

Este é o site do Grande Quiz de Cálculo Diferencial e Integral

O Grande Quiz de Cálculo Diferencial e Integral (ed. 2022)

I. Séries (2+2+6)

a) Como vimos, a série harmónica alternada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ tem por soma $\log(2)$.

Determine uma reordenação desta série que tenha por soma $\frac{3}{2} \log(2)$.

b) É possível determinar uma reordenação da série harmónica alternada cuja soma seja infinita? Se não, prove esse facto. Se sim, dê um exemplo.

c) Calcule [justificando!] a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.

II. Sucessões (2)

Qual o número que se segue na sequência 5, 10, 20, 30, 36?

III. Números primos (2+4+4)

a) Quantos dos alunos da LEFT inscritos na UC de CDI-I no ano lectivo 2021-22 têm um número de aluno que é primo?

b) Como é que este número se compara com o previsto pela função Li definida no problema 11.11 das folhas de exercícios?

c) A diferença encontrada na alínea anterior está relacionada com uma conjectura famosa. Em que consiste a conjectura e quem é que provou que era falsa?

IV. Filmes (2+1 (+1))

a) Em que filme o protagonista encontra um *Professor de Cálculo* num comboio?

b) Em que estado é que se encontra esse professor e, para um ponto extra, qual a consequência para o protagonista?

V. Aproximações (2+4+6)

No livro *Souvenirs d'une vieille tige*, o engenheiro e pioneiro da aviação Antoine Odier escreveu uma fórmula para a distância d (em km) a partir da qual é possível ver um objecto de altura h (em m) sobre a superfície da terra: $d \times d = 12h$.

a) Justifique que a fórmula não pode estar correcta em geral.

b) Deduza a expressão correcta para a fórmula, assumindo que a terra é uma esfera perfeita.

c) Justifique como é que Odier obteve a sua fórmula. Porque é que pensa que escolheu o número 12?

VI. Edições anteriores (2+2)

a) Algum dos participantes na edição de 2021 do *Grande Quiz de Cálculo Diferencial e Integral* tem um número de aluno que seja primo?

b) Qual a relação com os números 29 e 3461?

O Grande Quiz de Cálculo Diferencial e Integral

(ed. 2023)

I. Limites (3+4+5) Calcule [justificando !]

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log[(2n)!]}{\log(n!)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-xn^2}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k!}$

II. Séries e constantes matemáticas (2+1+1+1)

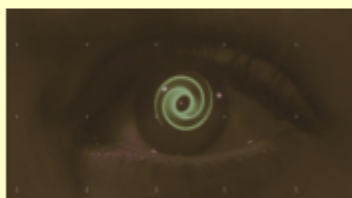
Num episódio de uma série, o protagonista (que também dá o nome à série), pergunta a um membro da sua equipa qual um dos dígitos de uma constante matemática.

- Qual a série e qual a constante?
- Qual a posição do dígito pedido?
- Qual a resposta dada? Está correcta?
- Qual o comentário da pessoa a quem a pergunta foi feita, depois de dar a resposta?

III. Infinitos (3+2 (+1))

- Mostre que existe uma bijecção entre os pontos do segmento de recta $[0, 1]$ e os do quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.
- A quem é que o matemático que primeiro descobriu a existência do facto referido em a) escreveu uma carta a relatar o resultado e, por um ponto extra, em que termos é que se referiu nessa carta ao resultado?

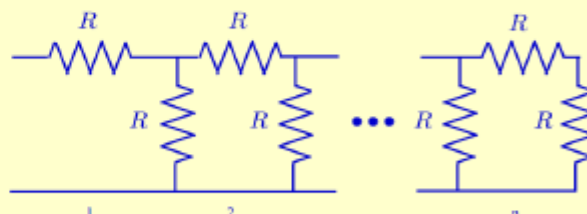
IV. Filmes (1+2)



- Qual o filme em que o genérico inicial é feito com base na animação de curvas famosas?
- De que curvas se trata?

V. Aplicações (10)

Considere o circuito com n blocos idênticos representado na figura. Determine a resistência equivalente do circuito em função de n . Qual o valor do seu limite quando $n \rightarrow \infty$?



VI. Edições anteriores: quiz invariants (2+4)

Um grupo de 3 alunos concorreu a ambas as edições de 2021 e 2022 d'O Grande Quiz de Cálculo Diferencial e Integral, tendo ficado classificado em segundo lugar nos dois anos.

- Caso concorra, em que posição é que esse grupo irá ficar classificado na edição deste ano, sem contar com a cotação da resposta a esta alínea?
- Discuta porque é que na alínea anterior foi necessário abrir uma excepção para a própria pergunta, formulando a resposta em termos de uma analogia com um paradoxo famoso.