UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

ESCUELA DE ESTUDIOS GENERALES
ÁREA DE INGENIERÍA

Curso: Álgebra y Geometría Analítica
Tema: Inducción Matemática

GUÍA DE PRÁCTICA Nº2

1. Usando el principio de inducción matemática, probar cada uno de las siguientes fórmulas.

a) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1),\ \forall n\in\mathbb{N}$

b) $1+3+5+\ldots+(2\mathrm{n}-1)=\mathrm{n}^2,\ \forall n\in\mathbb{N}$

c) $1+4+9+\ldots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ \forall n\in\mathbb{N}$

d) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4},\ \forall n\in\mathbb{N}$

e) $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\dfrac{n.(3n-1)}{2},\ \forall n\in\mathbb{N}$

f) $1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+n\times(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3},\ \forall n\in\mathbb{N}$

g) $1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5+\ldots+n\times(n+1)\times(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},\forall n\in\mathbb{N}$

h) $\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}\quad \forall \mathrm{n}\in\mathbb{N}$

i) $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{2\times 4}+\dfrac{1}{3\times 5}+\dfrac{1}{1\times 3}+\ldots+\dfrac{1}{\mathrm{n}(\mathrm{n}+2)}=\dfrac{\mathrm{n}(3\mathrm{n}+5)}{4(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

j) $\dfrac{1}{1\times 3}+\dfrac{1}{3\times 5}+\dfrac{1}{5\times 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

k) $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\ldots+\operatorname{sen}nx=\dfrac{\operatorname{sen}\dfrac{n+1}{2}x}{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}\operatorname{sen}\dfrac{nx}{2},\forall n\in\mathbb{N}$

l) $1+1.1!+2.2!-+\ldots+n.n!=n!,\ n\geq 1$

m) $a^{2n}-b^{2n}$ es divisible por $a-b$, $\forall n\in\mathbb{N}$

n) $\displaystyle\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{k}2^{\mathrm{k}}=2+(\mathrm{n}-1)2^{\mathrm{n}+1}$

o) $\displaystyle\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}}3^{\mathrm{j}}=\dfrac{3}{2}(3^{\mathrm{n}}-1)$

2. ¿Para cuáles números naturales se cumplen las desigualdades?

a) $3n+1<n^3$.
b) $n^2<2^n$
c) $n^3<3^n$
d) $n^3\le n!$
e) $n^2\le n!$
f) $2^{3^n}>3^{2^n}$

3. Demostrar por inducción matemática

a) $1+nx<(1+x)^n \quad \forall\, n\ge 2 \;\; x\neq 0$
b) $(1+x)^n\ge 1+nx$, si $x>0, \quad \forall n\in\mathbb{N}$
c) $2n\le n^2+2, \quad \forall n\in\mathbb{N}$
d) $n>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \; n\ge 3$
e) $3^n\ge 1+2n, \forall\, n\ge 1$
f) $2^n\ge n^2, \forall\, n\ge 5$
g) $x^n+y^n\ge \dfrac{(x+y)^n}{2^{n-1}}, \quad \forall n\in\mathbb{N}, \; \forall x,y\in\mathbb{R}^+,$

$\left(\text{use } (x^k-y^k)(x-y)\ge 0\right)$

h) $5^n\ge 1+4n, \forall\, n\ge 1$
i) $n!>n^2, \forall\, n\ge 4$

4. Probar que

a) 4^n-1 es divisible por 3, $\forall\, \mathrm{n}\ge 1$
b) $x^{2n}-1$, es divisible por $x+1$
c) $3^{2n}+7$ es divisible por 8, $\forall\, \mathrm{n}\ge 1$
d) n^3+2n, es divisible por 3, $\forall n\in\mathbb{N}$
e) 10^n-1, es divisible por 9, $\forall n\in\mathbb{N}$
f) $4^{2n+1}+3^{n+2}$ es múltiplo de 13, $\forall n\ge 1$
g) $10^n+3(4^{n+2})+5$, es divisible por 9, $\forall n\in\mathbb{N}$
h) $3^{2n+3}+2^{n+3}$, tiene como factor al número 7 $\forall n\in\mathbb{N}$.
i) $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ es un múltiplo de 11
j) $3^{4n+2}+2\cdot 4^{3n+1}$ es un múltiplo de 17
k) $2^{2n-1}\cdot 3^{n+2}+1$ es divisible por 11

5. Determine las siguientes sumas

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)$
b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}(i-1)(i+1)$
c) $\displaystyle\sum_{k=5}^{12}(k+1)(2k-3)$

6. Determine el valor de x si $\displaystyle\sum_{k=5}^{12}(2x-3k)=116$

7. Escribir en forma de sumatoria.

a) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}\ldots$
b) $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{7}+\ldots$
c) $1+\dfrac{4}{3}+\dfrac{6}{5}+\dfrac{8}{7}+\dfrac{10}{9}\ldots$

8. De los datos $\displaystyle\sum_{i=1}^{8}x_i^{\,2}=160, \; \sum_{i=1}^{8}x_i=120, \; x_9=6, \; x_1=8.$ Determine las siguientes sumas

