

Laboratorio: Lanzamiento de proyectiles

Andrés Felipe Cuervo Torres, Estefanía Laverde Becerra, Paula Lorena López
Romero

Matemáticas Aplicadas y Ciencias de la Computación

Universidad del Rosario

6 de septiembre de 2021

Abstract. En este laboratorio, se analizará y describirá mediante simulaciones el movimiento parabólico de un proyectil. El movimiento del objeto será mostrado como una partícula con una aceleración constante, donde consecuentemente, se tendrá en cuenta la aceleración gravitacional. Para su ejecución, se tendrán en cuenta las ecuaciones cinemáticas y *AppDesigner* en *MatLab* para la simulación dinámica. Por otro lado, se estudiarán los diferentes comportamientos que puede tener la partícula dependiendo de sus condiciones iniciales.

Keywords: *tiempo de vuelo, altura máxima, alcance horizontal.*

1. Introducción

En cinemática, la suma vectorial del movimiento horizontal uniforme con el movimiento vertical rectilíneo, se conoce como movimiento parabólico. Este se caracteriza por la trayectoria curva que tiene el objeto al ser lanzado desde un punto. Para describir el movimiento del objeto, debemos considerar otras variables importantes, las cuales nos dan pa-

so a las ecuaciones cinemáticas.

De esta manera, tendremos en cuenta ciertos conceptos acerca de las componentes del objeto en movimiento. Se hablará y explicarán conceptos como tiempo de vuelo, altura máxima, alcance horizontal.

2. Marco teórico

Para empezar, debemos considerar el vector de posición del objeto. Así, describiremos el movimiento de este en el espacio. Ahora bien, el vector posición es un vector que va del origen del sistema de coordenadas hasta el destino. Este movimiento consiste en lanzar el objeto con una velocidad inicial V_0 , con un ángulo de salida θ . El objeto al ser lanzado, tendrá un desplazamiento parabólico causado por la gravedad.

Luego, partiendo de las ecuaciones de posición, se hallaron las demás ecuaciones cinemáticas:

Ecuaciones sobre el eje x

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (1)$$

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad (2)$$

Ecuaciones sobre el eje y

$$v_y = v_{0y} - a_y t \quad (3)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}a_y t^2 \quad (4)$$

en donde, a es la aceleración, v es la velocidad total, v_0 es la velocidad inicial, t es el tiempo, x e y son las distancias totales, mientras que x_0 e y_0 son las distancias iniciales.

Ahora bien, con el movimiento parabólico solo tenemos en cuenta la gravedad. Esto quiere decir que, la aceleración estaría dada por:

$$a_x = 0 \quad a_y = -g$$

Luego,

$$v_x = v_{0x} \quad (5)$$

$$x = x_0 + v_{0x}t \quad (6)$$

Por otro lado,

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t \quad (7)$$

$$x = x_0 + v_{0x}t - \frac{1}{2}g \cdot t^2 \quad (8)$$

La velocidad inicial en el eje x y eje y son:

$$V_{0y} = v_0 \sin(\theta) \quad (9)$$

$$V_{0x} = v_0 \cos(\theta) \quad (10)$$

3. Análisis numérico

- Tiempo para alcanzar la altura máxima

¿Qué es? El tiempo de altura máxima, se define como el tiempo que le toma a un proyectil llegar a la altura máxima de vuelo.

Pregunta ¿Cuál es el criterio más apropiado para calcular el tiempo de altura máxima de un proyectil?

Rta: Usando las ecuaciones cinemáticas y despejando el tiempo (t), teniendo en cuenta que $v_y = 0$ en el momento en el que se alcanza la altura máxima se va a encontrar el t para la altura máxima.

Pregunta

Usando las ecuaciones cinemáticas de movimiento, calcule de forma algebraica el tiempo de altura máxima, el cual debe quedar expresado en términos de g , v_0 , y θ únicamente, asuma que la $v_y = 0$ en la altura máxima. Identifique este valor en la simulación de *Matlab*.

Rta: Utilizando la ecuación (7) y teniendo en cuenta que $v_y = 0$, podemos decir que

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} - gt \\ 0 &= v_0 \sin(\theta) - gt \\ t &= \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} \end{aligned} \quad (11)$$

Pregunta

¿Para qué ángulo se obtiene el mayor tiempo de altura máxima?. Represente por lo menos 3 simulaciones con ángulos iniciales diferentes

Rta: Ahora derivamos la función de t para la altura máxima y lo igualamos a 0 para obtener el ángulo teniendo en cuenta que

$$v_0 \neq 0$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{v_0 \sin(\theta)}{g} = 0$$

De esta manera, tenemos que

$$v_0 \cos(\theta) = 0$$

$$\cos(\theta) = 0$$

$$\theta = 90^\circ$$

En las siguientes imágenes se mostrarán 3 simulaciones con ángulos distintos cada una.

