Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2017

MAT 1620 – Cálculo II

Solución Interrogación 1

1. Determine si la siguiente integral es convergente o divergente

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1} \right) dx \,.$$

Evalúe la integral en el caso que sea convergente.

Solución. Notemos que la integral es impropia de primer tipo. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1} \right) dx &= \lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1} \right) dx \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln(3x+1) \right]_0^t \\
&= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(t^2+1) - \ln(3t+1) \right] \\
&= \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{(t^2+1)^{1/2}}{3t+1} \right) \\
&= \ln\left(\lim_{t\to\infty} \frac{(t^2+1)^{1/2}}{3t+1} \right) \\
&= \ln\left(\lim_{t\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{1/2}}{3+\frac{1}{t}} \right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la integral dada es convergente y $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{3x+1} \right) dx = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

Puntaje Pregunta 1

- **3 puntos** por calcular correctamente las primitivas.
- **1 puntos** por utilizar las propiedades del logaritmo natural y obtener el logaritmo de un cociente.
- **2 puntos** por realizar paso al límite y calcular correctamente el límite.

2. Determine si la serie es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Solución. Usando las propiedades de la función logaritmo natural vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [\ln(k) - \ln(k+1)]\,. \tag{1}$$

Ahora bien, usando la propiedad telescópica para sumas

$$\sum_{k=1}^{n} [\ln(k) - \ln(k+1)] = \ln(1) - \ln(n+1)) = -\ln(n+1)\,.$$

Entonces, se sigue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} [-\ln(n+1)] = -\infty$$

y la serie dada es divergente.

Puntaje Pregunta 2

- **3 puntos** por utilizar las propiedades del logaritmo natural y la definición de serie para obtener la expresion (1).
- **3 puntos** por utilizar la propiedad telescópica y concluir que la serie es divergente.

3. Si la n-ésima suma parcial de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $s_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Solución. Notemos que $s_1 = 0$ entonces $a_1 = 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 1$ se cumple que

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} - \frac{n-2}{n} = \frac{n(n-1)-(n-2)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \, .$$

Por otro lado, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1 \, .$$

Otra forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n(n+1)} \\
&= 2 \lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] = 2 \lim_{k\to\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}\right] = 1 \, .
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 3

- **2 puntos** por calcular correctamente el término general a_n de la serie para $n \neq 1$.
- **1 punto** por indicar que $a_1 = 0$.
- **3 puntos** por calcular correctamente el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

4. Determine los valores de p para los cuales la serie es convergente

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} .$$

Solución. La función $f(x) = 1/(x(\ln(x))^p$ es continua y positiva en $[2, +\infty[$. Notemos que

$$f'(x) = -\frac{(\ln(x))^p + p(\ln(x))^{p-1}}{x^2(\ln(x))^{2p}} = -\frac{\ln(x) + p}{x^2(\ln(x))^{p-1}} .$$

Luego $f'(x) < 0$ si $\ln(x) + p > 0 \Longleftrightarrow x > e^{-p}$, y se sigue que f es creciente para $x > e^{-p}$. Utilizaremos el criterio integral, para calcular la primitiva de $f(x)$ realizamos el cambio de variables $u = \ln(x)$ entonces $du/dx = 1/x$ y obtenemos que

$$\int \frac{dx}{x(\ln(x))^p} = \int \frac{du}{u^p} = \begin{cases} \dfrac{u^{1-p}}{1-p} + C & \text{si } p \neq 1 \\ \ln(u) + C & \text{si } p = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{(\ln(x))^{1-p}}{1-p} + C & \text{si } p \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) + C & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Para $p \neq 1$ se tiene que

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^p} = \lim_{t\to\infty} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^p} = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{(\ln(x))^{1-p}}{1-p} \right]_2^t = \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} \left[(\ln(t))^{1-p} - (\ln(2))^{1-p} \right]$$

Este último límite existe cuando $1 - p < 0 \Longleftrightarrow p > 1$.
Finalmente, para $p = 1$ se tiene

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^p} = \lim_{t\to\infty} \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^p} = \lim_{t\to\infty} [(\ln(\ln(x)))]_2^t = \lim_{t\to\infty} [\ln(\ln(t)) - \ln(\ln(2))] = \infty .$$

y en este caso la integral es divergente. Por lo tanto, en virtud del criterio integral, la serie dada es convergente para $p > 1$.

