PREGUNTA 1

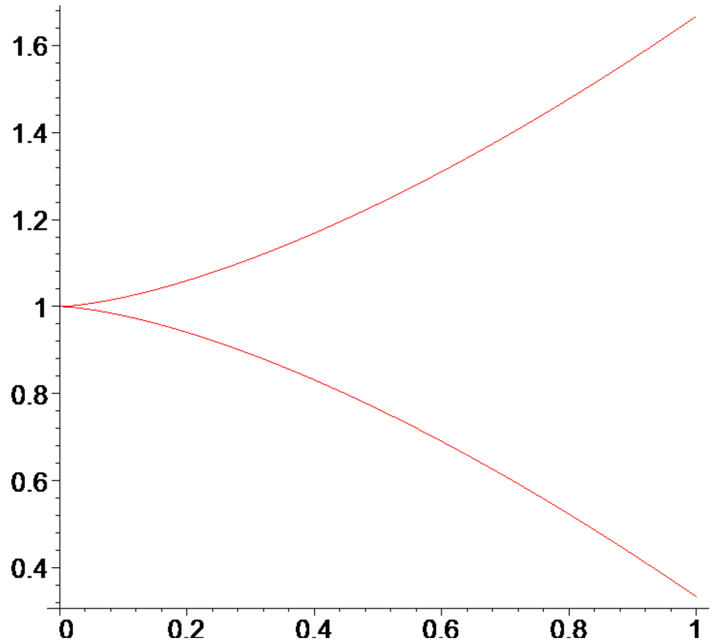
PARTE A)

La curva se describe por la siguiente gráfica

```
> with(plots):  x:=t->t^2 ; y:=t->(2/3)*t^3+1;
  curva1:=plot([x(t),y(t),t=-1..1]): display(curva1);
```

$$x := t \to t^2$$

$$y := t \to \frac{2}{3}t^3 + 1$$



Calculemos su longitud

```
> L:=Int(abs(v(t)), t=-1..1);  v(t):= Matrix( [ Diff(x,t) ,
  Diff(y,t)]);
```

$$L := \int_{-1}^{1} \left| \mathrm{v}(t) \right| dt$$

$$\mathrm{v}(t) := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}x & \frac{\partial}{\partial t}y \end{bmatrix}$$

donde v(t) es el vector velocidad . Calculando,

```
> Rapidez:=t-> sqrt( (eval(diff(s^2,s),s=t))^2+
  (eval(diff((2/3)*s^3+1,s),s=t))^2 ): Rapidez(t);
```

$$2\sqrt{t^2 + t^4}$$

```
> L:=Int(Rapidez(t), t=-1..1);
```

$$L := \int_{-1}^{1} 2\sqrt{t^2+t^4}\, dt$$

Integral que por sustitución trigonométrica **t = tan(s)** se transforma en

```
> Int(Rapidez(t), t=-1..1) = 2*Int((sec(s))^4*sin(s), s=-Pi/4..
  Pi/4) ; L = 4*Int((sec(s))^4*sin(s), s=0.. Pi/4);
```

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt{t^2+t^4}\, dt = 2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec(s)^4 \sin(s)\, ds$$

$$\int_{-1}^{1} 2\sqrt{t^2+t^4}\, dt = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec(s)^4 \sin(s)\, ds$$

DE ESTA FORMA LA LONGITUD DE LA CURVA ES

```
>  Longitud_curva:=4*int((sec(s))^4*sin(s), s=0.. Pi/4);
```

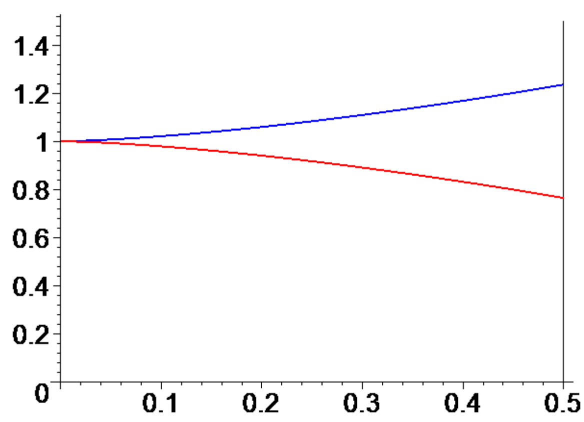
$$Longitud\_curva := -\frac{4}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

