CPE Lyon 4ETI 2024-2025

Probabilités discrètes : TP3

Exercice 1 : Bombardements et simulation de la loi de Poisson (Siméon-Denis Poisson : 1781-1840)

Pendant la seconde guerre mondiale le sud de Londres a été bombardé de 537 impacts de bombes. L'Etat Major se pose alors la question : ces impacts sont-ils le fruit du hasard ? ou certaines zones sont-elles spécifiquement visées ? Pour le savoir, on peut découper la surface bombardée en N zones (cases) de même aire et on compte le nombre de surfaces ayant reçu 0 impact, 1 impact, 2 impacts, etc …, on affiche alors l'histogramme représentant le nombre de cases en fonction du nombre d'impacts. Si l'histogramme obtenu est proche de celui d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 537/N$ (nombre moyen d'impacts par zone) alors cela signifie que les bombardements ont été faits au hasard.

Objectif : simuler un bombardement aléatoire de 537 impacts sur une surface carrée contenant $24 \times 24 = 576$ cases.
Indications :

a) Création de la zone de bombardements

```
ncases=24;
plt.figure()
cx = np.arange(ncases + 1)
cy = np.arange(ncases + 1)
CX, CY = np.meshgrid(cx, cy)
plt.plot(CX, CY, 'k')
plt.plot(CX.T, CY.T, 'k')
```

b) Bombardements :

- initialiser à zéros une matrice M (matrice des impacts) de dimensions `ncases` × `ncases`
- dans une boucle `for` allant de 1 à `nimpacts`=537 générer deux nombres aléatoires représentant les coordonnées du point d'impact et incrémenter le nombre d'impacts dans la matrice des impacts
- après la boucle `for`, ajouter la ligne `M=M.flatten()` et commenter le résultat obtenu
- afficher alors l'histogramme représentant le nombre de cases en fonction du nombre d'impacts (voir Fig. 1, histogramme bleu)
- afficher les impacts dans la zone de bombardements (voir Fig. 2)

c) Comparaison avec la loi de Poisson théorique :

- afficher l'histogramme théorique de la loi de Poisson dont le paramètre est égal au nombre moyen d'impacts par case (voir Fig. 1, histogramme vert)
- commenter le résultat
- donner l'écart type de la loi théorique
- vérifier alors que l'écart type empirique est proche de celui de la loi théorique

d) Modifier votre code pour faire en sorte que les points d'impact ne soient plus tout à fait le fruit du hasard puis commenter le résultat obtenu.

Attention à ne pas se tromper dans l'interprétation de cette simulation ; nous sommes en présence ici de deux lois de probabilité : une loi uniforme et une loi de Poisson. En effet, la probabilité d'impact est partout la même (loi uniforme), mais cela a pour conséquence que la variable aléatoire qui représente le nombre d'impacts suit, elle, une loi de Poisson.

