INTERROGACIÓN 3
MAT1620

PREGUNTAS DE DESARROLLO

1. Calcular la integral
$$\int\int_D x^2y^2\,dA,$$
siendo D la región del primer cuadrante acotada por las curvas
$$xy = 1, xy = 2, \quad y = x/2, \quad y = 3x$$
Solución:
Haciendo el cambio de variable
$$xy = u \qquad \frac{y}{x} = v,$$
la nueva región de integración sería
$$u \in [1, 2], \qquad v \in [1/2, 3].$$
Por otro lado se tiene que
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2v},$$
y por lo tanto
$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{2v}{1}.$$
Reemplazando se obtiene,
$$\int_1^2 \int_{1/2}^3 u^2 \cdot \frac{1}{2v}\,dvdu = \frac{7}{6}\ln(6).$$
Asignación de puntaje.
   - Asignar 1 puntos por realizar de manera correcta un cambio de variables (el sugerido u otro).
   - Asignar 1 punto por describir de manera correcta la nueva region de integraci ón.
   - Asignar 1.5 puntos por calcular de manera correcta el respectivo Jacobiano.
   - Asignar 1.5 puntos por calcular correctamente el valor de la integral pedida.

2. *a*) Analice la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln(n))^2}.$$

b) Sea $p \in]1, \infty[$. Analice la convergencia de la serie,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p(\ln(n))^2}.$$

c) Sea $p \in [0, 1[$. Analice la convergencia de la integral,

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p(\ln(x))^2}.$$

Solución:

a) En primer lugar notemos que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2} = 0$$

y que la función $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^2}$ es decreciente, ya que la función $g(x) = x(\ln(x))^2$ es creciente (su derivada es positiva). Por lo tanto se cumplen las condiciones del Criterio de integral. En este caso, analizaremos la convergencia absoluta de la serie revisando la convergencia de la integral

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^2} = \lim_{c \to \infty} \left(\frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{\ln(2)}.$$

Por lo tanto la serie dada es absolutamente convergente.

b) Para analizar la convergencia de la serie dada, notemos que

$$\frac{1}{n^p(\ln(2))^2} \leq \frac{1}{n^p},$$

luego por el criterio de comparación se tiene que para $p \in]1, \infty[$ la serie dada es convergente.

$c)$ Para analizar la convergencia de la integral dada, revisaremos la definición de esta,

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^p(\ln(x))^2} = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{e^{(1-p)u}}{u^2} du,$$

y como

$$\lim_{u\to\infty} \frac{e^{(1-p)u}}{u^2} \to \infty,$$

se tiene que la integral dada es divergente para $p \in [0, 1[$.

Asignación de puntaje:

2.a) Asignar 1.5 puntos por concluir la convergencia absoluta de la serie, utilizando correctamente algún criterio (por ejemplo el sugerido). No se adminte puntajes intermedios.

2.b) Asignar 1.5 puntos por concluir la convergencia de la serie usando correctamente algun criterio (por ejemplo el sugerido) No se admite puntajes intermedios.

2.c) Asignar 1 punto por analizar de manera correcta la integral dada y asignar 1 punto por concluir que es divergente para los valores de p dados.