Nombre: Esteban Leiva

Código: 202021368

Teoría de Análisis Numérico

MATE-2604

Parcial 1

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertible y $X^{(0)} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ arbitraria. Considere la sucesión de matrices definida por

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + X^{(k)}\left(I - AX^{(k)}\right).$$

(a) Muestre que $I - AX^{(k+1)} = \left(I - AX^{(k)}\right)^2$.

Demostración.

$$\begin{aligned} I - AX^{(k+1)} &= I - A\left(X^{(k)} + X^{(k)}\left(I - AX^{(k)}\right)\right) \\ &= I - AX^{(k)} - AX^{(k)} + AX^{(k)}AX^{(k)} \\ &= I - 2AX^{(k)} + \left(AX^{(k)}\right)^2 \\ &= \left(I - AX^{(k)}\right)^2. \end{aligned}$$

□

(b) Escriba $I - AX^{(k)}$ en términos de A y $X^{(0)}$.

Demostración.

$$\begin{aligned} I - AX^{(k)} &= \left(I - AX^{(k-1)}\right)^2 \\ &= \left(\left(I - AX^{(k-2)}\right)^2\right)^2 \\ &= \left(I - AX^{(k-2)}\right)^{2^2} \\ &\;\vdots \\ &= \left(I - AX^{(0)}\right)^{2^k} \end{aligned}$$

□

(c) Muestre que $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = A^{-1}$ si y solo si $\rho\left(I - AX^{(0)}\right) < 1$.

Demostración. Veamos las dos direcciones

→ Suponga que $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = A^{-1}$. Considere λ un valor propio de $\left(I - AX^{(0)}\right)$ y su vector propio asociado v. Entonces

$$\begin{aligned} \left\|\left(I - AX^{(k)}\right)v\right\| &= \left\|\left(I - AX^{(0)}\right)^{2^k} v\right\| \\ &= \left|\lambda^{2^k}\right| \|v\|. \end{aligned}$$

Note que si $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = A^{-1}$

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \left(I - AX^{(k)}\right) v \right\| = \lim_{k\to\infty} \left\| \left(I - AX^{(0)}\right)^{2^k} v \right\| = \left|\lambda^{2^k}\right| \|v\| = 0$$

Por lo tanto, $\lambda^{2^k} \to 0$ y se llega a que $\lambda < 1$.

$\leftarrow$ Suponga que $\rho\left(I - AX^{(0)}\right) < 1$. De acuerdo a lo visto en clase, si el radio espectral de la matriz es menor a 1 entonces existe una norma matricial $\|\cdot\|_\epsilon$ que cumple $\|I - AX^{(0)}\|_\epsilon \le \rho\left(I - AX^{(0)}\right)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left\| \left(I - AX^{(k)}\right) \right\|_\epsilon &= \lim_{k\to\infty} \left\| \left(I - AX^{(0)}\right)^{2^k} \right\|_\epsilon \\
&\le \lim_{k\to\infty} \left\| \left(I - AX^{(0)}\right) \right\|_\epsilon^{2^k} \\
&\le \lim_{k\to\infty} \rho\left(I - AX^{(0)}\right)^{2^k} = 0.
\end{aligned}$$

Entonces, se concluye que $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = A^{-1}$.

$\square$

2. Sea A una matriz simétrica definida positiva y $A = M - N$ con M invertible. Suponga además que la matriz $Q = M^T + M - A$ es definida positiva. Sea $J = M^{-1}N$.

   (a) Muestre que $A - J^T AJ = (M^{-1}A)^T QM^{-1}A$ y concluya que es simétrica definida positiva.

   Demostración. Primero, escribamos el segundo termino de la igualdad en términos de M, J y N.

