PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2018

PAUTA I2 - CALCULO I - MAT1610

1. a) Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x(2-x)^p & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Determine todos los valores de $p \in \mathbb{R}$ de modo que $f'(0)$ exista.

Solución:
Observe que $f'(0)$ existe si y solo si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)}{h}$ existe.Observamos que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-\cos(h)}{h^2} = \frac{1}{2}$$

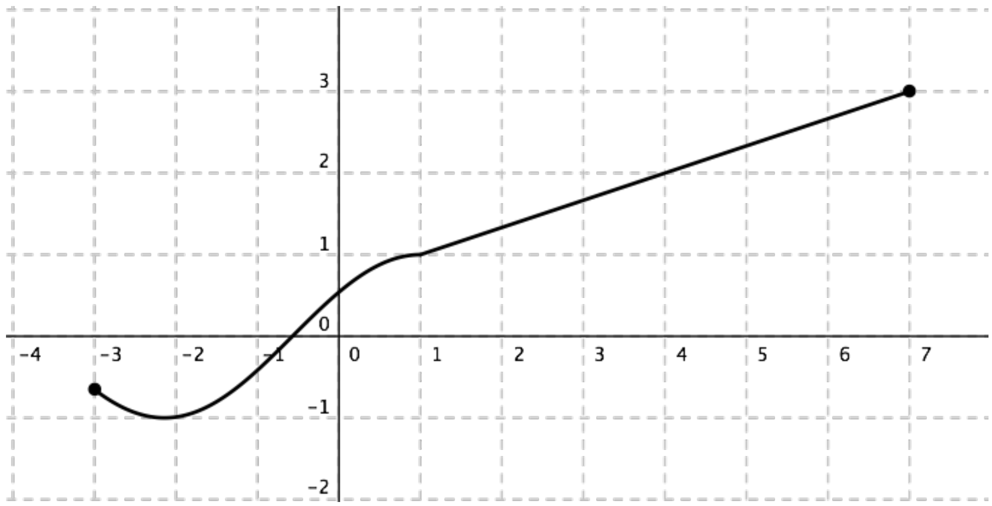
por otra parte, tenemos que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2-h)^p = 2^p$$

por lo tanto $f'(0)$ existe ai y solo si $p = -1$.

Distribución de puntaje:
(1 punto) Por enunciar y determinar correctamente cada límite lateral
(1 punto) Por concluir correctamente el valor de p.

b) Sea $h(x) = x \cdot f\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$ donde f es la función que tiene por gráfico la siguiente figura



Determine $h'(2)$. **Solución:**

Al derivar la función h tenemos que

$$h'(x) = f\left(\frac{x+2}{x-1}\right) + f'\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{-3}{(x-1)^2}\right)$$

por lo que

$$h'(2) = f(4) + f'(4) \cdot (-3) = 2 + \frac{1}{3} \cdot (-3) = 1$$

Distribución de puntaje:
(1 punto) Por usar correctamente la regla del producto en la derivación.
(1 punto) Por usar correctamente la regla de la cadena en la derivación.
(1 punto) Por extraer correctamente la información del gráfico y concluir que es 1.

2. a) Se sabe que $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ es invertible en $(-\infty, -2)$. Determine $(f^{-1})'(5)$.

Solución:

Sabemos que $(f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(5))}$.

Por otra parte $f^{-1}(5) = -3$, por lo tanto $(f^{-1})'(5) = \dfrac{1}{f'(-3)} = \dfrac{1}{12}$

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por usar correctamente la derivada de la inversa.

(1 punto) Por determinar $f^{-1}(5)$.

(1 punto) Por concluir que es $\dfrac{1}{12}$

b) Encuentre la recta tangente a la curva $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$ en el punto $(3, 1)$.

