Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
TAV 2022

MAT1610-Cálculo I

Interrogación 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso de que exista calcúlelo, en caso contrario justifique porque no existe.

   a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{2x+1}-1}{\sqrt[7]{2x+1}-1}.$$

Solución:

Realizando el cambio de variable $u^{35} = 2x+1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{2x+1}-1}{\sqrt[7]{2x+1}-1} &= \lim_{u\to 1} \frac{u^7-1}{u^5-1} \\ &= \lim_{u\to 1} \frac{(u-1)(u^6+u^5+\cdots+u+1)}{(u-1)(u^5+u^4+\cdots+u+1)} \\ &= \frac{7}{5}. \end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por realizar cambio de variable adecuado (este u otro).
- (1 punto) Por el desarrollo algebraico.
- (1 punto) Por determinar el valor.

b)

$$\lim_{x\to 0} x^4 e^{\operatorname{sen}(x^{-1})}.$$

Solución:

Observe que $-1 \leq \operatorname{sen}\left(x^{-1}\right) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto tenemos que

$$x^4 e^{-1} \leq x^4 e^{\operatorname{sen}(x^{-1})} \leq x^4 e$$

por otra parte tenemos que

$$\lim_{x\to 0} x^4 e^{-1} = \lim_{x\to 0} x^4 e = 0$$

por el teorema del sandwich tenemos que

$$\lim_{x\to 0} x^4 e^{\operatorname{sen}(x^{-1})} = 0.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por acotar adecuadamente la función.
- (1 punto) Por determinar el límite de las cotas e identificar que son iguales.
- (1 punto) Por concluir.

NO HAY PUNATJE SI NO UTILIZA SANDWICH.

2. Determine, justificadamente, todas las asíntotas de la curva

$$y = \frac{\sqrt{4x^2+2}(x-1)}{x^2-1}.$$

Solución:

Observamos primero que la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+2}(x-1)}{x^2-1}$ es continua en $\mathbb{R} - -1, 1$ por lo tanto de existir asíntotas verticales estás deberían ser $x = 1$ o $x = -1$, para determinar si éstas rectas corresponden a asíntotas de la curva dada estudiaremos los siguientes límites:

- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{4x^2+2}(x-1)}{x^2-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, por lo tanto $x = 1$ NO es asíntota.

- $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{4x^2+2}(x-1)}{x^2-1} = +\infty$, por lo que $x=-1$ sí es asíntota de la curva.

Para determinar las asíntotas horizontales observe que:

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}(x-1)}{x^2-1} = 2$, por lo tanto $y=2$ es asíntota.
- $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}(x-1)}{x^2-1} = -2$, por lo que $y=-2$ también es asíntota.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por justificar que los únicos límites que debe estudiar para asíntotas verticales son en -1 y 1 .
- (1 punto) Por determinar el límite en $x=1$ y concluir.
- (1 punto) Por determinar algún límite lateral en $x=-1$ y concluir.
- (1 punto) Por calcular el límite en ∞ y concluir.
- (1 punto) Por calcular el límite en $-\infty$ y concluir.

3. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} & \text{si} \quad x < -2 \\[2ex] \dfrac{ax+b}{x+4} & \text{si} \quad -2 \le x \le 1 \\[2ex] \dfrac{\sin(\pi x)}{x(x-1)} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}$. Justifique.

Solución:

Notemos que por álgebra de funciones continuas $f(x)$ es continua para $x < -2$.

De igual forma, f no tiene problemas en $(-2, 1)$, por lo que es continua.

Para $x > 1$, $f(x)$ resulta ser continua por álgebra de funciones continuas.

Sólo falta verificar continuidad para $x = -2$ y $x = 1$.

