

Universidad Rafael Landívar  
Banco de Guatemala  
Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos -CEMLA-  
Programa de Estudios Superiores  
Maestría en Economía y Finanzas aplicadas



**Análisis del PIB de Guatemala y sus Principales Socios Comerciales  
Mediante una Distribución de Densidad de Pareto, Exponencial Estirada y  
Boltzmann-Gibbs**

Trabajo presentado para optar al título de Maestro en Economía y Finanzas  
Aplicadas

**MARÍA ESTER QUIÑONEZ LEÓN**

Asesorado por el Dr. Guillermo Díaz

Guatemala, agosto de 2022

**Abstract** Since the second half of the 20<sup>th</sup> century, Physics and Economics have become very close branches of science, several models that are used in physics are implemented in economics. One distinctive case is the Boltzmann-Gibbs distribution, which tells us about the conservation of energy in elastic collisions of particles. Economics takes the Boltzmann-Gibbs model and applies it in the way that the elastic collisions of particles are the commercial interaction between economic agents and the conservation of energy is represented as the money that is present in these interactions. Just as in this case, power law models are widely used in both branches (natural science and social science) and this is how they are related. The objective of this project is to find the best distribution model for the Per Capita Gross Domestic product (PIB-PC) and Per Capita Gross Domestic Product at Purchasing Power Parity (PIB-PPA) for each of the years from 2000 to 2021 for Guatemala and its main trading partners. Three models of power laws were proposed, Pareto Density distribution, Stretched Exponential distribution, and Boltzmann-Gibbs distribution. It was found that the model that best fit the annual distribution of PIB-PC and PIB-PPA of Guatemala and its main trading partners is the Pareto Density distribution.

*Keywords:* Pareto Density distribution, Stretched Exponential distribution, Boltzmann-Gibbs distribution, Guatemala, Econophysics.

**Resumen** Desde la segunda mitad del siglo XX la Física y la Economía se han vuelto ramas de la ciencia muy estrechas, de tal manera que varios modelos que se utilizan en física son implementados en economía. Uno de estos tan distintivos casos es la distribución de Boltzmann-Gibbs, la cual nos habla sobre la conservación de la energía en colisiones elásticas de partículas. La economía toma el modelo de Boltzmann-Gibbs y lo aplica de tal manera que las colisiones elásticas de partículas son las interacciones comerciales entre agentes económicos y la conservación de la energía se representa como el dinero entre dichas interacciones. Así como este caso, los modelos de ley de potencias es ampliamente utilizado en ambas ramas y por eso estas dos ramas de la ciencia (natural y social) se relacionan. En este trabajo se pretende encontrar el mejor modelo de distribución del Producto Interno Bruto Per Cápita (PIB-PC) y Producto Interno Bruto por Paridad de Poder Adquisitivo Per Cápita (PIB-PPA) para cada uno de los años de 2000 a 2021 de Guatemala y sus principales socios comerciales. Se plantan tres modelos de leyes de potencia, distribución de Densidad de Pareto, distribución Exponencial Estirada y distribución Boltzmann-Gibbs. Se obtuvo que el modelo que mejor representa la distribución anual de PIB-PC y PIB-PPA de Guatemala y sus principales socios comerciales es la distribución de Densidad de Pareto.

*Palabras clave:* Distribución de Densidad de Pareto, distribución Exponencial Estirada, distribución Boltzmann-Gibbs, Guatemala, Econofísica.

# Índice

<b>Introducción</b> .....	4
<b>Revisión Literaria</b> .....	6
<b>Caminatas Aleatorias, Hipótesis del Mercado Eficiente y Ley de Potencias</b> .....	7
<i>Caminatas Aleatorias</i> .....	7
<i>Hipótesis de Mercados Eficientes</i> .....	9
<i>Ley de potencias</i> .....	10
<b>Distribución Boltzmann-Gibbs</b> .....	11
<i>Punto de vista de la Mecánica Cuántica</i> .....	11
<i>Punto de vista de la Economía</i> .....	13
<b>Metodología</b> .....	14
<b>Modelo</b> .....	14
<i>Distribución de Densidad de Pareto</i> .....	14
<i>Distribución Exponencial Estirada</i> .....	15
<i>Distribución Boltzmann-Gibbs</i> .....	16
<b>Parametrización del Modelo</b> .....	16
<b>Datos</b> .....	17
<b>Resultados</b> .....	18
<b>Distribución de Densidad Pareto</b> .....	18
<b>Distribución Exponencial Estirada</b> .....	20
<b>Distribución Boltzmann-Gibbs</b> .....	21
<b>Crecimiento del Parámetro <math>\beta</math></b> .....	22
<b>Discusión de Resultados</b> .....	24
<b>Conclusiones</b> .....	27
<b>Bibliografía</b> .....	28
<b>Anexos</b> .....	30

## Introducción

Las ciencias naturales y las ciencias sociales parecen ser dos mundos distintos, con áreas de estudio completamente distantes pero la relación entre estas dos ramas se hizo más estrechas en el transcurso del último siglo. El desarrollo de la teoría de caminatas aleatorias se presenta tanto, en el estudio de precios en el mercado de valores, como en el área materia condensada con los movimientos aleatorios de partículas. La similitud en los modelos utilizados tanto en la física como en la economía se hizo más notorio en la segunda mitad del XX donde la utilización de la ley de potencias es comúnmente utilizada en ambas disciplinas.

Por el lado de la economía, el estudio del Producto Interno Bruto (PIB) ha conllevado la utilización de ley de potencias. El PIB se considera una medida monetaria que nos dice el valor de mercado de bienes y servicios finales (normalmente medido anual). El PIB puede ser medido mediante una moneda local, o moneda extranjera (por ejemplo, el dólar); también puede ser medido por Paridad de Poder Adquisitivo, se utiliza una medida estandarizada (dólar internacional) para medir los precios de una canasta básica en los países. Los valores del PIB-PPA se considera mejores o más acertados ya que expresa los valores de mercado como comparación del consumo general y bienestar de la población para distintos países.

En el trabajo de (Hernández-Ramírez, E., del Castillo-Mussot, M., & Hernández-Casildo, J., 2021), se presenta el estudio del PIB y PIB-PPA per cápita para cuarenta y dos países. Analizan la distribución del PIB/PIB-PPA durante cada año, desde 1990 hasta 2017 mediante una distribución de densidad de Pareto y una distribución exponencial estirada. El mejor ajuste lo obtienen con la distribución exponencial estirada. Se observa que utilizando la distribución exponencial estirada el modelo se aproxima a una distribución Boltzmann-Gibbs para los datos posteriores a la crisis del 2008. La distribución Boltzmann-Gibbs es un caso especial de la distribución exponencial estirada. La distribución Boltzmann-Gibbs es utilizada en mecánica estadística para describir la conservación de la energía en choques elásticos de partículas o moléculas.

El objetivo de este trabajo es analizar el PIB y PIB-PPA per cápita de Guatemala y sus principales socios comerciales (Estados Unidos, México, El Salvador y Honduras) anual, para el período de tiempo del 2000 a 2021 bajo el uso de la distribución de densidad de Pareto, la distribución exponencial estirada y la distribución Boltzmann-Gibbs. Determinar cuál de los tres modelos es el que mejor se ajusta a través de los años y observar si los años donde se han presentado crisis económicas están relacionados a el favorecimiento a alguno de los tres modelos y/o un cambio en la distribución Boltzmann-Gibbs.

El documento se organizará de tal manera que: la sección 2, establece antecedentes históricos sobre la econofísica y cómo modelos como el de Boltzmann-Gibbs se utilizan tanto en física como en economía; la sección 3 presenta la metodología con la que se abordará el trabajo, especificando modelos y forma de trabajo; en la sección 4 se presentan los resultados obtenidos para cada uno de los modelos; y en la sección 5 y 6 se describirán los resultados de la investigación y las respectivas conclusiones que esta nos deja.