Solcuión:

Derivando la igualdad que define a la curva tenemos que

$$4(x^2 + y^2)(2x + 2y \cdot y') = 25(2x - 2y \cdot y')$$

reemplazando por $x = 3$ e $y = 1$, tenemos que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-9}{13}$, por lo tanto la ecuación de la recta pedida es:

$$y = \frac{-9}{13}(x - 3) + 1$$

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por derivar implícitamente de forma correcta.

(1 punto) Por reemplazar y obtener que $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-9}{13}$.

(1 punto) Por determinar correctamente la recta tangente.

3. a) Dos autos A y B viajan por dos calles perpendiculares desde la intersección de éstas. El auto A viaja a $30\,km/hr$ y el auto B a $70\,km/hr$. ¿A qué velocidad se alejan los autos cuando A está a $3\,km$ de la intersección?

b) Sea f una función derivable en $\mathbb{R}$. Suponga que $f(1) = -2$ y $f'(x) \geq 2$, para todo $x \in (1, 6)$. Demuestre que $f(6) \geq 8$. Justifique adecuadamente.

c) Calcule

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x/2) + \cos x}{1 + \sin^2 x + \cos x}.$$

Solución.

a) Sean $x(t), y(t)$ las distancias de los autos A y B al punto de intersección de las calles en el instante t, respectivamente. La distancia $d(t)$ que separa a los autos en el instante t satisface $d^2(t) = x^2(t) + y^2(t)$ **(0.5 Pts.)**. Derivando respecto a t tenemos

$$d'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{d(t)}. \quad \textbf{(0.5 Pts.)}$$

En el instante en que $x(t) = 3\,km$ se tiene que $y(t) = 7\,km$ y $d(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{58}$ **(0.5 Pts.)**. De esta manera, dado que $x'(t) = 30\,km/hr$, $y'(t) = 70\,km/hr$ tenemos que

$$d'(t) = \frac{3 \cdot 30 + 7 \cdot 70}{\sqrt{58}} = \frac{580}{\sqrt{58}}.$$

Por lo tanto, los autos se alejan a razón de $580/\sqrt{58}\,[km/hr]$. **(0.5 Pts.)**

b) Como la función es derivable en $\mathbb{R}$ tenemos que f es continua en $\mathbb{R}$. Por el teorema del valor medio, existe $c \in (1, 6)$ tal que

$$\frac{f(6) - f(1)}{5} = f'(c). \quad \textbf{(1.5 Pts.)}$$

De lo anterior tenemos que $f(6) = 5f'(c) - 2$. Dado que $f'(x) \geq 2$, para todo $x \in (1, 6)$ concluímos que $f(6) \geq 8$ **(0.5 Pts.)**.

c) Sean $f(x) = \sin(x/2) + \cos x$, $g(x) = 1 + \sin^2 x + \cos x$. Notar que el limite $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ **(0.5 Pts.)**. El límite

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{(1/2)\cos(x/2) - \sin(x)}{2\sin(x)\cos(x) - \sin(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{(1/2)\cos(x/2) - \sin(x)}{\sin(2x) - \sin(x)}$$

también tiene la forma indeterminada $\left(\frac{0}{0}\right)$ **(0.5 Pts.)**, y el límite

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{(-1/4)\sin(x/2) - \cos(x)}{2\cos(2x) - \cos(x)} = \frac{1}{4}. \quad \textbf{(0.5 Pts.)}$$

Por lo tanto, usando la Regla de L'hopital dos veces tenemos

$$\lim_{x\to\pi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\pi} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{1}{4}. \quad \textbf{(0.5 Pts.)}$$

□

4. Considere la función
$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{3x-2}.$$
Determine:

a) Dominio, signos y ceros de f.
b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
c) Intervalos de cóncavidad y convexidad de f.
d) Máximos, mínimos y puntos de inflexión de f.
e) Asíntotas.
f) Bosqueje el gráfico de f.

Cada inciso tiene 1 punto.

