Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo Semestre del 2020

Modelos Probabilísticos (EYP1027)
Ayudantía 1

1. Demuestre que para cualquier conjunto finito S, se tiene que

   a) Si $|S| = n$ entonces $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

   b) $\mathcal{P}(S)$ es una σ-álgebra.

   c) La intersección de dos σ-álgebras es una σ-álgebra.

2. Demuestre las siguientes propiedades.

   a) Si A es un evento, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$.

   b) $P(\emptyset) = 0$.

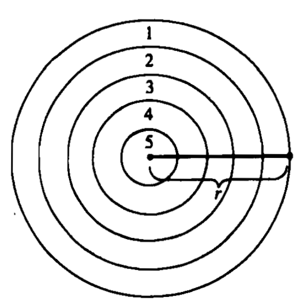
   c) Si A y B son eventos tales que $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

   d) Si A es un evento, entonces $P(A) \leq 1$.

   e) Para cualquier par de eventos A y B se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

3. Considere dos monedas, la primera cumple que $P(\text{Cara}) = v$ y la segunda $P(\text{Cara}) = w$. Además se tiene que al lanzar ambas monedas,
$$P(\text{Cero Caras}) = p_0$$
$$P(\text{Una Cara}) = p_1$$
$$P(\text{Dos Caras}) = p_2$$
responda si se pueden elegir v y w tal que $p_0 = p_1 = p_2$.

4. Suponga que se tiene un tablero para jugar dardos como en la figura 1 y que las separaciones entre los círculos son de largo $r/5$. El tablero se encuentra colgado en un muro de área A, considere que la probabilidad de que un dardo quede sostenido en el muro o en el tablero es 1.



a) Calcule $P(\text{Obtener i puntos})$

b) Calcule $P(\text{Obtener i puntos} \mid \text{El dardo quedó en el tablero})$

5. Se dice que P es **finitamente aditiva** si para cualquier colección finita de eventos $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ disjuntos se cumple que
$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$
Por otro lado se dice que P es **continua en el vacío** si para cualquier secuencia de eventos $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ A_{n=1} \subset A_n$ se cumple que
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$
Muestre que si P es finitamente aditiva y continua en el vacío, entonces para cualquier secuencia de eventos $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ disjuntos se cumple que,
$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$
es decir, es **contable aditiva**.