Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Primer Semestre 2014

MAT1620 - Cálculo 2
Pauta de la Interrogación N°1

1. (a) Sea $\mathcal{R}$ la región encerrada entre las curvas $y = 1 - x^2$ e $y = 1 - x$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje $x = 4$.

Solución:
Los puntos de intersección de las curvas son $(0, 1)$ y $(1, 0)$. Calculemos el volumen por secciones transversales que se obtienen por cortar el sólido en dirección horizontal (fijando y). Para $y \in (0, 1)$, cada sección transversal es una arandela con radio exterior $4 - (1 - y) = 3 + y$ y radio interior $4 - \sqrt{1-y}$. Por lo tanto, el volumen es

$$V = \pi \int_0^1 ((3+y)^2 - (4 - \sqrt{1-y})^2)\, dy = \pi \int_0^1 (-8 + 7y + y^2 + 8\sqrt{1-y})\, dy$$
$$= \pi(-8 + \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + \frac{16}{3}) = \frac{7}{6}\pi.$$

Puntaje

- puntos de intersección (x o y dependiendo de la fórmula usada): 0,5 pts
- fórmula correcta para el volumen
  (se acepta también fórmula abstracta con límites y eje correctos): 1,5 pts
  (fórmula de volumen con límites correctos pero eje no correcto: 0,5 pts)
- resultado correcto: 1 pt

(b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar la curva $y = \cosh x$ alrededor del eje x y que se encuentra entre los planos $x = a$ y $x = b$.

Solución:
Calculando el volumen por secciones transversales para $x \in (a, b)$, y utlizando la definición $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$, obtenemos

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}\, dx = \frac{\pi}{4}\Big(\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\Big)\Big|_a^b$$
$$= \frac{\pi}{8}\Big(4(b-a) + e^{2b} - e^{-2b} + e^{-2a} - e^{2a}\Big) \qquad \text{(aceptable)}$$
$$= \frac{\pi}{2}\Big(b - a + \frac{\sinh(2b) - \sinh(2a)}{2}\Big) \qquad \text{(aceptable)}$$
$$= \frac{\pi}{2}\Big(b - a + \sinh(b)\cosh(b) - \sinh(a)\cosh(a)\Big). \qquad \text{(aceptable)}$$

Puntaje

- fórmula correcta: 1,5 pts
- resultado correcto: 1,5 pts

2. Sean $m < n$ números naturales y $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante encerrada por las curvas $y = x^n$ e $y = x^m$.

   (a) Calcular el centroide de $\mathcal{R}$ (con densidad uniforme).

   <u>**Solución:**</u>
   Los puntos de intersección de las curvas son $(0,0)$ y $(1,1)$. Además, para $0 \leq x \leq 1$, $x^n \leq x^m$. Por lo tanto,

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^n \leq y \leq x^m,\ x \in [0,1]\}.$$

   El área de $\mathcal{R}$ es

$$A = \int_0^1 (x^m - x^n)\,dx = \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{n-m}{(m+1)(n+1)}.$$

   Los momentos (sin considerar masa) son

$$M_y = \int_0^1 x(x^m - x^n)\,dx = \left(\frac{x^{m+2}}{m+2} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)\Big|_0^1 = \frac{n-m}{(m+2)(n+2)},$$
$$M_x = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^{2m} - x^{2n})\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{2m+1}}{2m+1} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)\Big|_0^1 = \frac{n-m}{(2m+1)(2n+1)}.$$

   Obtenemos las coordenadas (x,y) del centroide:

$$x = \frac{M_y}{A} = \frac{(n+1)(m+1)}{(n+2)(m+2)}, \qquad y = \frac{M_x}{A} = \frac{(n+1)(m+1)}{(2n+1)(2m+1)}.$$

   Puntaje

   - puntos de intersección ($x = 0, x = 1$): 0,5 pts
   - indicar/usar que $x^n \leq x^m$ en el intervalo: 0,2 pts
   - calcular A: 0,5 pts
   - calcular M_y: 0,5 pts
   - calcular M_x: 0,5 pts
   - calcular coordenada x del centroide: 0,4 pts
   - calcular coordenada y del centroide: 0,4 pts

   (b) Calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x.

   <u>**Solución:**</u>
   Según el Teorema de Pappus, el volumen es el área A de $\mathcal{R}$ multiplicada por la longitud del trayecto del centroide, $2\pi y$,

$$V = 2\pi y A = 2\pi \frac{(n+1)(m+1)}{(2n+1)(2m+1)} \frac{n-m}{(m+1)(n+1)} = 2\pi \frac{n-m}{(2m+1)(2n+1)}.$$

Puntaje

- fórmula correcta para el cálculo del volumen: 1,5 pts
- resultado correcto: 1,5 pts

3. Se quiere subir un balde llenado con 10 litros de agua a una altura de 10m. (La masa del balde es 1kg, la densidad del agua es 1kg/litro, y la gravitación es g=9.8 m/s^2.) El balde pierde agua constantemente (linealmente con respecto a la altura), de modo tal que llega medio vacío a la altura final.

   (a) ¿Cuál es el trabajo necesario para subir el balde?

