Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

EYP1016 - Introducción a la Estadística

Ayudantía 13: Repaso para I3

Profesora	:	Anita Araneda
Ayudante	:	Pilar Tello
Fecha	:	7 de Junio del 2016

1. Una empresa eléctrica fabrica lámparas que tienen una duración que distribuye Exponencial con media de 800 horas. Calcular la probabilidad aproximada de que el promedio de las duraciones de una muestra aleatoria de 16 lámparas sea menos de 775 horas.

2. Los ingresos de los habitantes de un país distribuyen Uniforme entre 200.000 y 500.000 unidades monetarias. Calcule la probabilidad aproximada de que al seleccionar al azar 100 personas de esta población, la suma de sus ingresos supere los 30.000.000.

3. Considere la siguiente función de probabilidad

x	0	1	2	3
$f(x\|\theta)$	$\frac{2\theta}{3}$	$\frac{\theta}{3}$	$\frac{2(1-\theta)}{3}$	$\frac{1-\theta}{3}$

   Se obtuvieron las siguientes observaciones de manera independiente de dicha distribución:

$$(3, 0, 2, 1, 3, 2, 1, 0, 2, 1)$$

   Determine la función de verosimilitud y encuentre el estimador máximo verosímil de θ.

4. Sea una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de una variable X cuya función de densidad es

$$f_X(x) = e^{-x+\theta},\ x \geq \theta$$

   a) Obtenga el estimador máximo verosímil de θ.
   b) Obtenga el estimador de momentos de θ.
   c) Compare ambos estimadores en términos de sesgo, varianza y error cuadrático medio.

5. Sean $_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes provenientes de una distribución $Uniforme(0, \theta)$. Sea c una constante positiva y considere el estimador

$$\hat{\theta} = c\bar{X}$$

   a) Calcule el error cuadrático medio de $\hat{\theta}$ en función de c.
   b) Encuentre el valor $\hat{c}$ de c que minimice el error cuadrático medio.

6. Suponga que se tiene una muestra aleatoria de tamaño $2n$ de una variable X, con $\mathbb{E}(X) = \mu$ y $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Sean:

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} X_i$$
$$\bar{X}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

   dos estimadores de μ.

a) Demuestre que los dos estimadores son insesgados.

b) Compare ambos estimadores en términos del error cuadrático medio. ¿Qué estimador prefiere?

7. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria proveniente de una distribución Normal con parámetros μ y σ^2. Se demostró que los estimadores de momentos de μ y σ^2 son:

$$\hat{\mu} = \bar{X}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

a) Demuestre que $\hat{\mu}$ es un estimador insesgado para μ pero $\hat{\sigma}^2$ no es un estimador insesgado para σ^2.

b) Proponga un estimador insesgado para σ^2.