

# CYCLE INGÉNIEUR GÉNÉRALISTE

Compléments de mathématiques

CI-SST81T5

1<sup>re</sup> ANNÉE



Nicolas BUR  
[n.bur@estia.fr](mailto:n.bur@estia.fr)

## **Notes de versions**

- v 1.0** du 2024-09-02 Version initiale
- v 1.1** du 2024-9-20 Maj de la fiche matière et suppression du chapitre sur les DL
- v 1.2** Mise en page de certains graphes du chapitre 2

## **Résumé**

Ce document est le support de cours pour le module CI-SST81T5 – Compléments de mathématiques, dont la présentation est donnée p. **xv**.

# Sommaire

<b>Table des figures</b>	vii
<b>Liste des tableaux</b>	ix
<b>Présentation</b>	xv
<b>1 Rappels fondamentaux</b>	1
1 Assertions et connecteurs . . . . .	1
1.1 Assertions . . . . .	2
1.2 Connecteurs . . . . .	2
2 Quantificateurs . . . . .	4
3 Méthodes de raisonnement . . . . .	5
3.1 Raisonnement par implication . . . . .	5
3.2 Raisonnement par contraposée . . . . .	5
3.3 Raisonnement par l'absurde . . . . .	5
3.4 Raisonnement par récurrence . . . . .	5
3.5 Raisonnement par disjonction de cas . . . . .	5
4 Ensembles de nombres . . . . .	6
4.1 Définitions . . . . .	6
4.2 Opérations sur les ensembles . . . . .	6
4.3 Ensembles usuels . . . . .	9
5 Calcul dans $\mathbb{R}$ . . . . .	12
5.1 Opérations de base . . . . .	12
5.2 Propriétés . . . . .	12
5.3 Puissances et puissances de 10 . . . . .	13
6 Réduire, ordonner, développer, factoriser . . . . .	13
6.1 Réduire . . . . .	13
6.2 Ordonner . . . . .	14
6.3 Développer . . . . .	14
6.4 Factoriser . . . . .	14
7 Binôme de Newton . . . . .	14
8 Applications . . . . .	16
9 Équations polynomiales . . . . .	18
9.1 Résolution d'équation polynomiale d'ordre un . . . . .	19
9.2 Résolution d'équation polynomiale d'ordre deux . . . . .	19
<b>2 Géométrie</b>	21
1 Vecteurs . . . . .	21
2 Repérage dans le plan et dans l'espace . . . . .	21
3 Opérations vectorielles . . . . .	23
4 Équations d'éléments du plan . . . . .	26
4.1 Droites . . . . .	26
4.2 Cercles et ellipses . . . . .	27
5 Projection . . . . .	27
<b>3 Trigonométrie</b>	29
1 Conversion radians-degrés . . . . .	29
2 Définitions, lignes ou rapports trigonométriques . . . . .	30
3 Relations entre les rapports trigonométriques . . . . .	31
4 Angles complémentaires . . . . .	32
5 Cercle trigonométrique . . . . .	32

6	Angles supplémentaires . . . . .	33
7	Angles qui diffèrent de $\pi$ . . . . .	35
8	Angles qui diffèrent de $\pi/2$ . . . . .	35
9	Angles particuliers . . . . .	35
9.1	Angle nul . . . . .	35
9.2	Angles de $\pi/6$ et $\pi/3$ . . . . .	35
9.3	Angles de $\pi/4$ . . . . .	36
9.4	Angles de $\pi/2$ . . . . .	36
9.5	Angles de $\pi$ . . . . .	36
9.6	Tableau récapitulatif . . . . .	36
10	Formulaire de trigonométrie . . . . .	37
10.1	Liens entre les rapports . . . . .	37
10.2	Parité, symétries et périodicités . . . . .	37
10.3	Additions . . . . .	38
10.4	Angle double . . . . .	38
10.5	Factorisation et linéarisation . . . . .	38
10.6	Équations trigonométriques . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>39</b>
1	Introduction . . . . .	39
2	Propriétés de base . . . . .	39
2.1	Parties réelle et imaginaire . . . . .	40
2.2	Règles de calcul . . . . .	40
2.3	Conjugué . . . . .	40
3	Module . . . . .	40
4	Argument . . . . .	41
5	Égalité de deux nombres complexes . . . . .	43
6	Exponentielle complexe . . . . .	43
6.1	Définitions . . . . .	43
6.2	Application à la recherche de formules trigonométriques . . . . .	43
7	Représentation géométrique . . . . .	45
8	Racines énièmes d'un nombre complexe . . . . .	46
9	Résolution de l'équation du deuxième degré . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Fonctions d'une variable réelle</b>	<b>49</b>
1	Définitions . . . . .	49
2	Limite et continuité . . . . .	50
2.1	Définitions . . . . .	50
2.2	Opérations sur les limites . . . . .	53
2.3	Propriétés des fonctions continues . . . . .	54
3	Compléments . . . . .	56
3.1	Continuité uniforme . . . . .	56
3.2	Extension aux fonctions à valeurs complexes . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Dérisation</b>	<b>57</b>
1	Notion d'application dérivable . . . . .	57
1.1	Définition . . . . .	57
1.2	Dérivée à gauche et à droite . . . . .	58
1.3	Dérivabilité et continuité . . . . .	58
2	Opérations sur les dérivées . . . . .	58
2.1	Somme . . . . .	58
2.2	Produit . . . . .	59
2.3	Composition . . . . .	59
2.4	Inverse, quotient . . . . .	59
2.5	Réciproque . . . . .	60
3	Dérivées d'ordres supérieurs . . . . .	60
3.1	Opérations sur les applications $C^k$ . . . . .	61
4	Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle . . . . .	61
4.1	Extremum local . . . . .	62
4.2	Théorème de Rolle . . . . .	62

4.3	Théorème des accroissements finis . . . . .	62
4.4	Dérivée et sens de variation . . . . .	63
5	Extension aux applications à valeurs complexes . . . . .	64
5.1	Généralités . . . . .	64
5.2	Ce qui reste vrai . . . . .	64
5.3	Ce qui n'est plus vrai . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>67</b>
1	Étude de fonction . . . . .	67
2	Fonctions polynomiales et rationnelles . . . . .	69
2.1	Fonctions polynomiales . . . . .	69
2.2	Fonctions rationnelles . . . . .	71
3	Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances . . . . .	75
3.1	Fonction exponentielle . . . . .	75
3.2	Fonction logarithme népérien . . . . .	77
3.3	Fonctions exponentielles et logarithmes de base quelconque . . . . .	78
3.4	Croissances comparées . . . . .	79
4	Fonctions circulaires et réciproques . . . . .	80
4.1	Fonctions circulaires directes . . . . .	80
4.2	Fonctions circulaires réciproques . . . . .	82
5	Fonctions hyperboliques et réciproques . . . . .	86
5.1	Fonctions hyperboliques directes . . . . .	86
5.2	Fonctions hyperboliques réciproques . . . . .	89
6	Fonctions échelon, Dirac, rampe et crêteau . . . . .	93
6.1	Fonction échelon . . . . .	93
6.2	Fonction Dirac . . . . .	93
6.3	Fonction rampe . . . . .	94
6.4	Fonction crêteau . . . . .	94
<b>8</b>	<b>Intégration</b>	<b>95</b>
1	Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment . . . . .	95
1.1	Fonctions en escalier . . . . .	95
1.2	Approximation des fonctions continues . . . . .	97
2	Propriétés de l'intégrale . . . . .	98
2.1	Linéarité . . . . .	98
2.2	Majorations et encadrements . . . . .	99
2.3	Relation de Chasles . . . . .	100
2.4	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	100
2.5	Somme de Riemann . . . . .	100
3	Intégrale fonction de la borne supérieure . . . . .	102
4	Extension aux applications à valeurs complexes . . . . .	104
<b>9</b>	<b>Matrices</b>	<b>105</b>
1	Systèmes linéaires . . . . .	105
1.1	Définitions . . . . .	105
1.2	Opérations sur les lignes . . . . .	106
1.3	Pivot de Gauss . . . . .	106
2	Définitions . . . . .	107
3	Opérations sur les matrices . . . . .	108
3.1	Trace . . . . .	108
3.2	Transposée . . . . .	108
3.3	Produit par un scalaire . . . . .	109
3.4	Somme de deux matrices . . . . .	109
3.5	Produit de deux matrices . . . . .	109
3.6	Extraction de ligne et de colonne . . . . .	110
3.7	Propriétés des opérations matricielles . . . . .	110
3.8	Puissance de matrice . . . . .	111
3.9	Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes . . . . .	111
3.10	Inverse d'une matrice . . . . .	112
4	Matrices remarquables . . . . .	113

4.1	Matrices symétriques et antisymétriques . . . . .	113
4.2	Matrices triangulaires . . . . .	113
4.3	Matrices diagonales . . . . .	114
<b>10</b>	<b>Déterminants</b>	<b>115</b>
1	Permutations . . . . .	115
1.1	Définition . . . . .	115
1.2	Permutations particulières . . . . .	116
1.3	Décomposition . . . . .	117
1.4	Signature . . . . .	117
2	Applications multilinéaires alternées . . . . .	118
2.1	Applications multilinéaires . . . . .	118
2.2	Application multilinéaires alternées . . . . .	118
3	Déterminants . . . . .	118
3.1	Définitions, propriétés . . . . .	119
4	Calcul pratique des déterminants . . . . .	119
4.1	Opérations sur les lignes et sur les colonnes . . . . .	119
4.2	Déterminants par blocs diagonaux . . . . .	120
4.3	Développement par rapport à une ligne ou à une colonne . . . . .	120
<b>11</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>123</b>
1	Généralités sur les espaces vectoriels . . . . .	123
1.1	Définition . . . . .	123
1.2	Sous-espaces vectoriels . . . . .	124
1.3	Sous-espace vectoriel engendré par une partie . . . . .	125
1.4	Dépendance linéaire . . . . .	125
1.5	Bases . . . . .	126
2	Dimension . . . . .	126
2.1	Dimension, base . . . . .	126
2.2	Théorème de la base incomplète . . . . .	127
2.3	Dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . .	127
2.4	Rang d'une famille de vecteurs . . . . .	128
3	Somme de sous-espaces vectoriels . . . . .	128
3.1	Somme de deux sous-espaces vectoriels . . . . .	128
3.2	Somme directe de deux sous-espace vectoriel . . . . .	128
3.3	Supplémentaires . . . . .	129
3.4	Cas de la dimension finie . . . . .	129
<b>12</b>	<b>Applications linéaires</b>	<b>131</b>
1	Définitions, exemples . . . . .	131
2	Image et noyau d'une application linéaire . . . . .	132
3	Isomorphismes . . . . .	133
4	Théorème du rang . . . . .	134
5	Projection et symétrie . . . . .	135
6	Écriture matricielle des applications linéaires . . . . .	136
6.1	Définitions . . . . .	136
6.2	Opérations sur les applications linéaires . . . . .	137
6.3	Changement de base . . . . .	138
<b>13</b>	<b>Réduction des endomorphismes</b>	<b>141</b>
1	Spectre d'un endomorphisme . . . . .	141
1.1	Définitions, exemples . . . . .	141
1.2	Caractérisation des valeurs propres . . . . .	142
1.3	Spectre et polynôme annulateur . . . . .	142
2	Matrices et endomorphismes diagonalisables . . . . .	143
2.1	Définitions . . . . .	143
2.2	Recherche du spectre . . . . .	143
3	Trigonalisation . . . . .	145
4	Applications . . . . .	145
4.1	Puissance d'une matrice . . . . .	145

<b>A Alphabet grec</b>	<b>147</b>
<b>B Puissances de dix</b>	<b>149</b>
<b>Index</b>	<b>151</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>



# Table des figures

1.1	Représentation de l'union et de l'intersection de A et de B . . . . .	7
1.2	Représentation de E\A . . . . .	8
1.3	A et B sont complémentaires dans E . . . . .	8
1.4	Représentation des lois de de Morgan . . . . .	9
1.5	Représentation des différences de deux ensembles . . . . .	10
1.6	Inclusion des ensembles de nombres . . . . .	12
1.7	Triangle de Pascal pour les premières valeurs de $n$ et de $p$ . . . . .	15
1.8	Fonction injective . . . . .	17
1.9	Fonction surjective . . . . .	17
1.10	Fonction bijective . . . . .	18
2.1	Coordonnées du point M . . . . .	22
2.2	Somme de deux vecteurs . . . . .	24
2.3	Somme vectorielle . . . . .	24
2.4	Interprétation du produit scalaire . . . . .	25
2.5	Tracé d'une ellipse . . . . .	28
2.6	Coordonnées cartésiennes et polaires . . . . .	28
3.1	Correspondance degrés-radians . . . . .	29
3.2	Construction des rapports trigonométriques . . . . .	30
3.3	Triangle rectangle . . . . .	31
3.4	Cercle trigonométrique . . . . .	33
3.5	Signes des rapports trigonométriques en fonction de l'angle . . . . .	34
3.6	Angles qui diffèrent de $\pi$ . . . . .	35
3.7	Angles qui diffèrent de $\pi/2$ . . . . .	35
4.1	Représentation d'un nombre complexe et de son conjugué . . . . .	46
4.2	Représentation de la somme de deux nombres complexes . . . . .	46
4.3	Racines cubiques de l'unité . . . . .	47
5.1	Schéma des limites possibles . . . . .	51
6.1	Illustration du théorème des accroissements finis . . . . .	63
7.1	Courbes représentatives de $\exp$ et $\ln$ . . . . .	77
7.2	Représentation des fonctions $x \mapsto x^\alpha$ pour différentes valeurs de $\alpha$ . . . . .	79
7.3	Symétries pour les fonctions cosinus et sinus . . . . .	81
7.4	Représentation des fonctions sinus et cosinus . . . . .	81
7.5	Représentation des fonctions tangente et cotangente . . . . .	82
7.6	Représentation graphique de cosinus et arc cosinus . . . . .	83
7.7	Représentation graphique de sinus et arc sinus . . . . .	84
7.8	Représentation graphique de tangente et arc tangente . . . . .	85
7.9	Représentation graphique de cotangente et arc cotangente . . . . .	86
7.10	Représentation des fonctions $\cosh$ et $\sinh$ . . . . .	87
7.11	Représentation des fonctions $\tanh$ et $\coth$ . . . . .	89
7.12	Représentation graphique de $\arg \cosh$ . . . . .	90
7.13	Représentation graphique de $\arg \sinh$ . . . . .	91
7.14	Représentation graphique de $\arg \tanh$ . . . . .	92
7.15	Représentation graphique de $\arg \coth$ . . . . .	93
7.16	Fonction de Heaviside . . . . .	93
7.17	Fonction rampe . . . . .	94

7.18 Fonction rampe . . . . .	94
8.1 subdivisions de $[a ; b]$ . . . . .	96
8.2 Approximation d'une fonction continue . . . . .	97
8.3 Représentation d'une somme de Riemann . . . . .	101
9.1 Calcul du produit matriciel $AB$ . . . . .	110

## *Liste des tableaux*

1.1	Table de vérité . . . . .	3
3.1	Définition des rapports trigonométriques . . . . .	30
3.2	Valeurs particulières des rapports trigonométriques . . . . .	37
10.1	Table d'inversion . . . . .	117
A.1	Alphabet grec . . . . .	147
B.1	Puissances de 10 dans le système international . . . . .	149

## Liste des définitions

1.1	assertion	2
1.2	connecteur	2
1.3	négation	2
1.4	conjonction	2
1.5	disjonction	2
1.6	implication	3
1.7	équivalence	3
1.8	contraposée	3
1.9	synonyme	3
1.10	prédictat et référentiel	4
1.11	quantificateur	4
1.12	ensemble	6
1.13	ensembles identiques	6
1.14	sous-ensemble	6
1.15	ensemble vide	6
1.16	réunion d'ensembles	7
1.17	intersection d'ensembles	7
1.18	complémentaire d'un ensemble	7
1.19	disjonction d'ensembles	8
1.20	différence d'ensembles	9
1.21	produits d'ensembles	9
1.22	somme et produit	12
1.23	puissance	13
1.24	puissance négative	13
1.25	réduire	13
1.26	ordonner	14
1.27	développer	14
1.28	factoriser	14
1.29	factorielle	14
1.30	coefficient binomial	14
1.31	application	16
1.32	domaine de définition	16
1.33	injectivité	17
1.34	surjectivité	17
1.35	bijectivité	17
1.36	application composée	18
1.37	équations polynomiales	18
2.1	vecteur libre	21
2.2	vecteurs colinéaires	21
2.3	repère cartésien	21
2.4	norme vectorielle	23
2.5	repère orthonormé direct	23
2.6	somme de vecteurs	23
2.7	soustraction de vecteurs	24
2.8	produit d'un vecteur par un scalaire	24
2.9	produit scalaire	25
2.10	produit vectoriel	25
2.11	cercle	27
2.12	ellipse	27
3.1	valeur d'un angle	29
3.2	rapports trigonométriques	31
3.3	angles complémentaires	32
3.4	cercle trigonométrique	32
3.5	angles supplémentaires	33
4.1	parties réelle et imaginaire	40
4.2	nombre conjugué	40
4.3	module	40
4.4	argument	41

