Prof. Dr. M. Grohe

E. Fluck, A. Riazsadri, J. Feith

Berechenbarkeit und Komplexität

Probeklausur, WS22/23

Nachname: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Studiengang: ______________________________

Hinweise

- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf **jedes Blatt** (inklusive zusätzliche Blätter).
- Bitte beantworten Sie die Aufgaben auf den Aufgabenblättern. Sprechen Sie uns an, wenn Sie zusätzliches Papier benötigen. Benutzen Sie **kein eigenes Papier** und geben Sie am Ende der Klausur **alle Blätter zusammen mit den Aufgabenblättern** ab.
- Schreiben Sie ausschließlich mit **dokumentenechten Stiften** in **schwarzer** oder **blauer** Farbe. Benutzen Sie insbesondere **keine Bleistifte**.
- Streichen Sie nicht zu wertende Antworten durch. Bei mehreren Antworten für eine Aufgabe wird die schlechteste gewertet.
- Die Bearbeitungszeit beträgt **120 Minuten**. Zum Bestehen der Klausur reichen **60 Punkte**.

Hiermit bestätige ich, dass ich obige Hinweise zur Kenntnis genommen habe und prüfungsfähig bin.

____

(Unterschrift)

Bitte unterhalb dieser Linie nichts eintragen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte	/ 12	/ 10	/ 13	/ 23	/ 16	/ 13	/ 17	/ 8	/ 8

$\sum$	/ 120

Aufgabe 1 (Deterministische Turingmaschinen) 2 + 4 + 6 = 12 Punkte

a) Was bedeutet es, dass eine Turingmaschine M eine Sprache L entscheidet?

b) Definieren Sie den Begriff der Konfiguration einer Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \overline{q}, \delta)$ und geben sie die Bedeutung der Bestandteile einer Konfiguration an.

c) Geben Sie eine deterministische Turingmaschine über dem Eingabealphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ an, welche die folgende Funktion $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ berechnet:

$$f(w) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{falls } w \in \{0\}^* \text{ oder } \{1\}^*, \\ w, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beschreiben sie kurz die Funktionsweise Ihrer Turingmaschine.

Aufgabe 2 (Entscheidbare Sprachen) 3 + 7 = 10 Punkte

a) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:

"Die Menge der entscheidbaren Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}$ ist unter Teilmengenbildung abgeschlossen. Das heißt: wenn $L \subseteq \{0,1\}^*$ entscheidbar ist, dann ist auch jede Sprache L' mit $L' \subseteq L$ entscheidbar."

b) Zeigen Sie, dass die Sprache

$$L = \{\langle M \rangle w \mid M \text{ liest auf Eingabe } w \text{ niemals ein Blank-Symbol}\}$$

entscheidbar ist.

Aufgabe 3 (Satz von Rice) 4 + 9 = 13 Punkte

a) Was besagt der Satz von Rice? Benennen Sie insbesondere auch die Voraussetzungen, die erfüllt sein müssen, damit der Satz von Rice angewendet werden kann.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Rice, dass die Sprache

$$L' = \{\langle M \rangle \mid \text{ die Sprache } L(M) \text{ ist entscheidbar}\}$$

nicht entscheidbar ist. Zeigen Sie insbesondere, dass die Voraussetzungen des Satzes von Rice erfüllt sind.

Aufgabe 4 (Reduktion) 4 + 5 + 4 + 10 = 23 Punkte

a) Was bedeutet es formal, dass eine Sprache $L_1 \subseteq \Sigma^*$ auf eine Sprache $L_2 \subseteq \Sigma^*$ reduzierbar ist ($L_1 \leq L_2$)?

b) Seien $L_1, L_2 \subseteq \{0,1\}^*$ zwei Sprachen so, dass $L_1 \leq L_2$ und $L_2 \leq \overline{L_1}$ gilt. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:

"Wenn L_2 semi-entscheidbar ist, dann ist L_1 entscheidbar."

c) Definieren Sie das spezielle Halteproblem H_ε und sein Komplement $\overline{H_\varepsilon}$:

$H_\varepsilon = \{ \qquad \}$

$\overline{H_\varepsilon} = \{ \qquad \}$

d) Wir betrachten die Sprache

$$L_{11} = \{\langle M \rangle \mid M \text{ akzeptiert mindestens eine Eingabe, die mit 11 beginnt}\}.$$

Zeigen Sie, dass das spezielle Halteproblem auf L_{11} reduzierbar ist, d.h., dass $H_\varepsilon \leq L_{11}$ gilt. Beweisen Sie insbesondere die Korrektheit Ihrer Reduktion.

