Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2024

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 2

1. Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$0 \leqslant \frac{(x^2+4x+6)(x-3)}{(x-4)} \,.$$

Solución. Notemos que el factor (x^2+4x+6) es siempre positivo, pues

$$x^2+4x+6=(x+2)^2+2 \geqslant 2 \,.$$

(También se puede justificar lo anterior notando que se trata de una cuadrática con discriminante $\Delta=-8<0$ y coeficiente principal $a_2=1>0$).

Los puntos críticos son $x=3$ y $x=4$. El primero pertenece al conjunto solución, mientras que el segundo es una restricción.

El conjunto en el que $(x-3)$ y $(x-4)$ tienen igual signo (y por lo tanto su producto es positivo) es $(-\infty,3)\cup(4,+\infty)$.

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es $(-\infty,3]\cup(4,+\infty)$.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 1.

CC 1. 2 puntos por justificar que $x^2+4x+6>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

CC 2. 1 punto por determinar los puntos críticos $x=3$, $x=4$ y la restricción $x\neq 4$.

CC 3. 3 puntos por determinar el conjunto solución de la inecuación.

2. Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$|3x+2| \leqslant |x+1| + |2x+1| \, .$$

Solución.

(i) Primera solución.

Por desigualdad triangular, para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|3x+2| = |(x+1)+(2x+1)| \leq |x+1| + |2x+1|.$$

(ii) Segunda solución

Los puntos críticos son $x = -\frac{2}{3}$, $x = -1$ y $x = -\frac{1}{2}$. Separamos en casos:

- Si $x \leq -1$, la inecuación se simplifica a

$$-(3x+2) \leq -(x+1) - (2x+1).$$

  Note que siempre se cumple la igualdad, por lo que la solución restringida a este caso es $(-\infty, -1]$.

- Si $-1 < x \leq -\frac{2}{3}$, la inecuación se simplifica a

$$-(3x+2) \leq (x+1) - (2x+1) \quad \iff \quad 0 \leq 2x+2.$$

  El conjunto solución de la inecuación anterior es $[-1, +\infty)$. Intersecando con el intervalo $(-1, -\frac{2}{3}]$ de este caso, obtenemos $(-1, -\frac{2}{3}]$.

- Si $-\frac{2}{3} < x \leq -\frac{1}{2}$, la inecuación se simplifica a

$$(3x+2) \leq (x+1) - (2x+1) \quad \iff \quad 4x+2 \leq 0.$$

  El conjunto solución de la inecuación anterior es $(-\infty, -\frac{1}{2}]$. Intersecando con el intervalo $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}]$ de este caso, obtenemos $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}]$.

- Si $-\frac{1}{2} < x$, la inecuación se simplifica a

$$(3x+2) \leq (x+1) + (2x+1).$$

  Note que siempre se cumple la igualdad, por lo que la solución restringida a este caso es $[-\frac{1}{2}, \infty]$.

Uniendo los cuatro casos obtenemos toda la recta real.

<u>Observación:</u> Cualquier otro método que resuelva correctamente la inecuación es válido. Por ejemplo, elevar al cuadrado o usar las propiedades de los valores absolutos.

Criterio de Corrección (CC) Pregunta 2.

CC 1. 6 puntos por justificar que $\mathbb{R}$ es el conjunto solución de la inecuación.