III Parcial
Ecuaciones Diferenciales

Estefanía Laverde
Universidad del Rosario

Noviembre 2021, Bogotá D.C.

1. Introducción

En este documento se pretende solucionar de manera numérica el problema depredador-presa dado un sistema de ecuaciones diferenciales y un punto inicial; específicamente, el problema

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - 0{,}5y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-0{,}75 + 0{,}25x)$$

Para ello, se han implementado en Matlab [2] los algoritmos de Euler y Runge-Kutta[3] en dos dimensiones.

Para tener un mejor entendimiento del tema, las ecuaciones que determinan el problema de predador-presa, más conocidas como las ecuaciones de Lotka-Volterra, desarrolladas entre los años 1925 y 1926 caracterizan de manera general el comportamiento de dos especies, una de depredadores y otra de presas que conviven en un entorno cerrado. Es importante notar que sin presencia de depredadores, el número de presas crece proporcionalmente a su población inicial, y en ausencia de presas, los predadores mueren hasta llegar a una cantidad de 0.

2. Comparación de métodos

Lo primero que se va a realizar a continuación es una comparación de los resultados obtenidos utilizando las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $y_0 = 1$ con el método de Euler y con el método de Runge-Kutta. Para ello, con los resultados obtenidos del programa tenemos las siguientes gráficas:

Como se puede observar, el tamaño del paso (h) influencia más en el resultado de la aproximación con Euler, por ello las gráficas varían significativamente con cada valor de h ya que

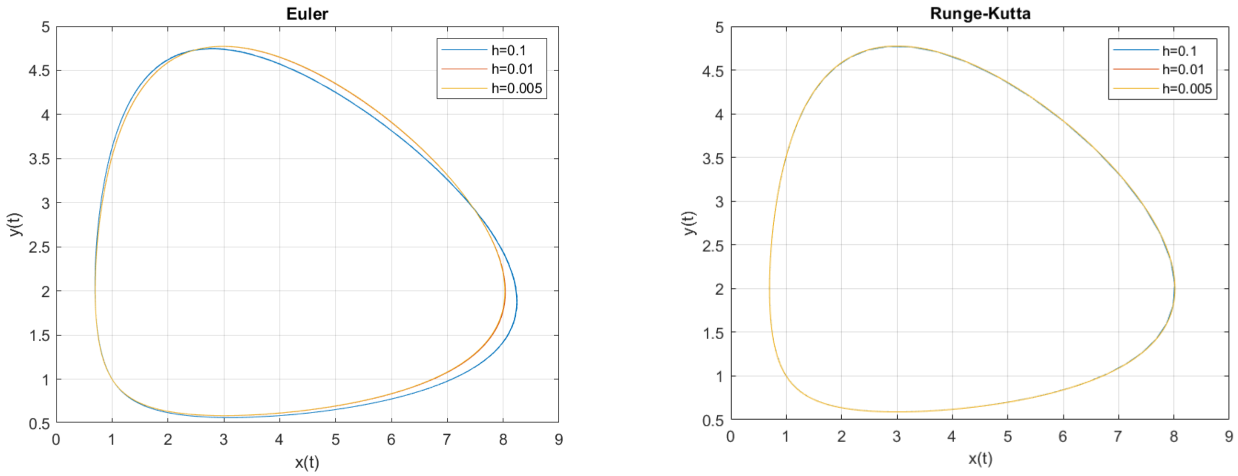

Figura 1: Comparación de métodos

dependiendo de este, los resultados del algoritmo son más o menos precisos. Por el otro lado, con el método de Runge-Kutta los resultados no varían tanto dependiendo de la h, como se puede ver en los resultados de la gráfica. Esto es debido a que dicho método es más preciso que el de Euler.

3. Resultados en cada punto

En esta sección se mostrará cada gráfica de los resultados para los puntos expuestos en el enunciado del ejercicio usando únicamente Runge-Kutta, ya que, como se vio anteriormente, es el método que otorga las mejores aproximaciones a la solución.

