Nombre: Esteban Leiva

Código: 202021368

Teoría de Análisis Numérico

MATE-2604

Tarea 8

1. Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$y' = py + q, \quad y(0) = 1,$$

con p, q constantes. Genere la sucesión de funciones $y_n(t)$ dada por el método de Picard. Muestre que y_n consiste de los primeros $n+1$ términos en la serie de Taylor de y.

Demostración. Primero, encontremos la solución del problema de valor inicial por el método del factor integrante.

$$\text{Factor integrante} = e^{\int -pdt} = e^{-pt}$$

$$\begin{aligned}(ye^{-pt})' &= y'e^{-pt} - pye^{-pt} = qe^{-pt}\\ &\rightarrow (ye^{-pt})' = qe^{-pt}\\ &\rightarrow \int (ye^{-pt})'dt = \int qe^{-pt}dt\\ &\rightarrow ye^{-pt} = \int qe^{-pt}dt\\ &\rightarrow ye^{-pt} = \frac{-q}{p}e^{-pt} + C\\ &\rightarrow y = \frac{-q}{p} + Ce^{pt}\end{aligned}$$

y como $y(0) = 1$

$$y(0) = -\frac{q}{p} + C = 1 \rightarrow C = 1 + \frac{q}{p}.$$

Entonces, la solucion es

$$y = \frac{-q}{p} + \left(1 + \frac{q}{p}\right)e^{pt}.$$

Ahora, la sucesión de funciones $y_n(t)$ del método de Picard está dada por

$$\begin{aligned}y_0(t) &= y_0 = 1\\ &\vdots\\ y_k(t) &= y_0 + \int_0^t f(s, y_{k-1}(s))ds\end{aligned}$$

Veamos que $y_k(t) = \sum_{i=1}^{k} \frac{p^{i-1}(p+q)t^i}{i!} + 1$ por inducción.

Caso base:

$$y_1(t) = 1 + \int_0^t py_0(s) + q\, ds = 1 + \int_0^t p + q\, ds = 1 + (p+q)t$$

Paso inductivo: suponga que vale para $k-1$ y mostremos que vale para k

$$\begin{aligned}
y_k &= 1 + \int_0^t f(s, y_{k-1}(s))\, ds \\
&= 1 + \int_0^t p y_k(s) + q\, ds \\
&= 1 + \int_0^t p\left(\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^{i-1}(p+q)t^i}{i!} + 1\right) + q\, ds \\
&= 1 + \int_0^t \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p^i(p+q)t^i}{i!} + p + q\, ds \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \frac{p^i(p+q)t^i}{i!}\, ds + \int_0^t p + q\, ds \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \frac{p^i(p+q)t^i}{i!}\, ds + (p+q)t \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p^i(p+q)t^{i+1}}{(i+1)!} + (p+q)t \\
&= 1 + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{p^{i-1}(p+q)t^i}{i!} + (p+q)t \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{p^{i-1}(p+q)t^i}{i!}.
\end{aligned}$$

Ahora, construyamos la serie de Taylor alrededor de 0. Tenemos que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} t^i, \quad y = f(t) = \frac{(p+q)e^{pt} - q}{p} \quad \text{y } f(0) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
f'(t) &= (p+q)e^{pt} \\
f''(t) &= p(p+q)e^{pt} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(t) &= p^{k-1}(p+q)e^{pt}
\end{aligned}$$

y así

$$1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{p^{i-1}(p+q)t^i}{i!}$$

son los primeros $k+1$ términos de la serie de Taylor, lo cual coincide con $y_k(t)$.

