Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2017

MAT1203 ⋆ Álgebra Lineal

Solución a la Interrogación N° 1

1. *a*) Escriba la ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(-1,2,3)$ y $(0,1,3)$.

   Primera Solución:

   Sea $Ax+By+Cz+D=0$ la ecuación buscada.

   Ya que el plano pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(-1,2,3)$ y $(0,1,3)$, debe tenerse:

$$\left.\begin{aligned} A+\ B+\ C+D&=0\\ -A+2B+3C+D&=0\\ B+3C+D&=0 \end{aligned}\right|$$

   Resolviendo el sistema (por ejemplo, escalonando, o por algún otro método), llegamos a

$$A=-\frac{2}{5}D,\quad B=-\frac{2}{5}D,\quad C=-\frac{1}{5}D.$$

   Escogiendo $D=-5$ (para simplificar los cálculos), llegamos a $A=2$, $B=2$, $C=1$; o sea, la ecuación cartesiana del plano dado es

$$2x+2y+z-5=0$$

   (o cualquier múltiplo no nulo de ella).

   Segunda Solución:

   Dado que los puntos $(1,1,1)$, $(-1,2,3)$ y $(0,1,3)$ están en el plano, dos vectores contenidos en el plano son $(-1,2,3)-(1,1,1)=(-2,1,2)$ y $(0,1,3)-(1,1,1)=(-1,0,2)$.

   Así, un vector normal al plano está dado por

$$(-2,1,2)\times(-1,0,2)=(2,2,1),$$

   por lo que la ecuación paramétrica de este plano es de la forma

$$((x,y,z)-(x_0,y_0,z_0))\cdot(2,2,1)=0,\ \text{o}\ (x,y,z)\cdot(2,2,1)-(x_0,y_0,z_0)\cdot(2,2,1)=0,$$

   lo que es equivalente a $2x+2y+z-(2x_0+2y_0+z_0)=0$.

   Reemplazando cualquiera de los puntos por los que pasa el plano (por ejemplo, $(1,1,1)$) en esta ecuación, obtenemos $D=-5$, con lo que finalmente la ecuación buscada es $2x+2y+z-5=0$ (o, como se dijo antes, cualquier múltiplo no nulo de esta).

   b) Escriba la ecuación paramétrica de la recta que es perpendicular a este plano y pasa por el punto $(1,1,1)$,

Solución:

Si una recta es perpendicular a este plano, su vector director $\overrightarrow{\mathbf{d}}$ debe ser un múltiplo no nulo de $(A,B,C)=(2,2,1)$. Así, podemos tomar $\overrightarrow{\mathbf{d}}=(2,2,1)$ como vector director.

Como la recta pasa por $\overrightarrow{\mathbf{p}} = (1,1,1)$, su ecuación paramétrica es

$$\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{p}} + t\overrightarrow{\mathbf{v}} = (1,1,1) + t(2,2,1).$$

Como en esta ecuación $\overrightarrow{\mathbf{x}}$ representa a (x,y,z), podemos escribir esta ecuación como $(x,y,z) = (1,1,1) + t(2,2,1)$, como $(x,y,z) = (1+2t, 1+2t, 1+t)$ o incluso como el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rl} x & = 1+2t \\ y & = 1+2t \\ z & = 1+t \end{array}\right|$$

Puntaje:

a)
- Por plantear correctamente una forma de resolver el problema (por ejemplo, un sistema de ecuaciones como el mostrado), 1 pto.
- Por resolver la o las ecuaciones necesarias para llegar a la ecuación buscada, 1 pto.
- Por llegar a la ecuación $2x + 2y + z - 5 = 0$ (o cualquier múltiplo no nulo de ella), 1 pto.

Por ejemplo:

En la primera solución planteada, se da un punto por plantear el sistema cuyas incógnitas son los coeficientes de la ecuación buscada; 1 punto por resolver el sistema; y 1 punto por llegar a la ecuación.

En la segunda solución presentada, se da 1 punto por hallar los dos vectores y plantear que se necesita encontrar el producto cruz; 1 punto por calcular el producto cruz y plantear la ecuación de la forma $(\overrightarrow{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\mathbf{x}}_0) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$; y 1 punto por llegar a la ecuación final.

b)
- Por identificar correctamente el vector director de la recta, 1 pto.
- Por escribir la ecuación de la recta en cualquiera de las formas indicadas (u otra correcta), 2 ptos.

