

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Examen Final de Cálculo I
Semestre: 2021.II
Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informatica

Profesor: Dr. Edison Cuba

Duración de la prueba: 120 min+10 min para subir su examen en formato PDF al classroom
(enviado después de las 16:10hrs, tendrá nota **CERO**)

February 5, 2022

Problema 1 — (5 puntos)

¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos? Si es verdadero, explique por qué; si es falso, dé un contraejemplo (esto es, un ejemplo que confirme la falsedad).

- a) ¿Si f es diferenciable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$. ?
- b) Si $f''(a) = 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en a ?
- c) ¿Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado, entonces es suficiente mirar los puntos donde $f'(x) = 0$ para encontrar sus máximos y mínimos absolutos?
- d) ¿El valor mínimo absoluto de una función continua $f(x)$ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ solo se puede realizar en un punto final ($x = a$ o $x = b$) o en un punto donde la gráfica de f tiene una tangente horizontal?
- e) Si c es un número crítico de una función f y también $f''(c) = 0$, luego por el criterio de la segunda derivada, se tiene que f no alcanza ni un máximo local ni un mínimo local en $x = c$.

Problema 2 — (5 puntos)

- a) Suponga que f está definida en una vecindad de x , y suponga que $f''(x)$ existe. Demuestre que

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Muestre con un ejemplo que el límite puede existir incluso si f'' no existe.

- b) Calcule el límite de

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{10x}{10x+3} \right)^{6x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{\tan \left(\frac{\pi x}{2x+1} \right)}$$

Problema 3 — (5 puntos)

- a) Encuentre la mayor área de un rectángulo que se encuentra dentro de un círculo de radio 1.
- b) El producto de dos números positivos es 200. Encuentra los dos números si la suma de sus cuadrados es lo más pequeño posible.

Problema 4 — (5 puntos)

Considere la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

- a) ¿Cuál es el dominio de esta función?
- b) Identifique todas las asíntotas verticales de la gráfica de esta función. Escribe una ecuación para cada uno. Si la gráfica no tiene asíntotas verticales, explica por qué.
- c) Identifique todas las asíntotas horizontales de la gráfica de esta función. escribir una ecuación para cada uno. Si la gráfica no tiene asíntotas horizontales, explica por qué.
- d) Encuentre todos los puntos críticos de esta función y clasifique cada uno como un máximo local, mínimo local, o ninguno.
- e) Encuentre todos los puntos de inflexión de esta función.
- f) Use toda la información recolectada para hacer un diseño de la función.

Problema 5 — (5 puntos)

Supongamos que a y c son números reales, $c > 0$, y f está definida en $[-1, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-c}), & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Demostrar las siguientes afirmaciones:

- a) f es continua si y solo si $a > 0$.
- b) $f'(0)$ existe si y sólo si $a > 1$.
- c) f' está acotado si y sólo si $a \geq 1 + c$.
- d) f' es continua si y sólo si $a > 1 + c$.
- e) $f''(0)$ existe si y sólo si $a > 2 + c$.
- f) f'' está acotado si y sólo si $a \geq 2 + 2c$.
- g) f'' es continua si y sólo si $a > 2 + 2c$.

Observación: Resuelva solo 4 de las 5 preguntas (Obligatoriamente tiene que resolver la pregunta 1).