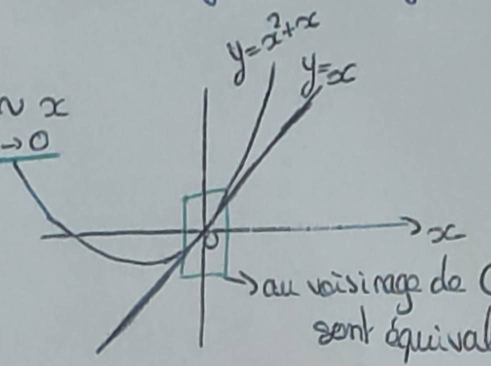
Comparaison de fonctions

* Equivalence

$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)}$: "f est équivalente à g au voisinage de a" $\boxed{\iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$

ex : $x^2 + x \underset{x \to 0}{\sim} x$



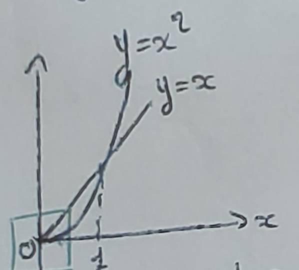
→ au voisinage de O, les 2 fonctions sont équivalentes

et $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} x + 1 = 1$ ✓

* Négligeable

$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} o\, g(x)}$: "f est négligeable devant g au voisinage de a" $\boxed{\iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$

ex : $x^2 \underset{x \to 0}{=} o(x)$



↳ au voisinage de O, la courbe x^2 est sous la courbe x ; donc x^2 est négligeable devant x

et $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x} \times x}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} x = 0$ ✓

⚠ Par contre à partir de 1 c'est l'inverse
c'est donc hyper important de préciser le point de voisinage !

* Dominance

$\boxed{f(x) \underset{x \to a}{=} O\, g(x)}$: "f est dominé par g au voisinage de a" $\boxed{\iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \text{borne finie} \neq 0}$

ex : $2x + 1 \underset{x \to +\infty}{=} O(x)$ $\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x}(2 + \frac{1}{x})}{\cancel{x}} = \lim_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$ ✓

↓

qd $x \to +\infty$: $2x + 1$ est de l'ordre de x car le $+1$ devient ridicule
(si $x = 1000 \to 2 \times 1000 + 1 = 2001$, c'est le 2000 qui est important dans l'ordre de grandeur pas le 1 du $2000 + 1$)