Funciones Trigonométricas

1 Representación polar de un número complejo

La función $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(z) = (\text{Re}\{z\}, \text{Im}\{z\})$ es una biyección entre el conjunto de los números complejos y el plano cartesiano. Entonces todo número complejo se puede escribir en forma binomial $z = a + bi$ o como un par ordenado $z = (a, b)$.

DEFINICIÓN (Forma Polar)
Dada $z = a + bi \in \mathbb{C}$ la forma polar de z es

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)\ ,$$

donde $r = |z|$ es el módulo de z y θ es la medida del ángulo dado por la ecuación

$$\tan\theta = \frac{b}{a}\ .$$

El ángulo θ es llamado el argumento de z.

Si se toma $\tan\theta = b/a$, se obtiene que $\theta = \tan^{-1}(b/a)$, $a \neq 0$. Como la imagen de $\tan^{-1}$ es $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, entonces el valor de θ que se obtiene de la ecuación anterior no representa ningún punto a la izquierda del eje y. Existen varias formas para salir de este embrollo. Una forma es utilizar la fórmula

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } (a,b) \in I \text{ o } IV \text{ cuadrante} \\[2ex] \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } (a,b) \in II \text{ o } III \text{ cuadrante} \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\[2ex] -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$$

Notación: Abreviamos la función $\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$ por $\text{cis}(\theta)$.

EJEMPLO 1 . Escriba en forma polar los número complejos

a) $z_1 = 1 + i$ *b)* $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ *c)* $z_3 = -4\sqrt{3} - 4i$.

PROPOSICIÓN 1 Sean $z_1 = r_1\text{cis}(\theta_1)$, $z_2 = r_2\text{cis}(\theta_2)$. Entonces,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)\ .$$

Por inducción tomando $z_k = r_k\text{cis}(\theta_k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n \text{cis}(\theta_1 + \cdots + \theta_n)$$

En particular

$$z^n = r^n \text{cis}(n\theta) ,$$

para todo entero $n \geqslant 0$. Más aún, si $z \neq 0$, $z \cdot [r^{-1}\text{cis}(-\theta)] = 1$.

Como un caso especial de la fórmula de arriba se tiene la

TEOREMA 1 (Teorema de Moivre)
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta) .$$

EJEMPLO 2 . Calcular z^{10} donde $z = 1 + i$.

Ahora consideraremos el siguiente problema: Para un número complejo dadao $a \neq 0$ y un entero $n \geqslant 2$, ¿podemos hallar un número complejo z que satisfaga $z^n = a$? ¿Cuántos z se pueden hallar?

DEFINICIÓN (Raíz n-ésima)
La raíz n-ésima de un número complejo ω es un número complejo z tal que $z^n = \omega$.

EJEMPLO 3 . Determine las raíces cúbicas de 1. [La idea es que la encuentren mendiante factorización].

TEOREMA 2 Sea $\omega = r\text{cis}(\theta)$. Entonces ω tiene n raíces n-ésimas distintas y están dadas por

$$z_k = \sqrt[n]{r}\text{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) ,$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

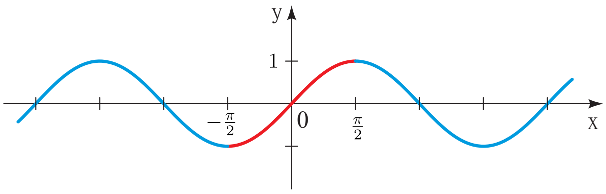
EJEMPLO 4 . Encontrar las soluciones de la ecuación $z^3 + 27 = 0$

EJEMPLO 5 . Resolver la ecuación $x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 16x^2 - 48x - 64 = 0$, sabiendo que -1 y 4 son raíces.

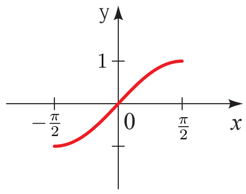
2 Inversas de las funciones trigonométricas

2.1 Función inversa del seno

La función $y = \operatorname{sen}(x)$ no es inyectiva en $\mathbb{R}$. Podemos restringir el dominio a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ para obtener una función inyectiva con recorrido $[-1, 1]$.



