Nombre: Esteban Leiva

Código: 202021368

Teoría de Análisis Numérico

MATE-2604

Tarea 6

1. Sea $P_n(x)$ el polinomio interpolante de $f(x)$ en los puntos distintos x_i, $i = 0, ..., n$. Si x es un punto diferente a los anteriores muestre que

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, ..., x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Concluya que si $f \in C^n([a,b])$ y $x_i \in [a,b]$ para $i = 0, ..., n$ entonces existe $\zeta \in [a,b]$ tal que

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta).$$

Demostración. Sea $Q_{n+1}(x)$ el polinomio interpolante de grado $n+1$ de $f(x)$ en los puntos $x_0, ..., x_n, x$. Sabemos que $Q_{n+1}(x)$ se obtiene a partir de $P_n(x)$ de la siguiente manera:

$$Q_{n+1}(x) = P_n(x) + f[x_0, ..., x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Notando que $Q_{n+1}(x) = f(x)$ podemos escribir f de la siguiente manera

$$f(x) = P_n(x) + f[x_0, ..., x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

y así

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, ..., x_n, x] \prod_{j=0}^{n} (x - x_j).$$

Para concluir, considere el polinomio interpolante $P_{n-1}(x)$ definido sobre los nodos $x_0, ..., x_{n-1}$. Por el teorema visto en clase, para todo $x_n \in [a,b]$ existe $\zeta \in [a,b]$ tal que

$$f(x_n) - P_{n-1}(x_n) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j)$$

y por el resultado anterior

$$f(x_n) - P_{n-1}(x_n) = f[x_0, ..., x_n] \prod_{j=0}^{n-1} (x - x_j) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (x_n - x_j).$$

De esta manera, concluimos que

$$f[x_0, ..., x_n] = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}.$$

□

2. Muestre que los polinomios de Chebyshev satisfacen para todo $x \in \mathbb{R}$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\Big[\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)^n \Big].$$

Demostración. Vamos a mostrarlo por induccion fuerte.

Casos base:

(a) $n = 0$:

$$\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^0+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^0\right]=\frac{1}{2}\left[1+1\right]=1=T_0\left(x\right).$$

(b) $n = 1$:

$$\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[2x\right]=x=T_1\left(x\right).$$

Paso inductivo: Suponga que vale hasta k y considere $T_{k+1}\left(x\right)$. Por la definición recursiva de los polinomios de Chebyshev sabemos que

$$T_{k+1}\left(x\right)=2xT_k\left(x\right)-T_{k-1}\left(x\right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
T_{k+1}\left(x\right)&=2x\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^k+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^k\right]-\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}\right]\\
&=x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^k+x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^k-\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}-\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}\\
&=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}\left(x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{1}{2}\right)+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}\left(x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)-\frac{1}{2}\right)\\
&=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\right)+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\right)\\
&=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2\\
&=\frac{1}{2}\left[\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{k+1}\right].
\end{aligned}$$

□

3. Suponga que f es Lipschitz continua con constante L. Muestre que $\|f-B_nf\|_\infty \le \frac{L}{2n^{1/2}}$. Para esto use la desigualdad de Cauchy-Schwarz con la expresión

$$\left|\sum_{j=0}^{n}\left(f(x)-f(x_j)\right)q_{n,j}(x)^{1/2}q_{n,j}(x)^{1/2}\right|.$$

Demostración. Primero, utilicemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
|f(x) - B_n f(x)| &= \left| f(x) - \sum_{j=0}^{n} f(x_j) q_{n,j}(x) \right| \\
&= \left| \sum_{j=0}^{n} \left(f(x) - f(x_j)\right) q_{n,j}(x)^{1/2} q_{n,j}(x)^{1/2} \right| \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{n} \left(f(x) - f(x_j)\right)^2 q_{n,j}(x) \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} q_{n,j}(x) \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n} \left(f(x) - f(x_j)\right)^2 q_{n,j}(x) \right)^{1/2} \cdot 1 \\
&\leq \left(\sum_{j=0}^{n} L^2 \left(x - x_j\right)^2 q_{n,j}(x) \right)^{1/2} \\
&= L \left(\sum_{j=0}^{n} \left(x - x_j\right)^2 q_{n,j}(x) \right)^{1/2} \\
&= L \left(\sum_{j=0}^{n} \left(x - \frac{j}{n}\right)^2 q_{n,j}(x) \right)^{1/2} \\
&= L \left(\sum_{j=0}^{n} \left(x^2 - 2x\frac{j}{n} + \left(\frac{j}{n}\right)^2\right) q_{n,j}(x) \right)^{1/2} \\
&= L \left(x^2 - 2x + \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} \right)^{1/2} \\
&= \frac{L}{n^{1/2}} \left(nx^2 - 2nx^2 + (n-1)x^2 + x \right)^{1/2} \\
&= \frac{L}{n^{1/2}} \left(-x^2 + x \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Ahora, saquemos el supremo entre los valores de x

$$
\begin{aligned}
\sup_{x \in [0,1]} \frac{L}{n^{1/2}} \left(-x^2 + x \right)^{1/2} &= \frac{L}{n^{1/2}} \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \right)^{1/2} \\
&= \frac{L}{n^{1/2}} \left(\frac{1}{4} \right)^{1/2} \\
&= \frac{L}{2n^{1/2}}.
\end{aligned}
$$

Entonces llegamos a que

$$
\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{L}{2n^{1/2}}.
$$

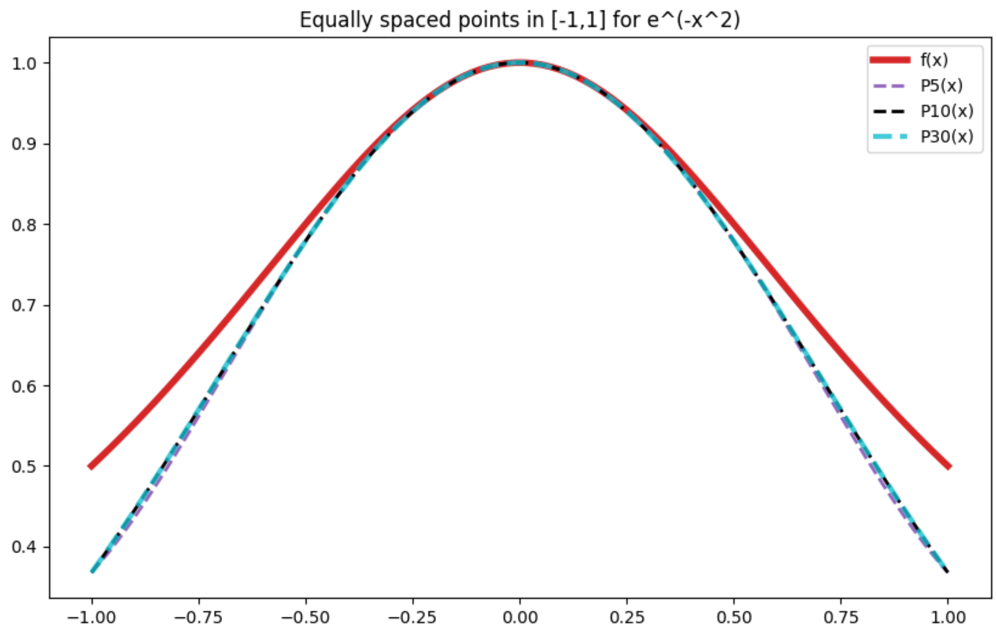
□

4. Considere la función

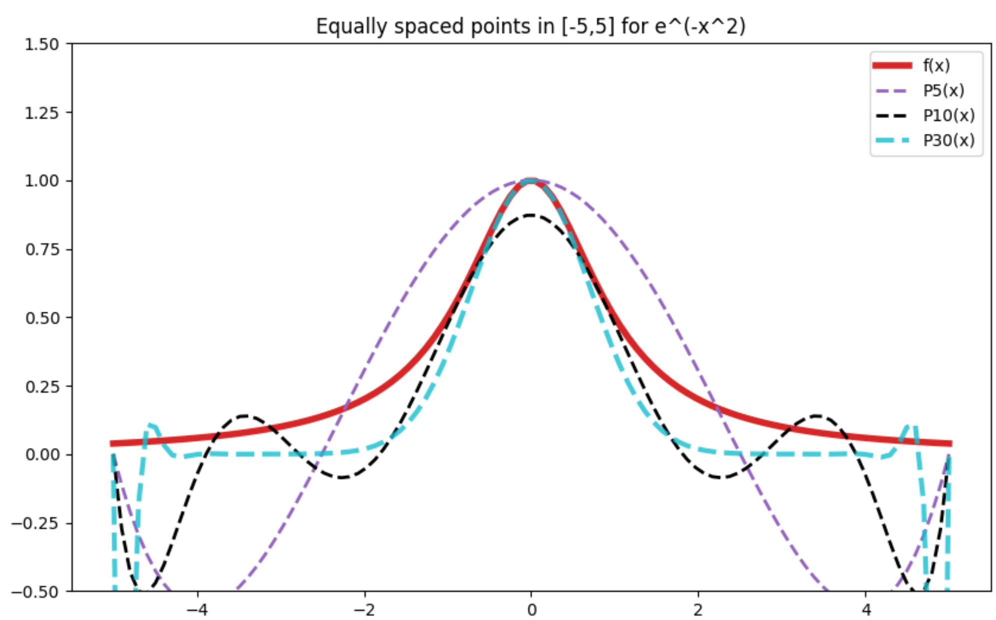
$$
f(x) = e^{-x^2}
$$

En cada uno de los casos siguientes, en la misma gráfica grafique f y $P_n(x)$, con $n = 5, 10, 30$. Implemente los algoritmos de Horner y diferencias divididas para hallar y evaluar $P_n(x)$.

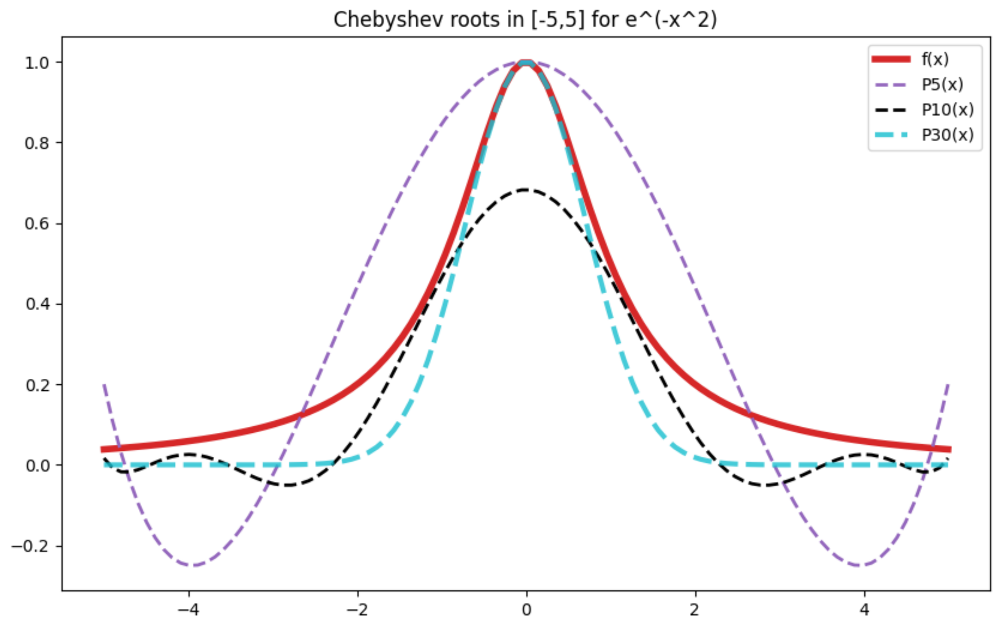
(a) Puntos igualmente espaciados en $[-1, 1]$.



(b) Puntos igualmente espaciados en $[-5,5]$.



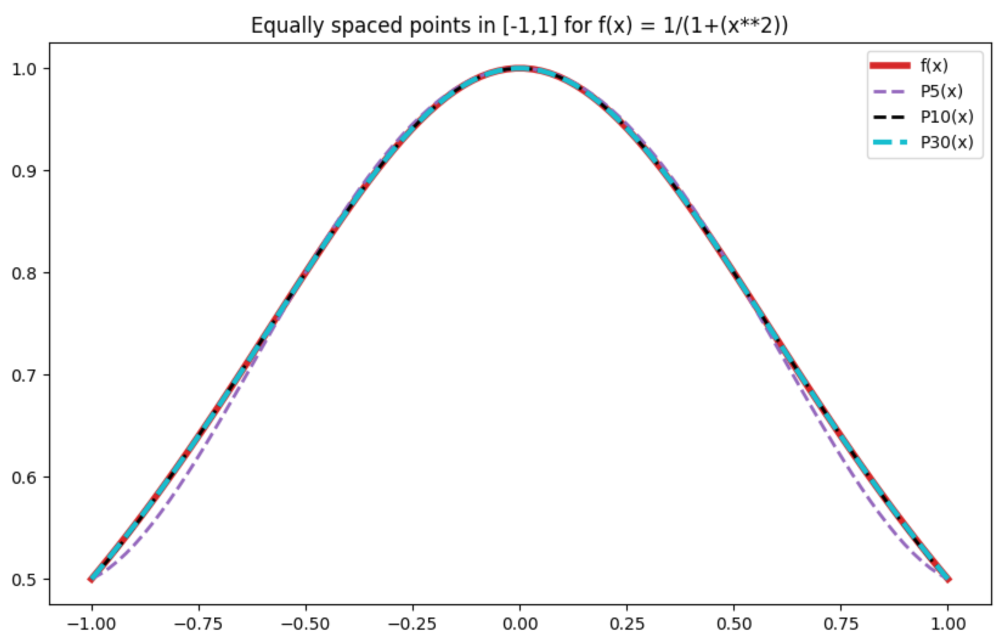
(c) Puntos en las raíces del polinomio de Chebyshev ajustadas al intervalo $[-5,5]$.



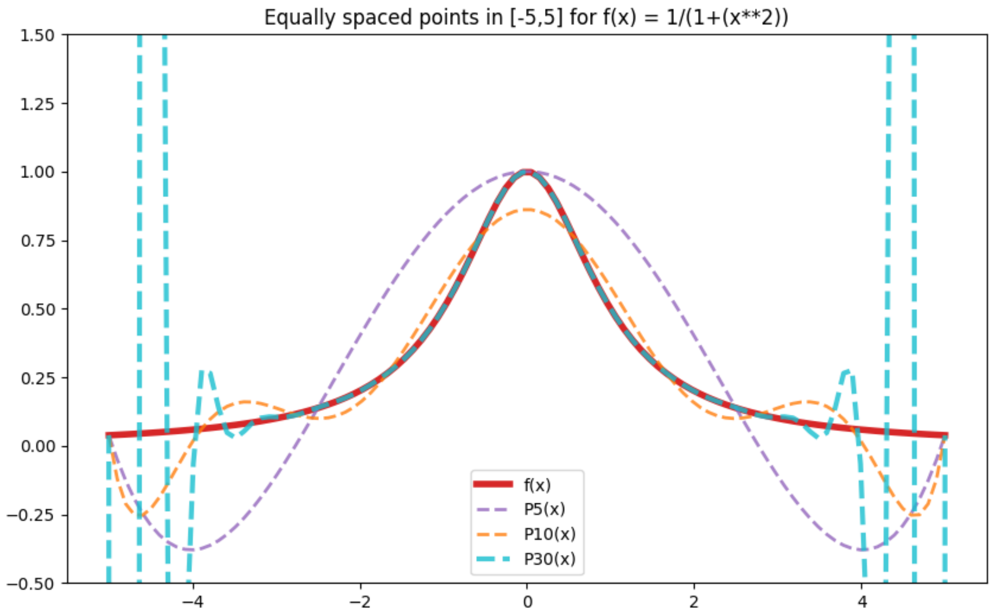
Repita el proceso anterior con la función de Runge dada por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

