Asset Pricing Theory

Juan Francisco Muñoz-Elguezabal

July 15, 2017

Abstract

Asset Pricing Theory ó la Teoría de valuación de activos como marco para modelar a el precio de un activo financiero riesgoso como un flujo de pagos.

1 Teoria de valuacion de activos

Empecemos por un caso simple que, en lo general, captura varias otras situaciones mas complejas. Encontremos el valor, en el tiempo t, de un pago x_{t+1}. Para el caso de que el activo fuese una accion :

$$x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1} \tag{1}$$

donde:
x_{t+1} : Pago x en el tiempo t, a realizarse en el tiempo $t+1$
p_{t+1} : Precio futuro de la accion
d_{t+1} : Dividendo pagado por la accion.

Se establece que x_{t+1} es una V.A. que representa el pago en $t+1$ como el valor de la inversion x en el tiempo $t+1$ sin restar ni dividir el valor por cualquier otro factor. En otras palabras, se aclara lo siguiente:

$$x_{t+1} \neq ln(\frac{p_{t+1}}{p_t}) - 1 \quad ; \quad x_{t+1} \neq \frac{p_{t+1} - p_t}{p_t} \tag{2}$$

Es decir, x_{t+1} representa simplemente un valor de *pago* esperado al tiempo t

Hasta ahora hemos involucrado el pago x_{t+1}, pero no hemos hablado sobre a quíen se le paga, el agente o inversionista. Cochrane(2001) propone utilizar un modelo para seguir ilustrando la propuesta general de la teoría de valuación de activos.

1.1 El modelo simple de utilidad a un periodo futuro

Utilizando el concepto económico de **Función de utilidad**, expresaremos lo anterior en términos de consumo presente y posibles consumos futuros a realizar por un inversionista. El modelo es el siguiente:

$$U(c_t, c_{t+1}) = U(c_t) + \beta U(c_{t+1}) \tag{3}$$

donde:
c_t : Consumo en el tiempo t ; Presente
c_{t+1} : Consumo en el tiempo $t+1$; Futuro
β : Factor de descuento subjetivo

Lo siguiente es aclarar algunas restricciones. El agente tiene dos cantidades o dotaciones de consumo. e_t para el consumo en el tiempo t, es decir, en el tiempo presente, y e_{t+1} para el consumo en el tiempo futuro $t+1$. Además, se denota con k el número de títulos del activo riesgoso que puede adquirir el agente, siendo k el efecto de compra o *posición larga* y $-k$ el de venta o *posición corta.* De tal manera que, para un k dado se tiene que las restricciones se pueden establecer de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} c_t &= e_t - p_t K \\ c_{t+1} &= e_{t+1} + x_{t+1} K \end{aligned} \tag{4}$$

Finalmente nótese que la utilidad de consumo en $t+1$ es la utilidad de consumo futuro, por lo tanto, incierta, por lo que consideraremos su valor esperado $E\left[c_{t+1}\right]$. Con lo anterior se plantea que el objetivo principal es optimizar la función de utilidad del agente, respecto a el k número de acciones a consumir con las restricciones para c_t y c_{t+1}. La expresión matemática que denota este problema es la siguiente:

$$\underset{\{k\}}{max} \quad U(c_t) + E\left[\beta U(c_{t+1})\right] \tag{5}$$

Abordaremos este problema de optimización mediante un método simple, derivamos la ecuación respecto de k e igualamos a 0. Empezamos con:

$$U(c_t, c_{t+1}) = U(c_t) + E\left[\beta U(c_{t+1})\right] \tag{6}$$

Sustituimos las c_t y c_{t+1}

$$U(c_t, c_{t+1}) = U(e_t - P_t K) \quad + \quad E\left[\beta U(e_{t+1} + X_{t+1}K)\right] \tag{7}$$

Derivamos respecto de K e igualamos a cero.

