Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

EYP1026 - MODELOS PROBABILÍSTICOS
Soluciones - Ayudantía N°7

Profesor: Guido del Pino
Ayudante: José Quinlan
Fecha: 21 de Septiembre - 2016

1.*c*. **Alternativa 1:** Sea $Y = X^{-1}$ con $X \sim \text{Cauchy}(0,1)$. Notemos que $y(x) : x^{-1} : x \in \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$ es continuamente diferenciable sobre $\mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$ (no está definida para $x = 0$), estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+$ y estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$ (esto garantiza biyectividad). Sin embargo, dicha función no es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$. Esto impide una aplicación directa del Teorema del Cambio de Variable (no conserva la monotonía sobre su dominio). Para resolver este problema a través de este enfoque, supongamos que:

- Existen conjuntos abiertos disjuntos $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$ tales que $\mathbb{P}(X \in \bigcup_{i=1}^n A_i) = 1$.
- Las restricciones de y sobre cada A_i, digamos $y_i : A_i \to B_i = y(A_i)$, son funciones continuamente diferenciables, estrictamente mónotonas (por lo tanto, biyectivas), cuyas inversas $x_i : B_i \to A_i$ también son continuamente diferenciables.

Bajo estas condiciones, la densidad de probabilidad asociada a $Y = y(X)$ adquiere la forma

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^n f_X(x_i(y))|x_i'(y)|\mathbb{I}(y \in B_i).$$

Como $\mathbb{P}(X \notin \bigcup_{i=1}^n A_i) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(Y \notin \bigcup_{i=1}^n B_i) = 0$, f_Y puede tomar un valor arbitrario (por ejemplo, 0) dentro del conjunto de probabilidad nula $\bigcap_{i=1}^n B_i^c$.
En nuestro caso $A_1 = \mathbb{R}^-$, $A_2 = \mathbb{R}^+$, $y_1(x) = x^{-1} : x \in A_1$, $B_1 = \mathbb{R}^-$, $y_2(x) = x^{-1} : x \in A_2$ y $B_2 = \mathbb{R}^+$. Además $x_1(y) = y^{-1} : y \in B_1$, $x_1'(y) = -y^{-2} : y \in B_1$, $x_2(y) = y^{-1} : y \in B_2$ y $x_2'(y) = -y^{-2} : y \in B_2$. Luego

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(x_1(y))|x_1'(y)|\mathbb{I}(y \in B_1) + f_X(x_2(y))|x_2'(y)|\mathbb{I}(y \in B_2) \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{y^{-2}}{1+y^{-2}}\mathbb{I}(y \in \mathbb{R}^-) + \frac{1}{\pi}\frac{y^{-2}}{1+y^{-2}}\mathbb{I}(y \in \mathbb{R}^+) \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\mathbb{I}(y \in \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+). \end{aligned}$$

Si definimos $f_Y(0) = \frac{1}{\pi}$, obtenemos una "versión continua" de f_Y que corresponde a la densidad de probabilidad de una distribución $\text{Cauchy}(0,1)$. En otras palabras, $Y \sim \text{Cauchy}(0,1)$.

1.*c*. **Alternativa 2:** Sea $Y = X^{-1}$ con $X \sim \text{Cauchy}(0,1)$. Para determinar la densidad de probabilidad asociada a Y, estudiaremos su función de distribución acumulada $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(X^{-1} \le y)$: $y \in \mathbb{R}$. Bajo esta transformación, es conveniente separar por casos:

- Si $y \in \mathbb{R}^+$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X^{-1} \le y) &= \mathbb{P}(X < 0) + \mathbb{P}(0 < X^{-1} \le y) = \mathbb{P}(X \le 0) + \mathbb{P}(X \ge y^{-1}) \\ &= \mathbb{P}(X \le 0) + [1 - \mathbb{P}(X < y^{-1})] = \mathbb{P}(X \le 0) + [1 - \mathbb{P}(X \le y^{-1})]. \end{aligned}$$

Ahora

$$\mathbb{P}(X \leq 0) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\arctan(0) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(X \leq y^{-1}) = \int_{-\infty}^{y^{-1}} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\arctan(y^{-1}) + \frac{1}{2}.$$

Luego

$$F_Y(y) = 1 - \frac{1}{\pi}\arctan(y^{-1}) : y \in \mathbb{R}^+$$
$$F_Y'(y) = \frac{1}{\pi}\frac{y^{-2}}{1+y^{-2}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2} : y \in \mathbb{R}^+.$$