   - $M^{-1}A = M^{-1}(M - N) = I - J$
   - $(M^{-1}A)^T = A^T(M^{-1})^T = A(M^{-1})^T = (M - N)(M^{-1})^T$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
(M^{-1}A)^T Q M^{-1} A &= (M - N)(M^{-1})^T (M^T + N)(I - J) \\
&= (M - N)(I + (M^{-1})^T N)(I - J) \\
&= [(M - N)(I + (M^{-1})^T N)](I - J) \\
&= [(M - N) + (M^T - N^T)(M^{-1})^T N)](I - J) \\
&= [(M - N) + M^T (M^{-1})^T N - N^T (M^{-1})^T N](I - J) \\
&= [(M - N) + N - N^T (M^{-1})^T N](I - J) \\
&= [(M - N) + N - (M^{-1}N)^T N](I - J) \\
&= [M - (M^{-1}N)^T N](I - J) \\
&= [M - J^T N](I - J) \\
&= M - MJ - J^T N + J^T NJ \\
&= M - MM^{-1}N - J^T N + J^T NJ \\
&= M - N - J^T N + J^T NJ \\
&= M - N - J^T N + J^T (M - A)J \\
&= M - N - J^T N + J^T MJ - J^T AJ \\
&= A - J^T N + J^T MJ - J^T AJ \\
&= A - J^T N + J^T MM^{-1}N - J^T AJ \\
&= A - J^T N + J^T N - J^T AJ \\
&= A - J^T AJ
\end{aligned}
$$

Ahora, veamos que es simétrica

$$
\begin{aligned}
(A - J^T AJ)^T &= [(M^{-1}A)^T Q M^{-1} A]^T \\
&= (M^{-1}A)^T Q^T (M^{-1}A) \\
&= (M^{-1}A)^T (M^T + M - A)^T (M^{-1}A) \\
&= (M^{-1}A)^T (M + M^T - A^T)(M^{-1}A) \\
&= (M^{-1}A)^T (M^T + M - A)(M^{-1}A) \\
&= (M^{-1}A)^T Q (M^{-1}A) \\
&= A - J^T AJ.
\end{aligned}
$$

Finalmente, veamos que es definida positiva. Tome un vector $x \neq 0$

$$
\begin{aligned}
x^T (A - J^T AJ)x &= x^T (A - J^T AJ)x \\
&= x^T ((M^{-1}A)^T Q M^{-1} A)x \\
&= [(M^{-1}A)x]^T Q [(M^{-1}A)x]
\end{aligned}
$$

Entonces como Q es definida positiva si $(M^{-1}A)x \neq 0$ tenemos que $x^T(A - J^TAJ)x > 0$. Como A es definida positiva $Ax \neq 0$, pues si lo fuera llegaríamos a una contradicción con el hecho de que A es definida positiva. Además, como M es invertible, $M^{-1}x = 0 \iff x = 0$; entonces, $(M^{-1}A)x \neq 0$ como queríamos. $\square$

(b) Sea λ valor propio de J y considere $v \neq 0$ un vector propio asociado de λ para mostrar que $|\lambda| < 1$ usando lo anterior.

Demostración. Como $A - J^TAJ$ es definida positiva entonces

$$\begin{aligned} v^T(A - J^TAJ)v &= v^TAv - v^TJ^TAJv \\ &= v^TAv - (Jv)^TA(Jv) \\ &= v^TAv - (\lambda v)^TA(\lambda v) \\ &= v^TAv - \lambda^2 v^TAv > 0. \end{aligned}$$

Reorganizando la ultima ecuación llegamos a que

$$v^TAv > \lambda^2 v^TAv \to \frac{v^TAv}{v^TAv} > \lambda^2 \to \lambda^2 < 1.$$

Luego, $|\lambda| < 1$ como queríamos. $\square$

(c) ¿Que puede decir del método iterativo definido por esta descomposición?

Afirmación: El método iterativo definido por esta descomposición converge.

Demostración. El método iterativo definido por la descomposición regular de $Ax = b$,

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

converge porque $\rho(M^{-1}N) = \rho(J) < 1$. $\square$

3. Sea $f \in C^{m+1}([a,b])$ y p una raíz de multiplicidad $m > 1$, es decir que $f^{(s)}(p) = 0$ para $s \leq m - 1$ y $f^{(m)}(p) \neq 0$.

