PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2023

Interrogación 2 - MAT1620

1. Considere las rectas

$$L_1 := \{(1,3,2) + t(1,-1,0) : t \in \mathbb{R}\} \text{ y } L_2 := \{(-4,2,5) + s(1,1,-1) : s \in \mathbb{R}\}$$

   a) Determine el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2.
   Solución:

   Para encontrar el punto de intersección de estas rectas debemos encontrar s y t reales tales que

$$\begin{aligned} 1+t &= -4+s \\ 3-t &= 2+s \\ 2 &= 5-s \end{aligned}$$

   De la última de estas ecuaciones tenemos que $s = 3$, reemplazando este valor en la segunda obtenemos que $t = -2$ y estos valores satisfacen la primera de las ecuaciones por lo tanto el punto de intersección es $(-1, 5, 2)$.
   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) por plantear un sistema correcto.
   - (1 punto) por resolver sistema.
   - (1 punto) por determinar el punto.

   b) Determine una ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
   Solución:

   Para encontrar la ecuación del plano, debemos encontrar la dirección normal a éste, observamos que una manera de obtenerlo es haciendo el producto cruz entre las direcciones de las rectas contenidas en dicho plano, es decir:

$$\vec{n} = (1,-1,0) \times (1,1,-1) = (1,1,2)$$

   por lo tanto una ecuación del plano es

$$x + y + 2z = 8.$$

   Distribución de puntajes:

   - (1 punto) por determinar una dirección normal al plano.
   - (1 punto) por escoger adecuadamente un punto por el que pasa el plano.
   - (1 punto) por determinar una ecuación.

2. Considere la función

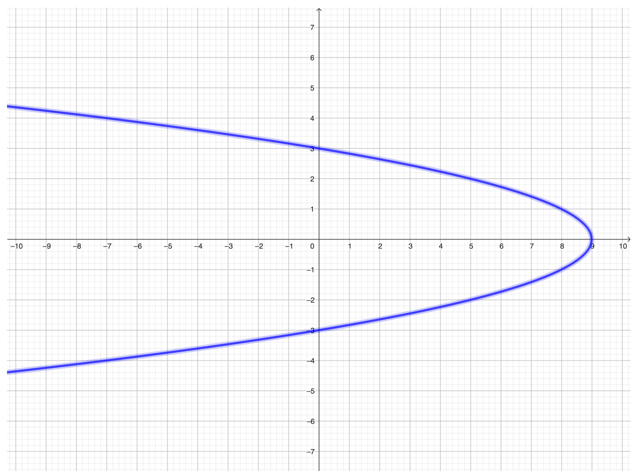
$$f(x,y) = \sqrt{9 - x - y^2}$$

a) Determine y bosqueje el dominio de f.

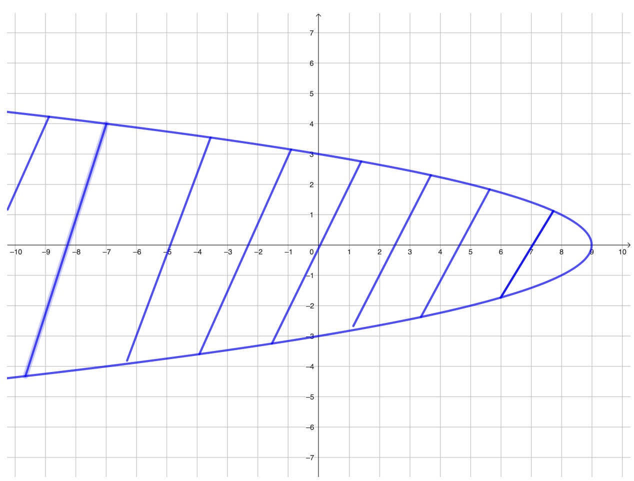
Observe que (x,y) pertenece al dominio de f si y sólo si $9 - x - y^2 \geq 0$, de este forma tenemos que

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 9 - x - y^2 \geq 0\}$$

para bosquejar el gráfico de esta región el plano sabemos que tenemos que gráficar la curva $9 - x - y^2$ que corresponde a la parábloa



luego para bosquejar el dominio debemos ver cuál de las regiones corresponde a la descripción, obteniendo



Distribución de puntajes:

