

1. Seja o problema de difusão-convecção:

$$-\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + \kappa \frac{du}{dx} = 1, \quad x \in \Omega = [0, 1] \quad (1)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2)$$

A solução exata para este problema é dada por:

$$u(x) = \frac{1}{\kappa} \left( x - \frac{1 - \exp\left(\frac{\kappa x}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(\frac{\kappa}{\varepsilon}\right)} \right).$$

- a) Apresente a forma fraca e o método de Galerkin, explicitando os espaços.
- b) Compare a solução exata e a aproximada para escolhas de  $h$  que satisfaçam:

$$Pe_h = \frac{|\kappa|h}{2\varepsilon} = \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 10 \end{cases}$$

adotando em todas as simulações  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $\kappa = 1$  e interpolações lineares.

- c) Utilizando o método SUPG e um método estável de sua escolha, refaça as simulações do item anterior apresentando no mesmo gráfico o método de Galerkin, o método estável, o método SUPG e a solução exata.

2. Seja o problema:

$$-\varepsilon \frac{d^2 u}{dx^2} + \kappa \frac{du}{dx} = 10e^{-5x} - 4e^{-x}, \quad x \in \Omega = [0, 1] \quad (3)$$

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u(1) = 1. \quad (4)$$

Tomando  $\varepsilon = 0.01$  e  $\kappa = 1$  é possível derivar a seguinte solução exata

$$u(x) = -1.90476e^{-5x} + 3.9604e^{-x} + 5.99498 \times 10^{-44}e^{100x} - 2.05563.$$

- a) Apresente um gráfico que demonstre que o parâmetro ótimo  $\beta$  não apresenta aproximações nodalmente exatas. (**Sugestão:** utilize apenas 10 elementos.)
- b) Escolha um método de estabilização, que dependa de  $\beta$ , e encontre um valor ótimo para este parâmetro através de um estudo do erro da aproximação. (**Sugestão:** fixe a malha em 10 elementos e faça um estudo variando beta de 0 a 1 com incrementos de 0.001 e para cada  $\beta$  calcule o erro da aproximação em relação a solução exata. Ao final faça um gráfico relacionando o erro com os valores de  $\beta$  e indique o valor mínimo encontrado.)
- c) Mostre que o valor ótimo de  $\beta$  do item anterior é válido para outras abordagens estabilizadas.

3. Seja o problema dependente do tempo:

$$\frac{du}{dt} - \varepsilon \frac{d^2u}{dx^2} + \kappa \frac{du}{dx} = 0, \quad (x, t) \in [0, 2] \times [0, T] \quad (5)$$

$$u(0, t) = \alpha_1(t) \quad \text{e} \quad u(2, t) = \alpha_2(t) \quad (\text{condição de contorno}) \quad (6)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (\text{condição inicial}) \quad (7)$$

cuja solução exata é dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4t+1}} \exp \left[ -\frac{(x - \kappa t - 0.5)^2}{\varepsilon(4t+1)} \right].$$

Aplique a solução exata para determinar a condição inicial  $\varphi(x)$  e, para cada instante de tempo  $t$ , as condições de contorno  $\alpha_1(t)$  e  $\alpha_2(t)$ . Nas questões a seguir, utilize  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $\kappa = 1$ , interpolações lineares,  $\Delta t = h^2$  e  $T = 1, 25$ .

- a) Apresente a formulação fraca do problema (5)-(6) aplicando o método de Euler implícito para o termo temporal;
- b) Compare a solução exata e a aproximada para escolhas de  $h$  que satisfaçam:

$$Pe_h = \frac{|\kappa|h}{2\varepsilon} = \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 10 \end{cases}$$

- c) Partindo da formulação proposta na letra (a), apresente a formulação SUPG para o problema (5)-(6) e repita o item (b) fazendo escolhas diferentes para  $\beta$ , onde o parâmetro de estabilização é definido como:

$$\tau = \beta \frac{h}{2\kappa}.$$

**O trabalho deve ser escrito em L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X e enviado por e-mail dentro do prazo determinado.**