PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Solución Examen MAT1203 - Álgebra Lineal
Junio 27, 2013

1. Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 de coeficientes reales. Sea

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

   a) Demuestre que W es un subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}$
   b) Determine una base para W

   Justifique sus respuestas.

   Solución:

   a) Hay que demostrar que $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

      i) La matriz nula O está en W
      ii) $A, B \in W \Rightarrow A + B \in W$
      iii) $A \in W, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha A \in W$

      [i) Puesto que $O\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ tenemos que $O \in W$

      [ii) Si $A, B \in W$ entonces $A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y entonces

$$(A + B)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

      Por lo tanto $A + B \in W$ $\boxed{\textbf{1.5 pts.}}$

      [iii) Si $A \in W$ y $\alpha \in RR$ entonces

$$(\alpha A)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha(A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}) = \alpha\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

      Por lo tanto $\alpha A \in W$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$

$b)$

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rcl} a-2b & = & 0 \\ c-2d & = & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rcl} a & = & 2b \\ b & = & 2d \end{array} \qquad \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

Considerando b, d variables libres y a, c básicas, tenemos

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & b \\ 2d & d \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

Por lo tanto $W = Gen\left\{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ $(*)$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$

Como $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ no son una un múltiplo de la otra, ellas son linealmente independientes (**) $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$

Por (*), (**)

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\mathcal{B}$ genera W y es linealmente independiente y por lo tanto es base de W.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} a & a^2 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix}$

   a) Determine condiciones sobre a para que A sea invertible.

   b) Determine condiciones sobre a para que A sea positiva definida.

Solución

Una posible solución es:

Una forma escalonada de A es

$$\begin{bmatrix} a & a^2 & 0 & 0 \\ a^2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} F_2 \leftarrow F_2 - aF_1 \\ F_4 \leftarrow F_4 - aF_3 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} a & a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a - a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 - a^2 \end{bmatrix} \quad \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

a)
- A tiene inversa sii $det(A) \neq 0$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$
- Pero $det(A) = a \cdot (a - a^3) \cdot (1) \cdot (1 - a^2) = a^2(1 - a^2)^2$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$
- Por lo tanto A tiene inversa sii $a \neq 0$ y $a \neq 1$ y $a \neq -1$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$

(asignar en forma análoga los puntos para A tiene inversa sii los pivotes de la escalonada son todos distintos de cero, et...)

b) A es definida positiva sii cada pivote es positivo sii $a > 0$ $a(1 - a^2) > 0$, $1 > 0$, $1 - a^2 > 0$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$ sii $0 < a < 1$ $\boxed{\textbf{1.5 pts.}}$

3. Determine la solución de mínimos cuadrados y el error de mínimos cuadrados para el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

solución

- la solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ satisface las ecuaciones normales $A^T Ax = A^T b$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$
- $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$
- $A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 7/11, x_2 = 1/11$ $\boxed{\textbf{2.0 pts.}}$
- El error de aproximación de la solución de mínimos cuadrados es

$$||b-Ax|| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7/11 \\ 1/11 \end{bmatrix} \right\| = \left\| 1/11 \begin{bmatrix} 3 \\ -10 \\ 5 \\ -8 \end{bmatrix} \right\| = \frac{3}{11}\sqrt{22} \ \boxed{\textbf{2.0 pts.}}$$

4. Determine la matriz P que proyecta ortogonalmente sobre $W = Nul(A)$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solución

Una base de $Nul(A)$ es $\mathcal{B}_{Nul(A)} = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \}$ $\boxed{\textbf{2.0 pts.}}$

La matriz de proyección es $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$, donde $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

Puesto que $A^T A = 6$, tenemos que $(A^T A)^{-1} = \dfrac{1}{6}$ y

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} (\frac{1}{6}) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \boxed{\textbf{2.0 pts.}}$$

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Compruebe que 6 es valor propio y v un vector propio de A y diagonalice A ortogonalmente.