## Revisión Literaria

La Econofísica estudia los procesos propios de la economía mediante la aplicación de teorías provenientes de las ciencias naturales aplicándolas a las teorías económicas. Es de conocimiento que ambas ciencias tienen amplia relación con las matemáticas, y aunque durante el siglo XX la física se dedicó mayormente al estudio de la cosmología, relatividad y cuántica, en los últimos años de este siglo la física se dedicó al estudio de temas de interés de algunas ciencias sociales, como la psicología, la sociología y, por supuesto, la economía.

En los años cercanos a 1687, las ciencias (tanto naturales como sociales) iniciaron con nuevos métodos de investigación con el descubrimiento de la gravedad por parte de Isaac Newton.

Esta nueva manera de hacer investigación conlleva el racionalismo, experimentación, análisis, síntesis y aplicación de métodos inductivos (Pereira, E. J. D. A. L., da Silva, M. F., & Pereira, H. D. B., 2017). Un ejemplo importante de la influencia de Newton para la economía son los pensamientos de Adam Smith, filósofo considerado por varios como fundador de las ciencias económicas. Smith se esfuerza en descubrir las leyes generales que describan la economía de la misma manera en que Newton descubre las leyes generales del movimiento. La corriente de investigación que se veía en ambos científicos se vio evidenciada cuando Newton inicia el desarrollo de su libro *Principia*, donde exponía distintos fenómenos de la naturaleza para el desarrollo de las leyes que propuso, mientras que Smith desarrolla su libro *Wealth of Nations*, donde igualmente plantea ciertos fenómenos de las actividades comerciales. Así como Newton muestra que la gravedad explica ciertos fenómenos del movimiento, Smith muestra fenómenos sobre el intercambio comercial y trabajo (Hetherington, 1983). Esto nos demuestra que la física y economía utiliza métodos similares desde mucho antes de que el término *Econofísica* se volviera parte de nuestro vocabulario.

A mediados del siglo XIX se presenta otra gran influencia entre la física y la economía. El físico y matemático Louis Poincaré desarrolló su estudio sobre el equilibrio de fuerzas, propone que las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido se

pueden simplificar a una fuerza resultante. Años más tarde, Léon Walras estudia el equilibrio general en la competencia perfecta con el objetivo de explicar los precios determinados por los mercados. Más sobre la relación entre estos dos trabajos puede ser revisada en el trabajo de (Paula, 2002). Y aunque en su momento no se relaciona como tal a las dos ciencias, es evidente que se utilizaban metodologías y ideas muy similares para el desarrollo de las teorías en ambas ciencias.

## **Caminatas Aleatorias, Hipótesis del Mercado Eficiente y Ley de Potencias**

A principios del siglo XX científicos dedicados al estudio de ciencias exactas y naturales se interesaron en el estudio de las ciencias sociales de una perspectiva matemática, en específico, la economía. Aplicaron distintos conceptos matemáticos utilizados en física para analizar fenómenos económicos y financieros, lo cuales se mencionarán a continuación.

### ***Caminatas Aleatorias***

A principios del siglo XIX Robert Brown (botánico) observa que granos de polen sumergidos en líquido no permanecen estáticos, sino que se mueven aleatoriamente por el fluido. Se llegó a la conclusión que estos movimientos no se debían a las características de las partículas o del medio. Fue en 1860 cuando se muestra que los movimientos aumentan mientras más pequeñas son las partículas analizadas, las partículas se alejan más de su posición inicial sin importar las condiciones físicas del medio (Vélez Ibarróla, 2005).

El primer modelo para este fenómeno fue desarrollado alrededor de los años de 1905 por Albert Einstein y Smoluchowski (de manera individual). Se propone una característica probabilística y cuatro propiedades que deben ser cumplidas. Se utilizó la teoría sobre la ecuación de calor para establecer la probabilidad  $p(t, x)$  de que cada partícula incremente sus coordenadas una cantidad  $x$  en un tiempo  $t$ , lo cual estará dado por la ecuación

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(t, x)}{\partial x^2}$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión. Por lo tanto, sabemos que la probabilidad  $p(t, x)$  será la densidad de una distribución normal, la cual tendrá media 0 y desviación estándar  $\sqrt{t}$

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Con respecto a las propiedades que estos movimientos deben cumplir, éstas son cuatro:

- 1) El origen se fija en la posición inicial de la partícula,  $X_0$ .
- 2) Para distintos intervalos de tiempo, los incrementos de las posiciones de las partículas son independientes.
- 3) Para cualquier intervalo de tiempo, el desplazamiento de una partícula presenta una distribución normal  $(0, \sqrt{\Delta t})$
- 4) Cada posible trayectoria es una curva continua.

(Kittel, C., McEuen, P., & McEuen, P., 1996).

A inicios del siglo XX se publica en el trabajo de Lois Bachelier, *Theory de La Speculation*, que los precios de los activos financieros siguen una caminata aleatoria (Pereira, E. J. D. A. L., da Silva, M. F., & Pereira, H. D. B., 2017). Al igual que en el estudio de partículas, Bachelier considero una probabilidad en función del tiempo y los precios de los activos,  $p(t, S)$ , que también cumple con la ecuación de calor. Por lo tanto, al cumplirse

$$\frac{\partial p(t, S)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(t, S)}{\partial S^2}$$

también se cumple que la función  $p(t, S)$  es una densidad de probabilidad normal con media 0 y desviación estándar  $\sqrt{t}$ . También los precios de los activos financieros cumplen las propiedades de una caminata aleatoria: los activos financieros tienen un precio inicial,  $S_0$ ; para distintos intervalos de tiempo, el incremento de los precios de los activos es independiente; el incremento en los precios presenta una distribución normal y la presión se presentan en una curva continua (Venegas-Martínez, 2005).



El uso de caminatas aleatorias en los precios de los activos financieros dio paso al surgimiento de la Hipótesis de Mercados Eficientes en la segunda mitad del siglo XX.

### ***Hipótesis de Mercados Eficientes***

La Hipótesis de Mercados financieros hace que nos planteemos una pregunta ¿es en realidad aleatorio los precios de los activos financieros?, asume que la información de los mercados que puede ser conocida en cada intervalo de tiempo está integrada en los precios de los activos (de Arce, L. L. S., & Serrano, B. L., 2005).

Es de conocimiento empírico que los precios de activos financieros se vuelven más valiosos los primeros días del año o que caen al inicio de la semana. Pero como se mencionó, esto es conocimiento empírico, esto no es una ley del comportamiento de los mercados, así que la aleatoriedad sigue presente.

(Samuelson, 2016) presenta los argumentos gracias a los cuales se retomó el trabajo de Bachelier. Samuelson intentó dar explicaciones más rigurosas al comportamiento de los mercados, fortaleciendo así la Hipótesis de Mercados Eficientes de manera que explica que existe el comportamiento aleatorio del precio de activos financieros, pero supone agentes racionales.

Cuando Eugene y Fama se unen al trabajo de Samuelson, donde aparte de considerar aleatoriedad también consideran agentes racionales. Con el fin de reflejar en una nueva reformulación de la teoría, en donde se tome en cuenta la capacidad de los mercados para reflejar la información disponible que existe en estos, la Hipótesis de Mercados Eficientes se puede basar en dos distintas hipótesis:

- 1) El precio de un bono refleja la información disponible del mercado e indica que los precios del bono a lo largo del tiempo fueron aleatorios.
- 2) Los cambios en los precios de todos los activos financieros obedecen la misma distribución de probabilidad (distribución normal para una caminata aleatoria).

(Pereira, E. J. D. A. L., da Silva, M. F., & Pereira, H. D. B., 2017).