$\square$

2. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$x_1' = 9x_1 + 24x_2 + 5\cos t - \frac{1}{3}\sin t$$

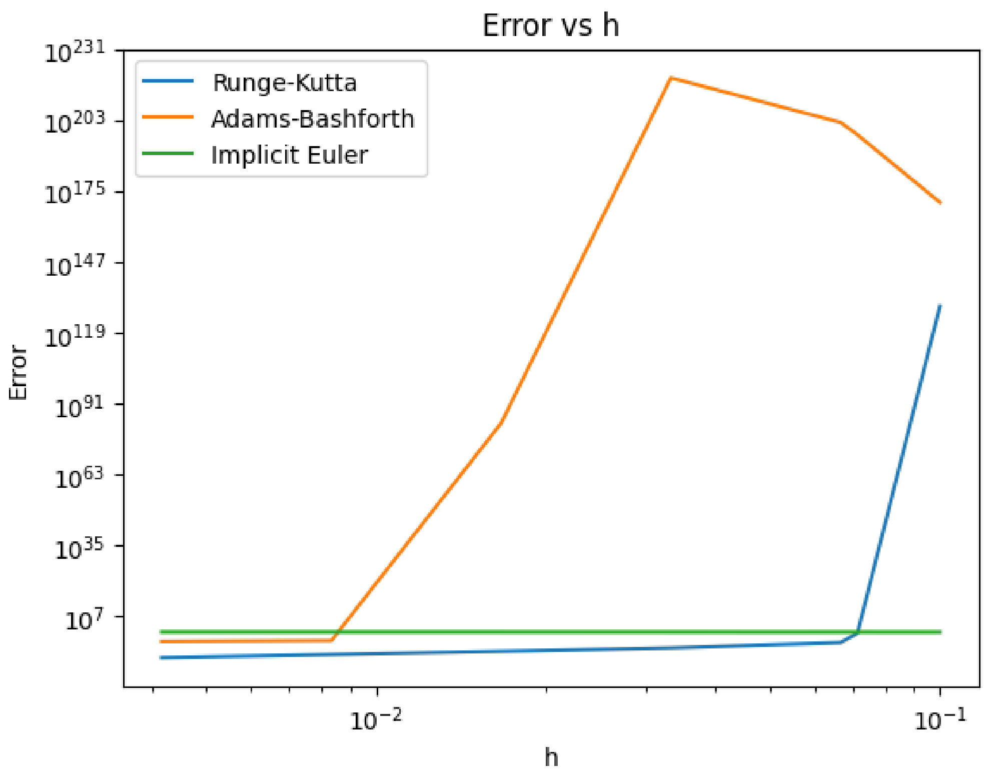
$$x_2' = -24x_1 - 51x_2 - 9\cos t + \frac{1}{3}\sin t$$

con valores iniciales $x_1(0) = \frac{4}{3}$ y $x_2(0) = \frac{2}{3}$. Este sistema tiene solución $x_1(t) = 2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3}\cos t$ y $x_2(t) = -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3}\cos t$.

(a) Implemente el método RK4 para resolver el sistema desde $t = 0$ hasta $t = 20$. Tome $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{14}, \frac{2^{-k}}{15}$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Calcule $x_2(20)$ en cada caso. Grafique los errores variando h en una gráfica logarítmica.

(b) Implemente el método de Adams-Bashford de orden 3 y repita el ejercicio anterior.

(c) Implemente el método de Euler implícito y repita el ejercicio anterior.



Estos resultados están acorde con el orden de los métodos?

Los resultados están acorde con el orden de los métodos porque RK4 es de orden 4 y cuando h decrece el error esta por debajo del error de Adams-Bashforth (orden 3) y Euler (orden 2). Por lo tanto, tenemos que el error de cada método cuando h es pequeño mantiene la relación del orden de convergencia que existe entre los métodos.

3. El estado del péndulo en el tiempo t está dado por los ángulos θ_1 y θ_2. Las ecuaciones que describen el movimiento del péndulo son las siguientes

$$\theta_1'' = \frac{-3\sin\theta_1 - \sin\theta_1 - 2\theta_2 - 2\sin\theta_1 - \theta_2((\theta_2')^2 + (\theta_1')^2\cos(\theta_1 - \theta_2))}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}$$

$$\theta_2'' = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)(2(\theta_1')^2 + 2\cos\theta_1 + (\theta_2')^2\cos(\theta_1 - \theta_2))}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}$$

(a) Escriba un sistema de ecuaciones de primer orden que describa el movimiento del péndulo en términos de θ_1, θ_2, $\theta_1' = \omega_1$, $\theta_2' = \omega_2$

