RESUMEN 12 : Cálculo 1

12

1. Derivadas Orden Superior : 158 - 161
2. Reglas Derivación : Polinom y Exponenciales : 174 - 178
3. Derivada e^x : 179 - 181
4. Regla Producto y Cociente : 184 - 189
5. Regla de la CADENA : 198 - 204
6. Derivadas implícitas / inversas : 209 - 214
7. Derivada $\ln(x)$ (funciones logarítmicas) : 218 - 223
8. PROBLEMAS RAZÓN CAMBIO : 224 - 233 ~ $\underbrace{244 - 248}$
   ☆ : revisar!
9. APROXIMACIÓN Lineal y Diferencial
10. Polinomios TAYLOR (conocer) : 250 - 257
11. Valores MAX y MÍN en intervalos : 274 - 287
12. TEOREMA ROLLE : 277 - 279 ~ 284 - 285

1 DERIVADAS ORDEN SUPERIOR

a) $f' = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}$

b) $f'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = \frac{d^2y}{dx}$

⋮

c) $f(x) = 3x^3 + 2x + 1$

$f'(x) = 9x^2 + 2$

$f''(x) = 18x$

* FÍSICA :

$s(t)$: posición (tiempo)
$v(t)$: velocidad (tiempo)
$a(t)$: aceleración (tiempo)

respecto

$\boxed{a(t) = v'(t) = s''(t)}$

2 REGLAS DERIVACIÓN

a) $\frac{d}{dx}(c) = 0$

b) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

c) $\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$

d) $\frac{d}{dx}(c \cdot f(x)) = c f'(x)$

e) $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$

3) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ * e : $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

4 REGLA PRODUCTO / COCIENTE

a) $\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$

* Recordar :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

! DERIVADAS TRIGONOMETRICAS

- $\frac{d}{dx}(\text{sen } x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\text{sen } x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc(x)\cdot\cot(x)$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec(x)\cdot\tan(x)$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

5 REGLA CADENA!

1. Si g es DERIVABLE EN x
2. Si f es DERIVABLE EN $g(x)$

$$\boxed{(f \circ g)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

↳ Leibniz: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ $\qquad u = g(x)$, $y = f(u)$

- **REGLA POTENCIA/CADENA:**

$g(x) = u$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u^n) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot u'}$$

6 DERIVACIÓN implícita:

la derivada de y. En lugar de ello, aplicaremos el método de **derivación implícita**. Este método consiste en derivar ambos miembros de la ecuación respecto a x y después resolver la ecuación resultante para y'. En los ejemplos y ejercicios de esta sección, siempre se

e $\quad x^2 + y^2 = 25 \;/ \dfrac{d(\;)}{dx}$

$$\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(25)}{dx}$$

$$= 2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \iff 2x + 2yy' = 0$$

$$\boxed{y' = -\frac{x}{y}}$$

y': Podría ser la pendiente de la recta tangente a una circ.

$x^2 + y^2 = 1$

Circunf!

$\operatorname{sen}(x+y) = y^2 \;/\; \frac{dx}{dy}$

$\overset{RC}{\Leftrightarrow}$ $\operatorname{sen}'(x+y)\cdot(x+y)' = \frac{d(y^2)}{dx}$

$= \cos(x+y)\cdot(1+y') = 2y\cdot y'$

$$\frac{\cos(x+y)\cdot(1+y')}{2y} = y' \quad //$$

y'' si $x^4 + y^4 = 16$

$y' = 4x^3 + 4y^3y' = 0$

$$\boxed{y' = -\frac{x^3}{y^3}}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{3x^2\cdot y^3 - x^3 3y^2y'}{y^6}$$

Si sustituimos :

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$\vdots$

$$y'' = -48\frac{x^2}{y^7}$$

• DERIVADAS INVERSAS

1. $\left(\operatorname{sen}^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $\left(\cos^{-1}(x)\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

3. $\left(\tan^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

4. $\left(\csc^{-1}(x)\right)' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

5. $\left(\sec^{-1}(x)\right)' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

6. $\left(\cot^{-1}(x)\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

¿Como calcularlas?

1. $\operatorname{sen}^{-1} x = y \leftrightarrow \operatorname{sen} y = x \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

→ DERIVAR IMPLICIT: $\operatorname{sen} y = x \;/\; \frac{d(\,)}{dx}$

$$\cos y \cdot y' = 1$$

$$y' = \frac{1}{\cos y}$$

→ ahora $\cos y \geq 0$

$$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y}$

$\Rightarrow \cos y = \sqrt{1-x^2}$

$\operatorname{sen}^2 + \cos^2 = 1$

$\cos^2 = 1 - \operatorname{sen}^2$

$\cos = \sqrt{1-\operatorname{sen}}$

$\operatorname{sen} y = x$

$\operatorname{sen}^2 y = x^2$

Así:

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

7 DERIVADAS LOGARITMICAS

1. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$

2. $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ $\quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

3. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \cdot u'$

4. $\frac{d}{dx}(\ln(g(x))) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$

$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \cdot u'$??? } Por confirmar

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tomar logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilizar las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derivar implícitamente respecto a x.
3. Resolver la ecuación resultante para y'.

