PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
PRIMER SEMESTRE 2019.

INTERROGACIÓN 1
CALCULO 2 ⋆ MAT1620

La siguiente interrogación consta de 5 preguntas. Dispone de 120 minutos para responderla.

1. *a*) Analice la convergencia de la siguiente integral.

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $a > -1, b > a+1$ entonces la integral

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^b}\,dx,$$

es convergente.

2. Considere la sucesión $\{a_n\}$ dada por

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}, \quad n \geq 2.$$

a) Demuestre por inducción que la serie $\{a_n\}$ es creciente.

b) Suponga que $a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.Pruebe que $\{a_n\}$ es convergente y calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

3. *a*) Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n(\ln(n))^3}.$$

b) Determine el valor de $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(1+c)^n} = 3.$$

4. Analice la convergencia de las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}}$.

5. En cada caso, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Justifique sus respuestas.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2^{1+3n}} + \frac{10n^2}{3n^3+n}\operatorname{sen}(n^2)\right) = 0.$

b) Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, con $a_n \neq 0$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ es convergente.

c) Se tiene que $\displaystyle\int_1^{\infty} xe^{-x}dx = \frac{2}{e}$.

UNA SOLUCIÓN

1. *a*) Para analizar la primera integral comenzamos notando que

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} = \int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}} + \int_3^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}.$$

Para la primera parte, consideremos la función $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$, cuya respectiva integral, es convergente para $x \in [2,3]$. Se tiene que,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}}{g(x)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x\sqrt{x+2}} = \frac{1}{4},$$

por lo tanto, la primera parte es una integral convergente.
A continuación consideremos la función $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$, cuya respectiva integral es convergente en $[3,\infty)$. Se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}}{h(x)} = 1,$$

luego, en virtud del criterio de comparación al límite, la segunda parte de la integral pedida es convergente.
De lo anterior se concluye que la integral pedida es convergente.

b) Para probar lo pedido comencemos notando que si $-1 < a < 0$ la respectiva integral es de tipo I, es decir

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{-a}(1+x^b)} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^{-a}(1+x^b)},$$

pero en este caso se tiene que $1 > -a > 0$, luego la integral es convergente. Por otro lado si $a > 0$ se debe revisar la convergencia para $x \to \infty$. En este caso, utilizando el criterio de comparación al límite tenemos que,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x^a}{1+x^b}}{\dfrac{1}{x^{b-a}}} = 1,$$

es decir, las respectivas integrales de las funciones comparadas tienen el mismo comportamiento. En particular la función $h(x) = \dfrac{1}{x^{b-a}}$ es tal que su integral es convergente solo si $b - a > 1$, con lo cual se concluye lo pedido.

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 0.5 puntos por separar los dos casos a analizar.
- a) Asignar 1 punto por utilizar de manera correcta algún criterio, para determinar la convergencia de la primera integral.
- a) Asignar 1 punto por utilizar de manera correcta algún criterio, para determinar de convergencia de la segunda integral.
- a) Asignar 0.5 punto por concluir de manera correcta la convergencia de la integral dada.
- a) En caso que se calcule, mediante un cambio trigonométrico, las integrales calculadas de manera correcta entregan un punto cada una mas 0.5 puntos por separar y 0.5 por concluir.

- b) Asignar 1 punto por analizar de manera correcta el caso $-1 < a < 0$.
- b) Asignar 0.5 punto por analizar el caso $a > 0$.
- b) Asignar 1.5 puntos por analizar el caso $a - b > 1$ comparando de manera adecuada.

2. *a*) Consideremos la afirmación

$$P(n) : \text{Para todo} \quad n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{n+1}.$$

El caso base, a revisar corresponde a:

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

lo cual es evidentemente cierto.
A continuación supongamos que $P(k)$ es verdadero para algún $k \in \mathbb{N}$ y procedamos a probar $P(k+1)$, es decir debemos probar que

$$\sqrt{2 + a_{k+1}} \leq \sqrt{2 + a_{k+2}}.$$

Para ello notamos que,

$$\sqrt{2 + a_{k+1}} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + a_k}} \leq \sqrt{2 + \sqrt{2 + a_{k+1}}} = \sqrt{2 + a_{k+2}},$$

que era lo deseado. Se conluya del Primer Principio de Inducción que la sucesión dada es creciente.