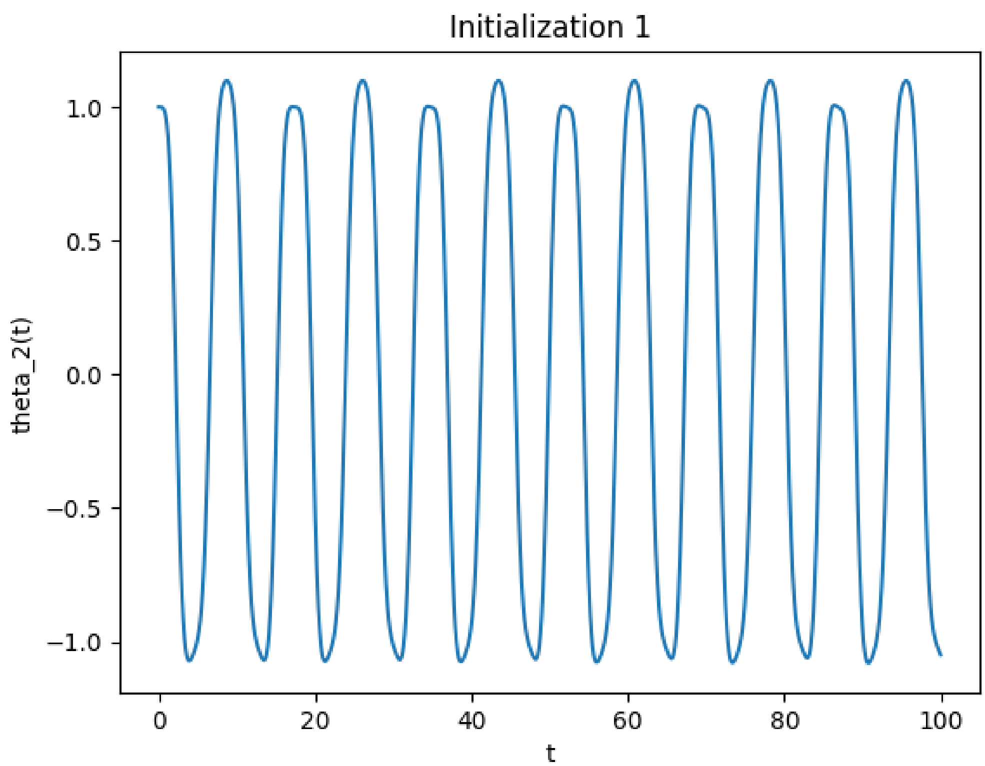
$$\omega_1' = \frac{-3\sin\theta_1 - \sin\theta_1 - 2\theta_2 - 2\sin\theta_1 - \theta_2((\omega_2)^2 + (\omega_1)^2\cos(\theta_1 - \theta_2))}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}$$

$$\omega_2' = \frac{2\sin(\theta_1 - \theta_2)(2(\omega_1)^2 + 2\cos\theta_1 + (\omega_2)^2\cos(\theta_1 - \theta_2))}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}$$

