Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 4

1. (a) (3pts) Suponga que un familiar dispone de un terreno, en el cual quiere hacer un huerto en forma rectangular. Para evitar que los animales se coman las frutas y verduras que crecerán en él, desea cercarlo. Un lado del terreno colinda con la propiedad de un vecino, por lo que no necesitará cercar ese lado. Además, su familiar también quiere usar material para separar el huerto rectangular en dos secciones (ver Figura 1). El presupuesto con que cuenta su familiar le permite comprar 80 metros de cerca para usar en el perímetro y la sección que dividirá el huerto. Plantee un problema de optimización de **una incógnita**, que le permita a su familiar maximizar el uso del terreno. **No debe** resolver el problema.

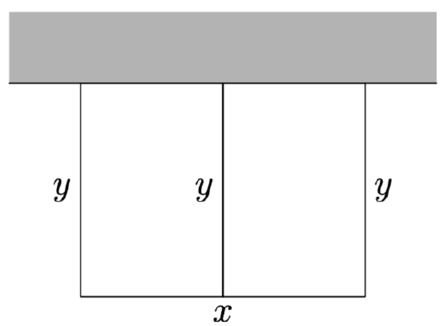


Figura 1: Plano esquemático del huerto y la cerca con división a construir

(b) (3pts) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere la función definida por $f(x) = 3x^2 + \lambda x + 10$. Escriba la función cuadrática en su forma normal y determine el o los valores que puede tomar λ de forma que el valor de mínimo de la función sea -2.

Solución.

(a) De la figura vemos que $80 = 3y + x$. Para utilizar la mayor cantidad de terreno, se debe maximizar el área del huerto, es decir, xy. Despejando x de la primera ecuación, tenemos $x = 80 - 3y$, e insertando en la segunda, encontramos la función a maximizar de una variable (sólo depende de y)

$$A(y) = (80 - 3y)y.$$

Análogamente, despejando y de la primera ecuación e insertando en la segunda, se encuentra la función a maximizar

$$A(x) = \frac{x(80 - x)}{3}.$$

(b) Tenemos

$$f(x) = 3\left(x^2 + \frac{\lambda}{3}x\right) + 10 = 3\left(x + \frac{\lambda}{6}\right)^2 - \frac{\lambda^2}{12} + 10,$$

que corresponde a la forma normal de la función cuadrática. El mínimo de la función se alcanza en $-\frac{\lambda}{6}$, y su valor es $-\frac{\lambda^2}{12}+10$. Luego, para encontrar λ, resolvemos

$$-\frac{\lambda^2}{12}+10=-2 \iff \lambda^2=144 \iff \lambda=\pm 12.$$

Puntaje Pregunta 1.
Respecto a la parte (a)

- 1 punto por obtener la condición $80=3y+x$.
- 1 punto por señalar que se debe maximizar el área $A=xy$.
- 1 punto por escribir el problema de maximización con respecto a una sola de las variables (ya sea en función de x ó de y).

Respecto a la parte (b)

- 1 punto por escribir la función en forma normal.
- 1 punto por encontrar el valor de mínimo (identificar el punto donde el mínimo se alcanza no tiene puntaje).
- 1 punto por obtener $\lambda=\pm 12$ (0.5 puntos por obtener cada valor).

2. Considere la función $r(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x-6}$.

   a) Determine los ceros, signos y la intersección con el eye Y de la función r .

   b) Determine las asíntotas verticales y horizontales (si es que existen) de r.

   c) Trace la gráfica de r.

Solución.

a) Los ceros de r satisfacen $r(x) = 0 \Longleftrightarrow x-1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$. Luego, r tiene un único cero en $x = 1$. Factorizando el numerador vemos que

$$r(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6} = \frac{x-1}{(x-3)(x+2)} \,.$$

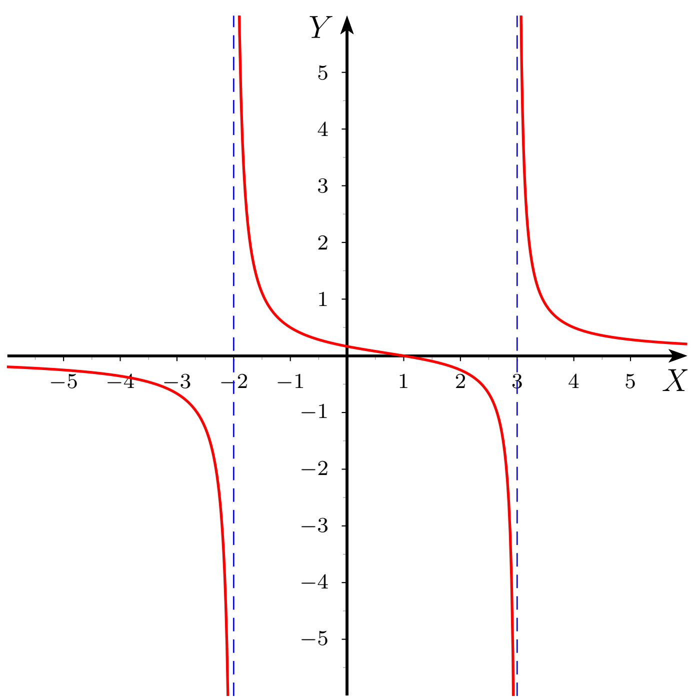
Realizando una tabla de signos se obtienen los signos de la función:

	$-\infty$ a -2	-2 a 1	1 a 3	3 a ∞
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

La intersección con el eje Y ocurre cuando $x = 0 \Longrightarrow y = r(0) = \frac{1}{6}$, entonces la curva $y = r(x)$ corta al eje Y en $(0, \frac{1}{6})$.

b) El grado del numerador de $r(x)$ es menor que el grado del denominador, luego por el teorema de las asíntotas horizontales, el eje X es una asíntota horizontal. Notemos que el denominador es cero cuando $x = 3$ y $x = -2$, luego las rectas $x = 3$ y $x = -2$ son asíntotal verticales de r.

c) El gráfico de la función r se muestra a continuación



Puntaje Pregunta 2.

- 1 punto por realizar la tabla de signos.
- 1 punto por hallar los ceros y la intersección con el eje Y.
- 1 punto por determinar las asíntotas verticales.
- 1 punto por determinar las asíntotas horizontales.
- 2 puntos por trazar la gráfica.