



**75/100**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA  
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional  
Método dos Elementos Finitos

### **Lista 1: Projeção L<sup>2</sup>**

Thiago Esterci Fernandes

## 1 . Repositório de código

Código disponível no link

## 2 . Questão 1

### 2.1 . Letra A

faltou o principal, incluir a integral da função v limitada.

Dado um domínio  $\Omega$  e funções escalares  $u$  e  $v$  definidas nesse domínio, consideremos o espaço de Hilbert em  $L^2(\Omega)$  dado por  $L^2 = H^0(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbf{R}\}$ . Esse espaço é composto por funções  $v$  que mapeiam  $\Omega$  para números reais, e essas funções são quadrado-integráveis, o que significa que podemos calcular o produto interno entre duas funções  $u$  e  $v$  em  $L^2(\Omega)$  da seguinte forma:

tem produto interno associado

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx \quad (1)$$

Esse produto interno nos permite definir uma norma no espaço  $L^2(\Omega)$  da seguinte maneira:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|v\|_0^2 = (v, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |v|^2 dx \quad (2)$$

Agora, consideremos o espaço  $V_h$ , que é um subconjunto de  $L^2(\Omega)$ , e a projeção  $P_h f$  de uma função  $f$  no espaço  $V_h \subset L^2(\Omega)$ . Para qualquer função  $v_h$  pertencente a  $V_h$ , a relação a seguir é válida:

$$(f - P_h f, v_h)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (3)$$

Suponha que  $P_h u = u_h$  seja uma projeção de  $u$  (que está em  $L^2(\Omega)$ ) no espaço  $V_h$ , onde  $V_h$  contém as funções de base  $\{\Phi_i\}_{i=0}^k$ . Com isso em mente, podemos formular o seguinte problema: encontrar  $u_h \in V_h$  de modo que:

$$(u - u_h, v_h)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall v_h \in V_h \quad (4)$$

Consequentemente:

$$(u_h, v_h)_{L^2(\Omega)} = (u, v_h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (5)$$

Dado que  $u_h$  está em  $V_h$ , ele pode ser representado como a seguinte combinação linear:

$$u_h = \sum_{i=0}^k \alpha_i \phi_i \quad (6)$$

Com base nessas definições e escolhendo  $v_h = \Phi_j$ , onde  $j$  varia de 0 a  $k$ , podemos formular o problema de forma a encontrar  $\alpha_i$  em números reais, de modo que:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i (\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)} = (u, \phi_j)_{L^2(\Omega)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k \quad (7)$$

Em uma forma matricial, podemos representar isso como:

$$M\alpha = b \quad (8)$$

Onde  $M$  é a matriz de massa composta por  $(\phi_i, \phi_j)_{L^2(\Omega)}$ ,  $\alpha$  é o vetor de incógnitas  $\alpha = \{\alpha_i\}, i = [1, 2, \dots, n_{int}]$ , sendo  $n_{int}$  sendo os pontos de integração e  $b$  é o vetor de origem definido por  $(u, \phi_j)_{L^2(\Omega)}$ .  
**Na verdade tá associado ao número de nós da malha discretizada.**

Após montar e resolver o sistema linear, obtemos os valores de  $\alpha$ , e a combinação linear desses valores com as funções de base representa uma aproximação da função  $u$ . É importante notar que, neste caso,  $u = \sin^2(\pi x)$  e  $\Omega$  é o intervalo definido por  $\Omega = [-2, 2]$ .

## 2.2 . Letra B

Os seguintes resultados foram adquiridos ao empregar bases lineares de Lagrange juntamente com diversos refinamentos de malha.

**É importante comentar os resultados dos gráficos.**

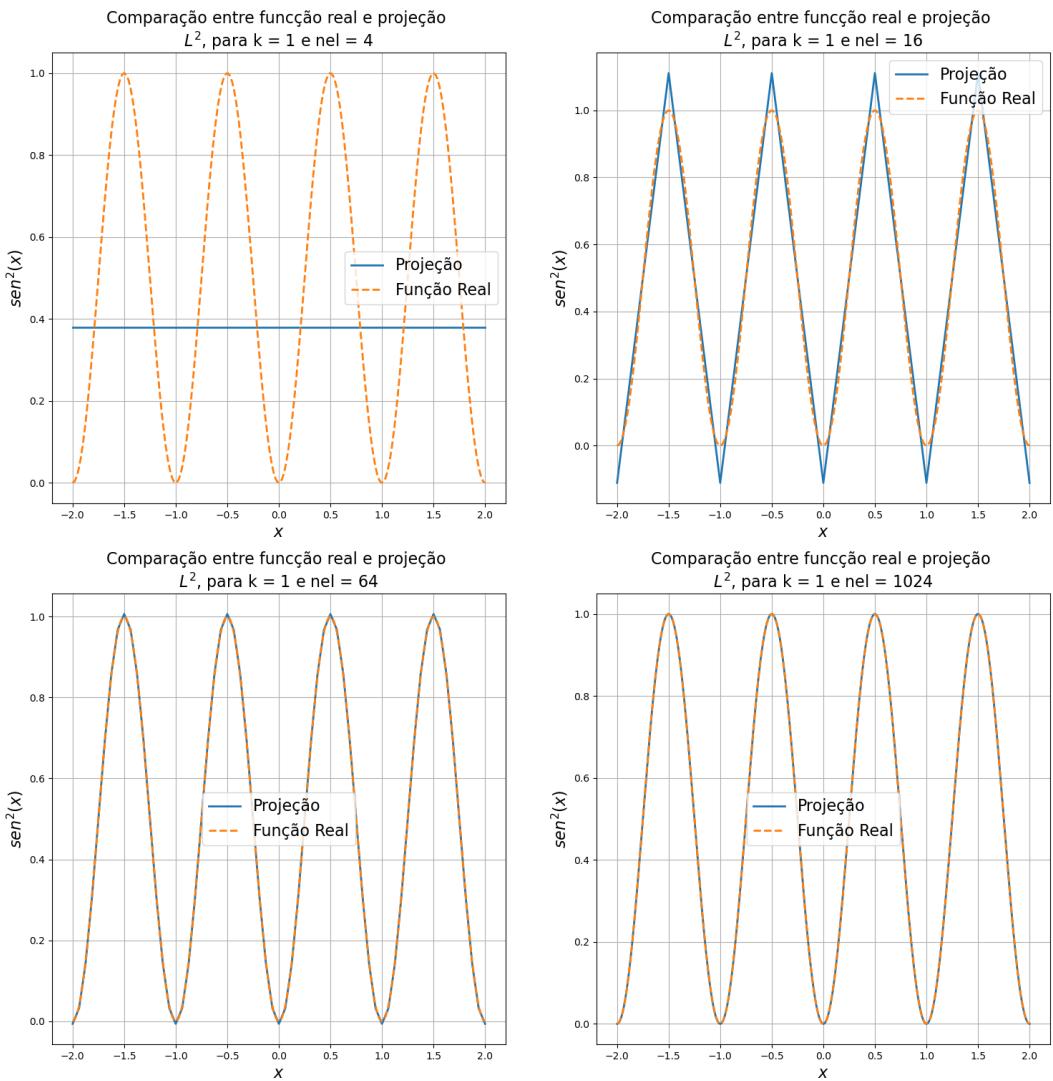


Figura 1: Aproximação por projeção  $L^2$  para  $k=1$ .

### 2.3 . Letra C

Os seguintes resultados foram adquiridos ao empregar bases de Lagrange com graus maiores juntamente com diversos refinamentos de malha.

É importante comentar os resultados dos gráficos.

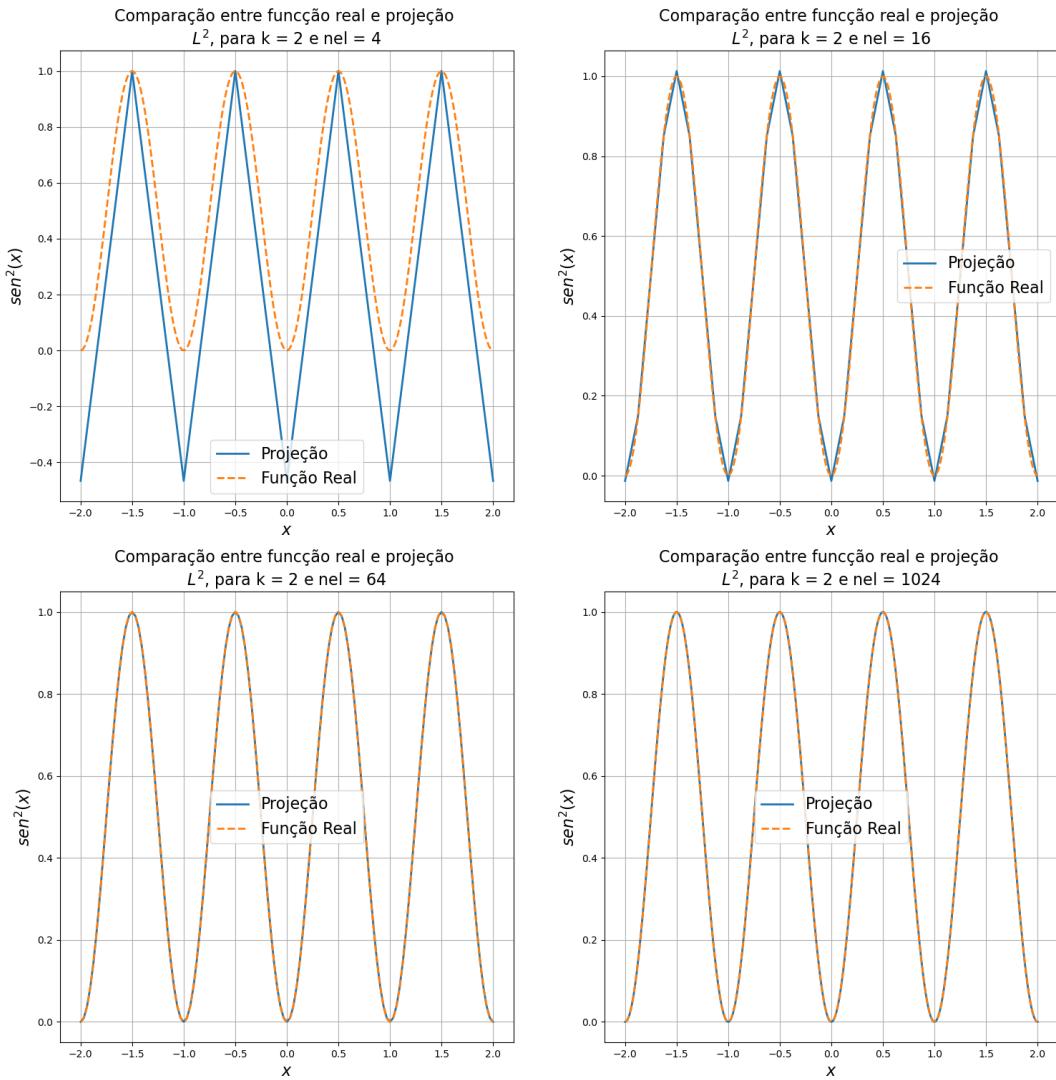


Figura 2: Aproximação por projeção  $L^2$  para  $k=2$ .

