esthi
Woche 12

Analysis I: Übungsstunde

In der Übungsstunde wird folgendes behandelt:

- Integration
  - Riemannsche Integral
  - Lineare Eigenschaften
  - Riemann Kriterium
  - Fundamentalsatz der Analysis (FdA)
  - Aufgaben
- Hinweise zum nächsten Blatt

Integration

In Analysis beschäftigen wir uns hauptsächlich mit zwei Probleme: die Tangente zu finden und das Flächeninhalt der Region unter einer Kurve zu finden. Das erste können wir machen mit *Ableitungen* und das zweite mit *Integration*, womit wir uns jetzt beschäftigen werden. Ein erster Ansatz ist ein Intervall $[a, b]$ in endlichen Teilintervalle mit Länge δx_k zu verteilen und dann $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\delta x_k$ zu betrachten, wo t_k ein Punkt in dem Teilintervall k ist (Stützstelle). Später schauen wir uns an was passiert wenn wir das Minimum oder Maximum nehmen. Wenn f stetig ist, dann werden wir $n \to \infty$ den Flächeninhalt gut approximieren können.

Wir können folgendes schreiben

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

wo $F'(x) = f(x)$, wir sehen dass integrieren und ableiten mehr oder weniger inverse Operationen sind.

Riemannsche Integral

Zuerst: nehmen wir an $[a, b]$ ist ein kompaktes Intervall und alle Funktion die wir jetzt behandeln werden sind auch definiert und beschränkt auf $[a, b]$

Definition 1 *Eine Partition von [a,b] ist eine endliche Menge Punkte*

$$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}.$$

so dass $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. *Eine Partition P' von* $[a, b]$ *ist eine Verfeinerung falls* $P \subseteq P'$ *oder* $P' \supseteq' P$.

Definition 2 δ_i *ist* $x_i - x_{i-1}$ *und* $\sum_{k=1}^{n} \delta_i = x_n - x_1 = b - a$

Definition 3 *Alle mögliche Partitionen von* $[a, b]$ *wird als* $\mathcal{P}[a, b]$ *geschrieben*

Definition 4 *Feinheit der Zerlegung ist definiert wie* $\delta(P) := max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$, *oder in anderen Wörten die Länge des grössten Subintervalls in P.*

Definition 5 *Definieren wir jetzt die Funktion* $S(f, P, t) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\delta_i$. *Dies nennt man die Riemannsche Summe von f.*

Definition 6 (Riemannsche Ober- und Untersummen) *Die Idee ist, dass wir statt einen beliebigen Punkt t_k in einem Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ nehmen, wir dass Maximum/Minimum auf der Funktion nehmen. Sei P eine Partition von $[a, b]$*

$$M_i(f) = sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$m_i(f) = inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

Damit haben wir für Unter- bzw. Obersumme

$$\underline{s}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\delta_i \text{ und } \overline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\delta_i.$$

Es gilt immer $m_i(f) \leq f(t_k) \leq M_i(f)$ und damit auch $\underline{s}(f, P) \leq S(f, P, t) \leq \overline{S}(f, P)$

Notation 7 *Die Notation P_n bedeutet, dass die Partition von $[a, b]$ in n Punkten geteilt ist.*

Lineare Eigenschaften

Satz 8 *Seien f und g auf $[a, b]$, dann $c_1 f + c_2 g$ auch auf $[a, b]$. Wir haben dan folgendes*

$$\int_a^b (c_1 f + c_2 g)dx = c_1 \int_a^b f dx + c_2 \int_a^b g dx.$$

Satz 9 *Gegeben $b \in]a, c[$ falls zwei von den drei folgenden Integrale existiert, dann existiert der andere auch*

$$\int_a^b f dx + \int_b^c f dx = \int_a^c f dx.$$

Exercise 10 *Berechne folgende Integrale nach der Definition*

- $\int x^2$
- $\int x^3$

Hinweis: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)+(2n+1)}{6}$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Definition 11 *Falls $a < b$, definieren wir $\int_a^b f dx = -\int_b^a f dx$, falls $\int_b^a f dx$ existiert und $\int_a^a f dx = 0$*

Definition 12 (Riemann Kriterium) *Folgende Aussagen sind äquivalent*

- $f : I \to \mathbb{R}$ *beschränkt, ist integrierbar*
- $\forall \epsilon > 0 \exists P \in \mathbb{P}(I)$ *mit* $\overline{S}(f, P) - \underline{s}(f, P) < \epsilon$
- $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ *so dass* $\forall P \in \mathbb{P}_d(I) \overline{S}(f, P) - \underline{s}(f, P) < \epsilon$
- $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ *so dass* $\forall P \in \mathbb{P}(I)$ *mit* $\delta(P) < \delta$ *und* $t_1, ..., t_n$ *mit* $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $|A - S(f, p, t)| < \epsilon$

Satz 13 *Um das Integral $\int_a^b f(x)dx$ zu berechnen können wir $lim_{n\to\infty} S(f, P_n, t)$ berechnen*

Satz 14 *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbrar und $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$f \pm g, \lambda f, fg, |f|, max(f, g), min(f, g), \frac{f}{g}.$$

integrierbar, letzte nur wenn g nie 0 ist.

