PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2020

Pauta Interrogación 2 - MAT1610

1. a) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva dada por la ecuación

$$y^2 - x\sin y = x^2 - 4,$$

en el punto $(2,0)$.
Solución:

Deriviendo implícitamente con respecto a x, se obtiene

$$2yy' - \sin y - xy'\cos y = 2x,$$

y evaluando en $x = 2$ y $y = 0$, encontramos $y'(2) = -2$. Así la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (2,0) es

$$y = -2x + 4.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por la derivación implícita.
- (1 punto) por el calculo e la pendiente.
- (1 punto) por la ecuación de la recta.

b) Dada la función $f(x) = x^3 + 4x - 7$, calcule $(f^{-1})'(-7)$ y $(f^{-1})''(-7)$.

Solución:

Recordemos que para funciones invertibles, tenemos

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Para determinar $f^{-1}(-7)$ resolvemos la ecuación $x(x^2+4) = 0$ cuya única solución es $x = 0$ y por lo tanto $f^{-1}(-7) = 0$. Además como $f'(x) = 3x^2 + 4$ tenemos que $f'(f^{-1}(-7)) = f'(0) = 4 \neq 0$. Luego

$$(f^{-1})'(-7) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-7))} = \frac{1}{4}.$$

Derivamos una segunda vez y obtenemos

$$(f^{-1})''(x) = -\frac{f''(f^{1-}(x))}{(f'(f^{-1}(x))^3},$$

y como $f''(x) = 12x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$(f^{-1})''(-7) = -\frac{f''(f^{-1}(-7))}{(f'(f^{-1}(-7))^3} = \frac{f''(0)}{(f'(0))^3} = 0.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por la fórmula de la derivada de la inversa.
- (1 punto) por calcular $(f^{-1})'(-7)$.
- (1 punto) por calcular $(f^{-1})''(-7)$.

2. Se necesita cortar un hilo de longitud L en dos trozos. Con un trozo se construye una circunferencia y con el otro un cuadrado. ¿Cuánto hilo debe ser usado para la construcción de la circunferencia, si se desea que la suma de ambas áreas sea mínima?

   Solución:

   Si x corresponde a la cantidad de hilo usado para construir la circunferencia tenemos que, la función que modela la suma de las áreas en función de esta variable es

   $$A(x) = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \pi + \left(\frac{L-x}{4}\right), \text{ con } x \in (0, L)$$

   de esta forma tenemos que

   $$A'(x) = \frac{(1+\pi)x - \pi L}{2\pi}$$

   obteniendo que

   $$A'(x) = 0 \text{ si y sólo si } x = \frac{\pi}{\pi+1}L$$

   y el signo cambia de + a - en ese punto por lo que en dicho punto se alcanza el mínimo de $A(x)$, es decir se deeb utilizar $\frac{\pi}{\pi+1}L$ cantidad de hilo para la construcción de la circunferencia.

   Distribución de puntajes:

   - (2 punto) por la construir $A(x)$.
   - (1 punto) por encontrar candidato.
   - (1 punto) por justificar que lo encontrado es mínimo.
   - (2 punto) Por responder la pregunta

3. a) Demuestre que para todo $0 < a < b$ se tiene que

$$1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1.$$

Solución:

Considere la función $f(x) = \ln(x)$ y $0 < a < b$, con esto tenemos que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), por lo tanto, por el Teorema del Valor Medio, tenemos que, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{1}{c} = \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a}.$$

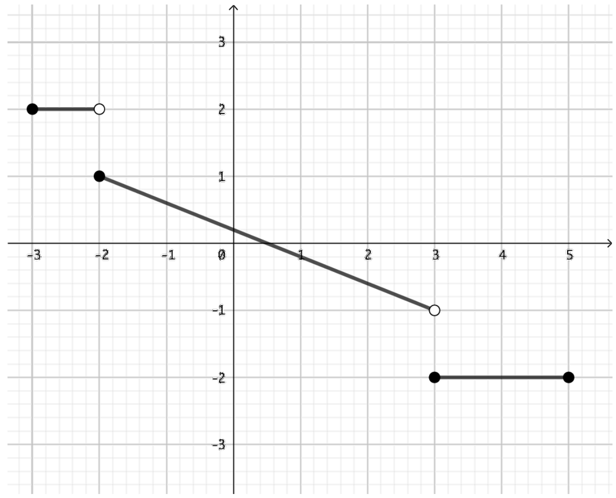
Por otra parte tenemos que como $c \in (a, b)$, tenemos que $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$ obteniendo que

$$1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por chequear hipótesis de TVM.
- (1 punto) por conclusión del TVM.
- (1 punto) por reordenar para obtener lo pedido.

b) Calcule el valor de $\displaystyle\int_{-3}^{5} 2f(x)dx$, donde f es la función cuyo gráfico es el de la figura adjunta.



Solución:

Por propiedades de la integral, tenemos que $\displaystyle\int_{-3}^{5} 2f(x)dx = 2\int_{-3}^{5} f(x)dx$ y que $\displaystyle\int_{-3}^{5} f(x)dx$ corresponde al área de la región sobre el eje X menos el área de la región bajo el eje obteniendo que

$$\int_{-3}^{5} 2f(x)dx = 2\left(2+\frac{5}{4}-\frac{5}{4}-4\right) = -4$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por la propiedad de linealidad.
- (1 punto) por interpretación de área.
- (1 punto) por calcular.

4. Sea f la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \ln(e^x + e^{-x}).$$

a) Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + \ln(1 + e^{-2x}) = -x + \ln(1 + e^{2x}).$$

Solución:

Observemos que f es una función definida en todo $\mathbb{R}$ y que

$$f(x) = \ln(e^x(1 + e^{-2x})) = x + \ln(1 + e^{-2x}),$$

análogamente tenemos que

$$f(x) = \ln(e^{-x}(1 + e^{2x})) = -x + \ln(1 + e^{2x}).$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por la primera igualdad.
- (1 punto) por la segunda igualdad.

b) Concluya, del inciso anterior, que las rectas de ecuaciones $y = x$ y $y = -x$ son asíntotas oblicuas para la curva en $+\infty$ y $-\infty$ respectivamente.

Solución:

Como

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to-+\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0,$$
$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(1 + e^{2x}) = 0,$$

entonces las rectas de ecuaciones $y = x$ y $y = -x$ son asíntotas oblicuas a la curva en $\pm\infty$ respectivamente.

No hay asíntotas ni horizontales ni verticales

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por la asíntota $y = x$
- (1 punto) por la asíntota $y = -x$

c) Determine los intervalos de monotonía y cóncavidad de f, sus valores extremos y puntos de inflexión.

Solución:

Calculando la derivada obtenemos que

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x + e^{-x}}.$$

El signo de f' sólo depende del signo de $1 - e^{-2x}$ y

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$$

Por lo tanto

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
var. de$f$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

f' tiene un mín local $f(0) = \ln 2$. Para estudiare la cóncavidad veamos que

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0. \end{aligned}$$

Así f es cóncava hacia arriba sobre todo $\mathbb{R}$ y no hay puntos de inflexión porque f'' no cambia de signo.

Distribución de puntajes:

- (0.5 punto) por monotonía.
- (0.5 punto) por extremos.
- (0.5 punto) por cóncavidad.
- (0.5 punto) por inflexión.