Pontificia Universidad Católica de Chile

Facultad de Matemáticas - Departamento de Estadística

Primer semestre 2017 - Miercoles 12 de Abril de 2017

EYP 1026 MODELOS PROBABILISTICOS - INTERROGACIÓN 1

Profesor: Reinaldo Arellano

Ayudante: Daniel Saavedra

$B \sim \text{Binomial}(n, 1/6)$

1. Se lanzan dos dados honestos en forma simultánea.

   a) Calcule la probabilidad de que los dos dados tengan al menos una coincidencia en n lanzamientos.

   b) ¿Cuántas coincidencias pueden esperarse en 6 lanzamientos?

   c) ¿Cuántos intentos deben esperarse para obtener exactamente una coincidencia?

   d) El experimento se detiene si lo dados coinciden o si ellos suman 7. Si el experimento se detiene al quinto lanzamiento, ¿cuál es la probabilidad de que los dados sumen 7?

2. Sea X una variable aleatoria con función de distribución dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & \text{if} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}, & \text{if} \quad k \leq x < k+1, \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

$\mathbb{P}(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$

   (a) Calcule $\mathrm{P}(X < 1)$ y $\mathrm{P}(X = k)$, $k = 1, 2, \ldots$. Indique la naturaleza de la variable aletoria X.

   (b) Demuestre que la probabilidad condicional dada por $\mathrm{P}(X \geq k + m | X \geq m)$, $m, k = 1, 2, \ldots$, no depende m.

Nota: $\sum_{k=1}^{\infty} a\alpha^k = \frac{a\alpha}{1-\alpha}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} ak\alpha^k = \frac{a\alpha}{(1-\alpha)^2}$, $|\alpha| < 1$.

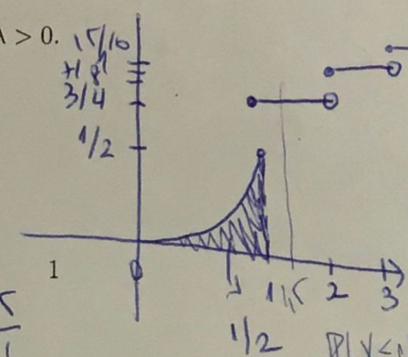
3. Sea X el tiempo de reparación (en horas) de un cierto artículo. Suponga que X sigue una distribución de probabilidad con densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{si } x > 0; \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

   a) El factor de depreciación Y se define por $Y = e^{-aX}$, $(a > 0)$. Calcule la esperanza y varianza de Y.

   b) El costo de reparación de un artículo es $cX + Z$, donde la constante c es un costo por unidad de tiempo y la variable aleatoria Z toma los valores z_1 y z_2 con probabilidad p y $1 - p$, respectivamente. Calcule el costo de reparación esperado.

Nota: Recuerde que $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$, $\alpha, \lambda > 0$.



$\mathbb{P}(X \geq m) = \left(\frac{1}{2}\right)^m$

$\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$\frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

$E(Y) = \frac{\Gamma(3)}{(a+1)^3}$

$E(Y^2) = \frac{\Gamma(3)}{(2a+1)^3}$

$\mathbb{P}(X \leq 1{,}5)$

$\mathbb{P}(X \geq 1{,}5) = 1 - \mathbb{P}(X < 1{,}5)$

$= 1 - \mathbb{P}$

1. Experimento: lanzar 2 dados honestos

$\Omega = \{(i,j) \text{ con } i,j \in \{1,2,\dots,6\}\}$

a. Calcular prob. de que ambos dados tengan al menos una coincidencia en n lanzamientos.

Calculemos la prob. de que ambos dados tengan una coincidencia en 1 lanzamiento.

$A = \{(i,i) \text{ con } i \in \{1,2,\dots,6\}\} \Rightarrow |A| = 6$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{6\times 6} = \frac{1}{6}$$

equiprobable

Princ. multiplicativo

(*) $n(\Omega) = |\{i : i \in \{1,2,\dots,6\}\}|^2 = 6^2$

Suponiendo independencia entre lanzamientos, luego

~~B = "tener una coin~~

B = "número de coincidencias en n lanzamientos"

$B \sim \text{Binomial}(n=n,\ p=1/6)$

Nos piden $\mathbb{P}(B>1) = 1 - \mathbb{P}(B \leq 1)$

pues el soporte de B es $\{0,1,2,\dots,n\}$

$$= 1 - \mathbb{P}(B=0) - \mathbb{P}(B=1)$$

$$= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{1}\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^0}_{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n} - \underbrace{\binom{n}{1}}_{n}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

$$= 1 - \frac{5}{6} - n\frac{1}{6}$$

$$= 1 - \frac{5}{6} - \frac{n}{6} = \frac{6-5-n}{6} = \frac{1-n}{6}$$

Nos piden

$$\mathbb{P}(B\geq 1) = 1 - \mathbb{P}(B<1)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(B=0) \quad \text{pues soporte}(B)=\{0,1,\dots,n\}$$
$$= 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{1}\underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^{0}}_{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-0}$$
$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$
$$= \boxed{1 - \frac{5^n}{6^n}}$$

1,5/

b. Coincidencias esperadas en 6 lanzamientos.

Sea Y = "número de coincidencias en 6 lanzamientos"

$$Y \sim \text{Binomial}(n=6, p=1/6)$$

Luego

$$\mathbb{E}(Y) = n\cdot p = 6\cdot\frac{1}{6} = 1$$

1,5/

∴ Se espera 1 coincidencia en 6 lanzamientos.

c. Intentos hasta exactamente 1 coincidencia.

En el caso anterior, ya vimos que en 6 lanzamientos esperaríamos 1 coincidencia.

