Nombre: Esteban Leiva

Código: 202021368

Teoría de Análisis Numérico

MATE-2604

Tarea 2

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonal con entradas en la diagonal no nulas tales que $|a_{11}| > |a_{21}|$, $|a_{nn}| > |a_{n-1,n}|$ y $|a_{ii}| \geq |a_{i-1,i}| + |a_{i+1,i}|$ para $i = 2, ..., n-1$. Muestre que A es invertible. Ayuda: Piense en la eliminación de Gauss de A.

   Demostración. Este enunciado es falso. Considere la siguiente matriz 4x4:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

   Como la fila 2 y 3 de la matriz son iguales, la matriz no es invertible. Sin embargo, se cumple $a_{11} = 2 > a_{21} = 0$, $a_{44} = 5 > a_{34} = 0$, $|a_{22}| = 3 \geq |a_{12}| + |a_{32}| = 0 + 3$, $|a_{33}| = 4 \geq |a_{23}| + |a_{43}| = 4 + 0$ □

2. Considere la siguiente ecuación diferencial con condiciones de frontera:

$$\begin{cases} y'' = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

   Este problema se puede resolver numéricamente resolviendo el problema

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, 2, ..., n \\ y_0 = 0 \\ y_{n+1} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

   con $y_i = y(x_i)$, $x_i = ih$ y $h = \frac{1}{n+1}$

   (a) Escriba (1) de la forma $Ay = b$ y compruebe que A es invertible usando el ejercicio anterior.

   Demostración. El sistema se puede escribir de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} y(x_1) \\ y(x_2) \\ \vdots \\ y(x_n) \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} h^2 f(x_1) \\ h^2 f(x_2) \\ \vdots \\ h^2 f(x_n) \end{bmatrix}$$

Notando que ningún elemento de la tridiagonal es 0 y que se cumplen las desigualdades de las columnas, sabemos que A es invertible por lo siguiente:

Tomemos un $b \in \mathbb{R}^n$. Veamos que $Ax = b$ se puede escribir como un sistema lineal equivalente $Ux = b'$ donde $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior con entradas diagonales no nulas. Esto nos va a asegurar que A es invertible, pues U va a ser invertible y vamos a obtener una solución para x.

Para esto vamos a utilizar la eliminación de Gauss. Considere la matriz extendida M de $Ax = b$ donde $M_{ij} = A_{ij}$ para $1 \leq i, j \leq n$ y $M_{i,n+1}$ para $i = 1, ..., n$. En el primer paso de la eliminación de Gauss, tenemos que $m_{22}^{(1)} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}$ y como $|a_{11}| > |a_{21}| \to 1 > |\frac{a_{21}}{a_{11}}| \to |a_{12}| > |\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}|$ y $|a_{22}| \geq |a_{12}| + |a_{32}|$ llegamos a $m_{22}^{(1)} = |a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}| > 0$ pues el mayor valor que puede tomar a_{12} es a_{22}. Además, se cumple que $|m_{22}^{(1)}| > |a_{32}| = |m_{32}^{(1)}|$ pues $|a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}| > |a_{22}| - |\frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}| > |a_{22}| - |a_{12}| \geq |a_{32}|$. En el k-ésimo paso se utiliza la hipótesis de inducción para probar que $|m_{k+1,k+1}| > 0$ de la misma forma que en el caso base, hasta el paso $(n-1)$ en donde se utiliza que $|a_{nn}| > |a_{n-1,n}|$ para mostrar que $|m_{n,n}| > 0$. $\square$

(b) Tomando $f(x) = x^2$ y $n = 2^k$ con $k = 2, ..., 15$ resuelva el sistema usando el método directo para sistemas tridiagonales y haga una grafica loglog del tiempo requerido contra el tamaño de la matriz A.

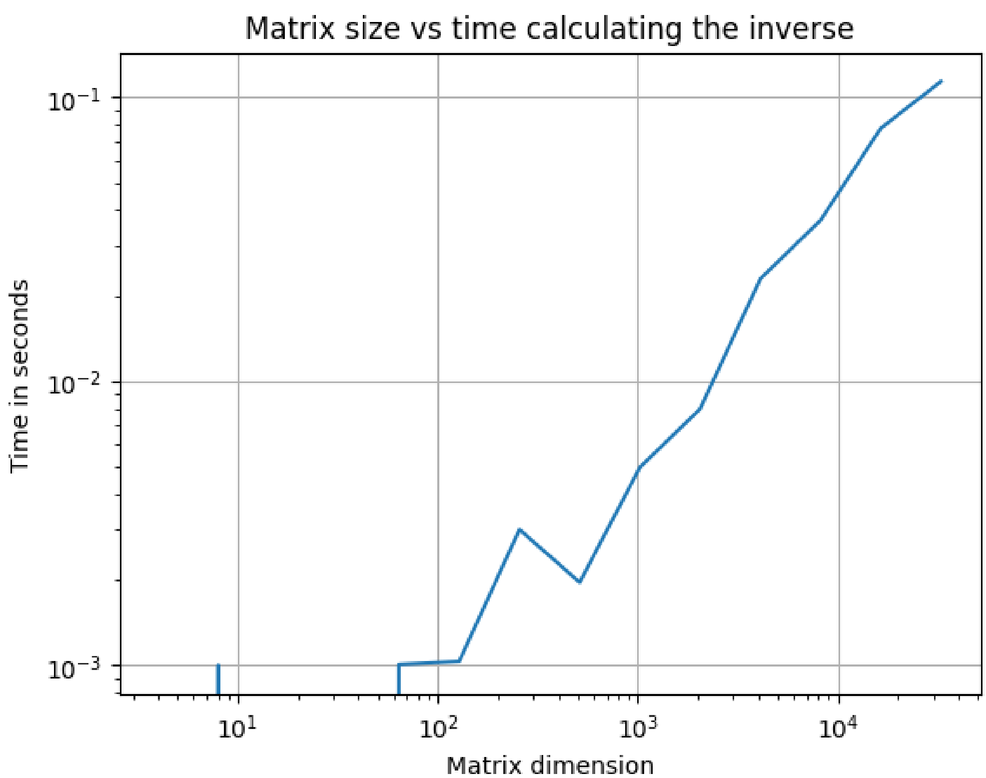

Figure 1: Gráfica loglog.

3. Muestre que para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo se tiene que $lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ donde $x = (x_1, ..., x_n)^T$. Sin perdida de generalidad suponga $max_i\{x_i\} = x_1$. Entonces tenemos dos casos:

(a) $|x_1| > |x_i|$ para todo $i = 1, ..., n$:

Entonces tenemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|x_1|^p \left(1 + \frac{|x_2|^p}{|x_1|^p} + \dots \frac{|x_n|^p}{|x_1|^p}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Cuando $p \to \infty$

$$\left(|x_1|^p \left(1 + \frac{|x_2|^p}{|x_1|^p} + \dots + \frac{|x_n|^p}{|x_1|^p}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \to \left(|x_1|^p (1+0)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|x_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |x_1| = \|x\|_\infty$$

(b) $|x_1| \geq |x_i|$ para q indices:

Entonces tenemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|x_1|^p \left(q + \frac{|x_l|^p}{|x_1|^p} + \dots + \frac{|x_r|^p}{|x_1|^p}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Cuando $p \to \infty$

$$\left(|x_1|^p \left(q + \frac{|x_l|^p}{|x_1|^p} + \dots + \frac{|x_r|^p}{|x_1|^p}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \to \left(|x_1|^p (q+0)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|x_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{p}} = |x_1| \cdot 1 = \|x\|_\infty$$

$\square$