PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2023

Ayudantía 11 - MAT1610

1. (a) Determine la antiderivada general de la función

$$g(x) = \frac{2 + x^2 + x\sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2}$$

   (b) Determine la función f tal.

$$f''(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x) \text{ y } f(0) = 3 \text{ y } f'(0) = 7$$

   (c) Determine una función f tal que $f'(x) = x^3$ y la recta $x + y = 0$ sea tangente a la grafica de f.

Solución:

   (a) Notar que
   $g(x) = \frac{2+x^2}{1+x^2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} = 1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$
   Enonces, la antiederivada general es:

$$G(x) = x + \arctan(x) + \sqrt{1 + x^2} + C$$

   (b) Dado que $f''(x) = \operatorname{sen}(x) + \cos(x$ su antiderivada general es $G(x) = -\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C$ y
   $f'(x) = -\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C$ donde la constante C es tal que,

$$f'(0) = -\cos(0) + \operatorname{sen}(0) + C = 7$$

   es decir, $C = 8$. Entonces, $f(x) = -\operatorname{sen}(x) - \cos(x) + 8x + K$ y K es el valor que hace que $f(0) = -\operatorname{sen}(0) - \cos(0) + K = 3$, es decir, $k = 4$. Así, la función buscada es:

$$f(x) = -\operatorname{sen}(x) - \cos(x) + 8x + 4$$

   (c) La antiderivada general para f' es $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$, para que la recta $y = -x$ (que tiene pendiente -1) sea tangente a F debe ocurrir que $f'(x_0) = -1$, es decir, $x_0^3 = -1$ para algún x_0, lo cual ocurre si $x_0 = -1$ e $y_0 = -x_0 = 1$. Por lo tanto la constante C debe ser tal que $F(-1) = 1$, esto es, $\frac{(-1)^4}{4} + C = \frac{1}{4} + C = 1$, es decir, $C = \frac{3}{4}$.
   Entonces, $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{4}$

2. (a) Determine una región cuya área sea igual al límite dado, identificándolo como una suma de Riemann: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2 + kn}}{n^2}$

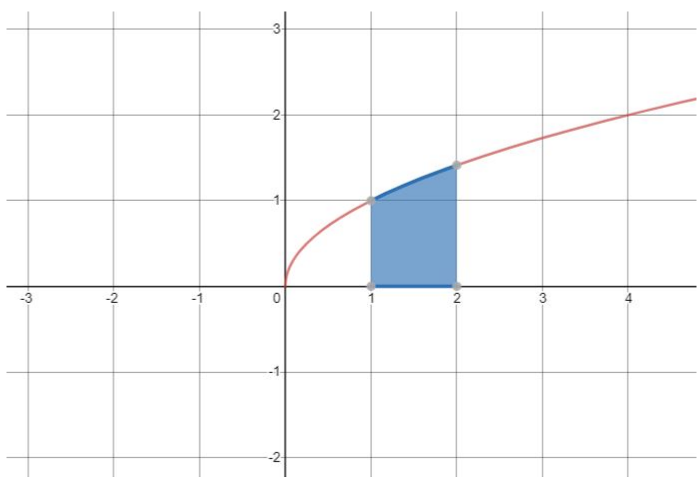
(b) Determine una región cuya área sea igual al límite dado, identificándolo como una suma de Riemann: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}$

Solución:

(a)

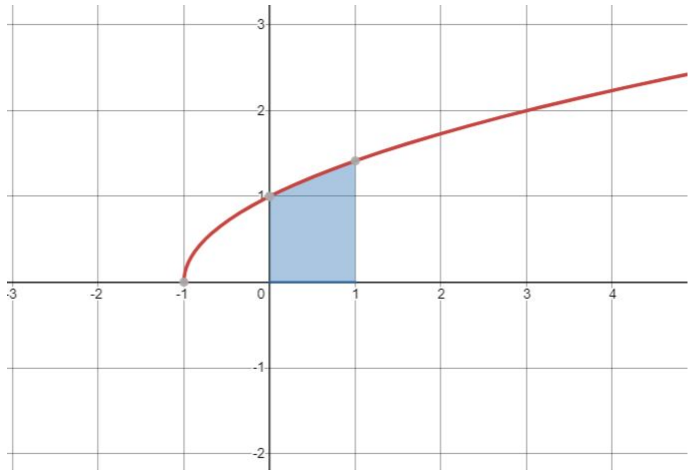
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2+kn}}{n^2} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2+kn}}{n}\frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+k\frac{1}{n}}\frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\sqrt{1+k\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}}}_{f(x_k^*)}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}
\end{aligned}$$

Así, considerando $\Delta x = \frac{1}{n}$ (note que el intervalo de intergración debe tener longitud 1) y Una opción, $[a,b]=[1,2]$, $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0^*=1$, $x_k^*=1+k\Delta x = 1+k\frac{1}{n}$, $1\le k\le n$, $(x_n^*=2)$



Otra opción, $f(x)=\sqrt{1+x}$, $[a,b]=[0,1]$, $x_0^*=0$, $x_k^*=0+k\Delta x = k\frac{1}{n}$, $1\le k\le n$, $(x_n^*=1)$
Por lo tanto,

