

Proyecto de métodos numéricos

De manera general en el diseño de sistemas de tuberías, se realiza un balance de energía mecánica en el sistema para estimar longitudes, alturas o potencia de bombas.

$$E_{inicial} = E_{final} + E_{perdida}$$

La energía en un punto de una tubería circular, donde el flujo ocupa toda el área transversal, se puede describir con la ayuda de la ecuación de Bernoulli modificada como

$$\frac{P_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + gh_A + W_{bomba} = \frac{P_B}{\rho} + \frac{V_B^2}{2} + gh_B + gh_{perdidas}$$

ρ : Densidad. V_i : Velocidad promedio del fluido en el punto i . P_i : Presión en el punto i .

h_i : Altura del flujo desde el punto de referencia. W_{bomba} = Trabajo de la bomba.

Hay diferentes expresiones y formas de calcular la cabeza de pérdidas ($h_{pérdidas}$), pero una de las más empleadas en el diseño de tuberías es la siguiente

$$h_{perdidas} = f \cdot \frac{L}{\phi} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

Donde: f : factor de fricción Darcy. L : longitud de la tubería

V : velocidad promedio del fluido. ϕ : Diametro de la tubería. g : gravedad

En la ecuación anterior el factor de fricción depende del régimen de flujo que se esté trabajando, que depende de la magnitud de número adimensional de Reynolds.

$$Re = \frac{\rho \phi V}{\mu}$$

Moody, fue un experimentador que logró la adquisición del factor de fricción en función del régimen de flujo (Re) y la rugosidad relativa de la tubería ($\frac{\epsilon}{\phi}$) obteniendo los resultados de la figura 1.

A partir de muchos trabajos tanto experimentales como teóricos se han desarrollado diferentes ecuaciones para la estimación del factor de fricción, permitiendo realizar el diagrama de Moody a partir de dichas ecuaciones. Para poder realizar el diagrama de Moody, es imprescindible delimitar el rango en que se trabajará régimen laminar y turbulento.

