Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2022

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Examen

1. Resuelva la siguiente inecuación
$$\frac{x^2+4x-12}{x^2-6x+8} \leqslant -1 \,.$$

Solución. Notemos que la inecuación es equivalente con
$$\begin{aligned}
\frac{x^2+4x-12}{x^2-6x+8} \leqslant -1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2+4x-12}{x^2-6x+8}+1 \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2+4x-12+x^2-6x+8}{x^2-6x+8} \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2x^2-2x-4}{x^2-6x+8} \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2(x^2-x-2)}{(x-4)(x-2)} \leqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2(x-2)(x+1)}{(x-4)(x-2)} \leqslant 0 \,.
\end{aligned}$$

Tenemos tres puntos críticos $x=-1$, $x=2$ y $x=4$ y dos restricciones para la inecuación $x \neq 2$ y $x \neq 4$. Note que podemos cancelar el término $(x-2)$ en el cociente y que $x \neq 2$ ya que en la desigualdad original estaríamos dividiendo por cero. Luego, tenemos que
$$\frac{2(x-2)(x+1)}{(x-4)(x-2)} \leqslant 0 \Longleftrightarrow \frac{x+1}{x-4} \leqslant 0 \quad \text{y} \quad x \neq 2 \,.$$

Realizando una tabla de signos para esta última

	$-\infty \quad -1$	$-1 \quad 4$	$4 \quad \infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Entonces el conjunto solución es $S=[-1,4[-\{2\}=[-1,2[\cup]2,4[$.

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por desarrollar y obtener una inecuación con numerador y denominador factorizados.
- 2 puntos por obtener la tabla de signos correctamente.
- 2 puntos por obtener el conjunto solución considerando los puntos de restricción.

2. Considere la función definida por tramos

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1\,, \\ -x^2+2 & \text{si } 1 < x < 2\,, \\ x-1 & \text{si } 2 < x \leqslant 4\,. \end{cases}$$

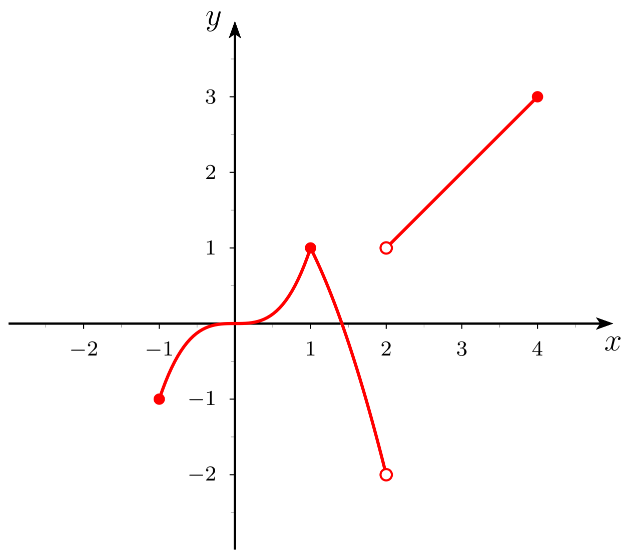
a) Trace la gráfica de la función f.

b) Determine el dominio de f.

c) Determine el recorrido de f.

Solución.

a) El gráfico de la función f se muestra a continuación



b) A partir del gráfico se ve que $\mathrm{Dom}(f) = [-1, 2) \cup (2, 4]$.

c) A partir del gráfico se ve que $\mathrm{Rec}(f) = (-2, 3]$.

Puntaje Pregunta 2.

- 2 puntos por realizar el gráfico de f.
- 2 puntos por determinar el dominio de f.
- 2 puntos por determinar el recorrido de f.

