Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2016

MAT1620 ⋆ Cálculo II
Interrogación N° 3

1. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia para la serie de potencia

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k^2+1}$$

Solución. Usando el test de la razón para analizar convergencia absoluta, se tiene

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{k+1}(k^2+1)}{(x-2)^k((k+1)^2+1)}\right| = \mid x-2 \mid < 1$$

esto es si $x \in (1,3)$.

Analizando la convergencia en los puntos extremos se tiene que

- Si $x = 1$, entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$ converge por criterio de serie alternante.
- Si $x = 3$, entonces $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ converge por criterio p.

Es decir el intervalo de convergencia de la serie es $[1,3]$, con radio de convergencia $R = 1$

Criterio de corrección:

- Por análisis convergencia absoluta (test de la razón), **1 pto.**
- Por intervalo de convergencia absoluta, **2 ptos.**
- Por análisis de convergencia en los puntos extremos, **2 ptos** (un punto por cada extremos.)
- Por radio de convergencia, **1 pto.**

2. Halle una representación en series de potencias para la función

$$f(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2},$$

indicando su radio de convergencia.

Solución. Alternativa 1:

Notamos que $\dfrac{2x}{(1-x^2)^2} = \dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{1-x^2})$

Como $\dfrac{1}{1-x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$

Luego $\dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{1-x^2}) = \dfrac{d}{dx}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{d}{dx}x^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2kx^{2k-1}$

Como el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}$ es 1, tenemos que el radio de convergencia de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2kx^{2k-1}$ también es 1.

Alternativa 2:

$f(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2} = 2x(1+(-x^2))^{-2} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{-2\cdot -3\cdot -4 ...(-2-(k-1))}{i!}x^{2k+1}$
con radio de convergencia 1.

Criterio de corrección:

- Por escribir la función de alguna forma que le permita reconocer alguna serie conocida, **2 ptos**.
- Por operar correctamente con la forma elegida para determinar la serie pedida, **2 ptos**.
- Por radio de convergencia, **2 ptos**.

3. Determine la expansión en Taylor de $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$ en torno a $x = 1$.

   Solución. Tenemos que $f(x) = 2x^3 - 3x + 2$, $f'(x) = 6x^2 - 3$, $f''(x) = 12x$ y $f'''(x) = 12$.

   Luego $f(1) = 1$, $f'(1) = 3$, $f''(1) = 12$. $f'''(1) = 12$
   Luego el polinomio de Taylor centrada en $x = 1$ de f es

$$f(x) = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{12}{3!}(x-1)^2 + \frac{12}{4!}(x-1)^3$$

   Criterio de corrección:

   - Asignar (**1 pto**) por cada $f^{(k)}(1)$, $k = 0, 1, 2, 3$.
   - Por expansión correcta, **2 ptos** (Todo el puntaje aquí, aunque no tenga la forma general).

4. Utilice series para obtener el valor aproximado de la integral definida

$$\int_0^1 \cos(x^2)\, dx$$

   con un error menor a $0,0001$.

Solución. Como $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

entonces $\cos(x^2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!}$

y luego $\int_0^1 \cos(x^2)\, dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^k \frac{x^{4k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!(4k+1)}$

Luego $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!(4k+1)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{(2k)!(4k+1)} + R_n$

donde se quiere que $R_n < 0,0001$. Sabemos que en una serie alternante $R_n < a_{n+1}$, luego como $a_n = \frac{1}{(2n)!(4n+1)}$, entonces

$R_n < \frac{1}{(2(n+1))!(4(n+1)+1)}$, y $\frac{1}{(2(n+1))!(4(n+1)+1)} < 0,0001$ a partir de $n = 3$.

Luego $\int_0^1 \cos(x^2)\, dx \approx 1 - \frac{1}{2! \cdot 5} + \frac{1}{4! \cdot 9}$ con un error del $0,0001$.

Criterio de corrección:

- Por expansioón en serie $f(x) = \cos(x^2)$, **1 pto**.
- Por expansión en serie $\int_0^1 \cos(x^2)\, dx$, **1 pto**.
- Por afirmar que $|R_n| \leq a_{n+1}$, **1 pto.**
- Por encontra el menor n tal que R_n sea menor a $0,0001$ **1 pto.**
- Por $\int_0^1 \cos(x^2)\, dx \approx 1 - \frac{1}{2! \cdot 5} + \frac{1}{4! \cdot 9}$**2 pto.**

5. Sea $\mathcal{R}$ el paralelógramo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Demuestre que los lados de $\mathcal{R}$ son conguentes si y sólo si sus diagonales se cortan en ángulo de $90°$.

   Solución. Las diagonales del paralelógramo son

$$\vec{u} + \vec{v} \qquad \text{y} \qquad \vec{u} - \vec{v}$$

Si los lados de $\mathcal{R}$ son congruentes, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, entonces

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$$

y por tanto las diagonales se cortan en un ángulo de $90°$.

