Nombre: Esteban Leiva

Código: 202021368

Teoría de Análisis Numérico

MATE-2604

Tarea 3

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonal con entradas no nulas en las tres diagonales tales que $|a_{11}| > |a_{21}|$, $|a_{nn}| > |a_{n-1,n}|$ y $|a_{ii}| \geq |a_{i-1,i}| + |a_{i+1,i}|$ para $i = 2, ..., n-1$. Muestre que A es invertible. Ayuda: Piense en la eliminación de Gauss de A.

Demostración. Tomemos un $b \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $Ax = b$ se puede escribir como un sistema lineal equivalente $Ux = b'$ donde $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior con entradas diagonales no nulas. Esto nos va a asegurar que A es invertible, pues U va a ser invertible y vamos a obtener una solución para x.

Para esto vamos a utilizar la eliminación de Gauss. Considere la matriz extendida M de $Ax = b$ donde $M_{ij} = A_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n$ y $M_{i,n+1} = b$ para $i = 1, ..., n$. En el primer paso de la eliminación de Gauss, tenemos que $m_{22}^{(1)} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}$ y como

$$|a_{11}| > |a_{21}| \to 1 > \left|\frac{a_{21}}{a_{11}}\right| \to |a_{12}| > \left|\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}\right|$$

y

$$|a_{22}| \geq |a_{12}| + |a_{32}|,$$

llegamos a $m_{22}^{(1)} = |a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}| > 0$.

Aplicando esta misma operación de fila a la 3 fila, la única entrada que cambia es la (3,2):

$$m_{32}^{(1)} = a_{32} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}.$$

De hecho, al ser tridiagonal tenemos que las entradas restantes de la matriz no cambian después de la primera operación. Además, $|m_{22}^{(1)}| > |m_{32}^{(1)}|$ pues como $|a_{22}| > |a_{32}|$, observamos que $|a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}| > |a_{32} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}|$. Entonces, tenemos que la submatriz $M_{ij}^{(1)}$ para $i = 2, ..., n$, $j = 2, ..., n$ es una matriz tridiagonal que cumple $|m_{22}^{(1)}| > |m_{32}^{(1)}|$. Para el siguiente paso, podemos utilizar el mismo procedimiento anterior para ver que la $m_{33}^{(2)} = a_{33} - \frac{m_{32}^{(1)}}{m_{22}^{(1)}} a_{23}$ y concluir que $|m_{33}^{(2)}| > 0$ y que $|m_{33}^{(2)}| > |m_{43}^{(2)}|$. En general, tenemos que $|m_{kk}^{(k-1)}| > 0$ y $|m_{kk}^{(k-1)}| > |m_{k+1,k}^{(k-1)}|$ para $k = 2, ..., n-1$. Finalmente, notamos que en la operación de fila $(n-2)$,

$$m_{nn}^{(n-2)} = a_{nn} - \frac{m_{n,n-1}^{(n-3)}}{m_{n-1,n-1}^{(n-3)}} a_{n-1,n}$$

y calculando su valor absoluto

$$|m_{nn}^{(n-2)}| = \left| a_{nn} - \frac{m_{n,n-1}^{(n-3)}}{m_{n-1,n-1}^{(n-3)}} a_{n-1,n} \right| \geq |a_{nn}| - \left| \frac{m_{n,n-1}^{(n-3)}}{m_{n-1,n-1}^{(n-3)}} a_{n-1,n} \right| > |a_{nn}| - |a_{n-1,n}| > 0.$$

Por lo tanto, el método de Gauss resulta en una matriz triangular superior con diagonal no nula, entonces es A es invertible. $\square$

2. Dada $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$, muestre que $\|\cdot\|_*$ definida como

$$\|x\|_* = \sup\{\langle z, x\rangle \,:\, \|z\| = 1\}$$

es una norma en $\mathbb{R}^n$ llama la norma dual de $\|\cdot\|$. Muestre que $\|\cdot\|_{**} = \|\cdot\|$. Encuentre la norma dual de l_p.

(a) $\|x\|_*$ es una norma.

