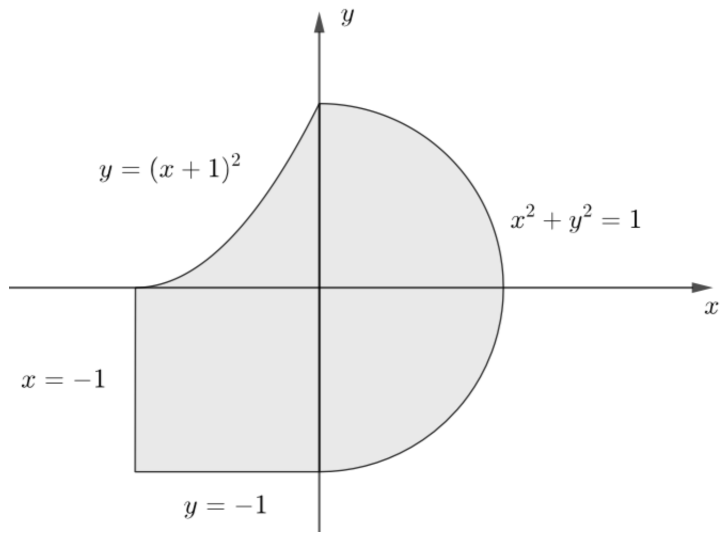
Pauta Interrogación 3. Mat 1620.

1. Considere la región $R \subset \mathbb{R}^2$ acotada por las curvas $y = (x+1)^2$, $x = -1$, $y = -1$ y $x^2 + y^2 = 1$, que se muestra en la siguiente figura.



Plantee la integral iterada en el orden $dx\ dy$, de una función arbitraria $f(x, y)$, continua en R.

Solución. La región R se puede reescribir como la unión de las regiones de tipo II

$$R_1 = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1,\ -1 - \sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$$

y

$$R_2 = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 0,\ -1 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}.$$

Por lo tanto, la integral pedida se puede expresar como

$$\int_0^1 \int_{-1-\sqrt{y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx\, dy + \int_{-1}^0 \int_{-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx\, dy.$$

□

Asignación de Puntaje Pregunta 1:

a) **2 puntos** por escribir la región R como unión de dos regiones tipo II, indicando intersecciones.

b) **2 puntos** por cada integral iterada.

2. Use integrales dobles para calcular el volumen del sólido $S \subset \mathbb{R}^3$ que se encuentra en el interior de los conos $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$.

Solución. El solido S se puede escribir como

$$S = \{(x,y,z) \,:\, x^2+y^2 \leq 1/4,\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

Por lo tanto, su volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_{x^2+y^2\leq 1/4} (1 - \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{x^2+y^2})\, d(x,y) \\ &= \int_{x^2+y^2\leq 1/4} (1 - 2\sqrt{x^2+y^2})\, d(x,y). \end{aligned}$$

Usando coordenadas polares

$$\begin{aligned} V &= \int_{x^2+y^2\leq 1/4} (1 - 2\sqrt{x^2+y^2})\, d(x,y) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} (1-2r) r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

□

Asignación de Puntaje Pregunta 2:

a) **2 puntos** por determinar el sólido, indicando intersecciones. Se puede utilizar un gráfico.

b) **1 punto** por plantear la integral que permite obtener el volumen.

c) **3 puntos** por calcular la integral que permite obtener el volumen. Se permite cualquier método.

3. Encuentre el centro de masas de la región acotada $R \subset \mathbb{R}^2$ que se encuentra entre las curvas $y = 1 - x^2$ e $y = 0$, asociada a la función densidad $\rho(x, y) = y$.

Solución. El centro de masa $(\overline{x}, \overline{y})$ de la región R se calcula según

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int\int_R x\rho(x,y)\, d(x,y)}{\displaystyle\int\int_R \rho(x,y)\, d(x,y)} \quad \text{e} \quad \overline{y} = \frac{\displaystyle\int\int_R y\rho(x,y)\, d(x,y)}{\displaystyle\int\int_R \rho(x,y)\, d(x,y)}.$$

Usando integrales iteradas tenemos que

$$\begin{aligned}
\int\int_R x\rho(x,y)\, d(x,y) &= \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} xy\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x(1-x^2)^2\, dx = 0, \\
\int\int_R y\rho(x,y)\, d(x,y) &= \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} y^2\, dy\, dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^3\, dx = \frac{32}{105}, \\
\int\int_R \rho(x,y)\, d(x,y) &= \int_{-1}^{1}\int_0^{1-x^2} y\, dy\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^2\, dx = \frac{8}{15}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