$y = \sin(x)$

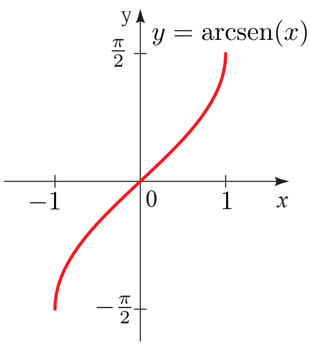


$y = \sin(x),\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

Definimos la función inversa:

$$\operatorname{arc\,sen}(y) = x \Longleftrightarrow (\operatorname{sen}(x) = y) \wedge \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$$

la gráfica de la función inversa es

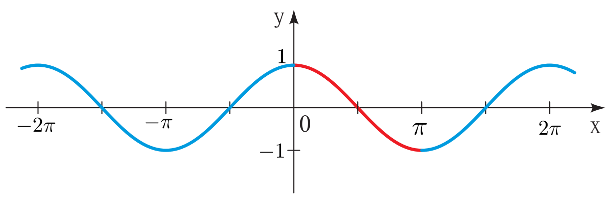


EJEMPLO 6 Encuentre el valor de:

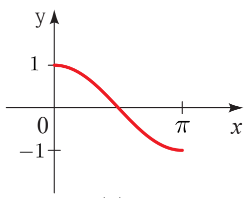
1. $\operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
2. $\operatorname{arc\,sen}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

2.2 Función inversa del coseno

Para obtener la inversa de la función coseno se restringe el dominio al intervalo $[0, \pi]$



$y = \cos(x)$

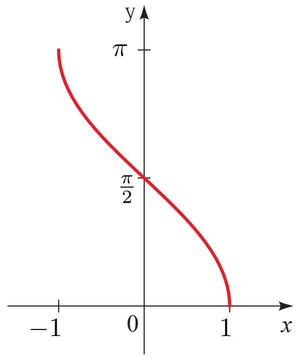


$y = \cos(x),\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

con lo cual se puede definir

$$\arccos(y) = x \iff (\cos(x) = y) \wedge (0 \leqslant x \leqslant \pi)$$

la gráfica de la función inversa es

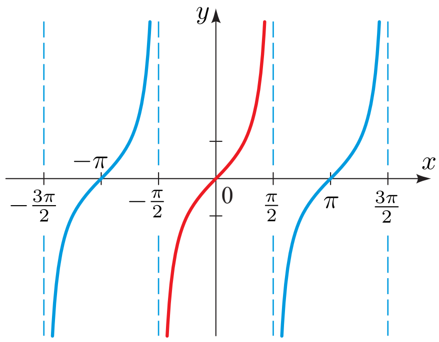


$y = \arccos(x)$

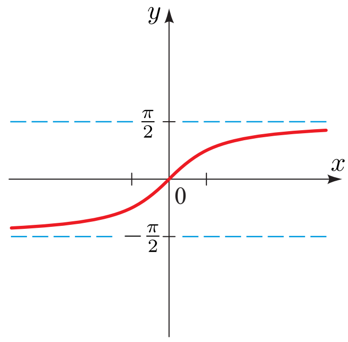
2.3 Función inversa de tangente

Para obtener la inversa, la función tangente se restringe el dominio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ con lo cual se define

$$\arctan(y) = x \iff (\tan(x) = y) \wedge \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$



$y = \tan(x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



$y = \arctan(x)$

EJEMPLO 7 Expresar en términos de x la función $\cos(\arctan(x))$

EJEMPLO 8 Expresar en términos de x la función $\operatorname{sen}(2\arccos(x))$.

