PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE FACULTAD DE MATEMÁTICAS DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Primer Semestre 2015

MAT1203 - Álgebra Lineal Interrogación 3 - miércoles 27 de mayo - solución

a) Si A y P son matrices cuadradas de $n \times n$ con P invertible, demuestre que $\operatorname{Det}(PAP^{-1}) = \operatorname{Det}(A).$



Solución:
$$\operatorname{Det}(PAP^{-1}) = \operatorname{Det}(P)\operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(P^{-1}) = \operatorname{Det}(P)\operatorname{Det}(A)\frac{1}{\operatorname{Det}(P)} = \operatorname{Det}(A).$$

b) Si M es una matriz de $n \times n$, decida justificadamente si $\mathrm{Det}(-M) = -\mathrm{Det}(M)$.



Si
$$n$$
 es par, $Det(-M) = (-1)^n Det(M) = Det(M)$

Si
$$n$$
 es impar, $Det(-M) = (-1)^n Det(M) = -Det(M)$

Por lo tanto no siempre es cierto que Det(-M) = -Det(M)

Solución:

Si n es par, $Det(-M) = (-1)^n Det(M) = Det(M)$.

Si n es impar, $Det(-M) = (-1)^n Det(M) = -Det(M)$.

Por la tenta na siempre que in la contra de la contra del contra de la contra del contra de la contra del contra de la contra de la contra del contra de la contra de la contra del co

c) Calcule el determinante de la matriz de $n \times n$ dada por $A = (a_{i,j})$ donde

Solución:

La matriz es de la forma:

Haciendo las operaciones: $F_i \to F_i - F_{i+1}$, para i = 1, ..., n-1 queda:

Haciendo la operación $F_n \to (1/3) F_n$ queda:

$$= 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & (2/3) \end{vmatrix}.$$

Haciendo las operaciones: $F_n \to F_n + F_1$, $F_n \to F_n + 2F_2$, $F_n \to F_n + 3F_3$, ..., $F_n \to F_n + (n-1)F_{n-1}$ queda:

$$= 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & (2/3) + (n-1) \end{vmatrix}.$$

Queda una matriz diagonal, entonces el determinante pedido es:

$$3 \cdot (-1)^{n-1} \cdot ((2/3) + (n-1)).$$

semidiaponalitan (1)

2. Sea T una matriz de 3×3 . Demuestre que:

a) Si
$$Te_2 = 8e_2$$
, entonces $Det(T - 8I) = 0$.

Solución:



Si $Te_2 = 8e_2$, se tiene que $Te_2 - 8e_2 = \vec{0}$.

Luego $(T - 8I)e_2 = \vec{0}$.



Entonces $e_2 \in \text{Ker}(T - 8I)$, como e_2 es no nulo la matriz (T - 8I) es no invertible y su determinante cero.

b) Si T es antisimétrica, entonces T no es invertible.

Solución:



 \int Si T es antisimétrica, se tiene que $T=-T^t$.



Tomando determinante, $\operatorname{Det}(T) = (-1)^3 \operatorname{Det}(T^t) = -\operatorname{Det}(T)$.

Entonces Det(T) es igual a su inverso aditivo, debe ser cero y T es no invertible.

- 3. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres.
 - a) Decida justificadamente si el siguiente conjunto U es un subespacio de V.



 $U = \{ p \in V \text{ tal que } p(t) = a + t^2 \text{ con } a \in \mathbb{R} \}.$

U no es un subespacio pues el polinomio constante q(t)=0 no pertenece a U.

b) Encuentre una base del subespacio $W=\{p\in V \text{ tal que } p(-1)=0\}.$ Solución:





Se prueba que es L.I. para que sea base (escalonando la matriz de sus vectores

$$\begin{cases}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 1
\end{cases}
\sim
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

c) Sean $B_1=\{1+t,1-t,1+t^2,1-t^3\}$ y $B_2=\{1+t^2,1+t^3,1+t,2\}$ bases de V. Encuentre una matriz P cambio de base tal que para todo polinomio p en V se cumpla

$$P[p]_1 = [p]_2.$$

Solución:

Se tiene que:

$$(1+t) = 0(1+t^2) + 0(1+t^3) + 1(1+t) + 0(2).$$

$$(1-t) = 0(1+t^2) + 0(1+t^3) - 1(1+t) + 1(2).$$

$$(1+t^2) = 1(1+t^2) + 0(1+t^3) + 0(1+t) + 0(2).$$

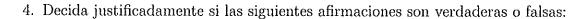
$$(1-t^3) = 0(1+t^2) - 1(1+t^3) + 0(1+t) + 1(2).$$

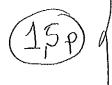
Luego la matriz pedida es:

$$P = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Saber que P es la materit de ? veet. coord de bresse B1 en } 1p términes de base B2

álantos (Ip)





a) Si A es una matriz cuadrada, entonces $|A| \neq |\operatorname{adj}(A)|$.

Solución:

Falso.

Por ejemplo si A es la matriz identidad I se tiene que adj(A) = I, entonces |A| = |adj(A)|.

b) En el espacio de las funciones reales definidas en el intervalo [-2,3], las funciones f(x) = |x| y g(x) = 2x son linealmente independientes.

Solución:

Verdadero.



Si fueran linealmente dependientes existen a,b reales no todos nulos tales que af+bg es la función constante cero.

Evaluando en -1 queda $a \cdot (1) + b(-2) = 0$.

Evaluando en 1 queda $a \cdot (1) + b(2) = 0$.

Resolviendo queda a=b=0 lo que es una contradicción, por lo tanto las funciones son linealmente independientes.

c) Si V es un espacio vectorial de dimensión 3, entonces hay conjuntos linealmente dependientes en V con menos de 3 elementos.

Solución:



Verdadero.

Basta tomar por ejemplo en \mathbb{R}^3 el conjunto $\{\vec{0}\}$.

d) Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial V, entonces $W_1 \cap W_2$ es un subespacio de V.

Solución:

Verdadero.

9

Como $\vec{0} \in W_1$ por ser subespacio y $\vec{0} \in W_2$ por ser subespacio, entonces $\vec{0} \in W_1 \cap W_2$, luego es no vacío.

Sean $u, v \in W_1 \cap W_2$. Se tiene que $u + v \in W_1$ por ser subespacio y $u + v \in W_2$ por ser subespacio, entonces $u + v \in W_1 \cap W_2$, luego es cerrado bajo la suma.

Sea $\alpha \in R$ y $u \in W_1 \cap W_2$. Se tiene que $\alpha u \in W_1$ por ser subespacio y $\alpha u \in W_2$ por ser subespacio, entonces $\alpha u \in W_1 \cap W_2$, luego es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

Por lo tanto $W_1 \cap W_2$ es un subespacio.