$$\omega_1 = \theta_1'$$

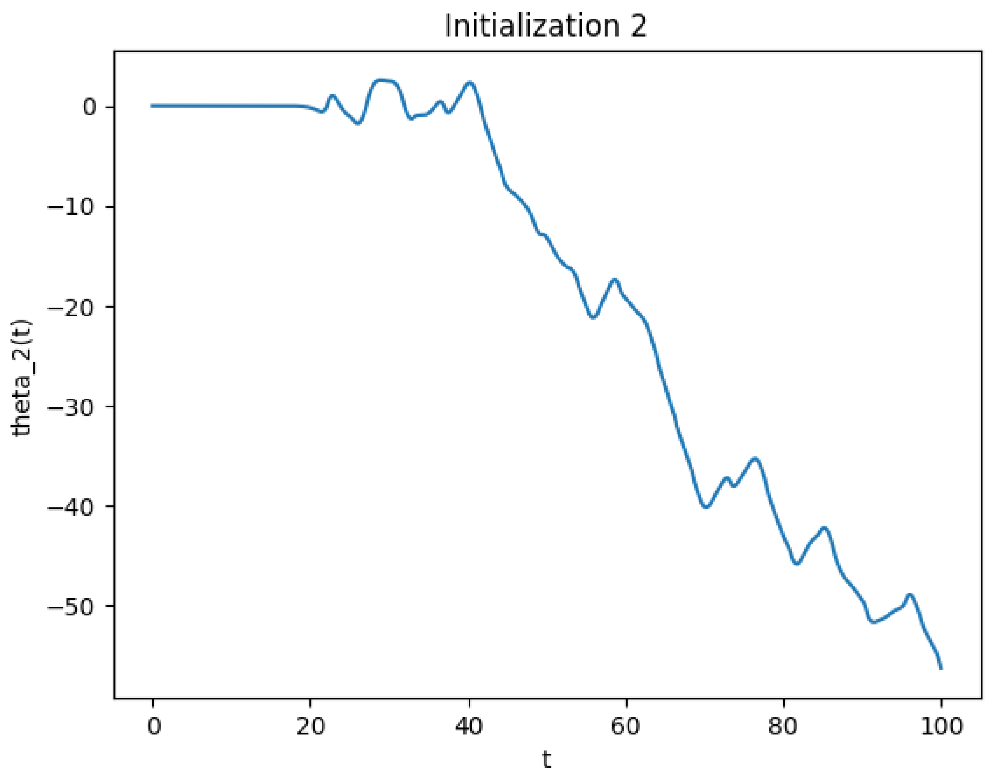
$$\omega_2 = \theta_2'$$

(b) Implemente el método de RK4 para resolver el sistema desde $t = 0$ hasta $t = 100$ con $h = 0.05$, considerando las condiciones iniciales dadas en la tabla. En cada caso grafique $\theta_2(t)$ contra t.

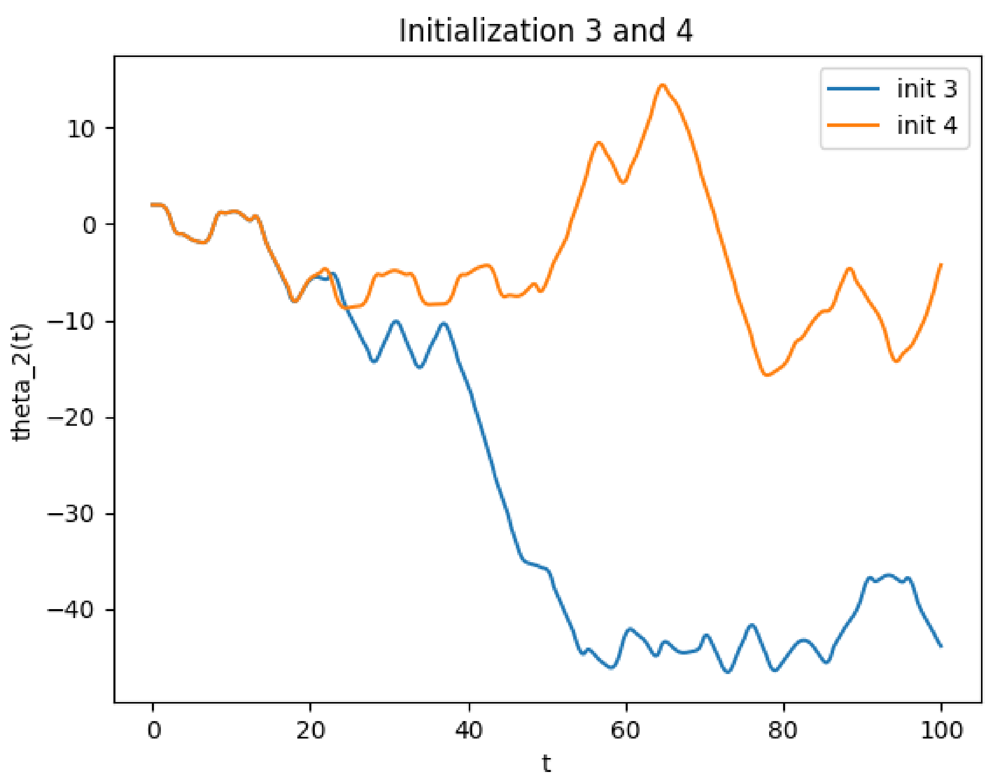


(c) Considere solo el primer caso de la tabla de arriba. Tome $h = 0.05/2^k$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$ y $h = 0.001$. Calcule $\theta_2(100)$ en cada caso. Considere el resultado con $h = 1/1000$ como la solución exacta y grafique los errores variando h en una gráfica logarítmica. Este resultado esta acorde con el orden del método?

