PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS.
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.
PRIMER SEMESTRE 2019.

INTERROGACIÓN 2
CALCULO 2 ⋆ MAT1620

La siguiente evaluación consta de 5 preguntas. Dispone de 120 minutos para responderla.

1. *a*) Determine si las siguientes series son absolutamente, condicionalmente convergente o divergentes.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\pi/3)}{k!}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+1}{2k^2+1}\right)^k.$$

   b) Determine la serie de Taylor centrada en $x = \frac{\pi}{2}$ para la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

2. *a*) Considere la gráfica de la función

$$z = 3(x-1)^2 + 2(y+3)^2 + 7.$$

   Determine los puntos P, sobre la gráfica dada, de modo que el plano tangente en P sea perpendicular a la recta de ecuación

$$l(t) = (1, 2, 3) + t(6, 4, -1)$$

   b) Calcule la aproximación lineal de la función $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ en el punto $(2, 1)$. Utilice esto para estimar el valor de $f(1{,}95; 1{,}08)$.

3. Sea f una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Considere $z = f(u^2 + v^2, u/v)$.

   a) Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$.

   b) Calcule $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}$.

4. Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ \\ 0, & \text{si} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Analice la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

c) ¿Es continua, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en $(0,0)$?.

5. Considere la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ donde $a_k = 2^k-(-1)^k$.

a) Determine el intervalo de convergencia para esta serie.

b) Si R es el radio de convergencia de la serie, prueba que para todo $x\in(-R,R)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{3x}{(1-2x)(1+x)}.$$

c) Demuestre que para todo $x\in(-R,R)$ se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}x^{k+1} = -\ln((1+x)\sqrt{1-2x}).$$

Una solución

1. a) Para analizar la convergencia de la primera serie, notamos que

$$\left|\frac{\cos(k\pi/3)}{k!}\right| \leq \frac{1}{k!} = b_k,$$

y como

$$\lim_{k\to\infty} \frac{b_{k+1}}{b_k} = 0,$$

se tiene que $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ es convergente y por lo tanto la serie dada es absolutamente convergente.

Para analizar la segunda serie, utilizaremos el criterio de la raíz, es decir calculamos

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k^2+1}{2k^2+1}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+1}{2k^2+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Luego la serie dada es convergente. Como además es una serie de términos positivos, converge absolutamente.

b) La serie pedida será de la forma,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(\pi/2)}{n!}(x-\pi/2)^n.$$

Calculando las derivadas,

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen}(x) & f^{(1)}(x) &= \cos(x) \\ f^{(2)}(x) &= -\operatorname{sen}(x) & f^{(3)}(x) &= -\cos(x). \end{aligned}$$

de donde evaluando se tiene que,

$$\begin{aligned} f(\pi/2) &= 1, & f^{(1)}(\pi/2) &= 0, \\ f^{(2)}(\pi/2) &= -1, & f^{(3)}(\pi/2) &= 0, \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(2k)}(\pi/2) &= (-1)^k, & f^{(2k+1)}(\pi/2) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la serie de Taylor pedida sería,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}(x-\pi/2)^{2k}.$$

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 2 puntos por el uso correcto de criterios de convergencia para determinar de manera correcta la convergencia de la primera serie.
- a) Asignar 2 puntos por el uso correcto de criterios de convergencia para determinar la convergencia de la segunda serie.
- b) Asignar 2 puntos por presentar de manera correcta la estructura de la serie de Taylor pedida y calcular de manera correcta las respectivas derivadas requeridas.

2. *a*) Los puntos buscados son tales que, el plano tangente debe tener vector normal $(6, 4, -1)$. Por otro lado sabemos que, al ser la gráfica de una función, el vector normal a dicho plano será,

$$(f_x(P), f_y(P), -1),$$

de lo anterior se concluye que

$$(6, 4, -1) = \lambda(6(x-1), 4(y+3), -1), \qquad \text{para algún} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Notamos inmediatamente que $\lambda = 1$ y luego resolviendo se tiene que

$$x = 2, \qquad y = -2.$$

Finalmente como $P = (2, -2, z)$ debe pertenecer a la superficie dada, reemplazamos en $z = f(x, y)$ para obtener

$$z = 12.$$

Es decir existe un punto que satisface lo pedido, a saber $P = (2, -2, 12)$.

