Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
1er. Semestre 2015

MAT1620 ⋆ Cálculo 2
Solución Interrogación 1

1. Dada la curva de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x(t) &= 3t - t^3 \\ y(t) &= 3t^2 \end{aligned}$$

a) Encuentre la(s) ecuación(es) de la recta(s) tangente(s) a la curva en el punto $(0, 9)$.

Solución: Para verificar que el punto $(0, 9)$ pertenece a la curva resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 0 &= 3t - t^3 \\ 9 &= 3t^2 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $t = \pm\sqrt{3}$, ahora para encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes necesitamos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t}{3 - 3t^2}$$

Finalmente la ecuación de la recta tangente a la curva en $(0, 9)$ para $t = \sqrt{3}$ es

$$y = \frac{\sqrt{3}}{4}x + 9$$

y para $t = -\sqrt{3}$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x + 9$$

b) Encuentre el área que se obtiene al rotar la curva con $t \in [0,1]$ en torno al eje-x.

Solución: Usando la formula

$$S = \int_a^b 2\pi y ds$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^1 2\pi(3t^2)\sqrt{(3-3t^2)^2+(6t)^2}dt \\
&= \int_0^1 2\pi(3t^2)\sqrt{9-18t^2+9t^4+36t^2}dt \\
&= \int_0^1 2\pi(3t^2)\sqrt{9+18t^2+9t^4}dt \\
&= \int_0^1 2\pi(3t^2)\sqrt{(3+3t^2)^2}dt \\
&= \int_0^1 2\pi(3t^2)(3+3t^2)dt \\
&= 18\pi \int_0^1 t^2+t^4 dt \\
&= 18\pi \left[\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right]_0^1 \\
&= \frac{48}{5}\pi
\end{aligned}$$

2. *a*) Un resorte tiene un longitud natural de $1m.$ y se necesita una fuerza de $10N$ para estirarlo a una longitud total de $2m$. ¿Cuánto trabajo se necesita para comprimir este resorte desde su longitud natural hasta $60cm.$?(Pista: La ley de hooke dice que el cambio en el largo de un resorte es directamente proporcional a la Fuerza aplicada)

Solución: Por la ley de Hooke tenemos que la función de la fuerza será

$$f(x) = kx$$

donde x representa el cambio en el largo del resorte y como la fuerza necesaria para estirarlo $1m$ es $10N$, tenemos que $k = 10$. Ahora el trabajo para comprimir el resorte en $0,4m$ es

$$\int_0^{0,4} 10x dx = 5x^2|_0^{0,4} = 0,8$$

esto es, el trabajo es $0,8J$.

b) Encuentre el centroide de la región acotada por las curvas $y = x + 2$ e $y = x^2$.

Solución: Primero debemos identificar la región, gráficamente las curvas se ven como muestra la figura 1.

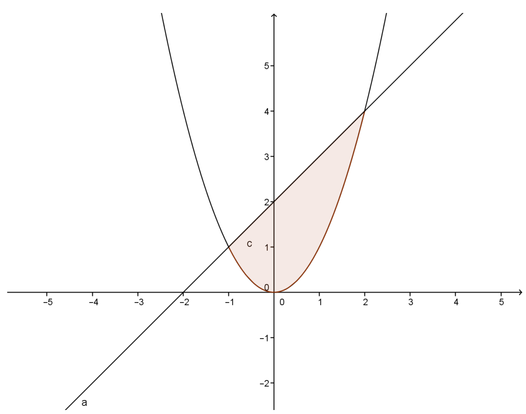

Figura 1:

Los puntos de intersección estan dados por la ecuación.

$$x^2 = x + 2$$

luego las intersecciones están en $x = -1$ y $x = 2$.

Ahora las coordenadas del centroide están dadas por

$$\bar{x} = \frac{\int_{-1}^{2} x\left[(x+2) - (x^2)\right] dx}{\int_{-1}^{2} \left[(x+2) - (x^2)\right] dx} = \frac{\left(\frac{9}{4}\right)}{\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}\left[(x+2)^2 - (x^2)^2\right] dx}{\int_{-1}^{2} \left[(x+2) - (x^2)\right] dx} = \frac{\left(\frac{36}{5}\right)}{\left(\frac{9}{2}\right)} = \frac{72}{45}$$

3. Dada la curva en coordenadas polares de ecuación.

$$r = 3\text{sen}(\theta)$$

a) Haga un esquema del gráfico de la curva con $\theta \in [0, 2\pi]$

Solución: Esta es la ecuación de la circunferencia en coordenadas polares centrada en $\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de radio $\frac{3}{2}$.

