直纹面成为可展曲面的充要条件

摘要　可展曲面是特殊的直纹面，直纹面成为可展曲面必须满足一定的条件.本文根据可展曲面的定义，从该曲面是否为单参数曲面族的包络、高斯曲率是否为零、直纹面是否可以展为平面等几个方面，对直纹面成为可展曲面的几个充要条件作了初步的探讨.

关键词　直纹面；可展曲面；包络；高斯曲率；等距对应

1 直纹面与可展曲面的定义

1.1 直纹面的定义

由直线的轨迹所成的曲面称为直纹面，这些直线称为直纹面的直母线.　直纹面上取一条曲线(C)，它的参数表示是

$$\vec{a}=\vec{a}(u).$$

曲线(C)和所有直母线相交，即过曲线(C)的每一点，有一条直母线，曲线(C)称为直纹面的导线.

设$\vec{b}(u)$是过导线(C)上$\vec{a}(u)$点的直母线上的单位向量.导线(C)上$\vec{a}(u)$点到直母线任一点$P(u,v)$的距离为v，则向径$\vec{OP}$可以表示成

$$\vec{r}=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u) \qquad (1),$$

这就是直纹面的参数表示.

1.2 可展曲面的定义

直纹面上任一点$P(u,v)$的法向量$\vec{n}$平行于$\vec{r}_u\times\vec{r}_v$，从（1）容易算出：

$$\vec{r}_u=\vec{a}'(u)+v\vec{b}'(u),\quad \vec{r}_v=\vec{b}(u),$$

所以

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\vec{a}'\times\vec{b}+v\vec{b}'\times\vec{b}.$$

当点在曲面上沿一条直线移动时有两种情形：

情形 1：$\vec{a}'\times\vec{b}$与$\vec{b}'\times\vec{b}$不平行，即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')\neq 0$.

情形 2：$\vec{a}'\times\vec{b}$与$\vec{b}'\times\vec{b}$平行，即$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0$.

对于第 2 种情形的直纹面我们称为可展曲面，也就是说，可展曲面是沿一条直母线有同一个切平面的直纹面.

2 直纹面成为可展曲面的几个充要条件

2.1 定理 1[2]：一个曲面是可展曲面$\Leftrightarrow$该曲面或是柱面，或是锥面，或是任意空间曲线的切线曲面.

证明：$\Leftarrow$：由于柱面、锥面、任意空间曲线的切线曲面是直纹面，所以直纹面

的参数方程为

$$\vec{r}=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u).$$

(1) 因为柱面的$\vec{b}(u)=$常向量，所以$\vec{b}'(u)=0$. 则

$$(\vec{a}'(u),\vec{b}(u),\vec{b}'(u))=(\vec{a}'\times\vec{b})\vec{b}'=0.$$

故柱面是可展曲面.

(2) 锥面的腰曲线为一点，导线也为一点，故$\vec{a}(u)=$常向量，所以$\vec{a}'(u)=0$.

从而

$$(\vec{a}'(u),\vec{b}(u),\vec{b}'(u))=\vec{a}'\cdot(\vec{b}\times\vec{b}')=0.$$

故锥面是可展曲面.

(3) 任意空间曲线的切线曲面的切线$\vec{a}'(u)//\vec{b}(u)$，故

$$\vec{a}'(u)\times\vec{b}(u)=0,$$

从而

$$(\vec{a}'(u),\vec{b}(u),\vec{b}'(u))=0.$$

任意空间曲线的切线曲面是可展曲面.

$\Rightarrow$：对于可展曲面有

$$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0,$$

取腰曲线为导线，即此时有

$$\vec{a}'\cdot\vec{b}'=0.$$

(1) 当$\vec{a}'=0$时，$\vec{a}(u)=$常向量，这表示为腰曲线退化为一点，也就是说，各条直母线上的腰点都重合. 我们得到以所有母线上公共的腰点为顶点的锥面.

(2) 当$\vec{a}'\neq 0$时，由条件$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0$，$\vec{a}'\cdot\vec{b}'=0$并且$|\vec{b}|=1$，$\vec{b}\perp\vec{b}'$得到

$$\vec{a}'(u)//\vec{b}(u).$$

这时得到切于腰曲线的切线曲面.

(3) 当$\vec{b}'=0$时，$\vec{b}(u)=$常向量，这表示柱面.

