PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
PRIMER SEMESTRE DE 2023

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 1

1. Demuestre que si $a, b > 0$ con $a \neq b$, entonces

$$(a+b)(a^{-1}+b^{-1}) > 4.$$

Solución. Notemos que

$$(a+b)(a^{-1}+b^{-1}) = (a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = (a+b)\frac{(a+b)}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab}. \tag{1}$$

Luego,

$$(a+b)(a^{-1}+b^{-1}) - 4 = \frac{(a+b)^2-4ab}{ab} = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} = (a-b)^2a^{-1}b^{-1}. \tag{2}$$

Dado que $a \neq b$, tenemos que $(a-b)^2 > 0$. Además, dado que $a, b > 0$, obtenemos $a^{-1}, b^{-1} > 0$. Finalmente, dado que $\mathbb{R}^+$ es cerrado bajo el producto, deducimos que $(a-b)^2a^{-1}b^{-1} > 0$. Esto concluye la demostración.

Puntaje Pregunta 1.

- 1.5 puntos por obtener (1).
- 2 puntos por obtener (2).
- 1 punto por deducir que $(a-b)^2 > 0$.
- 0.5 puntos deducir que $a^{-1}, b^{-1} > 0$.
- 1 punto por concluir usando la cerradura de $\mathbb{R}^+$ bajo el producto.

2. Resuelva la siguiente inecuación

$$\frac{x^2+4x-12}{x^2-6x+8} \leqslant -1\ .$$

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+4x-12}{x^2-6x+8} \leqslant -1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2+4x-12+x^2-6x+8}{x^2-6x+8} \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2x^2-2x-4}{x^2-6x+8} \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-x-2}{x^2-6x-8} \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(x-2)(x+1)}{(x-4)(x-2)} \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x+1}{x-4} \leqslant 0 \qquad \text{y} \qquad x \neq 2
\end{aligned}$$

Los puntos críticos de la inecuación son $x_1 = -1$ y $x_2 = 4$ y la tabla de signos queda

	$-\infty$	-1	4	∞
$x+1$	$-$	$+$	$+$	
$x-4$	$-$	$-$	$+$	
	$+$	$-$	$+$	

Por lo tanto, el conjunto solución es $S = [-1,4) \setminus \{2\} = [-1,2) \cup (2,4)$.

Puntaje Pregunta 2.

- 3 puntos por obtener que la inecuación es equivalente a $\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-4)(x-2)} \leqslant 0$.
- 3 puntos por encontrar el conjunto solución de la inecuación.