(a) Muestre que en este casi el método de Newton tiene orden de convergencia lineal y además

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = \frac{m-1}{m}.$$

Demostración. El método de Newton esta dado por $x_{n+1} = g(x_n)$ donde $g(x_n) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Si p es una raíz de multiplicidad m de f entonces podemos escribir $f(x) = (x-p)^m h(x)$. Entonces podemos calcular

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{(x-p)^m h(x)}{m(x-p)^{m-1}h(x) + (x-p)^m h'(x)} \\ &= x - \frac{(x-p)^m h(x)}{(x-p)^{m-1}\left(mh(x) + (x-p)h'(x)\right)} \\ &= x - \frac{(x-p)h(x)}{mh(x) + (x-p)h'(x)}. \end{aligned}$$

Derivando esta función llegamos a

$$g'(x) = 1 - \frac{[mh(x) + (x-p)h'(x)][h(x) + (x-p)h'(x)] - [(x-p)h(x)][mh'(x) + h'(x) + (x-p)h''(x)]}{[mh(x) + (x-p)h'(x)]^2}$$

y evaluando en p

$$\begin{aligned} g'(p) &= 1 - \frac{[mh(p)][h(p)]}{[mh(p)]^2} \\ &= 1 - \frac{m \cdot h(p)^2}{m^2 \cdot h(p)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{m} \\ &= \frac{m-1}{m}. \end{aligned}$$

Como $\frac{m-1}{m} \neq 0$ podemos concluir que la convergencia es lineal. Además, tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = |g'(p)| = \frac{m-1}{m}.$$

$\square$

(b) ¿Cómo puede modificar el método para recuperar la convergencia cuadrática?

Afirmación: Se puede recuperar la convergencia cuadrática haciendo el cambio

$$g(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Demostración. Utilizando la misma linea de pensamiento que el anterior inciso

$$\begin{aligned} g(x) &= x - m \cdot \frac{(x-p)^m h(x)}{m(x-p)^{m-1}h(x) + (x-p)^m h'(x)} \\ &= x - \frac{m \cdot (x-p)^m h(x)}{(x-p)^{m-1}\left(mh(x) + (x-p)h'(x)\right)} \\ &= x - \frac{m \cdot (x-p)h(x)}{mh(x) + (x-p)h'(x)}. \end{aligned}$$

Derivando llegamos a que

$$g'(x) = 1 - \frac{[mh(x) + (x-p)h'(x)][m \cdot h(x) + m \cdot (x-p)h'(x)] - [m \cdot (x-p)h(x)][mh'(x) + h'(x) + (x-p)h''(x)]}{[mh(x) + (x-p)h'(x)]^2}$$

y evaluando en p

$$\begin{aligned} g'(p) &= 1 - \frac{[m \cdot h(p)][m \cdot h(p)]}{[mh(p)]^2} \\ &= 1 - \frac{m^2 \cdot h(p)^2}{m^2 \cdot h(p)^2} \\ &= 1 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, recuperamos la convergencia cuadrática. $\square$

4. Considere el método de Steffensen dado por

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)^2}{f(x^k + f(x^k)) - f(x^k)}.$$

Muestre que el orden de convergencia es cuadrático.

Demostración. Antes que nada, supongamos que la multiplicidad de la raíz buscada es 1. Es importante tener en cuenta que el método de Steffensen es un método de iteración de punto fijo. Por lo tanto, para mostrar la convergencia cuadrática es suficiente ver que $g'(r) = 0$ donde

$$g(x) = x - \frac{f(x)^2}{f(x + f(x)) - f(x)}.$$

Usando la expansión de Taylor, existe ζ entre x y $f(x)$ tal que

$$f(x + f(x)) = f(x) + f(x)f'(x) + \frac{1}{2}f(x)^2 f''(\zeta),$$

entonces podemos escribir

$$g(x) = x - \frac{f(x)^2}{f(x) + f(x)f'(x) + \frac{1}{2}f(x)^2 f''(\zeta) - f(x)} = x - \frac{f(x)^2}{f(x)f'(x) + \frac{1}{2}f(x)^2 f''(\zeta)} = x - \frac{f(x)}{f'(x) + \frac{1}{2}f(x)f''(\zeta)}.$$

