Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas
Departamento De Matemática
Segundo Semestre 2023

Álgebra Lineal - MAT1203
PAUTA Examen

1. Determine el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones usando matrices:

$$\begin{aligned} x+y+z-w &= 2 \\ 2x+y+w &= 5 \\ 3x+z+w &= 1 \\ 3x+2y+z &= 3 \end{aligned}$$

Solución La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

la que puede escalonarse como sigue

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{f_2-2f_1 \\ f_3-3f_1 \\ f_4-3f_1}} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

Por lo tanto la matriz aumentada y la matriz de coeficientes tienen diferente rango. Esto implica que el conjunto solución del sistema es vacío.

Puntaje

- 2 puntos si escribe la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.
- 2 puntos si obtiene una forma escalonada correcta de la matriz aumentada.
- 2 puntos si determina el conjunto solución coherente a partir de la matriz escalonada obtenida.

2. Escriba, de ser posible,
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
como multiplicación de matrices elementales. Si no se puede, justifique.

Solución Una transformación de A en su forma escalonada reducida es la siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_2 - \frac{1}{2} f_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{3} f_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{f_1 - 3 f_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} f_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A nivel de matrices elementales esto puede escribirse

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, despejamos la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nota: Existen varias soluciones diferentes a este problema.

Puntaje

- 1 puntos por obtener la forma escalonada reducida de A.
- 1 punto si todas las operaciones elementales son correctas
- 0.5 puntos por interpretar correctamente las operaciones de ponderación de fila como matrices elementales.
- 0.5 puntos por interpretar correctamente las operaciones de reemplazo de fila como matrices elementales.
- 0.5 puntos por interpretar correctamente las operaciones de intercambio de fila como matrices elementales.
- 1 puntos por calcular correctamente todas las inversas de matrices elementales
- 0.5 puntos por escribir A como producto de matrices elementales.
- 1 punto si la multiplicación de matrices elementales se presenta en el orden correcto.

3. Demuestre que $V = \{p \in \mathbb{P}_2 | \ p(1) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_2$.

Solución 1 El polinomio nulo cumple con que $p(1) = 0$. Además, si $q(x)$ y $r(x)$ cumplen con que $q(1) = 0$ y $r(1) = 0$, entonces $(q+r)(1) = q(1)+r(1) = 0$. Finalmente, $\alpha s(1) = 0$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y $s(x) \in V$. Esto implica que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_2$.

Solución 2 Si $p(x) \in V$, entonces $p(x) = ax^2 + bx + c$ y $p(1) = 0$, es decir, $a+b+c = 0$, o equivalentemente, $a = -b - c$. Así:

$$V = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\} = \{-b(-x^2 + x) + c(-x^2 + 1) : b, c \in \mathbb{R}\}$$
$$\implies V = \mathrm{Gen}\{-x^2 + x, -x^2 + 1\}.$$

Como V es un conjunto generado, entonces V es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_2$.

Puntaje

- 2 puntos por establecer una manera de demostrar que V es un subespacio.
- 2 puntos por ejecutar la demostración correctamente.
- 2 puntos por concluir que V es un subespacio vectorial.

4. (a) Usando algún método visto en clases, calcule el determinante de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 2 & k \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$$

(b) Determine todos los valores de k para los que la matriz B del ítem anterior es invertible.

Solución

(a) Aplicando operaciones de determinante obtenemos:

$$|B| = \begin{vmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 2 & k \\ 0 & k & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 2-k & 0 \\ 0 & k & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 \\ k^2 & 2-k-k^2 & 0 \\ 0 & k & k \end{vmatrix}.$$

Ahora calculando el determinante a través de la tercera columna obtenemos:

$$|B| = k^2(2-k-k^2).$$

(b) La matriz B es invertible si y sólo si $|B| \neq 0$. Así,

$$|B| = k^2(2-k-k^2) = -k^2(k+2)(k-1).$$

Por lo tanto, B es invertible si y sólo si $k \neq 0$, $k \neq -2$ y $k \neq 1$.

Puntaje

- 2 puntos por calcular el determinante usando cofactores o propiedades vistas en clases.
- 2 puntos por obtener el determinante correcto.
- 2 puntos por determinar los valores de k que hacen que B sea invertible, de acuerdo al determinante calculado.

5. (a) Demuestre que los vectores $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ son ortogonales, donde

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Encuentre la proyección de $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sobre el subespacio generado por $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$.

