PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer semestre 2022

MAT1620 ⋆ Cálculo 2
Interrogación 2

1. Sean $P(1,2,3)$, $Q(1,-1,-2)$ y $R(0,0,0)$ tres puntos en $\mathbb{R}^3$.

   a) Encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos P, Q y R.

   b) Encuentre el área del triángulo formado por PQR.

   c) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano de la parte a).

a) Para encontrar $\vec{n}$, el vector normal al plano, debemos calcular $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Ya que como $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ están en el plano, el producto cruz de los dos vectores será perpendicular a este.

$\overrightarrow{PQ} = \langle 1-1, -1-1, -2-2 \rangle = \langle 0, -3, -5 \rangle$

$\overrightarrow{PR} = \langle 0-1, 0-2, 0-3 \rangle = \langle -1, -2, -3 \rangle$

$$\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -3 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= i(9-10) - j(0-5) + k(0-3)$$
$$= -i + 5j - 3k$$
$$= \langle -1, 5, -3 \rangle$$

Luego debemos escoger uno de los tres puntos y escribir la ecuación del plano. Así, escogemos $R(0,0,0)$ y tenemos la ecuación del plano

$$-1(x-0) + 5(y-0) - 3(z-0) = 0$$

b) Área $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}\left|\langle -1, 5, -3 \rangle\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + (5)^2 + (-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{35}$

c) El vector director de la recta es el mismo que vector $\vec{n} = \langle -1, 5, -3 \rangle$. De esta forma, la recta pedida es

$$\mathcal{L} : (1,2,3) + t\langle -1, 5, -3 \rangle$$

2. a) Grafique las curvas de nivel de la función $f(x,y) = x^2 - 4y^2$, para $c = --1, 0, 1$

   b) Determine y grafique el dominio de la función $f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$.

a) Las curvas de nivel para $c = -1, 1$, están dadas por las hipérbolas

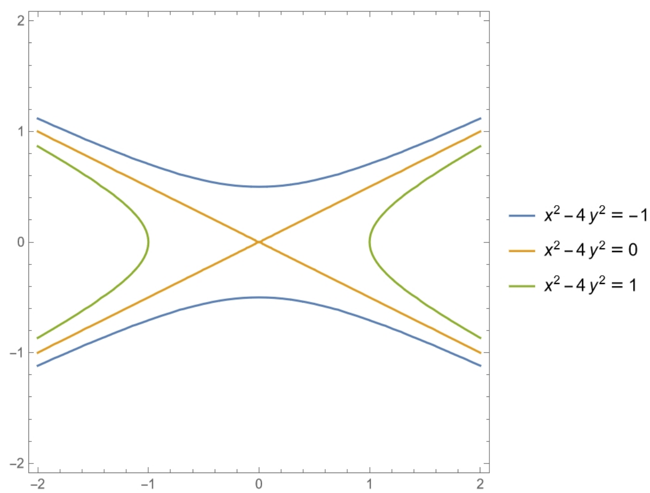
$$x^2 - 4y^2 = -1 \iff \frac{y^2}{(1/2)^2} - \frac{x^2}{1^2} = 1$$

$$x^2 - 4y^2 = 1 \iff \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(1/2)^2} = 1$$

