Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2022

MAT1203 – Álgebra Lineal

Solución Interrogación 1

1. Suponga que un vector unitario $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ hace ángulos $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/2$, y $\gamma = \pi/3$, con los vectores $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, y $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$, respectivamente.

   Encuentre los componentes del vector $\mathbf{u}$.

   [Ayuda: $\cos(\pi/3) = 1/2$ y $\cos(\pi/2) = 0$]

   Solución. Tenemos las ecuaciones

$$\cos(\pi/3) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{u}\|}, \quad \cos(\pi/2) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\| \, \|\mathbf{u}\|} \quad \text{y} \quad \cos(\pi/3) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\| \, \|\mathbf{u}\|}.$$

   Dado que $\|\mathbf{a}\| = 5$, $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{3}$, $\|\mathbf{c}\| = \sqrt{2}$, y $\|\mathbf{u}\| = 1$ deducimos que

$$\frac{1}{2} = \frac{5u_1}{5}, \quad 0 = \frac{\sqrt{2}u_1 + u_2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}u_3}{\sqrt{2}}.$$

   Vemos entonces que

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{y} \quad u_3 = \frac{1}{2}.$$

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por utilizar la fórmulas que relacionan ángulos entre vectores con el producto punto
- 2 puntos por determinar las normas de los vectores **a**, **b**, **c** y **u**.
- 2 puntos por determinar las coordenadas del vector **u**.

2. Encuentre un vector no cero ortogonal al plano que pasa por los puntos $P(-1,3,1)$, $Q(0,5,2)$, $R(4,3,-1)$ y luego determine el área del triángulo PQR.

Solución. Tomemos los vectores que están en la dirección del plano que pasa por los tres puntos indicados:

$$\overrightarrow{PQ} = (1,2,1)\ , \qquad \overrightarrow{PR} = (5,0,-2)\ ,$$

luego el vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-4,7,-10)$, es ortogonal al plano que pasa por los puntos P, Q, R.

El área del triángulo PQR es

$$A = \frac{\|(-4,7,-10)\|}{2} = \frac{\sqrt{16+49+100}}{2} = \frac{\sqrt{165}}{2}\ .$$

Puntaje Pregunta 2.

- 3 puntos por determinar un vector ortogonal al plano.
- 3 puntos por determinar el área del triángulo PQR.

3. Considere los puntos $A(-1,2,0), B(3,-2,2)$ y $C(0,3,-1)$. Encuentre la ecuación escalar (o ecuación general) del plano que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos B y C.

Solución. Notemos en primer lugar que la dirección de la recta que pasa por los puntos B y C es el vector

$$\overrightarrow{BC} = \langle 0-3, 3-(-2), -1-2 \rangle = \langle -3, 5, -3 \rangle \,.$$

Como el plano buscado es perpendicular a esta recta, el vector $\overrightarrow{BC}$ es su vector normal. Sabiendo además que este plano pasa por el punto $A(-1,2,0)$, su ecuación escalar es

$$\begin{aligned} -3(x-(-1)) + 5(y-2) - 3(z-0) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -3(x+1) + 5(y-2) - 3z = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -3x - 3 + 5y - 10 - 3z = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -3x + 5y - 3z = 3 + 10 \\ &\Longleftrightarrow \quad -3x + 5y - 3z = 13. \end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 3.

- 3 puntos por determinar un vector que sea perpendicular al plano buscado.
- 3 puntos por determinar la ecuación escalar del plano.

4. Considere la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m .$$

Determine m para que la ecuación tenga sentido y luego determine qué condiciones deben satisfacer las componentes del vector $\mathbf{b}$ para que el sistema sea consistente.

Solución. Claramente $m = 4$ y escalonando la matriz ampliada se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & \mathbf{b} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & b_2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & b_3 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & b_4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & b_5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & b_2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & b_3 \\ 0 & -3 & 3 & 9 & b_4 - 3b_1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 & b_5 - 2b_1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & -10 & -1 & b_3 - 3b_2 \\ 0 & 0 & 15 & 15 & b_4 - 3b_1 + 3b_2 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & b_5 - 2b_1 + 2b_2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & -10 & -1 & b_3 - 3b_2 \\ 0 & 0 & 15 & 15 & b_4 - 3b_1 + 3b_2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & b_5/2 - b_1 + b_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & b_5/2 - b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & b_3 - b_2 + b_5 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - 3b_5/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema es consistente si $3b_5 = 2b_4$.