例 1 [1] 求证正螺面$\vec{r}=\{v\cos u,\sin u,au+b\}$是不可展曲面.

证明：令$\vec{r}=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$,

则所给的曲面可写为

$$\vec{r}=\{0,0au+b\}+v\{\cos u,\sin u,0\}.$$

则

$$\vec{a}=\{0,0,au+b\},\quad \vec{b}=\{\cos u,\sin u,0\},$$

从而

$$\vec{a}'=\{0,0,a\},\quad \vec{b}'=\{-\sin u,\cos u,0\},$$

则 $\left(\vec{a}'(u),\vec{b}(u),\vec{b}'(u)\right)=\left(\vec{a}'\times\vec{b}\right)\vec{b}'$

$$=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 0 & 0 & a\\ \cos u & \sin u & 0\end{vmatrix}\cdot\vec{b}'$$

$$=\{-a\sin u,a\cos u,0\}\cdot\{-\sin u,\cos u,0\}$$

$$=a.$$

当 $\vec{a}'\neq 0$ 时，有 $\left(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}'\right)\neq 0$.

故正螺面 $\vec{r}=\{v\cos u,\sin u,au+b\}$ 是不可展曲面.

2.2 定理 2[4]：设直纹面 S 的参数方程是 $\vec{r}=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$，则 S 是可展曲面的充分必要条件是，向量函数 $\vec{a}(u)$，$\vec{b}(u)$ 满足方程 $\left(\vec{a}'(u),\vec{b}(u),\vec{b}'(u)\right)=0$.

*

证明：对直纹面 S 的参数方程求导得到

$$\vec{r}_u=\vec{a}'(u)+v\vec{b}'(u),\quad \vec{r}_v=\vec{b}(u),$$

因此曲面的法向量是

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\left(\vec{a}'(u)+v\vec{b}'(u)\right)\times\vec{b}(u).$$

如果 S 是可展曲面，则在直母线上的任意两个不同点 (u,v_1) 和 (u,v_2)，其中 $v_1\neq v_2$，曲面 S 的法向量应该互相平行，即

$$\left(\vec{a}'(u)+v_1\vec{b}'(u)\right)\times\vec{b}(u)//\left(\vec{a}'(u,)+v_2\vec{b}'\right)\times\vec{b}(u)$$

根据向量的双重向量积的公式

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\vec{a},$$

我们有 $\left(\left(\vec{a}'(u)+v_1\vec{b}'(u)\right)\times\vec{b}(u)\right)\times\left(\left(\vec{a}'(u,)+v_2\vec{b}'\right)\times\vec{b}(u)\right)$

$$=\left(\vec{a}'(u)+v_1\vec{b}'(u)\right)\left(\left(\vec{a}'(u)+v_2\vec{b}'(u)\right)\times\vec{b}(u)\right)\vec{b}(u)$$

$$=\left(\left(\vec{a}'(u)+v_1\vec{b}'(u)\right)\left(\vec{a}'(u)+v_2\vec{b}'(u)\right)\vec{b}(u)\right)\vec{b}(u)$$

$$=(v_1-v_2)\left(\vec{a}'(u),\vec{b}(u),\vec{b}'(u)\right)\vec{b}(u).$$

由于$(u,v_1)\vec{r}_u\times\vec{r}_v=(v_1-v_2)\vec{b}(u)\neq 0$，所以上式末端的混合积为零，即*式成立.上面的论证过程是可逆的，因此*式也是直纹面为可展曲面的充分条件，定理成立.

例 2[2]证明曲面$\vec{r}=\{\cos v-(u+v)\sin v,\sin v+(u+v)\cos v,u+2v\}$是可展曲面.

证明：令$\vec{r}=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$，

则由题得

$$\vec{a}=\{\cos v-v\sin v,\sin v+v\cos v,2v\},\quad \vec{b}=\{-\sin v,\cos v,1\},$$

则

$$\vec{a}'=\{-2\sin v-v\cos v,2\cos v-v\sin v,2\},\quad \vec{b}'=\{-\cos v,-\sin v,0\},$$

则$\left(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}'\right)=\left(\vec{a}'\times\vec{b}\right)\vec{b}'$

$$=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ -2\sin v-v\cos v & 2\cos v-v\sin v & 2\\ -\sin v & \cos v & 0\end{vmatrix}\cdot\vec{b}'$$

$$=\{-v\sin v,v\cos v,-v\}\cdot\vec{b}'$$

$$=v\cos v\sin v-v\cos v\sin v-v\cdot 0$$

$$=0.$$

即$\left(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}'\right)=0$.

