Nombre: Esteban Leiva

Código: 202021368

Teoría de Análisis Numérico

MATE-2604

Proyecto Final

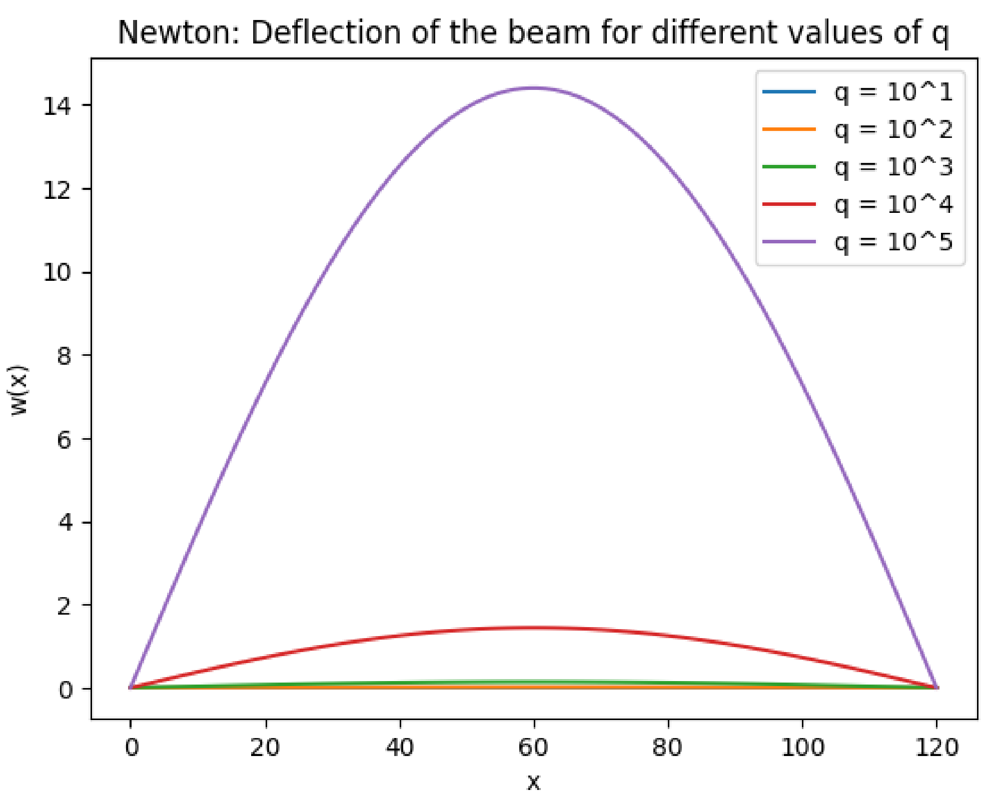
Todo el detalle lo puede encontrar en el Jupyter Notebook, en el cual podrá encontrar cada punto por separado y sus respectivas gráficas.

1. Considere una barra anclada en los extremos con carga uniforme.

   (a) El problema de frontera lineal que modela esta situación es

$$w'' = \frac{S}{EI}w + \frac{qx}{2EI}(x-l), 0 < x < l,$$

   con $w(0) = w(l) = 0$. Use la longitud $l = 120$, el modulo de elasticidad $E = 3 \times 10^7$, la carga en los extremos $S = 1000$ y el momento de inercia central $I = 625$. Use el método de diferencias finitas con 100 intervalos y grafique en una sola gráfica la deformación de la barra para valores de carga $q = 10^k$ con $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Especifique con que método resuelve el sistema lineal.