PREGUNTA 1
PARTE B)

```
> with(plots):
```

Los tiempos t donde se obtiene que 1/2= $x(t) = t^2$ son $\boldsymbol{t = \frac{1}{\sqrt{2}}}$ **y** $\boldsymbol{t = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Luego,

```
> c1:=plot([x(t),y(t), t=-1/sqrt(2)..0], thickness=2):
  c2:=plot([x(t),y(t), t=0..1/sqrt(2)],color=blue, thickness=2):
  c3:=plot([1/2,t, t=0..3/2],color=black): display(c1,c2,c3);
```



Hay que restar las áreas bajo cada una de las curvas : **la azúl menos la roja**

```
> Int(y(t)*Diff(x,t) ,t);
```

$$\int y(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}x\right)dt$$

La primera curva (color azul) es la traza **desde t = 0 hasta $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$**. Calculando se obtiene que :

```
> Int(y(t)*diff(x(t),t),t=0..1/sqrt(2));Integral_1:=
  int((2*t^3/3+1)*2*t,t=0..1/sqrt(2));
```

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y(t)\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)dt$$

$$Integral\_1 := \frac{\sqrt{2}}{30}+\frac{1}{2}$$

```
> Integral_2:=-int((2*t^3/3+1)*2*t,t=-1/sqrt(2)..0);
```

$$Integral\_2 := -\frac{\sqrt{2}}{30}+\frac{1}{2}$$

```
> Area_pedida:= Integral_1-Integral_2;
```

$$Area\_pedida := \frac{\sqrt{2}}{15}$$

PREGUNTA 2

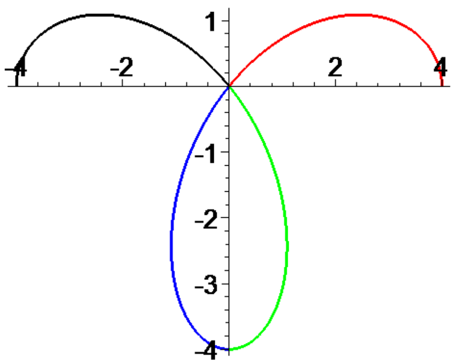
PARTE A)

La grafica de la curva esta dada por

```
> r:=t->4*cos(2*t);
```

$$r := t \to 4\cos(2\,t)$$

```
> with(plots):T1:=polarplot(r(t), t=0..Pi/4,thickness=3 ):
T2:=polarplot(r(t), t=Pi/4..Pi/2,color=blue,thickness=3):
T3:=polarplot(r(t), t=Pi/2..3*Pi/4,color=green,thickness=3
):T4:=polarplot(r(t), t=3*Pi/4..Pi,color=black,thickness=3):
display(T1,T2,T3,T4);
```



El área que ella encierra , corresponde a los pedazos verde y azul, que corresponde a la curva

$r(t) = 4\cos(2\,t)$ entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{3\,\pi}{4}$

Su área es por ejemplo, dos veces el area encerrada entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ (curva roja).

```
> Area_pedida:=2*1/2*Int(r(theta)^2,theta = 0 .. Pi/4);
```

$$Area\_pedida := \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16\cos(2\,\theta)^2\,d\theta$$

```
> Area_pedida:=2*(1/2)*int(16*(cos(2*t))^2, t=0..Pi/4);
```

