Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2015

**MAT1610 ⋆ Cálculo I**

Solución a la Interrogación N° 1

1. [**Problema 2.5.42 del texto**]

   Encuentre los valores de $a$ y $b$ que hacen que $f$ sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

**Solución:**

Se debe asegurar la continuidad de $f$ en los puntos $x = 2$ y $x = 3$ pues en el resto de los puntos $f$ es continua por propiedades de las funciones continuas.

Para $x = 2$ se debe tener que: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 4a - 2b + 3$, lo que implica que:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2^-} (x+2) = 4,$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (ax^2 - bx + 3) = 4a - 2b + 3$$

La continuidad de $f$ en $x = 2$ obliga a: $\qquad 4a - 2b + 3 = 4 \qquad (1).$

Análogamente, para $x = 3$, se debe tener $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 6 - a + b$, lo que implica que:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (ax^2 - bx + 3) = 9a - 3b + 3$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2x - a + b) = 6 - a + b$$

La continuidad de $f$ en $x = 3$ obliga a: $\qquad 9a - 3b + 3 = 6 - a + b \qquad (2).$

Resolviendo (1) y (2) se obtiene

$$a = b = \frac{1}{2}$$

2. **[Problema 2.6.22 del texto]**

   Calcule (si existe) el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}.$$

   **Solución:**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}}.$$

3. **[Problema 3.3.10 del texto]**

   Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \frac{1+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}$$

   **Solución:**

   Usando la regla del cociente se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+\operatorname{sen} x)'(x+\cos x)-(1+\operatorname{sen} x)(x+\cos x)'}{(x+\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x(x+\cos x)-(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)}{(x+\cos x)^2} \\ &= \frac{x\cos x+\cos^2 x-1+\operatorname{sen}^2 x}{(x+\cos x)^2} \\ &= \frac{x\cos x}{(x+\cos x)^2} \end{aligned}$$

4. **[Problema 3.1.53 del texto]**

   Demuestre que el gráfico de la función $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene tangentes paralelas a la recta $y = 4x - 5$.

   **Solución:**

   Las rectas tangentes al gráfico de la función $f(x) = 6x^3 + 5x - 3$ tienen una pendiente que viene dada por la derivada $f'(x) = 18x^2 + 5$. Por otra parte, la recta $y = 4x - 5$ tiene pendiente 4.

   Comparando (como $x^2 \geq 0$ para todo $x$)

$$18x^2 + 5 \geq 5 > 4, \quad \text{para todo}\, x.$$

   Luego, las tangentes al gráfico de $6x^3 + 5x - 3$ no pueden tener pendiente 4, que es la pendiente de la recta $y = 4x - 5$, por lo que no pueden ser paralelas a esta última.

5. [**Basado en el Problema 2.8.25 del texto**]

   Use la definición de derivada para calcular la derivada de

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

   **Solución:**

   Tenemos (definición de derivada) que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 + (x+h)^2} - \sqrt{1 + x^2}}{h}.$$

   Amplificando por $\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2}$, tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{1 + (x+h)^2} - \sqrt{1 + x^2})(\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2})}{h(\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(1 + (x+h)^2) - (1 + x^2)}{h(\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2})} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + (x+h)^2) - (1 + x^2)}{h(\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h(\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2})} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h(\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2x + h}{\sqrt{1 + (x+h)^2} + \sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$

   Por propiedades de los límites, este límite es

$$f'(x) = \frac{\lim_{h \to 0} 2x + h}{\lim_{h \to 0} \sqrt{1 + (x+h)^2} + \lim_{h \to 0} \sqrt{1 + x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

6. [**Problema 2.8.55 del texto**]

   Demuestre, usando la definición de derivada, que la derivada de una función par es impar.

   **Solución:**

   Sea $f(x)$ una función par cualquiera —o sea, $f(-x) = f(x)$ para todo $x$ en el dominio de $f$—, y sea $g(x) = f'(x)$ su derivada. Debemos demostrar que $g(x)$ es una función impar, o sea, que $g(-x) = -g(x)$ para cada $x$ en su dominio.

   Así, por la definición de derivada, $g(-x) = f'(-x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(-x+h) - f(-x)}{h}$.

   Como $f$ es una función par, tenemos que

$$g(-x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}.$$

   Para cada $h \neq 0$, sea $u = -h$. Como cuando $h \to 0$ (sin ser nunca 0) $u = -h$ también $\to 0$ (y nunca se hace 0), tenemos que

$$g(-x) = -\lim_{u \to 0} \frac{f(x+u) - f(x)}{u} = -f'(x) = -g(x)$$

   como queríamos demostrar.

7. ¿Existe el límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\operatorname{sen} x|}{x^2+x}$? De ser así, calcúlelo; en caso contrario, explique por qué no existe.

**Solución:**

Calculamos los límites por la derecha y por la izquierda.

Por la derecha tenemos $|\operatorname{sen}(x)| = \operatorname{sen}(x)$ y por lo tanto para $x > 0$ tenemos

$$\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^2+x} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2+x}.$$

En consecuencia

$$\lim_{x\to 0^*} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^*} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^*} \left( \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \cdot \frac{1}{1+x} \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

De manera análoga,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x^2+x} = -1.$$

Por lo tanto los límites por la derecha y la izquierda son diferentes y el límite buscado NO existe.

8. Suponga que $f$ es una función que cumple la propiedad $|f(x)| \leq \operatorname{sen}^2 x$ para todo $x$. Demuestre que $f(0) = 0$, y calcule $f'(0)$.

**Solución:**

Como

$$0 \leq |f(0)| \leq \operatorname{sen}^2(0) = 0$$

se tiene que $f(0) = 0$.

Para calcular la derivada hacemos el cociente de diferencias

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h}$$

y observamos que

$$0 \leq \left| \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \right| = \left| \frac{f(h)}{h} \right| \leq \left| \frac{\operatorname{sen}^2(h)}{h} \right|.$$

Como

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(h) = 1 \cdot 0 = 0,$$

tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{\operatorname{sen}^2(h)}{h} \right| = 0$$

y por el teorema del sandwich tenemos

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \right| = 0.$$

Esto implica

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = 0$$

y por lo tanto

$$f'(0) = 0.$$