Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
TAV 2015

MAT1620 ⋆ Cálculo 2
Solución Interrogación N° 2

1. (a) Calcule
$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{7}{n}}\right)$$
   (b) Usando series, demuestre que
$$0,\overline{63}=\frac{7}{11}$$

2. Si la n-ésima suma parcial de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $S_n = 3 - n2^{-n}$, determine a_n y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Determine si las siguientes series convergen o divergen.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right]$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt{n}}$

4. Determine el valor de $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx$ con un error menor que $0,01$.

5. Determine los valores de las siguientes series

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$

6. Determine los intervalos de convergencia de las siguientes series:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$

7. Determine los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente serie converge, indicando en qué casos la convergencia es absoluta o condicional.
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\ln(n))^p}{n}$$

8. Sabiendo que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2-x+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ y $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$, determine una serie de potencias para $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$. Use esta serie para demostrar que
$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{2}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}\right)$$

Solución Interrogación N° 2

1. (a) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{7}{n}}\right)$$

(b) Usando series, demuestre que

$$0,\overline{63}=\frac{7}{11}$$

Solución.

(a) Alternativa 1

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{7}{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt[3]{1-\frac{7}{n}}}{1/n}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{1-7x}}{x} \quad (\mathbf{1\ pto})\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{7}{3(1-7x)^{2/3}} \quad (\mathbf{1\ pto})\\ &= \frac{7}{3} \quad (\mathbf{1\ pto})\end{aligned}$$

Alternativa 2

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{7}{n}}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1-\sqrt[3]{1-\frac{7}{n}}}{1/n}\\ &= -\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-7x}-1}{x} \quad (\mathbf{1\ pto})\end{aligned}$$

Luego, el límite anterior es la derivada de $f(x)=-\sqrt[3]{1-7x}$ en $x=0$ (**1 pto**). De este modo,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(1-\sqrt[3]{1-\frac{7}{n}}\right) &= f'(0)\\ &= \frac{7}{3} \quad (\mathbf{1\ pto})\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}0,\overline{63} &= 0,636363\ldots\\ &= \frac{6}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{6}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\frac{6}{10^5}+\frac{3}{10^6}+\ldots\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{10^{2n-1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^{2n}} \quad (\mathbf{1\ pto})\\ &= \frac{20}{33}+\frac{1}{33} \quad (\mathbf{1\ pto}\text{ por cada suma})\\ &= \frac{7}{11}\end{aligned}$$

2. Si la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es $S_n = 3 - n2^{-n}$, determine a_n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Solución. El primer término de la sucesión a_n

$$a_1 = S_1 = 3 - 2^{-1} = \frac{5}{2}$$

El término a_n para $n > 1$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3 - n2^{-n} - (3 - (n-1)2^{-(n-1)}) = (n-2)2^{-n}$$

El valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n) = \lim_{n\to\infty} \left(3 - n2^{-n}\right) = 3$$

- Por encontrar a_n, nota 3,0.
- Por lograr lo anterior y además expresar la serie como $\lim_{n\to\infty} (S_n)$, nota 5,0.
- Por lograr lo anterior y además llegar al valor correcto de la serie, nota 7,0.

3. Determine si las siguientes series convergen o divergen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right]$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt{n}}$

Solución.

(a) Es una sucesión de terminos positivos cuyo término $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \dfrac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$

Aplicando el teorema del comparación al limite, comparando con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ que es una serie convergente

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\dfrac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} \right) = \frac{1}{2}$$

implica que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ es convergente. **(2 ptos)**

(b) Como $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - 1 = e - 1 \neq 0$ por el criterio de divergencia la serie diverge. **(2 ptos)**

(c) Es una sucesión de términos positivos. Aplicando el teorema del comparación al limite, comparando con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ que es una serie convergente

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\dfrac{\operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt{n}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} \right) = 1$$

implica que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{\sqrt{n}}$ es convergente. **(2 ptos)**

4. Determine el valor de $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx$ con un error menor que $0,01$.

Solución.

