CÁLCULO 1

MAT 1610

• CLASE 1

1. Límites de Funciones
2. Continuidad
3. Derivada
4. Aplicaciones
5. Integrales

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
- $\mathbb{Q} : \{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \}$
- $\mathbb{R} : \{$ nº con expansión decimal $\}$
- **Función** : Es una ASIGNACIÓN : A un x se le asigna $f(x)$

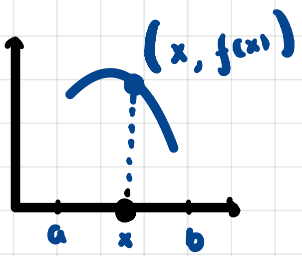
$x \longmapsto f(x)$

e) $f(x) = 1$: f. constante $\rightarrow f(x) = c$, c es cte

$f(x) = x$: f. lineal $\rightarrow f(x) = ax + b$

$f(x) = x^2$: f. Cuadratica $\rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c$

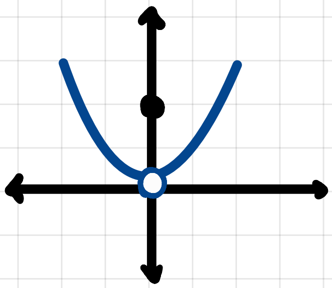
GRAF : $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$



· LIMITE DE UNA FUNCIÓN

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L} \longrightarrow x \to a \Rightarrow f(x) \to L$$

e



$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$, no tiene Relación con $f(x)$ evaluado

$\longrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 1$

· CLASE 2 (Roman) 9 Ago

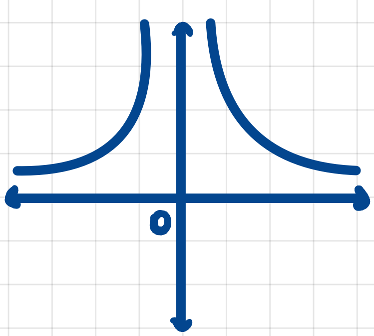
· LIMITES INFINITOS

DEF : Sea f una función def en un Abierto no vacío que contiene a, excepto posiblemente en a misma

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Significa que los valores de $f(x)$ son ARBITRARIAMENTE GRANDES

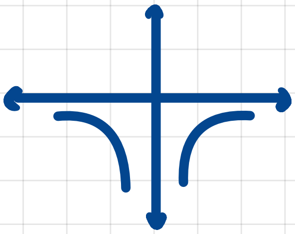
e $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $a = 0$



Ejercicio :

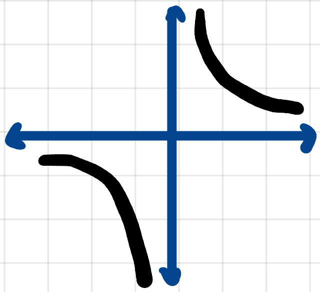
① $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

② $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$



③ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

ⓔ $f(x) = \dfrac{1}{x}$



1) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$

2) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

• **ASINTOTA VERTICAL :**

① $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ ② $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

③ $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ ④ $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

ⓔ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene a $x = 0$ como Asint Vertical

ⓔ $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ tiene a $x = 3$ como Asint Vertical

ⓔ $f(x) = \ln x$ tiene a $x = 0$ como Asint

- **DEF LIMITE**

$$\boxed{\lim f(x) = L \quad \text{si} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon}$$

$x \neq a$

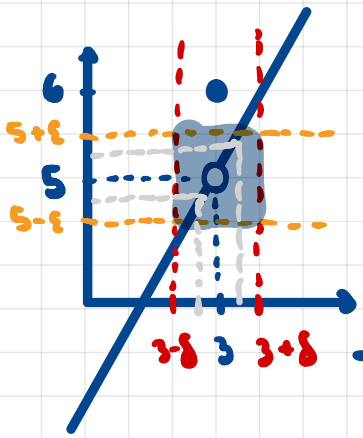
$$|x-a| < \delta \iff -\delta < x-a < \delta$$

$$\boxed{a-\delta < x < a+\delta}$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

$$\boxed{L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon}$$

GRAF :



$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

→ Juego : Encontrar δ tal que todos queden adentro

ⓔ $\lim\limits_{x \to 3} (4x-5) = 7$: Sea $\forall \varepsilon > 0$. PDQ $\exists \delta > 0$

tq $0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

① $|4x-5-7| < \varepsilon$

$|4x-12| < \varepsilon$

$|x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$

Elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$, por lo que

$|x-3| < \delta \Rightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$

$\iff |4x-12| < \varepsilon$

$\iff |(4x-5)-7| < \varepsilon$ ■

- **CLASE 3** 11 ago

- **LEYES DE LIMITES** : Lim f y Lim g Existen !

