



75/100

UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional
Método dos Elementos Finitos

**Enviado com 5 dias de atraso.
Este atraso foi levando em conta na nota.**

Lista 2

Thiago Esterci Fernandes

Repositório de código

Código disponível no link

Introdução Teórica

Considere o domínio espacial $\Omega = [a, b]$ e as funções $K(x) > 0$, $J(x)$ e $f(x)$. O problema consiste em encontrar uma função $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaça a equação diferencial:

$$-\frac{d}{dx} \left(K(x) \frac{du}{dx} \right) + J(x)u = f(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (1)$$

Junto a isso, impomos condições de contorno de Dirichlet:

$$\begin{aligned} u(a) &= g_a \\ u(b) &= g_b \end{aligned} \quad (2)$$

e/ou condições de contorno de Neumann:

$$\begin{aligned} K(a) \frac{du}{dx}(a) &= q_a, \\ -K(b) \frac{du}{dx}(b) &= q_b \end{aligned} \quad (3)$$

onde g_a, g_b, q_a, q_b são os valores das condições de contorno.

A combinação das condições de Dirichlet e Neumann resulta nas condições de Robin, expressas por:

$$\begin{aligned} K(a) \frac{du}{dx}(a) &= u(a) + q_a, \\ -K(b) \frac{du}{dx}(b) &= u(b) + q_b \end{aligned} \quad (4)$$

Uma abordagem alternativa para impor as condições essenciais de Dirichlet envolve o uso de termos de penalização $\kappa_a \geq 0$ e $\kappa_b \geq 0$ são introduzidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} K(a) \frac{du}{dx}(a) &= \kappa_a(u(a) - g_a) + q_a, \\ -K(b) \frac{du}{dx}(b) &= \kappa_b(u(b) - g_b) + q_b \end{aligned} \quad (5)$$

Os parâmetros κ_a e κ_b são utilizados com o propósito de assegurar a imposição efetiva da condição de Dirichlet.

Ao realizar a integração sobre o domínio Ω e multiplicar o problema modelo por uma função v , obtemos a seguinte expressão:

$$-\int_{\Omega} \left(\frac{d}{dx} \left(K(x) \frac{du}{dx} \right) - J(x)u + f(x) \right) v \, dx = 0 \quad (6)$$

Ao aplicar a integração por partes a este problema, obtemos:

$$\int_{\Omega} K(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_{\Omega} J(x) u v dx - K(x) \frac{du}{dx} v \Big|_a^b = \int_{\Omega} f(x) v dx \quad (7)$$

Supondo que U está no espaço

$$U = \{u \in H^1(\Omega), u(a) = a, u(b) = b\} \quad (8)$$

e V pertence ao espaço

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v(a) = a, v(b) = b\} \quad (9)$$

Ao levar em consideração os espaços definidos e a condição de Robin aplicada nos pontos a e b , a expressão resultante é a seguinte:

$$\int_{\Omega} K(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_{\Omega} J(x) u v dx - \kappa_b(u(b) - g_b)v(b) + \kappa_a(u(a) - g_a)v(a) = \int_{\Omega} f v dx \quad (10)$$

Como também a nova definição dos espaços U e V

$$U = \{u \in H^1(\Omega)\} \quad (11)$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v(a) = \kappa_a(u(a) - g_a) + q_a, v(b) = -\kappa_b(u(b) - g_b) + q_b\} \quad (12)$$

Assim, podemos formular o seguinte problema variacional:

Encontrar $u \in U$, tal que

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V \quad (13)$$

onde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} K(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_{\Omega} J(x) u v dx + \kappa_a u(a)v(a) + \kappa_b u(b)v(b) \quad (14)$$

$$f(v) = \int_{\Omega} f v dx + (\kappa_a g_a - q_a)v(a) + (\kappa_b g_b - q_b)v(b) \quad (15)$$

Ao aplicar uma discretização conforme ao problema, definimos espaços aproximados $U_h \subset U$ e $V_h \subset V$, reescrevendo o problema variacional da seguinte forma:

Encontrar $u_h \in U_h$, tal que

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (16)$$

onde

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} K(x) \frac{du_h}{dx} \frac{dv_h}{dx} dx + \int_{\Omega} J(x) u_h v_h dx + \kappa_a u_h(a)v_h(a) + \kappa_b u_h(b)v_h(b) \quad (17)$$

$$f(v_h) = \int_{\Omega} f v_h dx + (\kappa_a g_a - q_a) v_h(a) + (\kappa_b g_b - q_b) v_h(b) \quad (18)$$

Nesse contexto,

$$U_h = S_k^h \cap U, \quad V_h = S_k^h \cap V \quad (19)$$

onde $S_k^h = \{vh \in C^0(\Omega); vh \in P_k\}$, sendo P_k o polinômio de interpolação de ordem k .

Para o caso linear, essas funções de base locais ϕ_i^e são definidas em cada elemento $\Omega_e = [x_1^e, x_2^e]$, entretanto, elas são análogas às funções globais e podem ser expressas linearmente para cada elemento Ω_e da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \phi_1^e(x) &= \frac{1}{h}(x_2^e - x), \quad \forall x \in [x_1^e, x_2^e] \\ \phi_2^e(x) &= \frac{1}{h}(x - x_1^e), \quad \forall x \in [x_1^e, x_2^e] \\ \phi_i^e &= 0, \quad i = 1, 2, \quad \forall x \notin [x_1^e, x_2^e] \end{aligned} \quad (20)$$

Vale ressaltar que podemos utilizar funções de base com outros tipos de funções e graus polinomiais.

Assim, a matriz local K_{ij}^e para o caso linear é expressa como:

$$K_{ij}^e = \begin{bmatrix} K_{11}^e & K_{12}^e \\ K_{21}^e & K_{22}^e \end{bmatrix}$$

onde

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} K(x) \frac{d\phi_i^e}{dx} \frac{d\phi_j^e}{dx} dx + \kappa_a \phi_i^1(a) \phi_j^1(a) + \kappa_b \phi_i^N(b) \phi_j^N(b), \quad i, j = 1, 2 \quad (21)$$

De forma semelhante, a matriz local M_{ij}^e para o caso linear é expressa como:

$$M_{ij}^e = \begin{bmatrix} M_{11}^e & M_{12}^e \\ M_{21}^e & M_{22}^e \end{bmatrix}$$

onde

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega} J(x) \phi_i^e \phi_j^e dx, \quad i, j = 1, 2 \quad (22)$$

E o vetor local F_j^e é dado por:

$$F_j^e = \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{bmatrix}$$

onde

$$F_j^e = \int_{\Omega_e} f \phi_j^e dx + (\kappa_a g_a - q_a) \phi_j^1(a) + (\kappa_b g_b - q_b) \phi_j^N(b), \quad j = 1, 2 \quad (23)$$

Definindo o elemento de referência no intervalo $[-1, 1]$ e considerando um elemento de intervalo $\Omega_e = [x_1^e, x_2^e]$, a matriz local K_{ij}^e expressa como por 22, pode ser reformulada no intervalo $[-1, 1]$ em termos da variável t , aplicando a relação:

$$\frac{d\phi_i^e}{dx} = \frac{d\phi_i}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d\phi_i}{dt} \frac{1}{2h}$$

$$dx = \frac{h}{2} dt \quad (24)$$

resultando em:

$$K_{ij}^e = \int_{-1}^1 K(x(t)) \left(\frac{d\phi_i}{dt} \frac{1}{2h} \right) \left(\frac{d\phi_j}{dt} \frac{1}{2h} \right) \frac{h}{2} dt + \int_{-1}^1 J(x(t)) \phi_i^e \phi_j^e \frac{h}{2} dt$$

$$+ \kappa_a \phi_i^1(a) \phi_j^1(a) + \kappa_b \phi_i^N(b) \phi_j^N(b) \quad (25)$$

Isso pode ser simplificado como:

$$K_{ij}^e = \int_{-1}^1 F(t) dt + \int_{-1}^1 L(t) dt + \kappa_a \phi_i^1(a) \phi_j^1(a) + \kappa_b \phi_i^N(b) \phi_j^N(b) \quad (26)$$

De maneira análoga para o termo fonte local F_j^e , temos:

$$F_j^e = \int_{x_{e1}}^{x_{e2}} f(x) \phi_j^e dx + (\kappa_a g_a - q_a) \phi_j^1(a) + (\kappa_b g_b - q_b) \phi_j^N(b) \quad (27)$$

Isso pode ser reescrito no intervalo $[-1, 1]$ em termos da variável t , utilizando as relações 24 resultando em:

$$F_j^e = \int_{-1}^1 f(x(t)) \phi_j \frac{h}{2} dt + (\kappa_a g_a - q_a) \phi_j^1(a) + (\kappa_b g_b - q_b) \phi_j^N(b) \quad (28)$$

Simplificando, temos:

$$F_j^e = \int_{-1}^1 G(t) dt + (\kappa_a g_a - q_a) \phi_{1j}(a) + (\kappa_b g_b - q_b) \phi_{Nj}(b) \quad (29)$$

As funções $F(t)$, $L(t)$ e $G(t)$ são então integradas numericamente para calcular as contribuições da matriz de rigidez, da matriz de carga e do vetor fonte local, respectivamente.

**Essa introdução não faz parte do solicitado, por isso não será avaliada.
Porém, espero que a escrita dessa introdução tenha servido para fundamentar o conteúdo.**

Questão 1

Letra A

Considerando que a função real é dada por:

$$u = \operatorname{sen}(\pi x)$$

Além disso, temos que se trata de um problema unidimensional, portanto f é dada:

$$\begin{aligned} -\Delta u &\neq -\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{sen}(\pi x)) = \pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \therefore \\ f &= \pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \quad \forall x \in \Omega \end{aligned}$$

Para g , temos que:

$$\begin{aligned} g &= \operatorname{sen}(\pi x) = \operatorname{sen}(\pi \times 1.5) \quad \forall x \in \partial\Omega_D|_{x=1.5} \therefore \\ g &= -1 \end{aligned}$$

Com o intuito de definir h , considerando o problema como unidimensional e que a condição de contorno de Neumann será aplicada no início do domínio, temos que:

$$\begin{aligned} h &= \nabla u \cdot n = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(\pi x)) \cdot (-1) = -\pi \cos(\pi \times 0) \quad \forall x \in \partial\Omega_N|_{x=0} \therefore \\ h &= -\pi \end{aligned}$$

Portanto, a formulação do problema forte fica da seguinte forma:

du/dx

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \pi^2 \operatorname{sen}(\pi x) \quad \forall x \in \Omega \\ g &= \operatorname{sen}(\pi x) \quad \forall x \in \partial\Omega_D \\ h &= -\pi \cos(\pi x) \quad \forall x \in \partial\Omega_N \end{aligned}$$

onde $\partial\Omega = \partial\Omega_N \cup \partial\Omega_D$ e $\partial\Omega_N \cap \partial\Omega_D = \emptyset$, $\Omega = [0, 1.5]$ e $\partial\Omega_N = 0$ e $\partial\Omega_D = 1.5$.

Letra B

Considerando que, para o problema proposto, teremos uma condição de Dirichlet no ponto $x = 0$ e condição de Neumann em $x = 1.5$, temos que $\kappa_a = 0$, $\kappa_b = 10^6$, $g_a = 0$, $g_b = -1$, $q_a = -\pi$, $q_b = 0$. Além disso temos que:

$$\begin{aligned} K(x) &= 1 \\ J(x) &= 0 \end{aligned}$$

Substituindo esses termos na equação 17, temos que a formulação fraca é dada por:

cadê a condição de Neumann em x=0?

$$\int_{\Omega} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - 10^6(u(b) + 1)v(b) = \int_{\Omega} \pi^2 \sin(\pi x)v dx \quad (30)$$

Como também a definição dos espaços U e V ao substituir os termos nas equações 11 e 12 respectivamente temos:

O espaço U está correto!

$$U = \{u \in H^1(\Omega)\} \quad (31)$$

Nessa abordagem que você adotou a condição de Dirichlet não entra no espaço, pois entrou direto na formulação

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v(a) = -\pi \text{ e } v(b) = -10^6(u(b) + 1)\} \quad (32)$$

A condição de Neumann também não entra no espaço.