Solución.

a) **(1 Pt.)** El dominio de la función f es $\mathbb{R}\backslash\{2/3\}$. La siguiente tabla muestra

	$]-\infty,-2[$	-2	$]-2,2/3[$	$2/3$	$]2/3,1[$	1	$]1,\infty[$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$3x-2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$

los signos y ceros de f.

b) La derivada de f es
$$f'(x) = \frac{3x^2-4x+4}{(3x-2)^2}. \quad \textbf{(0.5 Pts.)}$$
Dado que el discriminante de $3x^2-4x+4$ es -2^5 y $a=3>0$ tenemos que $3x^2-4x+4>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ y por lo tanto $f'(x)>0$, para todo $x\in\mathbb{R}\backslash\{2/3\}$. De esta manera, f es siempre creciente en su dominio. **(0.5 Pts.)**

c) La segunda derivada de f es
$$f''(x) = \frac{-16}{(3x-2)^3}. \quad \textbf{(0.6 Pts.)}$$
De aquí se concluye que $f''(x)>0$ si $x<2/3$ y $f''(x)<0$ si $x>2/3$. Por lo tanto, f es convexa si $x<2/3$ **(0.2 Pts.)** y f es cóncava si $x>2/3$ **(0.2 Pts.)**.

d) En (b) se mostró que $f'(x)>0$, para todo $x\in\mathbb{R}\backslash\{2/3\}$. Esto nos dice que la función no tiene máximos ni mínimos locales, y tampoco globales **(0.5 Pts.)**. En (c) se mostró que f tiene un cambio en la curvatura en $x=2/3$, pero dado que $2/3\notin Dom(f)$ conclúimos que f no tiene puntos de inflexión **(0.5 Pts.)**.

e) 1) **Asíntotas verticales:** De la tabla en (a) se puede notar que

$$\lim_{x\to 2/3^+} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2/3^-} f(x) = \infty. \quad \textbf{(0.1 Pt. por cada límite)}$$

Por lo tanto, $x = 2/3$ es una asíntota vertical.

2) **Asíntotas Oblicuas hacia $+\infty$:** Se tiene que

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2}{x(3x-2)} = \frac{1}{3} \quad \textbf{(0.2 Pts.)}$$

y

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - \frac{x}{3}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x-6}{3(3x-2)} = \frac{5}{9}. \quad \textbf{(0.2 Pts.)}$$

De esta manera, la recta $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{5}{9}$ es la asíntota oblicua de f hacia $+\infty$.

Asíntotas Oblicuas hacia $-\infty$: Se tiene que

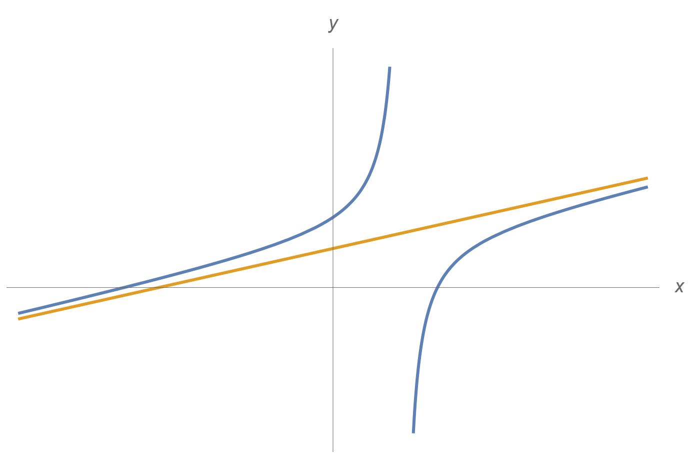
$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x-2}{x(3x-2)} = \frac{1}{3} \quad \textbf{(0.2 Pts.)}$$

y

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - \frac{x}{3}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{5x-6}{3(3x-2)} = \frac{5}{9}. \quad \textbf{(0.2 Pts.)}$$

Así, la recta $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{5}{9}$ es la asíntota oblicua de f hacia $-\infty$.

f) El gráfico se muestra en la figura. **(1 Pt.)**



□