Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficient constant

Une telle équation s'écrit :

$$\boxed{a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = d}$$

où $a \neq 0$ et d est une constante.

La solution générale de cette équation différentielle est égale à la somme d'une solution particulière (constante) et de la solution générale de l'équation homogène (c'est-à-dire sans second membre : $d = 0$)

La solution particulière étant une constante, elle ne pose pas de problème : $x(t) = d/c$. Intéressons-nous maintenant à la solution de l'équation homogène : $a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$

Équation caractéristique :

On considère l'équation du second degré obtenue à partir de l'équation homogène :

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

Cette équation dite **équation caractéristique** admet 2 racines (ou une racine double) r_1 et r_2. $\exp r_1 t$ et $\exp r_2 t$ sont deux solutions particulères de l'équation différentielle et toute combinaison linéaire $A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)$ est également solution (A et B sont des constantes d'intégration).

En physique A et B sont déterminés par **deux** conditions physiques initiales du système. Suivant le signe du discriminant Δ de l'équation caractéristique, on distingue les cas suivants :

$\Delta > 0$ (régime apériodique) :

L'équation caractéristique admet alors deux racines réelles distinctes et la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène) s'écrit :

$$\boxed{x(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)}$$

Pour obtenir la solution générale de l'équation complète il suffit d'ajouter une solution particulière (sans oublier ensuite de déterminer A et B avec les conditions initiales).

$\Delta = 0$ (régime critique) :

L'équation caractéristique admet alors une racine double ($r_1 = r_2$) et la solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène) s'écrit :

$$\boxed{x(t) = (At + B)\exp(r_1 t)}$$

Pour obtenir la solution générale de l'équation complète il suffit d'ajouter une solution particulière (sans oublier ensuite de déterminer A et B avec les conditions initiales).

$\Delta < 0$ (régime pseudo-périodique) :

L'équation caractéristique admet alors deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = \alpha + i\beta \text{ et } r_2 = \alpha - i\beta$$

La solution générale de l'équation sans second membre (équation homogène) s'écrit :

$$\boxed{x(t) = \exp(\alpha t)(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))}$$

$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$
$= C_1\cos(\omega t) + C_2\sin(\omega t)$
$= A\cos(\omega t + \varphi)$

Pour obtenir la solution générale de l'équation complète il ne faut pas oublier d'ajouter une solution particulière (sans oublier ensuite de déterminer A et B à partir des conditions initiales).