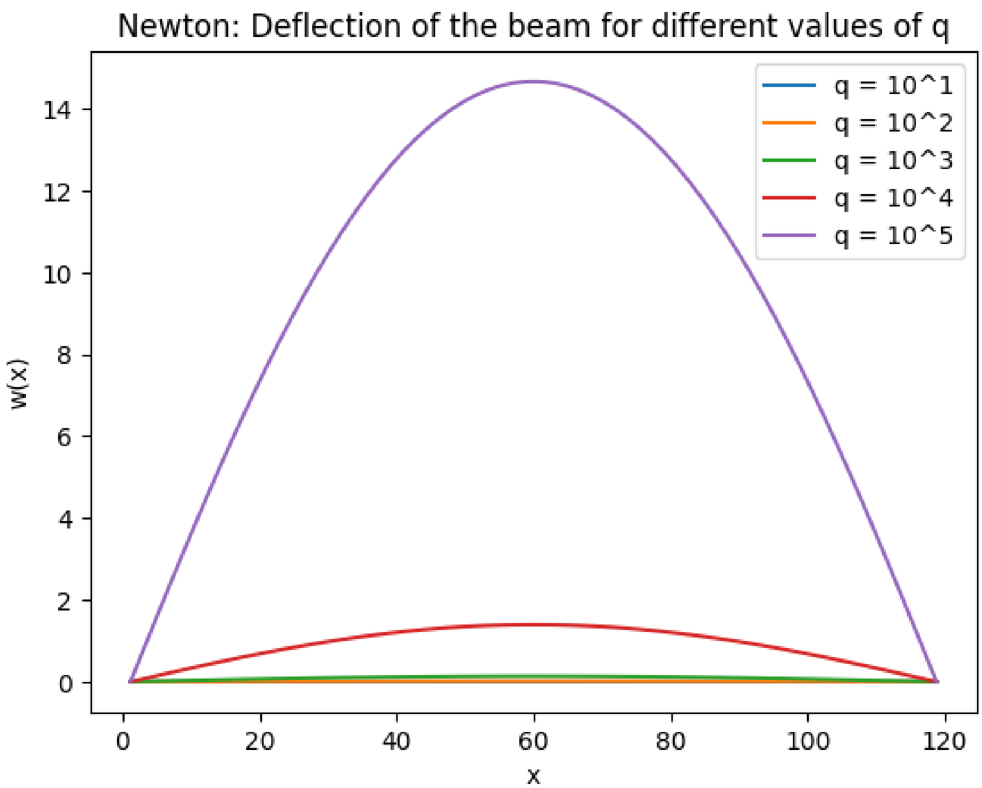
   El sistema lineal es tridiagonal entonces utilizo el método visto en clase para resolver este sistema.

(b) Usando una representación más apropiada del problema, se puede modelar usando la ecuación no lineal

$$\left[1 + (w_n')^2\right]^{-3/2} w_n'' = \frac{S}{EI} w_n + \frac{qx}{2EI}(x - l), \quad 0 < x < l,$$

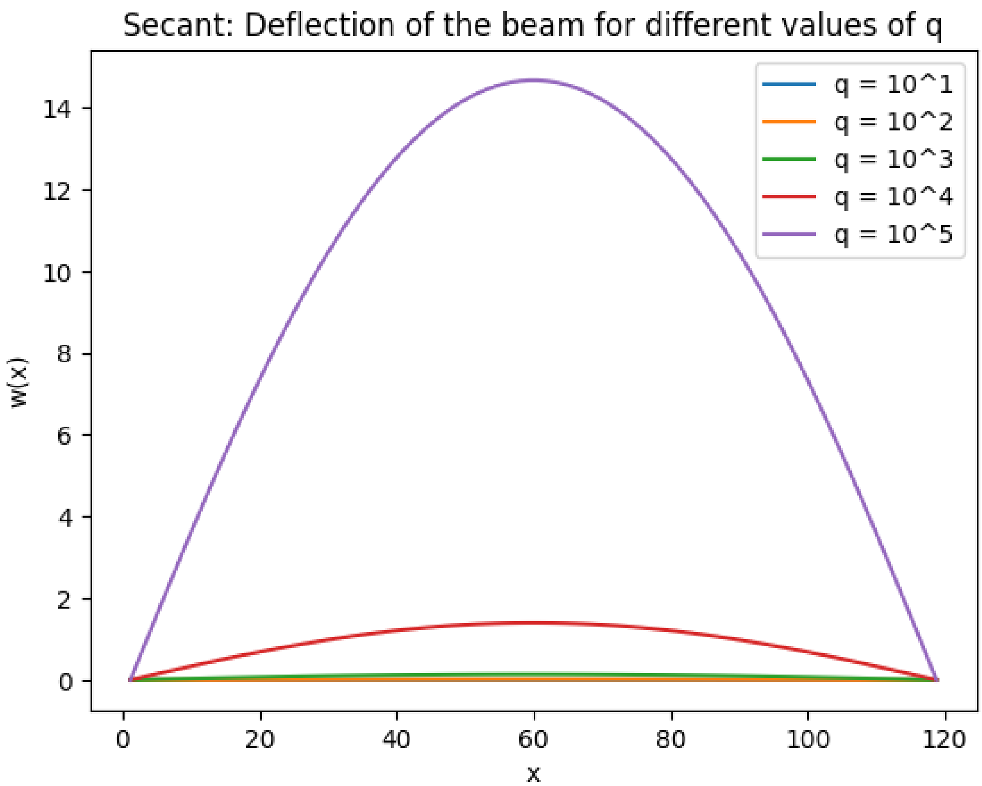
con $w_n(0) = w_n(l) = 0$. Use el método del disparo con 100 intervalos y grafique en una sola gráfica la deformación de la barra para valores de carga $q = 10^k$, con $k = 1, 2, 3, 4, 5$ con:

i. El método de la secante con valores iniciales para $w'(0)$ de 0 y 1 hasta tener un error de 10^{-6}. Especifique con qué método resuelve las EDO con valor inicial.



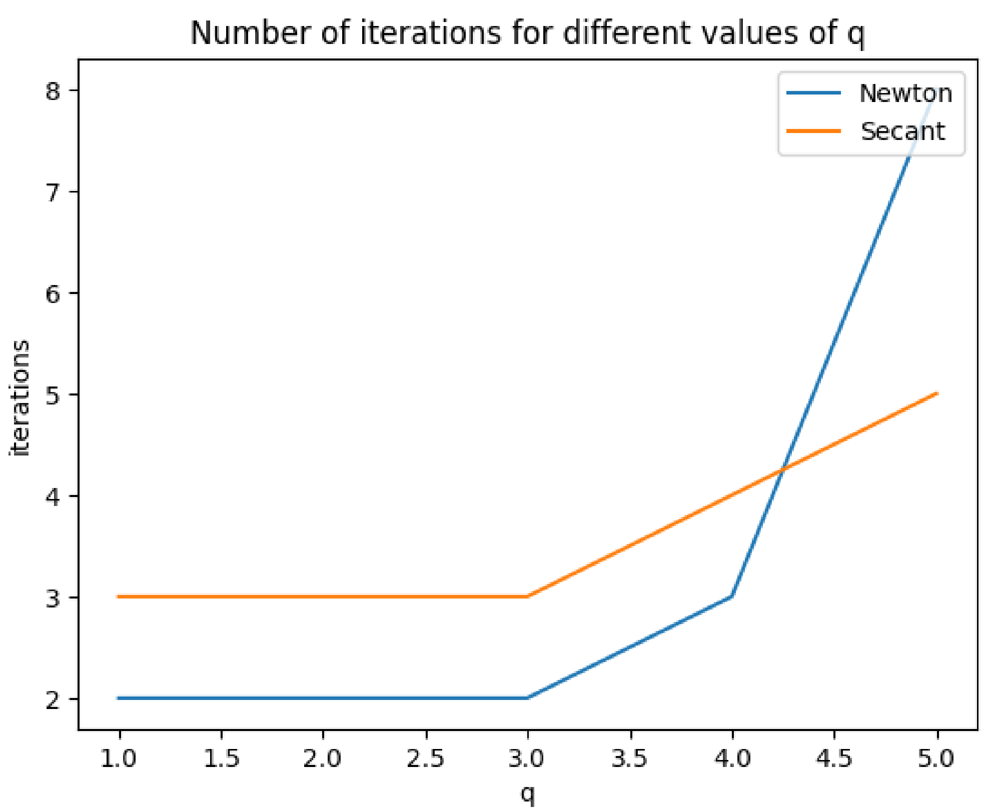
Utilizo RK4 para resolver las EDO.

ii. El método de Newton con valor inicial para $w'(0) = 0$ hasta tener un error de 10^{-6}. Especifique con qué método resuelve las EDO con valor inicial.

