Análisis Numérico

Docente:

Eddy Herrera Daza

Taller Interpolación (Punto 13)

Estudiantes:

María Camila Aguirre Collante

Estefanía Bermúdez Arroyo

Jessica Tatiana Naizaque Guevara

Angie Tatiana Peña Peña

Abril del 2021

Escala de gravamen del Impuesto a la renta

Base Imponible	Cuota Íntegra	Tipo
4.410.000	1.165.978	38,86%
4.830.000	1.329.190	41,02%
5.250.000	1.501.474	43,18%
5.670.000	1.682.830	

Tabla 1. Datos del problema

El contribuyente se siente perjudicado por el hecho de que al Resto de su Base imponible **(170.000)** se le aplica el mismo tipo marginal **(41,02%)** que, a otro contribuyente con una Base de **5.250.000,** alegando que debe aplicársele el correspondiente a la base más próxima en la escala **(4.830.000)** que es del **38,86**. Hacienda, por su parte, rechaza estos argumentos y efectúa la liquidación según sus normas. El sujeto del impuesto interpone recurso (tutela) ante el Tribunal competente, que considera en parte sus alegaciones. El fallo establece que en todo caso se debería aplicar un tipo marginal intermedio.

Como experto en temas fiscales debes elaborar un informe para que Hacienda conozca las diferencias entre el actual sistema impositivo y los posibles métodos de determinar la imposición correspondiente a la base de 5 millones por interpolación de segundo y tercer grado en la escala de gravamen. ¿En cada grado debe añadirse la base más próxima a 5 millones?

Introducción:

La idea de la interpolación es poder estimar f(x) para un x arbitrario, a partir de la construcción de una curva o superficie que une los puntos donde se han realizado las mediciones y cuyo valor si se conoce. Se asume que el punto arbitrario x se encuentra dentro de los límites de los puntos de medición, en caso contrario se llamaría extrapolación. En este texto se discute exclusivamente la interpolación, aunque la idea es similar.

Por lo tanto, para encontrar un polinomio que satisfaga las condiciones, se crea un interpolador de segundo y tercer grado, con base en los datos de la tabla 1.

Interpolador de Segundo Grado:

Base Imponible	Cuota Íntegra	Ecuación
4410000	1165978	$1165978 = (4410000)^2a + (4410000)b + c$
4830000	1329190	$1329190 = (4830000)^2a + (4830000)b + c$
5250000	1501474	$1501474 = (5250000)^2a + (5250000)b + c$

Tabla 2. Interpolador de segundo grado

Del interpolador se obtiene un sistema de ecuaciones de 3 incógnitas (a, b y c):

	a	b	c	y
d	19448100000000	4410000	1	1165978
e	23328900000000	4830000	1	1329190
f	27562500000000	5250000	1	1501474

Tabla 3. Sistema de Ecuaciones Interpolador de segundo grado

Para encontrar las tres incógnitas se hace uso del método numérico de la Eliminación Gauss-Jordan, el cual nos permite obtener los siguientes resultados:

Input interpretation:

row reduce $\begin{pmatrix} 19448100000000 & 4410000 & 1 & 1165978 \\ 23328900000000 & 4830000 & 1 & 1329190 \\ 27562500000000 & 5250000 & 1 & 1501474 \end{pmatrix}$

Result:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{9}{350000000} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{151}{1000} \\ 0 & 0 & 1 & -26 \end{pmatrix}$$

Ilustración 1. Resultados de la eliminación Gauss-Jordan en Wolfram

Por lo tanto, el polinomio de segundo grado que satisface las condiciones es:

$$y = (2.57143 \times 10^{-8})x^2 + 0.151x - 26$$

Si se reemplaza los valores de x por 5000000, se obtiene que la cuota íntegra con esta base imponible es:

$$\left(\left(2.57143 \times 10^{-8}\right) \times 5000000^2\right) + \left(0.151\left(5000000\right)\right) - 26 = 1397831.5$$

Código Fuente:

Para poder hallar las incógnitas que forman el polinomio interpolador de segundo grado, el código implementado fue:

```
incognitas<-matrix(c(4410000^2, 4410000, 1,
                     4830000^2, 4830000, 1,
                     5250000^2, 5250000, 1),3, 3, byrow=TRUE)

resultados<- c(1165978,1329190, 1501474)
gaussianElimination(incognitas, resultados)

mCuadratico <- gaussianElimination(incognitas, resultados)


cat(mCuadratico[1,4], "x^2 + (", mCuadratico[2,4], ")x + (", mCuadratico[3,4], ")")
```

