

A compléter

↳ ne contient que les propriétés + astuces vus pendant le TD matrice

Fiche de Révision

* Trace d'une matrice : somme des éléments sur la diagonale

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Tr}(A) = 1 + 4 + 1 = 6$

Propriétés de la trace:

* $\text{Tr}(A \times B) = \text{Tr}(B \times A)$

* la trace est cyclique: $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$

$$\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(BCA)$$

etc: on peut faire autant de permutation qu'on veut.

Autre façon de le voir: $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}((AB)C)$
en faisant un groupe

$$= \text{Tr}(C(AB))$$

car $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$
avec ici $A = (AB)$

* $\text{Tr}(ABA^{-1}) = \text{Tr}(B) \rightarrow$ on le voir par circularité:

$$\text{Tr}(ABA^{-1}) = \text{Tr}(A^{-1}AB)$$

$$= \text{Tr}(I \times B)$$

$$= \text{Tr}(B)$$

Propriétés sur les matrices



* $AB \neq BA$ le produit matriciel n'est pas commutatif!

* on peut calculer la somme de 2 matrices que si elles ont la même dimension

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$ matrice 2×2

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$
 matrice 2×3

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$
 matrice 3×3

$A+B \rightarrow \dim A = \dim B$ donc
 $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ OK
 $= \begin{pmatrix} 1+4 & 0+5 \\ 2+0 & 3+4 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

$D+E$ est
déf car elles
ont la même
 \dim

$$\left\{ \begin{array}{l} D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3 \times 3 \\ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3 \times 3 \end{array} \right.$$

$A+C \rightarrow \dim A = 2 \times 2$
 $\dim C = 3 \times 3$

* on peut multiplier 2 matrices entre elles que si:
 le nombre de colonnes de la 1^{ère} = le nombre de lignes de l'autre

ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

Δ dans la dimension le 1^{er} chiffre est le nombre de lignes et le 2^e est le nombre de colonnes

$\dim(A \times B) = \dim(A) \times \dim(B)$
 $= (2 \times 2) \times (2 \times 3)$ donc c'est drôle!
 nombre de lignes ↑ nombr de colonnes
 de A de A

On peut faire le calcul:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 18 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$\square = 2 \times 2 - 3 \times 4$

$O = 1 \times 1 + (-1) \times (-1)$

On voit que $\dim(A \times B) = (2 \times 3)$

et on aurait pu le deviner: $\dim(A \times B) = (2 \times 2) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 3)$

on prend les chiffres qui ne sont pas au milieu.

* Transposée d'une matrice: les lignes de la matrice deviennent des colonnes et inversement

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

la 1^{ère} ligne s'est transformée en 1^{ère} colonne etc.

Propriétés:

* $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

Écriture algébrique (exo 13)

- L'élément (i,i) de la matrice $A \times B$ se note $(AB)_{i,i}$
 → c'est l'élément de la matrice (AB) qui se trouve ligne i et colonne i

$$a_{2,1} \downarrow \\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

ex : $AB = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 18 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow 18$ est l'élément à la ligne 1 colonne 3
 donc $(AB)_{2,3} = 18$

↳ on écrit (en écriture algébrique) : $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$

des nombres
l'indice mixte
l'indice de gauche
(= pour signaler n'importe quellement)
l'indice de droite

ex : $AB = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 18 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ écriture matricielle.

écriture algébrique : $(AB)_{2,3} = 18$ par ex, vérifions :

$$(AB)_{2,3} = \sum_{k=1}^n a_{2,k} b_{k,3} \text{ fixes}$$

élément de la ligne 1
colonne 3 de A

$$\begin{aligned}
 &= a_{2,1} b_{1,3} + a_{2,2} b_{2,3} + a_{2,3} b_{3,3} \\
 &= 2 \times 0 + (-3) \times (-6) \\
 &= 0 + 18 \\
 &= 18 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

n'existe,
pas car A n'a
que 2 colonnes
donc la somme
s'arrête pour
n=2

* Déterminants

Propriétés :

$$\star \det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

• déterminant d'une matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$$= ad - bc$$

$$\text{ex: } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 3 \\ = 5 - 6 \\ = -1$$

