PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2023

Ayudantía 13 - MAT1610

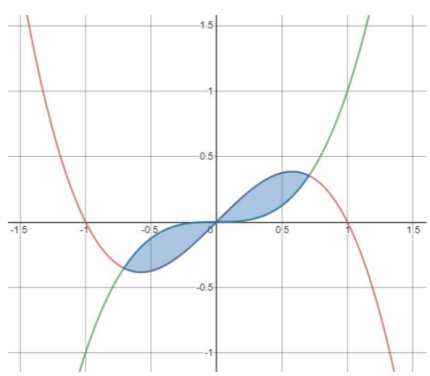
1. (a) Determine el área de la región comprendida entre las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = -x^3+x$.
   (b) Determine el área de la región R con $r = \{(x, y)|y \leq x^2 + 1 \wedge y \geq x^2 - 9 \wedge y \leq 3 - x\}$

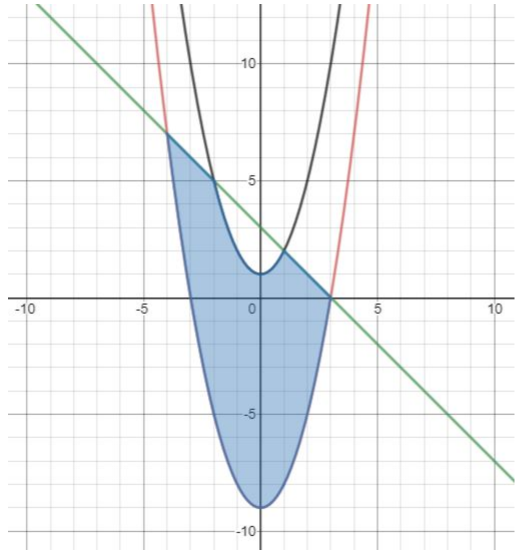
Solución:

(a) Note que cada función involucrada es una función impar, y $x^3 = -x^3 + x$ si $2x^3 - x = x(2x^2 - 1) = 0$, es decir, si $x = 0 \vee 2x^2 - 1 = 0$, esto es, si $x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Entonces, las funciones son impares y se intersectan en el origen y en los extremos de un intervalo simétrico respecto al origen, entonces el área A es:

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} (-x^3 + x - x^3)dx \\ &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}} (-2x^3 + x)dx \\ &= 2\left(-\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 0\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Así, el valor del área es $\frac{1}{4}$ unidades de área.
Idea gráfica:





(b) La región R se muestra en la figura

Note que $3 - x = x^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$ y $3 - x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$
Entonces, una forma de calcular el área

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{3} (3 - x - (x^2 - 9))dx - \int_{-2}^{1} (3 - x - (x^2 + 1))dx \\ &= \int_{-4}^{3} (12 - x - x^2)dx - \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx \\ &= \left(12x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-4}^{3} \right) - \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{1} \right) \\ &= \frac{343}{6} - \frac{9}{2} \\ &= \frac{158}{3} \end{aligned}$$

El valor del área es $\frac{158}{3}$ unidades de área.

2. Sea R la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x.

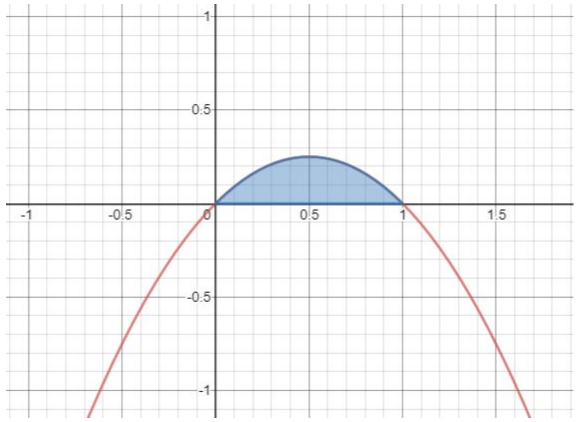
   (a) Determine el área de la región R.

   (b) ¿Existe una recta que pasa por el origen que divide a la región R en dos partes de igual área? ¿Cuál es la pendiente de la recta?

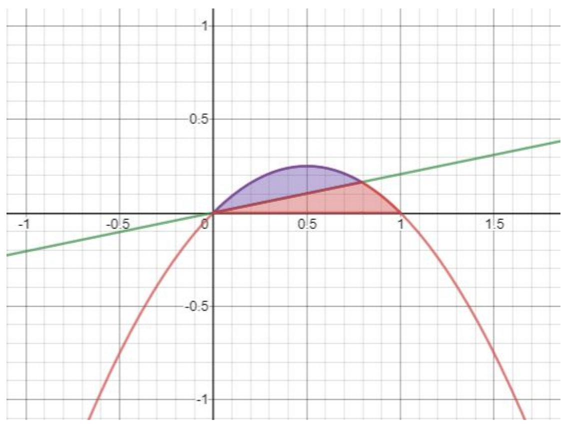
Solución:

(a) El área, A_R de la región R es:

$$A_R = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



(b) La mitad del área es $\frac{1}{12}$. Si existe la recta solicitada, tiene ecuación del tipo $y = mx$. el valor de m debe ser positivo, para que pueda dividir la región en dos regiones de igual área y pasar por el origen. Sea (a, b) el punto de intersección de la recta y la parábola.



