CPE Lyon 3ETI 2024-2025

Probabilités continues : TP4

Exercice 0

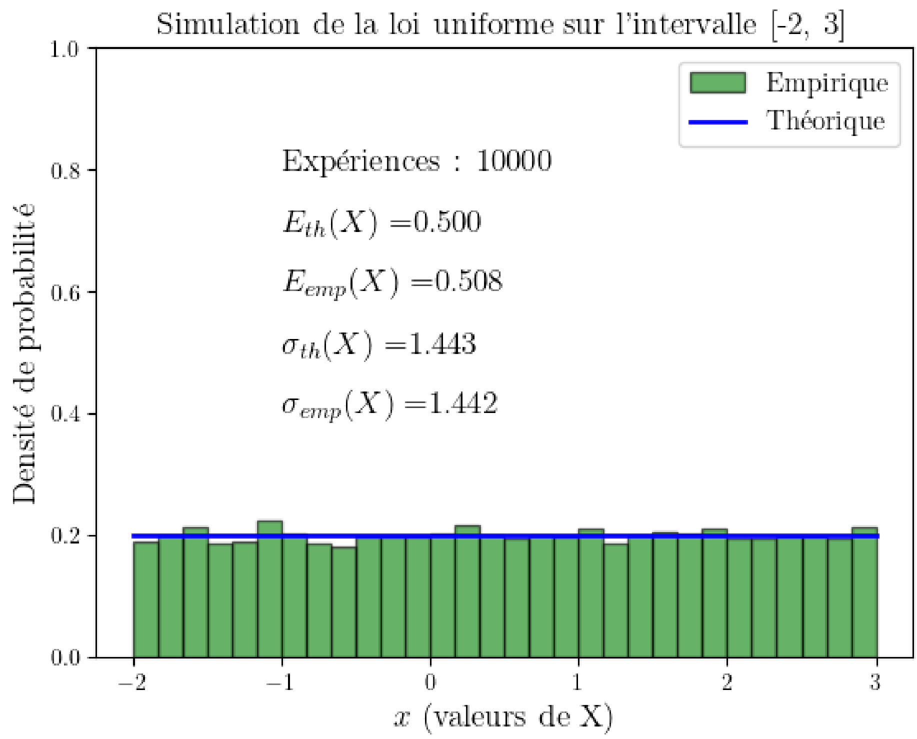
Télécharger sur e-campus le script python `tp4_ex0.ipynb`, l'exécuter et interpréter les résultats observés.

Exercice 1

On considère une variable aléatoire continue X suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a = -2$ et $b = 3$. On souhaite faire une simulation numérique de cette loi. Ecrire un script python qui permet de :

- simuler la loi de probabilité de X
- afficher, sur un même graphique, son histogramme empirique et la densité de probabilité théorique (cf. figure ci-dessous)
- calculer et afficher les moyennes (empirique et théorique)
- calculer et afficher les écarts types (empirique et théorique)
-

<u>Attention</u> : le programme doit être générique de sorte à rester valable lorsqu'on change les valeurs de N, a et b.



Exercice 2 : Simulation de lois continues par la méthode d'inversion

Nous avons vu (et démontré) en cours le théorème suivant :

> Soit X une variable aléatoire continue de fonction de répartition F_X. Alors la variable aléatoire Y définie par $Y = F_X(X)$ suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

Ainsi, quelle que soit la loi de probabilité, lorsqu'on transforme une variable aléatoire X par sa propre fonction de répartition F_X, on obtient une variable aléatoire Y qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Donc toute variable aléatoire X peut être simulée à partir d'une autre variable aléatoire Y distribuée de façon uniforme sur $[0,1]$ par la formule :

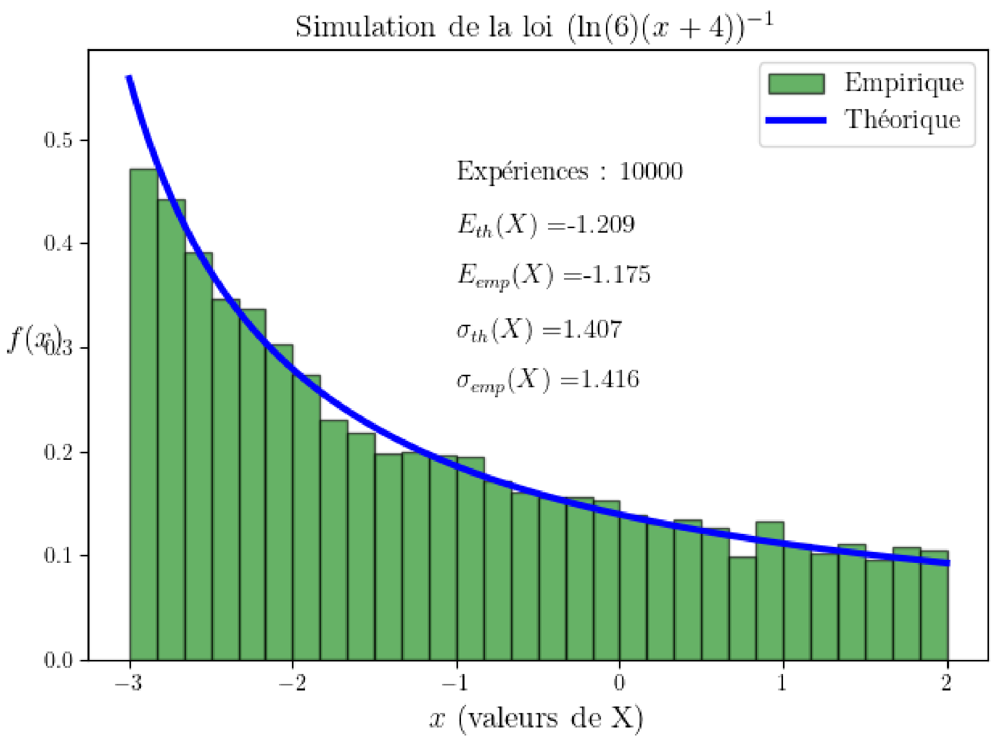
$$X = F_X^{-1}(Y)$$

1) On considère la variable aléatoire X de densité de probabilité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x+4}, & -3 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

En vous aidant des résultats obtenus à l'exercice 5 du chapitre I du cours de probabilités continues, écrire un programme permettant de :

- simuler la loi de X à l'aide de la méthode d'inversion (on prendra un échantillon de taille $n = 5000$ dans un premier temps puis on augmentera cette valeur pour affiner les résultats).
- tracer sur un même graphique :
  - l'histogramme de la « densité » simulée
  - la courbe de la densité théorique.
- ajouter dans le graphique précédent les valeurs empiriques et théoriques de l'espérance mathématique et de l'écart type de X (voir figure ci-dessous).



2) Faire une simulation de la loi de probabilité continue définie par la densité :

$$f_X(x) = \frac{1}{4}\begin{cases} x, & x \in [0, 2[\\ 4 - x, & x \in [2, 4[\end{cases}$$

Se reporter à la section 2 du chapitre I du cours de probabilités continues dans laquelle cette loi a été entièrement étudiée.

<u>Indications</u> : on peut voir la variable aléatoire X comme un ensemble de deux variables aléatoires X_1 et X_2 : l'une de densité $x/4$ sur l'intervalle $[0,2]$, l'autre de densité $(4-x)/4$ sur l'intervalle $[2,4]$. Il faut donc déterminer l'expression de la fonction de répartition d'abord sur l'intervalle $[0,2]$ et en déduire X_1, puis sur l'intervalle $[2,4]$ et en déduire X_2. Pour finir, on calcule X par concaténation de X_1 et X_2 (utiliser la fonction `numpy.concatenate`)