b) Sabemos que la aproximación lineal pedida será:

$$L(x, y) = f(2, 1) + f_x(2, 1)(x-2) + f_y(2, 1)(y-1).$$

donde

$$f_x(2, 1) = -\frac{2}{3}, \qquad f_y(2, 1) = -\frac{7}{3}.$$

y por lo tanto,

$$L(x, y) = 3 - \frac{2}{3}(x-2) - \frac{7}{3}(y-1).$$

Luego en el punto pedido se tiene que

$$L(1{,}95; 1,08) = 3 - \frac{2}{3}(-0{,}05) - \frac{7}{3}(0{,}08) = \frac{427}{150}.$$

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 3 puntos por la correcta presentación del vector normal necesario para el plano tangente y el calculo del respectivo punto pedido. Descontar 0,5 si no utiliza el hecho que el vector debe ser un ponderado del vector dado.
- b) Asignar 3 puntos por calcular de manera correcta las derivadas parciales en el punto y la aproximación lineal pedida.

3. Denotaremos

$$x = u^2 + v^2, \qquad y = \frac{u}{v},$$

luego

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = z_x \cdot (2u) + f_y \cdot \left(\frac{1}{v}\right).$$

A continuación,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} &= (z_x)_v \cdot (2u) + z_x \cdot 0 + (z_y)_v \frac{1}{v} - z_y \cdot \frac{1}{v^2}, \\
&= \left(z_{xx} \cdot 2v + z_{xy} \cdot \frac{-u}{v^2}\right) \cdot 2u + \left(z_{yx} \cdot 2v + z_{yy} \cdot \frac{-u}{v^2}\right) \frac{1}{v} - z_y \frac{1}{v^2}, \\
&= z_{xx} \cdot 4uv - z_{xy} \cdot \frac{2u^2}{v^2} + 2z_{yx} - z_{yy} \cdot \frac{u}{v^3} - z_y \frac{1}{v^2}
\end{aligned}$$

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 2 puntos por el correcto calculo de la primera derivada z_u. Descontar 0,5 por cada error parcial.
- b) Asignar 4 puntos por derivadar de manera correcta z_u con respecto a v haciendo uso de la regla de la cadena. Descontar 0,5 por cada error parcial.

4. *a*) Notamos en primer lugar que para $(x,y) \neq (0,0)$ la función es cuociente de funciones continuas y por lo tanto es continua. Para $(x,y) = (0,0)$ debemos calcular el límite,

$$\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = \lim_{\theta\in[0,2\pi],r\to 0} \frac{r^3(\cos^3(\theta))\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^3(\theta)\cos(\theta))}{r^2} = 0.$$

b) Para $(x,y) \neq (0,0)$ podemos derivar utilizar reglas de derivación, con lo cual

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ahora en el punto $(x,y) = (0,0)$, calculamos por definición,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

c) Para analizar la continuidad de la derivada parcial calculada en el item anterior debemos calcular,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 2 puntos por verificar que la función es continua para $(x,y) \neq (0,0)$ y tambien por el calculo del límite necesario para la condición de continuidad.
- b) Asignar 1 punto por calcular de manera correcta la deriva parcial para $(x,y) \neq (0,0)$.
- b) Asignar 1 punto por calcular por definición la derivada parcial en $(0,0)$.
- c) Asignar 2 puntos por calcular de manera correcta el limite necesario para asegurar que la derivada parcial es continua en $(0,0)$.

5. *a*) Para calcular el radio de convergencia, R, hacemos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} = 2,$$

y por lo tanto $R = \frac{1}{2}$. A continuación debemos analizar en los puntos $x = \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$. En ambos caso se obtiene que la serie es divergente. Por lo tanto el intervalo de convergencia de la serie es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Notemos que para $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \frac{1}{1-2x}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}.$$

luego, dentro del intervalo de convergencia podemos sumar y trabajar con las series,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+x} = \frac{3x}{(1-2x)(1+x)}.$$

c) Para $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ podemos integrar la serie dada y la convergencia se mantiene, por lo tanto,

$$\int \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

y en el lado derecho tenemos,

$$\int \left(\frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+x}\right) dx = \frac{-\ln(1-2x)}{2} - \ln(1+x) + C = -\ln((1+x)(\sqrt{1-2x})) + C,$$

Evaluando en $x = 0$ obtenemos que $C = 0$ y se tiene la igualdad pedida.

Asignación de puntaje:

- a) Asignar 2 por calcular de manera correcta el intervalo de convergencia.
- b) Asignar 2 punto por utilizar de manera correcta la representación de las respectivas series geometricas y obtener la igualdad pedida.
- c) Asignar 2 puntos por integrar la igualdad obtenida en b) y verificar lo pedido. (descontar 0.5 si no se calcula la constante respectiva)