PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

I1 MAT1203 - Algebra Lineal
Septiembre 8, 2014

1. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

.

a) [**3 pts.**] Determine condiciones sobre los parámetros reales α y β para que el vector b sea combinación lineal de las columnas de la matriz A.

b) [**3 pts.**] En el caso en que b se escriba de manera única como combinación lineal de las columnas de A, determine los coeficientes de tal combinación.

Solución:

a)
- b es combinación lineal de las columnas de A si y sólo si el sistema $Ax = b$ es consistente
- Escalonamos la matriz ampliada del sistema $Ax = b$

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \beta \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftarrow F_3 - \alpha F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2-\alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \beta \end{array}\right] = C$$

El sistema es consistente para los casos:

Caso 1 $\alpha = 0$ **y** $\beta = 0$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y en este caso hay una variable libre y el sistema tiene infinitas soluciones

Caso 2 $\alpha = -1$ **y** $\beta = 0$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y en este caso hay una variable libre y el sistema tiene infinitas soluciones

Caso 3 $\beta = 0$ **y** $\alpha \neq 0$ **y** $\alpha \neq -1$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

El sistema es consistente con solución única.

Caso 4 $\beta \neq 0$ **y** $\alpha \neq 0$ **y** $\alpha + \beta + 1 = 0$

Entonces $\alpha = -\beta - 1 \neq -1$ y

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2-\alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \beta \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftarrow \frac{-F_2}{\alpha^2+\alpha}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{\beta}{\alpha^2+\alpha} \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \beta \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_4 \leftarrow F_4 - F_3\alpha\beta} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{\beta}{\alpha^2+\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & \beta\left(\frac{\beta+\alpha+1}{\alpha+1}\right) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{\beta}{\alpha^2+\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y la solución es única.

Comentario: Si un alumno tiene que el sistema es consistente cuando $\beta = 0$ y α cualquier valor, se asigna , pues cubre 3 de los casos anteriores, más 1 ptso del desarrollo por un total de 2.5 pts.

b) La solución es única para los casos 3) y 4)

Para el caso 3),$\beta = 0$ **y** $\alpha \neq 0$ **y** $\alpha \neq -1$, dividiendo la fila 3 por $\alpha^2 + \alpha$ se obtiene que una escalonada de la matriz ampliada $[A|b]$ es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y entonces la solución es en este caso $\vec{0}$ y los coeficientes para obtener b como combinación lineal de las columnas de A son todos nulos

Para el Caso 4), $\beta \neq 0$ **y** $\alpha \neq 0$ **y** $\alpha + \beta + 1 = 0$ la escalonada de la matriz ampliada $[A|b]$ es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{\beta}{\alpha^2+\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y la solución de $Ax = b$ es entonces $\vec{x} = [\dfrac{\beta}{\alpha^2+\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}, -\dfrac{\beta}{\alpha^2+\alpha}]^T$.

2. *a*) [**3 pts.**] Determine la ecuación cartesiana del plano

$$H = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Gen}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

b) [**3 pts.**] Sean $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^n$ tales que $v_1 - v_2 = v_3$ y $v_2 - v_3 = v_4$. Demuestre que si $\{v_1, v_2\}$ es un conjunto linealmente independiente entonces $\{v_3, v_4\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Solución:

a) Sea $[x, y, z]^T \in H$, entonces

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Igualando componentes obtenemos

$$x = \alpha, \quad y = -1 + 3\beta \quad z = -\alpha + \beta \quad [\mathbf{1{,}0pts}.]$$

De las dos primeras ecuaciones tenemos $\alpha = x$, $\beta = \frac{y+1}{3}$ y reemplazando en la tercera ecuación tenemos la ecuación cartesiana del plano:

$$z = -x + \frac{y+1}{3}$$

b) Sea v_1, v_2 LI tales que i): $v_1 - v_2 = v_3$, ii) $v_2 - v_3 = v_4$. Hay que demostrar que $\alpha v_3 + \beta v_4 = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

