UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, Decana de América)

Facultad de Ingeniería de Sistemas e Informática

Escuela de Ingeniería de Software

SIGNATURA: Cálculo I **Semestre:** 2022-I

GUÍA DE PRÁCTICA N° 05

Tema: Límite de una función de variable real: Vecindades reducidas, puntos de acumulación del dominio de una función. Límite de una Función Real: Definición, propiedades, límites laterales, límites notables.

1. Usando la definición de límite, demostrar: **GRUPO 1 (a,b,c) GRUPO 2 (d,e,f)**

$a)\lim\limits_{x\to 1}\left(3-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)=1$ $\qquad d)\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{[\![x-\frac{1}{5}]\!]+1}{|5x-1|}=\dfrac{1}{4}$

$b)\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$ $\qquad e)\lim\limits_{x\to 5}=\sqrt{x-1}=2$

$c)\lim\limits_{x\to 3}=\dfrac{4}{(x-3)^2}=+\infty$ $\qquad f)\lim\limits_{x\to 4^-}=\dfrac{x+1}{x^2-16}=-\infty$

2. Sea la función f definida por **GRUPO 3**

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x<-2 \\ ax^2+b & \text{si } -2<x<1 \\ 4-2x & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Halle los valores de a y b para que exista $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

3. Sea la función f definida por **GRUPO 4**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{3x+1-|x+3|} & \text{si } x<1 \\ \dfrac{x^2-mx+n}{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Halle los valores de m y n para que exista $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

4. Sea la función **GRUPO 5**

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-ax-6}{x-2} & \text{si } x>2 \\ x^2+b & \text{si } x<2 \end{cases}$$

¿Qué valores de a y b posibilitan la existencia de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?

5. Evaluar los siguientes límites: **GRUPO 6 (a,b,c) GRUPO 7 (d,e,f) GRUPO 8 (g,h)**

$a)\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-3x^2-4}{x^4-16}$ $\qquad e)\lim\limits_{x\to 1}=\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{x^2-1}$

$b)\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} = \left(\dfrac{1-senx}{1+\cos 2x}\right)^3$ $\qquad f)\lim_{x\to 0} = \left(x^n sen\left(\frac{1}{x}\right)\right), n\in\mathbb{Z}^+$

$c)\lim_{x\to a} = \dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}, a>0$ $\qquad g)\lim_{x\to 1} = (sen\pi x)\ \cos\left(\dfrac{x^3-1}{(x-1)^2}\right)$

$d)\lim_{x\to 0} = \dfrac{\cos(mx)-\cos(nx)}{x^2}$ $\qquad h)\lim_{x\to c} = sen\left(\dfrac{x-c}{2}\right)\ \tan\left(\dfrac{\pi x}{2c}\right), donde\ c\neq 0.$

6. Calcular los límites: **GRUPO 9 (a,b,c) GRUPO 10 (d,e,f) GRUPO 1 (g,h)**

$a)\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+x}\right)$ $\qquad e)\lim_{x\to\infty} = \left(sen\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)\right)\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right), a,b\in\mathbb{R}$

$b)\lim_{x\to+\infty} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+x-1}}$ $\qquad f)\lim_{x\to\pm\infty} = \left[\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right]$

$c)\lim_{x\to\infty} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$ $\qquad g)\lim_{x\to 0} = x^4\ \left(1-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\csc\left(\dfrac{1}{2x}\right)$

$d)\lim_{x\to-\infty} = \left(\sqrt[3]{6-2x^2-x^3}+x\right)$ $\qquad h)\lim_{x\to+\infty} x\left[\!\left[\dfrac{x+1}{x}\right]\!\right] sen\left(\dfrac{1}{x}\right)$

7. Evaluar los siguientes límites: **GRUPO 2**

$a)\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{x+1}{2x^2-3x-2}-\dfrac{x}{2x^2+7x+3}\right).$

$b)\lim_{x\to 5}\left(\dfrac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{sen2x}{sen3x}\right)$

8. Dar dos ejemplos de funciones f(x) y g(x) tales que no existen $\lim_{x\to a} f(x)\ \ ni\ \ \lim_{x\to a} g(x)$ **GRUPO3**

$a)existe\ \lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right]$ $\quad b)existe\ \lim_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]$

9. Sea la función $f(x) = -[\![x]\!]+[\![4-x]\!]$. Hallar $\lim_{x\to 3^-} f(x)\ \ y\ \ \lim_{x\to 3^+} f(x)$. **GRUPO 4**