Ilustración 2. Código polinomio Interpolador de segundo grado

El resultado al ejecutar el anterior código fue:

```
> gaussianElimination(incognitas, resultados)
     [,1] [,2] [,3]      [,4]
[1,]    1    0    0  3.00e-08
[2,]    0    1    0  1.51e-01
[3,]    0    0    1 -2.60e+01
>
> mCuadratico <- gaussianElimination(incognitas, resultados)
>
>
> cat(mCuadratico[1,4], "x^2 + (", mCuadratico[2,4], ")x + (", mCuadratico[3,4], ")")
3e-08 x^2 + ( 0.151 )x + ( -26 )
```

Ilustración 3. Resultado

Interpolador de Tercer Grado:

Base Imponible	Cuota Íntegra	Ecuación
4410000	1165978	1165978=$(4410000)^3a + (4410000)^2b + (4410000)c + d$
4830000	1329190	1329190=$(4830000)^3a + (4830000)^2b + (4830000)c + d$
5250000	1501474	1501474=$(5250000)^3a + (5250000)^2b + (5250000)c + d$
5670000	1682830	1682830=$(5670000)^3a + (5670000)^2b + (5670000)c + d$

Tabla 4. Interpolador de tercer grado

Del interpolador se obtiene un sistema de ecuaciones de 4 incógnitas (a, b, c y d):

	a	b	c	d	y
d	8,57661E+19	1,94481E+13	4410000	1	1165978
e	1,12679E+20	2,33289E+13	4830000	1	1329190
f	1,44703E+20	2,75625E+13	5250000	1	1501474
G	1,82284E+20	3,21489E+13	5670000	1	1682830

Tabla 5. Sistema de Ecuaciones

Para encontrar las cuatro incógnitas se hace uso del método numérico de la Eliminación ***Gauss-Jordan***, el cual nos permite obtener los siguientes resultados:

Input interpretation:

$$\text{row reduce} \begin{pmatrix} 4410000^3 & 4410000^2 & 4410000 & 1 & 1165978 \\ 4830000^3 & 4830000^2 & 4830000 & 1 & 1329190 \\ 5250000^3 & 5250000^2 & 5250000 & 1 & 1501474 \\ 5670000^3 & 5670000^2 & 5670000 & 1 & 1682830 \end{pmatrix}$$

Result:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{9}{350000000} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{151}{1000} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -26 \end{pmatrix}$$

Ilustración 4. Resultado eliminación Gauss-Jordan en Wolfram

Por lo tanto, el polinomio de segundo grado que satisface las condiciones es:

$$y = (2.57143 \times 10^{-8})x^2 + 0.151x - 26$$

Si se reemplaza los valores de x por 5000000, se obtiene que la cuota íntegra con esta base imponible es:

$$\left(\left(2.57143 \times 10^{-8}\right) \times 5000000^2\right) + \left(0.151(5000000)\right) - 26 = 1397831.5$$

Código Fuente:

Para poder hallar las incógnitas que forman el polinomio interpolador de tercer, el código implementado fue:

```
incognitasCu<-matrix(c(4410000^3, 4410000^2, 4410000, 1,
                       4830000^3, 4830000^2, 4830000,1,
                       5250000^3, 5250000^2, 5250000, 1,
                       5670000^3, 5670000^2, 5670000, 1),4, 4, byrow=TRUE)

resultadosCu<- c(1165978,1329190, 1501474, 1682830)

gaussianElimination(incognitasCu, resultadosCu)

mCubico <- gaussianElimination(incognitasCu, resultadosCu)


cat(mCubico[1,5], "x^3 + (", mCubico[2,5], ")x^2 + (", mCubico[3,5], ")x + (", mCubico[4,5], ")")
```

Ilustración 5. Código Interpolador tercer grado

El resultado al ejecutar el anterior código fue:

```
> gaussianElimination(incognitasCu, resultadosCu)
              [,1] [,2] [,3] [,4]      [,5]
[1,]  1.000000e+00    0    0    0  0.00e+00
[2,]  5.000000e-08    1    0    0  3.00e-08
[3,] -2.573003e+00    0    1    0  1.51e-01
[4,]  4.137984e+06    0    0    1 -2.60e+01
>
> mCubico <- gaussianElimination(incognitasCu, resultadosCu)
>
>
> cat(mCubico[1,5], "x^3 + (", mCubico[2,5], ")x^2 + (", mCubico[3,5], ")x + (", mCubico[4,5], ")")
0 x^3 + ( 3e-08 )x^2 + ( 0.151 )x + ( -26 )
```

