PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2020

Pauta Interrogación 1 - MAT1610

1. Estudie los siguientes límites

   a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

   Solución:

   $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}.$$

   b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x+\cos(x)}{x+\operatorname{sen}(x)}$.

   Solución:

   $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\cos x}{x+\sin x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x(1+\frac{\cos x}{x})}{x(1+\frac{\sin x}{x})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = 1.$$

   c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

   Solución:
   Observe que:

   $$|h(x)| \leq |\sin x||\sin(\frac{1}{x})| \leq |\sin x|,$$

   donde el teorema del sandwich implica que

   $$\lim_{x\to 0} h(x) = 0.$$

   .

Distribución de puntajes:
En cada inciso la distribución es

- (1 punto) Por el desarrollo que justifica el cálculo de límite.
- (1 punto) por resultado final.

2. Demuestre que la ecuación
$$e^x = 2 - 3x,$$
tiene, al menos, una solución real.

Solución:
Considere la función $g(x) = e^x + 3x - 2$ que es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Además evaluando
$$g(0) = -1 < 0, \quad g(1) = e - 1 > 0.$$
Entonces por el TVI, existe $c \in (0,1)$ tal que $g(c) = 0$. Por lo tanto existe al menos una solución del ecuación $e^x = 2 - 3x$ dada por $c \in (0,1)$.

Distribución de puntajes:
En cada inciso la distribución es

- (3 puntos) Por chequear hipótesis del TVI
- (3 puntos) por concluir correctamente

3. Determine todos lo valores de $a \in \mathbb{R}$ para lo que la función

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \\ x^2 - 3x + 2 - 2a|a| & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

es derivable en $x = 2$.

Solución:

Observe que para que g sea derivable en $x = 2$ una condición neecsaria es que sea continua en dicho punto, para esto se debe cumplir que

$$\lim_{x \to 2} g(x) = g(2) = 4a$$

Observe que $\lim_{x \to 2^-} g(x) = 4a$ y que $\lim_{x \to 2^+} g(x) = -2a|a|$, por lo que es necesario que $-2a|a| = 4a$, cuya única solución real es $a = 0$, con esto la función g queda definida por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \\ x^2 - 3x + 2| & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

que resulta ser no derivable en $x = 2$. Por lo tanto no existe valores de a que satisfagan la condición.

Distribución de puntajes:
En cada inciso la distribución es

- (2 puntos) Por condición de continuidad.
- (2 puntos) Por argumentar que la función resultante no es derivable.
- (2 puntos) Por conclusión.

4. Determine la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(0,1)$ donde

$$f(x) = \frac{x^2\text{sen}(x) + 2}{e^{2x} + 1}.$$

Solución:
Recordamos que la ecuación de la recta tangente T_0 a la curva $y = f(x)$ en el punto $(0,1)$ es dada por

$$T_0 : \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0).$$

Calculando la derivada de f, obtenemos

$$f'(x) = \frac{(2x\text{sen}(x) + x^2 \cos x)(e^{2x} + 1) - 2(x^2\text{sen}(x) + 2)e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2},$$

y por lo tanto $f'(0) = -\frac{1}{2}$ y luego

$$T_0 : \quad y = -\frac{1}{2}x + 1.$$

Distribución de puntajes:
En cada inciso la distribución es

- (3 puntos) Por determinar f'
- (1 puntos) Por deetrminar $f'(0)$
- (2 puntos) Por determinar la ecuación.

5. Sea h la función definida por $h(x) = f(\sqrt{x} + 1)$. Determine $h'(1)$ si se sabe que f es derivable en $\mathbb{R}$ y que $f'(2) = 1$.

Solución:

Observe que como h es una función derivable y por composición de funciones, obtenemos

$$h'(x) = f'(\sqrt{x} + 1).\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Luego $h'(1) = f'(2).\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Distribución de puntajes:
En cada inciso la distribución es

- (3 puntos) Por regla de la cadena
- (2 puntos) Por derivar la raíz
- (1 puntos) Por valor final