8 ESTRATEGIA RESOLUCIÓN

Estrategia de resolución de problemas Es útil recordar algunos de los principios para resolver problemas que se encuentran en la página 75 y adaptarlos a las razones de cambio relacionadas, luego de lo que aprendió en los ejemplos 1 a 3:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que están en función del tiempo.
4. Exprese la información dada y la razón requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema. Si es necesario, utilice las propiedades geométricas de la situación para eliminar una de las variables por sustitución, como en el ejemplo 3.
6. Utilice la regla de la cadena para derivar respecto a t ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y resuelva para la razón de cambio desconocida.

9 APROXIMACIÓN LINEAl

- Usamos la recta tangente en $(a, f(a))$ como A. Lineal

$$\boxed{f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)} \longrightarrow \text{Linealización de } f \text{ en } a$$

- Linealizar $f(x) = \sqrt{x+3}$ en $a = 1$ / obtener $\sqrt{3,98}$

1. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} \cdot \cancel{(x+3)'}\ 1$

$$L(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1)$$

$$2 + \frac{1}{4}(x-1)$$

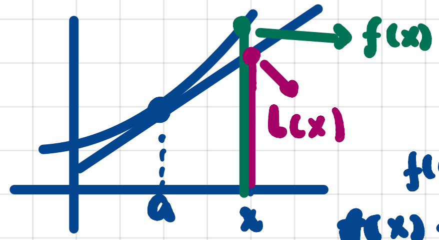
$$\frac{x}{4} + \frac{8}{4} - \frac{1}{4} = \frac{x}{4} + \frac{7}{4} \,//$$

$$\sqrt{3,98} \approx \frac{0,98}{4} + \frac{7}{4} = 1,995$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{0,98+3}$$

- **ERROR** : $\boxed{r(x) = f(x) - L(x)}$



$$\lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0 \quad \to \quad \frac{f(x) - L(x)}{x-a} \;\; \frac{f(a) - L(a)}{a} \;\; 0$$

10 POLINOMIO TAYLOR :

› **ORDEN 1** : $\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)}$

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h)}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

e Encontrar Taylor ORDEN 1 de $f(x) = \sqrt{x+4}$ cerca de $x = 0$

a $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$ → error

- $f(0) = 2$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}} = f'(0) = \dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow \sqrt{x+4} = 2 + \frac{1}{4}x + r(x)$$

$$\therefore \sqrt{x+4} \approx 2 + \frac{1}{4}x$$

cuando $x \approx 0$ (x cerca de 0)

• TAYLOR 1 de $f(x) = \ln(x)$ en $x = \frac{1}{2}$

$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + r(x)$

$\cdot \ln(\frac{1}{2})$, $\ln'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln'(\frac{1}{2}) = 2$

$$\ln(x) = \ln(\frac{1}{2}) + 2(x - \frac{1}{2}) + r(x)$$

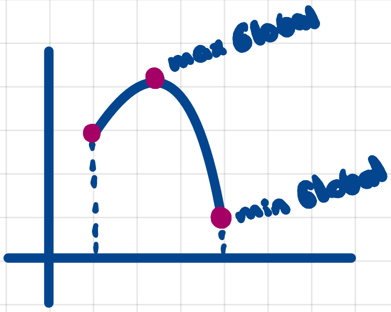
$$\ln(x) \approx \ln(\frac{1}{2}) + 2(x - \frac{1}{2})$$

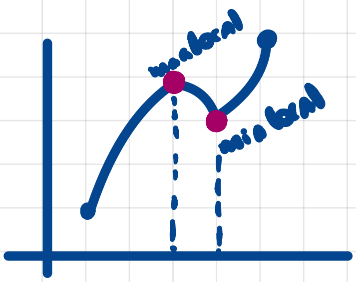
cuando x cerca de $\frac{1}{2}$)

• $\ln(0{,}51) \approx \ln(0{,}5) + 2(0{,}01)$

$x = \frac{1}{2} + 0{,}01 = 0{,}51$

11 Mínimos y Maximos





- **MAX GLOBAL**: c es maximo GLOBAL si $f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in [a,b]$
- **MIN GLOBAL**: c es min GLOBAL si $f(x) \geq f(c)$, $\forall x \in [a,b]$
- **MAX LOCAL**: c si $f(x) \leq f(c)$ si x esta cercano a c
- **MÍN LOCAL**: c si $f(x) \geq f(c)$ si x esta cercano a c
- **TEOREMA FERMAT** $\boxed{f \text{ tiene MIN/MAX local } x = c \rightarrow f'(c) = 0}$

