Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Profesor: Rodrigo Vargas
Ayudantes: Mateo de la Cuadra y Mathías Luengo

Introducción al Cálculo - MAT1107
Ayudantía 13
15 de Junio 2023

Pregunta 1

Calcule los siguientes límites:

a.) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n}$

b.) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^4}{n^3-1} - \dfrac{n^3}{n^2+n+1}\right)$

Pregunta 2

Considere la sucesión dada por

$$a_1 = 1,$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), \quad n \geq 1$$

a.) Demuestre que $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$.

b.) Demuestre que $a_n \geq \sqrt{2}$ para todo $n \geq 2$.

c.) Demuestre que $a_n \leq 2$ para todo $n \geq 1$.

Pregunta 3

Sea a_n una sucesión que satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \leq a_n \leq \frac{12n-2}{2n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$

Pregunta 4

Para el siguiente problema es útil recordar la desigualdad de Bernoulli: $\forall x \geq -1$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumple que $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

a) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{16}{9}\right)^n = \infty$.

b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se define $x_n = 500 - \left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$. Muestre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión acotada.

Pregunta 5

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión creciente de números mayores que 5.

a) Demuestre que $\left(1 - \dfrac{4}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Suponga que

$$2\left(1 - \frac{4}{x_n}\right)^3 + 1 = 14\left(1 - \frac{4}{x_n}\right)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que $1 - \frac{4}{x_n}$ tiende a una de las soluciones de la ecuación

$$2\lambda^3 - 14\lambda + 1 = 0.$$

Pregunta 6

Calcule el límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2 + (-1)^n n}{3n^2 + 5} \cdot \frac{3n^3 + \sin(kn)n}{2n^3 + 5n} \right)$$

con $k \in \mathbb{N}$.