La conexión entre la física y la economía es clara, desde el uso del modelo propuesto por Einstein y Smoluchowski para caminatas aleatorias, como las metodologías que se adoptaron posterior al estudio de la Hipótesis de Mercados Eficientes: estudios de memorias a largo plazo y el uso de ley de potencias para rendimientos de series financieras.

### ***Ley de Potencias***

La ley de potencias nos describe el comportamiento de una variable como proporción de la potencia de otra variable.

La distribución de ley de potencias en un fenómeno común para las distintas áreas científicas. Para la física la ley de potencias parece ser aplicada a absolutamente todas sus ramas, desde la atracción gravitacional de dos cuerpos regido por el inverso del cuadrado de la distancia que los separa (ley de gravitación universal), hasta la cantidad de terremotos que pueden ser experimentados en una región como función de la magnitud de un terremoto (ley Gutenberg-Richter) (Johnston, 2012).

En los años 60 del siglo XX se inició el uso de ley de potencias para analizar los mercados financieros. Mandelbrot realizó un estudio utilizando ley de potencia fue el del mercado de algodón, donde los precios se ajustaban a esta distribución, ya que una distribución normal no mostraba resultados satisfactorios (Pereira, E. J. D. A. L., da Silva, M. F., & Pereira, H. D. B., 2017). El trabajo de Mandelbrot presenta un problema, la desviación estándar es infinita para momentos mayores a dos. En los años 90 Mandelbrot replantea su teoría y acepta la distribución Pareto-Levy, la cual nos indica que la ley de Pareto es una ley de potencias (Gleria, I., Matsushita, R., & Silva, S. D., 2004). Todos estos estudios son un gran paso para que la comunidad científica se haga del conocimiento de una “nueva” disciplina, la econofísica.

La distribución de Pareto surge del estudio de la población con ingresos mayores a una cantidad  $x$ , lo cual está dado por

$$P[X > x] \sim \left(\frac{m}{x}\right)^k$$

donde  $m$  es el salario más bajo que se encuentra en la muestra y  $k$  el índice de desigualdad. Lo anterior planteado debe cumplir que:  $m > 0$ ,  $x \geq m$  y  $k > 0$ . Para la ley de potencias consideramos la cantidad de personas que ganan exactamente  $x$  por lo que ahora tenemos una función de densidad de probabilidad asociada a una acumulativa, lo cual está dado por

$$P[X = x] \sim x^{-(k+1)} = x^{-\alpha}$$

(Pereira, E. J. D. A. L., da Silva, M. F., & Pereira, H. D. B., 2017).

La ley de potencias es útil para el estudio de fenómenos susceptibles de eventos extremos, como los mercados financieros o los índices de los países (Pereira, E. J. D. A. L., da Silva, M. F., & Pereira, H. D. B., 2017). Para nuestro pesar, la detección y caracterización de las leyes de potencia es complicado por las grandes fluctuaciones que ocurren en la cola de la distribución (la cual está representada por los efectos de eventos raros) (Clauset, A., Shalizi, C. R., & Newman, M. E., 2009).

Mediante la aplicación de leyes de potencia y rendimiento de acciones la econofísica se volvió una rama emergente y relevante para el estudio de mercados financieros. Posterior a estas primeras grandes contribuciones, el uso de modelos provenientes de la física para el estudio de la economía se volvió más fuerte.

Varios modelos de la termodinámica y la mecánica estadística se volvieron relevantes. El estudio de fluidos, energía y choques puede ser rápidamente asociado a lo que sucede en distintas situaciones en el ámbito económico y financiero.

## **Distribución Boltzmann-Gibbs**

### ***Punto de vista de la Mecánica Cuántica***

Esta sección está basada en (Blundell, S. J., & Blundell, K. M., 2010).

La distribución de Boltzmann (también conocida como distribución de Gibbs) es una distribución de probabilidad de partículas inmersos en un sistema con varios estados posibles. Por lo tanto, se utiliza la probabilidad para describir sistemas térmicos.

Para esta distribución se utilizan 3 ensambles distintos:

- 1) Ensamble microcanónico: sistemas con la misma energía.
- 2) Ensamble canónico: conjunto de sistemas los cuales pueden intercambiar su energía entre ellos y poseen gran reserva de calor.
- 3) Ensamble gran canónico: conjuntos de sistemas los cuales pueden intercambiar tanta energía, como partículas, con un gran depósito. Se fija la temperatura del sistema.

Considerando dos sistemas acoplados (se permite el intercambio de energía), uno con energía  $E$  y el otro con energía  $\epsilon$ . La probabilidad de que el sistema dos tenga una energía  $\epsilon$  es proporcional al número de microestados (suponiendo que sea igual a uno), tenemos que

$$P(\epsilon) \propto \Omega(E - \epsilon) \times 1$$

Realizando una expansión de Taylor

$$\log \Omega(E - \epsilon) = \log \Omega(E) - \frac{\log \Omega(E)}{dE} \epsilon + \dots$$

$$\log \Omega(E - \epsilon) = \log \Omega(E) - \frac{1}{k_B T} \epsilon + \dots$$

Con  $T$  la temperatura del sistema uno. Por lo tanto, la probabilidad de que el sistema dos tenga una energía  $\epsilon$  es

$$P(\epsilon) \propto \exp(-\epsilon/k_B T)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura del sistema uno y  $k_B T$  es constante si la temperatura del sistema uno es invariante (lo cual podría ocurrir en el tiempo, pero la probabilidad no lo considera).

### ***Punto de vista de la Economía***

En economía, una distribución de Boltzmann (igualmente llamada Boltzmann-Gibbs) considera el dinero como energía, la cual se conserva en cada una de las interacciones de los sistemas y la temperatura el dinero promedio del sistema (suponiendo que este permanece constante en el período analizado) (Hernández-Ramírez, E., del Castillo-Mussot, M., & Hernández-Casildo, J., 2021).

Al igual que en el caso de la mecánica estadística, en el caso de la economía podemos establecer tres ensambles distintos:

- 1) Ensamble microcanónico: sistemas con la misma cantidad de dinero.
- 2) Ensamble canónico: conjunto de sistemas los cuales pueden intercambiar dinero entre ellos.
- 3) Ensamble gran canónico: conjuntos de sistemas los cuales pueden intercambiar tanta de dinero, con interacciones entre agentes, con un gran depósito de reservas. Se fija una cantidad de dinero promedio para sistema.

Para dos sistemas acoplados que interactúan entre sí y mantienen intercambio de dinero, la probabilidad  $P(m)$  de que un sistema tenga una cantidad de dinero  $m$  está dada por

$$P(m) \propto \exp(-m/m_0)$$

donde  $m_0$  es una constante y se asume la conservación de dinero para las interacciones entre los sistemas (Yakovenko, 2000).

# Metodología

## Modelo

En esta sección se describirán los distintos modelos con los cuales se analizará el PIB per cápita y PIB ajustado por poder adquisitivo de Guatemala y sus principales socios comerciales, con el fin de encontrar el mejor de ellos. Con esto se espera obtener, para ambas variables, que a través del tiempo es posible usar más de un modelo que las describa.

### ***Distribución de Densidad de Pareto***

Sección basada en (Akinsete, A., Famoye, F., & Lee, C., 2008).

La distribución de Densidad de Pareto fue esencialmente utilizada para el estudio de distribución de riqueza en una sociedad en específico, estos estudios obtuvieron como resultado que la riqueza de la sociedad se encuentra distribuida en una pequeña parte de la población. De este descubrimiento surge lo que se conoce como *Principio de Pareto*, el cual expresa que el 20% de la población controla el 80% de la riqueza de la sociedad en estudio (se le conoce también como regla 80-20). El Principio de Pareto es un caso específico de la distribución de Densidad de Pareto, ya que el parámetro que distingue el modelo de ley de potencia de dicha distribución es específico para el estudio.

Posteriormente este modelo ha sido ampliamente utilizado en áreas como geofísica, control de calidad y varios estudios sobre el comportamiento social de una sociedad.

Decimos que una variable aleatoria y continua,  $X$ , cuenta con una distribución Pareto,  $X \sim \text{Pareto}(b, x_m)$ , que cumple con  $b > 0$  y  $x_m > 0$ . La función de densidad para  $X \sim \text{Pareto}(b, x_m)$  está dada por

$$f(x) = b \frac{u^b}{x^{b+1}}$$

Para analizar nuestras variables de interés, PIB per cápita y PIB PPA, utilizaremos la función de distribución acumulada complementaria (CCDF), la cual está dada por la diferencia entre uno y la función de distribución acumulada (CDF).

Para obtener la función de distribución acumulada es necesaria la función de distribución de probabilidad (PDF)

$$PDF(x) = \int_{x_{min}}^x f(x)dx$$

Por lo tanto, la función de distribución acumulada estará dada por

$$CDF(x) = \int_{x_{min}}^x PDF(x)dx$$

$$CDF(x) = 1 - \left(\frac{u}{x}\right)^b$$

dejándonos así con una función de distribución acumulada complementaria

$$CCDF(x) = 1 - CDF(x) = \left(\frac{u}{x}\right)^b$$

El parámetro  $\beta$  describe el comportamiento de la concavidad de la curva y los movimientos en la probabilidad del eje  $y$ .

### ***Distribución Exponencial Estirada***

Sección basada en (Hernández-Ramírez, E., del Castillo-Mussot, M., & Hernández-Casildo, J., 2021)

Como segundo modelo de estudio se utilizará una distribución exponencial estirada, esto conlleva insertar una ley de potencia a una función exponencial. La distribución Exponencial Estirada presenta una función de densidad

$$f(x) = x^{\beta-1} \exp(-(x/x_0)^\beta)$$

Y una función de distribución acumulada complementaria

$$CCDF(x) = \exp(-(x/x_0)^\beta)$$

Para el análisis con una distribución exponencial estirada el modelo deberá ser linealizado, de tal manera que se utilizará

$$\log CCDF(x) = -(x/x_0)^\beta$$

$$\boxed{\log[-\log CCDF(x)] = \beta \log(x) - \beta \log(x_0)}$$

### **Distribución Boltzmann-Gibbs**

La distribución Boltzmann-Gibbs es un caso particular para una distribución exponencial ajustada, el caso en el cual  $\beta = 1$ . Por lo tanto, la función de densidad será

$$f(x) = x^{-1} \exp(-(x/x_0))$$

Con una función de distribución acumulada complementaria

$$CCDF(x) = \exp(-(x/x_0))$$

Y linealizando el modelo

$$\boxed{\log[-\log CCDF(x)] = \log(x) - \log(x_0)}$$

Como se mencionó antes, el análisis con la distribución Boltzmann-Gibbs es un claro caso especial de la distribución exponencial estirada.

### **Parametrización del Modelo**

Sección basada en (Gulliksson, M., & Söderkvist, I., 1995).

Para obtener los parámetros de cada uno de los modelos se utilizará el método de mínimos cuadrados no lineales.

Los mínimos cuadrados no lineales se utilizan cuando se trabaja con modelos no lineales que cuentan con n cantidad de parámetros. El número de parámetros n debe ser mayor al número de observaciones de la variable de estudio m.

Para un conjunto de datos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_i, y_i), \dots, (x_m, y_m)$  y una función

$$y = f(x, \beta)$$

donde  $\beta$  es el conjunto de parámetros de los cuales depende la función. Se busca que la curva  $y$  se ajuste de la mejor manera a los datos en sentido de mínimos cuadrados, de modo que la suma de los residuos al cuadrado sea mínima



$$\min \left( \sum_{i=1}^m r_i^2 \right) = \min \left( \sum_{i=1}^m y_i - f(x_i, \beta) \right)$$

La implementación de este algoritmo se realizará en lenguaje Python para este trabajo.

## Datos

Se hará el análisis (de los 3 diferentes modelos) para dos sets distintos de datos. En el primero se considerará el Producto Interno Bruto Per Cápita<sup>1</sup> (PIB-PC, en dólares estadounidenses) de Guatemala y sus principales socios comerciales (Estados Unidos, México, El Salvador y Honduras), y el segundo set será el Producto Interno Bruto por Paridad de Poder Adquisitivo Per Cápita<sup>23</sup> (PIB-PPA, en moneda internacional). Los sets serán formados gracias a las bases de datos del Banco Mundial.

Se analizará el período de 2000 a 2021, Por lo tanto, para cada uno de los países se tendrá sesenta y cuatro datos (treinta y dos correspondientes al PIB-PC y treinta y dos al PIB-PPA), dándonos un total de treientos veinte datos para el estudio en general.

Los datos se analizarán como  $x = \text{PIB-PC}$  y  $x = \text{PIB-PPA}$  y  $y = \text{CCDF}$ , para ambos casos, donde el CCDF teórico se obtuvo mediante una implementación en Python<sup>4</sup>.

---

<sup>1</sup> The World Bank, GDP per capita (current US\$), <https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.PCAP.CD>

<sup>2</sup> The World Bank, GDP, PPP (current international \$), <https://data.worldbank.org/indicator/NY.GDP.MKTP.PP.CD>

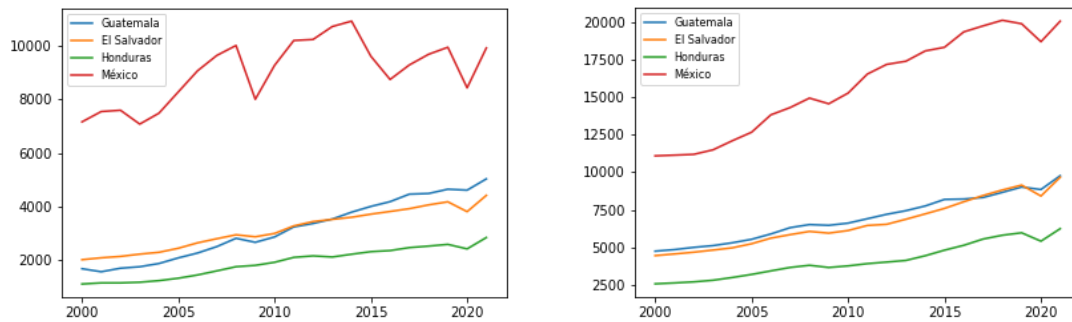
<sup>3</sup> The World Bank, Population, total, <https://data.worldbank.org/indicator/SP.POP.TOTL>

<sup>4</sup> GitHub, <https://github.com/Ester-Quinonez/BGDDistribution-Tesina>

## Resultados

Para esta sección se estarán presentando los resultados para los años de 2000, 2005, 2008, 2009, 2010, 2015, 2020 y 2021. En la sección de Anexos encontrará el conjunto de resultados completo.

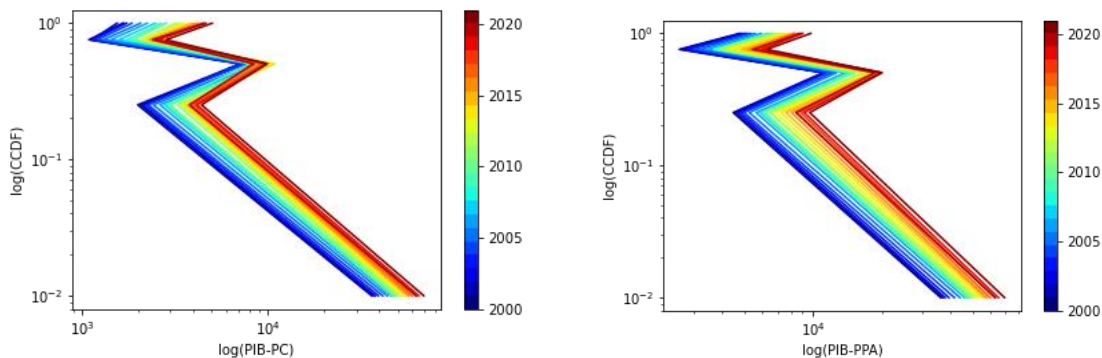
En las figuras 1 y 2 se presenta el crecimiento del PIB-PC y PIB-PPA para Guatemala, El Salvador, Honduras y México desde el año 2000 a 2021.



