1. Sea $z>0$, un real fijo y sea A_z, el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2+zx+z^2| \leq zx+2z^2.$$

Considere $0<z_1<z_2$. Demuestre que $A_{z_1} \subset A_{z_2}$.

Dem.: Desarrollando la desigualdad tenemos que

$$\begin{aligned}
|x^2+zx+z^2| \leq zx+2z^2 &\Leftrightarrow -(zx+2z^2) \leq x^2+zx+z^2 \leq zx+2z^2 \\
&\Leftrightarrow -zx-2z^2 \leq x^2+zx+z^2 \wedge x^2+\cancel{zx}+z^2 \leq \cancel{zx}+2z^2 \\
&\Leftrightarrow -2z^2 \leq x^2+2zx+z^2 \wedge x^2-z^2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow -2z^2 \leq (x+z)^2 \; (*) \wedge (x+z)(x-z) \leq 0 \; (**).
\end{aligned}$$

Notar que $(*)$ siempre se cumple porque $\forall z>0, -2z^2<0$ y $\forall x \in \mathbb{R}, (x+z)^2 \geq 0$. Así, $(*)$ no impone condiciones sobre el conjunto solución. Ahora, mirando $(**)$,

$$\begin{aligned}
(x+z)(x-z) \leq 0 &\Leftrightarrow (x+z \geq 0 \wedge x-z \leq 0) \vee (x+z \leq 0 \wedge x-z \geq 0) \\
&\Leftrightarrow (x \geq -z \wedge x \leq z) \vee (x \leq -z \wedge x \geq z) \\
&\Leftrightarrow x \in [-z,z] \cup \emptyset \\
&\Leftrightarrow x \in [-z,z].
\end{aligned}$$

luego, $A_z = [-z,z]$. Si $0<z_1<z_2 \Rightarrow A_{z_1} = [-z_1,z_1] \subset [-z_2,z_2] = A_{z_2}$ (A_{z_2} es un intervalo más largo y que contiene a A_{z_1}). Esto era lo pedido ■

2. Encuentre el conjunto solución de

a) $\sqrt{x^2-4} \leq x$
b) $\sqrt[3]{x^3-8} \leq x$

¿Cuál es la diferencia entre ambos conjuntos?

Sol: a) $\sqrt{t} \geq 0 \;\forall t \geq 0$. Por lo tanto, la inecuación solo tiene solución si $x \geq 0$. Además, como la raíz cuadrada solo admite cantidades no negativas, por lo que $x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}-(-2,2)$. Como habíamos establecido que $x \geq 0$, entonces $x \geq 2$. Ahora, resolviendo la inecuación con las condiciones impuestas sobre x,

$$\sqrt{x^2-4} \leq x \;/(\;)^2 \Rightarrow x^2-4 \leq x^2 \;/-x^2 \Leftrightarrow -4 \leq 0.$$

La última desigualdad es tautológica. luego, el cjto. solución de la desigualdad es $[2,+\infty)$.

b) La raíz cúbica está bien definida en todo $\mathbb{R}$. Ahora podemos manipular la desigualdad

$$\sqrt[3]{x^3-8} \leq x \;/(\;)^3 \Leftrightarrow x^3-8 \leq x^3 \;/-x^3 \Leftrightarrow -8 \leq 0.$$

luego, el cjto. solución de la inecuación es todo $\mathbb{R}$ (porque la última desigualdad es tautológica).

Notar que parece ser que el conjunto solución depende de la paridad de n en la inecuación $\sqrt[n]{x^n-2^n} \leq x$ (en a), $n=2$ y en b), $n=3$).

3. Demuestre que si $a^2 \geq 1$, $b^2 \geq 4$ y $\dfrac{ab-b}{2}+a \leq 1$, entonces $ab-2a+b \leq 2$.

Dem.: $\quad a^2-1 \geq 0 \wedge b^2-4 \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (a+1)(a-1) \geq 0 \wedge (b+2)(b-2) \geq 0 \\
&\Rightarrow (a+1)(a-1)(b+2)(b-2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (a+1)(b-2)(ab+2a-b-2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (ab-2a+b-2)(ab+2a-b-2) \geq 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Ahora, $\frac{ab-b}{2}+a \leq 1 \;/\cdot 2 \iff ab-b+2a \leq 2 \;/-2 \iff ab+2a-b-2 \leq 0$. Esta expresión está marcada. Como el producto $\star$ es ≥ 0, debe ocurrir que $ab-2a+b-2 \leq 0 \iff ab-2a+b \leq 2$ ■