10. Probar que no existe $\lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$.

11. Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones: **GRUPO 5**

a) Si $\lim_{h\to 0}\left(\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) existe\ en\ \mathbb{R},\ entonces\ \lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$

b) Si $\lim_{x\to a} f(x) = L>0,\ entonces\ existe\ x\ cerca\ de\ a\ tal\ que\ \dfrac{L}{2}<f(x)<\dfrac{3L}{2}$

12. Usando la definición de límite demostrar: **GRUPO 6 (a,b,c) GRUPO 7 (d,e,f)**

$a)\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{3x}{1-x}\right) = -\infty$ $\qquad d)\lim_{x\to 1} = \dfrac{[\![x-\frac{1}{5}]\!]+1}{|5x-1|} = \dfrac{1}{4}$

$b)\lim_{x\to+\infty} = \dfrac{3x+1}{x-2} = 3$ $\qquad e)\lim_{x\to-\infty} = \left(1-x^3\right) = +\infty$

$c)\lim_{x\to 3} = \dfrac{4}{(x-3)^2} = +\infty$ $\qquad f)\lim_{x\to 4^-} = \dfrac{x+1}{x^2-16} = -\infty$

13. Sean f y g funciones definidas por $f(x+1)=x^2-3 \;\; y \;\; g(x-1)=3x^2+2x, x\in\mathbb{R}$. Determine $\lim_{x\to -2}(fog)(x)$. **GRUPO 8**

14. Calcular los límites: **GRUPO 9 (a,b,c) GRUPO 10 (d,e,f)**

$$a)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{x}} \qquad d)\lim_{x\to 0}=\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}, a>0$$

$$b)\lim_{x\to 0}=\left(1+senx\right)^{\csc x} \qquad e)\lim_{x\to e}=\left[\frac{\ln x-1}{x-e}\right]$$

$$c)\lim_{x\to 0}=\left(1+\tan^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}} \qquad f)\lim_{h\to 0}=\frac{a^h-1}{h}$$

15. Evaluar los siguientes límites: **GRUPO 1 (a) GRUPO 2 (b) GRUPO 3 (c)**

$$a)\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\left(\frac{x+1}{2x^2-3x-2}-\frac{x}{2x^2+7x+3}\right).$$

$$b)\lim_{x\to 5}\left(\frac{x^2-25}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen2x}{sen3x}\right)$$

$$c)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)^{10}+(x+2)^{10}+(x+3)^{10}+...+(x+100)^{10}}{x^{10}+10^{10}}\right)$$

16. Analizar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones: **GRUPO 4**

a) Si $\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$ *existe en* $\mathbb{R}$, *entonces* $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$

b) Si $\lim_{x\to a} f(x)=L>0$, *entonces existe x cerca de a tal que* $\frac{L}{2}<f(x)<\frac{3L}{2}$

17. Calcular si existe **GRUPO 5**

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{|x-2|\left[\!\left[\frac{x}{x-1}\right]\!\right]}{x\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]-1}}$$

18. Calcular **GRUPO 6**

$$\lim_{x\to 2^-}\left[\frac{1}{x(x-2)^2}+\frac{sgn(\frac{x}{2}-1)}{x^2+\left[\!\left[\frac{x-2}{x+2}\right]\!\right]x-2}\right]$$

19. De la siguiente función $f(x)$, analizar si existe o no $\lim_{x\to 1} f(x)$ **GRUPO 8**

$$f(x)\begin{cases} x\left[\!\left[\frac{4}{x^2}\right]\!\right] \; si \; 0<x\leq 1 \\ |x^2-4x+7| \; si \; 1<x\leq 4\end{cases}$$

20. Sean A y δ constantes positivas tal que una cierta función f cumple: **GRUPO 9**

$$\frac{1}{2} - A|X| \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x+1}-1}{senx}, \forall x \ \in \langle -\delta, \delta \rangle, x \neq 0$$

Justificar que es posible aplicar el teorema del sándwich para hallar $\lim_{x \to 0} f(x)$ y determinar dicho límite.

21. Sea f una función real definida por: **GRUPO 10**

$$f(x) \begin{cases} 1, & si\ x\ es\ entero \\ -1, & si\ x\ no\ es\ entero \end{cases}$$

a) Analizar si existen o no los siguientes límites: $\lim_{x \to 2} f(x)$ y $\lim_{x \to 2.5} f(x)$.

b) ¿Para qué valores de $x_0 \in R$ existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$?

"LAS MATEMÁTICAS SON LA CREACIÓN MÁS BELLA Y PODEROSA DEL ESPÍRITU HUMANO."
STEFAN BANACH