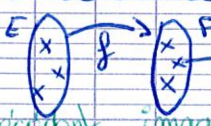
$\forall$: "quelque soit" ou "pour tout"
$\exists$: "il existe"
$\exists!$: "il existe un unique"

Injection / surjection / bijection

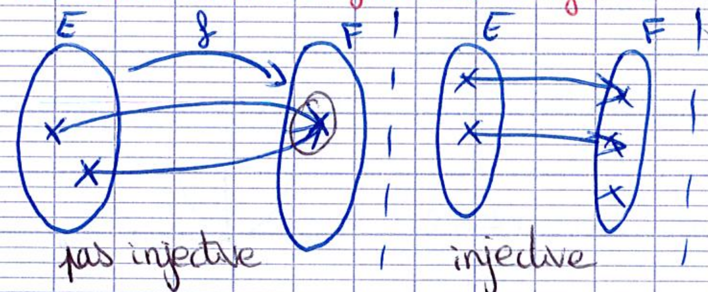
f désigne une fonction de l'ensemble E vers l'ensemble F



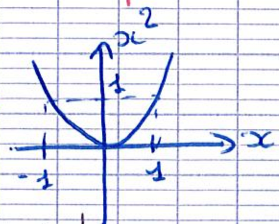
Injection

ou
$\begin{cases} \forall y \in F, \exists \text{ au plus un } x \in E, f(x) = y & (1) \\ \forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x' & (2) \\ \forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x') \text{ (contraposée de (2))} \end{cases}$

(1) ça veut dire qu'une image admet 1 seul antécédent ou 0 antécédent
(2) ça veut dire : si pour 2 antécédents leurs images st identiques alors les antécédents st forcément égaux.



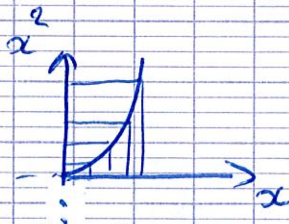
ex :



pas injective car 1 et -1 ont la m̂ image

Q° à se poser :
Est-ce que je peux trouver 2 antécédents différents qui ont la m̂ image ?
→ oui ⇒ pas injective
→ non ⇒ injective

ex(bis) : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$x \to x^2$



est injective car "coupée" sur ces intervalles il y a 1 seul antécédent x par image $f(x)$

démonstrations :
On montre que $\forall x, x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to 3x+1$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\boxed{f(x_1) = f(x_2)}$
$3x_1 + 1 = 3x_2 + 1$
$3(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = x_2}$

injective.

$y = f(x) \longrightarrow f^{-1}(y) = x$

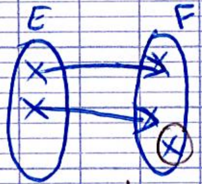
Surjection

ou $\begin{cases} \forall y \in F, \exists \text{ au moins un } x \in E, f(x) = y & ① \\ \forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y & ② \\ \forall y \in F, f^{-1}(\{y\}) = \emptyset & ③ \end{cases}$

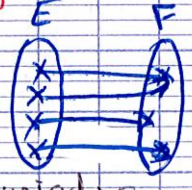
↑ ensemble non vide

①: Ttes les images ont au moins un antécédent

③: Ttes les images ont 1 antécédent

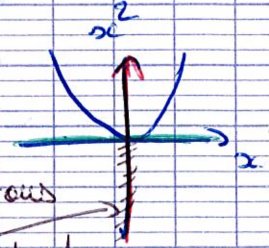


pas surjective



surjective (mais pas injective)

ex : $f : \boxed{\mathbb{R}} \to \boxed{\mathbb{R}}$, $x \to x^2$



pas surjective car tous les éléments ici n'ont pas d'antécédent

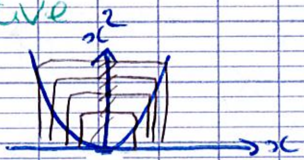
Q° à se poser :

Est-ce que je peux trouver 1 image qui n'a pas d'antécédent ?

→ oui ⇒ pas surjective

→ non ⇒ surjective

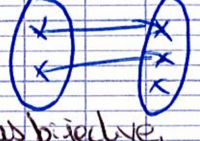
ex (bis) : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \to x^2$



surjective car toutes les images ont au moins un antécédent

Bijection

ou $\begin{cases} \forall y \in F, \exists \text{ un et un seul } x \in E, f(x) = y \\ \forall y \in F, \exists!\, x \in E, f(x) = y \\ f \text{ est bijective si elle est à la fois surjective et injective} \end{cases}$



pas bijective car pas surjective

bijective

ex : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \to x^2$

bijective