

Tarea 7

Fecha de entrega: Abril 22 de 2024

1. Encuentre una fórmula de cuadratura de la forma $Af(0) + Bf(2) + Cf(4)$, que sea de grado 2, para aproximar

$$\int_1^3 f(x)dx.$$

Transforme la fórmula para aproximar la integral sobre $[a, b]$ y defina una método compuesto a partir de esta fórmula de cuadratura.

2. Suponga que

$$\int_a^b w(x)q(x)dx = \sum_{i=0}^n c_i q(x_i)$$

para todo polinomio q de grado menor o igual a $2n + 1$. Es decir, la fórmula de cuadratura es de grado $2n + 1$. Muestre que el polinomio $\prod_{i=0}^n (x - x_i)$ es ortogonal a todo polinomio de grado menor o igual a n con respecto al producto interno definido por w y el intervalo $[a, b]$. Muestre además que ninguna fórmula de cuadratura puede tener grado mayor que $2n + 1$ sin importar los valores c_i 's y x_i 's.

3. En cada uno de los casos siguientes, tabule el error en la integración numérica usando la regla del trapecio compuesta, la regla de Simpson compuesta, la regla compuesta del ejercicio 1, cuadratura gaussiana con polinomios de Legendre y cuadratura gaussiana con polinomios de Chebyshev, para $n = 5, 10, 20, 30$.

a) $\int_0^{\frac{5\pi}{4}} e^{-x} \cos(2x)dx.$

b) $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}dx.$

c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$