Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2017

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 2

1. *a*) Sean $h(x)$ y $f(x)$ funciones derivables y definidas en $(0,\infty)$ tales que $f'(x) = \arctan(x)$ y $h'(x) = \dfrac{1}{x}$. Si

$$g(x) = \frac{1}{2}\, h(1+x^2) - xf'(x)$$

Demuestre que $(f+g)$ es función constante en $\mathbb{R}^+$

Solución

Si $\dfrac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x} = 0$,, entonces f es función constante.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) + \frac{1}{2}h(1+x^2) - xf'(x)\right) = f'(x) + \frac{1}{2}\left(h(1+x^2)\right)' - \big(xf'(x)\big)' \\ &= f'(x) + \frac{1}{2}\, h'(1+x^2)\cdot 2x - f'(x) - xf''(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = 0\end{aligned}$$

Luego $f\ +g$ es función constante.

b) Calcular:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{x}\right)$$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan(x)} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\tan(x)}{x\tan(x)}$$

Como el límite es de la forma $\dfrac{0}{0}$ usamos L'Hospital , si $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces es igual al límite que estamos calculando.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2(x)}{\tan(x) + x\sec^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x) - 1}{\operatorname{sen}(x)\cos(x) + x}$$

Nuevamente tenemos un límite de la forma $\dfrac{0}{0}$ asi es que aplicando L'Hospital nuevamente, tenemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

Observación: pueden irse por otros caminos

2. *a*) Sea f una función dos veces derivable y tal que $f(a) = f(b) = 0$ y $f(c) > 0$, con $a < c < b$. Demuestre que entre a y b existe un α para el cual $f'' < 0$. **Solución**
Como f es dos veces derivable, entonces es continua y podemos utilizar T.V.M. para obtener:

Existe α_1 entre a, y c tal que$\left(f'(\alpha_1) = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a}\right) = \dfrac{f(c)}{b - c}$ Como $f(c) > 0$ entonces $f'(\alpha_1) > 0$.
Nuevamente por T.V.M. tenemos que
Existe α_2 entre c y b tal que $\left(f'(\alpha_2) = \dfrac{f(b) - f(c)}{b - c}\right) = \dfrac{-f(c)}{b - c} < 0$ Aplicando nuevamente T.V.M. a $f'(x)$ que es continua porque es derivable, tenemos que:
Existe α entre α_1 y α_2 tal que $\left(f''(\alpha) = \dfrac{f'(\alpha_2) - f'(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)$ Por lo tanto

Existe α entre a y b tal que $(f''(\alpha) < 0)$.

b) Demuestre que cualquier función de la forma

$$y = A\,\mathrm{senh}(mx) + B\cosh(mx)$$

con A, B constantes, cumple con la ecuación $y'' = m^2 y$. Determine $y = y(x)$ tal que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$ y $y'(0) = 6$.

Solución

Tenemos que

$$y = A\,\mathrm{senh}(mx) + B\cosh(mx)$$

Por lo tanto:

$$y' = mA\cosh(mx) + mB\,\mathrm{senh}(mx)$$

También

$$y'' = m^2 A\cosh(mx * m^2 B\,\mathrm{senh}(mx) = m^2 y$$

Además queremos que $y'' = 9y$ por lo tanto $m = \pm 3$ y como $y(0) = B = -4$ entonces $B = -4$ y por último $y'(0) = mA = 6$ entonces $A = \pm 2$. Por lo tanto

$$y = 2\,\mathrm{senh}(3x) - 4\cosh(3x).$$

3. Sea $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-4}$ Determine:

   a) Asíntotas verticales y horizontales.
   b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
   c) Sentido de concavidad
   d) Puntos de inflexión
   e) Máximos y mínimos locales
   f) Gráfico

Solución

a) Claramente, $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales (el denominador se hace 0 cuando x se acerca a ± 2, mientras que el numerador en dichos casos está "lejos" de 0).

No existen los límites en $\pm\infty$ por lo que no hay asíntotas horizontales.

b) Para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, debemos determinar dónde $f'(x)$ es positiva y dónde es negativa.

Como $f'(x) = \dfrac{2x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$ tiene denominador siempre positivo en el dominio, el signo de f' está dado por el signo del numerador.