De otra manera, ~~con~~ B definida anteriormente queremos

$$\mathbb{E}(B) = n\cdot p = 1$$

1,5

$$= n\cdot\frac{1}{6} = 1 \Rightarrow \boxed{n=6}$$

Necesito 6 lanzamientos,,

E(B) depende de n y si la defino como arriba ese n ya está definido.

d. Experimento se detiene si los dados coinciden o suman 8.
Si se detiene al quinto lanzamiento ¿Cuál es la prob. de que los dados sumen 7?

① C = "el experimento se detiene"
$= \{(1,1),(2,2),\dots,(6,6),(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$
$\Rightarrow n(C) = 12.$

C_5 = "el experimento se detiene al 5to lanzamiento"
~~Suponga~~ S = "los dados suman 7 en el quinto lanzamiento"

Nos piden $\mathbb{P}(S|C_5)$
Como supusimos lanzamientos independientes
$$\mathbb{P}(S|C_5) = \mathbb{P}(S|C)$$

~~Nosotros ...~~

$$\mathbb{P}(S|C) = \frac{\mathbb{P}(S\cap C)}{\mathbb{P}(C)}$$

$\mathbb{P}(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ equiprobable

$\mathbb{P}(S\cap C) = \mathbb{P}(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\})$

eventos equiprobables $= \frac{n(S\cap C)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Luego $\boxed{\mathbb{P}(S|C) = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}}$

1,5

Manera ②:

Nos piden $\mathbb{P}(S|C_S)$

$$\mathbb{P}(S) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

equiprobable.

$P(S \cap C_S)$

$$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}(C_S) = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \rightarrow X = \text{n° de lanzamientos hasta detenerse"}$$

$X \sim Geom(p = 1/3)$

$$P(S \cap C_S) = \mathbb{P}(C_S|S) \cdot \mathbb{P}(S)$$

$$\mathbb{P}(S|C_S) = \frac{\mathbb{P}\overbrace{(C_S|S)}^{1} \cdot \mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(C_S)}$$

$$= \frac{1/6}{\left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{2^5}{3^4}} = \boxed{\frac{3^4}{2^5}}$$

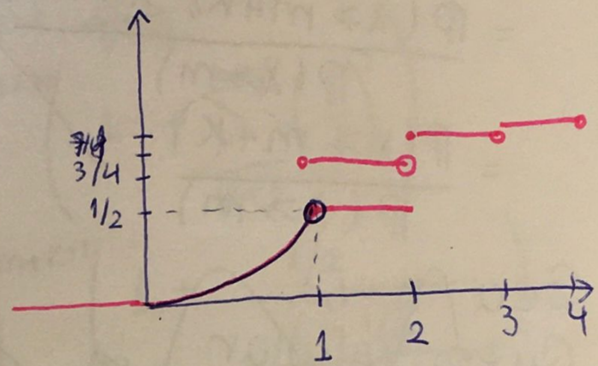
No supuse lanzamientos independientes.

$\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2+1} = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

2. X v.a. con

$$F_X(x) \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x^2/2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} & \text{si } k \le x < k+1 \quad k=1,2,\dots \end{cases}$$

a. Calcular $\mathbb{P}(X<1)$ y $\mathbb{P}(X=k)$



$$\mathbb{P}(X<1) = \cancel{F_X(1) - \mathbb{P}(X=1)}$$
$$= F_X(1) - \mathbb{P}(X=1)$$

como $F_X(1^-) = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$

y $F_X(1) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\mathbb{P}(X=1) = F_X(1) - F_X(1^-) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \mathbb{P}(X<1) = F_X(1) - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

3,5

Ya sabemos $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{4}$

Sea $k = \{1,2,3,4,\dots\}$

$$F_X(k^-) = F_X(k-1) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$$

$$F_X(k) = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$$

$$\mathbb{P}(X=k) = F_X(k) - F_X(k^-)$$
$$= \cancel{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} - \cancel{\frac{1}{2}} - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \cancel{\sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}} - \cancel{\sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} \quad k=1,2,\dots$$

luego X es una v.a. mixta
puesto que es continua hasta el $x=1$
y luego es discreta $(\mathbb{P}(X=k)\neq 0 \ \forall k=1,2,\dots)$ //

b. Demostrar

$$\mathbb{P}(X \geq k+m \mid X \geq m) \quad m, k = 1, 2, \dots \quad \text{no depende } m.$$

$$\mathbb{P}(X \geq m+k \mid X \geq m)$$
$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq m+k,\ X \geq m)}{\mathbb{P}(X \geq m)} \qquad \text{como } \{X \geq m+k\} \subseteq \{X \geq m\}$$

$m \qquad m+k$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq m+k)}{\mathbb{P}(X \geq m)}$$

Sea $n = 1, 2, \dots$
Quiero calcular
$$\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{x=n}^{\infty} \mathbb{P}(X=x) \quad \text{como } n = 1, 2, \dots$$
$$= \sum_{x=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$
$$= \sum_{x=n}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)$$

1) $$\mathbb{P}(X \geq m) = \sum_{x=m}^{\infty} \mathbb{P}(X=x) = \sum_{x=m}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m} \sum_{x=m}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$$

$y = x - m$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{y}$$

$\boxed{y=0}$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{y}$$

Por la nota: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot \alpha^{k} = \frac{a\alpha}{1-\alpha}$

$a = 1$
$\alpha = 1/2$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \underbrace{\left(\frac{1/2}{1 - 1/2}\right)}_{1}$$
$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m}$$

Similarmente

$$\mathbb{P}(X \geq m+k) = \sum_{x=m+k}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+k+1} \sum_{x=m+k}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-(m+k)}$$

$$\boxed{y = x - m+k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+k+1} \sum_{y=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{y}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+k+1} \left(1 + \sum_{y=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{y}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+k+1} \left(1 + \underbrace{\frac{1/2}{1-1/2}}_{1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+k+1} \cdot 2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+k}$$

$$\therefore \mathbb{P}(X \geq k+m \mid X \geq m) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m+k}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{m}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \text{ no depende de } m$$

