Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2022

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 8

1. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

   Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 1.

- 6 puntos por calcular correctamente el límite.

2. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n}$.

Solución. Sabemos que si $|x|<1$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$. Ahora amplificando por $1/3^n$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}+2^{n+1}}{3^n+2^n} \cdot \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{3^n}+\frac{2^{n+1}}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3+2\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{3+2\cdot 0}{1+0} = 3\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 2.

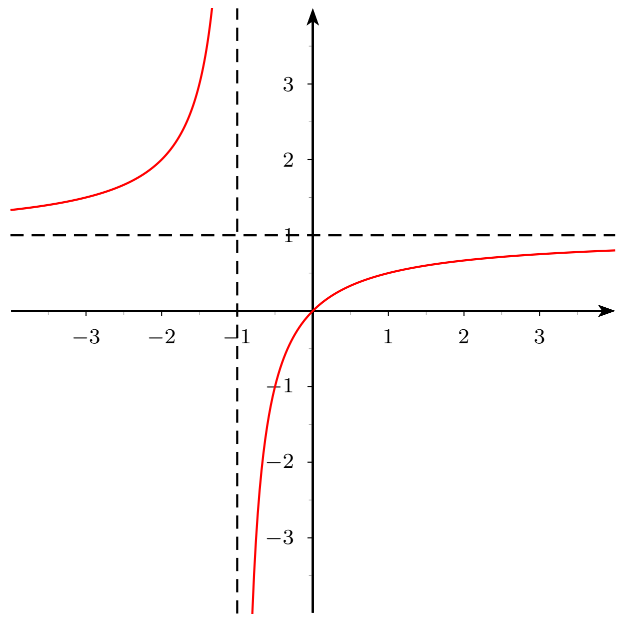
- 6 puntos por calcular correctamente el límite.

3. Sean $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ y $\{a_n\}$ una sucesión que satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{10n-21}{2n} \leqslant f(a_n) \leqslant \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Solución. Notemos que f es una función racional por lo que podemos obtener su gráfica:



Del gráfico de f se ve que f es creciente, entonces su función inversa $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x}$ también es creciente. Aplicando f^{-1} a la desigualdad dada, se obtiene

$$f^{-1}\left(\frac{10n-21}{2n}\right) \leqslant f^{-1}(f(a_n)) \leqslant f^{-1}\left(\frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right) \iff \frac{10n-21}{-8n+21} \leqslant a_n \leqslant \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-5\sqrt{n}}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-5\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-5} = -\frac{5}{4} \\
\lim_{n\to\infty} \frac{10n-21}{-8n+21} &= \lim_{n\to\infty} \frac{10-\dfrac{21}{n}}{-8+\dfrac{21}{n}} = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Por el teorema del Sandwich se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\dfrac{5}{4}$

Puntaje Pregunta 3.

- 2 puntos por obtener cotas para la sucesión a_n
- 1,5 puntos por calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-5\sqrt{n}}$
- 1,5 puntos por calcular el límite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10n-21}{-8n+21}$
- 1 punto por usar el teorema del Sandwich para obtener el límite de a_n.