El modelo de Roll

Juan Francisco Muñoz-Elguezabal

July 18, 2017

Abstract

Al tomar la perspectiva de la microestructura de la dinámica del precio de un activo financiero, cambiaremos el enfóque de las características de los precios mensuales y diarios hacia las características de la dinámica de los precios en horizontes de tiempo en minutos o segundos. Lo anterior hace que se muestre la dicotomía fundamental que está presente en muchos de los modelos de microestructura, la distinción entre las componentes del precio debido al valor fundamental del activo financiero y a aquellas atribuibles a la organización del mercado y procesos de trading. Se presentará el modelo de Roll, su planteamiento y derivación teórica formal.

1 Modelo

En términos básicos y para el caso que analizaremos que es el precio de acciones, el valor fundamental de la acción representa el valor presente de los flujos de efectivo futuros que se esperan y que serán duraderos, en cambio, el precio de transacción.

Como se probará en el curso del documento, el modelo de Roll tiene dos parámetros, C y ${\sigma^2}_u$. Estos parámetros pueden ser convenientemente estimados con la información de la varianza y autocovarianza de primer orde del cambio de los precios $\triangle P_t$. Pero antes, se plantean las dos equaciones iniciales que componen el modelo, una para modelar el valor fundamental del activo financiero y otra para modelar el precio de transacción del mismo activo. Veamos:

$$\begin{aligned} m_t &= m_{t-1} + u_t \\ p_t &= m_t + Cq_t \end{aligned} \tag{1}$$

donde:
m_t : Precio *eficiente* en el tiempo t, (No es observado).
m_{t-1} : Precio *eficiente* en el tiempo $t-1$, (ya observado).
p_t : Precio de *transacción* en el tiempo t, (Observado).
C : Costo de transacción impuesto por los *dealers*.
u_t : Componente aleatoria $iid \sim N(0, \sigma^2)$
q_t : Variable binaria de dirección de transacción.

$$q_t \begin{cases} Buy \quad = \quad +1 \quad ; \quad P(q_t|q_t = +1) \quad = \quad \frac{1}{2} \\ Sell \quad = \quad -1 \quad ; \quad P(q_t|q_t = -1) \quad = \quad \frac{1}{2} \\ Buy/Sell \quad ; \quad P(q_t|(q_t = +1 \quad \vee \quad q_t = -1)) \quad = \quad 1 \end{cases} \tag{2}$$

q_t es un proceso binario, si $q_t = Sell \rightarrow P(q_t) = \frac{1}{2}$ de igual manera, si $q_t = Buy \rightarrow P(q_t) = \frac{1}{2}$, por lo tanto, la probabilidad de que ocurra el evento $Sell$ o Buy es la suma de las probabilidades para ambos casos, entonces $P(q_t|(q_t = +1 \vee q_t = -1)) = 1$.

Cálculo de la diferencia de precios $\triangle P_t$

En base a las dos ecuaciones propuestas como el modelo de roll, se puede calcular lo siguiente.

$$\begin{aligned} \triangle P_t = P_t - P_{t-1} &= (m_t + Cq_t) - (m_{t-1} + Cq_{t-1}) \\ \triangle P_t &= m_t + Cq_t - m_{t-1} - Cq_{t-1} \\ \triangle P_t &= m_t - m_{t-1} + Cq_t - Cq_{t-1} \\ \triangle P_t &= (m_{t-1} + u_t) - m_{t-1} + Cq_t - Cq_{t-1} \\ \triangle P_t &= m_{t-1} - m_{t-1} + Cq_t - Cq_{t-1} + u_t \end{aligned}$$

De manera que tendremos a la diferencia del precio eficiente en el tiempo $t-1$ respecto al precio eficiente en el tiempo t como la suma algebraica del costo de transacción C multiplicados por la probabilidad del sentido de la transacción en tiempo t y $t-1$, más, una componente de ruido o aleatoriedad.

$$\triangle P_t = Cq_t - Cq_{t-1} + u_t \tag{3}$$

Cálculo de la diferencia de precios $\triangle P_{t-1}$

De manera similar se calcula el siguiente valor.

$$
\begin{aligned}
\triangle P_{t-1} = P_{t-2} - P_{t-1} = (m_{t-2} - Cq_{t-2}) - (m_{t-1} - Cq_{t-1}) \\
\triangle P_{t-1} &= (m_{t-2} - Cq_{t-2}) - [(m_{t-2} + u_{t-1}) - Cq_{t-1}] \\
\triangle P_{t-1} &= m_{t-2} - Cq_{t-2} - m_{t-2} - u_{t-1} - Cq_{t-1} \\
\triangle P_{t-1} &= -Cq_{t-2} + Cq_{t-1} - u_{t-1}
\end{aligned}
$$