$$Area\_pedida := 2\,\pi$$

También se puede haber calculado directamente como

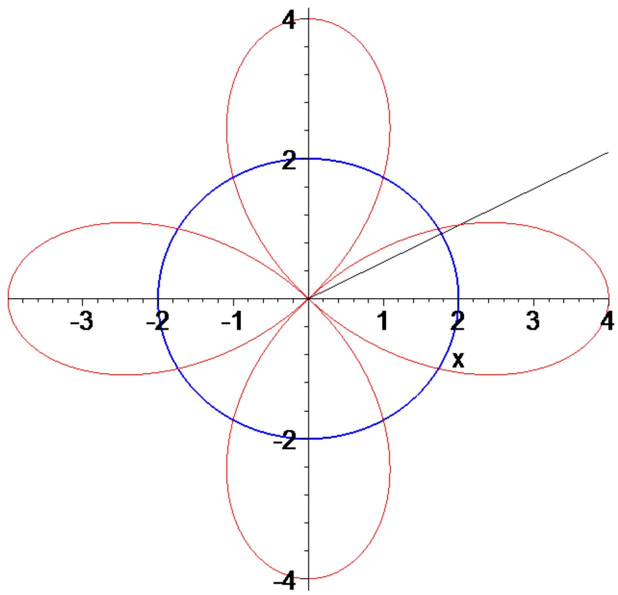
```
> A:=(1/2)*Int(16*(cos(2*t))^2,
t=Pi/4..3*Pi/4)=(1/2)*int(16*(cos(2*t))^2, t=Pi/4..3*Pi/4);
```

$$A := \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 16 \cos(2\,t)^2 \, dt = 2\,\pi$$

PREGUNTA 2
PARTE B)

```
> with(plots):
```

```
> Trebol:=polarplot(4*cos(2*t), t=0..2*Pi): recta:=
  plot(Pi/6*x,x=0..4,color=black):   Circulo:=polarplot(2,
  t=0..2*Pi,color=blue, thickness=2):display(Trebol, Circulo,recta);
```



Hay que calcular las intersecciones.   En el lado derecho se calcula t tal que $4\cos(2\,t) = 2$ es decir,

$$\cos(2\,t) = \frac{1}{2}$$

```
> p:=solve(cos(2*t) = 1/2,t);
```

$$p := \frac{\pi}{6}$$

El área B de una media luneta (son cuatro en total) está dada por

```
> B:=1/2*Int((r(t))^2-4 ,t=0..Pi/6)=1/2*int((r(t))^2-4 ,t=0..Pi/6);
```

$$B := \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} 16\cos(2\,t)^2 - 4\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$$

Luego, el área buscada ocho veces B ,   calculando se obtiene que :

```
> Area_4lunetas:=8*B;
```

$$Area\_4lunetas := 4\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} 16\cos(2\,t)^2 - 4\,dt = 4\sqrt{3} + \frac{8\,\pi}{3}$$

PREGUNTA 3

El area de la superficie de revolucion se calcula con la formula $2\,\pi \int_1^3 \mathrm{D}(t)\,ds$ donde s

representa la longitud de arco, $\mathrm{s}(t) = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial t}x\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}y\right)^2}$.

y D la distancia de P(t) = (x(t), y(t)) al eje de rotacion.

La grafica de la situacion es la siguiente

```
> restart:with(plots): x:=t->sqrt(3)*t^2;y:=t-> 3*t-1/3*t^3;
  curva3:= plot([x(t),y(t), t=-4..4], color=blue):
```

$$x := t \rightarrow \sqrt{3}\,t^2$$

$$y := t \rightarrow 3\,t - \frac{1}{3}\,t^3$$

Calculemos el pedazo de largo de curva (ds)

```
> diff(x(t),t);diff(y(t),t);
```

$$2\sqrt{3}\,t$$

$$3 - t^2$$

```
> ds_arc:=t->eval(sqrt((diff(x(s),s))^2 + (diff(y(s),s))^2),s=t);
  s:=t->eval(long_arc(s),s=t): ds=s(t)*dt;
```

$$ds\_arc := t \rightarrow \left.\sqrt{\left(\frac{d}{ds}\mathrm{x}(s)\right)^2 + \left(\frac{d}{ds}\mathrm{y}(s)\right)^2}\,\right|_{s=t}$$

