MAT1620 ⋆ CÁLCULO II
INTERROGACIÓN 1

1. Analice la convergencia de las siguientes integrales

   a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt{2x+3}}\,dx.$ *b*) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4+x}}\,dx.$

2. Calcule los siguientes límites

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln(3n^5+2n^4-1)-\ln(2n^5-n^3+2).$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{7^4}+\frac{5}{7^5}+\frac{5}{7^6}+\ldots+\frac{5}{7^n}\right).$

3. Analice la convergencia de las siguientes series numéricas,

   a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3},$ *b*) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{3^n}.$

4. Analice la convergencia condicional o absoluta de

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}).$$

5. Determine el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(x-2)^n}{n+1}.$$

6. *a*) Determine una serie de potencias, centrada en $x=0$, que represente a la función $f(x)=\ln(1-x)$. Indique el intervalo de convergencia respectivo.

   b) Utilice lo anterior para probar que

$$\ln(2)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\cdot 2^n}.$$

1. Soluciones

1. *a*) Escribimos la integral impropia como la suma de un integral impropia de tipo 2 más una integral impropia de tipo 1 haciendo,
$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt{2x+3}}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt{2x+3}}\mathrm{d}x+\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt{2x+3}}\mathrm{d}x.$$
Luego, dado que
$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt{2x+3}}}{\frac{1}{\sqrt{2x+3}}}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1\neq0$$
y las funciones $f(x)=\sin(x)/x\sqrt{2x+3}$ y $g(x)=1/\sqrt{2x+3}$ son positivas e integrales en $(0,1)$, usando el criterio de comparación en el límite tenemos que $\int_0^1\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt{2x+3}}\mathrm{d}x$ es convergente. Además cuando $x\geq1$, se satisface que:
$$\begin{aligned}\left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt{2x+3}}\right| &\leq \frac{1}{x\sqrt{x}}\\ &= \frac{1}{x^{3/2}},\end{aligned}$$
y como $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{3/2}}\mathrm{d}x$ es una integral convergente ($p=3/2>1$), usando el criterio de comparación de integrales tenemos que la integral $\int_1^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt{2x+3}}\mathrm{d}x$ converge absolutamente y por lo tanto converge. Por lo tanto dada la convergencia de ambas integrales anteriormente estudiadas, la integral $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x\sqrt{2x+3}}\mathrm{d}x$ es convergente.

   b) Observe que si $x\geq1$
$$\begin{aligned}\frac{x+1}{\sqrt{x^4+x}} &\geq \frac{x+1}{\sqrt{x^4+2x^3+x^2}}\\ &= \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2x^2}}\\ &= \frac{1}{x}.\end{aligned}$$
como las funciones $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^4+x}}$ y $f(x)=1/x$ son continuas y positivas para $x\geq1$ y $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ es divergente ($p=1$), usando el criterio de comparación de integrales impropias, tenemos que $\int_1^{\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^4+x}}\mathrm{d}x$ es divergente.

Asignación de Puntaje:

- (a) Asignar 0.5 puntos por separar la integral en las dos casos a analizar.
- (a) Asignar 1 punto por analizar (utilizando de manera correcta algún criterio de comparación) cada una de las integrales.
- (a) Asignar 0,5 puntos por concluir de manera correcta que la integral es convergente.
- (b) Asignar 2 puntos por comparar (con algun criterio) de manera correcta la función dada.
- (b) Asignar 1 punto por concluir de manera correcta que la integral es divergente.

2. *a*) Observe que

$$\lim_{n\to\infty} \ln(3n^5+2n^4-1)-\ln(2n^5-n^3+2) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n^5+2n^4-1}{2n^5-n^3+2}\right),$$

como

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5+2n^4-1}{2n^5-n^3+2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^5}}{2-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^5}}\\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

y $f(x)=\ln(x)$ es una función continua en $x=3/2$, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{3n^5+2n^4-1}{2n^5-n^3+2}\right) &= \ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5+2n^4-1}{2n^5-n^3+2}\right)\\ &= \ln(\frac{3}{2}).\end{aligned}$$

b) Observe que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{7^4}+\frac{5}{7^5}+\frac{5}{7^6}+\ldots+\frac{5}{7^n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=4}^{n}5\left(\frac{1}{7}\right)^i\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-3}\frac{5}{7^3}\left(\frac{1}{7}\right)^i\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{7^3}\left(\frac{1}{7}\right)^n\\ &= \frac{5/7^3}{1-(1/7)}\\ &= \frac{5}{7^2\cdot 6}\end{aligned}$$

Asignación de puntaje:

- (a) Asignar 1,5 puntos por la operatoria algebraica correcta (propiedades de logaritmo y dividir por el mayor exponente).
- (a) Asignar 1,5 puntos por calcular correctamente el valor pedido.
- (b) Asignar 1 punto por reconocer la suma geometrica respectica.
- (b) Asignar 2 puntos por el calculo correcto del limite.