Assim, podemos formular o seguinte problema variacional:

Encontrar $u \in U$, tal que

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V \quad (33)$$

onde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + 10^6 u(b)v(b) \quad (34)$$

$$f(v) = \int_{\Omega} \pi^2 \sin(\pi x)v dx + \pi v(a) - 10^6 v(b) \quad (35)$$

Agora sim com a condição de Neumann

Letra C

A seguir serão apresentadas as comparações entre as funções reais e aproximadas para o problema proposto. Nesse estudo foram utilizadas as bases $k = 1, 2, 3, 4$ aplicadas aos números de elementos $nel = 4, 8, 16, 32$. Vale ressaltar que, para um número maior de elementos o resultado começava a divergir. Portanto elementos, as para malhas formadas por 4^i elementos, com $i = 4, 5$ foram retiradas da análise.

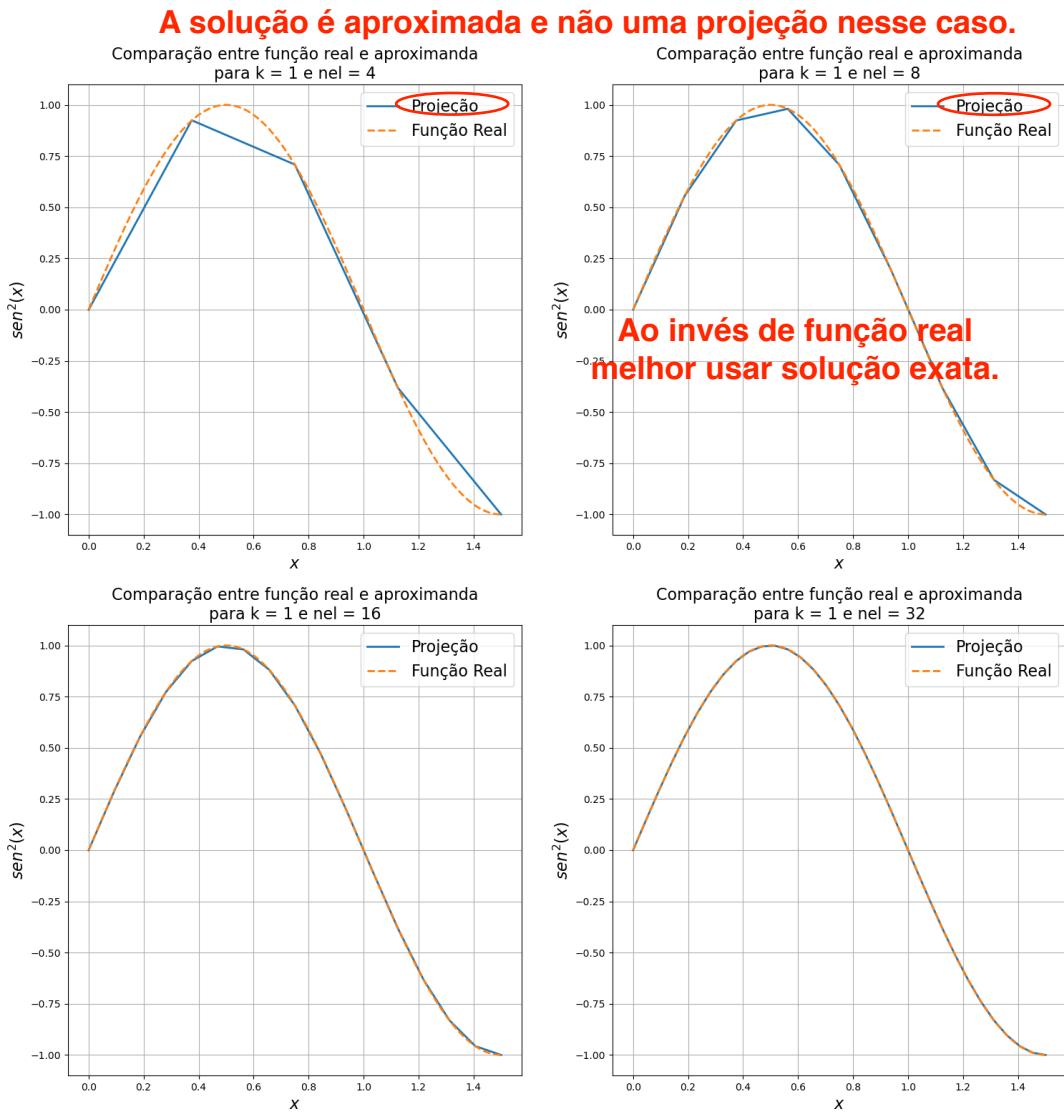


Figura 1: Aproximação por elementos finitos para $k=1$.

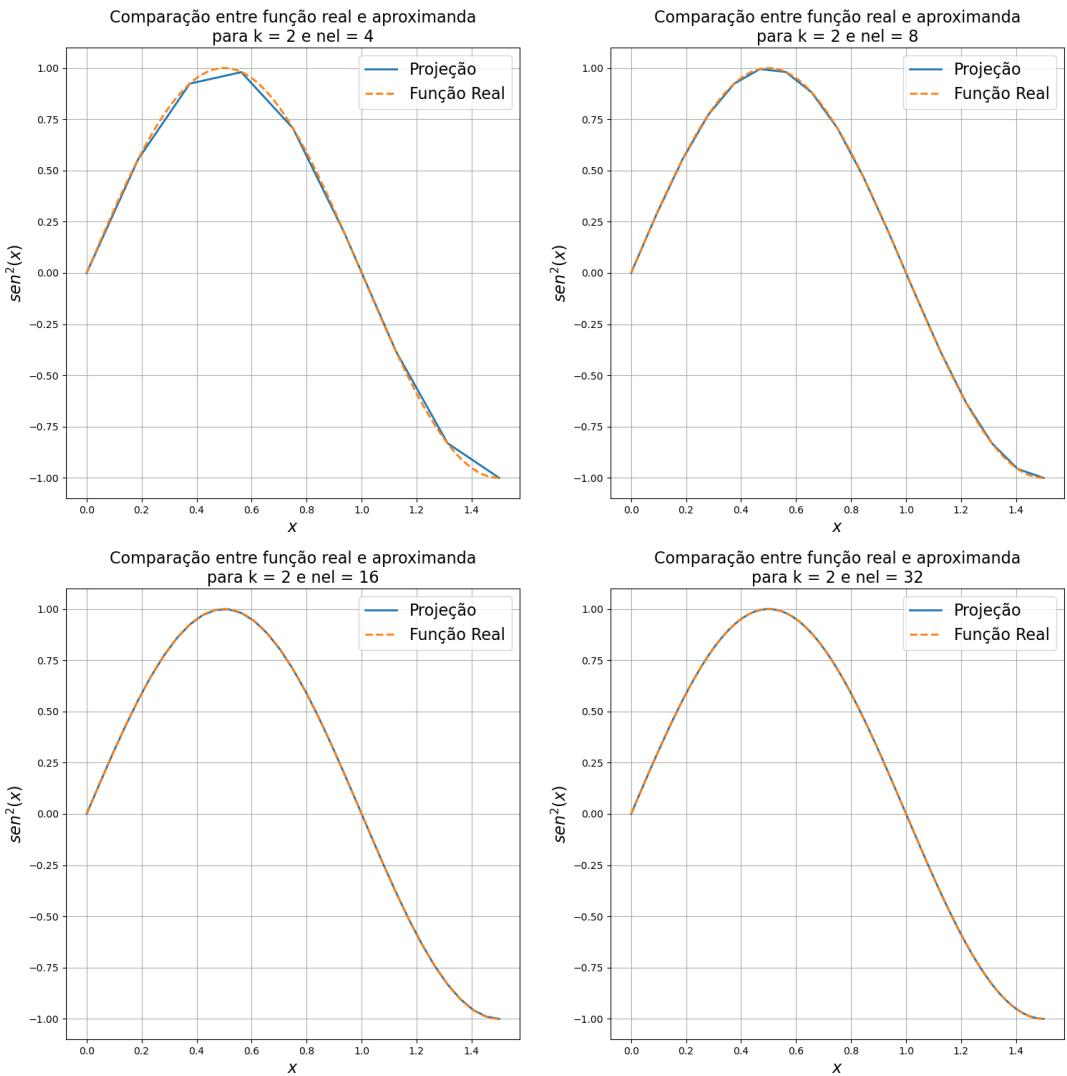


Figura 2: Aproximação por elementos finitos para $k=2$.

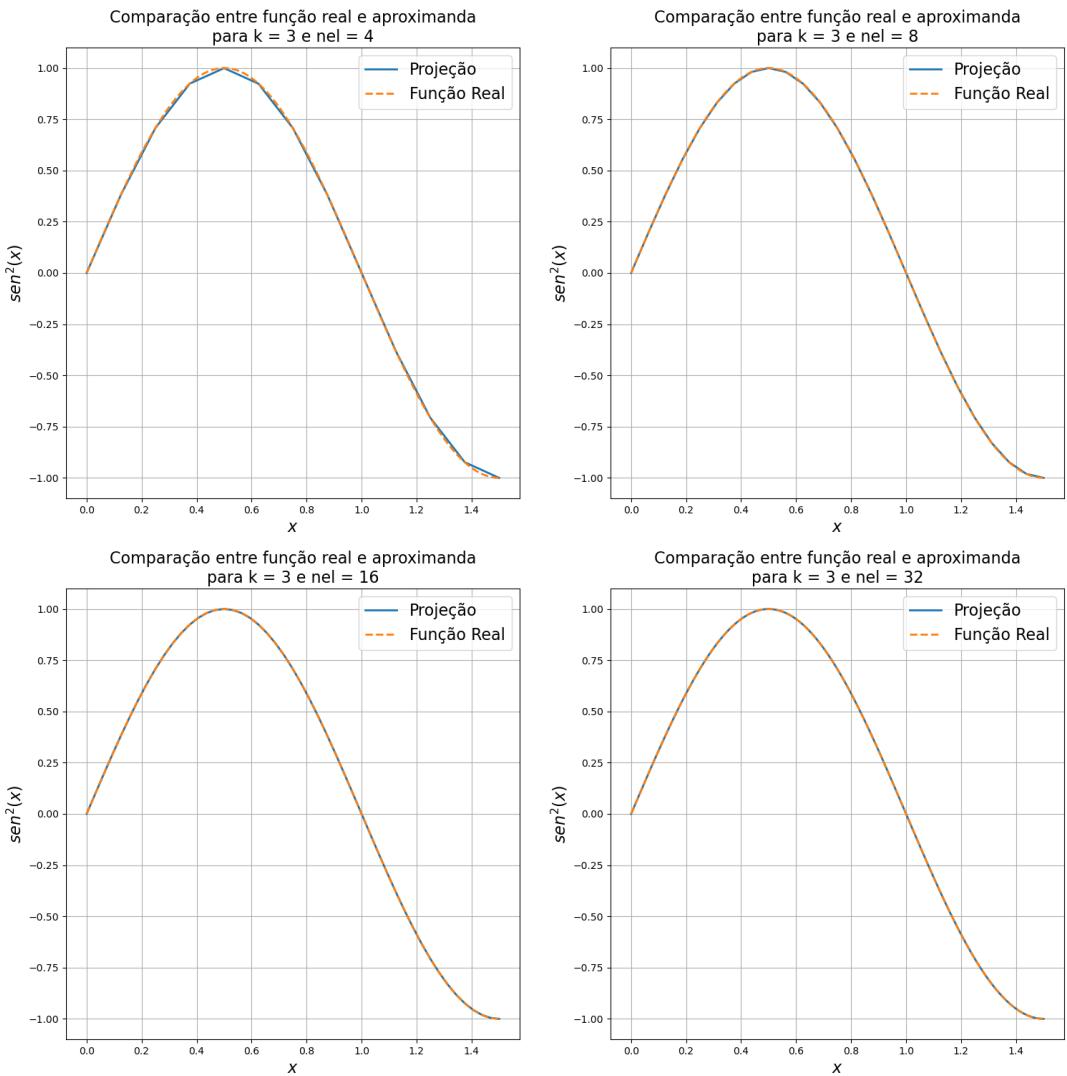


Figura 3: Aproximação por elementos finitos para $k=3$.

