Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2016

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución y pauta de corrección de la Interrogación N° 3

1. **[Texto, 4.6.27–28]**

   Sea A una matriz de $m \times n$.

   a) ¿Cuáles de los subespacios $\operatorname{Fila} A$, $\operatorname{Col} A$, $\operatorname{Nul} A$, $\operatorname{Fila} A^T$, $\operatorname{Col} A^T$ y $\operatorname{Nul} A^T$ están en $\mathbb{R}^m$ y cuáles están en $\mathbb{R}^n$? ¿Cuántos subespacios distintos hay en esta lista?

   b) Justifique las siguientes igualdades:

   1) $\dim \operatorname{Fila} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$ (número de columnas de A).
   2) $\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A^T = m$ (número de filas de A).

   Solución:

   a) Las filas de A (que son las columnas de A^T) son vectores de $\mathbb{R}^n$ y las columnas de A (que son las filas de A^T) son vectores de $\mathbb{R}^m$.

   Por su parte, $\operatorname{Nul} A$ es el conjunto de vectores $\mathbf{x}$ tales que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Para que esto tenga sentido, se necesita que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, por lo que $\operatorname{Nul} A$ está en $\mathbb{R}^n$ (y análogamente $\operatorname{Nul} A^T$ está en $\mathbb{R}^m$).

   Así:

   - $\operatorname{Fila} A = \operatorname{Col} A^T \subseteq \mathbb{R}^n$,
   - $\operatorname{Col} A = \operatorname{Fila} A^T \subseteq \mathbb{R}^m$,
   - $\operatorname{Nul} A \subseteq \mathbb{R}^n$ y
   - $\operatorname{Nul} A^T \subseteq \mathbb{R}^m$;

   por lo que entre los espacios indicados hay cuatro distintos.

   b) La dimensión de $\operatorname{Fila} A$ corresponde a la cantidad de filas l.i. en A, que es igual al número de columnas pivote en A.

   Por su parte, la dimensión de $\operatorname{Nul} A$ es igual al número de variables independientes en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, o sea, el número de columnas que no son columnas pivote en A.

   Como (# de cols. pivote en A)+(# de cols. que no son pivote en A) = (# de cols. de A), tenemos $\dim \operatorname{Fila} A + \dim \operatorname{Nul} A = n$.

   Para probar que $\dim \operatorname{Col} A + \dim \operatorname{Nul} A^T = m$, basta aplicar el resultado recién probado reemplazando A por A^T.

Puntaje:

a)
- Por argumentar que $\operatorname{Fila} A \subseteq \mathbb{R}^n$, 0,5 ptos.
- Por argumentar que $\operatorname{Nul} A \subseteq \mathbb{R}^n$, 0,5 ptos.
- Por argumentar que $\operatorname{Fila} A = \operatorname{Col} A^T$, 0,3 ptos.
- Por argumentar que $\operatorname{Col} A \subseteq \mathbb{R}^m$, 0,5 ptos.
- Por argumentar que $\operatorname{Nul} A^T \subseteq \mathbb{R}^m$, 0,5 ptos.
- Por argumentar que $\operatorname{Col} A = \operatorname{Fila} A^T$, 0,3 ptos.
- Por concluir que hay 4 espacios distintos entre los 6 listados, 0,4 ptos.

b) Por argumentar una de las dos igualdades, 2 puntos.

c) Por argumentar la otra (partiendo de cero, o como lo hacemos aquí), 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

2. **[Texto, 4.8, ejemplos 2 y 4, ejercicio 15]**

   a) Encuentre todas las soluciones de la forma $y_k = r^k$, con $r \neq 0$, de la ecuación $y_{k+2} - 2y_{k+1} - 8y_k = 0$.

   b) Demuestre que las soluciones encontradas en a) son l.i.

   c) Indique la forma de la solución general de la ecuación $y_{k+2} - 2y_{k+1} - 8y_k = 0$.

Solución:

a) Supongamos que $y_k = r^k$ (con $r \neq 0$) es solución de la ecuación.
Entonces, para todo $k \geq 0$, se tiene $r^{k+2} - 2r^{k+1} - 8r^k = 0$, por lo que $r^2 - 2r - 8 = 0$.
Así, $r = 4$ o $r = -2$, por lo que las soluciones buscadas son $y_k = 4^k$ e $y_k = (-2)^k$.