Puntaje Pregunta 4.

- 1 punto por obtener que $m = 4$.
- 3 puntos por obtener la forma escalonada de la matriz ampliada.
- 2 puntos por concluir que el sistema es consistente si $3b_5 = 2b_4$.

5. Sea A una matriz de $m \times n$ que satisface

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine m y n y calcule la matriz A.

Solución. Claramente $m = n = 3$. Si las columnas de la matriz A son $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ Entonces las ecuaciones dadas son equivalentes a

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se sigue que $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Por lo tanto, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Puntaje Pregunta 5.

- 1 punto por determinar los valores de m y n.
- 3 puntos por traducir la información dada a combinaciones lineales de las columnas de la matriz A.
- 2 puntos por encontrar los vectores columnas de A.

6. Si la suma de las columnas de A es el vector $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ y la forma escalonada reducida de A es $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, determine el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Solución. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ las columnas de la matriz A y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Notemos que $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. En efecto,

$$A\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}\,.$$

Por la forma escalonada reducida de la matriz A concluimos que las soluciones de la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2 \\ -8x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es

$$S = \{\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Puntaje Pregunta 6.

- 2 puntos por deducir que $\mathbf{p}$ es solución particular del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
- 2 puntos por obtener las soluciones del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- 2 puntos por obtener el conjunto solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (considerar correcto si no se utiliza la notación de conjunto).

7. Considere los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ h \end{bmatrix}.$$

¿Para qué valores de h está $\mathbf{v}_3$ en Gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$?

Solución. El vector $\mathbf{v}_3$ está en Gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ si y solo si la ecuación $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$ tiene una solución. Para determinar esto reducimos por filas la matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 9 & -5 \\ -5 & 15 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & h+10 \end{bmatrix}$$

En este punto, la segunda ecuación muestra que la ecuación vectorial original no tiene solución. Así que $\mathbf{v}_3$ no está en el Gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para ningún valor de h.

Puntaje Pregunta 7.

- 3 puntos por hallar al forma escalonado de la matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}$.
- 3 puntos por concluir que no hay valores de h.

8. Encuentre la matriz A de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisface

$$T\left(\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-1\\2\\-5\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}-1\\2\\-5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}.$$

Solución. Sean $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}-1\\2\\-5\end{bmatrix}$, y $\mathbf{c} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$. Tenemos que $\mathbf{e_2} = \mathbf{c}$ así que $T(\mathbf{e_2}) = \mathbf{a}$.

Por otro lado

$$\mathbf{b} = T(\mathbf{a}) = 3T(\mathbf{e_1}) + 2T(\mathbf{e_2}) = 3T(\mathbf{e_1}) + 2\mathbf{a}$$

de lo que se deduce

$$T(\mathbf{e_1}) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-7\\-2\\-5\end{bmatrix}.$$

Similarmente

$$\mathbf{c} = T(\mathbf{b}) = -T(\mathbf{e_1}) + 2T(\mathbf{e_2}) - 5T(\mathbf{e_3}) = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-7\\-2\\-5\end{bmatrix} + 2\mathbf{a} - 5T(\mathbf{e_3})$$

de lo que obtenemos

$$T(\mathbf{e_3}) = \frac{1}{15}\begin{bmatrix}25\\11\\5\end{bmatrix}.$$

Vemos entonces que

$$A = \begin{bmatrix}T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7/3 & 3 & 25/15\\-2/3 & 2 & 11/15\\-5/3 & 0 & 1/3\end{bmatrix}.$$

Puntaje Pregunta 8.

- 2 puntos por calcular $T(\mathbf{e}_1)$.
- 2 puntos por calcular $T(\mathbf{e}_2)$.
- 2 puntos por calcular $T(\mathbf{e}_3)$.