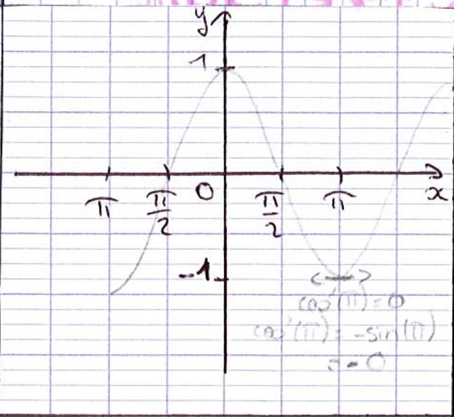
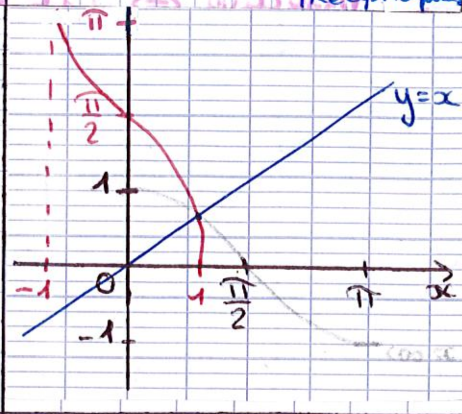
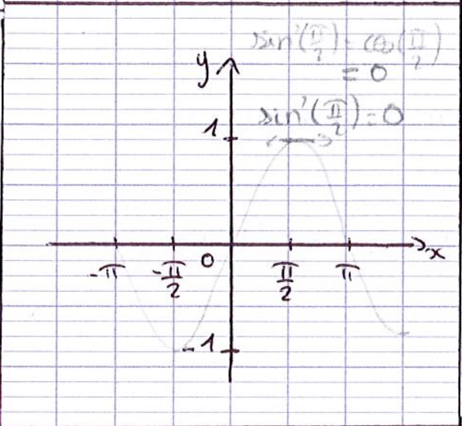
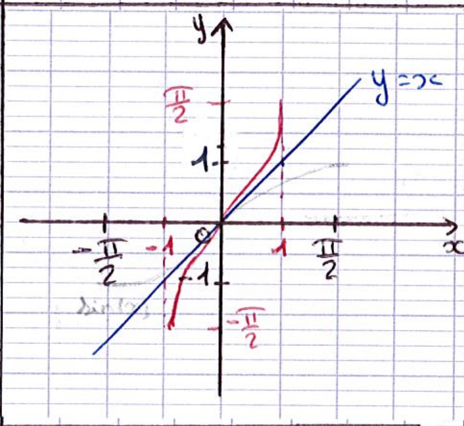
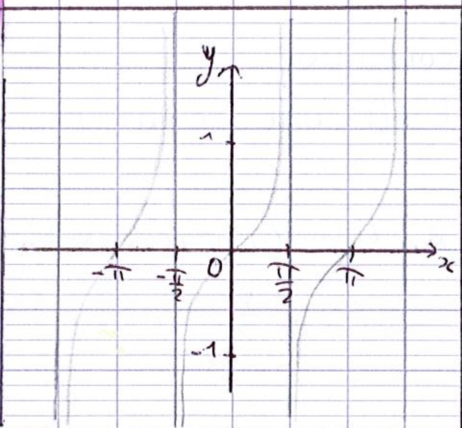
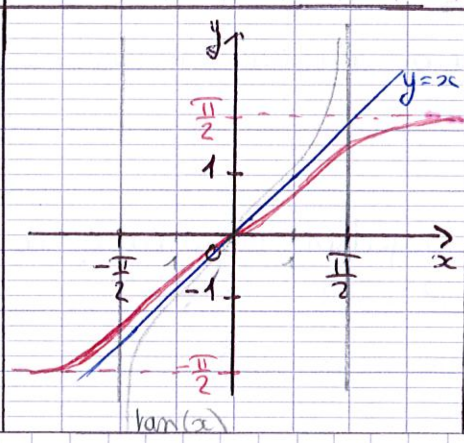
Fonctions de référence trigonométiques

Fonction	Représentation graphique	Fonction + Fonction inverse réciproque	Limites
C'est une bijection décroissante de $[0,\pi]$ vers $[-1;1]$ **$\cos(x)$** paire : $\cos(x)=\cos(-x)$ $\to$ symétrique /(Oy) $\arccos(x) : [-1;1] \to [0,\pi]$			$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ $\lim_{x\to \pi} \cos(x) = -1$ $\lim_{x\to -1} \arccos(x) = \pi$ $\lim_{x\to 1} \arccos(x) = 0$
C'est une bijection croissante de $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ vers $[-1;1]$ **$\sin(x)$** impaire : $\sin(-x) = -\sin(x)$ symétrique / origine $\arcsin(x) : [-1;1] \to [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$			$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \sin(x) = -1$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1$ $\lim_{x\to 1} \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to -1} \arcsin(x) = -\frac{\pi}{2}$
C'est une bijection croissante de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ **$\tan(x)$** impaire -arctan aussi $\arctan(x) : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$			$\lim_{\substack{x\to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}} \tan(x) = -\infty$ $\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan(x) = +\infty$ $\lim_{x\to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$

Dérivées $(f^{-1}(y_0))' = \dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\sin(x)) = \cos(x)$
- $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

- $(\arccos(y))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}} = -(\arcsin(y))'$
- $(\arcsin(y))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
- $(\arctan(y))' = \dfrac{1}{1+y^2}$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Rightarrow ch^2(x) + (i\,sh(x))^2 = 1$ passage trigonométrique

