Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre de 2015

MAT1620 ⋆ Cálculo II

Interrogación 2

1. Considere la sucesión $\{a_n\}$ definida por

$$a_0 = \sqrt{2}; \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

   a) Demuestre que $\{a_n\}$ es monótona (2 ptos)

   b) Demuestre que $\{a_n\}$ es convergente (2 ptos)

   c) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$ (2 ptos)

Una solución

a) Dado que la función raíz es creciente y $2 \geq 0$, tenemos que

$$a_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}} \geq \sqrt{2} = a_0.$$

Si suponemos que para algún $k \in \mathbb{N}$ $a_k \geq a_{k-1}$, entonces

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} \geq \sqrt{2 + a_{k-1}} = a_k,$$

y el principio de inducción nos garantiza que $\{a_n\}$ es creciente.

b) Veamos que la sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente por 2.
Primero, es claro que $a_0 = \sqrt{2} \leq 2$. Ahora si suponemos que $a_k \leq 2$ para algún $k \in \mathbb{N}$, entonces (como $a_k \geq \sqrt{2} \geq 0$, por ser creciente)

$$a_k \leq 2 \Rightarrow 2 + a_k \leq 4 \Rightarrow \sqrt{2 + a_k} \leq 2 \Rightarrow a_{k+1} \leq 2.$$

Nuevamente el principio de inducción nos asegura el resultado esperado.
Como la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada podemos decir que es convergente.

c) Para calcular el límite pedido escribimos $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y usamos

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} \Rightarrow a = \sqrt{2 + a},$$

obteniendo la ecuación $a^2 - a - 2 = 0$, que tiene por soluciones -1 y 2. Como $a_n \geq 0$, se ve que $a = 2$.

2. Decida y demuestre la convergencia o divergencia de las siguientes series.

   a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n \log n}$ (2 ptos)

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}(\mathrm{e}^{\mathrm{n}})}{n^{3/2}}$ (2 ptos)

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{sen}(\frac{1}{n})$ (2 ptos)

Una solución

a) La serie es alternante: $\{\frac{1}{n \log n}\}$ es una sucesión decreciente ya que si $f(x) = \frac{1}{x \log x}$, su derivada $f'(x) = \frac{-(\log x + 1)}{(x \log x)^2}$ es menor que cero para $x \geq 1$. Además $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $n \geq 2$.

b) Dado que la función $|\operatorname{sen}|$ es acotada por 1, usamos comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\operatorname{sen}(\mathrm{e}^{\mathrm{n}})}{n^{3/2}}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}},$$

y como $3/2 > 1$ se obtiene la convergencia absoluta de la serie original.

c) Comparamos $\operatorname{sen}(\frac{1}{n})$ con $\frac{1}{n}$ obteniendo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{m\to 0}\frac{\operatorname{sen}(m)}{m} = 1.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge, concluimos que $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}(\frac{1}{n})$ diverge.

3. *a*) Demuetre que la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{2k(2k+1)(2k+2)}$ es convergente. (2 ptos)

b) Calcule un valor aproximado de

$$3+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{2k(2k+1)(2k+2)}$$

con un error menor a 4^{-3}. Demuestre que el valor encontrado cumple con lo requerido. (4 ptos)

Una solución

a) Es fácil comprobar que para todo $k \geq 1$

$$\frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)} \geq \frac{1}{2(k+1)(2k+3)(2k+4)},$$

es decir, la suceción $\left\{\frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)}\right\}$ es decreciente. También

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2k(2k+1)(2k+2)} = 0$$

La serie es por tanto alternante, y entonces converge.

b) Calculamos los dos primeros términos de la serie obteniendo

$$3+\frac{1}{6}-\frac{1}{30} = 3{,}1\overline{3}$$

Usando la estimación para series alternantes

$$\left|3+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{2k(2k+1)(2k+2)} - 3+\sum_{k=1}^{2}\frac{4(-1)^{k+1}}{2k(2k+1)(2k+2)}\right| < \frac{4}{(6)(7)(8)} = \frac{1}{84} < \frac{1}{4^3}$$

4. Encuentre todos los $a \in \mathbb{R}$ tales que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n)!}\,a^n$$

converge.

Una solución Sea $a \in \mathbb{R}$. Usemos el criterio de D'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(n+1)^{n+1}a^{n+1}}{(2n+2)!}\right|}{\left|\frac{n^n a^n}{(2n)!}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}\frac{(n+1)|a|}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{(n+1)|a|}{(2n+1)(2n+2)} = 0 < 1,$$

donde hemos usado que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \mathrm{e}$.

Con esto, la serie converge absolutamente para todo $a \in \mathbb{R}$.