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}x_i^{\,2}$
b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{9}x_i\left(x_i-2\right)$
c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}\left(x_i-1\right)^2-\sum_{i=1}^{8}\left(x_i-1\right)^2$

9. De los datos $\sum_{i=1}^{6}(a_i-3)^2=\sum_{i=1}^{6}(a_i+2)^2$ y $\sum_{i=1}^{6}a_i^2=10\sum_{i=1}^{6}a_i$. Calcule $\sum_{i=1}^{6}a_i(a_i-3)$

10. De los datos $\sum_{i=1}^{5}(3x_i-2y_i)^2=101$, $\sum_{i=1}^{5}x_i^2=13$ y $\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=2$. Calcule $\sum_{i=1}^{6}y_i^2$

11. Calcule $\sum_{n=k}^{2k+1}(-1)^n.\frac{2n-1}{n(n^2-n)}=\frac{(-1)^k}{k-1}-\frac{1}{2k+1}$

12. Calcule $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

13. Demuestre

a) $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=2}^{n+1}a_{k-1}$

c) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n}{2n+1}$

b) $\sum_{k=1}^{n}k5^k=\frac{5+(4n-1)5^{n+1}}{16}$

14. Determine los términos que se pide

a) $(m+2n)^4$, hallar el término 3

b) $(x+\sqrt{2})^5$, hallar el término 2

c) $(\sqrt{x}-\sqrt{2})^5$, hallar el término 5

d) $\left(\frac{1}{3}a-\frac{1}{4}b\right)^4$, hallar el término 1

e) $(a^2b+c)^6$, hallar el término 4

f) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^7$, hallar el término 6

g) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^5$, hallar el término 3

h) $(2a^2-\sqrt[3]{2})^5$, hallar el término 2

i) $(a^2-2x^2)^7$, hallar el término 7

15. Halla el término que se pide:

a) El sexto de $\left(\sqrt{x}+y\right)^8$

b) El cuarto de $\left(\sqrt{2}-a\right)^{10}$

c) Término medio de $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^6$

d) Término medio de $\left(a^{\frac{1}{2}}+b\right)^6$

e) Término independiente de $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$

f) Quinto del de $\left(\frac{1}{a}-\sqrt{2}\right)^{15}$

g) Independiente de $(3x^{65}+2)\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$

16. Justifica del modo más rápido la igualdad: $\binom{4}{0}+\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=16$

17. En el desarrollo de $\left(\frac{1}{x^3}-x^2\right)^{18}$, los términos T_{7m+2} y T_{2m} tienen coeficientes iguales. Calcular m.

18. En el desarrollo de $\left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{6}+x^{-28/15}\right)^{n}$, la suma de los coeficientes binomiales de los últimos tres términos es igual a 79. Hallar el término independiente.

19. En el desarrollo de $\left(a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{1}{3}}\right)^{n}$, la suma de todos los coeficientes binomiales es igual a 128. Hallar el término que contiene a a^5.

20. Encuentra una regla que generalice el cálculo anterior y que permita obtener el valor de $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$

21. Si $C_0^n+C_1^n+C_2^n+\ldots+C_n^n=64^{n-5}$, hallar el valor de n. R: $n=6$

22. Si $\frac{7}{5}C_{14}^{20}+C_7^{21}+C_8^{22}=C_x^{3x-1}$, hallar C_x^{15} .

23. Resolver: $C_{n-3}^m+3C_{n-2}^m+3C_{n-1}^m+C_n^m=C_3^{12}$ R: $m=9,\quad n=3$

24. Si $C_{5y+3}^{x+4}=C_{3y+1}^{4y+12}$, calcular C_y^x .

25. Si $4C_{2k}^{49}=7C_{2k-1}^{48}$ y $3C_3^{4n}=28C_2^{2n}$, halle el valor de 2k + n. R. 30

26. Si $C_8^{x+1}+2C_9^{x+1}+C_{10}^{x+1}=C_{y^2-111}^{31-y}$, halle x + y. R. 28

27. Reducir $C_9^{12}+C_{11}^{13}+C_{10}^{12}+C_{12}^{14}$ R. 455

28. Si $C_x^{x+5}+C_{x+1}^{x+5}=C_{x+3}^{y}$, calcule x + y .R. 10

29. Determine el valor de p si: $C_0^{P-3}+C_1^{P-3}+C_2^{P-3}+\ldots+C_{P-3}^{P-3}=1024$

30. Simplifique $E=\frac{C_8^{21}+C_9^{21}+C_{10}^{22}+C_{11}^{23}}{C_{13}^{24}+C_{11}^{24}}$ .R: $\frac{1}{2}$

31. Halle x en $[(x-1)!]^{x!}=2(2!+3!+4!)$ y dar como respuesta C_x^{5x} . R. 455

32. Si $\binom{32}{n}-\binom{32}{n+18}=0$, halle el valor de $M=\binom{n}{4}+\binom{n}{5}$

33. Calcular $C_5^9+\frac{9}{6}C_5^8+\frac{10}{7}C_6^9+C_8^{11}$. R: C_8^{12}

34. Determinar la suma indicada $S=\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n+1}+\binom{n+3}{n+2}+\ldots\ldots+\binom{2n}{2n-1}$, donde $n>1$.