ETH

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Serie 4

D-CHAB
FS 2022

Lösungen

Mathematik 2
Prof. Dr. M. Auer

1. Aussagen über Matrizen [M,I]

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Mit Hilfe der *Matrix-Algebra* lassen sich praktisch alle bekannten *algebraischen Operationen* aus Alltag, Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft rechnerisch umsetzen.	●	○
b) Eine *reelle* 2×3-*Matrix* ist eine Tabelle aus *reellen Zahlen* mit 2 Zeilen und 3 Spalten.	●	○
c) Eine *reelle* 2×3-*Matrix* ist eine Tabelle aus *reellen Zahlen* mit 3 Zeilen und 2 Spalten.	○	●
d) Eine *reelle Zahl* $x \in \mathbb{R}$ kann als *reelle* 1×1-*Matrix* aufgefasst werden.	●	○
e) Ein *Vektor* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ kann als *reelle* 3×1-*Matrix* aufgefasst werden.	●	○
f) Eine *reelle* 2×3-*Matrix* hat 8 *Komponenten.*	○	●

2. Linearkombinationen von Matrizen [U,I]

Wir betrachten die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Wir berechnen jeweils die angegebene *Linearkombination.*

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-3) & 3+9 & -1+3 \\ 4+(-6) & -2+6 & 8+3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 & 12 & 2 \\ -2 & 4 & 11 \end{bmatrix}}}. \tag{2}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = -2 \cdot A = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot(-1) \\ (-2)\cdot 4 & (-2)\cdot(-2) & (-2)\cdot 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -8 & 4 & -16 \end{bmatrix}}}. \tag{3}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = \frac{B}{3} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{3} & \frac{9}{3} & \frac{3}{3} \\ \frac{-6}{3} & \frac{6}{3} & \frac{3}{3} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{4}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = 2 \cdot B - A = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-3) - 1 & 2 \cdot 9 - 3 & 2 \cdot 3 - (-1) \\ 2 \cdot (-6) - 4 & 2 \cdot 6 - (-2) & 2 \cdot 3 - 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -7 & 15 & 7 \\ -16 & 14 & -2 \end{bmatrix}}}. \tag{5}$$

3. Linearkombinationen berechnen mit MATLAB/Octave [U,I]

Wir berechnen die *Linearkombinationen* aus Aufgabe 2 mit MATLAB/Octave. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
% MATLAB/Octave initialisieren:
close all; clear all; clc; format compact; format short g;
% Parameter:
A=[1,3,-1;4,-2,8]; B=[-3,9,3;-6,6,3];
% Berechnungen:
C=...
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
% Berechnungen:
C=A+B
```

b) Wir modifizieren den Code.

```
% Berechnungen:
C=-2*A
```

c) Wir modifizieren den Code.

```
% Berechnungen:
C=B/3
```

d) Wir modifizieren den Code.

```
% Berechnungen:
C=2*B-A
```

4. Elementare Matrix-Produkte [L,I]

Wir betrachten die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Wir berechnen jeweils das angegebene *Matrix-Produkt*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+8 & 8-12 \\ -3+2 & 12-3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}}}. \tag{7}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = B \cdot A = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 3 & (-1) \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 & 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 12 & -4 + 4 \\ 4 - 9 & 8 - 3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \neq A \cdot B.}} \tag{8}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A \cdot \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 0 & 0 + 4 \\ 3 + 0 & 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A.}} \tag{9}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = \mathbb{1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 0 & 4 + 0 \\ 0 + 3 & 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A.}} \tag{10}$$

Aus den Ergebnissen der Teilaufgaben a) bis d) können wir die folgenden Rechenregeln für *Matrizen* einsehen, welche tatsächlich allgemeingültig sind:

i) Die *Matrix-Multiplikation* ist nicht immer *kommutativ*, das heisst, es gibt sowohl *Matrizen* für welche gilt $A \cdot B = B \cdot A$, als auch *Matrizen*, für welche wir $A \cdot B \neq B \cdot A$ finden.

ii) Für jede beliebige $n \times n$-*Matrix* A gilt $A \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot A = A$. Die *Einheitsmatrix* spielt somit in der *Matrix-Algebra* eine vergleichbare Rolle, wie die Zahl *Eins* in der Algebra der *reellen Zahlen*.

5. Aussagen über Matrizen [M,II]

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Wenn A eine $2'123 \times 8'248$-*Matrix* und B eine $8'248 \times 9'178$-*Matrix* ist, dann ist die *Summe* $A + B$ definiert.	○	●
b) Wenn A eine $2'123 \times 8'248$-*Matrix* und B eine $8'248 \times 9'178$-*Matrix* ist, dann ist das *Produkt* $A \cdot B$ definiert.	●	○
c) Wenn $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ zwei *Vektoren* sind, dann ist das *Produkt* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^T$ definiert.	●	○
d) Für zwei beliebige, *quadratische Matrizen* gilt $A \cdot B = B \cdot A$.	○	●
e) Für jede beliebige *Matrix* gilt $\left(\left(\left(A^T\right)^T\right)^T\right)^T = \left(A^T\right)^T$.	●	○
f) Hat eine *Matrix* genau 11 *Komponenten*, dann handelt es sich um eine 11×1-*Matrix* oder um eine 1×11-*Matrix*.	●	○

6. Matrix-Produkt und Transposition [U,II]
Wir betrachten die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Für die *transponierten Matrizen* erhalten wir

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Wir berechnen jeweils die angegebenen *Matrix-Transpositionen* und *Matrix-Produkte* und bestimmen Sie die *Symmetrie-Eigenschaften* der Ergebnisse.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 + (-2)\cdot(-2) & 3\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 3 + 1\cdot(-2) & (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+4 & -3-2 \\ -3-2 & 1+1 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}}}. \tag{13}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich $\underline{\underline{\textit{symmetrisch}}}$.

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) & 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 1 \\ (-2)\cdot 3 + 1\cdot(-1) & (-2)\cdot(-2) + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+1 & -6-1 \\ -6-1 & 4+1 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \neq A^T \cdot A}}. \tag{14}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich $\underline{\underline{\textit{symmetrisch}}}$.

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = (A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + (-1)\cdot 3 & 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 4 \\ (-2)\cdot 2 + 1\cdot 3 & (-2)\cdot(-1) + 1\cdot 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6-3 & -3-4 \\ -4+3 & 2+4 \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}}}. \tag{15}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich weder *symmetrisch* noch *schiefsymmetrisch*.

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A^T \cdot B^T = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) & 3\cdot 3 + (-2)\cdot 4 \\ (-1)\cdot 2 + 1\cdot(-1) & (-1)\cdot 3 + 1\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+2 & 9-8 \\ -2-1 & -3+4 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \neq (A \cdot B)^T}}. \tag{16}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich weder *symmetrisch* noch *schiefsymmetrisch*.

e) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 2\cdot(-2)+3\cdot 1 \\ (-1)\cdot 3 + 4\cdot(-1) & (-1)\cdot(-2)+4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-3 & -4+3 \\ -3-4 & 2+4 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = (A\cdot B)^T.}} \tag{17}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich weder *symmetrisch* noch *schiefsymmetrisch*.

f) Mit Hilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe e) erhalten wir

$$\underline{\underline{C}} = \left(B^T \cdot A^T\right)^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = A\cdot B.}} \tag{18}$$

Wenn wir die in Teilaufgabe e) gefundene Rechenregel anwenden, dann folgt auch

$$\underline{\underline{C}} = \left(B^T \cdot A^T\right)^T = \left((A\cdot B)^T\right)^T = \underline{\underline{A\cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}}}. \tag{19}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich weder *symmetrisch* noch *schiefsymmetrisch*.

7. Matrix-Produkte von Matrizen unterschiedlicher Dimensionen [U, II]

Wir betrachten die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Wir berechnen, sofern definiert, die folgenden *Matrix-Produkte*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{A\cdot B}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 45 & 58 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}}}. \tag{21}$$

b) Das Produkt $B \cdot A$ ist nicht definiert!

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{A\cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -14 \\ -16 \\ -16 \end{bmatrix}}}. \tag{22}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{A^2}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -4 & -22 & -1 \\ 31 & -24 & 37 \\ -19 & -7 & -3 \end{bmatrix}}}. \tag{23}$$

e) Das *Matrix-Quadrat* B^2 ist nicht definiert!

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \end{bmatrix} = \underline{\underline{18.}} \tag{24}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die *Matrix-Klammern* weggelassen, weil wir nicht zwischen rellen 1×1-*Matrizen* und *rellen Zahlen* unterscheiden.

g) Das Produkt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ ist nicht definiert!

h) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -6 \\ -4 & -12 & 12 \end{bmatrix}}}. \tag{25}$$

i) Wir erhalten

$$\underline{\underline{B^T \cdot \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -9 \\ -8 \end{bmatrix}}}. \tag{26}$$

j) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\mathbf{v}^T \cdot B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -9 & -8 \end{bmatrix} = \left(B^T \cdot \mathbf{v}\right)^T.}} \tag{27}$$

8. Matrix-Produkte berechnen mit MATLAB/Octave [U,I]

Wir berechnen die *Matrix-Produkte* aus Aufgabe 7 mit MATLAB/Octave. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
% MATLAB/Octave initialisieren:
close all; clear all; clc; format compact; format short g;
% Parameter:
A=[4,-3,2;6,2,5;-1,-2,3]; B=[3,4;1,2;5,6]; u=[0;2;-4]; v=[1;3;-3];
% Berechnungen:
C=...
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
% Berechnungen:
C=A*B
```