Se tomará el Régimen laminar en el rango

$$0 < Re < 3500$$

Y, entonces

$$f = \frac{64}{Re}, \quad Re < 3500$$

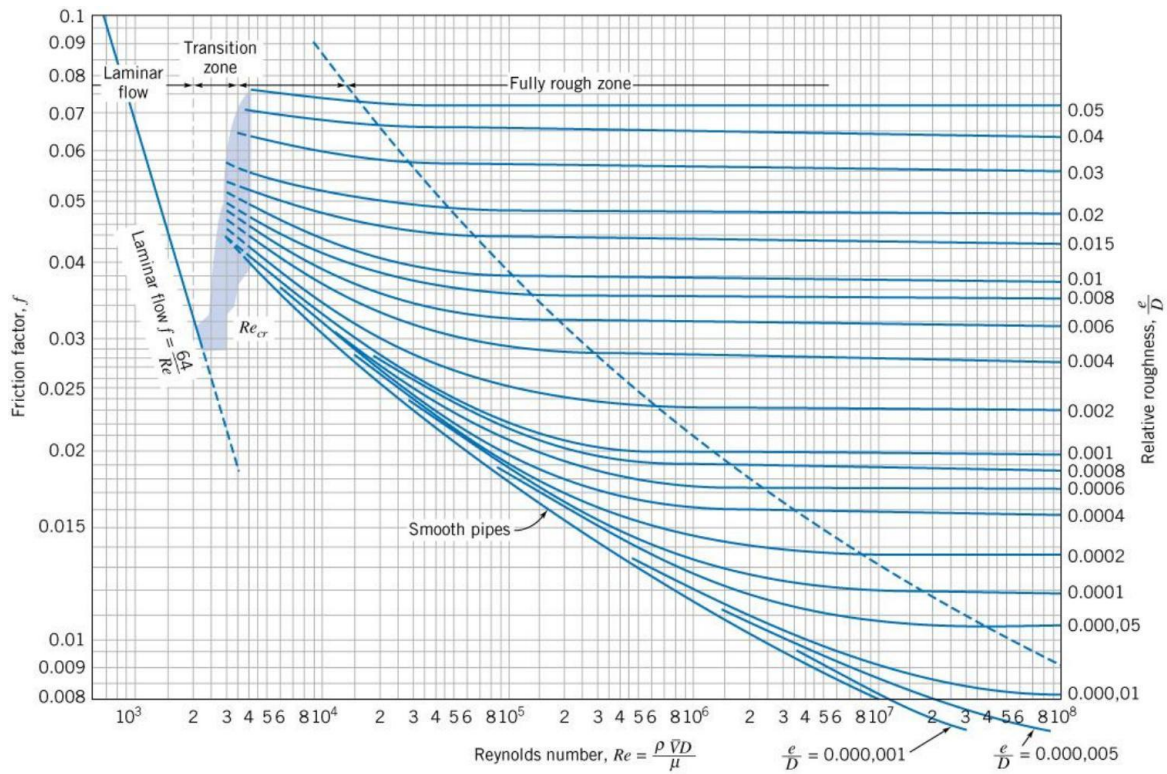


Figura 1. Diagrama de moody teórico.

Para valores superiores a 4000, tomaremos comportamiento de flujo turbulento, donde se empleará la ecuación de Colebrook-White para calcular el factor de fricción para la zona turbulenta:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right)$$

Reescribimos la ecuación del Colebrook-White y la dejamos igualada a 0.

$$F\left(f, Re, \frac{\varepsilon}{D}\right) = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2 \log_{10} \left(\frac{\frac{\varepsilon}{D}}{3.71} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f}} \right) = 0$$

Note que en este caso $Re, \frac{\varepsilon}{D}$, son parámetros estipulados, dejando solamente una función del factor de fricción, es decir que

$$f = \text{root} \left[F\left(f, Re, \frac{\varepsilon}{D}\right) \right] \quad Re > 4000$$

Empleando el método de Newton-Raphson, es posible determinar la raíz de la función con el proceso iterativo

$$f_{i+1} = f_i - \frac{F\left(f_i, Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)}{\frac{dF}{df}\left(f_i, Re, \frac{\varepsilon}{D}\right)}$$

Y el criterio para detener el proceso iterativo, será

$$F\left(f_N, Re, \frac{\varepsilon}{D}\right) < 10^{-10}$$

Con la cual, después de haber realizado el código en Python, es posible obtener los siguientes resultados.