3

3. X = "tpo de reporación de un artículo"

$$f_X(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x>0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

a. $Y = e^{-aX}$, $a>0$

Nota: $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$ $\alpha, \lambda > 0$ (*)

$$E(X) = \int_0^\infty x \cdot f_X(x) dx = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx$$

$$\overset{(*)}{\underset{\text{con } \alpha=3,\ \lambda=1}{=}} \frac{\Gamma(3)}{1^3} = \Gamma(3) //$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \cdot f_X(x) dx = \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$$

$$\overset{(*)}{\underset{\text{con } \alpha=4,\ \lambda=1}{=}} \frac{\Gamma(4)}{1^4} = \Gamma(4)$$

$Var(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)$
$= \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}$
$= \mathbb{E}(X^2) - 2(\mathbb{E}(X))^2 + (\mathbb{E}(X$
$= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

$$\therefore Var(X) = \Gamma(4) - (\Gamma(3))^2 //$$

Pero no pedían eso...

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty e^{-ax} f_X(x) dx = \int_0^\infty e^{-ax} \cdot x^2 \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x(a+1)} dx$$

$$\overset{(*)}{\underset{\text{con } \alpha=3,\ \lambda=a+1>0}{=}} \frac{\Gamma(3)}{(a+1)^3} //$$

$$E(Y^2) = \int_0^\infty e^{-2ax} f_X(x) dx = \int_0^\infty e^{-2ax} \cdot x^2 \cdot e^{-x} dx = \int_0^\infty x^2 \cdot e^{-x(1+2a)} dx$$

$$\overset{(*)}{\underset{\text{con } \alpha=3,\ \lambda=1+2a>0}{=}} \frac{\Gamma(3)}{(1+2a)^3}$$

$\therefore \operatorname{Var}(Y) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

$$= \frac{\Gamma(3)}{(1+2a)^3} - \left(\frac{\Gamma(3)}{(a+1)^3}\right)^2 \;//$$

b. $R =$ "costo de reparación"

$R = cX + Z$ $\quad$ c cte. y $\cancel{Z \sim \text{Bernoulli}(p)}$

$\mathbb{P}(Z = z_1) = p$

$\mathbb{P}(Z = z_2) = 1 - p.$

Me piden $\mathbb{E}(R)$, como esperanza es lineal,

$$\mathbb{E}(R) = c \cdot \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Z)$$

lo hice antes $= c \cdot \Gamma(3) + \mathbb{E}(Z)$

$$= c \cdot \Gamma(3) + z_1 \cdot p + z_2(1-p) \;//$$

Pontificia Universidad Católica de Chile

Facultad de Matemáticas - Departamento de Estadística

Primer semestre 2017 - Miercoles 12 de Abril de 2017

EYP 1026 MODELOS PROBABILISTICOS - INTERROGACIÓN 2

Profesor: Reinaldo Arellano

Ayudante: Daniel Saavedra

1. Calcule $F_X(x)$, $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$ en los siguientes casos:

   a) (3 ptos) X tiene función de probabilidad dada por

   $$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\binom{2}{x}, & x = 0, 1, 2, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

   b) (3 ptos) X tiene función de densidad dada por

   $$f_X(x) = \begin{cases} |x|, & |x| < 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

$\int_0^\infty P(X>x)\,dx$

$\int_0^\infty 1-F_X(x)\,dx$

2. Considere la función definidad por

   $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - pe^{-x}, & x \geq 0, \end{cases}$$

   donde $0 < p \leq 1$.

$F(0) = 1 - p$

F

$= \int_0^\infty p\, e^{-x}\,dx$

$= p \int_0^\infty e^{-x}\,dx$

$= p$

límite.
= extremos(2)
— continuidad.

   a) Demuestre que $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, es una FDA. (2 ptos)

   b) Si X tiene FDA $F(x)$, calcule $\mathrm{P}(X = 0)$ y $P(X > 0)$. (2 ptos)

   c) Clasifique la variable aleatoria X, y calcule su esperanza. (2 ptos)

3. Sea X una variable aleatoria con densidad dada por:

   $$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, & x < 0, \\ \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

   a) Obtenga la función generadora de momentos de X. (2 ptos) ¿Soporte de $M_X(t)$?

   b) Calcule $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$. (2 ptos)

   c) Sea $Y = |X|$. Determine $f_Y(y)$, $\mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$. (2 ptos)

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

$M_X(t) = \frac{t}{t^2-1}$

$= -xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx$

$\frac{1}{(t+1)(1-t)} = \frac{1}{1-t^2}$

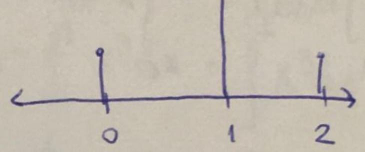
1. Calcule $F_X(x)$, $E(X)$ y $Var(X)$:

a. X tiene f.p. dada por

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\binom{2}{x} & x = 0,1,2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$p_X(0) = \frac{1}{4}\binom{2}{0} = \frac{1}{4}$, $p_X(1) = \frac{1}{4}\cdot\binom{2}{1} = \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2}$, $p_X(2) = \frac{1}{4}\cdot\binom{2}{2} = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}$

$$p_X(x) \begin{cases} 1/4 & \text{si } x = 0,2 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$



$Rec(X) = \{0,1,2\}$

Luego, si $x<0$ $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0$

$F_X(0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \mathbb{P}(X=0) = 1/4$

$F_X(1) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 1/4 + 1/2 = 3/4$

$F_X(2) = \mathbb{P}(X \leq 2) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = 1/4 + 1/2 + 1/4 = 1$

