A compléter
↳ ne contient que les propriétés + astuces vus pendant le TD matrice

Fiche de Révision

* **Trace d'une matrice** : somme des éléments sur la diagonale

<u>ex</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Tr(A) = 1 + 4 + 1 = 6$

Propriétés sur la trace :

* $Tr(A \times B) = Tr(B \times A)$
* la trace est cyclique : $Tr(ABC) = Tr(CAB)$
  $Tr(ABC) = Tr(BCA)$
  etc : on peut faire autant de permutation qu'on veut.

Autre façon de le voir : en faisant un groupe $Tr(ABC) = Tr((AB)C)$
$= Tr(C(AB))$
car $Tr(AB) = Tr(BA)$
avec ici $A \equiv (AB)$

* $Tr(ABA^{-1}) = Tr(B)$ → on le voit par circularité :
$Tr(ABA^{-1}) = Tr(A^{-1}AB)$
$= Tr(\mathbb{1} \times B)$
$= Tr(B)$

Propriétés sur les matrices

⚠ * $AB \neq BA$ le produit matriciel n'est pas commutatif !
* on peut calculer la somme de 2 matrices <u>que</u> si elles ont la même dimension

<u>ex</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ → matrice 2x2
$B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ → matrice 2x3
$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ → matrice 3x3

A+B → dim A = dim B donc OK
$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 1+4 & 0+5 \\ 2+0 & 3+4 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

D + E est déf car elles ont la même dim.
$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ → 2x3
$E = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ → 2x3

A+C → $\left.\begin{matrix} \dim A = 2\times2 \\ \dim C = 3\times3 \end{matrix}\right\}$ pas déf

⚠ dans la dimension le 1er chiffre est le nombre de lignes et le 2e est le nombre de colonnes

* on peut multiplier 2 matrices entre elles que si : le nombre de colonnes de la 1ère = le nombre de lignes de l'autre

ex : $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

$\dim(A \times B) = \dim(A) \times \dim(B)$

$= (2 \times \boxed{2}) \times (\boxed{2} \times 3)$ donc c'est déf !

nombre de lignes de A ↑ nombre de colonnes de A

On peut faire le calcul :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & \boxed{-1} & -6 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \square & & \\ & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 18 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$\square = 2 \times 2 - 3 \times 4$

$0 = 1 \times 1 + \boxed{(-1)} \times \boxed{(-1)}$

On voit que $\dim(A \times B) = (2 \times 3)$

et on aurait pu le deviner : $\dim(A \times B) = (2 \times \boxed{2}) \times (\boxed{2} \times 3)$

$= (2 \times 3)$

on prend les chiffres qui ne sont pas au milieu.

* Transposée d'une matrice : les lignes de la matrice deviennent des colonnes et inversement

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

la 1ère ligne s'est transformée en 1ère colonne

etc

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Propriétés :

* $(A \times B)^T = B^T \times A^T$

Écriture algébrique (exo 13)

$a_{1,1}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$

- L'élément (i,i) de la matrice $A \times B$ se note $(AB)_{i,i}$
  → c'est l'élément de la matrice $(A \times B)$ qui se trouve ligne i et colonne i

ex :

$A \times B = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 18 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ (exo 9) ⇒ 18 est l'élément à la $\boxed{\text{ligne 1}}$ $\boxed{\text{colonne 3}}$

donc $(AB)_{1,3} = 18$

↳ on écrit (en écriture algébrique) : $(AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \, b_{k,i}$

des nombres

indice muet (= peut s'appeler n'importe comment)

l'indice de gauche

l'indice de droite

ex : $A \times B = \begin{pmatrix} -8 & 5 & 18 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ écriture matricielle.

écriture algébrique : $(AB)_{1,3} = 18$ par ex, vérifions :

$$(AB)_{1,3} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} \, b_{k,3}$$ fixes

élément de la ligne 1 colonne 1 de A

$$= a_{1,1} b_{1,3} + a_{1,2} b_{2,3} + a_{1,3} b_{3,3}$$

n'existe pas car A n'a que 2 colonnes donc la somme s'arrête pour n=2

$$= 2 \times 0 + (-3) \times (-6)$$
$$= 0 + 18$$
$$= 18 \checkmark$$

* Déterminants

Propriétés :

* $\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$

• déterminant d'une matrice 2x2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
$= a \times d - c \times b$

<u>ex</u> : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 3$
$= 5 - 6$
$= -1$

• déterminant d'une matrice 3x3 :
- pentagone (cf le cours)
- règle de Sarrus

ex : $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

O : multiplier par +1
O : multiplier par −1

$\det B = 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$

$= 1\left[2 \times 2 - (-1)(-1)\right] - 3\left[1 \times 2 - (1 \times (-1))\right] - 2\left[1 \times (-1) - 2 \times 1\right]$

$= 0$

pour savoir quoi mettre, on barre la ligne et la colonne où il y a le 1 et on prend le déterminant de ce qui reste.

Inverse d'une matrice

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est carrée

$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, n'est pas carrée

Une matrice carrée (ça veut dire que son nb lignes = nb colonnes) est inversible si et seulement si son déterminant est $\neq 0$ et à ce moment là son inverse est unique et se note $(\text{matrice})^{-1}$

On a alors (si A est inversible) : $\begin{cases} \det A \neq 0 \\ A \times A^{-1} = \mathbb{1} \end{cases}$

Trouver l'inverse d'une matrice

* Matrice 2x2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ → a et d changent de place ; b et c changent de signe

ex : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\det A = 3 \times (-2) - (2 \times (-2)) = -6 + 4 = -2$

donc A est bien inversible

$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & +2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

/ changent de place

le -2 se transforme en $+2$

le $+2$ se transforme en -2

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3/2 \end{pmatrix}$

* Matrice 3x3 ou plus

- pivot de Gauss
- comatrice : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} [\mathrm{com}(A)]^T$ ⚠

$\underline{ex}$: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

-> pivot de Gauss

On cherche à faire apparaître la matrice identité à gauche

(matrice identité = matrice avec que des 1 sur la diagonale) ↳ se note $\mathbb{I}$, $\mathbb{1}$, id ...

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3/2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}$$

fait apparaître un 1 ; L_3 1 ⇒ devient le pivot

$\leftarrow L_3' = L_3/2$

$\leftarrow L_2' = L_2 - 3L_3$

échange ces 2 lignes pour se ramener à une structure en ◸ triangle

presque la matrice identité à -1 près !

$\leftarrow L_2' = L_2 + L_3$

$\underbrace{\quad}_{\mathbb{1}}$ $\underbrace{\quad}_{C^{-1}}$

on est arrivé à faire apparaître la matrice identité donc C est inversible.

donc $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$

Sans calculer le déterminant comment on voit que ce n'est pas inversible avec Gauss :

$\underline{ex}$: $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (exo 4) →

$$\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array} \leftarrow L_2' = L_2 - 2L_1$$

ne donnera pas la matrice identité car là c'est un 0 pas un 1.

→ Comatrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Si C est inversible alors $C^{-1} = \dfrac{1}{\det C} \left[com(C) \right]^T$

→ Calculons det C

$$\det C = 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix}$$

$$= 3(-2) - (2 \times (-2))$$

$$= -2$$

donc $\det C \neq 0 \Rightarrow C$ est inversible

→ Calculons l'inverse de C

On n'oublie pas $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 3 & -2 \\ \cancel{0} & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Com(C) = \begin{pmatrix} \square & & \\ & & \\ & \bigcirc & \end{pmatrix}$$

même dimension que C

on barre la ligne et la colonne du 1er coefficient et on fait le det de ce qui reste

$$\square = +1 \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3 \times (-2) - (2 \times (-2))$$

$$= -2$$

$$\bigcirc = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -1[-2] = 2$$

on barre la 3e ligne 2e colonne et det de ce qui reste

On trouve $Com(C) = \begin{pmatrix} -2 & -0 & 0 \\ -0 & -2 & -2 \\ 0 & -(-2) & 3 \end{pmatrix}$

donc $\left[Com(C) \right]^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix} \checkmark$$

Si on choisit de faire la comatrice dans les contrôles la rédaction a adopter :

Calculer l'inverse de $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ si possible.

→ réponse :

* Calculons le déterminant de C :

$$\det C = 1 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 3\times(-2) - (2\times(-2)) = -2$$

$\det C \neq 0$ donc C est inversible

* On calcule l'inverse de C en utilisant : $C^{-1} = \frac{1}{\det C} [\mathrm{Com}(C)]^T$

Calculons $\mathrm{Com}(C)$:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Com}(C) &= \begin{pmatrix} -2 & -0 & 0 \\ -0 & -2 & -2 \\ 0 & -(-2) & 3 \end{pmatrix} \\ \mathrm{Com}(C) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow [\mathrm{Com}(C)]^T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

donc $C^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$