Demostración. Observemos que se cumplen las cuatro propiedades:

i. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\|x\|_* = \sup\{\langle z, x\rangle \,:\, \|z\| = 1\} = \sup_{z\neq 0}\left(\frac{z^t x}{\|z\|}\right) \geq \frac{x^t x}{\|x\|} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} \geq 0.$$

Por lo tanto, $\|x\|_*$ es no negativa.

ii. Es claro que $\|0\|_* = \sup\limits_{z\neq 0}\left(\frac{z^t 0}{\|z\|}\right) = 0$. Ahora, por el anterior inciso, si $\|x\|_* = 0$ entonces

$$0 = \sup_{z\neq 0}\left(\frac{z^t x}{\|z\|}\right) \geq \frac{x^t x}{\|x\|} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} \geq 0 \to \|x\| = 0 \to x = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que $\|x\|_* = 0 \iff x = 0$

iii. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\lambda x\|_* = \sup\{\langle z, \lambda x\rangle \,:\, \|z\| = 1\} = \sup\{|z^t \lambda x| \,:\, \|z\| = 1\} = |\lambda| \sup\{|z^t x| \,:\, \|z\| = 1\} = |\lambda| \|x\|_*.$$

iv. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_* &= \sup\{\langle z, x + y\rangle \,:\, \|z\| = 1\} \\
&= \sup\{\langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle \,:\, \|z\| = 1\} \\
&\leq \sup\{\langle z, x\rangle \,:\, \|z\| = 1\} + \sup\{\langle z, y\rangle \,:\, \|z\| = 1\} \\
&= \|x\|_* + \|y\|_*
\end{aligned}$$

□

(b) $\|x\|_{**} = \|x\|$

Demostración. Primero, vamos a mostrar que vale la desigualdad $x^t z \leq \|x\|\|z\|_*$. Definamos $u = \frac{x}{\|x\|}$ y así $x^t z = \|x\|\left(\frac{x^t}{\|x\|} z\right) = \|x\|\left(u^t z\right)$.

$$\|z\|_* = \sup_{\|u\|=1}\left(u^t z\right) \geq u^t z = \frac{x^t}{\|x\|} z \to \|z\|_* \|x\| \geq x^t z$$

Con esta desigualdad en mente,

$$x^t z \leq \|x\|\|z\|_* \to \frac{x^t z}{\|z\|_*} \leq \|x| \to \sup_{z\neq 0} \frac{x^t z}{\|z\|_*} \leq \|x\| \to \|x\|_{**} \leq \|x\|$$

Por otro lado, sin perdida de generalidad asuma que $\|x\| = 1$ (pues como es una norma podemos multiplicar a x por cualquier λ y el siguiente argumento se mantendría valido)

$$\begin{aligned}
\|x\|_{**} &= \sup\{z^t x \,:\, \|z\|_* = 1\} \\
&= \sup\{z^t x \,:\, \sup\{y^t z \,:\, \|y\| = 1\} = 1\} \\
&= \sup\{z^t x \,:\, \|y\| = 1 \to y^t z \leq 1\} \\
&\geq \sup\{z^t x \,: x^t z \leq 1\} = 1 = \|x\|.
\end{aligned}$$

Luego, $\|x\|_{**} = \|x\|$. □

(c) La norma dual de l_p es l_q donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Demostración. Sea $x \in R^n$, como $\langle z, x\rangle \leq \|z\|_p \|x\|_q$ tenemos que $\|x\|_* = \sup\{\langle z, x\rangle \,:\, \|z\|_p = 1\} \leq \|z\|_p\|x\|_q = \|x\|_q$. Luego, $\|x\|_* \leq \|x\|_q$.

Para la otra dirección, queremos encontrar un $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|z\|_p = 1$ y $\langle z, x\rangle \geq \|x\|_q$, pues esto implica que $\|x\|_p = \sup\{\langle z, x\rangle \,:\, \|z\|_p = 1\} \geq \|x\|_q$. Definamos $z_i = \operatorname{sign}(x_i)|x_i|^{p-1}$ entonces $\langle z, x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \operatorname{sign}(x_i)|x_i|^{q-1} = \sum_{i=1}^n |x_i||x_i|^{q-1} = \sum_{i=1}^n |x_i|^q = \|x\|_q^q$. Además, como $(q-1)p = q$

$$\begin{aligned}
\|z\|_p^p = \sum_{i=1}^n |z_i|^p &= \sum_{i=1}^n |\operatorname{sign}(x_i)|x_i|^{q-1}|^p \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i^{(q-1)p}| \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i|^{(q-1)p} \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i|^q \\
&= \|x\|_q^q
\end{aligned}$$

Si tomamos $y = \frac{z}{\|z\|_p}$ entonces $\|y\|_p = 1$ y

$$\langle y, x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \frac{z_i}{\|z\|_p} = \frac{1}{\|z\|_p}\sum_{i=1}^n x_i z_i = \frac{1}{(\|z\|_p^p)^{\frac{1}{p}}}\sum_{i=1}^n x_i z_i = \frac{1}{\left(\|x\|_p^{\frac{q}{p}}\right)}\sum_{i=1}^n x_i z_i.$$

Luego, como $q - \frac{q}{p} = 1$

$$\frac{1}{\left(\|x\|_p^{\frac{q}{p}}\right)}\sum_{i=1}^n x_i z_i = \frac{1}{\left(\|x\|_p^{\frac{q}{p}}\right)}\langle z, x\rangle = \frac{1}{\left(\|x\|_p^{\frac{q}{p}}\right)}\|x\|_q^q = \|x\|_q^{q-\frac{q}{p}} = \|x\|_q.$$

Entonces, tenemos que la norma dual de l_p es igual a l_q. □

3. Sea $\|\cdot\|$ norma matricial submultiplicativa, entonces $\rho(A) \leq \|A\|$ para toda matriz A. En particular muestre que $\rho(A) \leq \|A\|_F$.