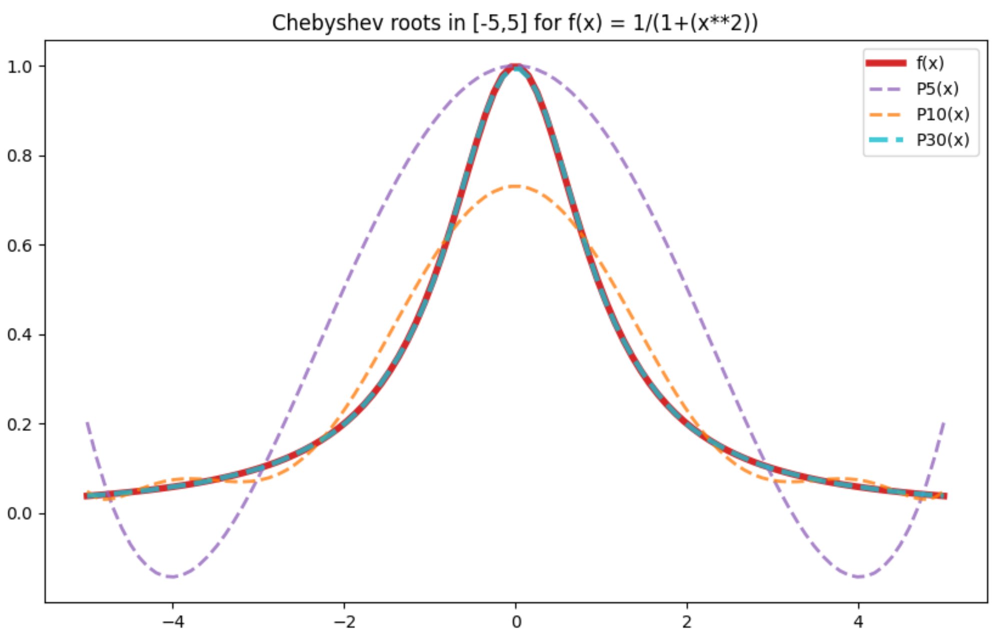
(a) Puntos igualmente espaciados en $[-1,1]$.



(b) Puntos igualmente espaciados en $[-5, 5]$.



