

Exercice 1 : Simulation des résultats de l'exercice 10 chapitre V du cours de probabilités discrètes

Reprenons l'énoncé de l'exercice 10 du chapitre V du cours de probabilités discrètes :

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . Un joueur extrait au hasard une poignée de 2 boules. On note X la variable aléatoire égale au plus petit des numéros obtenus.

On a montré que la loi de probabilité de X peut s'écrire :

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

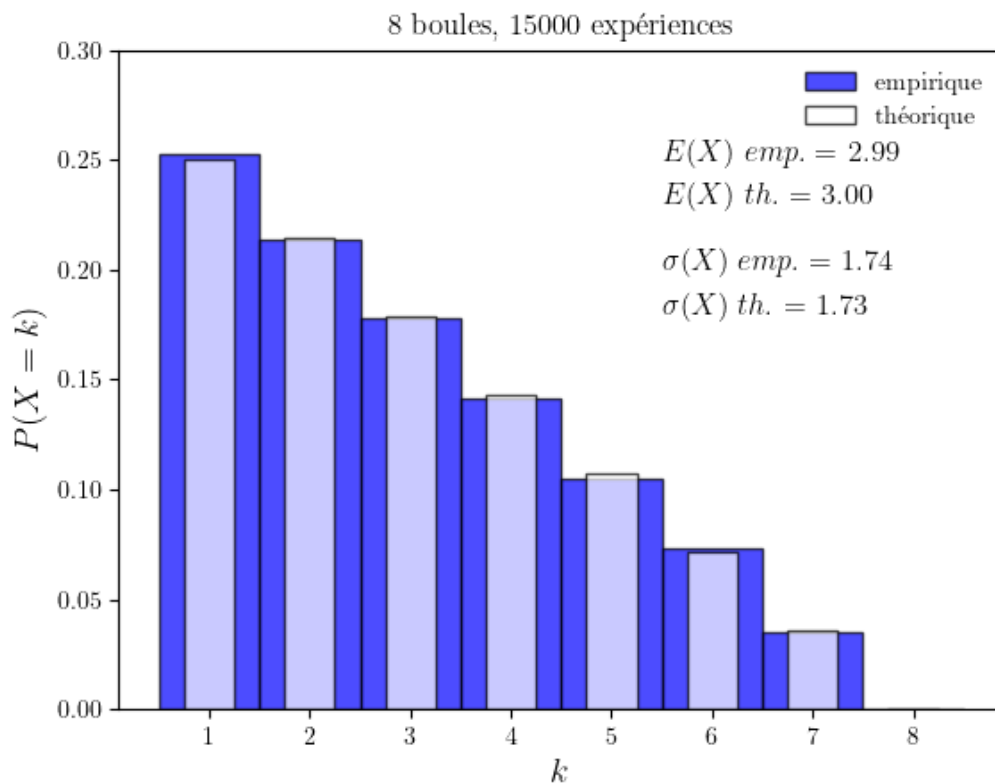
On a également montré que l'espérance mathématique et la variance de X sont :

$$E(X) = \frac{n+1}{3} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2 - n - 2}{18}$$

On souhaite faire une simulation de cette loi à l'aide d'un programme Matlab. Ce programme doit permettre de :

- simuler la loi de X
- afficher l'histogramme empirique de la loi simulée
- afficher l'histogramme théorique (en superposition de l'histogramme empirique)
- calculer et afficher l'espérance mathématique empirique de X (fonction `numpy.mean`)
- calculer et afficher l'écart type empirique de X (fonction `numpy.std`)
- calculer et afficher l'espérance mathématique et l'écart type théoriques de X

Pour $n = 8$ boules, l'exécution du programme doit donner la figure suivante :



Exercice 2 : Simulations des lois de probabilité usuelles discrètes

Objectif : Simuler la loi uniforme, la loi de Bernoulli, la loi binomiale et la loi géométrique et comparer avec les formules théoriques.