3. Usando la definición de límite, demuestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{n^2+n+1} = 3$.

Solución. Dado $\varepsilon > 0$ debemos encontrar N tal que si $n > N$, entonces

$$|a_n - L| = \left|\frac{3n^2+1}{n^2+n+1} - 3\right| = \left|\frac{-3n-2}{n^2+n+1}\right| = \frac{3n+2}{n^2+n+1}$$

debe ser menor que ε. Notemos que

$$\frac{3n+2}{n^2+n+1} \leqslant \frac{3n+2n}{n^2+n+1} = \frac{5n}{n^2+n+1} < \frac{5n}{n^2+n} = \frac{5}{n+1}$$

Imponiendo la condición a este último valor, vemos que

$$\frac{5}{n+1} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} < n+1 \Longleftrightarrow \frac{5}{\varepsilon} - 1 < n\,.$$

Dado $a = 5/\varepsilon - 1$ por el principio de Arquimides existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a < N$. Entonces, si $n > N$ implica que

$$\frac{5}{\varepsilon} - 1 < n \Longleftrightarrow \frac{5}{n+1} < \varepsilon\,.$$

Se sigue que

$$|a_n - L| = \frac{3n+2}{n^2+n+1} < \frac{5}{n+1} < \varepsilon\,,$$

como queríamos probar.

Puntaje Pregunta 3.

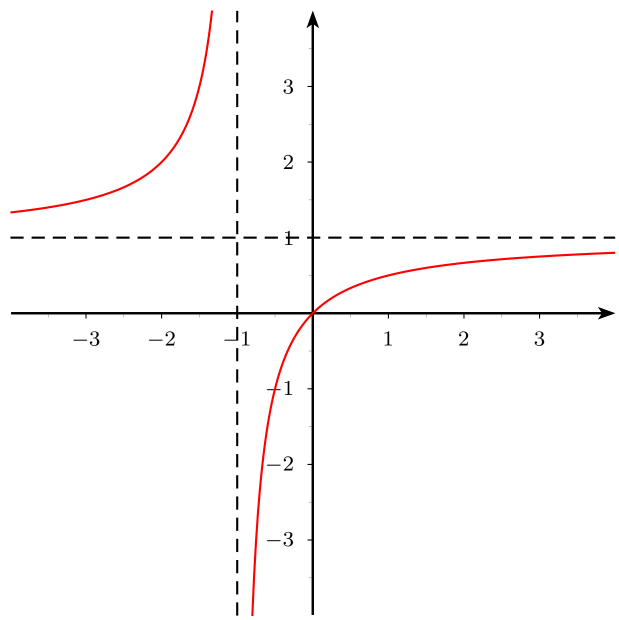
- 6 puntos por obtener de manera correcta la demostración.

4. Sean $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$ una función definida por $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ y $\{a_n\}$ una sucesión que satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{10n-21}{2n}\leqslant f(a_n)\leqslant\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Solución. Notemos que f es una función racional por lo que podemos obtener su gráfica:



Del gráfico de f se ve que f es creciente, entonces su función inversa $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-x}$ también es creciente. Aplicando f^{-1} a la desigualdad dada, se obtiene

$$f^{-1}\left(\frac{10n-21}{2n}\right)\leqslant f^{-1}(f(a_n))\leqslant f^{-1}\left(\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)\iff\frac{10n-21}{-8n+21}\leqslant a_n\leqslant\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-5\sqrt{n}}\,.$$

Ahora bien,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-5\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-5}=-\frac{5}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n-21}{-8n+21}=\lim_{n\to\infty}\frac{10-\dfrac{21}{n}}{-8+\dfrac{21}{n}}=-\frac{10}{8}=-\frac{5}{4}$$

Por el teorema del Sandwich se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\dfrac{5}{4}$

Puntaje Pregunta 4.

- 2 puntos por obtener cotas para la sucesión a_n
- 1,5 puntos por calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-5\sqrt{n}}$
- 1,5 puntos por calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10n-21}{-8n+21}$
- 1 punto por usar el teorema del Sandwich para obtener el límite de a_n.

5. Sea $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Demostrar que $\{a_n\}$ es convergente y encontrar su límite.

Solución.

