Ayudantía 06 - MAT1107

Problema 1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente, es decir, si $x_1, x_2 \in [a, b]$y $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$.

a) Demuestre que f es inyectiva y por tanto invertible (en algún conjunto).

b) Demuestre que f^{-1} es estrictamente creciente.

Solución

a) Si $x_1 \neq x_2$, entonces, o bien $f(x_1) < f(x_2)$, o bien $f(x_1) > f(x_2)$. En cualquier caso, $f(x_1) \neq f(x_2)$ y, por lo tanto, f es inyectiva.

b) Sean $y_1 < y_2$ en el dominio de f^{-1}. Supongamos que $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Como f es estrictamente creciente, se tiene que $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$, es decir, $y_1 \geq y_2$. Esto es una contradicción.

Problema 2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$g(x) = \sqrt[3]{x + \sqrt{1 + x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1 + x^2}}$$

a) Encuentre la inversa de g

b) Sea $f = g^{-1}$, demuestre que $g \circ f = id$ y $f \circ g = id$.

a) Notar que si $y = g(x)$, entonces

$$y^3 = \left[x + \cancel{\sqrt{1+x^2}}\right] + \left[x - \cancel{\sqrt{1+x^2}}\right] + 3\left[\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\right]\left[\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right]\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$y^3 = 2x + 3\sqrt[3]{\cancel{x^2} - (1+\cancel{x^2})}\,\Big(\underbrace{\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}}_{y}\Big)$$

$$y^3 = 2x + 3\sqrt[3]{-1}\,y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^3 + 3y}{2} = x$$

Entonces la inversa debe ser

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{x^3+3x}{2}.$$

b) Notar que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$= f\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)$$
$$= \frac{(g(x))^3 + 3g(x)}{2} = x \quad \left(\begin{array}{l}\text{por los cálculos}\\ \text{de la parte}\\ \text{anterior}\end{array}\right)$$

$\therefore f \circ g = id_{\mathbb{R}}$

Por otro lado:

$$\underbrace{(g \circ f)(x)}_{y} = g(f(x)) = \sqrt[3]{f(x)+\sqrt{1+[f(x)]^2}} + \sqrt[3]{f(x)-\sqrt{1+[f(x)]^2}} \quad /()^3$$

$$\Rightarrow \quad y^3 = 2f(x) - 3y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^3+3y}{2} = f(x) = \frac{x^3+3x}{2}$$

$\Rightarrow$ ¿$y = x$? esto probaría que $(g \circ f)(x) = x$.

$$(y-x)(y^2+xy+x^2+3) = 0$$

Donde $y^2 + xy + x^2 + 3$

$$= \frac{y^2 + x^2 + (x+y)^2}{2} + 3 > 0$$

$\therefore (x-y) = 0 \Rightarrow x = y = (g \circ f)(x)$

$\therefore g \circ f = id_R$

Problema 3. Sea $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$, demuestre que:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Solución En efecto:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x)) = ((h \circ g) \circ f)(x)$$

Observación: Este argumento parece artificial, pero lo importante es que cuando nos piden demostrar la igualdad entre dos funciones, esto se debe hacer evaluando en los elementos del dominio ($x \in A$ en este caso).

Obs 2: Revise con cuidado cada igualdad de la demostración.

Problema 4. Consideremos ahora dos funciones, $f : A \to B$ y $g : B \to C$, ambas invertibles (biyecciones):

$$f : A \to B, \quad g : B \to C$$
$$f^{-1} : B \to A, \quad g^{-1} : C \to B$$

Demuestre que:

$$g \circ f \text{ es invertible. Además } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Solución La invertibilidad de $g \circ f$ es directa pues la composición de biyecciones es una biyección. Veamos la expresión de la inversa:

$$f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A, \quad g \circ f : A \to C$$

Se tiene

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = id_C.$$

Como la inversa es única, concluimos $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

notación para la inversa de $(g \circ f)$

expresión para calcular la inversa como una composición.

Problema 5. Sean $f : A \to B$, $g : B \to A$ dos funciones tales que $f \circ g = id_B$. Demuestre que f es sobreyectiva y que g es inyectiva.

- $f : A \to B$ es sobreyectiva:

Sea $b \in B$, queremos un $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Como $f \circ g = id_B$, tenemos que $(f \circ g)(b) = id_B(b)$

$\iff f(g(b)) = b$

Con $g(b) \in A$. Basta elegir $a = g(b)$.

- $g: B \to A$ es inyectiva:

Sean $b_1, b_2 \in B$ tales que $g(b_1) = g(b_2)$.
Queremos que $b_1 = b_2$. En efecto:

$$f(g(b_1)) = f(g(b_2))$$
$$\Rightarrow \quad id_B(b_1) = id_B(b_2)$$
$$\Rightarrow \quad b_1 = b_2.$$

$\therefore$ g es inyectiva.

Problema 6. Sea $f : A \to B$ una función.

a) Demuestre que si f es inyectiva, entonces existe una función sobreyectiva $g : B \to A$.

b) Demuestre que si f es sobreyectiva, entonces existe una función inyectiva $h : B \to A$.

a) Como f es inyectiva, existe una biyección entre A e $Im(f) \subseteq B$. En este caso podemos definir $g(b) = f^{-1}(b)$ $\forall b \in Im(f)$.
Más precisamente, $\forall a \in A$, definimos

$$g(f(a)) = a.$$

Sea $a_0 \in A$. Para $b \in B \setminus Im(f)$ definimos

$$g(b) = a_0.$$

Así, tenemos $g: B \to A$

$$g(b) = \begin{cases} a & \text{si } f(a) = b \\ a_0 & \text{si } b \notin \mathrm{Im}(f). \end{cases}$$

Como $(g \circ f) = id_A$, g es sobreyectiva.
Definir $g(b)$ en $B \setminus \mathrm{Im}(f)$ es muy importante para que $g: B \to A$ esté bien definida.

b) Ahora, si f es sobreyectiva (y no necesariamente inyectiva), tenemos que $\forall b \in B$, $\exists a \in A$ tal que $f(a) = b$ (no tiene por qué ser único). Entonces, para cada $b \in B$, elegimos un $a_b \in f^{-1}(\{b\})$ y definimos $h(b) = a_b$.
Así, $h: B \to A$ está bien definida (pues $f^{-1}(\{b\}) \neq \emptyset$ para cada $b \in B$). ¿Es inyectiva? Para $b \in B$, $f(h(b)) = b$, o sea, $f \circ h = id_B$, así que h es inyectiva.