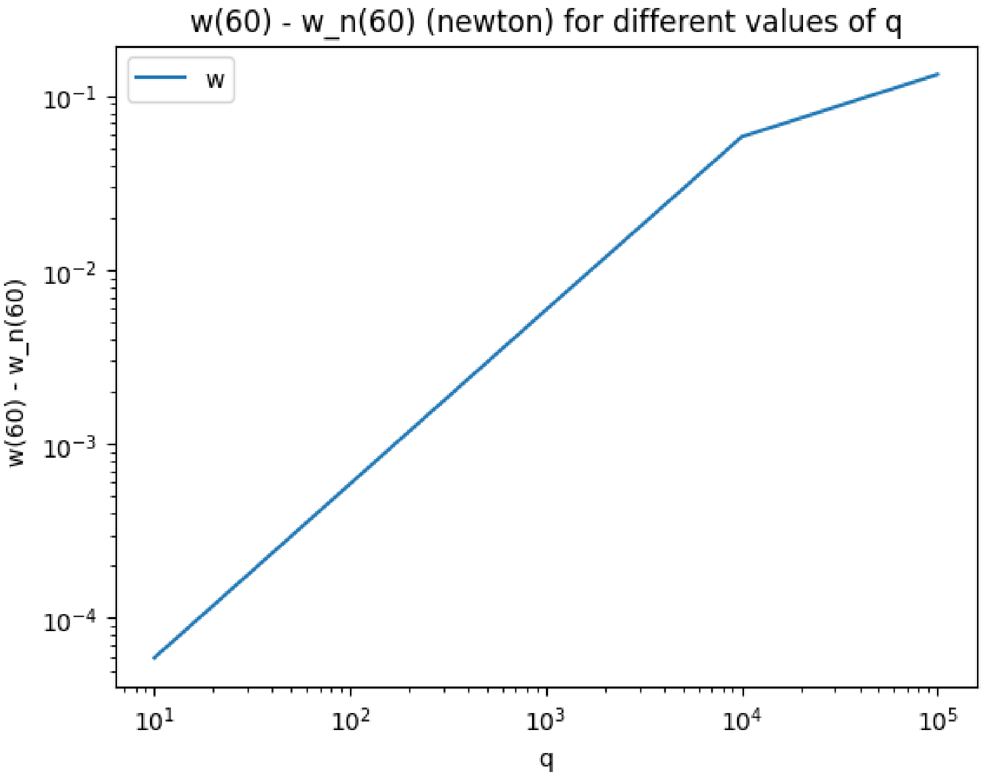


Utilizo RK4 para resolver las EDO.

Para cada valor de carga compare el número de iteraciones en cada método.



(c) Grafique $|w(60) - w_n(60)|$ variando los valores de q en una gráfica logarítmica.