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial K}U(e_t - P_t K) + E\left[\beta \frac{\partial}{\partial K}U(e_{t+1} + X_{t+1}K)\right] \\
0 &= U^{'}(C_t)\left(\frac{\partial}{\partial K}e_t - \frac{\partial}{\partial K}P_t K\right) + E\left[\beta U^{'}(C_{t+1})\left(\frac{\partial}{\partial K}e_{t+1} + \frac{\partial}{\partial K}X_{t+1}K\right)\right] \\
0 &= U^{'}(C_t)\left(0 - P_t\right) + E\left[\beta U^{'}(C_{t+1})\left(0 + X_{t+1}\right)\right] \\
0 &= U^{'}(C_t)\left(0 - P_t\right) + E\left[\beta U^{'}(C_{t+1})\left(0 + X_{t+1}\right)\right] \\
0 &= -U^{'}(C_t)P_t + E\left[\beta U^{'}(C_{t+1})X_{t+1}\right]
\end{aligned} \tag{8}$$

Finalmente se tiene que:

$$U^{'}(C_t)P_t = E\left[\beta U^{'}(C_{t+1})X_{t+1}\right] \tag{9}$$

Recordando que el cálculo de *Valor esperado* lo hacemos particularmente para X_{t+1}, de tal manera que β y $U^{'}(C_{t+1})$ los consideramos como constantes, caso similar para $U^{'}(C_t)$. Con esto podemos reexpresar la última ecuación de la siguiente manera:

$$P_t = E\left[\beta \frac{U^{'}(C_{t+1})}{U^{'}(C_t)}X_{t+1}\right] \Rightarrow P_t = E\left[m_{t+1}X_{t+1}\right] \tag{10}$$

donde:
m_{t+1} : Factor estocástico de descuento
X_{t+1} : Pago x en el tiempo t, a realizarse en el tiempo $t+1$

Porque, de no existir incertidumbre en el agente sobre sus decisiones de consumo, el modelo propuesto para P_t sería de la forma:

$$P_t = \frac{1}{r_f}X_{t+1} \tag{11}$$

donde:
r_f : Tasa libre de riesgo
Finalmente hemos construido un modelo para el precio del activo riesgoso, P_t utilizando el modelo simple de consumo, en el tiempo presente t y tiempo futuro $t+1$.

Retomando entonces

$$P_t = E\left[m_{t+1} X_{t+1}\right] \tag{12}$$

donde:
P_t : Precio del activo riesgoso en el tiempo $t+1$
m_{t+1} : Factor estocástico de descuento
X_{t+1} : Pago x en el tiempo t, a realizarse en el tiempo $t+1$

Para el caso que fuese una acción. El pago X_{t+1} recibido por el agente es igual a la suma del precio del activo riesgoso P_{t+1} sumado al pago de dividendos d_{t+1}, es decir:

$$X_{t+1} = P_{t+1} + d_{t+1} \tag{13}$$

Sin embargo, recordemos que nuestro enfóque es respecto al análisis de lo anterior en la microestructura del mercado, donde las transacciones son realizadas en un intervalo corto de tiempo. Esto permite realizar las siguientes *conceciones*:

$d_{t+1} = 0$; En un plazo muy corto la acción no recibirá dividendos
$\beta \approx 1$; El agente no tiene preferencia por intervalos largos de consumo
$U^{'}(C_{t+1}) = U^{'}(C_t)$; No afecta la incertidumbre de consumo.

Empezando por

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= P_{t+1} + 0 \\ X_{t+1} &= P_{t+1} \end{aligned} \tag{14}$$

El efecto sobre la Eq x:

$$P_t = E\left[\beta \frac{U^{'}(C_{t+1})}{U^{'}(C_t)} X_{t+1}\right] \quad \approx \quad P_t = E\left[(1)(1) P_{t+1}\right] \tag{15}$$

Por lo que finalmente se tendrá que el precio del activo riesgoso, P_t, partiendo de un modelo de consumo en tiempo presente y futuro, bajo la perspectiva de la microestructura del mercado, puede ser modelado como un proceso estocástico particular, una martingala.

$$P_t = E\left[P_{t+1}\right] \quad \equiv \quad E\left[P_{t+1}\right] = P_t \tag{16}$$