Nombre: Esteban Leiva

Código: 202021368

Teoría de Análisis Numérico

MATE-2604

Tarea 4

1. (a) Sea $A \in M^{n\times n}$ simétrica definida positiva. Muestre que n vectores no nulos A-conjugados son una base de $\mathbb{R}^n$

Demostración. Sea $\{p^i\}_{i=1}^n$ un conjunto de vectores A-conjugados.

Veamos que son linealmente independientes. Considere una combinación lineal de estos vectores que sea igual a 0

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p^i = 0.$$

entonces

$$A\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p^i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A p^i = 0.$$

Tomando el producto interno con un p^k podemos ver que

$$\langle p^k,\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A p^i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle p^k,\ Ap^i\rangle = \alpha_k \langle p^k,\ Ap^k\rangle = 0.$$

Pero, A es definida positiva entonces

$$\langle p^k,\ Ap^k\rangle > 0,\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

lo cual implica que $\alpha_k = 0$. Esto vale para cualquier $k = 1, ..., n$ tenemos que $\{p^i\}_{i=1}^n$ son linealmente independientes y como $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ tenemos que este conjunto de vectores es una base para $\mathbb{R}^n$. □

(b) Sea $A \in M^{n\times n}$ arbitraria y sea $\{u^1, ..., u^n\}$ un sistema A-ortonormal. Muestre que A debe ser simétrica definida positiva.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \neq 0$ entonces como por el anterior inciso tenemos que el conjunto de vectores A-ortonormales $\{p^i\}_{i=1}^n$ es una base

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p^i.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle x, Ax\rangle &= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p^i, A\sum_{j=1}^{n} \alpha_j p^j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha_i p^i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j p^j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_i p^i, \alpha_j p^j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_i p^i, \alpha_j p^j\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha_i p^i, \alpha_i p^i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^2 \langle p^i, p^i\rangle > 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, A es definida positiva.

Para ver que es simétrica, considere la matriz

$$P = \begin{bmatrix} p^1 & p^2 & \cdots & p^n \end{bmatrix}$$

entonces como los p^i son A-ortonormales

$$P^T A P = I.$$

Luego,

$$(P^T A P)^T = P^T A^T P = (I)^T = I \to P^T A P = P^T A^T P$$

y observando que $P^T P = I$

$$\begin{aligned}
&P^T A P = P^T A^T P \\
\to &P P^T A P P^T = P P^T A^T P P^T \\
\to &A = A^T.
\end{aligned}$$

□

2. Considere la siguiente ecuación diferencial con condiciones de frontera:

$$\begin{cases} y'' = f(x), \quad 0 \le x \le 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Este problema se puede resolver numéricamente resolviendo el problema

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, 2, ..., n \\ y_0 = 0 \\ y_{n+1} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

con $y_i = y(x_i)$, $x_i = ih$ y $h = \frac{1}{n+1}$

(a) Encuentre los valores propios de A y muestre que $\kappa(A) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. El sistema se puede escribir de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} y(x_1) \\ y(x_2) \\ \vdots \\ y(x_n) \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_n) \end{bmatrix}$$

Multiplique todas las filas por -1:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Usando el hint defina $A = 2(I + B)$ donde

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Calculemos el polinomio característico de B

$$\begin{aligned} P(x) &= \det \begin{bmatrix} x & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & x & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2^n} \det \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2^n} T_n(x) \end{aligned}$$

donde $T_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Chebyshev. Recordemos que este tipo de polinomios de

Chebyshev están definidos por la ecuación recursiva

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = 1$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Por lo tanto si λ es un valor propio de B y v su respectivo vector propio

$$Av = 2(I + B)v = 2Iv + 2Bv = 2v + 2\lambda v = (2 + 2\lambda)v.$$

Entonces $(2 + 2\lambda v)$ es una valor propio de A.

Ademas, sabemos que las raices de $T_n(x)$ son $x_k = \cos\left(\frac{\pi(k+1)}{n+1}\right)$ para $k = 0, ..., n - 1$.