Aufgabe 5 (Programmiersprachen) 4 + 2 + 8 + 2 = 16 Punkte

a) Geben Sie die drei syntaktischen Regeln zur Bildung von WHILE-Programmen an:

-
-
-

b) Was ist der Unterschied zwischen den in WHILE- und LOOP-Programmen verwendeten Schleifenarten? Warum ist dieser Unterschied wichtig?

c) Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches das Minimum zweier Zahlen berechnet.

Die Eingabe sei dabei in den Variablen x_1 und x_2 gegeben; die Ausgabe soll in der Variable x_0 gespeichert werden.

d) Stellen Sie durch ein Mengendiagramm die Beziehung zwischen der Klasse der LOOP-berechenbaren Funktionen und der Klasse der WHILE-berechenbaren Funktionen dar. Zeichnen Sie die Ackermannfunktion $A(\cdot, \cdot)$ in Ihr Diagramm ein.

Aufgabe 6 (Komplexitätstheorie) $3 + 2 + 3 + 3 + 2 = 13$ Punkte

a) Definieren Sie die Klasse EXPTIME.

b) Definieren Sie, wann ein Entscheidungsproblem NP-vollständig ist.

c) Zeigen oder widerlegen Sie: Das Halteproblem ist NP-vollständig.

d) Nehmen Sie für diesen Aufgabenteil an, dass $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP} \neq \mathsf{EXPTIME}$ gilt. Stellen Sie durch ein Mengendiagramm die Beziehunen zwischen den Klassen $\mathsf{NP}, \mathsf{EXPTIME}$ und der Klasse NPC der NP-vollständigen Probleme dar. Zeichnen Sie die Probleme Vertex Cover (VC) und Graphzusammenhang (GZ) in Ihr Diagramm ein.

e) Nehmen Sie nun an, dass $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$ und $\mathsf{NP} \neq \mathsf{EXPTIME}$ gelten. Stellen Sie durch ein Mengendiagramm die Beziehunen zwischen den Klassen $\mathsf{NP}, \mathsf{EXPTIME}$ und der Klasse NPC der NP-vollständigen Probleme dar. Zeichnen Sie die Probleme Vertex Cover (VC) und Graphzusammenhang (GZ) in Ihr Diagramm ein.

Aufgabe 7 (NP-Vollständigkeit) 4 + 13 = 17 Punkte

a) Wir betrachten das Entscheidungsproblem SET COVER:

> SET COVER
>
> Eingabe : Eine endliche Menge U, eine Menge $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Pot}(U)$ und $k \in \mathbb{N}$.
>
> Frage : Gibt es eine Teilmenge $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ so, dass $|\mathcal{C}| \leq k$ und jedes Element von U durch $\mathcal{C}$ überdeckt ist, d.h.
>
> $$U = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V?$$

Lösen Sie die folgenden SET COVER-Instanzen. Falls es sich um eine Ja-Instanz handelt, geben Sie eine entsprechende Menge $\mathcal{C}$ an; andernfalls begründen Sie kurz, warum keine solche Menge existiert.

i) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$\mathcal{S} = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3\}, \{2, 6\}\},$$

und $k = 3$.

ii) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$\mathcal{D} = \{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 3\}, \{2, 6\}\},$$

und $k = 2$.

b) Zeigen Sie, dass SET COVER NP-vollständig ist.

Beachten Sie dabei beide Aspekte der NP-Vollständigkeit und beweisen Sie Korrektheiten und polynomielle Beschränktheiten, sofern diese in Ihrem Beweis wichtig sind.

Aufgabe 8 (Optimierungsprobleme) 8 Punkte

Wir betrachten das Entscheidungsproblem Independent Set, was aus den Übungen bekannt ist:

> Independent Set
>
> **Eingabe :** Ein Graph G und $k \in \mathbb{N}$.
>
> **Frage :** Gibt es eine unabhängige Knotenmenge I der Größe mindestens k in G, d.h. existiert $I \subseteq V(G)$ mit $|I| \geq k$ so, dass für alle $v, w \in I$ auch $vw \notin E(G)$ gilt?

Beweisen Sie die folgende Aussage: Wenn Independent Set in P liegt, so kann man auch die zugehörige Optimierungsvariange (gegeben ein Graph G, berechne eine unabhängige Knotenmenge I von G maximaler Größe) in polynomieller Zeit lösen.

Aufgabe 9 (Abschlusseigenschaften von NP) 4 + 4 = 8 Punkte

a) Ist die Klasse NP unter Schnitt abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Ist die Klasse NP unter Vereinigung abgeschlossen? Begründen Sie Ihre Antwort.