Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2022

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Examen

1. Encontrar el coeficiente de x^n en $(1+x)^{2n}$.

   Solución. Usando el teorema del binomio

$$(1+x)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^{2n-k} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$$

   El coeficiente x^n se obtiene cuando $k = n$. Entonces el coeficiente que acompaña a x^n es

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \, .$$

Puntaje Pregunta 1.

- 3 puntos por usar el teorema del binomio.
- 3 puntos por obtener el coeficiente.

2. Calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{4^k}$.

Solución. Tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}}{4^k} = \sum_{k=1}^{n} 3\frac{3^k}{4^k} = 3\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

Tomando $r = \frac{3}{4}$ se ve que

$$\begin{aligned} 3\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k &= 3\sum_{k=1}^{n} r^k = 3\left[\left[\sum_{k=0}^{n} r^k\right] - 1\right] = 3\left[\frac{1-r^{n+1}}{1-r} - 1\right] \\ &= 3\left[\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} - 1\right] = 3\left[4 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right] \\ &= 9 - 12\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 2.

- 3 puntos por obtener que la suma es igual a $S = 3\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k$.
- 3 puntos por calcular la suma.

3. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4}{n^3-1}-\dfrac{n^3}{n^2+n+1}\right)$.

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{n^4}{n^3-1}-\frac{n^3}{n^2+n+1} &= \frac{n^4(n^2+n+1)-n^3(n^3-1)}{(n^3-1)(n^2+n+1)}\\
&= \frac{n^6+n^5+n^4-n^6+n^3}{n^5+n^4+n^3-n^2-n-1}\\
&= \frac{n^5+n^4+n^4}{n^5+n^4+n^3-n^2-n-1}
\end{aligned}$$

Amplificando por $1/n^5$ vemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+n^4+n^4}{n^5+n^4+n^3-n^2-n-1} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^5+n^4+n^4}{n^5+n^4+n^3-n^2-n-1}\cdot\frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^5}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^4}-\frac{1}{n^5}}=1
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 3.

- 3 puntos por realizar la diferencia y obtener que $\frac{n^4}{n^3-1}-\frac{n^3}{n^2+n+1}=\frac{n^5+n^4+n^4}{n^5+n^4+n^3-n^2-n-1}$
- 3 puntos por calcular el límite.

4. Sea a_n una sucesión que satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \leqslant a_n \leqslant \frac{12n-2}{2n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

Solución. Notemos que

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \cdot \dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 6$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{12n-2}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{12n-2}{2n} \cdot \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{12-\dfrac{2}{n}}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

En virtud del teorema del Sandwich obtenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 6$ y usando el álgebra de límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{6}\,.$$

Puntaje Pregunta 4.

- 2 puntos por obtener los límites de la cota inferior y superior.
- 2 puntos por usar el teorema del sandwich y concluir que el límite de la sucesión es 6.
- 2 puntos por usar el álgebra de límites y concluir que el límite pedido es 1/6.

5. Considere la sucesión definida por:

$$a_1 = 3\,, \qquad a_{n+1} = \frac{1+a_n}{2}\,.$$

a) Pruebe por inducción que $(\forall\, n \in \mathbb{N})(a_n > 1)$

b) Pruebe por inducción que $(\forall\, n \in \mathbb{N})(a_{n+1} < a_n)$

c) Pruebe que a_n es convergente y encuentre su límite.

Solución.

a) Definimos la fórmula proposicional $P(n): \ a_n > 1$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} P(k) &: \qquad a_k > 1 \\ P(k+1) &: \qquad a_{k+1} > 1 \end{aligned}$$

- **Caso base:** P.D: $a_1 > 1$. En efecto, $a_1 = 3$ lo cual es mayor que 1.
- **Paso inductivo:** Supongamos que $P(k)$ es verdadero. P.D: $P(k+1)$ es verdadero. En efecto, usando la definición recursiva vemos que

$$a_{k+1} = \frac{1+a_k}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$$

en donde la desigualdad es consecuencia de la hipótesis inductiva.

Por el principio de inducción matemático concluimos que $P(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Definimos la fórmula proposicional $Q(n): \ a_{n+1} < a_n$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} Q(k) &: \qquad a_{k+1} < a_k \\ Q(k+1) &: \qquad a_{k+2} < a_{k+1} \end{aligned}$$

- **Caso base:** P.D: $P(1)$ es verdadero o equivalentemete que $a_2 < a_1$. En efecto, por la definición recursiva

$$a_2 = \frac{1+a_1}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 < a_1 = 3\,.$$

- **Paso inductivo:** Supongamos que $P(k)$ es verdadero. P.D: $P(k+1)$ es verdadero. En efecto, usando la definición recursiva vemos que

$$a_{k+2} = \frac{1+a_{k+1}}{2} < \frac{1+a_k}{2} = a_{k+1}$$

en donde la desigualdad es consecuencia de la hipótesis inductiva.

Por el principio de inducción matemático concluimos que $Q(n)$ es verdadero para todo $n \in \mathbb{N}$.

c) Como $\{a_n\}$ esta acotada inferiormente (inciso (a)) y es monótona decreciente (inciso (b)) concluimos que la sucesión es convergente. Sea $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Haciendo $n \to \infty$ en la fórmula recursiva se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a_n}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1+\lim_{n\to\infty} a_n}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad L = \frac{1+L}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2L = 1+L \\
&\Longleftrightarrow \quad L = 1.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 5.

- 2 puntos por demostrar que la sucesión es acotada inferiormente.
- 2 puntos por demostrar que la sucesión es monótona decreciente.
- 2 puntos por concluir que el límite existe y vale 1.

6. Use el hecho de que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$ para verificar que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 \right) = 0\,.$$

Solución. Notemos que

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 &= \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\ln(n)} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\ln(n)} \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n) = +\infty$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0$ y usando paso al límite obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 \right) &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\ln(n)} \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \right) \\ &= \ln\left(1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \right) \\ &= \ln(1) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 6.

- 2 puntos por realizar la resta y obtener que $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - 1 = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{\ln(n)}$.
- 2 puntos por concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln(n)} = 0$.
- 2 puntos por concluir que $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$.