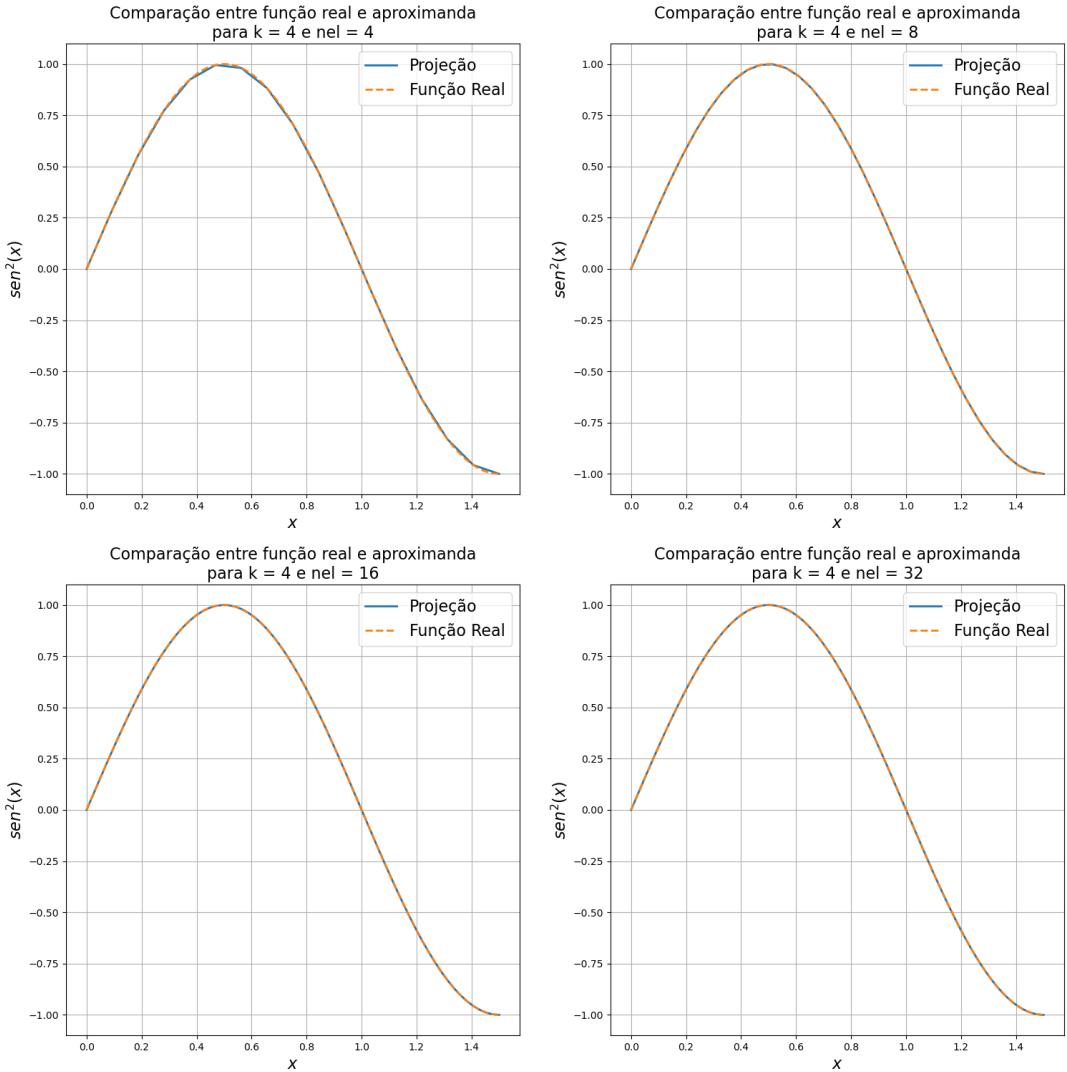


Figura 4: Aproximação por elementos finitos para $k=4$.

Como podemos observar, a medida que o grau do polinômio cresce, necessitamos de malhas com menos elementos para aproximar a função de forma aceitável. Entretanto, fica evidente que o erro inicial cai com o aumento de base, como também ele decai, para bases maiores, de forma mais acentuada a medida que o numero de elementos cresce.

Letra D

A figura abaixo apresenta a análise de convergência do método ao utilizar a norma $L^2(\Omega)$ entre a função real e sua aproximação. Foram utilizados polinômios de grau $k = 1, 2, 3, 4$ aplicadas aos números de elementos $nel = 4, 8, 16, 32$.

Para ficar mais fácil a visualização deste tipo de resultado
é importante identificar os pontos do gráfico onde foi calculado o erro

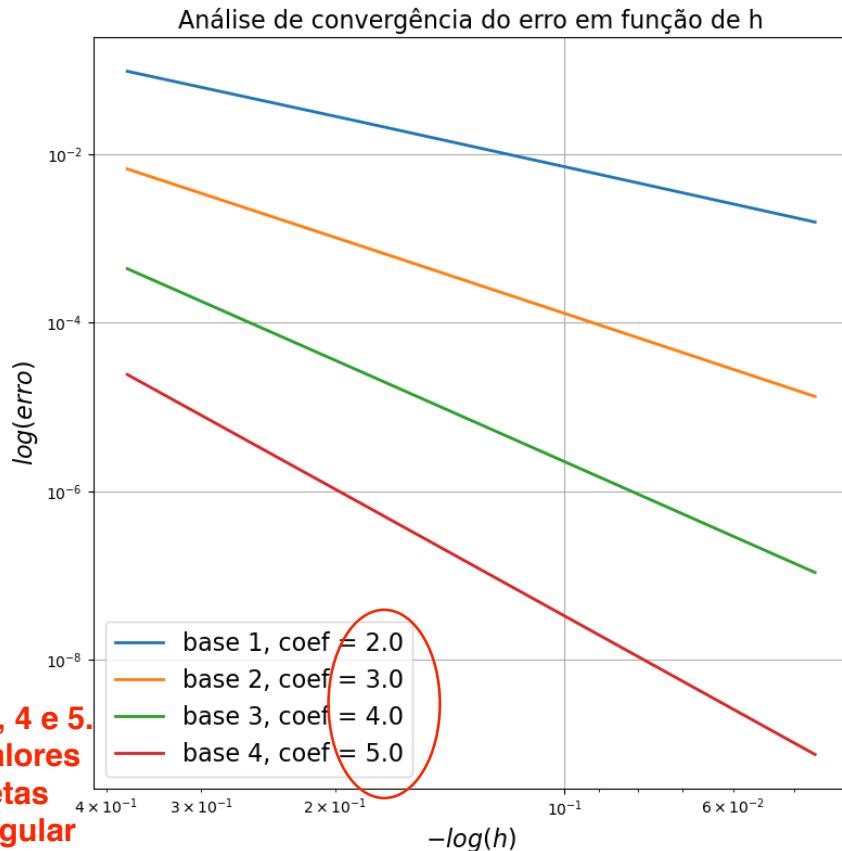


Figura 5: Análise de convergência de malha para a solução aproximada

Como apresentado acima, podemos perceber que o erro decai de forma linear respeitando a taxa de convergência esperada na ordem de $O(h^{k+1})$.

Letra E

De forma semelhante a letra anterior, a figura abaixo apresenta a análise de convergência do método ao utilizar a norma $L^2(\Omega)$ entre a derivada da função real e sua aproximação. Foram utilizados polinômios de grau $k = 1, 2, 3, 4$ aplicadas aos números de elementos $nel = 4, 8, 16, 32$. Como apresentado acima,

Para ficar mais fácil a visualização deste tipo de resultado
é importante identificar os pontos do gráfico onde foi calculado o erro

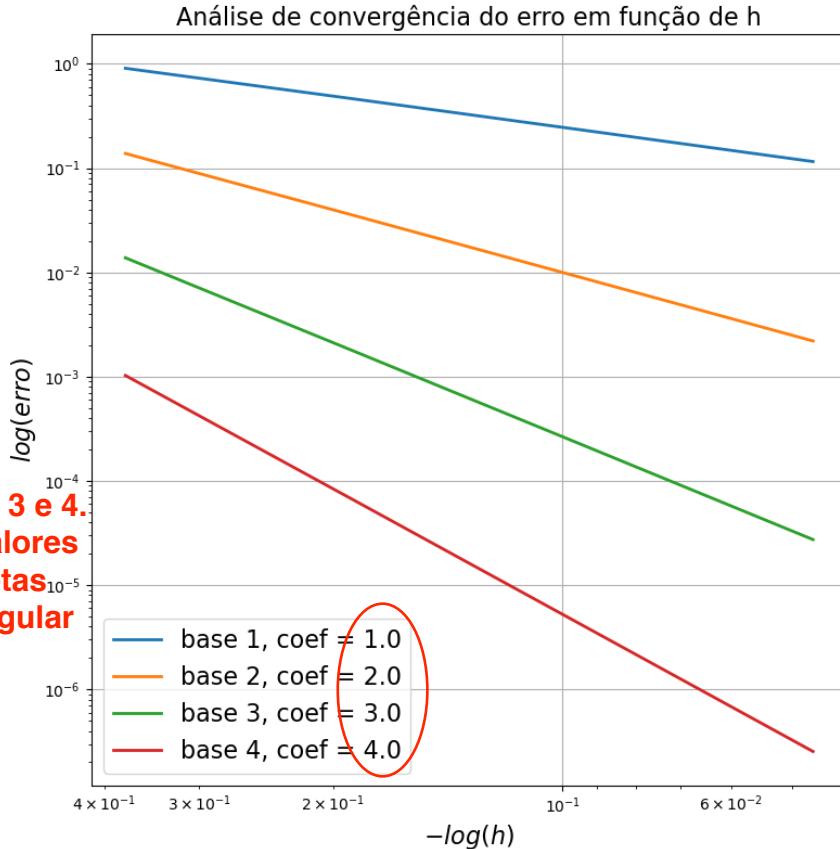


Figura 6: Análise de convergência de malha para a derivada solução aproximada

podemos perceber que o erro decai de forma linear respeitando a taxa de convergência esperada na ordem de $O(h^k)$.

Questão 2

Letra A

Considerando que, para o problema proposto, a função real é dada por:

$$u(x) = x^3 - x + 1$$

Além disso, teremos uma condição de Dirichlet no ponto $x = 0$ dada por:

$$u(0) = 1$$

e condição de Neumann em $x = 0$, que, substituindo a definição de u é dada por:

$$\begin{aligned} 2 \frac{du}{dx}(1) + u(1) &= 5 \therefore \text{Isso aqui não pode ser feito.} \\ 2 \frac{du}{dx}(1) + 1^3 - 1 + 1 &= 5 \therefore \text{Pense da seguinte forma,} \\ 2 \frac{du}{dx}(1) + 1 &= 5 \therefore \text{se você não conhecesse a} \\ \frac{du}{dx}(1) &= \frac{5 - 1}{2} = 2 \quad \text{solução exata, como faria para impor} \\ &\quad \text{essa condição?} \end{aligned}$$

temos que $\kappa_a = 10^6$, $\kappa_b = 0$, $g_a = 5$, $g_b = 0$, $q_a = 0$, $q_b = 2$. Além disso temos que o problema dado é:

$$-\frac{d}{dx} \left(x \frac{du}{dx} \right) + x^2 u = x^5 - x^3 - 8x^2 + 1$$

Considerando a equação 6, temos que:

$$\begin{aligned} K(x) &= x \\ J(x) &= x^2 \end{aligned}$$

Substituindo esses termos na equação 17, temos que a formulação fraca é dada por:

$$\int_{\Omega} x \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_{\Omega} x^2 u v dx + 10^6(u(a) - 5)v(a) = \int_{\Omega} (x^5 - x^3 - 8x^2 + 1)v dx \quad (36)$$

e a condição de contorno da derivada?