3.1. Punto(1,1)

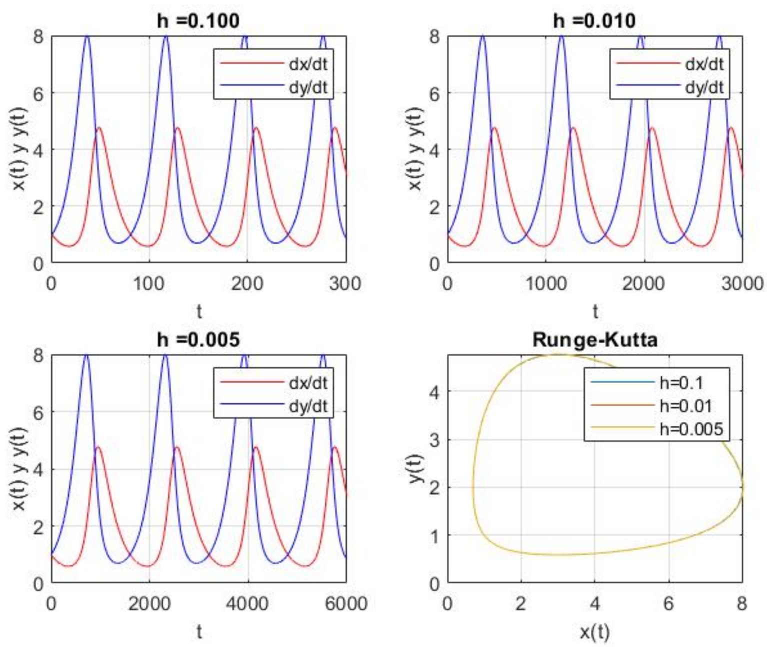

Figura 2: Resultados en (1,1)

3.2. Punto(2,1)

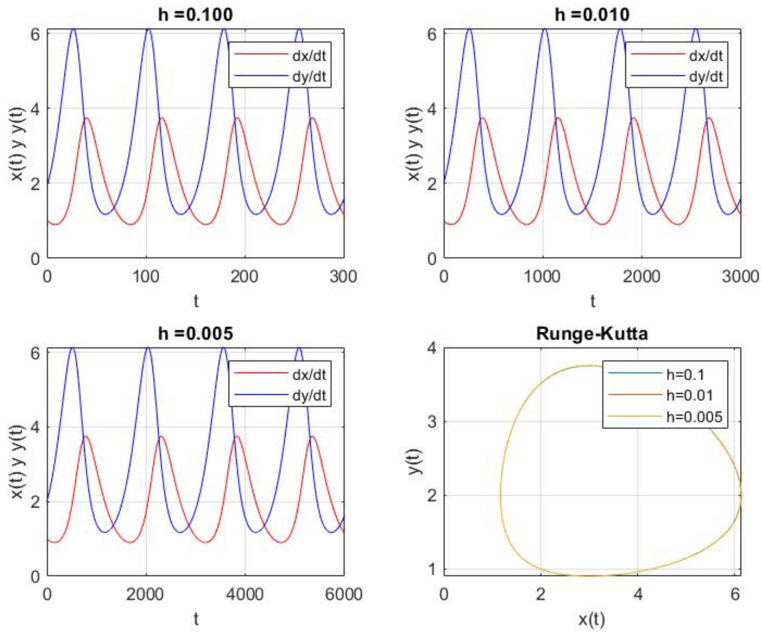

Figura 3: Resultados en (2,1)

3.3. Punto(3,2)

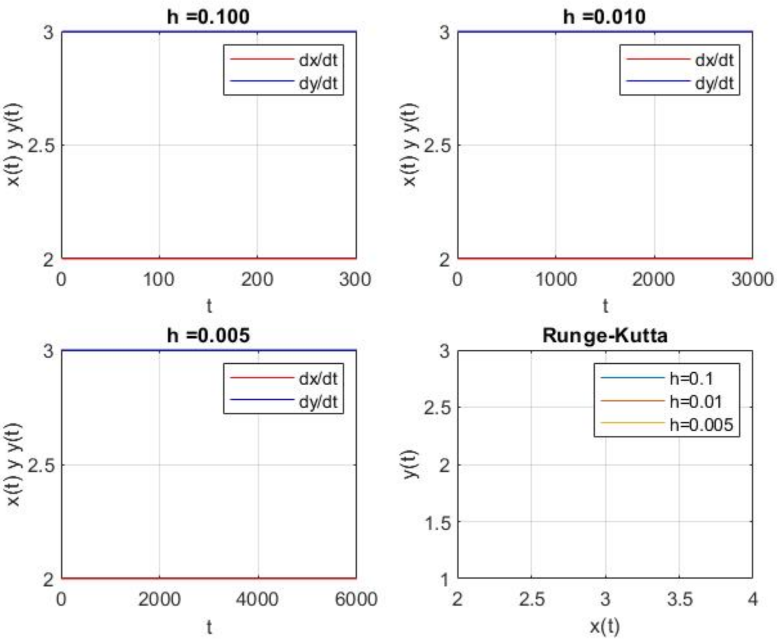

Figura 4: Resultados en (3,2)