① $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

② $\lim_{x\to a}[f(x) \times g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$

③ $\lim_{x\to a}[f(x) \times c] = c \times \lim_{x\to a} f(x)$

④ $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ • $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

⑤ $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

⑥ $\lim_{x\to a}[c] = c$

⑦ $\lim_{x\to a}[x] = a$

⑦ $\lim_{x\to a}[x]^n = a^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$

⑧ $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, si n par → $a \geq 0$

↓

⑨ $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

- $\boxed{\text{Dem } \lim_{x\to a} c = c}$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : |x-a|<\delta \Rightarrow |c-c|<\varepsilon$

$0<|x-a|<\delta \qquad 0<\varepsilon$

$\delta=\varepsilon$

$\delta=\varepsilon \to |x-a|<\delta$

$0<|x-a|<\varepsilon$

$\Rightarrow 0<\varepsilon$

$|c-c|<\varepsilon$ ■

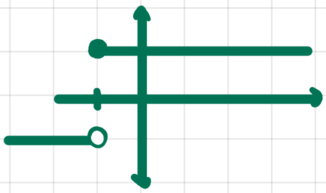
• LIM DE POLINOMIO y F RACIONALES

① $\lim_{x\to a} P(x) = f(x) \to$ SUST DIRECTA

② $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x)\neq 0$

e $\lim_{t\to -1} \frac{T+1}{|T+1|} =$ No Existe

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ t+1>0 \Leftrightarrow t>-1 \\ -1 & , \ t+1<0 \Leftrightarrow t<-1 \end{cases}$$



· TEOREMA SANDWICH

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L$

e $\lim_{x\to 0} x\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \longrightarrow -1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \quad \cdot x$

$-x \leq x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

como $\lim_{x\to 0} -x = 0 = \lim_{x\to 0} x = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ //

CLASE 4

SUST DIRECTA (CONTINUA)

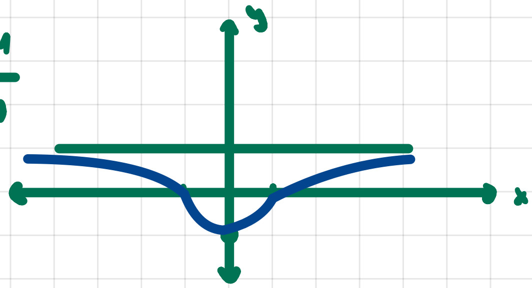
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Para f Polinomiales y Racionales

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)}$$

LIMITES Al INFINITO (ASINTOTAS HORIZONTALES)

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$



CLASE 5

e) Encontrar Asintotas Horizontales y Verticales

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} \overset{x \to \infty}{\approx} \frac{\sqrt{2x^2}}{3x} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{|x|}{x} \quad \text{al } -\infty = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

VERTICAl: $x = \dfrac{5}{3}$

HORIZONTAl: $y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ HACIA $+\infty$

$y = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$: No se puede usar algebra de Lim (No lim!

ANALISIS: Para $x \to \infty$ se parece a 0

$$\lim \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim \frac{1}{x\underbrace{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right)}} = \lim \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$$\left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}\right) \frac{1}{2}$$

$$0 \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 //$$

- **Propiedad**: $\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

- **Limites inf en el INF**

La Notación $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, valores de $f(x)$ son arbitrariamente GRANDES cuando x se hace GRAN

ⓔ $\lim_{x \to \infty} x = \infty \rightarrow$ No es $f(\infty) = \infty$

ⓔ $\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 - \lim_{x \to \infty} x = \infty - \infty = 0$

ERROR: NO EXISTEN

NO SE SEPARAN

$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x-1) = \infty$

$1.000.000 \cdot (999.999) =$ XD

DEF RIGUROSA:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n > 0 : x > n \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\quad \forall M > 0, \exists N > 0 : x > N \Rightarrow f(x) > M$

• **TEOREMA**:

Si $f(x) \le g(x)$ cuando $x \to a$ (Excepto posiblemente en a)
y los Lim de f y g existen $x \to a$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$$

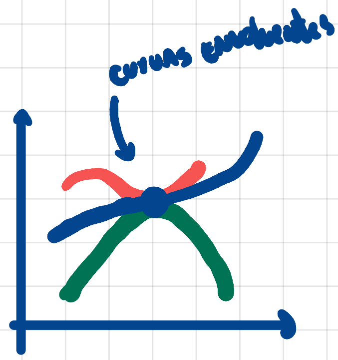
$$f(x) < g(x) \xrightarrow[\text{"Podría":}]{} \lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x)$$

• **TEOREMA COMPRESIÓN (SANDWICH)**

Si $f(x) \le g(x) \le h(x)$ cuando $x \to a$ (Excepto posiblemente en a)

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

ENTONCES: $\lim_{x \to a} g(x) = L$



e) $\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$\cancel{\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$ → no existe

$-1 \le \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \;/ \cdot x^2$

$-x \le x^2 \,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$

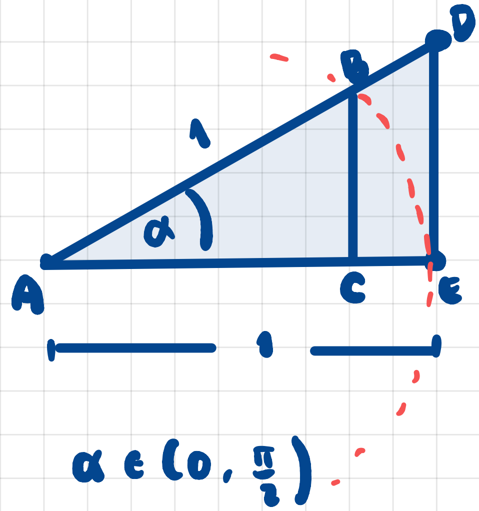
$/ \lim_{x \to 0} -x^2 = 0$

$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} x^2 \,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Limite Notable

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$



$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

AFIRMACIÓN: $\operatorname{sen}\alpha \leq \alpha \leq \tan\alpha$

$|BC| = \operatorname{sen}\alpha$

$|\text{ARCO } BE| = \alpha$

$|DE| = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ → con Proporciones

Luego $\operatorname{sen}\alpha \leq \alpha \leq \tan\alpha$

$$1 \leq \frac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \leq \frac{1}{\cos} \Big/ (\ )^{-1}$$

$$1 \geq \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} \geq \cos(\alpha)$$

$\to 1$ $\quad\quad$ $\alpha \to 0$

$\cos(0) = 1$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

21 AGO

CLASE 6

LIM. TRIGONOM. NOTABLES

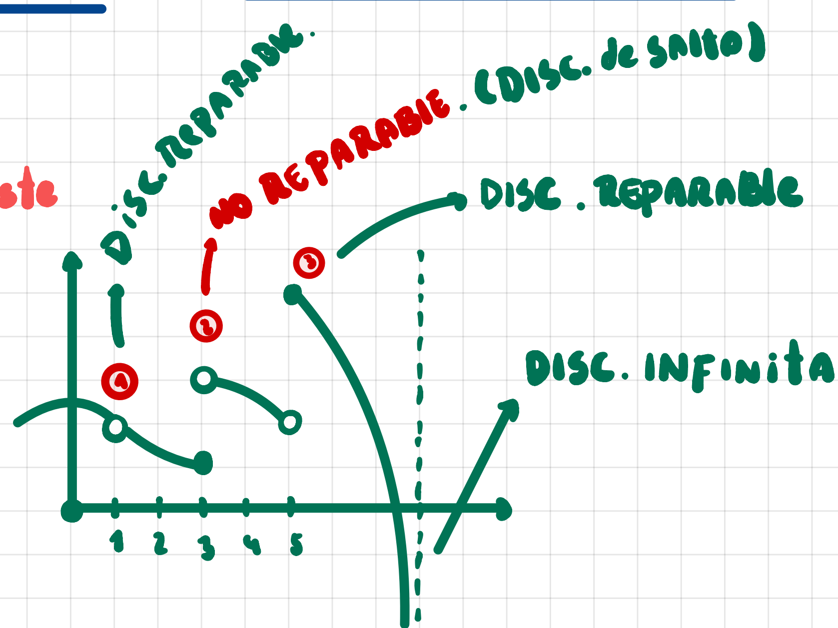
1. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \operatorname{sen} \alpha = 0$
2. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \cos \alpha = 1$
3. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1$
4. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\cos \alpha - 1}{\alpha} = 0$
5. $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