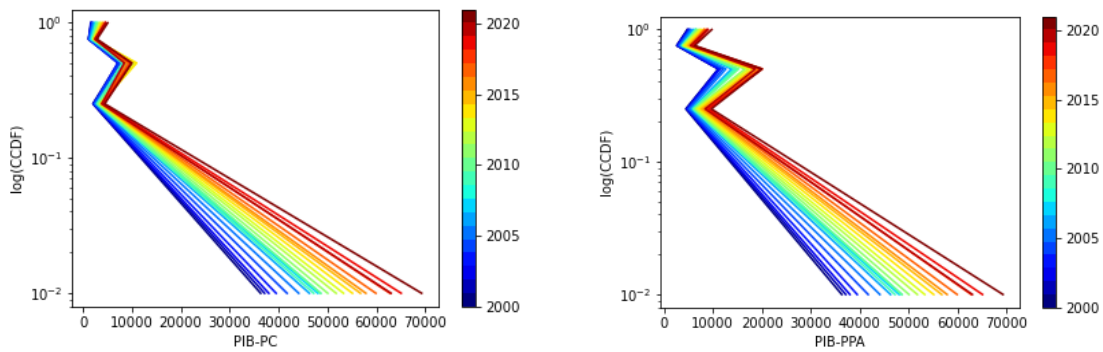
*Figura 1: Crecimiento PIB-PC y PIB-PPA para Guatemala, El Salvador, Honduras y México, respectivamente.*

## Distribución de Densidad Pareto

Se realizaron cuatro distintos gráficos para representar la función de distribución acumulada complementario en función del PIB-PC y PIB-PPA a través de los años (2000-2021).



*Figura 2: Gráfico para la función de distribución acumulada complementaria en función del PIB-PC y PIB-PPA, respectivamente, en escala log-log, para el modelo de distribución de Densidad de Pareto.*



*Figura 3: Gráfico para la función de distribución acumulada complementaria en función del PIB-PC y PIB-PPA, respectivamente, en escala semi-log, para el modelo de distribución de Densidad de Pareto.*

Una vez aplicado el modelo a los datos anuales se obtuvieron los parámetros  $u$  y  $\beta$ . Se realizó los estudios estadísticos tanto para el modelo, como para los parámetros. Los resultados para el PIB-PC y PIB-PPA, para años representativos, se encuentran en la tabla 1 y 2.

Año	$u$	p-valor $u$	$\beta$	p-valor $\beta$	$R^2$
2000	1311.06	0.03	1.25	0.01	0.94
2005	1590.48	0.02	1.28	0.01	0.95
2008	2079.07	0.02	1.35	0.01	0.94
2009	2024.12	0.01	1.39	0.002	0.97
2010	2167.64	0.01	1.39	0.004	0.96
2015	2733.25	0.01	1.45	0.002	0.98
2020	2835.44	0.001	1.45	0.0004	0.99
2021	3278.75	0.001	1.47	0.001	0.99

*Tabla 1: Datos obtenidos para el modelo de distribución de Densidad de Pareto para el PIB-PC.*

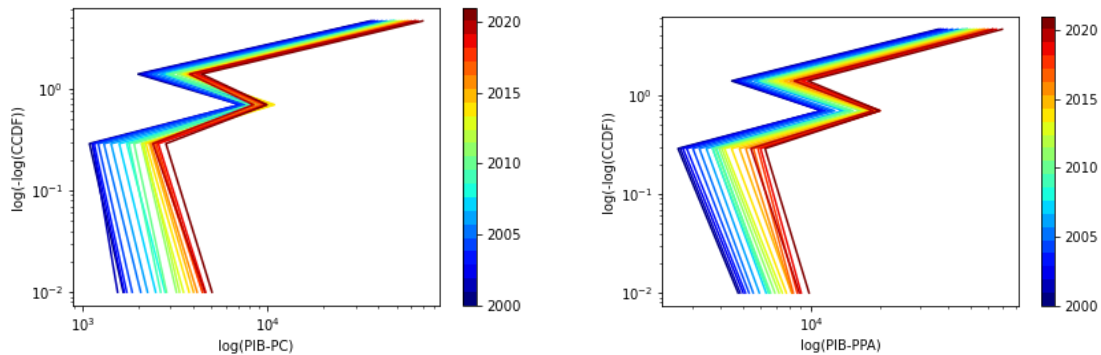
Año	$u$	p-valor $u$	$\beta$	p-valor $\beta$	$R^2$
2000	3327.42	0.01	1.75	0.01	0.93
2005	3981.86	0.01	1.77	0.01	0.95
2008	4704.05	0.01	1.81	0.01	0.94
2009	4591.55	0.01	1.81	0.002	0.94
2010	4718.99	0.01	1.80	0.004	0.94

2015	5933.79	0.01	1.86	0.002	0.94
2020	6530.78	0.01	1.89	0.0004	0.95
2021	7407.27	0.005	1.93	0.001	0.96

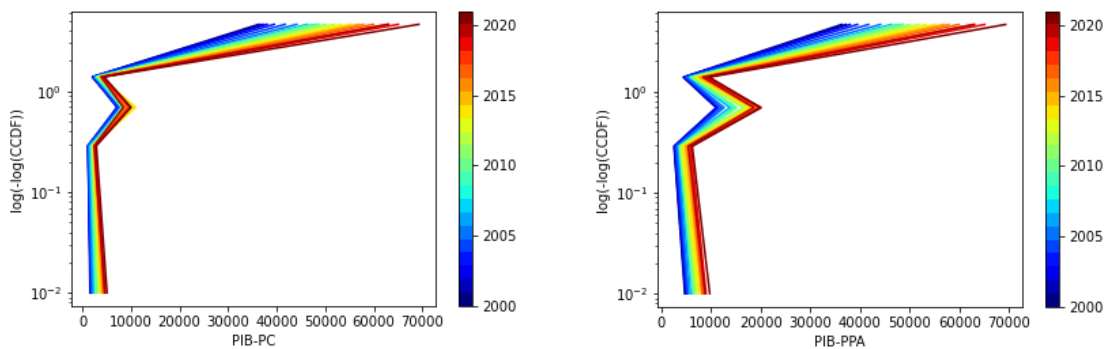
*Tabla 2: Datos obtenidos para el modelo de distribución de Densidad de Pareto para el PIB-PPA.*

## Distribución Exponencial Estirada

Igualmente, se realizaron cuatro distintos gráficos para representar la función de distribución acumulada complementario en función del PIB-PC y PIB-PPA a través de los años (2000-2021), a distintas escalas.



*Figura 4: Gráfico para la función de distribución acumulada complementaria en función del PIB-PC y PIB-PPA, respectivamente, en escala log-log, para el modelo de distribución Exponencial Estirada.*



*Figura 5: Gráfico para la función de distribución acumulada complementaria en función del PIB-PC y PIB-PPA, respectivamente, en escala semi-log, para el modelo de distribución Exponencial Estirada.*

Aplicando el modelo de distribución Exponencial Estirada a los datos anuales del PIB-PC y PIB-PPA para Guatemala y sus principales socios comerciales, se obtuvieron los parámetros  $x_0$  y  $\beta$ , juntos con los estadísticos para el modelo y los parámetros.