Como X discreto, $F_X(x)$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

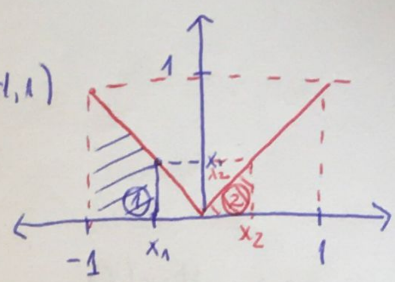
$E(X) = 0\cdot p_X(0) + 1\cdot p_X(1) + 2\cdot p_X(2) = 0 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$E(X^2) = 0^2\cdot p_X(0) + 1^2\cdot p_X(1) + 2^2\cdot p_X(2) = 0 + \frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

Luego, $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

b. X tiene función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad Rec(X) = (-1,1)$$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{x} f_X(x)\,dx$$

Si $x_1 \in (-1,0)$ $\cancel{F_X(x) = \int_{-1}^{x} |x|\,dx = \int_{-1}^{x} -x\,dx = \int_{x}^{-1} x\,dx =}$

$$F_X(x_1) = \int_{-1}^{x_1} f_X(x)\,dx = \text{Área}(①) = \frac{1}{2} - \frac{x_1^2}{2} = \frac{1 - x_1^2}{2}$$

Si $x = 0$ $F_X(0) = \int_{-1}^{0} |x|\,dx = -\int_{-1}^{0} x\,dx = \int_{0}^{-1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{-1} = \frac{1}{2}$

si $x_2 \in (0,1)$

$$\begin{aligned} F_X(x_2) = \mathbb{P}(X \leq x_2) &= \mathbb{P}(X \leq 0) + \mathbb{P}(X \in (0, x_2)) \\ &= F_X(0) + \text{Area}(②) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x_2^2}{2} = \frac{x_2^2 + 1}{2} \end{aligned}$$

Luego $F_X(x)$ $\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1 - x^2}{2} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1 + x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

simetría de $|x|$

$\cancel{E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} |x|\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{1} x\,dx = 2 \cdot \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = 1}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} |x| \cdot x\,dx = -\int_{-1}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx$$

$$= \int_{0}^{-1} x^2\,dx + \int_{0}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{-1} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^{1}$$

$$= -\frac{1}{3} - 0 + \frac{1}{3} - 0 = \cancel{\tfrac{2}{3}}\ 0$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left((X-0)^2\right) = \mathbb{E}(X^2) \qquad \boxed{\mathbb{E}(X) = 0}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot |x|\,dx = -\int_{-1}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx$$

$$= \int_{0}^{-1} x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^{-1} + \frac{x^4}{4}\Big|_0^{1}$$

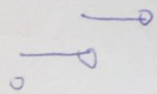
$$= \frac{(-1)^4}{4} - 0 + \frac{1^4}{4} + -0$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2} = \mathrm{Var}(X)}$$

6/6

2. Considerar $p \in (0,1)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - p \cdot e^{-x} & , x \geq 0 \end{cases}$$



a. Demoshar que $F(x)$ es f.d.a.

1. i) • $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} 0 = 0$ ✓

• $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 - p \cdot e^{-x}) = 1 - p \cdot \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 1 - p \cdot 0$
$= 1.$ ✓

ii) Es fácil ver que F continua (en particular por la derecha) en $x < 0$ y $x > 0$.

$\lim_{x \to 0^+} F(0) = \lim_{x \to 0^+} (1 - p \cdot e^{-x}) = 1 - p \cdot \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1 - p \cdot e^0$
$= 1 - p$
$= F(0)$ ✓

$\therefore$ F continua por la derecha.

iii) • F cte entre $(-\infty, 0)$

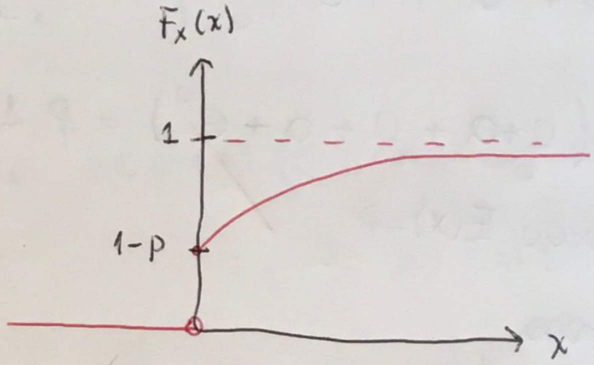
• $0 = F(x) < F(0) = 1 - p \quad \forall x < 0.$

• $\frac{dF(x)}{dx} = -p \cdot e^{-x} \cdot (-1) = \underbrace{p}_{>0} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0} \geq 0 \rightarrow F(x)$ creciente si $x \geq 0$.

Luego $F(x)$ es no-decreciente y como $F(0) = 0 \leq F(x) \; \forall x \geq 0$.
y $F(x) = 0 \quad \forall x < 0$
$\Rightarrow F(x) \geq 0 \quad \forall x.$

Luego F no-negativo y no decreciente.

Como cumple i), ii) y iii), es función de distribución acumulada para una v.a. X.



b. X tiene f.d.a F(x)
Calcular $\mathbb{P}(X=0)$ y $\mathbb{P}(X>0)$

- $\mathbb{P}(X=0) = F_X(0) - F_X(0^-)$
$= 1-p-0 = \boxed{1-p} \neq 0$

- $\mathbb{P}(X>0) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0)$
$= 1 - \mathbb{P}(X=0) - \mathbb{P}(X<0)$
$= 1-(1-p) - F_X(0^-) = 1-(1-p)-0$
$\boxed{\mathbb{P}(X>0) = p}$

c. Clasifique v.a. X y calcule su esperanza.
como $\mathbb{P}(X=0) = 1-p \neq 0 \rightarrow$ X no es continua.
como ~~F(x)~~ X tiene recorrido $[0,\infty)$ (no numerable)
↳ X no es discreta.

Notemos que es discreta en $X \leq 0$ y continua en $X>0$
$\Rightarrow$ X es v.a. mixta.

$$E(X) = 0 \cdot \underset{\substack{\shortparallel \\ 1-p}}{\mathbb{P}(X=0)} + \int_0^\infty x f_X(x)\,dx$$

donde $f_X(x) = \dfrac{\partial F_X(x)}{\partial x} = \dfrac{\partial (1-p\cdot e^{-x})}{\partial x} = -p\cdot e^{-x}\cdot -1 = p\,e^{-x}$ $x>0$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = 0 + \int_0^\infty x\cdot p\cdot e^{-x}dx = p\cdot \underbrace{\int_0^\infty \underset{\substack{\downarrow\\ u}}{x}\,\underset{\substack{\downarrow\\ dv}}{e^{-x}dx}}_{\text{esperanza de exp(1)} = \frac{1}{1}} = p\left(-xe^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}dx\right)$$

$u = x \quad du = 1$
$v = -e^{-x} \quad dv = e^{-x}$

$\lim_{x\to\infty} x e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0.$

$= p\left(-0 + \alpha + -e^{-x}\Big|_0^{\infty}\right)$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} -e^{-x} = 0.$

$= p\cdot\left(0+\alpha+0+0+e^0\right) = p\cdot 1 = p.$ Bien 6/6

Luego $\mathbb{E}(X) = p.$

2) ~~De otra~~

3. X v.a. con f.d dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{2} & x<0 \\ \dfrac{e^{-x}}{2} & x\geq 0 \end{cases}$$

a. Obtener f.g.m de X y su soporte.

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{tx}\cdot\frac{e^x}{2}\,dx + \int_0^{\infty} e^{tx}\cdot\frac{e^{-x}}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{0} e^{\overbrace{x(t+1)}^{>0}}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{x(t-1)}\,dx$$ donde $t \neq \{1,-1\}$ (me daría $\int_0^{\infty} e^0\,dx = \infty$ (diverge))

$t\in(-1,1)$, $-1<t<1$: $$= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{x(t+1)}}{t+1}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\overbrace{x(t-1)}^{<0}}}{t-1}\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - 0\right) + \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{t-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2t+2} - \frac{1}{2t-2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cancel{t}-1-\cancel{t}-1}{t^2-1}\right) = \cancel{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2-1}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{-2}^{\,1}}{(t+1)(t-1)} \quad \cancel{= \frac{t}{t^2-1}}$$

∴ ~~$M_X(t) = \frac{t}{t^2-1}$ para $t\in(-1,1)$ (o si no, algunos límites no existen).~~

$$= \frac{1}{(t+1)(1-t)} = \frac{1}{1-t^2}$$

b. ~~Calcular $\mathbb{E}(X)$ y $Var(X)$~~

Luego $M_X(t)$ es $\dfrac{1}{1-t^2}$ para $t \in (-1,1)$ (o si no, algunos límites no existen).

b. Calcular $E(X)$ y $Var(X)$.

- $E(X) = \dfrac{d}{dt} M_X(t) \Big|_{t=0} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{1-t^2}\right)\Big|_{t=0} = \dfrac{+2t\,\cancel{\cdot 1}}{(1-t^2)^2}\Big|_{t=0} = \dfrac{2t}{(1-t^2)^2}\Big|_{t=0}$
$= 0$

- $\mathbb{E}(x^2)$

~~$Var(X)$~~ $= \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{1-t^2}\right)\right)\Big|_{t=0} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{2t}{(1-t^2)^2}\right)\Big|_{t=0}$

$= \dfrac{2\cdot(1-t^2)^2 - 2t\cdot 2(1-t^2)(-2t)}{(1-t^2)^4}\Big|_{t=0}$

$= \dfrac{2\cdot(1-t^2)^2 + 8t^2(1-t^2)}{(1-t^2)^4}\Big|_{t=0}$

$= \dfrac{2+8\cdot 0}{1} = 2$ //

$\therefore$ $\mathbb{E}(X) = 0$. ~~$Var(X) = 2$~~ y $Var(X) = \mathbb{E}(x^2) - (\mathbb{E}(x))^2$

$= 2 - 0^2 = 2$ //

c. Sea $Y = |X|$

Determinar $f_Y(y)$, $E(Y)$ y $Var(Y)$.

$Rec(Y) = \{y : y = |x| \text{ con } x \in Rec(x) = \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+$.

Notemos que para cada $y \in Rec(Y)$ $\quad x_1 = y$, $x_2 = -y$ cumplen $|x_1| = |x_2| = y$.

Luego $|\cdot|$ no es 1-1 y sea $y > 0$:

$$f_Y(y) = \left|\frac{dy}{dy}\right| \cdot f_X(y) + \left|\frac{d-y}{dy}\right| \cdot f_X(-y)$$

$$= 1 \cdot f_X(y) + |-1| \cdot f_X(-y) = \frac{e^{-y}}{2} + \frac{e^{-y}}{2} = e^{-y}$$

$\therefore$ $f_Y(y) \begin{cases} e^{-y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

$\therefore$ $Y \sim Exp(1)$

(*) $Z \sim Exp(\lambda)$

$f_Z(z) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda z} & z > 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

$E(Z) = \frac{1}{\lambda}$, $Var(Z) = \frac{1}{\lambda^2}$

Como (*) $E(Y) = \frac{1}{1} = 1$ y $Var(Y) = \frac{1}{1^2} = 1$.

Por definición:

$E(Y) = \int_0^\infty y \cdot e^{-y}\, dy \quad Var(Y) = \int_0^\infty (x - E(x)) \cdot e^{-y}\, dy$.