CONTINUIDAD

- f es continua en $x = a$ si : $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$
- Requiere de 3 Condiciones

1. $a \in \operatorname{DOM} f$
2. $L = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ Existe
3. $L = f(a)$

e →



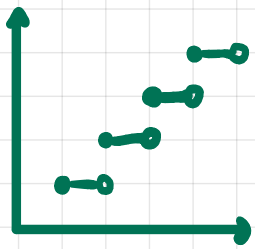
- **CONTINUIDAD LATERAL**

(1) CONT POR DERECHA : $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

(2) CONT POR IZQUIERDA : $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Si cumple (1) y (2) : ES CONTINUA

③ $f(x) = [x]$



→ Continua solo por DERECHA.

- **DEF** : UNA FUNCION F es CONTINUA EN UN INTERVALO, SI ES CONTINUA EN CADA PUNTO DEL INTERVALO.

! → Si esta DEF solo de un LADO del extremo:
SERA CONTINUA POR IZQ o por DER

• CLASE 6 (Veloso)

Prop: Si f es cont en → $+ / - / \cdot / \div /$ de F constantes es CSTE!

↳ en polinomios

Prop: ① sen, cos, tg es: CONT

② e^x, log son continuas (en su Dom) : CONT

③ Inversas de f trigonom: CONT

④ Raices: CONT

• TEOREMA:

Si f es CONT en b, y $\lim_{x \to a} g(x) = b$

• Entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b) \leftrightarrow \lim f(g(x))$

$= f(\lim_{x \to a} g(x))$

• **Corolario**: Composición de Funciones Continuas es Continua

② Dem que $\operatorname{sen}(x+\frac{\pi}{2})$ es CONT : $f(x)=\operatorname{sen} x$ $g(x)=x+\frac{\pi}{2} \to f(g(x))$ es Cont

③ Calcular $\lim_{x\to 0}(x+\frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(0+\frac{\pi}{2}) = 1$

② Calcular

$$\lim_{x\to 0}\left(\ln(e^x+x^2)+x^3\right)$$

Sol: Sea $f(x)=e^x+x^2$ $g(x)=\ln x$

Se que g es cont en su Dom $(0,\infty]$

y f es continua

Entonces: $h(x) = g(f(x)) = \ln(e^x+x^2)$ es cont

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln(e^x+x^2) = \ln(e^0+0) = \ln(1) = 0$$

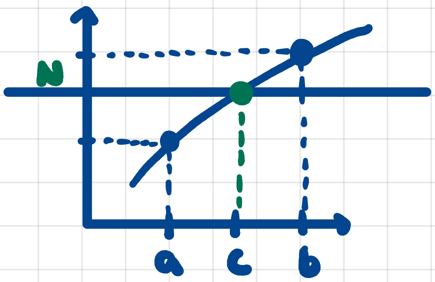
Finalmente: $$\lim_{x\to 0} \ln(e^x+x^2)+x^3 = \underbrace{\lim_{x\to 0}\ln(e^x+x^2)}_{=0} + \underbrace{\lim_{x\to 0} x^3}_{=0} = 0$$

· Obs : Sabemos que $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$

esto es una Aplicación del teorema para la función Raiz.

• TEO. VALOR INTERMEDIO:

Sea f una **F. CONT.** def en $[a,b]$. Sup que $f(a) \neq f(b)$,
Sea N un numero entre $f(a)$ y $f(b)$.
ENTONCES: Existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = N$



(e) Dem que la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

tiene sol en el intervalo $(1,2)$

Sol: Sea $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$, sabemos que f es CONTINUA en $[1,2]$

· Observemos que: $\left.\begin{array}{l} f(1) = -1 \\ f(2) = 12 \end{array}\right\}$ existe un c, de modo que $f(c) = 0$ entre $(1,2)$

(c) Demuestre que existe Sol a la ecuacion $e^x = 3 - 2x$ entre 0 y 1

Sol: Sea $f(x) = e^x + 2x - 3$, $= 0$?!!

