Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2014

MAT1620 ⋆ Cálculo 2

Interrogación N° 3

> **Preguntas 1 a la 8.** Para obtener todo el puntaje debe tener un desarrollo impecable. Si comete un error de arrastre optará a lo mucho nota 5,0.
>
> **Preguntas 9 a la 12.** Se evaluará la estrategia que se utiliza para solucionar el problema. Si la estrategia es la correcta y se plantea correctamente la parte algebraica entonces la nota comienza en 5,0. Los errores de cálculo que no alteren el análisis del problema no bajarán mucho la nota en caso de no ser reiterativos.

1. Decida si la serie $\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \frac{k}{\ln(k)}$ converge o no converge.

   Solución. Podemos ver que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\ln(k)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x)} \qquad (\mathbf{2\ ptos})\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} \qquad (\mathbf{1\ ptos})\\ &= \lim_{x\to\infty} x = \infty \qquad (\mathbf{1\ ptos})\end{aligned}$$

   Por lo tanto la serie no converge. (**2 ptos**)

2. Demuestre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k^2+1}{2k^2+1}\right)^k$ converge.

   Solución. A partir del criterio de la raíz (**1 ptos**) se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k^2+1}{2k^2+1}\right)^k} &= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+1}{2k^2+1} \qquad (\mathbf{2\ ptos})\\ &= \frac{1}{2} \qquad (\mathbf{1\ ptos})\end{aligned}$$

   Por lo tanto la serie converge. (**2 ptos**)

3. Demuestre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1/k)}{\sqrt{k}}$ es absolutamente convergente.

   Solución. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$0 < \sin(1/k) < 1 \qquad (\mathbf{1\ ptos})$$

De este modo, usando el criterio de comparación al límite con $b_k = 1/k^{3/2}$, (**1 ptos**) se tendrá

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{\sin(1/k)}{\sqrt{k}}}{\dfrac{1}{k^{3/2}}} &= \lim_{k\to\infty} \frac{\sin(1/k)}{1/k} \qquad (\mathbf{1\ ptos}) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \qquad (\mathbf{1\ ptos}) \\ &= 1 \qquad (\mathbf{1\ ptos}) \end{aligned}$$

Por lo tanto la serie converge. (**1 ptos**)

4. Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(x-3)^k}{2k+1}$

Solución. Si $a_k = (-1)^k \dfrac{(x-3)^k}{2k+1}$ se tiene, a partir del criterio de la razón, que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} &= |x-3| \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+3} \qquad (\mathbf{1\ ptos}) \\ &= |x-3| \qquad (\mathbf{1\ ptos}) \end{aligned}$$

Luego, la serie converge absolutamente si $|x-3| < 1$ y diverge si $|x-3| > 1$ (**1 ptos**). De este modo es necesario analizar los x tales que $|x-3| = 1$.

Si $x = 2$ entonces la serie queda dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty \qquad \text{(serie armónica)} \qquad (\mathbf{1\ ptos})$$

Si $x = 4$ entonces la serie queda dada por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

que converge, por el criterio de la serie alternante (**1 ptos**), ya que $1/(2k+1)$ es decreciente si $k \in \mathbb{N}$. (**1 ptos**)

5. Demuestre que

$$1 - \ln(2) + \frac{(\ln(2))^2}{2!} - \frac{(\ln(2))^3}{3!} + \cdots = \frac{1}{2}$$

Solución. A partir de la serie de Maclaurin para la exponencial se tiene que

$$\begin{aligned} 1 - \ln(2) + \frac{(\ln(2))^2}{2!} - \frac{(\ln(2))^3}{3!} + \cdots &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\ln(2))}{k!} \qquad (\mathbf{2\ ptos}) \\ &= e^{\ln(1/2)} \qquad (\mathbf{3\ ptos}) \\ &= \frac{1}{2} \qquad (\mathbf{1\ ptos}) \end{aligned}$$

6. Usando la serie de Maclaurin de $f(x) = \arctan(x)$ determine el valor de $\arctan(1/2)$ con un error menor a 0,01.

Solución. La serie de Maclaurin para la arcotangente es

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Luego,

$$\arctan(1/2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} \qquad (\textbf{1 ptos})$$

En la serie anterior el término $a_k = \dfrac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$ es decreciente ya que para todo $x > 0$ se tiene

$$f(x) = (2x+1)2^{2x+1} > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = 2^{2x+2} + (2x+1)2^{2x+2} > 0 \qquad (\textbf{1 ptos})$$

Luego, aplicando la desigualdad para el resto de la serie alternante, tendremos

$$\left| \arctan(1/2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)2^{2n+3}} < \frac{1}{10^2} \qquad (\textbf{2 ptos})$$

Desigualdad que es cierta para todo $n \geq 1$ (**1 ptos**). Por lo tanto el valor de $\arctan(1/2)$ con un error menor a 0,01 es

$$\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} = \frac{11}{24} \qquad (\textbf{1 ptos})$$

7. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{6}$ y el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $2\pi/3$. Determine $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

   Solución. Sabemos que

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\alpha)$$

   En este caso $\alpha = 2\pi/3$, $\|\vec{a}\| = 3$ y $\|\vec{b}\| = \sqrt{6}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3\sqrt{6}\cos(2\pi/3) \qquad (\textbf{3 ptos}) \\ &= -\frac{3\sqrt{6}}{2} \qquad (\textbf{3 ptos}) \end{aligned}$$

8. Determine la distancia del punto $P_0 = (1,1,1)$ al plano que pasa por los puntos $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ y $(1,1,0)$.

