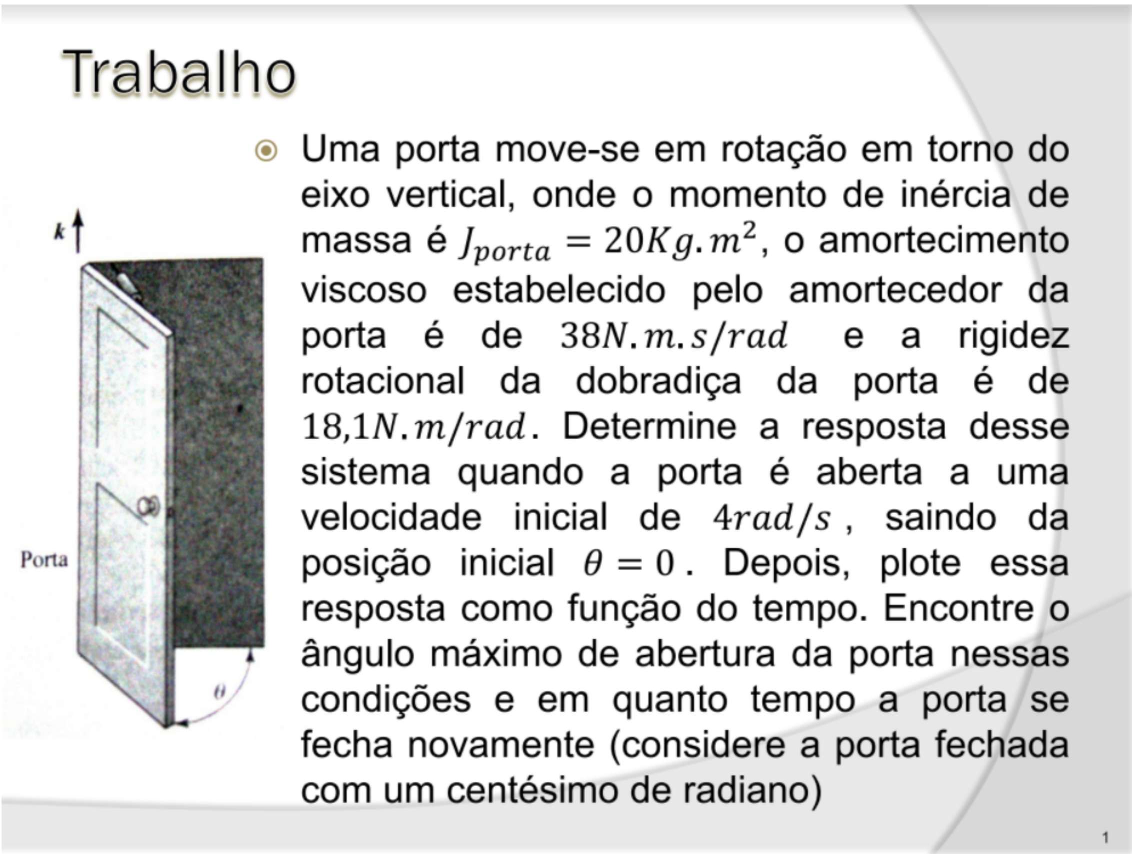
UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E MECÂNICA FACULDADE DE ENGENHARIA

Resolução de exercício – Vibrações Livres com Amortecimento Viscoso

Lavínia Araújo Lima

Juiz de Fora, 2021.3

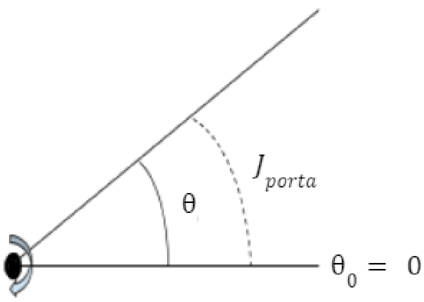


Dados:

Momento de inércia de massa: $J_{porta} = 20\ kg.m^2$
Amortecimento viscoso: $c = 48\ Nms/rad$
Rigidez rotacional: $k_t = 28,8\ Nm/rad$
Velocidade inicial: $\dot{\theta}_0 = 4\ rad/s$
Posição inicial: $\theta_0 = 0$

Resolução:

Para iniciar, traçamos um esquema que represente o sistema em questão:



* Lembrando que há amortecimento e rigidez rotacional, na imagem reduzidos a representação da seta.

Em seguida, igualamos o somatório de momentos a zero

$\sum M = 0$

$J_p \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + k_t \theta = 0$

Manipulando a equação, temos:

$\ddot{\theta} + \frac{c_t}{J_p} \dot{\theta} + \frac{k_t}{J_p} \theta = 0$

$\ddot{\theta} + 2\xi\omega_n \dot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0$

Então:

$\omega_n = \sqrt{\frac{k_t}{J_p}} = \sqrt{\frac{28,8}{20}} = 1,2\, rad/s$

$\xi = \frac{c_t}{2J_p\omega_n} = \frac{48}{2\,.\,20\,.\,1,2} = 1$ (criticamente amortecido)

Como $\xi = 1$, temos um sistema criticamente amortecido. A solução é então:

$$\theta(t) = e^{-\omega_n t}\left[\theta_o + \left(\dot{\theta}_0 + \theta_o . \omega_n\right)t\right]$$

Sabendo que $\theta_o = 0$ e $\dot{\theta}_0 = 4\, rad/s$, temos:

$\theta(t) = 4t . e^{-1,2t}$ **(1)**

Para encontrar o ângulo máximo (quando $\dot{\theta}_0 = 0$):

$\dot{\theta}_0 = 4e^{-1,2t} + 4t\,(-1,2)\,e^{-1,2t}$, ou seja:

$$4e^{-1,2t} + 4t\,(-1,2)\,e^{-1,2t} = 0$$

$$4e^{-1,2t} - 4,8t\,e^{-1,2t} = 0$$

$$e^{-1,2t}\,(4 - 4,8t) = 0$$

$$e^{-1,2t} = 0 \;\; ou \;(4 - 4,8t) = 0$$

Pela segunda igualdade, o ângulo máximo é quando $t = \frac{4}{4,8}\,s$

Substituindo na equação (1), temos:

$$\theta\left(\frac{4}{4,8}\right) = 4.\frac{4}{4,8}.\,e^{-1,2\frac{4}{4,8}}$$

$$\theta_{máx} = 1,23\,rad$$

Para encontrar o **tempo em que a porta fecha novamente**, adotaremos um ângulo $\theta = 0,01\,rad$ (enunciado). Substituindo na equação (1), temos:

$$\theta(t) = 4t.\,e^{-1,2t}$$

$$0,01 = 4t.\,e^{-1,2t}$$

$2,5.10^{-3} = t.e^{-1,2t}$

$ln(2,5.10^{-3}) = ln(t.e^{-1,2t})$

Manipulando, chegamos em: $t = 6,5604\ s$

Solução gráfica:

Utilizando o Excel, plotamos a solução gráfica:

$\theta(t) = 4t.e^{-1,2t}$