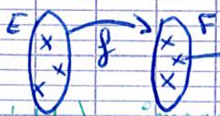
$\forall$: "quelque soit" ou "pour tout"
$\exists$: "il existe"
$\exists!$: "il existe un unique"

Injection / surjection / bijection

f désigne une fonction de l'ensemble E vers l'ensemble F

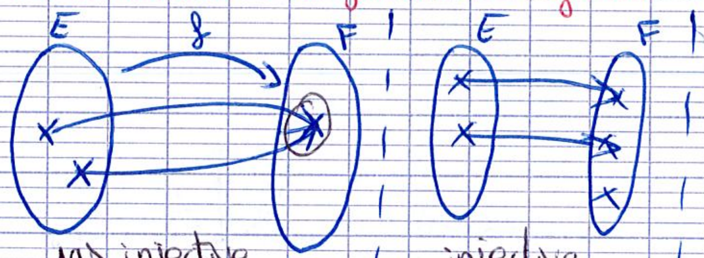


antécédent   image

Injection

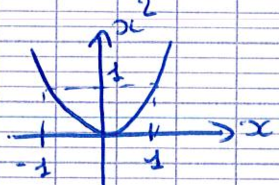
$\forall y \in F$, $\exists$ au plus un $x \in E$, $f(x) = y$ ①
ou
$\forall x, x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ ②
$\forall x, x' \in E$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ (contraposée de ②)

① ça veut dire qu'une image admet 1 seul antécédent ou 0 antécédent
② ça veut dire : si pour 2 antécédents leurs images sont identiques alors les antécédents sont forcément égaux.



pas injective | injective

ex :

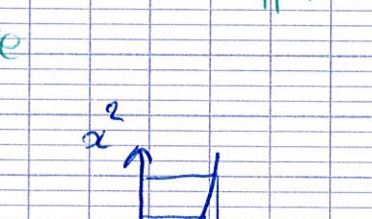


pas injective car 1 et -1 ont la même image

Q° à se poser :

Est-ce que je peux trouver 2 antécédents différents qui ont la même image ?
→ oui ⇒ pas injective
→ non ⇒ injective

ex(bis) : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$x \to x^2$



est injective car "coupée" sur ces intervalles, il y a 1 seul antécédent x par image $f(x)$

démonstrations :

On montre que $\forall x, x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 3x + 1$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x_1) = f(x_2)}$
$3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$
$3(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$ injective.

$y = f(x) \longrightarrow f^{-1}(y) = x$

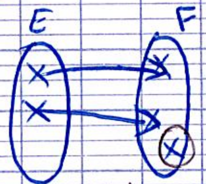
Sujection

ou $\begin{cases} \forall y \in F, \exists \text{ au moins un } x \in E, f(x) = y & (1) \\ \forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y & (2) \\ \forall y \in F, f^{-1}(\{y\}) = \emptyset & (3) \end{cases}$

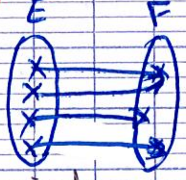
↑ ensemble non vide

(1) : Ttes les images ont au moins un antécédent

(3) : Ttes les images ont 1 antécédent



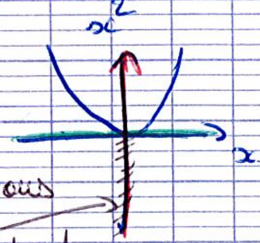
pas surjective



surjective (mais pas injective)

ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$

pas surjective car tous les éléments ici n'ont pas d'antécédent



Q° à se poser :

Est-ce que je peux trouver 1 image qui n'a pas d'antécédent ?

→ oui ⇒ pas surjective

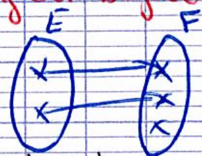
→ non ⇒ surjective

ex (bis) : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \to x^2$

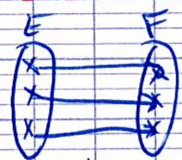
surjective car toutes les images ont au moins un antécédent

Bijection

ou $\begin{cases} \forall y \in F, \exists \text{ un et un seul } x \in E, f(x) = y \\ \forall y \in F, \exists! \, x \in E, f(x) = y \\ f \text{ est bijective si elle est à la fois surjective et injective} \end{cases}$

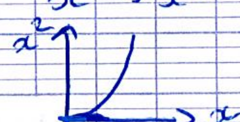


pas bijective car pas surjective



surjective

ex : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \to x^2$



surjective.