$$ds = \mathrm{long\_arc}(t)\,dt$$

CALCULO DE LONGITUD de ARCO

```
> ds_arc(t);
```

$$\sqrt{(3+t^2)^2}$$

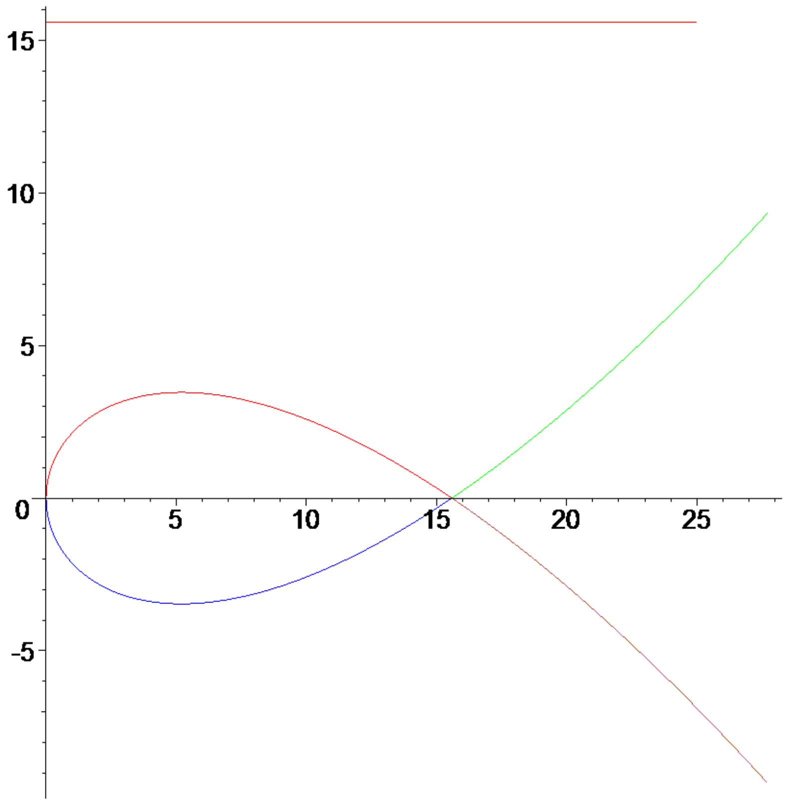
CALCULO DE AREA , Rotacion con respecto a la Linea **$Y = x(3) = 9\sqrt{3}$**

```
> 2*Pi*Int( D(t)*ds_arc(t),t=a..b);
```

$$2\,\pi \int_a^b \mathrm{D}(t)\sqrt{(3+t^2)^2}\,dt$$

donde D(t) es la distancia de (x(t) , y(t)) al eje de rotacion L : **$y = x(3)$**.

```
> linea:=plot([t,x(3),t=0..25]):curva3A:= plot([x(t),y(t), t=-3..0],
  color=blue):curva3B:= plot([x(t),y(t), t=0..3], color=red):
  curva3C:= plot([x(t),y(t), t=-4..-3],color=green):curva3D:=
  plot([x(t),y(t), t=3..4],
  color=brown):display(linea,curva3A,curva3B,curva3C,curva3D);
```



Observando la curva y el eje de rotación , las distancia a L son |(x(3) -y(t))| . Luego se obtiene que :

```
> I1:=2*Pi*Int((x(3)-y(t))*ds_arc(t),t=-3..3)=2*Pi*int((x(3)-y(t))*d
  s_arc(t),t=-3..3);
```

$$I1 := 2\pi \int_{-3}^{3} \left(9\sqrt{3} - 3t + \frac{1}{3}t^3\right)\sqrt{(3+t^2)^2}\, dt = 648\,\pi\sqrt{3}$$

```
> I2:=2*Pi*Int((x(3)-y(t))*ds_arc(t),t=-4..-3)=2*Pi*int((x(3)-y(t))*
  ds_arc(t),t=-4..-3);
```

$$I2 := 2\,\pi \int_{-4}^{-3} \left(9\sqrt{3} - 3\,t + \frac{1}{3}\,t^3\right)\sqrt{\left(3+t^2\right)^2}\,dt = 2\,\pi\left(-\frac{1225}{18} + 138\sqrt{3}\right)$$

```
> I3:=2*Pi*int((x(3)-y(t))*ds_arc(t),t=3..4);
```

