Transformaciones de Funciones

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

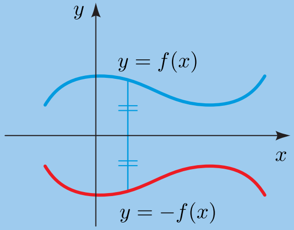
[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

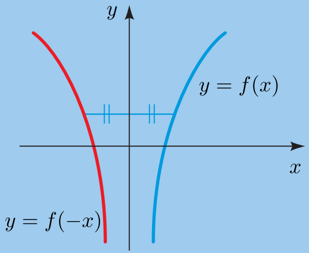
10 de Abril de 2022

Transformaciones de Funciones

Reflexión

a. Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje X.
b. Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje Y.

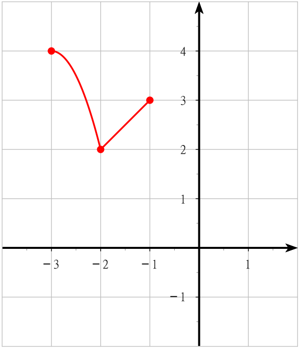




Transformaciones de Funciones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

EJEMPLO 1 En la imagen se muestra la gráfica de la función $f : [-3, -1] \to [2, 4]$.



Considere la función

$$g(x) = -f(-x) \,.$$

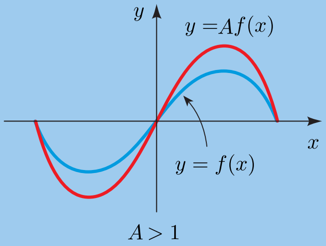
- (a) Esboce el gráfico de g.
- (b) Determine el dominio y el recorrido de g.

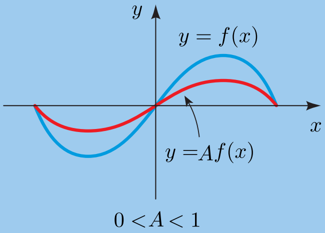
Transformaciones de Funciones

Alargamiento y contracción verticales

Supongamos que $A > 0$. Para graficar $y = Af(x)$:

1. Si $A > 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor A.
2. Si $0 < A < 1$, contraiga la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de A.



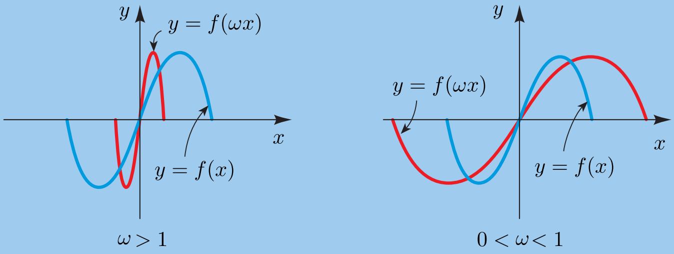


Transformaciones de Funciones

Alargamiento y contracción horizontales

Supongamos que $\omega > 0$. Para graficar $y = f(\omega x)$:

1. Si $\omega > 1$, contraiga la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor $1/\omega$.
2. Si $0 < \omega < 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de $1/\omega$.



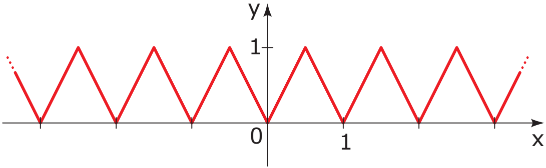
Transformaciones de Funciones

EJEMPLO 2 A partir de la gráfica de $f : [-3, -1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x + 2| + 1$, trace la gráfica de la función

$$g(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) .$$

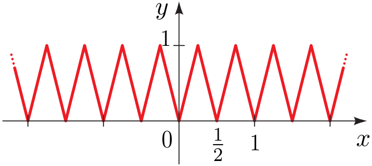
Transformaciones de Funciones

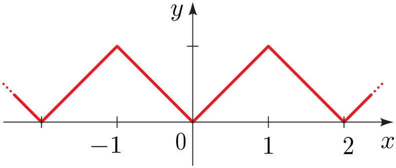
EJEMPLO 3 Use la gráfica de $y = f(x)$ que se muestra en la figura.



