Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
Segundo semestre de 2021

MAT1620 – Cálculo II

Solución Interrogación N° 3

1. Encuentre todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2y - x^2 - 2y^2$ y para cada punto determine si es máximo/mínimo local o punto de silla.

Solución. Para hallar los puntos críticos resolvemos el sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) &= 2xy - 2x = 0,\\ \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) &= x^2 - 4y = 0.\end{aligned}$$

De la primera ecuación sabemos que $x = 0$ o $y = 1$. Reemplazando en la segunda ecuación llegamos a los tres puntos

$$(0,0), \quad (-2,1), \quad (2,1).$$

Ahora aplicamos el críterio de la segunda derivada $D(x,y) = \begin{vmatrix} 2y-2 & 2x \\ 2x & -4 \end{vmatrix} = -4x^2 - 8y + 8$. Luego $D(0,0) = 8 > 0$ y $f_{xx}(0,0) < 0$ por lo cual la función alcanza en $(0,0)$ un máximo local y $D(\pm 2, 1) < 0$ entonces la función alcanza en $(\pm 2, 1)$ puntos silla.

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por formar el sistema.
- **1 pt** Por determinar los 3 puntos criticos.
- **1 pt** Por formar $D(x,y)$.
- **1 pt** Por determinar el máximo local.
- **1 pt** Por determinar punto silla en $(2,1)$.
- **1 pt** Por determinar punto silla en $(-2,1)$.

2. Determine los valores extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - 2x + y^2 + 2y + 1$ sobre el disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución. Analizamos los puntos críticos en el interior del disco considerando el siguiente sistema: $\nabla f(x,y) = (0,0)$: $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x,y) = 2x - 2 = 0$ y $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y) = 2y + 2 = 0$ cuya única solución es $(1,-1)$ y no pertenece al disco D.

Ahora analizamos los puntos críticos sobre la frontera de D que es el círculo $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 = 1\}$. Utilizando los multiplicadores de Lagrange resolviendo el siguiente sistema en las variables x, y, λ:

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= \lambda 2x, \\ 2y + 2 &= \lambda 2y, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{aligned}$$

De las primeras dos ecuaciones escribimos x, y en función de λ como $x = \dfrac{1}{1-\lambda}$ y $y = \dfrac{-1}{1-\lambda}$. Por lo tanto tenemos $\left(\dfrac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\dfrac{-1}{1-\lambda}\right)^2 = 1$ que se simplica en $2 = (1-\lambda)^2$ con las soluciones:

$$A = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ y } B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

Para determinar el valor máximo y mínimo absoluto de f restringido a D, evaluamos f en los dos puntos críticos para elegir el mayor y menor valor. Tenemos: $f(A) = 2 + 2\sqrt{2}$ y $f(B) = 2 - 2\sqrt{2}$. Por lo tanto f en D alcanza su valor máximo absoluto $2 + 2\sqrt{2}$ en el punto $A = \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y su valor mínimo absoluto $2 + 2\sqrt{2}$ en el punto $B = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$.

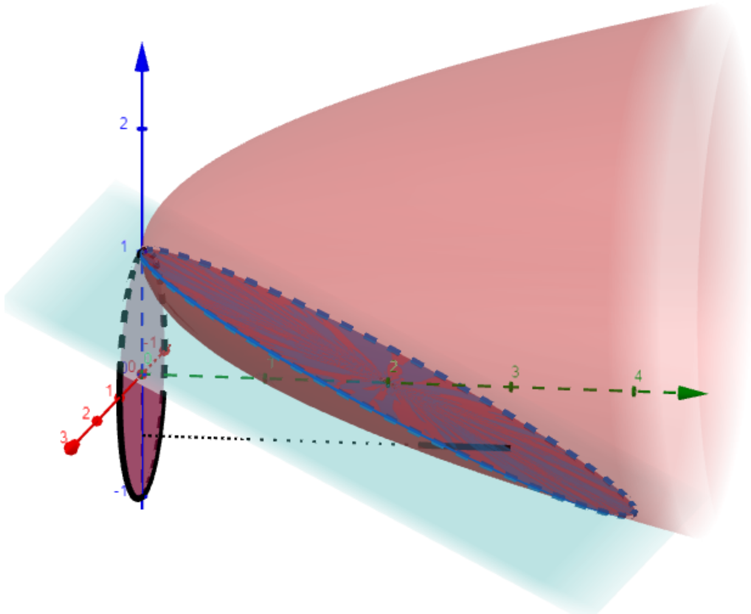
Criterios de corrección:

- **1 pt** Por resolver $\nabla f(x,y) = (0,0)$.
- **1 pt** Por reconocer que $(1,-1)$ no pertenece a la región dada.
- **1 pt** Por formar el sistema de multiplicadores de Lagrange.
- **1 pt** Por determinar las soluciones A y B del sistema.
- **1 pt** Por determinar el valor máximo de f en D.
- **1 pt** Por determinar el valor mínimo de f en D.

3. Calcule la integral de $f(x, y, z) = xz$ sobre la región encerrada por el paraboloide $y = x^2 + (z-1)^2$ y el plano $y + 2z = 2$.