6/6

Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas / Departamento De Estadística

EYP 1026: Modelos Probabilísticos
I3

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudante: Daniel Saavedra.

Primer semestre 2017

1. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias iid con densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

a) Sea $Y = \sum_{i=1}^{n} \log X_i$. Calcule $E(Y)$ y $Var(Y)$.
b) Sea $Z = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}$. Encuentre $F_Z(z)$ y $f_Z(z)$.
c) En b), calcule $E(Z)$ y $Var(Z)$.

2. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidad dada por

$$p_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{36}, & \text{si } x, y = 1, 2, 3, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

a) Muestre que X e Y no son independientes.
b) Calcule $P(X = Y)$ y $Cov(X, Y)$. $E(XY) = 14/3$
c) Calcule $E(X - Y)$ y $Var(X - Y)$.

$Var(X) = Var(Y) = \frac{21}{36}$

$Cov(X, Y) = \frac{1}{36}$

3. Sean X e Y variables aleatorias independientes. Determine la distribución de $Z = X + Y$ e indique su media y su varianza en los siguientes casos:

a) $X \sim P(\lambda)$ e $Y \sim P(\eta)$, $\lambda, \eta > 0$.
b) $X \sim N(\mu, 1)$ e $Y \sim N(\nu, 1)$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$.
c) $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \exp(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Formulas:

1. $Z \sim P(\lambda) \Longrightarrow p_Z(z) = \frac{\lambda^z e^{-\lambda}}{z!} I_{\{z=0,1,2,\ldots\}}$, y $M_Z(t) = e^{-\lambda(e^t - 1)}$, $t \in \mathbb{R}$, $(\lambda > 0)$,
2. $Z \sim N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$, $z \in \mathbb{R}$, y $M_Z(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $(\mu \in \mathbb{R})$,
3. $Z \sim \exp(\lambda) \Longrightarrow f_Z(z) = \lambda e^{-\lambda z} I_{\{z>0\}}$, y $M_Z(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$, $t > \lambda$, $(\lambda > 0)$,
4. $Z \sim Gama(\alpha, \lambda) \Longrightarrow f_Z(z) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\lambda z} I_{\{z>0\}}$, y $M_Z(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-\alpha}$, $t > \lambda$, $(\alpha, \lambda > 0)$,

donde $I_A = 1$ si A ocurre, e $I_A = 0$ si ocurre A^c.

Notas:
1) Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.
2) Ud. deber argumentar todos sus cálculos en cada pregunta para obtener el puntaje completo.
3) La prueba dura 2:15 horas.

1. $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} f_X$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

a. $Y = \sum_{i=1}^n \log(X_i)$ Calcule $E(Y)$ y $Var(Y)$.

- $E(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \log(X_i)\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(\log(X_i))$

$v = -x^{-1}$ $\quad du = \frac{1}{x}$

$$\mathbb{E}(\underbrace{\log(X_1)}_{g(X_1)}) = \int_1^\infty \underset{u}{\log(x)} \cdot \underset{dv}{\frac{1}{x^2}}\, dx = \underset{u}{\log(x)} \cdot \underset{v}{\frac{-1}{x}}\Big]_1^\infty - \int_1^\infty \underset{v}{\frac{-1}{x}} \cdot \underset{du}{\frac{1}{x}}\, dx$$

como $\lim_{x \to \infty} \frac{\log(x)}{x} \overset{L'h}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \; = 0 - \left(\frac{-\log(1)}{1}\right) + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$

$$= \int_1^\infty x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_1^\infty = \frac{-1}{x}\Big]_1^\infty = 0 - (-1) = 1 \; (*)$$

como son i.i.d $\mathbb{E}(\log(X_i)) = 1 \; \forall i \in \{1, \ldots, n\}$

Luego $\boxed{\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^n 1 = n}$

como $X_i \perp\!\!\!\perp X_j \; \forall i \neq j$ (independientes.)

$\Rightarrow \log(X_i) \perp\!\!\!\perp \log(X_j)$

$\Rightarrow Cov(\log(X_i), \log(X_j)) = 0$

- $Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^n \log(X_i)\right) = \sum_{i=1}^n Var(\log(X_i)) + 2\underbrace{\sum_{i<j}\sum Cov(\log(X_i), \log(X_j))}_{0}$

$$= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}((\log(X_i))^2) - \underbrace{(\mathbb{E}(\log(X_i)))^2}_{1}\; \text{por } (*) \overset{i.i.d.}{=} n \cdot \mathbb{E}(\log(X_1)^2) - n$$

$$= n \cdot (\mathbb{E}(\log^2(X_1)) - 1)$$

$du = \frac{2\log(x)}{x}$ $\quad v = -\frac{1}{x}$

$$\mathbb{E}(\log(X_1)^2) = \int_1^\infty \underset{v}{\log^2(x)} \cdot \underset{dv}{\frac{1}{x^2}}\, dx = \log^2(x) \cdot \frac{-1}{x}\Big]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{x} \frac{2\log(x)}{x}$$

Si $X = X_1$.

$\mathbb{E}(\log(X_1)^2)$

$\overset{..}{I} = \int_1^\infty \underbrace{\log^2(X_1)}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{dv} dx$

$v = \frac{-1}{x}$

$du = \frac{2\log(X_1)}{x}$

$= \frac{-\log^2(x)}{x} \Big]_{x=1}^{x=\infty} + \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{2\log(x)}{x} dx$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^2(x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\log(x)}{x}}{1} = 0$ ★

por ★

$= 0 - \left(-\cancel{\frac{\log^2(1)}{1}}^{0}\right) + 2\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2} dx$

$= 0 + 2 \cdot \mathbb{E}(\log(x)) = 2 \cdot 1 = 2$

$\therefore \boxed{Var\left(\sum_{i=1}^n \log(X_i)\right) = n(2-1) = n.}$

b. Sea $Z = \min\{X_1, \dots, X_n\}$
Encuentre $F_Z(z)$ y $f_Z(z)$.

