El péndulo: Resumen de página de wikipedia

Estefania Eng Duran

28 de enero de 2016

1. Péndulo simple

Se le llama péndulo simple porque es una idealización del ”péndulo real”. Un modelo idealizado asume hechos sobre los fenómenos que son ciertamente falsos pero aun así nos permite entender, describir e interpretar un fenómeno de la naturaleza. En este caso suponemos que

- La cuerda o varilla en donde se mece el cuerpo carece de masa y no varía en su longitud
- El cuerpo es una masa puntual
- El movimiente ocurre solo en dos dimensiones, o sea, el cuerpo no traza una elipse sino un arco
- No se pierde energía por fricción o resistencia del aire
- El campo gravitacional es uniforme
- El punto de soporte es inmóvil

La ecuación diferencial que describe al péndulo simple es

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

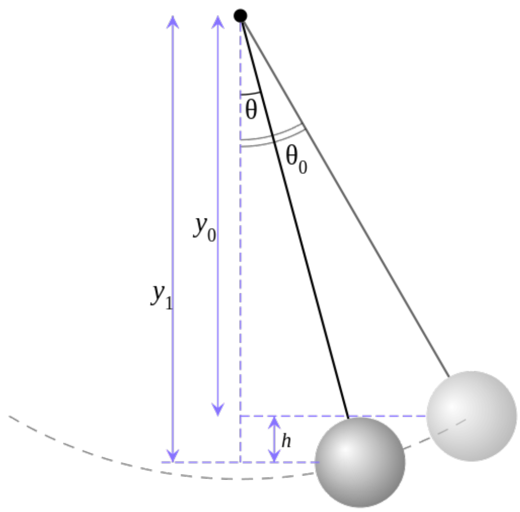

Figura 1: Trigonometría del péndulo simple.

donde g es la aceleración debido a la gravedad, ℓ es la longitud del péndulo y θ es la enlongación angular, o sea, el ángulo que forma la varilla con la vertical.

Existen diferentes maneras de derivar la ecuación anterior. A continuación la vamos a encontrar usando el principio de conservación de energía mecánica. Cualquier objeto que caiga una distancia vertical h obtendrá energía cinética igual a la energía potencial que perdió en esa caida. El cambio en energía potencial está dado por

$$\Delta U = mgh$$

el cambio en la energía cinetica, considerando que el cuerpo parte del reposo, es

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2$$

Como no hay pérdida de energía, el cambio en la energía potencial debe ser igual al cambio en la energía cinética

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

el cambio en la velocidad para un cambio en altura dado puede expresarse como

$$v = \sqrt{2gh}$$

.

Usando la fórmula para longitud de arco s

$$s = \ell\theta$$

mostrada arriba, esta ecuación se puede reescribir en términos de $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

$$v = \ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gh}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\ell}\sqrt{2gh}$$

aquí h es la distacia vertical que el péndulo cayó. Obsérvese la figura 1, si el péndulo empieza su trayectoria desde un ángulo inicial θ_0, entonces y_0, la distancia vertical desde el punto de soporte, está dado por

$$y_0 = \ell\cos\theta_0$$

de manera similar, para y_1, tenemos

$$y_1 = \ell\cos\theta$$

entonces h es la diferencia entre las dos

$$h = \ell\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)$$

en términos de $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

Esta ecuación se conoce como la primera integral de movimiento. Nos da la velocidad en términos de la posición e incluye una constante de integración relacionada a la elongación inicial (θ_0). Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\frac{-(2g/\ell)\sin\theta}{\sqrt{(2g/\ell)\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2}\frac{-(2g/\ell)\sin\theta}{\sqrt{(2g/\ell)\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)}}\sqrt{\frac{2g}{\ell}\left(\cos\theta - \cos\theta_0\right)} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

es el mismo resultado que utilizando análisis de fuerza.

2. Oscilaciones pequeñas

La ecuación diferencial mostrada arriba es difícil de resolver y no tiene solución que pueda ser expresada en términos de funciones elementales. Si consideramos tan sólo oscilaciones de pequeña amplitud, de modo que el ángulo θ sea siempre suficientemente pequeño, entonces el valor de $\sin\theta$ será muy próximo al valor de θ expresado en radianes ($\sin\theta \approx \theta$, para θ suficientemente pequeño). Usando esta aproximación, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

que es la ecuación del oscilador armónico. La solución es

$$\theta = \Theta\sin(\omega t + \phi)$$

siendo ω la frecuencia angular de las oscilaciones, a partir de la cual determinamos el período de las mismas

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \Rightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Las magnitudes Θ, y ϕ, son dos constantes arbitrarias (determinadas por las condiciones iniciales) correspondientes a la amplitud angular y a la fase inicial del movimiento.