- Veamos por inducción que $\{a_n\}$ es sucesión creciente.
  En efecto para $n = 1$ se tiene que $a_1 = \sqrt{2}$ y $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ y es sencillo ver que $a_1 < a_2$.
  Por la hipótesis inductiva $a_n < a_{n+1}$ entonces
  $$a_n + 2 < a_{n+1} + 2 \Longleftrightarrow \sqrt{a_n + 2} < \sqrt{a_{n+1} + 2} \Longleftrightarrow a_{n+1} < a_{n+2}\,.$$

- Por demostrar que $a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
  En efecto, para $n = 1$ se tiene que $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Ahora por la hipótesis inductiva $a_n < 2$ entonces
  $$a_n + 2 < 2 + 2 = 4 \Longleftrightarrow \sqrt{a_n + 2} < \sqrt{4} = 2 \Longleftrightarrow a_{n+1} < 2\,.$$

- Como $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente entonces es convergente. Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Haciendo $n \to \infty$ en la fórmula recursiva
  $$\begin{aligned}
  \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + 2} \quad &\Longleftrightarrow \quad L = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + 2} \\
  &\Longleftrightarrow \quad L = \sqrt{L + 2} \\
  &\Longleftrightarrow \quad L^2 - L - 2 = 0 \\
  &\Longleftrightarrow \quad (L - 2)(L + 1) = 0
  \end{aligned}$$
  Como $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, descartamos $L = -1$ y por las propiedades vistas anteriormente obtenemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Puntaje Pregunta 5.

- 2 puntos por demostrar por inducción que la sucesión es creciente.
- 2 puntos por demostrar por inducción que la sucesión está acotada.
- 2 puntos por encontrar el límite de la sucesión.

6. Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pruebe que

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{\ln(a_n+2)} - \sqrt{\ln(a_n)}\right] = 0\,.$$

[Ayuda: Puede usar sin demostración que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(b_n) = \ln\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$]

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned}
\sqrt{\ln(a_n+2)} - \sqrt{\ln(a_n)} &= \left(\sqrt{\ln(a_n+2)} - \sqrt{\ln(a_n)}\right) \cdot \frac{\sqrt{\ln(a_n+2)} + \sqrt{\ln(a_n)}}{\sqrt{\ln(a_n+2)} + \sqrt{\ln(a_n)}} \\
&= (\ln(a_n+2) - \ln(a_n)) \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(a_n+2)} + \sqrt{\ln(a_n)}} \\
&= \ln\left(\frac{a_n+2}{a_n}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\ln(a_n+2)} + \sqrt{\ln(a_n)}}
\end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ y usando la ayuda vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{a_n+2}{a_n}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+2}{a_n}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{2}{a_n}\right) = \ln(1) = 0\,.$$

Por otro lado, como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ entonces $\sqrt{\ln(a_n+1)} + \sqrt{\ln(a_n)}$ no está acotado ya que las funciones logaritmo natural y raíz cuadrada son funciones crecientes y se sigue que $\dfrac{1}{\sqrt{\ln(a_n+2)} + \sqrt{\ln(a_n)}}$ está acotado. Entonces, el límite del producto va a cero.

Puntaje Pregunta 6.

- 1,5 puntos por obtener la igualdad $\sqrt{\ln(a_n+2)} - \sqrt{\ln(a_n)} = \ln\left(\dfrac{a_n+2}{a_n}\right) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{\ln(a_n+2)} + \sqrt{\ln(a_n)}}$
- 1,5 puntos por mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{a_n+2}{a_n}\right) = 0$
- 1,5 puntos por mostrar que $\dfrac{1}{\sqrt{\ln(a_n+2)} + \sqrt{\ln(a_n)}}$ está acotado.
- 1,5 puntos por concluir que el producto entre $\ln\left(\dfrac{a_n+2}{a_n}\right)$ y $\dfrac{1}{\sqrt{\ln(a_n+2)} + \sqrt{\ln(a_n)}}$ converge a cero.