PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudante: Daniel Gálvez
Primer semestre 2024

Modelos Probabilísticos - EYP1025/1027
Solución Ayudantía 9

1. Sea X una v.a discreta con fmp dada por

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{ln(x)}}{[ln(x)]!}, \quad x = 1, e, e^2, ...$$

   (a) Muestre que $Y = ln(X) \sim Poisson(\lambda)$
   (b) Calcule $\mathbb{E}(ln(X))$ y $Var(ln(X))$
   (c) Encuentre $P(ln(X) = k | ln(X) > 0)$

   (a) Despejamos X

$$\begin{aligned} Y &= ln(X) \\ X &= e^Y \\ x &= e^y \end{aligned}$$

reemplazamos en la fmp de X

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{ln(e^y)}}{[ln(e^y)]!} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} \end{aligned}$$

ahora para encontrar el recorrido de Y, debemos evaluar los valores de X en Y.

$$\begin{aligned} Y &= ln(1) = 0 \\ Y &= ln(e) = 1 \\ Y &= ln(e^2) = 2 \\ &\vdots \qquad \vdots \end{aligned}$$

teniendo asi que $y = 0, 1, 2, ...$ Finalmente, la fmp de Y es

$$p_Y(y) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, ...$$

donde claramente el la fmp de una Poisson de parametro λ.

(b) Note que $ln(X)$ es simplemente una variable aleatoria, llamémosla $Y = ln(X)$, pero ya encontramos la fmp de esta ultima, por lo que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(ln(X)) &= \mathbb{E}(Y) \\ &= \lambda\end{aligned}$$

del mismo modo

$$\begin{aligned}Var(ln(X)) &= Var(Y) \\ &= \lambda\end{aligned}$$

recordar que si $Z \sim Poisson(\lambda)$, entonces $\mathbb{E}(Z) = Var(Z) = \lambda$.

(c) Nuevamente recordar que $ln(X)$ es simplemente $Y = ln(X) \sim Poisson(\lambda)$, entonces

$$\begin{aligned}P(ln(X) = k|ln(X) > 0) &= \frac{P(ln(X) = k \cap ln(X) > 0)}{P(ln(X) > 0)} \\ &= \frac{P(Y = k \cap Y > 0)}{P(Y > 0)} \\ &= \frac{P(Y = k)}{1 - P(Y \leq 0)} \\ &= \frac{\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}{1 - \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}} \\ &= \frac{\lambda^k}{(e^{\lambda} - 1)k!}\end{aligned}$$

2. La velocidad de un gas noble a una temperatura determinada suele seguir una distribución de Maxwell-Boltzmann, la que es bastante recurrente en mecánica estadística. Esta distribución adopta la siguiente forma

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 \left(\sqrt{\frac{m}{kT}}\right)^3 e^{-\frac{mx^2}{2kT}}, \quad x > 0$$

donde m es la masa de la partícula, k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura termodinámica.

(a) Calcule $\mathbb{E}(X^n)$

(b) Muestre que

$$M_X(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}\right) (2a^2)^{n/2}$$

con $a = \sqrt{kT/m}$

(c) Calcule $\mathbb{E}(X)$ usando los dos resultados anteriores.

Hint: Si $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, entonces

$$f_X(x) = \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0$$

con $\Gamma(z)$ la función gamma.

