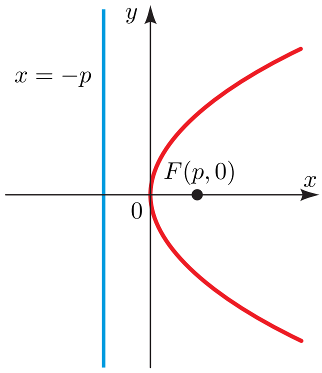
Geometría Analítica

1 Cónicas: La parábola

DEFINICIÓN Una **parábola** es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de un punto fijo F llamado **foco** y de una recta fija D llamada **directriz**. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la parábola se llama **eje** de la parábola. El punto medio del segmento de recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz, se llama el **vértice** de la parábola.

Si escogemos los ejes coordenados para que el eje X coincida con el eje de la parábola y el vértice en el origen. (Ver figura)



Sea $p > 0$, entonces el foco tiene coordenadas $F(p, 0)$ y la directriz es la gráfica de la ecuación $x = -p$. Sea $P(x, y)$ un punto que no está en la directriz y sea M el pie de la perpendicular desde P a la directriz. Entonces P está en la parábola si y solo si

$$d(P, M) = d(P, F) \Longleftrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|$$

Por lo tanto, P está en la parábola si y solo si

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \Longleftrightarrow \boxed{y^2 = 4px}\,.$$

TEOREMA 1 La gráfica de la ecuación $y^2 = 4px$ es una parábola con las siguientes propiedades:

Vértice	Foco	Directriz
$V(0, 0)$	$F(p, 0)$	$x = -p$

La parábola se abre a la derecha si $p > 0$ o la izquierda si $p < 0$.

TEOREMA 2 La gráfica de la ecuación $x^2 = 4py$ es una parábola con las siguientes propiedades:

Vértice	Foco	Directriz
$V(0,0)$	$F(0,p)$	$y = -p$

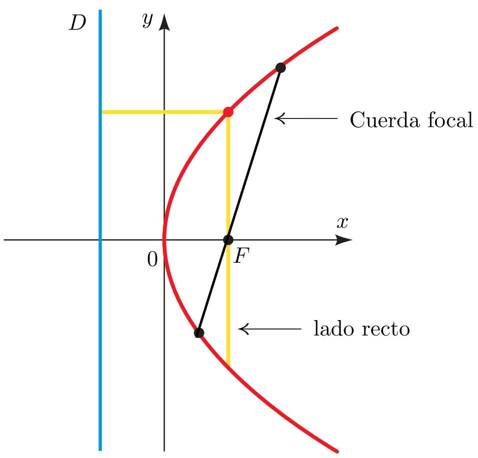
La parábola se abre hacia arriba si $p > 0$ o hacia abajo si $p < 0$.

EJEMPLO 1 . Demuestre que las rectas $my = m^2x + p$ y $my + x = -pm^2$ se cortan sobre la directriz de la parábola $y^2 = 4px$.

EJEMPLO 2 Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz de ecuación $y - 5 = 0$.

DEFINICIÓN

1. Todo segmento de recta que pasa por el foco y cuyos extremos son puntos de la curva, se llama cuerda focal.
2. La cuerda focal que es perpendicular al eje de la parábola, se llama lado recto de la parábola.



PROPOSICIÓN 1 La longitud del lado recto de la parábola $y^2 = 4px$ es $\ell = |4p|$.

EJEMPLO 3 Una parábola con vértice en el origen y cuyo eje coincide con el eje X pasa por el punto de coordenadas $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la cónica, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto.

EJEMPLO 4 . Encuentre el vértice, el foco, los puntos extremos del lado recto y la ecuación de la directriz de la parábola $y^2 = -8x$.

