直纹曲面是可展曲面的一个充要条件

摘要：可展曲面是直纹面的一种类型，可展曲面就是沿每一条直母线只有一个切平面．通过几何分析方法，讨论了直纹曲面，给出了直纹曲面是可展曲面的一个充分切必要条件，说明直纹曲面 $S:\vec{r}(u,v)=\vec{\rho}(u)+v\vec{e}(u)$ 是可展曲面，其充要条件是：沿准线 $C:v=0,\vec{r}=\vec{\rho}(u)$，曲面 S 是它的切平面的包络面，并且给出了这个定理应用的两个例子．

关键词：直纹曲面　可展曲面　包络面

1 直纹曲面与可展曲面

我们知道由动直线产生的曲面为直纹曲面，动直线为该直纹曲面的直母线。如柱面、锥面、一条曲线的切线曲面等都是直纹曲面。文献 [1] 利用曲线测地挠率与曲线挠率的关系来刻划直纹曲面是可展曲面。本文利用包络面来刻划直纹曲面是可展曲面。

设 $C:\vec{\rho}=\vec{\rho}(u)(u_1\le u\le u_2)$ 是直纹曲面 S 上的一条准线，即 C 与所有直母线相交，设 $\vec{e}(u)$ 是过 $P(\vec{\rho}(u))$ 点的直母线上的非零矢量，则直纹曲面 S 的参数方程是

$$S:\vec{r}=\vec{\rho}(u)+v\vec{e}(u) \tag{1}$$

其中 $u_1\le u\le u_2$，$-\infty<v<+\infty$，u 线是与准线 C 平行的曲线，v 线是值母线。

特别地，当 $\vec{\rho}(u)=\vec{\rho_0}$ 是常矢时

$$S:\vec{r}=\vec{\rho}_0+v\vec{e}(u) \tag{2}$$

是锥面，

$$S:\vec{r}=\vec{\rho}(u)+v\vec{e_0} \tag{3}$$

是柱面，其中 $\vec{e}(u)=\vec{e_0}$ 是常矢。

定义 1　若直纹曲面（1）式沿每一条直母线只有一个切平面，即对一切的 v 值，法线方向上的矢量 $\vec{N}=\vec{r_u}\times\vec{r_v}$ 彼此平行，即对 $v_1\neq v_2$ 有：

$$\vec{N}(u,v_1)\times\vec{N}(u,v_2)=\vec{0} \tag{4}$$

则称直纹曲面（1）式是可展曲面。

定理 1　直纹曲面

$$S:\vec{r}=\vec{\rho}(u)+v\vec{e}(u)$$

是可展曲面，其充要条件是：

$$(\vec{\rho}'(u),\vec{e}(u),\vec{e}'(u))=0 \tag{5}$$

定理 2　直纹曲面

$$S:\vec{r}=\vec{\rho}(u)+v\vec{e}(u)$$

是可展曲面，其充要条件是：或者 S 是柱面，或者 S 是锥面，或者 S 是一条曲线的切线曲面。

定理 3　直纹曲面

$$S:\vec{r}=\vec{\rho}(u)+v\vec{e}(u)$$

是可展的，其充要条件是：S 上任意一点的 Gasuu曲率都为零，即

$$K(u,v)\equiv 0 \tag{6}$$

定理 4　直纹曲面

$$S:\vec{r}=\vec{\rho}(u)+v\vec{e}(u)$$

是可展的，其充要条件是：它上面的直母线（ v 线）是曲率线。

2　单参数平面族的包络面

给定单参数 λ 的平面族：

$$\pi_\lambda:\vec{n}(\lambda)\cdot\vec{r}-p(\lambda)=0 \tag{7}$$

并且 $\vec{n}(\lambda)\times\vec{n}'(\lambda)\neq 0$（否则 $\vec{n}(\lambda)$ 具有定向，此平面族变为平行平面束）。

定义 2　给定单参数 $\{\pi_\lambda\}$，如果有一个曲面 S 满足：

（1） S 上任一点 P 都是 $\{\pi_\lambda\}$ 中某个平面 π_λ 上的点

（2）在 P 点， π_λ 是 S 上的切平面，即 $\vec{N}=\vec{r}_\lambda\times\vec{r}_v\ //\ \vec{n}(\lambda)$