4.5	congruence . . . . .	42
4.6	exponentielle complexe . . . . .	43
4.7	forme exponentielle . . . . .	43
4.8	linéarisation . . . . .	45
4.9	affixe . . . . .	45
4.10	éléments du plan complexe . . . . .	46
5.1	majoration, minoration... . . . . .	49
5.2	extrema . . . . .	49
5.3	parité . . . . .	50
5.4	périodicité . . . . .	50
5.5	fonction lipschitzienne . . . . .	50
5.6	voisinage . . . . .	50
5.7	limite . . . . .	50
5.8	continuité en un point . . . . .	52
5.9	continuité sur un ensemble . . . . .	52
5.10	limite à gauche et à droite . . . . .	52
5.11	continuité à gauche et à droite . . . . .	53
5.12	continuité uniforme . . . . .	56
5.13	limite complexe . . . . .	56
6.1	dérivabilité . . . . .	57
6.2	dérivabilité à gauche et à droite . . . . .	58
6.3	dérivées d'ordres supérieurs . . . . .	60
6.4	fonction de classe $C^n$ . . . . .	60
6.5	dérivabilité d'une fonction complexe . . . . .	64
7.1	fonction polynomiale . . . . .	69
7.2	racine . . . . .	69
7.3	fonction rationnelle . . . . .	71
7.4	zéro et pôle . . . . .	72
7.5	fonction exponentielle . . . . .	75
7.6	fonction logarithme népérien . . . . .	77
7.7	fonction exponentielle de base $a$ . . . . .	78
7.8	logarithme de base $a$ . . . . .	79
7.9	fonction puissance . . . . .	79
7.10	arc cosinus . . . . .	82
7.11	arc sinus . . . . .	83
7.12	arc tangente . . . . .	84
7.13	arc cotangente . . . . .	85
7.14	cosinus et sinus hyperboliques . . . . .	86
7.15	tangente hyperbolique . . . . .	88
7.16	cotangente hyperbolique . . . . .	88
7.17	argument cosinus hyperbolique . . . . .	89
7.18	argument sinus hyperbolique . . . . .	90
7.19	argument tangente hyperbolique . . . . .	91
7.20	argument cotangente hyperbolique . . . . .	92
7.21	fonction de Heaviside . . . . .	93
7.22	fonction de Dirac . . . . .	93
7.23	fonction rampe . . . . .	94
7.24	fonction créneau . . . . .	94
8.1	subdivision . . . . .	95
8.2	comparaison de subdivisions . . . . .	95
8.3	fonction en escalier . . . . .	96
8.4	intégrale . . . . .	96
8.5	intégrale . . . . .	98
8.6	continuité par morceaux . . . . .	98
8.7	intégrale . . . . .	98
8.8	Somme de Riemann . . . . .	101
8.9	intégrale fonction de la borne supérieure . . . . .	102
8.10	. . . . .	104
9.1	système linéaire . . . . .	106
9.2	systèmes linéaires équivalents . . . . .	106

9.3	opérations élémentaires . . . . .	106
9.4	système linéaire compatible, incompatible ou indéterminé . . . . .	107
9.5	matrice . . . . .	107
9.6	lignes et colonnes d'une matrice . . . . .	108
9.7	trace d'une matrice . . . . .	108
9.8	transposée d'une matrice . . . . .	108
9.9	produit d'une matrice par un scalaire . . . . .	109
9.10	somme matricielle . . . . .	109
9.11	produit matriciel . . . . .	109
9.12	noyau et image d'une matrice . . . . .	110
9.13	matrice nilpotente . . . . .	111
9.14	matrice inversible . . . . .	112
9.15	matrice symétrique ou antisymétrique . . . . .	113
9.16	matrice triangulaire . . . . .	113
9.17	matrice diagonale . . . . .	114
10.1	permutation . . . . .	115
10.2	orbite . . . . .	116
10.3	transposition . . . . .	116
10.4	cycle . . . . .	116
10.5	permutation circulaire . . . . .	116
10.6	signature . . . . .	117
10.7	application multilinéaire . . . . .	118
10.8	application multilinéaires alternées . . . . .	118
10.9	déterminant . . . . .	119
10.10	mineur, cofacteur et comatrice . . . . .	121
11.1	espace vectoriel . . . . .	123
11.2	sous-espace vectoriel . . . . .	124
11.3	sous-espace vectoriel engendré . . . . .	125
11.4	partie génératrice . . . . .	125
11.5	famille libre et famille liée . . . . .	125
11.6	base . . . . .	126
11.7	droite, plan et hyperplan . . . . .	127
11.8	rang d'une famille . . . . .	128
11.9	somme de sous-espaces vectoriels . . . . .	128
11.10	somme directe de sous-espaces vectoriels . . . . .	128
11.11	sous-espaces vectoriels supplémentaires . . . . .	129
12.1	application linéaire . . . . .	131
12.2	morphismes . . . . .	132
12.3	application nilpotente . . . . .	132
12.4	image d'une application linéaire . . . . .	132
12.5	noyau d'une application linéaire . . . . .	133
12.6	espaces vectoriels isomorphes . . . . .	134
12.7	rang d'une application linéaire . . . . .	134
12.8	projection . . . . .	135
12.9	projecteur . . . . .	135
12.10	symétrie . . . . .	136
12.11	matrice colonne . . . . .	136
12.12	matrice d'une famille . . . . .	136
12.13	matrice d'une application linéaire . . . . .	137
12.14	matrice de passage . . . . .	138
12.15	matrices équivalentes . . . . .	139
12.16	matrices semblables . . . . .	139
13.1	valeur propre, vecteur propre, espace propre . . . . .	141
13.2	spectre . . . . .	142
13.3	polynôme annulateur . . . . .	142
13.4	endomorphisme diagonalisable . . . . .	143
13.5	matrice diagonalisable . . . . .	143
13.6	polynôme caractéristique . . . . .	143
13.7	polynôme minimal . . . . .	144

## Liste des théorèmes

1.1	lois de de Morgan . . . . .	8
1.2	formule du binôme de Newton . . . . .	15
4.1	Formule de Moivre (1667-1754) . . . . .	42
4.2	Formules d'Euler (1707-1784) . . . . .	43
5.1	opérations sur les limites . . . . .	53
5.2	. . . . .	54
5.3	des valeurs intermédiaires . . . . .	54
5.4	. . . . .	55
5.5	. . . . .	55
5.6	de Heine . . . . .	56
6.1	. . . . .	58
6.2	. . . . .	58
6.3	. . . . .	59
6.4	. . . . .	59
6.5	. . . . .	59
6.6	. . . . .	60
6.7	formule de Leibniz (XVIII <sup>e</sup> ) . . . . .	60
6.8	. . . . .	62
6.9	de Rolle . . . . .	62
6.10	des accroissements finis . . . . .	62
6.11	inégalité des accroissements finis . . . . .	64
7.1	décomposition en polynômes irréductibles . . . . .	70
8.1	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	100
8.2	Changement de variables . . . . .	103
9.1	. . . . .	106
10.1	. . . . .	117
10.2	. . . . .	117
10.3	inverse d'une matrice . . . . .	121
10.4	matrice inversible . . . . .	122
11.1	caractérisation d'un sous-espace vectoriel . . . . .	124
11.2	. . . . .	126
11.3	. . . . .	127
11.4	de la base incomplète . . . . .	127
11.5	. . . . .	129
12.1	du rang . . . . .	134
12.2	. . . . .	134
13.1	. . . . .	142
13.2	. . . . .	142
13.3	. . . . .	142
13.4	. . . . .	143
13.5	. . . . .	143
13.6	. . . . .	144
13.7	de Caley-Hamilton . . . . .	144
13.8	. . . . .	145
13.9	. . . . .	145



# Présentation

**Code** CI-SST81T5

**Libellé** Compléments de mathématiques

**Cycle** Ingénieur Généraliste

**Année** 1

**Semestre** 5

**Unité d'enseignement** SST – Socle scientifique et technique

**Responsable** BUR Nicolas (n.bur@estia.fr)

**Intervenants** ANDRÉ Cyrille (c.andre@net.estia.fr), BUR Nicolas (n.bur@estia.fr) et YASUDA Ivan (ivan.yasuda@estia.fr)

**Crédits** 2

**Prérequis** Baccalauréat scientifique ou diplôme au moins équivalent

**Lieu d'enseignement** Ce module est principalement enseigné à Estia

**Langue d'enseignement** Ce module est principalement enseigné en FR

**Heures allouées**

Type	En présence (h)	À distance (h)	Type (h)
Cours	6	–	–
Travail dirigé (TD)	18	–	–
Travail pratique (TP)	–	–	–
Travail tutoré (TT)	–	–	–
Projet	–	–	–
Total	24	–	–

**Objectifs** Ce module présente les notions abordées jusqu'au lycée en ajoutant plus de formalisme mathématique, ceci afin de disposer des outils requis pour manipuler des concepts plus riches. Une part importante de l'enseignement est dédiée à la manipulation de matrices, sous différents aspects.

Ce module vise à

- renforcer les notions de bases en mathématiques
- montrer que l'abstraction mathématique permet d'utiliser ces bases dans d'autres domaines
- développer les compétences des étudiants en calcul matriciel

## Modalités d'évaluation

**Session 1** Un examen sur table évaluant les aspects théoriques et/ou pratiques.

**Session 2** Les étudiants ayant obtenu F lors de la session 1 pourront se présenter à une seconde session dont les modalités seront déterminées par le responsable de module.

## Liens aux compétences génériques de la formation<sup>1</sup>

- Compétences liées à l'individu : CI1-1 et CI5-1
- Compétence scientifique et technique : CST1-1

## Compétences spécifiques

- Être capable d'utiliser et de mettre en œuvre les éléments basiques de logique
- Être capable de réaliser des calculs élémentaires faisant intervenir des fractions et des puissances, notamment des puissances de 10
- Être capable de manipuler les sommes et les produits indicels et d'utiliser une démonstration par récurrence
- Être capable d'utiliser la trigonométrie de base
- Être capable de résoudre des équations linéaires du premier et deuxième degré
- Être capable d'utiliser et de mettre en œuvre les produits scalaire et vectoriel ainsi que la projection de vecteurs
- Être capable de faire des calculs à base de nombres complexes

1. Se reporter au Référentiel de compétences pour les définitions des compétences

- Être capable d'utiliser des fonctions affines
- Être capable de dériver des fonctions d'une variable
- Être capable d'utiliser les fonctions usuelles (polynômes, log, exp, puissances, circulaires et réciproques, hyperboliques et réciproques)
- Être capable d'intégrer des fonctions d'une variable
- Être capable de décomposer les fractions rationnelles en éléments simples
- Être capable d'utiliser les opérations élémentaires sur les matrices
- Être capable de calculer le déterminant d'une matrice carrée par différentes méthodes
- Être capable de résoudre un système d'équations linéaires en passant par son écriture matricielle
- Être capable de construire une base d'un espace vectoriel
- Être capable d'associer une application linéaire et une matrice
- Être capable de déterminer les éléments propres d'une matrice
- Être capable de calculer des puissances de matrices

**Contenu** Les thèmes abordés dans ce module sont

- logique
- trigonométrie
- équations linéaires
- calcul vectoriel
- nombres complexes
- fonctions d'une variable
- calcul matriciel et diagonalisation

## Bibliographie

- ALHAEL, Thierry, Florent ARNAL et Laurent CHANCOGNE (2011c), *Mathématiques IUT 1re année*, Paris : Dunod, ISBN : 978-2-10-055620-5, <http://univ.scholarvox.com/reader/docid/88805314>.
- AZOULAY, Élie, Jean AVIGNANT et Guy AULIAC (1996a), *Mathématiques cours et exercices résolus 1re année*, 2<sup>e</sup> éd., t. 1, Paris : Édisience international, ISBN : 2840741377.
- FERRIGNO, Sandie, Aurélie MULLER-GUEUDIN et Didier MARX (2013b), *Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur*, Tout le cours en fiches, Dunod, p. 576, ISBN : 978-2-10-057061-4, <http://univ.scholarvox.com/reader/docid/88815263>.
- KONINCK DE, Jean-Marie et Norbert LACROIX (2004a), *Introduction aux mathématiques de l'ingénieur*, Longueuil, Québec : Loze-Dion, ISBN : 978-2-921180-80-1, <http://univ.scholarvox.com/reader/docid/45006873>.
- LIRET, François et Dominique MARTINAIS (1997a), *Mathématiques pour le DEUG : Algèbre 1re année (cours et exercices avec solutions)*, Paris : Dunod, ISBN : 9782100031498.
- (1997d), *Mathématiques pour le DEUG : Analyse 1re année (cours et exercices avec solutions)*, Paris : Dunod, ISBN : 9782100031511.
- PHILIPPIN, Gérard (2014a), *Éléments de mathématiques appliquées*, Longueuil, Québec : Loze-Dion, p. 299, ISBN : 978-2-923565-59-0, <http://univ.scholarvox.com/reader/docid/88821910>.

# Chapitre 1

## Rappels fondamentaux

### Sommaire

---

1	Assertions et connecteurs . . . . .	1
1.1	Assertions . . . . .	2
1.2	Connecteurs . . . . .	2
2	Quantificateurs . . . . .	4
3	Méthodes de raisonnement . . . . .	5
3.1	Raisonnement par implication . . . . .	5
3.2	Raisonnement par contraposée . . . . .	5
3.3	Raisonnement par l'absurde . . . . .	5
3.4	Raisonnement par récurrence . . . . .	5
3.5	Raisonnement par disjonction de cas . . . . .	5
4	Ensembles de nombres . . . . .	6
4.1	Définitions . . . . .	6
4.2	Opérations sur les ensembles . . . . .	6
4.3	Ensembles usuels . . . . .	9
5	Calcul dans $\mathbb{R}$ . . . . .	12
5.1	Opérations de base . . . . .	12
5.2	Propriétés . . . . .	12
5.3	Puissances et puissances de 10 . . . . .	13
6	Réduire, ordonner, développer, factoriser . . . . .	13
6.1	Réduire . . . . .	13
6.2	Ordonner . . . . .	14
6.3	Développer . . . . .	14
6.4	Factoriser . . . . .	14
7	Binôme de Newton . . . . .	14
8	Applications . . . . .	16
9	Équations polynomiales . . . . .	18
9.1	Résolution d'équation polynomiale d'ordre un . . . . .	19
9.2	Résolution d'équation polynomiale d'ordre deux . . . . .	19

---

En complément, on pourra se référer

- aux fiches 1 à 6 (p. 2 à 25) et 31 (p. 126) de FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013 ;
- aux chapitres 1 *S'exprimer en mathématiques* p. 1 et 2 *Ensembles et applications* p. 13 de LIRET et MARTINAIS 1997a ;
- à la section 1.1 *Opérations sur les nombres réels* p. 2 de LIRET et MARTINAIS 1997b ;
- aux chapitres 1 *Logique élémentaire. Notion d'ensemble. Opérations sur les ensembles* p. 1 et 4 *Construction de  $\mathbb{R}$ . Éléments de topologie* p. 73 de AZOULAY, AVIGNANT et AULIAC 1996.

## 1 Assertions et connecteurs

## 1.1 Assertions

### Définition 1.1 : assertion

Une *assertion* est un énoncé qui ne porte pas de variable et qui peut prendre les valeurs « vrai » ou « faux ».

#### Exemple 1.1

- $3 \geq 4$  : assertion fausse.
- Toute fonction dérivable est continue : assertion vraie.
- $x \leq 0$  : ce n'est pas une assertion puisque cet énoncé dépend de la variable  $x$ .

## 1.2 Connecteurs

### Définition 1.2 : connecteur

Un *connecteur* est une opération qui associe plusieurs assertions.

### Négation

### Définition 1.3 : négation

Soit une assertion A. On définit l'assertion non A, appelée *négation* de A et notée  $\overline{A}$ , comme suit :

- $\overline{A}$  est vraie quand A est fausse;
- $\overline{A}$  est fausse quand A est vraie.

Une et une seule des assertions A et  $\overline{A}$  est vraie et l'autre est fausse (voir la table de vérité 1.1). Il s'ensuit que les assertions A et  $\overline{\overline{A}}$  sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses simultanément.

#### Exemple 1.2

La négation de l'assertion A : «  $\pi$  n'est pas un entier naturel » est l'assertion  $\overline{A}$  : «  $\pi$  est un entier naturel ». Dans ce cas, A est vraie et  $\overline{A}$  est fausse.

### Conjonction

### Définition 1.4 : conjonction

Soient deux assertions A et B. On appelle *conjonction* de A et B l'assertion « A et B » qui est vraie si A et B sont vraies simultanément et fausse dans les autres cas (voir la table de vérité 1.1).

Deux assertions sont dites *incompatibles* si leur conjonction est fausse, c'est-à-dire si l'une des ces assertions au moins est fausse.

#### Exemple 1.3

L'assertion  $(A \text{ et } \overline{A})$  est fausse : A et  $\overline{A}$  sont incompatibles. Cela correspond au principe de non contradiction : une chose est son contraire ne peuvent être vraies simultanément.

### Disjonction

### Définition 1.5 : disjonction

Soient deux assertions A et B. On appelle *disjonction* de A et B l'assertion « A ou B » qui est vraie quand au moins l'une des deux assertions est vraie et fausse dans les autres cas (voir la table de vérité 1.1).

## Implication

### Définition 1.6 : implication

Soient deux assertions A et B. L'assertion « A *implique* B », notée  $(A \Rightarrow B)$ , est vraie si A est fausse ou si A et B sont vraies simultanément (voir la table de vérité 1.1).

Si les deux propriétés sont constituées de symboles mathématiques, alors on peut les relier par le signe  $\Rightarrow$ .

#### Exemple 1.4

- Si  $x$  est un nombre réel, alors  $x^2$  est un nombre réel positif.
- $2x \leq \frac{4}{12} \Rightarrow x \leq \frac{1}{6}$ .
- Un enseignant annonce : « Si je n'ai pas le silence dans les deux minutes, alors il y aura une interrogation ». Il peut alors sans mentir donner l'évaluation, quand bien même on entendrait les mouches voler ! Plus précisément, le seul cas où le professeur mentirait est si le bruit persiste et qu'il ne sanctionne pas.

## Équivalence

### Définition 1.7 : équivalence

Soient deux assertions A et B. On dit qu'elles sont *équivalentes* si elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses (voir la table de vérité 1.1). Cela correspond à l'assertion  $((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow A))$ .

Si les deux propriétés sont constituées de symboles mathématiques, alors on peut les relier par le signe  $\Leftrightarrow$ .

TABLEAU 1.1 – Table de vérité

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	A et B	A ou B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$	$A \not\Rightarrow B$
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V	V	V	F

### Définition 1.8 : contraposée

On appelle *contraposée* d'une implication « A implique B » l'implication « non B implique non A ». La contraposée est différente de la négation (qui est ici « A et non B »).

#### Exemple 1.5

Pour montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$  pair  $\Rightarrow n$  pair, il suffit de montrer la contraposée qui est  $\forall n \in \mathbb{N}, n$  impair  $\Rightarrow n^2$  impair.

### Définition 1.9 : synonyme

Deux assertions A et B sont *synonymes* quand elles ont même table de vérité, et on note  $A \equiv B$ .

#### Exemple 1.6

D'après la table 1.1, on a ainsi que  $(A \Rightarrow B) \equiv (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$  : une implication et sa contraposée sont synonymes.