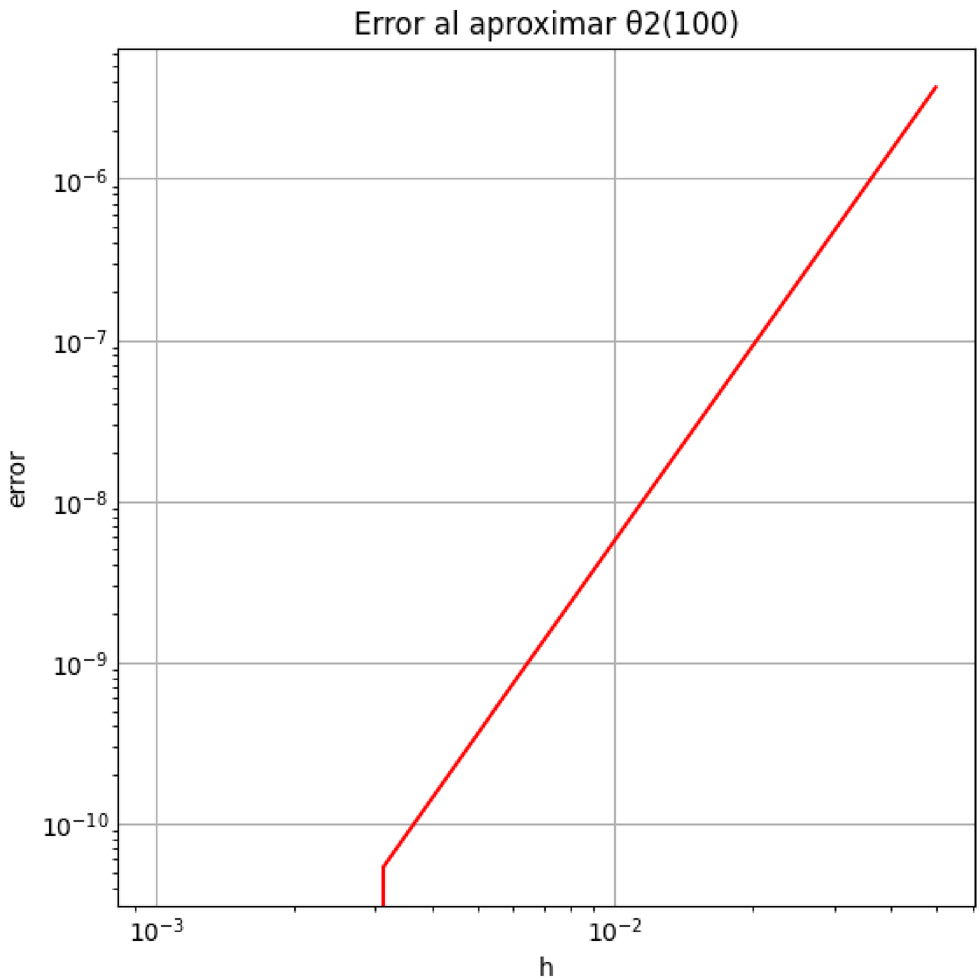
El resultado va acorde con el método porque la pendiente de la gráfica es aproximadamente 4 y sabemos que RK4 es de orden 4.



Initialization 2
0
−10
−20
−30
−40
−50
theta_2(t)
0
20
40
60
80
100
t



Initialization 3 and 4
init 3
init 4
10
0
−10
−20
−30
−40
theta_2(t)
0
20
40
60
80
100
t


Error al aproximar θ2(100)
error
h
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-10}
10^{-3}
10^{-2}