故所给曲面为可展曲面.

2.3 定理 3[2]：曲面上的曲线是曲率线的充分必要条件是沿此曲线的曲面的法线组成一可展曲面.

证明：设曲面上的曲线$\vec{a}=\vec{a}(s)$是曲率线，则根据罗德里格定理可知

$$d\vec{n}=-\kappa_1 d\vec{a},$$

即

$$\dot{\vec{n}}(s)=-\kappa_1(s)\dot{\vec{a}}(s),$$

其中$\kappa_1(s)$为对应的主曲率.

由此得出$\dot{\vec{n}}\,//\,\dot{\vec{a}}$，所以有

$$(\dot{\vec{a}},\vec{n},\dot{\vec{n}})=0.$$

因此沿此曲线，曲面的法线组成的曲面$\vec{r}=\vec{a}+v\vec{n}$是可展曲面.

反之，设$\vec{a}=\vec{a}(s)$是曲面上一条曲线. 曲面沿此曲线的法线构成一个可展曲面

$$\vec{r}=\vec{a}+v\vec{n}.$$

于是有

$$(\dot{\vec{a}},\vec{n},\dot{\vec{n}})=0.$$

由于$\vec{n}$是单位向量，所以$\vec{n}\perp\dot{\vec{n}}$. 而且$\dot{\vec{a}}$是曲面的切向量，因而$\dot{\vec{n}}//\dot{\vec{a}}$.

由此可得$\dot{\vec{n}}//\dot{\vec{a}}$或$d\vec{n}//d\vec{a}$. 根据罗德里格定理, $d\vec{a}$是主方向.

因此曲线$\vec{a}=\vec{a}(s)$是曲面的曲率线.

例 3[1]求证挠曲线的副法线曲面不是可展曲面.

证明：设有空间挠曲线$\vec{a}=\vec{a}(s)$,

曲线的副法线曲面为

$$\vec{r}=\vec{a}(s)+v\vec{\gamma}(s),\quad \dot{\vec{\gamma}}=-\tau\vec{\beta},$$

则

$$(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=(\vec{a}',\vec{\gamma},-\tau\vec{\beta}=(\vec{a}\times\vec{\gamma}))(-\tau\vec{\beta})=\tau\neq 0,$$

故副法线曲面不是可展曲面.

2.4 定理 4[4]：一曲面为可展曲面的充要条件是此曲面为单参数平面族的包络.

证明：充分性：单参数平面族为

$$A(\alpha)x+B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0.$$

则特征线方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=A(\alpha)x++B(\alpha)y+C(\alpha)z+D(\alpha)=0 \\ F_\alpha(x,y,z)=A'(\alpha)x+B'(\alpha)y+C'(\alpha)z+D'(\alpha)=0 \end{cases}.$$

它是平面与平面的交线，即为直线，所以这些特征线的轨迹为直纹面，即包络面为直纹面，下证是可展的.

由于包络面沿特征线（现为直母线）与族中曲面（平面）相切，所以此平面是直母线所有点的公共切平面，即沿一条直母线有同一个切平面，按可展曲面的定义，它是可展的.

必要性：设曲面可展. 由于直纹面的坐标曲线为直母线和与导线平行的曲面，所以对于可展曲面，它的直母线就是v线（u=常数），当u变化时，得到v族线，所以可展曲面可以看成是由单参数u的直母线族所构成的，即可展区面的直母线族仅与单参数有关，而且经过给定的母线，可引唯一的切平面，因此，所有切于可展曲面的切平面也只与一个参数有关，这就是说可展曲面在它每一点处

切于它的单参数平面族中的某一平面，即可展曲面是这个单参数平面族的包络.

例 4[4] 求证可展曲面$x^2+(y-2)^2=1$是单参数平面族$x\cos\alpha+y\sin\alpha-z\sin\alpha=1$的包络.

证明：先求所给单参数平面族的$x\cos\alpha+y\sin\alpha-z\sin\alpha=1$包络.

令

$$F(x,y,z,\alpha)=x\cos\alpha+y\sin\alpha-z\sin\alpha-1,$$

则

$$F_\alpha(x,y,z,\alpha)=-x\sin\alpha+y\cos\alpha-z\cos\alpha.$$

将方程组中$F=0$，$F_\alpha=0$的参数α消去得到$x^2+(y-2)^2=1$.

即证得可展曲面$x^2+(y-2)^2=1$是单参数平面族$x\cos\alpha+y\sin\alpha-z\sin\alpha=1$的包络.

2.5 定理 5[2]：一个曲面为可展曲面的充要条件是它的高斯曲率恒等于零.

证明：如果曲面是可展的，则沿同一直母线的单位法向量$\vec{n}$不变，即$d\vec{n}=0$，零向量与任意另外的向量共线，因此有$d\vec{n}\,//\,d\vec{r}$.

根据罗德里格定理，沿直母线的方向是主方向，并且主曲率$\kappa_1=0$（或$\kappa_2=0$），

于是$K=\kappa_1\kappa_2\equiv0$.

反之，如果$K\equiv0$，则$K=\kappa_1\kappa_2\equiv0$. 设$\kappa_2=0$，这时对应它的方向是渐进方向也是主方向，所以这一族渐进曲线也是曲率线.

根据罗德里格定理,沿渐进曲线有

$$d\vec{n}=-\kappa_2 d\vec{r},$$

因而$d\vec{n}=0$，即$\vec{n}=$常向量.

这说明单位法向量沿渐进曲线保持常向量. 因此，在所有渐进曲线上曲面的法线都互相平行.

又对于渐进曲线的切向量$d\vec{r}$有$d\vec{r}\cdot\vec{n}=0$.

所以沿渐进曲线有$\vec{r}\cdot\vec{n}=$常向量.

设$\vec{r}_0$是渐进曲线上某定点M_0的向径，则由以上结果有$\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{r}_0\cdot\vec{n}$，

即$(\vec{r}-\vec{r})_0\cdot\vec{n}=0$.

由此得到连接渐进曲线上的定点M_0和渐进曲线上任意点的向量$\vec{r}-\vec{r}_0$垂直

于 $\vec{n}$，因而必在点 M_0 的切平面上，所以渐进曲线的所有点都在点 M_0 的切平面上.

于是，这个包含渐进曲线而且垂直于沿它的常法向量 $\vec{n}$ 的平面，就是渐进曲线所有点的切平面. 换句话说，对同一条渐进曲线上的点，其切平面是同一个. 由此可见，曲面是一个单参数平面族的包络面，因而是可展曲面.

例 5[2]求取面 $\vec{r}=\{\cos v,\sin v,u+v\}$的高斯曲率.

解：令 $\vec{r}=\vec{a}(v)+u\vec{b}(v)$，

则所给曲面为

$$\vec{r}=\{\sin v,\cos v,v\}+u\{0,0,1\},$$

则

$$\vec{a}=\{\sin v,\cos v,v\},\quad \vec{b}=\{0,0,1\}$$

则

$$\vec{a}'=\{\cos v,-\sin v,1\},\quad \vec{b}'=\{0,0,0\},$$

则 $(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=(\vec{a}'\times\vec{b})\vec{b}'$

$$=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ \cos v & -\sin v & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\vec{b}'$$

$$=0.$$

即 $(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}')=0$.

故该曲面是可展曲面，从而其高斯曲率为 0.

2.6 定理 6[2]：可展曲面可以与平面成等距对应（简称展为平面）.

证明:在直角坐标系 (x,y)下，平面的第一基本形式为

$$I=dx^2+dy^2,$$

在极坐标系 (ρ,θ)下，通过变换 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 得第一基本形式

$$I=d\rho^2+d\theta^2,$$

（1） 柱面：$\vec{r}=\vec{a}(s)+v\vec{b}(s)$

其中 $\vec{b}$ 为沿柱面母线的单位常向量，$\vec{a}=\vec{a}(s)$是与柱面母线正交的一条曲线，s 是它的弧长. 于是

$$\vec{r}_s=\dot{\vec{a}}=\vec{\alpha},\quad \vec{r}_v=\vec{b},$$

$$E=\vec{r}_s\vec{r}_s=\vec{\alpha}^2=1,\quad F=\vec{r}_s\vec{r}_v=0,\quad G=\vec{r}_v\vec{r}_v=1$$

从而第一基本形式为

$$I=ds^2+dv^2.$$

这与上述平面的第一基本形式有相同的形式，因此柱面可以展为平面，.

(2)锥面：$\vec{r}=\vec{a}_0(s)+v\vec{b}(s)$，

其中$\vec{a}_0$为常向量，$\vec{b}(s)$为锥面母线上的单位向量，

而s是单位球面曲线$\vec{b}=\vec{b}(s)$的弧长，则有

$$\vec{b}^2=1,\quad \vec{b}\cdot\dot{\vec{b}}=0,\quad \dot{\vec{b}}^2=1,$$

于是

$$\vec{r}_s=v\dot{\vec{b}},\quad \vec{r}_v=\vec{b},$$

$$E=\vec{r}_s\vec{r}_s=v^2,\quad F=\vec{r}_s\vec{r}_v=0,\quad G=\vec{r}_v\vec{r}_v=1$$

第一基本形式为

$$I=v^2ds^2+dv^2,$$

这与上述平面的第一基本形式有相同的形式，因此锥面可以展为平面.

（3） 切线曲面：$\vec{r}=\vec{a}(s)+v\vec{\alpha}(s)$

其中$\vec{\alpha}(s)$为曲线$\vec{a}=\vec{a}(s)$的切向量$\vec{\alpha}=\dot{\vec{a}}(s)$，$s$为曲线$\vec{a}(s)$的弧长.

于是

$$\vec{r}_s=\vec{\alpha}+v\kappa\vec{\beta},\quad \vec{r}_v=\vec{\alpha}(s),$$

$$E=\vec{r}_s\vec{r}_s=1+v^2\kappa^2,\quad F=\vec{r}_s\vec{r}_v=1,\quad G=\vec{r}_v\vec{r}_v=1,$$

有

$$I=1+v^2\kappa^2ds^2+2dsdv+dv^2.$$

上式中出现曲率，但没有挠率，所以如果两条曲线曲率相同，即使挠率不同，它们的切线曲面也有相同的第一基本形式，即是等距的，由此，现给定曲率和挠率分别为$\kappa=\kappa(s)$，$\tau=\lambda\tau(s)$，$(0\le\lambda<1)$由曲线论基本定理，除空间位置差别外，

确定了唯一一条曲线(c)，当λ从1连续变到0时，得到一个连续的曲线的曲线族$\{c_\lambda\}$，这些曲线族的切线曲面也变动，但由于曲率不变，因此这些切线曲面是

等距的. 当$\lambda=0$是$\tau=0$，此时曲线为平面曲线，但平面曲线的切线还在此平面上，这时的切线曲面就是平面曲线所在的平面，但第一基本形式不变，因此切线曲面也可展成曲面.
又由前面结论，可展区面只有以上三种，综上所述，命题成立.

例 6[3] 证明曲面 $\vec{r}=\left\{u^2+\frac{1}{3}v,2u^3+uv,u^4+\frac{2}{3}u^2v\right\}$可以展为平面.

证明：令$\vec{r}=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$，

则所给曲面为$\vec{r}=\left\{u^2,2u^3,u^4\right\}+v\left\{\frac{1}{3},u,\frac{2}{3}u^2\right\}$，

则

$$\vec{a}=\left\{u^2,2u^3,u^4\right\},\quad \vec{b}=\left\{\frac{1}{3},u,\frac{2}{3}u^2\right\},$$

从而

$$\vec{a}'=\left\{2u,6u^2,4u^3\right\},\quad \vec{b}'=\left\{0,1,\frac{4}{3}u\right\},$$

则$\left(\vec{a}'(u),\vec{b}(u),\vec{b}'(u)\right)=\left(\vec{a}'\times\vec{b}\right)\vec{b}'$

$$=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 2u & 6u^2 & 4u^3\\ \frac{1}{3} & u & \frac{2}{3}u^2\end{vmatrix}\cdot\vec{b}'$$

$$=0\cdot\vec{b}'$$

$$=0.$$

即$\left(\vec{a}',\vec{b},\vec{b}'\right)=0$

故曲面是可展曲面，从而可以展为平面.

参考文献：

[1]王幼宁、刘继志. 微分几何讲义[M]. 本经师范大学出版社，2007 年 1 月第一版
[2]梅向明、黄敬之. 微分几何[M]. 高等教育出版社，2003 年 12 月第三版
[3]黄振荣、杨文茂. 微分几何[M]. 武汉大学出版社，2008 年 9 月第一版
[4]陈维桓. 微分几何[M]. 北京大学出版社，2006 年 6 月第 1 版