Solución

- $$Av = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-4-1 \\ 2-4+2 \\ -1-4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Por lo tanto $A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es vector propio para el valor propio $\lambda = 0$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

- $B = A - 6I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ y por lo tanto $det(B) = det(A - 6I) = 0$ pues B tiene dos filas iguales y entonces $\lambda = 6$ es valor propio de A. $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

- Determinamos el subespacio propio asociado a $\lambda = 6$

  $$(A-6I)x = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2 - x_3$$

  Por lo tanto

  $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  Por lo tanto una base de $W_{\lambda=6} = Nul(A - 6I)$ es $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

  Una base de vectores propios con los correspondientes valores propios es:

  $$(\lambda = 2) : v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ v_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\lambda = 0) : v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \ \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

  Nota: Si alternativamente un alumno calculara el polinomio característico, luego los valores y vectores propios para obtener la base de vectores propios y de esta manera çomprbar"que v es vector propio y $\lambda = 6$ valor propios, asignar $\boxed{\textbf{3.0 pts.}}$

- Para diagonalizar ortogonalmente es necesario determinar una base ortonormal de vectores propios. Aplicando el método de Gram-Schmidt a la base de $W_{\lambda=6}$ obtenemos

  $u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

  $u_2 = v_2 - \dfrac{u_1 \cdot v_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{-2}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$

- Una base ortonormal de vectores propios es

$$\hat{u}_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix},\ \hat{u}_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \hat{u}_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},\ \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

- Entonces

$$P = [\hat{u}_1\ \hat{u}_2\ \hat{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = PDP^T\ \boxed{\textbf{1.0 pts.}}$$

6. Determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA y justifique demostrando su respuesta.

   a) Si A tiene coeficientes reales, $A^T = A$ y los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ satisfacen $A\vec{u} = \vec{u}$, $A\vec{v} = 2\vec{v}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

   b) Si $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ y Ax es siempre un múltiplo de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, entonces $\dim(Nul(A)) = 1$.

   c) Si U, V son matrices ortogonales de de $n \times n$ entonces UV es una matriz ortogonal.

Solución

a) VERDADERO:

- Si $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ y $A\vec{u} = \vec{u}$ y $A\vec{v} = 2\vec{v}$ entonces $\vec{u}$, $\vec{v}$ son vectores propios con valores propios $1, 2$ respectivamente $\boxed{\textbf{0.7 pts.}}$.
- Como A es real y simétrica los subespacios propios asociados a los valores propios distintos son perpendiculares y por lo tanto $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $\boxed{\textbf{0.8 pts.}}$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ o $\vec{v} = \vec{0}$ entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$

Alternativo: Con las hipótesis, se tiene que $\vec{u} \in W_{\lambda=1}$, $\vec{v} \in W_{\lambda=2}$, y $W_{\lambda=1} \perp W_{\lambda=2}$ y entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (en esta argumentación no es necesario distinguir entre vectores nulos o no nulos....)

b) FALSO

- Como $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ y Ax es siempre un múltiplo de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ tenemos que $Col(A) = Gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$
- Pero A es de 3×4 y $dim(col(A)) + dim(nul(A)) = 3$. Puesto que $dim(Col(A)) = 1$ tenemos que $dim(Nul(A)) = 2 \neq 1$ $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$.

Una alternativa es construir un contraejemplo que cumpla las condiciones dadas y no cumpla la conclusión.

c) VERDADERO

- Una matriz cuadrada P es ortogonal sii $P^T P = I$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$ (hay otras equivalencias, que también se pueden usar)
- U, V ortogonales implican $U^T U = I, V^T V = I$ $\boxed{\textbf{0.5 pts.}}$
- $P = UV \Rightarrow P^T P = (UV)^T\ UV = V^T (U^T U) V = V^T\ I\ V = V^T V = I$. Por lo tanto UV es ortogonal. $\boxed{\textbf{1.0 pts.}}$