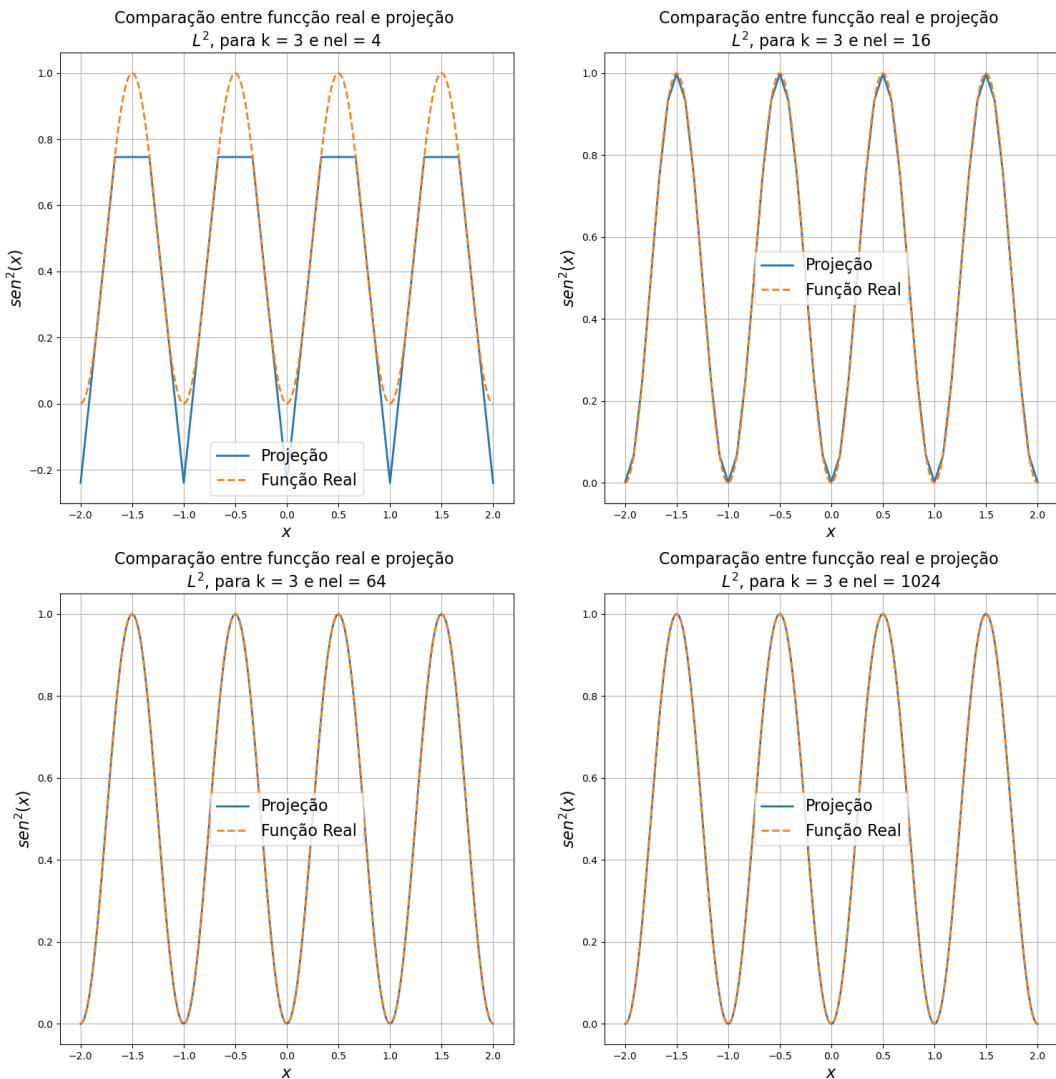


Figura 3: Aproximação por projeção  $L^2$  para  $k=3$ .