- **METODO INTERVALO CERRADO**

› Para hallar MIN/MAX ABSOLUTOS f continua en $[a,b]$

1. Encontrar valores criticos
2. Hallar valores de f en los extremos
3. El Mayor entre 1 y 2 es MAX Absoluto

   El Menor MIN Absoluto

V EJEMPLO 8 Encuentre los valores absolutos máximo y mínimo de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 4$$

SOLUCIÓN Dado que f es continua sobre $[-\frac{1}{2}, 4]$, podemos utilizar el teorema del intervalo cerrado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Puesto que $f'(x)$ existe para toda x, los únicos valores críticos de f ocurren cuando $f'(x) = 0$; esto es, en $x = 0$ o $x = 2$. Observe que cada uno de estos números críticos está en el intervalo $(-\frac{1}{2}, 4)$. Los valores de f en estos números críticos son

$$f(0) = 1 \qquad f(2) = -3$$

Los valores de f en los puntos extremos del intervalo son

$$f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{8} \qquad f(4) = 17$$

Comparando estos cuatro números, vemos que el valor máximo absoluto es $f(4) = 17$ y el valor mínimo absoluto es $f(2) = -3$.

Encontrar ptos $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ en $[-1,2]$

1. Encontrar ptos críticos : $f'(x) = 0$

$f'(x) = 0$

$\left(x \cdot \sqrt{4-x^2}\right)' = 0$

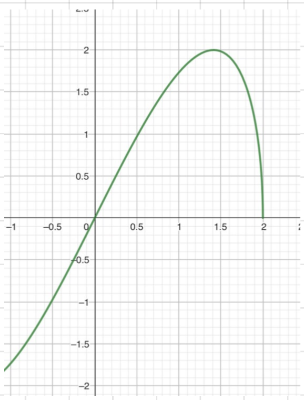
$\sqrt{4-x^2} + x \cdot \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot -2x = 0$

$\vdots$

f': $x^2 - 2 = 0$

$x = \sqrt{2} \rightarrow \checkmark$

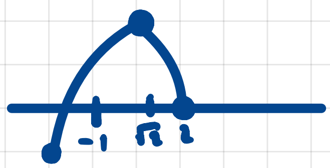
$x = -\sqrt{2} \rightarrow \notin [-1,2]$



2. Analizar pto y extremos : $f(-1) = -\sqrt{3}$

$f(\sqrt{2}) = 2$

$f(2) = 0$



CRITERIO 2ª DERIVADA

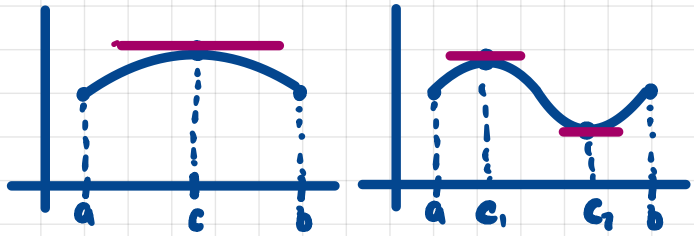
Sea x pto crítico en $f'(x) = 0$

1. Si $f''(x) > 0 \Rightarrow$ en x HAY MÍN LOCAL
2. Si $f''(x) < 0 \Rightarrow$ en x HAY MAX LOCAL
3. Si $f''(x) = 0 \Rightarrow$ TEST INCONCLUSO

• TEOREMA ROLLE

Si:

1. f cont en $[a,b]$
2. f derivable en (a,b)
3. $f(a) = f(b)$



$\Rightarrow$ ENTONCES: $\exists c \in (a,b)$ tq $\boxed{f'(c) = 0}$

RESUMEN 13 : Cálculo 1

esteban ortega :)

TEOREMA VALOR INTERMEDIO TVM

Sea f :
1. continua
2. derivable

$\exists\, c \in (a,b)$ tq :

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

COROLARIO :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } f'(x) = g'(x), \forall x \in (a,b) \\ \Rightarrow f(x) = g(x) + C \end{array}}$$

