Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Departamento de Estadística
Primer Semestre de 2019
Profesor: Fernando Quintana – Ayudante: Rubén Soza

Modelos Probabilísticos - EYP1026
Ayudantía 2
21 de Marzo de 2019

1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, y considere eventos $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{F}$ tales que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una partición de Ω. Defina $C_m = B_1 \cap \cdots \cap B_m$ para $m \geqslant 1$. Pruebe que

$$P(A_n \mid C_{m+1}) = \frac{P(B_{m+1} \mid A_n \cap C_m)P(A_n \mid C_m)}{\sum_{l=1}^{\infty} P(B_{m+1} \mid A_l \cap C_m)P(A_l \mid C_m)} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

   Interprete este resultado en términos del teorema de Bayes.

2. Suponga que un dado equilibrado se lanza una vez. Si sale un número impar, una moneda honesta se lanza repetidamente; si sale un número par, una moneda sesgada con probabilidad de obtener cara $p \neq 0{,}5$ se lanza repetidamente (los lanzamientos de la moneda son independientes en cada caso). Si los n primeros resultados son caras, ¿cuál es la probabilidad de que una moneda insesgada haya sido usada?

3. Suponga que lanza dos dados honestos de forma simultánea. Defina los eventos

   - $A = \{$Ambos dados muestran el mismo número$\}$.
   - $B = \{$La suma de los dados esta entre 7 y 10$\}$.
   - $C = \{$La suma es 2 o 7 o 8$\}$.

   Pruebe que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. ¿Son A, B y C independientes? Justifique.

4. Usted se siente mal y va al médico. Después de los procedimientos de rigor, el médico cree que usted puede padecer la enfermedad A. El médico asume que la prevalencia de la enfermedad en la población a la cual usted pertenece(basado en su edad, sexo, etc) es $P(A) = 0{,}7$. El médico le solicita un examen cuyo resultado es positivo(B) o negativo con la siguiente función de probabilidad. Si

$$\begin{aligned} P(B \mid A^c) &= 0{,}40, \quad \text{Examen positivo sin enfermedad} \\ P(B \mid A) &= 0{,}95, \quad \text{Examen positivo con enfermedad} \end{aligned}$$

   Suponiendo que el resultado de su examen es positivo:

   a) ¿Cuál es la probabilidad para el médico que usted tenga la enfermedad?.

   b) ¿Cuál es la probabilidad para el médico que usted no tenga la enfermedad?.

   c) ¿En cuánto incrementa para el médico la probabilidad que usted tenga la enfermedad si se aplica el examen?.

d) Suponga que el médico le pide otro examen, con las mismas características que el anterior, pero en donde ahora:

$$\begin{aligned} P(B \mid A^c) &= 0{,}04, \quad \text{Examen positivo sin enfermedad} \\ P(B \mid A) &= 0{,}99, \quad \text{Examen positivo con enfermedad} \end{aligned}$$

¿Cómo cambian las decisiones del médico con este examen?¿Cuál de los dos exámenes es más eficiente?.

Propuestos:

1. Supón que estás en un concurso, y se te ofrece escoger entre tres puertas: detrás de una de ellas hay un coche, y detrás de las otras, cabras. Luego de seleccionar una, el presentador abre otra puerta que contiene una cabra. Se te ofrece cambiar tu elección inicial por la puerta restante. ¿Qué decisión adoptarías? Justifica tu respuesta.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y suponga que todos los siguientes conjuntos pertenecen a $\mathcal{A}$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a) Sean $A_1, A_2, \ldots$ disjuntos con $P(A_n) > 0 \; \forall n \in \mathbb{N}$. Demuestre que si $P(B \mid A_n) \geqslant c \; \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

   $$P\left(B| \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geqslant c.$$

   b) Si $A_n \supset A_{n+1}$ y $P(A_{n+1}|A_n) \leqslant \dfrac{1}{2} \; \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $P(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

   c) Si $A_1, A_2, \ldots$ son disjuntos y $P(B|A_n) = P(C|A_n)$ para todo $n \geqslant 1$ entonces

   $$P\left(B \mid \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = P\left(C \mid \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

   d) Si $A_1, A_2, \ldots$ son una partición de Ω entonces

   $$P(B|C) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_N|C)P(B|A_n \cap C).$$