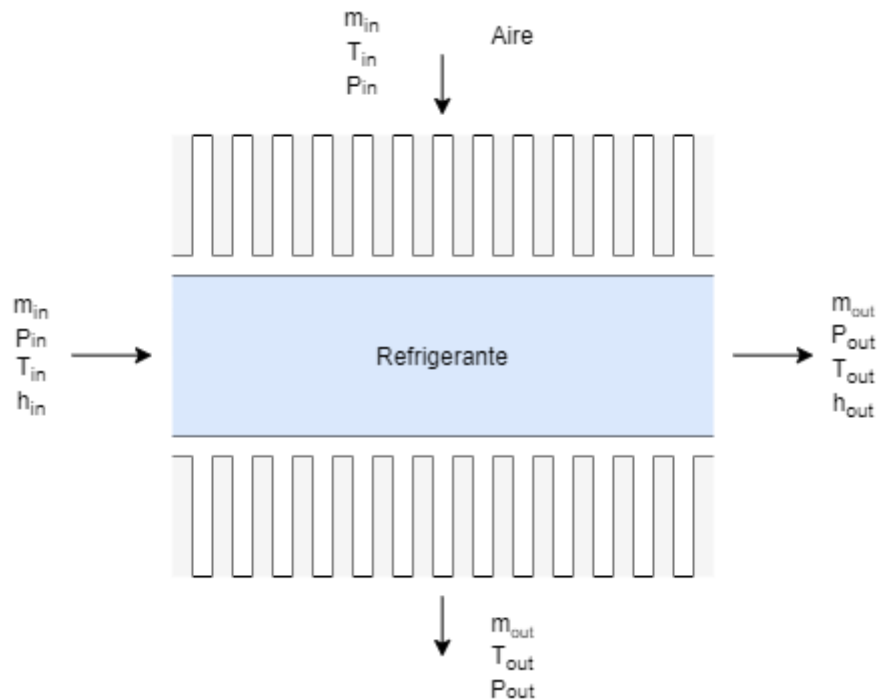


# Tarea 1. Modelamientos matemáticos

Cristian Fernando Pineda, Deyver Esteban Rivera, Rafael David Montagut.

## 1. Modelado del flujo de intercambiadores de calor de tubos y aletas.

Un intercambiador de calor tiene como función realizar la transferencia de calor de un componente a otro, ya sea por medio de conducción, convección y/o radiación, en este caso se plantea un tubo con aletas por el cual fluye un refrigerante, el cual busca recibir el calor transferido por el aire que fluye en la parte exterior del tubo.



donde  $m$  es el flujo másico del refrigerante,  $P$  es la presión del refrigerante,  $h$  es la entalpía del refrigerante y  $T$  es la temperatura del refrigerante.

### 1.1. Suposiciones.

- El sistema se encuentra en estado estacionario.
- La velocidad del aire a través de cada fila de tubos es uniforme y unidireccional.
- El flujo del refrigerante es unidimensional, en dirección axial al tubo.
- La transferencia de calor a lo largo de la dirección axial del tubo es despreciable.
- Los codos que unen los tubos son considerados adiabáticos.
- Se desprecia la transferencia de calor por conducción en las aletas.
- Cuando existe deshumidificación, se desprecia la resistencia de transferencia de calor debida a la película de agua que se forma.

### 1.2. Modelo.

#### 1.2.1. Refrigerante.

Ecuación de conservación de la masa. El fluido interno solo tiene una entrada y una salida, aplicando la ecuación de la conservación de masa

$$\sum m_{in} = \sum m_{out}$$

$$m_{ref,in} = m_{ref,out}$$

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento. La caída de presión está dividida en 3 componentes: la friccional  $\Delta P_f$ , la estática  $\Delta P_g$  y la debida a la aceleración  $\Delta P_a$

$$\Delta P = \Delta P_f + \Delta P_g + \Delta P_a$$

Cuando el refrigerante se encuentra en una sola fase, el cálculo de caída de presión de cada uno de los componentes

$$\Delta P_f = \int_{l_2}^{l_1} \left( \frac{dP}{dx} \right)_f dl$$

$$\Delta P_g = G^2 \left( \frac{1}{\rho_{sal}} - \frac{1}{\rho_{in}} \right)$$

$$\Delta P_a = \frac{\rho_{sal} + \rho_{in}}{2} * g * L * \sin(\theta)$$

donde  $\left( \frac{dP}{dx} \right)_f$  es el gradiente de caída de presión, G es el gasto másico, g es la aceleración gravitacional, L es la longitud del tubo y  $\theta$  es el ángulo de inclinación del tubo.