Recíprocamente, si las diagonales de $\mathcal{R}$ se cortan en un ángulo de $90°$ entonces

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$$

y por tanto los lados de $\mathcal{R}$ son conguentes.

Evaluación.

- Asignar (**3 ptos**) por demostrar correctamente que (congruentes) $\rightarrow$ (perpendiculares).
- Asignar (**3 ptos**) por demostrar correctamente que (perpendiculares) $\rightarrow$ (congruentes)
  Nota. Si la demostración la hace escribiendo explícitamente ssi (o bien $\leftrightarrow$) entonces asignar todo el puntaje.

6. Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ de norma 1 que sea perpendicular a los vectores $\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ y $\hat{\jmath} - \hat{k}$

   Nota. $\hat{\imath} = (1,0,0)$, $\hat{\jmath} = (0,1,0)$ y $\hat{k} = (0,0,1)$.

   Solución. Sea (x,y,z) el vector que buscamos, luego

   $$(x,y,z)\cdot(1,-1,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad (x,y,z)\cdot(0,1,-1) = 0$$

   De las ecuaciones anteriores se deduce que el vector buscado es de la forma

   $$(x,x,x)$$

   Imponiendo la condición que la norma sea 1 tendremos que UN vector buscado es

   $$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

   Evaluación.

   - Asignar (**1 pto**) por cada una de las ecuaciones $(x,y,z)\cdot(1,-1,0) = 0$ y $(x,y,z)\cdot(0,1,-1) = 0$.
   - Asignar (**2 pto**) por deducir expícita o implícitamente que el vector buscado es de la forma (x,x,x).
   - Asignar (**2 pto**) por determinar UNO de los posibles vectores $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

7. Determine las ecuaciones de los planos que son paralelos al plano $x - 2y + 2z = 1$ y están a distancia 3 unidades de él.

   Solución. Si los planos buscados son paralelos a $x - 2y + 2z = 1$, entonces son de la forma

   $$x - 2y + 2z + d = 0$$

   Imponiendo la condición de distancia igual 3 unidades al plano dado (usamos la formula de distancia punto plano) tendremos

   $$\frac{|x_0 - 2y_0 + 2z_0 + d|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}} = 3$$

   siendo (x_0, y_0, z_0) un punto cualquiera en el plano $x - 2y + 2z = 1$. Elegimos $(x_0, y_0, z_0) = (1,0,0)$, luego remplazamos en la fórmula anterior obteniendo

   $$\frac{|1+d|}{3} = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad d = -8, 10$$

   Por lo tanto los planos buscados son

   $$x - 2y + 2z - 8 = 0 \qquad \text{y} \qquad x - 2y + 2z + 10 = 0$$

   Evaluación.

   - Asignar (**1 pto**) por escribir la ecuación $x - 2y + 2z + d = 0$, expícita o implícitamente.

- Asignar (**1 pto**) por escribir la ecuación $\dfrac{|x_0 - 2y_0 + 2z_0 + d|}{\sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}} = 3$ expícita o implícitamente
- Asignar (**1 pto**) por obtener la ecuación $\dfrac{|1+d|}{3} = 3$.
- Asignar (**0.5 pto**) por cada solución correcta $d = -8, 10$
- Asignar (**1 pto**) por cada uno de los planos $x - 2y + 2z - 8 = 0$ y $x - 2y + 2z + 10 = 0$.

8. Determine la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto $(1, -1, 1)$ y contiene a la recta de intersección de los planos $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 1$.

Solución. Para determinar la ecuación del plano se necesita un punto y dos direcciones.

Tomaremos como punto de referencia $\vec{x}_0 = (1, -1, 1)$ y una de las direcciones corresponde a la dirección de la recta $\vec{d} = (1, 1, -1) \times (2, -1, 3) = (2, -5, -3)$. La otra dirección se obtiene a partir de dos puntos en el plano buscado (uno de ellos es $\vec{x}_0$ y el otro un punto cualquiera en la recta, por ejemplo $(1, 1, 0)$), vale decir $\vec{e} = (1, 1, -1) - (1, 1, 0) = (0, 0, -1)$.

De este modo, la ecuación del plano es

$$((x, y, z) - (1, -1, 1)) \cdot ((2, -5, -3) \times (0, 0, -1)) = 0 \qquad \text{o bien} \qquad ((x, y, z) - (1, -1, 1)) \cdot (5, -2, 0) = 0$$

Por lo tanto, la forma cartesiana de nuestro plano es

$$5x - 2y - 7 = 0$$

Evaluación.

- Asignar (**1 pto**) por cada dirección que genera el plano.
- Asignar (**1 pto**) por determinar un punto del plano que se quiere calcular.
- Asignar (**1 pto**) por determinar la normal al plano que se quiere calcular.
- Asignar (**2 pto**) por calcular la ecuación cartesiana del plano.