Tarea 3. Métodos numéricos.

1) Utilice los polinomios interpoladores de Lagrange de grado dos y tres para aproximar lo siguiente

El polinomio interpolador de la forma de Lagrange es la combinación lineal de

$$L(x) = \sum_{j=0}^{k} y_j \, \ell_i(x)$$

Donde y_j son los valores de la ordenada en los datos a interpolar y la función $\ell_j(x)$ es

$$\ell_j(x) = \prod_{i=0,\ i\neq j}^{k} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \cdot \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

Tal como se puede observar, si se tienen k datos el polinomio resultante será de grado $k - 1$. Con base en esto, construimos los siguientes polinomios de Lagrange

a. $f(8.4)$, si $f(8.1) = 16.9441, f(8.3) = 17.56492\ y\ f(8.7) = 18.82091$

i	0	1	2
x_i	8.1	8.3	8.7
y_i	16.9441	17.56492	18.82091

En este caso tenemos 3 puntos, razón por la cual podremos generar, a lo sumo, un polinomio de grados 2, cuyos factores de la combinación lineal serán

$$y_0\ell_0(x) = 16.9441 \cdot \frac{x - 8.3}{8.4 - 8.3} \cdot \frac{x - 8.7}{8.4 - 8.7} = 141.2008 \cdot (x - 8.3)(x - 8.7)$$

$$y_1\ell_1(x) = 17.56492 \cdot \frac{x - 8.1}{8.3 - 8.1} \cdot \frac{x - 8.7}{8.3 - 8.7} = -219.5615 \cdot (x - 8.1)(x - 8.7)$$

$$y_2\ell_2(x) = 18.82091 \cdot \frac{x - 8.3}{8.7 - 8.3} \cdot \frac{x - 8.1}{8.7 - 8.1} = 78.4205 \cdot (x - 8.3)(x - 8.1)$$

Por tanto, el polinomio es

$$P_3(x) = 141.2008 \cdot (x - 8.3)(x - 8.7) - 219.5615 \cdot (x - 0.81)(x - 8.7) + 78.4205 \cdot (x - 8.3)(x - 8.4)$$

Y, simplificando la expresión se encuentra

$$P_2(x) = 0.0598 \cdot x^2 + 2.1235 \cdot x - 4.1793$$

Con este polinomio, obtenemos el valor estimado de

$$P_2(8.4) = 17.8771$$

b. $f(0.25)$, si $f(0.1) = 0.62049958, f(0.2) = -0.25398668\ y\ f(0.3) = 0.00660095$

i	0	1	2
x_i	0.1	0.2	0.3
y_i	0.62049958	-0.25398668	0.00660095

Análogamente a como se comprobó en el punto anterior, sólo se puede construir el polinomio de grado 2 como máximo, cuyos sumandos serán

$$y_0\ell_0(x) = 0.62049958 \cdot \frac{x-0.2}{0.1-0.2} \cdot \frac{x-0.3}{0.1-0.3} = 31.025 \cdot (x-0.2)(x-0.3)$$

$$y_1\ell_1(x) = -0.25398668 \cdot \frac{x-0.1}{0.2-0.1} \cdot \frac{x-0.3}{0.2-0.3} = 25.3987 \cdot (x-0.1)(x-0.3)$$

$$y_2\ell_2(x) = 0.00660095 \cdot \frac{x-0.1}{0.3-0.1} \cdot \frac{x-0.2}{0.3-0.2} = 0.3300 \cdot (x-0.1)(x-0.2)$$