Observamos que $f'(x) = 0$ para $x = 0$ y para $x = \pm\sqrt{12}$, que $f'(x) > 0$ para $x < -\sqrt{12}$ y para $x > \sqrt{12}$, y que $f'(x) < 0$ para $-\sqrt{12} < x < \sqrt{12}$.

Así, tenemos:

- para $x < -\sqrt{12}$, y para $-\sqrt{12} < x - 2$, $f'(x) > 0$;
- para $-2 < x < 2$, $f'(x) \leq 0$,

por lo que f es creciente en $(-\infty, -\sqrt{12})$ y en $(\sqrt{12}, \infty)$, y es decreciente en $(-\sqrt{12}, -2)$, en $(-2, 2)$ y en $(2, \sqrt{12})$.

Note que f es decreciente en todo el intervalo $(-2, 2)$, pese a que en $x = 0$ se tiene $f'(x) = 0$.

c) Para determinar el sentido de la concavidad, necesitamos calcular la segunda derivada. En cada punto del dominio, se tiene

$$f''(x) = \frac{16x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

Como $x^2 + 12 > 0$ para todo x, el signo de f'' está dado por el de $\dfrac{x}{x^2-4}$, que es:

- Negativo para $x < -2$, y para $0 < x < 2$,
- y es positivo para $-2 < x < 0$ y para $x > 2$.

Así, el sentido de la concavidad es hacia arriba en $(-2, 0)$ y en $(2, \infty)$ y es hacia abajo en $(-\infty, -2)$ y en $(0, 2)$.

d) El único punto del dominio en el que el signo de la segunda derivada (y por ello el sentido de la concavidad) cambia es $x = 0$, por lo que éste es el único punto de inflexión.

Note que para justificar que $x = 0$ es punto de inflexión, NO BASTA ver que $f''(0) = 0$: basado en el punto anterior, vemos que la concavidad es hacia arriba en $(-2, 0)$ y es hacia abajo en $(0, 2)$, por lo que efectivamente hay un cambio en el sentido de la concavidad.

Otra forma de justificar dicho cambio es recurriendo a la tercera derivada, y verificando que $f'''(0) < 0$.

Observación:También es importante hacer notar que los puntos $x = \pm 2$ no están en el dominio de la función y por lo tanto ah no hay puntos de inflexión.

e) Para determinar máximos y mínimos locales debemos revisar extremos del intervalo de definición —lo que aquí no aplica ya que dicho intervalo es $(-\infty, \infty)$—, los puntos del dominio donde la derivada no está definida —lo que aquí tampoco se aplica ya que la función es derivable en todo su dominio— y los puntos del dominio donde la derivada es cero.

Los puntos donde $f'(x) = 0$ son $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{12}$.

En $x = 0$, f no tiene un extremo local (ya que es decreciente en todo el intervalo $[-2, 2]$).

En $x = -\sqrt{12}$, $f''(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$, por lo que f tiene un máximo local en $-\sqrt{12}$.

En $x = \sqrt{12}$, $f''(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0$, por lo que f tiene un mínimo local en $\sqrt{12}$.

f) El gráfico se muestra a continuación.

4. Hallar el área del rectángulo más grande con base inferior en el eje X y vértices superiores en la parábola $y = 27 - x^2$.

Solución
Denotamos por $P(x, y)$ el punto de la parábola que es el vértice del rectángulo en el primer cuadrante. Entonces el área a maximizar será:

$$A(x) = 2xy$$

Pero $P(x, y)$ es un punto de la parábola, por lo tanto, $y = 27 - x^2$. Luego la función área queda como sigue:

$$A(x) = 54x - 2x^3.$$

donde $0 \leq x \leq 3\sqrt{3}$.
(también pueden trabajar con $-3\sqrt{3} \leq x \leq 3\sqrt{3}$ **pero la función área va a ser distinta:**$A(x) = xy$ **y tienen que tener cuidado con el signo)**
Luego su derivada es

$$A'(x) = 54 - 6x^2.$$

Esta derivada existe siempre, por lo tanto los puntos críticos son

$$\{0, 3\sqrt{3}, 3\}$$

Dado que $A''(x) = -12x$ y para $x > 0$, $A''(x) < 0$ en $x = 3$ tenemos un máximo y como en los otros dos puntos críticos el área es cero, el área máxima será cuando $x = 3$ y vale:108