Trabalho 14

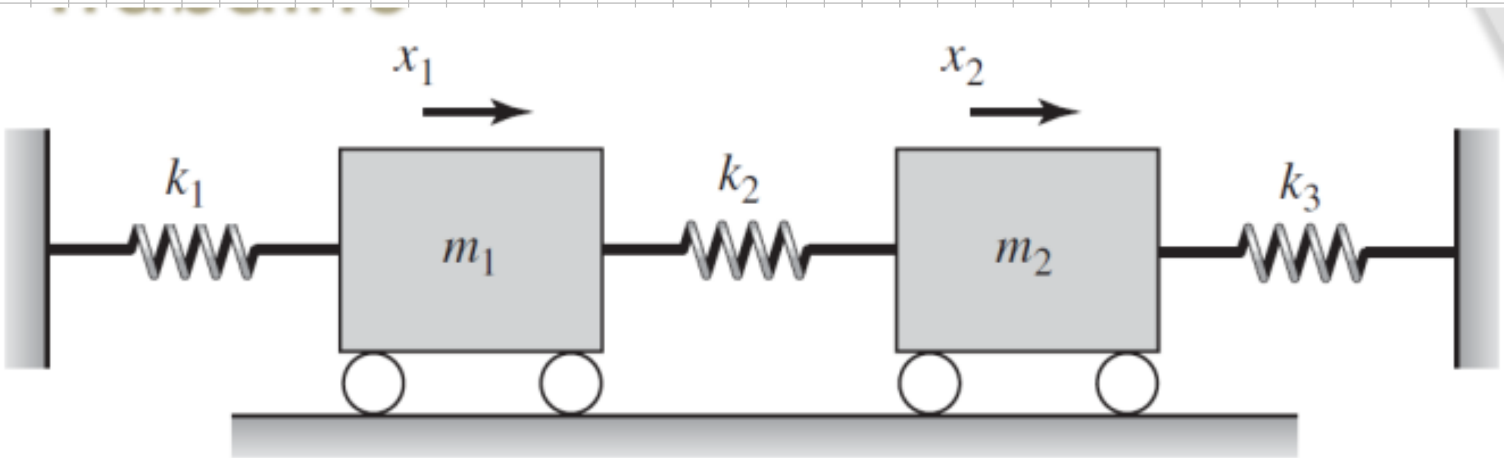
Dados iniciais:

$m_1 = 1,2\ kg$; $m_2 = 2,7\ kg$; $K_1 = 10\ N/m$;
$K_2 = 20\ N/m$; $K_3 = 15\ N/m$

Achar:

. Frequências naturais;
. Matriz modal;

Esquema:



Desenvolvimento:

Considerando a modelagem matricial do problema, temos que:

$$|M|\{\ddot{x}\} + |K|\{x\} = \{0\} \quad (1)$$

Neste caso a solução do sistema é dada por:

$$\{x(t)\} = \{X\}e^{\lambda t} \quad (2)$$

Onde:

$$\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix} \quad e \quad X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}$$

Sendo n o número de graus de liberdade do sistema. Substituindo 2 em 1, temos:

$$\left[|K| + \lambda^2 |M| \right] \{X\} e^{\lambda t} = \{0\} \therefore$$

$$\left[|K| + \lambda^2 |M| \right] \{X\} = \{0\}$$

A solução não trivial do sistema representa um problema de autovalor, portanto:

$$\det \left[|K| + \lambda^2 |M| \right] = 0 \quad (3)$$

Reescrevendo 3 em função das N frequências naturais do sistema, temos:

$$\det \left[|K| - \omega^2 |M| \right] = 0 \quad (4)$$

E os autovalores associados:

$$\left[|K| - \omega_j^2 |M| \right] \{X\}_j = \{0\} \quad (5)$$

Portanto, aplicando a solução 5 ao sistema 1, temos:

$$\left[\begin{vmatrix} 2K & -K \\ -K & 2K \end{vmatrix} - w^2 \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix}\right] \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \therefore$$

$$\begin{vmatrix} 2K - w^2 m & -K \\ -K & 2k - W^2 m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \therefore$$

$$\det \begin{vmatrix} 2K - w^2 m & -K \\ -K & 2k - W^2 m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Para expandir o resultado 6 para o caso de massas e rigidezes quaisquer faremos o uso das seguintes grandezas admensionais:

- $W_{nj}^2 = \dfrac{K_j}{m_j}$ para $j = 1,2$
- $m_r = \dfrac{m_2}{m_1}$
- $\Omega = \dfrac{W}{W_{n1}}$
- $W_r = \dfrac{W_{n2}}{W_{n1}} = \dfrac{1}{\sqrt{m_r}} \sqrt{\dfrac{K_2}{K_1}}$
- $K_{32} = \dfrac{K_3}{K_2}$

Substituindo essas variáveis na eq. 6 temos:

$$\begin{vmatrix} 1+\omega_r^2 m_r-\Omega^2 & -m_r\omega_r^2 \\ -\omega_r^2 & \omega_r^2(1+K_{32})-\Omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \therefore$$

$$\det\begin{vmatrix} 1+\omega_r^2 m_r-\Omega^2 & -m_r\omega_r^2 \\ -\omega_r^2 & \omega_r^2(1+K_{32})-\Omega^2 \end{vmatrix} = 0 \therefore$$

$$[1+\omega_r^2 m_r-\Omega^2][\omega_r^2(1+K_{32})-\Omega^2]-m_r\omega_r^4=0 \therefore$$

$$\Omega^4 - a_1\Omega^2 + a_2 = 0$$

Onde:

$$a_1 = 1+\omega_r^2(1+m_r+K_{32})$$

e

$$a_2 = \omega_r^2[1+K_{32}(1+\omega_r^2 m_r)]$$

Portanto a solução é:

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\, a_1 - \sqrt{a_1^2-4a_2}} = 1{,}16 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\, a_1 + \sqrt{a_1^2-4a_2}} = 2{,}77 \text{ rad/s}$$

Substituindo Ω_j na equação do sistema temos:

$$[1+\omega_r^2 m_r-\Omega_j^2]\, X_{1j} - m_r\omega_r^2\, X_{2j} = 0$$

$$\frac{X_{11}}{X_{21}} = \frac{m_r\omega_r^2}{1+\omega_r^2 m_r-\Omega_1^2} = 1{,}08$$

$$\frac{X_{12}}{X_{22}} = \frac{\omega_r^2(1+K_{32}) - \Omega_2^2}{\omega_r^2} = -0,33$$

Portanto, a matriz modal é:

$$|\Phi| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1,08 & -0,33 \end{vmatrix}$$