Ecuación de conservación de la energía. Al realizar balance de energía y teniendo en cuenta la figura 1

$$\dot{Q} = m(h_{sal} - h_{in})$$

$$\frac{T_{pared} - \frac{T_{sal} + T_{in}}{2}}{\frac{1}{\alpha_{ref} * A_{in}} + \frac{\delta/2}{k_{tubo} * A_{med}}} = m(h_{sal} - h_{in})$$

donde  $\alpha_{ref}$  es el coeficiente de transferencia de calor del refrigerante,  $A_{in}$  es la área interna del tubo,  $A_{med}$  es la área media del tubo y  $\delta$  es el espesor del tubo.

### 1.2.2. Aire.

Ecuación de conservación de la masa. El fluido externo solo va a tener una entrada y una salida

$$\sum m_{in} = \sum m_{out}$$

$$m_{ref,in} = m_{ref,out}$$

Ecuación de conservación de la cantidad de movimiento. La caída de presión en la parte externa del intercambiador se calcula por medio de correlaciones que dependen del tipo de aletas. Para el cálculo de la caída de presión a partir del coeficiente de fricción, se usa la siguiente ecuación, la cual fue propuesta por Kays y London.

$$f = \frac{A_c}{A_o} \frac{\rho_m}{\rho_1} \left[ \frac{2\Delta P \rho_1}{G_c} - (1 - \sigma^2) \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) \right]$$

donde  $A_o$  es el área seccional en el que se presenta la máxima velocidad del aire,  $A_c$  es el área seccional externa,  $\rho_m$  es la densidad media del aire,  $\rho_1$  es la densidad del aire a la entrada,  $\rho_2$  es la densidad del aire a la salida,  $\sigma$  es la relación de contracción y  $G_c$  es el gasto del aire.

#### Ecuación de conservación de la energía.

$$\dot{Q} = m(h_{sal} - h_{in})$$

$$\frac{T_{pared} - \frac{T_{sal} + T_{in}}{2}}{\frac{1}{\alpha_{air} * \eta_o * A_{ext}} + \frac{\delta/2}{k_{tubo} * A_{med}}} = m(h_{sal} - h_{in})$$

donde  $\eta_o$  es la eficiencia de las aletas y  $k_{tubo}$  es el coeficiente de transferencia de calor por conducción. El coeficiente de transferencia de calor en la parte externa del intercambiador se calcula por medio de correlaciones empíricas que dependen del tipo de aletas.

#### **1.2.3.** Ecuaciones que rigen a los codos.

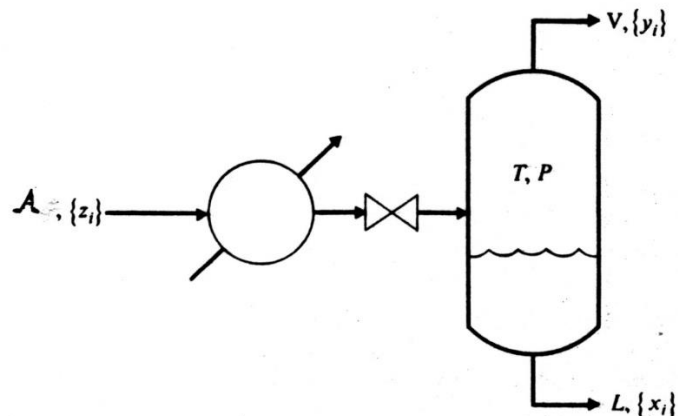
Los codos permiten la unión de los diferentes tubos, no se encuentran aleteados y se puede considerar que externamente están en contacto con aire estancado.

Ecuación de conservación de la energía. Se desprecia la transferencia de calor en los codos debido a que el área de transferencia de calor es mucho menor que en los tubos aleteados, y en el lado externo de los codos el fluido está estancando.

