Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2017

MAT1610 ⋆ CÁLCULO I
INTERROGACIÓN 1

1. Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\pi/4} \frac{2\,\mathrm{sen}(x)-\sqrt{2}}{4x-\pi}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{5^x-3^x+1}{5^x+3^x+2}.$$

2. Sean f, g funciones tales que

$$f(1)=0 \quad g(1)=2 \quad g(5)=1, \quad f'(1)=3, \quad g'(1)=4, \quad f'(5)=16, \quad g'(5)=6.$$

   Calcule

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1), \qquad (f\circ g^{-1})'(1).$$

3. Determine los puntos en la gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 6$ en los cuales la recta tangente es horizontal. Encuentre la ecuación de dichas rectas tangentes.

4. Considere la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{1+x} & \text{si } x \geq 1, \\[2ex] \dfrac{bx-x^2}{2} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

   Determine $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que $f'(1)$ exista.

5. Demuestre que la ecuación $\ln(x) = 3 - 2x$ tiene por lo menos una solución real.

6. Suponga que la ecuación
$$\sqrt{x}+1 = x\sqrt{y}+\operatorname{sen}(y),$$
define de manera implícita a $y = f(x)$. Calcule y'.

7. El tiempo de vida media del radio es 1590 años. Una muestra de radio tiene una masa de $100mg$. Determine el tiempo necesario para que la muesta en cuestión se reduzca a 30 gramos.
Sugerencia: Si m(t) representa la masa después de t años se tiene que $\dfrac{dm}{dt} = km$.

8. Sea f una función definida en todo $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = L \in \mathbb{R}$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   a) f es derivable en $x = 0$.

   b) $L = 0$.

   c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

UNA SOLUCIÓN

1. Para calcular el primero de los límites, utilizaremos el siguiente cambio de variables $u = x - \pi/4$ por lo tanto el límite se reescribe como:

$$\lim_{u\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}(u+\pi/4)-\sqrt{2}}{4u},$$

desarrollamos,

$$\lim_{u\to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}(u)\cos(\pi/4)+\mathrm{sen}(\pi/4)\cos(u)-\sqrt{2}}{4u} = \lim_{u\to 0} \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(u)+\sqrt{2}\cos(u)-\sqrt{2}}{4u} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Para el segundo de los límites procederemos a amplificar la fracción por $\frac{1}{5^x}$, con lo cual se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{1}{5}\right)^x}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{2}{5}\right)^x} = 1.$$

Asignación de puntaje:
Primer límite

- Por reconocer y utilizar el cambio de variable agregar 1 punto.
- Por realizar correcto desarrollo algebraico agregar 1 punto.
- Por obtener el valor correcto 1 punto.

Segundo límite.

- Por realizar la amplificación respectiva agregar 1.5 puntos.
- Por obtener el valor correcto 1.5 puntos.

2. Para calcular las derivadas pedidas utilizamos las reglas de derivación con lo cual,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(1) = \frac{f'(1)\cdot g(1)-f(1)\cdot g'(1)}{(g(1))^2} = \frac{3}{2}.$$

$$(f\circ g^{-1})'(1) = f'(g^{-1}(1))\cdot(g^{-1}(1))' = f'(5)\cdot\frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = 16\cdot\frac{1}{g'(5)} = \frac{8}{3}.$$

Asignación de puntaje:

- Por reconocer la regla de derivacion para el cuociente de funciones agregar 1.5 puntos.
- Por obtener el valor correcto 1.5 puntos (en la primera derivada).
- Por reconocer la regla de derivación para la composición de funciones agregar 1 punto.
- Por reconocer la derivada de la función inversa agregar 1 punto.
- Por obtener el valor correcto en la segunda derivada 1 punto.

3. Para encontrar los puntos pedidos, debemos determinar los puntos en los cuales la derivada es igual a cero. En nuestro caso
$$f'(x) = 6x^2 - 18x,$$
y por lo tanto $f'(x) = 0$ para $x = 0, \quad x = 3$.
Por otro lado en esos puntos las ecuaciones de las rectas tangentes son de la forma
$$y = f(0); y = f(3)$$
de donde
$$y = 6, \qquad y = -21.$$
Asignación de puntaje:
   - Por calcular la derivada de la función agregar 2 puntos.
   - Por determinar de manera correcta los puntos pedidos agregar 2 puntos.
   - Por calcular de manera correcta las ecuaciones de las rectas tangentes agregar 2 puntos.