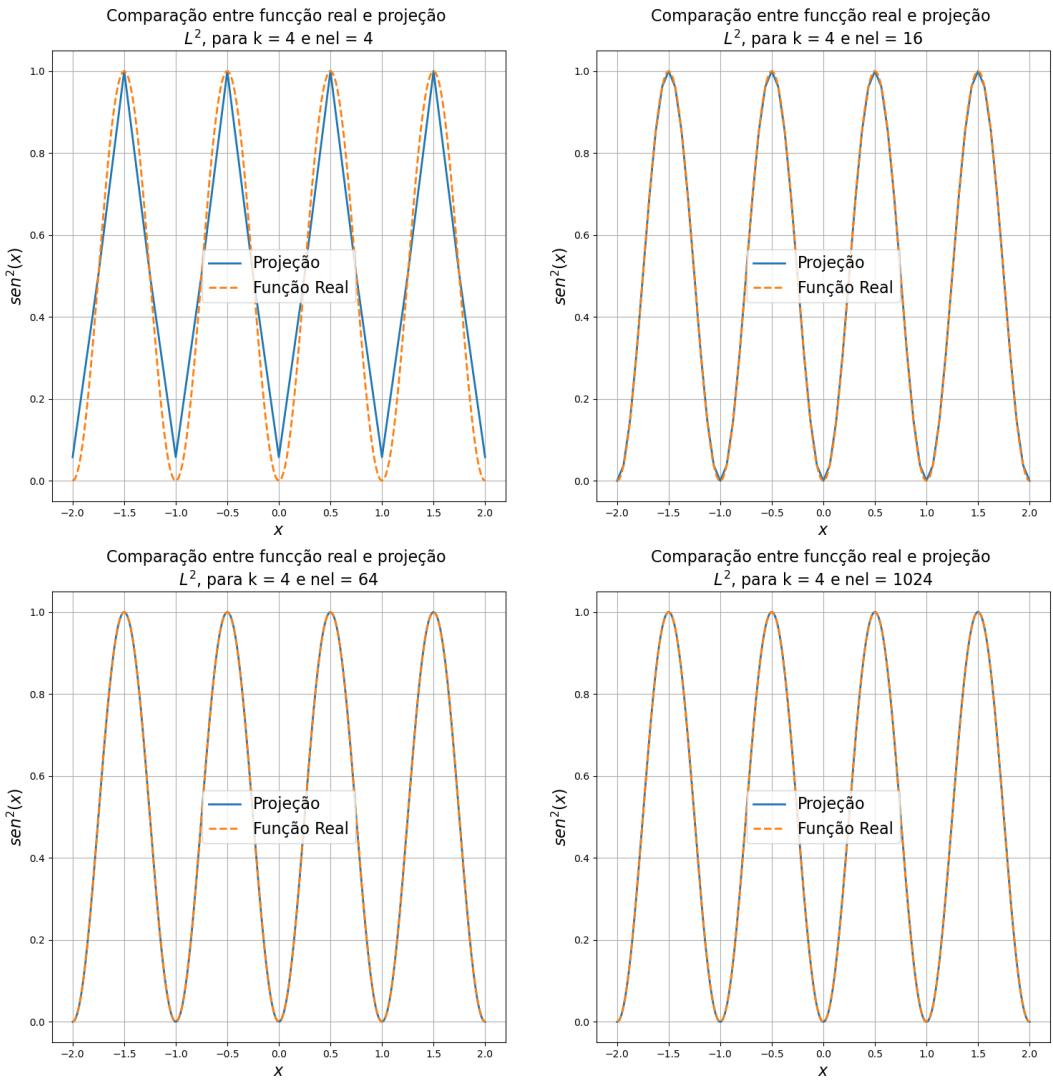


Figura 4: Aproximação por projeção  $L^2$  para  $k=4$ .

## 2.4 . Letra D

Considerando as taxas de convergência observadas para diferentes graus das funções de base:  
quais refinamentos e graus polinomiais foram utilizados  
neste estudo?