- Si $y = 0$ entonces

$$\mathbb{P}(X^{-1} \leq y) = \mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

Luego

$$F_Y(y) = \frac{1}{2} : y = 0.$$

- Si $y \in \mathbb{R}^-$ entonces

$$\mathbb{P}(X^{-1} \leq y) = \mathbb{P}(y^{-1} \leq X < 0) = \mathbb{P}(y^{-1} < X \leq 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) - \mathbb{P}(X \leq y^{-1}).$$

Ahora

$$\mathbb{P}(X \leq 0) - \mathbb{P}(X \leq y^{-1}) = -\frac{1}{\pi}\arctan(y^{-1}).$$

Luego

$$F_Y(y) = -\frac{1}{\pi}\arctan(y^{-1}) : y \in \mathbb{R}^-$$
$$F_Y'(y) = \frac{1}{\pi}\frac{y^{-2}}{1+y^{-2}} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2} : y \in \mathbb{R}^-.$$

Dado que

$$\lim_{y\to 0^+} F_Y(y) = \lim_{y\to 0^-} F_Y(y) = F_Y(0) = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{F_Y(y) - F_Y(0)}{y} = \lim_{y\to 0^-} \frac{F_Y(y) - F_Y(0)}{y} = \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+0^2}$$

la función $F_Y(y) : y \in \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$ cuya derivada adquiere la forma

$$F_Y'(y) = f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2} : y \in \mathbb{R}.$$

Esto es equivalente a decir que $Y \sim \text{Cauchy}(0, 1)$.

2. Procedemos a caracterizar la densidad de probabilidad asociada a K mediante su función de distribución acumulada

$$F_K(k) = \mathbb{P}(K \leq k) = \mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}mV^2 \leq k\Big) = \mathbb{P}\Big(V^2 \leq \frac{2k}{m}\Big) : k \in \mathbb{R}.$$

Considerando dicha transformación, resulta conveniente fragmentar el análisis:

- Si $k \in \mathbb{R}^-$ entonces

$$\mathbb{P}\Big(V^2 \leq \frac{2k}{m}\Big) = 0$$

pues $\mathbb{P}(V^2 \geq 0) = \mathbb{P}(V \in \mathbb{R}) = 1$ y $\frac{2k}{m} \in \mathbb{R}^-$. Así

$$F_K(k) = 0 : k \in \mathbb{R}^-.$$

- Si $k = 0$ entonces

$$\mathbb{P}\Big(V^2 \leq \frac{2k}{m}\Big) = \mathbb{P}(V^2 \leq 0) = \mathbb{P}(V = 0) = 0.$$

Luego

$$F_K(k) = 0 : k = 0.$$

- Si $k \in \mathbb{R}^+$ entonces

$$\mathbb{P}\Big(V^2 \leq \frac{2k}{m}\Big) = \mathbb{P}\Big(X \leq \frac{2k}{m\sigma^2}\Big) : X = \frac{V^2}{\sigma^2}.$$

Notemos que $V \sim \text{Normal}(0, \sigma^2) : \sigma^2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow X \sim \chi^2(\nu)$ con $\nu = 1$. Así, $\frac{2k}{m\sigma^2} \in \mathbb{R}^+$ y

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(X \leq \frac{2k}{m\sigma^2}\Big) &= \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} \int_0^{\frac{2k}{m\sigma^2}} x^{-1/2} \exp\Big(-\frac{x}{2}\Big)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(m\sigma^2)^{1/2}\Gamma(1/2)} \int_0^{k} t^{-1/2} \exp\Big(-\frac{t}{m\sigma^2}\Big)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

mediante el cambio de variables

$$x(t) = \frac{2t}{m\sigma^2} : t \in \mathbb{R}^+.$$

Luego

$$F_K(k) = \frac{1}{(m\sigma^2)^{1/2}\Gamma(1/2)} \int_0^{k} t^{-1/2} \exp\Big(-\frac{t}{m\sigma^2}\Big)\mathrm{d}t : k \in \mathbb{R}^+$$

Utilizando la información previa junto con el Teorema Fundamental del Cálculo (se debe tener cuidado con la singularidad en $t = 0$)

$$f_K(k) = \frac{1}{(m\sigma^2)^{1/2}\Gamma(1/2)} k^{-1/2} \exp\Big(-\frac{k}{m\sigma^2}\Big)\mathbb{I}(k \in \mathbb{R}^+) : k \in \mathbb{R}.$$

Lo anterior es equivalente a decir que $K \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ con $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{m\sigma^2}$.