3. *a*) La función $f(x) = x - \ln(x)$, es derivable en $x \geq 1$, luego $f'(x) = 1 - (1/x)$ y $f'(x) \geq 0$ si y sólo si $x \geq 1$. Luego como $f(1) = 1 \geq 0$ y la función f es creciente para $x \geq 1$, tenemos que $\ln(x) \leq x$ para $x \geq 1$. Así,

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n)}{n^3} &\leq \frac{n}{n^3} \\ &= \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

y cómo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge ($p-$serie con $p = 2$), usando el criterio de comparación de series, tenemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$ converge.

b) Sea $a_n = n^2/3^n$, $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n^2}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{3} \\ &< 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando el criterio del cociente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ converge absolutamente, y por tanto converge.

Asignación de puntaje

- (a) Asignar 1 punto por una correcta estimación de ln(n).
- (a) Asignar 1 punto por comparar de manera correcta la serie dada.
- (a) Asignar 1 punto por concluir de manera correcta la convergencia de la serie.
- (b) Asignar 1,5 puntos por la utilización de manera correcta, de algún criterio.
- (b) Asignar 1,5 puntos por concluir de manera correcta la convergencia de la serie.

4. Lo primero que debemos notar en este problema es que el término correspondiente al argumento de la serie, puede ser re-escrito por
$$(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$
simplemente multiplicando el numerador y denominador por $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$. Luego, observamos que la serie converge dado que $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ es creciente en n y por ende, $1/(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ es decreciente y
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0,$$
es decir, se cumplen las condiciones del criterio de Leibnitz (criterio de series alternantes). Además,
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},$$
es divergente, dado que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2},$$
y como $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente, se concluye lo anterior.
Finalmente, podemos concluir con todo lo anterior que la serie es condicionalmente convergente.
Asignación de puntaje
- Asignar 2 puntos por analizar, de manera correcta, la convergencia en valor absoluto.
- Asignar 3 puntos por analizar la respectiva serie alternante con el criterio de Leibnitz.
- Asignar 1 punto por concluir la convergencia condicional.

5. Primero calculamos el radio de convergencia utilizando el criterio de la raíz, esto es,
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-3)^n}{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n+1}} = 3,$$
por lo que el radio de convergencia es $R = 1/3$. Ahora dado que la serie esta centrada en 2, entonces el intervalo de convergencia (sin ver que pasa en los extremos aún) es
$$\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right).$$
Ahora debemos ver que pasa con la convergencia en los extremos. Si tomamos $x = 5/3$ entonces la serie es
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{2n}}{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1},$$
serie que diverge (serie armónica). Ahora si tomamos $x = 7/3$ entonces
$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+1},$$
serie que converge (serie armónica alternante). Luego, el intervalo de convergencia es
$$\left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right].$$
Asignación de puntaje:
- Asignar 2 puntos por calcular de manera correcta el radio de convergencia.
- Asignar 2 puntos por analizar de manera correcta cada uno de los extremos respectivos.

6. a) Notemos que

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n\geq 0} x^n,$$

por lo tanto

$$f(x) = \int -\frac{1}{1-x}dx = -\int \sum_{n\geq 0} x^n dx,$$

es decir,

$$\ln(1-x) = f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{-x^{n+1}}{n+1} + C = \sum_{n\geq 1} \frac{-x^n}{n} + C.$$

Luego, considerando $x = 0$ en la ecuación anterior se tiene que $C = 0$ y por tanto

$$\ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{-x^n}{n}.$$

Además, dado que la serie anterior proviene de una geométrica el radio de convergencia es 1 y en los extremos se obtiene una armónica ($x = 1$) y una armónica alternante ($x = -1$), por lo que el intervalo de convergencia es $[-1, 1)$.

b) Basta notar que

$$\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2), \tag{1}$$

y que

$$\ln\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{-(1/2)^n}{n} = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\cdot 2^n}. \tag{2}$$

Luego, dado que el lado izquierdo en las ecuaciones (1) y (2) es igual, entonces los lados derechos deben también serlo, por lo que

$$-\ln(2) = -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\cdot 2^n},$$

es decir,

$$\ln(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\cdot 2^n}.$$

Asignación de puntaje:

- (a) Asignar 1 punto integrar la serie geometrica respectiva.
- (a) Asignar 1 punto por obtener el respectivo intervalo de convergencia.
- (a) Asignar 1 punto por obtener la serie pedida.
- (b) Asignar 2 puntos por evaluar lo obtenido en (a) para obtener la igualdad pedida.
- (b) Asignar 1 punto por conluir la demostracion pedida.