Tarea 2

Fecha de entrega: Febrero 7 de 2024

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonal con entradas en la diagonal no nulas tales que $|a_{11}| > |a_{21}|$, $|a_{nn}| > |a_{n-1,n}|$ y $|a_{ii}| \geq |a_{i-1,i}| + |a_{i+1,i}|$ para $i = 2, \ldots, n-1$. Muestre que A es invertible. Ayuda: Piense en la eliminación de Gauss de A.

2. Considere la siguiente ecuación diferencial con condiciones de frontera:

$$\begin{cases} y'' = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

   Este problema se puede resolver numéricamente resolviendo el problema

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ y_0 = 0 \\ y_{n+1} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

   con $y_i = y(x_i)$, $x_i = ih$ y $h = \frac{1}{n+1}$.

   a) Escriba (1) de la forma $Ay = b$ y compruebe que A es invertible usanod el ejercicio anterior.

   b) Tomando $f(x) = x^2$, y $n = 2^k$ con $k = 2, \ldots, 15$ resuelva el sistema usando el método directo para sistemas tridiagonales y haga una gráfica loglog del tiempo requerido contra el tamaño de la matriz A.

3. Muestre que para $x \in \mathbb{R}^n$ fijo se tiene que $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Mauricio Junca