MÈTODES NUMÈRICS II. Curs 2022-23. Semestre de tardor

Exercici pràctic 1

Sigui $\Omega \equiv [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ i sigui $\partial\Omega$ la seva frontera. Es considera el problema

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = g \quad \forall (x,y) \in \Omega \ , \qquad (EDP)$$

$$u = p \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega \ . \qquad (CF)$$

- Les lletres majúscules (A,B,C,D,E,F) són constants reals conegudes tals que $B^2 - 4AC < 0$. En aquest cas, l'Equació en Derivades Parcials (EDP) s'anomena *el·líptica*.

- Les lletres minúscules (u, g, p i les derivades de u) són funcions de (x,y), amb valors a $\mathbb{R}$.

- $g(x,y)$ i $p(x,y)$ són funcions conegudes.

- La incògnita és la funció $u(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathring{\Omega}$. En els punts de $\partial\Omega$, els valors $u(x,y)$ ja són coneguts: coincideixen amb els valors $p(x,y)$ (condició de frontera CF);

L'EDP anterior és lineal, de segon ordre i a coeficients constants. Equacions com aquesta apareixen sovint en diversos camps científics (particularment a Física). En alguns casos especials es pot trobar analíticament la solució $u(x,y)$. Però en general això no és possible i cal conformar-se a buscar una solució aproximada mitjançant algun mètode numèric.

Aquí s'usarà el **mètode de les diferències finites**, el qual permet trobar aproximacions de la solució només en un conjunt discret i finit de punts: $u(x_i, y_j)$. Aquest mètode transforma el problema original (EDP+CF) en el problema de resoldre un sistema lineal quadrat, de dimensió molt gran, amb *matriu esparsa o escassa* (això vol dir que la majoria dels seus elements són 0). Aquest sistema s'haurà de resoldre usant alguns dels mètodes iteratius explicats al tema 1.

1) Es comença fixant un valor enter $n > 0$, defininint el *pas de discretització* $h = 1/(n+1)$, i considerant els valors discrets de les dues variables x i y: $x_i = i\,h \quad (\forall i = 0 \div n+1)$, i $y_j = j\,h \ \ (\forall j = 0 \div n+1)$.

L'objectiu és trobar les n^2 incògnites $u_{i,j} \equiv u(x_i, y_j)$ $(\forall i,j = 1 \div n)$. Observeu que, en els casos $i = 0$ o $i = n+1$ o $j = 0$ o $j = n+1$, els valors corresponents $u_{0,j}, u_{n+1,j}, u_{i,0}, u_{i,n+1}$ ja són coneguts per CF.

2) Seguidament es consideren les diferències finites centrades de segon ordre, amb pas h, per a aproximar derivades primeres i segones:

$$u_x(x_i,y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \ , \qquad u_y(x_i,y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} \ ,$$

$$u_{xx}(x_i,y_j) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \ , \qquad u_{yy}(x_i,y_j) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} \ ,$$

$$u_{xy}(x_i,y_j) \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2} \ .$$

Substituint aquestes expressions a l'EDP en cada punt (x_i, y_j) $\forall i,j = 1 \div n$, s'obté un sistema lineal de n^2 equacions i incògnites. Agrupant termes adequadament, cada equació té la forma

$$\left(\frac{B}{4h^2}\right) u_{i-1,j-1} + \left(\frac{C}{h^2} - \frac{E}{2h}\right) u_{i,j-1} + \left(\frac{-B}{4h^2}\right) u_{i+1,j-1} +$$

$$+\left(\frac{A}{h^2}-\frac{D}{2h}\right)u_{i-1,j}+\left(\frac{-2A}{h^2}+\frac{-2C}{h^2}+F\right)u_{i,j}+\left(\frac{A}{h^2}+\frac{D}{2h}\right)u_{i+1,j}+$$
$$+\left(\frac{-B}{4h^2}\right)u_{i-1,j+1}+\left(\frac{C}{h^2}+\frac{E}{2h}\right)u_{i,j+1}+\left(\frac{B}{4h^2}\right)u_{i+1,j+1}=g_{i,j}\equiv g(x_i,y_j)\ .$$

Si es considera el següent ordre de variació dels índexs (i,j), tant en les equacions com en les incògnites:

$$(1,1),(2,1),\ldots,(n,1),(1,2),(2,2),\ldots,(n,2),\ldots(1,n-1),(2,n-1),\ldots,(n,n-1),(1,n),(2,n),\ldots,(n,n)\ ,$$

llavors el sistema lineal té les característiques següents:

- La matriu és $n\times n$ per blocs, amb blocs de dimensió $n\times n$. Més concretament, la matriu és *tridiagonal per blocs*, i cada bloc no nul és *tridiagonal*. En particular la matriu és esparsa: en cada equació apareixen, com a màxim, 9 elements no nuls.

- Quan $i=1$ o n $(\forall j)$, i quan $j=1$ o n $(\forall i)$, en l'equació corresponent apareixen les *falses incògnites* $u_{0,j},u_{n+1,j},u_{i,0},u_{i,n+1}$, a les quals ja s'ha fet referència. Aquests termes s'han de passar a l'altra banda del signe igual, i aquestes equacions tenen només 6 o 4 elements no nuls.

3) **L'exercici pràctic consisteix a programar els mètodes de Jacobi, Gauss-Seidel i SOR per a resoldre el sistema anterior. Els tres programes s'assemblaran molt. Heu de penjar els tres fitxers** $.c$ **a les tasques preparades al CV, abans de les 24h del 4 de novembre de 2022.**

Comentaris:

1) Es recomana fer primer, a mà, el desenvolupament del sistema lineal en el cas $n=4$ (per exemple); així com l'expressió explícita de les iteracions dels tres mètodes de resolució.

2) En els programes, es recomana que el vector terme independent i el vector solució del sistema lineal, no siguin vectors sinó matrius, conservant la dependència de dos índexs: i i j. De fet, no cal tenir cap matriu del sistema.

3) Als programes, heu de fixar les dades que useu: constants A,B,C,D,E,F i funcions $g(x,y)$, $h(x,y)$.

4) Per a cada valor fixat de n, compteu quantes iteracions fan falta per a obtenir una determinada precisió en cadascun dels mètodes (en el cas de SOR, per a diversos valors del paràmetre ω). Ha de passar:

- Gauss-Seidel és aproximadament el doble de ràpid que Jacobi.

- SOR amb paràmetre adequat és molt més ràpid que Gauss-Seidel.

5) D'altra banda, executant els programes per a diversos valors de n, ha de passar que l'error en la solució aproximada trobada es comporta com l'error de discretització $O(h^2)$. Per a poder comprovar això, considereu funcions g i h tals que conegueu la solució exacta u, i mesureu l'error entre la solució aproximada i la solució exacta en norma infinit.

Referència

A més dels apunts de teoria (problema model de la pàgina 8), podeu consultar la secció 8.4 del llibre

J. Stoer & R. Bulirsh: Introduction to Numerical Analysis, 3rd. Edition, Springer, 2010.