



# DETERMINACIÓN DE CAMPOS DE VELOCIDADES EN LA ZONA DE LA ROMPIENTE DESDE DRONES

Autor: Esteban Opazo Verdugo

Profesor: Patricio Catalán

Agosto 2022

## ÍNDICE GENERAL

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2. ESTADO DEL ARTE</b>	<b>2</b>
<b>3. OBJETIVOS</b>	<b>4</b>
3.1. Objetivo general . . . . .	4
3.2. Objetivos específicos . . . . .	4
<b>4. MARCO TEÓRICO</b>	<b>5</b>
4.1. Rectificación de Imágenes . . . . .	5
4.2. Batimetría en la zona cercana a la costa . . . . .	7
4.2.1. Datos de entrada . . . . .	7
4.2.2. Parámetros de configuración . . . . .	7
4.2.3. Algoritmo cBathy . . . . .	8
4.3. Corrientes Longshore . . . . .	9
4.3.1. Datos de entrada . . . . .	9
4.3.2. Ventanas de tiempo . . . . .	11
4.3.3. Algoritmo OCM . . . . .	12
4.3.4. Cálculo serie de tiempo velocidad de corriente . . . . .	16
4.3.5. Calidad de la estimación . . . . .	17
4.3.6. Consideraciones del método óptico . . . . .	18
<b>5. METODOLOGÍA DE TRABAJO</b>	<b>20</b>
5.1. Antecedentes del proyecto . . . . .	20
5.1.1. Antecedentes generales . . . . .	20
5.1.2. Puntos GCP . . . . .	21
5.1.3. Vuelos dron . . . . .	23
5.1.4. Trazadores lagrangianos . . . . .	24
5.2. Obtención campo de velocidades . . . . .	26
5.2.1. Rectificación de imágenes . . . . .	26
5.2.2. Malla vBar . . . . .	26
5.2.3. Matriz de velocidades . . . . .	27
5.2.4. Cálculo velocidad U: Método Integral . . . . .	29
5.2.5. Cálculo velocidad U: Método Matricial . . . . .	31
5.3. Sensibilidad y validación del modelo . . . . .	32
5.4. Vorticidad . . . . .	33
<b>6. RESULTADOS</b>	<b>34</b>
<b>7. DISCUSIÓN</b>	<b>39</b>
7.1. Mediciones ópticas . . . . .	39
7.2. Comparación con mediciones directas . . . . .	39
7.3. Sensibilidad de los parámetros . . . . .	42
7.4. Comparación Método Integral con Método Matricial . . . . .	44
7.5. Comparación con simulación numérica . . . . .	44
7.6. Errores y comentarios finales . . . . .	46
<b>8. CONCLUSIÓN</b>	<b>48</b>
<b>9. REFERENCIAS</b>	<b>49</b>

<b>10. ANEXOS</b>	<b>50</b>
10.1. Parámetros Rectificación . . . . .	50
10.1.1. Parámetros Intrínsecos . . . . .	50
10.2. Cálculo velocidad método matricial . . . . .	51

## ÍNDICE DE TABLAS

4.1. Parámetros de configuración cBathy . . . . .	8
5.1. Coordenadas puntos GCP . . . . .	21
5.2. Datos de cada vuelo . . . . .	23
5.3. Funciones utilizadas del paquete de procesamiento de imágenes de Matlab . . . . .	28
5.4. Condiciones en caso de no existir data . . . . .	30
5.5. Valores parámetros método óptico. . . . .	32
7.1. Sensibilidad parámetros (Parte 1) . . . . .	42
7.2. Sensibilidad parámetros (Parte 2) . . . . .	43
10.1. Parámetros Intrínsecos. . . . .	50
10.2. Valores parámetros intrínsecos. . . . .	50

## ÍNDICE DE FIGURAS

4.1. Grilla de Análisis. Se considera un sistema de N puntos en dirección transversal y M puntos en dirección longitudinal, dx y dy son el espaciamiento entre cada punto. . . . .	6
4.2. Ejemplo rectificación de imagen . . . . .	6
4.3. Matriz de píxeles de ejemplo utilizada para el análisis de cBathy . . . . .	8
4.4. Ejemplo instrumento vbar . . . . .	9
4.5. Infografía que esquematiza la construcción de un timestamp de $N \times M$ dimensiones.(a) Construcción timestamp. (b) Esquema timestamp. . . . .	10
4.6. Ejemplo timestamp elaborado a partir de un video de dron en la playa Las Cruces . . . . .	10
4.7. Esquema ejemplo timestamp con Ts y Tw. El algoritmo de Chickadel et al. (2003) opera analizando subgrupos del timestamp de extensión Tw, con un paso temporal de Ts. Cada iteración entrega una estimación de velocidad media, de esta forma, la cantidad de estimaciones quedan determinadas por el parámetro Ts . . . . .	11
4.8. Ejemplo matriz de intensidades $I(t,y)$ , con ventana temporal, Tw, de 32 segundos y ancho de 10 metros. En este registro, las bandas blancas horizontales corresponden al paso de las olas que rompieron, y las líneas oblicuas, revelan el desplazamiento de la espuma con la corriente longitudinal. . . . .	12
4.9. Ejemplo espectro $S(f, k_y)$ de $I(t,y)$ . . . . .	13
4.10. Ejemplo espectro $S(v, k_y)$ . Se muestra una mayor concentración de energía alrededor de los -0.4 m/s aproximadamente. . . . .	14
4.11. Espectro normalizado $S(v)$ , luego de la integración. . . . .	15
4.12. $S(v)$ espectro normalizado obtenido de 4.10. $S_m(v)$ corresponde al espectro de velocidad modelada luego de realizar el ajuste no lineal de mínimos cuadrados. . . . .	16
4.13. Serie de tiempo velocidad de corriente longshore . . . . .	17
4.14. Histograma del stack (32s) presentado en la figura 4.8, las líneas discontinuas representan los percentiles 50 y 95. . . . .	18
5.1. Ubicación geográfica de la zona de estudio. Playa Las Cruces . . . . .	20
5.2. Ubicación geográfica Playa Las Cruces. Vista Satelital . . . . .	21
5.3. Imágenes de muestra de cada vuelo captadas por dron los días de campaña en terreno. . . . .	22
5.4. Ubicación vuelos dron durante la campaña realizada en noviembre de 2018 . . . . .	23
5.5. Trayectoria trazadores desplegados. Los puntos azules muestran la ubicación en la que fueron desplegados los equipos. La escala de colores de las trayectorias indican el tiempo transcurrido: Rojo es el inicio de la trayectoria y amarillo el final. Gráfica mostrada en un sistema de referencia local . . . . .	24

5.6. Resultado del análisis de los datos medidos con los trazadores. Las velocidades fueron recalcadas según metodología descrita en Aldayuz (2019), y la batimetría (curvas de nivel de color marrón) se obtuvo a partir de cBathy. (a) Magnitud y dirección de las velocidades medias de las corrientes. (b) Magnitud de la componente x de la velocidad. (c) Magnitud de la componente y de la velocidad. . . . .	25
5.7. Sistema de Coordenadas Locales . . . . .	26
5.8. (a) Esquema grilla vBar. (b) Ejemplo grilla vBar de $53 \times 30$ instrumentos. Cada instrumento tiene una extensión de 10 metros, con una separación de 10 metros entre instrumentos en dirección transversal (x). . . . .	27
5.9. (a) Velocidades obtenidas promediando los resultados obtenidos para 31 ventanas de tiempo de 16 s, ejemplo matriz $53 \times 30$ . (b) Matriz con velocidades interpoladas a partir de filtros y operaciones morfológicas . . . . .	28
5.10. (a) Esquema representativo malla UV. (b) Volumen de control elemento grilla UV . . . . .	29
5.11. Diagrama volumen de control . . . . .	30
6.1. Resultados velocidades medias longshore por vuelo y su desviación estandar. Matrices obtenidas al aplicar el algoritmo de Chickadel sobre la malla vBar y luego promediarlas en el tiempo. . . . .	35
6.2. Velocidades longshore promediadas por día . . . . .	36
6.3. Resultado campo de velocidades obtenidos por día. . . . .	37
6.4. Campo de velocidades promediando los tres días 12-13-15 nov . . . . .	38
6.5. Lineas de corrientes medias (12-13-15 nov). En la figura (b) se aplica un filtro gaussiano con división estandar de 1, con la finalidad de observar con mayor claridad el patrón de circulación. . . . .	38
7.1. Comparación método óptico con mediciones drifters. Se eliminan celdas en los gráficos del método óptico correspondiente con las mediciones de los drifters para mayor claridad en la comparación . . . . .	40
7.2. Correlación entre mediciones ópticas y obtenidas por los drifters. . . . .	41
7.3. Comparación método integral vs método matricial. Cálculos aplicados sobre un video de dron del día 15 de noviembre . . . . .	44
7.4. Resultados obtenidos mediante una modelación en SWASH por Aldayuz (2019). (a) Magnitud y dirección de las velocidades medias de las corrientes. (b) Magnitud de la componente x de la velocidad. (c) Magnitud de la componente y de la velocidad. (d) Magnitud de la vorticidad. . . . .	45
7.5. Resultados obtenidos mediante el método óptico, estos corresponden a estimaciones medias de los 3 días. Además la matriz de velocidades longitudinales se encuentra suavizada con un filtro gaussiano de desviación estándar igual a 2. (a) Magnitud y dirección de las velocidades medias de las corrientes. (b) Magnitud de la componente x de la velocidad. (c) Magnitud de la componente y de la velocidad. (d) Magnitud de la vorticidad. . . . .	45
7.6. Valores medios dias 12, 13 y 15 de noviembre.(a) Velocidad considerando un espaciamiento de 5 metros en ambas direcciones. (b) Vorticidad media. (c) Imagen promedio de todos las imágenes de los drones. . . . .	47
10.1. (a) Esquema de velocidades, sistema de 4 celdas. (b) Grados de libertad para un sistema de 4 celdas	51
10.2. (a) Esquema volumen de control de un bloque. (b) Esquema grados de libertad de un bloque . . . . .	51
10.3. (a) Grados de libertad sistema local. (b)Grados de libertad sistema global . . . . .	52

## 1. INTRODUCCIÓN

El conocimiento y entendimiento de las playas y costas ha sido siempre un objetivo fundamental en la convivencia de la población humana con los ecosistemas costeros. La interacción entre seres humanos y su entorno debería implicar, casi por obligación, una búsqueda constante por comprender cómo funcionan los sistemas y procesos que existen detrás de esta interacción. En ese sentido, cobra relevancia la ciencia y la tecnología, que son la base para cumplir dicho objetivo.

Uno de los componentes presentes en cualquier zona costera, son las corrientes litorales, las cuales juegan un rol fundamental en el transporte de sedimentos y de la dinámica de la playa en general, además, socialmente son importantes por la seguridad de los bañistas. De esta forma, la obtención de datos a partir de mediciones es fundamental en el aprendizaje esperado. Existen distintos métodos para medir corrientes, siendo los más comunes los instrumentos *in situ*, que obtienen los datos de corrientes a través de sensores que son ubicados directamente en la zona rompiente, los cuales se caracterizan por entregar mediciones precisas pero a un alto costo operacional y económico. También existen métodos de teledetección, que permiten adquirir datos sin la necesidad de estar en contacto directo con el lugar, con el consiguiente beneficio de seguridad y costo reducido. Es en esta área donde se enfocará el presente trabajo.

Chickadel et al. (2003) desarrolló un método óptico para medir velocidades de corrientes longitudinales superficiales cercanas a la costa mediante la medición de la deriva de espuma presente en la zona de rompiente. Este método consiste en utilizar videos captados por cámaras que enfocan la zona de estudio, los cuales se utilizan como fuente de datos, traducidos en series de tiempo almacenadas en matrices de intensidades de píxeles. La idea principal en el presente trabajo será evaluar la posibilidad de aplicar este método a costas chilenas, y extenderlo al cálculo de velocidades transversales y longitudinales. Para efectos de comparación, se utilizarán mediciones *in situ* y simulaciones numéricas propuestas inicialmente en el trabajo de Aldayuz (2019). Todo esto, dentro del marco del proyecto FONDECYT 1170415.

## 2. ESTADO DEL ARTE

Las técnicas de medición de corrientes en las zonas costeras, y de cualquier variable hidrodinámica, se pueden clasificar en dos grandes grupos: métodos de medición directa y métodos de medición remota o de teledetección.

Los métodos de medición directa pueden ser del tipo eureliano, donde se miden las velocidades de las partículas que pasan por un punto fijo en un intervalo de tiempo, como por ejemplo, los instrumentos ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler); y del tipo lagrangiano, que realizan mediciones siguiendo la trayectoria de las partículas, como es el caso de los derivadores propuestos por Schmidt et al. (2003) o el diseño mostrado en Aldayuz (2019), los cuales van registrando la posición de los derivadores mientras estos están a la deriva en la zona de rompiente.

Los equipos ADCP son útiles para medir el perfil de velocidades (a distintas profundidades) en una misma columna de agua, caracterizándose por su alta precisión y funcionalidad (Osorio Cano, 2010), sin embargo, el equipo es costoso y requiere además el uso de algún elemento sobre la superficie del agua (flotador o barco), lo que aumenta la complejidad del procedimiento. Por otro lado, los derivadores lagrangianos, tienen una alta efectividad si lo que se busca es medir el patrón de circulación de las corrientes y eventualmente pueden tener un costo menor que los ADCP, no obstante, sus mediciones son altamente sensibles a la acción del viento, las mareas y el surfeo, y existe un gran riesgo de pérdida en campaña si es que no se implementa un sistema de recuperación apropiado (Aldayuz, 2019).

En cuanto a los métodos de teledetección, existe un conjunto completo de sensores activos y pasivos (cámaras, radares, lidars, etc.) utilizando una variedad de plataformas (fijas, voladoras, flotantes y en órbita) y operando a través del rango visible, infrarrojo, microondas y bandas de radio del espectro electromagnético. Sin embargo, para las aplicaciones oceanográficas cercanas a la costa, las cámaras ópticas y los radares de banda X son los que se utilizan con mayor frecuencia y están mejor desarrollados (Holman & Haller, 2011).

De manera general, la ventaja de los métodos de medición remota por sobre la instrumentación directa, es que se pueden instalar lejos de las duras condiciones marinas, evitando las problemáticas que se pueden generar en la zona de rompientes, además, es posible obtener observaciones durante un largo periodo de tiempo y a una gran extensión espacial, por lo que los costos operacionales, logísticos y de equipo son menores. Por otro lado, la problemática presente en la mayoría de estos sensores remotos, es la gran cantidad de datos generados, junto con un alto componente de ruido, por lo que obligatoriamente se deben incorporar métodos que faciliten la extracción, filtrado y tratamiento de la información.

Los radares de banda X emiten y captan radiación, permitiendo obtener mediciones de corrientes en base al desplazamiento Doppler de las ondas de gravedad superficiales. Sin embargo, estos métodos suelen utilizar transformadas de Fourier que obligan a trabajar con una resolución espacial mayor, por lo que normalmente no se aplican para resolver las corrientes en la zona de rompientes (Holman & Haller, 2011).

Los métodos que utilizan sistemas ópticos (cámaras fijas o vehículos aéreos no tripulados) se basan en el análisis de las características de superficie contrastantes para actuar como objetivos que, se supone, se mueven de cuadro a cuadro con la velocidad del flujo. Por ejemplo, la espuma actúa como trazador predominante en la zona de rompiente (Anderson et al., 2021). La desventaja de estos sistemas, es que son altamente sensibles a las condiciones temporales, como la presencia de niebla, lluvia, o cambios de luminancia, además, si el sistema de monitoreo está ubicado a una cota muy baja (con respecto al nivel del mar), el reflejo de la superficie de agua inclinada puede afectar la medición.

En ese contexto, los algoritmos para extraer velocidades de corrientes superficiales se han abordado a partir de varios enfoques. Uno de los más conocidos es la técnica denominada velocimetría de imágenes de partículas (PIV), presentada en Adrian (1991), donde se calcula un desplazamiento promedio de un grupo de partículas dentro de una ventana de análisis utilizando un enfoque de correlación cruzada. A partir de ese trabajo se han desarrollado estudios que aplican PIV en zonas cercanas a la costa, como el presentado en Holland et al. (2001). También existen estudios basados en algoritmos de flujo óptico (Anderson et al., 2021; Dérian & Almar, 2017; Rodríguez-Padilla et al., 2021), metodología enfocada en analizar la variación de la intensidad de los pixeles en un tiempo determinado. Estas dos técnicas mencionadas (PIV y flujo óptico), permiten obtener campo de velocidades si se aplican filtros y

preprocesamientos correctamente, sin embargo, tiene un gasto computacional muy elevado en comparación a otros métodos.

Por otro lado, existen metodologías que se enfocan en analizar sólo un componente de la velocidad, como el propuesto por Chickadel et al. (2003), quien analiza timestacks orientados a lo largo de la costa. Esta orientación, permite filtrar el efecto de las olas que aparecen como franjas horizontales en el timestack, y aislar el movimiento de la espuma superficial que queda a la deriva, el cual, describe patrones diagonales cuyas pendientes se corresponden con la velocidad de corriente buscada. De acuerdo con esto, este método sólo permite medir el componente de la corriente longitudinal (a lo largo de la costa), no obstante, el algoritmo funciona relativamente rápido en comparación a los métodos que usan PIV y flujo óptico.

Paralelamente al avance tecnológico en mediciones remotas, diversos centros de investigación han estado trabajando en desarrollar sistemas de video capaces de monitoriar constantemente los cambios de la costa cercana. Uno de los más importantes es el CIRN (The Coastal Imaging Research Network), que tiene sus orígenes en programa Argus del Coastal Imaging Lab (CIL) de la Universidad Estatal de Oregon. En ese contexto, en Holman et al. (2017) desarrollaron una metodología para medir y caracterizar la zona costera utilizando vehículos aéreos no tripulados (drones), basado en la extensa línea de trabajo desarrollada en CIL. Además, pusieron a disposición una caja de herramientas de MATLAB denominada "Quantitative Coastal Imaging Toolbox", que contiene una colección de scripts para producir imágenes georectificadas diseñadas específicamente para el análisis cuantitativo de entornos costeros (Bruder & Brodie, 2020). Por otro lado, CIRN también se ha centrado en el desarrollo de otras cajas de herramientas, como lo es cBathy (Holman et al., 2013), algoritmo basado en la ecuación de dispersión que permite estimar batimetría a partir de imágenes de video; y Video-Currents, algoritmo utilizado para extraer magnitudes de corrientes según las técnicas descritas en Chickadel et al. (2003), mencionado en párrafos anteriores.

En el presente trabajo se pretende obtener las corrientes medias de una playa de la zona central de Chile. Para esto, se cuenta con videos de vuelos de drones realizados en la playa Las Cruces, en el marco del proyecto “FONDECYT 1170415-Quantification of Two Dimensional Wave Breaking Dissipation in the Surf Zone”, el cual tiene como objetivo el desarrollo de una metodología capaz de obtener mediciones remotas de campos de disipación en dos dimensiones. De acuerdo con lo anterior, la técnica que se considera más adecuada aplicar es el algoritmo de Chickadel et al. (2003), dada la velocidad de computo que posee por sobre las otras técnicas y la robustez que establece en sus estimadores de confianza. Y el componente de flujo transversal, dado que se conoce el flujo longitudinal y la batimetría (cBathy), se puede calcular aplicando la ecuación de continuidad (tal como se plantea en Holman y Haller, 2011). Además, se disponen de las mediciones de los derivadores lagrangianos (Aldayuz, 2019, parte del mismo proyecto FONDECYT), que servirán para comparar resultados.

### 3. OBJETIVOS

Los objetivos que pretende alcanzar el presente trabajo son:

#### 3.1. Objetivo general

- Extender método óptico de medición de corrientes litorales y evaluar su rendimiento a través de comparaciones con mediciones directas y simulaciones numéricas; con el fin de obtener campo de velocidades en una zona de rompiente.

#### 3.2. Objetivos específicos

- Rectificar imágenes grabadas desde un dron.
- Obtener campo de velocidades de corrientes medias longitudinales y transversales a partir de métodos ópticos y algoritmos propios desarrollados.
- Evaluar la sensibilidad del método óptico, considerando los parámetros más importantes.
- Proponer un sistema o guía que permita determinar campo de velocidades de corrientes litorales a partir de imágenes de drones.

## 4. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se describen de forma general los procedimientos existentes utilizados (citados en capítulo 2), incluyendo los datos de entrada, parámetros de configuración y algoritmos bases. Posteriormente, en el capítulo 5 de metodología, se especifica el modo en el que fueron aplicados estos algoritmos según los requerimientos particulares del estudio.

### 4.1. Rectificación de Imágenes

La primera etapa que se debe realizar para la medición de parámetros hidrodinámicos de la zona costera, a partir de cualquier método óptico, es relacionar las coordenadas de imágenes (UV) del video, con las coordenadas en el mundo real (xyz), de tal forma que cada pixel se encuentre georeferenciado y agrupado en lo que se denomina imagen rectificada. En un trabajo realizado por Holman et al. (2017), actualizado y mejorado por Bruder y Brodie (2020), se presentan una serie de metodologías y algoritmos que permiten cumplir dicho objetivo, cuyas bases se presentan en los siguientes párrafos.

Por convención, los objetos en el mundo real son descritos por las coordenadas 3D, [x,y,z] (dirección transversal, longitudinal y vertical), mientras que sus ubicaciones en imagen están descritas por coordenadas 2D, [U y V]. En una formulación homogénea, las dos coordenadas están relacionadas a través de una matriz de transformación proyectiva, P, como se muestra en la ecuación 4.1.

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ 1 \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

La ecuación anterior indica que para una ubicación en particular del mundo, si P es conocida, su ubicación en la imagen se encuentra multiplicando P por el vector de coordenadas. Por otro lado, la matriz de proyección, de dimensiones  $3 \times 4$ , está compuesta por 3 matrices

$$P = K \cdot R [I \quad | \quad -C] \quad (4.2)$$

K contiene los parámetros intrínsecos de la cámara, estos corresponden a las distancias focales y coordenadas UV del centro óptico, y se obtienen a partir de un proceso denominado calibración del lente. R es la matriz de rotación, compuesta por los ángulos de rotación (azimuth, tilt y swing), medidos con respecto al sistema de referencia 3D del mundo. El término final es una matriz identidad, I, de  $3 \times 3$ , aumentada por C, un vector de  $3 \times 1$  que contiene la ubicación xyz de la cámara. Estas dos matrices, R y C, definen la posición e inclinación de la cámara con respecto al sistema de referencia 3D, y se obtienen realizando una calibración con los puntos de referencia ubicados en el terreno (GCP).

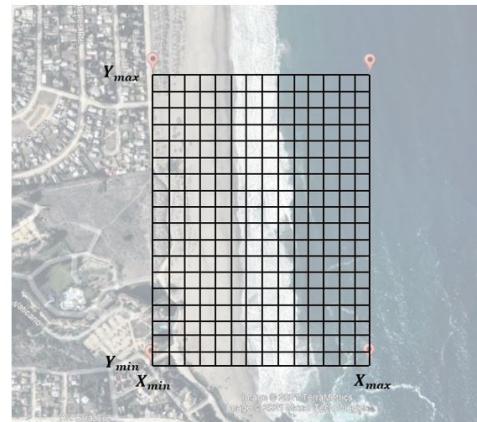
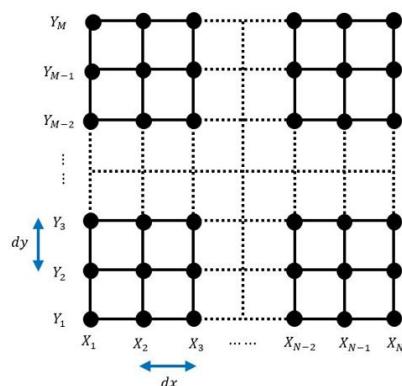
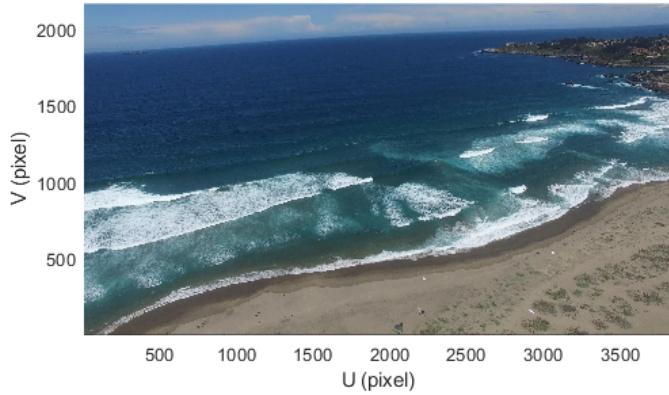
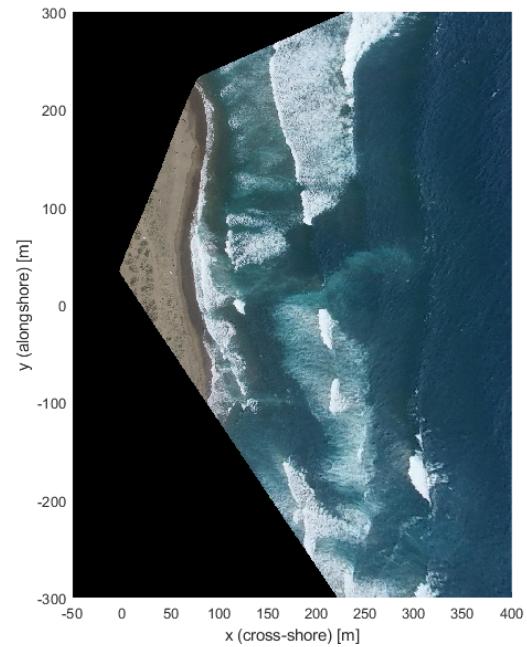


Figura 4.1: Grilla de Análisis. Se considera un sistema de  $N$  puntos en dirección transversal y  $M$  puntos en dirección longitudinal,  $dx$  y  $dy$  son el espaciado entre cada punto.

