Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo Semestre del 2020

Modelos Probabilísticos (EYP1027)

Ayudantía 7

Camilo González Rojas

1. Un punto aleatorio (X, Y) está uniformemente distribuido en el cuadrado con vértices $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$, y $(-1,-1)$. Esto es, la densidad conjunta es $f(x,y) = \frac{1}{4}$ dentro del cuadrado. Determine la probabilidad de los siguientes eventos:

   a) $X^2 + Y^2 < 1$

   b) $2X - Y > 0$

   c) $|X + Y| < 2$

2. Una densidad está definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} C(x+2y) & \text{si } 0 < y < 1 \text{ y } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

   a) Encuentre el valor de C.

   b) Encuentre la distribución marginal de X.

   c) Encuentre la acumulada de X e Y.

   d) Encuentre la densidad de la variable aleatoria $Z = 9/(X+1)^2$.

3. Considere las siguientes variables aleatorias:

   $U =$ El número de intentos que se necesitan para tener la primera cara.
   $V =$ El número de intentos que se necesitan para tener las primeras dos caras.

   ¿Son U y V independientes?

4. Dada la función $g(x) \geq 0$ tal que

$$\int_0^\infty g(x)dx = 1,$$

   muestre que

$$f(x,y) = \frac{2g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\pi\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x, y > 0,$$

   es una densidad.

5. Sean X e Y variables aleatorias independientes con la misma distribución geométrica.

   a) Muestre que U y V son independientes, donde U y V se definen como:

$$U = \min\{X, Y\} \quad y \quad V = X - Y$$

   b) Encuentre la distribución de $Z = X/(X+Y)$, donde $Z = 0$ si $X + Y = 0$.

   c) Encuentre la densidad conjunta de X y $X + Y$.