则称单参数平面族 $\{\pi_\lambda\}$ 的包络面为 S

定义 3　给定单参数平面族（ 7）式，取一个固定平面 $\pi_\lambda:\vec{n}(\lambda)\cdot\vec{r}-p(\lambda)=0$，再取邻近的平面 $\pi_{\lambda+\Delta\lambda}:\vec{n}(\lambda+\Delta\lambda)\cdot\vec{r}-p(\lambda+\Delta\lambda)=0$

它们的交线 $L_{\lambda+\Delta\lambda}$ 在 $\Delta\lambda\to 0$ 时的极限记为 L_λ，即

$$\pi_\lambda\cap\pi_{\lambda+\Delta\lambda}=L_{\lambda+\Delta\lambda}\to L_\lambda\quad(\Delta\lambda\to 0)$$

则称 L_λ 为单参数平面族 $\{\pi_\lambda\}$ 在 π_λ 上的特征线

定理 5　给定单参数平面族（ 7）式，则它的特征线方程是：

$$L_\lambda:\begin{cases}\vec{n}(\lambda)\cdot\vec{r}-p(\lambda)=0\\ \vec{n}'(\lambda)\cdot\vec{r}-p'(\lambda)=0\end{cases} \tag{8}$$

其中 $\vec{n}(\lambda)\times\vec{n}'(\lambda)$ 是 L_λ 的方向矢量

定理 6 直纹曲面 $S:\vec{r}(u,v)=\vec{\rho}(u)+v\vec{e}(u)$ 是可展曲面，其充要条件是：沿准线

$C: v=0, \vec{r}=\vec{\rho}(u)$， S 是它的切平面族的包络面

证明 “$\Rightarrow$” 设直纹曲面 S 可展，则

$$(\vec{\rho}'(u), \vec{e}(u), \vec{e}'(u))=0$$

因为 $\vec{r}_u=\vec{\rho}'(u)+v\vec{e}'(u), \vec{r}_v=\vec{e}(u)$ （9）

所以曲面 S 上任一点 $P(u,v)$ 的法矢量为：

$$\vec{N}(u,v)=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\vec{\rho}'(u)\times\vec{e}(u)+v\vec{e}'(u)\times\vec{e}(u)$$

曲面 S 上任一点的切平面方程是：

$$\vec{N}(u,v)\cdot\left[\vec{r}_1-\vec{r}(u,v)\right]=0$$

沿准线 $C: y=0$，得曲面 S 的切平面方程是：

$$\pi_\lambda: \left[\vec{\rho}'(u)\times\vec{e}(u)\right]\cdot\left[\vec{r}_1-\vec{\rho}(u)\right]=0 \tag{10}$$

现在求切平面族 $\{\pi_u\}$ 的包络面，特征线 L_u 的方程是：

$$\begin{cases}\left[\vec{\rho}'(u)\times\vec{e}(u)\right]\cdot\left[\vec{r}_1-\vec{\rho}(u)\right]\equiv 0\\ \left[\vec{\rho}''\times\vec{e}+\vec{\rho}'\times\vec{e}'\right]\cdot\left[\vec{r}_1-\vec{\rho}(u)\right]+\vec{\rho}'\times\vec{e}\cdot(-\vec{\rho}')=0\end{cases}$$

即

$$L_u=\begin{cases}\left(\vec{\rho}'\times\vec{e}\right)\cdot\left[\vec{r}_1-\vec{\rho}(u)\right]=0\\ \left(\vec{\rho}''\times\vec{e}+\vec{\rho}'\times\vec{e}'\right)\cdot\left[\vec{r}_1-\vec{\rho}(u)\right]=0\end{cases} \tag{11}$$

又平面 π_u 的法矢量为：

$$\vec{n}(u)=\vec{\rho}'(u)\times\vec{e}(u), \vec{n}'(u)=\vec{\rho}''\times\vec{e}+\vec{\rho}'\times\vec{e}'$$

再由（9）式得特征线 L_u 的方向矢量为：

$$\vec{n}(u)\times\vec{n}'(u)=\left(\vec{\rho}'(u)\times\vec{e}(u)\right)\times\left(\vec{\rho}''\times\vec{e}+\vec{\rho}'\times\vec{e}'\right)$$

$$=(\vec{\rho}',\vec{e},\vec{e})\vec{\rho}''-(\vec{\rho}',\vec{e},\vec{\rho}'')\vec{e}+(\vec{\rho}',\vec{e},\vec{e}')\vec{\rho}'-(\vec{\rho}',\vec{e},\vec{\rho}')\vec{e}'$$

$$=(\vec{e}(u),\ \vec{\rho}'(u),\ \vec{\rho}''(u))\vec{e}(u) \mathbin{/\!/} \vec{e}(u). \tag{12}$$