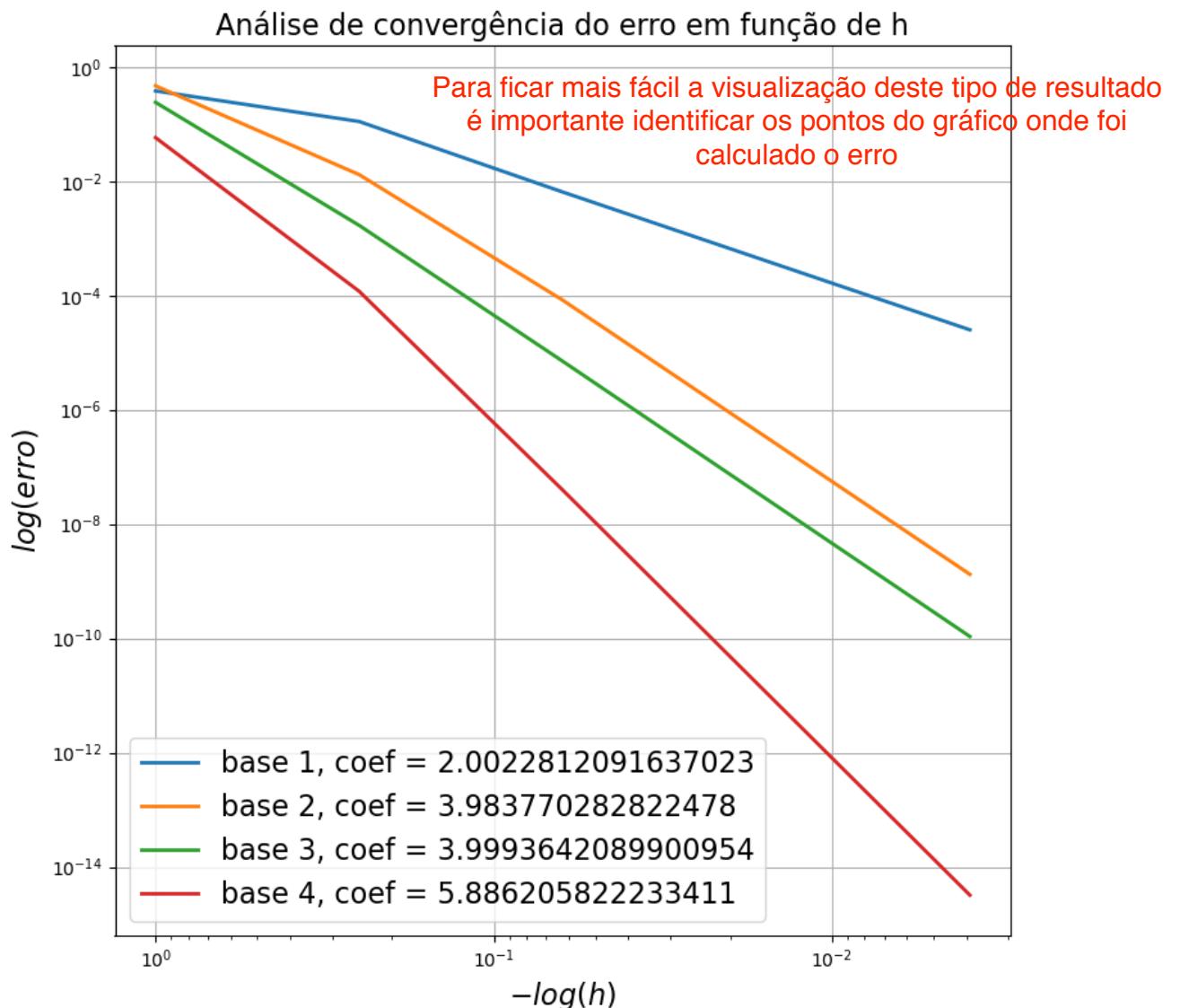


Figura 5: Análise de convergência para a norma infinito para funções de base de diferentes graus.

## 2.5 . Letra E

Considerando a estimativa a priori do erro dada por:

$$\|u_h - u\|_{\inf} \leq Ch^{k+1} \|u\|_{k+1}, \quad (9)$$

A estimativa de erro a priori deveria ser  $k + 1$ , e esse resultado foi atingido para  $k = 1$  e  $k = 3$ . No entanto, para os demais valores de  $k$ , o resultado excede as expectativas. Essas variações nos resultados podem depender da natureza da função em processo de projeção. Portanto, os resultados obtidos são coerentes com as expectativas.

### 3 . Questão 2

#### 3.1 . Letra A

Os seguintes resultados foram adquiridos ao empregar bases de Lagrange com graus maiores juntamente com diversos refinamentos de malha.

É importante comentar os resultados dos gráficos.

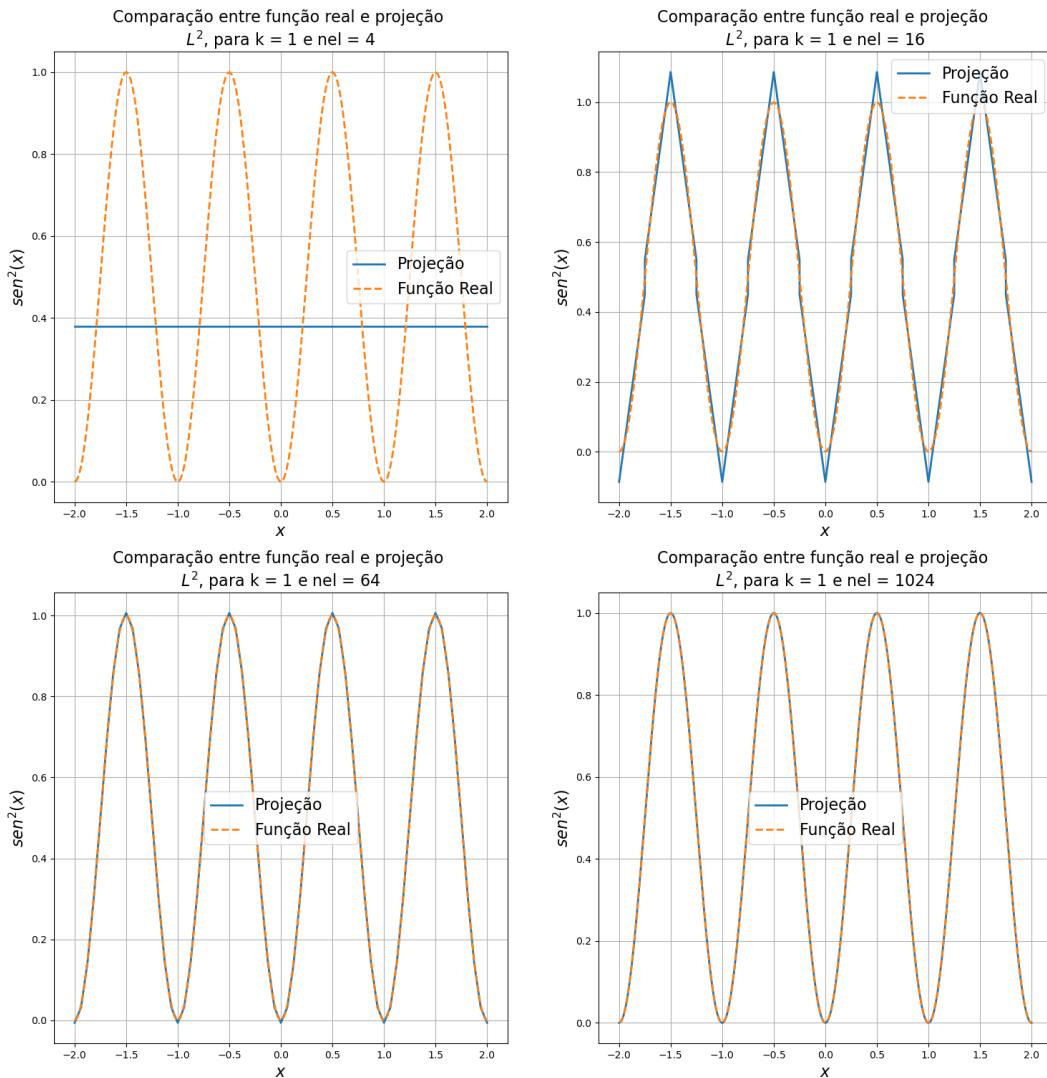


Figura 6: Aproximação por projeção  $L^2$  para  $k=1$  no caso descontínuo.