Trace la gráfica de cada función

1. $y = f(2x)$
2. $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$





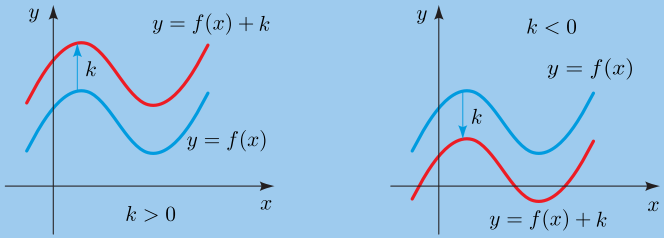
Transformaciones de Funciones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Desplazamientos verticales de gráficas

Para graficar $y = f(x) + k$

1. Si $k > 0$, desplace la gráfica de $y = f(x)$, k unidades hacia arriba.
2. Si $k < 0$, desplace la gráfica de $y = f(x)$, k unidades hacia abajo.

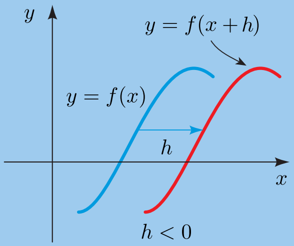


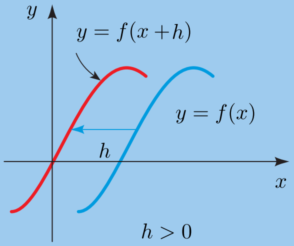
Transformaciones de Funciones

Desplazamientos horizontales de gráficas

Para graficar $y = f(x+h)$

1. Si $h > 0$, desplace la gráfica de $y = f(x)$, h unidades a la izquierda.
2. Si $h < 0$, desplace la gráfica de $y = f(x)$, h unidades a la derecha.





EJEMPLO 4 Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$. Determine el dominio y el recorrido.

Transformaciones de Funciones

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

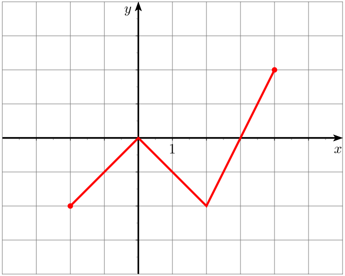
Resumen

$$g(x) = \pm A f(\pm\omega(x+h)) + k$$

Transformación	**Identificación**	**Descripción**
Fase 1 Reflexión	$-A$	Reflexión eje X
	$-\omega$	Reflexión eje Y
Fase 2 Compresión y Reflexión	$0 < A < 1$	Comprime vertical
	$A > 1$	Elonga vertical
	$0 < \omega < 1$	Elonga horizontal
	$\omega > 1$	Comprime horizontal
Fase 3 Traslación	$h > 0$	Traslada a la izquierda
	$h < 0$	Traslada a la derecha
	$k > 0$	Traslada hacia arriba
	$k < 0$	Traslada hacia abajo

Transformaciones de Funciones

EJEMPLO 5 Considere la función $f : [-2, 4] \to [-2, 2]$ dada en la siguiente gráfica.



Definimos la función $g(x) = 2 - \dfrac{1}{2} f(-x + 3)$, determine:

1. Las transformaciones apropiadas que aplicadas a f den como resultado la función g.
2. El dominio y recorrido de la función g.

Transformaciones de Funciones

Solución Considere las transformaciones

$$
\begin{aligned}
h_1(x) =& -f(x) && \text{Reflexión eje } X\\
h_2(x) =& h_1(-x) && \text{Reflexión eje } Y\\
h_3(x) =& \frac{1}{2}h_2(x) && \text{Comprime vertical}\\
h_4(x) =& h_3(x-3) && \text{Traslación derecha}\\
g(x) =& h_4(x)+2 && \text{Traslación arriba.}
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
g(x) &= h_4(x)+2 = h_3(x-3)+2 = \frac{1}{2}h_2(x-3)+2\\
&= \frac{1}{2}h_1(-(x-3))+2 = -\frac{1}{2}f(-(x-3))+2
\end{aligned}
$$