# Calcul Algébrique

## Propriétés à savoir :

* $x^0 = 1$ avec $x \neq 0$
  ex : $5^0 = 1$ ; $7^0 = 1$ ; $64^0 = 1$ ; $1^0 = 1$

* $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
  ex : $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ; $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

* $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
  ex : $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ; $\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}} = 5$
  $\to 5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125 \Rightarrow \sqrt[3]{125} = 5$
  comme $x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$
  ($5^2 = 25 \Rightarrow 5 = \sqrt{25}$)

* $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$
  ex : $2^1 \times 2^2 = 2^3 = 8$ ; $5^3 \times 5^5 = 5^{3+5} = 5^{15}$

* $(x^n)^m = x^{n \times m}$
  ex : $(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6 = 64$
  (preuve ou : $2^2 = 4 \Rightarrow (2^2)^3 = 4^3 = 64$)

* $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$
  ex : $\frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$
  preuve ou : $\frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$

* $\prod_{i=1}^{n} i = \underbrace{i \times i \times i \times \cdots \times i}_{n \text{ fois}} = i!$

* $\sum_{k=0}^{n} (5-k) = \sum_{k=0}^{n} (5) - \sum_{k=0}^{n} k$ ici $k$ est l'indice des sommes donc elles ne portent que sur $k$
  $= 5\sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n} k$
  $= 5(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n+1 \text{ fois}}) - \sum_{k=0}^{n} k = 5(n+1) - \sum_{k=0}^{n} k$
  $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

## Triangle de Pascal

$(a+b)^{n=2}$

```
    1
0+ 1   1 +0=1   [n=1]
=1
  1   2   1     [n=2]
1   3   3   1   [n=3]
   etc
```

$(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$

$\to (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + b^3$

les puissances de a ↓ alors que les puissances de b ↑ (et on commence et finit à 3)

(autre ex : $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + b^2 + c^2$

$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ac^2 + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + b^3 + c^3 + 6abc$ )

$6abc$ pas donné par le triangle

quand il y a plus de 2 nbs comme ici : a,b,c ; il vaut mieux prendre son temps et développer. Le triangle de Pascal est exact que pour $(a+b)^n$

## Sommes et produits

* indices muets : c'est sur eux que porte la somme

$\sum_{k=1}^{n} (k^2+3) = \sum_{i=1}^{n} (i^2+3) = (1^2+3) + (2^2+3) + \cdots + (n^2+3)$

$k$ est un indice muet $\Rightarrow$ il peut s'appeler n'importe comment

c'est sur $k$ ou $i$ que porte la somme

$\sum_{k=0}^{n} (k+n) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} n$ et $\sum_{k=0}^{n} (\lambda \times k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} k$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

$i$ va de 1 à $n$ : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+2} = \sum_{i'=3}^{n+2} \frac{1}{i'} = \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i}$

qd $i = n$, $i'$ doit valoir $n+2$

qd $i = 1$ alors $i'$ doit valoir 3

$i'$ est un indice muet, on peut l'appeler en particulier $i$