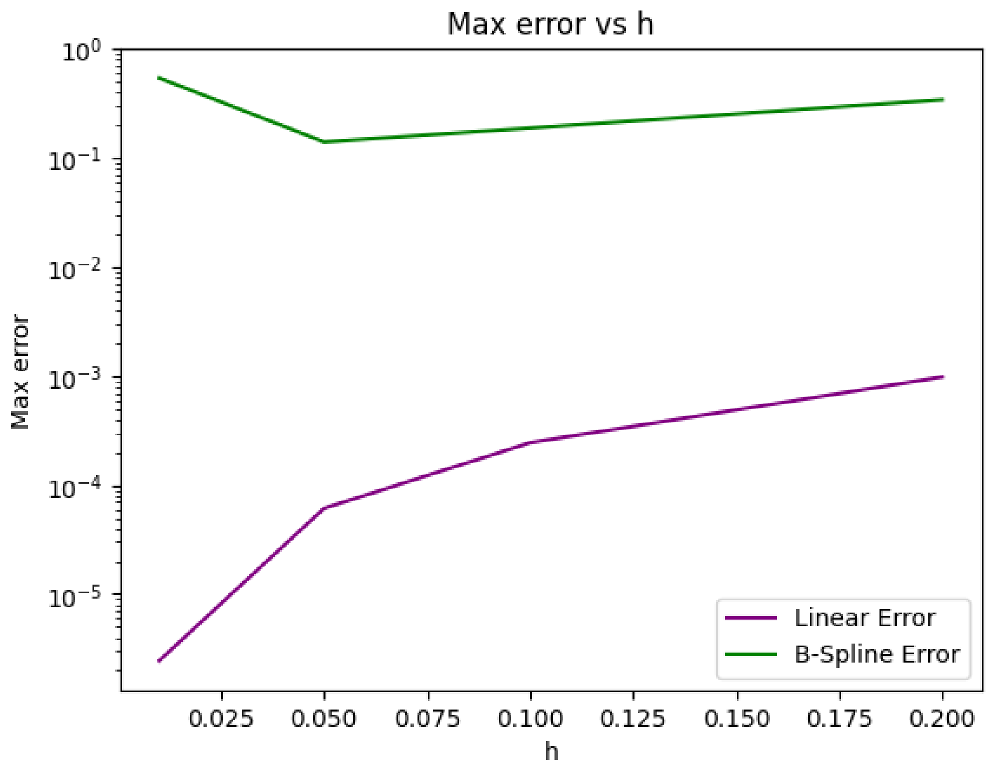


2. Considere el problema de frontera dado por la ecuación

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + e^{-x}y = (x-1) - (x+1)e^{-(x-1)}$$

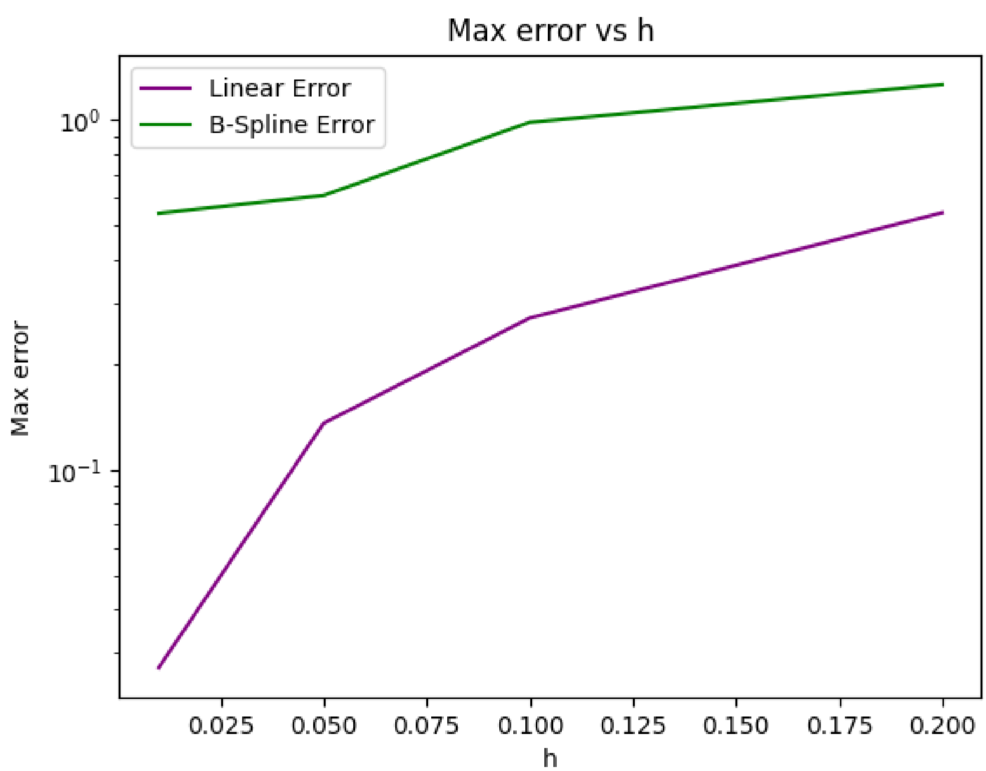
en el intervalo $[0,1]$.