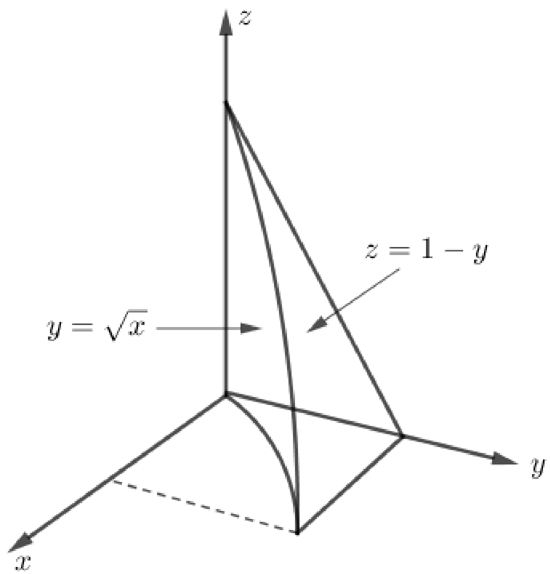
$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(0, \frac{4}{7}\right).$$

□

Asignación de Puntaje Pregunta 3:

a) **0.5 puntos** por las fórmulas del centro de masas.
b) **1.5 puntos** por cada integral calculada correctamente.
c) **1 punto** por las coordenadas del centro de masas.

4. Considere el sólido $S \subset \mathbb{R}^3$ acotado por $y = \sqrt{x}$, $z = 1-y$, $z = 0$ y $x = 0$, que se muestra en la siguiente figura.



a) Plantee la integral iterada en el orden $dx\ dy\ dz$, de una función arbitraria $f(x, y, z)$, continua en S.

b) Calcule el volumen del sólido S.

Solución.

a) Notar que el sólido S se puede expresar como

$$S = \{(x, y, z) \,:\, 0 \leq z \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1 - z,\, 0 \leq x \leq y^2\}.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

es la integral iterada pedida.

b) El volumen del sólido se puede calcular usando la integral en a), con $f(x, y, z) = 1$. Así

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{1-z} y^2\, dy\, dz = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-z)^2\, dz = \frac{1}{12}.$$

□

Asignación de Puntaje Pregunta 4:

a) 1) **1.5 puntos** por determinar las intersecciones y las regiones de integración para la integral iterada.

2) **1.5 puntos** por la integral iterada en el orden correspondiente.

b) 1) **1.5 puntos** por expresar la integral que permite calcular el volumen del sólido.

2) **1.5 puntos** por calcular correctamente la integral que permite obtener el volumen.

5. Calcule la integral de la función $f(x,y,z) = x$, sobre el sólido $S \subset \mathbb{R}^3$ que se encuentra entre el paraboloide $z = 6 - x^2 - y^2$ y el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

Solución. La intersección entre el paraboloide y el cono es la circunferencia $\{(x,y,2) : x^2+y^2 \leq 4\}$. De esta manera, el sólido S se puede expresar como

$$R = \{(x,y,z) \, : \, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 6 - (x^2+y^2), \; x^2+y^2 \leq 4\}.$$

Así, la integral pedida es

$$\int_{x^2+y^2\leq 4} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-(x^2+y^2)} x \, dz \, d(x,y).$$

Usando coordenadas cilíndricas tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{x^2+y^2\leq 4} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-(x^2+y^2)} x \, dz \, d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^{6-r^2} r^2 \cos\theta \, dz \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2(6-r^2-r) \cos\theta \, dr \, d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^2 r^2(6-r^2-r) \, dr \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Asignación de Puntaje Pregunta 5:

a) **2 puntos** por determinar el sólido, indicando intersecciones. Se puede utilizar un gráfico.

b) **1 punto** por expresar la integral.

c) **3 puntos** por calcular correctamente la integral, se permite cualquier método.

6. Use Coordenadas esféricas para calcular la integral triple $\int\int\int_S (x^2+y^2)\,dV$, donde $S \subset \mathbb{R}^3$ es el sólido entre las esferas $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+y^2+z^2=9$, con $z \geq 0$.

Solución. En coordenadas esfericas, el sólido S se puede escribir como

$$\{(\rho,\theta,\psi)\,:\,2\leq\rho\leq 3,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\psi\leq\pi\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int\int\int_S (x^2+y^2)\,dV &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_2^3 \rho^4\sin^3\psi\,d\rho\,d\theta\,d\psi\\ &= 2\pi\left(\int_0^{\pi}\sin^3\ d\psi\right)\left(\int_2^3\rho^4\,d\rho\right)\\ &= \frac{844\pi}{3}.\end{aligned}$$

□

Asignación de Puntaje Pregunta 6:

a) **1 punto** por determinar el sólido, indicando intersecciones (se puede utilizar un gráfico) y por detectar la región de integración en las coordenadas (ρ,θ,ψ).

b) **2 puntos** por realizar correctamente el cambio de variables.

c) **3 puntos** por calcular correctamente la integral.