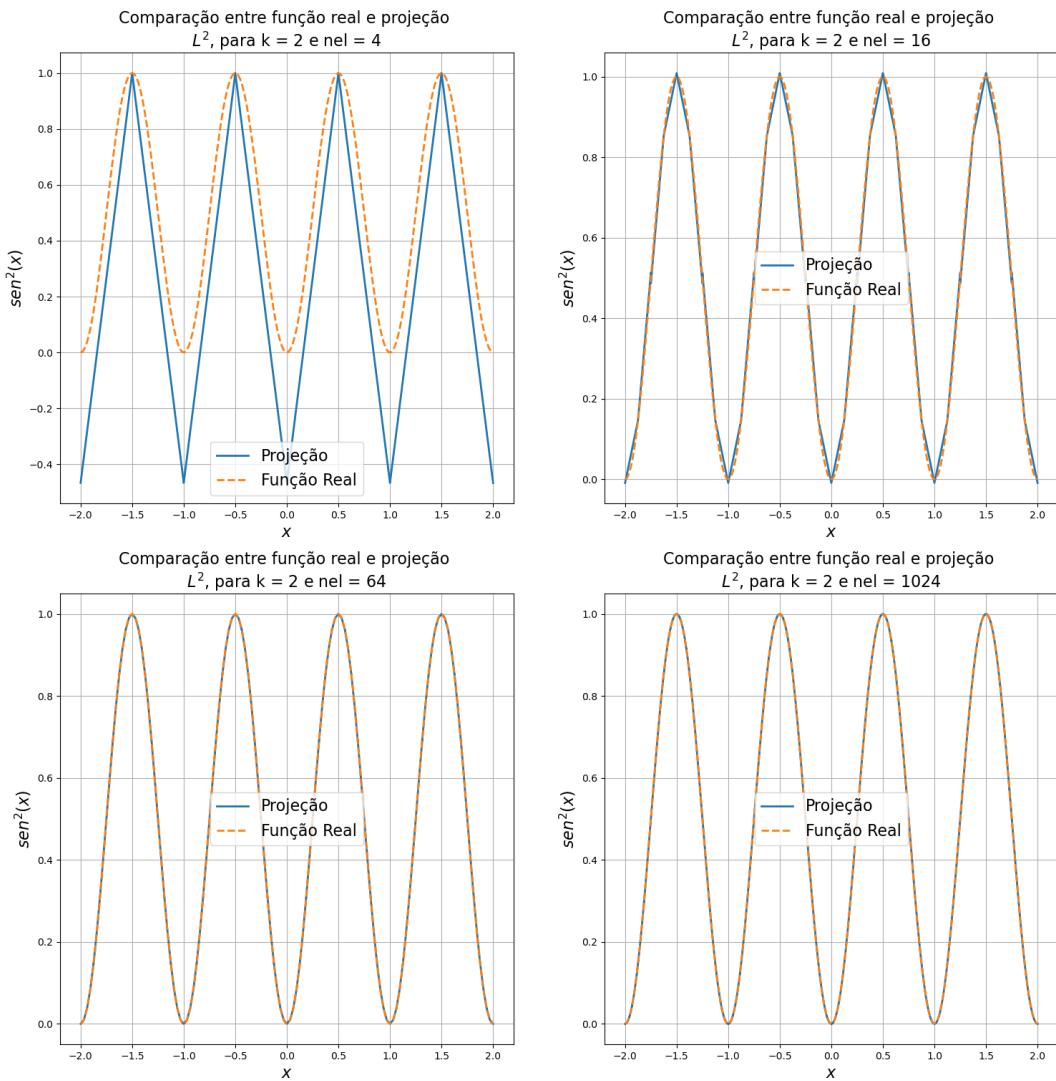


Figura 7: Aproximação por projeção  $L^2$  para  $k=2$  no caso descontínuo.