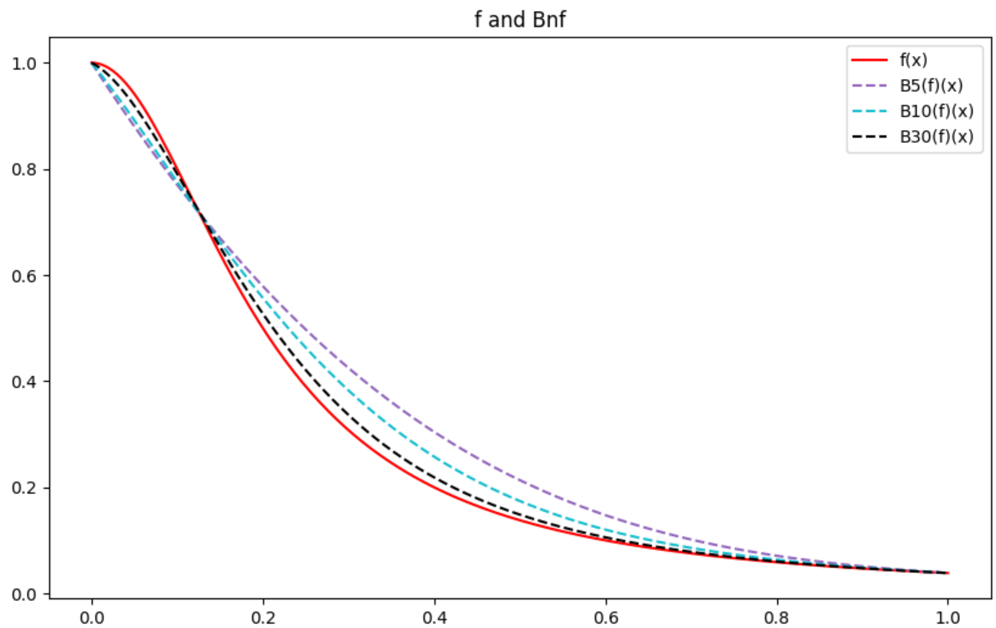
(c) Puntos en las raíces del polinomio de Chebyshev ajustadas al intervalo $[-5, 5]$.

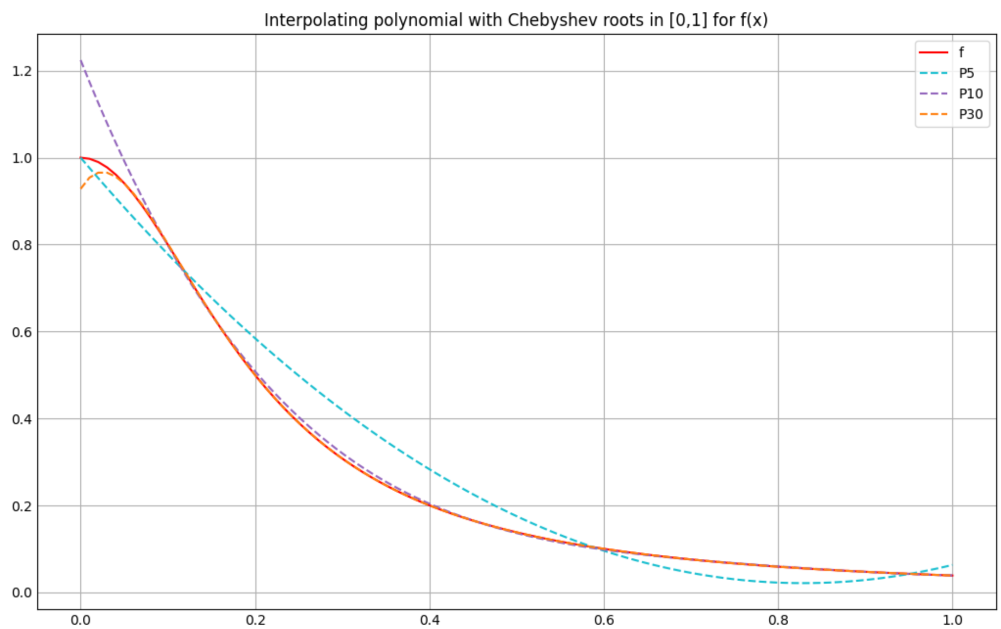


5. Considere la función de Runge

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

Calcule la aproximación dada por los polinomios de Bernstein en el intervalo $[0, 1]$ y grafique f y $B_n(f)(x)$ con $n = 5, 10, 30$. Compare con el polinomio interpolante dado por los puntos de Chebyshev.





Esta función es conocida como la función de Runge por el fenómeno de Runge. Este fenómeno es un problema de oscilación en los extremos del intervalo en el cual se interpola. En este caso, si hacemos la comparación entre los polinomios de Bernstein y los polinomios interpolantes con las raíces de Chebyshev encontramos que a pesar que los polinomios interpolantes aproximan mejor la función al interior del intervalo, es más volátil que los de Bernstein en los extremos el intervalo.