PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Interrogación 1 MAT1203 - 16 de septiembre

Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera, demuéstrela. Si es falsa dé un contraejemplo.

1. *a*) Si $u, v \in \mathbb{R}^2$, entonces $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$.

   Solución:

   La afirmación es falsa.

   Si $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces $u + v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Se tiene que $\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$ y $\|u + v\| = \sqrt{2}$, y no se cumple que $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$.

b) Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si $\{u+v, v\}$ es linealmente independiente, entonces $\{u, v\}$ es linealmente independiente.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha(u) + \beta(v) = \vec{0}$. Se probará que necesariamente $\alpha = \beta = 0$.

Como $\alpha(u)+\beta(v) = \vec{0}$ se intentará construir una combinación lineal de $u+v$ y v.

Sumando y restando el vector $\alpha(v)$ se obtiene

$\alpha(u) + \alpha(v) - \alpha(v) + \beta(v) = \vec{0}$.

Reordenando se tiene $\alpha(u+v) + (\beta - \alpha)(v) = \vec{0}$.

Se tiene entonces una combinación lineal de los vectores $u+v$ y v. Pero ellos son linealmente independientes, por lo tanto esta combinación debe ser trivial.

Luego $\alpha = 0$ y $\beta - \alpha = 0$, reemplazando se obtiene $\alpha = \beta = 0$ que era lo que se quería probar.

Otra forma:

También es posible demostrar la afirmación por contradicción:
Si el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente dependiente, entonces existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ no ambos nulos tal que $\alpha u + \beta v = \vec{0}$.

Si $\alpha \neq 0$, entonces $u = -\dfrac{\beta}{\alpha}v$, luego el conjunto $\{u+v, v\} = \left\{\dfrac{(\alpha-\beta)}{\alpha}v, v\right\}$.

Como está formado por dos vectores múltiplos del mismo vector, entonces es linealmente dependiente.
Si $\beta \neq 0$, entonces $v = -\dfrac{\alpha}{\beta}u$, luego el conjunto $\{u+v, v\} = \left\{\dfrac{(\beta-\alpha)}{\beta}u, -\dfrac{\alpha}{\beta}u\right\}$.

Como está formado por dos vectores múltiplos del mismo vector, entonces es linealmente dependiente.

2. *a*) Sean u, v y w vectores distintos y no nulos en $\mathbb{R}^n$. Si $u \cdot v = u \cdot w = v \cdot w = 0$, entonces el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha(u) + \beta(v) + \gamma(w) = \vec{0}$. Se probará que necesariamente $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

• Como $u \cdot \vec{0} = 0$, entonces reemplazando se tiene:

$u \cdot (\, \alpha(u) + \beta(v) + \gamma(w)\,) = 0$, es decir:

$\alpha(u \cdot u) + \beta(u \cdot v) + \gamma(u \cdot w) = 0$, reemplazando:

$\alpha(u \cdot u) + 0 + 0 = 0$, pero u es no nulo, luego $(u \cdot u) \neq 0$, por lo tanto $\alpha = 0$.

• Como $v \cdot \vec{0} = 0$, entonces reemplazando se tiene:

$v \cdot (\, \alpha(u) + \beta(v) + \gamma(w)\,) = 0$, es decir:

$\alpha(v \cdot u) + \beta(v \cdot v) + \gamma(v \cdot w) = 0$, reemplazando:

$0 + \beta(v \cdot v) + 0 = 0$, pero v es no nulo, luego $(v \cdot v) \neq 0$, por lo tanto $\beta = 0$.