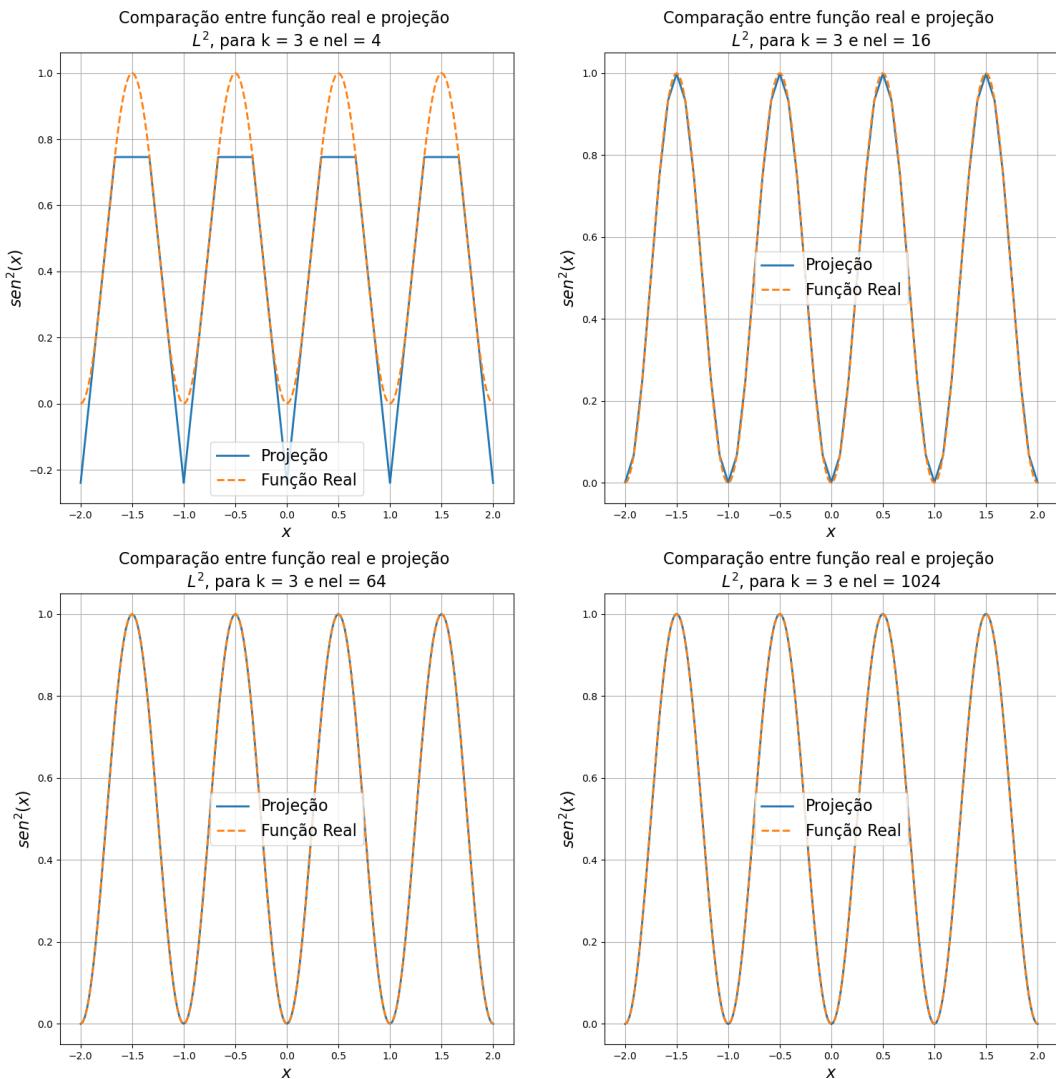


Figura 8: Aproximação por projeção  $L^2$  para  $k=3$  no caso descontínuo.

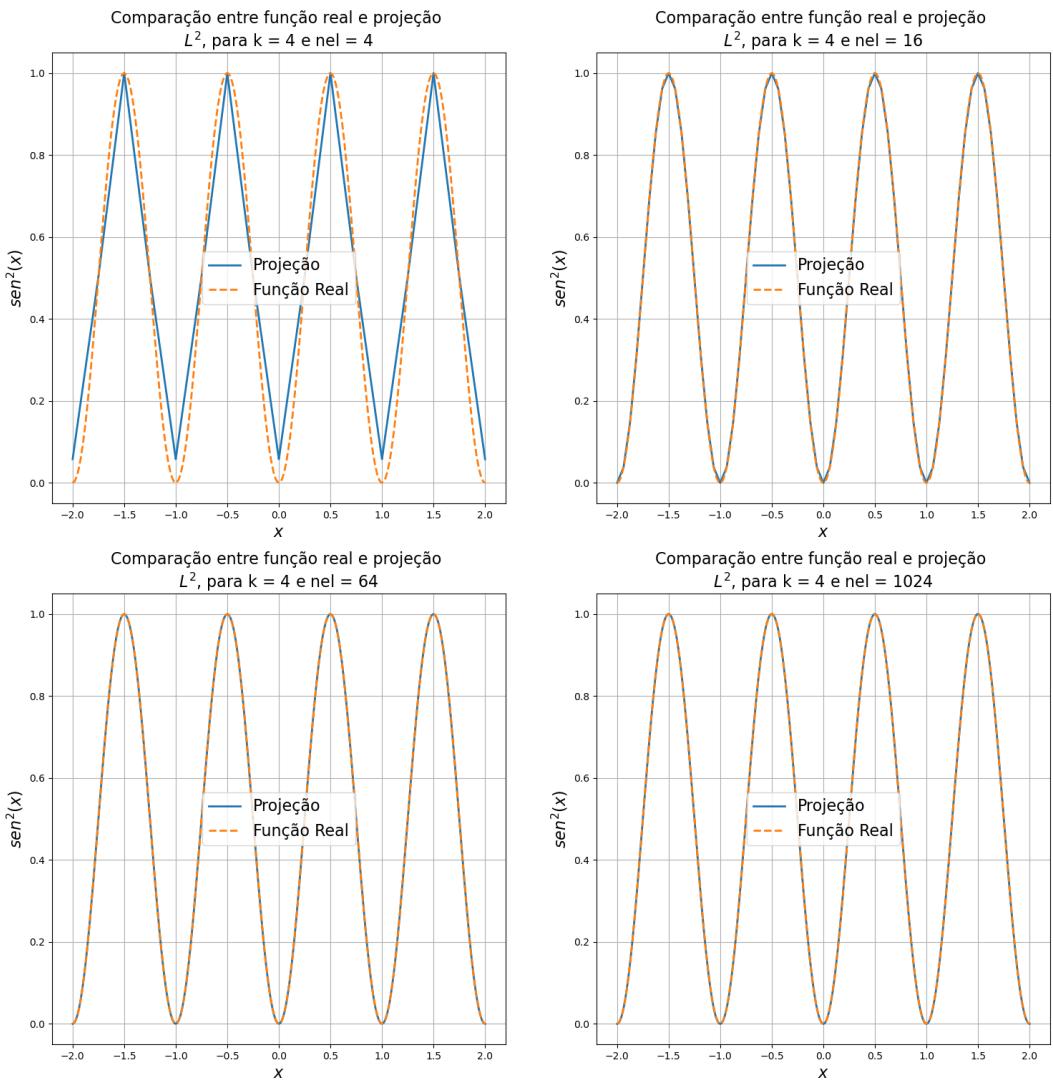


Figura 9: Aproximação por projeção  $L^2$  para  $k=4$  no caso descontínuo.

