PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2014

MAT1203 - Algebra Lineal
Examen - Lunes 23 de Junio - Solución

1. Sea $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de un espacio vectorial V.

   a) Pruebe que $B_2 = \{v_1 + v_2, v_2, v_1 + v_3\}$ es una base de V.

   Solución:

   Tomando la matriz de vectores coordenados de los elementos de B_2 con respecto a B_1 se tiene

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Dado que esta matriz es invertible (por determinante no cero o pivoteando, etc) entonces B_2 es L.I. en un espacio de dimensión 3, luego es una base.

   b) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que la matriz que la representa con respecto a B_1 en dominio y B_2 en recorrido es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$
   Encuentre $T(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3)$ para todo $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

   Solución:

   Interpretando la matriz se tiene:

   $T(v_1) = (v_1 + v_2) + (v_1 + v_3) = 2v_1 + v_2 + v_3.$
   $T(v_2) = v_2.$
   $T(v_3) = -4(v_1 + v_2) + 7v_2 + 4(v_1 + v_3) = 3v_2 + 4v_3.$

   Por lo tanto $T(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = (2a_1)v_1 + (a_1 + a_2 + 3a_3)v_2 + (a_1 + 4a_3)v_3.$

c) Caracterice todos los vectores $v \in V$ tales que $T(v) = 4v$.

Solución:

Usando lo anterior se busca:

$T(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = 4(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3)$.

Resolviendo queda

$(2a_1)v_1 + (a_1 + a_2 + 3a_3)v_2 + (a_1 + 4a_3)v_3 = 4(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3)$.

Entonces $a_1 = 0$ y $a_2 = a_3$.

Por lo tanto los vectores buscados son de la forma $\alpha(v_2 + v_3)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Otra manera es buscar la matriz que representa a T con respecto a B_1 en dominio y recorrido: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Se busca entonces E_4 en esta matriz y queda $E_4 = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Por lo tanto los vectores buscados son de la forma $\alpha(v_2 + v_3)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Sea $U = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

   a) Encuentre una base ortonormal de U.

   Solución:

   Se considera $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Entonces la dimensión de U es 2 y se busca la base usando los dos primeros vectores del conjunto generador.

   Entonces sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, resolvemos $A^t A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   Entonces se obtiene $A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Luego una base ortonormal de U es $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

   Otra manera es decir que una base ortogonal es de la forma $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + 2\beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix} \right\}$ para algún $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   Se tiene entonces que $\alpha = -\beta$ y al normalizar se obtiene que una base ortonormal de U es $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Otra manera es usar la fórmula $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y

$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Luego una base ortonormal de U es $\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

b) Encuentre la distancia de $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ a U.

Solución:

Hay que resolver $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^2} \left\| A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - b \right\|$.

Entonces se resuelve $A^t A x = A^t b$.

$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Entonces la distancia es la norma de $\begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$, que es $\sqrt{2/3}$.

3. *a*) Sea $R = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matriz de reflexión sobre un subespacio U. Determine la matriz de proyección sobre U, una base de U y una base de $U^{\perp}$.

Solución:

Sea P la matriz de proyección, entonces $P = (1/2)(R+I) = (1/3)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Se tiene que $U = \mathrm{Im}(P) = E_1 = \mathrm{Ker}(P - I)$ y $U^{\perp} = \mathrm{Ker}(P) = E_0$.

$$P \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces:

Una base de U es $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ o bien $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

Una base de $U^{\perp}$ es $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

b) Determine todos los valores de $c > 0$ tal que

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \ (x_1 - 1)^2 + (x_2)^2 + (x_1 - x_2 - c)^2 = 3.$$

Solución:

El problema queda:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \right\|^2 = 3.$$

Se resuelve entonces $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+c \\ -c \end{bmatrix}$.

Queda $x_1 = \dfrac{2+c}{3}$ y $x_2 = \dfrac{1-c}{3}$.

Luego $\left\| \begin{bmatrix} \dfrac{c-1}{3} \\ \dfrac{1-c}{3} \\ \dfrac{1-c}{3} \end{bmatrix} \right\|^2 = 3.$

Resolviendo queda $c = 4$.

4. *a*) Diagonalice ortogonalmente $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solución:

Los valores propios son 0 y 2.

Los espacios propios quedan $E_0 = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ y $E_2 = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Entonces se toma $P = \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Demuestre que si P es una matriz ortogonal de $n \times n$, entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $Px \cdot Py = x \cdot y$.

Solución:

Como P es ortogonal se tiene que $P^t P = I$.

$Px \cdot Py = (Px)^t (Py) = x^t P^t P y = x^t I y = x^t y = x \cdot y$.

$c)$ Calcule la descomposición en valores singulares de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Solución:

Se buscan matrices U y V ortogonales tales que $U^t AV = \Sigma$.

$A^t A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, entonces $V = I$ y $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Entonces $U_1 = AV\sqrt{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Como $U_1^t \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, se tiene que:

$U_2 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Finalmente

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}^t \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$