Puntaje Pregunta 4

- **1 punto** por verificar que la función $f(x)$ es continua, positiva y creciente.
- **1,5 puntos** por calcular la primitiva de $f(x)$.
  Descontar 0,5 puntos en el caso que no se calcule la primitiva para $p = 1$.
- **2 puntos** por determinar la convergencia de la integral impropia para $p \neq 1$.
- **1 punto** por verificar que la integral impropia de $f(x)$ es divergente para $p = 1$.
- **0,5 puntos** por concluir que la convergencia de la serie dada ocurre cuando $p > 1$.

5. Demuestre que si $a_n > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ es convergente.

Solución. Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Haciendo el cambio de variables $x = a_n$ y usando la regla de L'Hospital vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1\,.$$

Notemos que $\sum a_n$ y $\sum \ln(1+a_n)$ son series con términos positivos y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1 > 0\,.$$

Como $\sum a_n$ es convergente entonces $\sum \ln(1+a_n)$ es convergente por la prueba de comparación en el límite.

Puntaje Pregunta 5

- **1 punto** por indicar que $\lim a_n = 0$.
- **1 punto** por realizar el cambio de variables $x = a_n$
- **1 punto** por calcular correctamente el límite usando la regla de L'Hospital.
- **3 puntos** por utilizar la prueba de comparación en el límite, indicando las hipótesis de este resultado:
  - *a*) Ambas series con términos positivos.
  - *b*) $\lim a_n/b_n = 1 > 0$.
  - *c*) $\sum a_n$ convergente.

Descontar 1 punto por cada hipótesis no mencionada.

6. Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-4)^n}{n^3+1}$$

Solución. Sea $a_n = \dfrac{n(x-4)^n}{n^3+1}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x-4|^{n+1}}{(n+1)^3+1}\cdot\frac{n^3+1}{n|x-4|^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n^3+1}{n^3+3n^2+3n+2}|x-4| = |x-4|.$$

Usando el criterio del cociente, la serie converge cuando $|x-4|<1$ y por lo tanto el radio de convergencia es $R=1$. Además, $|x-4|<1 \iff -1<x-4<1 \iff 3<x<5$.

Ahora bien, si $x=3$ entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^3+1}$ la cual es convergente por el criterio de las series alternantes.

Si $x=5$ obtenemos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$ la cual es convergente por el criterio de comparación ya que $\dfrac{n}{n^3+1}\leqslant\dfrac{n}{n^3}=\dfrac{1}{n^2}$. Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $I=[3,5]$.

Puntaje Pregunta 6

- **2 puntos** por calcular correctamente el límite $\lim |a_{n+1}/a_n|$.
- **1 puntos** por concluir que el radio de convergencia es $R=1$.
- **1 puntos** por verificar la convergencia de la serie para $x=3$.
- **1 puntos** por verificar la convergencia de la serie para $x=5$.
- **1 puntos** por concluir que el intervalo de convergencia es $I=[3,5]$.

7. Evalúe la integral indefinida como una serie infinita

$$\int x \arctan(3x)\, dx \,.$$

Solución. Usando el desarrollo en serie de potencias de la función arcotangente

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

para $x \in [-1, -1]$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int x \arctan(3x)\, dx &= \int x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(3x)^{2n+1}}{2n+1}\, dx \\
&= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1}\, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{2n+1} \int x^{2n+2}\, dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 3^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + C \,.
\end{aligned}$$

Puntaje Pregunta 7

- **2 puntos** por indicar que el desarrollo de potencias de la función arcotangente.
- **1 punto** por indicar el intervalo en donde es válido el desarrollo en serie de la función arcotangente.
- **3 puntos** por calcular correctamente el valor de la integral indefinida.

8. Calcule la suma de la serie

$$1 - \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} - \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots .$$

Justifique su respuesta.

Solución. Usando el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial, vemos que

$$1 - \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2!} - \frac{(\ln 2)^3}{3!} + \cdots \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\ln(2))^n}{n!} = e^{-\ln(2)} = \frac{1}{2} .$$

Puntaje Pregunta 8

- **6 puntos** por calcular correctamente el valor de la serie, usando el desarrollo en serie de la función exponencial.