### 3.2 . Letra B

#### convergência

Tal como no cenário contínuo, os valores das taxas de divergência alcançados foram congruentes com as expectativas, ou chegaram muito próximos a elas, de acordo com a estimativa de erro a priori.

quais refinamentos e graus polinomiais foram utilizados  
neste estudo?

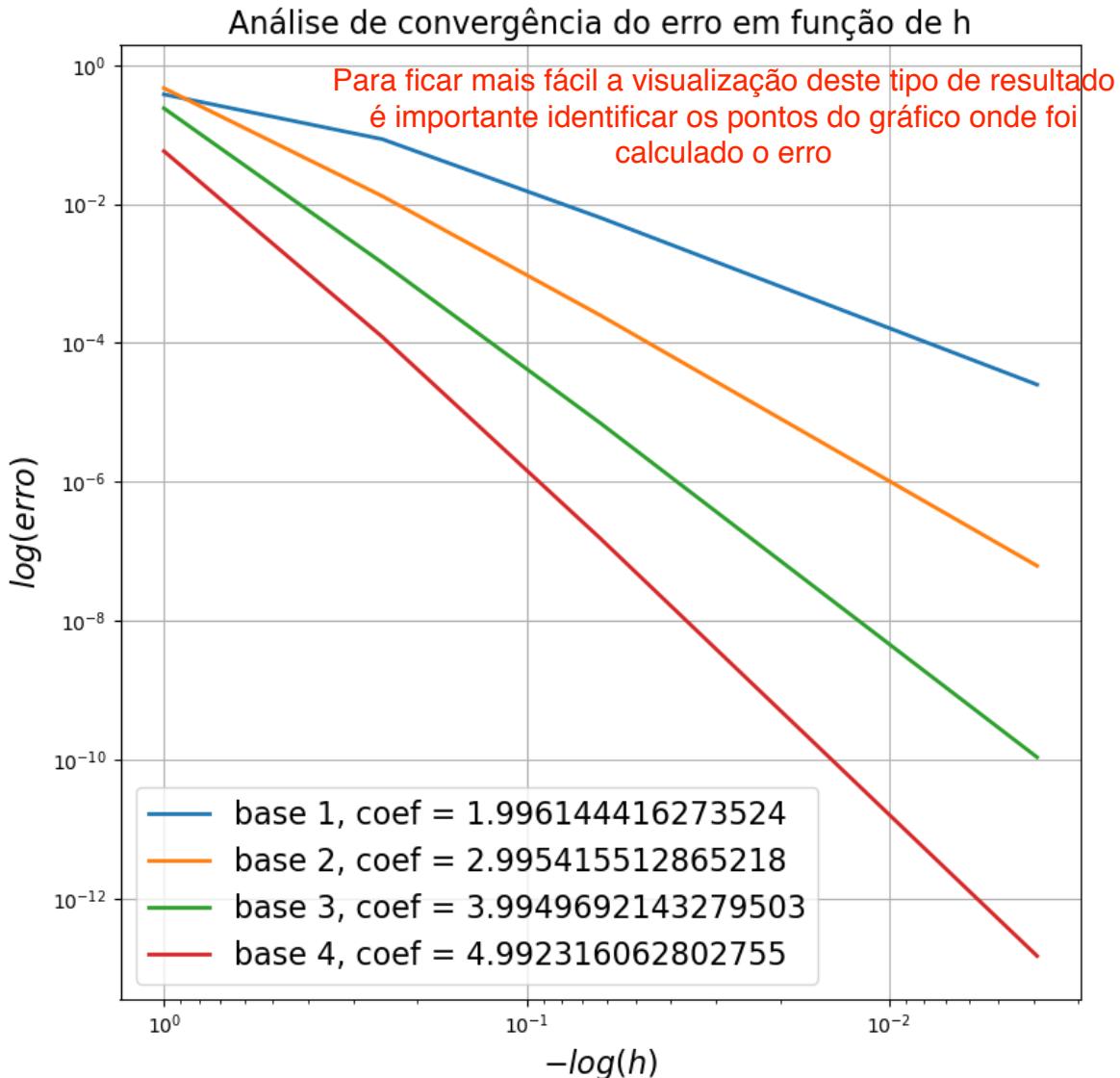


Figura 10: Análise de convergência para a norma infinito para funções de base de diferentes graus no caso descontínuo.

### 3.3 . Letra C

Ao fazer uma avaliação visual, não se observaram discrepâncias significativas entre os resultados obtidos por meio das diferentes abordagens utilizadas. Uma exceção notável é observada no caso de 16 elementos com base linear, onde é possível identificar uma descontinuidade entre as funções aproximadas geradas pelas funções de base lagrangianas descontínuas por partes. Além disso, de forma geral, a taxa de convergência é ligeiramente menor para o caso descontínuo.

E a diferença das taxas de convergência?

Não sei se você utilizou os mesmos refinamentos de malha nos estudos de convergência, mas de acordo com os resultados o caso contínuo se mostrou mais preciso que o descontínuo.

Discutir qual abordagem seria mais interessante  
do ponto de vista do custo computacional e precisão numérica seria legal também.