De i) y ii) obtenemos $v_4 = v_2 - v_3 = v_2 - (v_1 - v_2) = 2v_2 - v_1$

Entonces

$$\alpha v_3 + \beta v_4 = \alpha(v_1 - v_2) + \beta(2v_2 - v_1) = (\alpha - \beta)v_1 + (2\beta - \alpha)v_2 = \vec{0}$$

Como v_1, v_2 son LI obtenemos que $\alpha - \beta = 0$ y $2\beta - \alpha = 0$, de donde se concluye que $\alpha = \beta = 0$ [**0.5 pts.**]

3. *a*) [**3 pts.**] Sea $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que cumple:

$$T(1,0,0)=(1,0,0)\quad ; \quad T(1,1,0)=(3,1,0) \quad \text{y} \quad T(1,1,1)=(5,-1,2)$$

Determine la matriz estándar de T, es decir, la matriz A que cumple $T(x)=Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Indique si T es inyectiva o si es sobre $\mathbb{R}^3$, justificando su respuesta.

b) [**3 pts.**] Sean A y B matrices de 3×2 tales que la forma escalonada reducida de la matriz $(A|B)$ es

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Determine la matrix X tal que $AX=B$ y la matriz Y tal que $AYC=B$, donde $C=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$,

Solución:

a) La matriz que representa a la transformación T es

$$A=\left[T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \; T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \; T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right]$$

Tenemos:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-T\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Como la matriz tiene forma escalonada con 3 pivotes distintos de cero, la matriz es invertible y por lo tanto la transformación T es 1-1 y sobre.

b) Tenemos que $AX = B$ sii $Ax_i = b_i$, donde x_i, b_i son las columnas i-ésimas de X y B respectivamente. Por lo tanto para resolver X hay que resolver $Ax_1 = b_1$, $Ax_2 = b_2$, $Ax_3 = b_3$ al mismo tiempo. Para ello se escalona la matriz ampliada $[A|B]$ y se escalona, cuyo resultado se entrega en el enunciado.

$$[A|B] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Entonces $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Pero, $AYC = B$ implica $YC = X$

Por lo tanto

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}$$

Pero

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA y justifique su respuesta (El indicar correctamente si es V o F sin una demostración no tiene puntos)

   a) [**1.5 pts.**] Si A y B son matrices invertibles de $n \times n$ entonces $A + B + I$ es invertible.

   b) [**1.5 pts.**] La única matriz A de 2×2 que cumple con $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ es $A = I_2$ (la matriz identidad).

   c) [**1.5 pts.**] La imagen de la recta $x + y = 1$ en el plano XY bajo la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ es un punto en el plano.

   d) [**1.5 pts.**] Si X, Y son matrices de $n \times n$ tales que $YX = X + Y$ entonces $(I - X)^{-1} = I - Y$.

Solución:

a) FALSO: Contraejemplo: $A = -1/2I$, $B = -1/2I$ son invertibles pero $A+B+I = 0$ (la matriz nula) que no es invertible.

   Comentario: Justificaciòn sin contraejemplo, sólo indicando que la suma de matrices invertibles no es invertible necesariamente

b) FALSO

   $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ implica

   $$a + 2b = 1 \quad a + 2b = 1c + 2d = 2 \qquad c + 2d = 2$$

   Entonces $a = 0$, b=1/2, $c = 0$, $d = 1$ cumple las condiciones y $A = \begin{bmatrix} 0 & 31/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ no es la matriz identidad .

   Si escriben directamente un contraejemmplo correcto, sin armar ecuaciones, asignar 1.5 pts.

c) VERDADERO:

   $x + y = 1$ implica $x = 1 - y$ y por lo tanto

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Por lo tanto

   $$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - y \\ y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + yA \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   y la imagen de la recta es el punto $[1, 1]^T$.

d) VERDADERO:

$$(I - X)^{-1} = I - Y \Leftrightarrow (I - Y)(I - X) = I$$

Pero $(I - Y)(I - X) = I - Y - X - YX$, y como $YX = X + Y$, obtenemos que $(I - Y)(I - X) = I$.