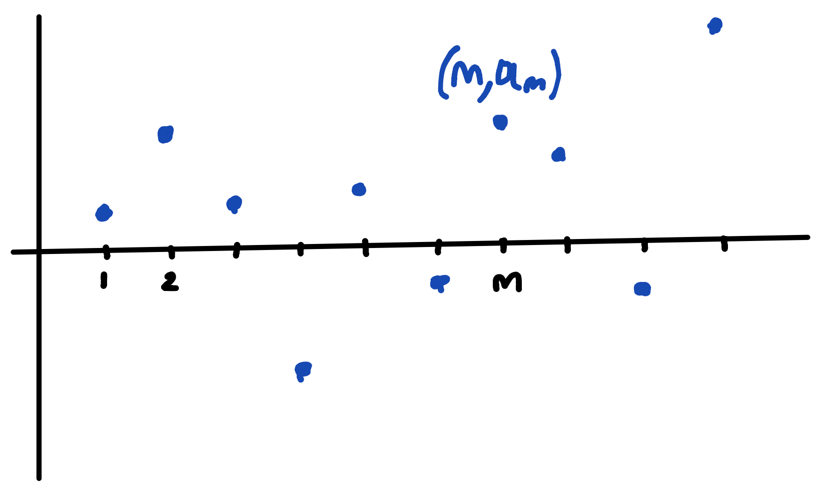
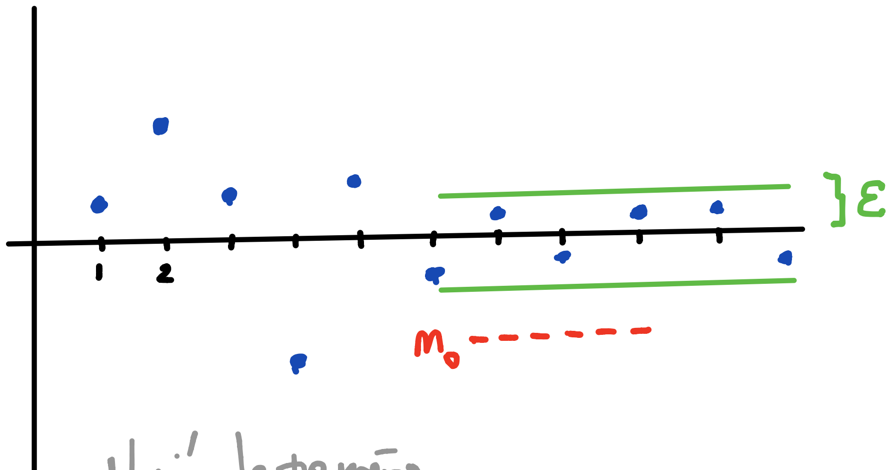
CLASE 24: LÍMITES

- LÍMITE A 0
- SUC. MONÓTONAS Y ACOTADAS

- Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión. Grafiquemos $(a_n)_n$



- ¿Qué significa que esta sucesión se acerque a 0? Equivalentemente ¿Qué significa que se vuelve muy pequeña?



$$\overbrace{\forall \varepsilon > 0}^{\text{Noción de pequeño}}, \ \exists n_0 \geq 1 \ \text{tq}$$

$$\underbrace{-\varepsilon \leq a_n \leq \varepsilon}_{a_n \text{ es pequeño}}, \quad \forall n \geq n_0$$

• <u>DEF</u>: Decimos que una sucesión $(a_n)_n$ <u>converge a 0</u> (o tiende a 0) si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \geq 1 \text{ tal que}$$

$$|a_n| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

- **Notación**: • $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

  • $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

- **Ej**: $a_n = \frac{1}{n}$, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$?