A lo anterior se le suma el punto base.

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 0 \\ x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}\right|$$

a) [1 pto.] Exprese el sistema como una matriz aumentada.

b) [3 pts.] Exprese la matriz en su forma escalonada reducida por filas.

c) [2 pts.] Determine si el sistema es consistente o inconsistente

Solución:

a) La matriz aumentada del sistema es

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 9 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Al llevar la matriz a su forma escalonada reducida por filas, obtenemos

$$\tilde{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{55}{93} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{93} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{93} \end{bmatrix}.$$

c) Ya que la última fila no nula de la matriz aumentada no tiene el pivote en la última columna (todos los pivotes están en la zona correspondiente a la matriz A, no en la parte correspondiente a $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ en la ecuación $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$), el sistema es consistente.

Puntaje:

a) Si la matriz está correcta, 1 punto. Si no, 0.

b) Si la matriz ha sido llevada correctamente a su forma escalonada reducida por filas, 3 puntos. Si la forma escalonada reducida por filas está incorrecta, pero la matriz ha sido llevada correctamente a una forma escalonada, por ejemplo

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 9 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{31}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 9 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{31}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

se dan 2 puntos.

c)
- Por decir que el sistema es consistente, 1 punto.
- Por una justificación adecuada, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

3. *a*) [4 pts.] Encuentre todos los valores de h para los que el vector $\overrightarrow{\mathbf{u}} = (-2, 5, h)$ se encuentra en el plano generado por $\left\{\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right\}$, donde $\overrightarrow{\mathbf{v}} = (h, -1, 4)$ y $\overrightarrow{\mathbf{w}} = (2, -3, 1)$.

Primera Solución:

Que el vector $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ esté en el plano generado por $\left\{\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right\}$ es equivalente a que $\left[\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right] = (\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{w}} = 0$.

Como

$$(\overrightarrow{\mathbf{u}} \times \overrightarrow{\mathbf{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{w}} = ((-2, 5, h) \times (h, -1, 4)) \cdot (2, -3, 1) = (20+h, h^2+8, 2-5h) \cdot (2, -3, 1) = 18-3h-3h^2,$$

los valores buscados son aquellos que satisfacen $18 - 3h - 3h^2 = 0$, o equivalentemente $h^2 + h - 6 = 0$, de donde $h = 2$ o $h = -3$.

Segunda Solución:

Para que el vector $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ se encuentre en el plano generado por $\left\{\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right\}$, $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ debe ser combinación lineal de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{w}}$.

En otras palabras, deben existir x e y tales que

$$x \begin{bmatrix} h \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ h \end{bmatrix},$$

o sea

$$\left.\begin{aligned} xh + 2y &= -2 \\ -x - 3y &= 5 \\ 4x + \ \ y &= h \end{aligned}\right|$$

Note que este NO ES UN SISTEMA LINEAL, por lo que debemos resolverlo en forma *ad hoc*. Por ejemplo, podemos despejar y en la última ecuación, obteniendo $y = h - 4x$, lo que al reemplazarlo en las dos primeras ecuaciones da

$$\left.\begin{aligned} xh + 2(h - 4x) &= -2 \\ -x - 3(h - 4x) &= 5 \end{aligned}\right|$$

Reduciendo términos semejantes, obtenemos

$$\left.\begin{aligned} xh + 2h - 8x &= -2 \\ 11x - 3h &= 5 \end{aligned}\right|$$

Despejando x en la segunda ecuación, tenemos $x = \dfrac{3h + 5}{11}$; reemplazando en la primera llegamos a $3h^2 + 3h - 18 = 0$, o equivalentemente, $h^2 + h - 6 = 0$, que tiene por soluciones a $h = 2$ y $h = -3$. Así, los valores de h para los que $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ se encuentre en el plano generado por $\left\{\overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right\}$ son $h = 2$ y $h = -3$.

