PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre 2015

MAT1203 - Álgebra Lineal
Interrogación 3 - miércoles 27 de mayo - solución

1. a) Si A y P son matrices cuadradas de $n \times n$ con P invertible, demuestre que $\operatorname{Det}(PAP^{-1}) = \operatorname{Det}(A)$.

2p

Solución:

$$\operatorname{Det}(PAP^{-1}) = \operatorname{Det}(P)\operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(P^{-1}) = \operatorname{Det}(P)\operatorname{Det}(A)\frac{1}{\operatorname{Det}(P)} = \operatorname{Det}(A).$$

b) Si M es una matriz de $n\times n$, decida justificadamente si $\operatorname{Det}(-M) = -\operatorname{Det}(M)$.

2p

Solución:

Si n es par, $\operatorname{Det}(-M) = (-1)^n \operatorname{Det}(M) = \operatorname{Det}(M)$.

Si n es impar, $\operatorname{Det}(-M) = (-1)^n \operatorname{Det}(M) = -\operatorname{Det}(M)$.

Por lo tanto no siempre es cierto que $\operatorname{Det}(-M) = -\operatorname{Det}(M)$.

también es válido un contraej y decir que es falso

c) Calcule el determinante de la matriz de $n \times n$ dada por $A = (a_{i,j})$ donde

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ 3 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Solución:

La matriz es de la forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & \cdots & 3 & 3 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Haciendo las operaciones: $F_i \to F_i - F_{i+1}$, para $i = 1, \ldots, n-1$ queda:

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Haciendo la operación $F_n \to (1/3)F_n$ queda:

$$= 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (2/3) \end{vmatrix}.$$

Haciendo las operaciones: $F_n \to F_n + F_1$, $F_n \to F_n + 2F_2$, $F_n \to F_n + 3F_3$, $\ldots$, $F_n \to F_n + (n-1)F_{n-1}$ queda:

$$= 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (2/3) + (n-1) \end{vmatrix}.$$

Queda una matriz diagonal, entonces el determinante pedido es:

$3 \cdot (-1)^{n-1} \cdot ((2/3) + (n-1)).$

semidiagonalizar (1p)

resto (1p)

2. Sea T una matriz de 3×3. Demuestre que:

   a) Si $Te_2 = 8e_2$, entonces $\mathrm{Det}(T - 8I) = 0$.

   Solución:

1p Si $Te_2 = 8e_2$, se tiene que $Te_2 - 8e_2 = \vec{0}$.

   Luego $(T - 8I)e_2 = \vec{0}$.

2p Entonces $e_2 \in \mathrm{Ker}(T - 8I)$, como e_2 es no nulo la matriz $(T - 8I)$ es no invertible y su determinante cero.

   b) Si T es antisimétrica, entonces T no es invertible.

   Solución:

1p Si T es antisimétrica, se tiene que $T = -T^t$.

2p Tomando determinante, $\mathrm{Det}(T) = (-1)^3 \,\mathrm{Det}(T^t) = -\mathrm{Det}(T)$.

   Entonces $\mathrm{Det}(T)$ es igual a su inverso aditivo, debe ser cero y T es no invertible.

3. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres.

a) Decida justificadamente si el siguiente conjunto U es un subespacio de V.

$$U = \{p \in V \text{ tal que } p(t) = a + t^2 \text{ con } a \in \mathbb{R}\}.$$

2p

Solución:

U no es un subespacio pues el polinomio constante $q(t) = 0$ no pertenece a U.

b) Encuentre una base del subespacio $W = \{p \in V \text{ tal que } p(-1) = 0\}$.

Solución:

$p \in V$ si $p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ con $a - b + c - d = 0$ y $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1p

Reemplazando $p(t) = a + bt + ct^2 + (a - b + c)t^3$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Luego $p(t) = a(1 + t^3) + b(t - t^3) + c(t^2 + t^3)$.

Un conjunto generador es entonces $(1 + t^3), (t - t^3), (t^2 + t^3)$.

1p

Se prueba que es L.I. para que sea base (escalonando la matriz de sus vectores coordenados respecto a la base canónica):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Sean $B_1 = \{1+t, 1-t, 1+t^2, 1-t^3\}$ y $B_2 = \{1+t^2, 1+t^3, 1+t, 2\}$ bases de V. Encuentre una matriz P cambio de base tal que para todo polinomio p en V se cumpla

$$P[p]_1 = [p]_2.$$

Solución:

Se tiene que:

$(1+t) = 0(1+t^2) + 0(1+t^3) + 1(1+t) + 0(2).$

$(1-t) = 0(1+t^2) + 0(1+t^3) - 1(1+t) + 1(2).$

$(1+t^2) = 1(1+t^2) + 0(1+t^3) + 0(1+t) + 0(2).$

$(1-t^3) = 0(1+t^2) - 1(1+t^3) + 0(1+t) + 1(2).$

Luego la matriz pedida es:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Saber que P es la matriz de vect. coord. de base B1 en términos de base B2 } 1p

cálculos 1p

4. Decida justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si A es una matriz cuadrada, entonces $|A| \neq |\operatorname{adj}(A)|$.

1,5p

Solución:

Falso.

Por ejemplo si A es la matriz identidad I se tiene que $\operatorname{adj}(A) = I$, entonces $|A| = |\operatorname{adj}(A)|$.

b) En el espacio de las funciones reales definidas en el intervalo $[-2, 3]$, las funciones $f(x) = |x|$ y $g(x) = 2x$ son linealmente independientes.

Solución:

Verdadero.

Si fueran linealmente dependientes existen a, b reales no todos nulos tales que $af + bg$ es la función constante cero.

1,5p

Evaluando en -1 queda $a \cdot (1) + b(-2) = 0$.

Evaluando en 1 queda $a \cdot (1) + b(2) = 0$.

Resolviendo queda $a = b = 0$ lo que es una contradicción, por lo tanto las funciones son linealmente independientes.

c) Si V es un espacio vectorial de dimensión 3, entonces hay conjuntos linealmente dependientes en V con menos de 3 elementos.

Solución:

Verdadero.

1,5p

Basta tomar por ejemplo en $\mathbb{R}^3$ el conjunto $\{\vec{0}\}$.

d) Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V, entonces $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V.

Solución:

Verdadero.

Como $\vec{0} \in W_1$ por ser subespacio y $\vec{0} \in W_2$ por ser subespacio, entonces $\vec{0} \in W_1 \cap W_2$, luego es no vacío.

Sean $u, v \in W_1 \cap W_2$. Se tiene que $u + v \in W_1$ por ser subespacio y $u + v \in W_2$ por ser subespacio, entonces $u + v \in W_1 \cap W_2$, luego es cerrado bajo la suma.

Sea $\alpha \in R$ y $u \in W_1 \cap W_2$. Se tiene que $\alpha u \in W_1$ por ser subespacio y $\alpha u \in W_2$ por ser subespacio, entonces $\alpha u \in W_1 \cap W_2$, luego es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

Por lo tanto $W_1 \cap W_2$ es un subespacio.

1p

0,5p