Clase 8

martes, 20 de agosto de 2024 16:35

Algoritmos de Gauss y de Gauss-Jordan

En esta clase cubriremos los algoritmos más usuales para resolver sistemas lineales.
Primero recordemos que la entrada principal de una fila no-nula es la entrada de más a la izquierda distinta de 0.
También, repase de la clase anterior la definición de matriz escalonada y matriz escalonada reducida.
También recuerde que cada matriz es equivalente por filas a exactamente una matriz escalonada reducida

DEFINICIÓN Una **posición pivote** en una matriz A es una ubicación en A que corresponde a un 1 principal en la forma escalonada reducida de A. Una **columna pivote** es una columna de A que contiene una posición pivote.

Ejemplo: Reduzca por filas la siguiente matriz y localice las columnas pivote.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

Pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Columna pivote

Pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Siguiente columna pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada

Pivote

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Columnas pivote

Forma general: $\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Posiciones pivote

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

Columnas pivote

El procedimiento que acabamos de realizar lo podemos generalizar como sigue

Algoritmo de Gauss (Escalonamiento)

Entrada: Una matriz A

Salida: Una matriz A' escalonada equivalente por filas a A.

PASO 1

Se inicia con la columna diferente de cero del extremo izquierdo. Esta es una columna pivote. La posición pivote se ubica en la parte superior.

PASO 2

Seleccione como pivote una entrada diferente de cero en la columna pivote. Si es necesario, intercambie filas para mover esta entrada a la posición pivote.

PASO 3

Utilice operaciones de remplazo de filas para crear ceros en todas las posiciones ubicadas debajo del pivote.

PASO 4

Cubra (o ignore) la fila que contiene la posición pivote y cubra todas las filas, si las hay, por encima de esta. Aplique los pasos 1 a 3 a la submatriz restante. Repita el proceso hasta que no haya filas diferentes de cero por modificar.

Ejemplo: Aplique el algoritmo de Gauss a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Sol:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

— o —

Sustitución Reversa

Para resolver completamente un sistema de ecuaciones, primero escribimos la matriz aumentada y aplicamos el método de Gauss. Una vez que tengamos la matriz en forma escalonada, vamos en reversa despejando las variables principales en función de las variables libres de derecha a izquierda.

Ejemplo: Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x + x_2 + 2x_4 &= 6 \end{aligned}$$

Solución: La matriz aumentada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Como vimos en el ejemplo anterior, aplicando Gauss obtenemos

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 3 & 6 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \end{array}$$

Despejamos x_3

$$3x_3 + 3x_4 = 6 \Rightarrow x_3 = 2 - x_4$$

Reemplazamos x_3 en la 2^{da} ecuación, obteniendo x_2 en fc. de x_4

$$-x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -9$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 9 - 3x_3 - 2x_4$$
$$= 9 - (6 - 3x_4) - 2x_4$$
$$= 3 + 3x_4 - 2x_4$$
$$= 3 + x_4$$

Despejamos x_1 en la primera ecuación, reemplazando los expresiones para x_2 y x_3

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 6 - x_2 - x_3 - x_4$$
$$= 6 - (3 + x_4) - (2 - x_4) - x_4$$
$$= 1 - x_4$$

Con esto, una vector solución es de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - x_4 \\ 3 + x_4 \\ 2 - x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{con } x_4 \in \mathbb{R}$$

Observamos que el conjunto solución es una recta en $\mathbb{R}^4$.

—— o ——

Alternativamente a la sustitución reversa, después de escalonar podemos utilizar las posiciones pivotes para dejar 0's sobre ellas. Finalmente reescalamos para obtener 1's en las posiciones pivote.

Algoritmo de Gauss-Jordan

Entrada: Una matriz A

Salida: La matriz A' escalonada reducida equivalente por filas a A.

·) Pasos 1-4 del Algoritmo de Gauss.

·) Además

PASO 5

Empezando con la posición pivote del extremo derecho y trabajando hacia arriba y hacia la izquierda, genere ceros arriba de cada pivote. Si un pivote no es 1, conviértalo en 1 mediante una operación de escalamiento.

Ejemplo: Revisitemos el ejemplo anterior pero con el algoritmo Gauss-Jordan

La matriz obtenida después de aplicar Gauss (Pasos 1-4) es

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la 3^{era} ec. por $\frac{1}{3}$ y utilizamos el 3^{er} pivote para dejar 0's sobre él:

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow \frac{1}{3}F_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{-1} & -3 & -2 & -9 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_1 \leftarrow F_1 - F_3]{F_2 \leftarrow F_2 + 3F_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftarrow -F_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \leftarrow -F_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{forma escalonada reducida}}$$

reducida.

En esta forma podemos despejar directamente las variables principales de las variables libres:

$$x_3 = 2 - x_4$$
$$x_2 = 3 + x_4$$
$$x_1 = 1 - x_4$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-x_4 \\ 3+x_4 \\ 2-x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

— o —

Al resolver un SEL, el número de variables libres juega un rol importante para comprender el conjunto solución. Por ejemplo, si el sistema es consistente (es decir, si el conjunto solución no es vacío), y:

i) Hay 1 variable libre $\Rightarrow$ el cjto. sol es una recta.

ii) Hay 2 variables libres $\Rightarrow$ el cjto sol es un plano

El número de variables libres está directamente relacionado con el número de filas no-nulas de la matriz escalonada reducida.

Definición: Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ una matriz. Definimos el rango de A, rango(A), como el número de filas no-nulas de la forma escalonada reducida de A.

— o —

Obs: El rango de A coincide con el número de filas no-nulas de cualquier forma escalonada de A.

Ejemplos:

1)

1)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ rango$(A) = 3$

2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ rango$(A) = 2$

Nota: El concepto de rango juega un rol crucial en la teoría y lo volveremos a retomar cuando tengamos más herramientas (e.g. independencia lineal, dimensión y subespacios)

Teorema del Rango (Teorema Núcleo-Imagen)

Sea A la matriz de coeficientes de un SEL con n variables. Si el sistema es consistente:

$$\#(\text{variables libres}) = n - \text{rango}(A)$$

Dem: Por construcción de la forma escalonada reducida, hay una posición pivote (entrada principal) en cada fila no-nula. Además, hay una variable principal por cada posición pivote. Luego

$$\begin{aligned} n &= \#(\text{columnas}) \\ &= \#(\text{variables libres}) + \#(\text{variables principales}) \\ &= \#(\text{var. libres}) + \underbrace{\#(\text{pos. pivote})}_{\#(\text{filas no-nulas}) = \text{rango}(A)} \end{aligned}$$

$\therefore \#(\text{var. libres}) = n - \text{rango}(A)$ $\blacksquare$

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 4\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\boxed{1} & 1 & 2\\ 0 & \boxed{-2} & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$\text{rango}(A) = 2$

$\#(\text{var. libres}) = 1$

$n = 3$

Resuelva el siguiente ejercicio:

Ejercicio:

Una bióloga colocó tres cepas de bacterias (denominadas I, II y III) en una placa Petri, donde se alimentarán de tres diferentes fuentes alimenticias (A, B y C). Cada día se colocan en el tubo de ensayo 1500 unidades de A, 3000 unidades de B y 4500 unidades de C y cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento por día, como se muestra en la tabla. ¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

	Cepa I	Cepa II	Cepa III
Alimento A	1	1	1
Alimento B	1	2	3
Alimento C	1	3	5