



PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROFESOR: RODRIGO VARGAS
AYUDANTES: MATEO DE LA CUADRA Y MATHÍAS LUENGO

Introducción al Cálculo - MAT1107

Ayudantía 10
25 de Mayo 2023

Pregunta 1

Resuelva los siguientes problemas de población:

- a) Una comunidad de conejos ha sido liberada en una isla perdida. Se ha estimado que el nivel de crecimiento de dicha población está dado por

$$N(t) = N_0 e^{0,1t}$$

siendo t medido en meses y N_0 el número de conejos existentes al ser liberados en la isla. Determine el tiempo transcurrido para que la población se haya triplicado.

- b) Si se detuviera de repente la contaminación del lago Erie, se ha estimado que el nivel de contaminantes decrecería de acuerdo con la fórmula

$$C(t) = C_0 e^{-\frac{t}{4}}$$

donde t está en años y C_0 es el nivel de contaminantes cuando se dejó de contaminar. ¿Cuántos años tomará eliminar el 50 % de los contaminantes?

Pregunta 2

La población de cierta nación en desarrollo se determinó que está dada por medio de la fórmula

$$P = 15e^{0,02t}$$

donde t es el número de años medidos a partir de 1960 (en millones de personas). Determine la población en 1980 y la población proyectada en 2000.

Repaso I6

Pregunta 3

Sean $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = x - 3$, $f_3(x) = -x$, donde $f_1: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ y $f_2, f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Halle el orden de las composiciones para obtener la función

$$f(x) = -3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}.$$

- b) Pruebe que f es invertible. Demuestre que la función $f^{-1} - (f_2^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_1^{-1} \circ f_3^{-1} \circ f_2^{-1})$ no es invertible.
- c) Halle una función $h(x)$ tal que $f^{-1} \circ h(x) = \sqrt{x}$.

Pregunta 4

Resuelva los siguientes problemas sobre funciones definidas a trozos:

- a) Considere la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Asuma que es biyectiva (demuéstrelo, es un buen ejercicio) y halle f^{-1} .

- b) Considere $x_0 < x_1$, dos reales y la función

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \leq x_0 \\ f_2(x) & \text{si } x \geq x_1 \end{cases}.$$

Donde $f_1(x_0) = f_2(x_1)$ y $f_1: (-\infty, x_0] \rightarrow (-\infty, f_1(x_0)]$, $f_2: [x_1, \infty) \rightarrow [f_2(x_1), \infty)$. Demuestre que incluso si f_1, f_2 son biyecciones, f no es invertible.

- c) Considere la misma función de la parte anterior. Demuestre que existe una restricción para f_1 , o bien, f_2 que hace a f invertible.
- d) Halle una inversa para f de la parte anterior.

Pregunta 5

Resuelva las siguientes ecuaciones:

- a.) Sabiendo que $a^2 + b^2 = 7ab$, con $a, b \neq 0$, demuestre que:

$$\log\left(\left(\frac{1}{3}\right) \cdot |a + b|\right) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (\log |a| + \log |b|)$$

- b.)

$$e^x - 5e^{-x} + 4e^{-3x} = 0$$

- c.)

$$\frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$$

Pregunta 6

Encuentre las funciones inversas correspondientes:

a.) $f(x) = e^{2x+1}$

b.) Encontrar h^{-1} tal que $g(x) \circ h(x) = f(x)$, donde,

$$g(x) = \sqrt{x+3}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+3x}{x}}$$