Modelos Probabilísticos

Ayudantía 10

Camilo González

3 de Noviembre del 2020

Ejercicio 1

Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes Gamma$(\alpha_i, 1)$, encuentre la distribución de:

$$X_1/\left(X_1 + X_2\right) \quad \text{y} \quad X_2/\left(X_1 + X_2\right).$$

$$X \sim \text{Gamma}, \qquad f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp\{-x/\beta\}$$

$$X \sim \text{Beta}, \qquad f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$$

$$\hookrightarrow \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$\boxed{Y_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2}} \qquad Y_2 = X_1 + V_2$$

$$x_1 = y_1 y_2, \qquad x_2 = y_2(1-y_1),$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ -y_2 & 1-y_1 \end{vmatrix} = |y_2 - y_1 y_2 + y_1 y_2| = |y_2| = y_2$$

$$f(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\,|J|$$

$$= f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2}(x_2)\, |J|$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} y_1^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_1-1} e^{-y_1 y_2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} y_2^{\alpha_2-1}(1-y_1)^{\alpha_2-1} e^{-y_2(1-y_1)}$$

$$\cdot\, y_2^{1}$$

$$= \underbrace{\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} y_1^{\alpha_1-1}(1-y_1)^{\alpha_2-1}}_{Y_1 \sim \text{Beta}(\alpha_1, \alpha_2)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} y_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-y_2}}_{\text{Gamma}(\alpha_1+\alpha_2,\, 1)}$$

Ejercicio 2

Suponga que la distribución de Y, condicional en $X = x$, es Normal(x, x^2) y la distribución marginal de X es Uniforme$(0, 1)$

1. Encuentre $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$ y $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
2. Pruebe que Y/X y X, son independientes.

$$Y|X \sim N(x, x^2)$$

$$X \sim \text{Uniforme}(0,1)$$

$$E(Y) = E_X\left(E_{Y|X}(Y|X)\right) = E_X(X) = \frac{1}{2}$$

$$Var(Y) = Var(E(Y|X)) + E(Var(Y|X))$$

$$= Var(X) + E(X^2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

$$E(XY) = E(E(XY|X)) = E(X\,E(Y|X))$$

$$= E(X^2) = \frac{1}{3}$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{12}$$

b) $T = \frac{Y}{X}$, $U = X$

$x = u$
$y = t \cdot u$

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & u \end{vmatrix} = |u| = u$$

$$f_{T,U}(t,u) = f_{X,Y}(x,y)\,|J| = \underbrace{f(y|x)}_{\sim N(x,x^2)}\,f(x)\,|J|$$

$$= \frac{1}{u\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{ -\frac{(tu - u)^2}{2u^2} \right\} \cdot 1 \cdot u$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{u^2(t-1)^2}{2u^2} \right\}}_{\text{Normal}(1,1)} \cdot \underbrace{1}_{\text{Unif.}(0,1)}$$

$\therefore$ $\frac{Y}{X}$ y X son indep.

Ejercicio 3

Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias iid con cdf continua F_X, y suponga $\mathrm{E}(X_i) = \mu$.

Se define $Y_1, \ldots, Y_n$ como:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{if } X_i > \mu \\ 0 & \text{if } X_i \leq \mu \end{cases}$$

Encuentre la distribución de $\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

$Y_i \sim \text{Ber}(p)$, $p = P(X_i > \mu) = 1 - F(\mu)$

$\sum Y_i \sim \text{Binomial}(n, p)$

Ejercicio 4

En la Salmonicultura, es clave controlar y predecir el peso (en Kg) de los peces. Un muy buen predictor es el alimento, en gramos, que el pez come. Un análisis post cosecha de una jaula muestran un comportamiento Normal Bivariado entre el peso (Y) y el alimento consumido (X).

La siguiente salida de `R` entrega un resumen de los datos obtenidos en la jaula:

mean (X)	mean (Y)	$\mathrm{sd}(\mathrm{X})$	$\mathrm{sd}(\mathrm{Y})$	$\mathrm{cov}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$
201.8555	3.498261	47.89279	0.5088417	16.8959

¿Cuál sería su pronóstico para el peso, si el pez comió 350 gramos de alimento?

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x \sigma_y} \right] \right\}$$

$$Y \mid X = x \sim \text{Normal}\left(\mu_Y + \frac{\rho \sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_x),\ \sigma_Y^2 (1-\rho^2) \right)$$

$$E(Y|X) = \mu_Y + \frac{\rho \sigma_Y \cdot X}{\sigma_X} - \frac{\rho \sigma_Y \mu_X}{\sigma_X} \qquad \rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$= \left(\mu_Y - \mu_X \frac{\rho \sigma_Y}{\sigma_X} \right) + \frac{\rho \sigma_Y}{\sigma_X} \cdot x$$

$$\rho = \frac{16,89}{47,89 \cdot 0,503} = 0,693$$

Reemplazando

$$E(Y|X) = 2,011 + 0,0073 \cdot x$$

$$= 2,011 + 0,0073 \cdot 350$$

$$= 4,58 \text{ kilos}$$