## Propriétés

### Propriété 1.1

Soient A, B et C trois assertions. Alors on a les propriétés suivantes

- $\overline{\overline{A}} \equiv A$
- $A \wedge A \equiv A$
- $A \vee A \equiv A$
- $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $(A \wedge B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- $(A \vee B) \wedge C \equiv A \vee (B \wedge C)$
- $A \Leftrightarrow B \equiv ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$  (pour montrer une équivalence, il faut montrer deux implications)
- $A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B$
- $A \Rightarrow B \equiv \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$  (pour montrer une implication, soit on suppose A vraie et on montre que B est vraie aussi, soit on suppose que la négation de B est vraie et on établit que la négation de A est vraie)
- $A \Leftrightarrow \overline{\overline{A}}$
- $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
- $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$
- $\overline{(A \wedge B)} \equiv (\overline{A} \vee \overline{B})$
- $\overline{(A \vee B)} \equiv (\overline{A} \wedge \overline{B})$
- $\overline{(A \Rightarrow B)} \equiv A \wedge \overline{B}$

## 2 Quantificateurs

### Définition 1.10 : prédicat et référentiel

Un *prédicat* est un énoncé pouvant dépendre de plusieurs variables et pouvant prendre les valeurs « vrai » ou « faux ».

Le *référentiel* E est l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les variables.

#### Exemple 1.7

- $E = \mathbb{R}, x \in [0 ; 1]$  : prédicat à une variable  $P(x)$ .
- $E = \mathbb{N}, n \leq m$  : prédicat à deux variables  $P(n, m)$ .

### Définition 1.11 : quantificateur

- Le *quantificateur universel*  $\forall$  se lit « pour tout » ou encore « quel que soit ».
- Le *quantificateur existentiel*  $\exists$  se lit « il existe (au moins un) ». De plus,  $\exists!$  se traduit par « il existe un unique ».

Pour montrer une proposition de la forme «  $\forall x \in E, P(x)$  », on démarre avec un élément quelconque de E : Soit  $x \in E$ . Alors... Donc  $P(x)$ .

Pour montrer une proposition de la forme «  $\exists x \in E, P(x)$  », il suffit d'exhiber un  $x$  qui convienne.

### Propriété 1.2

On peut permuter deux  $\forall$  (ou deux  $\exists$ ) consécutifs sans changer le sens d'une proposition

#### Exemple 1.8

- $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, a + b = b + a \equiv \forall b \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, a + b = b + a$ .
- $\exists m \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{R}, P(m, n) \equiv \exists n \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, P(m, n)$ .

**Propriété 1.3**

On ne peut pas impunément permute un  $\exists$  et un  $\forall$  sans modifier le sens d'une propriété.

**Exemple 1.9**

«  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m \geq n$  » : pour tout entier naturel  $n$ , on peut trouver un entier naturel  $m$  plus grand (il suffit par exemple de prendre  $m = 2n$ ).

Si on intervertit les quantificateurs, on a «  $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, m \geq n$  » qui affirme donc l'existence d'un entier naturel plus grand que tous les autres... Ce prédictat est en fait la négation du précédent, et on a une application du principe de non-contradiction !

**Propriété 1.4**

Soit un ensemble  $E$ , soit  $x \in E$  et soit le prédictat  $P(x)$ . Alors

- $\overline{(\forall x \in E, P(x))} \equiv \exists x \in E, \overline{P(x)}$
- $\overline{(\exists x \in E, P(x))} \equiv \forall x \in E, \overline{P(x)}$

 Voir l'exercice 1 du TD 1.

## 3 Méthodes de raisonnement

### 3.1 Raisonnement par implication

Partant d'un résultat connu comme étant vrai (typiquement, un théorème), on utilise différentes propriétés pour établir la véracité de la proposition.

La démonstration prend alors souvent la forme :  $P$  est vraie et  $P \Rightarrow Q \Rightarrow \dots \Rightarrow Z$  est vraie ; alors  $Z$  est vraie.

Si l'une des implications utilisées est fausse, cela ne permet pas d'établir que  $Z$  est vraie !

Pour montrer une équivalence, il faut généralement procéder par une double implication : on montre  $A \Rightarrow B$  puis  $B \Rightarrow A$ .



### 3.2 Raisonnement par contraposée

Pour démontrer que  $A \Rightarrow B$ , il est parfois préférable de démontrer la contraposée de cette proposition (définition 1.8 p. 3), c'est-à-dire  $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ .

### 3.3 Raisonnement par l'absurde

Pour montrer qu'une proposition  $A$  est vraie, on peut supposer que c'est sa négation  $\overline{A}$  qui est vraie. En utilisant ensuite des propriétés établies, on montre que cela entraîne nécessairement une proposition fausse ou une contradiction. Par conséquent, l'hypothèse initiale est fausse, donc sa négation est vraie, soit  $\overline{A}$  est fausse donc  $A$  est vraie.

### 3.4 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est utilisé pour démontrer des propriétés qui dépendent d'un indice (par exemple  $n$ ). Ce type de démonstration requiert une rédaction rigoureuse, faisant clairement apparaître les étapes suivantes

1. écrire la proposition  $P(n)$  que l'on cherche à démontrer,
2. vérifier la phase d'initialisation (attention à prendre correctement le premier  $n$  : par exemple si  $P(n)$  est valable pour tout entier  $n > 2$ , il faudra initialiser avec  $P(3)$ ),
3. supposer ensuite que pour un certain  $n$ ,  $P(n)$  est vraie est chercher à établir  $P(n + 1)$  (phase d'hérédité),
4. ne pas oublier de conclure

### 3.5 Raisonnement par disjonction de cas

Le raisonnement par disjonction de cas s'utilise pour démontrer une propriété  $A$  qui dépend d'un paramètre, et que la justification dépend de la valeur de celui-ci. Par exemple si le paramètre est nul, alors... Puis si le paramètre est strictement positif...

L'erreur fréquente est d'oublier d'étudier certains cas (dans l'exemple i-dessus, il n'est pas fait mention des cas où le paramètre est strictement négatif).

## 4 Ensembles de nombres

Cette section offre un rappel général sur la définition et la manipulation d'ensembles.

### 4.1 Définitions

#### Définition 1.12 : ensemble

Un *ensemble* E est une collection d'objets mathématiques présentant une ou plusieurs propriétés communes.

Un élément  $\lambda$  vérifiant ces propriétés communes *appartient* à l'ensemble E et on note  $\lambda \in E$ . Si un objet  $\lambda'$  ne vérifie pas l'une de ces propriétés, alors il n'appartient pas à l'ensemble et on note  $\lambda' \notin E$ . On note  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de E.

#### Exemple 1.10

- Ensemble des naturels pairs :  $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2p ; p \in \mathbb{N}\}$ .
- Soit  $E = \{6 ; 9\}$ . Alors  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset ; \{6\} ; \{9\} ; \{6 ; 9\}\}$ .

Un ensemble peut être déterminé de deux manières :

- soit en énumérant ses éléments

#### Exemple 1.11

L'ensemble des entiers naturels est  $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; n ; \dots\}$ .

- soit en donnant la ou les propriétés caractéristiques de ses éléments

#### Exemple 1.12

L'ensemble des nombres impairs est  $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2p + 1 ; p \in \mathbb{N}\}$ .

#### Définition 1.13 : ensembles identiques

Deux ensembles E et F sont *égaux* ou *identiques* si tout élément de l'un est un élément de l'autre, et on note  $E = F$ .

#### Définition 1.14 : sous-ensemble

On dit qu'un ensemble E est *inclus* dans un ensemble F ou que E est un *sous-ensemble* ou une *partie* de F si tout élément de E appartient à F. On note  $E \subset F$ .

#### Propriété 1.5

La relation d'inclusion est *transitive* :

soient E, F et G trois ensembles. Si  $E \subset F$  et  $F \subset G$ , alors  $E \subset G$ .

#### Définition 1.15 : ensemble vide

On appelle *ensemble vide* et on note  $\emptyset$  l'ensemble ne contenant aucun élément. Cet ensemble est inclus dans tout autre ensemble.

## 4.2 Opérations sur les ensembles

*Réunion***Définition 1.16 : réunion d'ensembles**

La *réunion* de deux ensembles A et B, schématisé à la figure 1.1(a), est un ensemble C contenant les éléments qui appartiennent à A *ou* à B. On note  $C = A \cup B$  qui se lit « C égale A union B ». Sous forme symbolique, cette définition s'écrit

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B).$$

*Intersection***Définition 1.17 : intersection d'ensembles**

L'*intersection* de deux ensembles A et B, schématisé à la figure 1.1(b), est un ensemble C contenant les éléments qui appartiennent à A *et* à B. On note  $C = A \cap B$  qui se lit « C égale A inter B ». Sous forme symbolique, cette définition s'écrit

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in B).$$

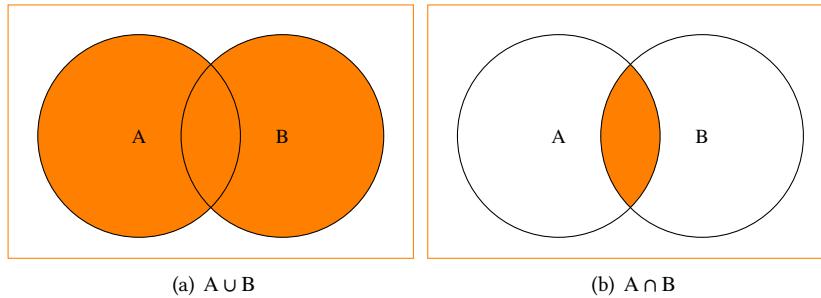


FIGURE 1.1 – Représentation de l'union et de l'intersection de A et de B

*Propriétés***Propriété 1.6**

Soient A, B et C trois ensembles. On a les propriétés suivantes :

**Commutativité** :  $A \cup B = B \cup A$

$$A \cap B = B \cap A$$

**Associativité** :  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

**Distributivité** :  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

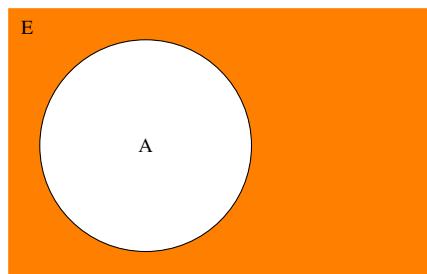
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

**Idempotence** :  $A \cup A = A$

$$A \cap A = A$$

*Complémentaire***Définition 1.18 : complémentaire d'un ensemble**

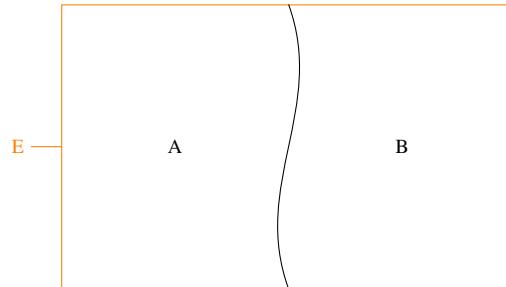
Soit un ensemble E. Pour tout sous-ensemble A de E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A constitue le *complémentaire* de A dans E et se note  $E \setminus A$  ou  $\complement A$ . Cela est schématisé à la figure 1.2.

FIGURE 1.2 – Représentation de  $E \setminus A$ **Définition 1.19 : disjonction d'ensembles**

Deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  d'un ensemble  $E$  sont *disjoints* si leur intersection est l'ensemble vide.

**Propriété 1.7**

Deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  d'un ensemble  $E$  sont *complémentaires* s'ils sont disjoints et si leur réunion coïncide avec  $E$ . Sous forme symbolique, cela s'écrit  $A \cup B = E$  et  $A \cap B = \emptyset$ . Cela est schématisé à la figure 1.3.

FIGURE 1.3 –  $A$  et  $B$  sont complémentaires dans  $E$ 

☞ Voir l'exercice 2 du TD 1.

*Lois de de Morgan et généralisation***Théorème 1.1 : lois de de Morgan**

Le complémentaire de la réunion de deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  d'un ensemble  $E$  est l'intersection des complémentaires de ces sous-ensembles

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B.$$

Le complémentaire de l'intersection de deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  d'un ensemble  $E$  est l'union des complémentaires de ces sous-ensembles

$$\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$$

Ces ensembles sont schématisés à la figure 1.4.

Soit un ensemble  $E$ , soit  $I \subset \mathbb{N}$  et soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$ .  
On définit la réunion  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  par

$$(x \in A) \Leftrightarrow (\exists i \in I, x \in A_i)$$

On définit de même l'intersection  $B = \bigcap_{i \in I} A_i$  par

$$(x \in B) \Leftrightarrow (\forall i \in I, x \in A_i)$$

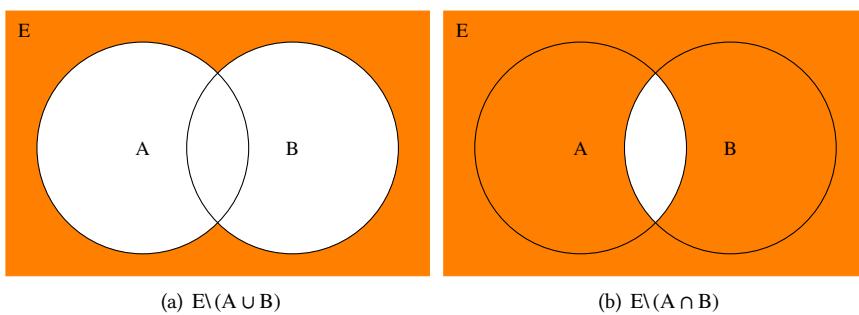


FIGURE 1.4 – Représentation des lois de de Morgan

Les lois de de Morgan s'étendent à la famille  $(A_i)_{i \in I}$  de parties de E :

$$\complement \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} \complement A_i \quad \complement \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} \complement A_i$$

### *Difference de deux ensembles*

#### **Définition 1.20 : différence d'ensembles**

On appelle *différence* des ensembles A et B l'ensemble

$$A - B = A \cap \complement B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

On appelle *différence symétrique* des ensembles A et B l'ensemble

$$A \Delta B = (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B).$$

C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent à un et un seul des ensembles A et B.

La figure 1.5 donne les différences d'ensembles que l'on peut construire à partir de deux sous-ensemble A et B d'un ensemble E.

### *Produits d'ensembles*

#### **Définition 1.21 : produits d'ensembles**

Soient deux ensembles E et F. L'ensemble des couples  $(e ; f)$  avec  $e \in E$  et  $f \in F$  forme l'*ensemble produit cartésien* des ensembles E et F et se note  $E \times F$ .

L'ordre dans lequel est donné le couple  $(e ; f)$  est important : tout couple appartenant à  $E \times F$  est constitué d'un élément de E puis d'un élément de F.

Si E et F sont des ensembles finis, on désigne par  $\text{card}(E)$  (respectivement  $\text{card}(F)$ ) le nombre d'éléments de E (respectivement de F). Alors  $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$ . En effet, le nombre de couples du la forme  $(e ; f)$  avec  $e \in E$  et  $f \in F$  est obtenu en faisant correspondre à tout élément de E tous les éléments de F (soit  $\text{card}(F)$ ), ceci devant être répété autant de fois qu'il y a d'éléments dans E (soit  $\text{card}(E)$ ).



D'une façon générale,  $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}}$  est l'ensemble des familles à  $n$  éléments  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  où chacun des  $a_i$  appartient à A, avec  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ .

### **4.3 Ensembles usuels**

Les ensembles usuels de nombres se sont construits progressivement, afin de répondre à la nécessité de résoudre certains problèmes demeurés jusque là sans solution. C'est ainsi, par exemple, que l'ensemble des nombres complexes a été défini afin de pouvoir résoudre les équations du type  $x^2 = a$ , où  $a$  est strictement négatif.

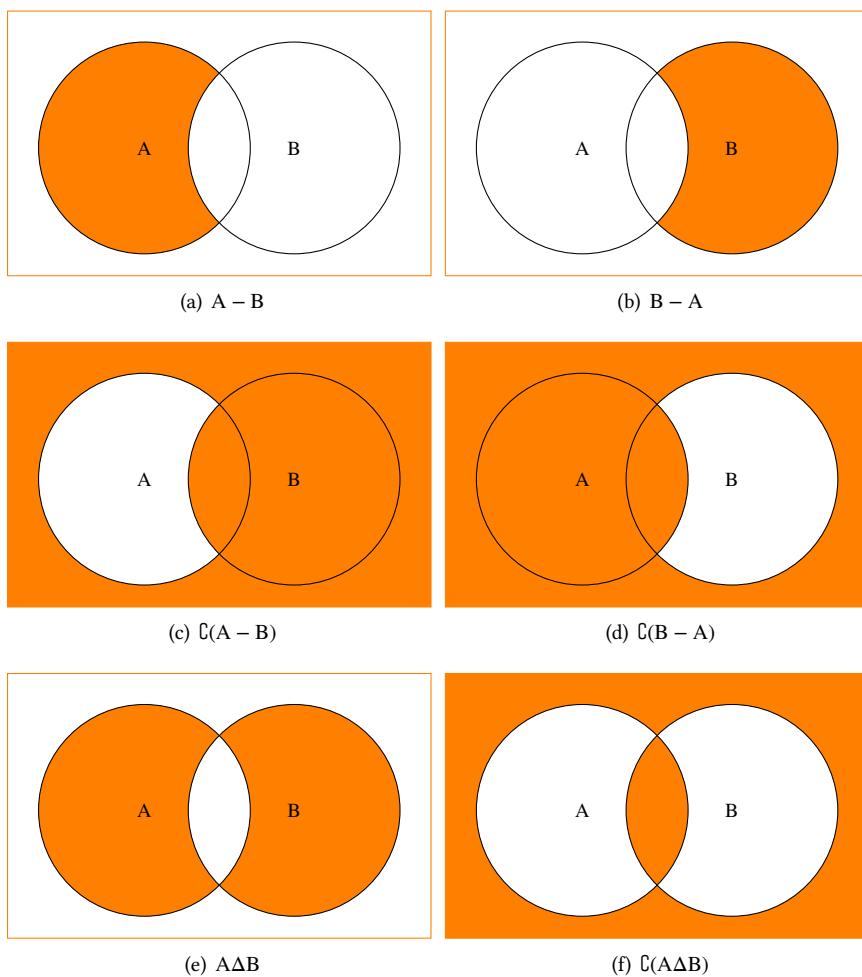


FIGURE 1.5 – Représentation des différences de deux ensembles

### Nombres naturels

Le premier ensemble de nombres correspond aux entiers naturels (positifs) :

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}. \quad (1.1)$$

Ce sont les nombres utilisés pour dénombrer les choses.

On note  $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , l'ensemble des entiers naturels privé de 0.

