Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2020

MAT1610 - Cálculo I
Pauta Control Formativo 3

1. Demuestre, usando nociones de integral definida, que para todo n natural mayor o igual a 1 se cumple que
$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$
Solución:
Sea $n \in \mathbb{N}$. Nótese que $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln(n)$ y considere la función $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $[a, b] = [n, n+1]$, la cual es continua en dicho intervalo. Entonces,
$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \ln(n+1) - \ln(n)$$
Así,
$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx$$
Además, note que f es decreciente en el intervalo, su valor mínimo es $m = \frac{1}{n+1}$ y su valor máximo es $M = \frac{1}{n}$ y $b - a = n + 1 - n = 1$.
Para acotar el valor de la integral se pueden usar varias formas, entre ellas:
Una forma:
Como $m(b-a) \leq \int_n^{n+1} f(x) \leq M(b-a)$, se tiene
$$1 \cdot \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx \leq 1 \cdot \frac{1}{n}$$
Ahora, para demostrar que la desigualdad es estricta, note que f es decreciente en $[n, n+1]$ y para $x \in (a, b)$ se tiene que $\frac{1}{n+1} = f(n+1) < f(x) < f(n) = \frac{1}{n}$ y $n + 1 - n = 1$, es decir,
$\frac{1}{n+1} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx < \int_n^{n+1} f(x)dx < \int_n^{n+1} f(x)dx = \frac{1}{n}$, por lo tanto,
$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} f(x)dx < \frac{1}{n}$$
otra forma:
Considerando $s \in (n, n+1)$
$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = \int_n^{s} \frac{1}{x}dx + \int_s^{n+1} \frac{1}{x}dx$$

Dado que para $x \in [s, n+1]$, $f(x) < \frac{1}{n}$, se tiene que

$$\int_s^{n+1} \frac{1}{x} dx < \int_s^{n+1} \frac{1}{n} dx = (n+1-s)\frac{1}{n}$$

Dado que para $x \in [n, s]$, $f(x) \leq \frac{1}{n}$, se tiene que

$$\int_n^s \frac{1}{x} dx \leq \int_n^s \frac{1}{n} dx = (s-n)\frac{1}{n}$$

Por lo tanto,

$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \int_n^s \frac{1}{x} dx + \int_s^{n+1} \frac{1}{x} dx < (n+1-s)\frac{1}{n} + (s-n)\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

Análogamente, como para $x \in [s, n+1]$ $f(x) \geq \frac{1}{n+1}$, se tiene que

$$\int_s^{n+1} \frac{1}{x} dx \geq \int_s^{n+1} \frac{1}{n+1} dx = (n+1-s)\frac{1}{n+1}$$

y para $x \in [n, s]$ $f(x) > \frac{1}{n+1}$, se tiene que

$$\int_n^s \frac{1}{x} dx > \int_n^s \frac{1}{n+1} dx = (s-n)\frac{1}{n+1}$$

Así,

$$\int_n^{n+1} f(x)dx = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \int_n^s \frac{1}{x} dx + \int_s^{n+1} \frac{1}{x} dx > (n+1-s)\frac{1}{n+1} + (s-n)\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \int_n^s \frac{1}{x} dx + \int_s^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n}$$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por aplicar correctamente propiedad de logaritmo del cociente.
- **(1 punto)** Por escribir la diferencia de logaritmos como en resultado de una integral definida.
- **(1.5 punto)** Por acotar inferiormente la integral definida (desigualdad no estricta)
- **(1.5 punto)** Por acotar superiormente la integral definida (desigualdad no estricta)
- **(1 punto)** Por acotar la integral definida (desigualdad estricta) (Si demeuestra correctamente la desigualdad estricta sin usar la desigualdad no estricta, también se asignan los puntos de los dos items anteriores)

2. Calcule el límite usando nociones de sumas de Riemann e integral definida

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+...+\frac{1}{(n+n)^3}\right).$$

Solución:

Sea $L=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+2)^3}+...+\frac{1}{(n+n)^3}\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^3}+\frac{1}{\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)^3}+...+\frac{1}{\left(n\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)^3}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{n^3\left(1+1\frac{1}{n}\right)^3}+\frac{1}{n^3\left(1+2\frac{1}{n}\right)^3}+...+\frac{1}{n^3\left(1+n\frac{1}{n}\right)^3}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3}\left(\frac{1}{\left(1+1\frac{1}{n}\right)^3}+\frac{1}{\left(1+2\frac{1}{n}\right)^3}+...+\frac{1}{\left(1+n\frac{1}{n}\right)^3}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\left(1+1\frac{1}{n}\right)^3}+\frac{1}{\left(1+2\frac{1}{n}\right)^3}+...+\frac{1}{\left(1+n\frac{1}{n}\right)^3}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+k\frac{1}{n}\right)^3}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+k\frac{1}{n}\right)^3}\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Así, considerando $\Delta x = \frac{1}{n}$ (note que el intervalo de integración debe tener longitud 1) y

Primera opción, $[a,b] = [1,2]$ y $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $x_0^* = 1$, $x_k^* = 1 + k\Delta x = 1 + k\frac{1}{n}$, $1 \leq k \leq n$, $(x_n^* = 2)$, $f(x_k^*) = f(1 + k\Delta x) = \frac{1}{(1+k\Delta x)^3}$. Entonces,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = \int_1^2 \frac{1}{x^3}dx = \left.\frac{1}{-2x^2}\right|_1^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Segunda opción, $[a,b] = [0,1]$ y $f(x) = \frac{1}{(1+x)^3}$, $x_0^* = 0$, $x_k^* = 1 + k\Delta x = k\frac{1}{n}$, $1 \leq k \leq n$, $(x_n^* = 1)$, $f(x_k^*) = f(k\Delta x) = \frac{1}{(1+k\Delta x)^3}$. Entonces,

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^3}dx = \left.\frac{1}{-2(1+x)^2}\right|_0^1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Distribución de puntaje.

- **(1 punto)** Por aplicar procedimiento algebraico correcto para reescribir el límite.
- **(0.75 punto)** Por identificar la función.
- **(0.75 punto)** Por identificar los puntos de prueba.
- **(1 punto)** Por escribir como suma de Riemann.
- **(1 punto)** Por asociar y exhibir integral definida (función específica e intervalo de integración)
- **(1 punto)** Por calcular integral definida (TFC).
- **(0.5 punto)** Por obtener resultado correcto.