Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
19 de Octubre de 2023

MAT 1107 Introducccción al Cálculo - Pauta Interrogación 2

Tiempo: 2:00 horas

1. Sean $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ el conjunto de los números naturales y $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ el conjunto de los números enteros. Resuelva los siguientes problemas:

   a) Demuestre que la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n^2$ es inyectiva. ¿Es sobreyectiva?

   Solución. La función es inyectiva. En efecto, si $f(n) = f(m)$ entonces $n^2 = m^2$. Como $n, m > 0$ tenemos que $n = \sqrt{n^2} = \sqrt{m^2} = m$. La función no es sobreyectiva, ya que $y = 3$ no es el cuadrdo de ninún número entero.

   b) Construya una función biyectiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

   Solución. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par.} \\ -\frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

   La función f es inyectiva. En efecto, si n es par y m es impar entonces sus imágenes tiene distinto signo y por lo tanto son distintas. Sean n, m números pares. Si $f(n) = f(m)$ entonces $n/2 = m/2$ y por lo tanto $n = m$. Supongamos, finalmente, que n, m son impares. Si $f(n) = f(m)$ entonces $-(n-1)/2 = -(m-1)/2$ y por lo tanto $n = m$. Por lo tanto, f es inyectiva. Probaremos que es sobreyectiva. Sea $n \in \mathbb{Z}$ un entero positivo, entonces $f(2n) = n$. Notemos que $f(1) = 0$. Sea $n \in \mathbb{Z}$ un entero negativo, entonces $f(2n+1) = n$. Por lo tanto f es sobreyectiva y en consecuencia, biyectiva.

2. Resuelva los siguientes problemas:

   a) Determine el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+2}{x-1}}$.

   Solución. Notemos que para que la función esté bien definida es suficiente que $x - 1 > 0$. Luego $\text{dom}(f) = (1, \infty)$.

   b) Determine el recorrido de la función $f(x) = 3x^2 + 6x + 1$.

   Solución. La funcón f es una parábola convexa. Por lo tanto, si (x_v, y_v) es el vértice entonces el recorrido es $[y_v, \infty)$. Notemos que $x_v = -b/(2a) = -6/6 = -1$, luego $y_v = f(-1) = -2$. Así, $\text{ref}(f) = [-2, \infty)$.

3. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$ y $g : [-1, 1] \to R$ definida por $\sqrt{1 - x^2}$. Determine el dominio una fórumla para $g \circ f$.

Solución. Notemos que,

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}(g\circ f) &= \{x\in \mathrm{dom} f : f(x)\in \mathrm{dom} g\} = \{x\in\mathbb{R} : 3x+2\in[-1,1]\}\\ &\{x\in\mathbb{R} : -1\leq 3x+2\leq 1\} = \{x\in\mathbb{R} : -1\leq x\leq \frac{-1}{3}\} = \left[-1,-\frac{1}{3}\right].\end{aligned}$$

Además,

$$(g\circ f)(x) = \sqrt{1-(3x+2)^2} = \sqrt{-3-13x-9x^2}.$$

4. Calcule los largos de los lados de un rectángulo de perímetro 80mts y área máxima.

   Solución. Sean x e y los largos de los lados del rectángulo. Su perímetro viene dado por:

$$2x+2y=80$$

   Por lo tanto $y=40-x$. Por otra parte su área es $A=xy$. Es decir, $A=x(40-x)=40x-x^2$. Así, el área es como funcón de x es una parábola que posee su máximo en el vértice. Para calcular el vértice, utilizamos la fórmula $x'=-b/2a=-40/-2=20$. Luego $y'=40-20=20$. Por lo tanto las dimensiones buscadas son $x=20$ e $y=20$, es decir el recátngulo de perímetro 80mts que maximiza área es el cuadrado de lado 20mts.