b) Utilizando el hecho que la sucesión dada esta acotada por 3 y lo probado anteriormente, es creciente, el Teorema de las sucesiones monotonas nos permite conluir que la sucesión dada es convergente. Mas aún si denotamos por $L = \lim_{n\to\infty} a_n$, se tiene que

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{2 + L}.$$

es decir L satisface la ecuación

$$L^2 - L + 2 = 0,$$

de donde o bien $L = 2$ o bien $L = -1$, este último valor no es posible, dado que la sucesión esta formado solo por términos positivos. Luego se concluye que $L = 2$.

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 1 punto por plantear de manera correcta la afirmación a demostrar, junto con el caso base.
- a) Asignar 2 puntos por utlizar de manera correcta el paso inductivo para probar el crecimiento de la sucesión.
- b) Asignar 1.5 puntos por utilizar de manera correcta el Teorema de las Sucesiones Monótonas para concluir la convergencia.
- b) Asignar 1.5 puntos por calcular de manera correcta el límite pedido.

3. *a*) Para analizar la primera de las series dadas, utilizaremos el Criterio de la Integral, para ello consideramos la función continua y decreciente a cero $f(x) = \dfrac{1}{x ln^3(x)}$ y analizaremos la integral

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^3(x)}.$$

Haciendo un cambio de variable y luego calculando el límite se tiene que

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln^3(x)} = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln^2(r)} - \frac{1}{2\ln^2(2)}\right),$$

de donde se puede verificar que la integral dada es convergente y por lo tanto que la serie tambien lo es.

b) En primer recordemos que dada un serie geométrica, de razón $r < 1$ sabemos que,

$$\sum_{n=0}^\infty r^n = \frac{1}{1-r}.$$

En nuestro caso, consideremos $c > 0$ y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(1+c)^n} = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1+c}},$$

igualando al valor pedido,

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+c}} = 3,$$

se tiene que

$$c = \frac{1}{2}.$$

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 1 punto por verificar las condiciones que permiten utilizar el criterio de la integral, es decir por verificar que la función en cuestión es continua, decreciente y que tiene a cero.
- a) Asignar 1.5 puntos por verificar la convergencia de la integral en cuestión.
- a) Asignar 0.5 puntos por concluir la convergencia de la serie dada.
- b) Asignar 1.5 puntos por reconocer y utilizar de manera correcta la respectiva serie geométrica.
- b) Asignar 1.5 puntos por calcular de manera correcta el valor de c pedido.

4. *a*) Para analizar la convergencia de la primera serie, utlizaremos el criterio de comparación al límite, con la serie convergente de término general $b_n = \dfrac{1}{n^4}$. Notamos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{3n^2+3n+1}{(n^2+n)^3}}{\dfrac{1}{n^4}} = 3.$$

Por lo tanto la serie pedida es convergente.

b) Para la segunda serie, basta que notemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+2\sqrt{n}} = \pm\frac{1}{2} \neq 0,$$

dependiendo si $n = 2k$ o si $n = 2k+1$. Luego la serie es divergente.

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 1.5 puntos por utilizar de manera correcta algún criterio para analizar la convergencia.
- a) Asignar 1.5 puntos por concluir la convergencia de la serie.
- b) Asignar 1.5 puntos por utilizar de manera correcta algún criterio para analizar la convergencia.
- b) Asignar 1.5 puntos por concluir la divergencia de la serie.

5. *a*) Falso, ya que el límite pedido es igual a 8.

b) Falso, ya que la serie de término general $\dfrac{1}{a_n}$ es tal que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty \neq 0$, dado que la serie original al ser convergente verifica que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Tambien es válido considerar un contraejemplo, por ejemplo cualquier serie de la forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

con $p > 1$.

c) Falso, ya que el valor de la integral dada es 0.

Asignación de puntaje:

- Cada pregunta tiene dos puntos. 1 punto por argumentar de manera correcta y punto por afirmar la falsedad en cada caso. El solo afirmar que la pregunta es falsa no entrega puntaje.