Tercera Solución:

Considerando el sistema

$$\left.\begin{aligned} xh + 2y &= -2 \\ -x - 3y &= 5 \\ 4x + \ \ y &= h \end{aligned}\right|$$

(mencionado en la solución anterior) como un sistema lineal con incógnitas x e y, en que h es un parámetro, su matriz ampliada sería

$$\begin{bmatrix} h & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & h \end{bmatrix}.$$

Aplicando eliminación Gaussiana (escalonando), obtenemos

$$\begin{bmatrix} h & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -3 & 5 \\ h & 2 & -2 \\ 4 & 1 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ h & 2 & -2 \\ 4 & 1 & h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2-3h & -2+5h \\ 0 & -11 & h+20 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & -11 & h+20 \\ 0 & 2-3h & -2+5h \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -\dfrac{h+20}{11} \\ 0 & 2-3h & -2+5h \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -\dfrac{h+20}{11} \\ 0 & 0 & -\dfrac{3h^2+3h-18}{11} \end{bmatrix}$$

Este sistema es consistente si y solo si $3h^2+3h-18$, o equivalentemente, $h^2+h-6=0$, o sea, si y solo si $h=2$ o $h=-3$, que son los valores buscados.

b) [2 pts.] Para los valores de h hallados en la parte anterior, ¿es $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right\}$ un conjunto linealmente dependiente o linealmente independiente? Justifique su respuesta.

Solución:

Para los valores de h que satisfacen la condición mencionada en (a), $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ debe ser combinación lineal de $\overrightarrow{\mathbf{v}}$ y $\overrightarrow{\mathbf{w}}$, por lo que deben existir x e y tales que $\overrightarrow{\mathbf{u}} = x\overrightarrow{\mathbf{v}} + y\overrightarrow{\mathbf{w}}$, por lo que $\overrightarrow{\mathbf{u}} - x\overrightarrow{\mathbf{v}} - y\overrightarrow{\mathbf{w}} = \overrightarrow{\mathbf{0}}$. Como el coeficiente de $\overrightarrow{\mathbf{u}}$ es $\neq 0$, $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right\}$ es linealmente dependiente.

Puntaje:

a)
- Por plantear correctamente una forma de resolver el problema (por ejemplo, un sistema de ecuaciones como alguno de los mostrados), 1 pto.
- Por simplificar el sistema anterior, y llegar a una ecuación que solo involucre a h, 2 ptos.
  Si quedan a medio camino en esto, reciben 1 pto.
- Por llegar a los valores $h=2$ y $h=-3$, 1 pto.

b) Por indicar que $\left\{\overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}}, \overrightarrow{\mathbf{w}}\right\}$ es linealmente dependiente CON UNA BUENA JUSTIFICACIÓN, 2 ptos.

Se puede dar puntaje parcial (1 punto) si la justificación es insuficiente, pero solo decir que son l.d. (sin justificar) recibe 0 ptos.

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

a) ¿Existe un vector $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^4$ tal que $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ no tiene solución? De ser así, encuentre al menos uno.

b) Determine $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^4$, $\overrightarrow{\mathbf{b}} \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ tal que $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ posee solución, y determine la solución general en dicho caso.

Solución:

a) Sea $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Consideremos la matriz ampliada $\tilde{A}$ del sistema $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$, y —aplicando operaciones elementales— escalonémosla:

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & b_2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & b_3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & b_4 \end{array}\right] \underset{f_1 \longleftrightarrow f_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & b_3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & b_4 \end{array}\right] \\
&\underset{\substack{f_3 - 2f_1 \\ f_4 - 3f_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & b_4 - 3b_2 \end{array}\right] \underset{f_2 \longleftrightarrow f_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & b_2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & b_4 - 3b_2 \end{array}\right] \\
&\underset{f_4 + (-1)f_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & b_2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_2 - b_3 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Observamos que, si $b_4 - b_2 - b_3 = 0$, la última fila de esta matriz escalonada es nula, por lo que en ese caso el sistema es consistente; por otra parte, si $b_4 - b_2 - b_3 \neq 0$, la última fila tiene un pivote en la última columna, por lo que el sistema es inconsistente.