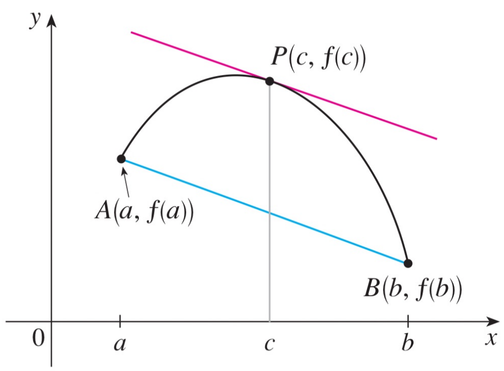


FIGURA 3

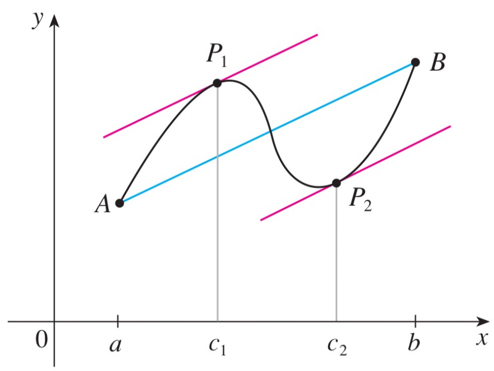


FIGURA 4

V **EJEMPLO 3** Para ilustrar el teorema del valor medio con una función específica, consideremos $f(x) = x^3 - x$, $a = 0$, $b = 2$. Puesto que f es una función polinomial, es continua y derivable para toda x, así que es ciertamente continua sobre $[0, 2]$ y derivable sobre $(0, 2)$. Por tanto, por el teorema del valor medio, existe un número $x = c$ en $(0, 2)$ tal que

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Ahora, $f(2) = 6$, $f(0) = 0$ y $f'(x) = 3x^2 - 1$, así que la ecuación resulta

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

que da $c^2 = \frac{4}{3}$, esto es, $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Pero $x = c$ debe estar en $(0, 2)$, así que $c = 2/\sqrt{3}$. La figura 6 ilustra este cálculo: la recta tangente en este valor de $x = c$ es paralela a la recta secante OB.

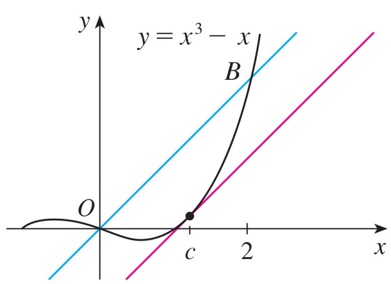


FIGURA 6

6. Si $f(0) = -3$ y $f'(x) \leq 5 \ \forall x \in \mathbb{R}$

¿Que tan grande es $f(2)$?

R: $\exists\, c \in (0,2)$ $\quad f(2) - f(0) = f'(c)(2-0)$

$$f(2) = f(0) + 2f'(c) \leq \underbrace{f(0)}_{-3} + \underbrace{2(5)}_{10} = 7$$

2 CRECIMIENTO

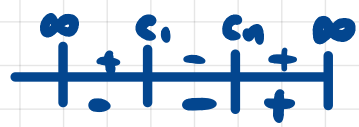
- a Si $f'(x) > 0$ en $(a,b) \Rightarrow f$ **CRECIENTE** en (a,b)
- b Si $f'(x) < 0$ en $(a,b) \Rightarrow f$ **DECRECIENTE** en (a,b)

PRUEBA 1ª DERIVADA: MIN/MAX

$x = c$ es pto críticos : $\boxed{f'(c) = 0}$

- Si f' $+ \rightarrow -$ en c : max local
- Si f' $- \rightarrow +$ en c : min local

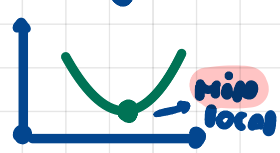
→ USAR TABLA SIGNOS:



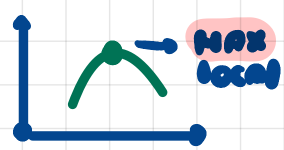
PRUEBA 2ª DERIVADA : CONCAVIDAD

$x = c$ pto crítico

- a Si $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ CONCAVA ARRIBA

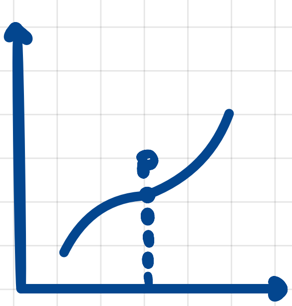


- b Si $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ CONCAVA ABAJO



PUNTOS INFLEXIÓN : $f''(x) = 0$

P de $y = f(x)$ si
- CONTINUA
- CAMBIA DE CONCAVIDAD!



3 L'HOPITAL $\left(\frac{0}{0} \text{ ó } \frac{\infty}{\infty}\right)$

Si f y g · Derivables · $g'(x) \neq 0$ en (a,b)

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ ó Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

· PRODUCTOS INDETERMINADOS

$\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = \pm\infty \longrightarrow \lim f(x) \cdot g(x) = 0 \cdot \infty$

1 $\boxed{0 \cdot \infty} = f \cdot g = \dfrac{f}{\frac{1}{g}} = \dfrac{g}{\frac{1}{f}}$

e $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \ln x = 0 \cdot -\infty$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x \,\}\infty}{\frac{1}{x}\,\}\infty} \overset{\text{L'hop}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x'}{-\frac{1}{x^2}} = -\dfrac{x^2}{x} = -x \quad \lim\limits_{x \to 0} -x = 0$ //