Encontrando el polinomio

$$P_2(x) = 31.025 \cdot (x-0.2)(x-0.3) + 25.3987 \cdot (x-0.1)(x-0.3) + 0.3300 \cdot (x-0.1)(x-0.2)$$

$$\to P_2(x) = 56.7537x^2 - 25.7710x + 2.6301$$

Con el cual se interpola un valor de

$$P_2(0.25) = -0.265577$$

c. $f(0.9)$, si $f(0.6) = -0.17694460, f(0.7) = 0.01375227 \ y \ f(0.8) = 0.22363362$

i	0	1	2
x_i	0.6	0.7	0.8
y_i	-0.17694460	0.01375227	0.22363362

Entonces

$$y_0\ell_0(x) = -0.17694460 \cdot \frac{x-0.7}{0.6-0.7} \cdot \frac{x-0.8}{0.6-0.8} = -8.8472 \cdot (x-0.7)(x-0.8)$$

$$y_1\ell_1(x) = 0.01375227 \cdot \frac{x-0.6}{0.7-0.6} \cdot \frac{x-0.8}{0.7-0.8} = -1.3752 \cdot (x-0.6)(x-0.8)$$

$$y_2\ell_2(x) = 0.22363362 \cdot \frac{x-0.6}{0.8-0.6} \cdot \frac{x-0.7}{0.8-0.7} = 11.1817 \cdot (x-0.6)(x-0.7)$$

Encontrando el polinomio

$$P_2(x) = -8.8472 \cdot (x-0.7)(x-0.8) - 1.3752 \cdot (x-0.6)(x-0.8) + 11.1817 \cdot (x-0.6)(x-0.7)$$

$$\to P_2(x) = 0.9592x^2 + 0.66x - 0.9183$$

Con el cual se extrapola un valor de

$$P_2(0.9) = 0.4527$$

2) Sea $P_3(x)$ el polinomio interpolador de Lagrange para los datos $f(0,0), f(0.5, y), f(1,3) y\ f(2,2)$. Encuentre y si el coeficiente de x^3 en $P_3(x)$ es 6.

En este caso

$$y_0\ell_0(x) = 0 \cdot \frac{x-0.5}{0-0.5} \cdot \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-2}{0-2} = 0$$

$$y_1\ell_1(x) = y \cdot \frac{x-0}{0.5-0} \cdot \frac{x-1}{0.5-1} \cdot \frac{x-2}{0.5-2} = \frac{8}{3} y \cdot x(x-1)(x-2)$$

$$y_2\ell_2(x) = 3 \cdot \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-0.5}{1-0.5} \cdot \frac{x-2}{1-2} = -6 \cdot x(x-0.5)(x-2)$$

$$y_2\ell_2(x) = 2 \cdot \frac{x-0}{2-0} \cdot \frac{x-0.5}{2-0.5} \cdot \frac{x-1}{2-1} = \frac{2}{3} \cdot x(x-0.5)(x-0.1)$$

Creamos el polinomio

$$P_3(x) = 0 + \frac{8}{3} y \cdot x(x-1)(x-2) - 6 \cdot x(x-0.5)(x-2) + \frac{2}{3} \cdot x(x-0.5)(x-0.1)$$

Expandemos los factores y encontramos

$$P_3(x) = \ y\left(\frac{16}{3}x - 8x^2 + \frac{8}{3}x^3\right) - \frac{17}{3}x + 14x^2 - \frac{16}{3}x^3$$

$$\rightarrow P_3(x) = \left(\frac{8}{3}y - \frac{16}{3}\right)x^3 + (14 - 8y)x^2 + \left(y\frac{16}{3} - \frac{17}{3}\right)x$$

Como el coeficiente de x^3 es igual a 3, entonces

$$\frac{8}{3}y - \frac{16}{3} = 3 \rightarrow y = \frac{9+16}{8} = \frac{25}{8}$$

Y, por tanto,

$$P_3(x) = (3x^2 - 11x + 11)x$$

3) Use el algoritmo de eliminación gaussiana para resolver los sistemas lineales siguientes. Determine si se requiere realizar cambios de renglones (filas).

a. $x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$
$3x_1 - 3x_2 + x_3 = -1$
$x_1 + x_2 = 3$

