



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, Decana de América)

Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática

Escuela de Ingeniería de Sistemas

SIGNATURA: Cálculo I

Semestre: 2022-I

GUÍA DE PRÁCTICA N° 07

Tema: Continuidad, Discontinuidad y aplicaciones de las funciones.

1. Pruebe la Continuidad de la función en el punto indicado, verificando las 3 condiciones dadas en clase. **GRUPO 10**

a) en $x=0$
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b) en $x=0$
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

c) en $x=0$
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^4 - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x < 2 \\ |x - 2|, & x \geq 2 \end{cases}$ **GRUPO 9**

b) $f(x) = \begin{cases} |x - 1| + |x - 2|, & x < 3 \\ \sqrt{x - 3}, & x \geq 3 \end{cases}$ **GRUPO 9**

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x + \lfloor x \rfloor, & x \leq 0 \\ x - 3, & x > 0 \end{cases}$ **GRUPO 9**

d) $f(x) = \begin{cases} 2(1 - \cos x^2), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ **GRUPO 8**

e) $f(x) = |x - 8|(x - 8)^2$ **GRUPO 8**

f) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x^2 - 5x + 4}$ **GRUPO 8**

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(mx) - \cos(nx)}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{m^2 - n^2}{2}, & x = 0 \end{cases}$ **GRUPO 7**

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{|x - 1|}, & x > -1; x \neq 1 \\ \operatorname{sig}(|x^2 - 1| - 1), & x \leq -1 \end{cases}$ **GRUPO 7**

i) $f(x) = \begin{cases} \left(\sqrt{2 - \sqrt{\cos x}}\right)^{1/x^2}, & x \neq 0 \\ 1/2, & x = 0 \end{cases}$ **GRUPO 7**

$$j) f(x) = \begin{cases} \text{sig}(x^2 - 4) - 3, & x \leq -3 \\ x \cdot \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 5 \cdot \text{sign}(x - 2), & -3 < x < 0 \\ \frac{x - 3}{x^2 - x - 6}, & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{GRUPO 6}$$

$$k) f(x) = \begin{cases} \text{sig}(x^2 - \frac{1}{4}), & x \leq -1 \\ \frac{x^3}{x^2 - 9}, & |x| < 1 \\ -\frac{1}{8} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{GRUPO 6}$$

3. Halle el valor de A para que la función f(x) sea continua:

$$[a] \text{ En } x=1 \quad f(x) = \begin{cases} Ax^2 + 4, & \text{si } x < 1 \\ 3Ax - 2, & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{GRUPO 5}$$

$$[b] \text{ En } x=2 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ A, & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{GRUPO 5}$$

$$[c] \text{ En } x=1 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2\text{sen}(x-1)}{x^3 - 1}, & \text{si } x \neq 1 \\ A, & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \text{GRUPO 4}$$

$$[c] \text{ En } x = -2 \text{ y } x=1 \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}|x|}{x}, & x < -2 \\ A \cdot x + B, & -2 \leq x < 1 \\ \cos x, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{GRUPO 4}$$

4. Suponga que la temperatura de un día dado es 30°F. Entonces la temperatura (en °F), que se siente por efectos del viento que sopla con una velocidad v, en millas por hora (mph), está dada por: **GRUPO 3**

$$W(v) = \begin{cases} 30 & ; \text{ si } 0 \leq v \leq 4 \\ 1.25v - 18.67\sqrt{v} + 62.3, & \text{si } 4 < v < 45 \\ -7 & ; \text{ si } v \geq 45 \end{cases}$$

- a) ¿Cuál es la temperatura que se siente cuando $v=20$ mph? ¿y cuándo $v=50$ mph?
 b) ¿Cuál es la velocidad del viento que produce una temperatura equivalente a 0°F ?
 c) ¿Es la función de temperatura equivalente $W(v)$ continua en $v=4$? ¿y en $v=45$?

5. Halle los valores de a y b para que la función sea continua en todo \mathbb{R} .

GRUPO 2 (a,b) y GRUPO 1 (c,d)

$$[a] \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + a & , \text{ si } x \leq 2 \\ x + 2b & , \text{ si } 2 < x \leq 5 \\ 16 + 2ax & , \text{ si } x > 5 \end{cases}$$

$$[b] \quad g(x) = \begin{cases} ax - 5 & , \text{ si } x < 3 \\ x^2 + bx + 9 & , \text{ si } 3 \leq x \leq 5 \\ 2x - 1 & , \text{ si } x > 5 \end{cases}$$

$$[c] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x + 3}{x^3 - 2x + 1} & x > 1 \\ ax^2 + bx + b & |x| \leq 1 \\ \frac{2(x^3 + 1)}{x^2 - x - 2} & x < -1 \end{cases}$$

$$[d] \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin|x|}{x} & , x < -2 \\ A \cdot x + B & , -2 \leq x < 1 \\ \cos x & , x \geq 1 \end{cases}$$

6. Halle el valor de A y B si la función es continua en $x = 0$; $x = 2\pi$ **GRUPO 10**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - \sin 2\pi}{x - 2\pi} & x > 2\pi \\ Ax + B & 0 \leq x \leq 2\pi \\ \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

7. En cada caso responda mediante contra ejemplos: ¿Será necesariamente discontinua en un punto x_0 la suma de dos funciones $f(x) + g(x)$? si: **GRUPO 9**

- a) “ $f(x)$ es continua en x_0 y la función $g(x)$ es discontinua en x_0 ”
 b) ¿Ambas funciones son discontinuas en x_0 ?