Ilustración 6. Resultados

Se implementó el siguiente código para obtener una gráfica a partir del conjunto de puntos brindados en el enunciado:

```
par(mar=c(1,1,1,1))

x<-c(4410000, 4830000, 5000000, 5250000, 5670000)

y<-c(1165978, 1329190, 1397831, 1501474, 1682830)

windows()

plot(x,y,main = "Gráfica Reporte", asp = 1,  type='o', col="blue",
     xlab = "Base Imponible", ylab = "Cuota Íntegra", axes = TRUE)

lines(x,y, lwd = 2, col = "red")
```

Ilustración 7. Código Gráfico 1

La gráfica resultante fue:

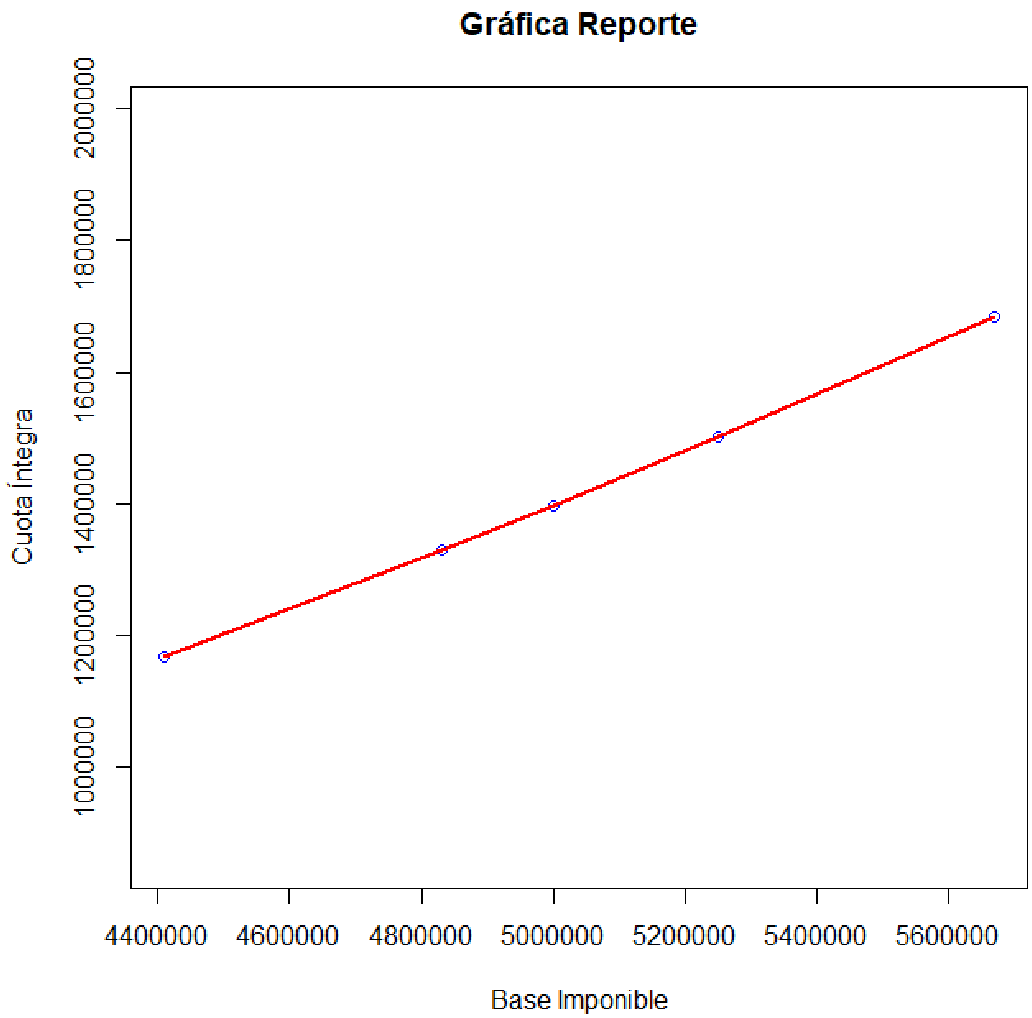

Gráfico 1. Puntos del enunciado

También se implementó el siguiente código para obtener una gráfica a partir del polinomio obtenido en el proceso de interpolación:

```
par(mar=c(1,1,1,1))

windows()

curve((3e-08)*x^2+(0.151)*x-26, main = "Gráfica Reporte", from = 4410000, to= 5670000,
      type = "l", col ="blue", xlab = "Base Imponible", ylab ="Cuota Íntegra", axes = TRUE,
      xlim = c(4400000,5700000), ylim = c(1000000, 2000000))
```

Ilustración 8. Código Gráfico 2

La gráfica resultante fue:

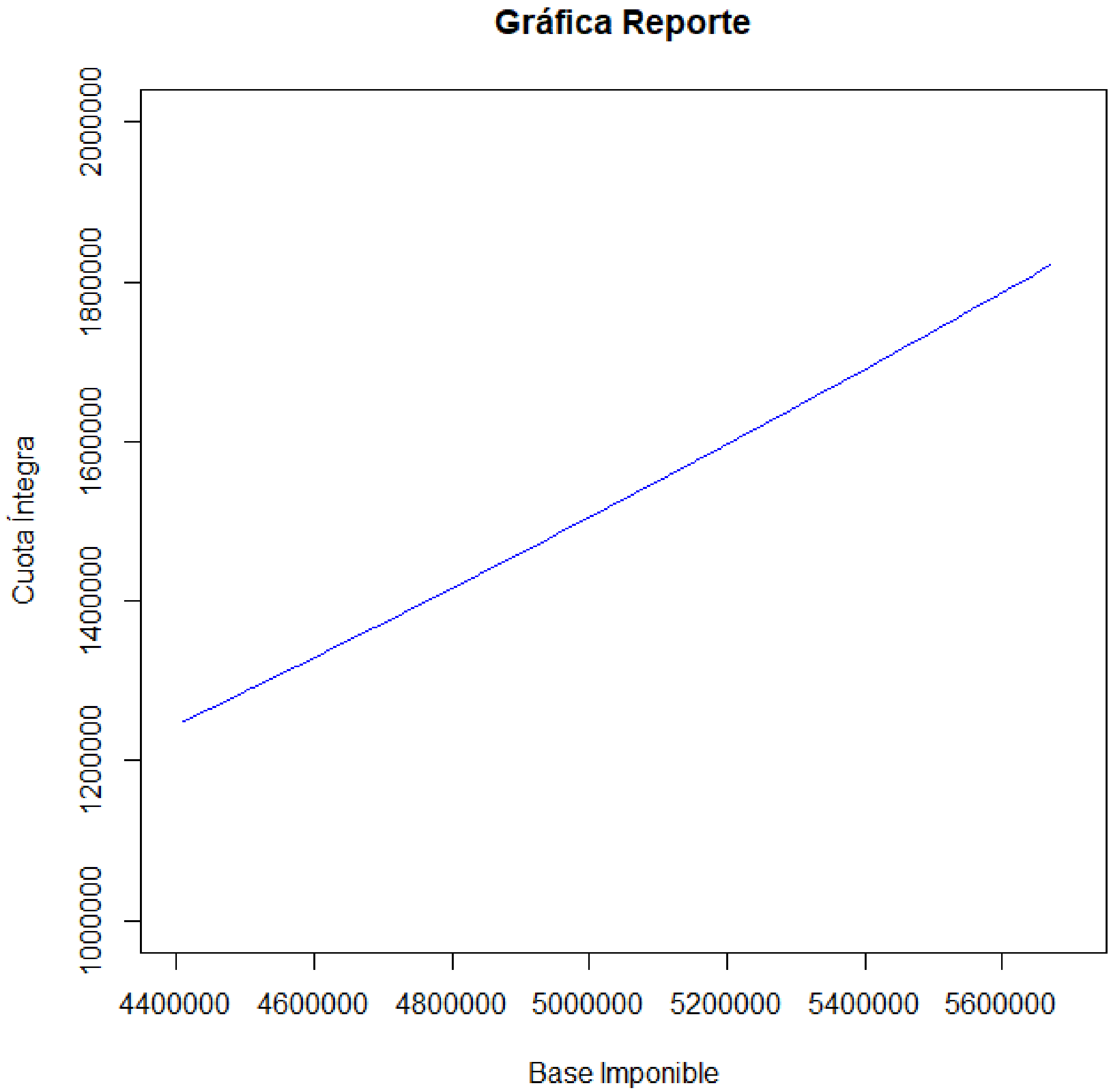

Gráfico 2. Interpolador

Conclusiones

- En este caso, es necesario para cada grado tomar la base imponible más próxima a 5 millones debido a que el método de interpolación permite calcular los valores intermedios de un intervalo, y al tomar el grado imponible más próximo a 5 millones, estamos asegurando que este valor se tenga en cuenta.
- Como se puede observar en la Gráfica 1 y la Gráfica 2, a pesar de que fueron generadas de diferentes maneras (tal como es mencionado anteriormente), los resultados en las gráficas en el intervalo [4400000, 5700000], fueron similares. Comprobando así que, independientemente del grado de interpolación, el polinomio siempre será el mismo.
- Se puede observar que al reemplazar 5000000 en los dos polinomios obtenidos, se puede ver que el valor de la cuota íntegra es el mismo.