PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

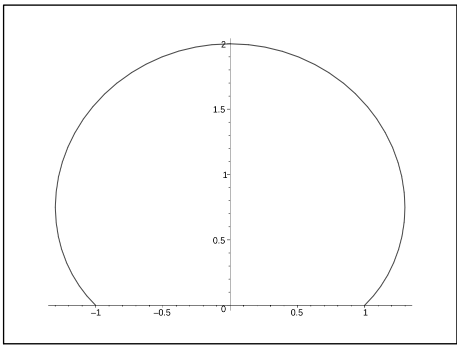
MAT1620 - CÁLCULO II
INTERROGACION 2

Otoño 2012

1. Hallar el área de la superficie obtenida rotando, alrededor del eje X, la curva cuya ecuación polar es $r = 1 + 2\sin(\theta)$ para $\theta \in [0, \pi]$.

Solución:

La curva es la parte superior de una cardioide y se muestra en la figura del lado.



Sin ser necesario, resulta más simple usar la simetría de la figura y trabajar solamente con el trozo derecho, el que corresponde a $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Por la fórmula para el área de una superficie de revolución,

$$\frac{A}{2} = 2\pi \int_0^{\pi/2} y(\theta)\, ds$$

En coordenadas polares tenemos que

$$ds = \sqrt{r^2(\theta) + (\, r'(\theta)\,)^2}\, d\theta.$$

mientras que

$$y(\theta) = r(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Como $r(\theta) = 1 + 2\,\mathrm{sen}(\theta)$ obtenemos, sustituyendo,

$$\begin{aligned} A &= 4\pi \int_0^{\pi/2} (\, 1 + 2\,\mathrm{sen}(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta) \sqrt{(\, 1 + 2\,\mathrm{sen}(\theta)\,)^2 + 4\cos^2(\theta)}\, d\theta \\ &= 4\pi \int_0^{\pi/2} \big(\mathrm{sen}(\theta) + 2\,\mathrm{sen}^2(\theta)\big) \sqrt{5 + 4\,\mathrm{sen}(\theta)}\, d\theta \end{aligned}$$

2. *a*) Demuestre que $\dfrac{\pi}{4} < \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$.

Solución: Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Es claro que f es estrictamente decreciente para $x \geq 0$, pues, para $x < y$ se tiene

$$x^2 + 1 < y^2 + 1$$
$$f(y) = \frac{1}{y^2+1} < \frac{1}{x^2+1} = f(x).$$

Teniendo en cuenta el criterio de la integral para series, obtenemos que para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, si $n < x < n+1$ entonces

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} \quad < \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2+1}\,dx \quad < \quad \frac{1}{n^2+1}$$

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(n+1)^2+1} \quad < \quad \int_1^{k+1} \frac{1}{x^2+1}\,dx \quad < \quad \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+1}$$

Como

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_1^{k+1} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{k\to\infty} \left[\arctan(k+1) - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4},$$

concluimos que

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2+1} < \frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

o sea,

$$\frac{\pi}{4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2+1} < \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

b) Indique para que valores de $p \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^p}$$

es convergente, absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

Solución: Supongamos que $p \leq 0$, luego, $q = -p \geq 0$ y se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = \lim_{n\to\infty} n^q \ln n = \infty.$$

De aquí obtenemos que no existe el límite $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^p}$. Por lo tanto, la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^p}$ es divergente.

Ahora, para $p > 0$ notemos que la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^p}$ es estrictamente decreciente para $x \geq e^{1/p}$, ya que

$$f'(x) = \frac{1}{x^{p+1}}\,(1 - p\ln x) \qquad \text{y} \qquad 1 - p\ln x < 0 \iff e^{1/p} < x.$$

Además, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0,$$

y para todo $n \geq 3$,

$$\frac{1}{n^p} \leq \frac{\ln n}{n^p}.$$

A partir de lo anterior, para $0 < p \leq 1$ obtenemos que la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^p}$ es divergente, ya que la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ lo es. Pero, por el criterio de Leibnitz para series alternantes obtenemos que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}$ es convergente. Por lo tanto, para $0 < p \leq 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}$ es condicionalmente convergente.

Ahora, para $p > 1$ ocupamos el criterio de la integral, pues f es decreciente y obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_2^{\infty} f(x)\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_2^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\ln 2}{(p-1)2^{p-1}} - \frac{\ln t}{(p-1)t^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\int_2^t \frac{1}{x^p}\,dx\right]\\ &= \frac{\ln 2}{(p-1)2^{p-1}} + \frac{1}{p-1}\int_2^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx,\end{aligned}$$

o sea, la integral es convergente, y en consecuencia la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}$ es absolutamente convergente.

Finalmente, concluimos que para $p > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n^p}$ es convergente.

3. *a*) Hallar el intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{n^2+5^n}(1+2x)^n.$$

<u>Solución</u>: Queremos encontrar el intervalo de convergencia de

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{n^2+5^n}(1+2x)^n$$

Observamos que

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{(-1)^n+2^n}{n^2+5^n}\Big)2^n(x+\frac{1}{2})^n$$

es decir, podemos escribimos la serie de la forma $\sum c_n(x-a)^n$ con $a = -\frac{1}{2}$ y con

$$c_n = \Big(\frac{(-1)^n+2^n}{n^2+5^n}\Big)2^n$$

Calculemos el radio de convergencia como $R = (\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|)^{-1}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| &= \lim_{n\to\infty}\Big|\Big(\frac{(-1)^{n+1}+2^{n+1}}{(n+1)^2+5^{n+1}}\Big)2^{n+1}\Big/\Big(\frac{(-1)^n+2^n}{n^2+5^n}\Big)2^n\Big|\\ &= \frac{4}{5}\lim_{n\to\infty}\Big|\Big(\frac{(\frac{-1}{2})^{n+1}+1}{\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}+1}\Big)\Big/\Big(\frac{(\frac{-1}{2})^n+1}{\frac{n^2}{5^n}+1}\Big)\Big|\\ &= \frac{4}{5}\Big|1\Big/1\Big| = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

luego, el Radio de Convergencia es $\frac{5}{4}$ y $S(x)$ es absolutamente convergente para $x \in (-\frac{7}{4}, \frac{3}{4})$. Evaluemos los extremos. Para $x = \frac{3}{4}$ obtenemos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{n^2+5^n}(\frac{5}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{-1}{2})^n+1}{\frac{n^2}{5^n}+1}$$

y los terminos de la serie no convergen a cero (convergen a 1) por lo que la serie no converge. Al evaluar en $x = -\frac{7}{4}$ obtenemos la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{-1}{2})^n + 1}{\frac{n^2}{5^n} + 1}$$

cuyos terminos tampoco convergen a cero (1 y -1 son puntos de acumulación), asi que la serie tampoco converge. Concluimos así que el intervalo de convergencia de $S(x)$ es $(-\frac{7}{4}, \frac{3}{4})$.

b) Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, suponga que infinitos coeficientes c_n de la serie de potencias son enteros no nulos. Muestre que $R \leq 1$, donde R es el radio de convergencia.

<u>**Solución**</u>: Veamos dos formas de resolver este problema.
b.1) Por contradicción. Si $R > 1$ entonces la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

es absolutamente convergente para $(x-a) = 1$. Luego $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ es convergente. Pero observamos que $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \geq \#\{c_n : c_n \in \mathbb{Z}, c_n \neq 0\}$ y si hay infinitos c_n enteros no nulos entonces la serie es divergente, lo que es una contradicción. Concluimos que $R \leq 1$.

b.2) Otra forma de demostrarlo. Sea $\{c_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de los c_n tal que $c_{n_k} \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \geq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo que

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \geq \limsup_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} \geq \limsup_{k\to\infty} 1 = 1$$

con lo que $R \leq 1$.

4. Determine si la integral

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x \ \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

es convergente o divergente. Justifique su respuesta.

<u>**Solución**</u>: El integrante tiene dos comportamientos distintos cuando $x \searrow 0$ y cuando $x \to \infty$. Por tanto, cortamos la integral impropia en dos:

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty} \sin(x)\ln(1+x^{-1})\mathrm{d}x \\ &= \lim_{a\searrow 0}\int_a^1 \sin(x)\ln(1+x^{-1})\mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_1^b \sin(x)\ln(1+x^{-1})\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Tratamos en primero el segundo término. Una integración por partes da

$$\int_1^b \sin(x)\ln(1+x^{-1})\mathrm{d}x = -\cos(x)\ln(1+x^{-1})\Big|_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

de manera que

$$\lim_{b\to\infty}\int_1^b \sin(x)\ln(1+x^{-1})\mathrm{d}x = \cos(1)\ln(2) - \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\cos(x)}{x+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Como la integral $\int_1^b \frac{\cos(x)}{x+x^2}\,\mathrm{d}x$ es la diferencia de dos integrales positivas y convergentes, es decir

$$\int_1^b \frac{\cos(x)}{x+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^b \frac{\cos(x)+1}{x+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_1^b \frac{1}{x+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

el límite $\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\cos(x)}{x+x^2}\,\mathrm{d}x$ existe y es finito (en particular no puede oscilar!). Eso implica la convergencia del segundo término.

Para el primer término, es suficiente mostrar que el límite

$$\lim_{a\searrow 0} \sin(a)\ln(1+a^{-1})$$

es finito, ya que el integrante es continuo en cualquier intervalo $[a,1]$ con $a>0$ (y la integral de una función continua sobre un intervalo finito es finita).

Pero, el límite (que es positivo) verifica

$$\begin{aligned}
\lim_{a\searrow 0} \sin(a)\ln(1+a^{-1}) &= \lim_{a\searrow 0} \sin(a)\int_0^{a^{-1}} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\ln(1+s)\right)\mathrm{d}s \\
&= \lim_{a\searrow 0} \sin(a)\int_0^{a^{-1}} \frac{\mathrm{d}s}{1+s} \\
&\le \lim_{a\searrow 0} \sin(a)a^{-1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Entonces, el límite es finito, y el primer término converge también. En resumen, toda la integral converge ya que ambos términos convergen.

Otra manera de estimar el límite: Por l'Hospital, tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{a\searrow 0} \sin(a)\ln(1+a^{-1}) &= \lim_{a\searrow 0} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\ln(1+a^{-1})}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\sin(a)^{-1}} \\
&= \lim_{a\searrow 0} \frac{-\frac{1}{a+a^2}}{-\sin(a)^{-2}\cos(a)} \\
&= \lim_{a\searrow 0} \frac{\sin(a)^2}{a+a^2}\cdot \lim_{a\searrow 0} \frac{1}{\cos(a)} \\
&\le \left(\lim_{a\searrow 0} \frac{\sin(a)}{a}\right)^2 \cdot 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$