b) Supongamos que una combinación lineal de las señales $y_k = 4^k$ y $z_k = (-2)^k$ da como resultado la señal nula: $\alpha y_k + \beta z_k = 0$.
Esto quiere decir que, para todo $k \geq 0$, $\alpha 4^k + \beta(-2)^k = 0$.
En particular, esto debe ser cierto para $k = 1$ y $k = 2$, o sea:

$$4\alpha - 2\beta = 0, \qquad 16\alpha + 4\beta = 0.$$

Pero los únicos valores de α y β que satisfacen esto son $\alpha = \beta = 0$, por lo que las señales $y_k = 4^k$ y $z_k = (-2)^k$ son l.i.
Note que el proceso realizado es equivalente a probar que la matriz de Casorati correspondiente a $k = 0$

$$\begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4^0 & (-2)^0 \\ 4^1 & (-2)^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 6 \neq 0$$

(también puede ser la matriz de Casorati correspondiente a $k = 1$):

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4^1 & (-2)^1 \\ 4^2 & (-2)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 16 & 4 \end{vmatrix} = 48 \neq 0.$$

c) La forma general de la solución de la ecuación es

$$y_k = \alpha \cdot 4^k + \beta \cdot (-2)^k.$$

Puntaje:

a)
- Por llegar a la ecuación $r^2 - 2r - 8 = 0$, 1 punto.
- Por resolver la ecuación, 0,5 puntos.
- Por llegar a que las soluciones buscadas son $y_k = 4^k$ e $y_k = (-2)^k$, 0,5 puntos.

b) Una demostración correcta de independencia lineal (usando alguna matriz de Casorati, o dando un argumento directo) recibe 2 puntos. No se asigna puntaje intermedio.

c) Por escribir correctamente la forma de la solución general, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

3. **[Texto, 6.1.20b]**

   Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2 = 2\,||\mathbf{u}||^2 + 2\,||\mathbf{v}||^2 .$$

   Solución:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 + ||\mathbf{u}-\mathbf{v}||^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) + (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \\ &= [\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}] + [\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}] \\ &= 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 2\,||\mathbf{u}||^2 + 2\,||\mathbf{v}||^2 . \end{aligned}$$

   Puntaje:

   - Si se cometen errores menores al aplicar las propiedades de la norma o el producto punto, se descuentan entre 0,5 y un punto.
   - Si se hace una demostración correcta, usando alguno de los siguientes esquemas, se asigna puntaje completo (6 puntos), menos lo que se descuente por el acápite anterior:
     - partir de uno de los lados de la igualdad y llegar al otro; o
     - partir de uno de ellos, llegar a una expresión simplificada, y después llegar a la misma expresión simplificada partiendo del otro lado; o
     - partir de la igualdad dada y reducirla a una igualdad evidente *usando explícitamente pasos reversibles*, o sea de la forma ... *si y solo si* ....
   - Si la demostración parte de la igualdad dada y la transforma en una igualdad evidente (pero no usando explícitamente pasos reversibles), se asignan 2 puntos, menos lo que se descuente por el primer acápite.

   A lo anterior se le suma el punto base.

4. **[Texto, 5.1.26]**

Sea A una matriz de $n \times n$ tal que A^2 es la matriz $\mathbf{0}$.

a) Demuestre que 0 es un valor propio de A.

b) Demuestre que A no tiene otros valores propios.

Solución:

a) Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{x}$ es un vector propio con valor propio 0.

Si no, $\mathbf{y} = A\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ es tal que $A\mathbf{y} = A(A\mathbf{x}) = A^2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, por lo que en este caso $\mathbf{y}$ es un vector propio con valor propio 0.

b) Supongamos que A tiene un valor propio $\lambda \neq 0$. Así, existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Pero entonces $A^2\mathbf{u} = A(A\mathbf{u}) = A(\lambda\mathbf{u}) = \lambda(A\mathbf{u}) = \lambda^2\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, lo que contradice la hipótesis de que A^2 es la matriz $\mathbf{0}$.

Puntaje:

a) Por una demostración correcta, 3 puntos.

Si no consideran el caso en que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (o sea, si dicen queo $\mathbf{y}$ es un vector propio sin discriminar si es $\mathbf{0}$ o no, 2 puntos.

b) Por una demostración correcta, 3 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

5. *a*) **[Texto, 5.3.13]**

La siguiente matriz tiene a 1 como valor propio. De ser posible, diagonalícela; en caso contrario indique por qué no es diagonalizable:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) **[Texto, 5.4.16]**

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, y defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Determine una base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^2$ con la propiedad de que $\left[\ T\ \right]_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

Solución:

a) El polinomio característico de A es

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 5-11\lambda+7\lambda^2-\lambda^3 = (5-\lambda)(1-\lambda)^2.$$

Así, $\lambda = 1$ (con multiplicidad 2) y $\lambda = 5$ (con multiplicidad 1) son los valores propios de A.

