Formulaire pratique (dvl et autre)

Règle de l'Hopital

: pour éviter les formes indéterminées (FI) : $+\infty-\infty$; $0.\infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Règles avec e^x

- $e^{(a+b)} = e^a \times e^b$

Règles avec $\ln(x)$

- $x = e^{\ln(x)}$
- $\ln(a\times b) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$

Formule de Taylor

← puissance de la dérivée : $f^{(1)} = f'$; $f^{(2)} = f''$ etc et $f^{(0)} = f$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^k}{k!} + o((x-a)^n)$$

$k!$ ← k factoriel : $2! = 1\times 2$; $3! = 1\times 2\times 3$ etc $\boxed{\text{et } 0! = 1}$

on peut réécrire en développant la somme Σ

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(a)\,\overbrace{(x-a)^0}^{=1}}{0!\,(=1)} + \frac{f^{(1)}(a)\,(x-a)^1}{1!\,(=1)} + \dots$$

ce qui donne

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + o((x-a)^n)}$$

donné ds le formulaire pour les fonctions de référence (au voisinage de 0 on prend $a=0$)

Formulaire DL

qd on a dans le formulaire $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots$

on peut trouver la formule pour $(1-x)^\alpha$: on remplace juste les x par des $-x$:

$$(1-x)^\alpha = 1 + \alpha(-x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(-x)^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}(-x)^3 + \dots$$

$$= 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Trucs pratiques à savoir

* $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
* $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3[a^2b + b^2a + a^2c + c^2a + b^2c + c^2b] + 6abc$
* $3! = 1\times 2\times 3 = 6$

  $2! = 1\times 2 = 2$

  $5! = 1\times 2\times 3\times 4\times 5 = 120$

  $4! = 24$

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \longrightarrow \cos^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$ cf exo 23

$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

$\Rightarrow \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$

$\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a)$