(a) Con condiciones de Dirichlet homogéneas, la solución del problema es $y(x) = x(e^x - e)$. Resuelva el problema usando el método de elementos finitos tomando $h = 0.2, 0.1, 0.05, 0.01$ usando la base lineal a trozos y la base B-spline. Grafique el error máximo obtenido con cada base en la misma gráfica usando una escala logarítmica. Especifique como resuelve el sistema lineal.



El sistema lineal lo resuelvo con el solver estandar de numpy.

(b) Considere ahora condiciones de frontera de Neumann $y(0) = 0$, $y'(1) = e$. Resuelva el problema y repita las gráficas del punto anterior.



El sistema lineal lo resuelvo con el solver estandar de numpy.

3. La ecuación de Black-Scholes es muy conocida en matemáticas financieras pues permite valorar opciones de tipo europeo (bajo los supuestos del modelo de Black-Scholes). Supongamos que vamos a valorar una opción que paga, en el tiempo de maduración T, $g(s)$ cuando la acción vale s. Si denotamos $V(s,t)$ el valor de esta opción en el tiempo t cuando la acción vale s, entonces la función V debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} + rs\frac{\partial V}{\partial s} - rV = 0, & 0 < s, 0 \leq t \leq T \\ V(s,T) = g(s), & 0 < s, \end{cases}$$

donde σ y r son parámetros del modelo. Notemos que en este caso el conjunto donde está definida la ecuación no es ni cerrado ni acotado. Para poder resolver esta ecuación numéricamente debemos imponer condiciones sobre un dominio acotado que mejor aproximen a V. Estas condiciones van a depender de la función de pago g. En este caso vamos a valorar una opción *call* con precio de ejercicio K, es decir, la función de pago es

$$g(s) = \max\{s - K, 0\}.$$

Vamos a resolver la ecuación para valores de $s \in [0, s_m]$, con $s_m > K$. Por razones financieras las condiciones de frontera son

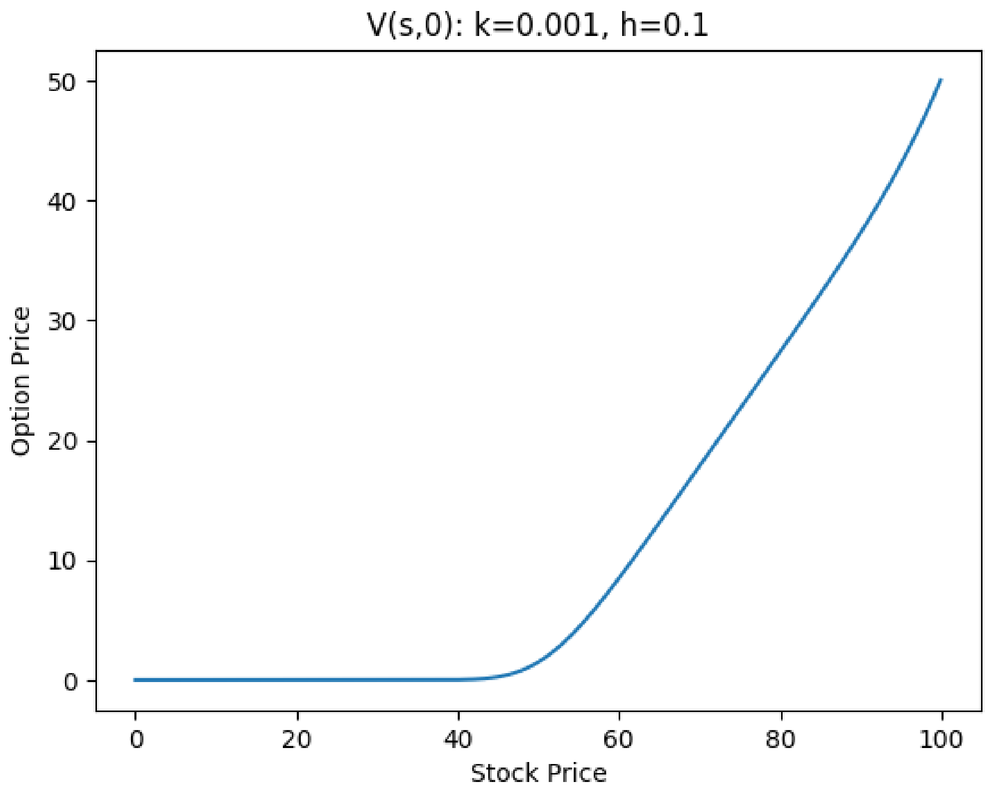
$$\begin{cases} V(0,t) = 0, & 0 \leq t \leq T \\ V(s_m, t) = s_m - e^{-r(T-t)}K, & 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