Para saber si A es o no diagonalizable, debemos verificar si la dimensión de cada espacio propio es igual a la multiplicidad algebraica del valor propio correspondiente.

Como la multiplicidad del valor propio $\lambda = 5$ es 1, la única posibilidad de que A no sea diagonalizable es que la dimensión del espacio propio correspondiente a $\lambda = 1$ sea 1.

Así, buscamos los vectores propios correspondientes a $\lambda = 1$. Para ello, resolvemos la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ o —equivalentemente—

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz ampliada escalonada es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, por lo que el sistema queda equivalente a $x_1 = x_3 - 2x_2$.

Así, una base para este espacio propio está dado por las elecciones $(x_2, x_3) = (1, 0)$ y $(x_2, x_3) = (0, 1)$, que corresponde a los vectores propios $(-2, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$. Así, la dimensión de este espacio propio es 2, por lo que la matriz A es diagonalizable.

Para el valor propio $\lambda = 5$, debemos resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz ampliada escalonada es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, por lo que el sistema queda equivalente a $x_1 = x_2 = -x_3$.

Así, un vector propio correspondiente a $\lambda = 5$ es $(-1, -1, 1)$.

De todo lo anterior llegamos a que la matriz A puede ser diagonalizada como sigue:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

b) Buscamos una base de $\mathbb{R}^2$ formada por vectores propios de A. El polinomio característico de A es

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 5 = (\lambda - 5)(\lambda + 1).$$

Así. los valores propios son -1 y 5, por lo que buscamos vectores propios correspondientes a estos valores propios:

- Para $\lambda = -1$,
$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
tiene por solución $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
- Para $\lambda = 5$,
$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
tiene por solución $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Así, una posible base que cumple con las condiciones pedidas es $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ (y en realidad cualquier base formada por ponderados de estos vectores).

Puntaje:

a)
- Por calcular y factorizar correctamente el polinomio característico: 0,5 puntos.
- Por indicar que la condición para que A sea diagonalizable es que la dimensión del espacio propio correspondiente a $\lambda = 1$ sea 2 (o, equivalentemente, que haya dos vectores propios l.i. correspondientes a $\lambda = 1$): 0,5 puntos.
- Por encontrar dos vectores propios l.i. correspondientes a $\lambda = 1$ (que no necesariamente deben ser los aquí mostrados): 1 punto (0,5 por cada vector).
- Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = 5$: 0,5 puntos.
- Por escribir A correctamente en la forma $A = PDP^{-1}$: 0,5 puntos.

b)

- Por calcular y factorizar correctamente el polinomio característico: 0,5 puntos.
- Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = 5$: 1 punto.
- Por encontrar un vector propio correspondiente a $\lambda = -1$: 1 punto.
- Por escribir la base encontrada (no es necesario diagonalizar la matriz): 0,5 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

6. [**Texto, 4.5.33**]

Se sabe que todo conjunto linealmente independiente $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ puede ser expandido a una base de $\mathbb{R}^n$. Una forma de lograr esto es considerar la matriz

$$A = \left[\ \mathbf{v}_1\,\mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_k\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\ \ldots\ \mathbf{e}_n\ \right],$$

donde $\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\ \ldots\ \mathbf{e}_n$ son (en orden) las columnas de la matriz identidad; las columnas pivote de A forman una base de $\mathbb{R}^n$.

a) Utilice el método descrito para ampliar los siguientes vectores a una base para $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Explique por qué funciona en general el método: ¿por qué están los vectores originales $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_k$ incluidos en la base encontrada para $\operatorname{Col} A$? ¿Por qué es $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$?

Solución:

a) La matriz A construida como se indica es

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tras realizar eliminación Gaussiana sobre la matriz, obtenemos

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 5/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7/4 & -1/2 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Como las columnas pivote son la 1ª, la 2ª, la 3ª y la 6ª, la base que nos entrega el método es

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) Si alguno de los k vectores originales no fuera columna pivote de A, la matriz de $n \times k$ formada por esos vectores tendría menos de k pivotes y por lo tanto los k vectores columna serían linealmente dependientes. Así, todos los vectores originales están en el conjunto entregado por este método.

Por otra parte, $\operatorname{Col} A$ es el espacio generado por las columnas de A; como las columnas de A contienen a $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, que forman un generador de $\mathbb{R}^n$, se tiene que todo elemento de $\mathbb{R}^n$ es combinación lineal de las columnas de A.