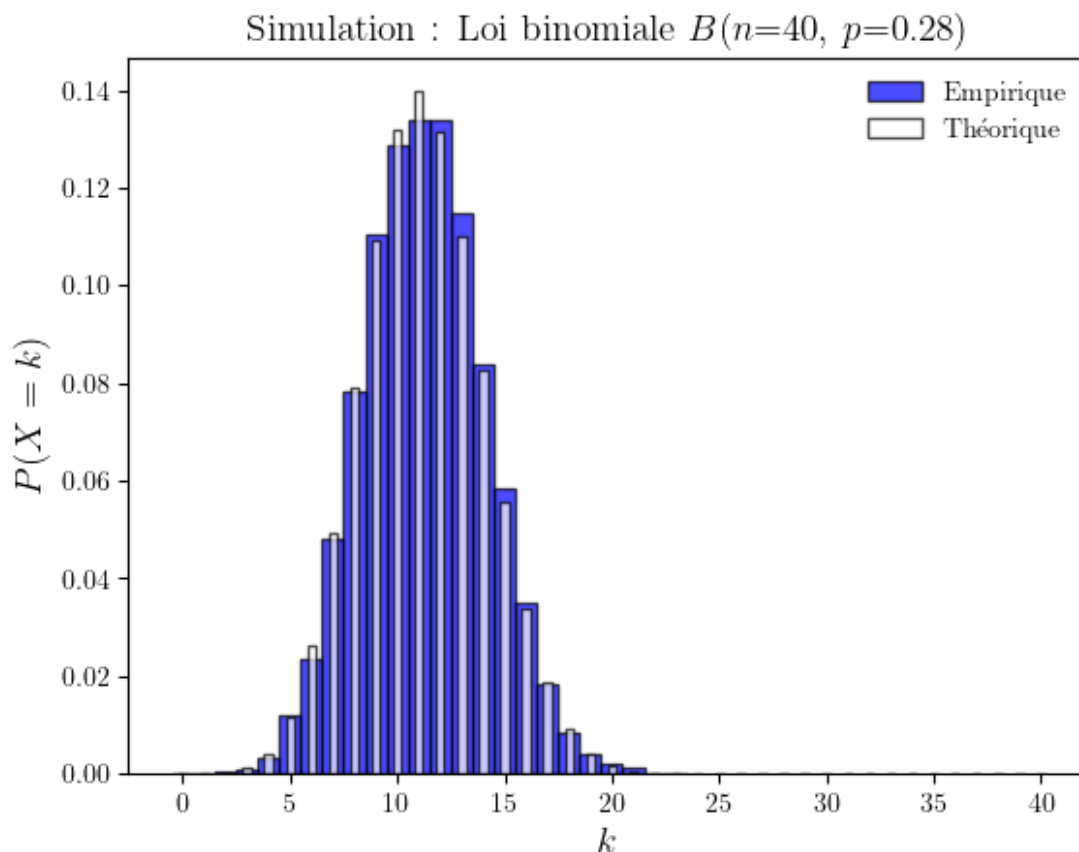
1) Créer les fonctions suivantes :

- `LoiUniforme(n)` : retourne un nombre entier aléatoire entre 0 et n
- `LoiBernoulli(p)` : génère un nombre aléatoire entre 0 et 1, retourne 1 si ce nombre est inférieur à p ou 0 dans le cas contraire
- `LoiBinomiale(n,p)` : retourne le nombre de succès d'un événement de probabilité p répété n fois (utiliser la fonction `LoiBernoulli(p)`).
- `LoiGeometrique(p)` : retourne le nombre d'événements ayant eu lieu avant que le 1^{er} succès de probabilité p ne se produise (utiliser la fonction `LoiBernoulli(p)`).

2) Tests

On répète un grand nombre de fois l'expérience associée à chacune des lois afin de comparer les fréquences empiriques obtenues avec les fréquences théoriques.

Par exemple, pour tester la loi binomiale de paramètres n et p , on peut appeler 10000 fois la fonction `LoiBinomiale(n,p)` et « compter » les effectifs correspondants à 0 succès, les effectifs correspondants à 1 succès, etc ... jusqu'aux effectifs correspondant à n succès. Le programme doit afficher sur un même graphique les résultats empiriques et les résultats théoriques (voir figure ci-dessous) afin de pouvoir faire aisément la comparaison et apprécier si la simulation est correcte. Utiliser la commande `matplotlib.pyplot.bar` pour afficher les histogrammes des lois théoriques. Enfin, on affichera les valeurs théoriques et empiriques de l'espérance mathématique et de l'écart type.



Espérance théorique : 11.200000
Espérance empirique : 11.231100
Écart-type théorique : 2.839718
Écart-type empirique : 2.859352