· DIFERENCIAS INDETERMINADOS

2 $\boxed{\infty - \infty}$: COMÚN DENOMINADOR / FACTORIZAR
↳ usar $\ln(x)$

e $\lim\limits_{x \to \infty} (x - \ln(x)) = \lim\limits_{x \to \infty} (\ln(e^x) - \ln(x))$
$= \ln\left(\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty$ ✓

• POTENCIAS INDETERMINADOS

3 0^0 $\rightarrow$ usar $\ln(x)$: $y = f(x)^{g(x)}$: $\boxed{\ln y = g(x)\ln(f(x))}$

4 ∞^0

5 1^∞ $\rightarrow$ usar $e^{(x)}$: $f(x)^{g(x)} = \boxed{e^{g(x)\ln f(x)}}$

e $\lim_{x \to 0^+} (1 + \text{sen}(4x))^{\cot x} = 1^\infty$

$\lim_{x \to 0^+} e^{\ln(1+\text{sen}4x)\cdot\cot x}$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+\text{sen}4x)}{\text{sen}x} \cdot \cos x$ ($\ln(1+\text{sen}4x) \to 0$, $\cos x \to 1$ vu, $\text{sen}x \to 0$ xx)

LH : $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+\text{sen}4x}}{\cos x} \cdot \cos(4x)\cdot 4$

$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\cos(4x)\cdot 4}{(1+\text{sen}4x)}}{\cos x} \Big\} 4 = 4$ ($\cos x \to 1$)

$\lim_{x \to 0} 4 \cdot 1 = 4$

$\lim_{x \to 0} e^4 = e^4$

e $\lim_{x \to 0^+} x^x = e^{\ln(x)^x} = \lim_{x \to 0^+} e^{x\ln(x)} \rightarrow$ $0\cdot 0$ $x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x$

$= \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$ //

4 7 Elementos para GRAFICAR

1 **Dominio** $\longrightarrow$ ptos de INDEFINICIÓN de f

2 **INTERSECCIÓN EJES** : $y \rightarrow f(0)$
$x \rightarrow f(x) = 0$

3 **SIMETRÍA** $\longrightarrow$ PAR : $f(-x) = f(x) \longrightarrow$ SIMETRICA al Y
$\longrightarrow$ IMPAR : $f(-x) = -f(x) \rightarrow$ SIMETRICA al ORIGEN

4 **ASINTOTAS** : Horiz : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$
Vertic : $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
PTOS INDEF del Dom 1

5 **CRECIMIENTO** : $f'(x) > 0 \longrightarrow$ CRECE
$f'(x) < 0 \longrightarrow$ DECRECE

* VER TABLA $\infty \; x_0 \; x_n \; \infty$ | + | − | + | $\longrightarrow$ DOMINIO

6 **MAX y MIN** : 1 $f'(x) = 0 \longrightarrow$ Buscar puntos críticos
2 PRUEBA 1ª DERIVADA $+ \longrightarrow -$: max
$- \longrightarrow +$: min

7 **CONCAVIDAD** 1 PRUEBA 2ª DERIVADA

$$x = c \begin{cases} \cdot\ f''(x) > 0 \longrightarrow \text{PTO MÍN } \ddot{\cup} \\ \cdot\ f''(x) < 0 \longrightarrow \text{PTO MAX } \cap \\ \cdot\ f''(x) = 0 \longrightarrow \text{PTO INFLEXION} \end{cases}$$

4.1 ASINTOTAS INCLINADAS

Si $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - y] = 0$; $\boxed{y = mx + b}$ es ASINTOTA OBLICUA (inclinada)

e $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1} = \dfrac{x^3 + x - x}{x^2+1} = \dfrac{x\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}} - \dfrac{x}{x^2+1}$

$f(x) = x - \dfrac{x}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - x = \lim\limits_{x \to \infty} - \dfrac{x}{x^2+1} = 0$

$\therefore$ $y = x$ es ASINTOTA inclinoda

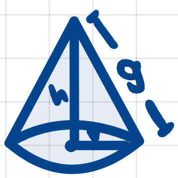
5 PROBLEMAS OPTIMIZACIÓN

- Buscar min y MAX con 1ª y 2ª derivada de alguna funcion que modele el problema

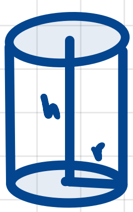
1ª ↓ PTO CRÍTICO

2ª ↓ maximo o mínimo

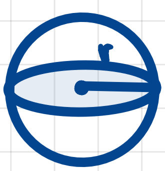
- **Formulas utiles**



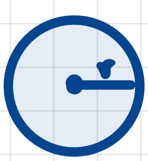
$$A = \pi \cdot r \cdot (r+g)$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$



$$A = 2\pi r(r+h)$$
$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



$$A = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$



$$A = \pi r^2$$
$$P = 2\pi r$$

ANTIDERIVADAS

↳ F es ANTIDERIVADA de f en INTERV I si

$$\boxed{F'(x) = f(x)} \quad \forall x \in I$$

* ANTIDERIVADA GENERAL de f : $F(x) + C$ → constante

- $f(x) = \operatorname{sen} x \leftarrow F(x) = -\cos x + C \quad \therefore \ -\cos x' = \operatorname{sen}$
- $f(x) = \frac{1}{x} \leftarrow F(x) = \ln|x| + c$ → $F(x) = \begin{cases} \ln x + c, & x > 0 \\ \ln -x + c, & x < 0 \end{cases}$