Como f es Cont:
(Por ser + de f's cont)

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = e^0 + 2 \cdot 0 - 3 = -3 \\ f(1) = e^1 + 2 \cdot 1 - 3 = 1{,}71 \end{array}\right\} \therefore \exists\, c \in [0,1] \,/\, f(c) = 0 \text{ y es sol } \checkmark$$

- **CLASE 6 (ROMÁN)**

- Dem que: $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es CONT en $\{-1, 1\}$

→ Sol: CASO 1: $x = \mp 1$

PDQ: $\lim\limits_{x \to \mp 1^{\pm}} f(x) = f(\mp 1) = 1$

En efecto:

$$\lim_{x \to \mp 1^{\pm}} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right)$$

$$\lim_{x \to \mp 1^{\pm}} 1 - \lim_{x \to \mp 1^{\pm}} \sqrt{1 - x^2}$$

$$= 1 - \sqrt{\underbrace{\lim_{x \to \mp 1^{\pm}} (1 - x^2)}_{1 - (\mp 1)^2 = 0}}$$

$$= 1 - 0$$

$$= 1 = f(-1) \quad \blacksquare$$

- **TEOREMA**: Si f g cont en $x = a$, entonces las funciones CONT:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. $c \cdot f$
4. $f \cdot g$
5. $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

· **TEOREMA** : las sig F. son CONT en TODO SU DOM :

(su inversa también)

- F. Polinomiales
- F. Racionales
- F. Raiz
- F. Trigonometricas
- F. Trigonometricas inversas
- F. Exponencial
- F. Logaritmico

Ⓔ Dem que $\operatorname{Sen}(x)$ y $\cos(x)$ son CONT en $\mathbb{R}$

Sol: Caso del $\operatorname{sen}(x)$

· Sabemos que $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(0) = 0$

PDQ: $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

1. $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{sen}(x) = \lim\limits_{y \to 0} (y + \alpha)$

$$\lim_{y \to 0} \left[\operatorname{sen}(y + \alpha) \right] = L(\operatorname{sen} y \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos y)$$

$$= \lim_{y \to 0} \underbrace{\cancel{\operatorname{sen} y}}_{0} \cos \alpha + \lim_{y \to 0} \operatorname{sen} \alpha \underbrace{\cancel{\cos y}}_{1}$$

$$= \operatorname{sen} \alpha$$

ⓒ ¿En donde es cont

$$f(x) = \frac{\ln x + \tan^{-1}(x)}{x^2 - 1}$$

- $\text{Dom } \tan^{-1}(x) = \mathbb{R}$
- $\text{Dom } \ln(x) = \mathbb{R}^+ := \{x > 0\}$
- $\text{Dom}\left(\frac{1}{x^2-1}\right) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$\therefore f$ es CONT en $(\mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}\setminus\{1,1\})$

$= \mathbb{R}^+ \setminus \{1\} \Rightarrow \text{Dom } f(x)$

- **Teorema**: Si f es cont en $x = b$ y $\lim_{x\to a} g(x) = b$

$$\boxed{\rightarrow \lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(b)}$$

- ojo: $\lim_{x\to 0} \ln(-x^2)$: No Funciona!
  ↳ $\text{Rec } g \notin \text{Dom } f$

③ $\lim_{x\to 1} \arcsen\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

Sol: Veamos que: $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{1-x}}{\cancel{(1-x)}\, 1+\sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2}$

Como $\frac{1}{2} \in \text{Dom Arcsen}$ y Arcsen cont

$\therefore \lim_{x\to 1} \text{Arcsen}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right) = \text{Arcsin}\left(\lim \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)$

$\text{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

- **TEOREMA** (COMPOSICIÓN DE CONT ES CONT)

- Si g es CONT en a, f es CONT en $g(a)$

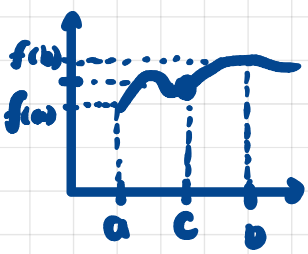
ENTONCES $f \circ g$ CONT en $x = a$

$$\rightarrow \boxed{\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(g(a))}$$

- **TEOREMA (T.V.I)**

f cont en $[a, b]$. sea M entre $f(a), f(b)$ con $f(a) \neq f(b)$

ENTONCES $\exists c \in [a, b]$ tq $f(c) = M$



2 Muestre que EXISTE una solución de $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ entre 1 y 2

Sol: Sea $f(x) =$ " " un pol: notar que es CONT en $\mathbb{R} \rightarrow$ en $(1, 2)$

