3 Ejercicios Finales

1. La media del diámetro interior de una muestra de 200 lavadoras producidas por una máquina es 1,275 cm. y la desviación típica de 0,0125 cm. El propósito para el cual se han diseñado las lavadoras permite una tolerancia máxima en el diámetro de 1,26cm. a 1,29 cm., de otra forma las lavadoras se consideran defectuosas. Determinar el porcentaje de lavadoras defectuosas producidas por la máquina, suponiendo que los diámetros están distribuidos normalmente.

2. En una finca, el peso de un saco de zanahoria tiene un peso promedio y una varianza desconocidos. Si solo el 3% de los sacos pesan menos de 40 kg y el 5% mas de 48 kg, determine el valor de la media y la varianza. $R/ \quad u = 44.267$ y $\sigma = 2.2695$

3. Si X es una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{4} & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

   Determine el valor de k. $R/ \quad k = \frac{18}{23}$

4. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 5e^{-5x+25} & si \quad x \geq 5 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

   (a) Determine la función generadora de momentos de X . $R/ \quad m_x(t) = \dfrac{-5e^{5t}}{t-5}$, si $t < 5$

   (b) Utilice (a) para determinar $E(X)$. $R/ \quad E(X) = \frac{26}{5}$

5. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

   (a) Determine la función generadora de momentos de X.$R/ \quad m_x(t) = \dfrac{-2}{t-2}$, si $t < 2$

   (b) Utilice (a) para determinar $E(X)$ y $Var(X)$. $R/ \quad E(X) = \dfrac{1}{2}, \quad Var(X) = \dfrac{1}{4}$

6. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{18} & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ x-3 & si \quad 3 < x \leq k \end{cases}$$

Determine el valor de k. $R/ \quad k = \dfrac{13}{3}$

7. Juan recibe un salario mensual base de 150000 colones, además de un incentivo mensual, según las ventas que realice, dado por una *v.a.c.* X en miles de colones, cuya función generadora de momentos es

$$m_X(t) = \frac{1}{(1-30t)^2}$$

Determine el salario promedio mensual total que recibe Juan, y la desviación estándar de su salario mensual total. $R/ \quad E(S) = 1800, \sigma(S) = 30\sqrt{2}$

8. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-x} & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ \dfrac{1}{6} & si \quad 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

con k constante (no es necesario averiguarla). Determine la función generadora de momentos de X. $R/ \quad m_x(t) = k\left(\frac{e^{3t-3}-1}{t-1}\right) + \frac{e^{5x}-e^{3t}}{6t}$

9. Una empresa tiene costos fijos mensuales de 1500000 colones. Sus costos variables en millones de colones es una v.a.c X con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ kx+2 & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Determine el valor de k. $R/ \quad k = -1$

10. Las entradas mensuales en millones de colones de la empresa TEC de producción software están dadas por una v.a.c. X, donde $R_x = [2,3]$, y su función de distribución es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6}{5}x - 2 & si \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & en \quad \text{otro caso} \end{cases}$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa TEC, el próximo mes, tenga una entrada entre 2300000 y 2500000 colones? $R/ \quad 0.24$

(b) Determine la entrada mensual esperada por la empresa TEC. Además determine $Var(X)$.
. $R/ \quad E(X) = 2.6, \quad Var(X) = 7.3333 \times 10^{-2}$

(c) Si se ha estimado que los gastos mensuales de empresa TEC, en millones de colones esta dado por $Y = \dfrac{6(X-1)}{5}$, determine la esperanza y varianza de Y.$R/ \quad E(Y) = 1.92, Var(Y) = 0.1056$

11. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x+9} & si \quad x > 3 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

(a) Determine la función generadora de momentos de X. $R/ \quad m_x(t) = \dfrac{-3e^{3t}}{t-3} \quad si \quad t < 3$

(b) Utilice (a) para determinar $E(X)$ y $Var(X)$. $R/ \quad E(X) = \frac{10}{3}, Var(X) = \frac{1}{9}$

12. Sea X una v.a.c. con distribución de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{k}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Determine el valor de k. $R/ \quad k = \dfrac{3}{2}$

(b) Si $E(X) = \dfrac{121}{96}$, halle $Var(X)$ $R/ \quad Var(x) = \frac{191}{9216}$

13. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x) = f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^4e^{-2x}}{3} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Pruebe que si $t < 2$ entonces $m_x(t) = \dfrac{4 \cdot \Gamma(5)}{3(2-t)^5}$.

(b) Utilice (a) para determinar $E(X)$ y $Var(X)$ $R/ \quad E(X) = \frac{5}{2}, Var(X) = \frac{5}{4}$

14. Las capacidades en gigas de un disco duro fabricado por TECN, con capacidad nominal de 80 gigas, están distribuidos normalmente con una desviación estándar igual a 0.15 gigas. Determine la capacidad promedio de esta clase de discos, sabiendo que solo el 6% de estos tienen capacidades inferiores a la capacidad nominal. $R/\quad \mu = 80.233$

15. Sea X una variable aleatoria continua y considere la función $f(c) = E\left((X-c)^2\right)$. Determine el valor de c donde $f(c)$ alcanza su mínimo absoluto e interprete el resultado.

16. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad
$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$
   (a) Determine la función generadora de momentos de X.$R/\quad m_x(t) = \dfrac{-3}{t-3}$, si $t < 3$
   (b) Utilice (a) para determinar $E(X)$ y $Var(X)$. $R/\quad E(X) = \frac{1}{3}, \quad Var(X) = \dfrac{1}{9}$.

17. Un punto P es escogido aleatoriamente en el interior de un triángulo equilatero de lado 1. Sea X : la distancia perpendicular de P al lado de triángulo más cercano. Pruebe que
   (a) $P(X > k) = \left(1 - 2\sqrt{3}k\right)^2$
   (b) Determine F_X y f_X. $R/\quad f_X(x) = 4\sqrt{3}\left(1 - 2\sqrt{3}x\right)$

18. El tiempo que tarda don Víctor en dormirse, luego de acostarse, sigue una distribución Gamma con media 4 min y varianza 8 min^2.
   (a) Determine la probabilidad de que don Víctor dure menos de 6 minutos en dormirse, luego de acortarse. $R/\quad 0.801$
   (b) Halle la probabilidad de que la semana entrante, iniciando lunes, logre dormirse por primera vez el jueves en menos de 6 min, luego de acostarse.$R/\quad 6.3124 \times 10^{-3}$

19. De lunes a viernes, Mario llega a la oficina y enciende su computadora, la cuál la apaga al finalizar su trabajo del día. El tiempo que tarda la computadora en iniciarse sigue una distribución gamma con media 2 minutos y desviación estándar de 1 minuto.

(a) Determine la probabilidad de que el próximo lunes la computadora de Mario dure más de 4 minutos iniciándose. $R/\quad 0.042$

(b) Determine la probabilidad de que a partir del lunes de la próxima semana, por primera el jueves, la computadora se reinicie en menos de 4 minutos. $R/\quad 7.0976\times 10^{-5}$

20. Sea X una variable aleatoria continua con distribución de probabilidad

$$f(x)=\begin{cases} 7e^{-7x} & si \quad x\geq 0 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

(a) Determine la función generadora de momentos de X. $R/\quad m_x(t)=\dfrac{-7}{t-7}$, si $t<7$

(b) Utilice (a) para determinar $E(X)$ y $Var(X)$ $\quad R/\quad E(X)=\dfrac{1}{7}\quad Var(X)=\dfrac{1}{49}$

21. (♣) Dada la variable $Z\sim N(0,1)$ Sean $X=\sigma Z+\mu$ y $Y=Z^2$ con σ y μ contantes tal que $\sigma\neq 0$.

(a) Determine F_X $\quad R/\quad F_X(k)=\begin{cases} \phi\left(\dfrac{k-\mu}{\sigma}\right) & si \quad \sigma>0 \\ 1-\phi\left(\dfrac{k-\mu}{\sigma}\right) & si \quad \sigma<0 \end{cases}$

(b) Determine F_Y $\quad R/\quad F_Y(k)=\phi\left(\sqrt{k}\right)-\phi\left(-\sqrt{k}\right)$

(c) Determine f_X $\quad R/\quad f_X(x)=\dfrac{e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\sigma^2\pi}}$

(d) Determine f_Y $\quad R/\quad f_Y(x)=\dfrac{e^{\frac{-x}{2}}}{\sqrt{2\pi x}}$

22. (♣) Sea X una $v.a.c.$ no negativa tal que $E(X)$ existe. Pruebe que

$$E(X)=\int_0^\infty (1-F_X(x))\,dx$$

Sugerencia: Note que $\dfrac{d}{dx}(1-F_X(x))=-f_X(x)$, calcule $\int_0^y xf_x(x)\,dx$ por partes y asuma que $\lim\limits_{y\to\infty} y(1-F_X(y))=0$.

23. (♣) Sea $X \sim Exp(\lambda)$, pruebe que

    (a) $P(X > s + t | X > s) = e^{-\lambda t} = 1 - F_X(t)$

    (b) $E(X | X > s) = s + E(X)$

    (c) $E(X | X \leq s) = \dfrac{1}{\lambda} - \dfrac{s}{e^{\lambda s} - 1}$.

    Sugerencia: Para b y c utilice el resultado del ejercicio (9) de la página (175).

24. (♣) Sea $Z \sim N(0, 1)$. Se define la sucesión de funciones $H_n(x)$ por

$$\begin{cases} H_0(x) = 1 \\ H_n(x) f_Z(x) = (-1)^n \dfrac{d^n f_Z(x)}{dx^n} \end{cases}$$

    (a) Determine $H_1(x)$ $\quad$ $R/ \quad H_1(x) = x$

    (b) Pruebe que $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_n'(x)$.

    (c) Demuestre que H_n es un polinomio en x de grado n.