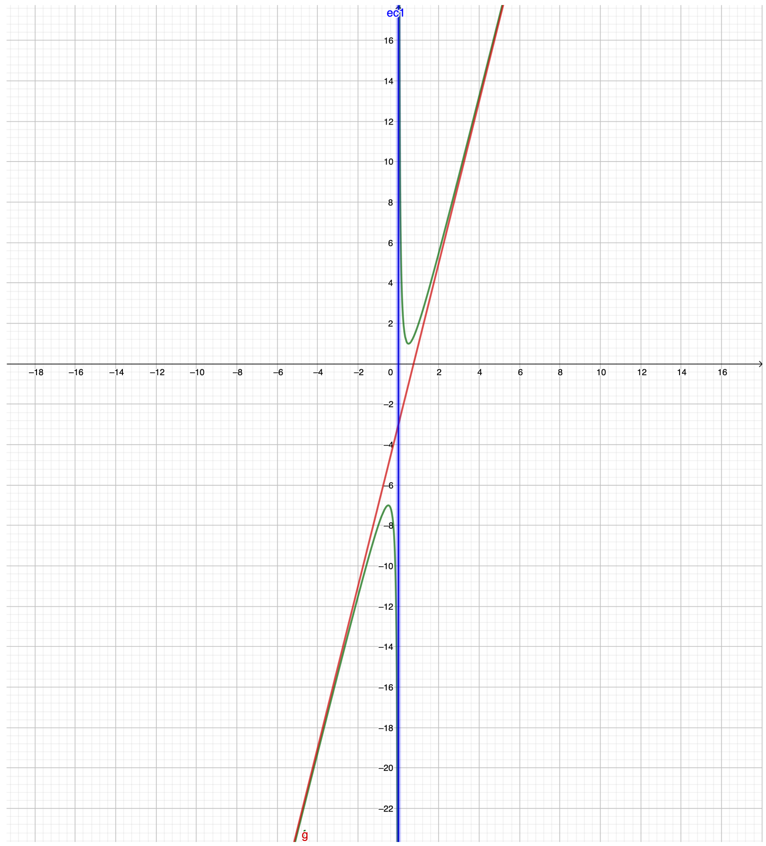
$$\lim_{x\to 0^+}\left(4x + \frac{1}{x} - 3\right) = \infty$$

   por lo tanto $x = 0$ es asíntota vertical.

   Observamos que $f(x) - (4x+3) = \dfrac{1}{x}$, luego $y = 4x - 3$ es asíntota oblicua al gráfico de $y = f(x)$ tanto para $x \to \infty$ como para $x \to -\infty$.

   Observe que $f'(x) = 4 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{4x^2 - 1}{x^2}$ obteniendo que los puntos críticos son $x = 1/2, x = -1/2$ y $x = 0$, además la derivada es positiva y por tanto f creciente en $(-\infty, -1/2)$ y en $(1/2, \infty)$ y negativa y por tanto decreciente en $(-1/2, 0)$ y en $(0, 1/2)$. Luego, por criterio de la primera derivada tenemos que $f(1/2) = 1$ es mínimo local y $f(-1/2) = -7$ es máximo local.

   Observe que $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$, luego es cóncava hacia arriba en $(0, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$. Con esa información se puede bosquejar el gráfico obteniendo algo de la siguiente forma:



Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar la asíntota vertical.
- (1 punto) Por determinar la asíntota oblicua.
- (1 punto) Por intervalos de monotonía.
- (1 punto) Por extremos locales.
- (1 punto) Por intervalos de monotonía.
- (1 punto) Por el gráfico.