## **2.** Modelamiento de un separador flash.

Un separador flash tiene como función separar soluciones homogéneas, basándose en su volatilidad. Esta clase de separador se usa cuando los puntos de ebullición de las sustancias puras que intervienen en el proceso son significativamente distantes, puesto que esto ocurre en una sola etapa.

EL proceso consiste en el tratamiento térmico previo de la solución con el fin de enriquecer la fase de vapor con la sustancia más volátil, una vez se logra se lleva al separador con el fin de redireccionar la corriente de vapor respecto a la del líquido.



Donde A es la corriente de entrada,  $z_i$  es la composición en fracción molar de entrada, V es el flujo de vapor,  $y_i$  es la composición en fracción molar en el vapor, L es flujo de líquido,  $x_i$  es la composición en fracción molar en el líquido, T es la temperatura y P es la presión.

## 2.1. Suposiciones.

- Se llega al equilibrio.
- Se opera de forma continua.
- La presión y la temperatura son la misma en todo el separador.
- La caída de presión causada por los equipos es despreciable.
- La transferencia de calor con el medio es despreciable.
- No hay reacciones químicas.
- La alimentación entra como líquido saturado o subenfriado.

## 2.2. Modelo.

### Balance de materia global

$$F = V + L$$

### Balance por componentes

$$z_{fi}F = Vy_i + Lx_i$$

### Balance de energía

$$H_F F + Q = H_V V + H_L L$$

Donde  $Q$  es el calor suministrado o retirado en el equipo de intercambio térmico,  $H_F$  es la entalpía de la corriente de alimentación,  $H_V$  es la entalpía de la corriente de vapor y  $H_L$  es la entalpía de la corriente líquida.

Donde las entalpías están establecidas de acuerdo con las siguientes ecuaciones.

$$H_V = y_1 \cdot [\lambda_{1,(T_{ref})} + C_{p1}^{vap} \cdot (T - T_{ref})] + (1 - y_1) \cdot [\lambda_{2,(T_{ref})} + C_{p2}^{vap} \cdot (T - T_{ref})]$$

$$H_L = x_1 \cdot C_{p1}^{liq} \cdot (T - T_{ref}) + (1 - x_1) \cdot C_{p2}^{liq} \cdot (T - T_{ref})$$

Donde  $T_{ref}$  es la temperatura de referencia,  $\lambda_{(T_{ref})}$  es la entalpía de vaporización a una temperatura de referencia y  $C_p$  es el calor específico de la sustancia pura.

Tomando  $T_{ref} = 0^\circ\text{C}$ .

$$H_V = y_1 \cdot [\lambda_{1,(0^\circ\text{C})} + C_{p1}^{vap} \cdot T] + (1 - y_1) \cdot [\lambda_{2,(0^\circ\text{C})} + C_{p2}^{vap} \cdot T]$$

$$H_L = x_1 \cdot C_{p1}^{liq} \cdot T + (1 - x_1) \cdot C_{p2}^{liq} \cdot T$$

Para la entalpía de la alimentación se usa la misma ecuación representada para  $H_L$ , pero a la temperatura correspondiente.

### Relaciones de equilibrio

$$y_i = K_i x_i$$

Donde  $K_i$  es la constante de equilibrio, esta variable se verá afectada si el sistema se encuentra en idealidad o no.

## 3. Modelamiento de columna de destilación.

### 3.1. Consideraciones.

- Sistema binario.
- Estado estacionario.
- Equilibrio líq-vap conocido.
- No hay comportamiento azeotrópico en el rango de composiciones de la destilación.
- El condensador es parcial

### 3.2. Modelo.

#### Balances globales

$$F = W + D$$

$$F \cdot z_F = D \cdot z_D + W \cdot z_W$$

$$F \cdot h_F = D \cdot \left( h_D + \frac{Q_c}{D} \right) + W \cdot \left( h_W - \frac{Q_R}{W} \right) + Q_L = D \cdot H_{\Delta D} + W \cdot H_{\Delta W} + Q_L$$

#### Balances y expresión de la curva de operación para un plato n en la zona de enriquecimiento:

$$D = G_{n+1} - L_n$$

$$D z_D = G_{n+1} y_{n+1} - L_n x_n$$

$$D \cdot H_{\Delta D} = D \left( \frac{Q_c}{D} + H_D \right) = G_{n+1} H_{G,n+1} - L_n H_{L,n}$$

$$\frac{G_{n+1}}{L_n} = \frac{x_n - z_D}{y_{n+1} - z_D} = \frac{H_n - H_{\Delta D}}{H_{G,n+1} - H_{\Delta D}}$$

