Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Enero de 2017

MAT1620 $\star$ Cálculo II

Solución Interrogación 3

1. Calcule las siguientes integrales

   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx$;

   b) $\displaystyle\iint_R \sin(x^2 - xy + y^2)\, dA$ donde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 \leq 2\}$.

   Solución:

   a) Cambiando el orden de integración

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx &= \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 y \sin(y^2)\, dy \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos(1))\end{aligned}$$

   b) Usando el cambio de variables $\sqrt{2}x = u - v$, $\sqrt{2}y = u + v$, cuyo Jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1$$

   obtenemos

$$\iint_R \sin(x^2 - xy + y^2)\, dA = \iint_S \sin(u^2 + 3v^2)\, du\, dv$$

   donde $S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + 3v^2 \leq 4\}$.

Ahora con el cambio de variables $u = \rho\cos(\theta)$, $\sqrt{3}v = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$, la región queda dada por $\rho^2 \leq 4$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, el jacobiano

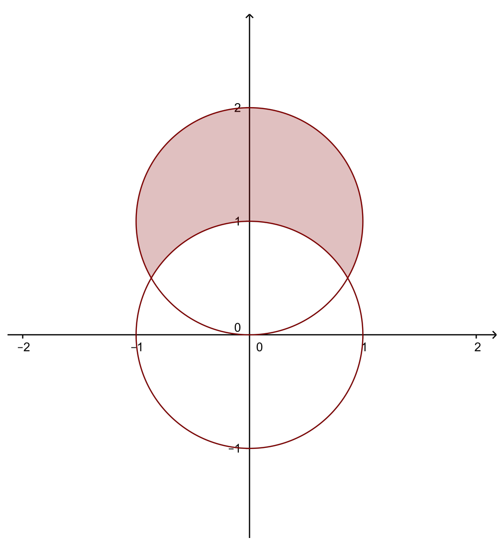
$$\frac{\delta(u,v)}{\partial(\rho,\theta)} = \frac{\rho}{\sqrt{3}}$$

finalmente la integral queda

$$\begin{aligned}\iint_R \sin(x^2 - xy + y^2)\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sin(\rho^2)\frac{\rho}{\sqrt{3}}\,d\rho\,d\theta \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\int_0^2 \sin(\rho^2)\rho\,d\rho \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}}(1-\cos(4))\end{aligned}$$

2. Calcule el centro de masa de una lámina cuya densidad en un punto (x, y) es inversamente proporcional a su distancia al origen y que tiene la forma de la región encerrada por el círculo $x^2 + y^2 = 2y$ y exterior al círculo $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: La región es la de la figura.



La densidad esta dada por la función

$$f(x,y) = \frac{K}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Las coordenadas del centro de masa están dadas por las ecuaciones

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m}$$

donde

$$
\begin{aligned}
M_y &= \iint\limits_R xf(x,y)dA \\
M_x &= \iint\limits_R yf(x,y)dA \\
m &= \iint\limits_R \rho(x,y)dA
\end{aligned}
$$

Primero es fácil ver por las simetrías del problema $M_y = 0$, es decir, $\bar{x} = 0$. Ahora usando coordenadas polares calcularemos los valores restantes, en coordenadas polares la región esta dada por $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ y $1 \leq r \leq 2\operatorname{sen}(\theta)$, quedando $\bar{y}$ como