3.4. Punto(4,3)

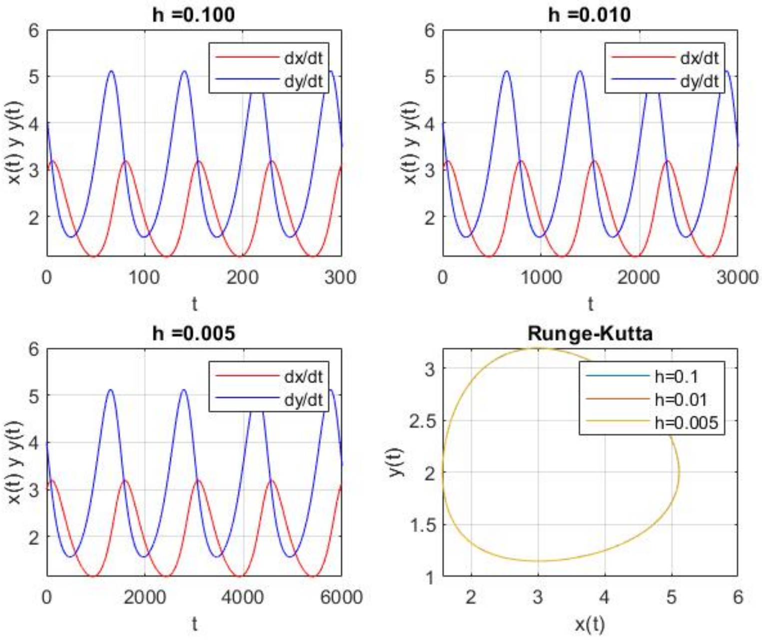

Figura 5: Resultados en (4,3)

3.5. Punto(6,2)

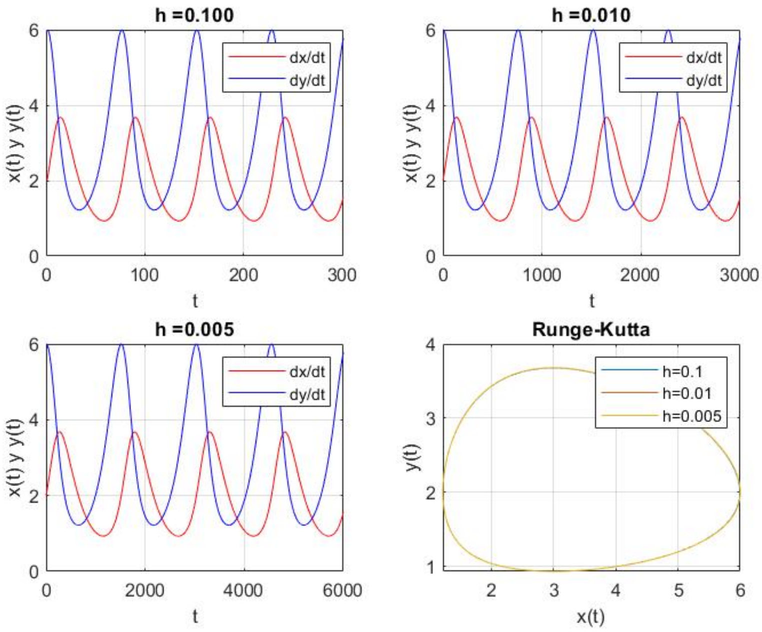

Figura 6: Resultados en (6,2)

4. Ejercicio de clase

Para el ejercicio de clase se utilizó el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x(3 - 1{,}5y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-1 + \frac{1}{3}x)$$

Con el punto inicial $(1, 1)$, y los resultados de las gráficas fueron las siguientes:

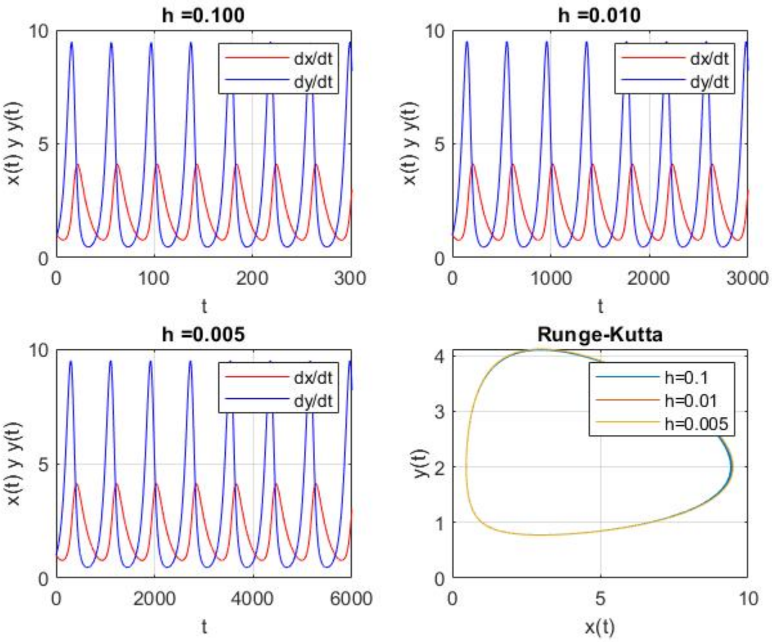

Figura 7: Resultados del ejercicio de clase

5. Conclusiones

Como se puede observar, cada una de las gráficas de x(t) y y(t) con respecto al tiempo denotan el comportamiento de la población de depredadores ($\frac{dy}{dt}$) con la de predadores ($\frac{dx}{dt}$), y es posible ver que, independientemente a las condiciones iniciales, las cantidades de cada población varían proporcionalmente de manera sinusoidal, con un periodo de $2\pi/0{,}75$ en el caso de las primeras ecuaciones, y con un periodo de 2π con el ejercicio en clase, esto calculado con ayuda del libro guía [1]. Comparando ambos periodos es posible notar que el primer modelo repite el ciclo en un tiempo mayor al del segundo modelo, lo cual es observable en las gráficas dado que las primeras tienen menos picos que la última en el mismo periodo de tiempo.

Por otro lado con respecto a las gráficas, con las condiciones iniciales (3,2) se evidencia que las poblaciones se mantienen continuas en el tiempo. Este fenómeno es debido a que en este punto, al igual que en (0,0), las ecuaciones se vuelven 0, creándose un punto de equilibrio. Sin embargo este punto de equilibrio es inestable, puesto que si varia mínimamente la condición, por ejemplo con (3.01,1.99), se empezarán a ver variaciones sinusoidales en las gráficas.

Otra observación que se puede realizar es el hecho de que cada gráfica de y(t) con respecto a x(t) representa una curva de nivel del sistema. Esto es mas sencillo de notar si se grafican todas las curvas en una sola gráfica como se muestra a continuación:

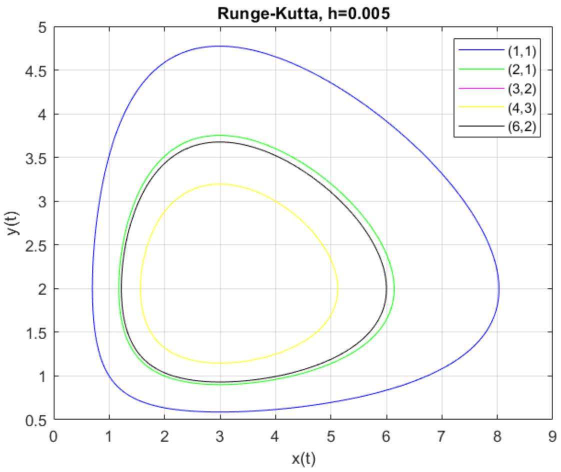

Figura 8: Runge-Kutta, curvas de nivel

Además, es importante resaltar que en el primer ejercicio, ambas poblaciones tienen un desfase de cuarto de cíclo con cualquier valor que tomen las condiciones iniciales, y con cualquier valor que tomen los coeficientes de las ecuaciones (desde que cumplan la descripción de las ecuaciones de Lotka-Volterra). Biológicamente, el desfase se debe a que se parte de un punto inicial donde hay pocos individuos de cada especie, las presas comienzan a aumentar debido a la poca depredación. Luego, como los predadores tienen abundante comida, esta población crece y la de depredadores disminuye, hasta que llega un punto donde hay mas depredadores que presas, por lo que empiezan a decrecer y las presas a crecer, y así se repite el ciclo a lo largo del tiempo.

El paso siguiente que se debería dar una vez que se tenga el método para resolver las ecuaciones, es buscar un método de calcular de forma eficiente y veraz los coeficientes de la ecuación, o de adaptarla de forma que tenga más en cuenta otros aspectos importantes en la relación entre las especies; ya que a pesar de que el modelo funciona de manera relativamente sencilla, en él no se tienen en cuenta, por ejemplo, la existencia de más poblaciones o la afectación del entorno en el que habitan en su alimentación y reproducción, por lo que no se puede decir que verdaderamente interpretan las relaciones entre estas poblaciones.

6. Repositorio con el código

https://github.com/EstefaniaLaverde/ecuaciones_dif_p3

Referencias

[1] William Boyce, Richard Diprima y Douglas Meade. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 11th ed. Wiley, 2017.

[2] *MATLAB Documentation*. URL: https://www.mathworks.com/help/matlab/.

[3] Alfa Teorema. *Ejemplo de Runge-Kutta de orden 2*. Nov. de 2012. URL: https://www.youtube.com/watch?v=pOTwV3kCxdw.