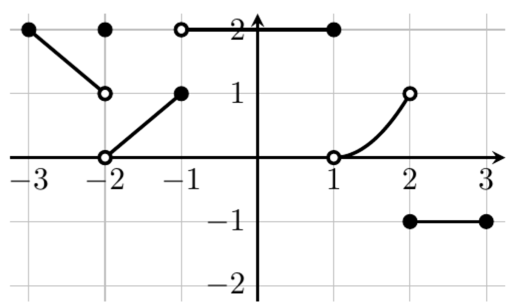
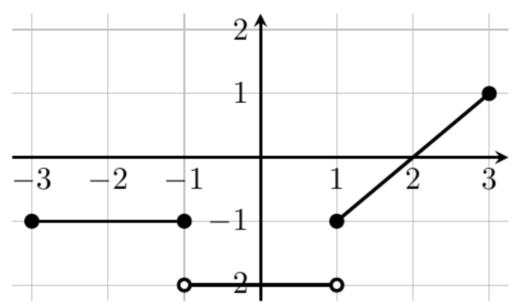
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2023

Pauta Interrogación 1 - MAT1610

1. Dada las siguientes gráficas:





Evalúe el límite de las siguiente funciones usando la gráfica y álgebra de límites. Es necesario justificar su respuesta con un argumento pero no es necesario usar la definición epsilon-delta de límite. Si el límite es $\pm\infty$, debe mencionarlo y justificarlo, no basta con decir que límite no existe.

a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Solución:

Como $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$ y $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2$, sabemos que $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)$ no existe. Esto significa que no podemos aplicar las leyes de límites para $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)$. Esto nos obliga a tomar los límites izquierdo y derecho individualmente. Aplicando el álgebra de límite de la izquierda:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to -1^-} g(x)} \\ &= \frac{1}{-1} \\ &= -1.\end{aligned}$$

De manera similar en la derecha:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x)}{\displaystyle\lim_{x\to -1^+} g(x)} \\ &= \frac{2}{-2} \\ &= -1.\end{aligned}$$

Como los límites laterales existen y son iguales entonces el límite $\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe y es igual a -1.

Distribución de puntajes:

- (0.5 punto) Por el límite lateral izquierdo justificadamente.
- (0.5 punto) Por el límite lateral derecho justificadamente.
- (1 punto) Por concluir que el límite pedido es -1.

b) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Solución:

Observe que $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 0$ por lo que no podemos aplicar álgebra de límites. Al considerar los valores de la fracción $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando x está cerca de 2, sin ser 2, tenemos que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$,por otro lado, $g(x)$ es negativo y acercándose a 0 para estos valores de x. Es decir, para x cerca de 2 y menos de 2,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{1}{\text{pequeño número negativo}}$$

que es un gran número negativo, es decir, $\lim_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Ahora consideramos los valores de la fracción $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando x está cerca de 2 y es mayor que 2. Como $\lim_{x\to 2^+} f(x) = -1$, $f(x)$ está cerca de -1 para estos valores de x. Por otro lado, $g(x)$ es positivo y se aproxima a 0 para estos valores de x. Es decir, para x cerca de 2, sin ser 2, tenemos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{-1}{\text{pequeño número positivo}}$$

es decir , $\lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, obteniendo que

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty.$$

Distribución de puntajes:

- (0.5 punto) Por el límite lateral izquierdo justificadamente.
- (0.5 punto) Por el límite lateral derecho justificadamente.
- (1 punto) Por concluir que el límite pedido es $-\infty$.

c) $\lim_{x\to 1^-} f(g(x))$.

Solución:

Observe que $g(x)$ es exactamente -2 siempre que x esté lo suficientemente cerca de 1 y a la izquierda que 1. Esto significa que $f(g(x))$ es exactamente $f(-2)$ si x es cercano a 1y menor que 1, específicamente en el intervalo $(-1,1)$. Por lo tanto

$$\lim_{x\to 1^-} f(g(x)) = f(-2) = 2.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar que $g(x)$ es exactamente -2 a la izquierda de 1.
- (1 punto) Por concluir que el límite pedido es 2.