y por las rectas

$$x^2 - 4y^2 = 0 \iff (x-2y)(x+2y) = 0 \iff x - 2y = 0 \vee x + 2y = 0$$

Así, obtenemos el gráfico de las curvas de nivel

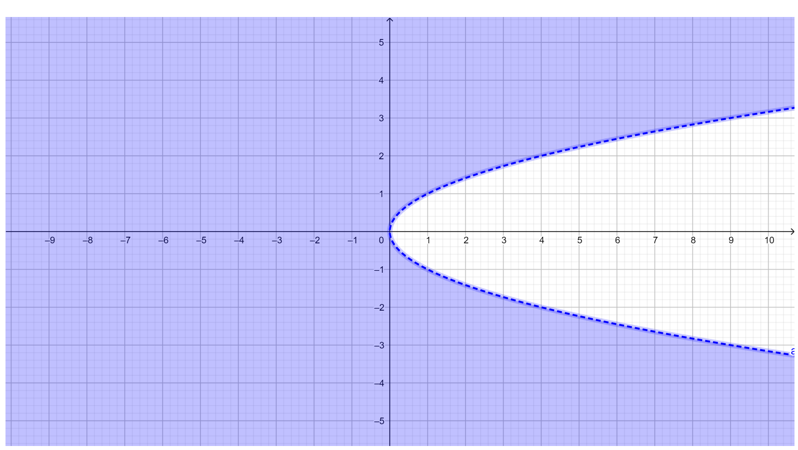


b) Determine y grafique el dominio de la función $f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$.

El dominio de f es

$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x > 0\right\}$$

que corresponde a una región en el plano cartesiano cuyo gráfico es

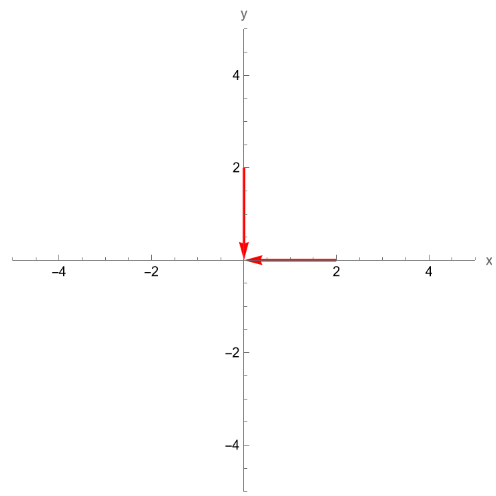


3. Analice los siguientes límites. Si el límite existe calcúlelo, si el límite no existe demuéstrelo.

a) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2y^2-1}{xy-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(xy-1)(xy+1)}{xy-1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} xy+1 = 2$

b) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Calcularemos el límite por dos trayectorias distintas para demostrar que el límite no existe



Primero calculamos el límite por la recta $x = 0$ con $y > 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to0^+} \frac{y}{\sqrt{y^2}} = \lim_{y\to0^+} \frac{y}{y} = 1$$

luego, el límite por la recta $y = 0$ con $x > 0$ tenemos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y-x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{-x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to0^+} \frac{-x}{x} = -1$$

Como obtenemos valores distintos para el límite al acercarnos a $(0,0)$ por dos trayectorias distintas, podemos concluir que el límite no existe.

c) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Usando coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{r\to0} \frac{2r\cos\theta\cdot r\sin\theta}{\sqrt{r^2}} \\
&= \lim_{r\to0} \frac{2r^2\cos\theta\sin\theta}{r} \\
&= \lim_{r\to0} \cancelto{0}{2r} \cdot \underbrace{\cos\theta\sin\theta}_{\text{acotado}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

4. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos y \sin x}{x} & x \neq 0 \\ \cos y & x = 0 \end{cases}$

a) ¿Es f continua en $(0,0)$?

Para estudiar la continuidad debemos comparar $f(0,0)$ con $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

Por un lado tenemos

$$f(0,0) = \cos 0 = 1$$

por otro

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos y \sin x}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos y \cdot \frac{\sin x}{x}$$

ahora, como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos y = \cos 0 = 1$$

y

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \\ &\qquad = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos y \sin x}{x} \\ &\qquad = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos y \cdot \frac{\sin x}{x} \\ &\qquad = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos y \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{x} \\ &\qquad = 1 \cdot 1 \\ &\qquad = 1 \end{aligned}$$

De esta forma, como $f(0,0) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, podemos concluir que f es continua en $(0,0)$.

b) ¿Es f continua en todo $\mathbb{R}^2$?(pista: los cálculos son similares a los de la parte a), aprovéchelos)

Si $x \neq 0$ podemos evaluar el límite directamente y si $x = 0$ haciendo un análisis similar a la parte a) obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,b)} \frac{\cos y \sin x}{x} = \cos b = f(0,b)$$

por lo que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.