Entonces, los valores propios de A son $(2 + 2x_k)$. Ahora, note que para todo k se tiene que

$$\frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi(k+1)}{n+1} \leq \frac{n\pi}{n+1} < \pi$$

luego,

$$\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi(k+1)}{n+1}\right) \leq \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

y llegamos a que el máximo valor propio es $\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ y el mínimo $\cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)$. Pero por la periodicidad del coseno $-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{n+1}\right)$.

Entonces el máximo valor propio de A es

$$2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$$

y el mínimo

$$2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Tomando el limite de $\kappa(A)$ cuando $n \to \infty$ es fácil ver que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)}{2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)} = \infty.$$

□

(b) Comparación de algoritmos

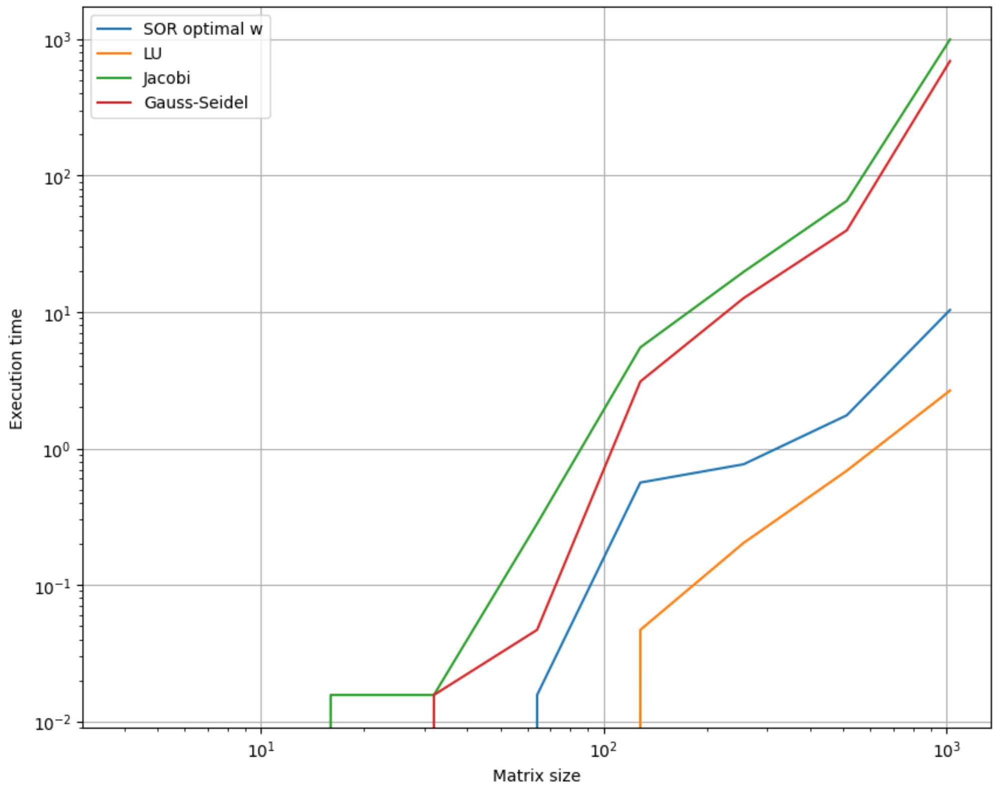

Figure 1: Gráfica loglog.

(c) Escoja el mejor método y resuelva el sistema tomando $f(x) = x^2 + 0.05$. Compare el error relativo de la nueva solución con la cota del numero de condición.

El mejor método es el directo porque es el que tiene una convergencia mas rápida según los resultados experimentales del anterior inciso. Ahora, utilizando la norma L2 y esta perturbación en el sistema lineal, observamos que la cota $k(A)$ crece muy rápido con respecto al calculo del error relativo que se mantiene alrededor de 1. Esto se debe al resultado del inciso (a), por el que sabemos que $\kappa(A)$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito, lo cual implica que en este caso la cota no nos da mucha información sobre los errores generados por perturbaciones.