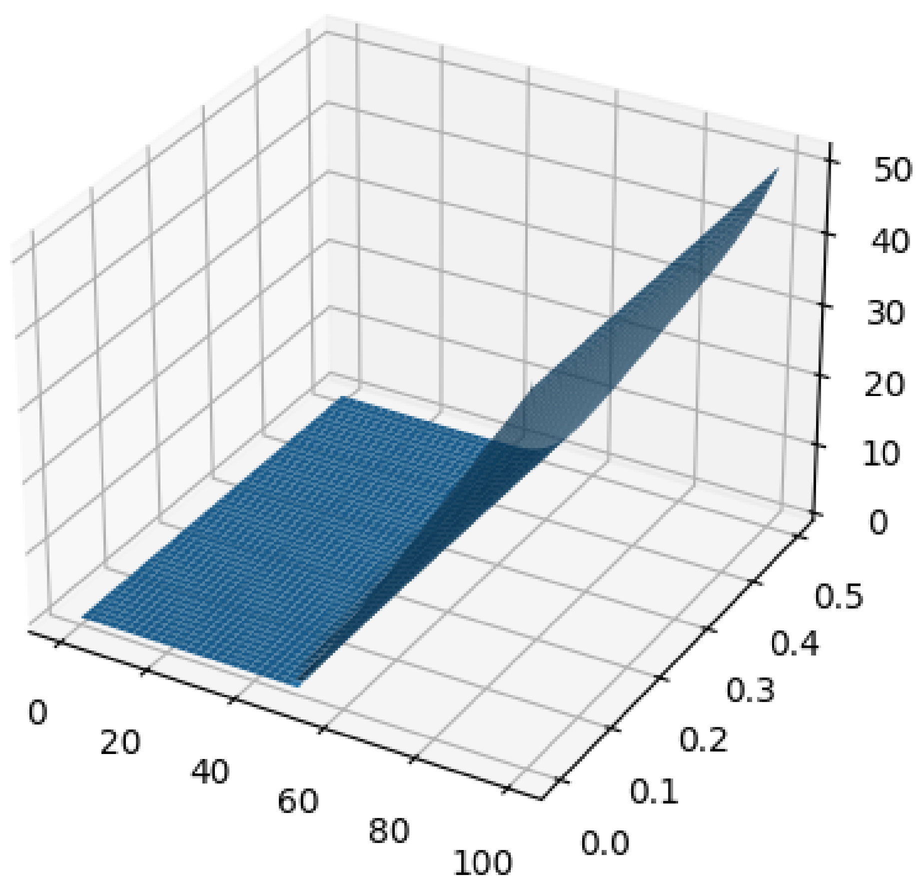
Usando $\sigma = 0.15$, $r = 0.05$, $T = 0.5$, $K = 50$ y $s_m = 100$. Aproxime la función V usando el método de Crank-Nicholson. Haga una gráfica de $V(s,0)$. Debe especificar los valores de h y k usados. Comente sobre la estabilidad del método cuando toma distintos valores de h y k. Especifique cómo resuelve el sistema lineal.

La estabilidad del método no se ve afectada si cambiamos los valores de h y k porque Crank-Nicholson es estable para todo k/h^2 .