Note que $m = \frac{b}{a}$, y que $b = a - a^2$, entonces, $m = \frac{a-a^2}{a} = 1 - a$

$$A_1 = \int_0^a \left(x - x^2 - mx\right) dx = \int_0^a \left(x - x^2 - (1-a)x\right) dx = \int_0^a \left(ax - x^2\right) dx$$

Así,

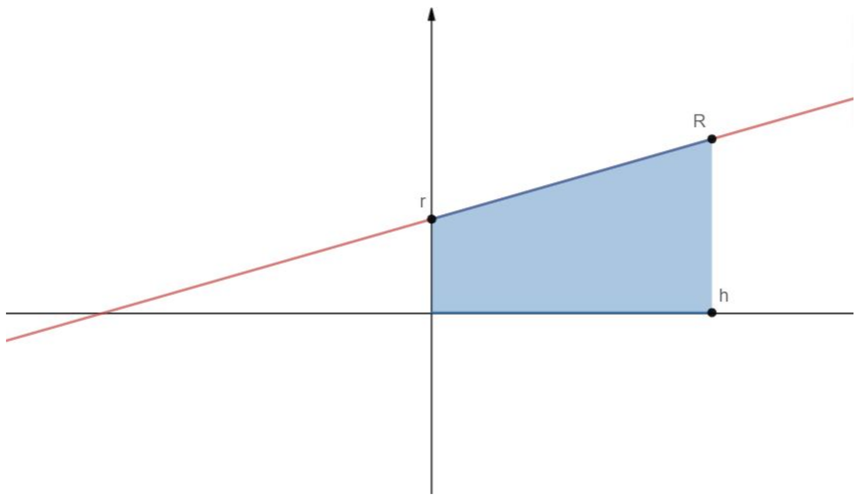
$$A_1 = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^a = \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} = \frac{a^3}{6}$$

Entonces, para que el área de la región superior A_1, corresponda a la mitad del área, debe ocurrir que $\frac{a^3}{6} = \frac{1}{12}$, es decir, $a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

Por lo tanto, El valor de la pendiente es $m = 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

3. Calcular el volumen de un cono circular truncado, cuya altura es h , base inferior R y radio superior r, como se muestra en la figura.

Solución:
Note que el cono circular truncado puede obtenerse al rotar alrededor del eje x el área del trapecio de altura h, base menor r y base mayor R, como en la figura
Note el área del trapecio se asocia al área bajo la recta que pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, R),



entre 0 y h. Dicha recta tiene ecuación $y = mx + r$ con $m = \frac{R-r}{h-0} = \frac{R-r}{h}$, entonces,

$$V = \int_0^h \pi(mx+r)^2 dx = \pi \int_0^h (mx+r)^2 = \pi \left. \frac{(mx+r)^3}{3m} \right|_0^h = \frac{(mh+r)^3}{3m} - \frac{(r)^3}{3m}$$

Por lo tanto,

$$V = \frac{\pi}{3m}\left((mh+r)^3 - r^3\right) = \frac{\pi}{3\frac{R-r}{h}}\left((R-r+r)^3 - r^3\right) = \frac{\pi h}{3(R-r)}\left(R^3 - r^3\right) = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)$$

Así, el volumen de un cono circular truncado, cuya altura es h , base inferior R y radio superior r es $V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)$ unidades de volumen.

4. Determinar el volumen del sólido generado por la rotación del área limitada por las curvas asociadas a $-y^2 - 1 = x$ y la recta $x = -2$ alrededor de la recta $x = -2$
Solución:
Puntos de Intersección: $-y^2 - 1 = -2 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$, es decir, los puntos son $(-2, -1)$, $(-2, 1)$.

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} \pi(-y^2 - 1 - (-2))^2 dy \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} (-y^2 + 1)^2 dy \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} (y^4 - 2y^2 + 1) dy \\
&= \pi \left(\frac{y^5}{5} - 2\frac{y^3}{3} + y \Big|_{-1}^{1} \right) \\
&= \left(\frac{16\pi}{15} \right)
\end{aligned}$$

Así el volumen es $\frac{16\pi}{15}$ unidades de volumen.
Idea gráfica