(a) Note que m, k, T son constantes, por lo que vamos a escribir la densidad de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 \left(\sqrt{\frac{m}{kT}}\right)^3 e^{-\frac{mx^2}{2kT}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 \left(\sqrt{\frac{1}{kT/m}}\right)^3 \exp\left\{-\frac{x^2}{2kT/m}\right\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 \left(\sqrt{\frac{1}{kT/m}}\right)^3 \exp\left\{-\frac{x^2}{2(\sqrt{kT/m})^2}\right\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 \frac{1}{a^3 3} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}
\end{aligned}$$

ahora calculamos lo pedido.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^n) &= \int_0^\infty x^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 \frac{1}{a^3 3} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty x^{2+n} e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx
\end{aligned}$$

hacemos $x = u^{1/2} \Rightarrow dx = 1/2 u^{-1/2} du$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty (u^{1/2})^{2+n} e^{-\frac{u}{2a^2}} 1/2 u^{-1/2} du \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}+\frac{n}{2}} e^{-u/2a^2} du \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \int_0^\infty u^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)-1} e^{-u/2a^2} du \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} \frac{(2a^2)^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)}}{(2a^2)^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)}} \int_0^\infty u^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)-1} e^{-u/2a^2} du \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} (2a^2)^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)} \int_0^\infty \frac{u^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)-1} e^{-u/2a^2}}{(2a^2)^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)}} du \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} (2a^2)^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1\right) \int_0^\infty \frac{u^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)-1} e^{-u/2a^2}}{(2a^2)^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1\right)} du \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} (2a^2)^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1\right) \int_0^\infty Gamma(\alpha^*, \beta^*) du \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} (2a^2)^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1\right) \cdot 1 \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^3} (2a^2)^{(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+1\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2a^2)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

Teniendo así que

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (2a^2)^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)$$

(b) Para esto usamos la siguiente propiedad vista en clases

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathbb{E}(X^n)$$

reemplazamos con lo que tenemos

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\mathbb{E}(X^n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\frac{2}{\sqrt{\pi}}(2a^2)^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)(2a^2)^{n/2}
\end{aligned}$$

mostrando así lo pedido.

(c) Usando la formula de los momentos, esto es fácil, pues

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^1) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}(2a^2)^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}a\Gamma(2) \\
&= 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

Por otro lado, para calcular la esperanza mediante la generadora de momentos debemos expandir un par de terminos y luego derivar respecto de t para luego evaluar en $t = 0$.

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)(2a^2)^{n/2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma(3/2) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{t}{1!}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)(2a^2)^{1/2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{t^2}{2!}\Gamma\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{2}\right)(2a^2)^{2/2} + \cdots \\
\frac{d}{dt}M_X(t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)(2a^2)^{1/2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}t\cdot\Gamma\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{2}\right)(2a^2)^{2/2} + \cdots \\
\frac{d}{dt}M_X(t)\bigg|_{t=0} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)(2a^2)^{1/2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}t\cdot\Gamma\left(\frac{2}{2}+\frac{3}{2}\right)(2a^2)^{2/2} + \cdots\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)(2a^2)^{1/2} + 0 + 0 + \cdots \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2}a\Gamma(2) \\
\Rightarrow\ \mathbb{E}(X) &= 2a\sqrt{\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

donde claramente los valores coinciden.

3. Si $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces

$$M_Z(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Suponga que X, Y tienen las siguientes funciones generadoras de momentos

- $M_X(t) = e^{2t+4t^2}$
- $M_Y(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$

¿Que puede afirmar sobre la distribución de X y Y?

Recuerde que la función generadora de momentos es única, por lo que caracteriza completamente a la distribución. Teniendo esto en consideración note que

$$\begin{aligned} M_X(t) &= e^{2\cdot t + \frac{2\cdot 4}{2}t^2} \\ &= e^{2\cdot t + \frac{8t^2}{2}} \end{aligned}$$

Luego, se tiene que $\mu = 2$ y $\sigma^2 = 8$, y tiene la misma forma que la función generadora de momentos que la normal, por lo que

$$X \sim N(2, 8)$$

Para Y funciona de manera similar

$$M_X(t) = e^{0\cdot t + \frac{1\cdot t^2}{2}}$$

en este caso se tiene $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$, por lo que

$$Y \sim N(0, 1)$$

4. Sea X una v.a con fdp dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{3}, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{9}(1+x), & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{3}e^{-(x-1)}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(a) Verifique que $f_X(x)$ efectivamente es una fdp.
(b) Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}(|X|)$
(c) Calcule $M_{X+b}(t)$
(d) Calcule $Var(2X+1)$ usando la función generadora de momentos
(e) **Propuesto:** Encuentre $F_X(x)$

(a) Claramente es positiva en el recorrido, debemos corroborar que integre 1.