Como também a definição dos espaços U e V ao substituir os termos nas equações 11 e 12 respectivamente temos:

$$U = \{u \in H^1(\Omega)\} \quad (37)$$

O mesmo comentado no exercício anterior.

$$V = \{v \in H^1(\Omega), v(a) = 10^6(u(a) - 5)ev(b) = 2\} \quad (38)$$

Assim, podemos formular o seguinte problema variacional:

Encontrar $u \in U$, tal que

$$a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in V \quad (39)$$

onde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} x \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \int_{\Omega} x^2 u v dx + 10^6 u(a)v(a) \quad (40)$$

$$f(v_h) = \int_{\Omega} (x^5 - x^3 - 8x^2 + 1)v_h dx + (10^6 \times 5)v_h(a) - 2v_h(b) \quad (41)$$

condição de Neumann apareceu

Letra B

A seguir serão apresentadas as comparações entre as funções reais e aproximadas para o problema proposto. Nesse estudo foram utilizadas as bases $k = 1, 2, 3, 4$ aplicadas aos números de elementos $nel = 4, 8, 16, 32$.

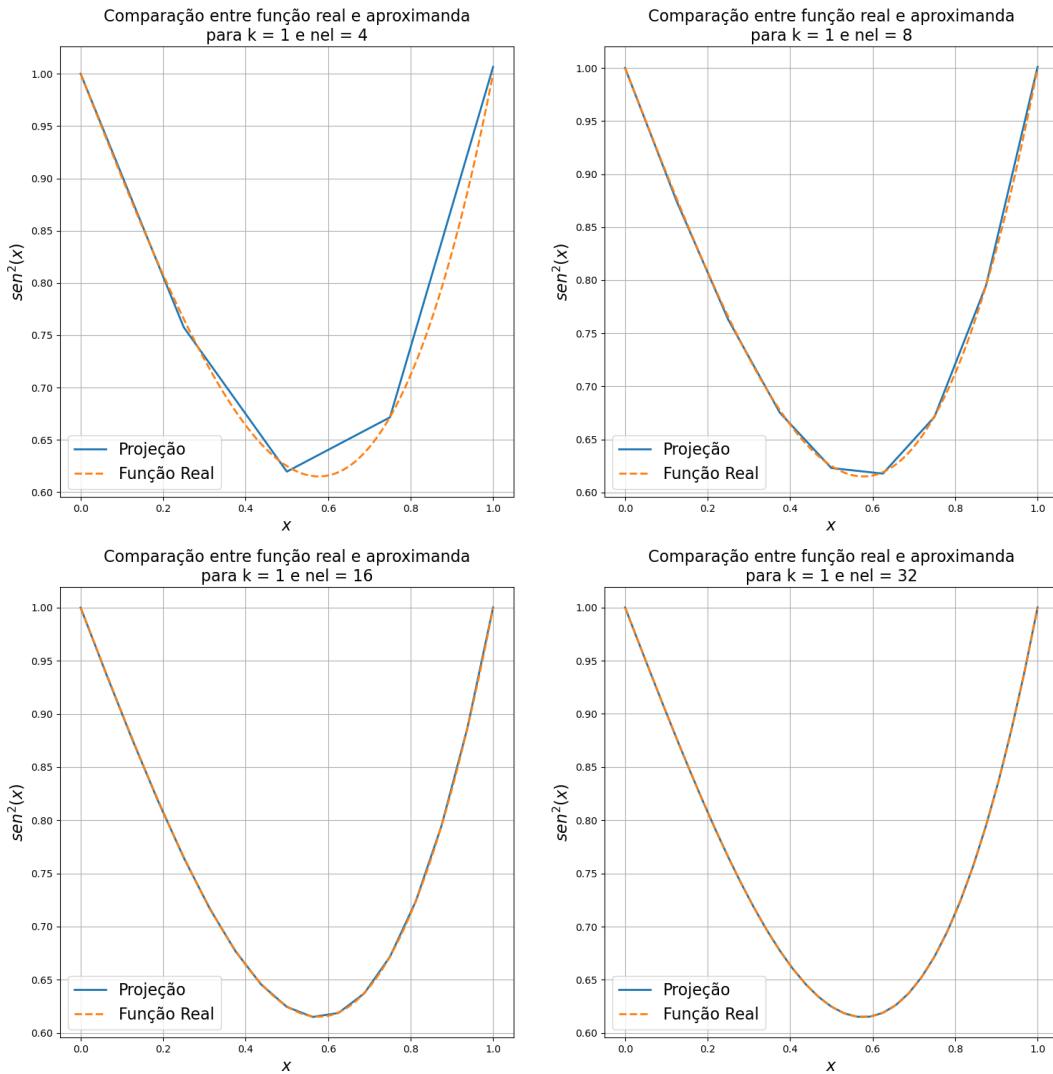


Figura 7: Aproximação por elementos finitos para $k=1$.

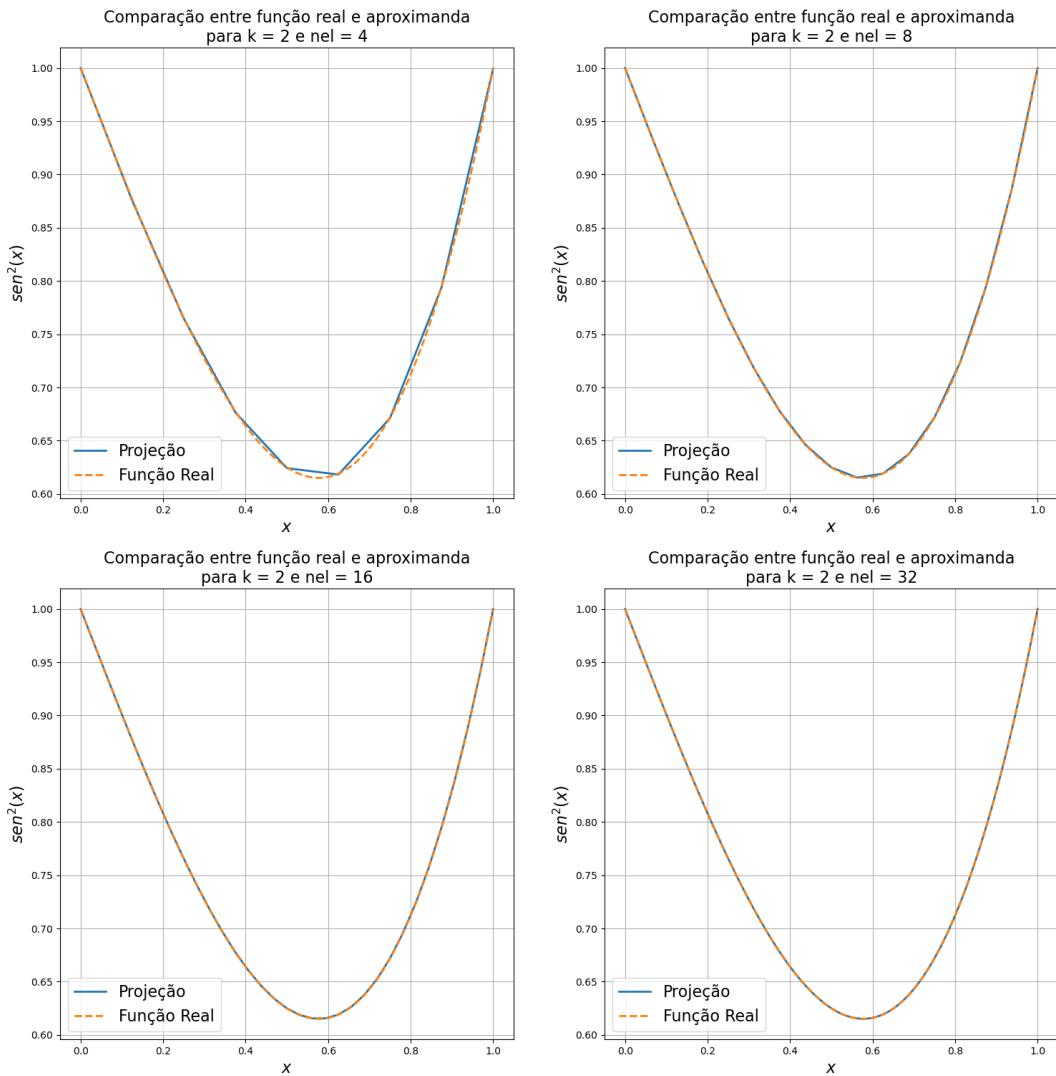


Figura 8: Aproximação por elementos finitos para $k=1$.

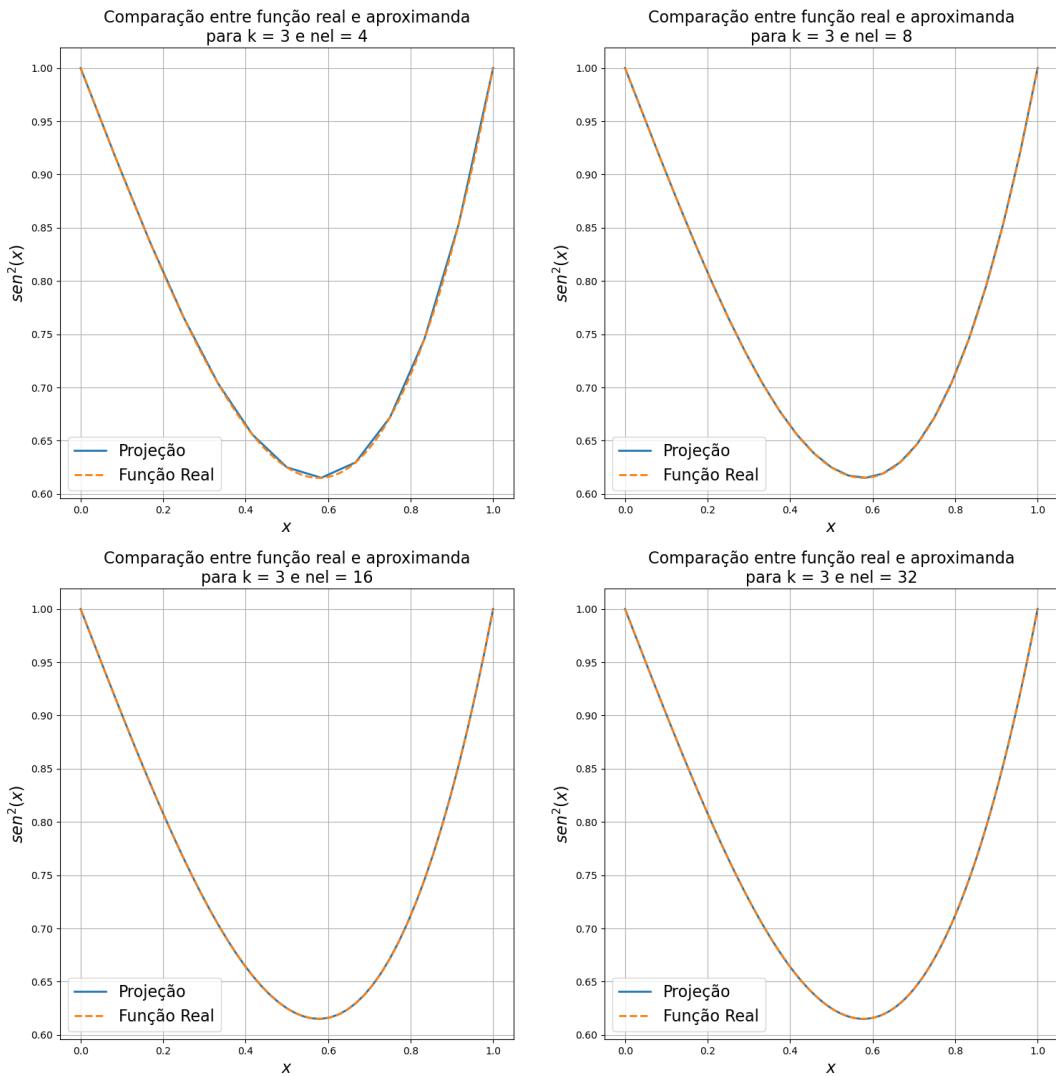


Figura 9: Aproximação por elementos finitos para $k=1$.