Solución. Para delimitar la región consideramos la intersección de las superficies

$$\left.\begin{array}{ll} y & = x^2 + (z-1)^2 \\ y & = 2 - 2z \end{array}\right| \quad x^2 + (z-1)^2 = y = 2 - 2z \quad \rightarrow \quad x^2 + z^2 = 1$$



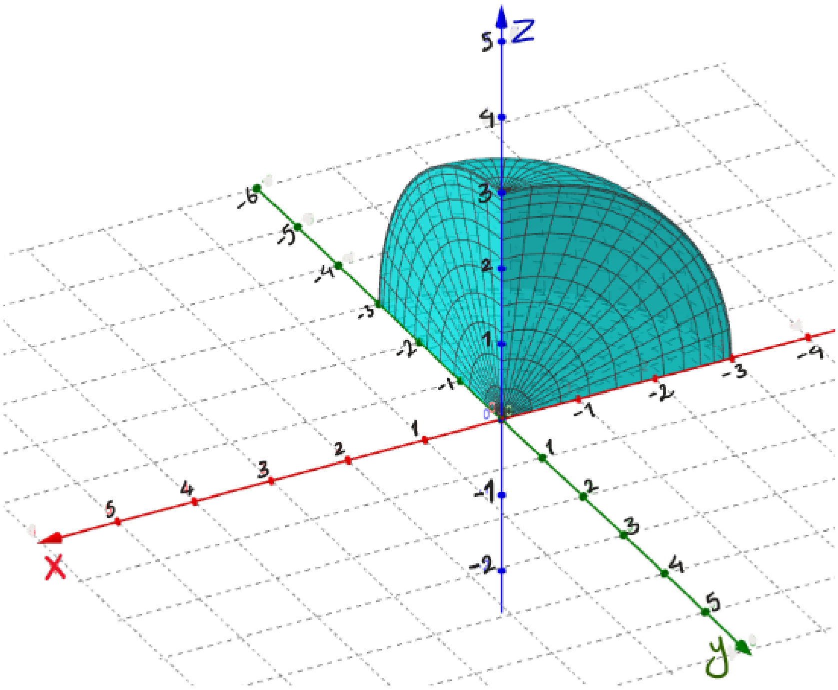
Por lo que podemos describir la región como los puntos con y entre $x^2 + (z-1)^2$ y $2 - 2z$, y con (x, z) tales que $x^2 + z^2 \leq 1$. Este disco, a su vez, se puede parametrizar como $-1 \leq x \leq 1$ y $-\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$. Luego

$$\begin{aligned}
\iiint_E f \, dV &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+(z-1)^2}^{2-2z} xz \; dy \; dz \; dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xz(2 - 2z - (x^2 + (z-1)^2) \; dz \; dx \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xz - x^3 z - xz^3 \; dz \; dx \\
&= \int_{-1}^{1} (x - x^3) \frac{\sqrt{1-x^2}^2}{2} - x \frac{\sqrt{1-x^2}^4}{4} - \left((x - x^3) \frac{\sqrt{1-x^2}^2}{2} - x \frac{\sqrt{1-x^2}^4}{4} \right) dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Criterios de corrección:

- **1 pt** Por determinar la región de la intersección de las superficies.
- **1 pt** Por parametrizar el disco.
- **2 pt** Por formar la integral.
- **2 pts** Por desarrollar la integral.

4. Sea E un octavo de una esfera descrito por el siguiente dibujo:



a) Escriba la integral $\iiint_E \cos(x^2+y^2)\ dV$ usando coordenadas cartesianas (no requiere calcular el valor de la integral).

b) Escriba la integral $\iiint_E \cos(x^2+y^2)\ dV$ usando coordenadas esféricas (no requiere calcular el valor de la integral).

Solución. Según el dibujo la región E está acotada por

$$-3 \leq x \leq 0, \quad ,-\sqrt{9-x^2} \leq y \leq 0, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{9-x^2-y^2}.$$

Entonces

$$\iiint_E \cos(x^2+y^2)\ dV = \int_{-3}^{0}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \cos(x^2+y^2)\, dz\, dy\, dx$$

Pasando ahora a coordenadas esféricas, tenemos

$$0 \leq \rho \leq 3, \quad \pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

Entonces la integral queda

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho$$

Criterios de corrección:

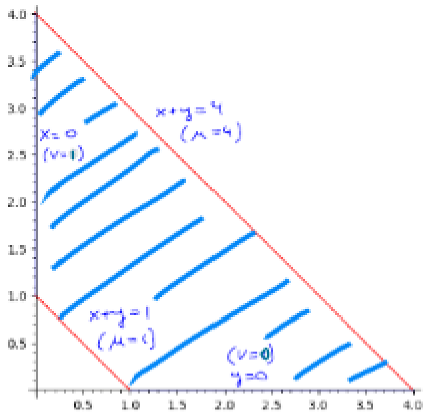
- **3 pts** Por escribir la integral usando coordenadas cartesianas.
- **3 pts** Por escribir la integral usando coordenadas esféricas.

5. Considere un cuadrilátero R con vértices $(1,0),(4,0),(0,4),(0,1)$ en el plano xy. Evalúe la integral

$$\iint_R \frac{1}{x+y} dA$$

usando el cambio de variables $x = u - uv$, $y = uv$.

Solución. Debemos determinar el dominio en las nuevas coordenadas y calcular el jacobiano del cambio de variables. El cuadrilátero se puede ver en la figura:



Las rectas que limitan el cuadrilátero R son $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$. En las coordenadas uv quedan como $uv = 0, u(1 - v) = 0, u = 1, u = 4$. Como $u = x + y \neq 0$, obtenemos el rectángulo $[1,4] \times [0,1]$.

El jacobiano queda:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

La integral queda

$$\int_0^1 \int_1^4 \frac{1}{u} u \, du \, dv = 3$$

Criterios de corrección:

- **2 pts** Por determinar la región $[1,4] \times [0,1]$.
- **2 pts** Por calcular el Jacobiano.
- **1 pt** Por formar la integral.
- **1 pt** Por calcular la integral.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo