

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

A natureza do procedimento depende das hipóteses que podem ser feitas para o processo

Problema da condução de calor transiente

Se gradientes de temperatura no interior do sólido podem ser desprezados

Se gradientes de temperatura não são desprezíveis, mas a transferência de calor no interior do sólido é unidimensional

Condições mais complexas

Método da capacidade global

Soluções exatas, aproximadas e gráficas da equação do calor para sólidos finitos (paredes planas, cilindros longos e esferas) e para sólidos semi-infinitos

métodos de diferenças finitas e de elementos finitos devem ser usados para prever a dependência com o tempo de temperaturas

TÓPICOS DA AULA

1. Introdução
2. O Método da Capacitância Global
 - Validade do Método da Capacitância Global
 - Análise Geral Via Capacitância Global (soluções exatas para várias situações dentro da equação do calor)
3. Efeitos Espaciais (Soluções exatas, aproximadas e gráficas para geometrias unidimensionais e CC simples)
4. Outros casos



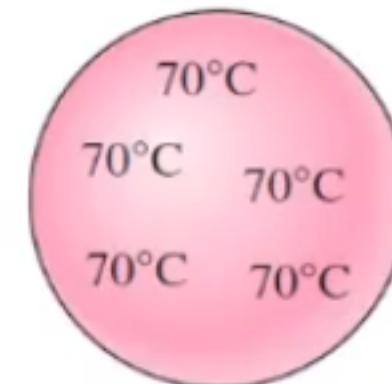
Objetivos

- Avaliar quando a **variação espacial de temperatura é desprezível** e quando a temperatura varia quase uniformemente, possibilitando a análise simplificada
- Obter **soluções analíticas** para problemas de condução transiente em coordenadas retangulares, cilíndricas e esféricas.
- Resolver o problema da condução transiente em **grandes meios usando a variável de semelhança**

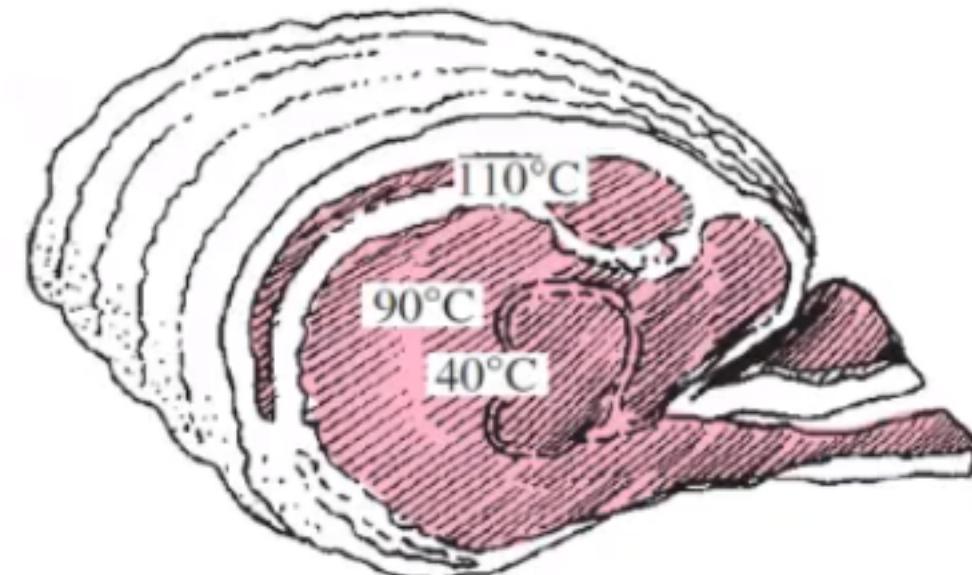
O MÉTODO DA CAPACITÂNCIA GLOBAL

Método da Capacitância Global

- Utilizado em situações práticas quando a temperatura pode ser admitida **apenas como função do tempo.**
- No interior do corpo, gradientes de temperaturas são  pequenos que podem ser desprezados.



a) Bola de cobre



b) Rosbif

Método da Capacitância Global

Pode ser empregado quando:

A resistência térmica **interna** do corpo (condução) é **muito menor** que a **resistência térmica externa** (convecção)

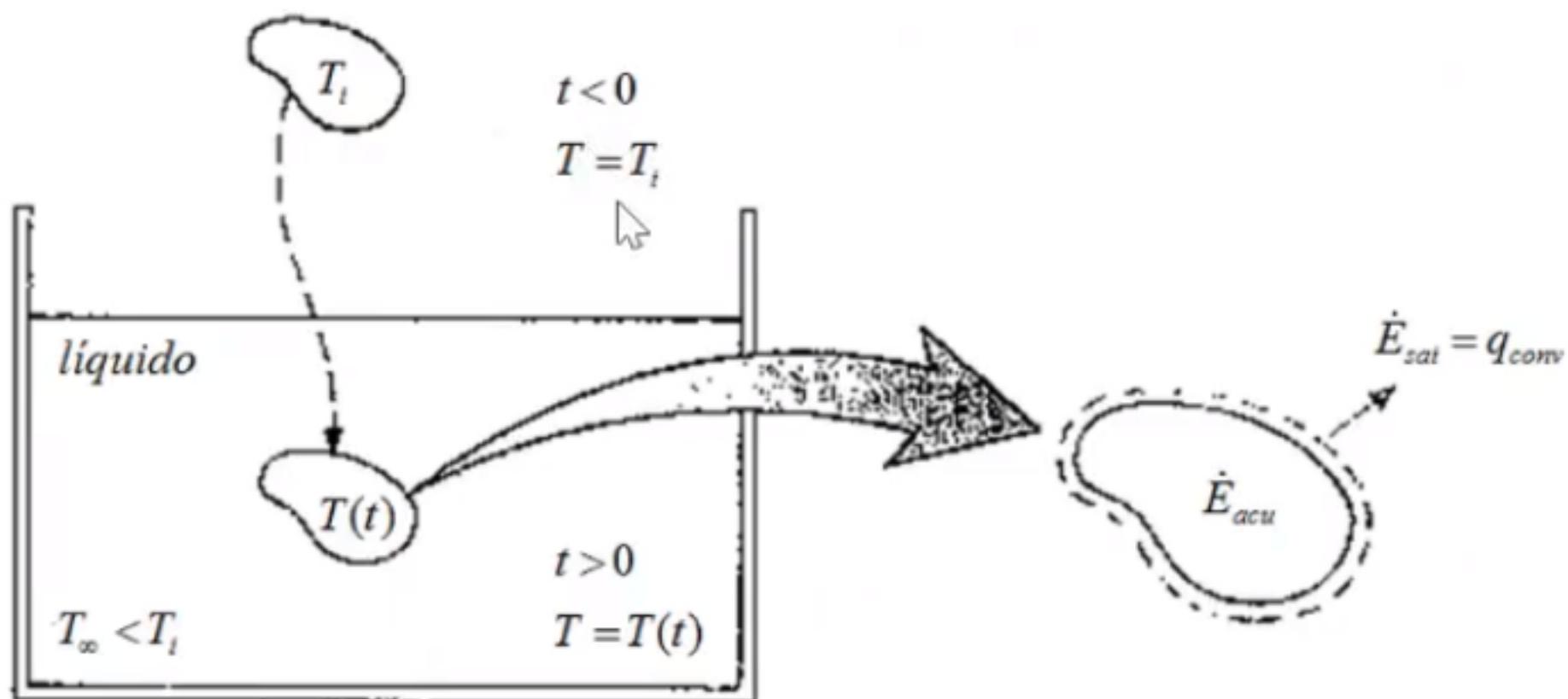
! de modo que o maior gradiente de temperatura ocorra junto à superfície do corpo.



! Não é necessário aplicar
a equação do calor:
Um simples balanço de
energia resolve.

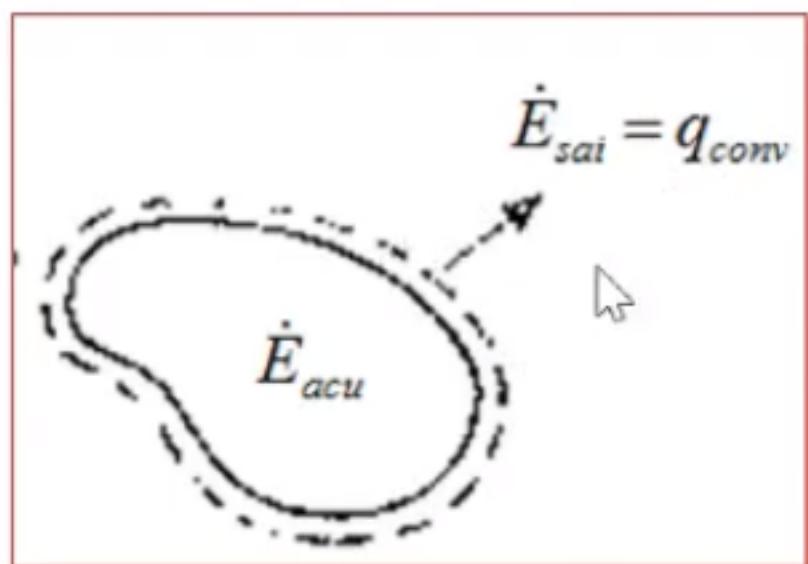
Método da Capacitância Global

Considerando-se o processo de têmpera:



Método da Capacitância Global

- Nesse caso, o balanço de energia resulta em:



$$-\dot{E}_{sai} = \dot{E}_{acu}$$

- A **troca de calor** é feita por **convecção**, o que reduz a energia interna do corpo e assim:

$$-h A_s (T - T_{\infty}) = \rho V c_p \frac{dT}{dt}$$

Método da Capacitância Global

Rearranjando a equação, obtém-se

$$\frac{dT}{(T - T_{\infty})} = -\frac{h A_s}{\rho V c_p} dt$$

Integrando tem-se

$$\ln(T - T_{\infty}) = -\frac{h A_s}{\rho V c_p} t + C_1$$

C_1 é
uma constante.

Método da Capacitância Global

Para a determinação de C_1 utiliza-se a **condição inicial**: $T(0) = T_i$,

$$\ln\left(\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}}\right) = -\frac{h A_s}{\rho V c_p} t$$

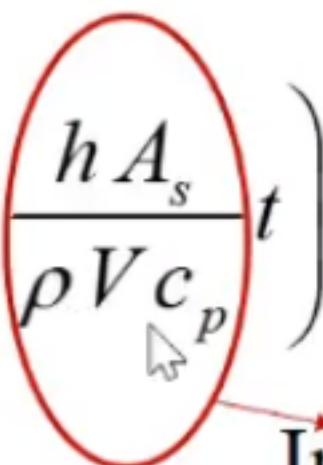


Definindo: $\theta = T - T_{\infty}$

$$\theta_i = T_i - T_{\infty}$$

Método da Capacitância Global

Obtém-se
$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp\left(-\frac{h A_s}{\rho V c_p} t\right)$$



- ! A diferença entre as temperaturas do sólido e do fluido diminui exponencialmente quando $t \rightarrow \infty$

Inverso da constante de tempo térmica

Método da Capacitância Global

A grandeza $[\rho V c_p (hA_s)]$ pode ser interpretada como uma **constante de tempo térmica**, representada por

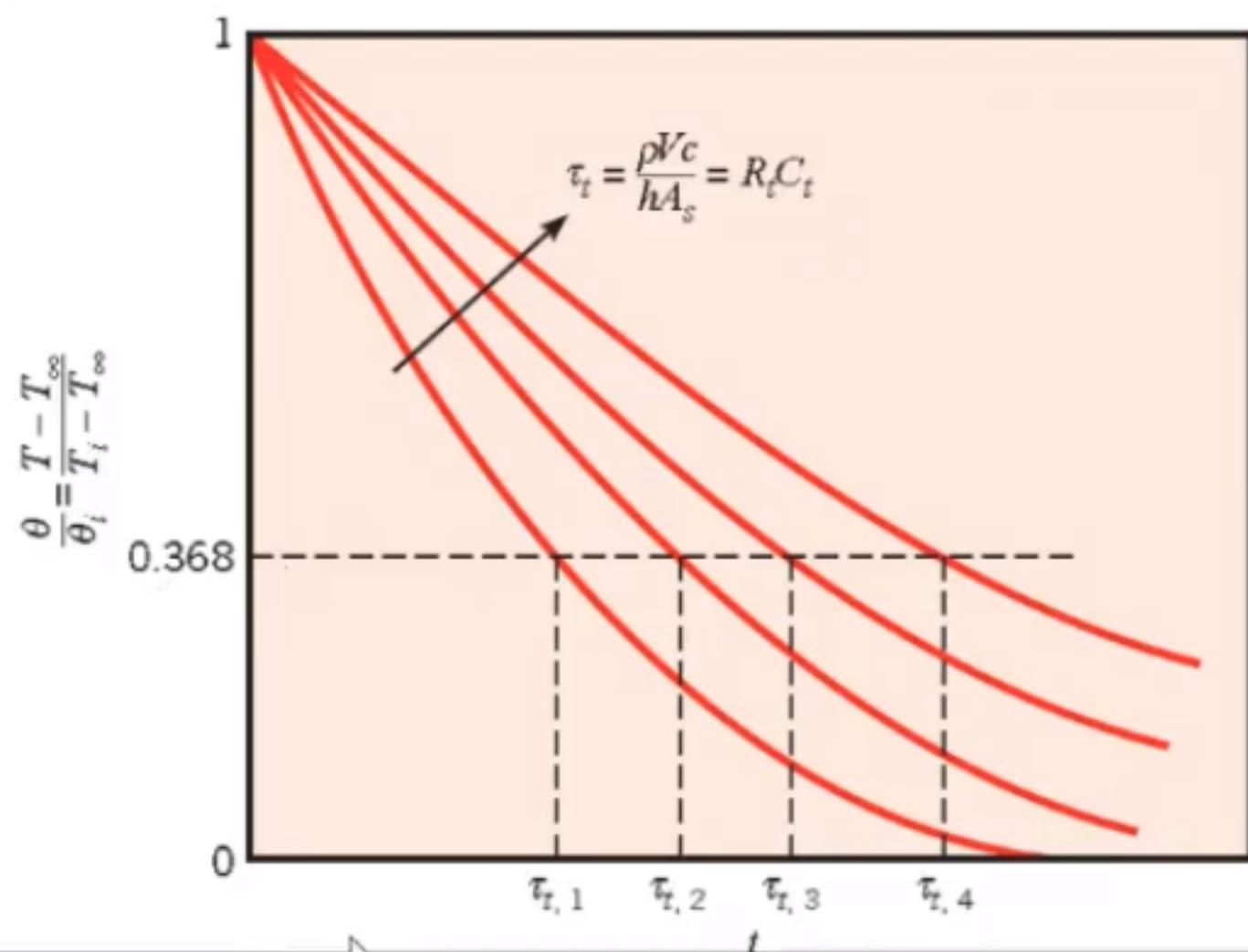
$$\tau_t = \left(\frac{1}{h A_s} \right) (\rho V c_p) = R_t C_t$$

capacitância térmica global do sólido.

resistência à transferência de calor por convecção e

Método da Capacitância Global

Qualquer aumento em R_t ou em C_t causa uma resposta mais lenta do sólido a mudanças no seu ambiente térmico.



Método da Capacitância Global

Para determinar a energia total transferida, Q , até algum instante de tempo t , tem-se:

$$Q = \int_0^t q \, dt = h A_s \int_0^t \theta \, dt$$

Substituindo-se a expressão para θ e integrando-se, obtém-se

$$Q = (\rho V c_p) \theta_i \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_t}\right) \right]$$

relacionada à mudança de energia interna do sólido

$$-Q = \Delta E_{acu}$$



VALIDADE DO MÉTODO DA CAPACITÂNCIA GLOBAL



É um método simples, mas não é aplicável em qualquer situação.

Para a verificação da **validade do método** da capacidade global é necessário **comparar** o gradiente de temperaturas no **interior** de um corpo com aquele existente em sua **superfície**.



$$Bi = \frac{\text{Convecção de calor}}{\text{Condução de calor}}$$

Validade do Método da Capacitância Global

- A grandeza adimensional (hL/k) é conhecida como **número de Biot** e desempenha um papel fundamental em problemas de condução térmica que envolvem efeitos convectivos nas fronteiras.
- O número de Biot fornece uma medida da **relação** entre a queda da temperatura ao longo do sólido e a diferença de temperaturas de sua superfície e a do fluido.

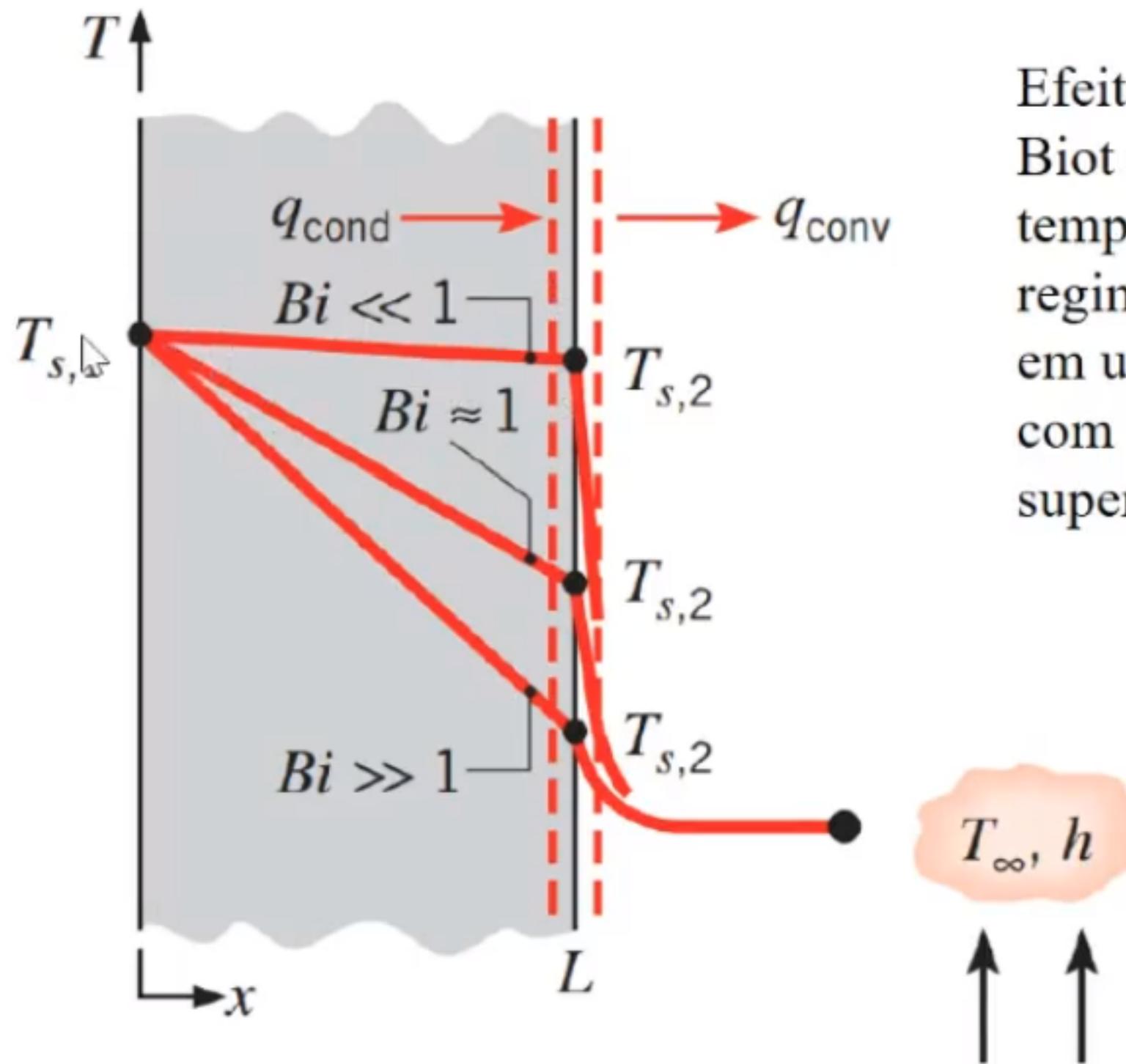
Número de Biot

Realizando-se um balanço de energia na superfície do sólido:

$$\frac{k A_s}{L} (T_{s,1} - T_{s,2}) = h A_s (T_{s,2} - T_{\infty})$$

Rearranjando, tem-se:

$$\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{T_{s,2} - T_{\infty}} = \frac{[L/(k A_s)]}{[1/(h A_s)]} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{h L}{k} \equiv Bi$$



Efeito do número de Biot na distribuição de temperaturas, em regime estacionário, em uma parede plana com convecção na superfície

Método da Capacitância Global

- Quando $Bi \ll 1$, é razoável admitir-se que a distribuição de temperaturas seja uniforme ao longo do sólido em qualquer instante de tempo. Na prática, **o método da capacidade global é válido** quando $Bi < 0,1$.
- Uma particularidade no cálculo do Biot é a determinação do comprimento L .

Método da Capacitância Global

Por conveniência, emprega-se L como sendo um **comprimento característico** (L_c), definido como o quociente entre o volume e a área superficial de um corpo. $L_c = \frac{V}{A_s}$

Exemplo: Para placa de espessura L , sujeita a convecção em suas duas faces:

$$L_c = \frac{L}{2}$$

Método da Capacitância Global

- Para um cilindro longo de raio R :

$$L_c = \frac{R}{2}$$

- Para um cilindro curto de raio R e comprimento L :

$$L_c = \frac{RL}{2(L + R)}$$



- Para uma esfera de raio R :

$$L_c = \frac{R}{3}$$

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \exp\left(-\frac{h A_s}{\rho V c_p} t\right)$$

Ao se admitir o comprimento característico, o expoente da equação do método da capacidade global pode ser representado como

$$\frac{h A_s}{\rho V c_p} t = \frac{ht}{\rho L_c c_p} = \frac{h L_c}{k} \frac{k}{\rho c_p} \frac{t}{L_c^2} = \frac{h L_c}{k} \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

Ou seja

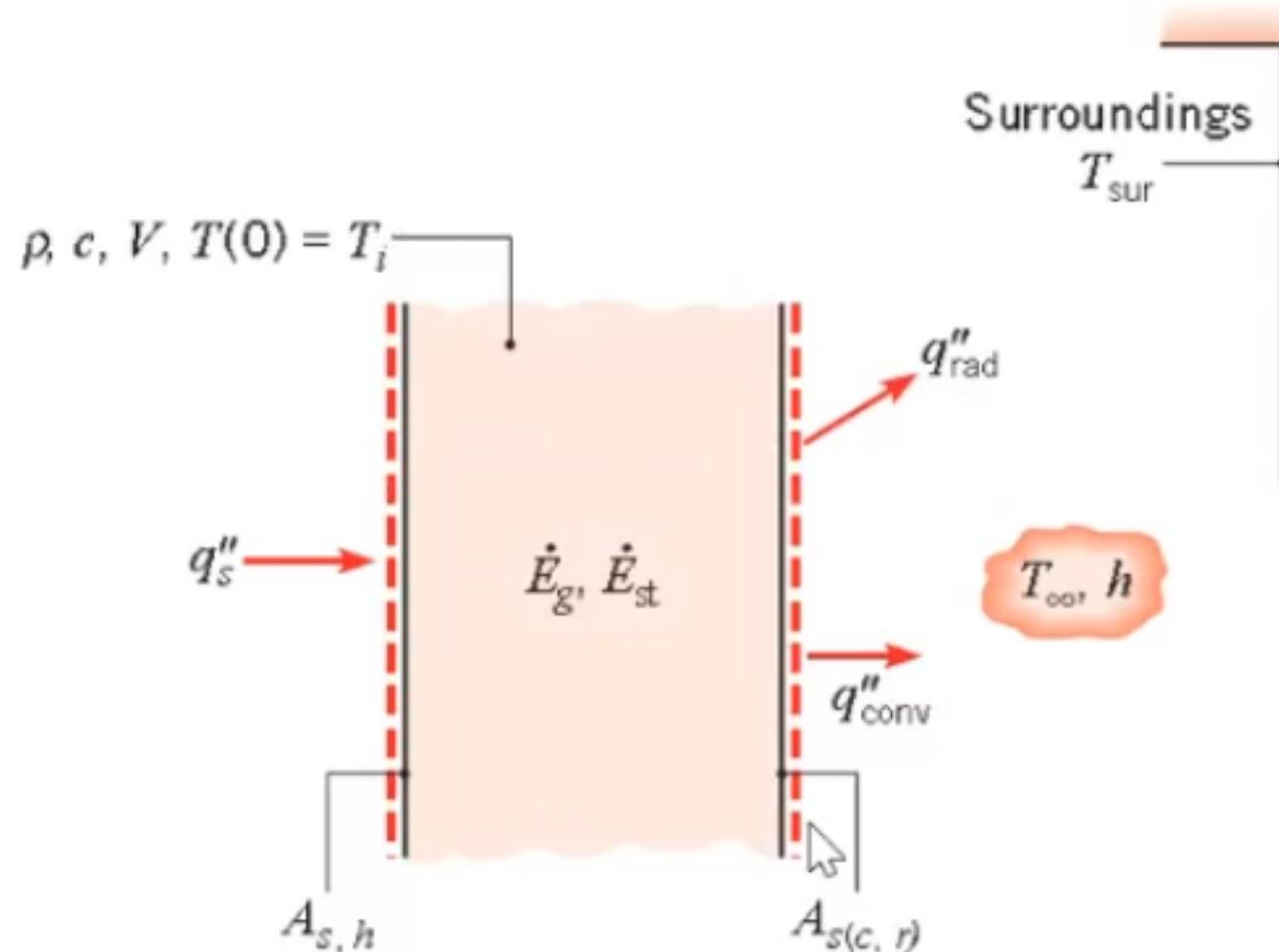
$$\frac{h A_s}{\rho V c_p} t = Bi \cdot Fo$$

Número de Fourier:
Tempo adimensional

$$Fo \equiv \frac{\alpha t}{L_c^2}$$

Análise geral via Capacitância Global

Considerando-se a seguinte situação para as condições térmicas no interior de um sólido:



Análise geral via Capacitância Global

Balanço de energia: $\dot{E}_{ent} - \dot{E}_{sai} + \dot{E}_g = \dot{E}_{acu}$

$$q''_s A_{s,a} - (q''_{conv} + q''_{rad}) A_{s(c,r)} + \dot{E}_g = m c_p \frac{dT}{dt}$$

Ou seja,

$$q''_s A_{s,a} - [h(T - T_{\infty}) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_{viz}^4)] A_{s(c,r)} + \dot{E}_g = \rho V c_p \frac{dT}{dt}$$

Equação diferencial ordinária não-linear de primeira ordem, não-homogênea, que **não pode** ser integrada para se obter uma solução exata.

! soluções exatas podem ser obtidas para versões simplificadas dessa equação.

Análise geral via Capacitância Global

- Caso 1. Hipóteses simplificadoras:

- Sem fluxo térmico: $q_s'' = 0$
- Sem geração de calor: $\dot{E}_g = 0$
- Sem convecção de calor: $q_{conv}'' = 0$

$$-\varepsilon\sigma A_{s,r} \left(\mathbb{F}^4 - T_{viz}^4 \right) = \rho V c_p \frac{dT}{dt}$$

- Separando-se variáveis e integrando da condição inicial até um tempo t , obtém-se:

Análise geral via Capacitância Global

$$t = \frac{\rho c_p V}{4 \varepsilon A_{sr} \sigma T_{viz}^3} \left\{ \ln \left| \frac{T_{viz} + T}{T_{viz} - T} \right| - \ln \left| \frac{T_{viz} + T_i}{T_{viz} - T_i} \right| + 2 \left[\tan^{-1} \left(\frac{T}{T_{viz}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{T_i}{T_{viz}} \right) \right] \right\}$$

- Caso a temperatura da vizinhança (T_{viz}) seja nula, tem-se:

$$t = \frac{\rho c_p V}{3 \varepsilon A_{s,r} \sigma} \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_i^3} \right)$$



Análise geral via Capacitância Global

- Caso 2. Hipóteses simplificadoras:
 - Sem radiação de calor;
 - Coeficiente convectivo independente do tempo.
- Introduzindo-se a diferença de temperaturas

→ $\theta \equiv T - T_{\infty}$

- Obtém-se a seguinte equação diferencial

$$\frac{d\theta}{dt} + a\theta - b = 0$$

Análise geral via Capacitância Global

- Sendo:

$$a = \frac{h A_{s,c}}{\rho V c_p}$$

$$b = \frac{q_s'' A_{s,a} + \dot{E}_g}{\rho V c_p}$$

- A solução da equação diferencial obtida é

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp(-at) + \frac{b/a}{T_i - T_\infty} [1 - \exp(at)]$$



**Parede plana e sistemas radiais com convecção:
soluções aproximadas e soluções gráficas**

Sólido semi-infinito: Três casos

**QUANDO É NECESSÁRIO
CONSIDERAR 
EFEITOS ESPACIAIS**

Efeitos espaciais

Com frequência surgem situações em que o método da capacidade **global** é **inadequado** e **abordagens alternativas** devem ser utilizadas.

Para uma análise preliminar, considerando-se uma parede plana, sem geração interna de calor e com **condutividade térmica constante**, tem-se então:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Efeitos espaciais

- Lembrando-se que:

$$\alpha \equiv \frac{k}{\rho c_p} \quad \text{Difusividade térmica}$$

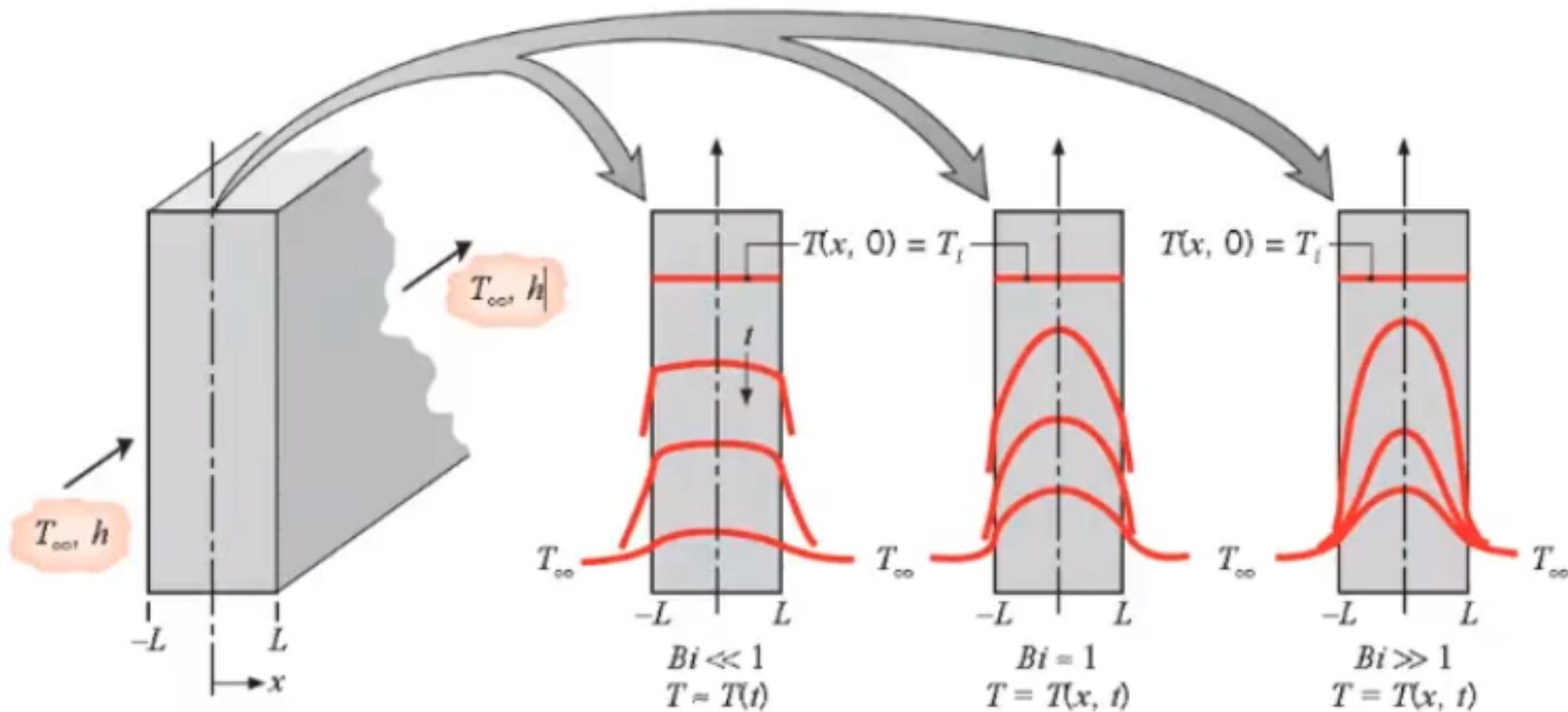
- Condição inicial:

$$T(x,0) = T_i$$

- Condições de contorno:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \\ \left. -k \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = h [T(L,t) - T_{\infty}] \end{cases}$$

Efeitos espaciais



$$T = T(x, t, T_i, T_{\infty}, L, k, \alpha, h)$$

Efeitos espaciais

Adimensionalização:

Diferença de temperaturas: $\theta \equiv T - T_\infty$

Máxima diferença de temperaturas possível:

$$\theta_i \equiv T_i - T_\infty$$

Temperatura adimensional:

$$\theta^* \equiv \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

Efeitos espaciais

- Distância adimensional:

$$x^* \equiv \frac{x}{L}$$

- Sendo L a meia espessura da parede.
- Tempo adimensional:

$$t^* \equiv \frac{\alpha t}{L^2} \equiv Fo$$

- Equação do calor adimensional:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo}$$

Efeitos espaciais

- Condição inicial:

$$\theta^*(x^*, 0) = 1$$

- Condições de contorno:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right|_{x^*=1} = -Bi \theta^*(1, t^*) \end{cases}$$

- Sendo Bi o número de Biot:

$$Bi \equiv \frac{hL}{k}$$

Efeitos espaciais

O número de Fourier pode ser visto como um tempo adimensional, mas ele **também** fornece uma medida da **efetividade relativa** com a qual um sólido conduz e armazena energia térmica:

$$\frac{q}{\dot{E}_{acu}} \sim \frac{k L^2 \Delta T}{L} \frac{t}{\rho L^3 c_p \Delta T} \sim \frac{kt}{\rho c_p L^2} = \frac{\alpha t}{L^2} = Fo$$



Parede plana com convecção

- Supondo-se uma parede plana infinita, de espessura $2L$, sem geração de calor e com propriedades térmicas constantes, exposta à convecção em suas duas superfícies.
- Para essas hipóteses, a solução exata possui a forma:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo) \cos(\zeta_n x^*)]$$

Parede plana com convecção

- O coeficiente C_n é

$$C_n = \frac{4 \sin \zeta_n}{2 \zeta_n + \sin(2 \zeta_n)}$$

- E os valores discretos (autovalores) de ζ_n são as raízes positivas da equação transcendental

$$\zeta_n \tan(\zeta_n) = Bi$$

Parede plana com convecção

Solução aproximada

Pode-se demonstrar que para valores de $Fo > 0,2$, a solução em série infinita pode ser aproximada pelo primeiro termo da série. Neste caso, tem-se:

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \cos(\zeta_1 x^*)$$



Ou

$$\theta^* = \theta_0^* \cos(\zeta_1 x^*)$$

Sendo:

$$\theta_0^* \equiv \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty}$$

Parede plana com convecção

- Observa-se que θ_0^* representa a temperatura adimensional no plano central ($x^* = 0$):

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$$

- Transferência total de energia:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\sin(\zeta_1)}{\zeta_1} \theta_0^*$$

- Sendo:

$$Q_0 = \rho V c_p (T_i - T_\infty)$$

Sistemas radiais com convecção

- Soluções exatas:
 - Cilindro infinito (aproximação razoável quando se tem $L/r_0 \geq 10$, sendo r_0 o raio do cilindro):

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo) J_0(\zeta_n r^*)]$$

- Sendo

$$Fo = \frac{\alpha t}{r_0^3}$$

$$C_n = \frac{2}{\zeta_n} \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0^2(\zeta_n) + J_1^2(\zeta_n)}$$

Sistemas radiais com convecção

- As grandezas J_1 e J_0 são funções de Bessel de primeira espécie e os valores discretos de ζ_n são as raízes positivas da equação transcendental

$$\zeta_n \frac{J_1(\zeta_n)}{J_0(\zeta_n)} = Bi$$

- Onde o número de Biot é dado por:

$$Bi = \frac{h r_0}{k}$$

Sistemas radiais com convecção

– Esfera:

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n \exp(-\zeta_n^2 Fo) \frac{1}{\zeta_n r^*} \sin(\zeta_n r^*) \right]$$

- Sendo

$$C_n = \frac{4[\sin(\zeta_n) - \zeta_n \cos(\zeta_n)]}{2\zeta_n - \sin(2\zeta_n)}$$

- E os valores discretos de ζ_n são as **raízes positivas da equação transcendental**

$$1 - \zeta_n \cot(\zeta_n) = Bi$$

Sistemas radiais com convecção

- Soluções aproximadas (para $Fo > 0,2$):
 - Cilindro infinito:

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) J_0(\zeta_1 r^*)$$

- Ou

$$\theta^* = \theta_0^* J_0(\zeta_1 r^*)$$

- Sendo que θ_0^* representa a temperatura adimensional na linha de simetria do cilindro ($r^* = 0$):

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$$



Sistemas radiais com convecção

– Esfera:

$$\theta^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo) \frac{1}{\zeta_1 r^*} \sin(\zeta_1 r^*)$$

• Ou

$$\theta^* = \theta_0^* \frac{1}{\zeta_1 r^*} \sin(\zeta_1 r^*)$$

• Sendo que θ_0^* representa a temperatura adimensional no centro da esfera ($r^* = 0$):

$$\theta_0^* = C_1 \exp(-\zeta_1^2 Fo)$$

Sistemas radiais com convecção

- Transferência total de energia
 - Definindo

$$Q_0 = \rho V c_p (T_i - T_\infty)$$

- Cilindro infinito:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{2\theta_0^*}{\zeta_1} J_1(\zeta_1)$$

- Esfera:

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{3\theta_0^*}{\zeta_1^3} [\sin(\zeta_1) - \zeta_1 \cos(\zeta_1)]$$

Coeficientes para soluções aproximadas

Bi^a	PAREDE PLANA		CILINDRO INFINITO		ESFERA	
	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1	ζ_1 (rad)	C_1
0,01	0,0998	1,0017	0,1412	1,0025	0,1730	1,0030
0,02	0,1410	1,0033	0,1995	1,0050	0,2445	1,0060
0,03	0,1752	1,0049	0,2439	1,0075	0,2989	1,0090
0,04	0,1987	1,0066	0,2814	1,0099	0,3450	1,0120
0,05	0,2217	1,0082	0,3142	1,0124	0,3852	1,0149
0,06	0,2425	1,0098	0,3438	1,0148	0,4217	1,0179
0,07	0,2615	1,0114	0,3708	1,0173	0,4550	1,0209
0,08	0,2791	1,0130	0,3960	1,0197	0,4860	1,0239
0,09	0,2956	1,0145	0,4195	1,0222	0,5150	1,0268
0,10	0,3111	1,0160	0,4417	1,0246	0,5423	1,0298
0,15	0,3779	1,0237	0,5376	1,0365	0,6608	1,0445
0,20	0,4328	1,0311	0,6170	1,0483	0,7593	1,0592
0,25	0,4801	1,0382	0,6856	1,0598	0,8448	1,0737
0,30	0,5218	1,0450	0,7465	1,0712	0,9208	1,0880
...

^a $Bi = hL/k$ para parede plana e hr/k para cilindro infinito e esfera. Veja Fig. 5.6.

ATENÇÃO!



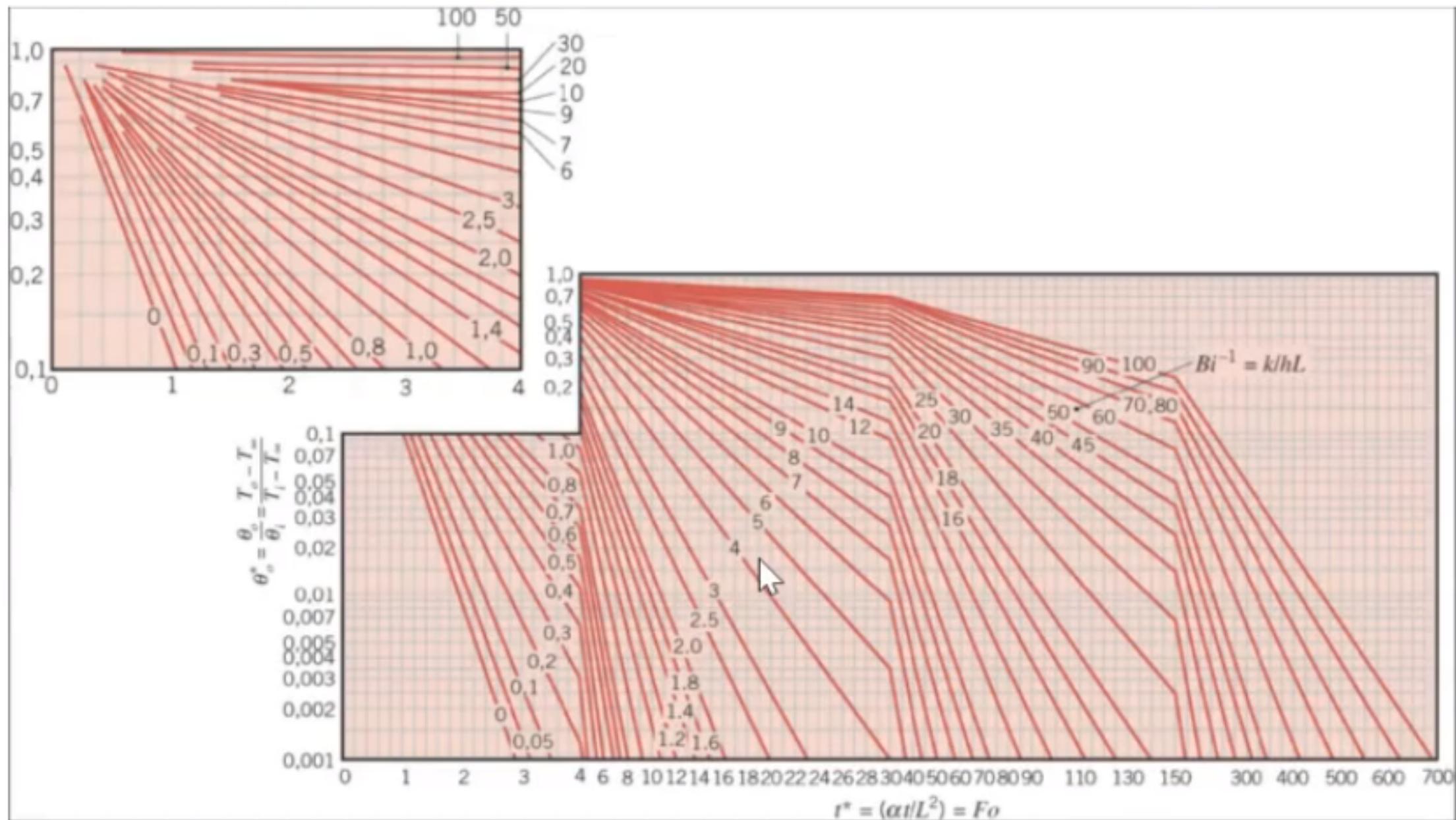
Coeficientes para soluções aproximadas

B.4 Funções de Bessel de Primeira Espécie

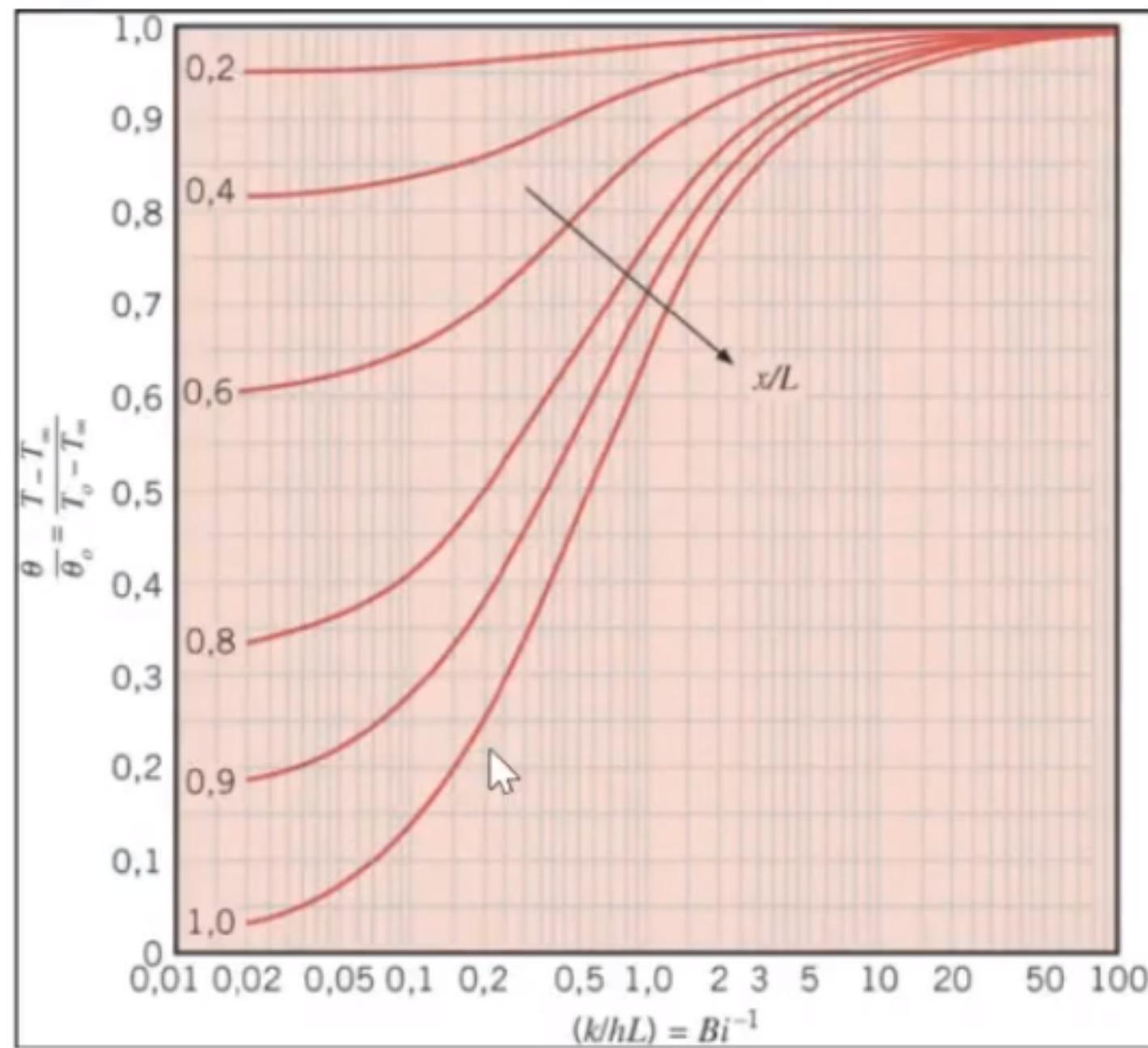
x	$J_0(x)$	$J_1(x)$			
0,0	1,0000	0,0000			
0,1	0,9975	0,0499			
0,2	0,9900	0,0995			
0,3	0,9776	0,1483			
0,4	0,9604	0,1960			
0,5	0,9385	0,2423			
0,6	0,9120	0,2867			
0,7	0,8812	0,3290			
0,8	0,8463	0,3688			
0,9	0,8075	0,4059			
1,0	0,7652	0,4400			
1,1	0,7196	0,4709			
			1,2	0,6711	0,4983
			1,3	0,6201	0,5220
			1,4	0,5669	0,5419
			1,5	0,5118	0,5579
			1,6	0,4554	0,5699
			1,7	0,3980	0,5778
			1,8	0,3400	0,5815
			1,9	0,2818	0,5812
			2,0	0,2239	0,5767
			2,1	0,1666	0,5683
			2,2	0,1104	0,5560
			2,3	0,0555	0,5399
			2,4	0,0025	0,5202



Soluções gráficas – Parede plana



Soluções gráficas – Parede plana



Sólido semi-infinito

Trata-se de um sólido que se estende até o infinito em todas as direções, exceto em uma, sendo caracterizado por uma única superfície identificável.

- Equação da difusão de calor:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Condição inicial: $T(x,0) = T_i$
- Primeira condição de contorno: $T(x \rightarrow \infty, t) = T_i$

Sólido semi-infinito

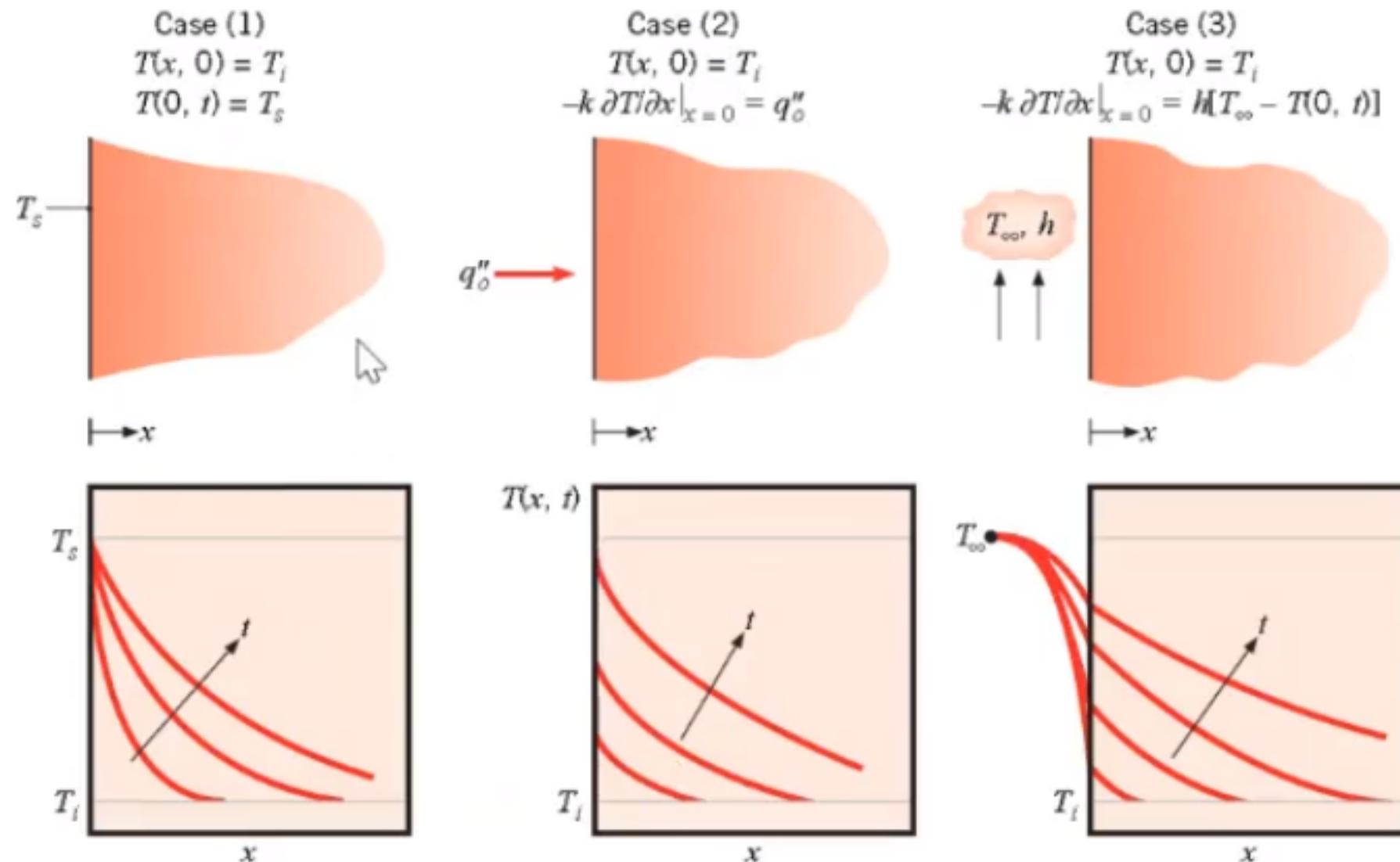


FIGURE 5.7 Transient temperature distributions in a semi-infinite solid for three surface conditions: constant surface temperature, constant surface heat flux, and surface convection.

Sólido semi-infinito

- Primeiro caso: Temperatura superficial constante

$$T(0, t) = T_{\text{sup}}$$

- Distribuição de temperaturas:

$$\frac{T(x, t) - T_{\text{sup}}}{T_i - T_{\text{sup}}} = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)$$

- Fluxo térmico:

$$q_s''(t) = \frac{k(T_{\text{sup}} - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha t}}$$