Tarea 4

Fecha de entrega: Febrero 24 de 2024

1. *a*) Sea $A \in M^{n\times n}$ simétrica definida positiva. Muestre que n vectores no nulos A-conjugados son una base de $\mathbb{R}^n$.

   b) Sea $A \in M^{n\times n}$ arbitraria y sea $\{u^1, \ldots, u^n\}$ un sistema A-ortonormal. Muestre que A debe ser simétrica definida positiva.

2. Considere la siguiente ecuación diferencial con condiciones de frontera:

$$\begin{cases} y'' = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Este problema se puede resolver numéricamente resolviendo el problema

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i), & i = 1, 2, \ldots, n \\ y_0 = 0 \\ y_{n+1} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

con $y_i = y(x_i)$, $x_i = ih$ y $h = \frac{1}{n+1}$.

   a) Encuentre los valores propios de A y muestre que $\kappa(A) \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Ayuda: $A = 2(I + B)$ tal que el polinomio característico de B es el polinomio de Chebyshev.

   b) Tomando $f(x) = x^2$, y $n = 2^k$ con $k = 2, \ldots, 15$ resuelva el sistema usando los siguientes métodos y haga una gráfica loglog del tiempo requerido contra el tamaño de la matriz A:

      1) Directo: Use el algoritmo para sistemas tridiagonales.
      2) Jacobi: Pare cuando $\|x^k - x^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.
      3) Gauss-Seidel: Pare cuando $\|x^k - x^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.
      4) SOR con w óptimo: Pare cuando $\|x^k - x^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$. Calcule exactamente el radio espectral de la matriz J del método de Jacobi.

   c) Escoja el "mejor" método de los anteriores, justificando su escogencia, y resuelva el sistema tomando $f(x) = x^2 + 0{,}05$. Compare el error relativo de la nueva solución con la cota obtenida en clase usando el número de condición.

Mauricio Junca