Inecuaciones que contienen raíces

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1]Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2]LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

28 de Marzo de 2022

EJEMPLO 1 Resolver la inecuación $\sqrt{x^2+x-2}-2\sqrt{x^2-1}\geqslant 0$.

Solución La inecuación está definida si $x^2+x-2\geqslant 0$ y $x^2-1\geqslant 0$.

I. $x^2+x-2\geqslant 0 \iff x\in]-\infty,-5/2]\cup[1/2.\infty[$
II. $x^2-1\geqslant 0 \iff x\in]-\infty,-1]\cup[1,\infty[$.

De i) y ii) se tiene que la inecuación está definida si $x\in]-\infty,-5/2]\cup[1,\infty[$. Además, se tiene que

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x-2}-2\sqrt{x^2-1}\geqslant 0 \quad &\iff \quad \sqrt{x^2+x-2}\geqslant 2\sqrt{x^2-1}\\ &\iff \quad x^2+x-2\geqslant 4x^2-4\\ &\iff \quad 3x^2-x-2\leqslant 0\\ &\iff \quad x\in[-2/3,1]\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $S=\{1\}$.

EJEMPLO 2 Resolver la inecuación

$$2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x}\,.$$

Solución Notemos que la expresión está definida si $x^2 - 3x \geqslant 0$ lo cual es equivalente a

$$x(x-3) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \geqslant 3 \vee x \leqslant 0\,,$$

entonces cualquier solución deberá cumplir está última condición. Además, $2x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2}$. Si $x > \frac{1}{2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} 2x - 1 > \sqrt{x^2 - 3x} &\Longleftrightarrow (2x-1)^2 > x^2 - 3x \\ &\Longleftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 > x^2 - 3x \\ &\Longleftrightarrow 3x^2 - x + 1 > 0 \end{aligned}$$

Note que el discriminate del término cuadrático es $\triangle = -11 < 0$ por lo que $3x^2 - x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Inecuaciones

Luego la solución para este caso es

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > \frac{1}{2} \wedge (x \geqslant 3 \vee x \leqslant 0)\} =]3, \infty[\,.$$

Si $x \leqslant \frac{1}{2}$, entonces $2x - 1 \leqslant 0$ y por lo tanto $2x - 1 \leqslant \sqrt{x^2 - 3x}$ es decir x no es solución.
Por lo tanto, la solución de esta inecuación es S_1.