TEOREMA 3 (Ecuación de la parábola con vértice desplazado)

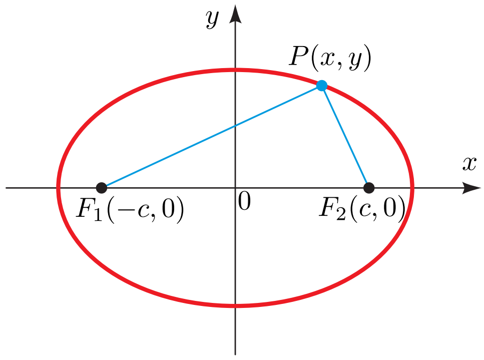
1. Una parábola de eje paralelo al eje X con su vértice en (h,k) y con p como distancia dirigida del vértice al foco, es la gráfica de la ecuación:
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)\ .$$
Si $p > 0$ la parábola se abre hacia la derecha, si $p < 0$ la parábola se abre hacia la izquierda
2. Si el eje de la parábola es paralelo al eje Y con su vértice en (h,k), entonces es la gráfica de la ecuación:
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)\ .$$
Si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba, si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo.

EJEMPLO 5 Encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice está en $(5,-2)$, y su foco está en el punto $(5,-4)$.

2 Cónicas: La Elipse

DEFINICIÓN Una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos en el plano que se mueven de manera que, la suma de sus distancias a dos puntos fijos del plano, se mantiene constante y mayor que la distancia entre estos dos puntos fijos. Lo puntos fijos F_1 y F_2 se llaman los **focos** de la elipse.

TEOREMA 4 La elipse de focos $F_1(c,0)$ y $F_2(-c,0)$ en la cual $2a$ es la suma de las distancias de un punto de ella a ambos focos, es la gráfica de la ecuación:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{donde } b^2 = a^2 - c^2\ .$$
La elipse de focos $F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$ en la cual $2a$ es la suma de las distancias de un punto de ella a ambos focos, es la gráfica de
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{donde } b^2 = a^2 - c^2\ .$$



Elementos de la elipse.

a) La recta que pasa por los focos de la elipse se llama **eje focal**.

b) Los puntos V_1 y V_2 en los que el eje focal intersecta a la elipse se llaman **vértices** de la elipse.

c) El punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ se llama **centro** de la elipse.

d) El segmento $\overline{V_1V_2}$ se llama **eje mayor** de la elipse.

e) El segmento de la recta $\overline{B_1B_2}$ determinado por los puntos de intersección de la elipse con la recta perpendicular al eje focal que pasa por el centro, se llama **eje menor**.

f) Los segmentos determinados por las intersecciones de la elipse con las rectas que pasan por los focos y son perpendiculares al eje focal se llaman **lados rectos** de la elipse.

g) La **excentricidad** de la elipse se define como

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

el cual es menor que 1 ya que $c < a$.

EJEMPLO 6 . Construya la gráfica de la ecuación

$$16x^2 + 25y^2 = 400\ .$$

Determine focos, vértices, longitud de lados rectos y los valores de a, b y c.

EJEMPLO 7 Determine la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos $(4,0)$ y $(-4,0)$ y tiene focos en los puntos $(3,0)$ y $(-3,0)$.

EJEMPLO 8 Una elipse tiene centro en el origen de un sistema de coordenadas y su eje mayor está en el eje Y. Si uno de sus focos es el punto $(3,0)$ y la excentricidad es $\frac{1}{2}$, determine

1. la ecuación de la elipse.
2. las coordenadas del otro foco.
3. la longitud de los lados rectos

4. la longitud del eje mayor y la del eje menor.

TEOREMA 5 (Ecuación de la elipse con vértice desplazado)
La elipse con centro en (h,k) cuya distancia focal es $2c$ y cuyo eje mayor es horizontal y de longitud $2a$ es la gráfica de la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{donde } b^2=a^2-c^2\,.$$

La elipse con centro en (h,k) cuya distancia focal es $2c$ y cuyo eje mayor es vertical y de longitud $2a$ es la gráfica de la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad \text{donde } b^2=a^2-c^2\,.$$

TEOREMA 6 La ecuación general de una elipse es

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0\,, \quad \text{con } AC>0 \text{ y } A\neq C\,.$$

que puede ser una elipse, un punto o el conjunto vacío.

EJEMPLO 9 . Determine las gráficas de las siguientes ecuaciones

a) $25x^2+9y^2+150x-36y+36=0$ *b)* $x^2+4y^2-2x-8y+5=0$

EJEMPLO 10 Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(5,0)$ y $F_2(-5,0)$ y tal que la suma de las distancias de los puntos de ella a los focos sea 12.

EJEMPLO 11 Un punto $P(x,y)$ se mueve de tal forma que el producto de sus pendientes de las dos rectas que unen P con los puntos fijos $(1,-2)$ y $(5,6)$ es constante e igual a -2. Demuestre que dicho lugar geométrico es una elipse, indicando su centro.

3 Guía de Ejercicios

1. Muestre que si dos tangentes a la parábola $y=x^2$ son perpendiculares, entonces su punto de intersección está en la recta directriz de la parábola.

2. Grafique la elipse de ecuación $x^2+4y^2-6x-8y-3=0$ indicando las coordenadas de los focos y de los vértices. Si el punto medio de una cuerda de esta elipse es $(5,2)$, determine la longitud de esta cuerda.

3. Dada la parábola $(y-1)^2=4(x+1)$. Determine k de modo que la recta $y=2x+k$.

a) corte a la parábola en dos puntos distintos.

b) sea tangente a la parábola.

4. Determinar la ecuación de una elipse cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados, si uno de los extremos del eje mayor es el punto $(3, -2)$, y los focos son los puntos $(3, 1)$ y $(3, 3)$.

5. Encuentre la ecuación de la parábola, determinada por los puntos que equidistan de $(2, 1)$ y del eje Y. Determine su vértice, foco y directriz.

6. Con referencia a la elipse $x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 3 = 0$. Hallar los valores de k para los cuales las rectas de la familia $5x + 2y + k = 0$.

   a) Cortan a la elipse en dos puntos distintos.

   b) Son tangentes a la elipse.

   c) No cortan a la elipse.

7. Encontrar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $V(3, 4)$ y su foco es el punto $F(3, 6)$.

   R: $x^2 - 6x - 8y + 41 = 0$

8. Encuentre los puntos de intersección de la parábola: $-y^2+6x+18 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

   R: $(-3, 0)$

9. Encuentre la ecuación de la parábola vertical, que se abre hacia abajo y cuyo vértice es el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 14y + 40 = 0$, tal que la distancia del vértice a la directriz es 6 unidades.

   R: $x^2 + 24y - 168 = 0$

10. Un triángulo equilátero está inscrito en la parábola de ecuación $y^2 = 4px$, con un vértice en el origen. Encuentre la longitud del lado del triángulo.

    R: $8\sqrt{3}p$.

11. Determine las coordenadas de dos puntos de la parábola $y = 4x^2$ tal que $y = 1$.

    R: $(\frac{1}{2}, 1)$, $(-\frac{1}{2}, 1)$.

12. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F(1, 1)$ y $F_2(5, 1)$ y cuyo diámetro focal mide 6 unidades.

    R: $5x^2 + 9y^2 - 30x - 18y + 9 = 0$

13. Encontrar la ecuación de la elipse cuyos focos son $(4, 5)$ y $(4, -1)$ y la distancia entre los vértices es 10.

    R: $\dfrac{(y-2)^2}{25} + \dfrac{(x-4)^2}{16} = 1$

14. Dada la elipse $4x^2+9y^2-32x+54y+109=0$, encuentre la ecuación de la circunferencia que tiene como centro el mismo que la elipse y como radio la mitad de la longitud del eje menor.

    R: $x^2+y^2-8x+6y+24=0$

15. Encuentre la ecuación de la parábola que tiene como vértice el centro de la elipse $3x^2+2y^2+24x-32y+170=0$, que abre hacia abajo y pasa por el punto de coordenadas $(-2,0)$.

    R: $2x^2+16x+y+24=0$

16. Si $k>0$, demuestre que la ecuación $3x^2+4y^2=k$, representa una familia de elipses, cada una de las cuales tiene excentricidad $\frac{1}{2}$.

17. Determinar la ecuación e identificar el lugar geométrico de los puntos medios de las coordenadas de los puntos de la ecuación $x^2+y^2=9$.

    R: Elipse $x^2+4y^2=9$