Tarea 8

Fecha de entrega: Mayo 1 de 2024

1. Encuentre la solución del problema de valor inicial

$$y' = py + q, \qquad y(0) = 1,$$

con p, q constantes. Genere la sucesión de funciones $y_n(t)$ dada por el método de Picard. Muestre que y_n consiste de los primero $n+1$ términos en la serie de Taylor de y.

2. Considere el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$x_1' = 9x_1 + 24x_2 + 5\cos t - \frac{1}{3}\sin t$$

$$x_2' = -24x_1 - 51x_2 - 9\cos t + \frac{1}{3}\sin t$$

con valores iniciales $x_1(0) = 4/3$ 4 $x_2(0) = 2/3$. Este sistema tiene solución $x_1(t) = 2e^{-3t} - e^{-39t} + \frac{1}{3}\cos t$ y $x_2(t) = -e^{-3t} + 2e^{-39t} - \frac{1}{3}\cos t$.

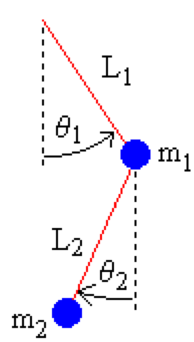
   a) Implemente el método RK4 para resolver el sistema desde $t = 0$ hasta $t = 20$. Tome $h = 1/10, 1/14, 2^{-k}/15$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Calcule $x_2(20)$ en cada caso. Grafique los errores variando h en una gráfic logarítmica.

   b) Implemente el método de Adams-Bashford de orden 3 y repita el ejercicio anterior.

   c) Implemente el método de Euler implícito y repita el ejercicio anterior.

Estos resultados están acorde con el orden de los métodos?

3. Considere un doble péndulo como el de la figura. El estado del péndulo en el tiempo t está dado por los ángulos $\theta_1(t)$ y $\theta_2(t)$.



Asuma que m_1, m_2, L_1, L_2 son tales que las ecuaciones que describen el movimiento del péndulo son las siguientes:

$$\theta_1'' = \frac{-3\sin\theta_1 - \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 2\sin(\theta_1 - \theta_2)((\theta_2')^2 + (\theta_1')^2\cos(\theta_1 - \theta_2))}{3 - \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)}$$

$$\theta_2'' = \frac{2\sin(\theta_1-\theta_2)(2(\theta_1')^2 + 2\cos\theta_1 + (\theta_2')^2\cos(\theta_1-\theta_2))}{3-\cos(2\theta_1-2\theta_2)}$$

a) Escriba un sistema de ecuaciones de primer orden que describa el movimiento del péndulo en términos de θ_1, θ_2, $\theta_1' = \omega_1$ y $\theta_2' = \omega_2$.

b) Implemente el método de RK4 para resolver el sistema desde $t = 0$ hasta $t = 100$ con $h = 0{,}05$, considerando las condiciones iniciales dadas en la tabla. En cada caso grafique $\theta_2(t)$ contra t. Incluya las gráficas de los casos 3 y 4 en la misma gráfica. (En total son **tres** gráficas.)

	$\theta_1(0)$	$\theta_2(0)$	$\omega_1(0)$	$\omega_2(0)$
1	1	1	0	0
2	π	0	0	10^{-10}
3	2	2	0	0
4	2	$2+10^{-3}$	0	0

c) Considere solo el primer caso de la tabla de arriba. Tome $h = 0{,}05/2^k$ con $k = 0,1,2,3,4$, y $h = 0{,}001$. Calcule $\theta_2(100)$ en cada caso. Considere el resultado con $h = 1/1000$ como la solución exacta y grafique los errores variando h en una gráfica logarítmica. Este resultado está acorde con el orden del método?

Mauricio Junca