Tarea 5

Fecha de entrega: Abril 14 de 2024

1. Sea $P_n(x)$ el polinomio interpolante de $f(x)$ en los puntos distintos x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Si x es un punto diferente a los anteriores, muestre que

$$f(x) - P_n(x) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Concluya que si $f \in C^n([a, b])$ y $x_i \in [a, b]$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces existe $\zeta \in [a, b]$ tal que

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\zeta).$$

2. Muestre que los polinomios de Chebyshev satisfacen para todo $x \in \mathbb{R}$

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right].$$

3. Suponga que f es Lipschitz continua con constante L. Muestre que $\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{L}{2n^{1/2}}$. Para esto use la desigualdad de Cauchy-Schwarz con la expresión

$$|\sum_{j=0}^{n} (f(x) - f(x_j)) q_{n,j}(x)^{1/2} q_{n,j}(x)^{1/2}|.$$

4. Considere la función

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

En cada uno de los casos siguientes, en la misma gráfica grafique f y $P_n(x)$, con $n = 5, 10, 30$. Implemente los algoritmos de Horner y diferencias divididas para hallar y evaluar $P_n(x)$.

   a) Puntos igualmente espaciados en $[-1, 1]$.
   b) Puntos igualmente espaciados en $[-5, 5]$.
   c) Puntos en las raices del polinomio de Chebyshev ajustadas al intervalo $[-5, 5]$.

Repita el proceso anterior con la función de Runge dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

5. Considere la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2},$$

también conocida como la función de Runge (¿por qué?). Calcule la aproximación dada por lo polinomios de Bernstein en el intervalo $[0, 1]$ y grafique f y $B_n(f)(x)$ con $n = 5, 10, 30$. Compare con el polinomio interpolante dado por los puntos de Chebyshev.