Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2023

MAT1107 – Introducción al Cálculo

Solución Interrogación N° 2

1. Resuelva la inecuación
$$|x^2 - 2x| - 5x + 8 > |x^2 - 3x + 4|. \tag{1}$$

Solución. Comenzamos notando que el discriminante de $x^2 - 3x + 4$ es -7, por lo que
$$|x^2 - 3x + 4| = x^2 - 3x + 4 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Por otro lado, $x^2 - 2x = x(x-2)$, por lo que
$$|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty) \\ -(x^2 - 2x) & \text{si } x \in (0, 2). \end{cases} \tag{3}$$

Tenemos dos casos que considerar:

- Para $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$, tenemos que
$$(1) \iff x^2 - 2x - 5x + 8 > x^2 - 3x + 4 \iff 1 > x.$$
Luego, el conjunto solución de (1) para $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ es
$$(-\infty, 1) \cap ((-\infty, 0] \cup [2, \infty)) = (-\infty, 0].$$
- Para $x \in (0, 2)$, tenemos que
$$(1) \iff -(x^2 - 2x) - 5x + 8 > x^2 - 3x + 4 \iff 2 > x^2.$$
Luego, el conjunto solución de (1) para $x \in (0, 2)$ es
$$\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \cap (0, 2) = (0, \sqrt{2}).$$
Finalmente, el conjunto solución de (1) en $\mathbb{R}$ es
$$(-\infty, 0] \cup (0, \sqrt{2}) = (-\infty, \sqrt{2}).$$

Puntaje Pregunta 1.

- 1 punto por obtener (2).
- 1.5 puntos por obtener (3).
- 1 punto por mostrar que (1) equivale a $2 > x$ para $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$.
- 0.5 puntos por obtener el conjunto solución de (1) para $x \in (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$.
- 1 punto por mostrar que (1) equivale a $2 > x^2$ para $x \in (0, 2)$.
- 0.5 puntos por obtener el conjunto solución de (1) para $x \in (0, 2)$.
- 0.5 puntos por obtener el conjunto solución de (1) en $\mathbb{R}$.
- Si se resuelve con puntos críticos, i.e. se analiza la inecuación en los intervalos $(-\infty, 0]$, $(0, 2]$ y $(2, \infty)$, distribuir el puntaje de acuerdo a la asignación anterior.

2. Resuelva la siguiente inecuación

$$\sqrt{3-3x} \leqslant \sqrt{21+4x-x^2}\,.$$

Solución. Para que la inecuación esté bien definida las cantidades subradicales deben ser no negativas, es decir

- $3-3x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \leqslant 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 1]$
- $21+4x-x^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2-4x-21 \leqslant 0 \Longleftrightarrow (x-7)(x+3) \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \in [-3, 7]$

Entonces, el conjunto en donde la inecuación está bien definida es

$$B = (-\infty, 1] \cap [-3, 7] = [-3, 1]\,.$$

Ahora bien, elevando a ambos lados de la desigualda se obtiene

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \sqrt{3-3x} \leqslant \sqrt{21+4x-x^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad 3-3x \leqslant 21+4x-x^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant 18+7x-x^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \geqslant x^2-7x-18 \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \geqslant (x-9)(x+2) \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in [-2, 9] \end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es:

$$S = B \cap [-2, 9] = [-2, 1]\,.$$

Puntaje Pregunta 2.

- 2 puntos por establecer el conjunto B donde la inecuación está bien definida.
- 3 puntos por resolver la inecuación con radicales elevando al cuadrado.
- 1 punto por dar la solución final.