Usando la definición de la derivada,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to r}\frac{g(x)-g(r)}{x-r} &= \lim_{x\to r}\frac{1}{x-r}\left(x - \frac{f(x)}{f'(x) + \frac{1}{2}f(x)f''(\zeta)} - r + \frac{f(r)}{f'(r) + \frac{1}{2}f(r)f''(\zeta)}\right)\\
&= \lim_{x\to r}\frac{1}{x-r}\left(x - r - \frac{f(x)}{f'(x) + \frac{1}{2}f(x)f''(\zeta)}\right)\\
&= \lim_{x\to r}\left(1 - \frac{1}{x-r}\cdot\frac{f(x)}{f'(x) + \frac{1}{2}f(x)f''(\zeta)}\right)\\
&= \lim_{x\to r}\left(1 - \frac{f(x)-0}{x-r}\cdot\frac{1}{f'(x) + \frac{1}{2}f(x)f''(\zeta)}\right)\\
&= 1 - \lim_{x\to r}\frac{f(x)-0}{x-r}\cdot\frac{1}{f'(x) + \frac{1}{2}f(x)f''(\zeta)}\\
&= 1 - f'(r)\cdot\frac{1}{f'(r)}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Entonces, como queríamos $g'(r) = 0$ y concluimos que el orden de convergencia es cuadrática. Note que usamos que la multiplicidad de la raíz es 1 en el paso de la primera igualdad a la segunda, pues nos permite decir que

$$\frac{f(r)}{f'(r) + \frac{1}{2}f(r)f''(\zeta)} = 0.$$

□

6. Considere las funciones

- $f(x) = \frac{1}{x} - e^x$ en $[0, 1]$.
- $g(x) = x - \tan x$ alrededor de $\frac{9}{2}$.

- $h(x) = \sin x + x^2 \cos x - x^2 - x$ alrededor de 0.

(a) Implemente los métodos de la bisección, Newton y secante para calcular la raíz de la función. Defina claramente el criterio de parada de cada método. En cada caso estime y grafique $\frac{\log|e_{k+1}|}{\log|e_k|}$. ¿Que interpretación le puede dar al limite de la gráfica?

Para cada método definimos el criterio de parada como $|f(x^k)| < 10^{-6}$. Con esto realizamos una gráfica probando los tres métodos para cada función dada

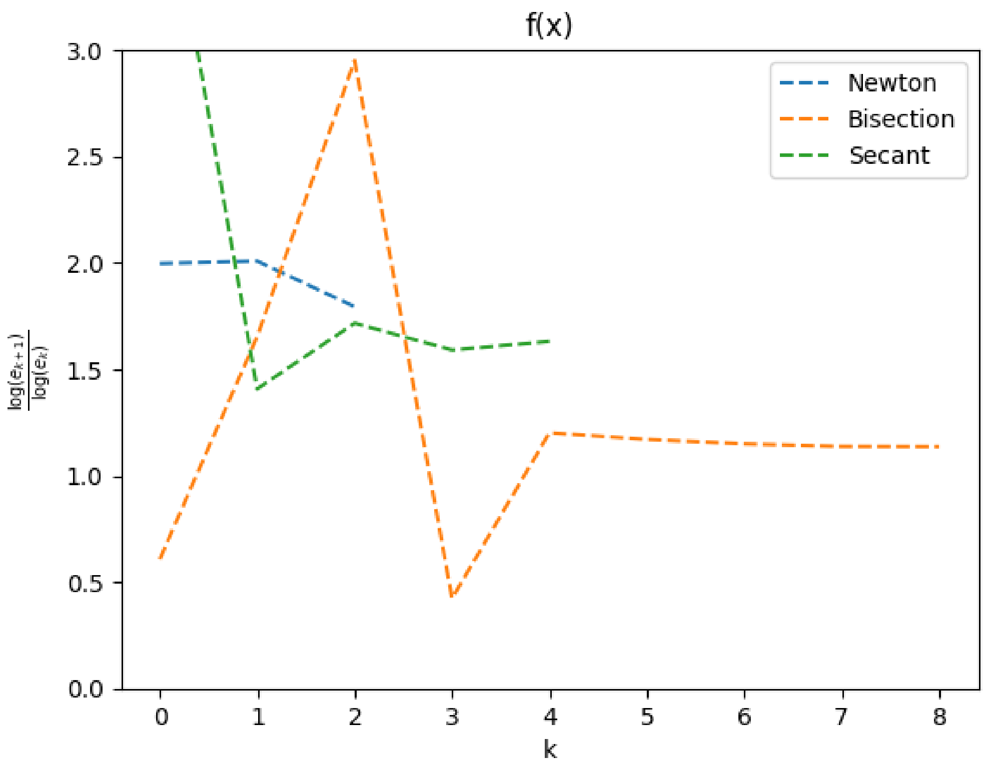

Figure 1: Gráfica $\frac{\log|e_{k+1}|}{\log|e_k|}$ f(x).