$f(1) = -1 < 0 \quad f(2) = 12 > 0$

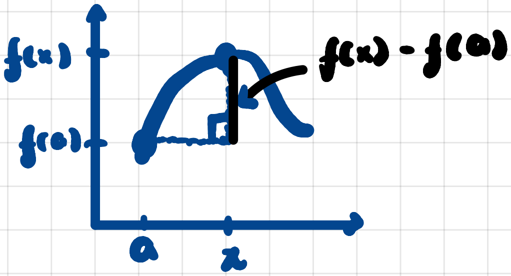
Aplicaremos TVI con $a = 1$
$b = 2$
$M = 0 \in (f(a), f(b)) = (-1, 12)$

Por TVI, $\exists c \in (1, 2)$ tq $f(c) = 0$,

Es decir, c es sol de $(*)$

- # CLASE 7 : DERIVADAS

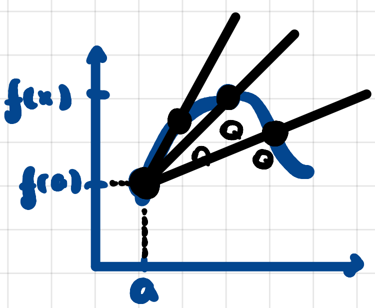
① TANGENTES



→ Para una Curva, queremos encontrar la RECTA TANGENTE a C, en el pto $P(a, f(a))$

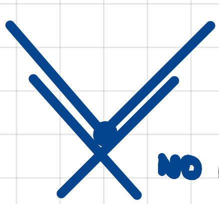
→ Consideramos $Q(x, f(x))$, con $x \neq a$, la PENDIENTE DE LA RECTA PQ es:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



- **PENDIENTE** : $\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$: RECTA TANGENTE A $f(x)$ en $P(a, f(a))$

*: No funciona para : $f(x) = |x|$



NO FUNCIONA :

DERIVABILIDAD → CONTINUIDAD

(NO ALREVÉZ!)

ⓒ Encontrar Recta TGTE a $y = x^2$ en $P(1,1)$

Sol: $m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$

$m = 2 \quad P(1,1)$

$y - 1 = 2(x - 1)$

• **CAMBIO VARIABLE**: Fijar origen en torno a a

CV: $\boxed{m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$ CV: $x = a + h$

$x - a = h$

ⓑ PEND RECTA TGTE $f(x) = \frac{3}{x}$ en $(3,1)$

Sol: $\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} = \frac{3 - 3 - h}{h(3+h)}$

$\lim_{h \to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}(3+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{3+h} = -\frac{1}{3}$ //

! **DERIVADA** : PEND. de la Recta tg

$$\boxed{\frac{df(a)}{dx} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

e) Calcule $f'(a)$ para $f(x) = x^2 - 8x + 9$

Sol: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - 8(a+h) + 9 - (a^2 - 8a + 9)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a^2} + 2ah + h^2 - \cancel{8a} - 8h + \cancel{9} - \cancel{a^2} + \cancel{8a} - \cancel{9}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h + 2a - 8)}{\cancel{h}}$$

$$\lim_{h \to 0} h + 2a - 8 = 2a - 8$$

- **CLASE 8** :

⊙ RAZÓN CAMBIO :

$f(x)$, x cambia de $x_1 \to x_2$, entonces

El cambio en x : $dx = x_2 - x_1 = \Delta x$

El cambio en y : $dy = f(x_2) - f(x_1) = \Delta y$

→ Luego : $\boxed{\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ SERA RAZÓN CAMBIO}}$ PROM DE Y C/R a X en interv $[x_1, x_2]$

- **RAZÓN CAMBIO INSTANTANEA** :

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$

Si El Limite Existe

Clase pasada : $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ → DERIV en 1 Pto

★ Ahora, "Moveremos" el punto a y ∴ Definimos para $x \in Dom(f)$:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

si Existe

→ DERIVAR EN Cualquier Pto

- f' sera una **NUEVA FUNCIÓN** llamado Derivada de F

ⓒ $f(x) = x^3 - x$, encuentre una formula para $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - (x+h) - (x^3 - x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \cancel{x^3} + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - \cancel{x} - h - \cancel{x^3} + \cancel{x}$$

$$\frac{3x^2\cancel{h} + 3xh^{\cancel{2}} + h^{\cancel{3}2} - \cancel{h}}{\cancel{h}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} 3x^2 + \cancel{3xh} + \cancel{h^2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{3x^2 - 1}$$

