Logique - bases

Vocabulaire

* $\boxed{p \Rightarrow q}$ se lit "p implique q" ou "si p alors q" etc
  - p est une condition suffisante à q
  - q est une condition nécessaire pour p

ex cheval 4 pattes

tableau de vérité :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

si c'est 1 cheval est-ce que ça implique 4 pattes → oui

→ si c'est 1 cheval est-ce que ça peut impliquer pas 4 pattes → non

$\boxed{p \Rightarrow q = \text{non}(p) \text{ ou } q}$

et $\boxed{p \Rightarrow q \Leftrightarrow \bar{q} \Rightarrow \bar{p}}$

* $\boxed{p \Leftrightarrow q}$ se lit "p est équivalent à q" ou "p si et seulement si q"
  - p est une condition nécessaire et suffisante à q
    ($p \Leftarrow q$) ($p \Rightarrow q$)

$\boxed{p \Leftrightarrow q = (p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow p)}$

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Contraposée

Plutôt que de démontrer $p \Rightarrow q$ on montre $\text{non}(q) \Rightarrow \text{non}(p)$

ex : Soient $a, b \in]0, +\infty[$. Mq $a > b \Rightarrow \sqrt{a^2+1} > \sqrt{b^2+1}$

Par contraposition on va montrer $\sqrt{a^2+1} \leq \sqrt{b^2+1} \Rightarrow a \leq b$

$\sqrt{a^2+1} \leq \sqrt{b^2+1}$ au carré

$a^2+1 \leq b^2+1$

$a^2 \leq b^2$

$a^2 - b^2 \leq 0$

$(a+b)(a-b) \leq 0$ or $a+b > 0$ car $a, b \in]0, +\infty[$

donc $a - b \leq 0$

$\boxed{a \leq b}$ cqfd ✓

Négation

La négation d'une proposition p se note non(p) ou $\overline{p}$

tableau de vérité :

p	$\overline{p}$
V	F
F	V

- négation de $p \Rightarrow q$: $\boxed{\overline{p \Rightarrow q} = \text{non}(p \Rightarrow q) = \text{non}(q) \text{ et } p}$
- négation des signes et quantificateurs : non($<$) = $\geq$ non($=$) = $\neq$
  non($\leq$) = $>$ non($\forall$) = $\exists$
  non($\exists$) = $\forall$

Lois de Morgan / de dualité

* non(A et B) = $\overline{A \text{ et } B}$ = $\overline{A}$ ou $\overline{B}$ = non(A) ou non(B)
* non(A ou B) = $\overline{A \text{ ou } B}$ = $\overline{A}$ et $\overline{B}$ = non(A) et non(B)

Exemples

* Mq $(A \text{ et } B) \Rightarrow C \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)$ ou $(B \Rightarrow C)$

→ on sait que $p \Rightarrow q \Leftrightarrow q$ ou non(p)

donc $(A \text{ et } B) \Rightarrow C \Leftrightarrow C$ ou non(A et B)

$\Leftrightarrow C$ ou (non(A) ou non(B))

$\Leftrightarrow$ [C ou non(A)] ou [C ou non(B)] } on distribue le "ou"

$\Leftrightarrow A \Rightarrow C$ ou $B \Rightarrow C$ ✓

* idem pour Mq $(A \text{ ou } B) \Rightarrow C \Leftrightarrow (A \Rightarrow C)$ et $(B \Rightarrow C)$