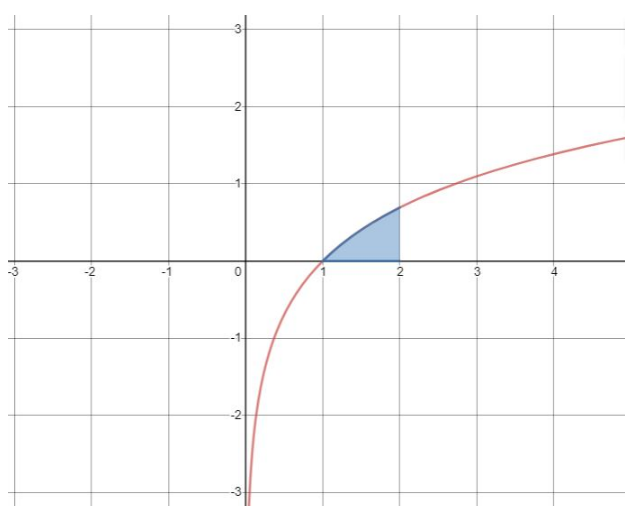
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2+kn}}{n^2} = \int_1^2 \sqrt{x}dx = \int_0^1 \sqrt{1+x}dx$$



(b)

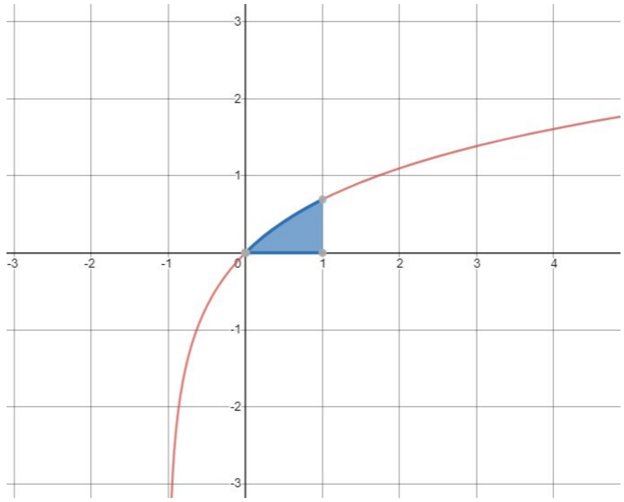
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\frac{1}{n} \text{ propiedad} \ln \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\ln\left(1+k\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}\right)}_{f(x_k^*)}\underbrace{\frac{1}{n}}_{\Delta x}
\end{aligned}$$

Así, considerando $\Delta x = \frac{1}{n}$ (note que el intervalo de intergración debe tener longitud 1) y Una opción, tomar $[a, b] = [1, 2]$, $f(x) = \ln(x)$, , $x_0^* = 1$, $x_k^* = 1+k\Delta x = 1+k\frac{1}{n}$, $1 \leq k \leq n$, $(x_n^* = 2)$
Otra opción, tomar $f(x) = \ln(1+x)$, $[a, b] = [0, 1]$, $x_0^* = 0$, $x_k^* = 0+k\Delta x = k\frac{1}{n}$, $1 \leq k \leq n$,



$(x_n^* = 1)$

Por lo tanto,



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(n+k)-\ln(n)}{n}=\int_1^2 \ln(x)dx=\int_0^1 \ln(1+x)dx$$

3. Demuestre que $\frac{\sqrt{2}\pi}{24}\leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{2}$.

Solución
Notar que en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ el valor mínimo absoluto de la función $x\mapsto \cos(x)$ es $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y la longitud del intervalo de integración es $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{24}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{12}\leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)dx$$

Por otro lado, para $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$, como $x<1$ entonces $1<\frac{1}{x}$ y como $\cos(x)<1$, por transitividad se tiene que, para $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(x)<\frac{1}{x}$ y en consecuencia,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}dx$$

Por último, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ el valor máximo absoluto de la función $x\mapsto\frac{1}{x}$ es $\frac{6}{\pi}$ y la longitud del intervalo de integración es $\frac{\pi}{12}$ entonces,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x}dx \leq \frac{6}{\pi}\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}$$

4. Determine la constante a y la función $f(x)$ tales que

$$\int_a^{2x-a} f(t)dt=\operatorname{sen}(x-a)+\arctan(x-a)+a-2$$

Solución:

Sea $G(x) = \displaystyle\int_a^{2x-a} f(t)dt$ entonces, $G(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$, es decir, $\operatorname{sen}(0) + \arctan(0) + a - 2 = 0$ y en consecuencia $a = 2$ y

$$G(x) = \int_a^{2x-a} f(t)dt = \int_2^{2x-2} f(t)dt = \operatorname{sen}(x-2) + \arctan(x-2)$$

es decir,

$$\int_a^{2x-a} f(t)dt = \operatorname{sen}(x-2) + \arctan(x-2)$$

Entonces, derivando en ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_2^{2x-2} f(t)dt = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \quad &\Rightarrow \quad f(2x-2)\frac{d}{dx}(2x-2) = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \\
&\Rightarrow \quad f(2x-2)\cdot 2 = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \\
&\Rightarrow \quad f\,(2x-2) = \frac{\cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2}}{2} \\
&\Rightarrow \quad f(x) = \frac{\cos(\frac{x+2}{2}-2) + \frac{1}{1+(\frac{x+2}{2}-2)^2}}{2}
\end{aligned}$$