  Sea $\varepsilon>0$. Buscamos $n_0 \geq 1$ tal que

  $$n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$$

  Equivalentemente,

  $$n \geq n_0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

  Basta encontrar $n_0 \geq 1$ tq

  $$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

  Equivalentemente, buscamos $n_0 \geq 1$ tq

  $$n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

En este punto, usamos el principio de Arquímedes:

$\forall R > 0, \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $m > R$

Entonces, basta tomar $m_0 = m$ donde m se obtiene de tomar $R = \frac{1}{\varepsilon}$ en el principio de Arquímedes.

Luego, si $m \geq m_0 \Rightarrow m > R = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{m} < \varepsilon$ $\blacksquare$

- Obs: Podemos tomar $m_0 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$.

- Obs: $a_m \xrightarrow{m \to \infty} 0 \Leftrightarrow |a_m| \xrightarrow{m \to \infty} 0$

- Ej: Sea $|r| < 1$. $r^m \xrightarrow{m \to \infty} 0$?

$r^m \longrightarrow 0 \Leftrightarrow |r^m| \longrightarrow 0 \Leftrightarrow |r|^m \longrightarrow 0$

Podemos suponer $0 \leq r < 1$.

Suponemos $0 < r < 1$ ya que en el caso $r = 0$ no hay nada que demostrar.

Sea $\varepsilon > 0$. Buscamos $n_0 \geq 1$ tal que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow r^n < \varepsilon$$

Equivalentemente, $\frac{1}{r^n} > \frac{1}{\varepsilon}$

Si escribimos $R = \frac{1}{r}$ (>1), buscamos $n_0 \geq 1$ tq $n \geq n_0 \Rightarrow R^n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Escribimos $R = 1 + \alpha$.

$$\Rightarrow R^n = (1+\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k$$

$$\geq 1 + \binom{n}{1}\alpha + \binom{n}{2}\alpha^2$$

$$= 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

$\overset{\alpha>0}{\Longrightarrow}$ $R^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 > \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$

Luego, $R^n > n-1 \Leftarrow \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 > n-1$

$$\Leftarrow \frac{n}{2}\alpha^2 > 1$$

$$\Leftarrow n > \frac{2}{\alpha^2}$$

Usamos el principio de Arquímedes:

$\exists\, m \geq 1$ tq $m > \frac{2}{\alpha^2}$

<u>Hasta acá</u>: si $n \geq m$, entonces

$$R^n > n-1$$

$$\Rightarrow r^n = \frac{1}{R^n} < \frac{1}{n-1}$$

Por el ejemplo anterior, sabemos que $\frac{1}{n-1} \longrightarrow 0$.

Luego, existe $\overline{m}$ tal que

$$n \geq \overline{m} \Rightarrow \frac{1}{n-1} < \varepsilon$$

Luego, si $n \geq m$ y $n \geq \bar{m}$, entonces

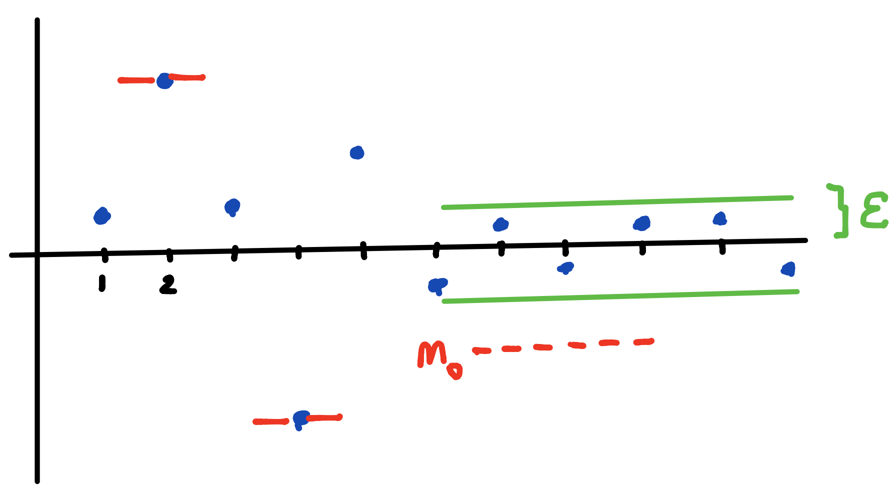
$$r^n < \frac{1}{n-1} < \varepsilon$$

Tomamos $n_0 = \max\{m, \bar{m}\}$:

$$n \geq n_0 \Rightarrow r^n < \varepsilon$$

$\square$

- Obs: Sea $(a_n)_n$ una sucesión que converge a 0. Podemos ver que su recorrido "no es muy grande": sea $\varepsilon > 0$ y $n_0 \geq 1$ tq $|a_n| < \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$