Demostración. Primero, sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ el valor propio de A con el mayor valor absoluto, es decir $|\lambda| = \rho(A)$, y $\vec{v}$ su vector propio asociado. Sea $B = \begin{pmatrix} \vec{v} & \cdots & \vec{v} \end{pmatrix}$ entonces

$$\|AB\| = |\lambda|\|B\| = \rho(A)\|B\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Luego, $\rho(A) \leq \|A\|$.

Ahora, veamos que $\|\cdot\|_F$ es submultiplicativa. Sean

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{bmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|AB\|_F &= \sum_i \sum_j \left|\vec{a}_i^t b_j\right|^2 \\
&\leq \sum_i \sum_j \|\vec{a}_i\|_2^2 \|b_j\|_2^2 \\
&= \left(\sum_i \|\vec{a}_i\|_2^2\right)\left(\sum_j \|b_j\|_2^2\right) \\
&= \left(\sum_i \vec{a}_i^t \vec{a}_i\right)\left(\sum_j \vec{b}_i^t \vec{b}_i\right) \\
&\leq \left(\sum_i \sum_j \vec{a}_i^t \vec{a}_j\right)\left(\sum_i \sum_j \vec{b}_i^t \vec{b}_j\right) \\
&= \|A\|_F \|B\|_F.
\end{aligned}$$

Luego, es submultiplicativa y tenemos que $\rho(A) \leq \|A\|_F$. $\square$

4. Comparación de algoritmos para solución de sistemas lineales:

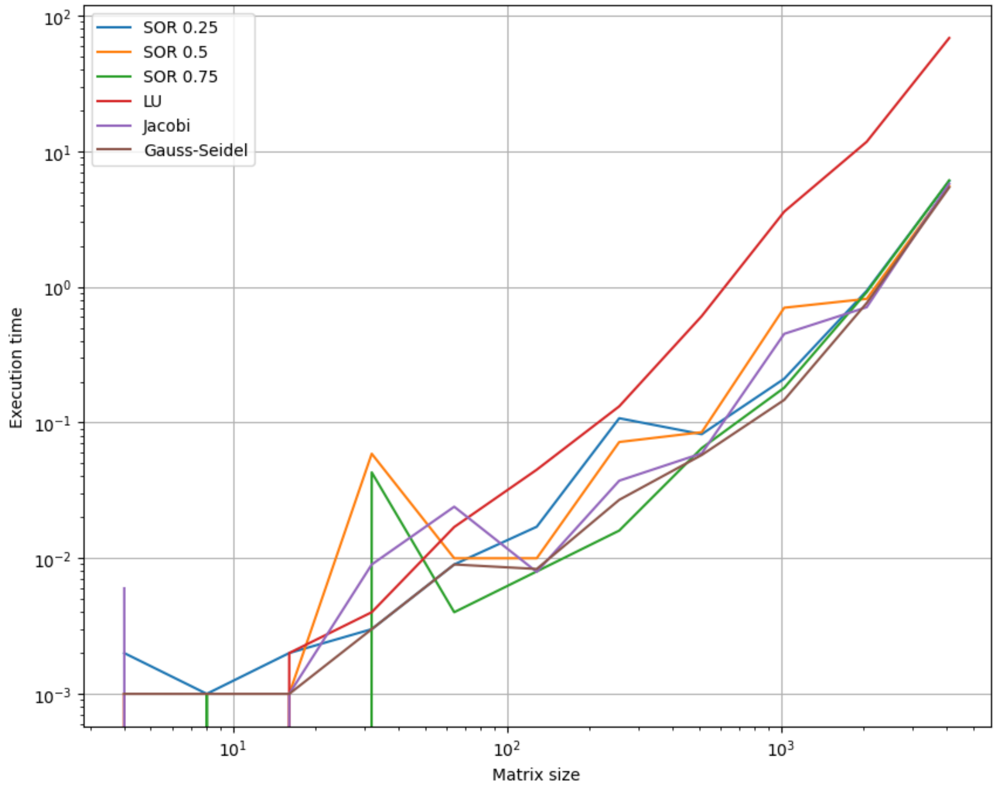

Figure 1: Gráfica loglog.