3. Oscilaciones de mayor amplitud

La integración de la ecuación del movimiento, sin la aproximación de pequeñas oscilaciones, es considerablemente más complicada e involucra integrales elípticas de primera especie, por lo que omitimos el desarrollo que llevaría a la siguiente solución [1]

$$T\left(\theta\right) = T_0 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \sin^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

donde θ, es la amplitud angular. Así pues, el periodo es función de la amplitud de las oscilaciones.

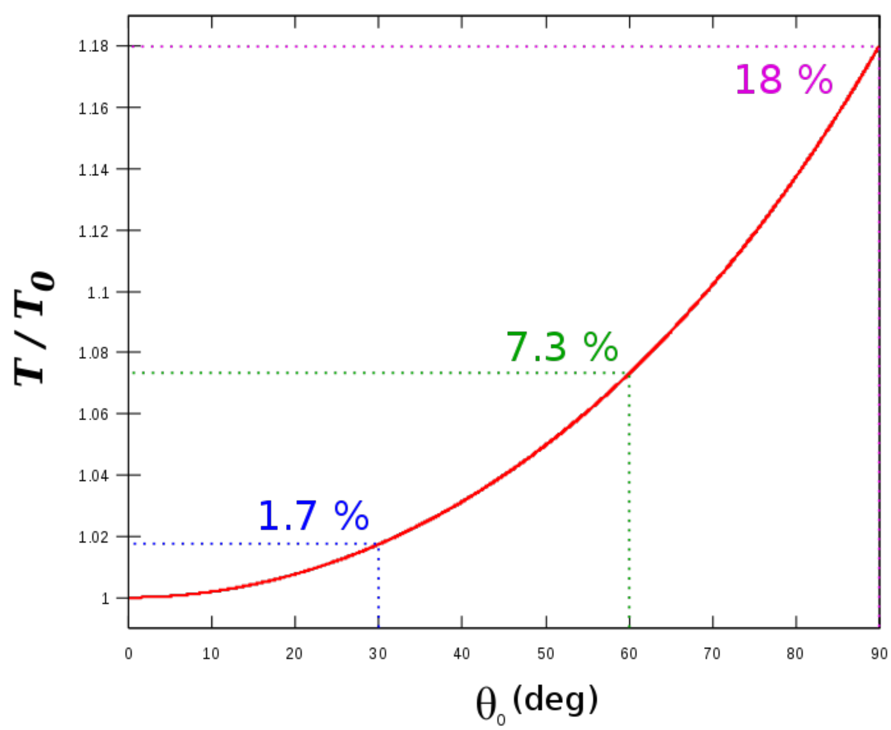

Figura 2: Dependencia del período del péndulo con la amplitud angular de las oscilaciones.

En la Figura hemos representado gráficamente la variación de T (en unidades de T_0) en función de θ, tomando un número creciente de términos en la expresión anterior. Se observará que el periodo T difiere significativamente del correspondiente a las oscilaciones de pequeña amplitud (T_0) cuando $\theta > 20^\circ$. Para valores de θ suficientemente pequeños, la serie converge muy rápidamente; en esas condiciones será suficiente tomar tan sólo el primer término correctivo y sustituir $\sin\theta/2$ por $\theta/2$, de modo que tendremos

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16}\right)$$

donde θ se expresará en radianes. Esta aproximación resulta apropiada en gran parte de las situaciones que encontramos en la práctica; de hecho, la corrección que introduce el término $\theta^2/16$ representa menos de $0.2\,\%$ para amplitudes inferiores a 10°.

Para oscilaciones de pequeña amplitud, las expresiones anteriores se reducen a

$$T \approx T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Referencias

[1] Nelson, Robert; M. G. Olsson, *The pendulum — Rich physics from a simple system*, American Journal of Physics 54 (2): pp. 112–121. February 1986.

[2] Marion, Jerry B. *Dinámica clásica de las partículas y sistemas*, Editorial Reverté, Barcelona, 1996.