Una vez realizadas las calibraciones, se deben definir los puntos xyz de la zona donde se desean los píxeles rectificados, para lo que se define una grilla como la mostrada en la figura 4.1. Posteriormente, sobre esta grilla definida, se buscan las coordenadas UV respectivas, de acuerdo con la ecuación 4.1. El paso final consiste en el reordenamiento de los píxeles según los puntos xyz establecidos previamente en la grilla, obteniendo de esta forma, la imagen rectificada. En la figura 4.2 se muestra un ejemplo de imagen rectificada.



(a) Imagen original, en coordenadas UV



(b) Imagen rectificada. en coordenadas xyz

Figura 4.2: Ejemplo rectificación de imagen

## 4.2. Batimetría en la zona cercana a la costa

Conocer la batimetría es fundamental en cualquier estudio, modelo de predicción o simulación que pretenda describir la dinámica y circulación de las olas cerca de la costa, puesto que, la batimetría obedece a una constante interacción y retroalimentación de los esfuerzos generados por el oleaje. En este estudio, dado que se pretende obtener el campo de velocidades de corrientes, y sólo se conoce el componente longitudinal, es impresindible disponer de las profundidades como dato de entrada para poder aplicar la continuidad de los flujos.

Holman et al. (2013) presenta un algoritmo para la estimación de batimetría a partir de imágenes de video denominado cBathy. Este algoritmo se basa en la conocida dependencia de la celeridad de onda,  $c$ , con la profundidad, expresada en la relación de dispersión:

$$\sigma^2 = gk * \tanh(kh) \quad (4.3)$$

Donde  $\sigma$  es la frecuencia angular,  $k$  es el número de onda,  $g$  la aceleración de gravedad y  $h$  la profundidad. Esta ecuación se podría aplicar directamente si se diera un campo de olas monocromático, sin embargo, esas son condiciones idealizadas sólo reproducibles en laboratorio. En los mares reales existen una superposición de muchos conjuntos de olas con diferentes frecuencias, longitudes de onda y direcciones. Por tal razón, para estimar profundidades, primero se trabaja en diferentes bandas de frecuencias, después se unifican todas las estimaciones en una sola utilizando factores de peso y, por último, se realiza un suavizado con filtros de Kalman.

### 4.2.1. Datos de entrada

Los datos de entrada para el análisis principal de cBathy son: una cuadrícula de ubicaciones 3D de  $M$  puntos,  $xyz$  (de dimensiones  $M \times 3$ ), con un espaciamiento regular; un vector de  $N$  tiempos de muestreo,  $t$  (de dimensiones  $1 \times N$ ); y una matriz (data) que contiene todas las intensidades de pixel  $I_{ij}$  extraídas para cada tiempo  $t_i$  en la posición  $x_j$ ,  $y_j$ .

- Matriz de muestreo espacial:  $xyz = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_M & y_M & 0 \end{bmatrix}_{M \times 3}$
- Matriz de muestreo temporal:  $t = [t_1 \ t_2 \ t_3 \ \dots \ t_N]_{1 \times N}$

- Matriz de series de tiempo:  $data = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \dots & I_{1M} \\ I_{21} & I_{22} & \dots & I_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{N1} & I_{N2} & \dots & I_{NM} \end{bmatrix}_{N \times M}$

Por cada pixel definido según la matriz  $xyz$ , hay una serie temporal que representa la variación de intensidad en el tiempo.

### 4.2.2. Parámetros de configuración

La caja de herramientas (Toolbox) de cBathy contiene un archivo de configuración donde se deben definir todos los parámetros de análisis. Los parámetros principales de configuración se muestran en la tabla 4.1.

Parámetros	Definición
dxm y dym	Espaciamiento deseado para los puntos de análisis, espaciamiento de salida
xyMinMax	Mínimo y máximo de x e y
MINDEPTH y MAXDEPTH	Límites para la profundidad
Lx y Ly	Parámetros que definen la vecindad que se analiza por cada punto
fB	Rango de frecuencias de análisis
nKeep	Nº de frecuencias que se consideran en el análisis (las que poseen mayor coherencia dentro de fB)

Tabla 4.1: Parámetros de configuración cBathy.

#### 4.2.3. Algoritmo cBathy

La figura 4.3 muestra la matriz de muestreo de píxeles (diezmada por 2 para evitar saturación). Los puntos azules corresponden a las ubicaciones  $[x_p, y_p]$ , cada uno de los cuales le corresponde una serie temporal de intensidad de píxel. El análisis se lleva a cabo secuencialmente en una serie de puntos de análisis seleccionados por el usuario,  $[x_m, y_m]$ , uno de los cuales se indica con un asterisco rojo, y se basa en datos de los píxeles inmediatamente circundantes (puntos verdes) dentro de un rango especificado por el usuario,  $L_x, L_y$ . Dentro de cada uno de esos mosaicos, el objetivo es estimar el número de onda,  $k$ , para cada uno de un conjunto de frecuencias candidatas,  $f_b$ , que abarcan la banda de onda incidente. Para cada par  $(f_b, k)$ , se puede estimar una profundidad  $\bar{h}(x_m, y_m)$ , usando la ecuación de dispersión lineal (ecuación 4.3), o una sólo profundidad,  $\hat{h}(x_m, y_m)$ , que mejor se ajuste a todas las frecuencias.

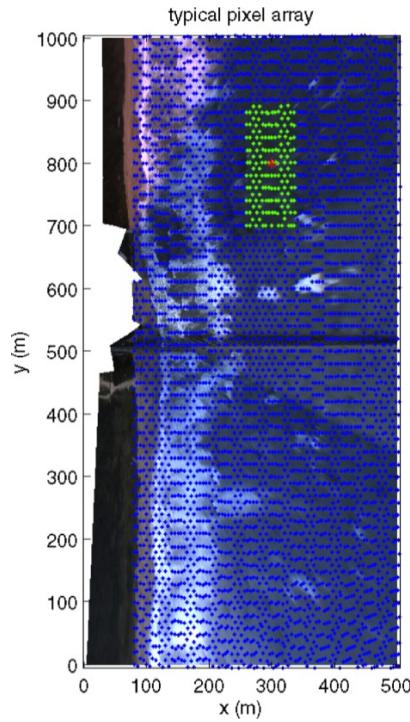


Figura 4.3: Matriz de píxeles de ejemplo utilizada para el análisis de cBathy

Las estimaciones pueden ser deficientes o imposibles a veces debido al clima, el resplandor del sol o el mar en calma, por lo que las estimaciones de las recopilaciones de datos por hora se promedian objetivamente para producir una

profundidad promedio móvil estable  $\bar{h}(x_m, y_m)$ . Así, el análisis final de cBathy en cada punto consta de tres etapas:

- Fase 1 : Análisis dependientes de la frecuencia de  $f_b$ , k,  $\alpha$  y  $\bar{h}$  donde  $\alpha$  el ángulo de onda, es un producto colateral.
- Fase 2 : Obtención de una profundidad única  $\hat{h}$  que mejor se ajuste a todas las frecuencias.
- Fase 3 : Estimación de una profundidad promedio móvil,  $\bar{h}$  (utilizando filtro de kalman).

### 4.3. Corrientes Longshore

Chickadel et al. (2003) propuso un algoritmo que permite obtener velocidades de corrientes promediadas en dirección paralela a la línea de la costa. Los cálculos asociados a dicho algoritmo, así como las principales variables que intervienen se presentan en las siguientes secciones.

#### 4.3.1. Datos de entrada

La información de entrada que requiere el algoritmo de Chickadel queda definido por una estructura de datos denominada instrumento de pixel del tipo vbar, el cual sigue las convenciones establecidas por el sistema de monitoreo de video Argus, y determina la imagen timestamp que analiza el algoritmo.

##### Instrumento vBar

Un instrumento de pixel se define como una matriz que contiene las coordenadas correspondientes con los pixeles a extraer. El algoritmo de Chickadel et al. (2003) utiliza un tipo de instrumento denominado vbar, que corresponde a una línea paralela a la línea de costa, es decir, se necesita una matriz xyz que contenga las coordenadas iniciales ( $x_0$ ,  $y_{min}$ ) y finales ( $x_0$ ,  $y_{max}$ ) de esa linea, donde las coordenadas x y z son constantes. En la figura 4.4 se ejemplifica un instrumento vbar.

$$\text{xyz} = \begin{bmatrix} x_0 & y_{min} & z \\ x_0 & y_{max} & z \end{bmatrix}$$

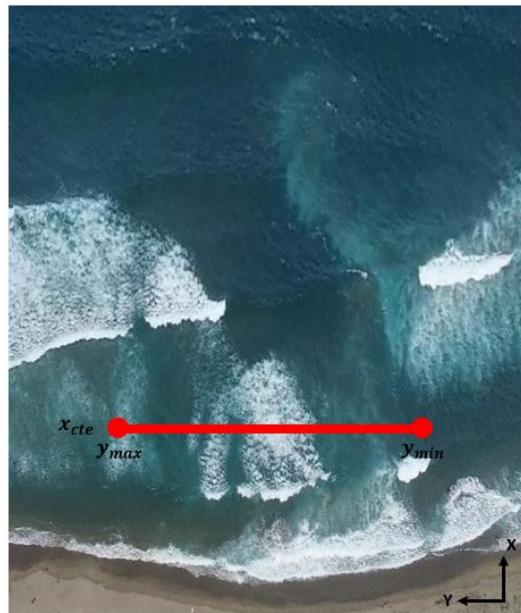


Figura 4.4: Ejemplo instrumento vbar

## Timestack

Un timestack es una imagen (matriz de intensidades) construida a partir del apilamiento de pixeles en el tiempo, y en este método óptico, los pixeles se apilan según el instrumento vbar. Para poder construir el timestack, primero se debe definir el vector temporal, time (de dimensiones  $1 \times M$ ), que contiene todos los tiempos de muestreo (con un paso de 0.5 segundos); y una matriz, xyzAll, que contiene los N puntos de coordenadas acorde a los N pixeles a extraer.

$$\text{time} = [t_1 \ t_2 \ t_3 \ \dots \ t_M] ; \text{xyzAll} = \begin{bmatrix} x_0 & y_1 & z \\ x_0 & y_2 & z \\ x_0 & y_3 & z \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z \end{bmatrix}$$

En la figura 4.5 se esquematiza la construcción de un timestack a partir de un instrumento vbar (línea roja) y en la figura 4.6 se muestra un ejemplo.

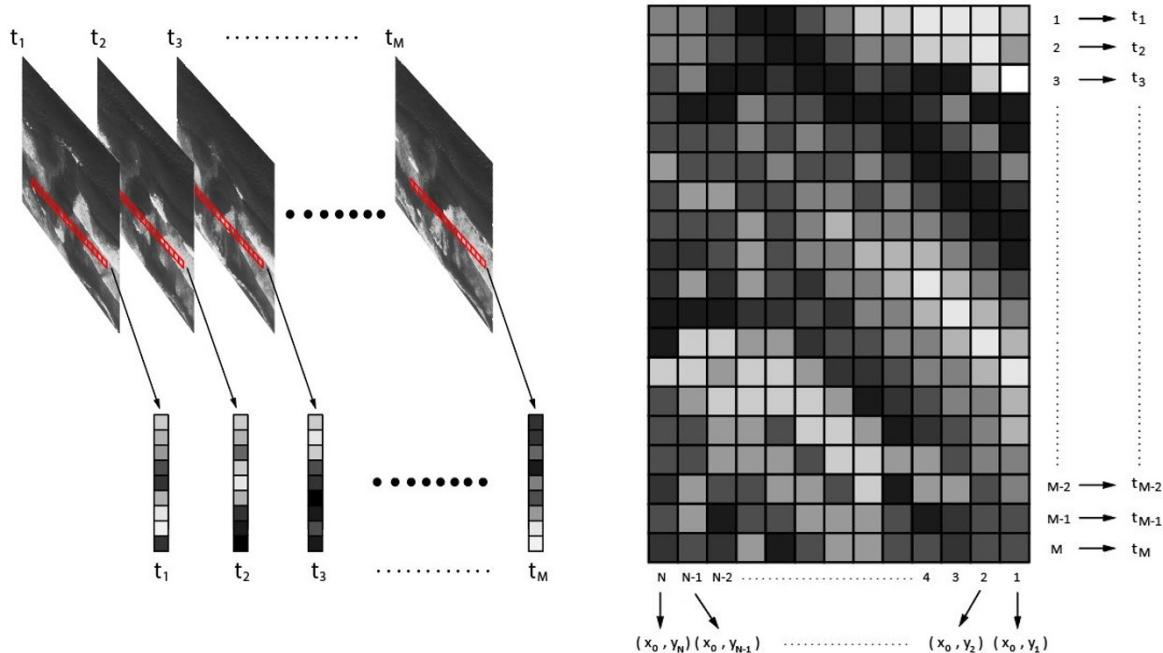


Figura 4.5: Infografía que esquematiza la construcción de un timestack de  $N \times M$  dimensiones. (a) Construcción timestack. (b) Esquema timestack.

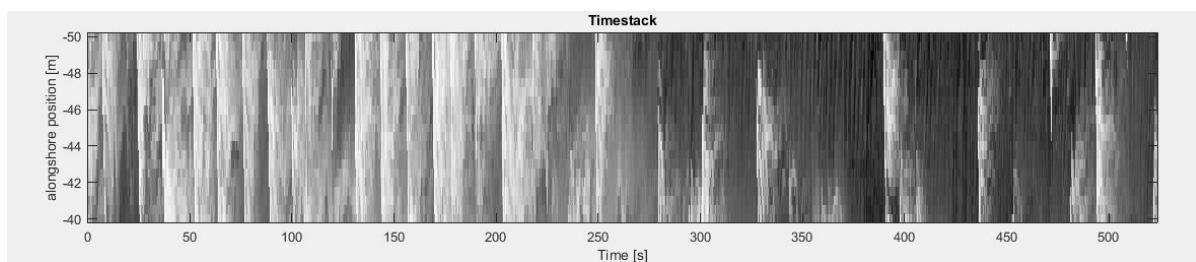


Figura 4.6: Ejemplo timestack elaborado a partir de un video de dron en la playa Las Cruces

La imagen timestack se trabaja como matriz (stack) en un formato de 8 bits, es decir la intensidad en la imagen

varía entre 0 y 255. Similar a la idea explicada en cBathy, cada elemento  $I_{ij}$ , corresponde a la intensidad de pixel en el punto  $j$  ( $x_j$ ,  $y_j$ ), en el tiempo  $t_i$ .

$$\text{stack} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & \cdots & I_{1N} \\ I_{21} & I_{22} & \cdots & I_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{M1} & I_{M2} & \cdots & I_{MN} \end{bmatrix}; \text{ donde } 0 \leq I_{ij} \leq 255$$

#### 4.3.2. Ventanas de tiempo

En el algoritmo se definen las ventanas de tiempo  $T_w$  y  $T_s$  necesarias para el análisis a realizar.  $T_w$  corresponde a la duración de la ventana FFT (Fast Fourier Transform), parámetro que define la longitud de la ventana de tiempo utilizado en el análisis de Fourier y su respectivo ajuste al modelo. Por otra parte,  $T_s$ , corresponde al tiempo de muestreo, es decir, cada cuánto tiempo en el timestack se realiza el análisis.

$T_w$  y  $T_s$  son unos de los parámetros fundamentales del modelo, puesto que definen la resolución temporal de este. Tal como se esquematiza en la figura 4.7 (a modo de ejemplo), para un timestack, el algoritmo inicia su computo en el tiempo  $t = 0$  segundos, luego se seleccionan los primeros 32 segundos según define  $T_{win}$ . Posteriormente, lo que realiza el algoritmo es utilizar ese “substack” (puede ser tratado como una función del tiempo y del espacio,  $I(t,y)$ , cómo se verá en la próxima sección) para ajustarlo al modelo y entregar una estimación media de la velocidad longitudinal, es decir, una velocidad representativa de esos 32 segundos. Una vez terminado ese primer ciclo, comienza la segunda iteración, pero esta vez desde el tiempo  $t = 16$  segundos ( $T_s = 16$  s), punto a partir del cual se seleccionan los siguientes 32 segundos para analizar. Esta nueva ventana entrega una segunda estimación de velocidad, completando otro ciclo que se irá repitiendo hasta completar los 500 segundos aproximadamente del timestack.

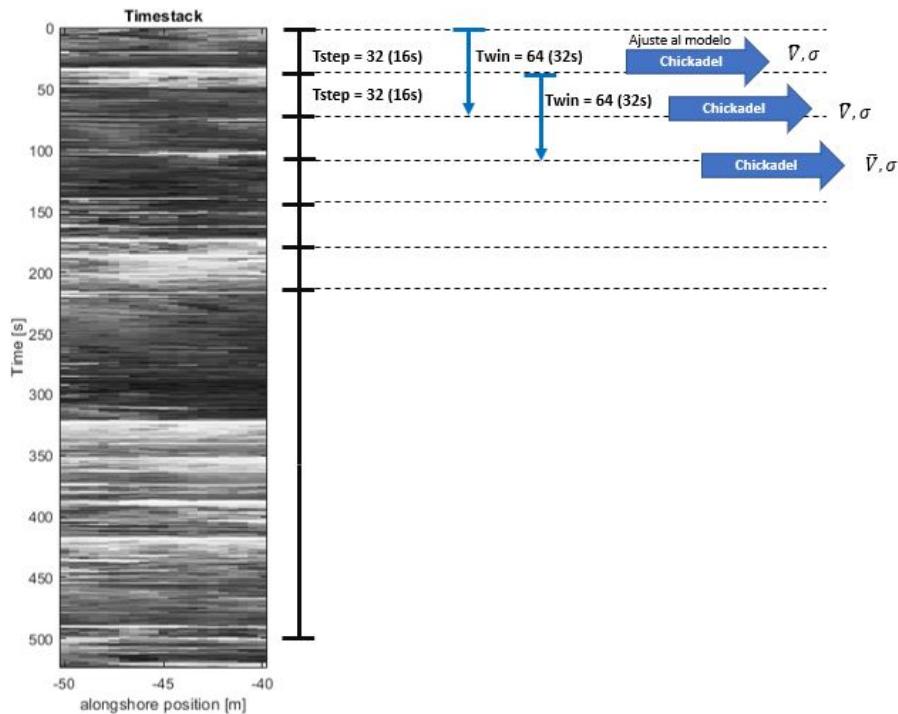


Figura 4.7: Esquema ejemplo timestack con  $T_s$  y  $T_w$ . El algoritmo de Chickadel et al. (2003) opera analizando subgrupos del timestack de extensión  $T_w$ , con un paso temporal de  $T_s$ . Cada iteración entrega una estimación de velocidad media, de esta forma, la cantidad de estimaciones quedan determinadas por el parámetro  $T_s$

#### 4.3.3. Algoritmo OCM

El algoritmo OCM (Optical Current Meter) propuesto por Chickadel, trabaja con una submatriz  $I(t,y)$  (substack) de longitud  $T_w$ , como el mostrado en la figura 4.8. Los cálculos asociados a dicha matriz de intensidades consta de cuatro pasos:

- Cálculo del espectro número de onda - frecuencia  $S(f, k_y)$  en dos dimensiones.
- Transformación del espectro  $S(f, k_y)$  al espectro número de onda - velocidad.
- Integración sobre el número de onda para producir un “espectro” de velocidad.
- Estimación la velocidad más representativa para ese segmento.

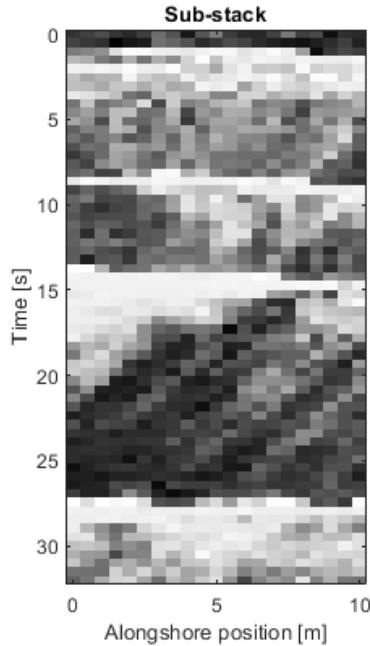


Figura 4.8: Ejemplo matriz de intensidades  $I(t,y)$ , con ventana temporal,  $T_w$ , de 32 segundos y ancho de 10 metros. En este registro, las bandas blancas horizontales corresponden al paso de las olas que rompieron, y las líneas oblicuas, revelan el desplazamiento de la espuma con la corriente longitudinal.

El ejemplo mostrado en la figura 4.8 corresponde a un substack considerando una ventana temporal ( $T_w$ ) de 32 segundos, con un muestreo de 2 Hz (delta de 0.5 seg), y un ancho de 10 metros, con espaciamiento de medio metro. Todos los ejemplos mostrados en las secciones siguientes están basados en la figura 4.8.

#### Cálculo $S(f, k_y)$

El primer paso es transformar la matriz de intensidades pixel,  $I(t,y)$ , desde el dominio del espacio ( $y$ ) y el tiempo ( $t$ ) al dominio de la frecuencia ( $f$  [Hz]) y el número de onda ( $k_y$  [1/m]) usando una transformada de Fourier en dos dimensiones, obteniéndose  $\hat{I}(f, k_y)$  de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\hat{I}(f, k_y) = \iint B(t, y) I(t, y) e^{-i2\pi f t} e^{-i2\pi k_y y} dt dy \quad (4.4)$$

Donde  $B(t,y)$  corresponde al filtro de Bartlett, que se multiplica para reducir la fuga espectral. Este filtro se construye multiplicando dos ventanas de Bartlett; una correspondiente con la dimensión temporal,  $Bm(t)$ , de longitud concordante con  $T_{win}$ ; y otra asociada a la dimensión espacial,  $Bn(y)$ , cuya longitud coincide con el ancho del timestamp. La ecuaciones define esas dos ventanas en su forma discreta se muestran a continuación:

$$Bm = \begin{cases} \frac{2m}{M'-1} & \text{si } 0 \leq m \leq \frac{M'-1}{2} \\ 2 - \frac{2m}{M'-1} & \text{si } \frac{M'-1}{2} \leq m \leq M' - 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

$$Bn = \begin{cases} \frac{2n}{N-1} & \text{si } 0 \leq n \leq \frac{N-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{N-1} & \text{si } \frac{N-1}{2} \leq n \leq N - 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

$M'$  y  $N$  son las dimensiones de la matriz de intensidades  $I(t,y)$ . Estas ventanas se caracterizan por tener una forma triangular, con valor cero en el primer y último elemento.

Luego, el espectro en dos dimensiones,  $S(f, k_y)$ , según la ecuación 4.7, donde el asterisco (\*) denota el complejo conjugado.

$$S(f, k_y) = \hat{I}(f, k_y)\hat{I}(f, k_y)* \quad (4.7)$$

La figura 4.9 muestra el espectro  $S(f, k_y)$ , calculado del substack de la figura 4.8. La energía que se distribuye cerca  $k_y$  igual cero (eje de abscisas) corresponde a la energía de las olas que pasaron y rompieron. Además, se nota una mayor concentración de energía en la zona de frecuencias negativas (asociada a velocidades negativas), siguiendo una tendencia alrededor de la diagonal que parte desde el origen y se extiende hasta el eje  $k_y$  cercano al punto 1 ( $1/m$ ). Dado que la velocidad longitudinal es la razón entre la frecuencia y el número de onda, la diagonal que aparece representa la velocidad de corriente longitudinal distribuida entre distintas frecuencias y números de onda.

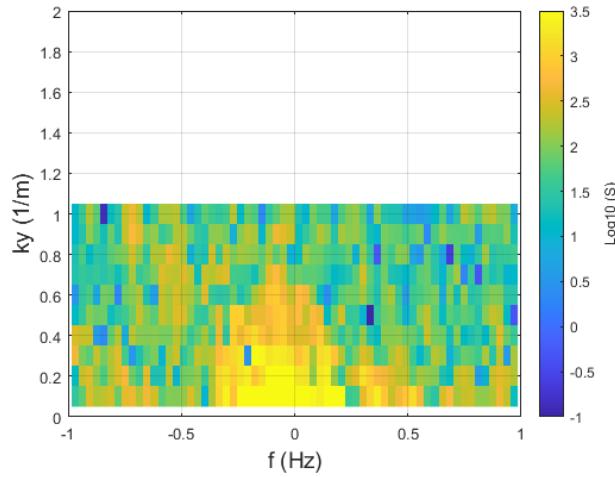


Figura 4.9: Ejemplo espectro  $S(f, k_y)$  de  $I(t,y)$ .

Observación: La matriz  $I(t,y)$  se trabaja centrada en cero, es decir se le resta el promedio a cada elemento. Además el espectro  $S(f, k_y)$  también se desplaza de tal forma que la frecuencia de valor cero queda en el centro, para más información consultar documentación fftshift(s) en Matlab.

### Transformación del espectro $S(f, k_y)$

Tal como se menciona anteriormente, la velocidad de la corriente en dirección  $y$  estará asociada a una gran variedad de números de onda y frecuencia, y esta relación está dada por la siguiente razón:

$$v = \frac{f}{k_y} \quad (4.8)$$

Esta relación es usada para transformar el espectro al espacio velocidad-número de onda. Para conservar la varianza, la transformación es:

$$\text{var}\{S(f, k_y)\} = \iint S(f, k_y) df dk_y = \iint S(v, k_y) |k_y| dv dk_y \quad (4.9)$$

donde  $|k_y|$  es el determinante Jacobiano y  $S(v, k_y)$  es el espectro velocidad-número de onda, por lo tanto

$$S(v, k_y) = \frac{1}{|k_y|} S(f, k_y) \quad (4.10)$$

La velocidad se limita entre 3 y -3 m/s con la finalidad de eliminar una posible contaminación con las olas incidentes oblicuas que pueden mover a mayores velocidades la espuma de mar. Estas velocidades usualmente exceden esos valores de manera significativa, mientras que las velocidades de corrientes están típicamente dentro de ese rango. Un ejemplo de espectro resultante se presenta en la figura 4.10, en él se nota una mayor concentración de energía alrededor de los -0.4 m/s aproximadamente, con valores de número de onda,  $k_y$ , que varían entre 0.25 (1/m) y 0.65 (1/m) principalmente. Las regiones donde no hay datos se debe a los límites fijados, asociado a la frecuencia Nyquist y número de onda mínimo considerado.