• Como $w \cdot \vec{0} = 0$, entonces reemplazando se tiene:

$w \cdot (\, \alpha(u) + \beta(v) + \gamma(w)\,) = 0$, es decir:

$\alpha(w \cdot u) + \beta(w \cdot v) + \gamma(w \cdot w) = 0$, reemplazando:

$0 + 0 + \gamma(w \cdot w) = 0$, pero w es no nulo, luego $(w \cdot w) \neq 0$, por lo tanto $\gamma = 0$.

b) El conjunto $\left\{ u \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$ es un conjunto generado por 3 vectores linealmente independientes.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Primero se escribe la condición de producto punto como una ecuación:

$$\left\{ u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ tal que } x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \text{ con } x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Entonces el conjunto es la solución de un sistema de ecuaciones lineales con una ecuación y cuatro variables, las variables libres son x_2, x_3 y x_4:

$$\left\{ u = \begin{pmatrix} -x_3 - 2x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ con } x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Se escribe como conjunto generado:

$$\left\{ u = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por último se muestra que el conjunto generador es linealmente independiente:

La forma escalonada reducida de $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene tres pivotes:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

3. *a)* Si

$$L_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \right\} \text{ y}$$

$$L_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

entonces L_1 y L_2 no tienen puntos en común.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Si existiera un punto en común, entonces existe α y β tal que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es decir, el sistema $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tiene solución para α y β.

Se escalona entonces la matriz ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

De la última fila se obtiene que el sistema no tiene solución, por lo tanto efectivamente las rectas no tienen puntos en común.

b) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. El sistema $Ax = b$ tiene solución para todo $b \in \mathbb{R}^2$.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Sea $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Se forma la matriz ampliada del sistema y se escalona:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 1 & 3 & 0 & b_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -3 & b_2 - b_1 \end{array}\right].$$

Como esta última matriz tiene pivote en cada una de sus filas, entonces el sistema tiene solución independiente de los valores de b_1 y b_2.

4. *a*) Si u y v son vectores en $\mathbb{R}^3$, entonces $\text{Gen}\{u, v\} = \text{Gen}\{u, v + 5u\}$.

Solución:

La afirmación es verdadera.

• Si $x = au + bv$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$ es un elemento de $\text{Gen}\{u, v\}$, entonces:

$x = (a - 5b)(u) + b(v + 5u)$ y por lo tanto pertenece a $\text{Gen}\{u, v + 5u\}$.

• Si $y = cu + d(v + 5u)$ para algunos $c, d \in \mathbb{R}$ es un elemento de $\text{Gen}\{u, v + 5u\}$, entonces:

$y = (c + 5d)(u) + d(v)$ y por lo tanto pertenece a $\text{Gen}\{u, v\}$.

Otra forma:

• $u = (1)u + (0)(v + 5u)$ y $v = (-5)u + (1)(v + 5u)$ por lo tanto $\text{Gen}\{u, v\} \subseteq \text{Gen}\{u, v + 5u\}$.

• $u = (1)u + (0)(v)$ y $v + 5u = (5)u + (1)(v)$ por lo tanto $\text{Gen}\{u, v + 5u\} \subseteq \text{Gen}\{u, v\}$.

Otra forma:

• El conjunto $\text{Gen}\{u, v + 5u\}$ es igual a $\text{Gen}\{u, v + 5u, v\}$ pues $v = (-5)u + (1)(v + 5u)$.

• El conjunto $\text{Gen}\{u, v + 5u, v\}$ es igual a $\text{Gen}\{u, v\}$ pues $v + 5u = (1)v + (5)u$.

b) El sistema $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & r \end{bmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ es tal que existen valores de $r \in \mathbb{R}$ tal que el sistema tiene solución única y existen valores de $r \in \mathbb{R}$ tal que el sistema no tiene solución.

Solución:

La afirmación es verdadera.

Se escalona la matriz ampliada del sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & r & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & r-2 & 2 \end{array}\right].$$

De la última fila se tiene que si $r = 2$, entonces el sistema no tiene solución.

También de la última fila se tiene que si $r = 4$, entonces la tercera fila es un múltiplo de la segunda y la forma escalonada queda:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto en este caso el sistema tiene solución única dada por $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.