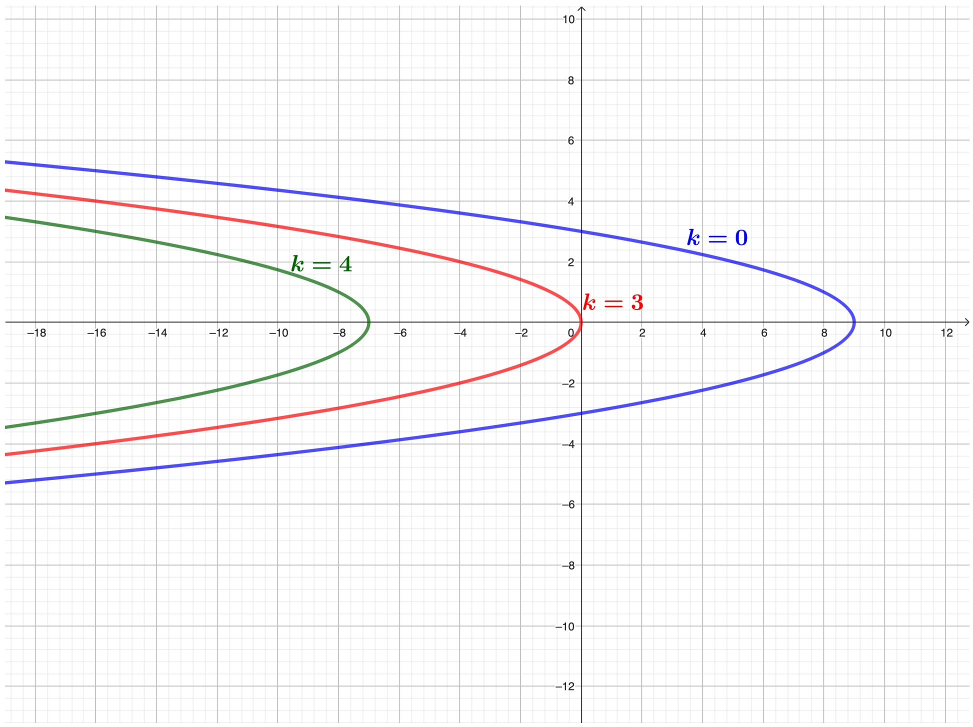
- (1 punto) Por determinar la descripción el dominio.
- (1 punto) Por bosquejar el gráfico de la parábola asociada al borde.
- (1 punto) Por pintar la región correcta.

b) Determine el recorrido y bosqueje las curvas de nivel para $k = 0, 3, 4$ de la función f.

Solución:

Observe que el recorrido de f es $[0, \infty)$, ya que por definición sabemso que la raíz es mayor o igual que cero y además tenemos que, dado $c \in [0, \infty)$ basta tomar $(9 - c^2, 0)$ de este modo $f(9 - c^2, 0) = c$, obteniendo que el recorrido es $[0, \infty)$.

Por otro lado las curvas de nivel pedidas son: **Distribución de puntajes:**



- (1 punto) Por determinar el recorrido justificadamente.
- (2 puntos) Por las curvas de nivel.

3. Estudie los siguientes límites; en caso de existir calcúlelo, en caso contrario demuestre que no existe.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$

Solución:

Si nos acercamos por el eje X es decir por la trayectoria $y=0$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2}\right)^2 = 1$$

por otro lado, al tomar la trayectoria $y=x$, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{2x^2}\right)^2 = 0$$

por lo tanto el límite pedido no existe. **Distribución de puntajes:**

- (1 punto) por calcular el límite por una trayectoria correctamente.
- (1 punto) por calcular el límite por otra trayectoria correctamente.
- (1 punto) por concluir.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^4}{x^4+y^4}$.

Solución:

Observe que $\dfrac{y^4}{x^4+y^4} \leq 1$ para todo $(x,y)\neq(0,0)$, por lo tanto

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^3y^4}{x^4+y^4}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x^3| = 0$$

obteniendo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4}{x^4+y^4} = 0$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por acotar correctamente.
- (1 punto) por calcular, correctamente, el límite de la cota.
- (1 punto) por concluir.

4. Sea $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$. Determine, en caso que exista, $f_x(0,0)$.

   Solución:

   Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h^3}}{h} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Distribución de puntajes:

   - (2 puntos) por plantear correctamente la definición de la derivada parcial en $(0,0)$
   - (2 puntos) por calcular correctamente el límite
   - (2 puntos) por el valor.

5. Sea $f(x,y) = \dfrac{e^{-x^2/y}}{\sqrt{y}}$. Determine para qué valor(es) de $c \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$f_y + cf_{xx} = 0$$

   Solución

   Observe que

$$f_x = e^{-x^2/y}y^{-1/2} \cdot \frac{-2x}{y} = -2xe^{-x^2/y}y^{-3/2}$$

   derivando nuevamente respecto a x tenemos que:

$$f_{xx} = -2e^{-x^2/y}y^{-3/2} + 4x^2e^{-x^2/y}y^{-5/2}$$

   por otra parte

$$f_y = x^2e^{-x^2/y}y^{-5/2} - \frac{1}{2}e^{-x^2/y}y^{-3/2}$$

   entonces

$$f_y + cf_{xx} = 0$$

   si y solo si

$$x^2e^{-x^2/y}y^{-5/2} - \frac{1}{2}e^{-x^2/y}y^{-3/2} + c(-2e^{-x^2/y}y^{-3/2} + 4x^2e^{-x^2/y}y^{-5/2}) = 0$$

   como $e^{-x^2/y} > 0$, lo anterior es equivalente a que

$$c(2y^{-3/2} - 4x^2ey^{-5/2}) = x^2y^{-5/2} - \frac{1}{2}y^{-3/2}$$

y eso pasa si y solo si $c = -1/4$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por determinar f_x.
- (1 punto) por determinar f_y.
- (2 puntos) por determinar f_{xx}.
- (2 puntos) por determinar el valor de c.