- $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(\min\{X_1, \dots, X_n\} \leq z)$

$$= 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1, \dots, X_n\} > z)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > z, X_2 > z, \dots, X_n > z)$$

independ. $= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > z)$

igual% distribuidas $= 1 - \left(\mathbb{P}(X_1 > z)\right)^n = 1 - \left(1 - F_{X_1}(z)\right)^n$

$\therefore$ ~~E_Z~~

Luego necesito $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2}\,dt = \left.\frac{-1}{t}\right]_1^x = \frac{-1}{x} + 1 = 1 - \frac{1}{x}$

Luego $F_X(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$\therefore$ ~~$F_Z(z) = 1 - (1 - (1 - \frac{1}{x}))^n$ si~~

$\therefore F_Z(z) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{z}\right)\right)^n$ si $z \geq 1$

$$= 1 - \left(\frac{1}{z}\right)^n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{z^n} & \text{si } z \geq 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

- $f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{d}{dz}\left(1 - z^{-n}\right) = -(-n) \cdot z^{-n-1} = \begin{cases} n \cdot \frac{1}{z^{n+1}} & \text{si } z \geq 1 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$

c. $f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{n}{z^{n+1}} & \text{si } z \geq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

$$\mathbb{E}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f_Z(z)\,dz = \int_1^{\infty} \cancel{z} \cdot \frac{n}{z^{\cancel{n+1}}}\,dz = n \cdot \int_1^{\infty} \frac{1}{\underset{\overset{\parallel}{z^{-n}}}{z^n}}\,dz = n \cdot \frac{z^{-n+1}}{-n+1}\Bigg]_{z=1}^{z=\infty}$$

$$= \frac{n}{-n+1} \cdot \frac{1}{z^{n-1}}\Bigg]_{z=1}^{z=\infty}$$

$$\mathbb{E}(z) = \frac{n}{-n+1}\left(0 - \frac{1}{1^{n-1}}\right) = \frac{n}{1-n}(-1) = \frac{n}{n-1} \text{ si } \boxed{n>1}$$

$$Var(z) = \mathbb{E}(z^2) - (\mathbb{E}(z))^2$$

$$\cdot\ \mathbb{E}(z^2) = \int_1^{\infty} \cancel{z^2} \cdot \frac{n}{z^{\cancel{n+1}\, n-1}}\,dz = n\int_1^{\infty} \frac{1}{z^{n-1}}\,dz = n \cdot \frac{z^{2-n}}{2-n}\Bigg]_1^{\infty}$$

$$\xrightarrow{\text{si } \boxed{n>2}} = \frac{n}{2-n} \cdot \frac{1}{z^{n-2}}\Bigg]_1^{\infty}$$

$$= \frac{n}{2-n}\left(0 - \frac{1}{1}\right) = \frac{n}{n-2}$$

$$\therefore Var(z) = \frac{n}{n-2} - \frac{n^2}{(n-1)^2} = \frac{n(n^2-2n+1) - n^2(n-2)}{(n-1)^2(n-2)}$$

$$= \frac{\cancel{n^3} - \cancel{2n^2} + n - \cancel{n^3} + \cancel{2n^2}}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{n}{(n-1)^2(n-2)}$$

si $\boxed{n>2}$

6/6

2. (X,Y)

$$p_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{36} & \text{si } x,y = 1,2,3 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

X\Y	1	2	3
1	2/36	3/36	4/36
2	3/36	4/36	5/36
3	4/36	5/36	6/36

a. Mostrar que X e Y no son independientes.

$\frac{15}{36} \cdot \frac{9}{36}$

$\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{48} \neq \frac{4}{36}$

Notemos que

$$\mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(X=3, Y=1) + \mathbb{P}(X=3, Y=2) + \mathbb{P}(X=3, Y=3)$$
$$= \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=1, X=1) + \mathbb{P}(Y=1, X=2) + \mathbb{P}(Y=1, X=3)$$
$$= \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

Pero $\mathbb{P}(X=3, Y=1) = \frac{4}{36} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12} = \mathbb{P}(X=3)\,\mathbb{P}(Y=1)$

Luego, no son independientes.

b. Calcular $\mathbb{P}(X=Y)$ y $\operatorname{Cov}(X,Y)$

- $\mathbb{P}(X=Y) = \mathbb{P}(X=1, Y=1) + \mathbb{P}(X=2, Y=2) + \mathbb{P}(X=3, Y=3) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{12}{36} = \boxed{\frac{1}{3}}$
- $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$

$\to \mathbb{E}(XY) = 1\cdot1\cdot\frac{2}{36} + 1\cdot2\cdot\frac{3}{36} + 1\cdot3\cdot\frac{4}{36} + 2\cdot1\cdot\frac{3}{36} + 2\cdot2\cdot\frac{4}{36} + 2\cdot3\cdot\frac{5}{36} + 3\cdot1\cdot\frac{4}{36} + 3\cdot2\cdot\frac{5}{36}$

$+ 3\cdot3\cdot\frac{6}{36} = \frac{2+6+12+6+16+30+12+30+54}{36} = \frac{168}{36} = 4\frac{24}{36}$

$\frac{84}{18} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} = \boxed{\frac{14}{3}}$

$y \backslash x$	1	2	3	$P(X=x)$
1	2/36	3/36	4/36	$9/36 = 1/4$
2	3/36	4/36	5/36	$12/36 = 1/3$
3	4/36	5/36	6/36	$15/36 = 5/12$
$\mathbb{P}(X=y)$	$9/36 = 1/4$	$12/36 = 1/3$	$15/36 = 5/12$	1

como $\mathbb{P}(X=x) = \sum_{y=1}^{3} \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

y $\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{x=1}^{3} \mathbb{P}(X=x, Y=y)$

$15 + 12 + 9 = 36$

$\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9+4}{6} = \frac{13}{6}$

$\mathbb{E}(Y) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{13}{6}$

luego $Cov(X,Y) = \frac{14}{3} - \frac{13}{6} \cdot \frac{13}{6} = \frac{14}{3} - \frac{169}{36} = \cancel{\frac{60}{36} - \frac{169}{36} = \frac{-109}{36}}$

$= \frac{14 \cdot 12 - 169}{36} = \frac{168}{36} - \frac{169}{36} = \boxed{\frac{-1}{36}}$

$14 \cdot 12 = 168 \qquad 144 + 24 = 168 \qquad 16 \cdot 12 = 192 \qquad 192 - 169 = 023$

c. Calcular $\mathbb{E}(X-Y)$ y $Var(X-Y)$

- $\mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = \frac{13}{6} - \frac{13}{6} = 0$

$\boxed{Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,Y)}$

$\rightarrow \mathbb{E}(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{3} + \cancel{9}^{3} \cdot \frac{5}{\cancel{12}_{4}} = \frac{1}{4} + \frac{4}{3} + \frac{15}{4} = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$

$\therefore Var(X) = \frac{16}{3} - \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{16}{3} - \frac{169}{36} = \frac{16 \cdot 12 - 169}{36} = \frac{192 - 169}{36} = \frac{23}{36}$

Como $X \overset{d}{=} Y \Rightarrow Var(Y) = \frac{16 \cdot 12 - 169}{36} = \frac{23}{36}$

Al final $\Rightarrow \Rightarrow$ Ok

$-2\,Cov(X,Y)$

Por último.

$Var(X-Y) = \cancel{\frac{16 \cdot 12 - 169}{36} + \frac{16 \cdot 12 - 169}{36} - 2 \cdot \left(\frac{-109}{36}\right) = \frac{109}{18}}$

$= -2 \cdot \frac{1}{36} = \boxed{\frac{-1}{18}} + \frac{16 \cdot 12 - 169}{18} = \frac{-1}{18}$

3. X, Y independientes.

$Z = X + Y$.

a. $X \sim P(\lambda)$

$Y \sim P(\eta)$

$$M_Z(t) = \mathbb{E}(e^{Zt}) = \mathbb{E}(e^{(X+Y)t}) = \mathbb{E}(e^{Xt} \cdot e^{Yt})$$

$$\text{independientes} = \mathbb{E}(e^{Xt}) \cdot \mathbb{E}(e^{Yt})$$

$$= M_X(t) \cdot M_Y(t)$$

$$M_Z(t) = e^{-\lambda(e^t - 1)} \cdot e^{-\eta(e^t - 1)}$$

$$= e^{-\lambda e^t + \lambda - \eta e^\eta + \eta}$$

$$= e^{-(\lambda+\eta)(e^t - 1)} \quad \therefore Z \sim P(\lambda + \eta)$$

~~Lomma~~ Sea $X \sim P(\lambda)$

$\mathbb{E}(X) = \lambda$ y $Var(X) = \lambda$

$\therefore \mathbb{E}(Z) = \lambda + \eta$ y $Var(Z) = \lambda + \eta$.

$\mathbb{E}(Z)$ es el parámetro al igual que $Var(Z)$.

b. $X \sim N(\mu, 1)$

$Y \sim N(\nu, 1)$

$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$ por los mismos razones que en a.

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2} \cdot e^{\nu t + \frac{1}{2}t^2}$$

$$= e^{\underbrace{t(\mu+\nu)}_{\mathbb{E}(X)} + \frac{1}{2} \underset{\sigma^2}{\underset{\downarrow}{2}} t^2} \quad \therefore Z \sim Normal(\mu + \nu, \overset{\sigma^2}{\overset{\shortparallel}{2}})$$

con $\mathbb{E}(Z) = \mu + \nu \to$ el primer parámetro

$Var(Z) = 2. \to$ el 2º parámetro.

c. $X \sim exp(\lambda)$ e $Y \sim exp(\lambda)$

Al igual que antes,

$$M_Z(t) = M_X(t) \cdot M_Y(t)$$
$$= \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}, \quad t>\lambda$$
$$= \left(\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}\right)^{2} \quad t>\lambda$$
$$= \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-2} \quad t>\lambda \Rightarrow Z \sim Gamma(2,\lambda)$$

$$\mathbb{E}(Z) = \int_0^\infty \frac{\lambda^2}{\underset{\overset{\shortparallel}{1!}}{\Gamma(2)}} z^2 e^{-\lambda z}\,dz = \lambda^3 \underbrace{\int_0^\infty z^2 \lambda e^{-\lambda z}\,dz}_{\text{2° momento de una exponencial } (\lambda)} = \lambda^3 \cdot \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda}$$

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$

$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = Var(X) + \mathbb{E}(X)^2$

$= \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2}$

~~Similarmente~~

y $Var(Z) = 2/\lambda^2$

(recordando que una exponencial es $Gamma(1,\lambda)$).

6/6

Continuación 2

2. c.

$\cancel{Var(X) = Var(Y) = \frac{21}{36}}$.
$Cov(X,Y) = -\frac{1}{36}$.

$$Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2\,Cov(X,Y)$$

$$= \cancel{\frac{21}{36} + \frac{21}{36} - \left(\frac{2}{36}\right) = \frac{21\cdot 2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{21}{18} + \frac{1}{18} = \frac{22}{18} = \frac{11}{9}}$$

$$= \frac{23}{36} + \frac{23}{36} - 2\left(\frac{-1}{36}\right)$$

$$= \frac{23\cdot 2}{36} + \frac{2}{36} = \frac{23}{18} + \frac{1}{18} = \frac{24}{18} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

6/6