Calcul Algébrique

Propriétés à savoir :

* $x^0 = 1$ avec $x \neq 0$
ex : $5^0 = 1$; $7^0 = 1$; $64^0 = 1$; $1^0 = 1$

* $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$
ex : $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; $5^{-3} = \frac{1}{5^3}$

* $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
ex : $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[3]{125} = 125^{\frac{1}{3}} = 5$

→ $5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125 \Rightarrow \sqrt[3]{125} = 5$
comme $x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$
($5^2 = 25 \Rightarrow 5 = \sqrt{25}$)

* $x^n \times x^m = x^{(n+m)}$
ex : $2^1 \times 2^2 = 2^3 = 8$; $5^3 \times 5^5 = 5^{3+5} = 5^{15}$

* $(x^n)^m = x^{n \times m}$
ex : $(2^2)^3 = 2^{2 \times 3} = 2^6 = 64$
preuve ↳ (ou : $2^2 = 4 \Rightarrow (2^2)^3 = 4^3 = 64$)

* $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$
ex : $\frac{5^2}{3^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$
preuve ↳ ou : $\frac{5^2}{3^2} = \frac{25}{9}$

* $\prod_{i=1}^{n} i = \underset{i=1}{1} \times \underset{i=2}{2} \times 3 \times \dots \times \underset{i=n}{n} = n!$

* $\sum_{k=0}^{n} (5-k) = \sum_{k=0}^{n} (5) - \sum_{k=0}^{n} k$
ici k est l'indice des sommes donc elles ne portent que sur k
$= 5 \sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n} k$
$= 5(\underbrace{1+1+\dots+1}_{n+1 \text{ fois}}) - \sum_{k=0}^{n} k = 5(n+1) - \sum_{k=0}^{n} k$
exo 5 $= \frac{n(n+1)}{2}$

Triangle de Pascal

$(a+b)^{n=2}$

$$
\begin{array}{llll}
1 & & & \\
1 & 1 & & \boxed{n=1} \\
1 & 2 & 1 & \boxed{n=2} \\
1 & 3 & 3 & 1 \ \boxed{n=3}
\end{array}
$$

$0 + 1 = 1$; $1 + 1$; $1 + 0 = 1$

→ $(a+b)^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$

→ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + b^3$

les puissances de a ↘ alors que les puissances de b ↗ (et on commence et finit à 3)

etc

(autre ex : $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + b^2 + c^2$
$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ac^2 + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + b^3 + c^3 + 6abc$)

pas donné par le triangle

quand il y a plus de 2 nbs comme ici : a, b, c ; il vaut mieux prendre son temps et développer. Le triangle de Pascal est exact que pour $(a+b)^n$

Sommes et produits

* indices muets : $\sum_{k=1}^{n} (k^2+3) = \sum_{i=1}^{n} (i^2+3) = (1^2+3) + (2^2+3) + \dots + (n^2+3)$

c'est sur eux que porte la somme

k est un indice muet ⇒ il peut s'appeler n'importe comment

c'est sur k ou que porte la somme

$\sum_{k=0}^{n} (k+n) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} n$
et $\sum_{k=0}^{n} (\lambda \times k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} k$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

i va de 1 à n

$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+2} = \sum_{i'=3}^{n+2} \frac{1}{i'} = \sum_{i=3}^{n+2} \frac{1}{i}$

qd $i = n$, i' doit valoir $n+2$

qd $i = 1$ alors i' doit valoir 3

i' est un indice muet, on peut l'appeler en particulier i

Binôme

Formule du binôme : $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{(n-p)}$

Formule du triangle de Pascal : $\forall k \geq 1, \forall p \in \mathbb{N}, \binom{p+k}{k} + \binom{p+k}{k-1} = \binom{p+k+1}{k}$

Propriétés :

$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$; $(n+1)! = (n+1)\,n!$; $n! = n\,(n-1)!$

Sachant que $5! = 1\times2\times3\times4\times5 \Rightarrow n! = 1\times2\times\cdots\times(n-1)\times n$ et $0! = 1$

Propriétés Σ et Π

* $\sum_{k=0}^{n}(k+n) = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} n$

⚠ : $\sum_{k=0}^{n}(k) + n \neq \sum_{k=0}^{n}(k+n)$

* $\sum_{k=0}^{n}[\lambda(k+3)] = \lambda \sum_{k=0}^{n}(k+3)$

$\lambda \in \mathbb{R}$
↑ 1 nb quelconque

preuve : $\sum_{k=0}^{n}[\lambda(k+3)] = \lambda(0+3) + \lambda(1+3) + \cdots + \lambda(n+3)$
$= \lambda\left((0+3)+(1+3)+\cdots+(n+3)\right)$
$= \lambda \sum_{k=0}^{n}(k+3)$

* $\prod_{i=1}^{n}(i + i\times j) = \prod_{i=1}^{n} i + \prod_{i=1}^{n}(i\times j)$

$\prod_{i=1}^{n}(i\times j) = (1\times j)\times(2\times j)\times\cdots\times(n\times j)$
$= j^n \times 1\times2\times3\times\cdots\times n$

Σ le produit concerne i donc j est fixé.

explication

* $\prod_{i=1}^{n}\lambda(i+4) = \lambda^n \prod_{i=1}^{n}(i+4)$

$(\lambda \in \mathbb{R})$