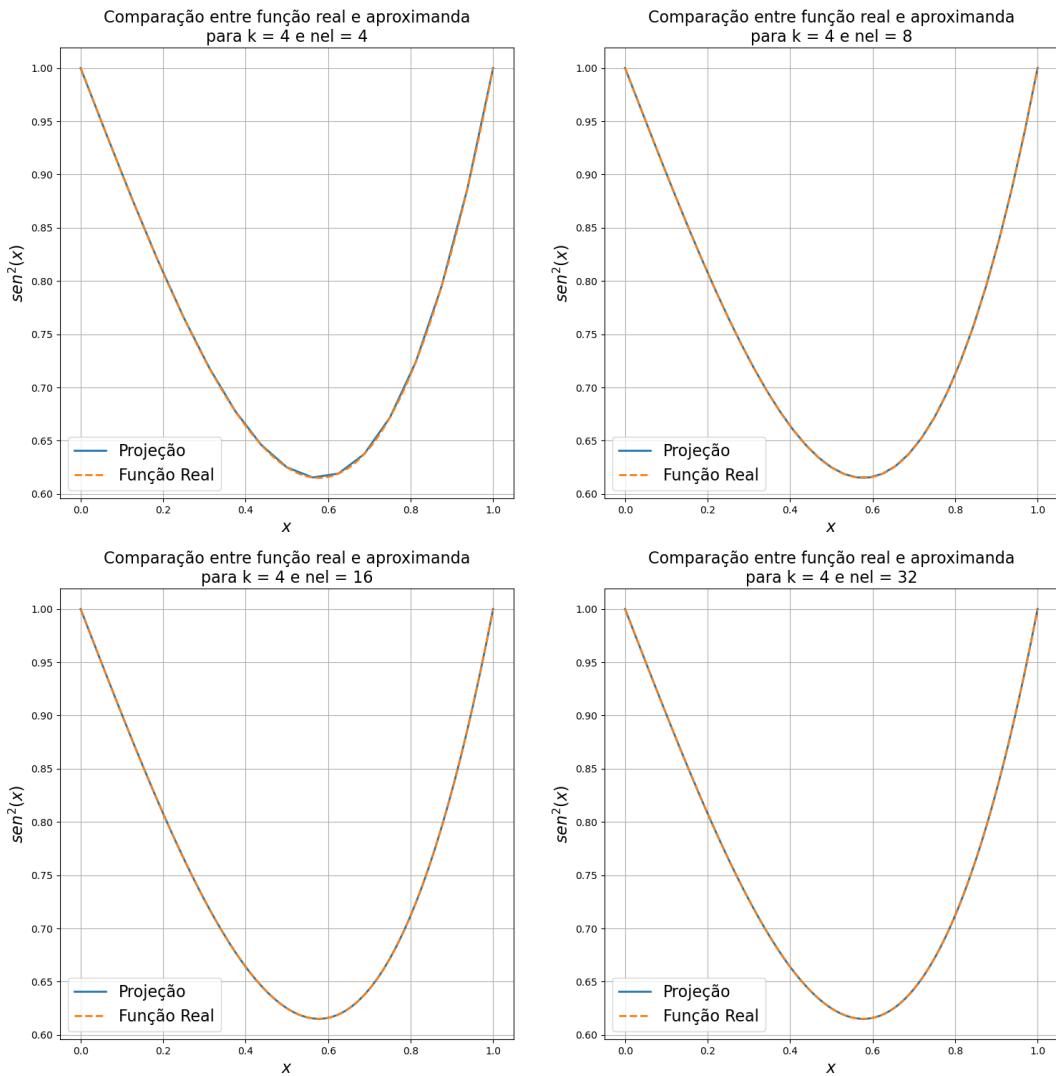


Figura 10: Aproximação por elementos finitos para $k=1$.

Como podemos observar, a medida que o grau do polinômio cresce, necessitamos de malhas com menos elementos para aproximar a função de forma aceitável. Entretanto, fica evidente que o erro inicial cai com o aumento de base, como também ele decai, para bases maiores, de forma mais acentuada a medida que o numero de elementos cresce.

Letra C

A figura abaixo apresenta a análise de convergência do método ao utilizar a norma $L^2(\Omega)$ entre a função real e sua aproximação. Foram utilizados polinômios de grau $k = 1, 2, 3, 4$ aplicadas aos números de elementos $nel = 4, 8, 16, 32$.

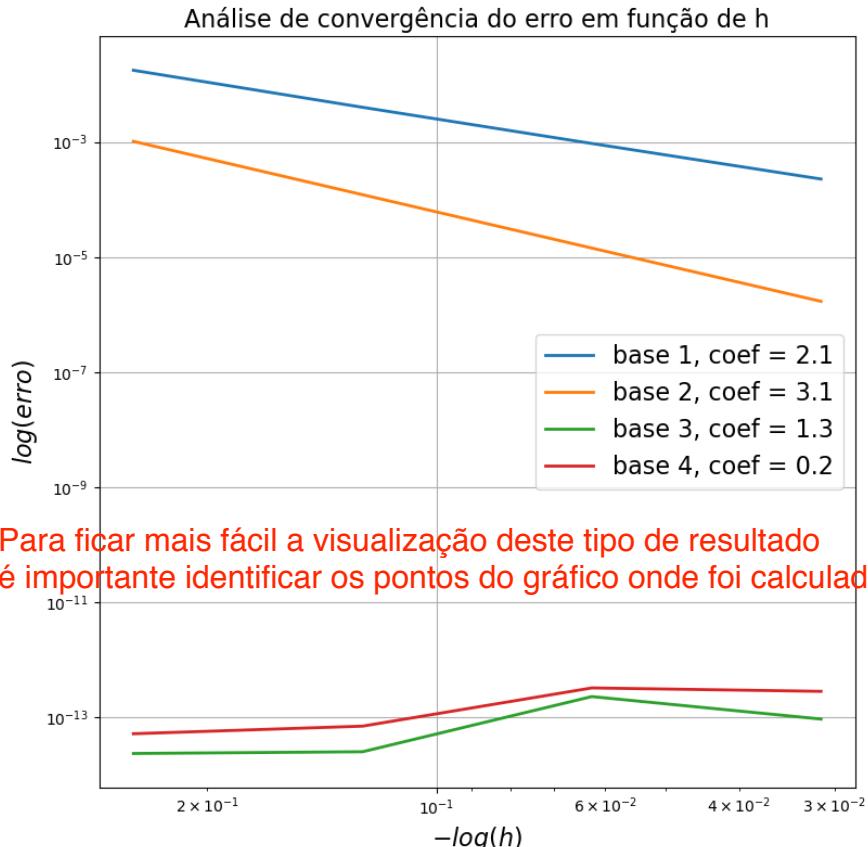


Figura 11: Análise de convergência de malha para a solução aproximada

Como apresentado acima, podemos perceber que o erro decai, para as bases $k = 1, 2$, de forma linear respeitando a taxa de convergência esperada na ordem de $O(h^{k+1})$. Já para as bases $k = 3, 4$, temos que o erro começa a divergir a medida que aumentamos o número de elementos. Acredito que este comportamento se deva ao fato de que a solução é de grau 2. Neste caso, as bases de mesmo grau apresentam um resultado exato para os pontos calculados e a utilização de bases maiores gera oscilação nos resultados.

Questão 3

Letra A

A seguir serão apresentadas as comparações entre as funções reais e aproximadas para o problema proposto. Nesse estudo foram utilizadas as bases de grau 1 aplicadas aos números de elementos $nel = 16, 32$ para $\epsilon = 10^{-3}$ e $\epsilon = 10^{-4}$.

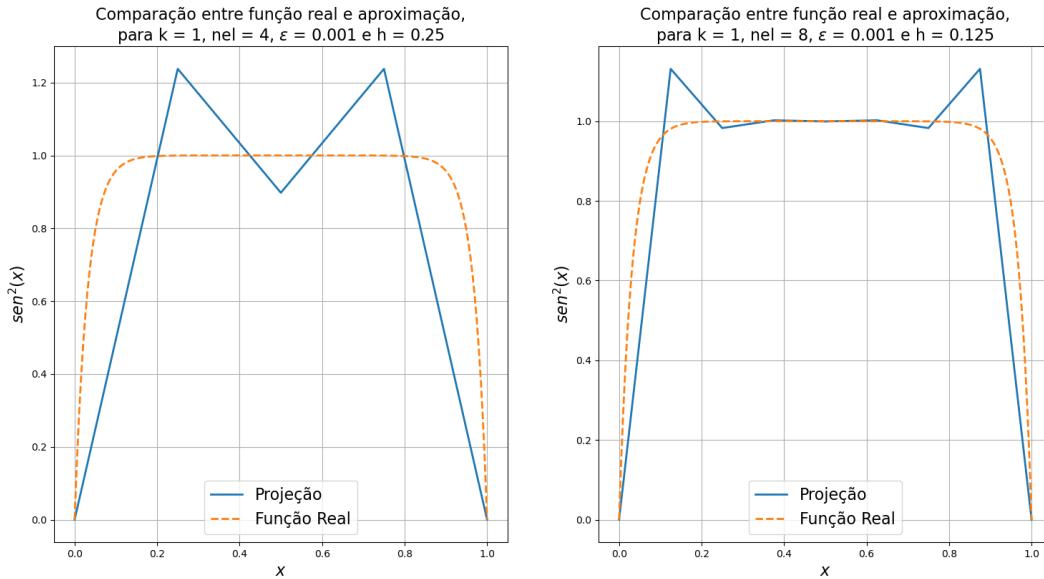


Figura 12: Aproximação por elementos finitos para $k=1$ e $\epsilon = 10^{-3}$.

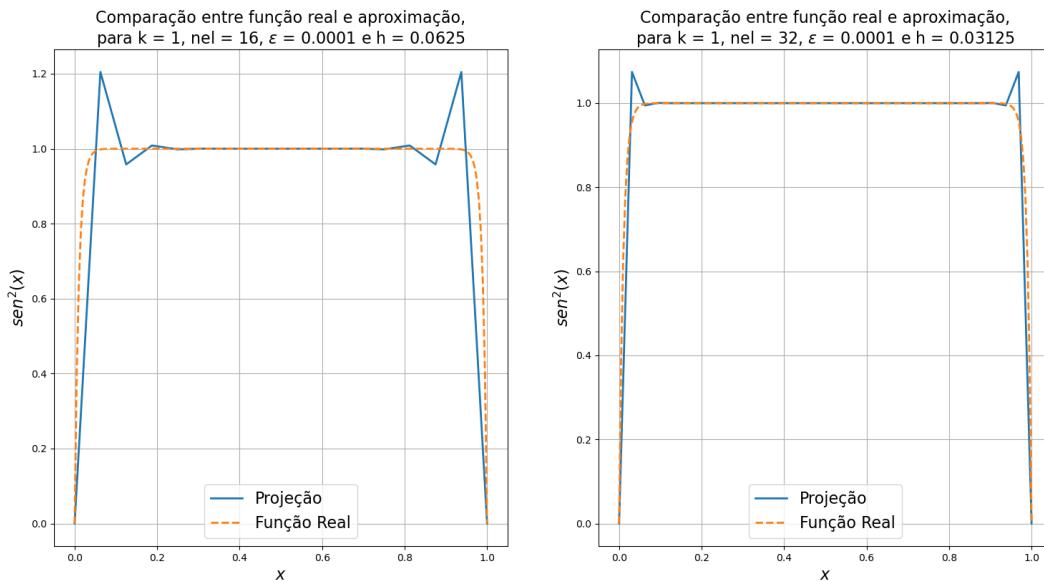


Figura 13: Aproximação por elementos finitos para $k=1$ e $\epsilon = 10^{-4}$.

Letra B

Para evitar a oscilação da solução, temos que:

$$h < \sqrt{6\epsilon} \therefore$$

$$h < 0.07745966692414834, \epsilon = 10^{-3}$$

$$h < 0.024494897427831782, \epsilon = 10^{-4}$$

Portanto, podemos observar, nas figuras abaixo, como que as soluções param de oscilar a medida que h assume valores pequenos. Entretanto, os resultados obtidos para $\epsilon = 10^{-3}$ não estão de acordo com a inequação acima. Visto que para $\epsilon = 10^{-3}$ com 16 elementos a oscilação não deviria ocorrer. Já para $\epsilon = 10^{-4}$, a solução se comporta como o esperado, atingindo um ponto estável com 64 elementos.

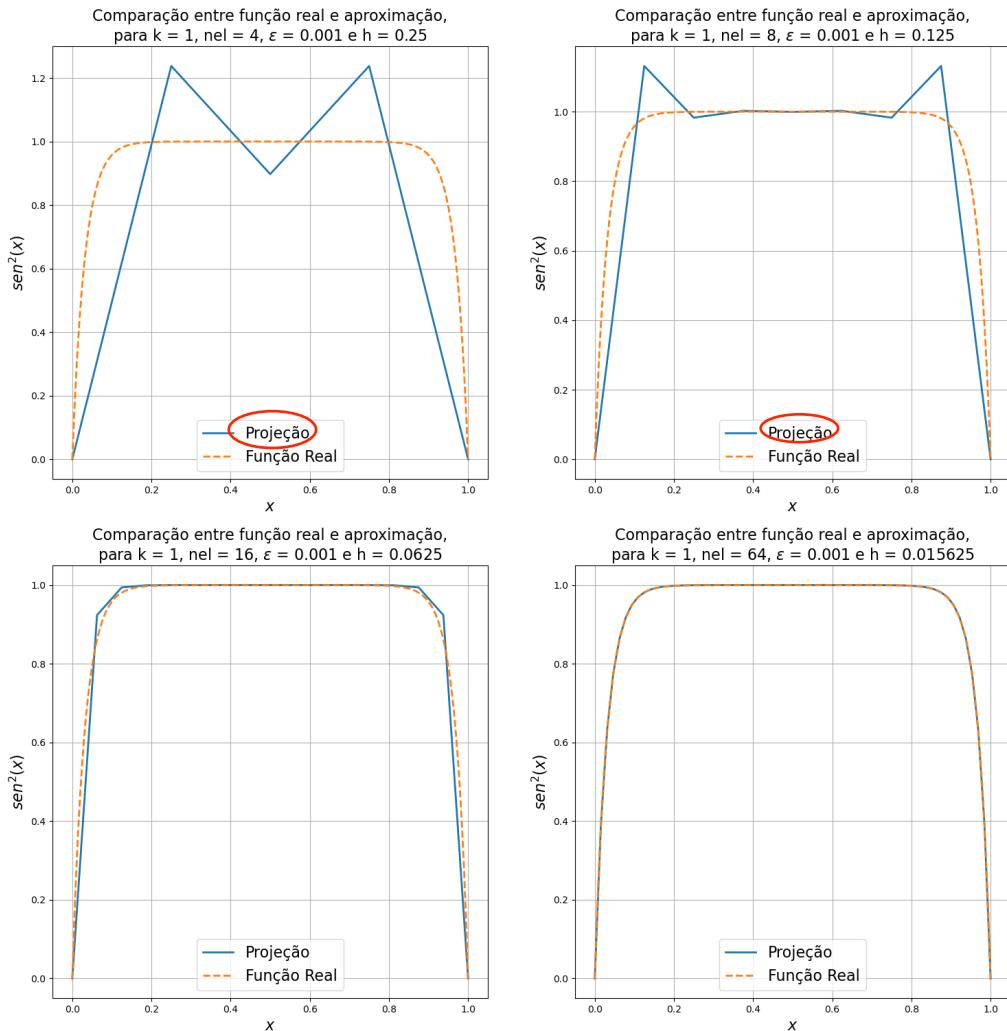


Figura 14: Aproximação por elementos finitos para $k=1$ e $\epsilon = 10^{-3}$.

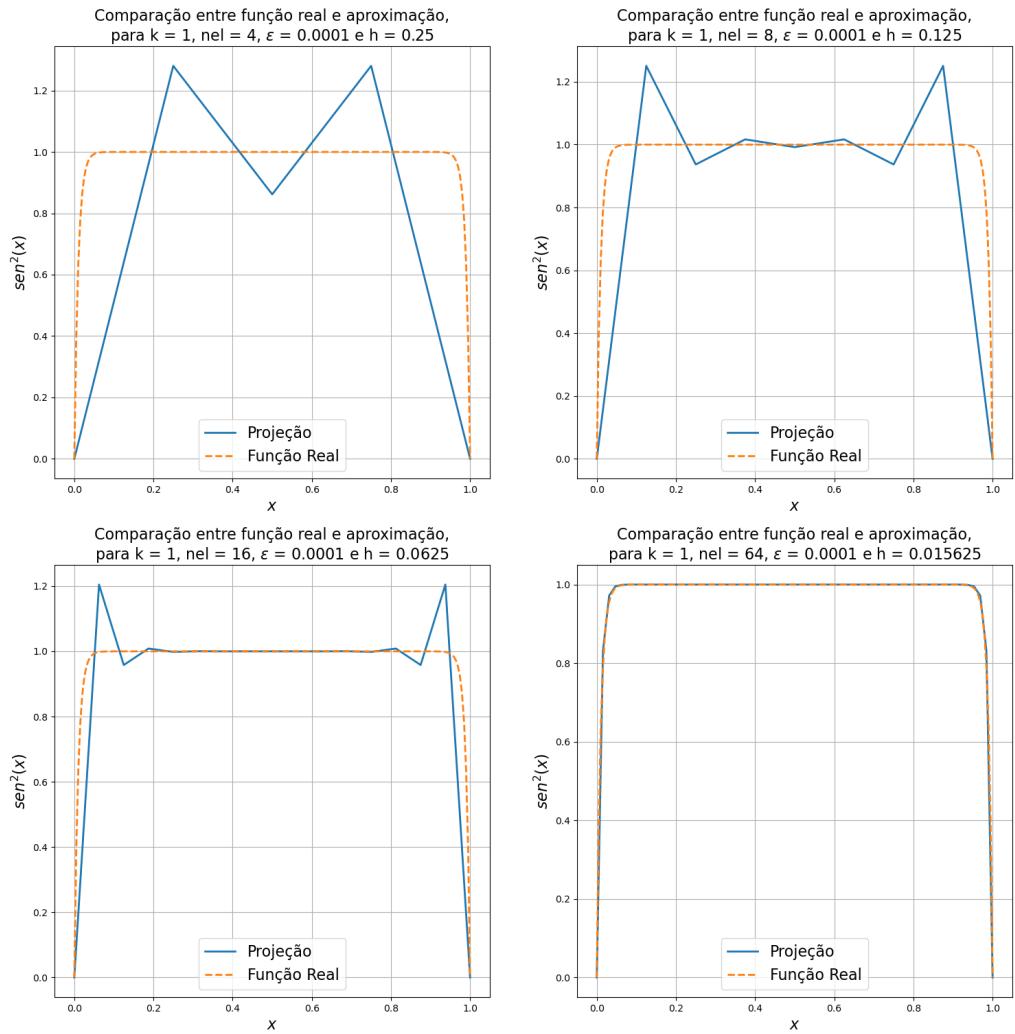


Figura 15: Aproximação por elementos finitos para $k=1$ e $\epsilon = 10^{-4}$.

Letra C

A seguir serão apresentadas as comparações entre as funções reais e aproximadas para o problema proposto. Nesse estudo foram utilizadas as bases de grau $k = 2, 3, 4$ aplicadas aos números de elementos $nel = 4, 8, 16, 32$ para $\epsilon = 10^{-3}$ e $\epsilon = 10^{-4}$.

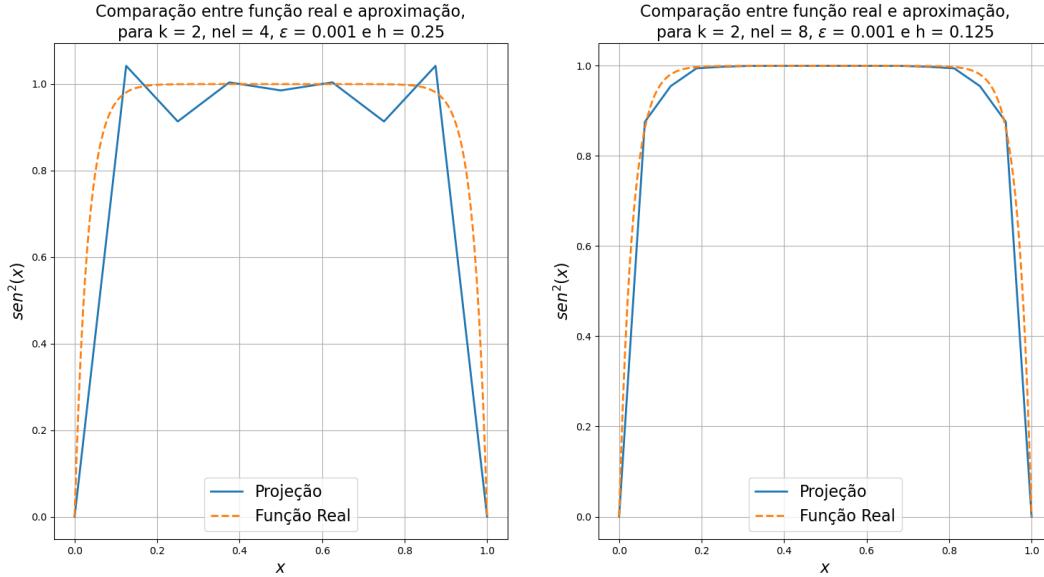


Figura 16: Aproximação por elementos finitos para $k=2$ e $\epsilon = 10^{-3}$.

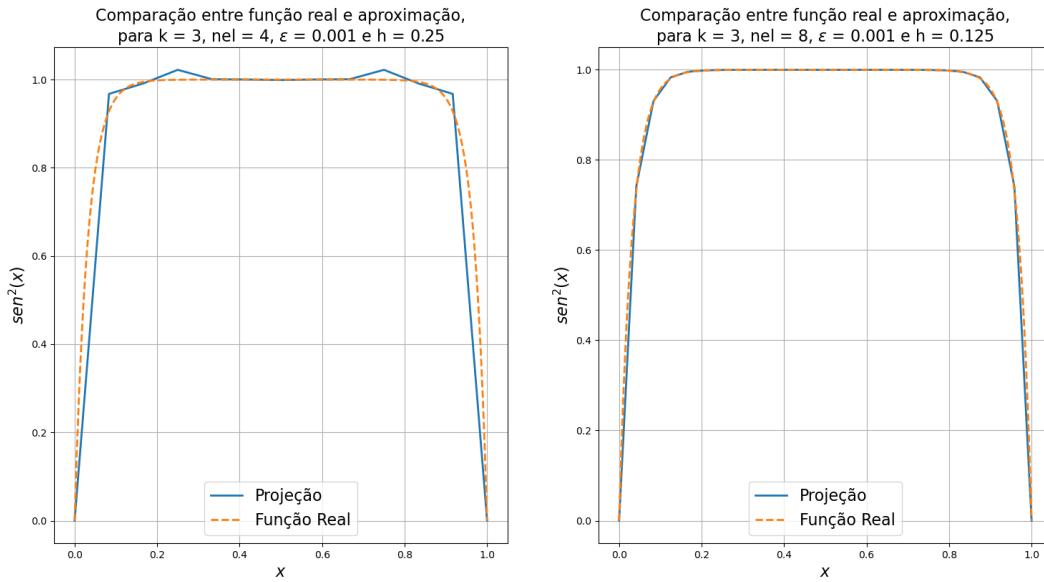


Figura 17: Aproximação por elementos finitos para $k=3$ e $\epsilon = 10^{-3}$.

