Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2016

MAT1620 ⋆ Cálculo II

PAUTA Interrogación N° 1

1. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-kx} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{2}{k(x+1)^2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Determine, si es que existe, el valor de k de modo que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Solución:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} -\frac{2}{k(x+1)^2}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-kx}dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} -\frac{2}{k(x+1)^2}dx + \lim_{t\to\infty}\int_{0}^{t} e^{-kx}dx =$$

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{2}{k} - \frac{2}{k(t+1)} + \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{k}e^{-kt} + \frac{1}{k} = \frac{3}{k}$$

Luego como $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, se concluye que $k = 3$.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por el cálculo correcto de cada una de las integrales en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar correctamente el valor de k, siempre y cuando haya determinado correctamente el valor de las integrales.

2. Calcule

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Solución:

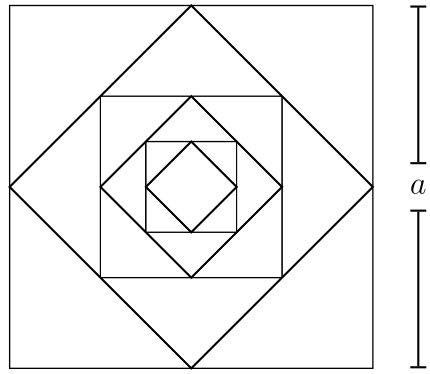
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to -1^+} \int_{t}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{t\to 1^-} \int_{0}^{t} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\lim_{t\to -1^+} -\arcsin t + \lim_{t\to 1^-} \arcsin t = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por dividir la integral en dos integrales de tipo II. Si el alumno no divide la integral, asignar (**1 ptos**).
- Asignar (**1 ptos**) por calcular cada una de las integrales.
- Asignar (**2 ptos**) por determinar el valor de la integral.

3. Los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado a se unen para formar un nuevo cuadrado. Este procedimiento se repite para cada nuevo cuadrado. (Véase la figura.)



Determine la suma de las áreas de todos los cuadrados.

Solución:

Si denotamos por A_i el área del $i-$ésimo cuadrado, notamos que $A_1 = a^2$, $A_2 = \dfrac{a^2}{2}$, $A_3 = \dfrac{a^2}{2^2}$ y así $A_i = \dfrac{a^2}{2^{i-1}}$. Luego la suma de todos los cuadrados es

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^2}{2^{i-1}} = 2a^2$$

por ser serie geométrica.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por determinar explícita o implícitamente el área de cada uno de los cuadrados.
- Asignar (**2 ptos**) por explicitar la serie a calcular.
- Asignar (**2 ptos**) determinar correctamente la suma de las áreas.

4. Determine los valores de p para los que la siguiente serie converge

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln(n))^p}$$

Solución:

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x\,(\ln(x))^p}$. Luego si $p \neq 1$ tenemos que

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \frac{(\ln t)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1}$$

Luego la integral converge si y sólo si $-p+1<0$, es decir $p>1$.

Si $p=1$, entonces

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty} \ln(\ln t) - \ln(\ln 2),$$

lo cuál diverge.

Usando el criterio de la integral entonces, podemos concluir que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln(n))^p}$$

converge si y sólo si $p>1$.

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por decidir usar el criterio de la integral.
- Asignar (**1 ptos**) por concluir que la integral converge para $p+1>0$.
- Asignar (**1 ptos**) por concluir que la integral diverge para $p+1<0$.
- Asignar (**1 ptos**) por concluir que la integral diverge para $p+1=0$.
- Asignar (**2 ptos**) por concluir que la serie converge para $p+1>0$.

5. Demuestre que la siguiente serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$$

Solución:

Como $\ln(n) < n - 1$ se tiene que

$$0 \leq \frac{\ln(n)}{n^3} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, concluimos por criterio de comparación que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}$ converge.

Evaluación.

- Asignar (**4 ptos**) por demostrar que $\ln(n) < n - 1$
- Asignar (**2 ptos**) por concluir que la integral converge usando el criterio de comparación.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por definir b_n en el criterio de comparación al límite.
- Asignar (**2 ptos**) por demostrar que a_n/b_n converge a cero, siendo $a_n = \ln(n)/n^3$ y $b_n = 1/n^2$
- Asignar (**2 ptos**) por concluir que serie converge usando el criterio de comparación al límite.

6. Muestre que la siguiente serie converge condicionalmente

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{\ln n}}$$

Solución:

Notamos que la serie alternante $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{\ln n}}$ converge ya que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\ln n}} = 0$ y además la sucesión $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\ln n}}$ es decreciente. Esto es ya que como $\ln(n+1) > \ln n$, entonces $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\ln n}} > \dfrac{1}{\sqrt[3]{\ln(n+1)}}$

Por otro lado la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\ln n}}$ diverge ya que

$$0 < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{\ln n}}$$

y como $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ diverge, por criterio de comparación concluimos que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\ln n}}$ diverge.

Es decir la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{\ln n}}$$

converge condicionalmente.

Evaluación.

- Asignar (**1 ptos**) por afirmar cada una de las siguientes propiedades: (1) $\sqrt[3]{\ln n} \geq 0$, (2) $\sqrt[3]{\ln n} \to 0$ cuando $n \to \infty$.
- Asignar (**2 ptos**) por demostrar que $\sqrt[3]{\ln n}$ es decreciente.
- Asignar (**2 ptos**) por concluir que la serie converge usando el criterio de la serie alternante.

7. Los términos de una serie se definen en forma recursiva mediante las ecuaciones

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{3n+1}{4n+1} a_n$$

Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absoluta, condicional o diverge.

Solución:

Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3n+1}{4n+1}$, aplicando el criterio de la razón tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$$

Es decir la serie converge. Como es una serie con términos positivos, entonces la serie converge absolutamente.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) por calcular el límite a_{n+1}/a_n.
- Asignar (**2 ptos**) por concluir que la serie converge.
- Asignar (**2 ptos**) por concluir que la serie converge absolutamente.

8. Sea f una función no negativa, continua tal que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{e^{-x^2}} = 1$$

Determine la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Solución:

Notamos que $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ converge, ya que

$$0 < e^{-x^2} < e^{-x}.$$

Y como $\displaystyle\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ converge, se usa criterio de comparación.

Luego, como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{e^{-x^2}} = 1,$$

por criterio de la razón tenemos que $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, y por criterio de la integral concluimos finalmente que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge.

Evaluación.

- Asignar (**2 ptos**) con explicitar que la serie de $f(n)$ converge si y sólo converge la serie de e^{-n^2}, o su equivalente con integral.
- Asignar (**2 ptos**) por concluir que la serie de e^{-n^2} converge, o su equivalente en integral.
- Asignar (**2 ptos**) que la serie de los términos $f(n)$ converge.