Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Profesor: Rodrigo Vargas Ayudantes: Bastián Mora & Matías Fernández

**Introducción al Cálculo ⋆ MAT1107**
**1er semestre del 2022**

# Ayudantía n°1

**1.** Demuestre que si $L-\varepsilon \leq M$ para todo $\varepsilon>0$, entonces $L \leq M$.
**Solución**
Supongamos que $L>M$. Esto implica que $L-M>0$. Como $\frac{1}{2}>0$, entonces $\frac{L-M}{2}>0$. Usando $\varepsilon=\frac{L-M}{2}>0$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
L-\frac{L-M}{2} &\leq M \\
\Rightarrow \quad 2L-(L-M) &\leq 2M \\
\Rightarrow \quad &\leq M
\end{aligned}
$$

Pero habíamos asumido que $L>M, \rightarrow\leftarrow$. Por lo tanto, $L \leq M$.

**2.** Si a, b y $c$ son números reales positivos, demuestre

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$$

**Solución**
Sabemos que para todo $x, y$ positivos se cumple que $x^2+y^2 \geq 2xy$. Aplicando esta desigualdad $aab+bc+ac$ tendremco

$$
\begin{aligned}
ab+bc+ac &\leq \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+c^2}{2} \\
&\leq a^2+b^2+c^2
\end{aligned}
$$

**3.** Si $a+b+c=3$ demuestre que $a^2+b^2+c^2 \geq 3$.
**Solución**
Elevando al cuadrado la igualdad $a+b+c=3$ tendremos

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=9$$

Pero sabemos que para todo $x$ e $y$ en los reales se cumple: $x^2+y^2 \geq 2xy$, luego

$$9 \leq a^2+b^2+c^2+\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)+\left(b^2+c^2\right)=3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

De la última desigualdad se deduce que $a^2+b^2+c^2 \geq 3$.

**4.** Demuestre la siguiente proposición:

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : (a > 1 \wedge a > b) \Rightarrow \big(a^2 + b > a + ab\big)$$

**Solución**
Tenemos que

$$\begin{aligned} a^2 + b &> a + ab \\ a^2 + b - a - ab &> 0 \\ a(a-b) + (b-a) &> 0 \\ a(a-b) - (a-b) &> 0 \\ (a-1)(a-b) &> 0 \end{aligned}$$

Luego demostrar que $a^2 + b > a + ab$, es equivalente a demostrar que $(a-1)(a-b) \geq 0$, se tiene que:

$$a > 1 \Leftrightarrow a - 1 > 0 \quad \text{y} \quad a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

Por axiomas de orden se tiene que la multiplicación de dos números positivos es positivo, se cumple que:

$$(a-1)(a-b) > 0$$

**5.** Sea $x \geq -3$. Demuestre que $1 + 3x \leq (1+x)^3 \cdot 3$ puntos
**Solución**
Desarrollando el cubo, obtenemos

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3.$$

Por lo tanto, solo necesitamos demostrar que $3x^2 + x^3 \geq 0$ para $x \geq -3$. La derecha es verdadera si $x = 0$. Si $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} 3x^2 + x^3 \geq 0 &\Leftrightarrow x^2(3+x) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3 + x \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq -3 \end{aligned}$$

donde usamos que $x^2 > 0$.