Reorganizamos matricialmente

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2, \qquad F_3 - F_1 \rightarrow F_3$$

$$\left[\begin{matrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -8\\ 0 & 2 & -3\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}2\\ -7\\ 1\end{matrix}\right]$$

$$F_2 \leftrightarrow F_3$$

$$\left[\begin{matrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & -8\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}2\\ 1\\ -7\end{matrix}\right]$$

$$\frac{1}{2}F_2 \rightarrow F_2, \qquad -\frac{1}{8}F_3 \rightarrow F_3$$

$$\left[\begin{matrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -3/2\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}2\\ 1/2\\ 7/8\end{matrix}\right]$$

$$F_2 + F_1 \rightarrow F_1$$

$$\left[\begin{matrix}1 & 0 & 3/2\\ 0 & 1 & -3/2\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}5/2\\ 1/2\\ 7/8\end{matrix}\right]$$

$$\frac{3}{2}F_3 + F_2 \rightarrow F_2, \qquad -\frac{3}{2}F_3 + F_1 \rightarrow F_1$$

$$\left[\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\middle\|\begin{matrix}19/16\\ 29/26\\ 7/8\end{matrix}\right]$$

Luego,

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19/16\\ 29/26\\ 7/8\end{bmatrix}$$

b. $x_1 + x_2 + x_4 = 2$
$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$
$4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0$
$3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ 4 & -1 & -2 & 2\\ 3 & -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\\ 3\end{bmatrix}$$

$$F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2, \qquad F_1 - 4F_3 \rightarrow F_3, \qquad F_1 - 3F_4 \rightarrow F_4$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -5 & -2 & -2\\ 0 & -4 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ -3\\ -8\\ -9\end{bmatrix}$$

$$-F_2 \rightarrow F_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$F_1 - F_2 \to F_1, \qquad F_3 + 5F_2 \to F_3, \qquad F_4 + 4F_2 \to F_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$F_4 - F_3 \to F_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Como se puede observar en el resultado anterior la matriz el sistema es inconsistente, es decir, no tendrá solución.

c. Calcule el determinante de las matrices de los ejercicios (a) y (b)

a)

Tomando la matriz escalonada del punto (a) se tiene

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

Como es una matriz diagonal superior, y como hasta ese punto se hicieron dos operaciones de eliminación (que no cambia el valor del determinante) y una de permutación (que produce un cambio de signo), entonces

$$\det(\mathrm{A}) = \det(U) \cdot (1)(1)(-1) = 1 \cdot 2 \cdot -8 \cdot (-1) = 16$$

b)

Para el caso del punto b), como se vio al final de este punto, la última fila se cancelaba completamente. Es decir, que los vectores filas que la componían no son linealmente independientes; por lo tanto, el determinante de esta matriz será 0.

$$\det(B) = 0$$

d. Resuelva los dos ejercicios anteriores, (a) y (b) utilizando el método de la inversa de la matriz, esto es, $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$.

a)

En este caso la matriz asociada al sistema de ecuaciones es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuya matriz inversa es

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & 4 \\ 1/2 & -3/2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$Ax = b \rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \rightarrow Ix = A^{-1}b \rightarrow x = A^{-1}b$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1/2 & 3/2 & 4 \\ 1/2 & -3/2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 19/2 \\ 29/2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19/16 \\ 29/16 \\ 7/8 \end{bmatrix}$$

b)

Dado que $\det(B) = 0$, esta matriz no tiene inversa, en consecuencia no se puede hacer el cálculo.

4) Con los datos de la tabla siguiente

x_i	4.0	4.2	4.5	4.7	5.1	5.5	5.9	6.3	6.8	7.1
y_i	102.56	113.18	130.11	142.05	167.53	195.14	224.87	256.73	299.50	326.72

De manera general se describe un polinomio de grado n

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Entonces, la diferencia entre la aproximación dada por el polinomio y los datos a los que se le quiere hacer regresión será,

$$S_i = (P_n(x_i) - y_i)^2$$

Por tanto, el error total de la aproximación será

$$S(a_{i=0}^n) = \sum_{i=0}^{N} S_i = \sum_{i=0}^{N} (P_n(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^{N} (a_0 + a_1x_i + \cdots + a_nx_i^n - y_i)^2$$

Para minimizar esta función es necesario encontrar los puntos mínimos encontrando el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a_0} = \sum_{i=0}^{N} (a_0 + a_1x_i + \cdots + a_nx_i^n - y_i) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a_1} = \sum_{i=0}^{N} (a_0 + a_1x_i + \cdots + a_nx_i^n - y_i)x_i = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial a_n} = \sum_{i=0}^{N} (a_0 + a_1x_i + \cdots + a_nx_i^n - y_i)x_i^n = 0$$

Teniendo un sistema de $n + 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas, luego

a. Construya el polinomio de mínimos cuadrados de primer grado y calcule el error.

