Función Logaritmo

Introducción al Cálculo - MAT1107

Rodrigo Vargas

[1] Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
[2] LIES Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social, Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile

17 de Mayo de 2022

Función Logaritmo natural

Definición. (Logaritmo natural)

La función exponencial $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es biyectiva. Su función inversa se llama función logaritmo natural $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definida mediante su relación inversa

$$y = \ln(x) \iff e^y = x \ :$$

Observaciones

- Para todo $x \in]0, \infty[$, $\exp(\ln(x)) = x$.
- Para todo $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$. En particular, $\ln(e) = 1$ y $\ln(1) = 0$.
- La función ln es estrictamente creciente pues es la inversa de una función estrictamente creciente.
- EL único cero de la función ln es 1.

Función Logaritmo natural

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Proposición.

Para todo $x, y \in]0, \infty[$ y $z \in \mathbb{R}$ se cumple que

1. $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$
2. $\ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$
3. $\ln(x^z) = z\ln(x)$

Demostración

1. Sean $u = \ln(x) \iff e^u = x$ y $w = \ln(y) \iff e^w = y$. Entonces
$$\ln(xy) = \ln(e^u \cdot e^w) = \ln(e^{u+w}) = u + w = \ln(x) + \ln(y)\,.$$
2. Ejercicio
3. Sea $u = \ln(x) \iff e^u = x$. Entonces
$$\ln(x^z) = \ln((e^u)^z) = \ln(e^{zu}) = zu = z\ln(x)\,.$$

Función Logaritmo natural

Laboratorio Interdisciplinario de Estadística Social

Proposición. (Desigualdad Fundamental)

La función logaritmo natural satisface las siguientes desigualdades. Para todo $x \in]0, \infty[$ se tiene

1. $\ln(x) \leqslant x - 1$.
2. $1 - \dfrac{1}{x} \leqslant \ln(x)$.

Demostración

1. Sabemos que $e^z \geqslant 1 + z$. Como la función logaritmo natural es creciente vemos que

$$z = \ln(e^z) \geqslant \ln(1 + z)\,.$$

Haciendo el cambio de variables $z = x - 1$ obtenemos

$$x - 1 \geqslant \ln(1 + (x - 1)) = \ln(x)\,.$$

2. Ejercicio.

Función a^x

Definición. (La función a^x)

Para $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ se define la función a^x por la fórmula

$$a^x = \exp(x \ln(a)) .$$

Propiedades

1. Su dominio es $\mathbb{R}$.
2. Para $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, la función a^x es estrictamente monótona, en particular es inyectiva.
3. Para $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, la función $a^x : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ es biyectiva. Su inversa está dada por la siguiente fórmula

$$a^x = y \Longleftrightarrow x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} .$$

Función Logaritmo de base a

Definición (Logaritmos de base a)

Sea $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$. Se define la función logaritmo en base a por

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} .$$

Ecuaciones exponenciales y ecuaciones logarítmicas

EJEMPLO 1 Resolver la ecuación $3^{x+2} = 7$.

EJEMPLO 2 Resolver la ecuación $3xe^x + x^2 e^x = 0$.

EJEMPLO 3 Resolver la ecuación $\log(3x + 2) = \log(x - 4) + 1$.

EJEMPLO 4 Sea $f(x) = \log_2(3\log(10x) - 2)$. Asumiendo que f es inyectiva, determine su función inversa.