Para f newton converge entre 1.5 y 2, secante converge a un numero cercano a 1.5 y el método de la bisección converge a 1.

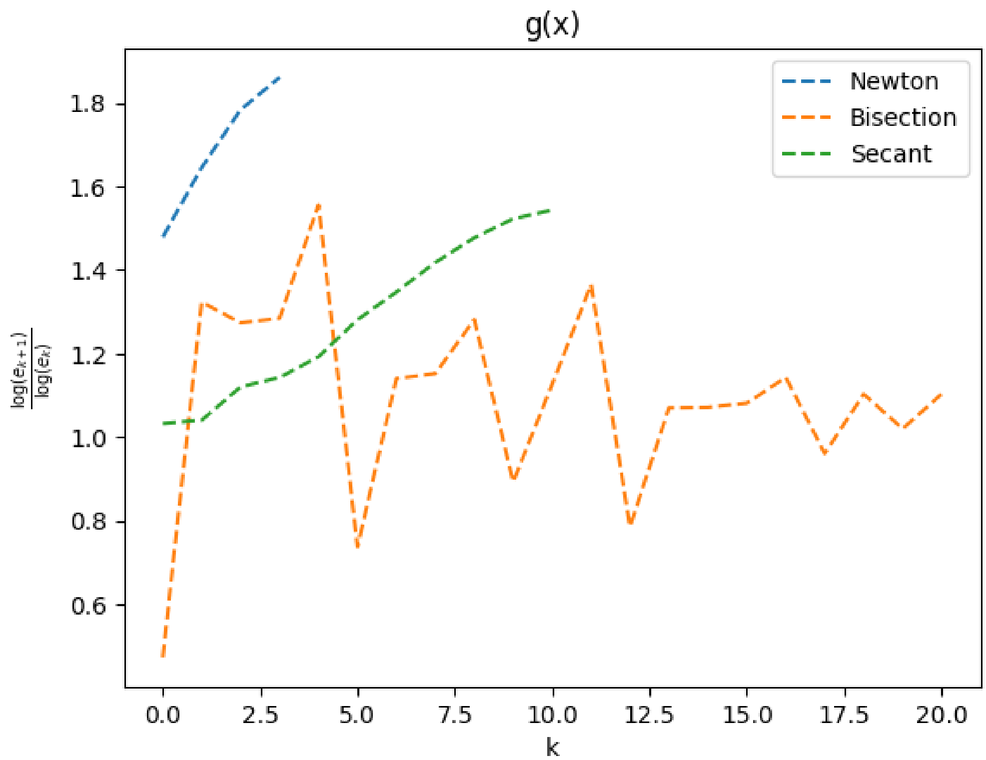

Figure 2: Gráfica $\frac{\log |e_{k+1}|}{\log |e_k|}$ g(x).

Para g newton converge a un numero cercano a 2, secante converge a un numero cercano a 1.5 y el método de la bisección converge a 1.

