Modelos Probabilísticos

Ayudantía 12

Camilo González

24 de Noviembre del 2020

Ejercicio 1

Este ejercicio consiste en derivar la fórmula de Stirling utilizando el TCL.

$a)$ Argumente que si, $X_i \sim$ exponential (1), $i = 1, 2$, ..., independientes, entonces para todo x,

$$P\left(\frac{\bar{X}_n - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) \to P(Z \leq x)$$

donde Z es una variable aleatoria normal estándar.

$b)$ Muestre que diferenciando ambos lados de la aproximación de la parte $a)$ y haciendo $x = 0$, se obtiene la fórmula de Stirling.

1. a) $X_i \sim \text{Exp}(1) \Rightarrow E(X_i) = \text{Var}(X_i) = 1$

Por el TCL $\overline{X_n} \overset{\text{App.}}{\sim} \text{Normal}\left(1, \frac{1}{n}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\overline{X_n} - 1}{1/\sqrt{n}} \longrightarrow Z \sim \text{Normal}(0, 1)$$

$$P\left(\frac{\overline{X_n} - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) \longrightarrow P(Z \leq x)$$

b) $\frac{\partial}{\partial x} P(Z \leq x) = \frac{\partial}{\partial x} F_Z(x) = f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$

$$\frac{\partial}{\partial x} P\left(\frac{\overline{X_n} - 1}{1/\sqrt{n}} \leq x\right) = \frac{\partial}{\partial x} P\left(\overline{X_n} - 1 \leq \frac{x}{\sqrt{n}}\right) = \frac{\partial}{\partial x} P\left(\overline{X_n} \leq \frac{x}{\sqrt{n}} + 1\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{nx}{\sqrt{n}} + n\right) = \frac{\partial}{\partial x} P\left(\sum X_i \leq \sqrt{n}\, x + n\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = W \sim \text{Gamma}(n, 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_W(\sqrt{n}\, x + n) = f_W(\sqrt{n}\, x + n) \cdot \sqrt{n}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} (x\sqrt{n} + n)^{n-1} \exp\{-(x\sqrt{n} + n)\} \cdot \sqrt{n} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$$

Si $x = 0$ $\quad \frac{1}{(n-1)!} n^{n-1} \exp\{-n\} \cdot \sqrt{n} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$n^{n-1+\frac{1}{2}} \exp\{-n\} \cdot \sqrt{2\pi} \simeq (n-1)!$$

$$n! \simeq n^{n+\frac{1}{2}} \exp\{-n\} \sqrt{2\pi} \quad //$$

Ejercicio 2

Suponga que $X_1, X_2, \ldots$ converge en probabilidad a una variable aleatoria X y que h es una función contínua. Muestre que $h\left(X_1\right), h\left(X_2\right), \ldots$ converge en probabilidad a $h(X)$.

2.

Si h es cont entonces

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $|X_n - X| < \delta \Rightarrow |h(X_n) - h(X)| < \varepsilon$

Como $X_1, X_2, \ldots$ conv. en prob. a X

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} P(|X_n - X| < \delta) = 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} P(|h(X_n) - h(X)| < \varepsilon) = 1$ ■

Ejercicio 3

Demuestre que,

$$P\left(|X_n - \mu| > \varepsilon\right) \to 0 \text{ para todo } \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P\left(X_n \leq x\right) \to \begin{cases} 0 & \text{if } x < \mu \\ 1 & \text{if } x \geq \mu \end{cases}$$

a) Fije $\varepsilon = |x - \mu|$ y muestre que si $x > \mu$, entonces $P\left(X_n \leq x\right) \geq P\left(|X_n - \mu| \leq \varepsilon\right)$, mientras que si $x < \mu$, entonces $P\left(X_n \leq x\right) \leq P\left(|X_n - \mu| \geq \varepsilon\right)$. Concluya la implicación $\Rightarrow$.

b) Con $\{x : |x - \mu| > \varepsilon\} = \{x : x - \mu < -\varepsilon\} \cup \{x : x - \mu > \varepsilon\}$ concluya la implicación $\Leftarrow$.

3. $P(|X_n - \mu| > \varepsilon) \to 0$ para todo ε

a) i) Para $x-\mu \geq 0$

$$P(|X_n-\mu|>\varepsilon) = P(|X_n-\mu| > x-\mu)$$
$$= P(X_n-\mu < -(x-\mu)) + P(X_n-\mu > x-\mu)$$
$$\geq P(X_n-\mu > x-\mu) = P(X_n > x)$$
$$= 1 - P(X_n \leq x)$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} P(|X_n-\mu|>\varepsilon) \geq 1 - \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x)$$

$$\Rightarrow \lim P(X_n \leq x) \geq 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(X_n \leq x) = 1$$

ii) Para $x-\mu < 0$

$$P(|X_n-\mu|>\varepsilon) = P(|X_n-\mu| > -(x-\mu))$$
$$= P(X_n-\mu < x-\mu) + P(X_n-\mu > -(x-\mu))$$
$$\geq P(X_n-\mu < x-\mu) = P(X_n \leq x)$$

Como $0 = \lim P(|X_n-\mu| \leq x) \geq P(X_n \leq x)$

$\Rightarrow P(X_n \leq x) = 0$ luego con i) y ii) concluímos $(\Rightarrow)$

b) $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|X_n-\mu|>\varepsilon) = P(X_n-\mu < -\varepsilon) + P(X_n-\mu > \varepsilon)$$
$$= P(X_n < \mu-\varepsilon) + 1 - P(X_n \leq \mu+\varepsilon)$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} 0 + 1 - 1 = 0 \quad \therefore (\Leftarrow)$$

Ejercicio 4

Muestre que si, $\sqrt{n}\,(Y_n - \mu) \rightarrow \mathrm{n}\left(0, \sigma^2\right)$ en distribución, entonces $Y_n \rightarrow \mu$ en probabilidad.

4. $P\left(|Y_n - \mu| < \varepsilon\right) = P\left(|\sqrt{n}\,(Y_n - \mu)| < \varepsilon\sqrt{n}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(|Y_n - \mu| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \left(|\sqrt{n}\,(Y_n - \mu)| < \varepsilon\sqrt{n}\right)$$

$$= P\left(|Z| < \infty\right) = 1$$

Ejercicio 5

Sea T_k el tiempo transcurrido entre la $k-1$-ésima y la k-ésima ocurrencia (de un proceso de Poisson con intensidad λ), $k = 1, \dots, n$. Pruebe que:

a) $T_1, T_2, \dots$ son variables aleatorias iid Exponencial(λ)

b) $S_n = T_1 + \dots + T_n \sim \mathrm{Gama}(n, \lambda)$

5. a) Se tiene que

$$P(T_1 > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

así $T_1 \sim Exp(\lambda)$

$$P(T_2 > t \mid T_1 = s) = P(\text{No hay eventos en } (s, s+t] \mid T_1 = s)$$

$$= P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

pero los eventos en $(s, s+t]$ son indep. de $[0, s]$ $\Rightarrow$ T_2 es indep. de T_1

De manera analoga para $T_3, T_4, \ldots$

b) S_n es el tiempo hasta el n-ésimo evento

$$1 - P(S_n \leq t) = P(S_n > t) = P(N(t) < n)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^j}{j!}$$

$$-f_{S_n}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(-\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^j + e^{-\lambda t} \cdot j \cdot (\lambda t)^{j-1} \cdot \lambda\right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{(\lambda t)^j}{j!} + \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}\right) = \frac{-\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\Rightarrow f_{S_n}(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1} \sim Gamma(n, \lambda)$$