Nombre: Esteban Leiva

Código: 202021368

Teoría de Análisis Numérico

MATE-2604

Tarea 7

1. Encuentre la fórmula de cuadratura de la forma $Af(0) + Bf(2) + Cf(4)$, que sea de grado 2, para aproximar
$$\int_1^3 f(x)dx.$$
Transforme la fórmula para aproximar la integral sobre $[a,b]$ y defina un método compuesto a partir de esta fórmula de cuadratura.

Desarrollo:

La formula de cuadratura esta dada por $Af(0) + Bf(2) + Cf(4)$ donde

$$\begin{aligned}
A = \int_1^3 L_0(x)dx &= \int_1^3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}dx \\
&= \int_1^3 \frac{(x-2)(x-4)}{-2\cdot -4}dx \\
&= \frac{1}{8}\int_1^3 x^2 - 6x + 8dx \\
&= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = \int_1^3 L_1(x)dx &= \int_1^3 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}dx \\
&= \int_1^3 \frac{x(x-4)}{2\cdot -2}dx \\
&= -\frac{1}{4}\int_1^3 x^2 - 4xdx \\
&= -\frac{1}{4}\cdot -\frac{22}{3} = \frac{11}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C = \int_1^3 L_2(x)dx &= \int_1^3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}dx \\
&= \int_1^3 \frac{x(x-2)}{4\cdot 2}dx \\
&= \frac{1}{8}\int_1^3 x^2 - 2xdx \\
&= \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Transformando la fórmula para $[a,b]$:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{12}f\left(\frac{3a-b}{2}\right) + \frac{11}{6}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{12}f\left(\frac{3b-a}{2}\right)\right] \\
&= \frac{b-a}{24}\left[f\left(\frac{3a-b}{2}\right) + 22f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{3b-a}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

Ahora, para definir un método compuesto a partir de la formula anterior partimos el intervalo $[a,b]$ en puntos equidistantes

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad x_i = a + ih.$$

De esta manera,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{x_{i+1}-x_i}{24}\left[f\left(\frac{3x_i - x_{i+1}}{2}\right) + 22f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f\left(\frac{3xi+1-x_i}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

2. Suponga que

$$\int_a^b w(x)q(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i q(x_i)$$

para todo polinomio q de grado menor o igual a $2n+1$. Es decir, la fórmula de cuadratura es de grado $2n+1$. Muestre que el polinomio $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ es ortogonal a todo polinomio de grado menor o igual a n con respecto al producto interno definido por w y el intervalo $[a,b]$. Muestre además que ninguna fórmula de cuadratura puede tener grado mayor que $2n+1$ sin importar los valores c_i's y x_i's.

Demostración. Considere $p(x)$ un polinomio de grado menor o igual a n. El polinomio $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\cdot p(x)$ es de grado $2n+1$. Entonces,

$$\int_a^b \left(\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\cdot p(x)\right)\cdot w(x)dx = \int_a^b q(x)\cdot w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot q(x_i)$$

pero sabemos que para todo $j = 0,..,n$

$$q(x_j) = \prod_{i=0}^{n}(x_j - x_i)\cdot p(x_j) = 0\cdot p(x_j) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b q(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot 0 = 0$$

como queríamos.

Ahora, veamos que ninguna formula de cuadratura puede tener grado mayor que $2n+1$ por contradicción. Suponga que si existe una formula de cuadratura

$$\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

para algún polinomio $p(x)$ de grado mayor a $2n+1$. Luego, si $p(x) = \prod_{i=0}^{n}(x_- x_i)\cdot\prod_{i=0}^{n}(x_- x_i)$ entonces

$$\sum_{i=0}^{n} c_i p(x_i) = 0$$

y por lo tanto

$$\int_a^b \prod_{i=0}^{n}(x_- x_i)\cdot\prod_{i=0}^{n}(x_j - x_i)\cdot w(x)dx = 0.$$

Esto implica que $\prod_{i=0}^{n}(x_j - x_i)$ es ortogonal a si mismo, lo cual es una contradicción. $\square$

3. En cada uno de los casos siguientes, tabule el error en la integración numérica usando la regla del trapecio compuesta, la regla de Simpson compuesta, la regla compuesta del ejercicio 1, cuadratura gaussiana con polinomios de Legendre y cuadratura gaussiana con polinomios de Chebyshev para $n = 5, 10, 20, 30$

   (a) $\int_0^{\frac{5\pi}{4}} e^{-x} cos(2x)dx$

	f	n	Trapezoid	Simpsons	Exercise 1	Gaussian Quadrature Legendre	Gaussian Quadrature Chebyshev
0	f1	5	0.012351	0.567513	-0.022016	-0.010119	0.777914
1	f1	10	-0.015060	0.251533	-0.020533	-0.019804	0.753187
2	f1	20	-0.028341	0.099886	-0.029599	-0.029555	0.728234
3	f1	30	-0.038720	0.044579	-0.039210	-0.039202	0.703382

   (b) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

	f	n	Trapezoid	Simpsons	Exercise 1	Gaussian Quadrature Legendre	Gaussian Quadrature Chebyshev
4	f2	5	-0.195421	0.144904	-0.018429	-0.018430	0.501681
5	f2	10	-0.121088	-0.058886	-0.036889	-0.036889	0.473244
6	f2	20	-0.096034	-0.065061	-0.055377	-0.055377	0.444739
7	f2	30	-0.100355	-0.080063	-0.073894	-0.073894	0.416168

   (c) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

	f	n	Trapezoid	Simpsons	Exercise 1	Gaussian Quadrature Legendre	Gaussian Quadrature Chebyshev
8	f3	5	0.965826	3.386198	-1.132828	-0.396431	2.703054
9	f3	10	-0.334425	0.184410	-1.251469	-0.407456	2.737729
10	f3	20	-0.608523	-0.399271	-1.286914	-0.491146	2.344643
11	f3	30	-0.684830	-0.558569	-1.319961	-0.567588	2.029242