

Serie 4

D-CHAB
FS 2022

Aufgaben

Mathematik 2
Prof. Dr. M. Auer

Lernziele/Kompetenzen

- Sie kennen die Begriffe *Matrix*, *Komponenten*, *Nullmatrix*, *Einheitsmatrix*, *symmetrische Matrix*, *schiefsymmetrische Matrix*, *Linearkombination*, *Transposition*, *Matrix-Produkt*, *inverse Matrix* sowie ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können beurteilen, welche *Matrix-Operationen* auf bestimmte *Matrizen* anwendbar sind.
- Sie können die *Matrix-Operationen* von Hand durchführen.
- Sie können die *Matrix-Operationen* mit MATLAB/Octave durchführen.
- Sie kennen die wichtigsten Rechenregeln der *Matrix-Operationen* und können diese anwenden.
- Sie können ein *quadratisches, eindeutig lösbares* LGSL als *Matrix-Gleichung* schreiben und durch *Multiplikation* mit der *inversen Matrix* lösen.
- Sie können mit MATLAB/Octave *Matrix-Variablen* erzeugen und *Teilmatrizen* auslesen.

1. Aussagen über Matrizen [M,I]

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Mit Hilfe der <i>Matrix-Algebra</i> lassen sich praktisch alle bekannten <i>algebraischen Operationen</i> aus Alltag, Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft rechnerisch umsetzen.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Eine <i>reelle</i> 2×3 - <i>Matrix</i> ist eine Tabelle aus <i>reellen Zahlen</i> mit 2 Zeilen und 3 Spalten.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) Eine <i>reelle</i> 2×3 - <i>Matrix</i> ist eine Tabelle aus <i>reellen Zahlen</i> mit 3 Zeilen und 2 Spalten.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
d) Eine <i>reelle Zahl</i> $x \in \mathbb{R}$ kann als <i>reelle</i> 1×1 - <i>Matrix</i> aufgefasst werden.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
e) Ein <i>Vektor</i> $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ kann als <i>reelle</i> 3×1 - <i>Matrix</i> aufgefasst werden.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
f) Eine <i>reelle</i> 2×3 - <i>Matrix</i> hat 8 <i>Komponenten</i> .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

2. Linearkombinationen von Matrizen [U,I]

Betrachten Sie die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Berechnen Sie jeweils die angegebene *Linearkombination*.

- a) $C = A + B$ b) $C = -2 \cdot A$ c) $C = B/3$ d) $C = 2 \cdot B - A$

3. Linearkombinationen berechnen mit MATLAB/Octave [U,I]

Berechnen Sie die *Linearkombinationen* aus Aufgabe 2 mit MATLAB/Octave.

4. Elementare Matrix-Produkte [L,I]

Betrachten Sie die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Berechnen Sie jeweils das angegebene *Matrix-Produkt*. Welche wichtigen Rechenregeln für *Matrizen* vermuten Sie beim Betrachten ihrer Ergebnisse?

- a) $C = A \cdot B$ b) $C = B \cdot A$ c) $C = A \cdot \mathbf{1}$ d) $C = \mathbf{1} \cdot A$

5. Aussagen über Matrizen [M,II]

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Wenn A eine $2'123 \times 8'248$ -Matrix und B eine $8'248 \times 9'178$ -Matrix ist, dann ist die <i>Summe</i> $A + B$ definiert.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Wenn A eine $2'123 \times 8'248$ -Matrix und B eine $8'248 \times 9'178$ -Matrix ist, dann ist das <i>Produkt</i> $A \cdot B$ definiert.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) Wenn \mathbf{u} und \mathbf{v} zwei <i>Vektoren</i> sind, dann ist das <i>Produkt</i> $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^T$ definiert.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
d) Für zwei beliebige, <i>quadratische Matrizen</i> gilt $A \cdot B = B \cdot A$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
e) Für jede beliebige <i>Matrix</i> gilt $\left(\left((A^T)^T\right)^T\right)^T = (A^T)^T$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
f) Hat eine <i>Matrix</i> genau 11 <i>Komponenten</i> , dann handelt es sich um eine 11×1 -Matrix oder um eine 1×11 -Matrix.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

6. Matrix-Produkt und Transposition [U,II]

Betrachten Sie die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Berechnen Sie jeweils die angegebenen *Matrix-Transpositionen* und *Matrix-Produkte* und bestimmen Sie die *Symmetrie-Eigenschaften* der Ergebnisse.

- a) $C = A^T \cdot A$ c) $C = (A \cdot B)^T$ e) $C = B^T \cdot A^T$
b) $C = A \cdot A^T$ d) $C = A^T \cdot B^T$ f) $C = (B^T \cdot A^T)^T$

7. Matrix-Produkte von Matrizen unterschiedlicher Dimensionen [U,II]

Betrachten Sie die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Berechnen Sie, sofern definiert, die folgenden *Matrix-Produkte*.

- a) $A \cdot B$ c) $A \cdot \mathbf{u}$ e) B^2 g) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ i) $B^T \cdot \mathbf{v}$
 b) $B \cdot A$ d) A^2 f) $\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{u}$ h) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T$ j) $\mathbf{v}^T \cdot B$

8. Matrix-Produkte berechnen mit MATLAB/Octave [U,I]

Berechnen Sie die *Matrix-Produkte* aus Aufgabe 7 mit MATLAB/Octave.

9. Aussagen über Matrizen [M,II]

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Jede 5×8 -Matrix hat genau 13 Komponenten.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Wenn A eine 23×45 -Matrix und B eine 45×22 -Matrix ist, dann ist das Produkt $A \cdot B$ definiert.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) Wenn A eine 16×20 -Matrix und B eine 16×30 -Matrix ist, dann ist das Produkt $A^T \cdot B$ definiert.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
d) Für zwei beliebige 2×2 -Matrizen A und B mit $A \neq B$ gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
e) Für jede beliebige Matrix gilt $\left(\left((A^T)^T\right)^T\right)^T = A^T$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
f) Ist eine 2×2 -Matrix A sowohl <i>symmetrisch</i> als auch <i>schiefssymmetrisch</i> , dann gilt $A = 0$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

10. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen [L,II]

Betrachten Sie das *lineare Gleichungssystem*

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -3x + 2y = 0. \end{cases} \quad (5)$$

- a) Schreiben Sie das LGLS (5) in einem GAUSS-Schema und finden Sie die *Lösungsmenge*.
 b) Wie könnte das LGLS (5) mit Hilfe von *Matrizen* geschrieben werden? Vergleichen Sie das Ergebnis mit Ihrem GAUSS-Schema aus Teilaufgabe a).
Hinweis: Betrachten Sie das *Matrix-Produkt* einer 2×2 -Matrix mit einer 2×1 -Matrix.
 c) Lösen Sie das LGLS (5) mit Hilfe von **rref** in MATLAB/Octave.
 d) Lösen Sie das LGLS (5) mit Hilfe der *inversen Matrix* und **inv** in MATLAB/Octave.

11. Matrizen mit MATLAB/Octave erzeugen [U,II]

Erzeugen Sie jeweils eine Variable in MATLAB/Octave, welche die angegebene *Matrix* enthält.

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

12. Teilmatrizen mit MATLAB/Octave auslesen [U,II]

Betrachten Sie die *Matrix*, welche in MATLAB/Octave erzeugt wird durch folgenden Code.

`M=[1,2,3,4,5,6;7,8,9,10,11,12;13,14,15,16,17,18;19,20,21,22,23,24];`

Lesen Sie jeweils die gesuchte *Komponente* bzw. *Teilmatrix* aus M aus und speichern Sie diese in einer Variable.

a) *Komponente* M_{34}

c) 3. Spalte

e) 1. und 4. Zeile

b) 2. Zeile

d) Letzte Spalte

f) Gerade *Komponenten*

13. Aussagen über einen MATLAB/Octave-Code [M,II]

Betrachten Sie den folgenden MATLAB/Octave-Code.

```
% MATLAB/Octave initialisieren:
close all; clear all; clc; format compact; format short g;
% Berechnungen:
A=3*ones(2,3)+[diag([4,5]),zeros(2,1)];
B=A(:,[1,3])-eye(2);
C=2*ones(2,3)+diag([-1,8]);
```

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Der gesamte Code kann ohne Fehlermeldung in MATLAB/Octave ausgeführt werden.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
b) Die Variable A enthält eine <i>Diagonal-Matrix</i> .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
c) Die Variable A enthält eine <i>quadratische Matrix</i> .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
d) Die Variable B enthält eine 2×2 - <i>Matrix</i> .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
e) Die Variable B enthält eine <i>symmetrische Matrix</i> .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
f) Es gilt $B^1_1 = 6$.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>