EJEMPLO 9 Demostrar que

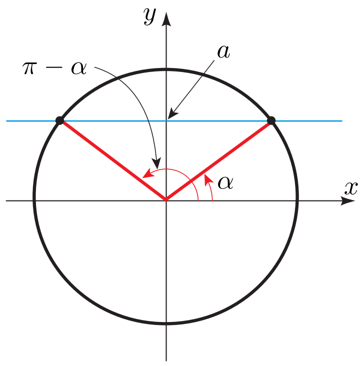
$$\operatorname{arc\,sen}(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

3 Ecuaciones Trigonométricas

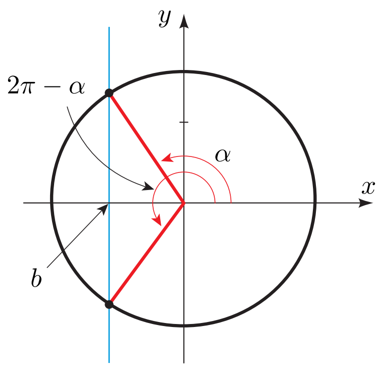
Son ecuaciones donde las variables o incógnitas solo aparecen en los argumentos de las funciones trigonométricas. Debido a la periodicidad de las funciones trigonométricas, si una ecuación tiene una solución x_0, entonces tiene infinitas soluciones $x_0 + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$. Por lo que basta encontrar las soluciones de una ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi)$. Estas soluciones se llaman soluciones básicas.

Usando la circunferencia unitaria se deducen las soluciones de la ecuación $\operatorname{sen}(x) = a$ y $\cos(x) = b$ con $a, b \in [-1, 1]$.

- Conjunto solución de $\operatorname{sen}(x) = a$ es $S = \{k\pi + (-1)^k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$ donde α es una solución básica de $\operatorname{sen}(x) = a$ que está en el primer o cuarto cuadrante.



- Conjunto solución de $\cos(x) = b$ es $S = \{2k\pi \pm \alpha \mid k \in \mathbb{Z}\}$ donde α es una solución básica de $\cos(x) = b$ que está en el primer o segundo cuadrante.



- Conjunto solución de $\tan(x) = c$ es $S = \{k\pi + \gamma \mid k \in \mathbb{Z}\}$ donde γ es una solución básica de $\tan(x) = c$ que está en el primer o cuarto cuadrante.

EJEMPLO 10 Determine las soluciones de las ecuaciones:

- $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(2x)$
- $\operatorname{sen}(x) = \cos(x)$
- $(1 - \tan(x))(\operatorname{sen}(2x) + 1) = (1 + \tan(x))$.

4 Guía de Ejercicios

1. Encuentre todas las soluciones complejas de la ecuación $x^8 - 16 = 0$ y escríbalas en la forma $a + bi$.

2. Encuentre todos los valores de $x \in [0, \pi]$ que satisfacen la ecuación

$$\operatorname{sen}(3x) - \operatorname{sen}(5x) = 0 \,.$$

   R: $\left\{0, \pi, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right\}$.

3. Demuestre que

$$\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8) = \frac{5\pi}{4} \,.$$

4. Resuelva la siguiente ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen}^4(x) + \cos^4(x) = \frac{5}{8} \,.$$

   R: $x = (-1)^k \left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + k\pi$, $x = (-1)^k \left(\pm\frac{\pi}{6}\right) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Encuentre los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{2n} = i\sqrt{3} \,.$$

   R: $n = 3k + (-1)^k$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

6. Resuelva la ecuación $2x^4 + x^2 - x + 1 = 0$, sabiendo que una de sus raíces es la raíz cúbica de la unidad ω. R: $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\frac{1}{2}(1 \pm i)$.

7. Resolver la ecuación $3\tan^2(x) + 5 = \frac{7}{\cos(x)}$.

   R: $\left\{2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \in \mathbb{N}$. Probar que $\frac{1}{1 + z^n} + \frac{1}{1 + (\overline{z})^n}$ es un número real.

9. Resuelva la ecuación $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

   R: 1, cis$(2k\pi/5)$, $k = 1, 2, 3, 4$