TABLA ANTIDERIVADAS

$\underbrace{f(x) \xrightarrow{\int} F(x)}_{\frac{dx}{dy}}$

1. $c \cdot f(x) \xrightarrow{\int} c \cdot F(x)$
2. $f(x) + g(x) \xrightarrow{\int} F(x) + G(x)$
3. $x^n \ (n \neq -1) \xrightarrow{\int} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ IMPORTANTE!
4. $\frac{1}{x} \xrightarrow{\int} \ln|x|$
5. $e^x \xrightarrow{\int} e^x$ } $e^{ax} \xrightarrow{\int} \frac{1}{a} e^{ax} + c$
6. $\cos x \xrightarrow{\int} \operatorname{sen} x$
7. $\operatorname{sen} x \xrightarrow{\int} -\cos x$
8. $\sec^2 x \xrightarrow{\int} \tan x$
9. $\sec x \tan x \xrightarrow{\int} \sec x$
10. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{\int} \arcsin x$
11. $\frac{1}{1+x^2} \xrightarrow{\int} \arctan x$

Funciones simples	Funciones compuestas
$\int dx = x + C$	
$\int k\, dx = kx + C$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ (n \neq -1)$	$\int u^n \cdot u' \cdot dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C\ (n \neq -1)$
$\int (1/x)\, dx = \ln\lvert x \rvert + C$	$\int (u'/u) \cdot dx = \ln\lvert u \rvert + C$
$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int e^u \cdot u' \cdot dx = e^u + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^u \cdot u' \cdot dx = \frac{a^u}{\ln a} + C$
$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	$\int \cos u \cdot u' \cdot dx = \operatorname{sen} u + C$
$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	$\int \operatorname{sen} u \cdot u' \cdot dx = -\cos u + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' \cdot dx = \operatorname{tg} u + C$
$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int (1 + \operatorname{tg}^2 u) \cdot u' \cdot dx = \operatorname{tg} u + C$
$\int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \operatorname{cotg} x + C$	$\int \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u' \cdot dx = \operatorname{cotg} u + C$
$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$\int \frac{1}{1 + u^2} \cdot u' \cdot dx = \operatorname{arc\,tg} u + C$
$\int \frac{-1}{1 + x^2} dx = \operatorname{arc\,cotg} x + C$	$\int \frac{-1}{1 + u^2} \cdot u' \cdot dx = \operatorname{arc\,cotg} u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u' \cdot dx = \operatorname{arc\,sen} u + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \operatorname{arc\,cos} x + C$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u' \cdot dx = \operatorname{arc\,cos} u + C$

Encontrar $g(x)$ si

$$g'(x) = 4\,\text{sen}\,x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\,\text{sen}\,x + 2x^4 - x^{-\frac{1}{2}}$$

$G(x)$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} \quad 4(-\cos x) + 2\left(\frac{x^5}{5}\right) - \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C \;//$$

Encontrar f si $f'(x) = e^x + 20(1+x^2)^{-1}$ y $f(0) = -2$

$$f'(x) = e^x + 20 \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$\int$

$$= e^x + 20 \cdot \text{Arctg}\,x + C \;//$$

$\text{tg}\,x = 0$

$\text{Arctg}(0) = \cancel{x}$?

$x = 0$

y c? → evaluar!

$$f(0) = e^0 + 20\,\text{Arctg}(0) + C = -2$$

$$1 + 20(0) + C = -2$$

$$C = -3 \;//$$

* 2^a DERIVADAS!

$$f''(x) = x^2 + 3x$$

F

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + C$$

$C \cdot x^0 \xrightarrow{\int} \frac{x^1}{1}$

No olvidar!

F

$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{Cx^1}{1} + D$$

Cx

$\int$

7 AREAS

AREA (A): bajo la GRAFICA de una f CONT es el Lim de la suma de los RECTANGUlOS DE APROXIM.