   Solución:
   El trabajo total T se calcula por la integral de la fuerza F que se aplica. Fuerza es masa por aceleración (g en este caso). La función de la masa dependiendo de la altura x (en metros) es

$$m(x) = 1 + (10 - \frac{1}{2}x) \quad [\text{kg}]$$

   Por lo tanto,

$$T = \int_0^{10} F(x)\,dx = \int_0^{10} 9.8(11 - \frac{x}{2})\,dx = 9.8(110 - \frac{100}{4}) = 9.8 \cdot 85 \quad [\text{kg m}^2/\text{s}^2 = \text{Nm} = \text{J}].$$

   Puntaje

   - trabajo como integral de la fuerza sobre intervalo adecuado: 0,5 pts
   - fuerza = masa por aceleración: 0,2 pts
   - fórmula para la masa: 1,3 pts
     (fórmula para masa sin balde: 0,8 pts)
   - resultado correcto (número): 0,5 pts
   - unidad correcta en resultado final: 0,5 pts

   (b) ¿Cuál es la altura que se alcanza con un tercio del trabajo?

   Solución:
   Buscamos la altura $h < 10$ tal que

$$\int_0^h F(x)\,dx = T/3.$$

   Esto es equivalente a $0 < h < 10$ y

$$\begin{aligned} & \int_0^h (11 - \frac{x}{2})\,dx = \frac{1}{3}\int_0^{10} (11 - \frac{x}{2})\,dx \\ \Leftrightarrow \quad & 11h - \frac{h^2}{4} = \frac{1}{3}85 \\ \Leftrightarrow \quad & h^2 - 44h + \frac{4}{3}85 = 0 \end{aligned}$$

La solución h con $0 < h < 10$ es

$$h = 22 - \sqrt{22^2 - \frac{4}{3}85} = 22 - 2\sqrt{\frac{278}{3}} \approx 2.75 \quad [\mathrm{m}].$$

Puntaje

- alguna fórmula de trabajo como integral con cota superior variable: 0,5 pts
- relación inicial ($\int_0^h \ldots = T/3$): 1 pt
- expresión cuadrática para h: 0,5 pts
- resultado correcto (número): 0,5 pts
- unidad en resultado final: 0,5 pts

En el caso que el alumno haya olvidado la masa del balde en la parte 3a, y con esto calculó bien la parte 3b: puntaje completo. (Sin peso del balde, el trabajo de 3a es $75 \cdot 9.8$ J, la ecuación cuadrática para h en 3b es $h^2 - 40h + 100 = 0$, y el resultado final en 3b es $h = 20 - 10\sqrt{3} \approx 2.68$ [m].

4. Sea C la curva en el plano $x-y$ con parametrización $x(t) = e^t - t$, $y(t) = 4e^{t/2}$, $-1 \leq t \leq 1$.

(a) Calcular la longitud de C.

Solución:

$$L = \int_{-1}^{1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{(e^t - 1)^2 + 4e^t}\, dt = \int_{-1}^{1} (e^t + 1)\, dt = e - e^{-1} + 2.$$

Puntaje

- fórmula correcta: 0,7 pts
- resultado correcto: 0,8 pts

(b) ¿Hay una tangente vertical a la curva? En caso afirmativo, ¿en qué punto? Vista la curva localmente como el gráfico de y como función de x, ¿dónde es cóncava hacia abajo?, ¿dónde es cóncava hacia arriba (=convexa)?

Solución:

La curva tiene tangente vertical donde $x'(t) = 0$, $y'(t) \neq 0$. Esto se cumple en $t = 0$:

$$x'(t) = e^t - 1 = 0 \ (t = 0), \quad y'(t) = 2e^{t/2} \neq 0 \ (t = 0).$$

Además, no hay otro punto con $x'(t) = 0$. El parámetro $t = 0$ corresponde al punto $(1, 4)$.

La curva $y(x)$ es convexa/cóncava donde $y''(x) > 0/y''(x) < 0$. Calculemos $y''(x)$ de la curva paramétrica:

$$y'(x) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2e^{t/2}}{e^t - 1},$$

$$y''(x) = \frac{\frac{d}{dt}y'(x)}{dx/dt} = \frac{\frac{e^{t/2}(e^t-1) - 2e^{t/2}e^t}{(e^t-1)^2}}{e^t - 1} = \frac{-e^{3t/2} - e^{t/2}}{(e^t - 1)^3} \begin{cases} < 0 & (t > 0), \\ > 0 & (t < 1). \end{cases}$$

Por lo tanto, la curva (viendo y como función de x) es cóncava (cóncava hacia abajo) si $t > 0$ y convexa (cóncava hacia arriba) si $t < 0$.

Puntaje

- criterio $x'(t) = 0$, $y'(t) \neq 0$: 0,5 pts
- punto $(1, 4)$ con tangente vertical: 0,5 pts
  (indicando $t = 0$ sin dar las coordenadas del punto: 0,3 pts)
- criterio para convexidad/concavidad: 0,5 pts
- cálculo de $y''(x)$: 1 pt
- resultado final: 0,5 pts

(c) Calcular el área de la superficie que se obtiene al girar C alrededor del eje y.

Solución:

$$S = \int_{-1}^{1} 2\pi x \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = 2\pi \int_{-1}^{1} (e^t - t)(e^t + 1)\, dt = 2\pi \int_{-1}^{1} (e^{2t} - te^t + e^t - t)\, dt.$$

Por integración por partes se obtiene $\int te^t\, dt = te^t - \int e^t\, dt$, así que

$$S = 2\pi \left(\int_{-1}^{1} (e^{2t} + 2e^t - t)\, dt - te^t \Big|_{-1}^{1} \right) = 2\pi \left(\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{1}{2}e^{-2} - 2e^{-1} - e - e^{-1} \right)$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{1}{2}e^{-2} - 3e^{-1} \right).$$

Puntaje

- fórmula correcta: 0,7 pts
- resultado correcto: 0,8 pts

Tiempo: 120 minutos
Sin consultas, sin calculadoras.