PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer Semestre 2015

MAT1203 - Álgebra Lineal
Examen - jueves 25 de junio - solución

1. a) Sea $T : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ transformación lineal tal que

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ T(1+t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ \text{y } T(1+t^2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Determine una base y la dimensión para el $\mathrm{Ker}(T)$ y para la $\mathrm{Im}(T)$.

Solución:

1,5p

Del enunciado se tiene:

$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ y } T(t^2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto la matriz respecto a las bases canónicas es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Escalonando $\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Luego el $\underbrace{\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Gen}\{t-1, t^2-1\}}_{1p}$ y la $\underbrace{\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}}_{0{,}5p}$.

También pueden tomar matriz c/r a base $\{1, 1+t, 1+t^2\}$ y canónica

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Si A es una matriz de 5×4, demuestre que

$$\operatorname{Dim}(\operatorname{Ker}(A^t)) = 1 + \operatorname{Dim}(\operatorname{Ker}(A)).$$

Solución:

Por teorema de las dimensiones $4 = \operatorname{Dim}\operatorname{Ker}(A) + \operatorname{Dim}\operatorname{Im}(A)$. } 1p

Por teorema de las dimensiones $5 = \operatorname{Dim}\operatorname{Ker}(A^t) + \operatorname{Dim}\operatorname{Im}(A^t)$. } 1p

Pero $\operatorname{Dim}\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Dim}\operatorname{Im}(A^t)$. } 0,5p

Restando y reemplazando:

$\operatorname{Dim}(\operatorname{Ker}(A^t)) = 1 + \operatorname{Dim}(\operatorname{Ker}(A))$. } 0,5p

2. a) Diagonalice $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, y encuentre N tal que $N^3 = M$.

Solución:

1,5p

Los valores propios son 1 y 2.

$E_1 = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $E_2 = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

0,5p

Entonces $M = PDP^{-1}$ con $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1p

Para la matriz N basta tomar $N = PD_3P^{-1}$ con $D_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{2} \end{bmatrix}$.

Asií $N^3 = (PD_3P^{-1})^3 = PD_3^3P^{-1} = PDP^{-1} = M$.

b) Sea A una matriz de $n \times n$ no nula tal que A^2 es la matriz nula. Demuestre que si λ es valor propio de A, entonces $\lambda = 0$.

Solución:

1p

Si λ es valor propio de A, entonces existe $u \neq \vec{0}$ tal que $Au = \lambda u$.

2p

Multiplicando por A se tiene $A^2u = \lambda Au$.

Reemplazando queda $\vec{0} = \lambda^2 u$, como u es no nulo, entonces $\lambda^2 = 0$ y $\lambda = 0$.

3. a) Calcule la proyección de $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sobre $U = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Solución:

0,5p Se pide $u = Ax$ con $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1p Para encontrar x se resuelve $A^t A x = A^t v$, es decir $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

1p Resolviendo queda $x = (1/17) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/17 \\ 15/17 \end{bmatrix}$.

0,5p Luego $u = \begin{bmatrix} 6/17 \\ 9/17 \\ 27/17 \\ 15/17 \end{bmatrix}$.

b) Diagonalice ortogonalmente la matriz $L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.

Solución:

1p Los valores propios son 3 y -3.

$E_3 = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ y $E_{-3} = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

1,5p Ortogonalizando queda:

$E_3 = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}$ y $E_{-3} = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}$.

0,5p Luego $L = PDP^t$ con $P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

4. Decida justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1,5p

a) Si A es una matriz de 3×3 diagonalizable, entonces A tiene 3 valores propios distintos.

Solución:

Falso.

Basta tomar po ejemplo la matriz identidad que es diagonal y tiene 3 valores propios iguales.

1,5p

b) Si P y Q son matrices ortogonales de $n \times n$, entonces PQ es una matriz ortogonal.

Solución:

Verdadero.

Se sabe que $P^t = P^{-1}$ y $Q^t = Q^{-1}$.

Entonces $(PQ)^t = Q^t P^t = Q^{-1} P^{-1} = (PQ)^{-1}$.

c) De todas las funciones de la forma $f(x) = a\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)$ la que pasa más cerca (usando mínimos cuadrados) de los puntos $(0,1)$, $(\pi/2, 1/2)$ y $(\pi, 3/2)$ es la función

1,5p

$$F(x) = (-1/4)\cos(x) + (1/2)\,\mathrm{sen}(x).$$

Solución:

Verdadero.

Se busca una función tal que $a = 1$, $b = 1/2$ y $-a = 3/2$.

Como el sistema no tiene solución se busca minimizar la norma de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, queda $a = -1/4$ y $b = 1/2$.

1,5p

d) Sea A una matriz de 5×3. A es inyectiva si y sólo si A^tA es invertible.

Solución:

Verdadero.

$(\rightarrow)$ Suponiendo A inyectiva, si $A^tAu = \vec{0}$ multiplicando por u^t queda $(Au)^t(Au) = 0$. Luego $Au = \vec{0}$. Pero A es inyectiva (Ker trivial) entonces $u = \vec{0}$.

$(\leftarrow)$ Suponiendo A^tA invertible , si $Au = \vec{0}$ multiplicando por A^t queda $A^tAu = \vec{0}$. Pero A^tA es invertible (Ker trivial) entonces $u = \vec{0}$.

$\hookrightarrow$ descontar 0,5p si falta esto

descontar 1p si falta esto