Taller programación

1) Para poder realizar el diagrama de Moody, es imprescindible delimitar el rango en que se trabajará régimen laminar y turbulento.

Para ello, tomaremos que el Régimen laminar estará para el rango

$$Re < 3500$$

Y, entonces

$$f = \frac{64}{Re}\ , \quad Re < 3500$$

Y, para valores superiores a 4000, tomaremos comportamiento de flujo turbulento, donde se empleará la ecuación de Colebrook-White para calcular el factor de fricción para la zona turbulenta:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right)$$

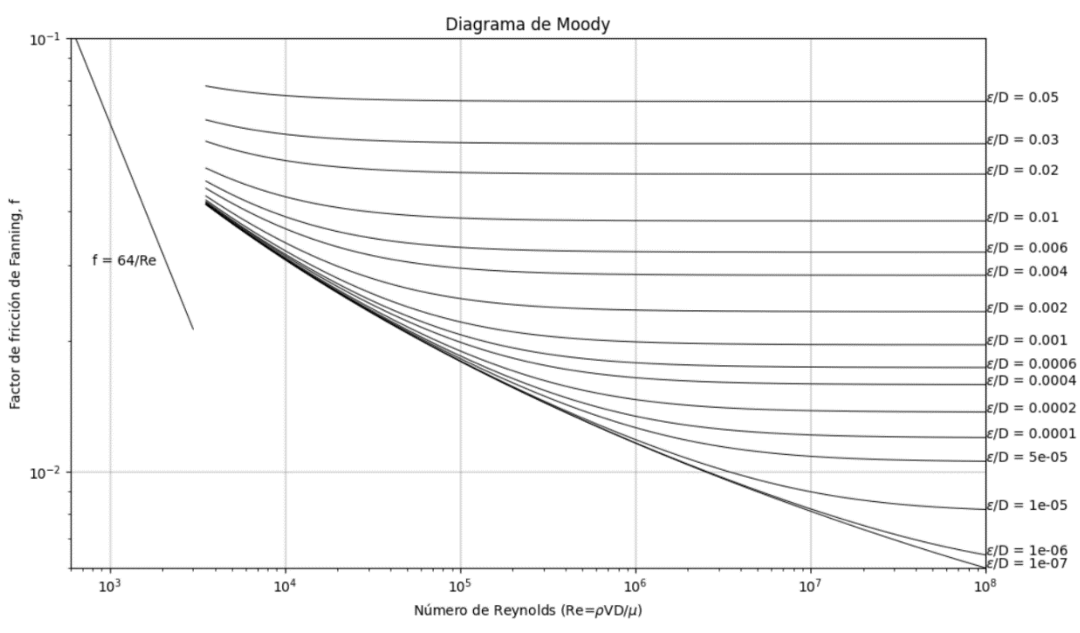
Tomando un método número para calcular las raíces de la función para un valor de $Re, \frac{\varepsilon}{D}$ estipulados, es posible adquirir el valor del factor de fricción

$$F\left(f, Re, \frac{\varepsilon}{D}\right) = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2\log_{10}\left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.71} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}}\right)$$

Es decir que,

$$f = root\left[F\left(f, Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)\right] \quad Re > 4000$$

Adquiriendo,



2) Partiendo de la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho V) = 0$$

Vemos que si el flujo es incompresible, entonces:

$$\nabla \cdot V = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (v_\theta)}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Ahora, tomando el caso en dos dimensiones encontramos,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Note que entonces debe existir una función $\psi = f(x, y)$, que cumpla el teorema de Clairaut para las derivadas cruzadas, obteniendo,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\rightarrow \ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

Donde ψ es llamada línea de corriente. Además, vemos que, si esto es cierto, entonces

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy$$

Y, a lo largo de una línea de corriente constante $d\psi = 0$

$$-v_y dx + v_x dy = 0$$

$$\rightarrow \ \frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}$$

Por lo tanto, las curvas de líneas de corriente constante representan las líneas de flujo. Ahora, para el caso de coordenadas polares, tendremos

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad v_\theta = r\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Es decir,

$$x = r\cos\theta\,, \qquad y = r\sin\theta$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} = v_r\cos\theta - v_\theta\sin\theta$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} = v_r\sin\theta + v_\theta\cos\theta$$

Y, en el caso en el que tenemos

$$\psi = Ur\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

Las líneas de flujo serán las curvas de nivel para la función de líneas de corriente. Además, para encontrar el campo de vectores de velocidad observamos que,

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta + Ur\left(2\frac{a^2}{r^3}\right)\sin\theta\,, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = Ur\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta\,, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = Ur\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

Adquiriendo

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta\,, \qquad v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

Luego,

$$v_x = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos^2\theta + U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin^2\theta = U + U\frac{a^2}{r^2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta)$$

$$v_x = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\cos(2\theta)\right) = U\left(1+\frac{a^2}{(x^2+y^2)^4}(y^2-x^2)\right)$$

$$v_y = U\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\theta\, sin\theta - U\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)\sin\theta\cos\theta = -2U\frac{a^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta$$

$$v_y = -U\frac{a^2}{r^2}\sin(2\theta) = -2U\frac{a^2}{(x^2+y^2)^4}xy$$

Es decir que el vector de velocidad en cada punto (x, y) será

$$\vec{V}_{(x,y)} = \left(U + U\frac{a^2}{(x^2+y^2)^4}(y^2-x^2), -2U\frac{a^2}{(x^2+y^2)^4}x\right)$$

Y por lo tanto vemos que el campo de velocidades será:

$$\left\|\vec{V}_{(x,y)}\right\| = \left\|\left(U + U\frac{a^2}{(x^2+y^2)^4}(y^2-x^2), -2U\frac{a^2}{(x^2+y^2)^4}x\right)\right\|$$

Elaborando el código pertinente para cada uno de estos conceptos es posible obtener las siguientes gráficas: