SIGNATURA: Cálculo I **Semestre:** 2022-I

GUÍA DE PRÁCTICA N° 13

Tema: Criterio de la primera y segunda derivada, concavidad y punto de inflexión.

1. Determine los puntos críticos, intervalos donde la función es creciente y decreciente, los máximos y mínimo GRUPO 1: a, b GRUPO 2: c,d GRUPO 3: e,f GRUPO 4: g,h

   a) $f(x) = 3x^5 - 25x^2 + 60x + 10$, b) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, c) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8$

   d) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$, e) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, f) $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 16)$

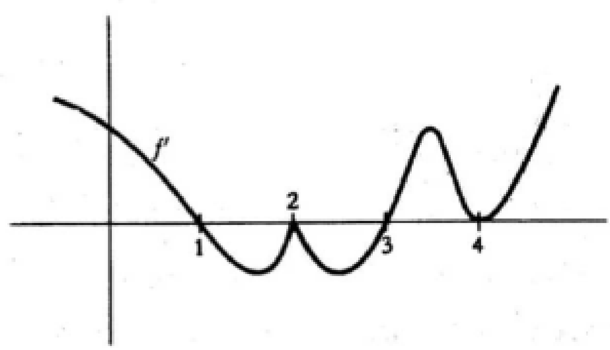
   g) $f(x) = x - Ln(1 - x)$, h) $f(x) = x - Ln(1 + x^2)$

2. Hallar los números críticos de f (s i los hay), los intervalos de crecimiento y decrecimiento, localizar los extremos relativos y globales. Hacer un bosquejo de la gráfica de cada función y marque los máximos y mínimos. GRUPO 5: a, b GRUPO 6: c,d

   a) $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$, b) $f(x) = \sin x(1 + \cos x)$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

   c) $f(x) = \sin x^3 + \cos x^3$, $x \in [0, 2\pi]$, d) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

3. La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de f. GRUPO 7: a, b



   a) Hallar todos los puntos máximo y mínimos locales de f.

   b) Dibujar la fráfica de f.

4. Encontrar los valores máximo y mínimos locales de GRUPO 8:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

usando ambos criterios de derivadas, la primera y la segunda. Qué método prefiere?.

5. Hallar los intervalos donde la gráfica de GRUPO 9

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+4}, \qquad f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

6. Hallar los puntos de inflexión y discutir la concavidad de la gráfica de GRUPO 10

$$f(x) = 3x^4 - 6x^2, \qquad f(x) = \frac{6x}{x^2+3}.$$

7. Esbozar la gráfica de la función que satisface las siguientes condiciones GRUPO 1

   a) $f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$, si $|x| < 1$,
   b) $f'(x) > 0$ si $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$, si $|x| > 2$,
   c) $f''(x) < 0$ si $-2 < x < 0$, punto de inflección $(0, 1)$.

8. Esbozar la gráfica de la función que satisface las siguientes condiciones

   a) $f(0) = f(4) = f'(0) = f'(2) = f'(4) = f'(6) = 0$ GRUPO 2
   b) $f'(x) > 0$, si $0 < x < 2$ ó $4 < x < 6$, GRUPO 2
   c) $f'(x) < 0$, si $2 < x < 4$ ó $6 < x$, GRUPO 3
   d) $f''(x) > 0$, si $0 < x < 1$ ó $3 < x < 5$, GRUPO 3
   e) $f''(x) < 0$, si $1 < x < 3$ ó $5 < x$, GRUPO 4
   a) $f(-x) = f(x)$, para todo x. GRUPO 4

9. a) Hallar a, b, c y d lales que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo en $(0, 0)$ y un máximo relativo en $(2, 2)$. GRUPO 5: a y b
   b) Hallar a, b, c lales que $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un extremo relativo en $(5, 20)$ y pase por $(2, 10)$.

10. Hallar una función polinómica $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ (donde no todos los coeficientes son nulos) que satisfaga: GRUPO 6

    a) El gráfico de f pase por el origen de coordenadas de tal manera que la tangente en dicho punto sea horizontal,
    b) tenga un extremo relativo en $x_0 = -1$,
    b) $x_0 = 1$ sea un punto crítico.

11. Demostrar que la suma de un número positivo y su recíproco es por lo menos 2. GRUPO 7

12. Sea $y = f(x)$ una función definida por GRUPO 8

$$(y + \frac{a}{x^2})(x - b) = c,$$

donde a, b y c son constantes positivas. Demostrar que esta función no tiene máximo o mínimo relativo en $\langle b, +\infty\rangle$, si $c > \frac{80}{27b}$.

13. Si $g'(x) < h'(x)$, $\forall x \in \langle a, b\rangle$, demostrar que si $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ con GRUPO 9

$$x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_2) - g(x_1) < h(x_2) - h(x_1.)$$

14. Hallar el valor de x para el cual las funciones f y g presenta un mínimo absoluto GRUPO 10

    a)
    $$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2.$$

    b)
    $$g(x) = \sqrt{(x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2}.$$

15. Sean $a_1, a_2, \cdots a_n \in \mathbb{R}$. Hallar el valor de x para el cual las funciones f y g presenta un mínimo absoluto

    a) GRUPO 1
    $$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2.$$

    b)
    $$g(x) = \sqrt{(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2}.$$

16. Si $f(x) = (x^2-1)^2 + (x^2-2)^2 + (x^2-3)^2$, hallar los valores de x para los cuales la función f presenta máximos y mínimos. GRUPO 2

17. Si $f(x) = (a_1 - x^2)^2 + (a_2 - x^2)^2 + \cdots + (a_n - x^2)^2$, siendo $a_1, a_2, \cdots, a_n$ números positivos, hallar los valores de x para los cuales la función f presenta máximos y mínimos. GRUPO 3

18. El producto de dos números positivos es 192. Qué números hacen mínima la suma del primero más tres veces el segundo. GRUPO 4

19. Hallar el rectángulo de área máxima, con los lados paralelos a los ejes coordenados, que se puede inscribir en la elipse
    $$b^2x^2 + a^2y2 = a^2b^2.$$
    GRUPO 5

20. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede ser inscrito en la región del plano XY limitado por la parábola $y^2 = 4px$, $p > 0$, y la recta $\mathcal{L} : x = a$. $a > 0$. GRUPO 6

El mundo de las matemáticas no es un lugar aburrido en el que estar.
Es un lugar extraordinario; merece la pena pasar el tiempo allí.
Marcus du Sautoy.