Satz 15 *Polynome sind immer integrierbar*

Fundamentalsatz/Hauptsatz der Analysis

Satz 16 *Nehme an f ist definiert auf $[a, b]$ definiere F wie folgt*

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Es gilt dann folgendes

- *F ist beschränkt auf $[a, b]$*
- *Jeder Punkt ist stetig*
- *Die Ableitung $F'(x)$ existiert in jedem Punkt $x \in]a, b[$. Es gilt $F'(x) = f(x)$ (FdA)*

Satz 17 *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar und $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$ dann gilt auch $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$*

Corollary 18 *Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar beschränkt folgt $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$*

Satz 19 (Cauchy-Schwarz Ungleichung) *Seien f,g zwei Integrierbare Funktionen dann gilt:*

$$|\int_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

Satz 20 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $A = \int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a)$*

Satz 21 (Cauchy) *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ f stetig und g beschränkt integrierbar mit $g(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Dann gibt es $c \in [a, b]$ so dass $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx$*

Exercise 22 *Berechne die Ableitung der folgenden Funktion*

$$f(x) := \int_a^{x^3} exp(-t^2)dt.$$

$$f(x) := \int_{-2020}^{x^3} sin(\pi t^2)dt.$$

Hinweis: Verwende Kettenregel

Exercise 23 *Berechne folgende Stammfunktionen*

- $\int x^2 e^{x^3+2} dx$
- $\int x e^{5x^2-1} dx$
- $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$

Satz 24 *Für stetige ungerade Funktion so dass $f(-x) = -f(x)$ gilt*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Man könnte es sogar verallgemeinern, und sagen das Integral über ein symmetrisches Intervall ist 0.
Für stetige gerade Funktion so dass $f(-x) = f(x)$ gilt

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Satz 25 (Substitutions Regel)

$$\int f(g(x))g'(x)dx (= F(g(x))) = \int f(u)du, \; where, \; u = g(x).$$

Exercise 26 *Berechne folgende Integrale*

- $\int 18x^2 \sqrt[4]{6x^3 + 5} dx$
- $\int \frac{2t^3+1}{(t^4+2t)^3} dt$

Satz 27 (Partielle Integration) *Wir wissen folgendes*

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'.$$

Wenn wir beide Seiten integrieren kriegen wir

$$\int (f \cdot g)' dx = \int f'gdx + \int fg'dx.$$

Und es gilt

$$f \cdot g = \int f'gdx + \int fg'dx.$$

Daraus können wir folgendes machen

$$\int f'gdx = \int fg'dx - f \cdot g.$$

Corollary 28 *Was integrieren und was ableiten? Integrieren: 1 (falls arc oder Log vorkommt),* x^n, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$, ...
Ableiten: $x^n, log(x), arcsin(x), arccos(x), arctan(x), arcsinh(x), ...$
egal: $e^x, sin(x), cos(x), sinh(x), cosh(x), ...$

Exercise 29 *Berechne folgende Integrale*

- $\int xe^x dx$
- $\int x^2 e^x dx$
- $\int log(x) dx$

Hinweise zum nächsten Blatt

- 12.3 Integration nach Definition: Riemannsche Summe verwenden, wähle $t_i = \sqrt{x_i x_{i+1}}$
- 12.4 Stammfunktion: Erinnere euch an Kettenregel, Produktregel

Ableitungen

$\mathbf{F}(\mathbf{x})$	$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\mathbf{f}'(\mathbf{x})$
$\frac{x^{-a+1}}{a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a (a \neq 1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k \ln(a)} a^{kx}$	a^{kx}	$k a^{kx} \ln(a)$
$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3} x^{2/3}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2\sin(x)\cos(x)$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$
$-\ln \lvert \cos(x) \rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln \lvert \sin(x) \rvert$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c} \cdot e^{cx}$	e^{cx}	$c \cdot e^{cx}$
$x(\ln \lvert x \rvert - 1)$	$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln \lvert x \rvert - 1)$	$\log_a \lvert x \rvert$	$\frac{1}{\ln(a) x}$

Integrale

0.1 Integrale

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$	$\mathbf{F}(\mathbf{x})$
$\int f'(x)f(x)\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$	$\sqrt{\pi}$
$\int (ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int (ax^p+b)^n x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int (ax^p+b)^{-1} x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{ap}\ln\lvert ax^p+b\rvert$
$\int \frac{ax+b}{cx+d}\ \mathrm{d}x$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int \sqrt{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$
$\int \frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh}(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arcsinh}(x)$
$\int \frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$