Para encontrar finalmente que $\triangle P_{t-1}$ es igual a:

$$\triangle P_{t-1} = -Cq_{t-2} + Cq_{t-1} - u_{t-1} \tag{4}$$

Cálculo de la multiplicación de las diferencias de precios $(\triangle P_t \triangle P_{t-1})$

Ahora calcularemos otra expresión que nos será útil en los siguientes pasos.

$$
\begin{aligned}
(\triangle P_t \triangle P_{t-1}) =& (Cq_t - Cq_{t-1} + u_t) - (-Cq_{t-2} - Cq_{t-1} - u_{t-1}) \\
(\triangle P_t \triangle P_{t-1}) =& - C^2 {q_{t-1}}^2 + C^2 q_{t-1} q_{t-2} + Cq_{t-1} u_{t-1} + C^2 q_t q_{t-1} \\
& - C^2 q_t q_{t-2} - Cq_t u_{t-1} + Cq_{t-1} u_t - Cq_{t-2} u_t - u_t u_{t-1}
\end{aligned}
$$

Tendremos entonces el valor de la expresión $(\triangle P_t \triangle P_{t-1})$ como:

$$
\begin{aligned}
(\triangle P_t \triangle P_{t-1}) =& - C^2 {q_{t-1}}^2 + C^2 q_{t-1} q_{t-2} + Cq_{t-1} u_{t-1} + C^2 q_t q_{t-1} \\
& - C^2 q_t q_{t-2} - Cq_t u_{t-1} + Cq_{t-1} u_t - Cq_{t-2} u_t - u_t u_{t-1}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Cálculo de $Var(\triangle P_t)$

Sabemos que lo siguiente se sostiene al utilizar la función generadora de momentos, para el caso de una V.A.

$$Var(X) = E\left[X^2\right] \tag{6}$$

Entonces lo anterior lo podemos utilizar para calcular $Var(\triangle P_t)$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E\left[X^2\right] \\
Var(\triangle P_t) &= E\left[(\triangle P_t)^2\right] \\
Var(\triangle P_t) &= E\left[(Cq_t - Cq_{t-1} + u_t)^2\right] \\
Var(\triangle P_t) &= E\left[C^2 {q^2}_{t-1} + C^2 {q^2}_t - 2C^2 q_{t-1} q_t - 2Cq_{t-1} u_t + Cq_t u_t + {u_t}^2\right] \\
Var(\triangle P_t) &= E\left[C^2 {q^2}_{t-1}\right] + E\left[C^2 {q^2}_t\right] - E\left[2C^2 q_{t-1} q_t\right] - E\left[2Cq_{t-1} u_t\right] + E\left[Cq_t u_t\right] + E\left[{u_t}^2\right]
\end{aligned} \tag{7}
$$

Lo siguiente será buscar reducir la expresión anterior, para lo cual, tenemos algunas equivalencias y consideraciones de apoyo que son las siguientes:

$E\left[q_{t-1}q_t\right] = 0:$ No hay correlación serial

$E\left[u_t\right] = 0:$ Por definición, $iid \sim N(0, \sigma^2)$

$E\left[{u_t}^2\right] = {\sigma_u}^2$ ya que $E\left[x^2\right] = Var(x)$ y $x = \sigma \rightarrow x^2 = {\sigma_u}^2$

$C:$ La comisión es desconocida pero se considera constante.

Quedando entonces que:

$$\begin{aligned} Var(\triangle P_t) &= E\left[C^2{q^2}_{t-1}\right] + E\left[C^2{q^2}_t\right] + E\left[{u_t}^2\right] \\ Var(\triangle P_t) &= C^2E\left[{q^2}_{t-1}\right] + C^2E\left[{q^2}_t\right] + {\sigma_u}^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Para el caso particular de $E\left[{q^2}_{t-1}\right]$ y $E\left[{q^2}_t\right]$ utilizaremos la condición marcada por la distribución de probabilidad de q_t igual para q_{t-1}, tal y como se declaró en (2). Por lo que podemos reescribirlo de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} E\left[q_{t-1}\right] &= E\left[P(q_{t-1}|q_{t-1} = +1)\right] + E\left[P(q_{t-1}|q_{t-1} = -1)\right] = (0.5) + (0.5) = 1 \\ E\left[q_{t-1}^2\right] &= E\left[q_{t-1}q_{t-1}\right] = E\left[q_{t-1}\right]E\left[q_{t-1}\right] = (1)(1) = 1 \\ E\left[q_{t-1}^2\right] &= 1 \\ \\ E\left[q_t\right] &= E\left[P(q_t|q_t = +1)\right] + E\left[P(q_t|q_t = -1)\right] = (0.5) + (0.5) = 1 \\ E\left[q_t^2\right] &= E\left[q_tq_t\right] = E\left[q_t\right]E\left[q_t\right] = (1)(1) = 1 \\ E\left[q_t^2\right] &= 1 \end{aligned} \tag{9}$$

Finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned} Var(\triangle P_t) &= E\left[C^2{q^2}_{t-1}\right] + E\left[C^2{q^2}_t\right] + {\sigma_u}^2 \\ &= C^2E\left[{q^2}_{t-1}\right] + C^2E\left[{q^2}_t\right] + {\sigma_u}^2 = C^2(1) + C^2(1) + {\sigma_u}^2 \\ Var(\triangle P_t) &= C^2(1+1) + {\sigma_u}^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Finalmente se tiene que:

$$\boxed{Var(\triangle P_t) = 2C^2 + {\sigma_u}^2} \tag{11}$$

Cálculo de $Cov(\triangle P_{t-1}\triangle P_t)$

Recordando la expresión ya calculada de $(\triangle P_{t-1}\triangle P_t)$

$$\begin{aligned}(\triangle P_t\triangle P_{t-1}) = &- C^2{q_{t-1}}^2 + C^2q_{t-1}q_{t-2} + Cq_{t-1}u_{t-1} + C^2q_tq_{t-1}\\ &- C^2q_tq_{t-2} - Cq_tu_{t-1} + Cq_{t-1}u_t - Cq_{t-2}u_t - u_tu_{t-1}\end{aligned} \tag{12}$$

Además recordemos que según la función generadora de momentos estadísticos, establece que $Cov(\triangle P_{t-1}\triangle P_t)$ se puede calcular de la siguiente manera:

$$Cov(\triangle P_{t-1}\triangle P_t) = E\left[(\triangle P_t\triangle P_{t-1})\right] \tag{13}$$

Por lo tanto:

$$\begin{gathered}E\left[\triangle P_{t-1}\triangle P_t\right] = E\left[-C^2q_{t-1}^2\right] + E\left[C^2q_{t-1}q_{t-2}\right] + E\left[Cq_{t-1}u_{t-1}\right] +\\ E\left[C^2q_tq_{t-1}\right] - E\left[C^2q_tq_{t-2}\right] - E\left[Cq_tu_{t-1}\right] + E\left[Cq_{t-1}u_t\right] - E\left[Cq_{t-2}u_t\right] - E\left[u_tu_{t-1}\right]\end{gathered} \tag{14}$$

La expresión anterior la podemos reducir tomando en cuenta la misma información con la que nos apoyamos para calcular $Var(\triangle P_t)$.

$E\left[q_{t-1}q_t\right] = 0:$ No hay correlación serial

$E\left[u_t\right] = 0:$ Por definición, $iid \sim N(0, \sigma^2)$

$E\left[{u_t}^2\right] = {\sigma_u}^2$ ya que $E\left[x^2\right] = Var(x)$ y $x = \sigma \rightarrow x^2 = {\sigma_u}^2$

$C:$ La comisión es desconocida pero se considera constante.

$E\left[q_{t-1}^2\right] = 1$ y $E\left[q_t^2\right] = 1$

Finalmente tenemos que:

$$E\left[\triangle P_{t-1}\triangle P_t\right] = E\left[-C^2{q_{t-1}}^2\right] = -C^2E\left[q_{t-1}^2\right] = -C^2(1)$$

$$\boxed{Cov(\triangle P_{t-1}\triangle P_t) = -C^2} \tag{15}$$

Los parámetros finales del modelo de Roll

Con los resultados de las ecuaciones (11) y (15) :

$$\begin{aligned}Var(\triangle P_t) &= 2C^2 + {\sigma_u}^2\\ Cov(\triangle P_{t-1}\triangle P_t) &= -C^2\end{aligned} \tag{16}$$

Podremos despejar las ecuaciones anteriores, déjandolas expresadas en términos de γ_0 y γ_1, quedando de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}\gamma_0 = 2C^2 + {\sigma^2}_u\\ \boxed{{\sigma^2}_u = \gamma_0 - 2C^2}\\ \\ \gamma_1 = -C^2\\ \boxed{C = -\sqrt{\gamma_1}}\end{gathered} \tag{17}$$