El sistema lineal es tridiagonal, entonces podemos utilizar el método visto en clase para invertir la matriz. No obstante, también podemos utilizar los solvers estándar de python porque solo debemos invertir la matriz una sola vez.

Observe la gráfica de la superficie entera:


V(s,0): k=0.001, h=0.1
Option Price
Stock Price
0
10
20
30
40
50
0
20
40
60
80
100


0
20
40
60
80
100
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0
10
20
30
40
50

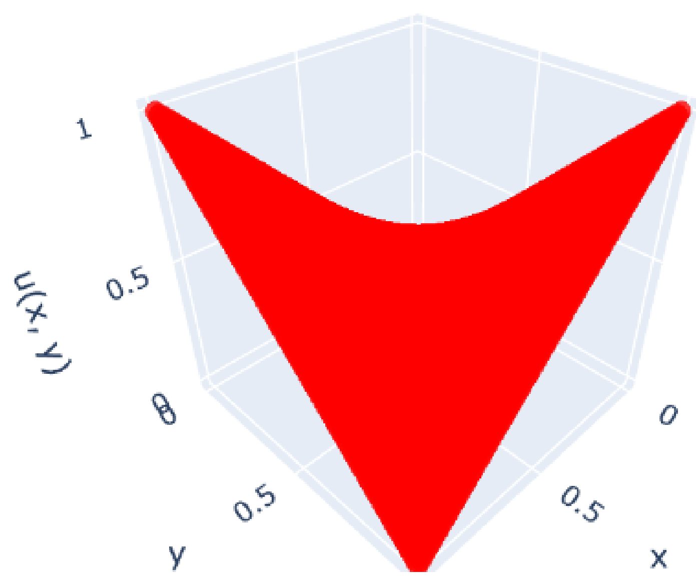
4. (a) Use el método de elementos finitos triangulares lineales para aproximar la solución del problema

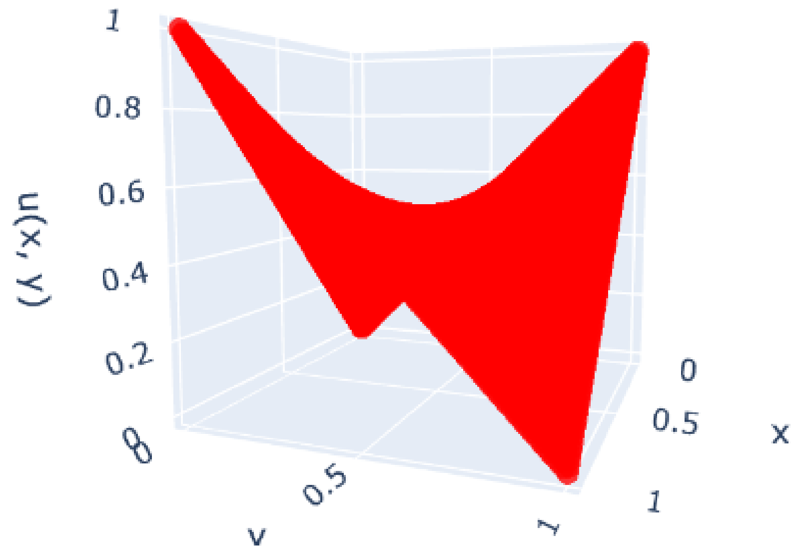
$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & (x,y) \in (0,1) \times (0,1) = \Omega \\ u = g, & (x,y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

con

$$g(x,y) = \begin{cases} x, & [0,1] \times \{0\} \\ y, & \{0\} \times [0,1] \\ 1-x, & [0,1] \times \{1\} \\ 1-y, & \{1\} \times [0,1] \end{cases}$$

Para esto use la discretización vista en clase. Haga la gráfica de la solución tomando $h = 0,01$ (es decir, una cuadrícula de 100 x 100). Especifique cómo resuelve el sistema lineal.





El sistema lineal lo resuelvo con la librería scipy que tiene una implementación para matrices sparse.