PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2023

Pauta Interrogación 3 - MAT1620

1. Demuestre que la función $f(x,y)=\sqrt{2x+e^{3y}}$ es diferenciable en $(4,0)$, use esto para aproximar el valor de $f(3.8,0.1)$.

   Solución:

   Observe que ambas

   $$f_x(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2x+e^{3y}}} \text{ y } f_y(x,y)=\frac{3e^{3y}}{2\sqrt{2x+e^{3y}}}$$

   son funciones continuas en $(4,0)$ por lo tanto f es diferenciable en dicho punto.

   Como f es diferenciable en $(4,0)$ la linealización de f en el punto $(4,0)$ podemos usarla para aproximar el valor de $f(3.8,0.1)$.

   $$L(x,y)=f(4,0)+f_x(4,0)(x-4)+f_y(4,0)(y-0)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y+\frac{5}{3}$$

   por lo tanto

   $$f(3.8,0.1)\approx\frac{179}{60}$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) por determinar correctamente f_x.
   - (1 punto) por determinar correctamente f_y.
   - (2 puntos) por justificar correctamente que f es diferenciable en $(4,0)$.
   - (1 punto) por determinar correctamente la linealización.
   - (1 punto) por determinar correctamente la aproximación.

2. Sea $z = f(x,y)$ una función con segundas derivadas parciales continuas y donde $x = s+t$ e $y = s-t$. Demuestre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Solución:

Observe que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}(1) + \frac{\partial z}{\partial y}(-1) = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Derivando ahora respecto a s tenemos que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

como

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial s} = 1$$

tenemos que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por saber que $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$.
- (1.5 puntos) por hacer los reemplazos correspondientes para determinar que $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}$.
- (2 puntos) por saber que $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial s} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial s}\right)$
- (1.5 puntos) por hacer los reemplazos correspondientes para demostrar lo pedido.

3. Dados la función $f(x,y) = \text{sen}(x^2 + y)$, el punto $P = (0, \pi)$ y el vector $\mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle$, determine:

(a) La derivada direccional de f en P, en la dirección del vector $\mathbf{v}$;

Solución:

$D_{\mathbf{u}}f(0,\pi)$ con $\mathbf{u}$ el vector unitario en la dirección del vector $\mathbf{v}$. Tenemos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\langle 2,3 \rangle|}\langle 2,3 \rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

y

$$\nabla f(x,y) = \big\langle 2x\cos(x^2+y), \cos(x^2+y) \big\rangle$$

luego

$$D_{\mathbf{u}}f(0,\pi) = \langle 0, -1 \rangle \cdot \left\langle \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por normalizar correctamente el vector v.
- (1 punto) por determinar el gradiente en P.
- (1 punto) por determinar correctamente la derivada direccional pedida.

(b) La máxima razón de cambio de f en P y la dirección en la cual se presenta.

Solución:

Recordamos que la mayor razón de cambio ocurre en la dirección del gradiente, es decir, el vector $\langle 0, -1 \rangle$, y es igual a

$$D_{\langle 0,-1 \rangle}(0,\pi) = \langle 0,-1 \rangle \cdot \langle 0,-1 \rangle = 1 = |\nabla f(0,\pi)|.$$

Distribución de puntajes:

- (1.5 punto) por saber que el mayor cambio ocurre en la dirección del vector gradiente.
- (1.5 punto) por calcular la derivada direccional en dicha dirección.
- (**TOTAL**) Si concluye mediante la norma del gradiente

4. Calcule los valores máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = xy - x^2y$ sobre la región triangular cerrada D con vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

Solución:

Primero buscamos puntos críticos en el interior de D. Para esto resolvemos

$$\begin{aligned} y - 2xy &= 0 \\ x - x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Obtenemos los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$, que no están en el interior de D.

Ahora estudiamos valores extremos en la frontera de D. En la recta $x = 0$ la función vale siempre 0. En la recta $y = 0$ también.

En la recta diagonal $x + y = 1$ (con x entre 0 y 1) la función se reduce a

$$f(x) = x(1-x) - x^2(1-x) = x^3 - 2x^2 + x$$

cuya derivada $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ es igual a cero cuando $x = 1$ o $x = 1/3$. Obtenemos los puntos $(1,0)$ y $(1/3, 2/3)$.

Evaluamos $f(1,0) = 0$, $f(1/3, 2/3) = 4/27$ y $f(1,0) = f(0,1) = 0$, así que el máximo absoluto es $4/27$ (obtenido en el punto $(1/3, 2/3)$) y el mínimo absoluto es 0.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por determinar correctamente las ecuaciones para buscar puntos críticos.
- (1 punto) por determinar que no hay puntos críticos interiores.
- (1 punto) por determinar que es constante igual 0 en $x = 0$.
- (1 punto) por determinar que es constante igual 0 en $y = 0$.
- (1 punto) por determinar los extremos en $x + y = 1$.
- (1 punto) por concluir los valores extremos correctamente.

5. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy^2 + 6$ y $D : \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Determine máximos y mínimos absoluto y locales de f en D.

Solución:

Para determinar los extremos locales buscamos los puntos críticos de la función, para esto debemos resolver el sistema

$$f_x = f_y = 0$$

que en este caso corresponde a

$$\begin{array}{rcl} 2x + y^2 & = & 0 \\ 2y + 2xy & = & 0 \end{array}$$

cuyas soluciones son $(0,0)$, $(-1,\sqrt{2})$ y $(-1,-\sqrt{2})$, de estos tres puntos el único que está en la región indicada es $(0,0)$.

Para saber la naturaleza de $(0,0)$ debemos estudiar el hessiano en este punto.

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

luego $Det(H(0,0)) = 4 > 0$ y $h_{11} = 2 > 0$ por lo tanto $f(0,0) = 6$ corresponde a un mínimo local.

Para estudiar los extremos en el borde usaremos multiplicadores de Lagrange, para esto planteamos el sistema $\nabla f = \lambda \nabla g$, donde $g = x^2 + y^2 - 2$, obteniendo:

$$\begin{array}{rcl} 2x + y^2 & = & 2\lambda x \\ 2y + 2xy & = & 2\lambda y \\ x^2 + y^2 & = & 2 \end{array}$$

La segunda de las ecuaciones es equivalente a $y(1 + x - \lambda) = 0$, por lo tanto abordaremos dos casos; $y = 0$ y $\lambda = x + 1$.

Si $y = 0$, tenemos que $x = \pm\sqrt{2}$, obteniendo los puntos $(0,\sqrt{2})$ y $(0,-\sqrt{2})$.

Si $\lambda = x + 1$ es sistema se reduce a $y^2 = 2x^2$, con $x^2 + y^2 - 2 = 0$, obteniendo los puntos

$$A = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), B = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), C = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \text{ y } D = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

evaluando en cada punto, obtenemos que:

$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 8 + \frac{4}{9}\sqrt{6}$

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 8 + \frac{4}{9}\sqrt{6}$$
$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 8 - \frac{4}{9}\sqrt{6} > 6$$
$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 8 - \frac{4}{9}\sqrt{6} > 6$$

por lo tanto 6 es mínimo local y global y $8 + \frac{4}{9}\sqrt{6}$ es el máximo global.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por determinar correctamente los puntos críticos en el interior de la región.
- (1 punto) por determinar que en (0,0) hay un mínimo local.
- (1 punto) por plantear correctamente Lagrange.
- (1 punto) por determinar las soluciones del sistema.
- (1 punto) por evaluar correctamente en los puntos.
- (1 punto) por concluir los valores extremos correctamente.