On remarquera que l'addition et la multiplication d'éléments de  $\mathbb{N}$  retournent des éléments de  $\mathbb{N}$ .

### Nombres relatifs

Viennent ensuite les nombres négatifs, qu'il a fallu concevoir pour résoudre les équations du type  $x + a = b$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$  et  $a > b$ . Sous ces conditions  $x$  ne peut être un entier naturel, et il a fallu faire émerger le concept de nombre négatif.

On désigne par  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des nombres entiers relatifs, formé des entiers naturels enrichi de leurs opposés :

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}. \quad (1.2)$$

On note  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , l'ensemble des entiers relatifs privé de 0;  $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ , l'ensemble des entiers relatifs positifs (correspondant aux entiers naturels);  $\mathbb{Z}^-$ , l'ensemble des entiers relatifs négatifs.

On remarquera que l'addition, la soustraction et la multiplication d'éléments de  $\mathbb{Z}$  retournent des éléments de  $\mathbb{Z}$ .

### Nombres rationnels

Puis sont venus les nombres rationnels, qui s'écrivent comme le rapport de deux entiers :  $\frac{-2}{5}, \frac{15}{7} \dots$  Ils permettent d'avoir une solution à l'équation

$$3x = 1, \quad (1.3)$$

puisqu'alors  $x = \frac{1}{3}$  n'est ni dans  $\mathbb{N}$ , ni dans  $\mathbb{Z}$ .

On note  $\mathbb{Q}$  cet ensemble contenant les entiers et les rapports d'entiers :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}^* \right\}. \quad (1.4)$$

On souligne ici le fait que  $b \in \mathbb{Z}^*$  interdit de diviser par 0.

On note  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ , l'ensemble des nombres rationnels privé de 0;  $\mathbb{Q}^+$ , l'ensemble des nombres rationnels positifs;  $\mathbb{Q}^-$ , l'ensemble des nombres rationnels négatifs.

On remarquera que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division d'éléments de  $\mathbb{Q}$  retournent des éléments de  $\mathbb{Q}$ .

### Nombres réels

Il existe cependant des nombres à virgule qui ne sont pas le rapport d'aucun nombre entier. Ils se caractérisent par le fait que l'on a une infinité de chiffres après la virgule et qu'il n'y a pas de motif répétitif (contrairement à  $22/7$ , par exemple, qui a une infinité de chiffres après la virgule mais avec la suite 142857 qui se répète). Ces nombres, comme  $\pi$  et  $\sqrt{2}$ , se regroupent dans l'ensemble des irrationnels. L'ensemble  $\mathbb{R}$  des réels est constitué de tous les nombres pouvant mesurer une longueur et de leurs opposés : les rationnels et les irrationnels.

On note  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , l'ensemble des nombres réels privé de 0;  $\mathbb{R}^+$ , l'ensemble des nombres réels positifs;  $\mathbb{R}^-$ , l'ensemble des nombres réels négatifs.

On remarquera que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division d'éléments de  $\mathbb{R}$  retournent des éléments de  $\mathbb{R}$ .

### Nombres complexes

Toutefois les nombres réels ne sont pas suffisants pour résoudre certaines équations. Ainsi, sachant que le carré d'un réel est toujours positif, l'équation

$$x^2 + 49 = 0 \quad (1.5)$$

n'admet pas de solution réelle ( $x \in \mathbb{R}$ ).

Pour résoudre ce type d'équation, l'ensemble des nombres a été élargi. Sous l'impulsion de Girolamo Cardano<sup>1</sup> ont émergé les nombres imaginaires, qui forment l'ensemble noté  $\mathbb{C}$ . Celui-ci se définit mathématiquement par

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2; i^2 = -1\}. \quad (1.6)$$

Comme l'indique cette définition, un nombre complexe  $z$  est formé par un couple de deux réels  $a$  et  $b$ , associés à l'élément  $i$  (appelé *unité imaginaire*) dont le carré vaut  $-1$ .

Dans ce nouvel ensemble  $\mathbb{C}$ , l'équation (1.5) admet alors les deux solutions  $x = \pm 7i$ , puisque l'on a bien  $x^2 = (\pm 7i)^2 = (\pm 7)^2(i)^2 = (49)(-1) = -49$ .

Le chapitre 4 (Nombres complexes) p. 39 expose plus en détail la manipulation des éléments de cet ensemble. Il est entendu que les ensembles de nombres ci-dessus sont imbriqués :

- les nombres réels sont des nombres complexes particuliers;
- les nombres rationnels sont des nombres réels particuliers;
- les entiers relatifs sont de nombres rationnels particuliers;
- les entiers naturels sont des entiers relatifs particuliers.

Cela s'écrit  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  et peut se schématiser par la figure 1.6.

$\mathbb{N}$  est donc un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}$ , lui-même sous-ensemble de  $\mathbb{Q}$ , qui est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ .



Voir l'exercice 3 du TD 1.

1. Jérôme Cardan : Pavie, 24 septembre 1501 – Rome, 21 septembre 1576

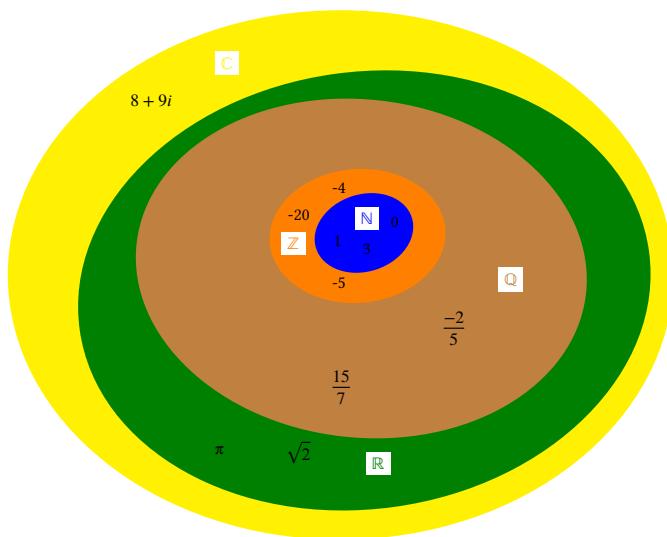


FIGURE 1.6 – Inclusion des ensembles de nombres

## 5 Calcul dans $\mathbb{R}$

### 5.1 Opérations de base

☞ Voir les exercices 4 à 6 du TD 1.

### 5.2 Propriétés

On rappelle les propriétés suivantes :

#### Propriété 1.8

Pour tous réels  $a, b, c, d$  et  $\lambda$ , on a

**Commutativité** :  $a + b = b + a$  et  $a \times b = b \times a$

**Associativité** :  $a + (b + c) = (a + b) + c$  et  $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

**Distributivité** :  $\lambda \times (a + b) = \lambda \times a + \lambda \times b$  et  $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

#### Propriété 1.9

Pour tous réels non nuls  $a, b$  et  $\lambda$ , on a  $\frac{\lambda a}{\lambda b} = \frac{a}{b}$ .

☞ Voir l'exercice 9 du TD 1.

#### Définition 1.22 : somme et produit

Le symbole  $\sum$  représente la somme d'une suite de termes, et permet d'écrire

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

avec  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $m \leq n$ . On appelle  $k$  l'*indice de la somme*. Dans cet exemple, on effectue la somme des termes  $a_k$  pour  $k$  variant de  $m$  (limite inférieure de la somme) jusqu'à  $n$  (limite supérieure de la somme).

De façon similaire, le produit des termes d'une suite est représenté par le symbole  $\prod$  :

$$\prod_{k=m}^n a_k = a_m \times a_{m+1} \times a_{m+2} \times \dots \times a_{n-1} \times a_n.$$

**Propriété 1.10**

Pour tous réels  $a$  et  $b$  on a les identités remarquables

- |                                  |   |
|----------------------------------|---|
| 1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ | 4. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$                |
| 2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ | 5. $a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$ |
| 3. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  |   |

Ces identités remarquables sont à connaître par cœur. Elles proviennent simplement de l'application de la propriété de distributivité énoncée précédemment (cf. propriété 1.8 p. 12).

### 5.3 Puissances et puissances de 10

Les puissances sont très utiles en mathématiques mais aussi en sciences appliquées puisqu'elles permettent d'énoncer des valeurs très grandes ou très petites.

**Définition 1.23 : puissance**

Soit  $a$  est un nombre réel et soit  $n$  un entier naturel. On appelle «  $a$  exposant  $n$  » ou «  $a$  à la puissance  $n$  » le nombre défini par

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ fois}} = \prod_{k=1}^n a.$$

Le nombre  $n$  est appelé *exposant* de  $a$ .

Par convention, pour tout nombre  $a$  non nul on pose  $a^0 = 1$ .

**Définition 1.24 : puissance négative**

Soit  $a$  est un nombre réel non nul et soit  $n$  un entier naturel.

L'inverse de la puissance  $n^e$  de  $a$  est noté  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ .

En particulier,  $a^{-1} = \frac{1}{a}$  : c'est l'inverse du nombre  $a$ .

**Propriété 1.11 : opérations sur les puissances**

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels et soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels. Alors

1.  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ;
2.  $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ ;
3.  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ ;
4.  $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ ;
5.  $(a^m)^n = a^{m \times n}$ .

Le tableau B.1 p. 149 donne les puissances de 10 et les préfixes du système métrique qui sont souvent utilisés en sciences physiques.

 Voir les exercices 7 et 8 du TD 1.

## 6 Réduire, ordonner, développer, factoriser

### 6.1 Réduire

**Définition 1.25 : réduire**

Réduire une expression, c'est effectuer les sommes algébriques de même nature.

 Voir l'exercice 10 du TD 1.

## 6.2 Ordonner

### Définition 1.26 : ordonner

*Ordonner* une expression c'est l'écrire dans l'ordre des puissances croissantes ou décroissantes.

☛ Voir l'exercice 11 du TD 1.

## 6.3 Développer

### Définition 1.27 : développer

*Développer* une expression, c'est l'écrire sous la forme d'une somme. Pour cela on utilise la propriété de distributivité rappelée ci-dessus (cf. propriété 1.8 p. 12).

☛ Voir l'exercice 12 du TD 1.

## 6.4 Factoriser

### Définition 1.28 : factoriser

*Factoriser* une expression, c'est l'écrire sous forme d'un produit, en mettant en exergue les facteurs communs. On utilise là encore la propriété de distributivité (cf. propriété 1.8 p. 12).

☛ Voir l'exercice 13 du TD 1.

## 7 Binôme de Newton

### Définition 1.29 : factorielle

Pour tout entier  $n$ , on appelle *factorielle* de  $n$  et on note  $n!$  le produit de  $n$  premiers entiers.

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n = (n-1)! \times n.$$



Par convention on a  $0! = 1$ .

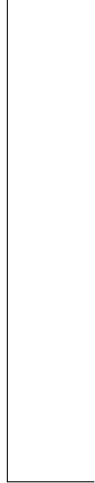
### Définition 1.30 : coefficient binomial

On appelle *coefficient binomial* et on note  $\binom{n}{p}$  ou encore  $C_n^p$  (qui se lit «  $p$  parmi  $n$  ), défini pour tout entier  $n$  et pour tout entier  $p$  inférieur ou égal à  $n$ , le nombre de parties à  $p$  éléments pris dans un ensemble à  $n$  éléments.

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

### Propriété 1.12

1.  $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq p \leq n, \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
2.  $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, 1 \leq p < n, \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

**Démonstration 1.1 : de la propriété 1.12**

Pour les petites valeurs de  $n$  et de  $p$ , le calcul des coefficients binomiaux peut s'effectuer à l'aide du triangle de Pascal présenté à la figure 1.7 ci-dessous, qui est une application de la propriété 1.12-2.

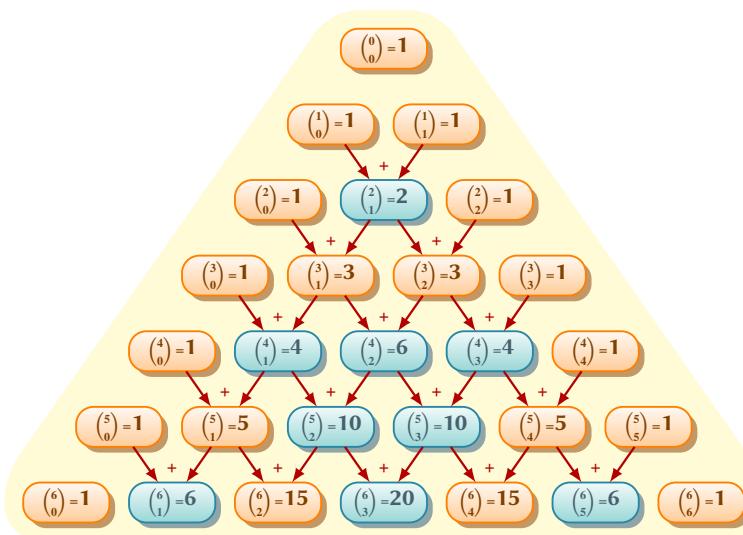


FIGURE 1.7 – Triangle de Pascal pour les premières valeurs de  $n$  et de  $p$

**Théorème 1.2 : formule du binôme de Newton**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  et soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 1$ . On a alors la *formule du binôme de Newton*

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p} = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^{n-p} b^p.$$

**Démonstration 1.2**



- ☞ Voir les exercices 15 et 16 du TD 1.

## 8 Applications

### Définition 1.31 : application

On appelle *application* d'un ensemble E vers un ensemble F une loi de correspondance  $f$  qui permet d'associer à tout élément  $x$  de E un unique élément  $y$  de F.

E est l'*ensemble de départ* de  $f$ , F est l'*espace d'arrivée*. L'élément  $y$  est l'*image* de  $x$  par  $f$  et on note

$$\begin{array}{rcl} f : & | & \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = y \end{array} \end{array}$$

On dit que  $y$  est *fonction de*  $x$ . On note  $f(E)$  le sous-ensemble de F contenant toutes les images  $f(x)$  pour  $x \in E$ :  $f(E)$  est l'image de E par  $f$ .

#### Exemple 1.13

La projection d'un cercle  $\mathcal{C}$  sur un plan  $\mathcal{P}$  est une application de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{P}$ .

Si E est une partie de  $\mathbb{R}$  par exemple et si  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  alors, par définition l'image  $f(x)$  existe pour tout  $x \in E$ . Toutefois il est fréquent que l'ensemble E ne soit pas *a priori* connu en pratique. À partir de l'expression de  $f(x)$ , on cherche alors à déterminer l'ensemble des  $x$  pour lesquels elle a réellement un sens.

### Définition 1.32 : domaine de définition

Soient deux ensembles E et F et soit une application  $f : E \rightarrow F$ .

Le sous-ensemble de E contenant tous les antécédents  $x$  pour lesquels les images  $f(x)$  ont un sens est appelé *domaine de définition* de  $f$ .

#### Exemple 1.14

Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$ . Le domaine de définition de  $f$  est donc  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , puisque pour  $x = -1$  la fraction  $f(x)$  n'est pas définie.

**Définition 1.33 : injectivité**

On dit qu'une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est *injective* (ou que  $f$  est une *injection* de  $E$  dans  $F$ ) si à deux éléments distincts de  $E$  correspondent deux images distinctes par  $f$  dans  $F$ . De façon symbolique,

$$f \text{ est injective si } \forall (x_1, x_2) \in E^2, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

$$f \text{ est injective si } \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

La figure 1.8 illustre cette propriété. Le point  $y_3$  de  $F$  n'est ainsi l'image d'aucun point de  $E$  par  $f$ .

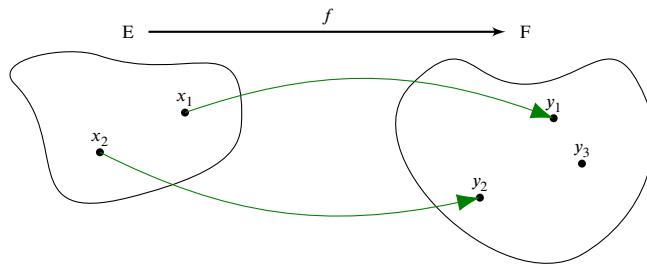


FIGURE 1.8 – Fonction injective

**Définition 1.34 : surjectivité**

On dit qu'une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est *surjective* (ou que  $f$  est une *surjection* de  $E$  sur  $F$ ) si tout élément de  $F$  est l'image par  $f$  d'au moins un élément de  $E$ . On a alors  $f(E) = F$ . De façon symbolique,

$$f \text{ est surjective si } \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$

La figure 1.9 illustre cette propriété. Le point  $y_3$  de  $F$  a deux antécédents,  $y_1$  et  $y_2$  ont le même antécédent, tandis que  $x_4$  n'est pas l'antécédent d'aucun point de  $F$  par  $f$ .

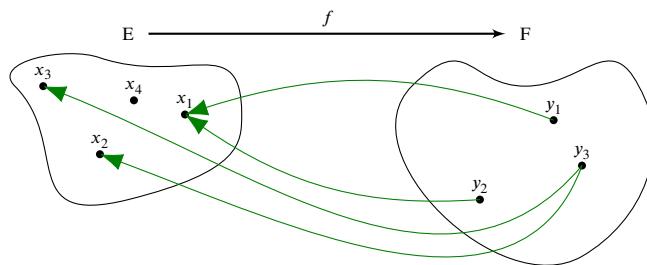


FIGURE 1.9 – Fonction surjective

**Définition 1.35 : bijectivité**

Si une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est à la fois injective et surjective, on dit que  $f$  est *bijective* (ou une *bijection* de  $E$  vers  $F$ ). Tout élément  $y$  de  $F$  possède un unique antécédent  $x$  de  $E$ . De façon symbolique :

$$f \text{ est bijective si } \forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x).$$

La figure 1.10 illustre cette propriété. Chaque point de  $E$  est associé par  $f$  à un unique point de  $F$  et réciproquement.

Si  $f$  est une bijection de  $E$  vers  $F$ , il existe une application inverse  $f^{-1}$  de  $F$  sur  $E$ , puisqu'à tout élément  $y$  de  $F$  on sait associer un unique élément  $x$  bien déterminé de  $E$ .

