Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2016

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 2

1. a) Sean f y g dos funciones derivables en (a, b) y continuas en $[a, b]$ tales que $f(a) = g(a)$ y $f'(x) < g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$.

   Demuestre que $f(b) < g(b)$.

   Solución
   Sea $h(x) = f(x) - g(x)$ entonces $h(x)$ es función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), además

   $$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

   1,0 pro.

   Por lo tanto, $h(x)$ cumple con las hipótesis del Teorema del Valor Medio, por lo tanto:

   $$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = h(c) \text{ con } a < c < b$$

   es de decir

   $$f(b) - g(b) = (b - a)(f'(c) - g'(c))$$

   1,5 pts.

   Dado que $(b - a) > 0$ y por hipótesis $(f'(c) - g'(c)) < 0$,entonces su producto es negativo, con lo cual

   $$f(b) < g(b)$$

   0,5 pts.

   b) Demuestre que la ecuación $2x - 1 - \operatorname{sen}(x) = 0$ tiene exactamente una raíz real.

   Solución

   Sea $(f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen}(x)$ luego $f'(x) = 2 - \cos(x) > 0$ por lo tanto $f(x)$ es estritamente creciente en $\mathbb{R}$.
   1,0 pto.
   Dado que $f(0) = -a < 0$ y $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\pi > 0$ por el teorema de Rolle:

   $$\exists c \in (0, \frac{3\pi}{2})(f(c) = 0$$

1,5 pts.

y como f es estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$ este c debe ser único. **0,5 pts.**

Observación: Pueden usar cualquier otro intervalo en que f cambie de signo

2. Calcule el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 de la función $\cosh(x)$.
   Solución
   Sea $f(x) = \cosh(x) \; = \; \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
   1,0 pto.
   Entonces el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 está dado por:

$$T_3(x) \; = \; f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!}$$

   2,0 pts.
   Entonces:
   $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ y $f'''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
   Por lo tanto

$$f'(0) = \; 0, \; f''(0) = \; 1 \text{ y } f'''(0) = \; 0$$

   2,0 pts.
   Reemplazando estos valores en $T_3(x)$ obtenemos:

$$T_3(x) = \; 1 + \frac{x^2}{2}$$

   1,0 pto.

3. a) Sea f una función definida por

$$f(x) = (b-a)\Big(\frac{x^3}{6} - \frac{cx^2}{2}\Big) \text{ con } c>0,\ a \neq b$$

Encuentre una condición necesaria y suficiente sobre los números reales a y b que fuercen a que la función f tenga un máximo local en $x = 2c$.

Solución

Dado que $f(x) = (b-a)\Big(\frac{x^3}{6} - \frac{cx^2}{2}\Big)$ entonces $f'(x) = (b-a)x(\frac{x}{2} - c)$
1,0 pto.
Como requerimos que $f'(2c) = 0$ lo que significa que en $x = 2c$ hay un punto crítico.Para que además se produzca un valor máximo, requerimos que $f''(2c) < 0$.
1,0 pto.
Pero $f''(x) = (b-a)(x-c)$ y $f''(2c) = (b-a)c$
Luego para que $(b-a)c < 0$ como $c > 0$ por hipótesis, se debe cumplir que

$$b < a$$

1,0 pto.

b) Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)}$$

Solución
Dado que se trata de un límite de la forma $\frac{0}{0}$ podemos utilizar L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^(x) - 1}{1 - \cos(x)}$$

1,0 pto.
Nuevamente ese límite es de la forma $\frac{0}{0}$ por lo tanto volvemos a usar L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sec^(x) - 1}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2(x)\tan(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos^3(x)}$$

1,5 pts.

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - x}{x - \operatorname{sen}(x)} = 2$$

0,5 pts.

4. Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

a) Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento

b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales

c) Determine intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

Solución

a) Para determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento, buscamos el signo de la primera derivada de f:

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = -\frac{(x^-1}{(1 + x^2)^2}$$

Por lo tanto $f'(x) > 0 \leftrightarrow x \in (-1, 1)$ Luego:

$$f(x) \text{ crece en } (-1, 1) \text{ y decrece en } (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

2,0 pts.

b) Los puntos crítos de esta función se producen en $\{-1, 1\}$.
Dado que antes del $x = -1$ la función decrece y después crece, entonces en $x = -1$ se produce un mínimo local cuyo valor es:

$$-\frac{1}{2}$$

Dado que antes del $x = 1$ la función crece y después decrece, entonces en $x = 1$ se produce un máximo local cuyo valor es:

$$\frac{1}{2}$$

2,0 pts.

c) Dado que

$$f''(x) = -\frac{2}{x}(3 - x^2)(1 + x^2)^3 = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3}$$

el denominador es siempre positivo por lo tanto el signo de la segunda derivada es el signo del numerador a saber en$(-\infty, -\sqrt{3})$ es negativa,en $(-\sqrt{3}, 0)$ es positiva, en $(0, \sqrt{3})$ es negativa y en $(\sqrt{3}, \infty)$ es positiva, por lo tanto

en$(-\infty, -\sqrt{3})$ es cóncava(cóncava hacia abajo), en $(-\sqrt{3}, 0)$ es convexa(cóncava hacia arriba), en $(0, \sqrt{3})$ es cóncava (cóncava hacia abajo) y en $(\sqrt{3}, \infty)$ es convexa(cóncava hacia arriba)

1,5 pts.

Con este estudio se ven que hay tres punto de inflexión, a saber:

$$(0, 0), (-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}), (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$$

0,5 pts.