Así, es claro que existe un vector $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ para el cual el sistema no tiene solución; basta escoger los valores de b_1, b_2, b_3, b_4 de modo que $b_4 - b_2 - b_3 \neq 0$, por ejemplo, tomando $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (0, 0, 0, 1)$.

b) En esta parte, basta elegir $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ de modo que $b_4 - b_2 - b_3 = 0$, por ejemplo, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (0, 0, 1, 1)$. Para hallar la solución general en este caso, debemos llevar la matriz a su forma escalonada reducida por filas, por ejemplo, partiendo de la forma escalonda de (a) y continuando el proceso:

$$
\begin{aligned}
\tilde{A} \quad &= \quad \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & b_2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & b_3 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & b_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & b_2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - b_2 - b_3 \end{array}\right] \\
&= \quad \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{3}\cdot f_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \\
&\underset{f_1+(-1)f_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{f_1-f_3 \\ f_2-f_3}}{\sim} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

por lo que —en el caso en que $\overrightarrow{\mathbf{b}} = (0,0,1,1)$— la solución general está dada por

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{3} \\
x_2 &= -\frac{1}{3} + x_3 \\
x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

Puntaje:

a)
- Por llegar a la condición $b_4 - b_2 - b_3 = 0$ para que el sistema tenga solución, 2 puntos.
- Por mostrar un $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ para el cual el sistema no tiene solución, 1 punto.

b)
- Por mostrar un $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ para el cual el sistema tiene solución, 1 punto.
- Por llegar a la matriz escalonada reducida del sistema, 1 punto.
- Por dar correctamente la solución general del sistema para el valor escogido de $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, 1 punto.

A lo anterior se le suma el punto base.

5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2)$. Encuentre, si es que existe, $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ tal que $T(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = (0, -1, -4)$.

Solución:

Buscamos $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$ tal que $(2x_1 - x_2, -3x_1 + x_2, 2x_1 - 3x_2) = (0, -1, -4)$, o sea, tal que

$$\begin{array}{rl|} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -3x_1 + x_2 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= -4 \\ \hline \end{array}$$

Para resolver el sistema, escribimos su matriz aumentada, y la llevamos a su forma escalonada reducida por filas:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

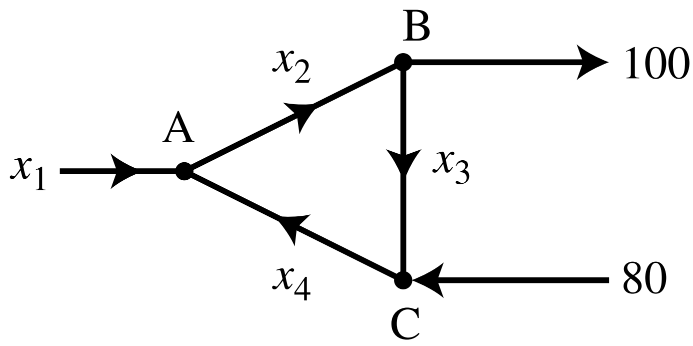
El que la última fila no nula de esta matriz tenga un pivote en una columna anterior a la última nos dice que el sistema es consistente, y de paso nos muestra una solución: $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (x_1, x_2) = (1, 2)$ (de hecho, esta es la única solución).

Puntaje:

- Por plantear el sistema que deben satisfacer x_1 y x_2, 2 puntos.
- Por llegar a que el sistema es consistente, 2 puntos.
- Por encontrar $\overrightarrow{\mathbf{x}} = (1, 2)$ que satisface la condición pedida, 2 puntos.

A lo anterior se le suma el punto base.

6. Encuentre el patrón de flujo general de la red que se ilustra en la figura. Suponiendo que todos los flujos son no negativos, ¿cuál es el valor más pequeño posible para x_4?



Solución:

En la red, cada nodo (A, B, C) da lugar a una ecuación, en que la suma de los flujos entrantes es igual a la suma de los flujos salientes:

$$x_1 + x_4 = x_2 \tag{A}$$
$$x_2 = x_3 + 100 \tag{B}$$
$$x_3 + 80 = x_4 \tag{C}$$

En otras palabras, tenemos el sistema

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 \quad\quad + x_4 &=& 0 \\ x_2 - x_3 \quad\quad &=& 100 \\ x_3 - x_4 &=& -80 \end{array}$$

La matriz aumentada de este sistema es

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -80 \end{bmatrix}.$$

Al llevarla a la forma escalonada reducida por filas, obtenemos

$$\tilde{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -80 \end{bmatrix},$$

o sea: la solución general del sistema, y por ende el patrón de flujo general de la red es

$$x_1 = 20$$
$$x_2 = x_4 + 20$$
$$x_3 = x_4 - 80$$

La última ecuación nos dice que, para que $x_3 \geq 0$, debe tenerse $x_4 \geq 80$, De hecho, si $x_4 = 80$, obtenemos $x_1 = 20$, $x_2 = 100$ y $x_3 = 0$, valores todos que cumplen con la restricción de ser ≥ 0. Así, el valor más pequeño posible para x_4 es 80.