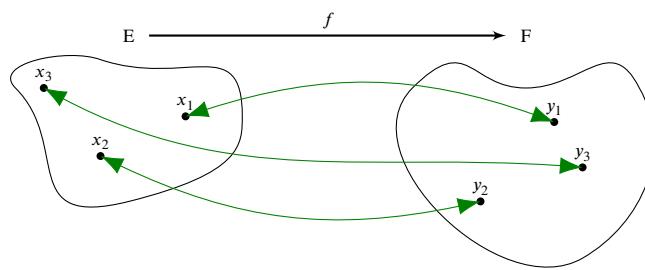


FIGURE 1.10 – Fonction bijective

$f^{-1}$  est l'*application inverse ou réciproque* de  $f$ . Elle se caractérise par

$$\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$



Si  $f$  est une injection de  $E$  dans  $F$ , elle est une bijection de  $E$  dans  $f(E)$  (sous-ensemble de  $F$ ). Elle admet alors une application inverse  $f^{-1}$  mais qui n'est définie que sur  $f(E)$ .

💡 Voir l'exercice 17 du TD 1.

#### Définition 1.36 : application composée

Soient trois ensembles  $E$ ,  $F$  et  $G$  et soient deux applications  $f : E \rightarrow F$  telle que  $x \mapsto y = f(x)$  et  $g : F \rightarrow G$  telle que  $y \mapsto z = g(y)$ . On appelle *application composée* de  $f$  par  $g$  et on note  $g \circ f$  (lire «  $g$  rond  $f$  »)

$$g \circ f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & g(f(x)) = g(y) = z \end{array}$$

#### Propriété 1.13

1. La composée de deux surjections est une surjection.
2. La composée de deux injections est une injection.
3. La composée de deux bijections est une bijection.

#### Démonstration 1.3

**1.13-1** Comme  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont des surjections, on a  $f(E) = F$  et  $g(F) = G$ . Ce qui entraîne  $(g \circ f)(E) = G$  et la composée est surjective.

**1.13-2**  $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ .

**1.13-3** Comme une application bijective est à la fois une injection et une surjection, les deux résultats précédents permettent d'établir que si  $f$  et  $g$  sont des bijections, alors  $g \circ f$  est surjective et injective, donc bijective. □

💡 Voir l'exercice 18 du TD 1.

## 9 Équations polynomiales

#### Définition 1.37 : équations polynomiales

On appelle *équation polynomiale* toute équation de la forme

$$p(x) = 0, \quad (1.7)$$

où  $p$  est un polynôme. L'*ordre* de l'équation est donné par l'ordre du polynôme (voir définition 7.1 (*fonction polynomiale*) p. 69).

## 9.1 Résolution d'équation polynomiale d'ordre un

Supposons que le polynôme  $p$  de la définition 1.37 est de degré 1. Alors il existe deux réels  $a$  (non nul) et  $b$  tels que dans ce cas l'équation (1.7) s'écrit  $ax + b = 0$ .

Il vient aisément que cette équation admet pour unique solution  $x = \frac{-b}{a}$ .

## 9.2 Résolution d'équation polynomiale d'ordre deux

Supposons que le polynôme  $p$  de la définition 1.37 est de degré 2. Alors il existe trois réels  $a$  (non nul),  $b$  et  $c$  tels que dans ce cas l'équation (1.7) s'écrit  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Pour la résolution, il existe deux techniques.

1. Soit on cherche à écrire cette équation sous la forme d'une identité remarquable,
2. soit on passe par le *discriminant* de l'équation.

Pour fixer les idées, considérons un exemple.

### Exemple 1.15

Soit l'équation

$$x^2 - 4x = 5$$

Elle peut se mettre sous la forme  $ax^2 + bx + c = 0$ , avec  $a = 1$ ,  $b = -4$  et  $c = -5$ .

1. Passons par la forme canonique. En effet les deux premiers termes de l'équation font penser à l'identité remarquable  $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$ . En identifiant, on a alors  $x^2 - 4x + 4 - 4 - 5 = 0$ , soit  $(x - 2)^2 - 9 = 0$ . Ceci est à nouveau une identité remarquable  $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ , d'où il vient  $[(x - 2) - 3][(x - 2) + 3] = 0$ , soit  $(x - 5)(x + 1) = 0$ . Comme un produit est nul dès lors que l'un des termes est nul, on obtient ici deux solutions : soit  $x = -1$ , soit  $x = 5$ .
2. Utilisons le discriminant. Pour une équation d'ordre deux de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$ , le discriminant se calcule comme  $\Delta = b^2 - 4ac$ . On trouve donc ici  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36$ . Comme ce nombre est positif, on peut en prendre aisément la racine, et les solutions de l'équation sont alors  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 6}{2} = -1$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 6}{2} = 5$ .

Si le discriminant est nul, il n'y aura qu'une solution appelée alors *racine double*. Si le discriminant est négatif, l'équation n'admet pas de solution *réelle*; par contre elle admet deux racines complexes conjuguées données par  $x_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ .





## Chapitre 2

# Géométrie

### Sommaire

---

1	Vecteurs	21
2	Repérage dans le plan et dans l'espace	21
3	Opérations vectorielles	23
4	Équations d'éléments du plan	26
4.1	Droites	26
4.2	Cercles et ellipses	27
5	Projection	27

---

En complément, on pourra se référer

- aux fiches 10 et 11 p. 38 à 45 de FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013;
- au chapitre 8 *Géométrie affine* p. 155 de LIRET et MARTINAIS 1997a.

## 1 Vecteurs

### Définition 2.1 : vecteur libre

Un *vecteur libre* est défini par

- sa direction (la droite support),
- son sens (le sens de la flèche),
- sa norme (ou son module : la longueur du vecteur).

Un vecteur est dit *lié* si on définit en plus un point d'application.

### Définition 2.2 : vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont dits *colinéaires* s'ils ont même direction : si leurs droites support sont parallèles.

### Propriété 2.1

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs colinéaires.

Alors  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{u} = \lambda \vec{v}$ .

## 2 Repérage dans le plan et dans l'espace

### Définition 2.3 : repère cartésien

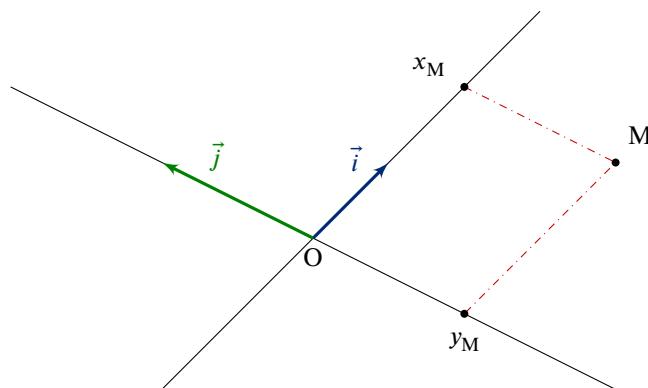
Un *repère cartésien* du plan est la donnée d'un point O appelé *origine* et de deux vecteurs non *colinéaires*  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . On note ce repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

Dans l'espace tridimensionnel, un *repère cartésien* est la donnée d'un point O appelé *origine* et de trois vecteurs non *coplanaires*  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ . On note ce repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

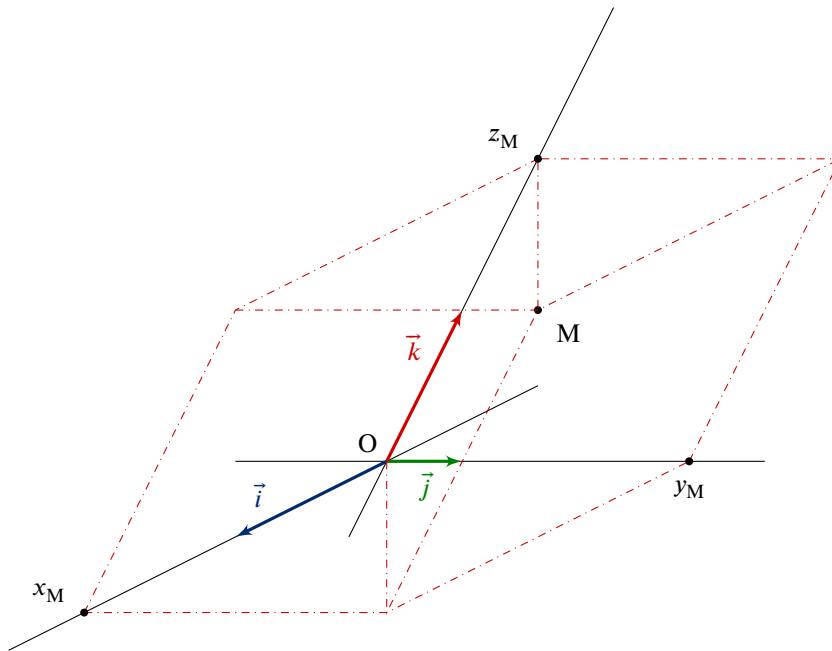
### Propriété 2.2 : coordonnées cartésiennes

Pour tout point M du plan, il existe un unique couple de réels  $(x_M ; y_M)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j}$ . Ces nombres  $x_M$  et  $y_M$  sont l'abscisse et l'ordonnée de M dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ . Ils constituent les coordonnées cartésiennes de M.

La logique est la même dans l'espace : tout point M est défini de manière unique par trois réels  $(x_M ; y_M ; z_M)$  tels que  $\overrightarrow{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}$ . La figure 2.1 illustre cela.



(a) dans le plan



(b) dans l'espace

FIGURE 2.1 – Coordonnées du point M

Un vecteur peut être construit à partir de deux points du plan ou de l'espace. Par exemple avec A  $(x_A ; y_A)$  et B  $(x_B ; y_B)$ , le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  s'exprime dans le repère repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  par  $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$ .

Dans les représentations de la figure 2.1, les vecteurs choisis sont quelconques. Les repères usuels sont formés de manière plus spécifique, facilitant la manipulation et les calculs. Pour cela il est nécessaire de définir des opérations vectorielles.

Pour la suite, on munit le plan  $\mathbb{R}^2$  du repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  et l'espace  $\mathbb{R}^3$  du repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Sauf mention contraire, les définitions suivantes sont valables aussi bien dans le plan que dans l'espace. Pour ne pas surcharger ce document, les équations seront alors écrites en considérant des éléments de l'espace : pour obtenir l'équivalent dans le plan, il suffit de supprimer la composante de la troisième dimension.

### 3 Opérations vectorielles

#### Définition 2.4 : norme vectorielle

La *norme* d'un vecteur  $\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j}$  du plan est le réel noté  $\|\vec{u}\|$  défini par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}.$$

Pour un vecteur  $\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}$  de l'espace, on a

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}.$$

Un vecteur est *unitaire* si sa norme vaut 1.

Le vecteur unitaire  $\vec{v}$  colinéaire au vecteur  $\vec{u}$  s'obtient en divisant  $\vec{u}$  par sa norme

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + z_u^2}}.$$

Avec cette définition, on peut enrichir la notion de repère.

#### Définition 2.5 : repère orthonormé direct

Le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est dit

**orthonormé** si les vecteurs sont unitaires  $\|\cdot\| \vec{i} = \|\cdot\| \vec{j} = \|\cdot\| \vec{k} = 1$ ,

**direct** si l'angle orienté entre deux vecteurs consécutifs vaut  $\pi/2 : \widehat{\vec{i}; \vec{j}} = \widehat{\vec{j}; \vec{k}} = \widehat{\vec{k}; \vec{i}} = \pi/2$ ,

**orthonormé direct** si les deux conditions précédentes sont vérifiées

#### Définition 2.6 : somme de vecteurs

La *somme* du vecteur  $\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}$  et du vecteur  $\vec{v} = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$  est le vecteur  $\vec{w}$  défini par

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (x_u + x_v) \vec{i} + (y_u + y_v) \vec{j} + (z_u + z_v) \vec{k}.$$

Soient A, B et C trois points de l'espace. On a alors la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

Deux méthodes sont possibles pour effectuer leur somme.

- On prend un point O, on mène  $\overrightarrow{OA}$  colinéaire à  $\vec{u}$ , puis  $\overrightarrow{AB}$  colinéaire à  $\vec{v}$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{OB}$  représente la somme :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \vec{u} + \vec{v}.$$

- À partir d'un point O, on trace  $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$  et  $\overrightarrow{OC} = \vec{v}$ .

B est le quatrième sommet du parallélogramme OABC. Sa diagonale  $\overrightarrow{OB}$  représente la somme

Cette addition n'est pas vraie pour les longueurs : dans le triangle OAB,  $OB < OA + AB$  ou encore  $\|\cdot\| \vec{u} + \vec{v} < \|\cdot\| \vec{u} + \|\cdot\| \vec{v}$ .

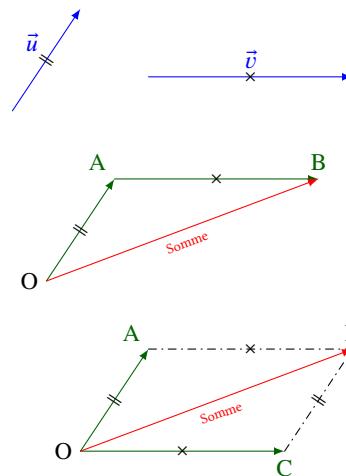


FIGURE 2.2 – Somme de deux vecteurs

L'addition est commutative :  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ .

Pour sommer plusieurs vecteurs, puisque l'addition est associative, on peut effectuer  $\vec{s}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ , puis  $\vec{s}_2 = \vec{s}_1 + \vec{u}_3$ , puis  $\vec{s}_3 = \vec{s}_2 + \vec{u}_4$ ... Mais le plus simple est de les additionner bout à bout.

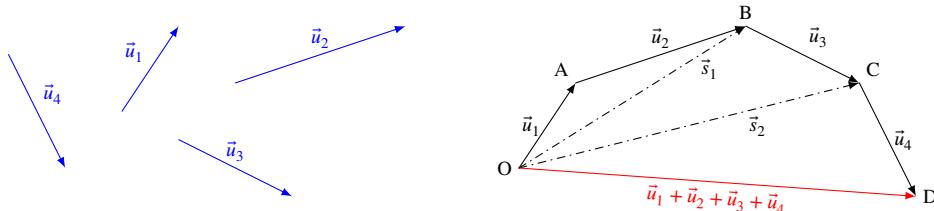


FIGURE 2.3 – Somme vectorielle

### Définition 2.7 : soustraction de vecteurs

Soustraire  $\vec{v}$  à  $\vec{u}$  revient à additionner  $\vec{u}$  et l'opposé de  $\vec{v}$  qui est  $(-\vec{v})$  (même direction mais sens contraire).

### Définition 2.8 : produit d'un vecteur par un scalaire

Le produit du vecteur  $\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}$  par le scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  est le vecteur  $\vec{v}$  colinéaire à  $\vec{u}$  et défini par  $\vec{v} = \lambda \vec{u} = \lambda x_u \vec{i} + \lambda y_u \vec{j} + \lambda z_u \vec{k}$ .

Si  $\lambda$  est positif,  $\vec{v}$  est dans le même sens que  $\vec{u}$ , sa longueur étant multipliée.

Si  $\lambda$  est négatif,  $\vec{v}$  est dans le sens contraire.

#### Exemple 2.1

$$\overrightarrow{AB} = 3 \times \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{CD} = -2 \times \vec{u}$$



Pour la division d'un vecteur par un scalaire, on procède comme pour la multiplication :

si le nombre est positif, le vecteur résultat est dans le même sens que le premier vecteur, sa longueur étant divisée.

si le nombre est négatif, le vecteur résultat est dans le sens contraire.

#### Exemple 2.2

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{u}}{4} \text{ et } \overrightarrow{CD} = \frac{\vec{u}}{-2}$$



### Définition 2.9 : produit scalaire

On appelle *produit scalaire* des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le *nombre réel (ou scalaire)*  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre les deux vecteurs.

### Propriété 2.3

- Le produit scalaire de deux vecteurs est symétrique :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .
- Le produit scalaire est distributif :  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ .
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs orthogonaux, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  car  $\cos(\pi/2) = 0$ .
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs colinéaires, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(0) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$  car  $\cos(0) = 1$ .
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \text{OA} \times \text{OH}_B = \text{OB} \times \text{OH}_A$  (voir la figure 2.4).

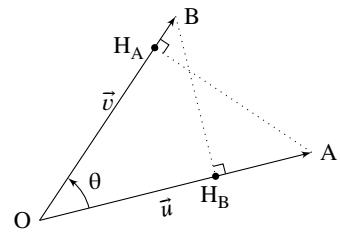


FIGURE 2.4 – Interprétation du produit scalaire

### Propriété 2.4

Soient  $\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}$  et  $\vec{v} = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$  deux vecteurs tels que  $\widehat{\vec{u}; \vec{v}} = \theta$ . Alors

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2) \\ &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v\end{aligned}$$

### Démonstration 2.1

En reprenant les notations de la figure 2.4, on a  $\text{OH}_B = \text{OB} \cos \theta = \|\vec{v}\| \cos \theta$ ;

$$\text{H}_B A = \text{OA} - \text{OB} \cos \theta = \|\vec{u}\| - \|\vec{v}\| \cos \theta;$$

$$\text{BH}_B = \text{OB} \sin \theta = \|\vec{v}\| \sin \theta.$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle  $ABH_B$ , on a  $\text{AB}^2 = \text{AH}_B^2 + \text{BH}_B^2$  ce qui donne en utilisant les égalités précédentes  $\text{AB}^2 = \text{OA}^2 - 2\text{OA} \times \text{OB} \cos \theta + \text{OB}^2$ .

En remarquant que  $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \vec{v} - \vec{u}$ , on a ainsi que  $\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2 \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \theta + \|\vec{v}\|^2$ .

En réordonnant les termes, et en utilisant la définition de la norme d'un vecteur, on a alors

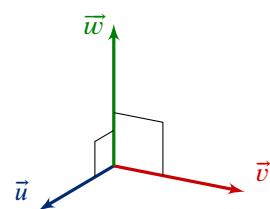
$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 + x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 - ((x_v - x_u)^2 + (y_v - y_u)^2 + (z_v - z_u)^2)) \\ &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.\end{aligned}$$

□

### Définition 2.10 : produit vectoriel

On appelle *produit vectoriel* des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace le vecteur  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  tel que

- si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires, alors  $\vec{w} = \vec{0}$
- sinon,
  - $\vec{w}$  est orthogonal à  $\vec{u}$  et à vecteur( $v$ )
  - $\vec{w}$  est tel que  $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$  est une base directe
  - $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin \theta|$ , où  $\theta$  est l'angle entre les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .



**Propriété 2.5**

Soient  $\vec{u} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j} + z_u \vec{k}$  et  $\vec{v} = x_v \vec{i} + y_v \vec{j} + z_v \vec{k}$  deux vecteurs dans un repère orthonormé directe  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} y_u z_v - z_u y_v \\ z_u x_v - x_u z_v \\ x_u y_v - y_u x_v \end{pmatrix}.$$

**4 Équations d'éléments du plan**

Dans cette section, on munit le plan  $\mathbb{R}^2$  du repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

**4.1 Droites****Propriété 2.6 : équation d'une droite passant par un point et de vecteur directeur  $\vec{u}$** 

Soit un point A de  $\mathbb{R}^2$ , de coordonnées  $(x_A; y_A)$  et soit un vecteur  $\vec{u}$  non nul de coordonnées  $(r; s)$  (c'est-à-dire que  $r$  et  $s$  ne sont pas tous les deux nuls).

La droite  $(\mathcal{D})$  passant par A et de vecteur directeur  $\vec{u}$  a pour équation

$$sx - ry + (-sx_A + ry_A) = 0$$

**Démonstration 2.2**

Soit un point M de la droite  $(\mathcal{D})$ , dont les coordonnées sont  $(x; y)$ . Alors  $\overrightarrow{AM}$  est colinéaire à  $\vec{u}$ .

$$\text{Ainsi } \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = \lambda r \\ y - y_A = \lambda s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{x - x_A}{r} & \text{en supposant que } r \neq 0 \\ y - y_A = \lambda s \end{cases}$$

D'où il vient que le point M doit vérifier l'équation  $r(y - y_A) = s(x - x_A)$ , soit en réordonnant les termes,  $rx - sy + (-sx_A + ry_A) = 0$ .

□

Cette propriété permet de déterminer l'équation d'une droite passant par deux points. En effet, si  $(\mathcal{D})$  passe par A et B, il suffit de considérer que cette droite passe par A et a comme vecteur directeur  $\overrightarrow{AB}$ .

**Propriété 2.7 : vecteur directeur d'une droite**

Soit une droite  $(\mathcal{D})$  du plan, d'équation  $ax + by + c = 0$ . Alors tout vecteur colinéaire au vecteur  $\vec{u} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $(\mathcal{D})$ .

**Propriété 2.8**

Soient deux droites  $(\mathcal{D})$  et  $(\mathcal{D}')$  d'équations respectives  $ax + by + c = 0$  et  $a'x + b'y + c' = 0$ , avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $a$  et  $b$  non nuls simultanément d'une part,  $(a', b', c') \in \mathbb{R}^3$  et  $a'$  et  $b'$  non nuls simultanément d'autre part. Alors

1. soit elles sont parallèles
2. soit elles sont sécantes en un point I de coordonnées  $(x_I; y_I)$  définies par

$$\begin{cases} ax_I + by_I + c = 0 \\ a'x_I + b'y_I + c' = 0 \end{cases}$$

Voir l'exercice 1 du TD 2.

## 4.2 Cercles et ellipses

### Définition 2.11 : cercle

On appelle cercle de centre  $A(x_A; y_A)$  et de rayon  $R$  l'ensemble des points du plan situés à la distance  $R$  de  $A$ .

L'équation canonique de ce cercle est

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2 \quad (2.1)$$



L'équation (2.1) renvoie bien les points placés sur le périmètre du cercle. Si l'on souhaite obtenir le *disque* de centre  $A$  et de rayon  $R$ , il suffit de remplacer le signe « = » par une inégalité :  $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \leq R^2$ . Si l'inégalité est stricte, le bord de cet ensemble est exclu et les points vivent exclusivement à l'intérieur du disque.

### Définition 2.12 : ellipse

On appelle ellipse l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes appelés *foyers* est constante.

Soit  $\ell$  une longueur donnée. Avec  $F_1$  et  $F_2$  les deux foyers, l'ellipse est formée de tous les points  $M$  tels que  $\overline{MF_1} + \overline{MF_2} = \ell$ .

### Propriété 2.9 : ellipse

Une ellipse possède deux axes de symétrie. Le plus long se nomme le *grand axe* et le plus court, le *petit axe*.

Le centre de l'ellipse est l'intersection de ses deux axes de symétrie.

Les foyers sont placés sur le grand axe, à une distance  $c$  de part et d'autre du centre, telle que  $c^2 = a^2 - b^2$ , où  $a$  est la longueur du demi-grand axe et  $b$  la demi-longueur du petit axe.

L'équation canonique d'une ellipse de centre  $A(x_A; y_A)$  et dont le demi-axis horizontal vaut  $a$  tandis que le demi-axis vertical vaut  $b$  s'écrit

$$\frac{(x - x_A)^2}{a^2} + \frac{(y - y_A)^2}{b^2} = 1$$

La figure 2.5 représente une ellipse dans les deux configurations  $a > b$  (ellipse horizontale) et  $a < b$  (ellipse verticale). Le cas où  $a = b$  correspond à un cercle. Sur cette figure ont aussi été représentés les sommets  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  ainsi que le centre  $C$ . La somme des longueurs  $\overline{MF_1}$  et  $\overline{MF_2}$  est égale à la constante  $\ell$  da la définition 2.12, peu importe la position de  $M$  sur l'ellipse.

## 5 Projection

Soit  $\mathcal{R}$  le repère orthonormé direct de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ . Tout élément de  $\mathbb{R}^2$  admet un jeu unique de coordonnées dans ce repère.

Toutefois, il existe plusieurs manières d'exprimer ce jeu unique.

### Propriété 2.10 : coordonnées polaires

Soit un point  $M$  du plan, de coordonnées cartésiennes  $(x; y)$ . Le couple  $(\rho; \theta)$  tel que  $\rho^2 = x^2 + y^2$

(avec  $\rho \in \mathbb{R}^+$ ) et  $\theta$  défini par  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$  constitue les coordonnées polaires de  $M$ .

L'angle  $\theta$  de la propriété 2.10 est défini comme l'angle orienté formé entre le premier vecteur du repère  $\mathcal{R}$  et le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , comme illustré sur la figure 2.6. Le chapitre 3 est consacré à la trigonométrie : les formulaires qui s'y trouvent permettent d'obtenir d'autres expressions si d'autres angles sont définis.

Voir l'exercice 3 du TD 2.

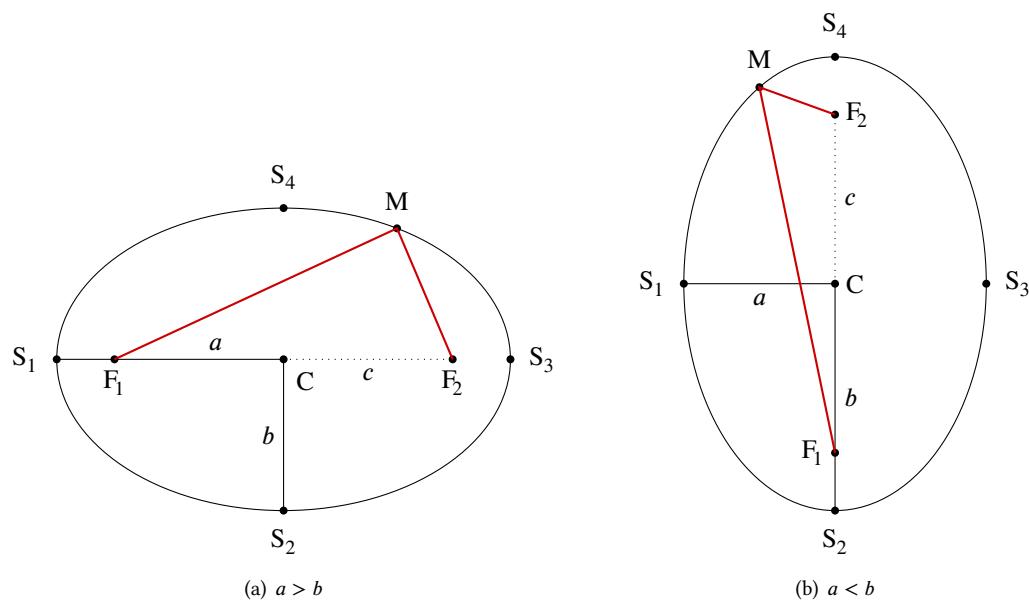


FIGURE 2.5 – Tracé d'une ellipse

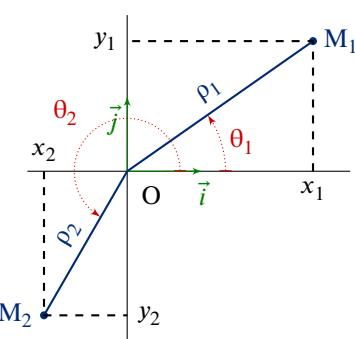


FIGURE 2.6 – Coordonnées cartésiennes et polaires

## Chapitre 3

# Trigonométrie

### Sommaire

---

1	Conversion radians-degrés . . . . .	29
2	Définitions, lignes ou rapports trigonométriques . . . . .	30
3	Relations entre les rapports trigonométriques . . . . .	31
4	Angles complémentaires . . . . .	32
5	Cercle trigonométrique . . . . .	32
6	Angles supplémentaires . . . . .	33
7	Angles qui diffèrent de $\pi$ . . . . .	35
8	Angles qui diffèrent de $\pi/2$ . . . . .	35
9	Angles particuliers . . . . .	35
9.1	Angle nul . . . . .	35
9.2	Angles de $\pi/6$ et $\pi/3$ . . . . .	35
9.3	Angles de $\pi/4$ . . . . .	36
9.4	Angles de $\pi/2$ . . . . .	36
9.5	Angles de $\pi$ . . . . .	36
9.6	Tableau récapitulatif . . . . .	36
10	Formulaire de trigonométrie . . . . .	37
10.1	Liens entre les rapports . . . . .	37
10.2	Parité, symétries et périodicités . . . . .	37
10.3	Additions . . . . .	38
10.4	Angle double . . . . .	38
10.5	Factorisation et linéarisation . . . . .	38
10.6	Équations trigonométriques . . . . .	38

---

En complément, on pourra se référer à la section 1.2 *Trigonométrie* p. 6 de ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011.

## 1 Conversion radians-degrés

### Définition 3.1 : valeur d'un angle

Soit un secteur angulaire formé de deux droites distinctes concourantes en un point O, et soit un cercle de centre O, de rayon  $r$  tracé dans le plan contenant les deux droites. Alors la *valeur de l'angle en radians* est donnée par le rapport entre la longueur de l'arc de cercle intercepté par les deux droites d'une part et le rayon du cercle d'autre part :  $\theta = \frac{L}{r}$  avec les notations de la figure 3.1.

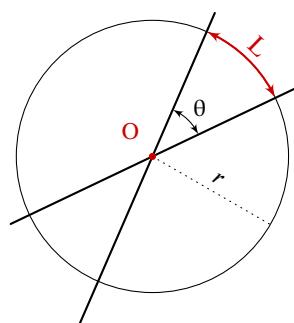


FIGURE 3.1 – Correspondance degrés-radians

Partant du cercle unité, dont la circonférence vaut  $2\pi$ , il est aisément d'établir les correspondances entre les systèmes de mesure

$$\theta_{deg} = \theta_{rad} \frac{180^\circ}{\pi} \quad (3.1)$$

$$\theta_{rad} = \theta_{deg} \frac{\pi}{180^\circ} \quad (3.2)$$

Le tableau ci-dessous donne les équivalences pour quelques angles particuliers. Ces angles sont donnés dans les intervalles  $[0 ; 2\pi[$  et  $[0^\circ ; 360^\circ[$ .

rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
deg	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$

## 2 Définitions, lignes ou rapports trigonométriques

Soit un angle  $\alpha$  défini à partir de l'intersection en un point O de deux droites ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ). À partir de cette configuration, on construit plusieurs triangles rectangles en élevant des perpendiculaires à la droite ( $Oy$ ), comme sur la figure 3.2.

Puisque les droites  $(BB')$ ,  $(CC')$  et  $(DD')$  sont toutes trois perpendiculaires à la droite  $(Oy)$ , elles sont parallèles entre elles. On peut donc appliquer le théorème de Thalès, et écrire :  $\frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC} = \frac{DD'}{OD}$ ,  $\frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'} = \frac{DD'}{OD'}$  ou encore  $\frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \frac{OD}{OD'}$ .

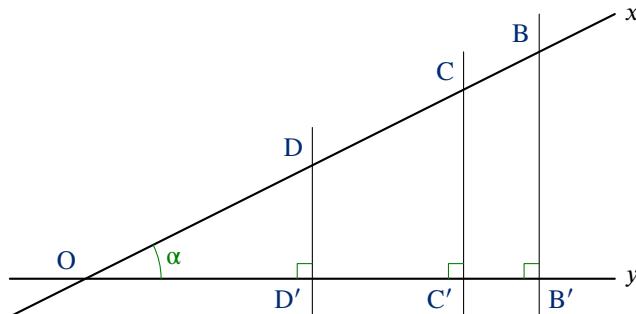


FIGURE 3.2 – Construction des rapports trigonométriques

Ces différents rapports sont désignés par des termes spécifiques indiqués dans le tableau 3.1.

TABLEAU 3.1 – Définition des rapports trigonométriques

Nom	Symbole	Valeur
Sinus $\alpha$	$\sin \alpha$	$\frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC} = \frac{DD'}{OD}$
Cosinus $\alpha$	$\cos \alpha$	$\frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{OD'}{OD}$
Tangente $\alpha$	$\tan \alpha$	$\frac{BB'}{OB'} = \frac{CC'}{OC'} = \frac{DD'}{OD'}$
Cotangente $\alpha$	$\cot \alpha$	$\frac{OB'}{BB'} = \frac{OC'}{CC'} = \frac{OD'}{DD'}$

On vient de définir ainsi les quatre *rapports trigonométriques*, ou *lignes trigonométriques* : **sinus**, **cosinus**, **tangente** et **cotangente**.

**Définition 3.2 : rapports trigonométriques**

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note  $\theta$  l'angle à l'un des autres sommets. On définit alors les quatre *rapports trigonométriques*, ou *lignes trigonométriques* de la façon suivante

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} & \cos \theta &= \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \\ \tan \theta &= \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} & \cot \theta &= \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}\end{aligned}$$

Considérons le triangle rectangle de la figure 3.3. En se plaçant sur le sommet C avec  $\gamma$  l'angle associé :

- $[AB] = c$  est le côté opposé,
- $[AC] = b$  est le côté adjacent,
- $[BC] = a$  est l'hypoténuse.

Alors d'après ce qui précède,  $\sin \gamma = \frac{c}{a}$ ,  $\cos \gamma = \frac{b}{a}$ ,  $\tan \gamma = \frac{c}{b}$ ,  $\cot \gamma = \frac{b}{c}$ .

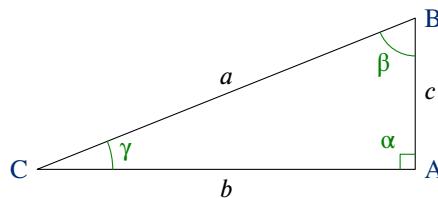


FIGURE 3.3 – Triangle rectangle

De même, en se plaçant au sommet B, d'angle associé  $\beta$ , on a

$$\begin{aligned}\sin \beta &= \frac{b}{a} \Leftrightarrow b = a \sin \beta & \cos \beta &= \frac{c}{a} \Leftrightarrow c = a \cos \beta \\ \tan \beta &= \frac{b}{c} = \cot \gamma \Leftrightarrow b = c \tan \beta = c \cot \gamma & \tan \gamma &= \frac{c}{b} = \cot \beta \Leftrightarrow c = b \tan \gamma = b \cot \beta\end{aligned}$$



Pour tout angle  $\alpha$ ,  $\sin \alpha$  et  $\cos \alpha$  sont toujours inférieurs à 1, car leurs rapports comprennent au dénominateur l'hypoténuse qui est toujours plus grande qu'un des côtés de l'angle droit figurant au numérateur :  $BC > AB$  ou  $BC > AC$ .

**Propriété 3.1**

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1.$$

### 3 Relations entre les rapports trigonométriques

Les différents rapports trigonométriques sont reliés entre eux par les égalités suivantes

**Propriété 3.2**

$$\forall \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\begin{array}{lll} 1. \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 & 3. \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha & 5. \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \\ 2. \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha & 4. \tan \alpha \times \cot \alpha = 1 & 6. \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{array}$$

**Démonstration 3.1**

**3.2-1** Sachant que dans le triangle rectangle de la figure 3.3, le théorème de Pythagore affirme que  $c^2 + b^2 = a^2$ , le calcul de  $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2$  donne  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2 + b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$ .

$$3.2-2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{c}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{c \times a}{a \times b} = \frac{c}{b} = \tan \alpha.$$

$$3.2-3 \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{a}} = \frac{b \times a}{a \times c} = \frac{b}{c} = \cot \alpha.$$

3.2-4 Il suffit de remarquer que  $\tan \alpha$  et  $\cot \alpha$  sont inverses l'une de l'autre. Par suite  $\tan \alpha \times \cot \alpha = \frac{c}{b} \times \frac{b}{c} = 1$ .

3.2-5  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ , alors  $\sin \alpha = \cos \alpha \times \tan \alpha$ , or  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ; remplaçons  $\sin \alpha$  par  $\cos \alpha \times \tan \alpha$ .

Il vient  $\tan^2 \alpha \times \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Donc  $\cos^2 \alpha(\tan^2 \alpha + 1) = 1$  Il s'ensuit  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$ .

3.2-6 En utilisant la relation précédente,  $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1 + \tan^2 \alpha - 1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ .

□

## 4 Angles complémentaires

### Définition 3.3 : angles complémentaires

Deux angles sont dits *complémentaires* lorsque leur somme égale  $\frac{\pi}{2}$ , soit  $90^\circ$ .

### Propriété 3.3

Si deux angles sont complémentaires :

- le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre et réciproquement,
- la tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre et réciproquement.

### Démonstration 3.2

ABC est rectangle en A (cf. figure 3.3).  $\beta$  et  $\gamma$  sont complémentaires car :  $\beta + \gamma = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ . Exprimons les sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de  $\beta$  et de  $\gamma$  en fonction des côtés du triangle et comparons les résultats.