Para el polinomio de grado 1 la expresión se reduce a

$$\sum_{i=0}^{N}(a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0 \rightarrow a_0 N + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i - \sum_{i=0}^{N} y_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^{N}(a_0 + a_1 x_i - y_i)x_i = 0 \rightarrow a_0 \sum_{i=0}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 - \sum_{i=0}^{N} x_i y_i = 0$$

En este caso

$$N = 10, \qquad \sum_{i=0}^{N} x_i = 51.1, \qquad \sum_{i=0}^{N} y_i = 1958.4$$

$$\sum_{i=0}^{N} x_i y_i = 11366.8, \qquad \sum_{i=0}^{N} x_i^2 = 303.39$$

Encontrando el sistema de ecuaciones

$$a_0 10 + a_1 51.1 = 1958.4$$

$$a_0 51.1 + a_1 303.39 = 11366.8$$

Entonces, la solución será

$$a_0 = -194.1382, \qquad a_1 = 72.0845$$

Adquiriendo la siguiente recta con su error cuadrático

$$P_1(x) = 72.0845x - 194.1382$$

$$S_1 = \sum_{i=0}^{N}(P_n(x_i) - y_i)^2 = 329.01$$

b. Construya el polinomio de mínimos cuadrados de segundo grado y calcule el error.

Tal como se planteó en el punto anterior, las ecuaciones en este caso serán

$$\sum_{i=0}^{N}\left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 - y_i\right) = 0 \rightarrow a_0 N + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 - \sum_{i=0}^{N} y_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^{N}\left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_i^2 - y_i\right)x_i = 0 \rightarrow a_0 \sum_{i=0}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{N} x_i^3 - \sum_{i=0}^{N} x_i y_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^{N}\left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_i^2 - y_i\right)x_i^2 = 0 \rightarrow a_0 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{N} x_i^4 - \sum_{i=0}^{N} x_i^2 y_i = 0$$

Algunos términos ya fueron calculados, pero los nuevos son

$$\sum_{i=0}^{N} x_i^3 = 1759.8, \qquad \sum_{i=0}^{N} x_i^4 = 10523, \qquad \sum_{i=0}^{N} x_i^2 y_i = 68007$$

Encontrando ahora el sistema

$$a_0 10 + a_1 54.1 + a_2 303.4 = 1958.4$$

$$a_0 54.1 + a_1 303.4 + a_2 1759.8 = 11366.8$$

$$a_0 303.4 + a_1 1759.8 + a_2 10523.1 = 68006.7$$

Encontrando

$$a_0 = 1.2356, \qquad a_1 = -1.1435, \qquad a_2 = 6.6182$$

$$P_2(x) = 6.6182x^2 - 1.1435x + 1.2356$$

$$S_2 = \sum_{i=0}^{N} (P_n(x_i) - y_i)^2 = 0.0014$$

c. Construya el polinomio de mínimos cuadrados de tercer grado y calcule el error.