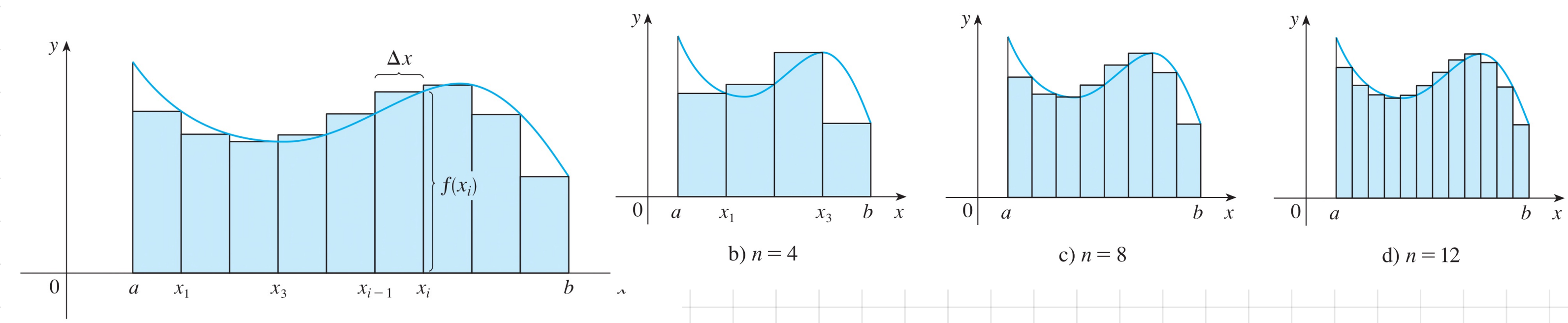
$$\boxed{A = \lim_{n \to \infty} \left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\cdot\Delta x \right]}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x \right]$$

$$\boxed{\Delta x = \frac{b-a}{n}}$$

$b-a$ → extremos intervalo
n → PARTICIONES

$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$



b) $n = 4$
c) $n = 8$
d) $n = 12$

$$\boxed{A = \lim_{n \to \infty} \left[f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\cdot\Delta x \right]}$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \left[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \right]$$

$$a + \frac{b-a}{n} + a + \frac{2(b-a)}{n} \qquad a + \frac{n(b-a)}{n}$$

INTEGRAL BIEN DEFINIDA

Si f es • Continua en $[a,b]$ → Dividimos ancho en n° partes

$\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y los puntos de muestra de cada intervalo

$x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x}$$

- Siempre que el **LIM EXISTA!**
- Siempre que de el Mismo Valor para cualquier Eleccion de Ptos muestras

$\boxed{\text{SI EXISTE} \Rightarrow f \text{ es INTEGRABLE}}$

- **SUMA RIEMANN** : $\boxed{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x}$

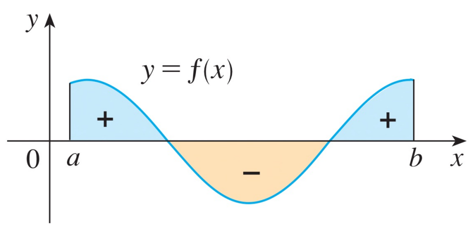


FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\,dx$ es el área neta.

→ $\int_a^b f(x)\,dx = A_1^{+} - A_2^{-}$

- **Teorema** : • f continua en $[a,b]$
  ó • f con finitos Discontinuidades

  $\Big\}\ \int_a^b f(x)\,dx$ ↓ **EXISTE!**

PROPIEDADES INTEGRAL

1. $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

2. $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

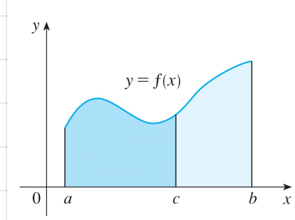
3. $$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

4. $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

5. $$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

6. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$a < c < b$
$f(x) \geq 0$



7. $$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$; Si $f(x) \geq 0$ $x \in [a,b]$

8. $$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$; Si $f(x) \geq g(x)$ $x \in [a,b]$

! 9. Si $m \leq f(x) \leq M$ $x \in [a,b]$

↳ $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

10 TEOREMA FUND. CALCULO

- **PARTE 1** : Si f es **CONT** $[a,b]$

$$\boxed{g(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$ es

1. CONTINUA
2. DERIVABLE ⟶ $g'(x) = f(x)$

∴ **TFC 1** : $$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)}$$

V **EJEMPLO 2** Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ es continua, la parte 1 del teorema fundamental del cálculo da

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

RESUMEN EXÁMEN : Cálculo 1

esteban ortega :)

13

Teorema Fundamental 2

- Si f es CONTINUA en $[a,b]$ entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

- F es ANTIDERIVADA

INTEGALES INDEFINIDAS

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x)}$$

$F'(x) = f(x)$

TABLA INTEGR. INDEF

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$\int \ln(x) = x\ln x - x$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \longrightarrow \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$$

