PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre 2015

MAT1203 - Álgebra Lineal
Interrogación 2 - miércoles 29 de abril - solución

1. Sea A una matriz de 3×3. Si se suma a la tercera fila de A dos veces la segunda fila, luego se cambian los elementos de la primera columna por sus inversos aditivos, y finalmente se intercambia la primera y la segunda fila; se obtiene entonces la matriz B dada por

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

   a) Escriba la relación entre A y B usando matrices elementales.

   Solución:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

0,5p c/u (matriz elemental)
1,5p relación escrita en el orden correcto.

b) Encuentre la descomposición $A = LU$ y resolviendo sistemas determine la primera columna de la inversa de A.

Solución:

Del enunciado $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

La descomposición $A = LU$ es $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

El sistema que hay que resolver es $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Utilizando el cambio $Ax = LUx = Ly$.

$Ly = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ implica que $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$Ux = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ implica que $x = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

obtener A 0,5p
" LU 0,5p
saber que el sistema es $AX = e_1$ 0,5p
utilizar cambio de variable 0,5p
encontrar y 0,5p
encontrar x 0,5p

Cualquier otro método <u>NO</u> tiene puntaje.

2. Sea A matriz de 2×3 y B matriz de 3×3.

a) Si A es sobreyectiva y B es invertible, demuestre que AB es sobreyectiva.

Solución:

1p

Demostrar que AB es sobreyectiva significa que hay que demostrar que para todo $b \in \mathbb{R}^2$ el sistema $ABx = b$ tiene solución.

2p

Como A es sobreyectiva, entonces el sistema $Ax = b$ tiene solución.

Sea u tal que $Au = b$.

Como B es invertible basta tomar $x = B^{-1}u$ y se tiene que:

$ABx = ABB^{-1}u = Au = b.$

b) Demuestre que $\mathrm{Ker}(A^tA) = \mathrm{Ker}(A)$.

Solución:

1,5p

Primero:

Si $u \in \mathrm{Ker}(A)$, entonces $Au = \vec{0}$, multiplicando por A^t se tiene $A^tAu = \vec{0}$.

Por lo tanto $u \in \mathrm{Ker}(A^tA)$.

1,5p

Segundo:

Si $v \in \mathrm{Ker}(A^tA)$, entonces $A^tAv = \vec{0}$, multiplicando por v^t se tiene $v^tA^tAv = 0$.

Por lo tanto el producto punto de Av con Av es cero, $Av = \vec{0}$ y $v \in \mathrm{Ker}(A)$.

3. *a*) Sean M y N matrices invertibles de 3×3 tales que $N^{-1}MN = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Demuestre que existe una matriz T tal que $T^3 = M$.

Solución:

2p Basta tomar $T = N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} N^{-1}$ pues:

1p

$$\begin{aligned} T^3 &= N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} N^{-1} \cdot N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} N^{-1} \cdot N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} N^{-1} \\ &= N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^3 N^{-1} \\ &= N \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} N^{-1} \\ &= M \end{aligned}$$

b) Sea $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática tal que $q\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$, $q\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 7$ y $q\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 12$.

Demuestre que $q\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ es positiva definida y escríbala como una suma ponderada de cuadrados.

Solución:

Sea $q = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ asociada a la matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$.

Del enunciado se tiene que $a = 1$, $c = 7$ y $a + 2b + c = 12$, por lo tanto $b = 2$.

q es positiva definida pues $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, con $1 > 0$ y $3 > 0$.

Luego $q = 1 \cdot (x_1 + 2x_2)^2 + 3 \cdot (x_2)^2$.

obtener $q = x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_2^2$ o $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ } 1p

dem. pos def. 1p

escribirla como suma de $(\ )^2$ 1p

4. Decida justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1,5p *a*) Si A es una matriz de 3×4, entonces A no es inyectiva.

Solución:

Verdadero.

Si A es inyectiva, sus columnas son L.I. y el rango 4. Pero por tamaño el rango máximo de A es 3. Por lo tanto A no es inyectiva.

1,5p *b*) Si E de 2×2 es una matriz elemental que representa la operación de multiplicar una fila por un escalar no nulo, entonces E^2 es positiva definida.

Solución:

Verdadero.

Hay dos casos:

Si $E = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ con $\alpha \neq 0$, entonces $E^2 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ con la diagonal positiva.

Luego E^2 es positiva definida.

Si $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ con $\alpha \neq 0$, entonces $E^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{bmatrix}$ con la diagonal positiva.

Luego E^2 es positiva definida.

4) b) deben estar los dos casos
o en general $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ con $\alpha = 1 \wedge \beta \neq 0$
o $\alpha \neq 0 \wedge \beta = 1$

1,5p c) Si A es una matriz simétrica de 2×2 con elementos positivos en la diagonal, entonces A es positiva definida.

Solución:

Falso.

Por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ tiene elementos positivos en la diagonal pero no es positiva definida pues $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 < 0.$

1,5p d) Si $u \in \mathbb{R}^2$ con $u \neq \vec{0}$, entonces la matriz uu^t es invertible.

Solución:

Falso.

Por ejemplo si $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ se tiene que $uu^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es no invertible (fila nula).