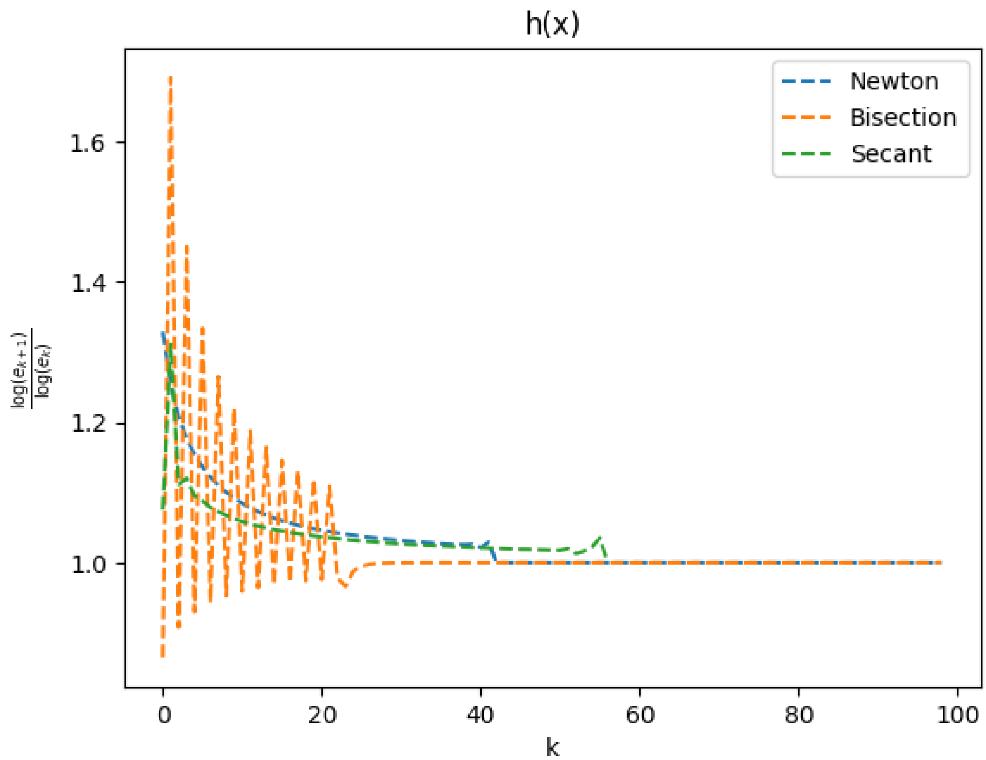

Figure 3: Gráfica $\frac{\log|e_{k+1}|}{\log|e_k|}$ h(x).

Para h newton converge a un numero a 1, secante converge a un numero cercano a 1 y el método de la bisección converge a 1.

Por lo tanto, la interpretación que se le puede dar al limite de la gráfica es el orden de convergencia del método; lo cual tiene sentido porque estamos calculando el limite de $\frac{\log|e_{k+1}|}{\log|e_k|}$.

(b) Considere la modificación del método de Newton del ejercicio 3 con la función h para comprobar que esta modificación tiene de nuevo orden de convergencia cuadrático.

La función h tiene un cero de multiplicidad $m = 3$, el cual es 0. Por lo tanto, si hacemos la modificación del punto 3 y graficamos podemos observar que

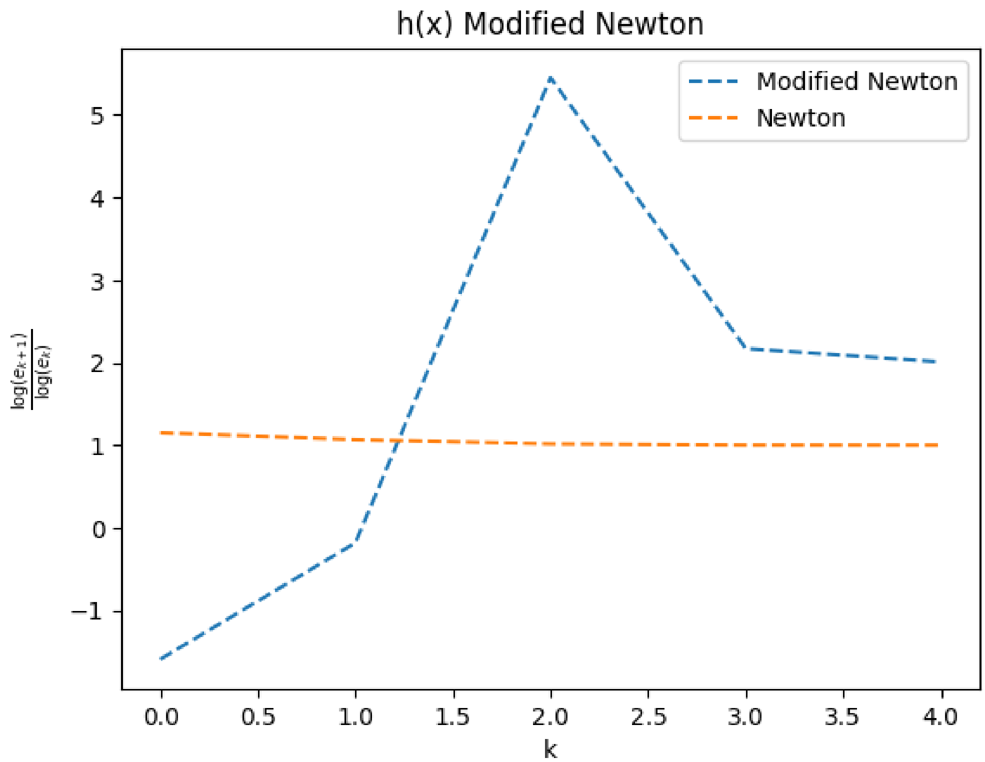

Figure 4: Gráfica $\frac{\log|e_{k+1}|}{\log|e_k|}$ h(x).

