PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
SEGUNDO SEMESTRE DE 2014

**MAT1620 ⋆ Cálculo 2**

# Interrogación N° 3

1. (a) Calcule la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!}$$

(b) Demostrar que

$$\left| \int_0^1 \cos(x^2)\, dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!(4k+1)} \right| \leq \frac{1}{(2n+2)!(4n+5)}$$

**Solución.**

(a) Sabemos que

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

De este modo, evaluando en $x = \pi/6$ (**1 pto**) tendremos

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/6) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!} \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

(b) De la serie del coseno, centrada en $x = 0$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(x^2)\, dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n)!}\, dx \qquad (\mathbf{1\ pto}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 x^{4n}\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!} \qquad (\mathbf{1\ pto}) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \cos(x^2)\, dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(4k+1)(2k)!} \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+1)(2k)!} \right| \\ &\leq \frac{1}{(2n+2)!(4n+5)} \qquad (\mathbf{1\ pto}) \end{aligned}$$

donde la última desigualdad sigue de la cota para el resto de la serie alternante.

2. (a) Determine la ecuación del plano que pasa por los puntos $A = (1, 3, 2)$, $B = (3, -1, 6)$ y $C = (5, 2, 0)$.

   (b) Determine las ecuaciones de los planos que son paralelos al plano $x + 2y - 2z = 1$ y están a dos unidades de él.

**Solución.**

(a) Tomando direcciones del plano $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{e} = \overrightarrow{AC}$ tendremos que la normal del plano es

$$\vec{n} = \vec{d} \times \vec{e} = (2, -4, 4) \times (4, -1, -2) = (12, 20, 14)$$

Por lo tanto, el plano está dado por

$$((x, y, z) - (1, 3, 2)) \cdot (12, 20, 14) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 6x + 10y + 7z - 50 = 0$$

**Evaluación:** Asignar (**1 pto**) por los vectores directores, (**1 pto**) por el vector normal al plano, (**1 pto**) por la ecuación del plano.

(b) Si los planos a determinar son paralelos a $x + 2y - 2z = 1$, entonces su ecuación es:

$$x + 2y - 2z + d = 0 \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

con $d$ un número a determinar. Como la distancia de estos planos a $x + 2y - 2z = 1$ es 2, entonces la distancia del punto $(1, 0, 0)$ (punto en el plano $x + 2y - 2z = 1$) a los planos $x + 2y - 2z + d = 0$ es 2, vale decir

$$\frac{|1 + 2 \cdot (0) - 2 \cdot 0 + d|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad |d + 1| = 6 \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

Por lo tanto $d = 5$, $-7$, y los planos tienen ecuación

$$x + 2y - 2z + 5 = 0, \quad x + 2y - 2z - 7 = 0 \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

3. (a) ¿En qué punto la recta que pasa por $(1, 0, 1)$ y $(4, -2, 2)$ corta al plano $x + y + z = 6$?

   (b) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ que es paralela al plano $x + y + z = 2$ y perpendicular a la recta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

**Solución.**

(a) La dirección $\vec{d}$ de la recta que buscamos es perpendicular a la normal del plano $x + y + z = 2$ y a la dirección de la recta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$. De este modo,

$$\begin{aligned} d &= (1, 1, 1) \times (1, -1, 2) \\ &= (3, -1, -2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta es

$$(x, y, z) = (0, 1, 2) + t(3, -1, -2), \qquad t \in \mathbb{R}$$

**Evaluación:** Asignar (**1 pto**) por identificar los vectores que deben usarse para el producto cruz (que determinar la dirección de la recta), (**1 pto**) por la dirección de la recta, (**1 pto**) por la ecuación paramétrica de la recta.

(b) La recta tiene por ecuación

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(3, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

Luego, para determinar el punto de intersección entre la recta y el plano se evalúa la ecuación de la recta en el plano, vale decir

$$(1 + 3t) + (-2t) + (1 + t) = 6 \qquad \Leftrightarrow \qquad t = 2$$

Por lo tanto, el punto de intersección es $P = (7, -4, 3)$.

**Evaluación:** Asignar, (**1 pto**) por evaluar la recta en el plano. (**1 pto**) por determinar el parametro $t = 2$, (**1 pto**) por determinar el punto de intersección.

4. Considere la función $f(x) = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2$, con $x \neq 1$.

   (a) Encuentre una representación en serie de potencias, en torno a $x = 0$, para la función $f$ determinando explícitamente su intervalo de convergencia.

   (b) Deduzca (justificando adecuadamente) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = 8.$$

**Solución.**

(a) Sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \qquad |x| < 1 \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

Derivando esta última expresión y multiplicando por $x^2$ tendremos

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1} \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

El radio de convergencia de esta serie es

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}} = 1$$

pero en $x = \pm 1$ la serie no converge. Por lo tanto, $(-1, 1)$ es el intervalo de convergencia de la serie. (**1 pto**)

(b) De la parte anterior tenemos que

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n+1}$$

Derivando esta última expresión tendremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} \qquad (\mathbf{2\ pto})$$

que, al evaluar en $x = 1/2$, se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = 8 \qquad (\mathbf{1\ pto})$$

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular sobre la mesa