Tarea 5

Fecha de entrega: Marzo 3 de 2024

1. Sea $\langle \, , \rangle$ un producto interno en $\mathbb{R}^n$ y $\| \cdot \|$ su norma inducida. Sea S un subespacio y $\bar{x}$ arbitrario. Muestre que $x^* = \arg \min_{x \in S} \|x - \bar{x}\|$ si y solo si $x^* - \bar{x}$ es ortogonal, con respecto al producto interno, a S y $x^* \in S$.

2. Dado n, genere una matriz de $n \times n$ con entradas distribuidas uniforme (-1,1). Convierta la matriz a una con diagonal estríctamente dominante modificando la diagonal. Llame a esta matriz A. Resuelva el sistema $Ax = b$ con b el vector de unos para $n = 2^k$ con $k = 2, \ldots, 15$ usando los siguientes métodos y haga una gráfica loglog del tiempo requerido contra el tamaño de la matriz A:

   a) Método del gradiente: Pare cuando $\|r^k\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.

   b) Método del gradiente conjugado: Pare cuando $\|r^k\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.

   c) Método del gradiente conjugado precondicionado con la diagonal: Pare cuando $\|r^k\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.

   d) Método del gradiente conjugado precondicionado con el precondicionador SOR con $w = 1$: Pare cuando $\|y^k - y^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.

   Nota: Convierta el sistema en uno con matriz definida positiva. Compare con los métodos de la tarea 3.

3. Escriba una fórmula que involucre a, b y ε para calcular el número de iteraciones necesarias para garantizar que el método de la bisección tenga un error menor a ε.

Mauricio Junca