Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2022

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 4

1. Considere la función definida por tramos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| + 1 & \text{si } x \leqslant -2\,, \\ \\ \dfrac{x-1}{x+2} & \text{si } x > -2\,. \end{cases}$$

a) Demuestre, en forma algebraica, que f es una función inyectiva

b) Trace la gráfica de la función f.

c) Determine, en forma geométrica, el recorrido de la función f.

Solución.

a) Por demostrar que f es inyectiva.

- Caso 1. $x_1 > -2$, $x_2 > -2$.

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{x_1 - 1}{x_1 + 2} = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 2} \\ &\Longrightarrow \quad (x_1 - 1)(x_2 + 2) = (x_1 + 2)(x_2 - 1) \\ &\Longrightarrow \quad x_1x_2 + 2x_1 - x_2 - 2 = x_1x_2 - x_1 + 2x_2 - 2 \\ &\Longrightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

- Caso 2. $x_1 \leqslant -2$ y $x_2 \leqslant -2$

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Longrightarrow \quad |x_1 + 2| + 1 = |x_2 + 2| + 1 \\ &\Longrightarrow \quad |x_1 + 2| = |x_2 + 2| \\ &\Longrightarrow \quad -(x_1 + 2) = -(x_2 + 2) \\ &\Longrightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

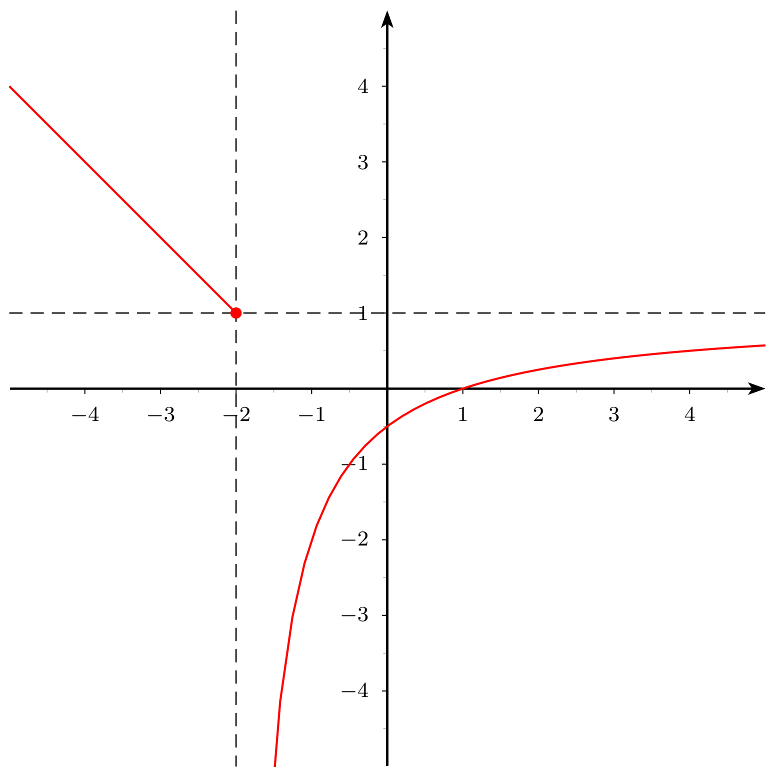
- Caso 3. $x_1 > -2$ y $x_2 \leqslant -2$.

$$\begin{aligned}
f(x_1) = f(x_2) &\implies \frac{x_1 - 1}{x_1 + 2} = |x_2 + 2| + 1 \\
&\implies \frac{x_1 - 1}{x_1 + 2} = -(x_2 + 2) + 1 \\
&\implies \frac{x_1 - 1}{x_1 + 2} = -x_2 - 1 \\
&\implies x_1 - 1 = (-x_2 - 1)(x_1 + 2) \\
&\implies x_1 - 1 = -x_1 x_2 - 2x_2 - x_1 - 2 \\
&\implies 0 = x_1 x_2 + 2x_2 + 2x_1 + 1 \\
&\implies 0 = x_1(x_2 + 2) + 2(y + 2) - 3 \\
&\implies 0 = (x_2 + 2)(x_1 + 2) - 3 \\
&\iff x_2 + 2 = \frac{3}{x_1 + 2}
\end{aligned}$$

Como $x_1 + 2 > 0$ entonces $\dfrac{3}{x_1 + 2} > 0 \iff x_2 + 2 > 0 \iff x_2 > -2$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, f es inyectiva.

b) El gráfico de la función f se muestra a continuación:



c) Tenemos que $\mathrm{Rec}(f) = \mathbb{R}$.

Puntaje Pregunta 1.

- 2 puntos por mostrar que f es inyectiva.
- 2 puntos por trazar la gráfica de f.
- 2 puntos por determinar de manera geométrica el gráfico de f.

2. Sean $f : [-2,3] \to \mathbb{R}$ y $g : (0,2] \to \mathbb{R}$ funciones definidas por

$$f(x) = \frac{3x+2}{x^2+1} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 3x + 2\,.$$

a) Determine el dominio de la función $(g \circ f)$.

b) Encuentre una expresión para $(g \circ f)(x)$.

Solución.

a) Tenemos que

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{Dom}(g \circ f) \quad &\iff \quad (x \in \mathrm{Dom}(f)) \wedge (f(x) \in \mathrm{Dom}(g)) \\
&\iff \quad (x \in [-2,3]) \wedge \left(\frac{3x+2}{x^2+1} \in (0,2]\right) \\
&\iff \quad (-2 \leqslant x \leqslant 3) \wedge \left(0 < \frac{3x+2}{x^2+1} \leqslant 2\right) \\
&\iff \quad (-2 \leqslant x \leqslant 3) \wedge \big(0 < 3x+2 \leqslant 2(x^2+1)\big) \\
&\iff \quad (-2 \leqslant x \leqslant 3) \wedge \big([0 < 3x+2] \wedge [3x+2 \leqslant 2(x^2+1)]\big) \\
&\iff \quad (-2 \leqslant x \leqslant 3) \wedge \left(\left[-\frac{2}{3} < x\right] \wedge [0 \leqslant x(2x-3)]\right) \\
&\iff \quad (-2 \leqslant x \leqslant 3) \wedge \left(\left[-\frac{2}{3} < x\right] \wedge \left[(x \leqslant 0) \vee \left(x \geqslant \frac{3}{2}\right)\right]\right) \\
&\iff \quad \left(-\frac{2}{3} < x \leqslant 0\right) \vee \left(\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 3\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right] \cup \left[\frac{3}{2}, 3\right]$.

b) Se tiene que

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) \quad &= \quad g(f(x)) = g\left(\frac{3x+2}{x^2+1}\right) \\
&= \quad \left(\frac{3x+2}{x^2+1}\right)^2 - 3\left(\frac{3x+2}{x^2+1}\right) + 2\,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 2.

- 3 puntos por determinar el dominio de la función $g \circ f$.
- 3 puntos por determinar una expresión para la función $g \circ f$.