• déterminant d'une matrice 3×3 :

- pentagone (cf le cours)

- règle de Sarrus

$$\text{ex: } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

○ : multiplier par +1

○ : multiplier par -1

$$\det B = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ = 1 [2 \times 2 - (-1) \times (-1)] - 3 [1 \times 2 - (-1) \times 1] - 2 [1 \times (-1) - 2 \times 1]$$

pour savoir
qui mettre, on barre
la ligne et la colonne
où il y a le 1 er
on prend le déterminant
de ce qui reste.

* Inverse d'une matrice

Une matrice carree (ça veut dire que son nb lignes = nb colonnes) est inversible si et seulement si son determinant est $\neq 0$ et à ce moment là son inverse est unique et se note (matrice) $^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

est carree

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

n'est pas carree

On a alors (si A est inversible) : $\begin{cases} \det A \neq 0 \\ A \times A^{-1} = \mathbb{I} \end{cases}$

Trouver l'inverse d'une matrice

* Matrice 2x2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a \text{ et } d \text{ changent de place} \\ b \text{ et } c \text{ changent de signe} \end{cases}$$

ex : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 3 \times (-2) - (2 \times -2) = -6 + 4 = -2$
donc A est bien inversible

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \text{changent de place} \\ \text{l}_1 \circ -2 \rightarrow \text{transforme en } +2 \\ \text{l}_2 \circ +2 \rightarrow \text{transforme en } -2 \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

* Matrice 3x3 ou plus

- pivot de Gauß

- comatrice : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} [\text{com}(A)]^T$

ex: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

→ pivot de Gauss

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

faire apparaître un L_3 devant le pivot

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right| \leftarrow L_3' = L_3 / 2$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3/2 \end{array} \right|$$

puisque la matrice identité à 0 n'est pas !

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3/2 \end{array} \right|$$

échange ces 2 lignes pour se ramener à une structure en triangle

on a donc obtenu à faire apparaître la matrice identité donc C est inversible.

donc $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$

Sans calculer le déterminant comment on voit que ce n'est pas inversible avec Gauss :

ex: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (ex 4)

$$\rightarrow \left| \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right| \leftarrow L_2' = L_2 - 2L_1$$

ne donne pas la matrice identité car là c'est un 0 pas un 1.

→ Comatrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Si C est inversible alors $C^{-1} = \frac{1}{\det C} [\text{com}(C)]^T$

→ Calculons $\det C$

$$\begin{aligned}\det C &= 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 0 \quad | + 0 \quad | \\ &= 3(-2) - (2 \times -2) \\ &= -2\end{aligned}$$

donc $\det C \neq 0 \Rightarrow C$ est inversible

→ Calculons l'inverse de C

On n'oublie pas

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\text{Com}(C) = \begin{pmatrix} \square & & \\ & \circ & \\ & & \circ \end{pmatrix}$$

même dimension que C

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

on barre la ligne et la colonne du 1^{er} coefficient et on fait le \det de ce qui reste

$$\square = +1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) - (2 \times -2) = -2$$

$$\circ = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -1[-2] = 2$$

on barre la 3^e ligne 2^e colonne et \det de ce qui reste

On trouve $\text{Com}(C) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -(-2) & 3 \end{pmatrix}$

donc $[\text{Com}(C)]^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} \checkmark$$

Si on choisit de faire la comatrice dans les contrôles
la rédaction à adopter :

(Calculer l'inverse de $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ si possible.)

→ Réponse :

* Calculons le déterminant de C :

$$\det C = 1 \mid 3 -2 \mid = 3 \times (-2) - (2 \times (-2)) = -2$$

$\det C \neq 0$ donc C est inversible

* On calcule l'inverse de C en utilisant : $C^{-1} = \frac{1}{\det C} [\text{com}(C)]^T$

Calculons $\text{Com}(C)$:

$$\text{Com}(C) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -(-2) & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow [\text{Com}(C)]^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$[\text{Com}(C)]^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } C^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$