



PRÁCTICA N° 04

Tema: Función par e impar, funciones periódicas. Funciones crecientes, decrecientes y monótonas. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva. Función inversa. Función inversa de una composición.

1) Determine si la función dada es par, impar o ninguna de las dos.

a) $f(x) = \frac{3x^4}{2x^2+1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$ **GRUPO 10 (a,b)**

c) $f(x) = \frac{3x}{4x^2+5}$

d) $f(x) = a^x + a^{-x}$, ($a > 0$) **GRUPO 9 (c,d)**

e) $f(x) = \sec(x^2 + 1)$

f) $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$ **GRUPO 8 (e,f)**

g) $f(x) = \log \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$

h) $f(x) = \log|x + \sqrt{1+x^2}|$ **GRUPO 7 (g,h)**

2) Verifique las siguientes afirmaciones (demostrar):

a) Que la suma de dos funciones pares es una función par. **GRUPO 6 (a,b)**

b) Que el producto de dos funciones pares es una función par.

c) Que si f es una función par y g es cualquier función, entonces la composición $(g \circ f)$ es par. **GRUPO 5 (c,d)**

d) Sea f una función cuyo dominio es simétrico con respecto al origen, esto es, siempre que x esté en el dominio, $-x$ también lo estará. Verifique que f es la suma de una función par y de una función impar. ¿ Es toda función, con dominio simétrico, la suma de una función par e impar?

3) Hallar el periodo de las siguientes funciones: **GRUPO 4**

a) $f(x) = \operatorname{tg} 2x$

b) $f(x) = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$

c) $f(x) = \operatorname{ctg}(x/2)$

4) Demostrar si las siguientes funciones son periódicas y hallar su periodo mínimo para cada función. **GRUPO 3**

a) $f(x) = (x - \llbracket x \rrbracket)^2, \forall x \in \mathbb{R}$

a) $g(x) = 2\cos\left(\frac{x-\pi}{3}\right)$

- 5) Es la función $f: \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f(x) = x^2 - x + 1$ estrictamente creciente? En caso afirmativo: ¿Será una función inyectiva? En caso afirmativo, halle su inversa. **GRUPO 2**

- 6) Hallar el intervalo de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+2x^2}{x+2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{x^2+4x}{|x+4|} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \textbf{GRUPO 1}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x < -2 \\ \sqrt{x+3} & \text{si } x \in [-2; 6] \\ \frac{x}{2} & \text{si } x > 8 \end{cases} \quad \textbf{GRUPO 1}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & , \quad -5 \leq x \leq 2 \\ \left\lceil 1 + \frac{x}{2} \right\rceil & , \quad -2 \leq x \leq 1 \\ 2 - |x - 2| & , \quad 1 \leq x \leq 5 \end{cases} \quad \textbf{GRUPO 10}$$

- 7) Sea la función:

$$H(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \leq 0 \\ -3x^2 - 6x + 2 & x > 0 \end{cases} \quad \textbf{GRUPO 9}$$

a. Verifique que H es una función estrictamente decreciente.

b. Halla H^{-1} y comprueba si es estrictamente decreciente, o no.

- 8) Hallar la inversa de las funciones siguientes y determinar su dominio: **GRUPO 8 (a,b)**
GRUPO 7 (c)

$$a) f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad b) f(x) = \frac{x}{1 - |x|} \quad c) f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$$

- 9) Dado $n \in \mathbb{Z}$, sea $f: \left[n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$. Comprobar que f es inyectiva y expresar su inversa f^{-1} en términos de la función arcoseno.

Observación: La función arcoseno es la inversa de la función seno. **GRUPO 6**

- 10) Demuestra las siguientes identidades: **GRUPO 5**

$$a) \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad b) \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad c) \tan(\arcsen(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

11) Determinar, si existe, la función inversa de: **GRUPO 4**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 1 & \text{si } x \in [-4, -2) \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \in [-2, 2] \\ \left\lfloor \frac{10-x}{4} \right\rfloor - \frac{x}{2} & \text{si } x \in (2, 6] \end{cases}$$

12) Determine f^{-1} en caso exista, si $f(e^x - e^{-x}) = x, x > 0$ y $f(e^x - e^{-x}) = e^x - e^{-x}, x < 0$.
GRUPO 3

13) Si $f(x) = \sqrt{\frac{2|x|+x+2}{3x^{3/2}+2x^{1/2}}}$. Determinar, en caso exista, f^{-1} . **GRUPO 2**

14) Si $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3} & , \quad x \geq 3 \\ x^2 + 2x-3 & , \quad x \in [-1, 1) \end{cases}$. Determinar, en caso exista, $f^{-1}(x)$. **GRUPO 1**

15) Si $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{|x|} & x < -2 \\ x^2 + 2 & |x| \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$. Determine f^{-1} , en caso exista. **GRUPO 10**

16) Si $f(x) = \sqrt{2x-1}$; $g(x) = \sqrt{2x^2-7}$, halle una función h tal que $(f \circ h)(x) = g(x)$
GRUPO 9

17) Si $f(x) = \sqrt[7]{1-x^3}$, halle $g(x)$ tal que $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{x^4+1}$ **GRUPO 8**

18) Si $f(x) = \begin{cases} x-1 & , x \in [-1, 2] \\ \frac{\|2x\|-2\|x\|}{x} & , x \in [2, 3] \end{cases}$ y $g(x) = \frac{x+2}{x-2}, x \neq 2$, Halle $(f \circ g)^{-1}$. **GRUPO 7**