Entonces, comprobamos que el nuevo orden de convergencia es cuadrático con la modificación y lineal sin la modificación.

(c) Considere el método de Steffensen dado por el ejercicio 4. Compruebe su orden de convergencia cuadrático con las funciones f y g. ¿Que puede decir de la convergencia de la función h?

El orden de convergencia para las funciones f y g es cuadrático como se puede observar en las siguientes dos gráficas en las que hay tendencia al número 2:

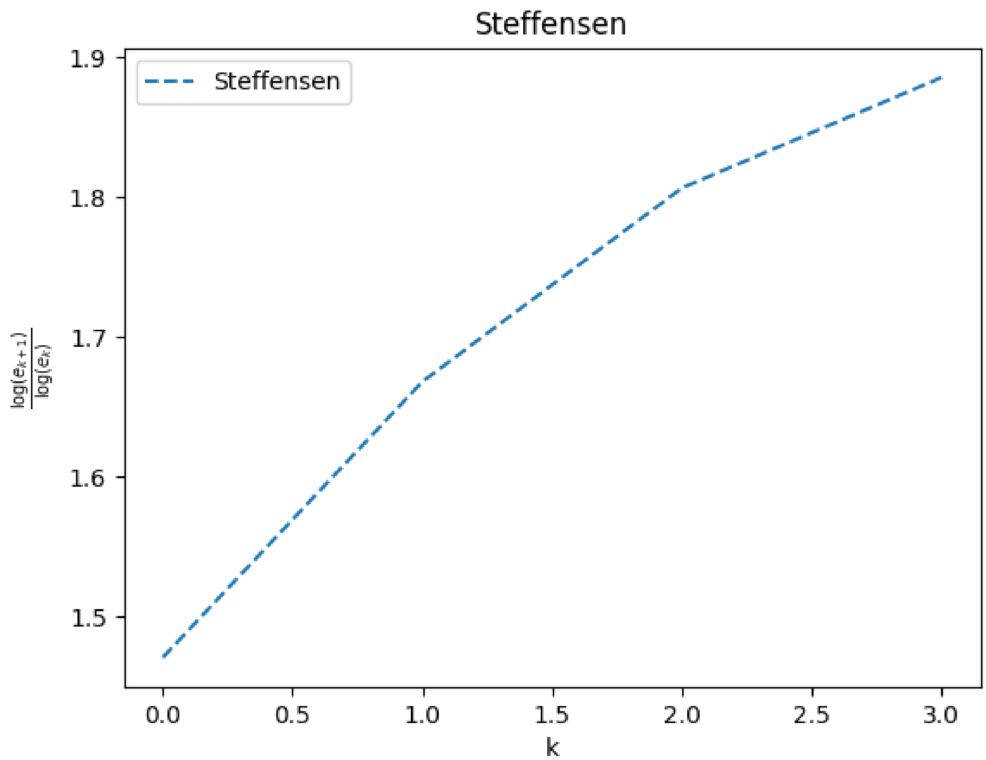

Figure 5: Gráfica $\frac{\log|e_{k+1}|}{\log|e_k|}$ f(x).

