

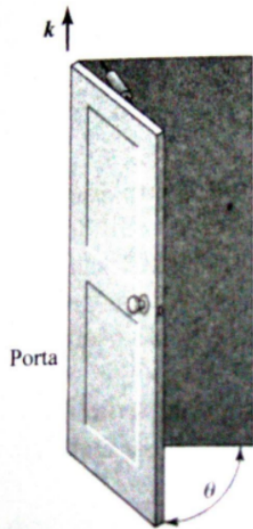
**UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA DEPARTAMENTO DE  
ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E MECÂNICA FACULDADE DE  
ENGENHARIA**

**RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIO — VIBRAÇÕES LIVRES COM AMORTECIMENTO VISCOSO**

Lavínia Araújo Lima

Juiz de Fora, 2021.3

# Trabalho



- Uma porta move-se em rotação em torno do eixo vertical, onde o momento de inércia de massa é  $J_{porta} = 20 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$ , o amortecimento viscoso estabelecido pelo amortecedor da porta é de  $38 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$  e a rigidez rotacional da dobradiça da porta é de  $18,1 \text{ N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ . Determine a resposta desse sistema quando a porta é aberta a uma velocidade inicial de  $4 \text{ rad}/\text{s}$ , saindo da posição inicial  $\theta = 0$ . Depois, plote essa resposta como função do tempo. Encontre o ângulo máximo de abertura da porta nessas condições e em quanto tempo a porta se fecha novamente (considere a porta fechada com um centésimo de radiano)

1

## Dados:

Momento de inércia de massa:  $J_{porta} = 20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Amortecimento viscoso:  $c = 48 \text{ Nms}/\text{rad}$

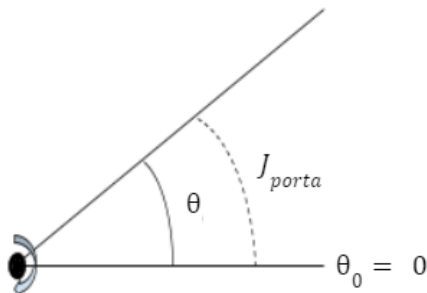
Rigidez rotacional:  $k_t = 28,8 \text{ Nm}/\text{rad}$

Velocidade inicial:  $\dot{\theta}_0 = 4 \text{ rad}/\text{s}$

Posição inicial:  $\theta_0 = 0$

## Resolução:

Para iniciar, traçamos um esquema que represente o sistema em questão:



\* Lembrando que há amortecimento e rigidez rotacional, na imagem reduzidos a representação da seta.

Em seguida, igualamos o somatório de momentos a zero

$$\Sigma M = 0$$

$$J_p \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_t \theta = 0$$

Manipulando a equação, temos:

$$\ddot{\theta} + \frac{c_t}{J_p} \dot{\theta} + \frac{k_t}{J_p} \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$$

Então:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_p}} = \sqrt{\frac{28,8}{20}} = 1,2 \text{ rad/s}$$

$$\xi = \frac{c_t}{2J_p \omega_n} = \frac{48}{2 \cdot 20 \cdot 1,2} = 1 \text{ (criticamente amortecido)}$$

Como  $\xi = 1$ , temos um sistema criticamente amortecido. A solução é então:

$$\theta(t) = e^{-\omega_n t} \left[ \theta_o + \left( \dot{\theta}_o + \theta_o \cdot \omega_n \right) t \right]$$

Sabendo que  $\theta_o = 0$  e  $\dot{\theta}_o = 4 \text{ rad/s}$ , temos:

$$\theta(t) = 4t \cdot e^{-1,2t} \quad \mathbf{(1)}$$

**Para encontrar o ângulo máximo** (quando  $\dot{\theta}_0 = 0$ ):

$$\dot{\theta}_0 = 4e^{-1,2t} + 4t(-1,2)e^{-1,2t}, \text{ ou seja:}$$

$$4e^{-1,2t} + 4t(-1,2)e^{-1,2t} = 0$$

$$4e^{-1,2t} - 4,8te^{-1,2t} = 0$$

$$e^{-1,2t}(4 - 4,8t) = 0$$

$$e^{-1,2t} = 0 \text{ ou } (4 - 4,8t) = 0$$

Pela segunda igualdade, o ângulo máximo é quando  $t = \frac{4}{4,8} \text{ s}$

Substituindo na equação (1), temos:

$$\theta\left(\frac{4}{4,8}\right) = 4 \cdot \frac{4}{4,8} \cdot e^{-1,2 \cdot \frac{4}{4,8}}$$

$$\theta_{\text{máx}} = 1,23 \text{ rad}$$

Para encontrar o **tempo em que a porta fecha novamente**, adotaremos um ângulo  $\theta = 0,01 \text{ rad}$  (enunciado). Substituindo na equação (1), temos:

$$\theta(t) = 4t \cdot e^{-1,2t}$$

$$0,01 = 4t \cdot e^{-1,2t}$$

$$2,5 \cdot 10^{-3} = t \cdot e^{-1,2t}$$

$$\ln(2,5 \cdot 10^{-3}) = \ln(t \cdot e^{-1,2t})$$

Manipulando, chegamos em:  $t = 6,5604 \text{ s}$

### Solução gráfica:

Utilizando o Excel, plotamos a solução gráfica:

$$\theta(t) = 4t \cdot e^{-1,2t}$$

Ângulo de abertura da porta em função do tempo