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\, dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\, dx \quad \textbf{(2 ptos)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!}\, dx \quad \textbf{(2 ptos)}$$

que es una serie alternante, aplicando el teorema del residuo para series alternantes como $b_2 = \dfrac{1}{11 \cdot 5!} < 0,01$ debemos sumar hasta $n = 1$, $S_1 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{7 \cdot 3!}$. **(2 ptos)**

5. Determine los valores de las siguientes series

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$

Solución.

(a) Sabemos que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ si evaluamos en $x = \dfrac{3}{5}$ obtenemos $e^{\frac{3}{5}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!}$ luego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n n!} = e^{\frac{3}{5}} - 1$. **(2 ptos)**

(b) Sabemos que $sen(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$ si evaluamos en $x = \dfrac{\pi}{4}$ obtenemos $sen(\frac{\pi}{4}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{4^{2n+1}(2n+1)!}$. **(2 ptos)**

6. Determine los intervalos de convergencia de las siguientes series:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$

Solución. (a) Notar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n! 2^n (x - 1/2)^n.$$

Tomando $a_n = n!2^n$ y aplicando el criterio del cuociente tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} 2(n+1) = +\infty.$$

Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie es $R = 0$ y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$$

converge solo en $x = 1/2$. (**2 pts.**)

(b) Tomando $a_n = 1/\sqrt{n}$ y aplicando el criterio del cuociente tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+1/n}} = 1.$$

Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie es $R = 1$ y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

converge absolutamente para $|x| < 1$ y diverge para $|x| > 1$. Como el criterio no da información en los extremos $x = 1, x = -1$, entonces se deberán analizar de forma independiente. Supongamos que $x = 1$, entonces nos queda la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

que diverge ya que $p = 1/2 < 1$ (Criterio de la p-serie). Si $x = -1$, entonces nos queda la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

que converge por criterio de series alternantes ya que la sucesión $a_n = 1/\sqrt{n}$ es positiva, decreciente y con límite cero. (**2 pts.**)

(c) Tomando $a_n = \dfrac{n^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$ y aplicando el criterio del cuociente tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{1}{n+1} = 0.$$

Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie es $R = \infty$ y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$$

converge para todo $x \in \mathbb{R}$. (**2 pts.**)

7. Determine los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente serie converge, indicando en qué casos la convergencia es absoluta o condicional.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\ln(n))^p}{n}$$

Solución. Supongamos que $p > 0$ y consideremos la función $f(x) = \dfrac{(\ln(x))^p}{x}$, $x \geq 2$. Un cálculo muestra que

$$f'(x) = \frac{(\ln(x))^{p-1}(p - \ln(x))}{x^2} \tag{1}$$

es negativa para $x > e^p$. Como la sucesión $a_n = \dfrac{(\ln(n))^p}{n}$ coincide con la función f anterior en los naturales, se tiene que a_n es decreciente para todo $n \geq [e^p] + 1$ ($[x]$: parte entera de x). Separamos la serie de la siguiente manera

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\ln(n))^p}{n} = \sum_{n=2}^{[e^p]} \frac{(-1)^{n-1}(\ln(n))^p}{n} + \sum_{n=[e^p]+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\ln(n))^p}{n}$$

y notamos que por el analisis anterior, la serie

$$\sum_{n=[e^p]+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\ln(n))^p}{n}$$

es convergente (Criterio de series alternantes) y la suma

$$\sum_{n=2}^{[e^p]} \frac{(-1)^{n-1}(\ln(n))^p}{n}$$

es finita. Por lo tanto, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\ln(n))^p}{n}$$

converge para $p > 0$. Para analizar la convergencia absoluta en este caso, debemos analizar la convergencia de la serie de términos positivos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln(n))^p}{n}.$$

Tomamos $b_n = 1/n$ y por comparación al limite (tomando $a_n = \dfrac{(\ln(n))^p}{n}$) tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} (\ln(n))^p = +\infty.$$

Como la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$$

es divergente y el limite anterior es $+\infty$, entonces

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln(n))^p}{n}$$

es divergente y por lo tanto la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\ln(n))^p}{n}$$

converge condicionalmente para $p > 0$.

