Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2015

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Interrogación N° 2

Corrección

- Pregunta 1: Ignacio Madrid
- Pregunta 2: Jorge Gómez
- Pregunta 3: Nicolás Espinoza
- Pregunta 4: Hernán González
- Pregunta 5: José González
- Pregunta 6: Eirk Contreras
- Pregunta 7: Sebastián Soto

1. Estudie la convergencia de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

   Solución. Racionalizando la sucesión a_n que se está sumando tendremos

$$a_n = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$$

   Alternativa 1. criterio de comparación.

   Agrandado el denominador intercambiando $\sqrt{n}$ por $\sqrt{n+2}$ obtendremos

$$\frac{1}{n+2} \leq \frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$$

   Luego,

$$\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}$$

   Por lo tanto, la serie diverge (no converge).

   Alternativa 2. criterio de comparación al límite.

   Eligiendo $b_n = \dfrac{1}{n}$ obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

   Puesto que la serie de términos b_n es divergente (no converge), se deduce que la serie de términos a_n también lo es.

   Evaluación. Asignar (**2 ptos**) por dar una representación racionalizada de la sucesión a_n.

   Si utiliza el criterio de comparación: asignar (**2 ptos**) por encontrar una buena cota inferior para a_n (no es necesario demostrarla pero el corrector debe verificar que la cota sirve). Asignar (**2 ptos**) por concluir que la serie diverge (o no converge).

   Si utiliza el criterio de comparación al límite: asignar (**2 ptos**) por encontrar una sucesión b_n con la cual el límite entrega un número positivo finito (no basta con determinar la sucesión b_n sino que además debe calcular correctamente el límite para asignar el puntaje). Asignar (**2 ptos**) por concluir que la serie diverge (o no converge).

2. Estudie la convergencia de la serie: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Solución.

Alternativa 1. CRITERIO DE COMPARACIÓN.

Sabemos que $\ln(1+x) \leq x$ (hay que dar una demostración de este hecho), luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

siendo esta última suma convergente.

DEMOSTRACIÓN. $\ln(1+x) \leq x$.

Sea $F(x) = x - \ln(1+x)$, luego

- $F(0) = 0$,
- $F'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} > 0$, para todo $x > 0$.

Por lo tanto $F(x)$ es creciente y en particular $F(x) \geq 0$.

Alternativa 2. CRITERIO DE COMPARACIÓN AL LÍMITE.

Eligiendo $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1
\end{aligned}$$

Puesto que la serie de términos b_n converge, se deduce que la serie original también converge.

Evaluación.

Criterio de comparación: Asignar (**2 ptos**) por asegurar que $\ln(1+1/n) \leq \dfrac{1}{n}$ y asignar (**2 ptos**) por concluir que la serie converge. Este puntaje se asignará independientemente si se da una demostración de la desigualdad.

Asignar (**2 ptos**) por demostrar la desigualdad.

Criterio de comparación al límite: Asignar (**2 ptos**) por elegir la sucesión b_n y asignar (**2 ptos**) por calcular el límite del cociente a_n/b_n o b_n/a_n. Asignar (**2 ptos**) por concluir (si los pasos anteriores fueron correctos) que la serie converge.

3. Determine si la siguiente integral es convergente o divergente.

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solución.

Alternativa 1.

El único punto de indefinición de la función integrando (en el intervalo de integración) es $x = 0$. De este modo,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_a^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\sqrt{x}\ln(x)\Big|_a^1 - 2\int_a^1 \sqrt{x}\,dx \\ &= -2\sqrt{a}\ln(a) + \frac{4}{3}(a^{3/2} - 1)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx = -\frac{4}{3}$$

y se concluye que la integral converge.

Evaluación. Asignar (**2 ptos**) por definir la integral de tipo II como un límite. Asignar (**2 ptos**) por calcular la integral resultante. Asignar (**2 ptos**) por calcular el límite correctamente y concluir que la integral converge.

Alternativa 2.

La función $f(x) = -\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ es positiva sobre el intervalo $(0, 1)$. Eligiendo $g(x) = \dfrac{1}{x^{1/2+\epsilon}}$ (el alumno puede elegir cualquier $0 < \epsilon < 1/2$) se tendrá que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Luego, aplicando el criterio de comparación al límite se tiene

$$\int_0^1 g(x)\,dx < \infty \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 f(x)\,dx < \infty$$

En este caso,

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{1/2 - \varepsilon} < \infty$$

Por lo tanto, la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

Evaluación. Asignar (**2 ptos**) por identificar una función g que sirva para concluir la convergencia, si la función no sirve no se asignará puntaje al alumno. Asignar (**2 ptos**) por calcular el límite del cociente entre f y g. Asignar (**2 ptos**) por demostrar (calcular) que la integral de g converge y concluir (explícita o implícitamente) que la integral de f converge.

IMPORTANTE. El criterio funciona si ambas funciones son positivas (en el ejemplo expuesto) o ambas negativas (el razonamiento es similar). Si el alumno no se percata de este hecho, descontar (**2 ptos**).

4. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o si no converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$$

Solución. Definamos $a_n = \dfrac{(-2)^n}{n^n}$.

Alternativa 1. CRITERIO DE LA RAÍZ.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

Por lo tanto, la serie converge absoltamente.

Alternativa 2. CRITERIO DE LA RAZÓN.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(1+1/n)^n} = 2 \cdot 0 \cdot e^{-1} = 0$$

Por lo tanto, la serie converge absoltamente.

Alternativa 3. CRITERIO DE COMPARACIÓN.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-2)^n}{n^n} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2 - 1 < \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie converge absoltamente.

Evaluación. Asignar (**2 ptos**) por elegir el criterio, (**2 ptos**) por calcular el límite y (**2 ptos**) por concluir que es absolutamente convergente.

5. Calcule el límite de la sucesión

$$\left\{\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \dots\right\}$$

Nota. Suponer que el límite existe.

Solución.

Alternativa 1. La sucesión a_n se puede escribir de la siguiente manera:

$$a_n = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}$$

luego,

$$a_n = 2^{\frac{1}{2}\left(\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)}\right)}$$

Calculando el límite obtendremos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2$$

Alternativa 2.

La sucesión se puede escribir de forma recursiva:

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2}$$

Sabiendo que el límite existe, aplicamos límite en la igualdad anterior obteniendo que el límite L satisface

$$L = \sqrt{2L}$$

que tiene solución $L = 0, 2$. El límite es $L = 2$ ya que $a_{n+1} \geq \sqrt{a_n}$. Esta última afirmación se debe a que

$$a_{n+1} = a_n 2^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

Evaluación.

ALTERNATIVA 1. Asignar (**2 ptos**) por representar la sucesión como 2^{suma}, (**2 ptos**) por calcular la suma y (**2 ptos**) por calcular el límite.

ALTERNATIVA 2. Asignar (**2 ptos**) por representar la sucesión de forma recursiva, (**2 ptos**) por calcular correctamente los dos valores de L, (**2 ptos**) por argumentar por qué el límite debe ser 2. Si el argumento no se justifica, entonces se asignará solo (**1 ptos**).

6. Determine el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

Solución. Es claro que,

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1} \right) dx = \int_0^{\infty} \frac{(3-C)x^2 + x - C}{(x^2+1)(3x+1)} dx$$

luego $C = 3$. En este caso la integral quedado por

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1} \right) dx &= \lim_{R\to\infty} \int_0^{R} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1} \right) dx \\ &= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{2} \ln(R^2+1) - \ln(3R+1) \right) \\ &= -\ln(3) \end{aligned}$$

Evaluación. Asignar (**2 ptos**) por determinar el valor de C (no es necesario justificación pero sí que esté explícita la fracción que permite deducirla). Asignar (**2 ptos**) por calcular correctamente la integral sobre el intervalo $[0, R]$. Asignar (**2 ptos**) por calcular correctamente el límite.

7. El significado de la representación decimal de un número $0.d_1d_2d_3\ldots$ (donde el dígito d_i es uno de los números $0, 1, 2, \ldots, 9$) es que

$$0.d_1d_2d_3\ldots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \ldots$$

Demuestre que esta serie siempre es convergente.

Indicación. Demuestre que la suma parcial s_n de la serie es creciente y acotada.

Solución. Definamos la suma parcial

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{10^k}$$

siendo d_k uno de los números $0, 1, 2, \ldots, 9$. Es claro que

$$s_{n+1} = s_n + \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} \geq s_n$$

por tanto s_n es una sucesión creciente.

Por otro lado, los $d_k \leq 9$ entonces

$$s_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10} \left(\frac{1}{1-(1/10)} \right) = 1$$

Por lo tanto $s_n \leq 1$, en otras palabras la sucesión es acotada (superiormente).

Sabemos que toda sucesión monótona (creciente) y acotada (superiormente) converge, lo que concluye nuestra demostración.

Evaluación. Asignar (**2 ptos**) por demostrar que la sucesión s_n es creciente, (**2 ptos**) por demostrar que s_n es acotada superiormente y (**2 ptos**) por concluir que la sucesión converge. Si no concluye al final de la demostración o no mencionó que esto es necesario para probar convergencia, solo asignar (**1 ptos**) al final de la demostración siempre y cuando lo anteriormente demostrado esté correcto.

8. [**MAPLE**] Considere la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}.$$

Escribas las instrucciones o comandos necesarios de maple para:

(a) Calcular S_n, las sumas parciales asociadas, para $n = 100, 1000, 10000$.

(b) Verifique, utilizando el criterio de la integral, que la serie dada es convergente.

(c) Entregue una estimación de la serie dada. (utilice la parte anterior).

TIEMPO: 120 MINUTOS

SIN CONSULTAS

SIN CALCULADORA

PROHIBIDO TENER CELULAR SOBRE LA MESA