Clase 10

viernes, 23 de agosto de 2024 16:26

Caracterización del Conjunto Solución: Sistemas homogeneos, no-homogeneos y conjuntos generados

Recordemos que un sistema se dice homogeneo si todos sus términos libres son 0.

Consideremos un SEL cualquiera

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
\vdots \quad \ddots \quad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Este sistema se puede representar como una ecuación matricial:

$A \cdot x = b$, donde $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ es la matriz de coef.,

$b = [b_i]_{1 \le i \le m}$ es el vector del lado derecho, y

$x = [x_j]_{1 \le j \le n}$ es el vector incognita

donde

$$A \cdot x = [\underbrace{a_1 \cdots a_n}_{\text{columnas de } A}] \cdot x = x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + \cdots + x_n \cdot a_n$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + \cdots + x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_1 \cdot a_{m1} + x_2 a_{m2} + \cdots + x_n a_{mn} \end{bmatrix}$$

El SEL representado por $Ax = b$ será homogeneo si $b = 0$ y será no-homogeneo si $b \neq 0$ (es decir, no todas las entradas de b son 0).

Las siguientes propiedades del producto matriz vector nos resultarán en particular útiles para el análisis del conjunto solución

(Lay, pag. 39)

El Conjunto Sol. de un Sistema Homogeneo.

¿Como se interpreta geométricamente el cjto. sol. de un sistema homogeneo?

Consideremos primero una sola ecuación, por ejemplo,

$$3x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 4x_4 - x_5 = \boxed{0},$$

la cual es homogenea. Como vimos con anterioridad, el conjunto sol. de esta ecuación corresponde a un hiperplano en $\mathbb{R}^5$.

Notamos que al ser la ecuación homogenea, el vector $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ satisface la ecuación.

Luego: el hiperplano pasa por el origen.

Usando la misma lógica, consideremos el sistema homogeneo asociado a la matriz ampliada $[\,A \,\vdots\, 0\,]$, es decir, $A \cdot x = 0$.

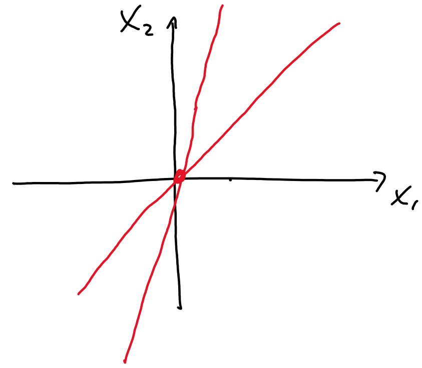
Cada ecuación (fila) corresponde a un hiperplano que pasa por el 0.

Observación 1: El conjunto sol. de $Ax = 0$, donde A es de $m \times n$, es la intersección de hiperplanos que pasan por el origen

m es llanos que pasan por el origen.
El número de hiperplanos es m, siempre y cuando A no tenga filas nulas.

Ejemplo:

$$3x_1 - x_2 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0$$



—— o ——

Los SEL homogeneos siempre son consistentes ya que $A \cdot \underset{0 \in \mathbb{R}^n}{0} = \underset{0 \in \mathbb{R}^m}{0}$. Por tal razón decimos que la solución $x=0$ es la solución trivial. Luego, para tales SEL, lo interesante es saber si tienen alguna solución no-trivial

Este resultado sale directamente del Teo. 2 de la clase anterior.

Ejemplo:

matriz ampliada

variable libre

$\Rightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones.

Una conclusión directa es que si el sistema $Ax=0$ tiene más variables que ecuaciones $(n>m)$ entonces tendrá infinitas soluciones.

entonces tendrá infinitas soluciones.

La forma del conjunto solución de un sistema homogeneo es más sencilla que un sistema no-homogeneo ya que pasa por el origen.

Ejemplo 1 : Continuemos con el ejemplo anterior

$\hookrightarrow$ $3x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$3x_1 + 5\cancel{x_2}^{0} - 4x_3 = 0$

$\Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}x_3$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3\, x_3 \\ 0 \cdot x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{donde } x_3 \in \mathbb{R}$$

En otras palabras, el cjto. sol. son todos los múltiplos del vector $v = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Es decir es la recta

$$\text{Gen}(v) = \left\{ t \cdot \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejemplo 2 :

ejercicio!

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

variables libres x_2, x_4, x_5

$\Rightarrow x_3 = -3x_4 - x_5$

$x_1 = -2x_2 - x_4$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -3x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + x_5 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3} \quad \text{con } x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

En otras palabras: un vector será solución del SEL ssi es combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3.

Equivalentemente, el cjto. sol. es

$$\text{Gen}(v_1, v_2, v_3) = \{ s \cdot v_1 + t \cdot v_2 + r \cdot v_3 : s, t, r \in \mathbb{R} \}$$

Al igual que en los ejemplos anteriores, siempre que un sistema sea homogeneo, al hacer sustitución reversa podremos despejar las variables principales sin tener términos constantes. Esto nos da el siguiente teorema.

Teorema: Si el sistema homogeneo $Ax = 0$ tiene una solución no-trivial, entonces su conjunto solución es de la forma

$$\text{Gen}(v_1, \dots, v_\ell) = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_\ell v_\ell : \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \in \mathbb{R} \}$$

donde $v_1, \dots, v_\ell$ son vectores no-nulos y ℓ es el número de variables libres del sistema.