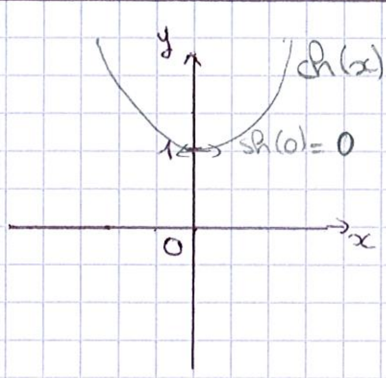
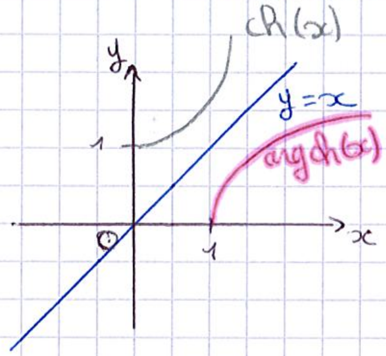
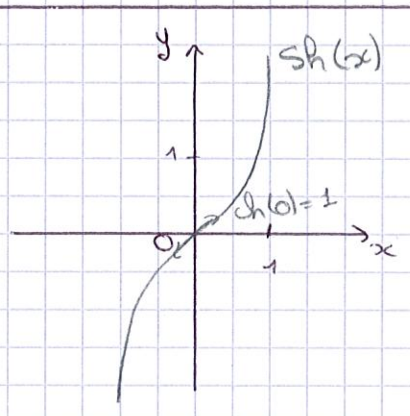
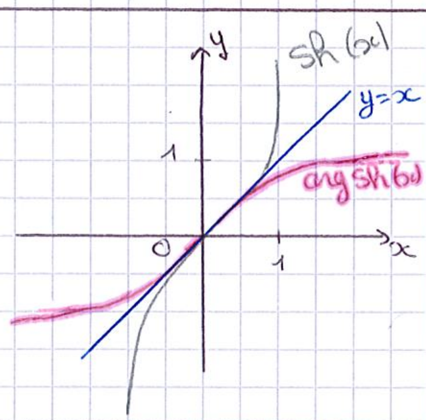
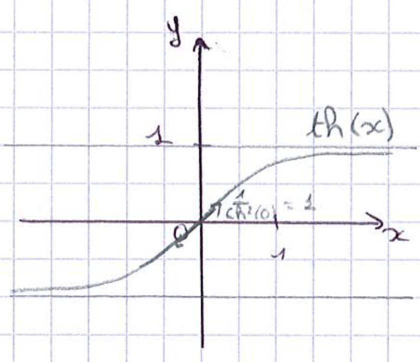
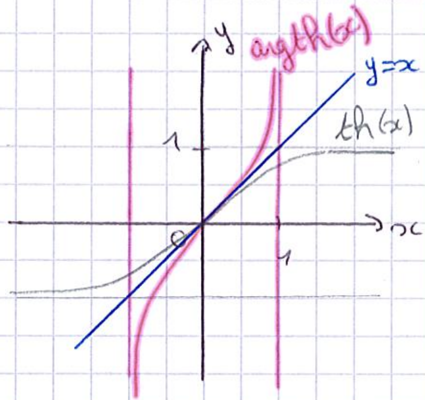
Formules d'Euler : $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

- $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
- $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et $\cos(2x) = \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}$ par exemple

Linéarisation

- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
  ↳ $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$
- $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Fonctions de référence : hyperboliques

Fonction	Représentatᵒ graphique	Fonction + Fonctᵒ inverse / Réciproque	Limites
C'est une bijectᵒ croissante de $\mathbb{R}^+$ vers $[1;+\infty[$ **ch(x)** paire $\text{argch}(x) : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$			$\lim_{x\to 0} ch(x) = 1$ $\lim_{x\to +\infty} ch(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 1} \text{argch}(x) = 0$ $\lim_{x\to +\infty} \text{argch}(x) = +\infty$
C'est une bijectᵒ croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ **sh(x)** impaire ↳ argsh(x) aussi $\text{argsh}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$			$\lim_{x\to -\infty} sh(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} sh(x) = +\infty$ $\lim_{x\to -\infty} \text{argsh}(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} \text{argsh}(x) = +\infty$
C'est une bijectᵒ croissante de $\mathbb{R}$ vers $]-1;1[$ th(x) impaire ↳ argth(x) aussi $\text{argth}(x) :]-1;1[\to \mathbb{R}$			$\lim_{x\to -\infty} th(x) = -1$ $\lim_{x\to +\infty} th(x) = 1$ $\lim_{x\to -1} \text{argth}(x) = -\infty$ $\lim_{x\to 1} \text{argth}(x) = +\infty$

Dérivées

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

- $(ch(x))' = sh(x)$
- $(sh(x))' = ch(x)$
- $(th(x))' = 1 - th^2(x) = \frac{1}{ch^2(x)}$

- $(\text{argch}(y))' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$
- $(\text{argsh}(y))' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$
- $(\text{argth}(y))' = \frac{1}{1-y^2}$

hyperbo : $\boxed{\cos = ch \text{ et } \sin = i\, sh}$

$ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

$ch(x) \pm sh(x) = e^{\pm x}$

Formules d'Euler

$\Rightarrow th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

- $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $th(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}+1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{sh(x)}{ch(x)}$

Linéarisation

- $ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$

Expression logarithmique

- $\text{argch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
- $\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
- $\text{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$