$\sin \beta = \frac{b}{a}$	$\cos \beta = \frac{c}{a}$	$\tan \beta = \frac{b}{c}$	$\cot \beta = \frac{c}{b}$
$\sin \gamma = \frac{c}{a}$	$\cos \gamma = \frac{b}{a}$	$\tan \gamma = \frac{c}{b}$	$\cot \gamma = \frac{b}{c}$

On remarque que  $\sin \beta = \cos \gamma$ , que  $\cos \beta = \sin \gamma$ , que  $\tan \beta = \cot \gamma$  et que  $\cot \beta = \tan \gamma$ .

□

## 5 Cercle trigonométrique

### Définition 3.4 : cercle trigonométrique

On appelle *cercle trigonométrique* un cercle orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et de rayon 1.

Sur le cercle trigonométrique présenté à la figure 3.4,

- $x'Ox$  est l'axe des cosinus : sur  $(Ox)$ , les cosinus sont positifs et sur  $(Ox')$ , les cosinus sont négatifs
- $y'Oy$  est l'axe des sinus : sur  $(Oy)$ , les sinus sont positifs et sur  $(Oy')$ , les sinus sont négatifs
- $t'At$  est l'axe des tangentes : sur  $(At)$ , les tangentes sont positives et sur  $(At')$ , les tangentes sont négatives
- $z'Bz$  est l'axe des cotangentes : sur  $(Bz)$ , les cotangentes sont positives et sur  $(Bz')$ , les cotangentes sont négatives
- les numéros (par exemple ) donnent le numéro du quadrant

Placer un point M sur le cercle trigonométrique comme sur la figure 3.4 engendre un angle  $\alpha$ . On obtient ensuite

- $\cos \alpha = OH$
- $\sin \alpha = OK$
- $\tan \alpha = AP$
- $\cot \alpha = BR$



La position des points H, K, P et R dépend bien sûr de l'emplacement de M.

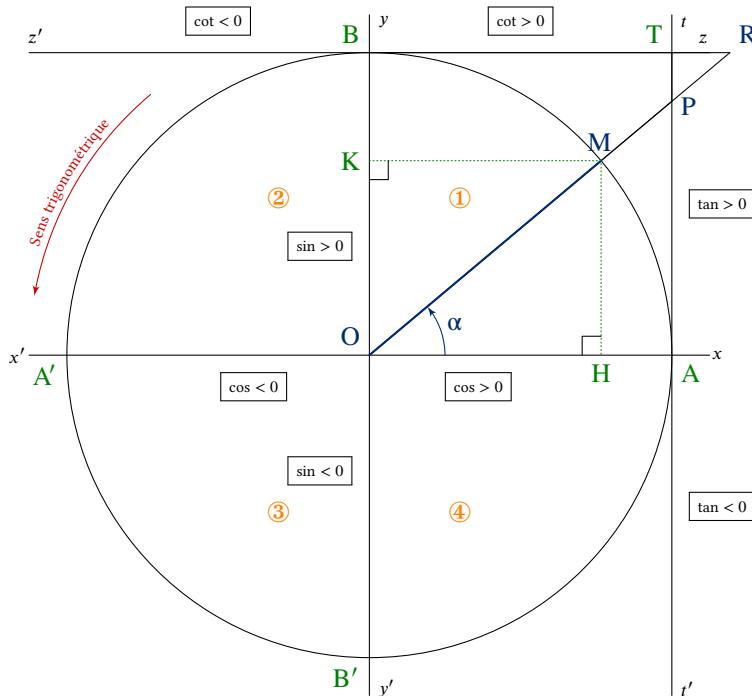


FIGURE 3.4 – Cercle trigonométrique

La figure 3.5 suivante permet de visualiser les signes des rapports trigonométriques pour des angles  $\alpha$  situés dans les différents quadrants.

L'angle  $\alpha$  est matérialisé par un arc de cercle débutant en A et se terminant en M. La projection du point M sur les axes des sinus, des cosinus, donne la valeur positive (+) ou négative (-) du rapport trigonométrique relatif à l'axe. L'intersection de (OM) avec l'axe des tangentes en P et des cotangentes en R donne la valeur positive (+) ou négative (-) du rapport trigonométrique relatif à l'axe.

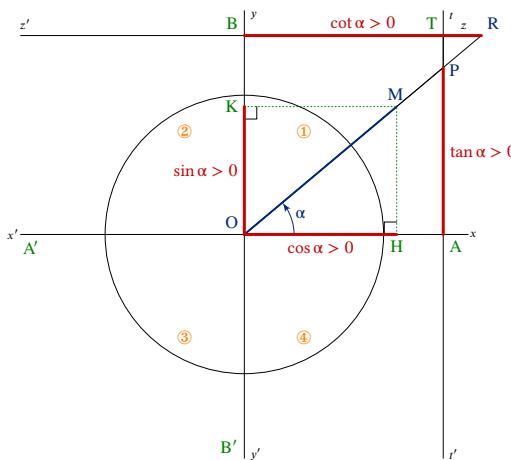
## 6 Angles supplémentaires

### Définition 3.5 : angles supplémentaires

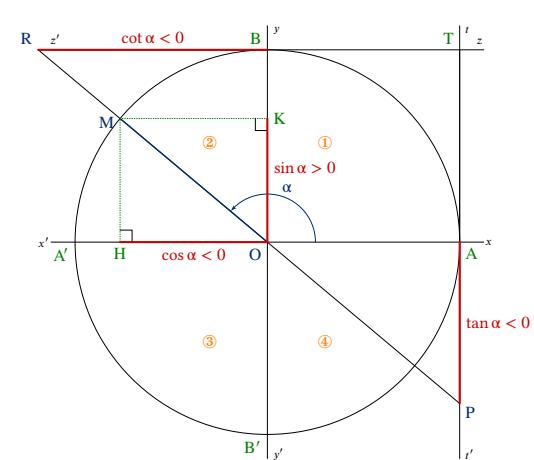
Deux angles sont dits *supplémentaires* lorsque leur somme vaut  $\pi$ , soit  $180^\circ$ .

### Propriété 3.4

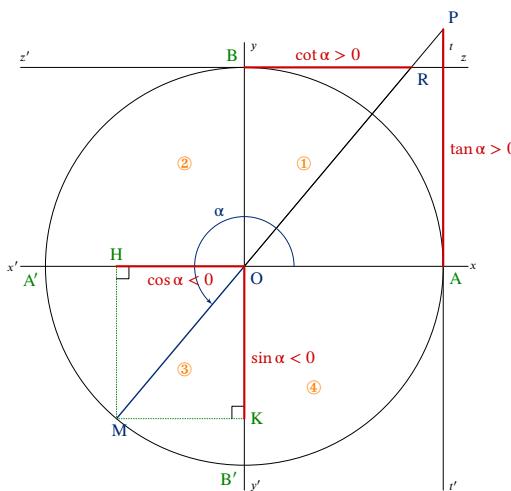
Si deux angles sont supplémentaires, ils ont même sinus, mais cosinus, tangentes et cotangentes opposés.



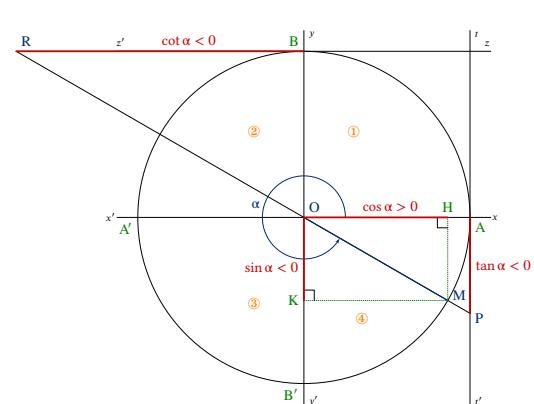
(a) dans le premier quadrant



(b) dans le deuxième quadrant



(c) dans le troisième quadrant



(d) dans le quatrième quadrant

FIGURE 3.5 – Signes des rapports trigonométriques en fonction de l'angle

**Démonstration 3.3**

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux angles supplémentaires :  $\beta = \pi - \alpha$  ou  $\alpha + \beta = \pi$

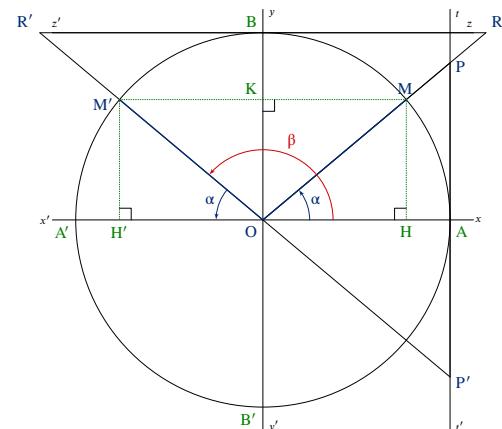
Sur la figure ci-contre,  $\widehat{AOM} = \alpha$  et  $\widehat{AOM'} = \beta$ .

On retrouve  $\alpha$  par symétrie en  $M'OA'$ .

Il faut également remarquer que :  $\overline{OH'} = -\overline{OH}$ ,  $\overline{AP'} = -\overline{AP}$  et  $\overline{BR'} = -\overline{BR}$ .

Par conséquent,

$$\begin{cases} \sin \alpha = \overline{OK} = \sin \beta \\ \cos \alpha = \overline{OH} = -\overline{OH'} = -\cos \beta \\ \tan \alpha = \overline{AP} = -\overline{AP'} = -\tan \beta \\ \cot \alpha = \overline{BR} = -\overline{BR'} = -\cot \beta \end{cases}$$



## 7 Angles qui diffèrent de $\pi$

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux angles tels que  $\beta - \alpha = \pi$ . Alors  $\beta = \alpha + \pi$ .

Avec les notations de la figure 3.6, on a  $\widehat{AOM} = \alpha$  et  $\widehat{AOM'} = \beta = \alpha + \pi$ .

Le point  $M'$  (respectivement  $H'$  et  $K'$ ) est le symétrique de  $M$  (respectivement de  $H$  et de  $K$ ) par rapport à  $O$ .

$$\begin{cases} \sin \beta = \overline{OK'} = -\overline{OK} = -\sin \alpha \\ \cos \beta = \overline{OH'} = -\overline{OH} = -\cos \alpha \\ \tan \beta = \overline{AP'} = \overline{AP} = \tan \alpha \\ \cot \beta = \overline{BR'} = \overline{BR} = \cot \alpha \end{cases}$$

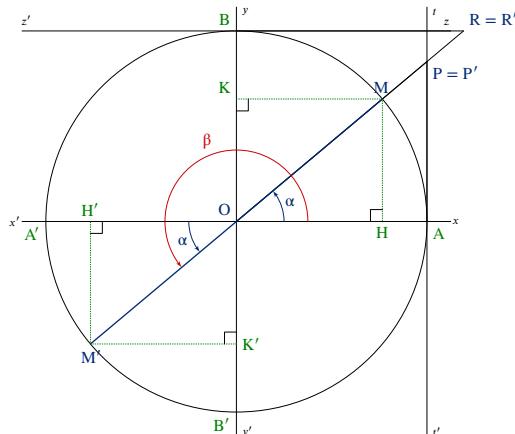


FIGURE 3.6 – Angles qui diffèrent de  $\pi$

## 8 Angles qui diffèrent de $\pi/2$

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux angles tels que  $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Avec les notations de la figure 3.7,  $\widehat{AOM} = \alpha$ ,  $\widehat{AOM'} = \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$  et  $\widehat{MOM'} = \frac{\pi}{2}$ .

On passe donc de  $(OM)$  à  $(OM')$  par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$ .

Ainsi en longueurs géométriques on a  $OH = OK'$ ,  $OH' = OK$ ,  $AP = BR'$  et  $AP' = BR$ . D'où

$$\begin{cases} \sin \beta = \overline{OK'} = \overline{OH} = \cos \alpha \\ \cos \beta = \overline{OH'} = -\overline{OK} = -\sin \alpha \\ \tan \beta = \overline{AP'} = -\overline{BR} = -\cot \alpha \\ \cot \beta = \overline{BR'} = -\overline{AP} = -\tan \alpha \end{cases}$$

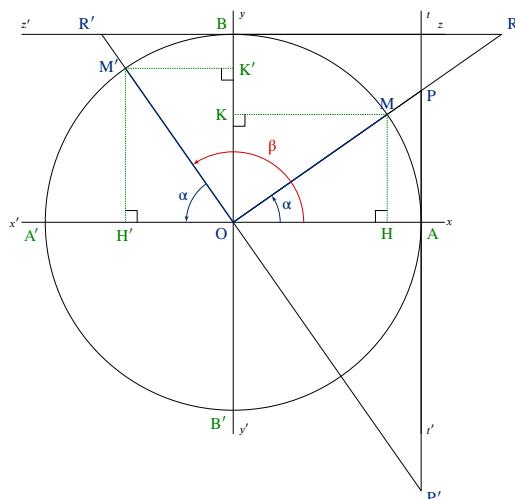


FIGURE 3.7 – Angles qui diffèrent de  $\pi/2$

## 9 Angles particuliers

Dans les paragraphes suivants, nous allons calculer les valeurs des rapports trigonométriques pour des valeurs particulières d'angle grâce au cercle trigonométrique et aux propriétés des triangles rectangles.

### 9.1 Angle nul

En utilisant la figure 3.4, avec  $\alpha = 0$ , on obtient

$$\begin{cases} \sin 0 = OO = 0 \\ \cos 0 = OA = 1 \\ \tan 0 = AA = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0 \\ \cot 0 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\tan \alpha} = \infty \end{cases}$$

### 9.2 Angles de $\pi/6$ et $\pi/3$

Ces angles sont complémentaires et ce sont les angles d'un triangle demi-équilatéral (c'est-à-dire un triangle équilatéral coupé en deux par une de ses hauteurs).

Considérons donc le triangle demi-équilatéral ABC rectangle en A avec  $\hat{B} = \frac{\pi}{3}$  et  $\hat{C} = \frac{\pi}{6}$ . On pose  $BC = a$  et  $AB = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$ .

Par le théorème de Pythagore, on a  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , soit  $a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + AC^2$ . Par conséquent, puisque la longueur est positive, on a  $AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Calculons à présent les différents rapports

$$\begin{aligned}\sin \hat{B} &= \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} \\ \cos \hat{B} &= \frac{AB}{BC} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} \\ \tan \hat{B} &= \frac{\sin \hat{B}}{\cos \hat{B}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} \times 2}{2} = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \cot \frac{\pi}{6} \\ \cot \hat{B} &= \frac{1}{\tan \hat{B}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot \frac{\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

### 9.3 Angles de $\pi/4$

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A (ABC est la moitié d'un carré coupé selon une diagonale). On a  $\hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{4}$  et  $AB = AC = a$ .

D'après le théorème de Pythagore,  $BC^2 = AC^2 + AB^2 = 2a^2$ , donc  $BC = a\sqrt{2}$ .

$$\begin{aligned}\sin \hat{B} &= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \hat{B} &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \tan \hat{B} &= \tan \frac{\pi}{4} = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \\ \cot \hat{B} &= \cot \frac{\pi}{4} = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{a} = 1\end{aligned}$$

### 9.4 Angles de $\pi/2$

En utilisant la figure 3.4, avec  $\alpha = 0$ , on obtient

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{2} = OB = 1 \\ \cos \frac{\pi}{2} = OO = 0 \\ \tan \frac{\pi}{2} = \frac{1}{0} \rightarrow +\infty \\ \cot \frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0 \end{cases}$$

### 9.5 Angles de $\pi$

En prenant  $\alpha = \pi$  dans la figure 3.4, on a

$$\begin{cases} \sin \pi = AA' = 0 \\ \cos \pi = OA' = -1 \\ \tan \pi = \frac{0}{-1} = 0 \\ \cot \pi = \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{1}{\tan \alpha} = \infty \end{cases}$$

### 9.6 Tableau récapitulatif

Résumons dans le tableau 3.2 ci-dessous les valeurs trouvées, pour les angles compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . Ce tableau est à **connaître par cœur**.

TABLEAU 3.2 – Valeurs particulières des rapports trigonométriques

Rapport		Angle $\alpha$				
		$0^\circ$	$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$	$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$	$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$	
$\cot \alpha$	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

Nous constatons donc que jusqu'à  $\frac{\pi}{2}$ , le sinus et la tangente sont croissants, et le cosinus et la cotangente décroissants.

## 10 Formulaire de trigonométrie

Dans les propriétés suivantes, on prend  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ .

### 10.1 Liens entre les rapports

#### Propriété 3.5

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$             | 3. $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha$ | 5. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$             |
| 2. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$ | 4. $\tan \alpha \times \cot \alpha = 1$            | 6. $\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$ |

### 10.2 Parité, symétries et périodicités

#### Propriété 3.6

$\forall k \in \mathbb{Z}$ ,

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$                            | 11. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$  |
| 2. $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$                     | 12. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$  |
| 3. $\cos(\alpha + (2k+1)\pi) = -\cos(\alpha)$                | 13. $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$                           |
| 4. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$                      | 14. $\tan(\alpha + 2k\pi) = \tan(\alpha)$                     |
| 5. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$  | 15. $\tan(\alpha + (2k+1)\pi) = \tan(\alpha)$                 |
| 6. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$ | 16. $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$                      |
| 7. $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$                           | 17. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$  |
| 8. $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$                     | 18. $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$ |
| 9. $\sin(\alpha + (2k+1)\pi) = -\sin(\alpha)$                |   |
| 10. $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$                      |   |

### 10.3 Additions

#### Propriété 3.7

1.  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
2.  $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
3.  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
4.  $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
5.  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$
6.  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

### 10.4 Angle double

#### Propriété 3.8

$$\begin{aligned} 1. \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ &= 2\cos^2(\alpha) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(\alpha) \\ \text{En posant } t &= \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right), \text{ on a} \\ 4. \cos(\alpha) &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ 5. \sin(\alpha) &= \frac{2t}{1+t^2} \\ 6. \tan(\alpha) &= \frac{2t}{1-t^2} \end{aligned}$$

### 10.5 Factorisation et linéarisation

#### Propriété 3.9

1.  $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
2.  $\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
3.  $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
4.  $\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

#### Propriété 3.10

1.  $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$
2.  $\cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$
3.  $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$
4.  $\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$
5.  $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$
6.  $\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha)$

### 10.6 Équations trigonométriques

#### Propriété 3.11

1.  $\cos \alpha = \cos \beta$  si et seulement si  $\exists k \in \mathbb{RZ}, \alpha = \beta + 2k\pi$  ou  $\alpha = -\beta + 2k\pi$ .
2.  $\sin \alpha = \sin \beta$  si et seulement si  $\exists k \in \mathbb{RZ}, \alpha = \beta + 2k\pi$  ou  $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi$ .
3.  $\tan \alpha = \tan \beta$  si et seulement si  $\exists k \in \mathbb{RZ}, \alpha = \beta + k\pi$ .