Para este caso resulta evidente que el sistema a responder será

$$a_0 N + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 + a_3 \sum_{i=0}^{N} x_i^3 - \sum_{i=0}^{N} y_i = 0$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{N} x_i^3 + a_4 \sum_{i=0}^{N} x_i^4 - \sum_{i=0}^{N} x_i y_i = 0$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{N} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{N} x_i^4 + a_3 \sum_{i=0}^{N} x_i^5 - \sum_{i=0}^{N} x_i^2 y_i = 0$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{N} x_i^3 + a_1 \sum_{i=0}^{N} x_i^4 + a_2 \sum_{i=0}^{N} x_i^5 + a_3 \sum_{i=0}^{N} x_i^6 - \sum_{i=0}^{N} x_i^3 y_i = 0$$

Donde

$$\sum_{i=0}^{N} x_i^5 = 64608, \qquad \sum_{i=0}^{N} x_i^6 = 405616.7, \qquad \sum_{i=0}^{N} x_i^3 y_1 = 417730.1$$

Encontrando el sistema de ecuaciones

$$a_0 10 + a_1 54.1 + a_2 303.4 + a_3 1759.8 = 1958.4$$

$$a_0 54.1 + a_1 303.4 + a_2 1759.8 + a_3 10523.1 = 11366.8$$

$$a_0 303.4 + a_1 1759.8 + a_2 10523.1 + a_3 64608 = 68006.7$$

$$a_0 1759.8 + a_1 10523.1 + a_2 64608 + a_3 405616.7 = 417730.1$$

Y su correspondiente solución

$$a_0 = 3.4291, \qquad a_1 = -2.3792, \qquad a_2 = 6.8456, \qquad a_3 = -0.0137$$

$$P_3(x) = -0.0137x^3 + 6.8456x^2 - 2.3793x + 3.4291$$

$$S_3 = 5.2734 \cdot 10^{-4}$$

d. Construya la aproximación de mínimos cuadrados de la forma be^{ax} y calcule el error.

Primero linealizamos la expresión

$$y = be^{ax} \rightarrow \ln(y) = ax + \ln(b)$$

Para la cual encontramos la expresión linealizada

$$Y = ax + \beta$$

Para este caso el sistema de ecuaciones a resolver será

$$\beta \cdot N + a \sum_{i=0}^{N} x_i - \sum_{i=0}^{N} \ln(y_i) = 0$$

$$\beta \sum_{i=0}^{N} x_i + a \sum_{i=0}^{N} x_i^2 - \sum_{i=0}^{N} x_i \ln(y_i) = 0$$

Donde

$$\sum_{i=0}^{N} \ln(y_i) = 52.0336, \qquad \sum_{i=0}^{N} x_i \ln(y_i) = 285.49$$

Encontrando como solución del sistema de ecuaciones

$$\beta = 3.1888, \qquad a = 0.3724$$

Por tanto,

$$b = e^{\beta} = 24.2593$$

$$\rightarrow \hat{y}(x) = 24.2593e^{0.3724x}$$

Donde el error cuadrático será

$$S = \sum_{i=0}^{N} (\hat{y}(x_i) - y_i)^2 = 418.66$$

e. Construya la aproximación de mínimos cuadrados de la forma bx^a y calcule el error.

Una vez más linealizamos la expresión y encontramos

$$y = bx^a \rightarrow \ln(y) = a \cdot \ln(x) + \ln(b)$$

En este caso, tenemos

$$Y = a \cdot X + \beta$$

Por tanto, el sistema de ecuaciones a resolver es

$$\beta \cdot N + a \sum_{i=0}^{N} \ln(x_i) - \sum_{i=0}^{N} \ln(y_i) = 0$$

$$\beta \sum_{i=0}^{N} \ln(x_i) + a \sum_{i=0}^{N} \ln^2(x_i) - \sum_{i=0}^{N} \ln(x_i) \ln(y_i) = 0$$

Para este caso

$$\sum_{i=0}^{N} \ln(x_i) = 16.70, \qquad \sum_{i=0}^{N} \ln^2(x_i) = 28.25, \qquad \sum_{i=0}^{N} \ln(x_i) \ln(y_i) = 87.63,$$

$$\sum_{i=0}^{N} \ln(y_i) = 52.03$$

Encontrando,

$$\beta = 1.8308, \qquad a = 2.0195$$

Luego,

$$b = e^{\beta} = 6.2389$$

$$\hat{y}(x) = 6.2389x^{2.0195}$$

$$S = \sum_{i=0}^{N} (\hat{y}(x_i) - y_i)^2 = 0.009593$$