El Conjunto Solución de un sistema no-homogeneo

¿Cómo se relacionan dos sistemas de la forma $A \cdot x = 0$ y $A \cdot x = b$?

Un caso sencillo es si A tiene una sola fila.

Ejemplo: $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \rightarrow$ plano en $\mathbb{R}^3$, que pasa por el origen.

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \longrightarrow$$ plano en $\mathbb{R}^3$ que <u>no</u> pasa por el origen.

Si Π_1 es el plano de la ec. homogenea y Π_2 es el plano de la segunda ecuación, entonces Π_1 y Π_2 son paralelos ya que están definidos por el mismo vector normal

$$n = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

— o —

Veamos ahora un ejemplo más general.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 6x_1 \quad\quad - x_3 &= 5 \end{aligned} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}}_{b}$$

Por inspección observamos que el vector $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es solución (verifique que cada ecuación se satisface). En otras palabras:

$$A \cdot p = b.$$

Resolvamos ahora el sistema homogeneo $Ax = 0$. Aplicamos Gauss a la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Luego, x_3 es variable libre:

Ec. 2 $\Rightarrow -2x_2 = 3x_3 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}x_3$

Ec. 1 $\Rightarrow 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow 3x_1 = -x_2 - x_3 =$

$$= \frac{3}{2}x_3 - x_3 = \frac{1}{2}x_3$$

Luego, una solución del sistema homogeneo es

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} x_3 \\ -\frac{3}{2} x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1/6 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Si elegimos, $x_3 = 6$, observamos que $v_h = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$ es solución de $Ax = 0$. Es decir,

$$A \cdot v_h = 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} + (-9) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-9+6 \\ 3+9-12 \\ 6+0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observamos que $p + v_h$ también es solución de $Ax = b$

$$A(p + v_h) = A \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix} \right)$$

$$= A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \underbrace{A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}}_{0} \quad \text{(Teo. 2 más arriba)}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

El fenómeno que observamos en el ejemplo se cumple en general.

Es decir $\boxed{\begin{matrix}\text{Sol. general} \\ \text{de } Ax = b\end{matrix} = \underbrace{\begin{matrix}\text{Sol. particular} \\ \text{de } Ax = b\end{matrix}}_{p} + \underbrace{\begin{matrix}\text{Sol. general} \\ \text{de } Ax = 0\end{matrix}}_{v_h}}$

Dem:

Sea p solución de $Ax = b$ y sea v_h solución de $Ax=0$.

Luego

$$A(p+v_h) \overset{\text{Teo. 2 i)}}{=} A\cdot p + A\cdot v_h = b+0 = b$$

$\Rightarrow$ $p+v_h$ es solución de $Ax=b$.

Sea p una solución de $Ax=b$ y w una solución cualquiera de $Ax=b$. Verificamos que $v_h := w-p$ es solución del sistema $Ax=0$. En efecto,

$$A\cdot v_h = A\cdot(w-p) = A\cdot w + A\cdot(-p) = A\cdot w + A((-1)\cdot p)$$

$$\overset{\text{Teo 2 ii)}}{=} Aw + (-1)\cdot A\cdot p = b + (-1)\cdot b = 0$$

Luego, v_h es solución de $Ax=0$. $\blacksquare$

La siguiente figura representa la situación del teorema

El teorema anterior nos dice que el conjunto solución de $Ax=b$ es un desplazamiento (por p) del cjto. sol. de $Ax=0$. Luego, el cjto. sol. de $Ax=b$ y de $Ax=b'$ también son desplazamiento uno del otro. Esto nos permite resolver ambos sistemas simultáneamente, ahorrando cálculos. Demostramos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Resuelva $Ax=0$, $Ax=b_1$ y $Ax=b_2$ donde

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&4\end{bmatrix}\quad b_1=\begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix}\quad b_2=\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}$$

Escalamos una matriz ampliada con todos los lados derechos

$$[A\,\vdots\,0\,\vdots\,b_1\,\vdots\,b_2]=\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}1&1&1&0&1&2\\1&2&3&0&4&3\\2&3&4&0&5&0\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}\boxed{1}&1&1&0&1&2\\0&\boxed{1}&2&0&3&1\\0&1&2&0&3&-4\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c|c|c}\boxed{1}&1&1&0&1&2\\0&\boxed{1}&2&0&3&1\\0&0&0&0&0&-5\end{array}\right]$$

De la 3ra fila observamos que

$Ax=b_2$ no tiene solución!

Para los otros sistemas, x_3 es variable libre.

<u>$Ax=0$</u>: Ec. 2 $\Rightarrow$ $x_2=-2x_3$

Ec. 1 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}x_1&=-x_2-x_3\\&=2x_3-x_3\\&=x_3\end{aligned}$$

Luego, la forma general de la sol. de $Ax=0$ es

$$x=\begin{bmatrix}x_3\\-2x_3\\x_3\end{bmatrix}=x_3\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\qquad x_3\in\mathbb{R}$$

$Ax = b_1$: Ec 2 $\Rightarrow$ $x_2 = 3 - 2x_3$

Ec 1 $\Rightarrow$ $x_1 = 1 - x_2 - x_3$

$= 1 - (3 - 2x_3) - x_3$

$= -2 + x_3$

La forma general de la sol. de $Ax = b_1$ es

$$x = \begin{bmatrix} -2 + x_3 \\ 3 - 2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{sol. particular de } Ax=b_1} + \underbrace{x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{sol. del sistema homogeneo}} \quad x_3 \in \mathbb{R}$$