Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Departamento de Matemática
Primer Semestre de 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026
Ayudantía 9
9 de Mayo de 2019

1. Sea X una variable aleatoria absolutamente continua con densidad
$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$
   a) Calcule $\text{Var}(X)$.
   b) Sea $Y = \mu + \lambda^{-1}X$. Encuentre su función de densidad, $E(Y)$ y $\text{Var}(Y)$.
   c) Sea $Z = e^X$. Muestre que $E(Z) = \infty$.

2. Sean $X \sim \text{U}(0,1)$, $\mu = E(X), \sigma^2 = \text{Var}(X)$.
   a) Calcule $P(|X-\mu| > k\sigma)$.
   b) Encuentre cotas para la expresión en *a*) utilizando desigualdades vistas en clases. Compare ambas cotas tomando $k = 1$.

3. Sea $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$. Calcule $E(X^k)$ para $k \in \mathbb{N}$.

4. Sean X, Y dos variables aleatorias independientes, positivas. Si $E(|X|) < \infty$ y $E(|Y|) < \infty$ demuestre que
$$E\left(\frac{Y}{X}\right) \geqslant \frac{E(Y)}{E(X)}.$$

5. Sea $X \sim \text{Log-Normal}(\mu, \sigma^2)$ con función de densidad
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$
   a) Muestre que $E(X^k)$ existe para $k \in \mathbb{N}$.
   b) Muestre que la función generadora de momentos no existe para ningún $t > 0$.

6. Sea $X \sim \text{NB}(r, p)$ con $r \in \mathbb{N}, p \in (0,1)$.
   a) Encuentre la función generadora de momentos de X y deje explícito el intervalo donde t vive.
   b) Calcule $\text{Var}(X)$.
   c) Considere $Y = 2pX$. Demuestre que la distribución de Y cuando $p \to 0$ tiende a una χ^2_{2r}.
   Nota: La función generadora de momentos de una $X \sim \chi^2_1$ es
$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}, \quad t < \frac{1}{2}.$$