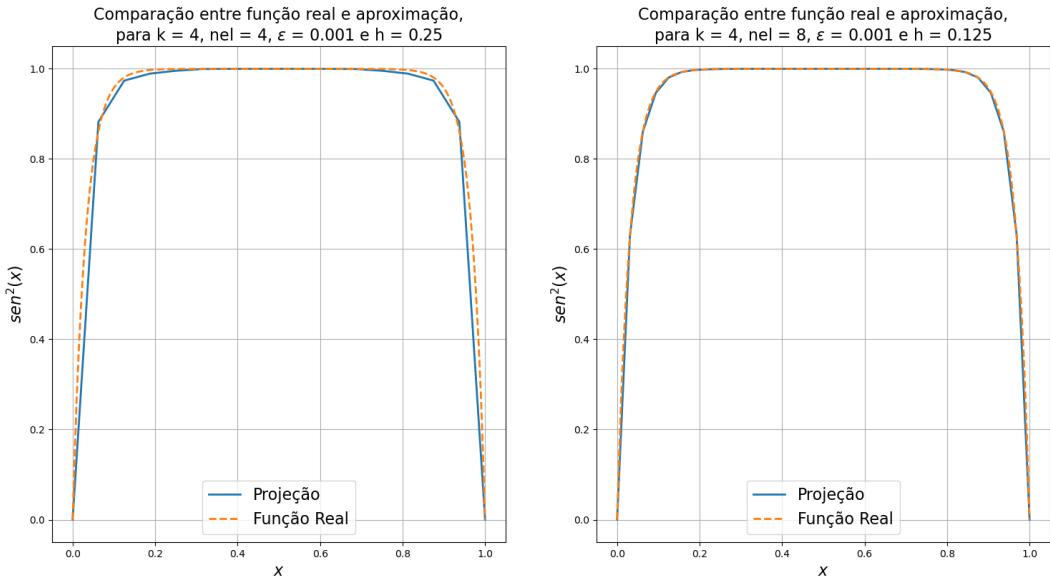


Figura 18: Aproximação por elementos finitos para $k=4$ e $\epsilon = 10^{-3}$.

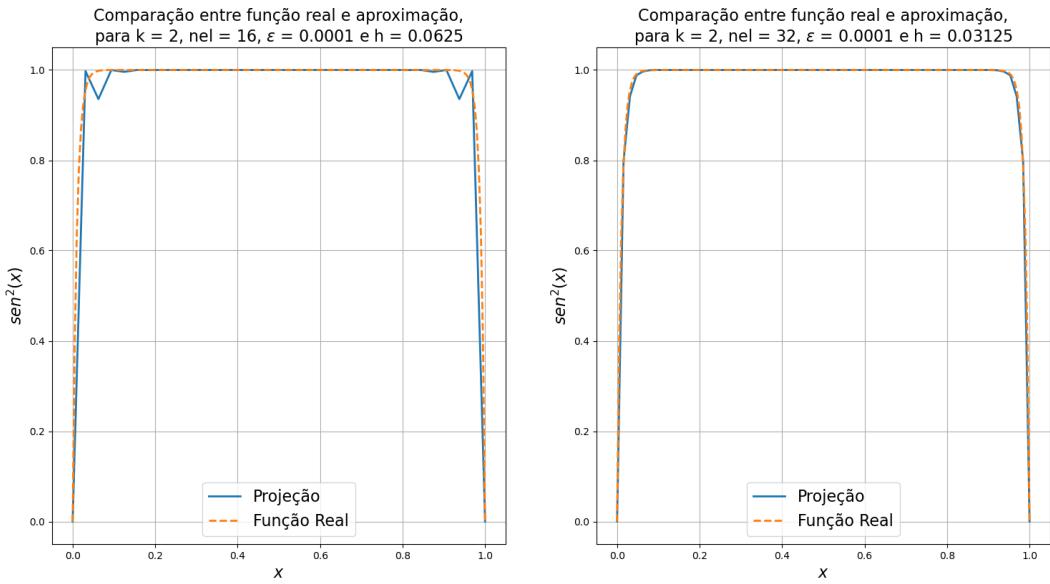


Figura 19: Aproximação por elementos finitos para $k=2$ e $\epsilon = 10^{-4}$.

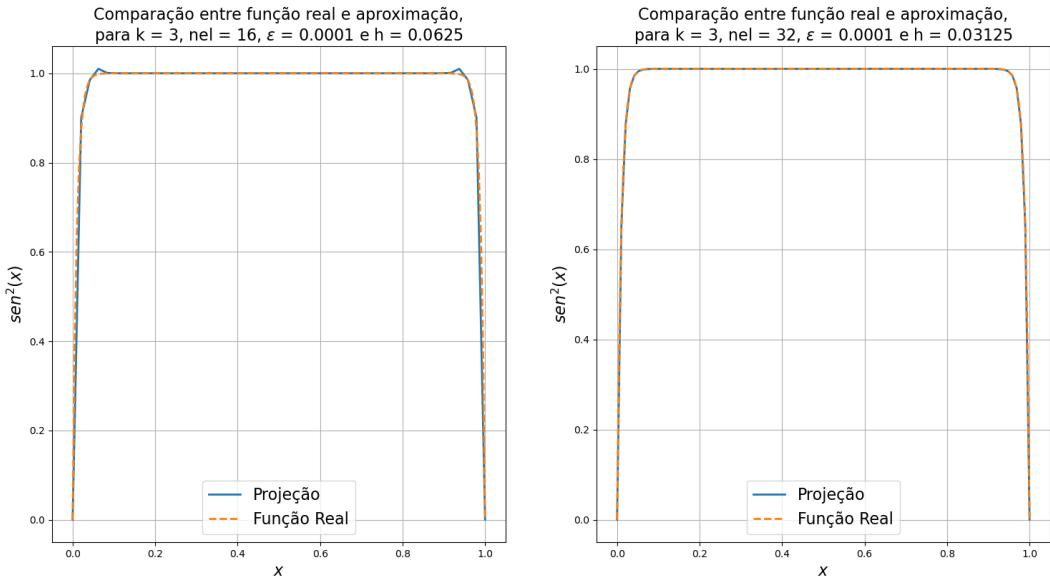


Figura 20: Aproximação por elementos finitos para $k=3$ e $\epsilon = 10^{-4}$.

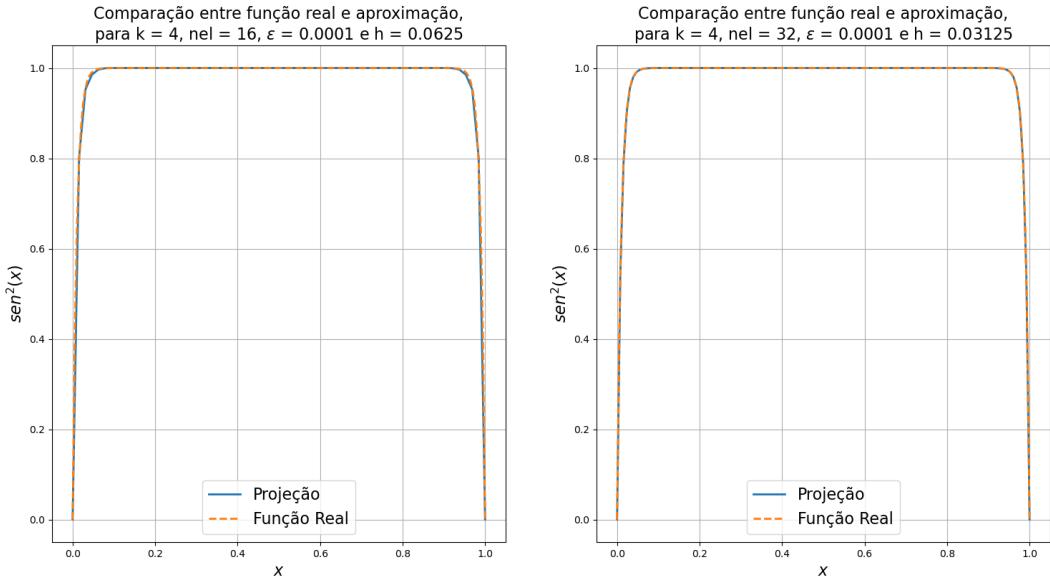


Figura 21: Aproximação por elementos finitos para $k=4$ e $\epsilon = 10^{-4}$.

É possível concluir, através de análise gráfica que, para graus maiores, a oscilações diminuem muito. Nesse caso, é possível encontrar soluções estáveis mesmo para $h > \sqrt{6\epsilon}$. Dessa forma, pode-se concluir que essa inequação só é válida para o caso linear.

Letra D

A figura abaixo apresenta a análise de convergência do método ao utilizar a norma $L^2(\Omega)$ entre a função real e sua aproximação. Foram utilizados polinômios de grau $k = 1, 2, 3, 4$ aplicadas aos números de elementos $nel = 4, 8, 16, 32, 64$.

**Para ficar mais fácil a visualização deste tipo de resultado
é importante identificar os pontos do gráfico onde foi calculado o erro**

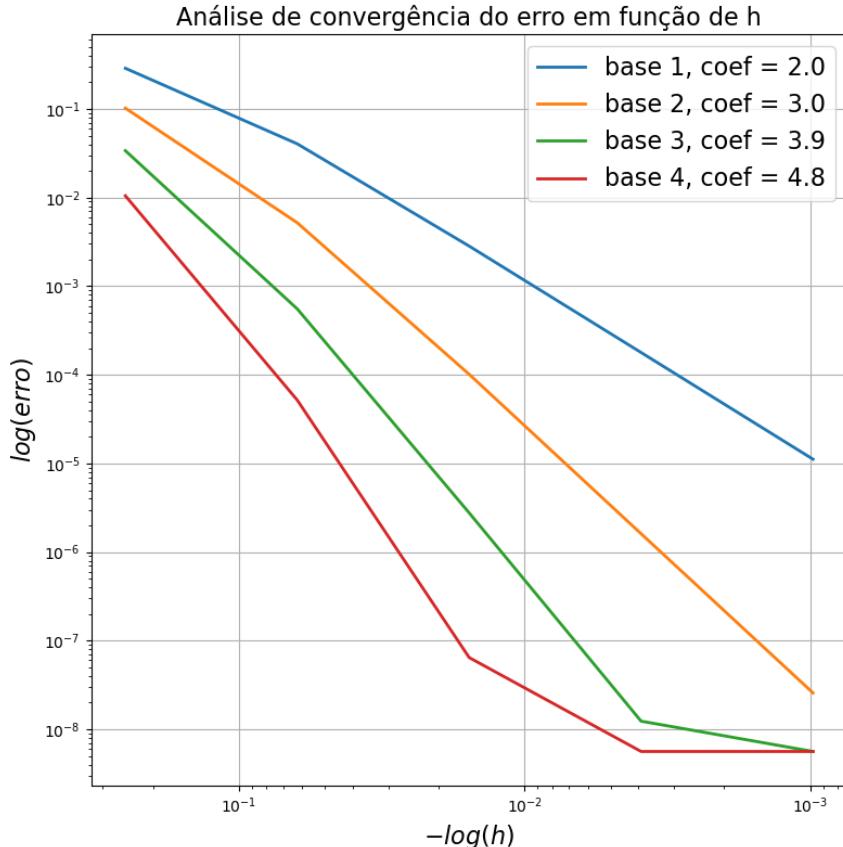


Figura 22: Análise de convergência de malha para a solução aproximada

Como apresentado acima, podemos perceber que o erro decai, para as bases $k = 1, 2$, de forma linear respeitando a taxa de convergência esperada na ordem de $O(h^{k+1})$. Para as bases $k = 3, 4$, temos que o erro começa a divergir a partir de 32 e 16 elementos respectivamente. Portanto, os coeficientes foram calculados utilizando os pontos antes da divergência nesses casos.

erro de arredondamento.

Letra E

A seguir serão apresentadas as comparações entre as funções reais e aproximadas para o problema proposto. Nesse estudo foram utilizadas as bases de grau 1 em conjunto com a base dada no enunciado aplicadas aos números de elementos $nel = 4^2, 4^3, 4^4, 4^5$ para $\epsilon = 10^{-3}$ e $\epsilon = 10^{-4}$.

**Tem algo de estranho nesses resultados da base exponencial,
eles não estão de acordo com o esperado.**

Usando poucos elementos a solução aproximada deve ficar distante da exata.