Año	$x_0$	p-valor $x_0$	$\beta$	p-valor $\beta$	$R^2$
2000	7591.94	0.19	1.33	0.09	0.67
2005	9109.55	0.18	1.34	0.09	0.67
2008	10930.96	0.17	1.40	0.09	0.66
2009	10315.19	0.19	1.39	0.11	0.63
2010	11011.93	0.18	1.41	0.10	0.64
2015	12891.74	0.16	1.48	0.10	0.65
2020	13508.24	0.17	1.45	0.10	0.64
2021	15318.07	0.17	1.47	0.11	0.63

*Tabla 3: Datos obtenidos para el modelo de distribución Exponencial Estirada para el PIB-PC.*

Año	$x_0$	p-valor $x_0$	$\beta$	p-valor $\beta$	$R^2$
2000	11631.09	0.07	1.93	0.06	0.73
2005	13902.76	0.08	1.90	0.07	0.71
2008	15925.76	0.07	1.95	0.07	0.71
2009	15494.40	0.07	1.97	0.07	0.72
2010	16012.56	0.07	1.96	0.07	0.72
2015	19331.61	0.07	2.02	0.07	0.72
2020	21088.77	0.07	2.01	0.08	0.70
2021	23419.09	0.08	2.03	0.09	0.68

*Tabla 4: Datos obtenidos para el modelo de distribución Exponencial Estirada para el PIB-PPA.*

## Distribución Boltzmann-Gibbs

Sabemos que la distribución de Boltzmann-Gibbs es un caso especial de la distribución Exponencial Estirada considerando  $\beta = 1$ . Las gráficas de CCDF en función de PIB-PC y PIB-PPA para esta distribución son representadas de la misma manera que en la figura 4 y 5. Al aplicarle el modelo a los datos se obtuvo los

resultados para el parámetro  $x_0$  para cada año, así como los estadísticos del modelo y el parámetro.

Año	$x_0$	p-valor $x_0$	$R^2$
2000	9415.79	0.19	0.63
2005	11340.71	0.19	0.63
2008	14030.50	0.20	0.61
2009	13198.29	0.21	0.58
2010	14170.20	0.21	0.58
2015	17080.83	0.21	0.58
2020	17720.44	0.21	0.58
2021	20210.19	0.22	0.57

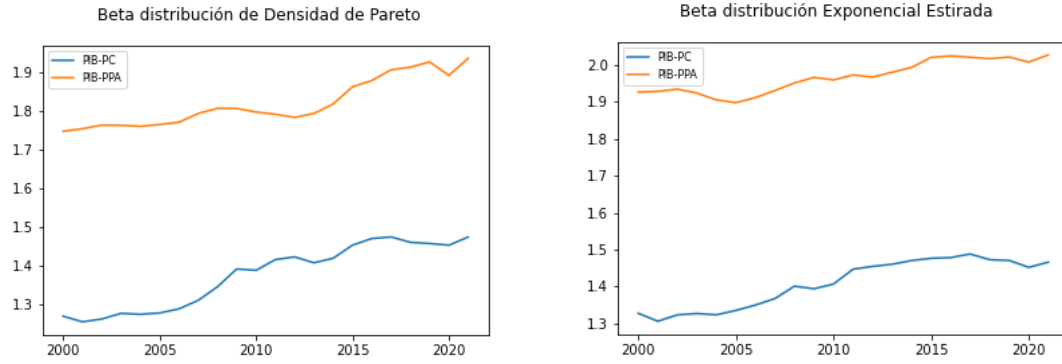
*Tabla 5: Datos obtenidos para el modelo de distribución Boltzmann-Gibbs para el PIB-PC.*

Año	$x_0$	p-valor $x_0$	$R^2$
2000	17685.97	0.22	0.56
2005	20997.03	0.22	0.55
2008	24356.14	0.23	0.54
2009	23777.67	0.23	0.55
2010	24534.93	0.22	0.55
2015	30020.42	0.23	0.53
2020	32659.49	0.24	0.52
2021	36420.75	0.24	0.51

*Tabla 6: Datos obtenidos para el modelo de distribución Boltzmann-Gibbs para el PIB-PPA.*

## Crecimiento del Parámetro $\beta$

Al ser el interés el estudio de leyes de potencia, se graficaron los crecimientos para el parámetro  $\beta$  para el modelo de distribución de Densidad de Pareto y Exponencial estirada. Para la distribución Boltzmann-Gibbs el crecimiento es nulo ya que el parámetro  $\beta$  permanece constante a un valor igual a uno.



*Figura 6: Crecimiento para el parámetro beta a través del tiempo para el modelo distribución de Densidad de Pareto y Exponencial Estirada utilizando datos para el PIB-PC y PIB-PPA.*

## Discusión de Resultados

El principal objetivo de esta investigación era obtener el mejor modelo que represente la distribución del PIB-PC y PIB-PPA para cada año, de Guatemala y sus principales socios comerciales. Los resultados que se presentan en la tabla 1 y 2 para el  $R^2$  del modelo de distribución de Densidad de Pareto es mucho más favorables de los que se obtuvieron para los dos modelos restantes (tabla 3 y 4, y tabla 5 y 6).

El promedio de  $R^2$  para la distribución de Densidad de Pareto es de 0.96 y 0.94 (PIB-PC y PIB-PPA, respectivamente), mientras que para la distribución Exponencial Estirada es de 0.66 y 0.71 (PIB-PC y PIB-PPA, respectivamente) y para la distribución Boltzmann-Gibbs es de 0.60 y 0.54 (PIB-PC y PIB-PPA, respectivamente). Basándonos en el criterio de  $R^2$ , es claro que el mejor modelo, con un valor promedio de 0.96 y 0.94, es la distribución de Densidad de Pareto, mientras que el peor modelo que describe la distribución anual de del PIB-PC y PIB-PPA es la distribución Boltzmann-Gibbs con un valor de 0.60 y 0.54.

Ninguno de los modelos se ve afectado por los años de crisis, como el año 2008 y 2020. Siguiendo el criterio de  $R^2$ , la distribución Boltzmann-Gibbs para PIB-PC es la única que presenta una disminución en su valor de  $R^2$ , con lo cual decimos que esta distribución modela de peor manera la distribución del PIB-PC para conjuntos de datos sucedidos después de crisis similares a la ocurrida en 2008.

Con respecto a la significancia de los parámetros se tiene los siguiente:

- Para el modelo distribución de Densidad de Pareto, se obtuvo que para el parámetro  $u$ , como el parámetro  $\beta$ , ambos son estadísticamente significativos para una significancia del 5%, para el caso del PIB-PC y PIB-PPA, y el conjunto de datos de 2000 a 2021.
- Para el modelo distribución Exponencial Estirada, para el conjunto de datos del PIB-PC para los años 2000 a 2021, el parámetro  $x_0$  es estadísticamente significativo a una significancia del 20%, mientras que el parámetro  $\beta$  es estadísticamente significativo a una significancia del 15%. Para el caso del



PIB-PPA, para los años de 2000-2021, los parámetros,  $x_0$  y  $\beta$  son estadísticamente significativos a una significancia del 10%.

- Para el modelo distribución Boltzmann-Gibbs, el parámetro  $x_0$  tanto para el PIB-PC y PIB-PPA, para el conjunto de años de 2000 a 2021, es estadísticamente significativo con una significancia mayor al 20%.

Tomando en cuenta los criterios de  $R^2$  y p-valor, el modelo que mejor describe la distribución del PIB-PC y PIB-PPA de Guatemala y sus principales socios comerciales es el modelo de distribución de Densidad de Pareto.