b) Wir modifizieren den Code.

```
% Ausgabe:
disp('Das Matrix-Produkt B*A ist nicht definiert!');
```

c) Wir modifizieren den Code.

```
% Berechnungen:
C=A*u
```

d) Wir modifizieren den Code.

```
% Berechnungen:
C=A^2
```

e) Wir modifizieren den Code.

```
% Ausgabe:
disp('Das Matrixquadrat B^2 ist nicht definiert!');
```

f) Wir modifizieren den Code.

```
% Berechnungen:
C=v'*u
```

g) Wir modifizieren den Code.

```
% Ausgabe:
disp('Das Matrix-Produkt v*u ist nicht definiert!');
```

h) Wir modifizieren den Code.

```
% Berechnungen:
C=u*v'
```

i) Wir modifizieren den Code.

```
% Berechnungen:
C=B'*v
```

j) Wir modifizieren den Code.

```
% Berechnungen:
C=v'*B
```

9. Aussagen über Matrizen [M,II]

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jede 5×8-*Matrix* hat genau 13 *Komponenten*.	○	●
b) Wenn A eine 23×45-*Matrix* und B eine 45×22-*Matrix* ist, dann ist das *Produkt* $A \cdot B$ definiert.	●	○
c) Wenn A eine 16×20-*Matrix* und B eine 16×30-*Matrix* ist, dann ist das *Produkt* $A^T \cdot B$ definiert.	●	○
d) Für zwei beliebige 2×2-*Matrizen* A und B mit $A \neq B$ gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$.	○	●
e) Für jede beliebige *Matrix* gilt $\left(\left(\left(A^T\right)^T\right)^T\right)^T = A^T$.	○	●
f) Ist eine 2×2-*Matrix* A sowohl *symmetrisch* als auch *schiefsymmetrisch*, dann gilt $A = 0$.	●	○

10. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen [L,II]
Wir betrachten das *lineare Gleichungssystem*

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 1 \\ -3x & + & 2y & = & 0. \end{array}\right. \tag{28}$$

a) Wir schreiben das LGSL (28) in einem GAUSS-*Schema* und wenden das GAUSS-*Verfahren* an. Wir erhalten

$$\begin{array}{|rr|r|} \hline 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \quad -\tfrac{3}{2}\begin{array}{|rr|r|} \hline [2] & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rr|r|} \hline [2] & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|rr|r|} \hline [2] & -1 & 1 \\ 0 & [1] & 3 \\ \hline \end{array}. \tag{29}$$

Rang und *Defekt* sind offensichtlich

$$n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{V}} - n_{\mathrm{R}} = 2 - 2 = 0. \tag{30}$$

Die Variablen x und y sind beide *Pivot-Variablen*, es gibt keine *freien Parameter* und das LGLS ist offensichtlich *eindeutig lösbar*. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 \cdot y = 3 \quad &\Rightarrow \quad y = 3 \\ 2 \cdot x - 1 \cdot y = 1 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{1+y}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned} \tag{31}$$

