Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo Semestre del 2020

Modelos Probabilísticos (EYP1027)
Ayudantía 8

Camilo González Rojas

1. *a*) Se tiene que $Y \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$. Encuentre la función generadora de momentos de Y.

   b) Encuentre la esperanza y varianza de Y.

   c) La distribución Log-normal tiene densidad:

$$f\left(x \mid \mu, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{x}e^{-(\log x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)}, \quad 0 < x < \infty, \quad -\infty < \mu < \infty, \quad \sigma > 0$$

   Si $X \sim \text{Lognormal}\left(\mu, \sigma^2\right)$, encuentre la distribución de $Y = \log(X)$.

   d) Encuentre la esperanza y varianza de X.

2. ¿Puede una distribución tener la siguiente función generadora de momentos?

$$M_X(t) = t/(1-t), |t| < 1?$$

   Si es así encuentre su densidad, si no existe, demuéstrelo.

3. *a*) Encuentre $P(X > \sqrt{Y})$ si X e Y tienen densidad conjunta:

$$f(x, y) = x + y, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$

   b) Encuentre $P\left(X^2 < Y < X\right)$ si X e Y tienen densidad conjunta

$$f(x, y) = 2x, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$

4. Encuentre la función generadora de momentos de:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$$

Solución

1. a) $Y \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$$M_Y(t) = E(\exp\{ty\})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{ty\} \exp\left\{ -\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(y^2 - 2\mu y - 2\sigma^2 t y + \mu^2)}{2\sigma^2} \right\} dy$$

$$y^2 - 2\mu y - 2\sigma^2 t y + \mu^2 = y^2 - 2y(\mu + \sigma^2 t) + \mu^2$$

$$= \left[y - (\mu + \sigma^2 t) \right]^2 - (\mu + \sigma^2 t)^2 + \mu^2$$

$$= \left[y - (\mu + \sigma^2 t) \right]^2 - \left[2\mu\sigma^2 t + (\sigma^2 t)^2 \right]$$

$$M_Y(t) = \exp\left\{ \frac{2\mu\sigma^2 t + (\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2} \right\} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{\left[y - (\mu + \sigma^2 t) \right]^2}{2\sigma^2} \right\} dy}_{1}$$

$$= \exp\left\{ \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} \right\}$$

b) $$E(Y) = \frac{\partial M_Y(t)}{\partial t}\bigg|_{t=0}$$

$$= \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\} \cdot \left(\mu + t\sigma^2\right)\bigg|_{t=0}$$

$$= \exp\{0\}(\mu + 0) = \mu$$

$$E(Y^2) = \frac{\partial^2 M_Y(t)}{\partial t^2}\bigg|_{t=0}$$

$$= \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}\left(\mu + t\sigma^2\right)^2 + \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}\sigma^2\bigg|_{t=0}$$

$$= \mu^2 + \sigma^2$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \mu^2 - \sigma^2 - \mu^2$$

$$= \sigma^2$$

c)

$$f\left(x \mid \mu, \sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{x}e^{-(\log x-\mu)^2/\left(2\sigma^2\right)}, \quad 0<x<\infty, \quad -\infty<\mu<\infty, \quad \sigma>0$$

$$Y = \log(X) \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = e^Y$$

$$X = e^Y$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{\cancel{e^Y}} \exp\left\{ -\frac{(\log e^Y - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\} \cdot \cancel{e^Y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

$$\therefore \quad Y \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$$

d)

$$E(X) = E\left(e^{\log X}\right)$$

$$= E\left(e^Y\right) = M_Y(1)$$

$$= \exp\left\{ \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right\}$$

$$E(X^2) = E(e^{\log X^2})$$
$$= E(e^{2\log X})$$
$$= E(e^{2Y}) = M_Y(2)$$
$$= \exp\{2\mu + 2\sigma^2\}$$

$$Var(X) = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} - \exp\{2\mu + \sigma^2\}$$

2. $M_X(t) = t/(1-t), |t| < 1?$

$$M_X(t) = E(e^{xt})$$
$$M_X(0) = E(e^{x \cdot 0}) = E(e^0) = E(1) = 1$$

Pero

$$M_X(0) = \frac{0}{1-0} = 0$$

$\times$

$\therefore \nexists$ densidad con es fgm

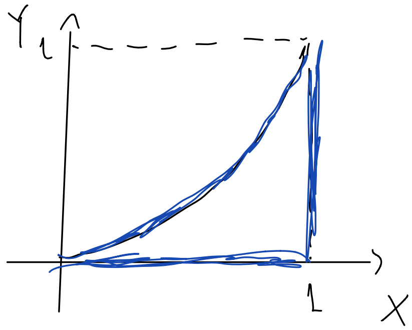
3. *a)* Encuentre $P(X > \sqrt{Y})$ si X e Y tienen densidad conjunta:

$$f(x, y) = x + y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

b) Encuentre $P\left(X^2 < Y < X\right)$ si X e Y tienen densidad conjunta

$$f(x, y) = 2x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

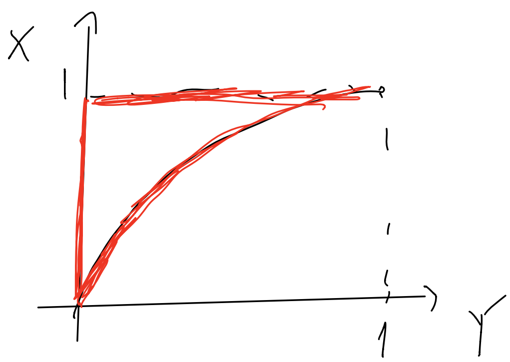
a)



$X^2 > Y$

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} dy\,dx$$

$$=$$



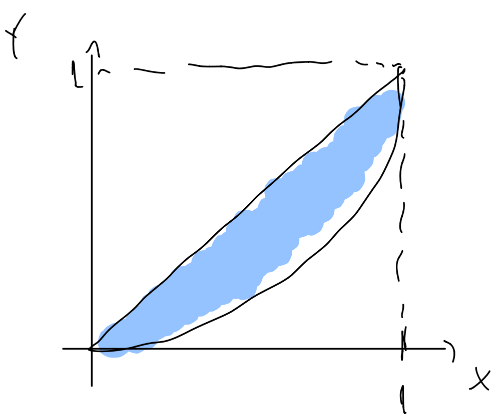
$X > \sqrt{Y}$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 (x+y)\,dx\,dy$$

$$=$$

$$\frac{7}{20}$$

b)



$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} 2x\,dy\,dx$$

$$=$$

$$\int_0^1 \int_{y}^{\sqrt{y}} 2x\,dx\,dy$$

$$=$$

$$\frac{1}{6}$$

4. Encuentre la función generadora de momentos de:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \qquad 0 < x < \infty$$

$$M_X(t) = E\left(e^{xt}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{tx}}{1+x^2}\,dx \qquad e^{tx} > X$$

$$> \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{X}{1+X^2}\,dx \qquad \begin{aligned} u &= 1+x^2 \\ du &= 2x\,dx \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left(\log(u)\right)\Big|_1^\infty$$

diverge

$\therefore \nexists$ la fgm