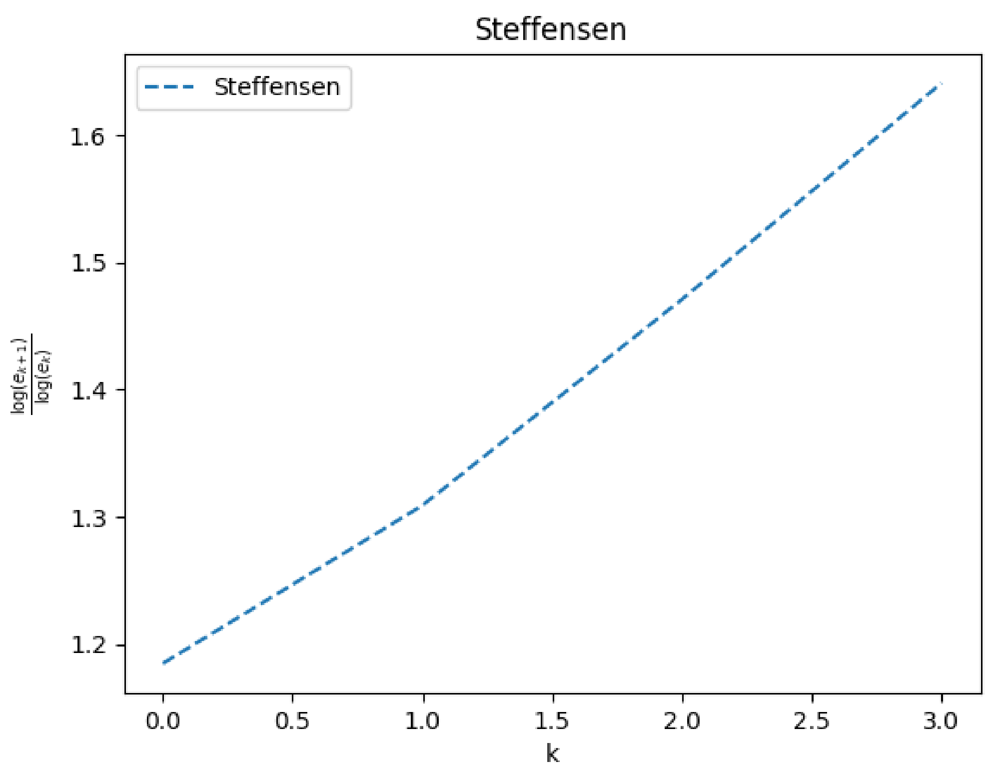

Figure 6: Gráfica $\frac{\log|e_{k+1}|}{\log|e_k|}$ f(x).

Sobre la función h, tenemos que la convergencia es lineal, lo cual es sensato porque la multiplicidad de la raíz 0 es 3:

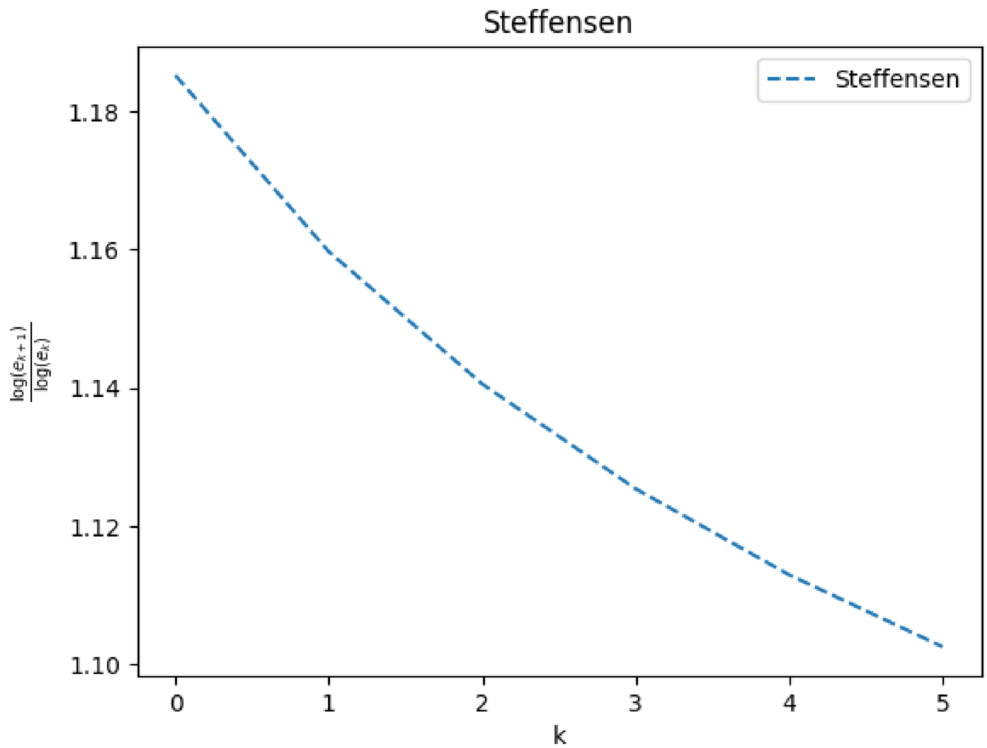

Figure 7: Gráfica $\frac{\log|e_{k+1}|}{\log|e_k|}$ f(x).