Sumas finitas

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1] Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2] LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

24 de Mayo de 2022

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Sumas finitas

Definición.

Dada una sucesión $\{a_n\}$ podemos escribir la suma de los primeros n términos usando la notación de suma

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

donde k es un contador que se mueve en el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

El lado izquierdo de esta expresión se lee: "la suma de a_k de $k = 1$ a $k = n$".

Aquí la letra griega Σ, correspondiente a una "S" mayúscula, se usa para indicar una suma.

Sumas finitas

EJEMPLO 1 Usando la notación sigma vemos que

1. $$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$
2. $$\sum_{j=3}^{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$$
3. $$\sum_{i=5}^{10} i = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$$
4. $$\sum_{i=1}^{6} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$$

Sumas finitas

EJEMPLO 2 Escriba cada suma usando notación sigma

1. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$
2. $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77}$

Sumas finitas

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Las reglas usuales de la aritmética elemental se aplican a sumas finitas. Las reglas conmutativas, asociativas y distributivas asumen un aspecto diferente cuando se escriben en la notación de Euler:

Proposición.

Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante. Entonces,

1. $$\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$$
2. $$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$
3. $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \cdot \left(\sum_{\ell=1}^{m} b_\ell\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\ell=1}^{m} a_k b_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_\ell\right).$$

Sumas finitas

EJEMPLO 3 El ejemplo más conocido es quizás

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \ ,$$

lo cual se prueba usando inducción matemática. Cuando una suma de n términos para un n general tiene una expresión más simple como esta, es habitual decir que se ha expresado en forma cerrada.

EJEMPLO 4 Una de las sumas más simples

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

no permite ninguna fórmula conveniente, expresando la suma como una función simple de n.

Sumas finitas

Sumas telescópicas. Un cálculo simple (cancelar a_1, a_2, etc.) proporciona el siguiente formula:

$$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_0.$$

Es conveniente llamar a esa suma "telescópica" como una indicación del método que se puede utilizar para calcularla.

Proposición. (Propiedad Telescópica)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \ .$$

O en general

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1} \ .$$

Sumas finitas

EJEMPLO 5 Use la propiedad telescópica para obtener una fórmula cerrada para

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} .$$

Solución Notemos que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = a_k - a_{k+1}$$

Entonces, usando la propiedad telescópica

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = \sum_{k=1}^{n} [a_k - a_{k+1}] \\ &= a_1 - a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Determine el valor de la suma finita

$$\sum_{k=0}^{n} kk!\,.$$

Solución Notemos que

$$kk! = [(k+1)-1]k! = (k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$$

Considere la sucesión $a_n = n!$ entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} kk! &= \sum_{k=0}^{n}[(k+1)! - k!] = \sum_{k=0}^{n}[a_{k+1} - a_k] \\ &= a_{n+1} - a_0 = (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1\,.\end{aligned}$$

Sumas finitas

Proposición. (Sumas parciales de una sucesión geométrica)

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Vamos a deducir la igualdad:

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} + r^n \\ rS & = & r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n + r^{n+1} \\ \hline \end{array}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$S - rS = 1 - r^{n+1} \iff S(1-r) = 1 - r^{n+1} \iff S = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Sumas finitas

EJEMPLO 7 Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{4^k}$.

Solución Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{4^k} = \sum_{k=1}^{n} 3\frac{3^k}{4^k} = 3\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Tomando $r = \frac{3}{4}$ se ve que

$$\begin{aligned} 3\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k &= 3\sum_{k=1}^{n} r^k = 3\left[\left[\sum_{k=0}^{n} r^k\right] - 1\right] = 3\left[\frac{1-r^{n+1}}{1-r} - 1\right] \\ &= 3\left[\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} - 1\right] = 3\left[4 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] \\ &= 9 - 12\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Caja de Herramientas

1. $$\sum_{k=1}^{n} c = n \cdot c$$
2. $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
3. $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
4. $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$
5. $$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1}$$
6. $$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$
7. $$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$