PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Primer semestre 2022

MAT1620 ⋆ Cálculo 2
Interrogación 1

1. Determine si las siguientes integrales impropias son convergentes o divergentes.

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x+\sin x}{x^2-x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x}{(x-3)^3}\,dx$

a) Tenemos:

$$\sin x \geq -1$$

$$x+\sin x \geq x-1$$

además, $x \geq 2 \implies x^2 > x \implies x^2-x>0$, luego (multiplicando ambos lados de la desigualdad)

$$\frac{x+\sin x}{x^2-x} \geq \frac{x-1}{x^2-x} = \frac{1}{x}$$

Finalmente, como sabemos que $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x}dx$ diverge (ya que es una integral de la forma $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^p}dx$ con $p \leq 1$) podemos concluir usando el criterio de comparación que $\displaystyle\int_2^\infty \frac{x+\sin x}{x^2-x}\,dx$ es divergente.

b) Poniendo $u = x-3$, tenemos

$$\int \frac{x}{(x-3)^3}dx = \int \frac{u+3}{u^3}du = \int \frac{3}{u^3} + \frac{1}{u^2}du = -\frac{3}{2u^2} - \frac{1}{u}$$

Luego

$$\int \frac{x}{(x-3)^3}dx = -\frac{3}{2(x-3)^2} - \frac{1}{x-3}$$

así

$$\int_1^3 \frac{x}{(x-3)^3}\,dx = \lim_{b\to 3^-} \int_1^b \frac{x}{(x-3)^3}\,dx = \lim_{b\to 3^-}\left(-\frac{3}{2(b-3)^2} - \frac{1}{b-3}\right) - \frac{1}{8} = -\infty$$

por lo que la integral es divergente.

2. a) Suponga que $h(x)$ es una función creciente con $h(0) = 0$ y $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 5$. Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\infty (h(x))^4 h'(x)\, dx$

b) Sea f una función tal que $\frac{1}{x^3} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$ y $f(x) = g(x^2)$. Determine si la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{g(x)}{x}\, dx$ es convergente o divergente.

a)

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (h(x))^4 h'(x)\, dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b (h(x))^4 h'(x)\, dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left. \frac{[h(x)]^5}{5} \right|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{[h(b)]^5}{5} - \frac{[h(0)]^5}{5} \\
&= \frac{5^5}{5} - \frac{0^5}{5} \\
&= 625
\end{aligned}$$

b) Si $x \geq 1$ entonces $\sqrt{x} \geq 1$, luego

$$\frac{1}{(\sqrt{x})^3} \leq f(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

así, como $f(x) = g(x^2)$

$$\frac{1}{(\sqrt{x})^3} \leq g(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Por otro lado, $x \geq 1 \implies \frac{1}{x} > 0$ y podemos multiplicar la desigualdad por $\frac{1}{x}$ para obtener

$$\frac{1}{x^{5/2}} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

Finalmente, como sabemos que $\int_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ es convergente, podemos concluir por el criterio de comparación que $\int_1^\infty \frac{g(x)}{x} dx$ es convergente.

3. Estudie la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9n}{e^{-n}+n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n\cos(n)}{\sqrt{n^8-n+1}}$

a) Tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n}{e^{-n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9n}{\frac{1}{e^n}+n}$$

como la última expresión es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, podemos usar l'hopital y así

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n}{e^{-n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{-\frac{1}{e^n}+1} = 9 \neq 0$$

Por lo tanto, por el criterio de la divergencia, la serie es divergente.

b) Observemos que

$$\begin{gathered} -1 \leq \cos n \leq 1 \\ -n \leq n\cos n \leq n \\ n^2-n \leq n^2+n\cos n \leq n^2+n \end{gathered}$$

luego, como $n \geq 1 \implies n^2-n > 0$ podemos concluir que los términos de la serie son positivos y aplicar el criterio de comparación en el límite con la serie convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+n\cos(n)}{\sqrt{n^8-n+1}}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^4+n^3\cos n}{\sqrt{n^8-n+1}} = 1 > 0$$

Por lo tanto, la serie es convergente.

4. Determine el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$$

Usando el criterio de la razón con $a_n = \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$ tenemos que la serie es convergente cuando

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} |x| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{|x|}{3} = \frac{|x|}{3} < 1$$

Esta última desigualdad es equivalente a $|x| < 3$ y de donde obtenemos que el radio de convergencia es $r = 3$ y el intervalo de convergencia es $(-3, 3)$ incluyendo posiblemente ambos, uno o ninguno de los extremos.
Si $x = 3$ la serie se reduce a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que es divergente (serie harmónica). Por lo tanto $x = 3$ no está en el intervalo de convergencia.
Si $x- = 3$ la serie se reduce a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

que es convergente por el criterio de la serie alternada. Por lo tanto $x = -3$ si está en el intervalo de convergencia.
Por lo tanto, el intervalo de convergencia es $[-3, 3)$.

5. Sea $F(x) = \int_0^x \sqrt{1+9t^4}\, dt$.

   a) Encuentre los tres primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $\sqrt{1+s}$ en torno a $s = 0$.
   b) Encuentre los tres primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $\sqrt{1+9t^4}$ en torno a $t = 0$.
   c) Encuentre los tres primeros términos no nulos del desarrollo de Taylor de $F(x)$ en torno a $x = 0$.

a) Si $h(s) = \sqrt{1+s}$ entonces

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 \\ h'(s) = \frac{1}{2\sqrt{1+s}} &\rightarrow h'(0) = \frac{1}{2} \\ h''(s) = -\frac{1}{4(s+1)^{3/2}} &\rightarrow h''(0) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

luego

$$\sqrt{1+s} \approx h(0) + h'(0)(s-0) + h''(0)\frac{(s-0)^2}{2!} = 1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{8}s^2$$

b) Ponemos $s = 9t^4$ y obtenemos

$$\sqrt{1+9t^4} \approx 1 + \frac{9}{2}t^4 - \frac{81}{8}t^8$$

c)

$$F(x) \approx \int_0^x 1 + \frac{9}{2}t^4 - \frac{81}{8}t^8 dt = x + \frac{9}{10}x^5 - \frac{9}{8}x^9$$