Nombre: Esteban Leiva

Código: 202021368

Teoría de Análisis Numérico

MATE-2604

Tarea 4

1. Sea $\langle\ ,\ \rangle$ un producto interno en $\mathbb{R}^n$ y $\|\cdot\|$ su norma inducida. Sea S un subespacio y $\bar{x}$ arbitrario. Muestre que $x^* = \arg\min_{x\in S} \|x-\bar{x}\|$ si y solo si $x^*-\bar{x}$ es ortogonal, con respecto al producto interno, a S y $x^* \in S$.

   Demostración. Por resultados de álgebra lineal, sabemos que podemos escribir a $\bar{x}$ como la suma de un vector $u \in S$ y $z \in S^\perp$ donde $S^\perp$ es el complemento ortogonal de S. Note que minimizar $\|x-\bar{x}\|$ es equivalente a minimizar $\|x-\bar{x}\|^2$. Entonces, $\bar{x} = u+z$ y calculamos el producto interno de $\bar{x}$ y un $x \in S$ cualquiera

$$\begin{aligned}
\|x-\bar{x}\|^2 = \langle \bar{x}-x, \bar{x}-x\rangle &= \langle u+z-x, u+z-x\rangle \\
&= \langle (u-x)+z, (u-x)+z\rangle \\
&= \langle (u-x)+z, (u-x)+z\rangle \\
&= \langle (u-x), (u-x)\rangle + 2\langle (u-x), z\rangle + \langle z, z\rangle \\
&= \langle (u-x), (u-x)\rangle + \langle z, z\rangle \\
&\geq \langle z, z\rangle = \langle \bar{x}-u, \bar{x}-u\rangle
\end{aligned}$$

   Si tomamos $\|\bar{x}-x\| = \|\bar{x}-u\|$ entonces la desigualdad de arriba se convierte en una igualdad y llegamos a que el mínimo se obtiene cuando $x = u$ y claramente $u-\bar{x} = -z$ es ortogonal a S por construcción. La otra dirección vale porque si $x^*-\bar{x}$ es ortogonal a S y $x^* \in S$ tenemos que $x^*-u-z = -z$ entonces $x^* = u$ y por el argumento anterior $u = \arg\min_{x\in S} \|x-\bar{x}\|$. □

2. Dado n, genere una matriz de $n \times n$ con entradas distribuidas uniforme $(-1,1)$. Convierta la matriz a una con diagonal estrictamente dominante modificando la diagonal. Llame a esta matriz A. Resuelva el sistema $Ax = b$ con b el vector de unos para $n = 2^k$ con $k = 2, \ldots, 15$ usando los siguientes métodos, $x_0 = 0$ y haga una gráfica loglog del tiempo requerido contra el tamaño de la matriz A:

   (a) Método del gradiente.

   (b) Método del gradiente conjugado.

   (c) Método del gradiente conjugado precondicionado con la diagonal.

   (d) Método del gradiente conjugado con el precondicionador de SOR con $w = 1$.

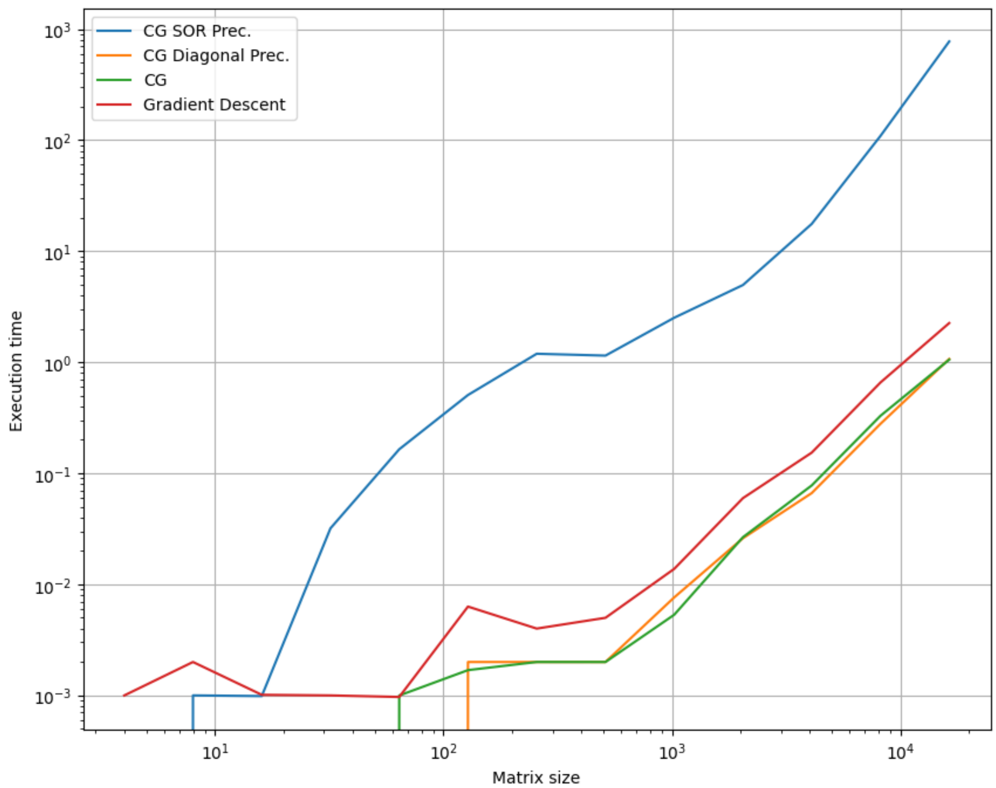

Figure 1: Gráfica loglog.

Los mejores métodos fueron el gradiente conjugado clásico y el gradiente conjugado precondicionado diagonalmente. Si comparamos estos métodos con los de la tarea 3, encontramos que son mas rápidos cuando el tamaño de la matriz crece (a excepción del precondicionador de SOR).

3. Escriba una fórmula que involucre a, b y ϵ para calcular el numero de iteraciones necesarias para garantizar que el método de la bisección tenga un error menor a ϵ.

Demostración. Considere los intervalos obtenidos por el método de la bisección

$$[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots$$

Claramente, $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_0$ y $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq a_0$. Además, como en cada paso dividimos el intervalo en dos: $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$. Ambas series convergen porque son no crecientes (no decrecientes) y acotadas por debajo (arriba). Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) = 0.$$

De esta manera, defina $r = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$ y al notar que $0 \geq f(a_n)f(b_n) \to_{n\to\infty} 0 \geq f(r)f(r)$ llegamos a que $0 = f(r)$.

Si nos encontramos en la iteración n, un buen estimado de la raíz es el punto medio $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Entonces el error

$$|r - c_n| \leq \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0).$$

Luego, si queremos determinar el numero de pasos n tal que el error $|r - c_n| \leq \epsilon$ es suficiente considerar n que cumpla

$$\frac{1}{2^{n+1}}(b_0 - a_0) \leq \epsilon \rightarrow \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} \leq 2^{n+1} \rightarrow \log_2\left(\frac{b_0 - a_0}{\epsilon}\right) - 1 \leq n.$$

□