PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2023

# Pauta Interrogación 3 - MAT1610

1. Calcule la siguiente suma

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}e^{1/n}+\frac{2}{n^2}e^{2/n}+\frac{3}{n^2}e^{3/n}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}e^{(n-1)/n}\right)$$

**Solución:**
Observe que

$$\frac{1}{n^2}e^{1/n}+\frac{2}{n^2}e^{2/n}+\frac{3}{n^2}e^{3/n}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}e^{(n-1)/n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n^2}e^{k/n}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}e^{k/n}\cdot\frac{1}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}x_ke^{x_k}\Delta x$$

donde $0=x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_n=1$ corresponden a una partición regular del intervalo $[0,1]$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}e^{1/n}+\frac{2}{n^2}e^{2/n}+\frac{3}{n^2}e^{3/n}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}e^{(n-1)/n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}x_ke^{x_k}=\int_0^1 xe^x\,dx.$$

Por otra parte, para calcular $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ usamos integración por partes, haciendo $u=x$ y $dv=e^xdx$, tenemos que

$$\int_0^1 xe^x\,dx=xe^x|_0^1-\int_0^1 e^xdx=e-(e-1)=1$$

por lo tanto, el límite pedido es 1.

**Distribución de puntajes:**

- (1 punto) Por reescribir correctamente la suma usando la notación de sumatoria.
- (0.5 puntos) Por reconocer y separar $\Delta x$.
- (0.5 puntos) Por escribir un $x_k$ adecuado.
- (0.5 puntos) Por encontrar una función adecuada.
- (0.5 puntos) Por obtener un intervalo de integración correcto.
- (1 punto) Por trasformar la suma de Riemann correctamente en una integral.
- (1 punto) Por aplicar correctamente la integración por partes.
- (0.5 puntos) Por terminar de integrar y evaluar.
- (0.5 puntos) Por el resultado correcto, a partir de un desarrollo correcto.

2. a) Determine

$$\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+4x}\,dx$$

**Solución:**

Observe que, usando fracciones parciales

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^2+x+4}{x^3+4x}\,dx &= \int \frac{2x^2+x+4}{x(x^2+4)}\,dx = \int \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x^2+4}\,dx \\
&= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx \\
&= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C
\end{aligned}$$

**Distribución de puntajes:**

- (0.5 puntos) Por factorizar y usar fracciones parciales.
- (0.5 puntos) Por encontrar los valores correctos de las constantes.
- (0.5 puntos) Por determinar correctamente la primera integral.
- (0.5 puntos) Por determinar correctamente la segunda integral.
- (0.5 puntos) Por determinar correctamente la tercera integral.
- (0.5 puntos) Por agregar la constante de integración.

b) Calcule

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$$

**Solución:**

Usamos la sustitución $x=\sec(\theta)$, con lo cual $dx=\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$ y entonces

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sqrt{\sec^2(\theta)-1}}{\sec(\theta)}\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/3}\sqrt{\tan^2(\theta)}\tan(\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/3} |\tan(\theta)|\tan(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/3}\tan^2(\theta)\,d\theta = \int_0^{\pi/3}\left(\sec^2(\theta)-1\right)\,d\theta \\
&= (\tan(\theta)-\theta)\Big|_0^{\pi/3} = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

**Distribución de puntajes:**

- (0.6 puntos) Por plantear una sustitución adecuada.
- (0.6 puntos) Por reescribir correctamente el integrando en términos de la nueva variable.
- (0.6 puntos) Por cambiar correctamente los límites de integración (o por volver a la variable original).
- (0.6 puntos) Por integrar correctamente.
- (0.6 puntos) Por evaluar y obtener el resultado correcto.

3. a) Calcule

$$\lim_{x\to 1}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{x-1}dt$$

**Solución:**

Observe que

$$\lim_{x\to 1}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{x-1}dt = \lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x e^{t^2}dt}{(x-1)}$$

que es un límite de la forma 0/0, usando L'Hopital y TFC tenemos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x e^{t^2}dt}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} e^{x^2} = e$$

**Distribución de puntajes:**

- (0.5 puntos) Por reescribir el límite en la forma 0/0.
- (0.5 puntos) Por justificar (o al menos mencionar) el uso de L'H.
- (0.5 puntos) Por justificar (o al menos mencionar) el uso del TFC.
- (0.5 puntos) Por aplicar correctamente la regla de L'H.
- (0.5 puntos) Por aplicar correctamente el TFC.
- (0.5 puntos) Por obtener el valor del límite.

b) Demuestre que

$$\frac{3}{29} \leq \int_0^3 \frac{1}{2+x^3}\,dx \leq \frac{3}{2}$$

**Solución:**

Observe que la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ es decreciente en el intervalo $[0,3]$, por lo tanto

$$\frac{1}{29} = f(3) \leq f(x) \leq f(0) = \frac{1}{2}$$

luego, como el intervalo de integración tiene largo tres, tenemos que:

$$\frac{3}{29} \leq \int_0^3 \frac{1}{2+x^3}\,dx \leq \frac{3}{2}$$

**Distribución de puntajes:**

- (1 punto) Por indicar que la función es decreciente en el intervalo.
- (1 punto) Por acotar correctamente la función.
- (1 punto) Por llegar justificadamente a la desigualdad pedida.

4. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por la parábola de ecuación $y = x - x^2$ y el eje $X$.

a) Determine el área de la región $\mathcal{R}$.(2 ptos.)
**Solución:**

El área de la región $\mathcal{R}$ está dada por

$$A(\mathcal{R}) = \int_0^1 \left(x - x^2\right)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

**Distribución de puntajes:**

- (0.5 puntos) Por graficar correctamente la región (o por mencionar las intersecciones con el eje x y justificar que la parábola queda por sobre el eje x). Si no se cumple ninguno de los criterios anteriores pero la integral está bien planteada, se asgina igualmente este puntaje.
- (0.5 puntos) Por plantear correctamente el integrando.
- (0.5 puntos) Por plantear correctamente los límites de integración.
- (0.5 puntos) Por integrar, evaluar y obtener el valor correcto del área.

b) Determine el volúmen del sólido obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno a al recta $x = 4$.(4 ptos)
**Solución:**

El volumen del sólido está dado por

$$V = \int_0^1 2\pi(4 - x)(x - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^1 x^3 - 5x^2 + 4x\, dx = 2\pi\left(\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 2x^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{7\pi}{6}$$

**Distribución de puntajes:**

- (0.5 puntos) Por hacer un bosquejo que incluya (al menos) el eje de rotación y la región $\mathcal{R}$. Si la integral que permite calcular el volumen está completamente bien planteada, se asigna igualmente este puntaje.
- (0.8 puntos) Por plantear correctamente el radio del cascarón.
- (0.8 puntos) Por plantear correctamente la altura del cascarón.
- (0.8 puntos) Por plantear correctamente ambos límites de integración.
- (0.3 puntos) Por integrar correctamente.
- (0.3 puntos) Por evaluar correctamente.
- (0.5 puntos) Por llegar al valor correcto del volumen.