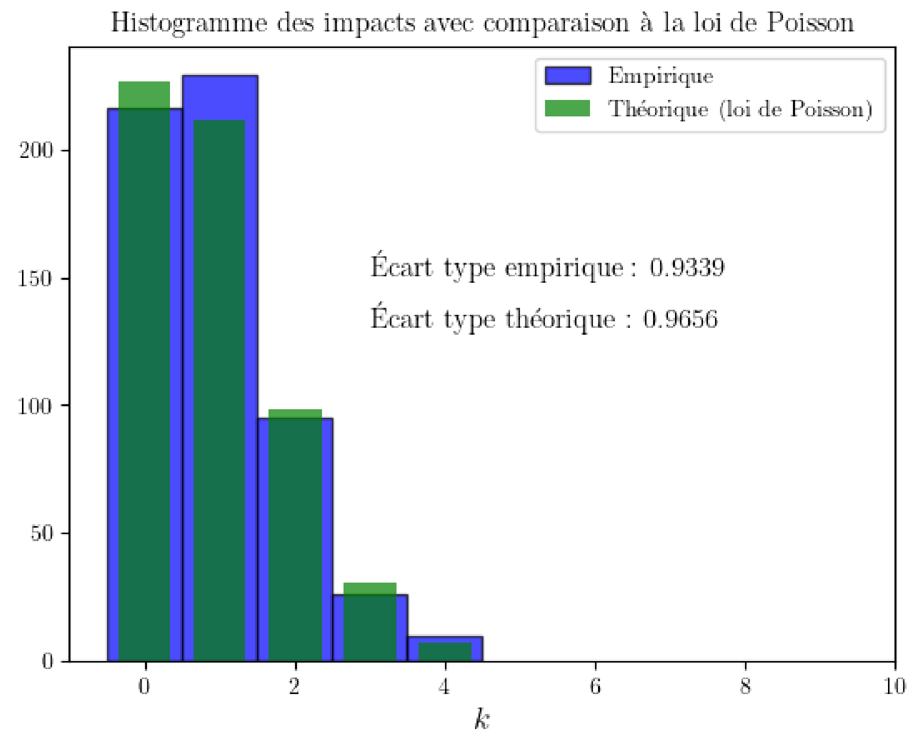

Figure 1 : Loi de probabilité (empirique et théorique) suivi par la variable aléatoire égale au nombre d'impacts. Attention, ici l'axe des ordonnées représente des effectifs (à préciser) et non des probabilités.

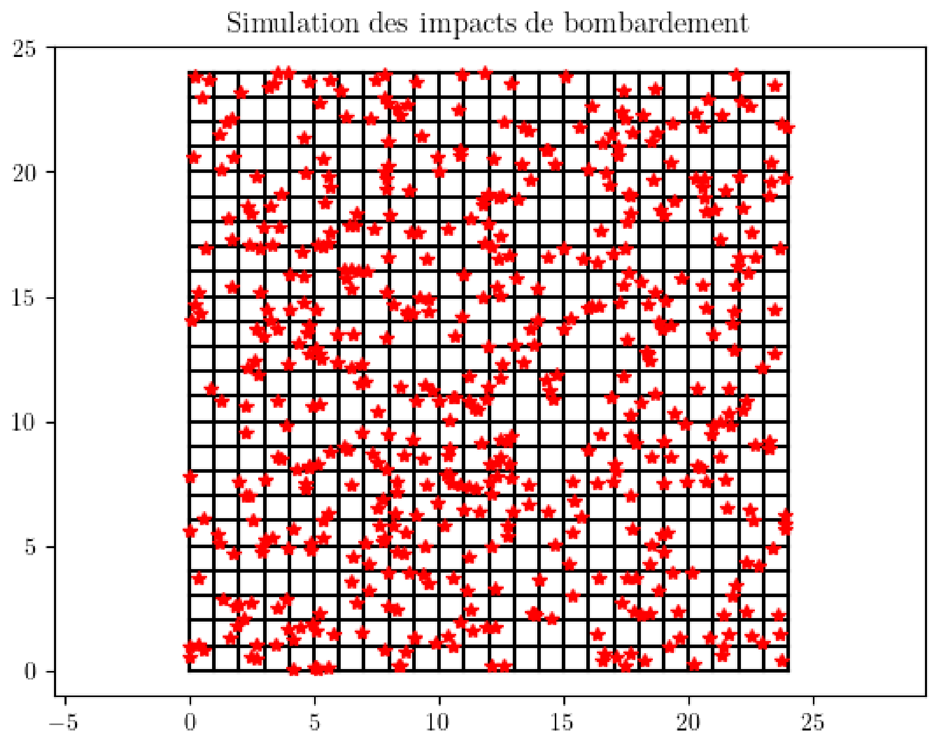

Figure 2 : Impacts

Exercice 2

1) Soit $X \sim Geo(\lambda)$ et $Y \sim Geo(\mu)$ deux variables aléatoires indépendantes. Montrer, par un calcul « à la main » que la variable aléatoire $Z = \min(X, Y)$ suit également une loi géométrique de paramètre p que l'on exprimera en fonction de λ et μ.
2) Vérifier ce résultat à l'aide d'une simulation. On pourra procéder de la façon suivante :
   - Simuler la loi de X, c'est-à-dire une loi géométrique de paramètre $\lambda = 0{,}3$ (par exemple), afficher son histogramme (ainsi que l'histogramme théorique en superposition)
   - Simuler la loi de Y, c'est-à-dire une loi géométrique de paramètre $\mu = 0{,}5$ (par exemple), afficher son histogramme (ainsi que l'histogramme théorique en superposition)
   - Simuler la loi de $Z = \min(X, Y)$, c'est-à-dire une loi géométrique de paramètre p (dont la valeur a été trouvée à la question 1), afficher son histogramme (ainsi que l'histogramme théorique en superposition)