4. Para encontrar los valores de a, b pedidos, comenzaremos verificando la condicion necesaria que la función sea continua en $x = 1$. Está condición se reduce en nuestro caso a:
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{bx - x^2}{2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x - a}{1 + x},$$
de donde
$$b + a = 2.$$
Por otro lado necesitamos verificar que
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h},$$
exista, por lo tanto, se debe tener que:
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h},$$
Utilizando la relación obtenida antes, $b = 2 - a$, la igualdad por calcular se reduce en:
$$-6a = 2,$$
se concluye que
$$a = -\frac{1}{3}, \qquad b = \frac{7}{3}$$
son los valores para los cuales existe $f'(1)$.

Asignación de puntaje:
   - Por reconocer la condicion necesaria de la continuidad en $x = 1$, agregar 1.5 puntos.

- Por calcular de manera correcta la condicion $b + a = 2$, agregar 1.5 puntos.
- Por reconocer la condicion para la derivada por definicón, agregar 1.5 puntos.
- Por calcular de manera correcta los valores de a,b, agregar 1.5 puntos.

5. Para probar que la ecuación pedida tiene al menos una solución real considerarems la siguiente función continua
$$h(x) = \ln(x) - 3 + 2x.$$
Notamos que
$$h(e) = 1 - 3 + 2e > 0, \qquad h(1) = -1 < 0,$$
luego el Teorema del Valor Intermedio nos dice que existe un punto $x_0 \in (1, e)$ tal que $h(x_0) = 0$. Por lo tanto tal x_0 es una solución de la ecuación dada.
Asignación de puntaje:

   - Por utilizar una función continua para realizar el problema, agregar 1,5 puntos.
   - Por determinar dos puntos donde existan signos distintos, agregar 2,5 puntos.
   - Por concluir de manera correcta, agregar 2 puntos.

6. De los datos del problema se tiene que y es una función de la variable x por lo tanto, en función de la derivada de una función implicita, al derivar se tiene que:
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{y} + \frac{xy'}{2\sqrt{y}} + \cos(y)y',$$
despejando,
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{y} = y'\left(\frac{x}{2\sqrt{y}} + \cos(y)\right).$$
$$y' = \frac{(1 - 2\sqrt{xy})2\sqrt{y}}{2\sqrt{x}(x - 2\sqrt{y}\cos(y))}.$$

   Asignación de puntaje:

   - Por derivar la ecuación de manera correcta, agregar 3 puntos. Descontar 0.5 puntos por cada error de calculo en la derivada.
   - Por calcular de manera correcta la deriva pedida, agregar 3 puntos.

7. De los datos se tiene que $m(t) = Ce^{kt}$ para constantes C, k. Como $m(0) = 100$ es posible calcular $c = 100$. Por otro lado como

$$m(1590) = \frac{1}{2} \cdot 100$$

se obtiene que

$$k = -\frac{\ln(2)}{1590}.$$

Con esto debemos calcular el tiempo t para el cual $m(t) = 30$, es decir

$$30 = 100e^{kt},$$

de donde, si resolvemos,

$$t = -1590\frac{\ln(0.3)}{2}.$$

Asignación de puntaje:

- Por reconocer la función exponencial, agregar 1.5 puntos.
- Por calcular las constantes involucradas,agregar 2 puntos.
- Por calcular el valor pedido, 2.5 puntos.

8. *a*) Esta afirmación es verdadera, ya que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = L.$$

b) Esta afirmación es falsa. Por ejemplo la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ satisface las condiciones del problema pero en este caso $L = 1$.

c) Esta afirmación es verdadera ya que, si

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = L$$

entonces

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} - L = 0$$

o de manera equivalente

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - Lx}{x} = 0,$$

de donde es posible deducir que

$$\lim_{x \to 0} f(x) - Lx = 0$$

de donde a su vez se deduce lo pedido.

Asignación de puntaje:

- Por justificar de manera correcta cada una de las afirmación, agregar 2 puntos.