#### Balances y expresión de la curva de operación para un plato m en la zona de despojamiento

$$W = L_m - G_{m+1}$$

$$W z_W = L_m x_m - G_{m+1} y_{m+1}$$

$$W \cdot H_{\Delta W} = W \cdot \left( H_W - \frac{Q_r}{W} \right) = L_m H_{L,m} - G_{m+1} H_{G,m+1}$$

$$\frac{G_{m+1}}{L_m} = \frac{x_m - z_W}{y_{m+1} - z_W} = \frac{H_m - H_{\Delta W}}{H_{G,m+1} - H_{\Delta W}}$$

#### Relación de reflujo

$$R = \frac{H_{\Delta D} - H_{z_D}}{H_{z_D} - h_{z_D}}$$

#### Relación de reflujo mínima

$$R_{min} = \frac{H_{\Delta D-min} - H_{z_D}}{H_{z_D} - h_{z_D}}$$

### 4. Modelamiento de tanque de almacenamiento.

#### 4.1. Consideraciones.

- Almacenamiento de un líquido o de una mezcla líquida.
- Geometría cilíndrica.
- Una corriente de entrada y una de salida.
- Densidad constante.
- Isotérmico.

#### 4.2. Modelo.

##### Balance de masa

$$\frac{dm}{dt} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}$$

##### Cambio de altura dentro del tanque

$$\frac{dh}{dt} = \left( \frac{Q_{in} - Q_{out}}{\pi r^2} \right)$$

#### 5. Modelamiento de CSTR - Continuous Stirred-Tank Reactor.

Suponiendo el modelo de mezcla perfecta y que las propiedades no cambian en función del tiempo, se hace un balance de materia



##### 5.1. Modelo.

$$F_{A0} - F_A + r_A|_{out}V = 0$$

$$F_{A0} \left( 1 - \frac{F_A}{F_{A0}} \right) = F_{A0}(1 - (1 - x_A)) + r_A|_{out}V = 0$$

$$\rightarrow \frac{V_{STR}}{F_{A0}} = \frac{x_A}{-r_A|_{out}}$$

#### 6. Compresor

Para el modelamiento de compresores en un macroescala se puede hacer empleando un balance de energía en dicho dispositivo, manejando la notación de 1 en la entrada de dicho dispositivo y 2 es la salida, entonces

$$h_1 + gz_1 + \frac{1}{2}V_1^2 + \dot{Q} - \dot{W} = h_2 + gz_2 + \frac{1}{2}V_2^2$$

$$\rightarrow \dot{Q} - \dot{W} = h_2 - h_1 + g(z_2 - z_1) + \frac{1}{2}(V_2^2 - V_1^2)$$

Por lo general el cambio de energía potencial gravitacional es despreciable ya que la diferencia de alturas entre la entrada y salida es prácticamente nula. Adicionalmente, el área entre la tubería de entrada y salida no es apreciable, luego, por un balance de materia encontramos que

$$m_1 = m_2 \rightarrow \rho_1 \dot{V}_1 = \rho_2 \dot{V}_2 \rightarrow \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2$$

Como  $A_1 \approx A_2$ , y suponiendo liquido casi incompresible,  $\rho_1 \approx \rho_2$ , por lo tanto

$$V_1 \approx V_2$$

Obteniendo

$$\dot{Q} - \dot{W} = h_2 - h_1$$

Como las pérdidas en calor son despreciables a la magnitud del trabajo de eje que se realiza, entonces se puede simplificar la ecuación a

$$\dot{W}_{eje} = h_1 - h_2$$

Cabe resaltar que hay otras ecuaciones modelo que dependen del tipo de reactor y aspectos relacionados a diseños mecánicos, sin embargo, acá se presenta el modelo más general de la relación entre el trabajo de eje del compresor y el cambio energético de los fluidos.

## 7. Referencias

- Tuta, E. C., & Díaz, D. F. (2016). Modelado y simulación del flujo de intercambiadores de calor de tubos y aletas con cambio de fase en el refrigerante. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 32(1), 31-38.