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_1^{2\operatorname{sen}(\theta)} \rho\operatorname{sen}(\theta)\frac{K}{\sqrt{\rho^2}}\rho d\rho\, d\theta}{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_1^{2\operatorname{sen}(\theta)} \frac{K}{\sqrt{\rho^2}}\rho d\rho\, d\theta} \\
\bar{y} &= \frac{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_1^{2\operatorname{sen}(\theta)} \rho\operatorname{sen}(\theta) d\rho\, d\theta}{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_1^{2\operatorname{sen}(\theta)} 1 d\rho\, d\theta}
\end{aligned}
$$

aprovechando que el problema es simétrico respecto al eje y

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &= \frac{\displaystyle 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{2\operatorname{sen}(\theta)} \rho\operatorname{sen}(\theta) d\rho\, d\theta}{\displaystyle 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{2\operatorname{sen}(\theta)} 1 d\rho\, d\theta} \\
\bar{y} &= \frac{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(4\operatorname{sen}^2(\theta) - 1)\operatorname{sen}(\theta) d\theta}{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\operatorname{sen}(\theta) - 1 d\theta} \\
\bar{y} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto el centro de masas es

$$
\left(0, \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}}\right)
$$

3. *a*) Calcule la integral
$$\iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV$$
donde Ω es el sólido de $\mathbb{R}^3$ interior al cono $z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$, acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solución: Consideremos el cambio de variables a coordenadas esféricas:
$$x = r \sin\phi \cos\theta$$
$$y = r \sin\phi \sin\theta$$
$$z = r\cos\phi.$$
Así, la región en estas coordenadas se describe como
$$\Omega = \{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq r \leq 3\}$$
luego
$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^3 e^r r^2 \sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta \\ &= 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^3 r^2 e^r\, dr \\ &= 2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(5e^3 - 2).\end{aligned}$$

b) Calcule
$$\int_{\sqrt{2}/2}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x}\int_{-1}^{1} z^2\cos(x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx + \int_1^{\sqrt{2}}\int_0^x\int_{-1}^{1} z^2\cos(x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx$$
$$+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_0^{\sqrt{4-x^2}}\int_{-1}^{1} z^2\cos(x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx$$
Solución: Notamos que la suma de las tres integrales se puede escribir como
$$\iiint_{\Omega} z^2\cos(x^2+y^2)\, dV$$
donde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, -1 \leq z \leq 1\}$ y D es la región plana contenida en el primer cuadrante acotada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 2, x^2 + y^2 = 1$ y por las rectas $y = 0, y = x$. De esta forma, si escribimos Ω en coordenadas cilíndricas obtenemos que
$$\Omega = \{(r,\theta,z) : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/4, -1 \leq z \leq 1\}$$
y por lo tanto
$$\iiint_{\Omega} z^2\cos(x^2+y^2)\, dV = \int_0^{\pi/4}\int_1^2\int_{-1}^{1} z^2 r\cos r^2\, dz\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{6}\int_1^2 r\cos r^2 dr = \frac{\pi(\sin 4 - \sin 1)}{12}.$$

4. Exprese el sólido Ω definido por

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4;\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas. Calcule el volumen de Ω.

Solución:

Notamos que el sólido se encuentra en la parte superior al plano xy. Además, ambas superficies se intersectan en una circunferencia:

$$x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 4 \iff x^2 + y^2 = 2$$

contenida en el plano $z = \sqrt{2}$.

En coordenadas cilíndricas la ecuación de la esfera es $z = \sqrt{4 - r}$ y la del cono es $z = r$. La proyección de Ω sobre el XY es justamente el circulo $x^2 + y^2 \leq 2$. Así

$$\Omega = \{(r, \theta, \phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \sqrt{2}, r \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}.$$

Su volumen en coordenadas cilíndricas está dado por

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{4-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta = 2\pi(8/3 - 4/3\sqrt{2}).$$

En coordenadas esféricas, la esfera tiene ecuación $r = 2$. En este caso el ángulo ϕ está acotado por arriba por el angulo ϕ_0 el cual es interior al triángulo isósceles de catetos $\sqrt{2}$. Así $\phi_0 = \pi/4$. En consecuencia,

$$\Omega = \{(r, \theta, \phi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, 0 \leq r \leq 2\}.$$

Su volumen en coordenadas esféricas está dado por la integral:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^2 r^2 \sin\phi\, dr\, d\phi\, d\theta = 2\pi(8/3 - 4/3\sqrt{2}).$$