Puntaje:

a)
- Por escribir correctamente la matriz A, 1 punto.
- Por escalonar correctamente la matriz (llegando a una forma escalonada o a la forma escalonada reducida), 1 punto.
- Por identificar correctamente las columnas pivote, 0,5 puntos.
- Por escribir correctamente la base que entrega el método, 0,5 puntos.

b)
- Por dar una BUENA explicación de por qué están los vectores originales incluidos en la base encontrada, 1,5 puntos.
- Por dar una BUENA explicación de por qué $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$, 1,5 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

7. Sean A y B dos matrices de $n \times n$ tales que $AB = BA$.

   a) Demuestre que, si $B\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}$ es vector propio de A con valor propio asociado λ, entonces $B\mathbf{v}$ también es vector propio de A con valor propio asociado λ.

   b) Demuestre que si $\mathbf{u}$ es cualquier vector propio de A perteneciente a un espacio propio de dimensión 1, entonces $\mathbf{u}$ es vector propio de B.

Solución:

a) Si $B\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{v}$ es vector propio de A con valor propio asociado λ, entonces $A(B\mathbf{v}) = AB\mathbf{v} = B(A\mathbf{v}) = B(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(B\mathbf{v})$, por lo que $B\mathbf{v}$ es vector propio de A con valor propio asociado λ.

b) Sea $\mathbf{u}$ cualquier vector propio de A perteneciente a un espacio propio de dimensión 1, con valor propio asociado λ.

Analizamos dos casos:

1) $B\mathbf{u} = \mathbf{0}$. De ser así, $\mathbf{u}$ es vector propio de B con valor propio asociado 0.
2) $B\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. En este caso, por (a), $B\mathbf{u}$ también es vector propio de A con valor propio asociado λ.

Pero el espacio propio de A correspondiente al valor propio λ es uni-dimensional, por lo que $B\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$ para algún $\alpha \neq 0$, de donde se deduce que $\mathbf{u}$ es vector propio de B con valor propio asociado α.

Puntaje:

a) Por una demostración correcta, 3 puntos.

b) Por una demostración correcta, 3 puntos.

Si no consideran aparte el caso en que $B\mathbf{u} = \mathbf{0}$, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) Si W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $(W^\perp)^\perp = W$.

   b) Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son dos vectores propios linealmente independientes de A, entonces corresponden a distintos valores propios.

   c) Si A es de $m \times n$ y A es uno a uno, entonces el rango de A es m.

Solución:

a) **VERDADERO**

Si $\mathbf{x} \in W$, $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ para todo $\mathbf{y} \in W^\perp$, por lo que $\mathbf{x} \in (W^\perp)^\perp$.

Así, hemos probado que $W \subseteq (W^\perp)^\perp$, por lo que W es un subespacio de $(W^\perp)^\perp$.

Sea ahora $\dim W = k$. Por ser W subespacio de $\mathbb{R}^n$, podemos expresar W como $\operatorname{Fila} A$ (donde A es una matriz de $k \times n$), y por lo tanto $W^\perp = \operatorname{Nul} A$.

Pero entonces $\dim W^\perp = \dim(\operatorname{Nul} A) = n - \dim(\operatorname{Fila} A) = n - k$. Aplicando nuevamente esta misma propiedad, esta vez a $W^\perp$ en lugar de a W, obtenemos $\dim((W^\perp)^\perp) = n - (n - k) = k$.

De aquí concluimos que W es un subespacio de $(W^\perp)^\perp$ que tiene su misma dimensión, por lo que (ver por ejemplo el problema 4.5.26) $W = (W^\perp)^\perp$.

b) **FALSO**

Sea A la matriz identidad de $n \times n$. Todo vector no nulo de $\mathbb{R}^n$ es vector propio de A con valor propio 1; en particular, si elegimos dos vectores l.i. cualesquiera, ambos serán vectores propios l.i. correspondientes al mismo valor propio.

Otra forma de justificar la afirmación es dar un contraejemplo específico, por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$. Aquí tenemos dos vectores propios con valor propio 1 que son l.i.

c) **FALSO**

Considérese la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Al actuar sobre un vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c \end{bmatrix}$, se obtiene como resultado $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$, por lo que A es uno a uno ($A \begin{bmatrix} c_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} c_2 \end{bmatrix} \to c_1 = c_2$). Pero el rango de A es $1 = n$, no $m = 2$.

Puntaje:

a) Por probar que W es un subespacio de $(W^\perp)^\perp$, 1 punto.

Por probar que en realidad ambos espacios son iguales, 1 punto.

b) Por dar un buen contraejemplo (específico o genérico, como los mostrados en la solución), 2 puntos.

c) Por dar un buen contraejemplo, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.