Solución

(a)

$$\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 + 1 + 0 - 1 = 0$$

$$\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 + 0 + 1 - 1 = 0$$

$$\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 + 1 + 0 - 1 = 0.$$

(b) Sea $W = \text{Gen}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$. Ya que los vectores $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$ son ortogonales, la proyección se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{proy}_W(\mathbf{v}) &= \text{proy}_{\mathbf{u_1}}(\mathbf{v}) + \text{proy}_{\mathbf{u_2}}(\mathbf{v}) + \text{proy}_{\mathbf{u_3}}(\mathbf{v}) \\ &= \frac{\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u_1}||^2}\mathbf{u_1} + \frac{\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u_2}||^2}\mathbf{u_2} + \frac{\mathbf{u_3} \cdot \mathbf{v}}{||\mathbf{u_3}||^2}\mathbf{u_3} \\ &= \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-7}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{-5}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Puntaje

- 1 punto por probar que cada producto punto es 0 (3 puntos en total).
- 1 punto por establecer una manera correcta de calcular el vector proyección.
- 1 punto por calcular correctamente la proyección sobre cada vector $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$.
- 1 punto por calcular el vector proyección buscado.

6. Encuentre una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ a partir de los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución Usaremos el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Sea $\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1}$.

Sea $\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2} - \text{proy}_{\mathbf{u_1}}(\mathbf{v_2}) = \mathbf{v_2} - \dfrac{\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{v_2}}{||\mathbf{u_1}||^2}\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \dfrac{2}{14}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Una forma de buscar un tercer vector $\mathbf{u_3}$ ortogonal a $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ es resolviendo $\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{u_3} = 0$ y $\mathbf{u_2} \cdot \mathbf{u_3} = 0$, o equivalentemente, resolver el sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right)$. Así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

por lo que $\mathbf{u_3} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ahora calculamos las normas de dichos vectores:

$$||\mathbf{u}_1|| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}, \quad ||\mathbf{u}_2|| = \frac{1}{7}\sqrt{1+25+9} = \frac{\sqrt{35}}{7}, ||\mathbf{u}_3|| = \sqrt{9+0+1} = \sqrt{10}.$$

Normalizamos los vectores:

$$\frac{\mathbf{u}_1}{||\mathbf{u_1}||} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathbf{u}_2}{||\mathbf{u_2}||} = \frac{7}{\sqrt{35}}\begin{bmatrix} -1/7 \\ 5/7 \\ -3/7 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\mathbf{u}_3}{||\mathbf{u_3}||} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una base ortonormal buscada es:

$$\left\{\frac{\mathbf{u}_1}{||\mathbf{u_1}||}, \frac{\mathbf{u}_2}{||\mathbf{u_2}||}, \frac{\mathbf{u}_3}{||\mathbf{u_3}||} =\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Nota: Una base diferente se puede obtener fijando $\mathbf{v_2}$ en vez de $\mathbf{v_1}$.

Puntaje

- 2 puntos si usa correctamente el procedimiento de Gram-Schmidt
- 2 puntos si encuentra correctamente un tercer vector ortogonal
- 2 puntos si determina una base ortonormal a partir de los vectores dados.

7. Diagonalice ortogonalmente la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución Calculamos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2).$$

Los valores propios son $\lambda = 0$ y $\lambda = 2$. Sean $E(0)$ y $E(2)$ los espacios propios asociados.

$$E(0) = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$E(2) = \text{Nul} \begin{bmatrix} 1-2 & 1 \\ 1 & 1-2 \end{bmatrix} = \text{Nul} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{Gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Los vectores propios $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ son ortogonales. Luego de normalizarlos, definimos las matrices

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

que cumplen que

$$A = PDP^T.$$

Puntaje

- 2 puntos por determinar valores propios correctos.
- 2 puntos por determinar vectores propios correctos.
- 1 punto por definir correctamente P.
- 1 punto por definir correctamente D.

8. Determine la descomposición en valores singulares de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ayuda:
Para esto puede usar el hecho que la matriz A^TA se diagonaliza de la siguiente forma:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Solución Los valores propios de A^TA son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 0$. Los valores singulares de A son $\sigma_1 = \sqrt{2}$, $\sigma_2 = 1$ y $\sigma_3 = 0$. Esto permite definir la matriz Σ de 2×3:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, definimos la matriz V de 3×3 normalizando los vectores propios de A^TA:

$$V = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar U de 2×2, calcule

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} A \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Estos vectores ya forman una base ortonormal (la base estándar) para $\mathbb{R}^2$, así que se tiene

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto produce la DVS

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = U\Sigma V^T$$

Puntaje

- 1 punto por encontrar los valores singualares de A.
- 1 punto por definir la matriz Σ de acuerdo a los valores singulares encontrados.
- 2 puntos por determinar la matriz V.
- 1 punto por calcular los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ correctos.
- 1 puntos por definir la matriz U de acuerdo a los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ encontrados..