Sea $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$

Luego:

$$|a_n| \leq \begin{cases} M & \text{si } n = 1, \dots, n_0 - 1 \\ \varepsilon & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

Sea $K = \max\{M, \varepsilon\}$. Luego,

$$|a_n| \leq K \ , \ \forall n \geq 1$$

- <u>DEF</u>: Sea $(a_n)_n$ una sucesión. Decimos que:
  - $(a_n)_n$ es <u>acotada superiormente</u> si $\exists K \in \mathbb{R}$ tq $a_n \leq K \ \forall n \geq 1$.
  - $(a_n)_n$ es <u>acotada inferiormente</u> si $\exists K \in \mathbb{R}$ tq $a_n \geq K \ \forall n \geq 1$

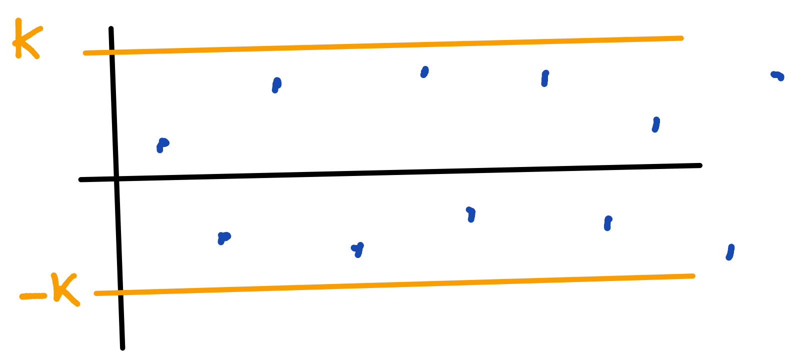
- $(a_n)_n$ es <u>acotada</u> si es acotada inferiormente y superiormente.

- <u>Obs</u>: $(a_n)_n$ es acotada ssi

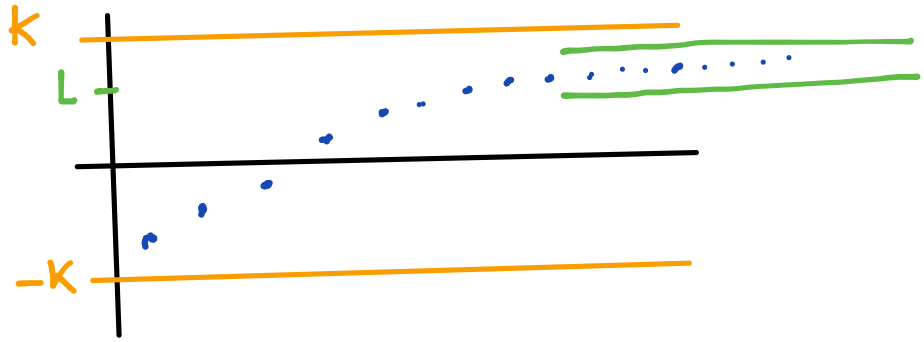
$\exists K>0$ tq $-K \leq a_n \leq K$ $\forall n \geq 1$ ssi

$\exists K>0$ tq $|a_n| \leq K$ $\forall n \geq 1$

- <u>Obs</u>: Sea $(a_n)_n$ acotada



Ahora, supongamos que $(a_n)_n$ es creciente



<u>Próxima clase</u>:

Monótona + acotada $\Longrightarrow$ converge