8. En cada caso responda mediante contra ejemplos: ¿Será necesariamente discontinua en un punto x_0 el producto de funciones $f(x) \cdot g(x)$? si: **GRUPO 8**

- a) “ $f(x)$ es continua en x_0 y $g(x)$ discontinua en x_0 ”
 b) ¿ f y g son discontinuas en x_0 ?

9. La fuerza gravitacional ejercida por la tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es: **GRUPO 7**

$$F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{si } r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

Donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G es la constante gravitacional ¿ f es una función continua de r ?

10. Los ingresos de una empresa, en función del número de años que lleva funcionando, viene dada por: **GRUPO 6**

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} ; & 0 \leq x \leq 9 \\ \frac{4x-30}{x-7} ; & x > 9 \end{cases}$$

x en años, f(x) en millones de dólares. ¿Es continua f(X)

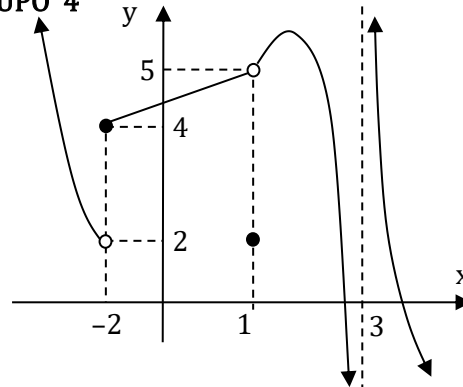
11. Dada las funciones, analice las discontinuidades y clasifíquelas.

[a] $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. **GRUPO 5**

[b] $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ **GRUPO 5**

[c] $f_5(x) = \begin{cases} \frac{5}{x+2}, & 1 \leq x < 3, \\ e^{(3-x)}, & 3 \leq x < 5, \\ \frac{3}{e^2}, & 5 \leq x \leq 7. \end{cases}$ **GRUPO 4**

- [d] La grafica de f(x) es: **GRUPO 4**



12. Se ha abierto un establecimiento de ventas en la ciudad de lima. El número de ventas por día de las ropas (t) en los meses posteriores a la factura está dada por: **GRUPO 3**

$$f(t) = \frac{360}{3 + 15e^{-2t}}$$

- ¿Cuántas ropas por día venderá inicialmente dicho establecimiento?
- ¿Cuál es el límite superior de ventas diarias de las ropas?
- ¿Es continua la función ?

13. Los gastos mensuales en soles que la familia Pérez tiene en alimentación viene

dada por la función:
$$f(x) = \begin{cases} 0.4x + k; & 0 \leq x \leq 1000 \\ \frac{2000x}{x + 3000}; & x > 1000 \end{cases}$$

Donde x son los ingresos de la familia en soles. **GRUPO 2**

- a) Determine el valor de k para que los ingresos sean continuos; es decir, no haya salto en $x = S/.1000$
- b) ¿Hacia qué valor se estabilizan los gastos de alimentación de las familias con ingresos más altos?

14. Pruebe que la ecuación $x^6 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 2 = 0$, tiene una solución positiva y menor a 1. **GRUPO 1**

15. Demuestra que la ecuación $2^x + x = 0$, tiene una solución real en el intervalo $[-1, 0]$. **GRUPO 10**

16. Determina los valores del número real k para los cuales se puede aplicar el Teorema de Bolzano a la función $p(x) = 2x^3 - 4x + k$, en el intervalo $[-1, 1]$. **GRUPO 9**

17. De acuerdo con un modelo logístico basado en el supuesto de que la Tierra no puede soportar más de 40000 millones de personas la población del mundo (en miles de millones) t años después de 1960 viene dada por una función de la forma:

$$P(t) = \frac{40}{1 + ce^{-kt}}$$

Donde, c y k son constantes positivas. **GRUPO 8**

- a) Hallar la función de esta forma que es consistente con los hechos, de que la población era aproximadamente de 3 millones en 1960 y 4 mil millones en 1975.
- b) ¿Cuál será la tasa máxima de crecimiento de la población mundial?

18. Se estima dentro de t años la población de cierto país será de.

$$P(t) = \frac{120}{4 + 8e^{-0,05t}}$$

- a) Trace el grafico
 - b) ¿Cuál es la población actual?
 - c) ¿Cuál es la población dentro de 20 años
 - d) ¿Qué sucederá a la población cuando t crece sin límite?
- GRUPO 7**

19. Un campo rectangular que tiene un área de 2700 m² va a ser limitado por una cerca, además, otra cerca dividirá el terreno por la mitad. El costo de la cerca que dividirá el terreno es 4 dólares por metro y el costo de los lados del terreno es de 6 dólares por metro. Sea x metros de longitud de la cerca divisora y $C(x)$, el costo de toda la cerca.

- a) Escriba la ecuación que defina $C(x)$ y establezca el dominio de la función C
- b) Encuentre el límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x)$ y explique sus resultados en términos del problema.
- c) ¿Es continua la función en su dominio? Trazar la gráfica de $C(x)$

GRUPO 6

20. Una caja cerrada con base cuadrada debe tener un volumen de 2000 cm³. El material para las partes superior e inferior de la caja costará 3 dólares por cm² y el material por los lados costará 1.5 dólares por cm². Sea x cm la longitud de un lado de la base cuadrada y $C(x)$ dólares el costo total del material. **GRUPO 5**

- a) Escriba la ecuación que defina $C(x)$ y establezca el dominio de la función C
- b) Encuentre el límite $\lim_{x \rightarrow 0^+} C(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x)$ y explique sus resultados en términos del problema.
- c) ¿Es continua la función en su dominio? Trazar la gráfica de $C(x)$.

**Ningún empleo puede ser controlado sin aritmética,
ninguna invención mecánica sin geometría.**

Benjamín Franklin