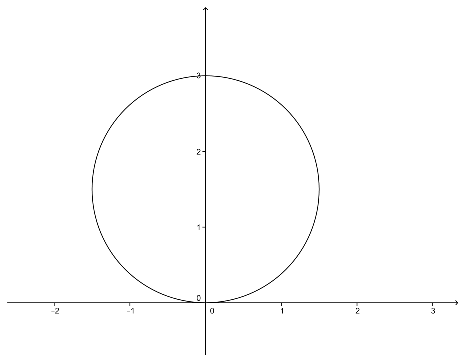

Figura 2:

b) Calcule el largo de la curva con $\theta \in [0, 2\pi]$.

Solución: El largo de curva esta dado por

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\,\text{sen}^2(\theta) + 9\cos^2(\theta)} d\theta = \int_0^{2\pi} 3 d\theta = 6\pi$$

c) Calcule el área interior a esta curva y exterior a la curva $r = 3/2$.

Solución: Gráficamente.

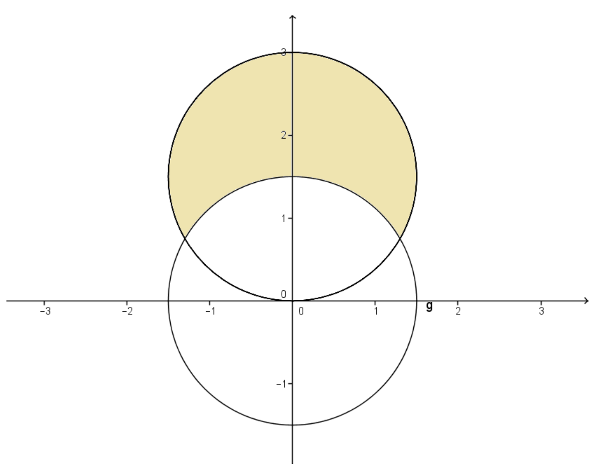

Figura 3:

Los puntos de intersección están dados por $3/2 = 3\text{sen}(\theta)$, luego $\theta_0 = \pi/6$ y $\theta_1 = 5\pi/6$. Finalmente el área será.

$$\frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3\text{sen}(\theta))^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 dx = \frac{9\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

4. Determine cual(es) de las siguientes integrales converge(n).

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$

Solución:

$$\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \int_0^3 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx + \int_1^3 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$$

Como sabemos que $\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ diverge, la integral completa diverge.

b) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx$

Solución:

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{t\to\infty} \int_e^t \frac{1}{x\ln(x)}dx$$

usando la sustitución $u = \ln(x)$, nos queda.

$$\int_e^\infty \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{u\to\infty} \int_1^u \frac{1}{u}du = \int_1^\infty \frac{1}{u}du$$

La integral diverge, pues $\int_1^\infty \dfrac{1}{u}du$ diverge.

c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^{5/2}}dx$

Solución: Esta función tiene una asíntota en $x = 0$, luego debemos separarla como

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^{5/2}}dx = \int_0^1 e^{-x}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^{5/2}}dx + \int_1^\infty e^{-x}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^{5/2}}dx$$

Ahora como $\operatorname{sen}^2(x) \leq 1$ y $e^{-x} \leq 1$ si $x > 0$.

$$e^{-x}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^{5/2}} \leq \frac{1}{x^{5/2}}$$

sabemos que $\int_1^\infty \frac{1}{x^{5/2}}dx$ converge, entonces $\int_1^\infty e^{-x}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^{5/2}}dx$ converge. Ademas $\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} < 1$, Luego

$$e^{-x}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^{5/2}} \leq \frac{1}{x^{1/2}}$$

sabemos que $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ converge, entonces $\int_0^1 e^{-x}\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^{5/2}}dx$ converge. Por lo tanto la integral converge.