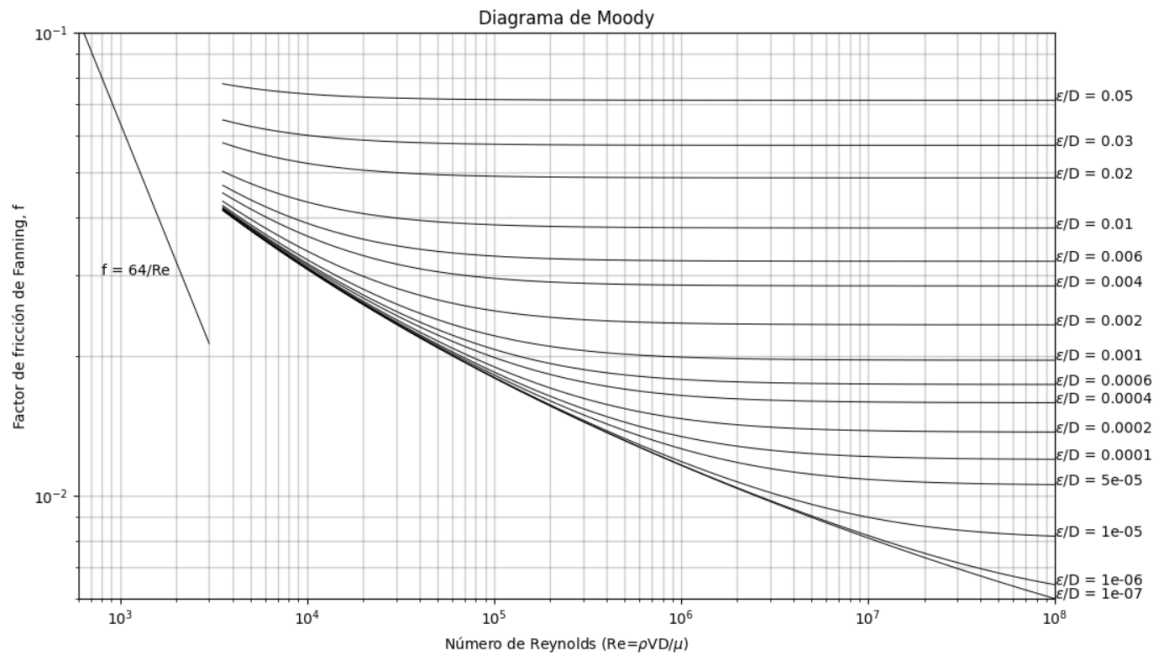


Figura 2. Diagrama de Moody realizado con Python empleando Newton-Raphson para las raíces de la ecuación de Colebrook-White.

Código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.misc import derivative as df

#Regimén laminar
Re_laminar = np.linspace(600,3000,10)
f_laminar = 64/Re_laminar

#Regimén Turbulento
Re_turb = np.logspace(3.55,8,200)[np.newaxis]

def Ec_Colebrook_White(f,Re,e_D) :
    return 1/np.sqrt(f)+2*np.log10(e_D/3.71 + 2.51/(Re*np.sqrt(f)))
x = [1,1,1,1]
e_D =np.array([[1e-7,1e-6,1e-5,5e-5,1e-4,2e-4,4e-4,6e-4,1e-3,2e-3,4e-
```

```

3,6e-3,1e-2,2e-2,3e-2,5e-2]])
f_turb = np.zeros((Re_turb.shape[1],e_D.shape[1]))

def nw(f,x0) :

    k = 0
    Tol = 1e-10
    IterMax = 1000

    if df(f,x0)==0 :
        print('La función no es diferenciable en el punto ingresado. \n')
    else :
        criteria =10

        while criteria>=Tol and k<IterMax :
            if np.abs(df(f,x0,dx=0.000001)) < 1e-5 :
                print("La derivada en el punto es cercana a cero, se
detiene.")
                break
            else :
                k = k + 1
                x1 = x0 - f(x0)/df(f,x0,dx=1e-10)
                x = x0
                x0 = x1

                criteria = np.abs(f(x0))

    return x0

for j in range(e_D.shape[1]) :
    for i in range(Re_turb.shape[1]) :
        a = Re_turb[0,i]
        b = e_D[0,j]
        f = 0.001
        f_turb[i,j] = nw(lambda f: Ec_Colebrook_White(f,a,b),0.01)

plt.figure(figsize=(12,7))
plt.loglog(Re_laminar,f_laminar,'k',linewidth=0.7)
for j in range(e_D.shape[1]) :
    plt.loglog(Re_turb[0,:],f_turb[:,j],'k',linewidth=0.7)
    plt.text(1e8,f_turb[-1,j],"$\varepsilon/D = {}".format(e_D[0,j]))

plt.text(8e2,3e-2,"f = 64/Re")
plt.axis('tight')
plt.xlabel("Número de Reynolds (Re=$\rho$VD/$\mu$)")
plt.ylabel("Factor de fricción de Fanning, f")
plt.title("Diagrama de Moody")
plt.axis([600, 1e8, 0.006, 0.1])
plt.grid(True,which='both', color='gray', linestyle='-', linewidth=1,
alpha=0.4)
plt.show()

```