Puntaje:

- Por plantear correctamente el sistema de ecuaciones de la red, 1 pto.
- Por llegar a la solución general del sistema, 2 ptos.
- Por deducir que x_4 no puede ser < 80, 1 pto.
- Por mostrar que $x_4 = 80$ efectivamente da lugar a una solución factible (o sea, en que todos los x_i son ≥ 0), 1 pto.
- Por concluir que el valor mínimo posible para x_4 es 80, 1 pto.

A lo anterior se le suma el punto base.

7. Sea $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^3$ el plano de ecuación $x_1 - x_2 + 1 = 0$, y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación dada por $T(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = A\overrightarrow{\mathbf{x}}$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$,

Demuestre que la imagen del plano $\mathcal{P}$ bajo la transformación T es una recta en $\mathbb{R}^4$.

Primera Solución:

Despejando x_2 en la ecuación del plano, obtenemos $x_2 = x_1 + 1$. Reemplazando, tenemos

$$T(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = T(x_1, x_2, x_3) = T(x_1, x_1{+}1, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_3 \\ 1 \\ 1 + x_1 + 3x_3 \\ -2 - 2x_1 - 6x_3 \end{bmatrix}.$$

Esto puede ser escrito como

$$T(\overrightarrow{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_3 \\ 1 \\ 1 + x_1 + 3x_3 \\ -2 - 2x_1 - 6x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Pero $(3, 0, 3, -6) = 3(1, 0, 1, -2)$, por lo que

$$\begin{aligned} T(\overrightarrow{\mathbf{x}}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 3x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (x_1 + 3x_3) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

que es la ecuación de una recta con dirección $(1, 0, 1, -2)$ que pasa por $(0, 1, 1, -2)$.

Segunda Solución:

Comenzamos buscando 3 puntos no colineales en $\mathcal{P}$,

Tomando $x_1 = 0$, obtenemos $x_2 = 1$, y x_3 puede tomar cualquier valor.

Así, dos puntos de $\mathcal{P}$ son $A(0, 1, 0)$ y $B(0, 1, 1)$.

Un tercer punto de $\mathcal{P}$ está dado por $C(1, 2, 0)$.

Para demostrar que A, B y C no son colineales, debemos probar que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son l.i.

Se ve fácilmente que $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$ son l.i., ya que ninguno de ellos es múltiplo del otro.

Así, todo punto de este plano puede ser expresado como $A + \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$, y las imágenes de los puntos del plano son de la forma $T(A) + \alpha T(\overrightarrow{AB}) + \beta T(\overrightarrow{AC})$. Mostraremos que $T(\overrightarrow{AB})$ y $T(\overrightarrow{AC})$

son l.d., por lo que toda combinación lineal $\alpha T(\overrightarrow{AB}) + \beta T(\overrightarrow{AC})$ es en realidad un ponderado de $T(\overrightarrow{AB})$, de donde la imagen de $\mathcal{P}$ bajo T es la recta que pasa por $T(A)$ y tiene la dirección dada por $T(\overrightarrow{AB})$.

En efecto: las imágenes de A, B y C son, respectivamente,

$$T(A) = (0, 1, 1, -2), T(B) = (3, 1, 4, -8) \text{ y } T(C) = (1, 1, 2, -4),$$

por lo que

$$T(\overrightarrow{AB}) = T(B) - T(A) = (3, 1, 4, -8) - (0, 1, 1, -2) = (3, 0, 3, -6)$$

y

$$T(\overrightarrow{AC}) = T(C) - T(A) = (1, 1, 2, -4) - (0, 1, 1, -2) = (1, 0, 1, -2),$$

por lo que $T(\overrightarrow{AB}) = 3T(\overrightarrow{AC})$, lo que muestra que ambos vectores son l.d.

Puntaje:

- Una demostración correcta (completa, bien argumentada, y que no se da vueltas innecesarias) recibe 6 puntos.
- Una demostración esencialmente correcta, pero que no está completa (va bien encaminada, pero no llega a establecer la propiedad pedida), o no está totalmente bien argumentada (por ejemplo, se salta la justificación de partes importantes), o que pierde tiempo en detalles irrelevantes) recibe 4 puntos.
- Una demostración que tiene indicios de ir en la dirección correcta, pero no llega significativamente cerca de lo que se desea; o a la que no le falta tanto para terminar, pero está muy mal argumentada (por ejemplo, se justifican afirmaciones con argumentos erróneos) recibe 2 puntos.
- Una demostración que ni siquiera da indicios de ir bien encaminada, recibe 0 puntos.
- De ser necesario (una respuesta no calza exactamente en una de estas cuatro categorías) se le da el promedio de puntaje correspondiente a las dos categorías más cercanas dadas arriba.

8. En cada caso, determine si la afirmación es VERDADERA o FALSA, y justifique su respuesta (el indicar correctamente si es V o F sin una justificación adecuada no tiene puntos):

   a) Si S es un conjunto linealmente dependiente, entonces cada vector es una combinación lineal de los otros vectores en S.
   Solución:
   FALSO
   Es posible que uno de los vectores no sea combinación lineal de los otros, por ejemplo: en

   $$S = \{(1,0), (2,0), (1,1)\}$$

   el vector $(1,1)$ no es c. l. de $(1,0)$ y $(2,0)$, sin embargo

   $$2(1,0) - 1(2,0) + 0 \cdot (1,1) = (0,0)$$

   por lo que $S = \{(1,0), (2,0), (1,1)\}$ es linealmente dependiente.

   b) Si la matriz de coeficientes A tiene posición pivote en cada fila, entonces el sistema $Ax = b$ es inconsistente.
   Primera Solución:
   FALSO
   Si A tiene una posición pivote en cada fila, entonces dado cualquier vector $\overrightarrow{\mathbf{b}}$ la matriz ampliada del sistema $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ tendrá todos sus pivotes en columnas que pertenecen a A. Pero un sistema es inconsistente si y solo si la última posición pivote de su matriz ampliada está en la columna correspondiente a $\overrightarrow{\mathbf{b}}$, lo que evidentemente no ocurre en este caso.
   Segunda Solución:
   También es posible mostrar que esto es falso mostrando un contraejemplo.
   Por ejemplo, la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene una posición pivote en cada fila, y dado cualquier $\overrightarrow{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2$, por ejemplo, $\overrightarrow{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$, se tiene que el sistema $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \overrightarrow{\mathbf{b}}$ es consistente; en el caso mostrado, el sistema tiene solución $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   c) Si A es una matriz de 4×3, entonces la transformación $\overrightarrow{\mathbf{x}} \to A\overrightarrow{\mathbf{x}}$ mapea $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}^4$, (o, dicho de otra forma, mapea $\mathbb{R}^3$ sobreyectivamente en $\mathbb{R}^4$).
   Primera Solución:
   FALSO
   Claramente, A es la matriz estándar de la transformación lineal dada.
   Sabemos (Teorema 12, p. 77) que una transformación mapea $\mathbb{R}^3$ sobre $reals^4$ si y solo si las columnas de A generan a $\mathbb{R}^4$. Por otro lado (Teorema 4, p. 37) las columnas de A generan a $\mathbb{R}^4$ si y solo si A tiene una posición pivote en cada fila. Pero esto es imposible, ya que A tiene 4 filas y solo 3 columnas (y por lo tanto puede tener a lo más 3 posiciones pivote).
   Segunda Solución:
   En este caso también es posible usar un contraejemplo.

Por ejemplo, dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, no existe ningún $\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ya que $A\overrightarrow{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Puntaje:

En cada parte, se dan los dos puntos si se da una justificación correcta.

En la parte (a), una buena justificación es un contraejemplo; en las partes (b) y (c) puede ser un contraejemplo o un argumento que pruebe que pasa lo contrario (como los aquí exhibidos).

A lo anterior se le suma el punto base.