Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

EYP1026 - MODELOS PROBABILÍSTICOS
Soluciones - Ayudantía N°1

Profesor: Guido del Pino
Ayudante: José Quinlan
Fecha: 10 de Agosto - 2016

4. Según el proceso de asignación, para calcular la probabilidad pedida es suficiente con determinar:

   - **La cantidad de formas (N_F) de distribuir n objetos indistinguibles en n urnas tal que exactamente una de ellas quede vacía.**
     Para calcular N_F, hay n posibilidades para seleccionar aquella única urna que quedará vacía. Esto implica que 1 de las $n-1$ urnas restantes tendrá 2 objetos y las otras, sólo 1. Este último proceso se puede llevar a cabo de $n-1$ formas diferentes. Por el Principio Multiplicativo, $N_F = n(n-1)$.
   - **La cantidad de formas (N_T) de distribuir n objetos indistinguibles en n urnas.**
     En el caso de N_T, el proceso de conteo requiere un análisis diferente. Para ello, consideremos una configuración posible:

     $$|\text{OO}| \quad |\text{O}|\text{OOO}|\cdots|\text{OO}|$$

     Cada barra "$|$" actúa como un separador entre urnas, mientras que "O" representa un objeto. Un espacio vacío entre barras consecutivas conforma una urna vacía. En total hay $n+1$ separadores y n objetos. Observemos que la primera y última barra son irrelevantes para dicha configuración:

     $$\text{OO}| \quad |\text{O}|\text{OOO}|\cdots|\text{OO}$$

     Bajo este escenario, el total de separadores es $n-1$. Identificando "$|$" con 1 y "O" con 0, la configuración previa es equivalente a una secuencia de "ceros" y "unos":

     $$0011010001\cdots100$$

     Por lo tanto, N_T es igual al total de formas de distribuir $n-1$ "unos" y n "ceros" en un arreglo de tamaño $n+(n-1) = 2n-1$, es decir $N_T = \binom{2n-1}{n-1} = \binom{2n-1}{n}$.

   Finalmente, la probabilidad pedida (vía Regla de Laplace) es

   $$\frac{N_F}{N_T} = \frac{n(n-1)}{\binom{2n-1}{n-1}} = \frac{n(n-1)}{\binom{2n-1}{n}}.$$

5. Sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad finitamente aditiva y continua en el vacío. Consideremos una secuencia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de eventos disjuntos a pares y definamos la siguiente colección $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ de eventos:

   $$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

   Dicha secuencia es decreciente, es decir $\forall\, n \in \mathbb{N} : B_{n+1} \subset B_n$. Por otro lado

   $$B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \Big) = \emptyset.$$

Para probar lo anterior, supongamos que $B \neq \emptyset$. Luego $\omega \in B$ ssi $\forall\, n \in \mathbb{N} : \omega \in B_n$. Escojamos $n_1 \in \mathbb{N}$. Por definición $\omega \in B_{n_1}$ ssi $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_2 \geq n_1 : \omega \in A_{n_2}$. Como $n_3 = n_2 + 1 \in \mathbb{N}$, por hipótesis $\omega \in B_{n_3}$. Nuevamente, $\omega \in B_{n_3}$ ssi $\exists\, n_4 \in \mathbb{N}$, $n_4 \geq n_3 : \omega \in A_{n_4}$. Dado que $n_4 > n_2$ y los eventos A_n son disjuntos a pares, $A_{n_2} \cap A_{n_4} = \emptyset$. Esto último implica que $\omega \in A_{n_2} \cap A_{n_4} = \emptyset$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $B = \emptyset$.

Puesto que $\mathbb{P}$ es continua en el vacío

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n) = 0.$$

Notemos que $\{A_1, \ldots, A_n, B_{n+1}\}$ es una colección finita de eventos disjuntos a pares. Para demostrar lo anterior, por hipótesis la secuencia $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ está conformada por eventos disjuntos a pares. Luego

$$\begin{aligned}
&\forall\, i \neq j \in \{1, \ldots, n\} : A_i \cap A_j = \emptyset \\
&\forall\, i \in \{1, \ldots, n\} : A_i \cap B_{n+1} = A_i \cap \Big(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \Big) = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} (A_i \cap A_k) = \emptyset.
\end{aligned}$$

Dado que $\mathbb{P}$ es finitamente aditiva

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Big) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(B_{n+1})$$

De lo anterior se desprende que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_{n+1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$