Para $x = -2$

a) $f(-2) = \dfrac{b-2a}{2}$ por lo que está bien definida.

b) Para que el límite en $x=-2$ exista se debe cumplir que:

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^-} f(x).$$

Notar que

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x\to -2^-} \frac{(x+2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{x^2-4} = -\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{ax+b}{x+4} = \frac{b-2a}{2},$$

por lo tanto $b-2a=-3$.

c) Con la condición anterior claramente se cumple que:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

.

Para $x=1$

a) $f(1) = \dfrac{a+b}{5}$ por lo que está bien definida.

b) Analogamente para que el límite en $x=1$ exista se debe cumplir que:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x).$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{ax+b}{x+4} = \frac{a+b}{5},$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)}.$$

Para calcular este límite consideremos el cambio de variable $u=x-1$. Entonces, dado que $x\to 1$, se tiene que $u\to 0$. En conclusión, el límite en cuestión se lee:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi(u+1))}{(u+1)u}.$$

Ahora, en vista que, $\sin(\pi(u+1)) = \sin(\pi u)\cos(\pi) + \sin(\pi)\cos(\pi u) = -\sin(\pi u)$, se concluye que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x(x-1)} &= -\lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi u)}{(u+1)u} = -\pi \lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi u)}{\pi u} \cdot \frac{1}{u+1} \\
&= -\pi \left(\lim_{u\to 0} \frac{\sin(\pi u)}{\pi u}\right) \cdot \left(\lim_{u\to 0} \frac{1}{u+1}\right) = -\pi \cdot 1 \cdot 1 = -\pi.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $a+b=-5\pi$.

c) Con la condición anterior claramente se cumple que:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1).$$

Luego debe cumplirse que $a+b=-5\pi$ y $b-2a=-3$, de donde obtenemos que f será continua en todos los reales si
$a=-\dfrac{5\pi}{3}+1$ y $b=-\dfrac{10\pi}{3}-1$.

Puntaje

- (1 Punto) por justificar continuidad en todo $\mathbb{R} \neq -2, 1$.
- (1 Punto) por calcular cada límite lateral en $x=-2$ (suma 2 puntos.)
- (1 Punto) por calcular cada límite lateral en $x=1$ (suma 2 puntos.)
- (1 Punto) por hallar correctamentte ay b.

4. Demuestre que la ecuación $-e^{x^2} = x^3 + x - 5$, tiene al menos dos soluciones en el intervalo $[-3, 3]$. Justifique su respuesta.

Solución:

Consideremos la función:$f(x) = x^3 + x - 5 + e^{x^2}$, en el intervalo $[-3, 3]$. Es claro que $f(x)$ es una función continua, pues es la suma de funciones continuas.

Notar que $f(-2) = -15 + e^4 > 0,\ f(-1) = -7 + e < 0$, luego por Teorema del Valor Intermedio(o teorema de Bolzano), existe $x_0 \in (-2, -1)$ tal que $f(x_0) = 0$,

Si consideramos el intervalo $[-1, 2]$ y dado que $f(-1) = -7+e < 0$ y $f(2) = 4+e^4 > 0$, luego por Teorema del Valor Intermedio (o teorema de Bolzano), existe $x_1 \in (-1, 2)$ tal que $f(x_1) = 0$.

Por lo tanto la ecuación $-e^{x^2} = x^3 + x - 5$, tiene al menos dos raíces en el intervalo $[-3, 3]$.

Puntaje

- (1 Punto) por definir la función f.
- (1 Punto) por justificar continuidad de la función f.
- (1 Punto) por determinar el intervalo $[-2, -1]$(u otro similar donde haya cambio de singno).
- (1 Punto) Por concluir correctamente usando el teorema del valor intermedio que en $(-2, 1)$ hay al menos una raíz.
- (1 Punto) por determinar el intervalo $[-1, 2]$(u otro similar donde haya cambio de signo y sea disjunto al anterior, salvo en los extremos del intervalo).
- (1 Punto) Por concluir correctamente usando el teorema del valor intermedio que en $(-1, 2)$ hay al menos una raíz.