$$I3 := 2\,\pi\left(\frac{1225}{18} + 138\sqrt{3}\right)$$

REPUESTA:

```
>  SOLUCION := simplify(2*Pi*int((x(3)-y(t))*ds_arc(t),t=-3..3)+
   2*Pi*int((x(3)-y(t))*ds_arc(t),t=-4..-3)+2*Pi*int((x(3)-y(t))*ds_a
   rc(t),t=3..4));
```

$$SOLUCION := 1200\,\pi\sqrt{3}$$

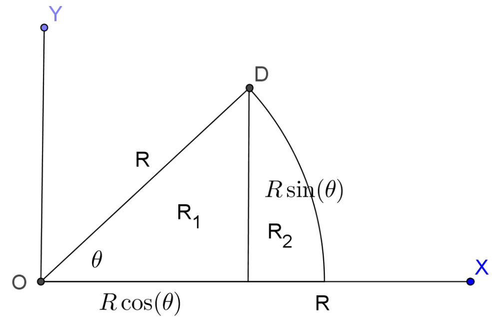
```
>
```

Problema 4

a) Determine el centro de masa de un sector circular $S(\theta, R)$ de abertura ángulo θ, $0 < \theta < \pi/2$ y radio R.

b) Calcule el volumen del sólido generado al rotar $S(\pi/4, R)$, ver figura, con respecto al eje OY.

Solución.



Utilizando la figura se observa que hay dos regiones, R_1, R_2. Calcularemos los centros de masas o centroides de cada una de ellas, $C_1 = (x_1, y_1)$, $C_2 = (x_2, y_2)$ respectivamente. Una vez encontrados se aplica el principio de los momentos, que postula que el centro de masa $C = (\bar{x}, \bar{y})$ del sector $S(\theta, R) = R_1 \cup R_2$ está dado por

$$\bar{x} = \frac{|R_1|x_1 + |R_2|x_2}{|R_1| + |R_2|}\,, \quad \bar{y} = \frac{|R_1|y_1 + |R_2|y_2}{|R_1| + |R_2|}$$

La region R_1 está por debajo de la recta $y = \tan(\theta)x$, con $0 \leq x \leq R\cos(\theta)$. Luego,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{|R_1|}\int_0^{R\cos(\theta)} \tan(\theta)x^2\,dx \\ &= \frac{R^3}{3|R_1|}\tan(\theta)\cos^3(\theta)\,. \end{aligned}$$

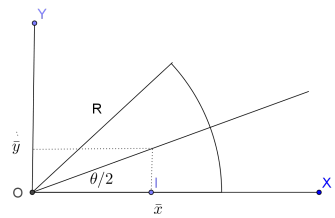
La region R_2 está por debajo de la gráfica de la función $y = \sqrt{(R^2 - x^2)}$ con $R\cos(\theta) \leq x \leq R$. Luego,

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{|R_2|}\int_{R\cos(\theta)}^{R} x\sqrt{(R^2 - x^2)}\,dx \\ &= \frac{R^3}{3|R_2|}\sin^3(\theta)\,. \end{aligned}$$

Por el principio de los momentos y sabiendo que $|R_1| + |R_2| = \frac{R^2\theta}{2}$ se obtiene que

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{2}{R^2\theta}\frac{R^3}{3}\left(\sin(\theta)\cos^2(\theta) + \sin^3(\theta)\right) \\ &= \frac{2R}{3}\frac{\sin(\theta)}{\theta}\,. \end{aligned}$$

Por simetría, el centro de masa de $S(\theta, R)$ debe estar localizado en la recta $y = \tan(\theta/2)x$



Luego, $\tan(\theta/2) = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$ lo cual implica que

$$\bar{y} = \bar{x}\tan(\theta/2) = \frac{2R}{3}\frac{\sin(\theta)}{\theta}\tan(\theta/2)\,.$$

Usando Papus, el volumen al rotar con respecto al eje OY es

$$V_\theta = 2\pi\bar{x}\,\text{Area} = \pi\frac{2R^3}{3}\sin(\theta)\,.$$

Evaluando en $\theta = \pi/4$,

$$V = \pi\,\frac{\sqrt{2}\,R^3}{3}\,.$$