

Calcul Algébrique

Propriétés à savoir : * $x^0 = 1$ avec $x \neq 0$
ex : $5^0 = 1$; $7^0 = 1$; $64^0 = 1$; $1^0 = 1$

* $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

ex : $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

* $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

ex : $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}} = 5$

$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125 \Rightarrow \sqrt[3]{125} = 5$
comme $x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$
($5^2 = 25 \Rightarrow 5 = \sqrt{25}$)

* $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$

ex : $2^1 \times 2^2 = 2^3 = 8$; $5^3 \times 5^5 = 5^{3+5} = 5^8$

* $(x^n)^m = x^{n \times m}$

ex : $(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6 = 64$
preuve : $2^2 = 4 \Rightarrow (2^2)^3 = 4^3 = 64$

* $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$

ex : $\frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$
preuve : $\frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$

* $\prod_{i=1}^n i = \underbrace{i \times i \times i \times \dots \times i}_{n \text{ fois}} = i^n$

* $\sum_{k=0}^n (5 \cdot k) = \sum_{k=0}^n (5) - \sum_{k=0}^n k$
 $= 5 \sum_{k=0}^n 1 - \sum_{k=0}^n k$
 $= 5(1+1+\dots+1) - \sum_{k=0}^n k$
 $= 5(n+1) - \frac{n(n+1)}{2}$
ici k est l'indice des sommes donc elles ne portent que sur k

Triangle de Pascal

$(a+b)^n$
 $(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$
 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
etc

alors que les puissances de b ↑ (et on commence et finit à 3)

autre ex : $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + b^2 + c^2$
 $(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ac^2 + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + b^3 + c^3$
quand il y a plus de 2 nbs comme ici : a, b, c ; il vaut mieux prendre son temps et développer. Le triangle de Pascal est exact que pour $(a+b)^n$

Sommes et produits

* indices muets : $\sum_{k=1}^n (k^2 + 3) = \sum_{i=1}^n (i^2 + 3) = (1^2 + 3) + (2^2 + 3) + \dots + (n^2 + 3)$
c'est sur k ou i que porte la somme
k est un indice muet \Rightarrow il peut s'appeler n'importe quel nom
n+2 \leftarrow car i=n, i doit valoir n+2
i est un indice muet, on peut l'appeler en fait n'importe quel nom
i va de 1 à n
 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i+2} = \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i}$
car i=1 alors i doit valoir 3

$\sum_{k=0}^n (k+n) = \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n n$