UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

ESCUELA DE ESTUDIOS GENERALES

ÁREA DE INGENIERÍA

Álgebra y Geometría Analítica

Tema: Números complejos Teorema de Moivre. Forma exponencial de un número complejo y logaritmo de un número complejo. **Semestre:** **2022-1**

---

1. Efectuar:

   a) (3+2i)(1-4i)-(2-i)^2 b) (1+i)^3 c) $\frac{1+i}{i}+\frac{i}{1-i}$ d) $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})$ e) $(1+i)^{-1}-i^{-1}$

   f) $\frac{(2+i)(1-2i)}{3-1}$ g) $\frac{i^5+3}{i^3-1}$ h) $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^4$ i) $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$

2. Hallar los valores reales de x y y que satisfacen la ecuación:

   a) x^2-4y+(2y-x)i = 2-i b) x+3y + (2x-3y-9)i=0 c) (x+y)i =3-4i

   d) 2x-y+(3y-3x)i = 2-2i e) x^2-4y+(2y-x)i = 2-i

3. Determine k para que el cociente $\frac{k+i}{1+i}$ sea igual a $2-i$. Rpta. $k=3$
4. Calcular a y b de modo que verifique: $(a+bi)^2=3+4i$
5. Hallar el valor de b para que el producto $(3+6i)(4+bi)$ sea:
   a) Un número imaginario puro b) Un número real. Rpta.b=2;b=-8
6. Calcule $x\in\mathbb{R}$ para que el resultado del producto $(x+2+ix)(x-i)$ sea un número real.
7. Calcular el módulo de:
   a) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ b) $\frac{(4+3i)(1+i)}{7-i}$ c) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ d) $i^5+2i^3-3i^2$
8. Representa geométricamente los números complejos que verifican: $\left\|z-\bar{z}\right\|=4$
9. Representar en su forma trigonométrica los siguientes números complejos:

   a) -7 b) -5 + 5i c) -3 + 4i -4 + 4$\sqrt{3}$

   d) 5i e) i f) $\sqrt{3}$ + 3i g) $1-\sqrt{3}i$

Los profesores del curso

10. Calcular: z^{-3} ; z^{-14} ; z^{-83} , si z es:

a) z = 2-2 i b) z = - 9 + 9 i c) z = -1 - i

11. Calcula $\left\| \dfrac{(2+i\sqrt{5})(1+i\sqrt{3})^3}{\sqrt{5}+i\sqrt{3}} \right\|$ Rpta $6\sqrt{2}$

12. Demostrar que si $z+\dfrac{1}{z}$ es real entonces $\operatorname{Im} g(z)=0 \vee \|z\|=1$

13. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que:

a) $sen3\alpha = 3sen\alpha - 4sen^3\alpha$ b) $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

c) $sen5\alpha = 5sen\alpha - 20sen^3\alpha + 16sen^5\alpha$

14. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $w=\cos\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)+isen\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$ dado un número entero $m \in \mathbb{Z}$ y múltiplo de n calcular la suma $1+w^m+w^{2m}+\ldots+w^{(n-1)m}$

15. Si $z=\dfrac{(1-i)^{10}\left(-i+\sqrt{3}\right)^{12}}{\left(i\sqrt{3}+1\right)^8}$ calcular a) $z^3+\dfrac{1}{z^3}$ b) $Arg(z)$ c) $\|z\|$

16. En cada ejercicio, calcular las potencias indicadas:

a) $(1-i)^5$ b) $(\sqrt{3}-i)^6$ c) $(2+2i)^{-4}$

d) $\dfrac{i^7-i^{-7}}{2i}$ e) $(-1+\sqrt{3}i)^7$ f) $(1+i)^{-8}$

17. Simplifique

a) $\left[\dfrac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}\right]^n$ b) $\left(\dfrac{1+sen\theta+i\cos\theta}{1+sen\theta-i\cos\theta}\right)^n$

18. Si n es un entero positivo , demostrar que: $(1+i)^n+(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{n\pi}{4}$

19. Si $z+\dfrac{1}{z}=2\cos\alpha$ demostrar $z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\alpha$

20. Expresa $\dfrac{3}{2+\cos\theta+isen\theta}$ en la forma $a+bi$ y probar que $\|z\|^2=4\operatorname{Re} z-3$

21. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x^3-8=0$ b) $x^4+i=0$ c) $x^6-1=0$
d) $x^3-2i+2=0$ e) $x^5-27i=0$

22. Expresar cada uno de los siguientes números complejos en la forma exponencial:

a) -i b) 1-i c) 3i
d) $\sqrt{3}$ -3 i e) $2-2i$ f) $-4-4\sqrt{3}$ i

23. Si $\|z_1\| = \|z_2\| = 1$ demuestre que $\|z_1 + z_2\| = 2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ Sug. Utilice la forma exponencial

24. Expresar cada uno de los siguientes números complejos en la forma binomial:

a) $e^{\left(\frac{\pi}{3}\right)i}$ b) $3e^{\left(\frac{\pi}{2}\right)i}$ c) $-2e^{-\pi i}$
d) i - $e^{2\pi i}$ e) $e^{\left(\frac{\pi}{4}\right)i} + e^{\left(-\frac{\pi}{4}\right)i}$ f) $\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}i}}{1-e^{\frac{\pi}{2}i}}$

25. Calcular:

a) Log (-i) b) Log(1+i) c) Log (1+$\sqrt{3}$ i) d) i^{-i}
e) $(-i)^i$ f) 1^{-i} g) e^{e^i}

Los profesores del curso