由（11）式知，$\vec{r}_1=\vec{\rho}(u)$ 是包络面的准线，即原准线 C 就是包络面的准线，再由（12）式知，包络面的方程是：

$$S_{包}:\vec{r}=\vec{\rho}(u)+v\vec{e}(u)$$

所以 $S_{包}=S$

“$\Leftarrow$”沿准线 C，S 是切平面族 $\{\pi_u\}$ 的包络面，由定理 6 知，S 是可展曲面。

例1　已知曲面的参数方程为

$$S:\vec{r}(u,v)=\{\cos u-v,\sin u,v\}$$

证明：(1) S 是可展曲面；(2) 沿准线 $C:v=0$，S 是它的切平面族的包络面。

证明　（1）将曲面写成直纹曲面

$$S:\vec{r}(u,v)=\{\cos u,\sin u,0\}+v\{-1,0,1\}=\vec{\rho}(u)+v\vec{e} \tag{13}$$

则 S 是柱面，显然柱面是可展曲面，它的一般方程是

$$S:(x+z)^2+y^2=1 \tag{14}$$

（3）因为

$$\vec{r}_u=\{-\sin u,\cos u,0\},$$

$$\vec{r}_v=\{-1,0,1\},$$

$$\vec{N}(u,v)=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\{\cos u,\sin u,\cos u\},$$

所以沿曲线 $C:v=0$，即沿圆 $C:\vec{r}=\{\cos u,\sin u,0\}$，曲面 S 的切平面的方程是：

$$\cos u(x-\cos u)+\sin u(y-\sin u)+\cos u(z-0)=0,$$

即

$$\pi_u: x\cos u+y\sin y+z\cos u=1. \tag{15}$$

单参数切平面族 $\{\pi_u\}$ 的特征线的方程是：

$$L_u:\begin{cases}(x+z)\cos u+y\sin u=1,\\-(x+z)\sin u+y\cos u=0.\end{cases} \tag{16}$$

上两式两边分别平方再相加得包络面的一般方程是：

$$S_{包}:(x+z)^2+y^2=1. \tag{17}$$

这正是曲面 S 的一般方程．又因为平面 π_u 的法矢量是：

$$\vec{n}(u)=\{\cos u,\sin u,\cos u\},\ \vec{n}'(u)=\{-\sin u,\cos u,-\sin u\},$$

所以特征线 L_u 的方向矢量是：

$$\vec{n}(u)\times\vec{n}'(u)=\{-1,0,1\} \tag{18}$$

因 L_u 的方向矢量是常矢，所以 $\{\pi_u\}$的包络面是柱面 . 另外，还可以将该柱面写成其它的参数方程 .

作过原点且以 $\{-1,0,1\}$为法矢量的平面 π，即

$$\pi: x-z=0. \tag{19}$$

由（16）式和（19）式求出新准线的方程：

$$x=\frac{1}{2}\cos u,\ y=\sin u,\ z=\frac{1}{2}\cos u. \tag{20}$$

所以包络面的参数方程是：

$$S_{包}:\vec{r}=\left\{\frac{1}{2}\cos u,\sin u,\frac{1}{2}\cos u\right\}+v\{-1,0,1\}=\left\{\frac{1}{2}\cos u-v,\sin u,\frac{1}{2}\cos u+v\right\} \tag{21}$$

消去参数 u 和 v 得包络面的一般方程：

$$S_{包}:(x+z)^2+y^2=1. \tag{22}$$

这正是曲面 S 的一般方程。

例 2 证明正螺面 $S:\vec{r}(u,v)=\{u\cos v,u\sin v,av\}$是不可展曲面

证法 1　将 S 写成直纹曲面的方程

$$S:\vec{r}=\{0,0,av\}+u\{\cos v,\sin v,0\}\hat{=}\vec{\rho}(v)+u\vec{e}(v),$$

u 线是直母线，因为 $\vec{\rho}'(v)=\{0,0,a\}$,

$$\vec{e}'(v)=\{-\sin v,\cos v,0\}$$

$$(\vec{\rho}'(v),\vec{e}(v),\vec{e}'(v))=\begin{vmatrix}0&0&a\\\cos v&\sin v&0\\-\sin v&\cos v&0\end{vmatrix}=a\neq 0 \tag{23}$$

所以由定理 1 知，S 不是可展曲面 .