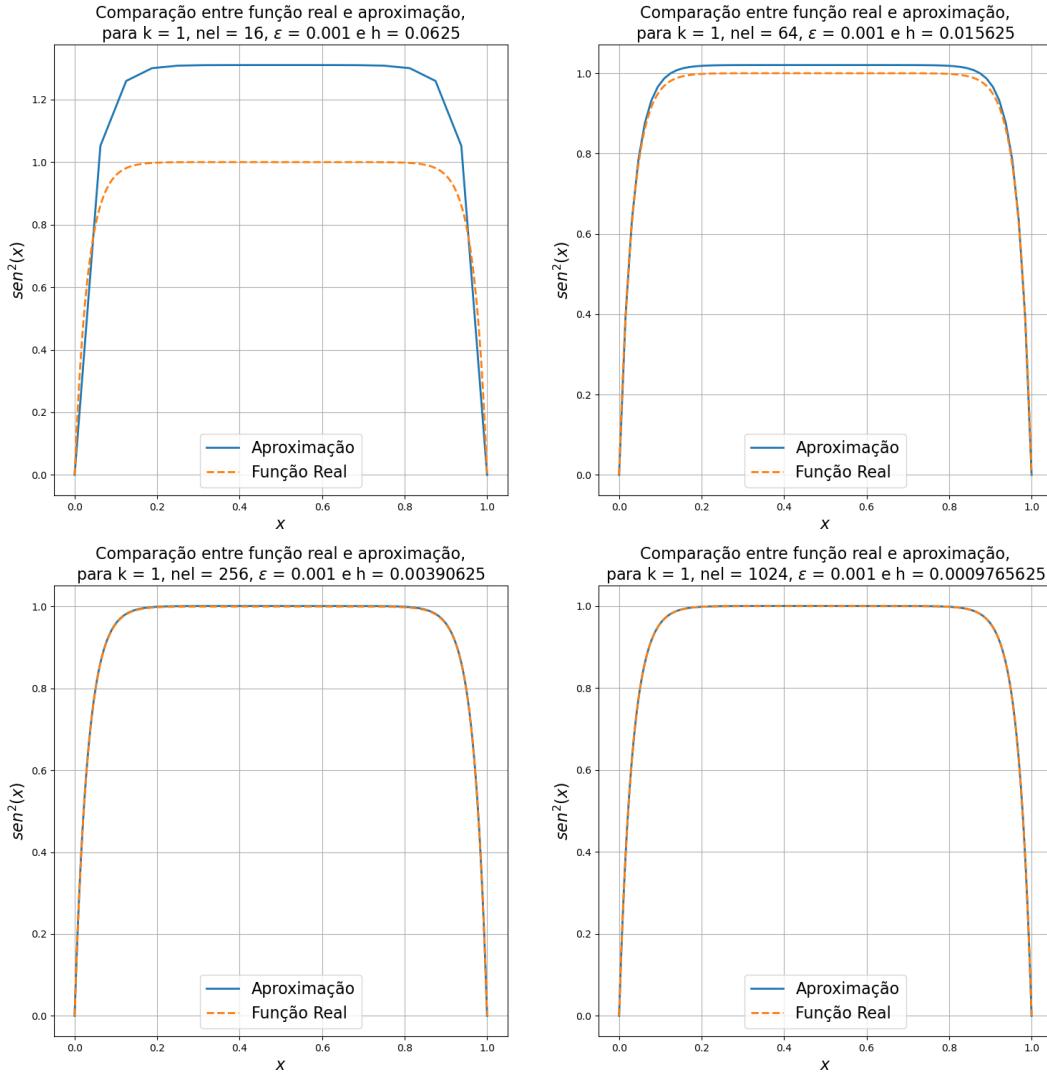


Figura 23: Aproximação por elementos finitos para $k=1$ e $\epsilon = 10^{-3}$.

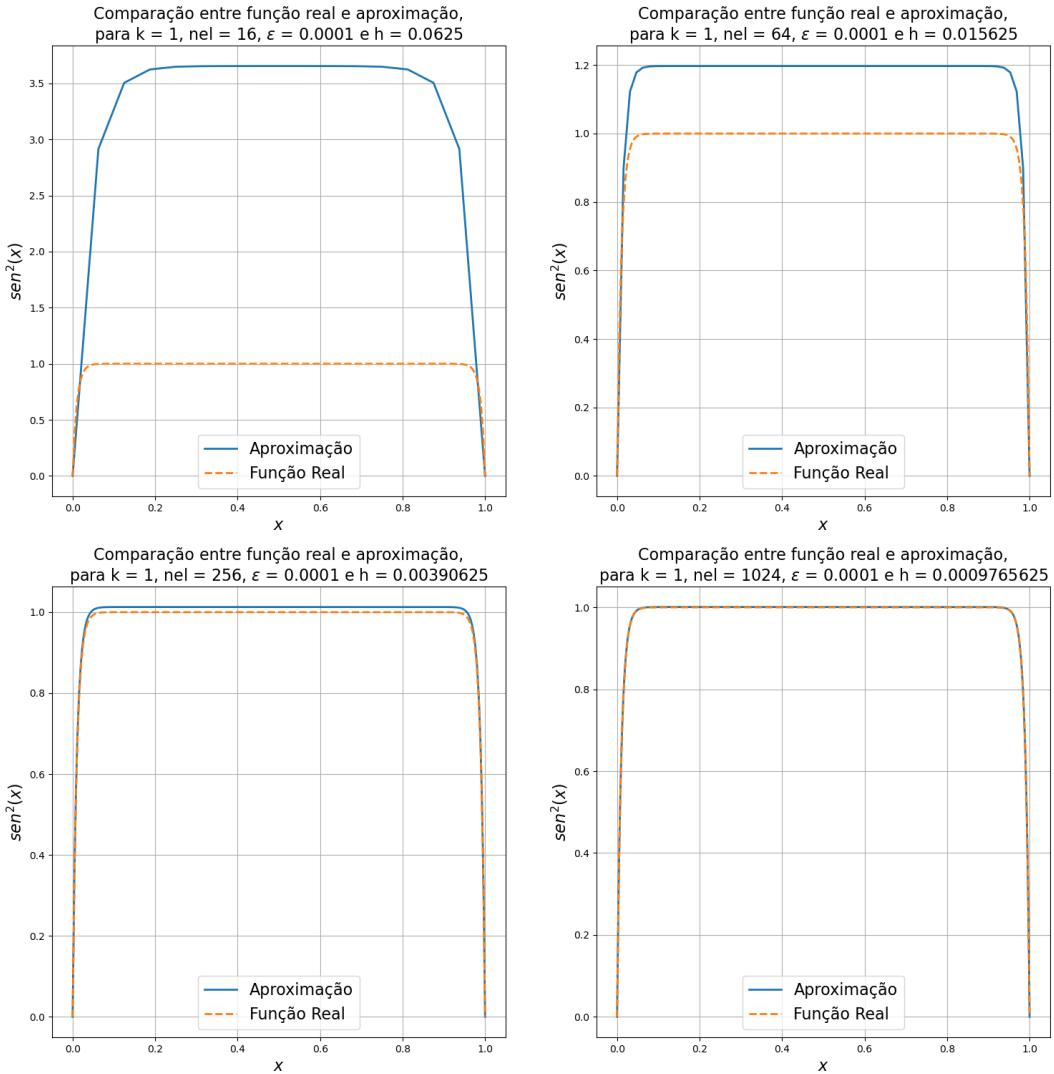


Figura 24: Aproximação por elementos finitos para $k=1$ e $\epsilon = 10^{-4}$.

Não faz sentido!

Como podemos ver, a utilização do método de Petrov-Galerkin retirou a oscilação do problema. Entretanto, para alcançar uma aproximação condizente com o resultado real, é necessário o uso de **mais elementos**. Já a figura abaixo apresenta a análise de convergência do método ao utilizar a norma $L^2(\Omega)$ entre a função real e sua aproximação para os parâmetros apresentados acima.

A partir dos resultados comparando a solução exata e a aproximada, não esperava que desse certo essas curvas de convergência

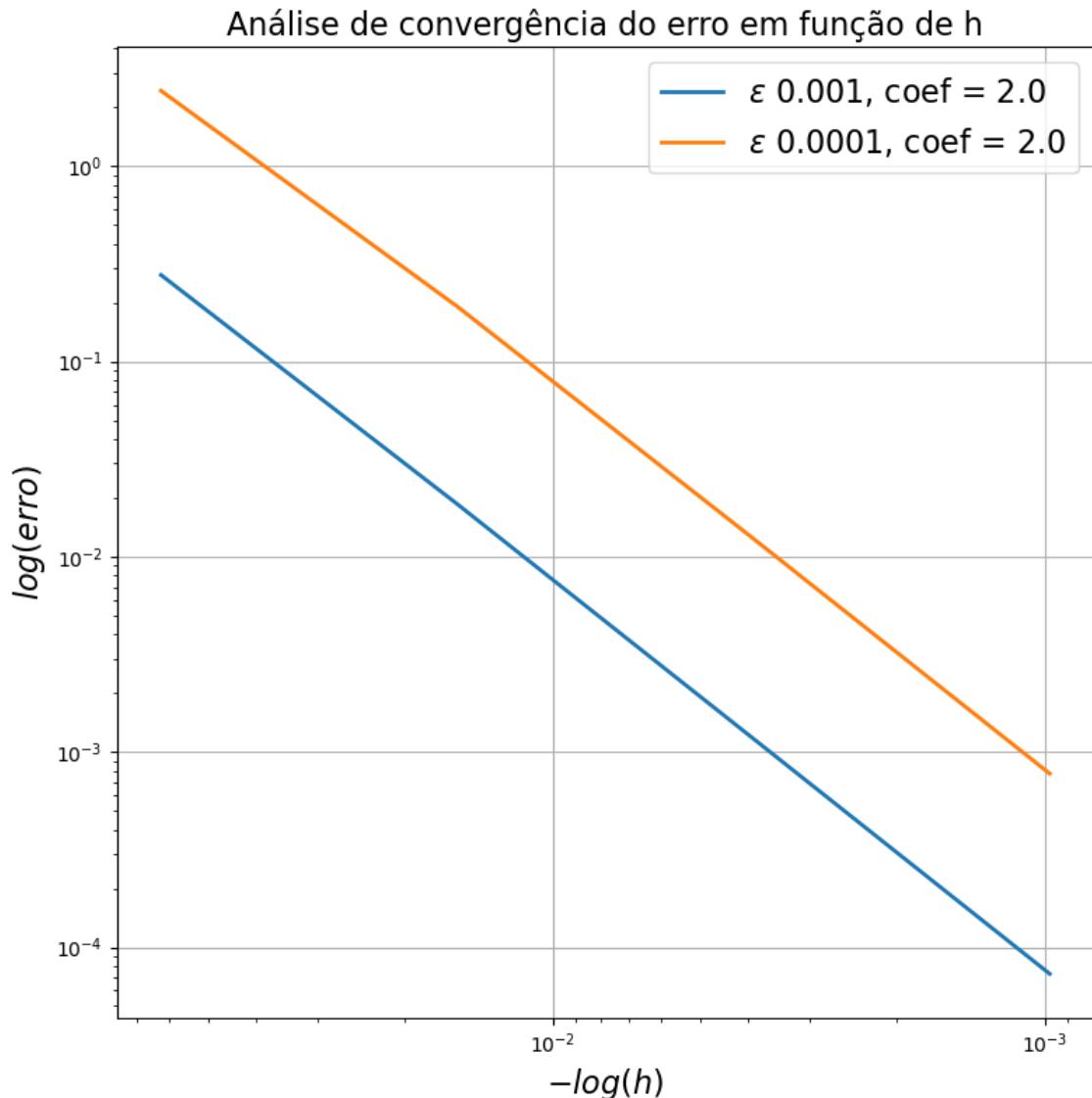


Figura 25: Aproximação por elementos finitos para $k=3$ e $\epsilon = 10^{-3}$.

Como apresentado acima, podemos perceber que o erro decai de forma linear respeitando a taxa de convergência esperada na ordem de $O(h^{k+1})$.