2. Determine si los siguientes límites existen, en caso que exista calcúlelo, en caso contrario justifique por qué no existe.

a) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x$

Solución:

Al amplificar por $\sqrt{x^2+x+1}-x$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x &= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}\\
&= \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}\\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por el desarrollo algebraico.
- (1 punto) Por sacar dividir por x y ver que $-x=\sqrt{x}$ cuando $x<0$.
- (1 punto) Por concluir que el límite es -1/2.

b) $\lim_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}}$

Solución:

Al amplificar por $\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}$ obtenemos que

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\operatorname{sen}(x)}} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}}$$
$$= \lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos(x)\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}}{|\cos(x)|}$$

Al estudiar los límites laterales obtenemos que

$$\lim_{x\to\pi/2^+}\frac{\cos(x)\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}}{-\cos(x)} = -\sqrt{2}$$

y que

$$\lim_{x\to\pi/2^-}\frac{\cos(x)\sqrt{1+\operatorname{sen}(x)}}{\cos(x)} = \sqrt{2}$$

como los límites laterales son distintos tenemos que el límite pedido no existe.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por el desarrollo algebraico.
- (0.5 punto) Por cada límite lateral.
- (1 punto) Por concluir que el límite no existe.

3. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ ax+b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine, usando la definición, los valores de a y b de modo que f sea derivable en $x = 2$.

Solución:

Para que f sea derivable en $x = 2$ es necesario que f sea continua en dicho punto, para esto debe cumplirse que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 4$$

Observe que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4$ y que $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} ax+b = 2a+b$ por lo tanto f es continua en $x = 2$ si y sólo si $2a+b = 4$.

Por otra parte para que f sea derivable se debe cumplir que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-4}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-4}{h}$$

Al estudiar el primero de estos límites tenemos que

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-4}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{h^2+4h}{h} = 4$$

el otro es

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-4}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{2a+ah+b-4}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{ah}{h}=a$$

obteniendo que es derivable si y sólo si $a=4$ y $b=-4$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por definición de continuidad.
- (2 puntos) Por la condición $2a+b=4$.
- (1 punto) Por definición de derivable.
- (1 puntos) Por la condición $a=4$.
- (1 puntos) Por el valor de $b=-4$.

4. a) Considere la función $g(x)=x^2-3f(x)$ donde $f(3)=4$ y $f'(3)=-4$. Determine la ecuación de la recta tangente al gráfico de g en el punto donde $x=3$.

   Solución:

   Observe que $g'(x)=2x-3f'(x)$, por lo que $g'(3)=2\cdot 3-3\cdot(-4)=18$ por lo tanto la recta tangente al gráfico de $y=g(x)$ tiene pendiente 18 y pasa por el punto (3,-3) y entonces una ecuación es

   $$y=18x-57$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por obtener la derivada de g
   - (1 puntos) Por determinar que la pendiente es 18.
   - (1 punto) Por determinar la ecuación de la recta

   b) Determine un intervalo de largo dos donde la ecuación $x^2+10\,\text{sen}(10x)=100$ tenga una solución.

   Solución:

   Considere la función $h(x)=x^2-10\text{sen}(10x)-100$. Observe que h es continua en todos los reales ya que es suma de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$, además podemos observar que $h(9)=81-10\text{sen}(90)-100=-19-10\text{sen}(90)<0$ y que $h(11)=21-10\text{sen}(110)>0$, por lo tanto tenemos las hipótesis del Teorema del valor intermedio en el intervalo $[9,11]$ obteniendo que, existe al menos, un $c\in(9,11)$ con $h(c)=0$ lo que equivale a que la ecuación planteada tiene al menos una solución en el intervalo $(9,11)$.

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) Por encontrar función auxiliar que se usará y justificar la continuidad de ésta.

- (1 puntos) Por determinar intervalo de largo dos donde en los extremos se obtienen signos distintos.
- (1 punto) Por concluir usando TVI.