证法 2　因为 $\mathrm{I}=du^2+(a^2+u^2)dv^2$，$\mathrm{II}=-\frac{2a}{\sqrt{a^2+u^2}}dudv$.

而 S 上任一点的 Gauss曲率为：

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}=-\frac{a^2}{(a^2+u^2)^2}\neq 0, \tag{24}$$

所以由定理 2 知，S 不是可展曲面．

证法 3　因为 u 线是直母线，

$$C_u:\vec{r}(u)=\{u\cos v_0,u\sin v_0,av_0\},$$

$$\vec{r}'(u)=\{\cos v_0,\sin v_0,0\},$$

又因为 $\vec{r}_u=\{\cos v,\sin v,0\}$，$\vec{r}_v=\{-u\sin v,u\cos v,a\}$，

所以法矢 $\vec{N}(u,v)=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\{a\sin v,-a\cos v,u\}$

沿 $C_u: v=v_0$，法矢为：$\vec{N}(u)=\{a\sin v_0,-a\cos v_0,u\}$，$\vec{N}'(u)=\{0,0,1\}$.

因为 $(\vec{r}'(u),\vec{N}'(u),\vec{N}(u))=\begin{vmatrix}\cos v_0 & \sin v_0 & 0\\ a\sin v_0 & -a\cos v_0 & u\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=-a\neq 0$　　(25)

所以曲面上任一点的法矢是：

$$\vec{N}(u,v)=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\{a\sin v,-a\cos v,u\}$$

沿准线 $C:u=0$ 曲面的法矢是：

$$\vec{N}(v)=\{a\sin v,-a\cos v,0\}$$

所以曲面沿准线的切平面的方程是；

$$a\sin v(x-u\cos v)-a\cos v(y-u\sin v)=0$$

即　$$\pi_v:(\sin v)x-(\cos v)y=0\qquad(26)$$

现在求切平面族 $\{\pi_v\}$ 的包络面，特征线的方程是：

$$\begin{cases}(\sin v)x-(\cos v)y=0,\\ (\cos v)x+(\sin v)y=0.\end{cases}$$

上式两边平方相加得切平面族的包络面的方程是：

$x^2+y^2=0$，即 $x=0$，$y=0$.　　(27)

故切平面族的包络面是 z 轴，它不是正螺面，因正螺面的一般方程是 $z=a\cdot\arctan\dfrac{y}{x}$.

由定理知，正螺面不是可展曲面．

由定理 4 知，可展曲面只有三类：柱面、锥面和一条曲线的切线曲面．易得：

（1）柱面 $S_{柱}:\vec{r}=\vec{\rho}(u)+v\vec{e}$ 的切平面的方程是：

$$\pi_u:\left[\vec{\rho}'(u)\times\vec{e}\right]\cdot\left[\vec{r}_1-\vec{\rho}(u)\right]=0.\qquad(28)$$

其中 $\vec{r}_1$ 是切平面上任一点的径矢，π_u 是单参数 u 的平面族，它的包络面是柱面 $S_柱$.

（2） 锥面 $S_锥$: $\vec{r}=\vec{\rho}_0+v\vec{e}(u)$ 的切平面方程是：

$$\pi_u : \left[\vec{e}'(u)\times\vec{e}(u)\right]\cdot\left[\vec{r}_1-\vec{\rho}_0\right]=0. \qquad (29)$$

它是单参数 u 的平面族，它的包络面是锥面 $S_锥$.

(3) 曲线 C : $\vec{\rho}=\vec{\rho}(u)$ 的切线曲面方程是：

$$S_切 : \vec{r}(u,v)=\vec{\rho}(u)+v\vec{\rho}'(u).$$

$S_切$ 的切平面方程是：

$$\pi_u : \left[\vec{\rho}'(u)\times\vec{\rho}''(u)\right]\cdot\left[\vec{r}_1-\vec{\rho}(u)\right]=0. \qquad (30)$$

它也是单参数 u 的平面族，它的包络面是 $S_切$.

总之，可展曲面就是它的切平面族的包络面 .

参考文献：

[1] 孙国汉，赵培标，刘以钧 . 可展曲面的条件 [J]. 阜阳师范学院院报 .1996.

[2] 纪永强 . 微分几何与微分流形 [M]. 北京 : 高等教育出版社， 2000:114-123.

[3] 梅向明，黄敬之 . 微分几何 . 高等教育出版社 . 2003.12