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_X(x)dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{3}dx + \int_0^1 \frac{2}{9}(1+x)dx + \int_1^\infty \frac{1}{3}e^{-(x-1)}dx \\ &= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{\Omega} x f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x \frac{e^x}{3} dx + \int_0^1 x \frac{2}{9}(1+x) dx + \int_1^{\infty} x \frac{1}{3} e^{-(x-1)} dx \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{5}{27} + \frac{2}{3} \\
&= \frac{14}{27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|X|) &= \int_{\Omega} |x| \, f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} (-x) \frac{e^x}{3} dx + \int_0^1 x \frac{2}{9}(1+x) dx + \int_1^{\infty} x \frac{1}{3} e^{-(x-1)} dx \\
&= \frac{1}{3} + \frac{5}{27} + \frac{2}{3} \\
&= \frac{32}{27}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
M_{X+b}(t) &= \mathbb{E}(e^{t(X+b)}) \\
&= e^{tb} \mathbb{E}(e^{tX}) \\
&= e^{tb} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{tx} \frac{e^x}{3} dx + \int_0^1 e^{tx} x \frac{2}{9}(1+x) dx + \int_1^{\infty} e^{tx} \frac{1}{3} e^{-(x-1)} dx \right) \\
&= e^{tb} \left(\frac{1}{3(1+t)} + \frac{2 - 2t + e^t(4t-2)}{9t^2} + \frac{e^t}{3(1-t)} \right)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
Var(2X+1) &= Var(2X) + 0 \\
&= 2^2 Var(X) \\
&= 4Var(X) \\
&= 4[\mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2]
\end{aligned}$$

Note que ya calculamos la función generadora de momentos, pues si $b = 0$ tenemos

$$M_{X+b}(t) = M_{X+0}(t) = \frac{1}{3(1+t)} + \frac{2 - 2t + e^t(4t-2)}{9t^2} + \frac{e^t}{3(1-t)}$$

necesitamos el primer y segundo momento, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} \\
&= \left(-\frac{1}{3(1+t)^2} + \frac{2(t - 2 + e^t(2 - 3t + 2t^2)}{9t^3} - \frac{e^t(t-2)}{3(1-t)^2} \right) \Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{0}{0} + \frac{2}{3}$$

Note que nos queda 0/0, por lo que debemos tomar limite y aplicar L'Hopital

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{2(t-2+e^t(2-3t+2t^2)}{9t^3} &= \frac{2}{9}\lim_{t\to 0}\frac{2t^2e^t + e^tt - e^t + 1}{3t^2} \\
&= \frac{2}{9}\lim_{t\to 0}\frac{2e^tt^2 + 5e^tt}{6t} \\
&= \frac{2}{9\cdot 6}\lim_{t\to 0} 2e^tt^2 + 9e^tt + 5e^t \\
&= \frac{5}{27}
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{1}{3} + \frac{5}{27} + \frac{2}{3} = \frac{14}{27}$$

Procediendo de forma similar para $\mathbb{E}(X^2)$ se llega finalmente a que

$$Var(2X+1) = 4\left(\frac{133}{54} - \left(\frac{14}{27}\right)^2\right)$$

5. Sea X una v.a con fda dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{4}, & \text{si } 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{3-x}, & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

   (a) ¿Que tipo de v.a es X?
   (b) Calcule $Var(3X)$
   (c) Calcule $\mathbb{E}(e^{atX})$
   (d) **Propuesto:** Calcule $\mathbb{E}(ln(X-3) \cdot I(X \ge 3))$

Queda de tarea.