Como el trabajo se interesa en el estudio de modelos de leyes de potencia, es de interés visualizar el comportamiento del parámetro  $\beta$  de los distintos modelos. Para el modelo de distribución Boltzmann-Gibbs, como se ha venido planteando, su coeficiente será siempre igual a uno para todos los años. En la figura 6 se visualiza que, para el modelo de distribución de Densidad de Pareto, la pendiente del comportamiento del  $\beta$  es más pronunciada que para la distribución Exponencial Estirada. Al ser la distribución de Densidad de Pareto el modelo que mejor modela los datos anuales puede que su exponente se relación con el crecimiento en función del tiempo del PIB-PC y PIB-PPA, representado en la figura 1. Se propone como futuro trabajo un análisis de la distribución de Densidad de Pareto para el conjunto de datos de Guatemala y sus principales socios comerciales en función del tiempo y cómo se relaciona el crecimiento del PIB-PC y PIB-PPA con el parámetro  $\beta$ , a diferencia de lo acá presentados, no se debe analizar cada año por separado sino una serie de tiempo de 2000 a 2021.

Por último, vemos como la función de distribución acumulada complementaria muestra que para el modelo de distribución de Densidad de Pareto (figura 2 y 3), para la escala log-log y semi-log, el comportamiento de cada uno de los años se presenta de forma exponencial decreciente lo cual concuerda con el modelo planteado en la sección de Metodología. Y para el modelo de distribución Exponencial Estirada/Boltzmann-Gibbs (figura 4 y 5), la gráfica de la función de distribución acumulada complementaria muestra un comportamiento crecente como lo planteado en la sección de Metodología. En ambos casos cumple para el PIB-PC

y PIB-PPA. Estas gráficas de color también muestran El poco crecimiento que se tiene en años de crisis en comparación a otros años, esto es notorio para los años cercanos a 2020.

## Conclusiones

Desde el año 2000 a 2021, aunque el PIB-PC y PIB-PPA tengan diferencias, como lo es el caso de México y el conjunto de Guatemala, El Salvador y Honduras (representado en la figura 1), o bien, Estados Unidos y el conjunto de Guatemala, El Salvador, México y Honduras, las variables de PIB-PC y PIB-PPA para este conjunto de países se distribuyen mediante una distribución de Densidad de Pareto en cada uno de los años de muestra. La anterior afirmación se confirma gracias a que en promedio el modelo de distribución de Densidad de Pareto es el que obtuvo el mejor criterio  $R^2$ , con un valor de 0.96 y 0.94 para PIB-PC y PIB-PPA, respectivamente; y los parámetros obtenidos para el modelo para cada uno de los años son estadísticamente significativos a un 5% de significancia.

El conjunto de datos para Guatemala y sus principales socios comerciales no presentan buen ajuste para el modelo de distribución Exponencial Estirada y distribución Boltzmann-Gibbs, por lo tanto, nuestro conjunto de datos no converge a una distribución exponencial creciente. Para las interacciones comerciales entre Guatemala y sus principales socios comerciales no es posible argumentar la analogía entre las colisiones elásticas y conservación de la energía que se presenta en la teoría de Boltzmann-Gibbs.

El comportamiento de los datos analizados bajo tres distintos modelos no presenta alguna alteración cuando se presentan años de crisis económicas, a excepción de la distribución de Boltzmann-Gibbs para el caso del PIB-PC, donde el modelo se ajusta de una peor manera después del año 2008.

La función de distribución acumulada complementaria en función del PIB-PC y PIB-PPA logra representar los bajos niveles de crecimiento del PIB-PC y PIB-PPA en años de crisis económicas, lo cual se ve claramente representado en las figuras 2, 3, 4 y 5 en los años cercanos a 2020.

## Bibliografía

- Akinsete, A., Famoye, F., & Lee, C. (2008). The beta-Pareto distribution. *Statistics*, 42(6), 547-563.
- Blundell, S. J., & Blundell, K. M. (2010). *Concepts in thermal physics*. Oxford: Oxford University Press on Demand.
- Clauset, A., Shalizi, C. R., & Newman, M. E. (2009). Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, 51(4), 661-703.
- de Arce, L. L. S., & Serrano, B. L. (2005). Econofísica. *Boletín Económico de ICE*, pág. 2844.
- Gleria, I., Matsushita, R., & Silva, S. D. (2004). Sistemas complexos . *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 26, 99-108.
- Gulliksson, M., & Söderkvist, I. (1995). Surface fitting and parameter estimation with nonlinear least squares. *Optimization Methods and Software*, 5(3), 247-269.
- Hernández-Ramírez, E., del Castillo-Mussot, M., & Hernández-Casildo, J. (2021). World per capita gross domestic product measured nominally and across countries with purchasing power parity: Stretched exponential or Boltzmann–Gibbs distribution? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 568.
- Hetherington, N. S. (1983). Isaac Newton's Influence on Adam Smith's Natural Laws in Economics. *Journal of the History of Ideas*, 44(3), 497-505.
- Johnston, H. (10 de Feb de 2012). Pondering the power law. *Physics World*.
- Kittel, C., McEuen, P., & McEuen, P. (1996). *Introduction to solid state physics*. New York: Wiley: Hohn Wiley & Sons, Inc.
- Paula, J. A. (2002). Walras no Journal des Économistes: 1860-65. *Revista brasileira de economia*, 56, 121-146.
- Pereira, E. J. D. A. L., da Silva, M. F., & Pereira, H. D. B. (2017). Econophysics: Past and present. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 473, 251-261.

Samuelson, P. A. (2016). Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. En *The world scientific handbook of futures markets* (págs. 25-38). Chicago, USA: World Scientific .

Vélez Ibarrola, R. (2005). Colaboraciones en Matemáticas: Movimiento Browniano. *Revista 100cias@ uned*, 8, 81-88.

Venegas-Martínez, F. (2005). De Bachelier a Merton: 100 años del movimiento browniano en economía y finanzas. *Panorama Económico*, 1(1), 9-64.

Yakovenko, V. M. (2000). Statistical mechanics of money, income, debt, and energy consumption. *European Physical Journal B*, 17, 723.

## Anexos

Comparación gráfica entre el PIB-PC y PIB-PPA para cada país.



En las siguientes dos tablas se presenta el conjunto de resultados completos para la distribución de Densidad de Pareto para el PIB-PC y PIB-PPA, respectivamente.

Año	$u$	p-valor $u$	$\beta$	p-valor $\beta$	$R^2$
2000	1311.0594	0.0262	1.2697	0.0062	0.9409
2001	1313.9452	0.0295	1.2553	0.0069	0.9369
2002	1358.9286	0.0278	1.2624	0.0065	0.9389

2003	1393.1617	0.0190	1.2772	0.0044	0.9528
2004	1464.3465	0.0196	1.2747	0.0045	0.9519
2005	1590.4825	0.0223	1.2781	0.0053	0.9467
2006	1736.2735	0.0237	1.2887	0.0058	0.9435
2007	1899.4530	0.0228	1.3107	0.0059	0.9431
2008	2079.0713	0.0213	1.3459	0.0059	0.9431
2009	2024.1175	0.0077	1.3920	0.0022	0.9704
2010	2167.6425	0.0129	1.3885	0.0037	0.9579
2011	2409.6531	0.0143	1.4162	0.0044	0.9528
2012	2495.7958	0.0124	1.4233	0.0038	0.9570
2013	2532.9702	0.0150	1.4079	0.0046	0.9518
2014	2654.6349	0.0127	1.4197	0.0039	0.9564
2015	2733.2460	0.0053	1.4536	0.0017	0.9752
2016	2770.6698	0.0026	1.4707	0.0008	0.9844
2017	2910.9312	0.0026	1.4748	0.0009	0.9841
2018	2974.6923	0.0031	1.4610	0.0010	0.9828
2019	3059.3313	0.0030	1.4577	0.0010	0.9831
2020	2835.4366	0.0013	1.4535	0.0004	0.9907
2021	3278.7518	0.0015	1.4747	0.0005	0.9892

Año	$u$	p-valor $u$	$\beta$	p-valor $\beta$	$R^2$
2000	3327.4165	0.0135	1.7482	0.0078	0.9315
2001	3400.7988	0.0126	1.7546	0.0072	0.9346
2002	3490.8607	0.0114	1.7641	0.0067	0.9381
2003	3601.0868	0.0108	1.7636	0.0063	0.9404
2004	3769.8711	0.0103	1.7609	0.0059	0.9429
2005	3981.8648	0.0095	1.7657	0.0055	0.9453
2006	4270.3118	0.0107	1.7714	0.0063	0.9403
2007	4529.3962	0.0094	1.7940	0.0057	0.9441
2008	4704.0452	0.0101	1.8075	0.0063	0.9406
2009	4591.5540	0.0105	1.8071	0.0065	0.9389

2010	4718.9876	0.0115	1.7978	0.0071	0.9355
2011	4943.0398	0.0142	1.7923	0.0088	0.9258
2012	5076.5384	0.0145	1.7840	0.0089	0.9253
2013	5255.1424	0.0137	1.7941	0.0085	0.9275
2014	5567.3687	0.0125	1.8186	0.0080	0.9301
2015	5933.7948	0.0098	1.8633	0.0066	0.9383
2016	6213.3317	0.0106	1.8793	0.0074	0.9337
2017	6531.3686	0.0088	1.9072	0.0063	0.9402
2018	6806.6123	0.0076	1.9140	0.0055	0.9455
2019	7018.6067	0.0060	1.9274	0.0044	0.9531
2020	6530.7761	0.0061	1.8926	0.0043	0.9538
2021	7407.2713	0.0047	1.9370	0.0035	0.9599

En las siguientes dos tablas se presenta el conjunto de resultados completos para la distribución Exponencial Estirada para el PIB-PC y PIB-PPA, respectivamente.

Año	$x_0$	p-valor $x_0$	$\beta$	p-valor $\beta$	$R^2$
2000	7591.9354	0.1855	1.3280	0.0912	0.6678
2001	7788.9106	0.1957	1.3066	0.0954	0.6586
2002	7936.8851	0.1855	1.3236	0.0903	0.6697
2003	8018.7891	0.1857	1.3273	0.0912	0.6677
2004	8460.8412	0.1874	1.3238	0.0920	0.6661
2005	9109.5503	0.1820	1.3357	0.0898	0.6709
2006	9786.5686	0.1780	1.3502	0.0893	0.6720
2007	10427.0396	0.1769	1.3677	0.0919	0.6663
2008	10930.9567	0.1709	1.4013	0.0933	0.6633
2009	10315.1893	0.1884	1.3942	0.1081	0.6316
2010	11011.9347	0.1822	1.4070	0.1050	0.6382
2011	11798.5662	0.1698	1.4471	0.1015	0.6456



2012	12122.3613	0.1667	1.4547	0.1000	0.6487
2013	12405.6672	0.1579	1.4605	0.0927	0.6645
2014	12842.6278	0.1553	1.4705	0.0921	0.6658
2015	12891.7439	0.1602	1.4766	0.0980	0.6530
2016	12913.1483	0.1633	1.4785	0.1015	0.6455
2017	13478.7299	0.1592	1.4882	0.0993	0.6502
2018	13982.9908	0.1632	1.4729	0.1002	0.6481
2019	14424.1195	0.1631	1.4707	0.0997	0.6493
2020	13508.2444	0.1706	1.4521	0.1033	0.6416
2021	15318.0690	0.1711	1.4661	0.1067	0.6345

Año	$x_0$	p-valor $x_0$	$\beta$	p-valor $\beta$	$R^2$
2000	11631.0867	0.0680	1.9258	0.0638	0.7336
2001	11846.7944	0.0682	1.9279	0.0644	0.7321
2002	12091.8716	0.0679	1.9339	0.0646	0.7315
2003	12507.5651	0.0707	1.9233	0.0669	0.7257
2004	13167.3157	0.0754	1.9048	0.0708	0.7159
2005	13902.7612	0.0786	1.8974	0.0739	0.7083
2006	14823.6695	0.0768	1.9109	0.0732	0.7100
2007	15496.6912	0.0754	1.9302	0.0735	0.7091
2008	15925.7625	0.0730	1.9506	0.0728	0.7108
2009	15494.3975	0.0687	1.9657	0.0688	0.7209
2010	16012.5638	0.0693	1.9589	0.0689	0.7206
2011	16762.3049	0.0661	1.9724	0.0662	0.7275
2012	17300.1897	0.0659	1.9665	0.0654	0.7296
2013	17777.7608	0.0640	1.9796	0.0642	0.7327
2014	18584.2943	0.0655	1.9925	0.0674	0.7245
2015	19331.6127	0.0661	2.0197	0.0710	0.7153
2016	20096.3929	0.0695	2.0238	0.0762	0.7026
2017	20912.8534	0.0756	2.0201	0.0839	0.6844

2018	21756.0062	0.0766	2.0162	0.0855	0.6808
2019	22298.2330	0.0765	2.0207	0.0859	0.6797
2020	21088.7728	0.0728	2.0070	0.0790	0.6960
2021	23419.0928	0.0754	2.0266	0.0851	0.6817

En las siguientes dos tablas se presenta el conjunto de resultados completos para la distribución Boltzmann-Gibbs para el PIB-PC y PIB-PPA, respectivamente.

Año	$x_0$	p-valor $x_0$	$R^2$
2000	9415.7911	0.1893	0.6271
2001	9556.8275	0.1915	0.6223
2002	9822.2505	0.1880	0.6297
2003	9941.7204	0.1893	0.6271
2004	10471.5510	0.1897	0.6263
2005	11340.7115	0.1886	0.6285
2006	12269.3514	0.1894	0.6268
2007	13180.7635	0.1935	0.6182
2008	14030.4991	0.1978	0.6089
2009	13198.2857	0.2103	0.5811
2010	14170.1967	0.2087	0.5848
2011	15445.5856	0.2091	0.5839
2012	15919.4218	0.2084	0.5853
2013	16329.9783	0.2025	0.5984
2014	16974.1659	0.2029	0.5976
2015	17080.8252	0.2086	0.5850
2016	17122.1243	0.2117	0.5779
2017	17940.8520	0.2107	0.5802
2018	18499.1245	0.2102	0.5813
2019	19066.1716	0.2096	0.5828
2020	17720.4426	0.2111	0.5794
2021	20210.1854	0.2150	0.5703

Año	$x_0$	p-valor $x_0$	$R^2$
2000	17685.9747	0.2178	0.5640
2001	18022.7899	0.2184	0.5625
2002	18421.2102	0.2191	0.5609
2003	19007.2652	0.2202	0.5585
2004	19922.2947	0.2219	0.5544
2005	20997.0312	0.2238	0.5498
2006	22460.9379	0.2243	0.5486
2007	23587.9124	0.2261	0.5444
2008	24356.1417	0.2271	0.5420
2009	23777.6691	0.2251	0.5469
2010	24534.9342	0.2246	0.5479
2011	25761.9851	0.2235	0.5507
2012	26553.7580	0.2224	0.5533
2013	27366.9612	0.2224	0.5533
2014	28690.3626	0.2260	0.5447
2015	30020.4183	0.2309	0.5329
2016	31235.1727	0.2350	0.5228
2017	32478.5501	0.2402	0.5099
2018	33759.7643	0.2411	0.5078
2019	34634.2374	0.2417	0.5063
2020	32659.4870	0.2359	0.5208
2021	36420.7521	0.2415	0.5068