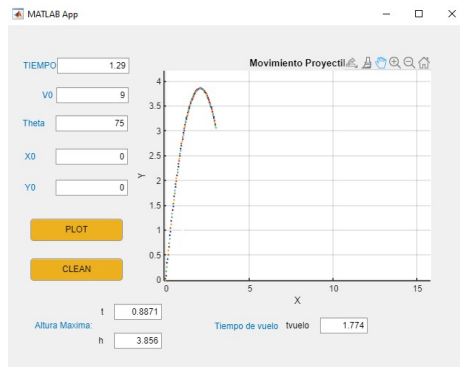


Figura 1

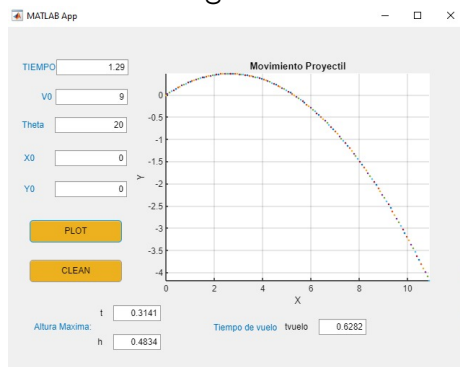


Figura 2

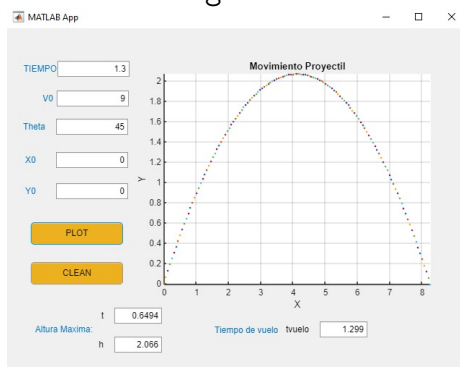


Figura 3

■ Tiempo de vuelo

¿Qué es?

El tiempo de vuelo total de un proyectil, o tiempo de vuelo, se define como el tiempo total durante el cual el proyectil permanece en el aire.

Preguntas

¿Cuál es el criterio(s) más apropiado para calcular el tiempo de vuelo total de un proyectil?

Rta: Usando las ecuaciones cinemáticas y despejando t teniendo en cuenta que $y_0 = y_f = 0$

Preguntas

Usando las ecuaciones cinemáticas de movimiento, calcule de forma algebraica el tiempo total de vuelo de un proyectil, el cual debe quedar expresado en términos de g , v_0 y θ únicamente. Asuma que la $y_0 = y_f = 0$ en la posición.

Rta: Note que:

$$y_0 = y_f = 0$$

y

$$v_{0x} = v_0 \cos(\theta) \quad v_{0y} = v_0 \sin(\theta)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = 0 + v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{1}{2}gt^2 = v_0 \sin(\theta)t$$

$$t = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g}$$

Pregunta ¿Para qué ángulo se obtiene el mayor tiempo en vuelo?

Rta:

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{2v_0 \cos(\theta)}{g^2}$$

$$0 = \cos(\theta)$$

$$\theta = 90^\circ$$

El tiempo de vuelo aumenta si el ángulo aumenta

■ Altura máxima

¿Qué es?

La altura máxima que un proyectil puede alcanzar es el máximo alcanzado durante su movimiento, que es parabólico. En otras palabras el máximo de la parábola

Preguntas

¿Cuál es el criterio más apropiado para calcular la altura máxima en el movimiento de un proyectil?

Rta: Usando ecuaciones y despejando el resultado, teniendo en cuenta que en la altura máxima la velocidad tiene un valor de 0, tenemos que:

$$V_y = V \cdot \cos(\theta)$$

Y la ecuación para la velocidad es:

$$V = V_0 + g \cdot t$$

Luego en la altura maxima, como $V=0$ entonces:

$$0 = V_0 + g \cdot t$$

Y así podemos despejar el valor del tiempo, con lo que se obtiene que en la altura máxima, el tiempo esta dado por

$$t = \frac{V_0 \cdot \cos(\theta)}{g}$$

Pregunta ¿Para qué ángulo se obtiene la altura máxima?

Rta:

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{V_0 \cdot \sin(\theta)}{g} = 0$$

$$\sin(\theta) = 0$$

$$\theta = 0$$

■ Alcance horizontal

¿Qué es?

El alcance horizontal R o rango de un proyectil se define como la distancia máxima horizontal que alcanza un proyectil.

Pregunta

¿Cuál es el criterio(s) más apropiado para calcular el alcance máximo horizontal en el movimiento de un proyectil?

Rta: Usando ecuaciones cinemáticas se despeja el alcance horizontal que es Δx

Pregunta Usando las ecuaciones cinemáticas de movimiento, calcule de forma algebraica el alcance máximo del proyectil, la cual debe quedar expresada en términos de g , v_0 y θ únicamente, asuma que la

$x = R$ y que t es el tiempo de vuelo total en la posición.

Rta: Note que,

$$x = x_0 + v_{0x}t$$

$$R = x - x_0 = v_0 \cos(\theta)t$$

$$R = v_0 \cos(\theta) \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g}$$

$$R = \frac{v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g}$$

Pregunta ¿Para qué ángulo se obtiene el mayor alcance horizontal?

Rta: Tenemos que,

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g} \cos(2\theta) = 0$$

Sea $v_0 \neq 0$

$$\frac{v_0^2}{g} \cos(2\theta) = 0$$

$$\theta = 45^\circ$$

4. Conclusiones

En este laboratorio, se halló la forma algebraica de calcular el tiempo para alcanzar la altura máxima, el tiempo total de vuelo, la altura máxima y el alcance horizontal de un proyectil. Esto es importante para estudiar el comportamiento del movimiento de un proyectil y usar esto para aplicaciones. Un ejemplo en el que se requiere predecir el movimiento es un cohete con una velocidad inicial, un ángulo y la gravedad. Además, se realizaron experimentos y simulaciones con la ayuda de matlab que reafirmaban los resultados obtenidos de forma teórica.

Referencias

- [1] HUGH.D Y ROGER A.FREEDMAN
FÍSICA UNIVERSITARIA, decimosegunda edición México, DF, 2009.
- [2] <https://www.fisicalab.com/apartado/movimiento-parabolico>
- [3] https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_parabólico