Supongamos ahora que $p < 0$, entonces $-p > 0$ y analizamos la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(\ln(n))^q}$$

(tomando $q = -p$). Consideremos la función $g(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^q}$. De manera análoga (como en (1)) tenemos que $g'(x) < 0$, para todo $x \geq 2$. Si $a_n = \dfrac{1}{n(\ln(n))^q}$ y dado que g coincide con a_n en los naturales, entonces tenemos que a_n es positiva y decreciente. Es fácil ver que $\lim a_n = 0$, por lo tanto por el criterio de las series alternantes, tenemos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(\ln(n))^q}$$

converge. Para analizar la convergencia absoluta en este caso, debemos analizar la convergencia de la serie de términos positivos

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^q}.$$

Ocupamos la función g definida anteriormente y notamos que es continua, positiva y decreciente. Usando el cambio de variables $u = \ln(x)$ tenemos

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^q} = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{du}{u^q}.$$

La integral de la derecha converge si y solo si $q > 1$, por lo tanto por el criterio de la integral tenemos que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^q}$$

converge si y solo si $q > 1$. Finalmente concluimos que la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\ln(n))^p}{n}$$

converge absolutamente si $p < -1$ y condicionalmente si $p \geq -1$.

8. Sabiendo que $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ y $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$, determine una serie de potencias para $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$. Use esta serie para demostrar que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \left(\frac{2}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} \right)$$

Solución. De la información dada se deduce que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{3\sqrt{3}} &= \int_0^{1/2} \frac{dx}{x^2-x+1} = \int_0^{1/2} \frac{(x+1)dx}{1+x^3} \\
&= \int_0^{1/2} \frac{x\,dx}{1+x^3} + \int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^3} \\
&= \int_0^{1/2} x\left[\frac{1}{1-(-x^3)}\right]\,dx + \int_0^{1/2} \left[\frac{1}{1-(-x^3)}\right]\,dx \\
&= \int_0^{1/2} x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n\,dx + \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n\,dx \\
&= \int_0^{1/2} x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}\,dx + \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}\,dx \\
&= \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1}\,dx + \int_0^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{1/2} x^{3n+1}\,dx + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^{1/2} x^{3n}\,dx \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{3n+2}}{3n+2}\bigg|_0^{1/2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}\bigg|_0^{1/2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2}}{3n+2} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+1}}{3n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n+2}(3n+2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n+1}(3n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4\cdot 8^n(3n+2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\cdot 8^n(3n+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4\cdot 8^n(3n+2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\cdot 8^n(3n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{1}{4(3n+2)} + \frac{1}{2(3n+1)}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{1}{4(3n+2)} + \frac{2}{4(3n+1)}\right) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n}\left(\frac{1}{3n+2} + \frac{2}{3n+1}\right)
\end{aligned}$$

de donde lo pedido se desprende fácilmente.

Puntaje:

- Por re-escribir $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ como suma de dos integrales, 1 pto.
- Por reemplazar $\dfrac{1}{1+x^3}$ por su serie de potencias en cada una de estas integrales, 1 pto.
- Por llegar a dos series alternantes, una con $\int_0^{1/2} x^{3n}\, dx$ y otra con $\int_0^{1/2} x^{3n+1}\, dx$, 1 pto.
- Por calcular estas integrales y evaluar en los extremos, 1 pto.
- Por separar los factores $2 \cdot 8^n$ y $4 \cdot 8^n$ en las fracciones, y , 1 pto.
- Por llegar al resultado pedido, 1 pto.