Die *Lösungsmenge* ist demnach

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(2;3)\}.}} \tag{32}$$

b) Um das LGLS (28) mit Hilfe einer *Matrix-Gleichung* zu schreiben, definieren wir eine 2×2-*Matrix* aus den Koeffizienten der linken Seite und eine 2×1-*Matrix* aus den Koeffizienten der rechten Seite. Wir erhalten

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Ebenso "sammeln" wir die Variablen x und y als *Komponenten* einer 2×1-*Matrix*, d.h. wir definieren

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Die linke Seite des LGLS (28) ist nun einfach die *Matrix-Multiplikation* der *Matrix* A mit der *Matrix* $\mathbf{u}$, welche durch die Gleichung mit der *Matrix* $\mathbf{b}$ der rechten Seite gleichgesetzt wird. Das LGLS (28) kann somit geschrieben werden als

$$A \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ -3x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}. \tag{35}$$

Das LGLS (28) ist also äquivalent zur *Matrix-Gleichung*

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}}} \tag{36}$$

für die unbekannte 2×1-*Matrix* $\mathbf{u}$. Die *eindeutige Lösung* von (36) ist gemäss Teilaufgabe a) gegeben durch

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

c) Wir lösen das LGLS (28) bzw. die *Matrix-Gleichung* (36) mit Hilfe von `rref` in MATLAB/Octave. Dazu implementieren wir den folgenden Code.

```
% MATLAB/Octave initialisieren:
close all; clear all; clc; format compact; format short g;
% Parameter:
A=[2,-1;-3,2]; b=[1;0];
% Berechnungen:
G=[A,b];
H=rref(G);
C=cond(A);
% Ausgabe:
disp(H);
disp(['C =',num2str(C,3)]);
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(2;3)\}.}} \tag{38}$$

d) Wir lösen das LGLS (28) bzw. die *Matrix-Gleichung* (36) mit Hilfe der *inversen Matrix* und `inv` in MATLAB/Octave. Dazu implementieren wir den folgenden Code.

```
% MATLAB/Octave initialisieren:
close all; clear all; clc; format compact; format short g;
% Parameter:
A=[2,-1;-3,2]; b=[1;0];
% Berechnungen:
Ai=inv(A);
u=Ai*b;
% Ausgabe:
disp(u);
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(2;3)\}.}} \tag{39}$$

11. Matrizen mit MATLAB/Octave erzeugen [U,II]

Wir erzeugen jeweils eine Variable in MATLAB/Octave, welche die angegebene *Matrix* enthält.

a) `A=zeros(2,3)`

b) `B=ones(2,3)`

c) `C=[1:5;6:10]`

d) `D=[1:2:9;3:3:15]`

e) `E=eye(3)`

f) `F=-2*eye(3)`

12. Teilmatrizen mit MATLAB/Octave auslesen [U, II]

Wir betrachten die *Matrix*, welche in MATLAB/Octave erzeugt wird durch folgenden Code.

```
M=[1,2,3,4,5,6;7,8,9,10,11,12;13,14,15,16,17,18;19,20,21,22,23,24];
```

Wir lesen jeweils die gesuchte *Komponente* bzw. *Teilmatrix* aus `M` aus und speichern diese in einer Variable.

a) `A=M(3,4)`

b) `B=M(2,:)`

c) `C=M(:,3)`

d) `D=M(:,end)`

e) `E=M([1,end],:)`

f) `F=M(:,2:2:end)`

13. Aussagen über einen MATLAB/Octave-Code [M, II]

Wir betrachten den folgenden MATLAB/Octave-Code.

```
% MATLAB/Octave initialisieren:
close all; clear all; clc; format compact; format short g;
% Berechnungen:
A=3*ones(2,3)+[diag([4,5]),zeros(2,1)];
B=A(:,[1,3])-eye(2);
C=2*ones(2,3)+diag([-1,8]);
```

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Der gesamte Code kann ohne Fehlermeldung in MATLAB/Octave ausgeführt werden.	○	●
b) Die Variable `A` enthält eine *Diagonal-Matrix*.	○	●
c) Die Variable `A` enthält eine *quadratische Matrix*.	○	●
d) Die Variable `B` enthält eine 2×2-*Matrix*.	●	○
e) Die Variable `B` enthält eine *symmetrische Matrix*.	●	○
f) Es gilt ${B^1}_1 = 6$.	●	○