Tarea 3

Fecha de entrega: Febrero 14 de 2024

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonal con entradas no nulas en las tres diagonales tales que $|a_{11}| > |a_{21}|$, $|a_{nn}| > |a_{n-1,n}|$ y $|a_{ii}| \geq |a_{i-1,i}| + |a_{i+1,i}|$ para $i = 2, \ldots, n-1$. Muestre que A es invertible. Ayuda: Piense en la eliminación de Gauss de A.

2. Dada $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$, muestre que $\|\cdot\|_*$ definida como

$$\|x\|_* = \sup\{\langle z, x\rangle : \|z\| = 1\}$$

   es una norma en $\mathbb{R}^n$ llamada la norma dual de $\|\cdot\|$. Muestre que $\|\cdot\|_{**} = |\cdot\|$. Encuentre la norma dual de la norma ℓ_p.

3. Sea $\|\cdot\|$ norma matricial submultiplicativa, entonces $\rho(A) \leq \|A\|$ para toda matriz A. En particular muestre que $\rho(A) \leq \|A\|_F$.

4. Dado n, genere una matriz de $n \times n$ con entradas distribuidas uniforme (-1,1). Convierta la matriz a una con diagonal estríctamente dominante modificando la diagonal. Llame a esta matriz A. Resuelva el sistema $Ax = b$ con b el vector de unos para $n = 2^k$ con $k = 2, \ldots, 15$ usando los siguientes métodos y haga una gráfica loglog del tiempo requerido contra el tamaño de la matriz A:

   a) LU: Calcule la factorización LU de la matriz y luego resuelva los dos sistemas triangulares.

   b) Jacobi: Pare cuando $\|x^k - x^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.

   c) Gauss-Seidel: Pare cuando $\|x^k - x^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.

   d) SOR con $w = 0{,}25, 0{,}5$ y $0{,}75$: Pare cuando $\|x^k - x^{k-1}\| < 10^{-6}$, $x^0 = 0$.

Mauricio Junca