   Solución. Si π es el plano que pasa por $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ y $(1,1,0)$, entonces dos directores para este plano son $\vec{d} = (1,-1,0)$ y $\vec{e} = (1,0,-1)$ (**1 ptos**). De este modo la normal $\vec{n}$ al plano π es

$$\vec{n} = \vec{d} \times \vec{e} = (1,1,1) \qquad (\textbf{2 ptos})$$

   Por lo tanto el plano π está dado por

$$\begin{aligned} \pi &: (\vec{x} - (0,1,1)) \cdot \vec{n} = 0 \\ \pi &: x + y + z - 2 = 0 \qquad (\textbf{1 ptos}) \end{aligned}$$

   De este modo, la distancia de P_0 al plano π está dada por

$$d(P_0; \pi) = \frac{|1+1+1-2|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (\textbf{2 ptos})$$

9. Estudie la convergencia condicional y absoluta de la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\ln(k)}$

Solución. La función $f(x) = x\ln(x)$, para $x \geq 2$, tiene por derivada

$$f'(x) = \ln(x) + 1 > 0 \qquad (\textbf{1 ptos})$$

Además $f(2) = 2\ln(2)$, por lo tanto $f(x)$ es una función creciente para todo $x \geq 0$. De este modo, $a_k = \dfrac{1}{k\ln(k)}$ es una sucesión decreciente (**1 ptos**) con

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k\ln(k)} = 0 \qquad (\textbf{1 ptos})$$

Por lo tanto, a partir del criterio para serie alternante, se tendrá que $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\ln(k)}$ converge. (**1 ptos**)

Por otro lado, la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln(k)}$ se compara con la integral

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln(x)} = \lim_{R\to\infty} \ln(\ln(R)) - \ln(\ln(2)) = \infty \qquad (\textbf{1 ptos})$$

Por lo tanto la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\ln(k)}$ converge condicionalmente pero no absolutamente. (**1 ptos**)

10. Sin usar la regla de L'Hospital, calcular el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - 2 + x^2}{x^4}$$

Solución. Considerando la serie de Maclaurin del coseno, tendremos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x) - 2 + x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) - 2 + x^2}{x^4} && (\textbf{2 ptos})\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)}{x^4} && (\textbf{1 ptos})\\
&= \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{1}{4!} - \frac{x^2}{6!} + \cdots\right) && (\textbf{1 ptos})\\
&= \frac{2}{4!} = \frac{1}{12} && (\textbf{2 ptos})
\end{aligned}$$

11. Sean $P = (1, 0, 1)$ y $Q = (0, -1, -1)$ puntos en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que el conjunto

$$\mathcal{A} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x} - P\| = \|\vec{x} - Q\|\}$$

es un plano. Determine un punto que pertenezca a $\mathcal{A}$ y un vector normal al plano $\mathcal{A}$.

Solución. Para todo $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathcal{A}$ se cumple

$$\begin{aligned}
\|(x,y,z) - (1,0,1)\| &= \|(x,y,z) - (0,-1,-1)\|\\
\|(x-1, y, z-1)\|^2 &= \|(x, y+1, z+1)\|^2 && (\textbf{1 ptos})\\
(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 &= x^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 && (\textbf{1 ptos})\\
x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 - 2z + 1 &= x^2 + y^2 + 2y + 1 + z^2 + 2z + 1 && (\textbf{1 ptos})\\
x + y + 2z &= 0 && (\textbf{1 ptos})
\end{aligned}$$

Por lo tanto $(0, 0, 0)$ (**1 ptos**) está en $\mathcal{A}$ y la normal es $(1, 1, 2)$. (**1 ptos**)

12. Considere las rectas en $\mathbb{R}^3$

$$l_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad l_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Demuestre que l_1 y l_2 se intersectan, encuentre el punto de intersección y el ángulo entre las rectas.

Solución. Si l_1 y l_2 se intersectan, entonces existen $s, t \in \mathbb{R}$ tales que

$$(1,0,1) + t(1,1,2) = (8,3,5) + s(2,0,-1) \qquad (\textbf{1 ptos})$$
$$(1+t, t, 1+2t) = (8+2s, 3, 5-s) \qquad (\textbf{1 ptos})$$

Obteniendo así el siguiente sistema

$$\begin{aligned} 1 + t &= 8 + 2s \\ t &= 3 \qquad (\textbf{1 ptos}) \\ 1 + 2t &= 5 - s \end{aligned}$$

que tiene por solución $t = 3$, $s = -2$. Por lo tanto, el punto de intersección es

$$(1,0,1) + 3(1,1,2) = (4,3,7) \qquad (\textbf{1 ptos})$$

Finalmente, el ángulo entre las rectas está dado por el ángulo entre sus vectore directores, vale decir

$$(1,1,2) \cdot (2,0,-1) = 0 \qquad (\textbf{1 ptos})$$

concluyendo que el ángulo entre las rectas es $90°$. $\qquad$ (**1 ptos**)

TIEMPO: 180 MINUTOS
SIN CONSULTAS