ⓒ $f(x) = \sqrt{x}$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} //$$

ⓒ $f(x) = \frac{1-x}{2+x} \rightarrow \frac{-2+x}{2+x} + \frac{3}{2+x} = -1 + \frac{3}{2+x}$

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-x-h}{2+x+h} - \left(\frac{1-x}{2+x}\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$\lim_{h\to 0} \cancel{2} + \cancel{x} - \cancel{2x} - \cancel{x^2} - 2h - \cancel{xh} - (\cancel{2} + \cancel{x} + h - \cancel{2x} - \cancel{x^2} - \cancel{xh})$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-3\cancel{h}}{\cancel{h}(2+x+h)(2+x)} = \frac{-3}{(2+x)(2+x)} = \frac{-3}{(2+x)^2} //, \quad \boxed{x \neq -2}$$

DEF: UNA FUNCIÓN f es Derivable en $x = a$ si $f'(a)$ Existe. Es Derivable sobre el Abierto (a,b) $[$ó (a,∞) ó $(-\infty,a)$ ó $(-\infty,\infty)]$ si es Derivable en todo Número del intervalo.

③ Donde es Derivable $f(x) = |x|$?

• Para $x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

$|x+h| = x+h$ si h es suf. pequeño $= \lim \frac{x+h-x}{h} = 1$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)-(-x)}{h} = -1$$

$x < 0$

• Sin embargo $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$ NO EXISTE

c TRIGONOM :

$$\frac{d}{dx}\underbrace{\operatorname{sen} x}_{:= f(x)} = \cos(x)$$

Sol: $\operatorname{sen}'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x\,(\cos h - 1)}{h} + \frac{\operatorname{sen} h \cos x}{h}$$

$$\operatorname{sen} x \cancelto{0}{\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}} + \cos x \cancelto{1}{\lim \frac{\operatorname{sen} h}{h}}$$

$$\Leftrightarrow \cos h \quad //$$

1 Sept

- **CLASE 9** (ROMÁN)

① Mostrar que $\cos'(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad \lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \ldots\ldots$

TEOREMA: Si f es Derivable en $x=a$ $\rightarrow$ f es CONTINUA en $x=a$!

Dem: Dado que f es Derivable en $x=a$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{EXISTE!}$$

Luego: $\underline{\lim_{x\to a}[f(x)-f(a)]} = \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] x-a$

$$= f'(a)\cdot 0 = \underline{0}$$

$$\Leftrightarrow \text{ y } \therefore \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\Big(\underbrace{[f(x)-f(a)]}_{0} + f(a)\Big)$$

$$= 0 + f(a) = f(a) \blacksquare$$

OBS: OVIAMENTE El CONVERSO ES FALSO! ej: $f(x) = |x|$

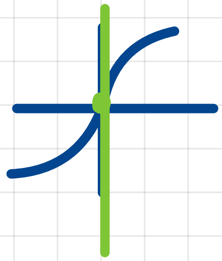
• ¿Cuando F No es Derivable?

① Cuando F no es continua en $x = a$ $\left\{ \text{ej: } f(x) = \begin{cases} x, & x \neq a \\ a+1, & x = a \end{cases} \right.$

② Cuando F tiene una esquina en $x=a$ $\left\{ \text{ej: } f(x) = |x| \right.$ $\downarrow$ reparable

③ Cuando F tiene recta tgte vertical:

ej: $\begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$ =



• DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR : 2da, n° DERIVADA!

• Si f: función derivable $\rightarrow$ f' es otra función $\rightarrow (f')' = f''$

① $f(x) = x^3 - x$

$f''(x) = ?$ $\rightarrow$ $f'(x) = 3x^2 - 1$

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 \cancel{-1} - 3x^2 \cancel{+1}}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \cancel{3x^2} + 6xh + 3h^2 - \cancel{3x^2}$$

$$\frac{\cancel{h}(6x + 3h)}{\cancel{h}}$$

$$\lim_{h \to 0} 6x + 3h = 6x$$ ■