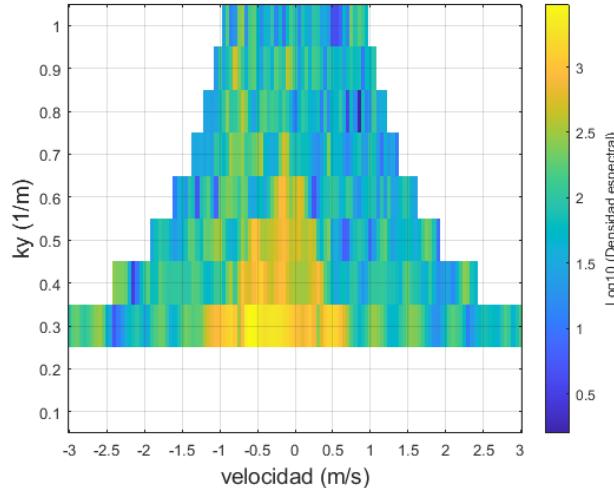


Figura 4.10: Ejemplo espectro  $S(v, k_y)$ . Se muestra una mayor concentración de energía alrededor de los -0.4 m/s aproximadamente.

### Transformación al espectro $S(v)$

El espectro  $S(v, k_y)$  puede ser integrado con respecto al número de onda, obteniéndose un “espectro” de velocidad,

$$S(v) = \int_{k_{min}}^{k_{Nyq}} S(v, k_y) dk_y \quad (4.11)$$

La contaminación debido a las olas oblicuas es minimizada excluyendo la energía asociada a los números de ondas menores a un  $k_{min}$  (elegido como 0.25 1/m en el ejemplo). El límite superior de la integral es

$$k_{nyq} = \frac{1}{2\Delta y} \quad (4.12)$$

donde  $k_{nyq}$  es el número de onda Nyquist y  $\Delta y$  es el espaciado de muestreo.

El espectro de velocidad resultante (ver figura 4.11) tiene varias características típicas:

- Un nivel de energía de fondo debido al ruido del video.
- Patrones de intensidad de baja frecuencia.
- Un gran peak de energía que representa las trazas de espuma.

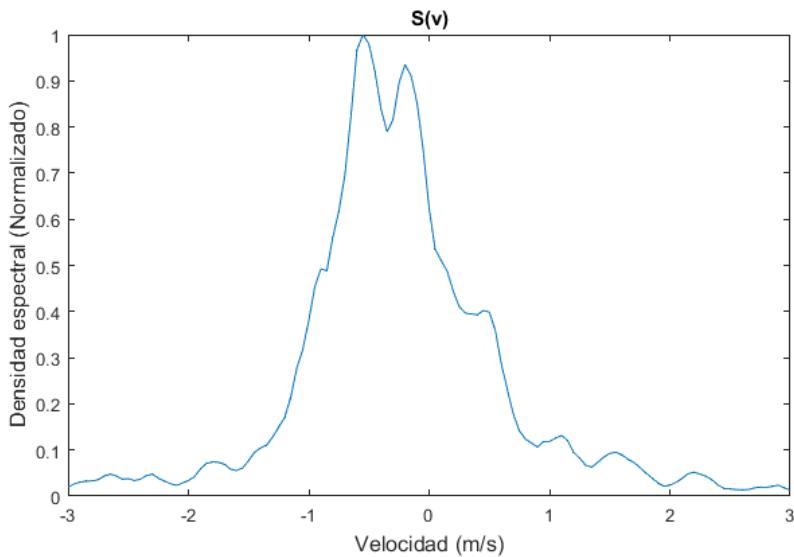


Figura 4.11: Espectro normalizado  $S(v)$ , luego de la integración.

### Modelo $S(v)$

Chickadel propone un modelo de espectro de velocidad  $S_m(v)$  el cual ajusta al espectro observado  $S(v)$ , para esto utiliza una rutina de mínimos cuadrados no lineal. El modelo incluye dos componentes, el ruido de fondo y las trazas de espuma oblicuas.

$$S_m(v) = S_{foam}(v) + S_{noise}(v) \quad (4.13)$$

El espectro de la traza de espuma,  $S_{foam}$  es modelado como una curva Gaussiana

$$S_{foam}(v) = A_{foam} \exp \left[ -\frac{(v - \bar{v})^2}{\sigma_{foam}^2} \right] \quad (4.14)$$

Donde

$A_{foam}$ : valor peak de  $S(v)$

$\bar{v}$ : promedio de la velocidad de espuma

$\sigma_{foam}$ : desviación estandar de la velocidad de espuma

Para modelar el ruido se asume una serie de tiempo de ruido blanco (señal aleatoria que contiene todas las frecuencias y todas ellas muestran la misma energía asociada) distribuido uniformemente sobre  $S(f, k_y)$ . Transformando este ruido blanco al espectro de velocidad se tiene

$$S_{noise}(v) = \begin{cases} A_{noise} \frac{f_{nyq}^2}{2v^2} & \text{si } |v| \leq \frac{f_{nyq}}{k_{nyq}} \\ A_{noise} \frac{k_{nyq}^2}{2} & \text{si } |v| > \frac{f_{nyq}}{k_{nyq}} \end{cases} \quad (4.15)$$

Donde

$A_{noise}$ : es el factor de amplitud del ruido

$f_{nyq}$ : Frecuencia Nyquist

$k_{nyq}$ : Número de onda Nyquist.

El modelo depende entonces de cuatro parámetros  $A_{foam}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\sigma_{foam}$ ,  $A_{noise}$ . La rutina utilizada aplica un método iterativo para encontrar el mejor ajuste de estos parámetros. Finalmente el valor  $\bar{v}$  será la velocidad más representativa del intervalo en análisis. Un ejemplo del espectro obtenido con el modelo se presenta en la figura 4.12, en ella se muestra el espectro medido  $S(v)$  y la curva ajustada del modelo  $S_m(v)$ , incluyendo el componente asociado a la traza de espuma (curva gaussiana) y el ruido. Se observa la curva gaussiana centrada en la velocidad media (-0.361 m/s) con un peak de 0.76 m/s, y un ruido de fondo, cuyo efecto se mantiene constante, entre -1 m/s y 1 m/s, con un decrecimiento hacia los extremos.

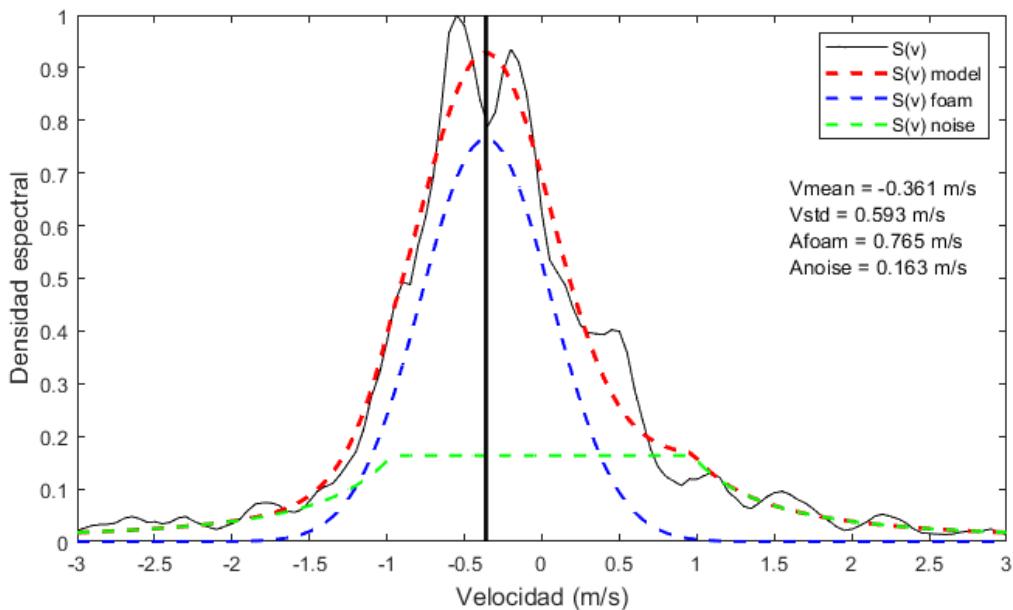


Figura 4.12:  $S(v)$  espectro normalizado obtenido de 4.10.  $S_m(v)$  corresponde al espectro de velocidad modelada luego de realizar el ajuste no lineal de mínimos cuadrados.

#### 4.3.4. Cálculo serie de tiempo velocidad de corriente

Es posible estimar una serie de tiempo de velocidad de corriente longshore (ver figura 4.13), aplicando el algoritmo OCM repetidamente y de forma gradual a lo largo del registro de video de modo que la ventana de análisis,  $T_w$ , se superponga a la ventana anterior por cierta cantidad de tiempo. La duración de tiempo de la ventana de análisis,  $T_w$ , y la duración del tiempo de paso,  $T_s$ , son constantes sin restricciones. El aumento de  $T_w$  aumenta la estabilidad de la estimación resultante, pero disminuye la resolución temporal de la serie.

En Chickadel et al. (2003) se evaluó el rendimiento del algoritmo óptico para diferentes ventanas de análisis, aplicando el OCM a conjuntos de datos sintéticos (stack sintéticos), donde se conocían con precisión los patrones de rotura, espuma y las propiedades de la corriente longitudinal. En general, los errores obtenidos fueron menores a 0.035 m/s para todas las opciones de  $T_w$ , notando una disminución del error con el incremento del tiempo,

sin embargo, para valores mayores a 32 s, no se evidenciaron cambios significativos. Por esta razón, se llegó a la conclusión que un Tw igual a 32 s es lo más apropiado de utilizar, puesto que, equilibra la reducción del error con una mayor resolución temporal.

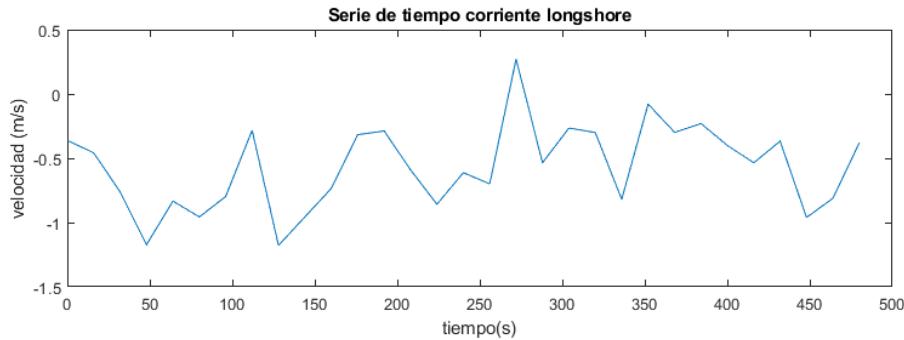


Figura 4.13: Serie de tiempo velocidad de corriente longshore

#### 4.3.5. Calidad de la estimación

La calidad de la velocidad estimada se evalúa calculando algunas medidas de bondad y los mejores parámetros de ajuste a los datos. Además, debido a que este método se basa en la presencia de espuma debido a la ruptura de la onda, Chickadel idea un método para proporcionar un filtro objetivo para identificar y rechazar estimaciones calculadas a partir de imágenes que no contienen suficiente contraste de espuma. Estas medidas de calidad proporcionan una base para ignorar los casos en los que no se esperan resultados útiles.

Los métodos utilizados se muestran a continuación:

##### Test $\chi^2$

La calidad del ajuste del modelo a los datos se describe usando el test estadístico Chi-cuadrado  $\chi^2$ .

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{S_i - Sm_i(\hat{\beta})}{\sigma_i} \right]^2 \quad (4.16)$$

Se define  $\beta$  al conjunto de los 4 parámetros que componen el modelo del espectro de velocidad (ecuación 4.13),

$$\beta = [A_{foam}, \bar{v}, \sigma_{foam}, A_{noise}] \quad (4.17)$$

Donde  $\hat{\beta}$  es el set de parámetros con mejor ajuste en la regresión de mínimos cuadrados, y  $\sigma$  es la desviación estándar del error de medición en cada punto  $i$ . De esta forma, el cálculo del test estadístico consiste en ir comparando punto a punto el espectro medido  $S_i$  (como el mostrado en la figura 4.11), con el espectro  $Sm_i$  que entrega el modelo (ecuación 4.13) utilizando el mejor ajuste de parámetros ( $\hat{\beta}$ ). Mientras menor sea el valor de  $\chi^2$ , mejor es la calidad del ajuste.

#### Indicador rotura y espuma residual

El histograma de una imagen, definido en términos simples, indica gráficamente la cantidad de píxeles por cada tono de gris (ejemplo figura 4.14), brindando información de cómo se distribuyen las tonalidades de grises en la imagen. El ejemplo presentado en la figura 4.14, corresponde al histograma de la figura 4.8, el cual evidencia una distribución de grises entre la intensidad 100 y 255 principalmente. El peak de ocurrencias entre los 230 y los 250, concuerda con las zonas más sobreexpuestas (zonas que reflejaron más luz) por el paso de olas con roller. En ese contexto, Chickadel et al. (2003) define un parámetro para el grado de rotura y espuma residual,  $I_{range}$ , en función de los percentiles 95 ( $I_{95}$ ) y 50 ( $I_{50}$ ):

$$I_{range} = I_{95} - I_{50} \quad (4.18)$$

El grado de contraste (diferencia relativa en la intensidad) que mide este parámetro, es un indicador de la cantidad de espuma residual en la zona. De esta forma, si  $I_{range}$  es mayor (comparando por ejemplo 2 stack), significa que el grado de rotura y espuma residual observada, también lo son.

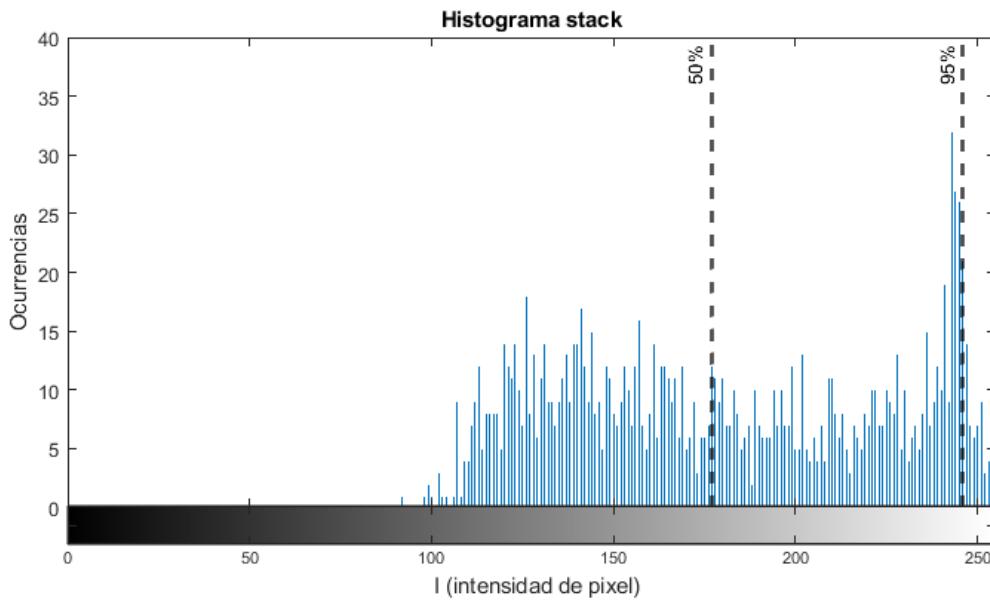


Figura 4.14: Histograma del stack (32s) presentado en la figura 4.8, las lineas discontinuas representan los percentiles 50 y 95.

#### Criterio de aceptación serie temporal

De acuerdo con Chickadel, las estimaciones individuales del OCM de la velocidad de superficie,  $v_s$ , se consideran aceptables si satisfacen tres criterios:

- Nivel de confianza del ajuste al modelo (Test  $\chi^2$ ) mayor al 90 %
- Intervalos de confianza de 95 % de la estimación de los parámetros (del modelo ajustado) menor que 0.2 m/s
- $I_{range} > 40$

Chickadel consideró validas las corrientes medias si al menos 10 de las 63 estimaciones, para cada serie de tiempo, pasaban los criterios anteriores, lo que equivale a un 16 % aproximadamente.

#### 4.3.6. Consideraciones del método óptico

La ventaja que tiene este método al orientar el timestack a lo largo de la costa, es que permite aislar el movimiento de la espuma que queda a la deriva, y filtrar el paso de las olas rompiendo que aparecen como líneas horizontales en el timestack. Todo bajo el supuesto de que el oleaje rompiente se aproxima de forma transversal a la línea de costa. Dicho de otra forma, el hecho de que las olas se refracten y lleguen en dirección perpendicular, permite suponer que los cambios ocurridos en el timestack en dirección longitudinal debido al oleaje serán nulos o cercanos a cero. Esto explica las concentraciones de energía en el eje de las abscisas del espectro  $S(f,k_y)$  (figura 4.9), y permite separar fácilmente el efecto de las corrientes longitudinales con el del oleaje, estableciendo un número de onda mínimo.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, no es posible realizar un procedimiento análogo en dirección transversal, puesto que la presencia de olas rompiendo constantemente en dicha dirección, aumenta la complejidad del problema. Por este motivo, la aplicación de un timestack en dirección transversal para obtener corrientes no es factible.

Acorde a los objetivos planteados, se propone extender esta metodología utilizando timestacks que abarquen toda la zona de estudio (zona de rompientes captadas por drones), para luego calcular las velocidades transversales de corrientes a partir de la continuidad de flujos. Dicha ecuación de continuidad, requiere necesariamente conocer la batimetría, la cual se determina con el algoritmo cBathy (Holman et al., 2013). El detalle de la metodología propuesta se presenta en el capítulo 5.

## 5. METODOLOGÍA DE TRABAJO

Los antecedentes y procedimientos necesarios para cumplir con los objetivos trazados, se detallan en el presente capítulo.

### 5.1. Antecedentes del proyecto

#### 5.1.1. Antecedentes generales

Dentro del proyecto denominado “FONDECYT 1170415-Quantification of Two Dimensional Wave Breaking Dissipation in the Surf Zone”, se realiza una campaña en terreno en la playa Las Cruces, Región de Valparaíso, zona central de Chile, mostrada su ubicación en la figura 5.1 y con mayor detalle en la figura 5.2. La playa tiene un largo de aproximadamente 5 km y el sector de estudio, de extensión 0.6 km, corresponde a la porción ubicada más al norte de la playa, entre las coordenadas 256300 m y 257100 m Este, y los 6289300 y 6290000 m Norte, en el Huso 19, sistema UTM.

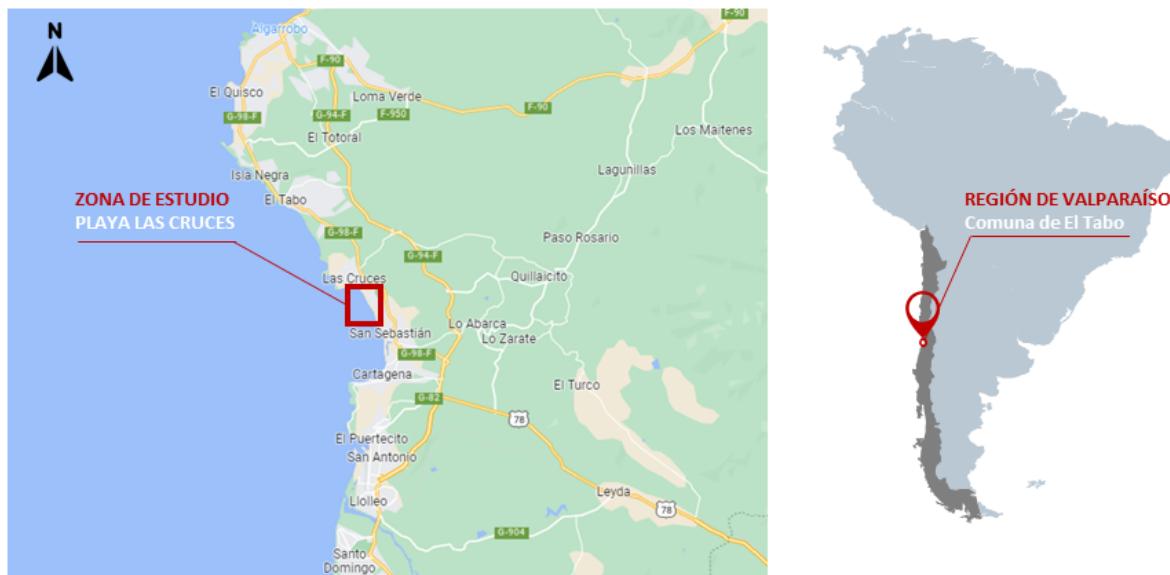


Figura 5.1: Ubicación geográfica de la zona de estudio. Playa Las Cruces

De acuerdo con Aldayuz (2019), durante la campaña se realizaron vuelos de dron, toma de coordenadas de puntos de control en tierra (GCP) y el despliegue de trazadores lagrangianos, cuyos antecedentes se resumen en las siguientes secciones.

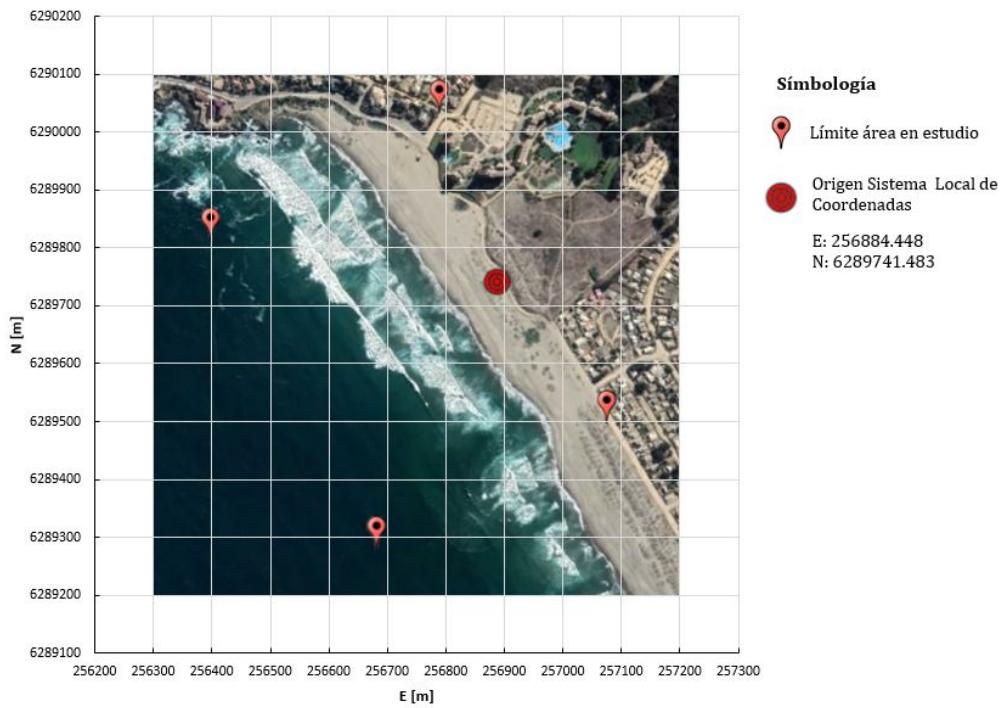


Figura 5.2: Ubicación geográfica Playa Las Cruces. Vista Satelital

### 5.1.2. Puntos GCP

Los puntos de control de tierra, o GCP, tal como se mencionó en secciones anteriores, son puntos cuyas coordenadas se conocen mediante un levantamiento y sus coordenadas UV se pueden digitalizar con precisión a partir de una imagen. Estos son necesarios para la calibración extrínseca de una cámara instalada. Pueden ser cualquier característica identificable, por ejemplo, la intersección de marcas blancas en el pavimento o una tapa de alcantarilla, o pueden ser objetivos que se han agregado a la escena solo con este propósito.

Para la campaña desarrollada, sólo se utilizó un objeto existente, una tapa de alcantarilla; para los demás puntos GCP, se tuvo que agregar objetivos de color blanco distribuidos en la zona de estudio. Las coordenadas geográficas de los GCP considerados cada día se presentan en la tabla 5.1, y en la figura 5.3 se muestra un cuadro de ejemplo por cada vuelo, donde se etiquetan con círculos rojos los GCP utilizados.

12 nov			13 nov			15 nov		
GCP	E [m]	N [m]	GCP	E [m]	N [m]	GCP	E [m]	N [m]
P1	256888.121	6289629.746	P1	256841.603	6289708.571	P1	256913.178	6289571.7
P2	256867.711	6289684.774	P2	256864.953	6289668.731	P2	256881.691	6289664.649
P3	256904.663	6289669.813	P3	256906.087	6289667.163	P3	256928.165	6289584.558
			P4	256866.15	6289687.263	P4	256907.655	6289631.486
			P5	256903.608	6289650.943	P5	256847.953	6289718.841
			P6	256858.021	6289719.866	P6	256865.451	6289670.53
			P7	256880.013	6289648.556	P7	256840.94	6289704.554
			P8	256873.917	6289703.218	P8	256899.765	6289611.389
			P9	256831.437	6289734.892	P9	256866.108	6289706.178
			P10	256881.149	6289670.665	Alc	256884.448	6289741.483
			Alc	256884.448	6289741.483			

Tabla 5.1: Coordenadas puntos GCP

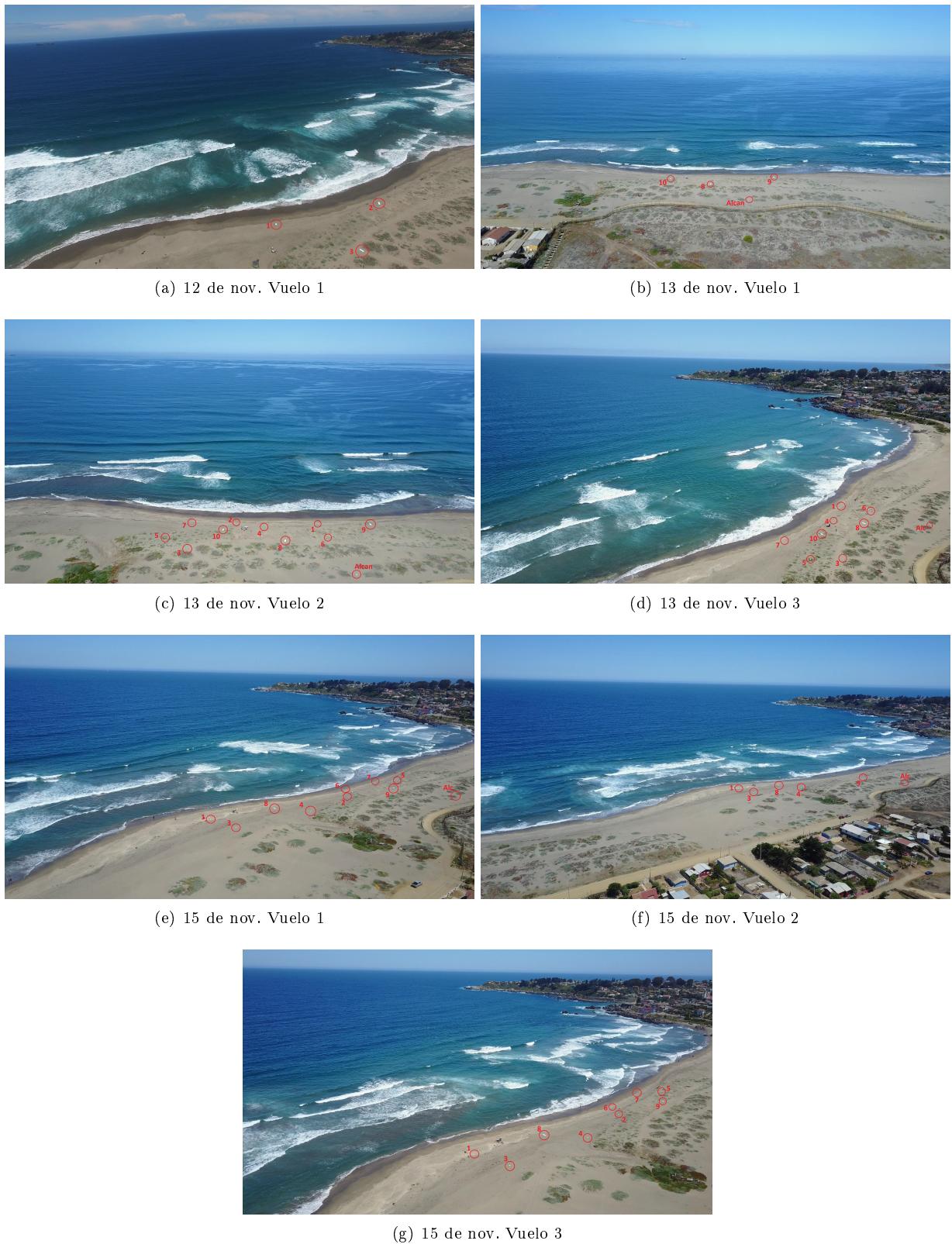


Figura 5.3: Imágenes de muestra de cada vuelo captadas por dron los días de campaña en terreno.

### 5.1.3. Vuelos dron

Se utilizó un dron DJI Mavic Pro para obtener los vuelos, el cual tiene una autonomía de 21 minutos, estabilidad parecida a la del DJI Phantom 3 standard (utilizado por Holman et al., 2017) y capacidad de obtener videos en calidad de C4K (4096 x 2160 24p). Además, los vuelos se realizaron variando la posición y ángulo con respecto a la playa para obtener distintos ángulos de incidencia de la luz. En la figura 5.4 se muestra la ubicación del dron (círculos) durante los vuelos realizados, así como su área captada (polígonos).

En la tabla 5.2 se presentan los metadatos (fecha, duración y ubicación) asociados a cada video de vuelo, y en la figura 5.3 se muestra un frame como ejemplo de cada uno, donde además están etiquetados los GCP correspondientes.

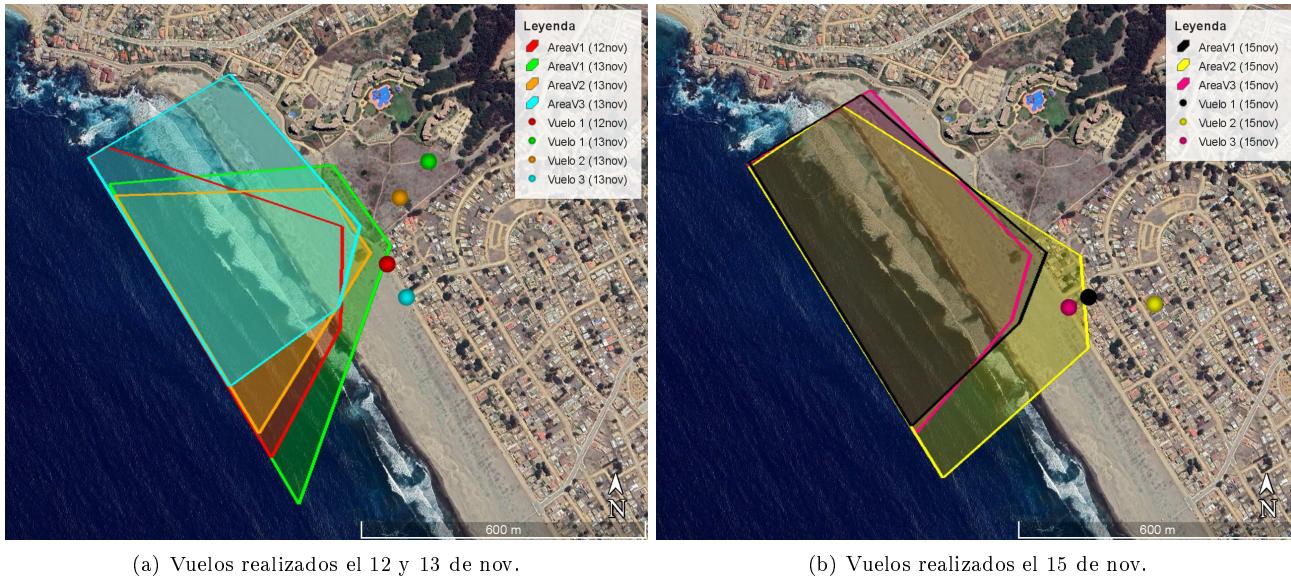


Figura 5.4: Ubicación vuelos dron durante la campaña realizada en noviembre de 2018

Metadatos						
Vuelo	Nombre Archivo	Fecha	Hora	Duración	GPS Dron	
12V1P1	DJI_0001.MOV	2018 11 12	13:08:43	0:09:20	33 deg 30' 19.03"S, 71 deg 36' 57.06"W	
12V1P2	DJI_0002.MOV	2018 11 12	13:18:04	0:03:06	33 deg 30' 19.04"S, 71 deg 36' 57.07"W	
13V1P1	DJI_0001.MOV	2018 11 13	10:14:06	0:09:05	33 deg 30' 11.91"S, 71 deg 36' 53.52"W	
13V1P2	DJI_0002.MOV	2018 11 13	10:23:13	0:00:58	33 deg 30' 11.91"S, 71 deg 36' 53.52"W	
13V2P1	DJI_0003.MOV	2018 11 13	10:29:52	0:09:05	33 deg 30' 14.43"S, 71 deg 36' 55.95"W	
13V2P2	DJI_0004.MOV	2018 11 13	10:38:58	0:00:59	33 deg 30' 14.43"S, 71 deg 36' 55.95"W	
13V3P1	DJI_0013.MOV	2018 11 13	13:43:37	0:09:05	33 deg 30' 21.31"S, 71 deg 36' 55.50"W	
15V1P1	DJI_0015.MOV	2018 11 15	12:18:53	0:09:05	33 deg 30' 21.27"S, 71 deg 36' 53.14"W	
15V2P1	DJI_0018.MOV	2018 11 15	12:54:02	0:09:05	33 deg 30' 21.78"S, 71 deg 36' 47.61"W	
15V2P2	DJI_0019.MOV	2018 11 15	13:03:08	0:08:12	33 deg 30' 21.78"S, 71 deg 36' 47.61"W	
15V3P1	DJI_0016.MOV	2018 11 15	12:32:44	0:09:05	33 deg 30' 21.98"S, 71 deg 36' 54.82"W	
15V3P2	DJI_0017.MOV	2018 11 15	12:41:50	0:08:59	33 deg 30' 21.98"S, 71 deg 36' 54.82"W	

Tabla 5.2: Datos de cada vuelo

#### 5.1.4. Trazadores lagrangianos

La campaña realizada en terreno también contempló el despliegue de trazadores lagrangianos, cuyas trayectorias se muestran en la figura 5.5, donde cada uno poseía un GPS configurado para registrar su posición a una frecuencia de 1 [Hz]. Según detalla Aldayuz (2019), se intentó que el despliegue de los equipos fuese en cercanía del cuello de un “rip”, dada la prioridad para medir las corrientes de retorno existentes en la playa.

Los datos tomados por los trazadores fueron filtrados para eliminar pérdidas de señal, efectos producidos por el surfeo o el oleaje, y además se aplicó un análisis por celda para obtener mediciones independientes. De esta forma, Aldayuz (2019) obtuvo resultados como los presentados en la figura 5.6. Puesto que, para este estudio sólo se disponían de los datos en bruto de los trazadores (figura 5.5), las velocidades se tuvieron que recalcular, así como la batimetría usando cBathy.

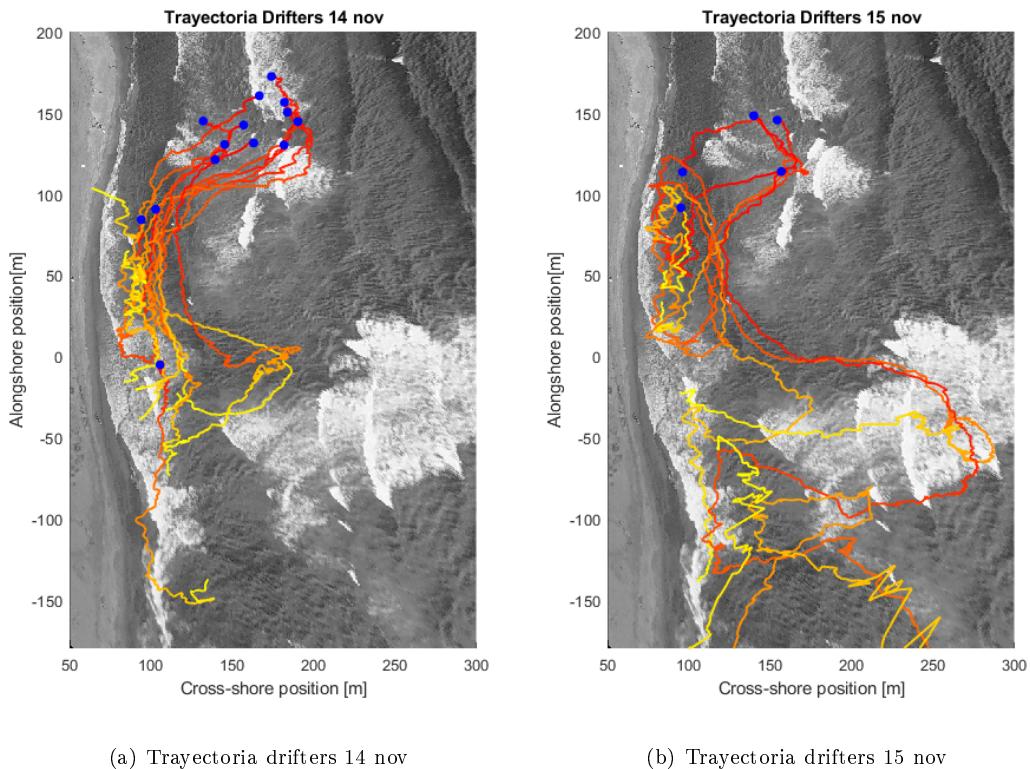


Figura 5.5: Trayectoria trazadores desplegados. Los puntos azules muestran la ubicación en la que fueron desplegados los equipos. La escala de colores de las trayectorias indican el tiempo transcurrido: rojo es el inicio de la trayectoria y amarillo el final. Gráfica mostrada en un sistema de referencia local

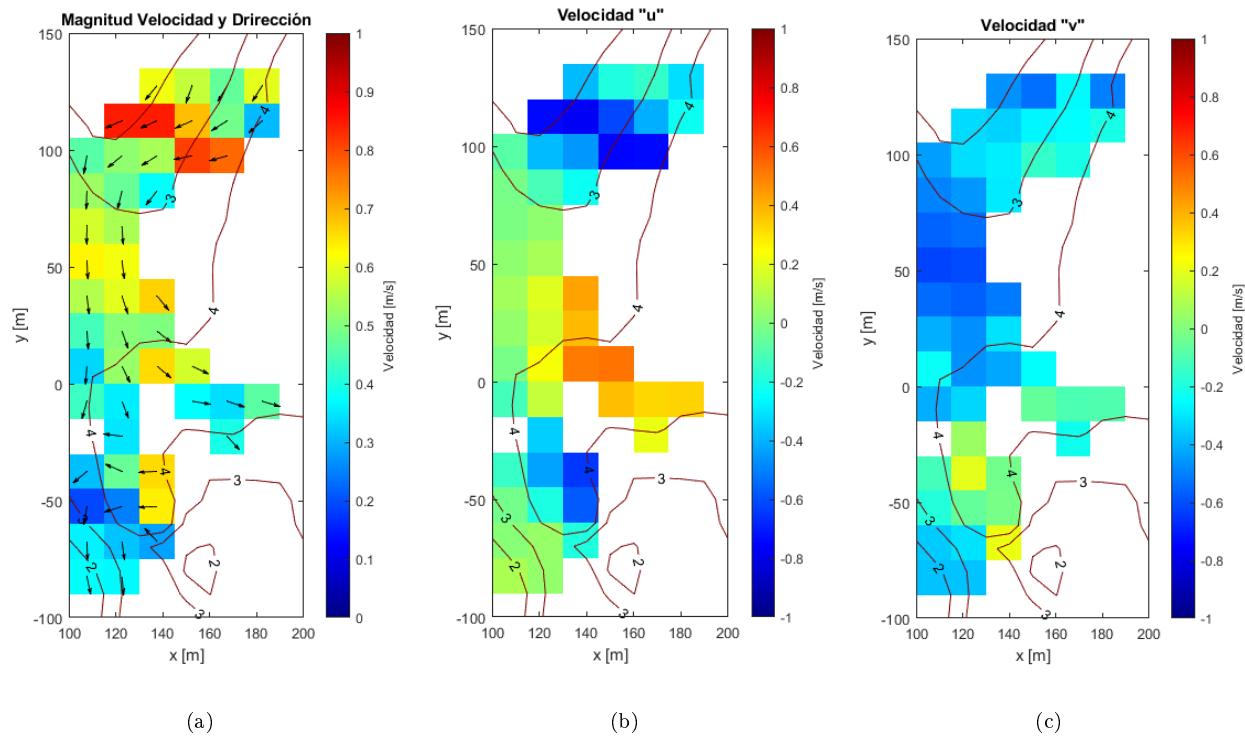


Figura 5.6: Resultado del análisis de los datos medidos con los trazadores. Las velocidades fueron recalculadas según metodología descrita en Aldayuz (2019), y la batimetría (curvas de nivel de color marrón) se obtuvo a partir de cBathy. (a) Magnitud y dirección de las velocidades medias de las corrientes. (b) Magnitud de la componente x de la velocidad. (c) Magnitud de la componente y de la velocidad.

## 5.2. Obtención campo de velocidades

### 5.2.1. Rectificación de imágenes

El proceso de rectificación comienza con el guardado de imágenes del video, donde cada cuadro se extrae en formato JPG a una razón de 2 fps (frames por segundo). Posteriormente, se ingresan los datos de entrada y valores de configuración al algoritmo: perfil de calibración del lente (LCP), obtenido a partir de la calibración intrínseca; coordenadas GCP (puntos de control en tierra); y los parámetros asociados a la malla discreta deseada. En la sección 10.1 de anexos, se muestran los valores de los parámetros empleados en el presente trabajo.

Para facilitar el análisis, se realiza la transformación a un sistema de coordenadas locales, cuyo origen corresponde a una tapa de alcantarilla ubicada en el lugar, con coordenadas UTM: Este = 256.884,448; Norte 6.289.741,483; Huso 19, ver figura 5.2. Además se realiza una rotación de 150° en sentido antihorario, de tal forma que la coordenada x apunte en la dirección perpendicular a la linea de costa. El sistema de referencia local se muestra en la figura 5.7.

Los valores usados para definir la grilla de discretización espacial (grilla sobre la cual se realiza el ordenamiento de pixeles) son los siguientes:

$$X_{\min} = -50 \text{ [m]} ; X_{\max} = 400 \text{ [m]} \text{ (Sist. ref local)}$$

$$Y_{\min} = -300 \text{ [m]} ; Y_{\max} = 300 \text{ [m]} \text{ (Sist. ref local)}$$

$$\Delta X = 0.5 \text{ [m]} ; \Delta Y = 0.5 \text{ [m]}$$

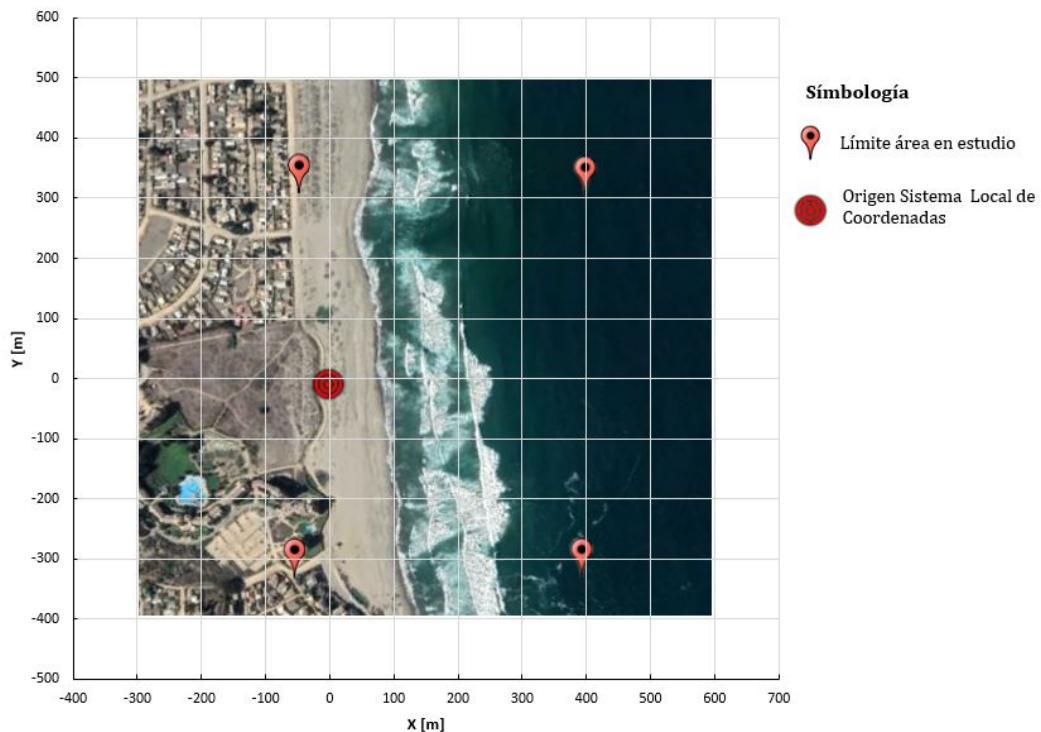


Figura 5.7: Sistema de Coordenadas Locales

### 5.2.2. Malla vBar

El paso siguiente consiste en definir timesteps que abarquen completamente la zona de interés. Tal como se describió en el capítulo 4, para construir un timestepstack, se necesita establecer los puntos iniciales y finales del segmento donde se apilarán los pixeles (instrumento vBar). De esta manera, para cubrir el área de estudio, se trabaja con múltiples timestepstack ubicados ordenadamente y de manera continua en una matriz de instrumentos vBar, denominada malla

vBar (ver figura 5.8.a). Cada instrumento de esta grilla, ubicado paralelo a la costa, posee un ancho  $dy$ , y una separación  $dx$  de los demás instrumentos en dirección transversal. En total queda un sistema de  $M \times N$  dimensiones,  $N$  columnas con  $N$  instrumentos en cada una de ellas. En la figura 5.8(b) se muestra un ejemplo de malla vBar considerando un ancho  $dy$  de 10 metros y una separación  $dx$  de 10 metros, las líneas rojas representan la longitud de los instrumentos y los puntos negros son las coordenadas iniciales y finales que los definen.

A diferencia de Chickadel et al. (2003), que utiliza una longitud de instrumento,  $dy$ , igual a 30 metros, en este estudio se propone una longitud de 10 metros, con el objetivo de aumentar resolución espacial y caracterizar adecuadamente los eventuales patrones de circulación que se puedan obtener. Sin embargo, en el capítulo discusión se realiza un análisis de sensibilidad variando este parámetro, con el objetivo de determinar su influencia en los resultados.

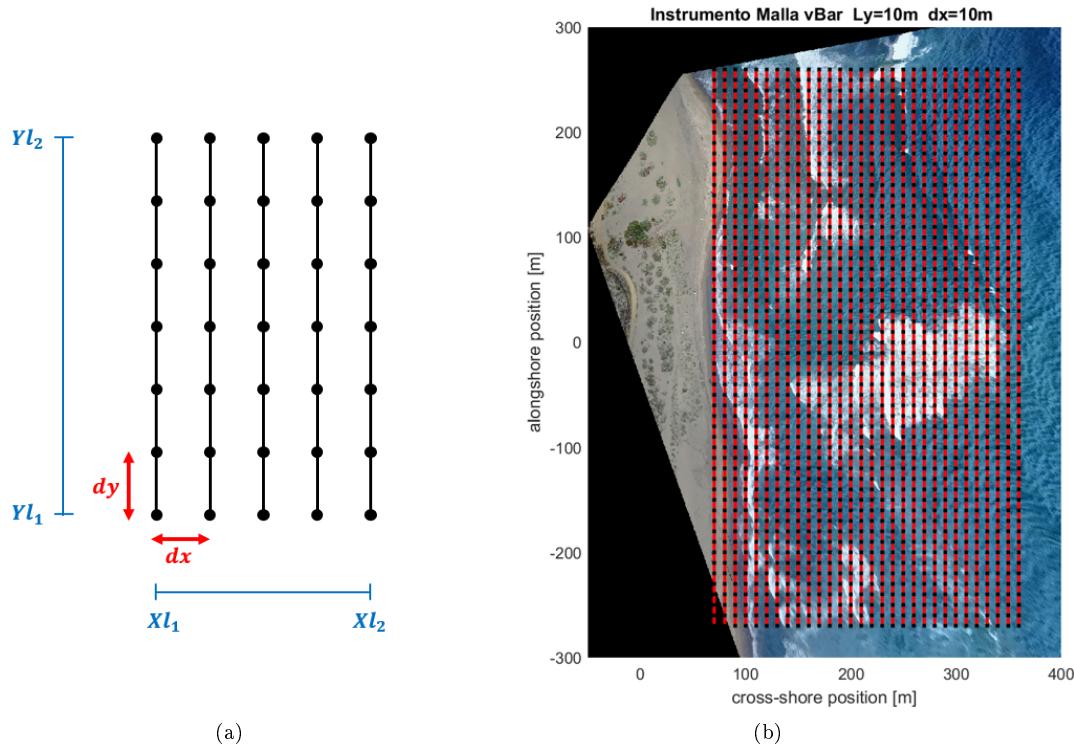


Figura 5.8: (a) Esquema grilla vBar. (b) Ejemplo grilla vBar de  $53 \times 30$  instrumentos. Cada instrumento tiene una extensión de 10 metros, con una separación de 10 metros entre instrumentos en dirección transversal (x).

### 5.2.3. Matriz de velocidades

El proceso siguiente consiste en aplicar el algoritmo de Chickadel et al. (2003) sobre todos los timestack construidos a partir de los instrumentos vbar definidos en la grilla, obteniendo sus series de tiempo de velocidad de corriente longshore correspondiente. Posteriormente se eliminan las estimaciones que no cumplen con los criterios definidos en la sección 4.3.5 y se promedian los valores restantes para toda la serie temporal. La resolución temporal de la serie depende del parámetro  $T_s$  fijado, al cual se asigna un valor de 16 segundos según lo recomendado en Chickadel et al. (2003) (de todas maneras se probarán otros valores en el análisis de sensibilidad). Y el tiempo sobre el cual se promedia es la duración correspondiente de cada video (tabla 5.2). A modo de ejemplo, en la figura 5.9(a) se muestra una matriz de velocidades obtenida luego de aplicar repetidamente el algoritmo óptico sobre la grilla vBar.

Con el objetivo de eliminar algunos elementos NaN (Not a Number) en la matriz de velocidades y reemplazarlos por valores interpolados linealmente, se aplican una serie de filtros y operaciones morfológicas a una imagen binarizada, esto permitirá, en pasos posteriores, aplicar las ecuaciones de continuidad sin tanta interrupción en los datos. En primer lugar, la matriz de velocidades se binariza asignando unos a los elementos que contienen un valor de

velocidad y ceros a los que no. Posteriormente se aplican secuencialmente operaciones morfológicas: relleno de huecos con imfill(); eliminado de grupos de píxeles pequeños con bwareaopen(); erosión y dilatación de los bordes con imopen(); y aplicación de dos filtros gaussianos con imguidedfilter(), para suavizar más los bordes. Todas estas funciones pertenecen al paquete de procesamiento de imágenes de Matlab y se describen con más detalle en la tabla 5.3. Una vez construido el filtro (imagen binarizada resultante de todas las operaciones), este se aplica como máscara de recorte para decidir los píxeles a interpolar. Un ejemplo del resultado obtenido se muestra en la figura 5.9(b).

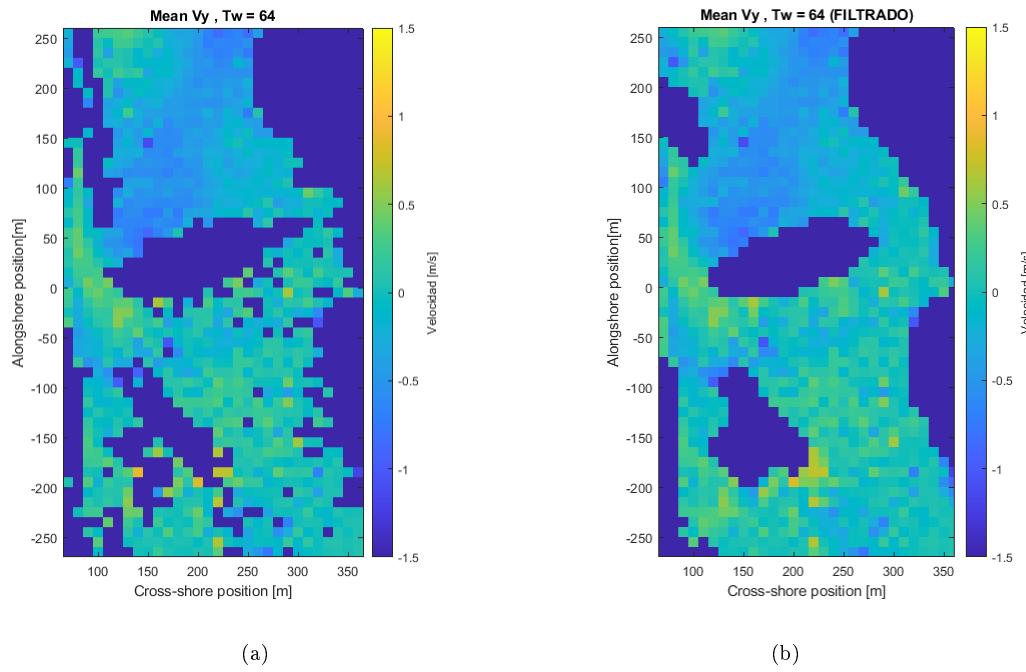


Figura 5.9: (a) Velocidades obtenidas promediando los resultados obtenidos para 31 ventanas de tiempo de 16 s, ejemplo matriz 53x30. (b) Matriz con velocidades interpoladas a partir de filtros y operaciones morfológicas

Función	Descripción
imfill(I,'holes')	Rellena huecos de la imagen binaria de entrada I. En esta sintaxis, un hueco es un conjunto de píxeles de fondo que no se puede alcanzar llenando el fondo desde el borde de la imagen.
bwareaopen(I,P)	Elimina todos los componentes conectados (objetos) que tienen menos de P píxeles de la imagen binaria I, y produce otra imagen binaria. Esta operación se conoce como una apertura de área.
imopen(I,SE)	Realiza una apertura morfológica en la imagen binaria I utilizando el elemento estructurante SE. La operación de apertura morfológica consiste en una erosión seguida de una dilatación utilizando el mismo elemento estructurante para ambas operaciones.
imguidedfilter(I,'Name')	'NeighborhoodSize': Filtra la imagen binaria utilizando un tamaño de vecindad rectangular alrededor de cada pixel. 'DegreeOfSmoothing': Filtra la imagen binaria controlando la cantidad de suavizado a partir de la varianza que existe en la vecindad de cada pixel.

Tabla 5.3: Funciones utilizadas del paquete de procesamiento de imágenes de Matlab

#### 5.2.4. Cálculo velocidad U: Método Integral

Para obtener la velocidad de corriente en dirección cross-shore (U) se utiliza un modelo bidimensional donde se asume que el flujo en el plano horizontal predomina por sobre lo que ocurre en dirección vertical, de esta forma, utilizando la discretización definida en la malla vBar, se establece una malla cuadricular compuesta por elementos cuadrados donde cada lado tiene asociado un caudal o velocidad (U en dirección x, V en dirección y) y profundidad, ver figura 5.10. Para este caso, la variable que se quiere encontrar es el campo de velocidades U, es decir, el vector de incógnitas está compuesto por todos los elementos  $U_{ij}$ .

El campo de velocidades en todo el dominio es posible obtenerlo a partir de un balance de flujos, es decir, utilizando la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} = 0 \quad (5.1)$$

Esta ecuación nos permite afirmar que los flujos que ocurren en la zona de la rompiente estarán determinados por un balanceo entre los gradientes de flujo máscico en las dos direcciones horizontales ( $\bar{Q}_x$  y  $\bar{Q}_y$ ) y el nivel medio ( $\bar{\eta}$ ).

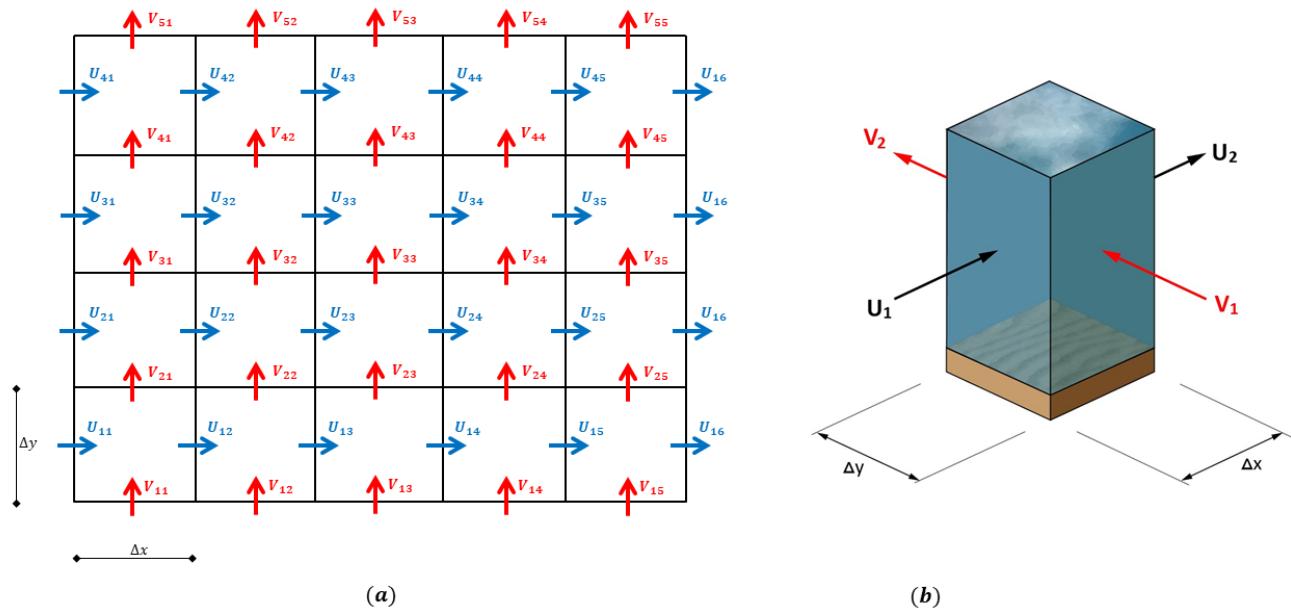


Figura 5.10: (a) Esquema representativo malla UV. (b) Volumen de control elemento grilla UV

Para efectos de este estudio se asume un flujo permanente, es decir, existe una condición de equilibrio donde los gradientes de flujo en dirección  $\hat{x}$  están balanceados con los gradientes de flujo en dirección  $\hat{y}$ , de esta forma es posible asumir que el nivel medio del mar permanece constante.

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} = 0 \quad (5.2)$$

Utilizando como volumen de control los elementos definidos en la grilla UV, se aplica la ecuación de continuidad de forma discreta sobre cada columna de agua, una representación de esto se muestra en la figura 5.10 (b) y en la figura 5.11, donde se considera un flujo entrante con velocidad  $U_1$  y  $V_1$  en dirección  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  respectivamente y un flujo de salida  $V_2$  y  $U_2$ , además, cada lado del volumen de control tiene asociada una profundidad  $h_{x1}$ ,  $h_{x2}$ ,  $h_{y1}$  o  $h_{y2}$ .

Obs 1 : Se utilizan los subíndices 1 y 2 en las variables para simplificar la notación.

Las profundidades  $h_{x1}$ ,  $h_{x2}$ ,  $h_{y1}$  y  $h_{y2}$  son datos que se deben conocer para poder determinar el campo de velocidades U, por lo tanto, la batimetría de la playa es un dato necesario. Esta se determina con el algoritmo cBathy.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = -\frac{\partial Q_y}{\partial y} \quad (5.3)$$

$$Q_x = -\frac{\partial Q_y}{\partial y} \cdot \Delta x + C_1 \quad (\text{integrando}) \quad (5.4)$$

$$Q_2 = -\frac{\Delta Q_y}{\Delta y} \cdot \Delta x + Q_1 \quad (\text{discretizando}) \quad (5.5)$$

$$U_2 \cdot h_{x2} = -\frac{V_2 \cdot h_{y2} - V_1 \cdot h_{y1}}{\Delta y} \cdot \Delta x + U_1 \cdot h_{x1} \quad (\text{aplicando definición de flujo m\'asico}) \quad (5.6)$$

$$U_2 = \frac{1}{h_{x2}} \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} (V_2 \cdot h_{y2} - V_1 \cdot h_{y1}) + U_1 \cdot h_{x1} \right) \quad (5.7)$$

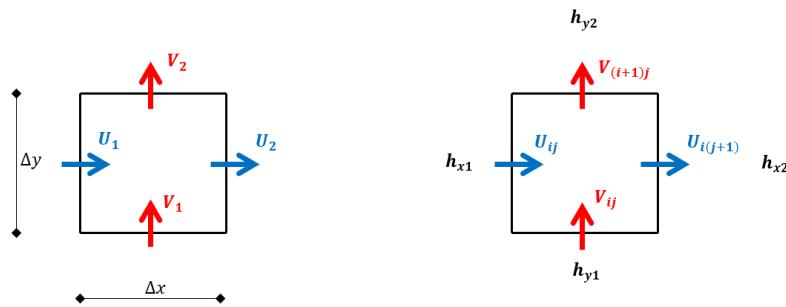


Figura 5.11: Diagrama volumen de control

La ecuación 5.7 permite determinar el campo de velocidades U en todo el dominio, salvo en ocasiones donde alguna velocidad no se conoce, donde se requiere adoptar algunos valores para continuar el cálculo. Estas condiciones se deben imponer en la frontera o en aquellos casos donde ninguna velocidad estimada haya cumplido con el criterio establecido. De esta forma, se establecieron cinco posibles casos que se detallan en la tabla 5.4.

Condiciones en caso de no existir data									
Caso N°	V1	V2	U1	U2		V1	V2	U1	U2
1	NaN	num.	num.	-	⇒	0	idem	idem	Ec 5.7
2	num.	NaN	num.	-		idem	0	idem	Ec 5.7
3	NaN	NaN	num.	-		idem	idem	idem	NaN
4	num.	num.	NaN	-		idem	idem	0	Ec 5.7
5	NaN	num.	NaN	-		0	idem	0	Ec 5.7

Tabla 5.4: Condiciones en caso de no existir data

### 5.2.5. Cálculo velocidad U: Método Matricial

Se propone un método alternativo al mostrado en la sección anterior, donde a diferencia de ir resolviendo la ecuación de continuidad de manera secuencial, se plantea un sistema de ecuaciones para todas las celdas (o volúmenes de control) y luego se resuelve de manera matricial.

Para implementar esto en un algoritmo, lo primero que se hace es plantear la continuidad a nivel local como se muestra en la ecuación 5.8 y 5.9 y se esquematiza en la figura 5.11, donde se define la matriz de profundidades local  $H_L$  y vector de velocidades local  $UV_L$ . Para este método se asumirá que  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son iguales, no interviniendo en la formulación, por lo que si se desea resolver un sistema con espaciamientos distintos, se debe agregar un factor que multiplique la matriz  $H_L$ . Se considera además, que un bloque o celda tiene un total de 4 grados de libertad (uno por cada lado), y cada grado de libertad tiene asociado una velocidad y profundidad.

$$\begin{bmatrix} h_{x1} & h_{y1} & -h_{x2} & -h_{y2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.8)$$

$$[H_L] \cdot \{UV_L\} = 0 \quad (5.9)$$

El paso siguiente es llevar las variables locales a una matriz representativa de todo el sistema, lo que se logra aplicando una matriz de transformación ( $C_i$ ) a cada  $H_L$  para obtener una matriz de profundidades globales  $H$ , de esta forma, se construye la ecuación matricial de continuidad del sistema (ver ecuación 5.10). Notar que si la malla vBar (definida inicialmente) produce una matriz de velocidades longshore,  $V$ , de  $M \times N$  dimensiones, se tendrá un sistema de  $(M-1) \times N$  celdas.

$$H \cdot UV = 0 \quad (5.10)$$

$H$  : Matriz general de profundidades. Fila i de  $H = H_{Li} \cdot C_i^T$ , con  $i = 1, 2, 3, \dots, N^o$  de celdas

$UV$  : Vector general de velocidades

Para resolver el sistema anterior es necesario reescribir la ecuación matricial eliminando las columnas de las matriz  $H$  correspondientes con los grados de libertad conocidos y generando un vector  $B$ , que contiene la multiplicación de las velocidades y profundidades asociadas a los grados de libertad conocidos, por lo tanto, el sistema se puede reducir a:

$$Hr \cdot Ur = B \quad (5.11)$$

$H_r$  : Matriz de profundidades reducida.

$U_r$  : Vector de velocidades  $U$  reducido.

$B$  : Vector  $B$ , cada elemento se calcula como  $B_i = -\sum_{jk} h_{i,jk} UV_{jk}$ , donde subíndice  $jk$  : grados de libertad conocidos

De esta forma, las velocidades  $U_r$  se encuentran invirtiendo la matriz  $H_r$  y premultiplicando por  $B$ :

$$U_r = Hr^{-1} \cdot B \quad (5.12)$$

En caso de no existir data, se aplican las mismas condiciones expuestas en la sección anterior (tabla 5.4), tratándolo como grado de libertad conocido en caso de que la velocidad sea cero, y eliminando el grado de libertad en el que sea NaN.

Para mayor detalle de esta metodología, dirigirse al apartado 10.2 de los anexos.

### 5.3. Sensibilidad y validación del modelo

El modelo óptico de Chickadel et al. (2003) fue testeado con datos in situ de la playa Duck, Carolina del Norte, por lo que algunos parámetros fueron propuestos específicamente para ese lugar. Por este motivo, se realiza un análisis de sensibilidad variando los valores de los parámetros y examinando su correlación con los resultados de medición directa obtenidos por Aldayuz (2019). A continuación se enlistan los parámetros a analizar, incluyendo  $\Delta x$  añadido en la construcción de la malla vBar:

- Longitud de los instrumentos vBar (espaciamiento de muestreo en dirección y),  $\Delta y$
- Separación instrumentos en dirección x,  $\Delta x$
- Duración de la ventana de análisis,  $T_w$
- Tiempo de muestreo,  $T_s$
- Número de onda mínimo,  $k_{min}$
- Probabilidad de ajuste (asociado al nivel de confianza) del modelo, P
- Umbral para el intervalo de confianza de la velocidad media, C.I.
- Umbral para el rango de intensidad,  $I_{range}$

En la tabla 5.5 se muestra el valor de los parámetros usados en el presente estudio (capítulo 6, resultados), junto con las magnitudes evaluadas en el análisis de sensibilidad (capítulo 7, discusión).

Valores utilizados en el estudio:

Parámetros	Unidad	Valor	A. Sensibilidad
$\Delta y$	m	10	5 - 10 - 15 - 20 - 30
$\Delta x$	m	10	5 - 10 - 15 - 20
$T_w$	s	32	16 - 32 - 64 - 128 - 256
$T_s$	s	16	8 - 16 - 32 - 64 - 128
$k_{min}$	1/m	0.25	0.125 - 0.25 - 0.5
P		0.9	0.6 - 0.7 - 0.9 - 0.95 - 0.99
C.I.	m/s	0.2	0.05 - 0.1 - 0.2 - 0.5
$I_{range}$	Intensidad	40	20 - 40 - 50

Tabla 5.5: Valores parámetros método óptico.

#### 5.4. Vorticidad

Complementando los resultados de velocidades en ambas direcciones, se añade el cálculo del componente vertical de la vorticidad (se asume un bajo nivel de incidencia de la vorticidad en las otras dimensiones en los procesos estudiados). La vorticidad en un fluido, es una medida de su rotación local, siendo este, un efecto directo de los gradientes (o discontinuidades) de disipación que puedan existir en la playa, hecho que permite explicar de mejor forma los patrones de circulación existentes. El componente vertical de la vorticidad, se define como:

$$\Gamma = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} \quad (5.13)$$

En Macmahan et al. (2010) se presenta un método de diferencia central ponderado, que permite calcular el campo de vorticidad a partir del campo de velocidades:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} = \frac{1}{\Delta x} & [\theta(v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1}) + (1 - 2\theta)(v_{i+1,j} - v_{i-1,j}) + \theta(v_{i+1,j-1} - v_{i-1,j-1})] \\ & - \frac{1}{\Delta y} [\theta(u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}) + (1 - 2\theta)(u_{i,j+1} - u_{i,j-1}) + \theta(u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1})] \end{aligned} \quad (5.14)$$

Donde

$\Gamma_{ij}$  representa la vorticidad en el punto  $(x_i, y_j)$

$u_{i,j}$  y  $v_{i,j}$  representan la velocidad “cross-shore” y “alongshore” respectivamente en el punto  $(x_i, y_j)$

$x_i = i\Delta x$

$y_j = j\Delta y$

$\theta = 1/3$ , factor de ponderación considerando un peso homogéneo.

## 6. RESULTADOS

Las velocidades longitudinales medias obtenidas para cada vuelo, a partir del método óptico, se presentan en la figura 6.1. Estos resultados fueron calculados con una resolución espacial de 10 metros en ambas direcciones y una resolución temporal de 16 segundos, el detalle de los parámetros utilizados se encuentra en la tabla 5.5. Específicamente en la figura 6.1, se muestran las velocidades promediadas considerando sólo las estimaciones validas (que cumplen los 3 criterios de aceptación), junto con su desviación estándar respectiva. En general, se observan zonas comunes donde no fue posible estimar velocidades, estas corresponden al sector comprendido entre las coordenadas  $y = -20\text{m}$  e  $y = 50\text{m}$ , que en algunas ocasiones abarca casi en totalidad los 300 metros transversales; y una segunda zona comprendida entre la ordenada -50 hacia abajo, centrada en  $x = 150\text{ m}$ . Además se nota una mayor disponibilidad de resultados los días 12 y 15 de noviembre.

Con el objetivo de evaluar condiciones medias y poseer mayor cantidad de datos válidos en la zona, se promediaron las velocidades por día (ver figura 6.2), y de los tres días (12, 13 y 15 de noviembre), mostrado en la figura 6.2.d. Estos resultados evidencian dos fenómenos a destacar: la zona predominante de velocidades negativas que comienzan a aparecer desde los 250 metros (coordenada  $y$ ) y termina en la coordenada cero; y un segundo sector donde se observa un cambio a velocidades positivas y se extiende transversalmente, entre las ordenadas -50 m y 50 m. En cuanto a la variabilidad de los datos, se obtiene una desviación estándar media que no sobrepasa los 0.2 m/s.

En la figura 6.3 se presentan las velocidades transversales (componente  $x$ ) obtenidas por día, luego de aplicar la ecuación de continuidad, junto con los gráficos que muestran la magnitud total de las corrientes y su dirección (vectores de color rojo). La figuras 6.3(a) y 6.3(b) muestran unos resultados altamente interrumpidos por la ausencia de valores, juntos con algunos saltos bruscos que entorpecen el patrón de circulación obtenido, existiendo una gran variabilidad entre la ordenada -250 m y -50 m. Por otro lado, en la figura 6.3(c), correspondiente al día 15 de noviembre, se obtuvo un patrón de circulación bastante más ordenado, identificándose una corriente mayoritariamente longitudinal entre las ordenadas 30 y 200 metros, que luego se transforma en una corriente transversal que se extiende hasta salir de la bahía. Por el sector sur del espacio analizado, se distingue una corriente transversal que se acerca a la playa (valor negativo) en la ordenada -50m, a partir de esta se desprenden algunos flujos que alimentan la corriente más grande ubicada en  $y=-15\text{m}$ .

El campo de velocidades promediando las velocidades longitudinales de los tres días se presenta en la figura 6.4. Además, a este se le realiza un leve filtro gaussiano de desviación estándar 0.5 (distribución normalizada) para suavizar un poco la matriz de velocidades previo a la aplicación de la ecuación de continuidad. Los mismos resultados se presentan con una superposición de las líneas de corrientes en la figura 6.5(a), y una aplicación de un filtro gaussiano con desviación estándar 1 en la figura 6.5(b) con el objetivo de visualizar con mayor claridad los patrones de circulación obtenidos. Finalmente, en la figura 6.5(c), se presenta la batimetría obtenida con cBathy utilizando todos los videos disponibles.

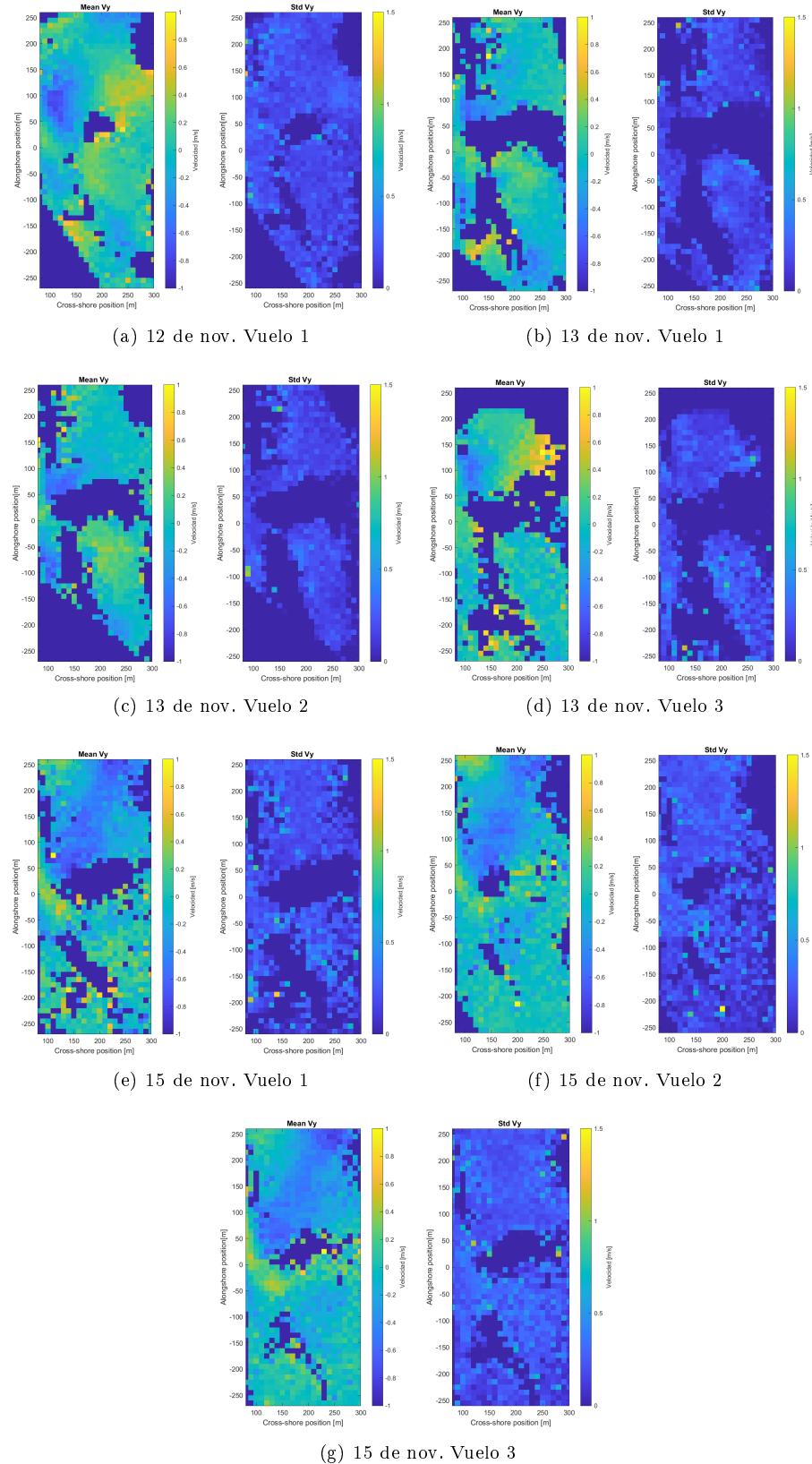


Figura 6.1: Resultados velocidades medias longshore por vuelo y su desviación estandar. Matrices obtenidas al aplicar el algoritmo de Chickadel sobre la malla vBar y luego promediarlas en el tiempo.

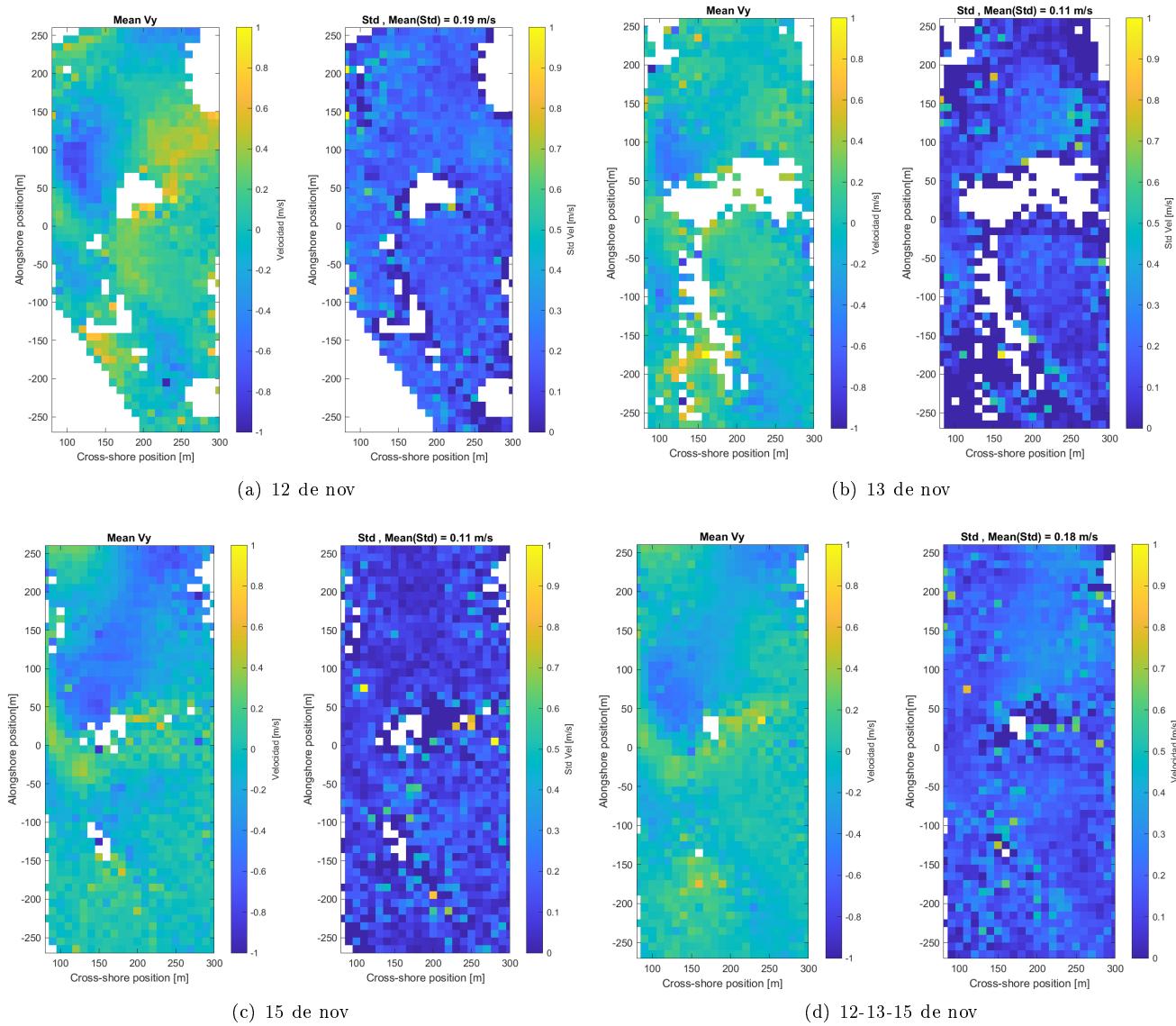


Figura 6.2: Velocidades longshore promediadas por día

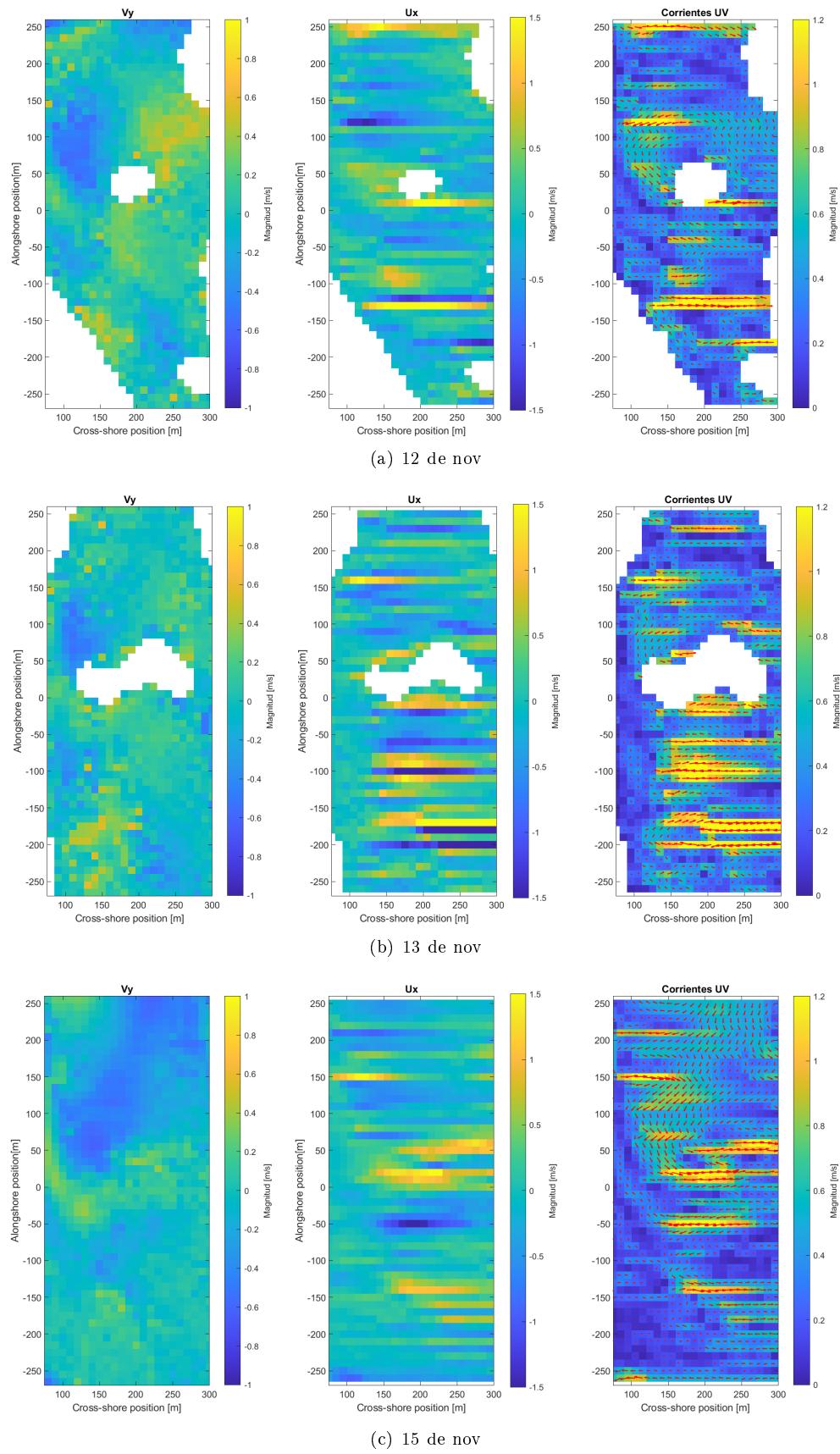


Figura 6.3: Resultado campo de velocidades obtenidos por día.

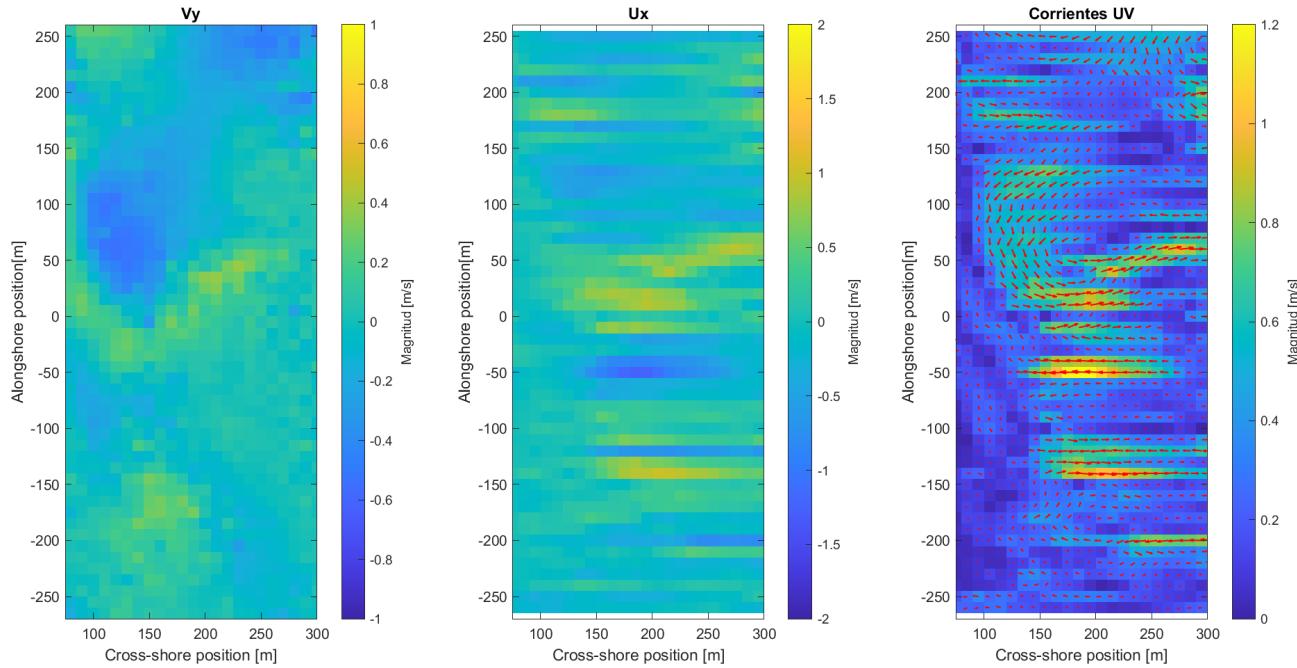


Figura 6.4: Campo de velocidades promediando los tres días 12-13-15 nov

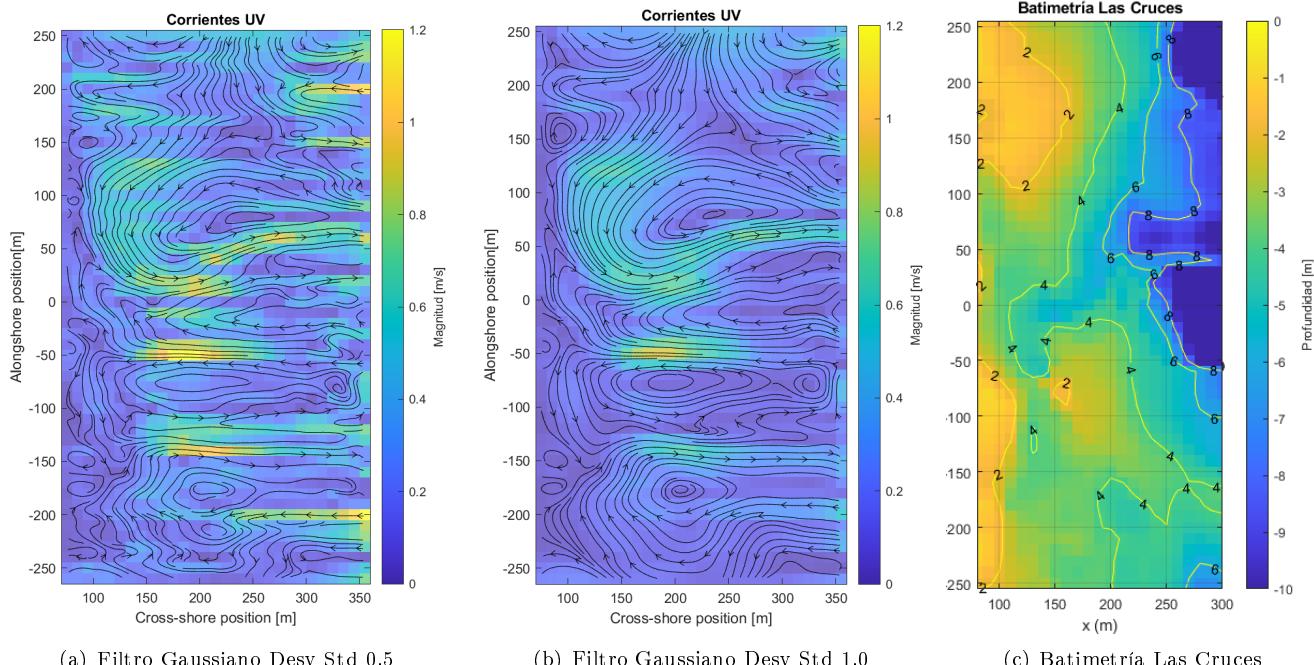


Figura 6.5: Lineas de corrientes medias (12-13-15 nov). En la figura (b) se aplica un filtro gaussiano con división estandar de 1, con la finalidad de observar con mayor claridad el patrón de circulación.

## 7. DISCUSIÓN

En este capítulo se analizan los resultados presentados en el capítulo anterior, añadiendo un análisis de sensibilidad de los parámetros principales y una comparación con las mediciones directas disponibles.

### 7.1. Mediciones ópticas

En primer lugar, la batimetría obtenida con cBathy (figura 6.5), muestra la presencia de una depresión importante en la coordenada  $y = 0$  m, que se extiende de forma diagonal hasta la coordenada  $y = 50$  m aproximadamente. Este canal, atraviesa completamente la playa, dejando una abertura entre los dos bancos de arenas que existen en los sectores norte y sur (zona de menor profundidad). Además se observa un canal longitudinal más angosto ubicado en la abscisa 125, que conecta con el canal transversal en  $y=0$  m.

El campo de velocidades medias obtenido a partir de los tres días, mostrado en las figuras 6.4 y 6.5, evidencia claramente la existencia de un “rips” en  $y \approx 15$  m, corriente transversal que atraviesa toda la playa hasta salir en  $y \approx 50$  m. Dicha corriente es coherente con la gran depresión en la batimetría, mencionada anteriormente. Esta corriente, es alimentada por una gran corriente longitudinal que se origina cercana a  $y = 140$ m y experimenta un cambio brusco en su dirección en  $y \approx 20$ m, donde comienza el “rips”. Además, existe otra corriente transversal, pero de dirección negativa, en  $y \approx -50$ m, que sufre un punto punto de inflexión en  $x \approx 140$ m, dividiéndose en dos flujos longitudinales, uno que alimenta el “rip” principal, y otro que sigue en dirección negativa. Se detecta también, otro “rips” de menor tamaño y amplitud en la ordenada  $y \approx -150$ m, al cual confluyen dos corrientes longitudinales provenientes del norte y sur respectivamente.

En cuanto a las magnitudes, los valores más altos ocurren en: el “rip” principal ( $y \approx 15$  m), con velocidades cercanas a 1 m/s; y en las corrientes transversales ubicadas en  $y \approx -50$  m e  $y \approx -150$  m. Aunque la validez de estos últimos se debe evaluar, ya que no concuerda una magnitud tan elevada con la morfología de la playa y las mediciones que entregaron los trazadores lagrangianos. Por otra parte, las mayores velocidades asociadas a corrientes longitudinales, se encuentran entre  $y = 140$  m e  $y = 20$  m , y estas rondan los 0.7 - 0.9 m/s, siendo esta la fuente principal del “rip”. En el resto de la playa, fuera de las zonas ya mencionadas, no se superan los 0.4 m/s aproximadamente.

Importante aclarar que al promediar todas las velocidades, se está asumiendo que se mantuvo una condición estable por varios días, por lo que los patrones de circulación no debiesen haber cambiado notoriamente.

### 7.2. Comparación con mediciones directas

La validación y comparación de los resultados se realizan con las mediciones obtenidas de los trazadores lagrangianos (figura 7.1). Dado el análisis y filtrado que se tuvo que realizar a las mediciones directas de los drifters, la resolución espacial de la matriz de velocidades obtenida se compone de celdas de  $15 \times 15$  metros (Aldayuz, 2019). De esta forma, para poder realizar la comparación del método óptico con las mediciones directas, se realiza una interpolación de las matrices de velocidad (figura 6.4) a una grilla con espaciamiento de 15 metros. Además, se mantienen en la matriz sólo las celdas que se corresponden con las celdas válidas del método directo, y las demás velocidades se eliminan, tal cual se muestra en la figura 7.1.

La primera gran diferencia notada entre los dos métodos, es que existe un desfase en la ubicación de la corriente longitudinal, por este motivo, y dada la escasez de mediciones directas que se tienen para comparar (49 celdas), se decidió desplazar la ubicación de las velocidades obtenidas por el método óptico un total de -10 m en dirección transversal (x), y -10 m en la dirección longitudinal (y). Con esta corrección, se evita que el error en la comparación se encuentre tan influenciado por ese factor y permite una comparación directa de las magnitudes correspondientes.

En la figura 7.1 se presentan los resultados obtenidos por el método óptico (con corrección de ubicación) y los trazadores. En la figura 7.1.a se muestra la magnitud de la velocidad y su dirección; en la figura 7.1.b, el componente transversal; y en la figura 7.1.c, el componente longitudinal; la tercera columna de gráficos muestra la diferencia

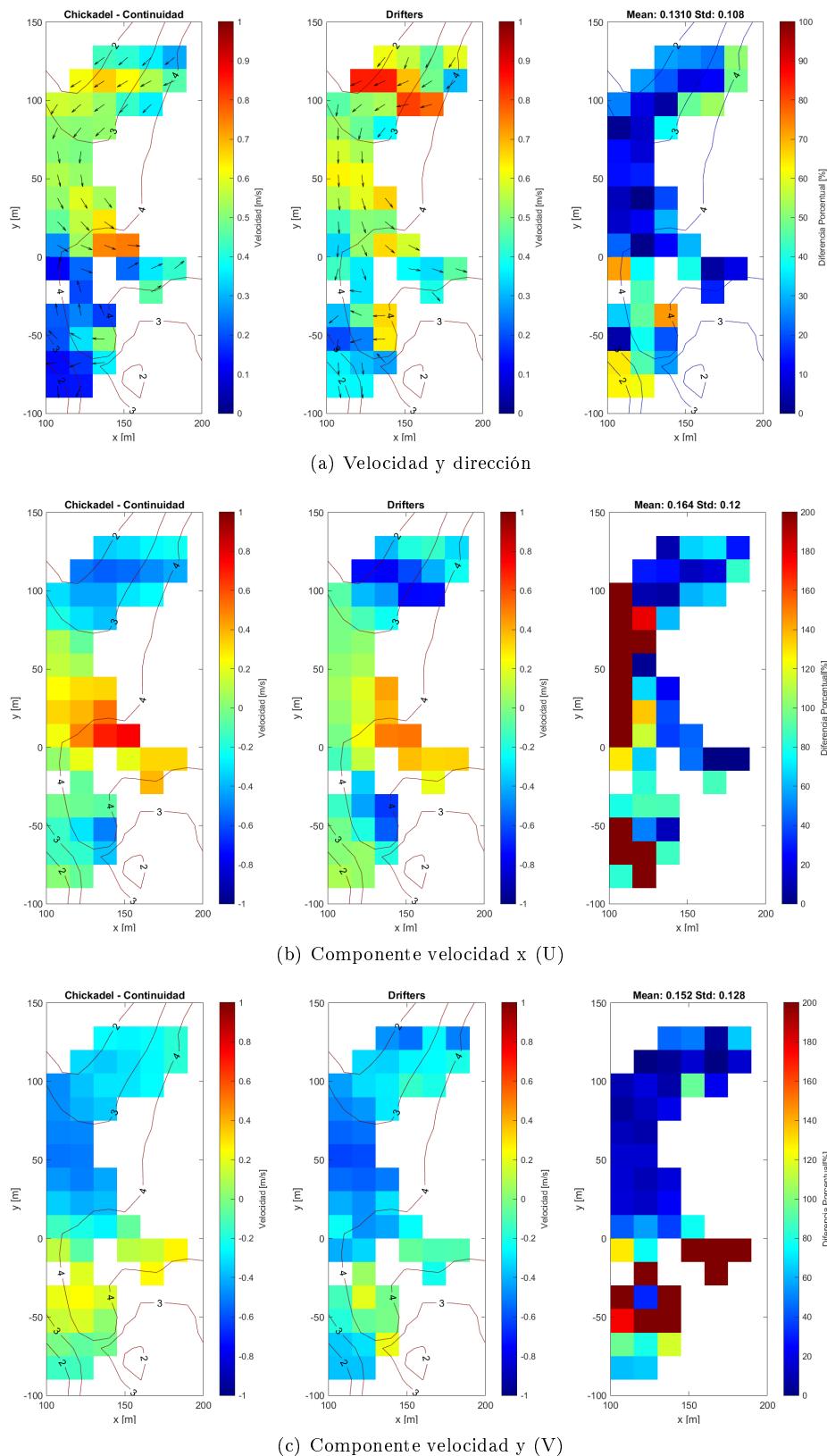


Figura 7.1: Comparación método óptico con mediciones drifters. Se eliminan celdas en los gráficos del método óptico correspondiente con las mediciones de los drifters para mayor claridad en la comparación

porcentual entre cada celda correspondiente. Observando los gráficos mencionados, se nota una gran coherencia en la dirección, sobretodo en la formación de la corriente longitudinal y su desarrollo, hasta su punto de inflexión en la ubicación del “rip” principal ( $y \approx 10$  m). En cuanto a su magnitud, los valores se asemejan bastante en la zona de la corriente longitudinal (entre las ordenadas 100 y 15 metros); en la zona norte, donde las corrientes siguen una dirección paralela a las isobatas (dirección diagonal), los drifters superan por 0.2 m/s aproximadamente las velocidades del método óptico; en la zona norte existe una mayor variabilidad de resultados (dirección y magnitud), pero coinciden en que su magnitud es considerablemente menor que en la corriente longitudinal y el inicio del “rip”, rondando los 0.2 a 0.4 m/s.

Por otra parte, el componente transversal de las velocidades obtenido por ambos métodos, es similar en casi todo el espacio, sobretodo en lo que respecta a su comportamiento. Primero en la zona norte ( $y \approx 110$  m) se encuentran los mayores valores negativos, luego, siguiendo la corriente, el componente disminuye notoriamente (zona corriente longitudinal), y llegando a la zona del “rip” ambos aumentan nuevamente, pero en dirección positiva. Las mayores diferencias tienen que ver con su diferencia en magnitud en ciertas zonas: en la zona norte la velocidad de los drifters es mayor por unos 0.2 m/s aproximadamente, mientras que en  $y \approx 10$  m, las mayores velocidades son del OCM. En cuanto a las velocidades longitudinales, tal como se expone en la figura 7.1.c, se asemejan bastante entre las ordenadas 130 m y 15 m, luego llegando a la zona del “rip”, donde la magnitud es mínima, la diferencia relativa entre ambos métodos es mayor.

Una comparación más directa entre las mediciones ópticas y las arrojadas por los trazadores, se muestra en la figura 7.2, en ella se examina la correlación lineal de la magnitud y sus dos componentes (x e y). Para la magnitud de la velocidad se obtiene una correlación medianamente baja, ya que el coeficiente de determinación ( $R^2$ ) es de 0.322, sin embargo, las diferencias se pueden estar sobreestimando al considerar ambos componentes. En cambio, para las componentes de velocidad en x e y, se obtiene un coeficiente aproximado de 0.7 y 0.6 respectivamente, es decir, existe un buen desempeño en la correlación de ambas mediciones.

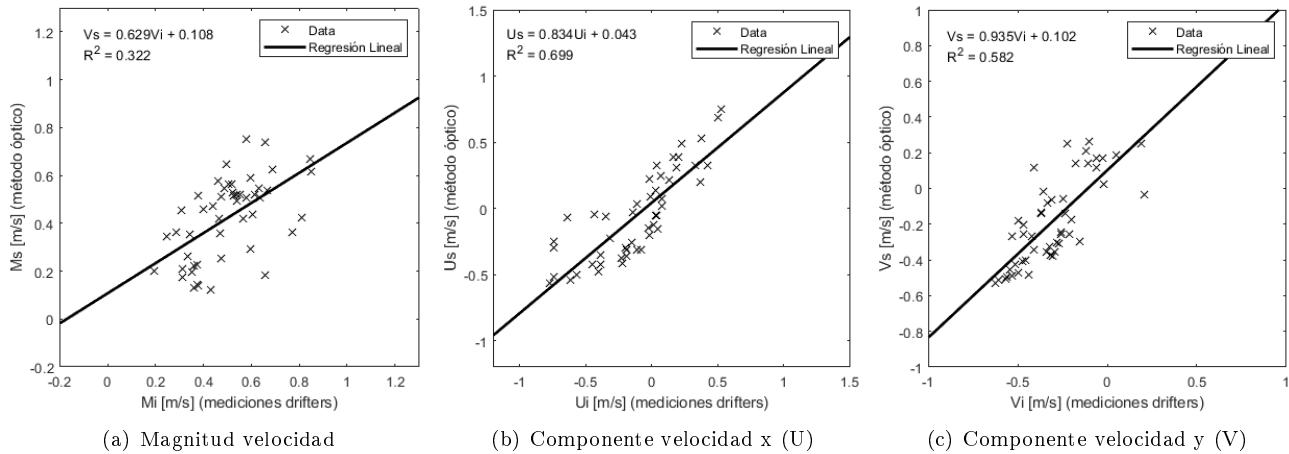


Figura 7.2: Correlación entre mediciones ópticas y obtenidas por los drifters.

### 7.3. Sensibilidad de los parámetros

Se examina la sensibilidad del método óptico ante la variación de los parámetros (tabla 5.5), aplicando el concepto “ceteris paribus”, es decir, se supone que al variar un parámetro, el efecto de los demás sobre el resultado se mantiene constante. La totalidad de casos evaluados son 22, siendo el caso número 1 el que se utiliza como referencia (capítulo resultados). En la tabla 7.1 se muestra la correlación que existe con la magnitud y componentes de velocidad obtenidos con el método directo (trazadores lagrangianos), así como el tiempo de ejecución del algoritmo. En la tabla 7.2, se presenta la desviación estándar media por video de la velocidad longitudinal, junto con el porcentaje de valores NaN en la matriz media diaria.

El primer parámetro evaluado es el número de onda mínimo,  $k_m$ , donde el mejor desempeño se obtiene para el valor de referencia propuesto por Chickadel et al. (2003), 0.25 (1/m). Al aumentar  $k_m$  a 0.5 (1/m), se observó una menor correlación en todos los componentes, una menor dispersión de las estimaciones y mayor porcentaje de valores NaN. Por otro lado, al disminuir el  $k_m$  a 0.125 (1/m), aumentó levemente la correlación del componente longitudinal (y), pero la correlación en el componente x disminuyó, así como con la magnitud, donde el  $R^2$  de 0.09 evidencia el mal desempeño; la dispersión se mantuvo similar al caso de referencia. La importancia de este parámetro radica en que es el único que restringe directamente los límites del espectro  $S(v, k_y)$ , donde un valor muy bajo puede estar incluyendo el efecto de las olas incidentes que se desea eliminar, y un valor muy alto puede estar eliminando longitudes de onda que contienen información relevante sobre las velocidades buscadas, explicando así, las correlaciones obtenidas para cada caso.

El aumento del parámetro  $I_r$  a 50 (caso N°5) disminuye levemente la correlación, y aumenta un poco el porcentaje de valores NaN, lo que indica que al aumentar el requerimiento de contraste en la imagen, se están dejando de considerar algunos stack que aportan estimaciones correctas de velocidad. Caso contrario sucede al disminuir el umbral a 20 (caso N°4), puesto que la correlación disminuye considerablemente, aumentando también la dispersión de las velocidades obtenidas, que también se coincide con la disminución de la cantidad de datos inválidos.

Nº	Parámetros							Time (hr)	Magnitud			Componente y (V)			Componente x (U)			
	$\Delta y$ (m)	$\Delta x$ (m)	$T_w$ (s)	$T_s$ (s)	km (1/m)	P	C.I.	$I_r$	$\Delta M_{mean}$ (m/s)	$\Delta M_{std}$ (m/s)	$R^2$	$\Delta V_{mean}$ (m/s)	$\Delta V_{std}$ (m/s)	$R^2$	$\Delta U_{mean}$ (m/s)	$\Delta U_{std}$ (m/s)	$R^2$	
1	10	10	32	16	0.25	0.9	0.2	40	2.1	0.13	0.11	0.32	0.15	0.13	0.58	0.16	0.12	0.7
2	10	10	32	16	0.125	0.9	0.2	40	1.9	0.17	0.13	0.09	0.17	0.13	0.61	0.22	0.16	0.48
3	10	10	32	16	0.5	0.9	0.2	40	2	0.14	0.11	0.35	0.18	0.16	0.47	0.2	0.16	0.54
4	10	10	32	16	0.25	0.9	0.2	20	1.9	0.16	0.12	0.22	0.2	0.17	0.38	0.23	0.19	0.36
5	10	10	32	16	0.25	0.9	0.2	50	1.9	0.13	0.11	0.28	0.15	0.13	0.59	0.17	0.13	0.68
6	10	10	32	16	0.25	0.6	0.2	40	1.9	0.17	0.17	0.19	0.15	0.13	0.57	0.23	0.21	0.45
7	10	10	32	16	0.25	0.95	0.2	40	1.9	0.14	0.11	0.35	0.15	0.13	0.58	0.16	0.12	0.71
8	10	10	32	16	0.25	0.99	0.2	40	2.5	0.15	0.11	0.27	0.15	0.13	0.56	0.18	0.12	0.71
9	10	10	32	16	0.25	0.7	0.2	40	1.9	0.16	0.15	0.2	0.16	0.13	0.57	0.24	0.2	0.42
10	10	10	32	16	0.25	0.9	0.1	40	1.9	0.13	0.11	0.33	0.15	0.13	0.58	0.16	0.12	0.7
11	10	10	32	16	0.25	0.9	0.05	40	1.9	0.14	0.11	0.25	0.16	0.13	0.58	0.17	0.12	0.7
12	10	10	32	16	0.25	0.9	0.5	40	1.7	0.13	0.11	0.32	0.15	0.13	0.58	0.16	0.12	0.7
13	10	10	16	8	0.25	0.9	0.2	40	3.3	0.15	0.13	0.26	0.19	0.16	0.52	0.18	0.15	0.58
14	10	10	64	32	0.25	0.9	0.2	40	1.2	0.15	0.12	0.2	0.15	0.12	0.6	0.17	0.13	0.64
15	10	10	128	64	0.25	0.9	0.2	40	0.8	0.16	0.12	0.3	0.18	0.13	0.55	0.22	0.22	0.36
16	10	10	256	128	0.25	0.9	0.2	40	0.6	0.19	0.14	0.22	0.18	0.13	0.52	0.2	0.18	0.51
17	5	5	32	16	0.25	0.9	0.2	40	5.7	0.22	0.14	0.3	0.2	0.13	0.51	0.18	0.18	0.5
18	10	5	32	16	0.25	0.9	0.2	40	3.5	0.13	0.12	0.3	0.15	0.13	0.58	0.18	0.14	0.65
19	15	15	32	16	0.25	0.9	0.2	40	1	0.15	0.12	0.16	0.16	0.14	0.58	0.19	0.15	0.57
20	20	20	32	16	0.25	0.9	0.2	40	0.7	0.13	0.1	0.33	0.19	0.14	0.5	0.16	0.13	0.68
21	20	10	32	16	0.25	0.9	0.2	40	1.2	0.13	0.11	0.27	0.19	0.15	0.49	0.17	0.13	0.67
22	30	10	32	16	0.25	0.9	0.2	40	0.9	0.14	0.11	0.24	0.17	0.14	0.52	0.15	0.11	0.74

Tabla 7.1: Sensibilidad parámetros (Parte 1)

Nº	Vstd (12 nov)			Vstd (13 nov)			Vstd (15 nov)			Porcentaje NaN		
	p1 (m/s)	p1 (m/s)	p2 (m/s)	p3 (m/s)	p1 (m/s)	p2 (m/s)	p3 (m/s)	12 nov (%)	13 nov (%)	15 nov (%)		
1	0.185	0.151	0.151	0.175	0.184	0.189	0.226	34	26	12		
2	0.182	0.152	0.154	0.175	0.177	0.187	0.234	35	29	13		
3	0.165	0.145	0.145	0.133	0.14	0.167	0.194	44	31	16		
4	0.19	0.166	0.146	0.181	0.2	0.211	0.243	30	19	9		
5	0.183	0.15	0.148	0.172	0.176	0.182	0.218	35	28	13		
6	0.196	0.158	0.162	0.182	0.203	0.206	0.245	34	24	11		
7	0.184	0.148	0.149	0.167	0.179	0.183	0.221	34	27	13		
8	0.177	0.144	0.143	0.161	0.169	0.175	0.205	35	28	14		
9	0.195	0.155	0.158	0.18	0.2	0.203	0.242	34	24	12		
10	0.182	0.15	0.15	0.174	0.182	0.188	0.224	34	26	12		
11	0.17	0.142	0.145	0.166	0.172	0.178	0.208	34	27	13		
12	0.185	0.151	0.151	0.175	0.184	0.189	0.226	34	26	12		
13	0.253	0.237	0.238	0.239	0.296	0.303	0.332	31	20	9		
14	0.143	0.105	0.103	0.121	0.115	0.121	0.151	37	32	16		
15	0.109	0.071	0.074	0.084	0.075	0.079	0.103	39	37	19		
16	0.07	0.041	0.051	0.051	0.036	0.043	0.064	45	50	25		
17	0.156	0.129	0.126	0.138	0.15	0.148	0.174	34	24	11		
18	0.186	0.153	0.151	0.171	0.185	0.187	0.224	34	26	12		
19	0.193	0.165	0.155	0.191	0.199	0.207	0.259	35	32	16		
20	0.202	0.167	0.164	0.201	0.212	0.222	0.276	35	29	16		
21	0.202	0.166	0.17	0.191	0.208	0.227	0.266	35	29	18		
22	0.196	0.143	0.135	0.192	0.2	0.218	0.28	34	29	19		

Tabla 7.2: Sensibilidad parámetros (Parte 2)

En cuanto al parámetro P, que establece un mínimo para la probabilidad de ajuste del modelo (espectro S(v)), se evalúan cuatro casos (casos 6, 7, 8 y 9) además del primero (1). Las correlaciones indican, evidentemente, que al disminuir P a 0.6 o 0.7, los coeficientes de determinación ( $R^2$ ) también lo hacen. Por otra parte, al aumentar P se ven dos efectos: primero con 0.95 la correlación aumenta levemente, pero también lo hacen la cantidad de valores NaN; mientras que con 0.99, los  $R^2$  disminuyen algunas centésimas. Por este motivo, el valor de P igual a 0.9 se considera correcto, puesto que permite un ajuste lo suficientemente alto al espectro teórico, y a la vez se brinda un poco de holgura por si el modelo llegara a fallar.

El límite C.I. para el intervalo de confianza de la velocidad media (parámetro  $\bar{v}$  en el modelo de espectro S(v)) se varía entre los 0.005 y los 0.5 m/s, a partir los cuales, no se obtuvo mayores cambios en cuanto a la correlación con las mediciones directas, así como, con el grado de dispersión de las estimaciones. Al aumentar este límite, se esperaba que provocara una mejoría en el nivel de correlación, similar al efecto que se producía con P, sin embargo, puede que con otras condiciones (otra combinación de parámetros por ejemplo) su nivel de incidencia en los resultados sea mayor.

Con respecto a Tw, parámetro que controla la resolución temporal del algoritmo (Ts depende directamente de la elección de Tw), su incidencia en los resultados se prueba asignando ventanas de tiempo de 16, 32, 64, 128 y 256 segundos. Para el valor más bajo (16 s), se obtuvo una menor correlación en comparación al caso N° 1, con diferencia de algunas centésimas en el  $R^2$ . Las mejores estimaciones se obtuvieron con las ventanas de 32 y 64 segundos, similar a la conclusión de Chickadel et al. (2003), siendo el caso de Tw igual a 32 el que produce las correlaciones más altas. Para las ventanas de mayor tiempo (128 s y 256 s), la correlación disminuye levemente. De manera general, se observa que mientras mayor sea las ventanas Tw, menor es el grado de dispersión de las estimaciones y más grandes es el número de estimaciones inválidas (NaN).

Los últimos parámetros evaluados son los espaciamientos en dirección longitudinal ( $\Delta y$ ) y transversal ( $\Delta x$ ); el primero asociado al ancho de los timestack, y el segundo controla la distancia a la cual se separan los timestack en

dirección transversal. La mejor correlación para el componente y ( $V$ ) de la velocidad, se obtiene con los casos N° 1, 18 y 19, con los pares ( $\Delta y$ ,  $\Delta x$ ) igual a (10 m , 10 m), (10 m , 5 m) y (15 m , 15 m) respectivamente. Mientras que para el componente transversal ( $U$ ), la mejor correlación se obtiene con el caso N° 1 y 22, este último con valores de 30 y 10 metros para  $\Delta y$  y  $\Delta x$  respectivamente. Dicho resultado puede obedecer al tamaño de los parches de espuma que se están muestreando, ya que si estos se encuentran entre 1 y 10 m (según Chickadel et al., 2003), una dimensión menor (5 m por ejemplo) para  $\Delta y$ , estaría provocando un submuestreo de las trazas de espuma. Caso contrario puede suceder con  $\Delta x$ , puesto que si se aumenta demasiado la resolución espacial, evidentemente se pueden estar obviando procesos que ocurren a una menor escala, considerando además, que una continuidad de flujos teóricamente debiera tener un mejor desempeño en la menor resolución posible.

#### 7.4. Comparación Método Integral con Método Matricial

El método matricial propuesto en el capítulo 5 se comparó con el método integral, utilizando a modo de ejemplo, una matriz de velocidades longshore del día 15 de noviembre. Los resultados de ambos métodos del componente transversal( $U$ ), se presentan en la figura 7.3, incluyendo una gráfica que muestra la diferencia entre las matrices obtenidas. Los valores obtenidos por ambos métodos fueron prácticamente iguales, puesto que las diferencias se encuentran en un orden de magnitud de  $10^{-15}$ , siendo este (lo más probable), un valor que obedece a los algoritmos internos que utiliza Matlab en cada método. En cuanto a los tiempo de ejecución, el método matricial fue más lento en todos los casos evaluados, puesto que, se pierde demasiado tiempo de computo en definir las matrices previas a la construcción del sistema. Por lo tanto, si se desea utilizar un método matricial en futuros estudios, se debe trabajar en optimizar las operaciones que construyen las matrices y arreglos correspondientes.

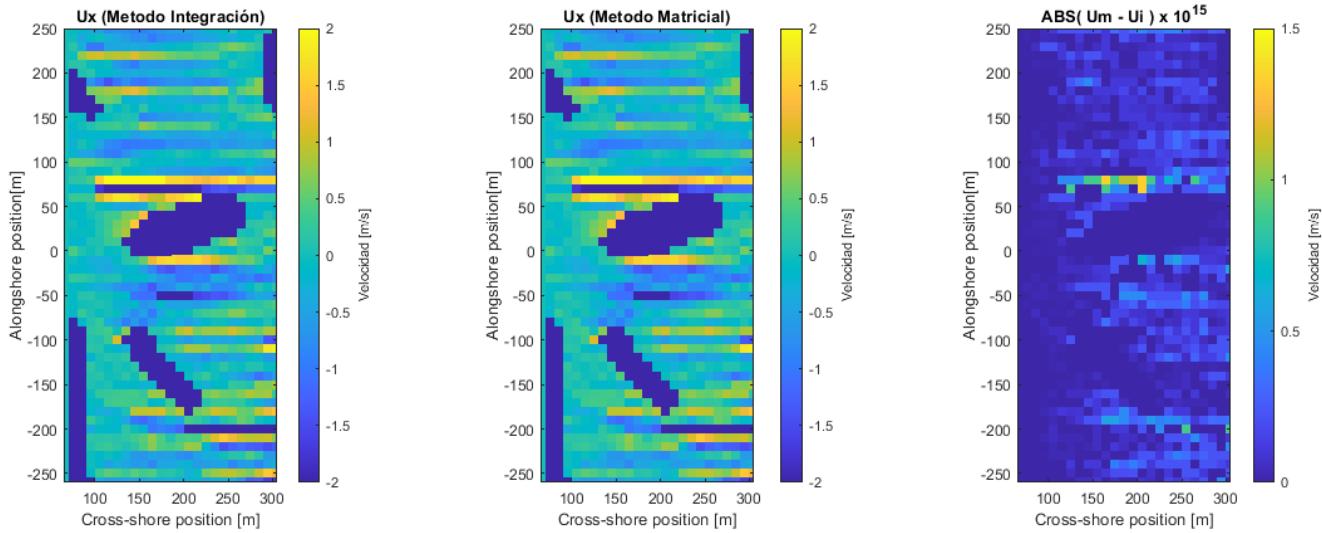


Figura 7.3: Comparación método integral vs método matricial. Cálculos aplicados sobre un video de dron del día 15 de noviembre

#### 7.5. Comparación con simulación numérica

Con el objetivo de examinar los alcances que tiene el método óptico por sobre otras técnicas, las estimaciones de velocidad se comparan con los resultados obtenidos mediante una modelación en SWASH por Aldayuz (2019). SWASH es un modelo numérico de propagación del oleaje basado en las ecuaciones non-linear shallow water (NLSW) con un término de presión no hidrostática, que permite calcular las dinámicas en la zonas de “surf” y “swash”. Para modelar las condiciones de oleaje, Aldayuz (2019), ingresa como condición de borde un espectro proveniente del Este (sistema local), con características medias de los días 14 y 15 de noviembre, por lo tanto, el oleaje se aproxima predominantemente perpendicular a la playa. Los resultados se exponen en la figura 7.4, incluyendo magnitud, dirección, componente transversal y longitudinal, y la vorticidad. Por otra parte, en la figura 7.5 se presentan los resultados del método óptico considerando un espaciamiento de 5 metros en ambas direcciones, con un suavizado

gaussiano de desviación estándar 2, para la matriz de velocidades longitudinales. Esto, con el objetivo de evitar cambios tan bruscos en las velocidades y no afecte demasiado a la estimación de la vorticidad. Se utiliza la fórmula de Macmahan et al. (2010) para calcular la vorticidad a partir del campo de velocidades.

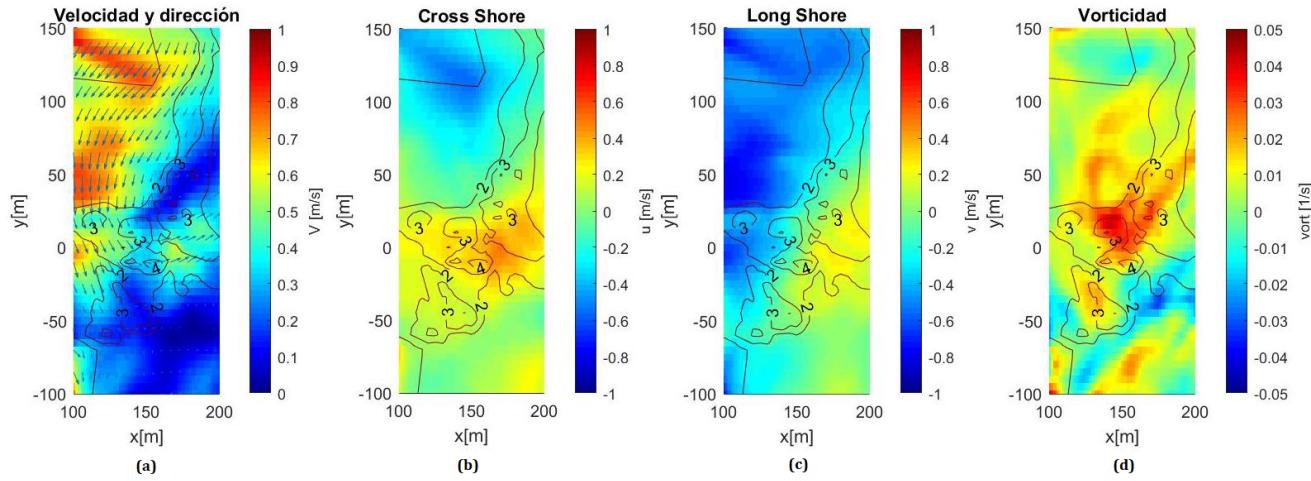


Figura 7.4: Resultados obtenidos mediante una modelación en SWASH por Aldayuz (2019). (a) Magnitud y dirección de las velocidades medias de las corrientes. (b) Magnitud de la componente x de la velocidad. (c) Magnitud de la componente y de la velocidad. (d) Magnitud de la vorticidad.

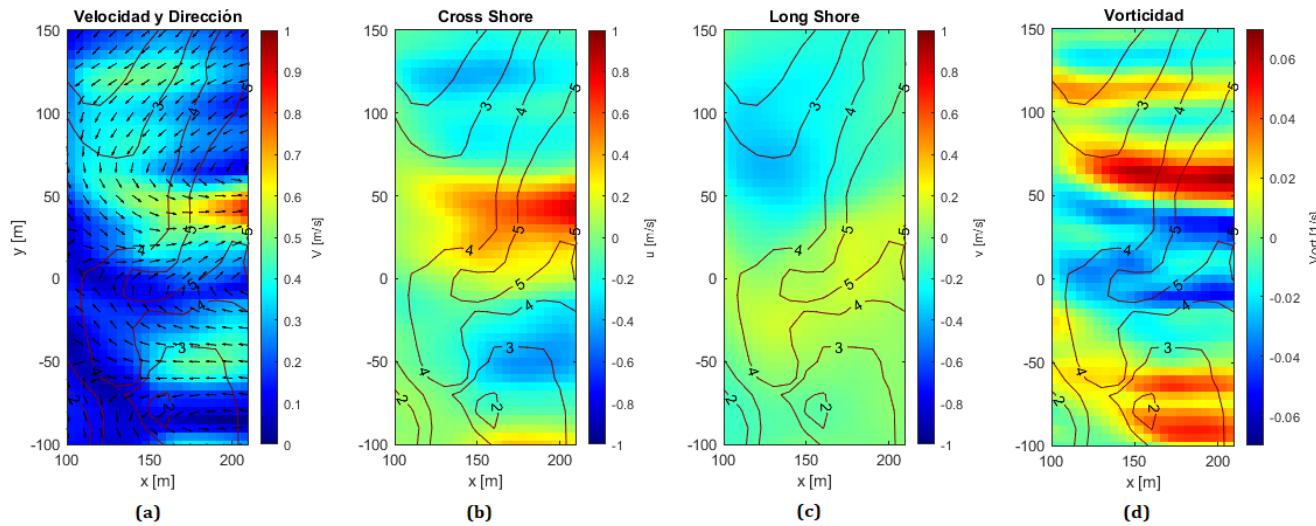


Figura 7.5: Resultados obtenidos mediante el método óptico, estos corresponden a estimaciones medias de los 3 días. Además la matriz de velocidades longitudinales se encuentra suavizada con un filtro gaussiano de desviación estándar igual a 2. (a) Magnitud y dirección de las velocidades medias de las corrientes. (b) Magnitud de la componente x de la velocidad. (c) Magnitud de la componente y de la velocidad. (d) Magnitud de la vorticidad.

Realizando una comparación general entre los dos métodos (7.4 y 7.5), se puede notar una similitud en los patrones de circulación desde la ordenada 150 m, donde se genera la corriente longitudinal, hasta el origen aproximadamente, donde se encuentra el punto de inflexión y se forma el “rip”. Las magnitudes transversales de las velocidades en esta zona son similares, ambos evidencian la presencia del “rip”, puesto que las mayores velocidades se obtienen en dicho sector, aunque estas son de mayor magnitud y extensión en el método óptico. En cuanto a la velocidad longitudinal, estas se diferencian principalmente en la magnitud obtenida, dado que los valores entregados por SWASH bordean los 0.7 m/s, mientras que en el método óptico los 0.5-0.6 m/s.

El sector Sur (sistema local) de la playa, es la zona donde se observan las mayores diferencias en cuanto a circulación y velocidades transversales. En el método óptico se obtuvo una corriente transversal negativa en la ordenada  $y = 50$  m, de magnitud 0.4 m/s aproximadamente, que alimenta al “rip” llegando a la coordenada  $x=150$ m. En cambio el modelo SWASH, en la misma ubicación, arrojó valores cercanos a cero, es decir, la modelación no fue capaz de detectar la formación de otros flujos más allá de la corriente longitudinal en la zona Norte y el “rip” en la zona central de la playa.

Las diferencias anteriormente expuestas se notan con mayor claridad en los gráficos de vorticidad. La figura 7.4.(d) muestra los valores más altos de vorticidad positiva entre las coordenadas  $y = 0$  m e  $y = 50$  m, y un pequeño sector de valores negativos en la coordenada  $x=170$  m,  $y=-40$  m aproximadamente. En cambio, la vorticidad obtenida a partir del OCM, muestra zonas de mayor intensidad comparativamente: un sector de altas vorticidades positivas extendido transversalmente en  $y=50$  m; y otro de vorticidades negativas, también distribuido a lo ancho de la playa, pero con un valor un poco menor que las positivas; además, se obtuvo otro sector de vorticidades positivas en el extremo Sur de la playa. Los resultados anteriores (OCM) guardan concordancias con las altas velocidades obtenidas para la corriente de retorno, puesto que las vorticidades positivas y negativas, que confluyen en el lugar, están alimentando la corriente transversal. En cuanto al SWASH, el aporte de vorticidad desde ambos sectores está un poco más desequilibrado, ya que la vorticidad positiva es considerablemente mayor que la negativa, lo que significa que el rip se está alimentando mayoritariamente de la corriente longitudinal que viene del Norte, sin recibir aportes del Sur, como bien lo representan los flujos de la figura 7.4.a.

## 7.6. Errores y comentarios finales

Los errores o deficiencias que se notaron en el método óptico, tienen que ver principalmente con los cambios bruscos que se producen al aplicar continuidad en sectores dónde no hay datos, o dónde alguna estimación de velocidad longitudinal cambia significativamente su valor con respecto a sus estimaciones vecinas. Entonces, al aplicar la ecuación de continuidad, se obtienen flujos demasiado elevados que no guardan tanta coherencia con el orden de magnitud de los flujos vecinos, como por ejemplo, las velocidades transversales del sector Sur que se muestran en la figura 6.3(a) y 6.3(b). Estos saltos bruscos en velocidad también influyen notoriamente en el cálculo de la vorticidad, puesto su cálculo se determina precisamente a partir de los gradientes de velocidad espacial. Además, es importante aclarar que no existían datos de mediciones en esa zona para poder contrastarlos con las velocidades obtenidas y verificar la magnitud real de las corrientes existentes. Para disminuir el efecto de estas discontinuidades, se aplicó un filtro gaussiano, de esta forma, se suavizan levemente los cambios de velocidad y permite obtener flujos con mayor coherencia con la realidad. También se observó que definiendo una grilla de mayor resolución espacial, por ejemplo una de 5 metros de espaciamiento (en ambas direcciones), las discontinuidades en la velocidad tendieron a disminuir. De todas maneras, es un tema que se debe evaluar en próximas investigaciones.

El mejor método para validar las estimaciones de velocidad claramente corresponde a la comparación con mediciones directas (como los trazadores lagrangianos), sin embargo, no es la única opción. Cómo bien es sabido, las playas son sistemas dinámicos donde la disipación (rotura), corrientes, arrastre de sedimentos y batimetría, son factores que actúan retroalimentándose, por lo tanto, es posible inferir cualitativamente el comportamiento de una variable a partir de las otras. De acuerdo con esa idea, en la figura 7.6 se presenta un gráfico de velocidades medias, otro de vorticidad y una tercera gráfica que muestra el promedio de todas las imágenes grabadas por los drones (los vuelos del 12, 13 y 15 de noviembre). Una imagen promedio en la zona de rompientes, permite visualizar el comportamiento medio de la disipación de energía que existe, donde los lugares de mayor intensidad indican una mayor cantidad de espuma y por lo tanto, una mayor rotura de las olas incidentes. Entonces, comparando los tres gráficos de la figura 7.6, incluyendo la batimetría, es posible afirmar que: primero, existe una clara concordancia entre el “rip” principal (entre  $y=0$ m e  $y=50$ m), los altos valores de vorticidad tanto positivos como negativos, y una zona de baja disipación, indicando que las olas no rompen en dicho lugar por la existencia de un canal generado por un “rip” de altas velocidades; segundo, entre las ordenadas  $y=-100$  e  $y=-130$ , se nota la presencia de un “rip” secundario, puesto que existen una corriente transversal que se aleja de la playa, existe una convergencia en las vorticidades y además se nota una profundidad mayor, una especie de canal diagonal que estaría indicando la ocurrencia de arrastre de sedimentos hacia afuera de la playa por las corrientes generadas.

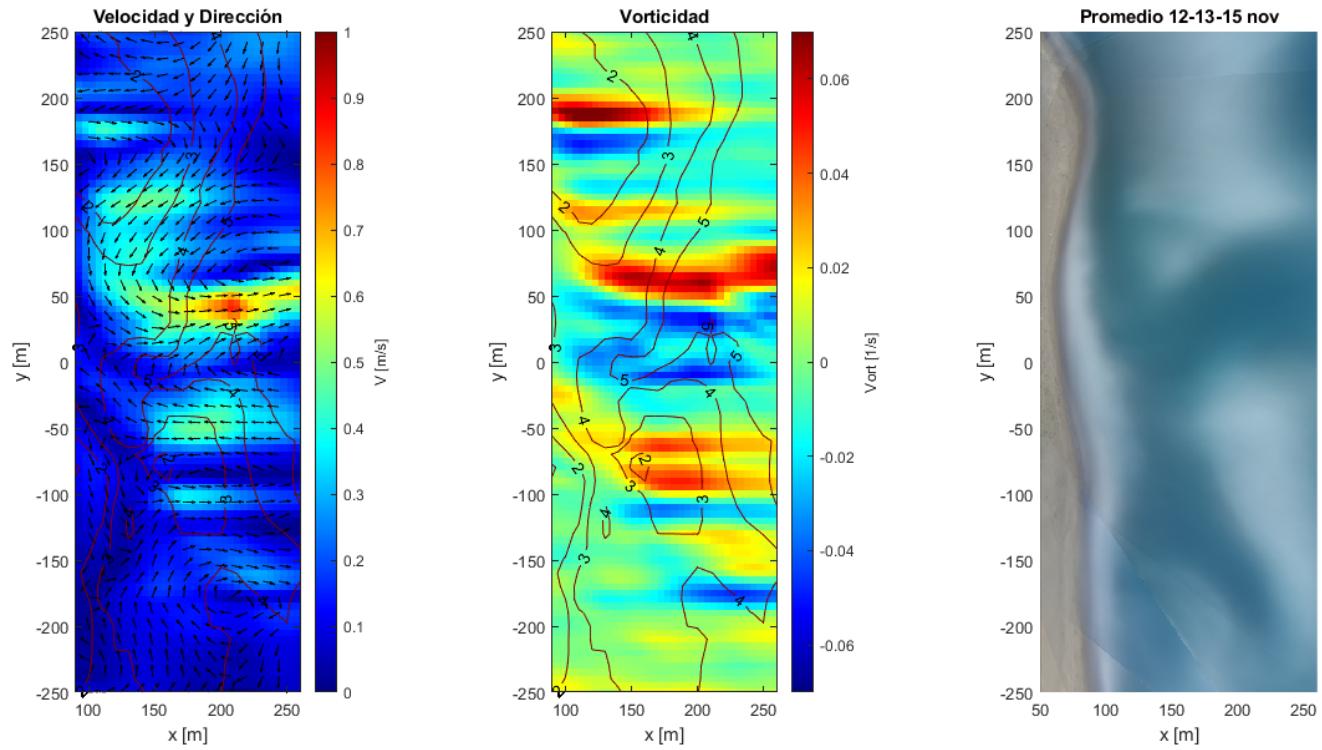


Figura 7.6: Valores medios días 12, 13 y 15 de noviembre. (a) Velocidad considerando un espaciado de 5 metros en ambas direcciones. (b) Vorticidad media. (c) Imagen promedio de todos las imágenes de los drones.

## 8. CONCLUSIÓN

La estimación de velocidades de corrientes media a partir de imágenes de drones en la zona de rompientes implica primeramente georectificar adecuadamente los cuadros, por lo que el proceso de calibración interna y externa de la cámara es fundamental para obtener resultados satisfactorios. En segundo lugar, si se utiliza un método óptico como el propuesto en Chickadel et al. (2003), que realiza un análisis sólo en el plano longitudinal a la linea de costa, necesariamente se deben incorporar datos como la batimetría si el objetivo es estimar el campo de velocidades en ambas direcciones. Y por último, la aplicación de la ecuación de continuidad teniendo presente las suposiciones, restricciones o condiciones de borde que se impusieron para resolverla.

A partir de la extensión de la metodología de Chickadel et al. (2003) en toda el área de estudio, efectivamente se logró obtener un campo de velocidades medias, sin embargo, se tuvo que promediar las matrices de varios días para lograr llenar los lugares donde no fue posible estimar una velocidad por falta de trazas de espuma. Tanto los patrones de circulación como las magnitudes de las velocidades estimadas, tuvieron una buena correlación con las mediciones directas, aunque dicha comparación sólo fue posible realizarla en cierta zona de la playa (sólo en parte de la zona Norte y la zona central que incluye el inicio de la corriente de retorno). Los resultados también evidenciaron una coherencia con la batimetría y con las imágenes promediadas que indican las zonas de mayor disipación o rotura. En cuanto a la comparación con las simulaciones numéricas, se comprobó que el SWASH es capaz de generar los flujos asociados a un rip relativamente grande, sin embargo, ciertos flujos menores captados por el método óptico, son más complejos de obtener.

En cuanto al análisis de sensibilidad de los parámetros, las mejores correlaciones se obtuvieron utilizando los valores recomendados por Chickadel et al. (2003), salvo la resolución espacial, donde los espaciamientos se escogieron considerando la menor resolución posible. Sin perjuicio de lo anterior, se recomienda realizar un análisis de sensibilidad cada vez que se aplique una metodología de este tipo, puesto que las condiciones del oleaje o los procesos que se estudian cambian dependiendo de la ubicación o la fecha, pudiendo ser otro set de parámetros el óptimo para cumplir los objetivos.

Los errores o defectos de la metodología desarrollada tienen que ver principalmente con la obtención de discontinuidades (o saltos bruscos) en la matriz de velocidades, lo que se traduce en patrones de flujos difíciles de observar en la realidad, por ejemplo, flujos convergiendo a una sola fila de celdas. Para disminuir un poco este problema, se aplicó un filtro gaussiano (previo a la continuidad de flujos) que suaviza, en mayor o menor medida, los cambios de velocidades longitudinales. Para futuras investigaciones se propone trabajar en una metodología robusta que permita suavizar y filtrar la matriz de velocidades, similar al análisis que se realiza en cBathy (Holman et al., 2013) para la obtención de las profundidades.

La metodología propuesta en el presente trabajo representa un avance en cuanto al desarrollo de técnicas de teledetección de variables hidrodinámicas en zonas costeras chilenas, donde se presentan las bases teóricas para la obtención de campo de velocidades en la zona de la rompiente, junto con los algoritmos generados en Matlab. Teniendo en cuenta lo anterior, se deja a disposición el trabajo realizado para que se utilice como guía en proyectos similares, o bien se trabaje en mejorarlo.

## 9. REFERENCIAS

### Referencias

- Adrian, R. (1991). Particle-Imaging Techniques For Experimental Fluid-Mechanics. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 23, 261-304. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.23.1.261>
- Aldayuz, F. (2019). *Diseño, construcción y pruebas de trazadores lagrangianos en la zona rompiente*. Universidad Técnica Federico Santa María. Valparaíso, Chile.
- Anderson, D., Bak, A., Brodie, K., Cohn, N., Holman, R., & Stanley, J. (2021). Quantifying Optically Derived Two-Dimensional Wave-Averaged Currents in the Surf Zone. *Remote Sensing*, 13, 690. <https://doi.org/10.3390/rs13040690>
- Bruder, B. L., & Brodie, K. L. (2020). CIRN Quantitative Coastal Imaging Toolbox. *SoftwareX*, 12, 100582. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.softx.2020.100582>
- Chickadel, C., Holman, R., & Freilich, M. (2003). An optical technique for the measurement of longshore currents. *J. Geophys. Res.*, 108. <https://doi.org/10.1029/2003JC001774>
- Dérian, P., & Almar, R. (2017). Wavelet-Based Optical Flow Estimation of Instant Surface Currents From Shore-Based and UAV Videos. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 50, 5790-5797. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2017.2714202>
- Holland, K., Puleo, J., & Kooney, T. (2001). Quantification of swash flows using video-based particle image velocimetry. *Coastal Engineering*, 44, 65-77. [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(01\)00022-9](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(01)00022-9)
- Holman, R., Brodie, K., & Spore, N. (2017). Surf Zone Characterization Using a Small Quadcopter: Technical Issues and Procedures. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, PP, 1-11. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2016.2635120>
- Holman, R., & Haller, M. (2011). Remote Sensing of the Nearshore. *Annual review of marine science*, 5. <https://doi.org/10.1146/annurev-marine-121211-172408>
- Holman, R., Plant, N., & Holland, K. (2013). CBathy: A robust algorithm for estimating nearshore bathymetry. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 118. <https://doi.org/10.1002/jgrc.20199>
- Macmahon, J., Brown, J., Brown, J., Thornton, E., Reniers, A., Stanton, T., Henriquez, M., Gallagher, E., Morrison, J., Austin, M., Scott, T., & Senechal, N. (2010). Mean Lagrangian flow behavior on an open coast rip-channelled beach: A new perspective. *Marine Geology*, 268, 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.margeo.2009.09.011>
- Osorio Cano, J. (2010). *Metodologías y técnicas basadas en sistemas de video para la medición de variables hidrodinámicas*. Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín Facultad de Minas Escuela de Geociencias y Medio Ambiente. Medellín, Colombia.
- Rodríguez-Padilla, I., Castelle, B., Marieu, V., Bonneton, P., Mouragues, A., Martins, K., & Morichon, D. (2021). Wave-Filtered Surf Zone Circulation under High-Energy Waves Derived from Video-Based Optical Systems. *Remote Sensing*, 13(10). <https://doi.org/10.3390/rs13101874>
- Schmidt, W., Woodward, B., Millikan, K., Guza, R., Raubenheimer, B., & Elgar, S. (2003). A GPS-Tracked surf zone drifter. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology - J ATMOS OCEAN TECHNOL*, 20, 1069-1075. <https://doi.org/10.1175/1460.1>

## 10. ANEXOS

### 10.1. Parámetros Rectificación

#### 10.1.1. Parámetros Intrínsecos

Los parámetros que entrega una calibración intrínseca son los siguientes:

Parámetros	Definición
NU	Número de columnas pixeles
NV	Número de filas pixeles
$U_0, V_0$	Coordenadas del punto principal
f	Distancia focal
$f_x$	Distancia focal (en pixeles) en dirección U
$f_y$	Distancia focal (en pixeles) en dirección V
$d_1, d_2, d_3$	Coeficientes de distorsión radial
$t_1, t_2$	Coeficientes de distorsión tangencial

Tabla 10.1: Parámetros Intrínsecos.

Valores utilizados en el estudio:

Parámetros	Valor
NU	3840
NV	2160
$U_0$	1957.13
$V_0$	1088.21
$f_x$	2298.59
$f_y$	2310.87
$d_1$	-0.14185
$d_2$	0.11168
$d_3$	0.0
$t_1$	0.00369
$t_2$	0.002314

Tabla 10.2: Valores parámetros intrínsecos.

Observación: Al conjunto de parámetros intrínsecos también se le denomina perfil de calibración del lente (LCP).

## 10.2. Cálculo velocidad método matricial

El sistema de ecuaciones planteado en la sección 5.2.4, también se puede resolver de manera matricial. Para esto, se realiza la formulación matricial a partir de las ecuaciones de continuidad de cada volumen de control analizado. A continuación se presenta el desarrollo para un sistema de 12 grados de libertad, lo que equivale a 4 celdas dispuestas según se esquematiza en la figura 10.1. Posteriormente se generaliza para un sistema más grande.

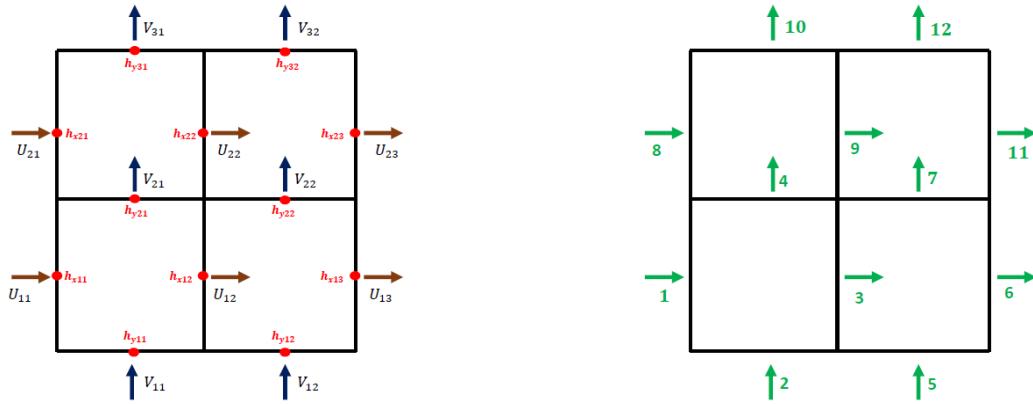


Figura 10.1: (a) Esquema de velocidades, sistema de 4 celdas. (b) Grados de libertad para un sistema de 4 celdas

Es conveniente analizar un bloque (volumen de control) en un sistema local y luego llevarlo a uno global. Se considera que un bloque o celda tiene un total de 4 grados de libertad (uno por cada lado), y cada grado de libertad tiene asociado una velocidad y profundidad, tal como se ilustra en la figura 10.2.

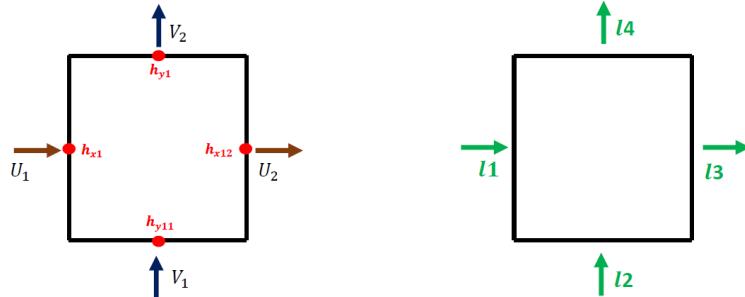


Figura 10.2: (a) Esquema volumen de control de un bloque. (b) Esquema grados de libertad de un bloque

El primer paso es plantear la ecuación de continuidad del bloque. Se asume que  $\Delta x$  es igual a  $\Delta y$  por lo que no intervienen en la ecuación.

$$\begin{bmatrix} h_{x1} & h_{y1} & -h_{x2} & -h_{y2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (10.1)$$

Definiendo la matriz de profundidades local  $H_L$  y vector de velocidades  $UV_L$ :

$$[H_L] \cdot \{UV_L\} = 0 \quad (10.2)$$

El objetivo siguiente es compatibilizar los grados de libertad locales con los globales, por lo que se definen las matrices de transformación C. Estas matrices permiten llevar las variables locales a una matriz global representativa de todo el sistema.

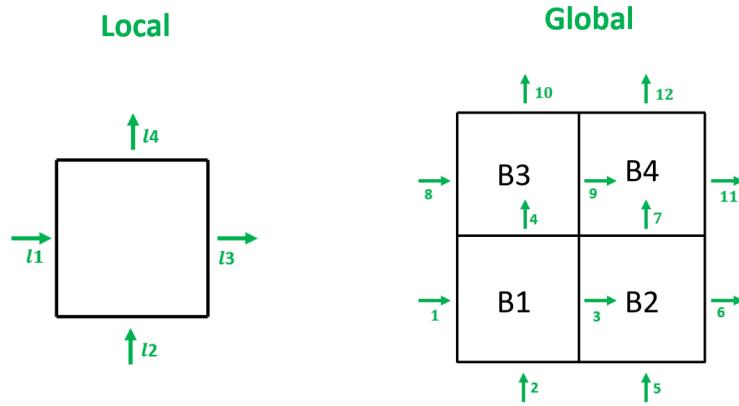


Figura 10.3: (a) Grados de libertad sistema local. (b)Grados de libertad sistema global

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \\ g_5 \\ g_6 \\ g_7 \\ g_8 \\ g_9 \\ g_{10} \\ g_{11} \\ g_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix}}_{C_1} ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix}}_{C_2} ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix}}_{C_3} ; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix}}_{C_4} ;$$

Aplicando las transformaciones a las matrices de profundidad:

$$[H_{L_1}] \cdot C_1^T = [h_{x11} \ h_{y11} \ -h_{x12} \ -h_{y21}] \cdot C_1^T = [h_{x11} \ h_{y11} \ -h_{x12} \ -h_{y21} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \text{ fila 1}$$

$$[H_{L_2}] \cdot C_2^T = [h_{x12} \ h_{y12} \ -h_{x13} \ -h_{y22}] \cdot C_2^T = [0 \ 0 \ h_{x12} \ 0 \ h_{y12} \ -h_{y13} \ -h_{y22} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \text{ fila 2}$$

$$[H_{L_3}] \cdot C_3^T = [h_{x21} \ h_{y21} \ -h_{x22} \ -h_{y31}] \cdot C_3^T = [0 \ 0 \ 0 \ h_{y21} \ 0 \ 0 \ 0 \ h_{x21} \ -h_{x22} \ -h_{y31} \ 0 \ 0] \text{ fila 3}$$

$$[H_{L_4}] \cdot C_4^T = [h_{x22} \ h_{y22} \ -h_{x23} \ -h_{y32}] \cdot C_4^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ h_{y22} \ 0 \ h_{x22} \ 0 \ -h_{x23} \ -h_{y32}] \text{ fila 4}$$

Por lo tanto la matriz de profundidades H queda:

$$H = \begin{bmatrix} h_{x11} & h_{y11} & -h_{x12} & -h_{y21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{x12} & 0 & h_{y12} & -h_{y13} & -h_{y22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{y21} & 0 & 0 & 0 & h_{x21} & -h_{x22} & -h_{y31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{y22} & 0 & h_{x22} & 0 & -h_{x23} & -h_{y32} \end{bmatrix}$$

Ecuación de continuidad para todo el sistema:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{U}\mathbf{V} = 0$$

$$\begin{bmatrix} h_{x11} & h_{y11} & -h_{x12} & -h_{y21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{x12} & 0 & h_{y12} & -h_{y13} & -h_{y22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{y21} & 0 & 0 & 0 & h_{x21} & -h_{x22} & -h_{y31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{y22} & 0 & h_{x22} & 0 & -h_{x23} & -h_{y32} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_{11} \\ V_{11} \\ U_{12} \\ V_{21} \\ V_{12} \\ U_{13} \\ V_{22} \\ U_{21} \\ U_{22} \\ V_{31} \\ U_{23} \\ V_{32} \end{bmatrix}}_{UV} = 0$$

Destacando columnas y filas asociados a grados de libertad conocidos:

$$\begin{bmatrix} h_{x11} & h_{y11} & -h_{x12} & -h_{y21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{x12} & 0 & h_{y12} & -h_{y13} & -h_{y22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{y21} & 0 & 0 & 0 & h_{x21} & -h_{x22} & -h_{y31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{y22} & 0 & h_{x22} & 0 & -h_{x23} & -h_{y32} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_{11} \\ V_{11} \\ U_{12} \\ V_{21} \\ V_{12} \\ U_{13} \\ V_{22} \\ U_{21} \\ U_{22} \\ V_{31} \\ U_{23} \\ V_{32} \end{bmatrix}}_{UV} = 0$$

Dado que todas las velocidades  $V_{ij}$  se conocen y algunos valores de  $U_{ij}$  también (por condiciones de borde), es posible reescribir la ecuación matricial eliminando las columnas de la matriz  $\mathbf{H}$  correspondientes con los grados de libertad conocidos (marcados en color rojo) y generando un vector,  $\mathbf{B}$ , que contiene la multiplicación de las velocidades y profundidades asociadas a los grados de libertad conocidos:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -h_{x12} & 0 & 0 & 0 \\ h_{x12} & -h_{x13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h_{x22} & 0 \\ 0 & 0 & h_{x22} & -h_{x23} \end{bmatrix}}_{Hr} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{13} \\ U_{22} \\ U_{23} \end{bmatrix}}_{Ur} = -\underbrace{\begin{bmatrix} h_{x11} \cdot U_{11} + h_{y11} \cdot V_{11} - h_{y21} \cdot V_{21} \\ h_{y12} \cdot V_{12} - h_{y22} \cdot V_{22} \\ h_{y21} \cdot V_{21} + h_{x21} \cdot U_{21} - h_{y31} \cdot V_{31} \\ h_{y22} \cdot V_{22} - h_{y32} \cdot V_{32} \end{bmatrix}}_B$$

En el sistema reducido se definen las siguientes matrices:

$H_r$  : Matriz de profundidades reducida

$U_r$  : Vector de velocidades  $U$  reducido

$B$  : Matriz  $B$

Finalmente las incógnitas  $U_r$ , se obtienen invirtiendo la matriz  $H_r$  y premultiplicando por  $B$ :

$$U_r = H_r^{-1} \cdot B \quad (10.3)$$

## Generalización

Generalizando para un sistema de  $(M-1) \times N$  celdas (como por ejemplo el mostrado en la figura 5.10.a de  $4 \times 5$ ), donde  $\Delta x$  es igual a  $\Delta y$ , con  $n_x$  grados de libertad en dirección  $\hat{x}$  y  $n_y$  grados de libertad en dirección  $\hat{y}$ , se plantea la ecuación matricial de continuidad para el sistema:

$$H \cdot UV = 0$$

donde:

$H$  : Matriz general de profundidades ( $N_c \times N_g$ )

$$\text{fila } i \text{ de } H = H_{Li} \cdot C_i^T \quad i = 1, 2, 3, \dots, N_c$$

$H_{Li}$  : Matriz de profundidad local de la celda  $i$  ( $1 \times 4$ )

$$\text{dada por la continuidad a nivel local en cada celda, } [H_{Li}] \cdot \{UV_{Li}\} = 0$$

$UV$  : Vector general de velocidades ( $N_g \times 1$ )

$C_i$  : Matriz de transformación que compatibiliza grados de libertad locales con globales

$UV_{Li}$  : Vector de velocidades local de la celda  $i$  ( $4 \times 1$ )

$V$  : Matriz de velocidades longshore ( $M \times N$ )

$N_c$  : Número de celdas,  $N_c = (M-1) \times N$

$N_g$  : Número total de grados de libertad,  $N_g = n_x + n_y$

$n_x$  = Número de grados de libertad en dirección  $\hat{x}$ ,  $n_x = (M-1) \times (N+1)$

$n_y$  = Número de grados de libertad en dirección  $\hat{y}$ ,  $n_y = M \times N$

Dado que existen grados de libertad conocidos,  $g_k$ , y grados libertad no conocidos,  $g_u$ , asociados a las incógnitas buscadas), el sistema se puede reducir a:

$$H_r \cdot U_r = B \tag{10.4}$$

$H_r$  : Matriz de profundidades reducida ( $N_c \times N_c$ )

columnas  $g_u$  de la matriz  $H$

$U_r$  : Vector de velocidades  $U$  reducido ( $N_c \times 1$ )

$B$  : Vector  $B$ , cada elemento se calcula como  $B_i = -\sum_{jk} h_{i,jk} UV_{jk}$

donde → subíndice  $i$ : asociado a la celda  $i$

subíndice  $jk$  : grados de libertad conocidos

Obs: Dado que la formulación se realiza suponiendo que no existen valores NaN dentro del sistema, el número de grados de libertad no conocidos coincide con el número de celdas,  $N_c$ .

De esta forma, las velocidades  $U_r$  se encuentran invirtiendo la matriz  $H_r$  y premultiplicando por  $B$ :

$$U_r = Hr^{-1} \cdot B \quad (10.5)$$

En caso de no existir data, se aplican las mismas condiciones expuestas en la sección anterior, tratándolo como grado de libertad conocido en caso de que la velocidad sea cero, y eliminando el grado de libertad en el caso que sea NaN.