3 REGLA SUSTITUCIÓN

Si: $u = g(x)$ es una función DERIVABLE en intervalo I y f CONT en I

$$\Rightarrow \boxed{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du}$$

e $\int x^3 \cos(x^4+2)\,dx = \int \cos(u) \cdot \frac{1}{4}\,du$

CV: $u = x^4+2$

$du = 4x^3\,dx$

$\frac{du}{4} = x^3\,dx$

$= \frac{1}{4}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{4}\operatorname{sen}(u) + C$

$= \frac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4+2) + C$ //

• SUST. INTEGRAL DEFINIDA

$$\boxed{\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du}$$

e $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$

CV: $g(x) = u = 2x+1$

$du = 2\,dx \Rightarrow \frac{du}{2} = dx$

$g(4) = 2(4)+1 = 9$

$g(0) = 2(0)+1 = 1$

$\longrightarrow \int_1^9 \frac{\sqrt{u}}{2}\,du$

$\frac{1}{2}\left.\frac{(u)^{3/2}}{3/2}\right|_1^9 + C = \frac{1}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) + C$ //

- **SIMETRÍA**

a) f PAR $(f(x) = f(-x)) \longrightarrow \int_{-a}^{a} f(x) = 2\int_{0}^{a} f(x)$

b) f IMPAR $(f(x) = -f(x)) \longrightarrow \int_{-a}^{a} f(x) = 0$

4 INTEGRACIÓN POR PARTES

- Recordar: $\dfrac{d(f(x)\cdot g(x))}{dx} = f\cdot g' + g\cdot f' \Leftrightarrow \int f\cdot g' + f'\cdot g = f(x)\,g(x)$

$$\boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,f'(x)\,dx}$$

$u = f(x)$
$v = g(x)$ $\longrightarrow$ $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

- $\int \ln(x)\,dx$

$u = \ln x \quad dv = dx$

$du = \frac{1}{x}\,dx \quad v = x$

$\rightarrow \int \ln(x)\,dx = x\cdot \ln x - \int x\,\frac{1}{x}\,dx$

$x\ln x - x + C$ //

- $\int x \operatorname{sen} x\,dx$

$u = x \quad dv = \operatorname{sen} x$

$\downarrow \int$

$du = dx \quad v = -\cos x$

$\rightarrow \int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx$

$-x\cos x + \int \cos x\,dx$

$-x\cos x + \operatorname{sen} x + C$ //

Partes + TFC 2

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx}$$

5 INTEG. TRIGONOMETRICAS

• Potencias seno/coseno

- $\int \cos^3 x\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx = \int (1-u^2)\,du$

$= \text{cv}: \; u = \operatorname{sen} x \,/\, d$ $\quad = u - \frac{u^3}{3} + C$

$du = \cos x\,dx$

$= \operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C$

- $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\,dx$

$= \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx \quad = \int (1-u^2)^2 u^2 \cdot -du$

$= \text{cv}: \; u = \cos x$ $\quad = -\int (1-2u^2+u^4)u^2$

$du = -\operatorname{sen} x\,dx$

$= -\int u^2 - 2u^4 + u^6\,du$

$= -\frac{u^3}{3} + 2\cdot\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + C$

$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$

- ESTRATEGIA $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$

1. Si n = impar $\Rightarrow$ utilizar
   1. $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$
   2. CV: $u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos x \, dx$

2. Si m = impar $\Rightarrow$ utilizar
   1. $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$
   2. CV: $u = \cos x \rightarrow du = -\operatorname{sen} x \, dx$

3. Si m y n par $\Rightarrow$ usar id. Angulo Medio
   - a) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
   - b) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

   - ! $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)$

SUSTITUCIÓN TRIGONOMETRICA

1. $\sqrt{a^2 - x^2} \longrightarrow x = a\,\text{sen}(\theta) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow 1 - \text{sen}^2\theta = \cos^2\theta$

2. $\sqrt{a^2 + x^2} \longrightarrow x = a \tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow 1 + \text{Tg}^2\theta = \sec^2\theta$

3. $\sqrt{x^2 - a^2} \longrightarrow x = a \sec\theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \sec^2\theta - 1 = \text{Tan}^2\theta$

- $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx$

$x = 3\,\text{sen}\,\theta \qquad \frac{x}{3} = \text{sen}\,\theta$

$dx = 3\cos\theta\,d\theta \qquad \theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$

$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9\,\text{sen}^2\theta}$

$= 3\sqrt{(1 - \text{sen}^2\theta)}$

$3\cos\theta$

$$\therefore \int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{3\cos\theta}{9\,\text{sen}^2\theta} \cdot 3\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta} = \int \cot^2\theta\,d\theta$$

$$= \int (\csc^2 - 1)\,d\theta$$

$$= -\cot\theta - \theta + C \;//$$

$$= -\cot\left(\text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

- $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}\,dx \longrightarrow u = x^2 + 4$

$du = 2x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \qquad \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\cancel{\tfrac{1}{2}}} = \sqrt{u} + c$$

$u^{-\frac{1}{2}}$