## Chapitre 4

# Nombres complexes

### Sommaire

---

1	Introduction	39
2	Propriétés de base	39
2.1	Parties réelle et imaginaire	40
2.2	Règles de calcul	40
2.3	Conjugué	40
3	Module	40
4	Argument	41
5	Égalité de deux nombres complexes	43
6	Exponentielle complexe	43
6.1	Définitions	43
6.2	Application à la recherche de formules trigonométriques	43
7	Représentation géométrique	45
8	Racines énièmes d'un nombre complexe	46
9	Résolution de l'équation du deuxième degré	47

---

En complément, on pourra se référer

- à la section 1.3 *Les nombres complexes* p. 11 de ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011;
- aux fiches 16 et 17 p. 62 à 69 de FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013;
- au chapitre 1 *Les nombres complexes* p. 1 de KONINCK DE et LACROIX 2004;
- au chapitre 1 *Les nombres complexes* p. 1 de PHILIPPIN 2014;
- au chapitre 3 *Les nombres complexes* p. 31 de LIRET et MARTINAIS 1997a;
- au chapitre 7 *Nombres complexes* p. 168 de AZOULAY, AVIGNANT et AULIAC 1996;
- au chapitre 8 *Fonctions élémentaires de la variable complexe* p. 1 de Azoulay1997\_4\_CI-SST81T5.

## 1 Introduction

Comme rappelé à la section 4.3 p. 11, les nombres complexes ont été introduits pour résoudre certaines équation n'admettant pas de solution réelle.

Une *unité imaginaire* a ainsi été définie telle que son carré vaut  $-1$ , ce qui contrevient aux règles de calculs établis dans  $\mathbb{R}$  où le carré d'un nombre est positif.

On note  $i$  ou  $\imath$  cette unité imaginaire. Toutefois, dans certaines disciplines telles que l'électronique, on remplace  $i$  par  $j$  ou par  $J$ , dans la mesure où le symbole  $i$  est associé à une grandeur, l'intensité d'un courant par exemple.

L'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes est défini par

$$\mathbb{C} = \{z = a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2; i^2 = -1\}. \quad (4.1)$$

## 2 Propriétés de base

## 2.1 Parties réelle et imaginaire

D'après l'équation (4.1), un nombre complexe est donc de la forme  $z = a + ib$ . Il se décompose ainsi de façon unique en un couple de deux nombres réels dont l'un est associé à l'unité imaginaire.

### Définition 4.1 : parties réelle et imaginaire

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe.

On dit que  $a$  est la *partie réelle* de  $z$  et on note  $\Re(z) = a$ , tandis que  $b$  est la *partie imaginaire* :  $b = \Im(z)$ .

## 2.2 Règles de calcul

Soient  $z_1 = a_1 + ib_1$  et  $z_2 = a_2 + ib_2$ . On définit la somme  $z_1 + z_2$  et le produit  $z_1 \times z_2 = z_1 z_2$  comme suit

- $z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
- $z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) + i^2 b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

### Propriété 4.1

1. Associativité de l'addition et de la multiplication :  $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$  et  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
2. Commutativité de l'addition et de la multiplication :  $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 + z_2 = z_2 + z_1$  et  $z_1 z_2 = z_2 z_1$
3. Distributivité de la multiplication :  $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3, z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
4.  $\mathbb{C}$  possède un élément neutre pour l'addition qui est 0 :  $\forall z \in \mathbb{C}, z + 0 = 0 + z = z$
5.  $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \exists z_2 \in \mathbb{C}, z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0 : z_2$  est l'opposé de  $z_1$  et vaut  $-z_1 = -a_1 - ib_1$
6.  $\mathbb{C}$  possède un élément neutre pour la multiplication qui est 1 :  $\forall z \in \mathbb{C}, z \times 1 = 1 \times z = z$
7.  $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \exists! z_2 \in \mathbb{C}, z_1 z_2 = 1 : z_2$  est l'inverse de  $z_1$  et vaut  $\frac{1}{z_1} = \frac{1}{a_1^2 + b_1^2}(a_1 - ib_1)$
8.  $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \Re(z_1 + z_2) = \Re(z_1) + \Re(z_2); \Im(z_1 + z_2) = \Im(z_1) + \Im(z_2)$
9.  $\forall z \in \mathbb{C}, z = 0 \Leftrightarrow \Re(z) = \Im(z) = 0$
10.  $\forall z \in \mathbb{C}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \Re(\lambda z) = \lambda \Re(z); \Im(\lambda z) = \lambda \Im(z)$

## 2.3 Conjugué

### Définition 4.2 : nombre conjugué

Soit  $z = a + ib$  un nombre complexe. On appelle *conjugué* de  $z$  et on note  $\bar{z}$  le nombre complexe tel que  $\bar{z} = a - ib$ .

### Propriété 4.2

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,$$

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\overline{\overline{z}_1} = z_1$<br>2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$<br>3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ | 4. $\Re(z_1) = \frac{z_1 + \overline{z_1}}{2}; \Im(z_1) = \frac{z_1 - \overline{z_1}}{2i}$<br>5. $z_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1 = \overline{z_1}$<br>6. $z_1 \in i\mathbb{R}$ (imaginaire pur) $\Leftrightarrow z_1 = -\overline{z_1}$ |
|--|---|

## 3 Module

### Définition 4.3 : module

Soit  $z \in \mathbb{C}$  de la forme  $z = a + ib$ .

On appelle *module* de  $z$  et on note  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{zz}$ .

**Propriété 4.3**

1.  $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
2.  $\forall z \in \mathbb{C}^\star, \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$
3.  $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$  (inégalité triangulaire)
4.  $\forall z \in \mathbb{C}^\star, \frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$

**Démonstration 4.1***(de la propriété 4.3-3)*Soit  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ .

1. Montrer l'inégalité de droite revient à montrer que  $|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Or } |z_1 + z_2|^2 &= \sqrt{(z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2})}^2 \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} + z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1 z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1 \overline{z_2}). \end{aligned}$$

De l'autre côté,  $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2|$ .Il reste donc à comparer  $\Re(z_1 \overline{z_2})$  et  $|z_1 z_2|$ .

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})} = |z_1 \overline{z_2}| \\ &= \sqrt{(\Re(z_1 \overline{z_2}) + i\Im(z_1 \overline{z_2})) (\Re(z_1 \overline{z_2}) - i\Im(z_1 \overline{z_2}))} \\ &= \sqrt{\Re(z_1 \overline{z_2})^2 + \Im(z_1 \overline{z_2})^2}. \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi que  $|z_1 \overline{z_2}|$  est supérieur à  $\Re(z_1 \overline{z_2})$ . Par conséquent, on a l'inégalité  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

2. La première inégalité utilisant une valeur absolue, il faut vérifier les deux relations

$$\begin{cases} |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \\ |z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2| \end{cases}$$

Partant de l'inégalité que nous venons d'établir, on a

$$\begin{aligned} |(z_1 + z_2) + (-z_2)| &\leq |z_1 + z_2| + |-z_2| \\ |z_1| &\leq |z_1 + z_2| + |z_2| \\ |z_1| - |z_2| &\leq |z_1 + z_2|. \end{aligned}$$

En intervertissant les rôles de  $z_1$  et de  $z_2$ , on démontre la seconde relation.On a donc  $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

□

## 4 Argument

Cette section utilise largement les propriétés des fonctions circulaires vues au chapitre précédent.

Si  $z$  est un nombre complexe non nul, d'après la définition du module, on a  $|z|^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$ . Et puisque  $z$  est non nul, son module aussi, d'où il vient  $\left(\frac{\Re(z)}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{\Im(z)}{|z|}\right)^2 = 1$ . Ceci n'est pas sans rappeler la relation  $\cos^2 + \sin^2 = 1$ .**Définition 4.4 : argument**Pour tout nombre complexe  $z$  non nul, il existe un unique nombre réel  $\theta \in [0 ; 2\pi[$  tel que  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Ce nombre s'appelle l'*argument* de  $z$  et se note  $\arg(z)$ .On appelle *forme trigonométrique* de  $z$  l'écriture

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

**Définition 4.5 : congruence**

Soient  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois nombres réels. On dit que «  $x$  est congru à  $y$  modulo  $z$  » et on note  $x \equiv y[z]$  s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $x = kz + y$ . En d'autres termes,  $y$  est le reste de la division de  $x$  par  $z$ .

Avec cette définition, si  $z$  est un nombre complexe non nul qui s'écrit sous la forme  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , alors  $\arg(z)$  est l'unique nombre réel dans  $[0 ; 2\pi[$  tel que  $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ .

**Propriété 4.4**

$$\forall (z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2, \arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi] \\ \text{et } \arg(1/z_1) \equiv -\arg(z_1)[2\pi].$$

**Démonstration 4.2**

Soit  $(z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^*)^2$ . On pose  $\theta_1 = \arg(z_1)$  et  $\theta_2 = \arg(z_2)$ .

Alors  $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$  et  $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ .

$$\begin{aligned} D'où z_1 z_2 &= |z_1 z_2|(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)) \\ &= |z_1 z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

Par voie de conséquence,  $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z_1} &= \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} \text{ et } \overline{z_1} = |z_1|(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1). \text{ En utilisant les parités des fonctions cos et sin, on en déduit} \\ \text{que } \frac{1}{z_1} &= \frac{1}{|z_1|}(\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1)). \text{ D'où la propriété.} \end{aligned}$$

□

**Théorème 4.1 : Formule de Moivre (1667-1754)**

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

**Démonstration 4.3**

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Montrons la formule de Moivre par récurrence.

On note  $P_n$  la proposition «  $\forall n \in \mathbb{N}, (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$  ». On établit aisément que cette relation est vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

On suppose que la formule est vraie pour un entier  $n$  supérieur ou égal à 2. Il vient alors  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n (\cos \theta + i \sin \theta) = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))(\cos \theta + i \sin \theta)$

$$\begin{aligned} &= \cos(n\theta) \cos \theta - \sin(n\theta) \sin \theta + \\ &\quad + i(\cos(n\theta) \sin \theta + \sin(n\theta) \cos \theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta) \end{aligned}$$

Cette proposition est donc vraie pour  $n + 1$ , elle est donc vraie pour tout  $n$ .

□

**Propriété 4.5**

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi].$$

**Démonstration 4.4**

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $\theta = \arg(z)$  tel que  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ .

En appliquant la formule de Moivre, on obtient  $z^n = |z|^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$ . D'où le résultat.

□

## 5 Égalité de deux nombres complexes

### Propriété 4.6

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z_1) = \Re(z_2) \\ \Im(z_1) = \Im(z_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) \equiv \arg(z_2)[2\pi] \end{cases}$$

## 6 Exponentielle complexe

### 6.1 Définitions

#### Définition 4.6 : exponentielle complexe

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . On pose  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}$  de la forme  $z = a + ib$ . Alors on appelle *exponentielle complexe* le nombre  $e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a (\cos \theta + i \sin \theta)$ .

Il résulte de cette définition que  $|e^z| = e^a$  (donc  $e^z$  est non nul) et  $\arg(e^z) \equiv \theta[2\pi]$ .  
De plus  $\forall k \in \mathbb{Z}, e^{z+2ik\pi} = e^z$  : l'exponentielle complexe est une fonction  $2i\pi$ -périodique.

On remarque également que  $\cos \theta = \Re(e^{i\theta})$  et  $\sin \theta = \Im(e^{i\theta})$ .

#### Définition 4.7 : forme exponentielle

Soit  $z \in \mathbb{C}^\star$  de module  $|z| = \rho$  (non nul) et d'argument  $\arg(z) = \theta$ .

On appelle *forme exponentielle* de  $z$  l'écriture

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

## 6.2 Application à la recherche de formules trigonométriques

### Théorème 4.2 : Formules d'Euler (1707-1784)

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

### Démonstration 4.5

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Par définition on a  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . En changeant  $\theta$  en  $-\theta$  et en utilisant les parités des fonctions cos et sin, on a alors  $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ . L'addition ou la soustraction membre à membre de ces deux relations permettent de retrouver les formules d'Euler.

□

### Propriété 4.7

1.  $\forall \theta \in \mathbb{R}, |e^{i\theta}| = 1, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
2.  $e^{i\theta} = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = 2k\pi$
3.  $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \theta_2[2\pi]$

### Formules trigonométriques classiques

### Propriété 4.8

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$<br>2. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ | 3. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$<br>4. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ |
|--|--|

**Démonstration 4.6**

$$\begin{aligned}
 4.8-1 \cos(a+b) &= \Re(e^{i(a+b)}) \\
 &= \Re((\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b)) \\
 &= \Re(\cos a \cos b + i \cos a \sin b + i \sin a \cos b - \sin a \sin b) \\
 &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
 4.8-2 \cos(a-b) &= \Re(e^{i(a-b)}) \\
 &= \Re((\cos a + i \sin a)(\cos b - i \sin b)) \\
 &= \Re(\cos a \cos b - i \cos a \sin b + i \sin a \cos b + \sin a \sin b) \\
 &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
 4.8-3 \sin(a+b) &= \Im(e^{i(a+b)}) = \cos a \sin b + \sin a \cos b \\
 4.8-4 \sin(a-b) &= \Im(e^{i(a-b)}) = \sin a \cos b - \cos a \sin b
 \end{aligned}$$

□

**Propriété 4.9**

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . On pose  $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$ .

1.  $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
2.  $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
3.  $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

**Démonstration 4.7**

$$\begin{aligned}
 4.9-1 \cos a \cos b &= \left(\frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\right) \left(\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right) = \frac{1}{4}(e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}) \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)}}{2} + \frac{e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\
 4.8-1 \cos a + \cos b &= \Re(e^{ia} + e^{ib}) \\
 &= \Re\left(e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{a-b}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{b-a}{2}\right)}\right)\right) = \Re\left(e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)} 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) \\
 &= 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \Re\left(e^{i\left(\frac{a+b}{2}\right)}\right) = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
 4.9-3 \frac{1-t^2}{1+t^2} &= \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)}} \quad \text{par définition de tan} \\
 &= \frac{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{a}{2}\right)} = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1 \quad \text{par la propriété 3.2-1 p. 31} \\
 &= 2 \left( \frac{e^{i\frac{a}{2}} + e^{-i\frac{a}{2}}}{2} \right)^2 - 1 \\
 &= \frac{1}{2} \left( e^{ia} + 2e^{i\frac{a}{2}} e^{-i\frac{a}{2}} + e^{-ia} \right) - 1 = \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} = \cos a.
 \end{aligned}$$

□

## Linéarisation

### Définition 4.8 : linéarisation

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Linéariser  $\cos^n \theta$  ou  $\sin^n \theta$ , c'est les exprimer en fonction des  $\cos(k\theta)$  et  $\sin(k\theta)$ , pour  $k$  entre 1 et  $n$ .

Pour linéariser une expression, on se sert des formules d'Euler (cf. théorème 4.2 p. 43), puis on applique la formule du binôme de Newton (cf. théorème 1.2 p. 15). On regroupe ensuite chaque terme avec son conjugué et transforme l'expression obtenue en réutilisant les formules d'Euler.

### Exemple 4.1

Prenons le cas  $n = 3$ .

$$\begin{aligned}\cos^5(\theta) &= \frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^5}{32} = 1/2^5 * \sum_{k=0}^5 (e^{-i\theta})^{5-k} (e^{i\theta})^k \binom{5}{k} \\ &= \frac{e^{5i\theta}}{32} + \frac{5e^{3i\theta}}{32} + \frac{5e^{i\theta}}{16} + \frac{5e^{-i\theta}}{16} + \frac{5e^{-3i\theta}}{32} \\ &\quad + \frac{e^{-5i\theta}}{32} \\ &= \frac{5 \cos(\theta)}{8} + \frac{5 \cos(3\theta)}{16} + \frac{\cos(5\theta)}{16}\end{aligned}$$

## Opération inverse de la linéarisation

Pour un  $n \in \mathbb{N}$  donné, on cherche à exprimer  $\cos(n\theta)$  ou  $\sin(n\theta)$  comme un polynôme en  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

Pour ce faire, on prend la partie réelle (pour cos) ou la partie imaginaire (pour sin) de l'exponentielle complexe, et on applique la formule du binôme de Newton.

### Exemple 4.2

Prenons le cas  $n = 3$ .

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \Re((e^{i\theta})^3) = \Re((i \sin(\theta) + \cos(\theta))^3) \\ &= \Re\left(\sum_{k=0}^3 (i \sin(\theta))^{3-k} \cos^k(\theta) \binom{3}{k}\right) \\ &= \Re(-i \sin^3(\theta) - 3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \\ &\quad + 3i \sin(\theta) \cos^2(\theta) + \cos^3(\theta)) \\ &= -3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) + \cos^3(\theta) \\ &= 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)\end{aligned}$$

## 7 Représentation géométrique

### Définition 4.9 : affixe

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

- Si un point M a pour coordonnées  $(a ; b)$ , alors le complexe  $z = a + ib$  est l'*affixe* de M.
- Si un complexe  $z$  s'écrit  $z = a + ib$ , le point M de coordonnées  $(a ; b)$  est le *point ou vecteur image* de z.

Soit un nombre complexe  $z$  non nul de la forme  $z = a + ib$ . On note  $\theta = \arg(z)$  et  $\rho = |z|$ . Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on représente z comme sur la figure 4.1.

Si  $M_1$  et  $M_2$  sont les images des nombres complexes  $z_1 = a_1 + ib_1$  et  $z_2 = a_2 + ib_2$ , alors  $z = z_1 + z_2$  est l'affixe du point M défini par  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$ , comme représenté à la figure 4.2.

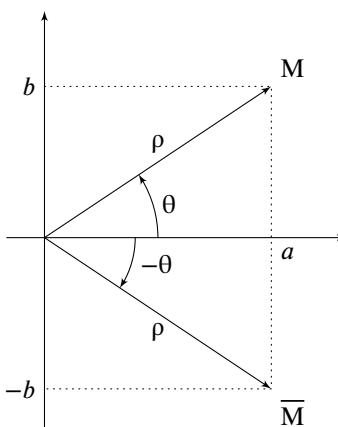


FIGURE 4.1 – Représentation d'un nombre complexe et de son conjugué

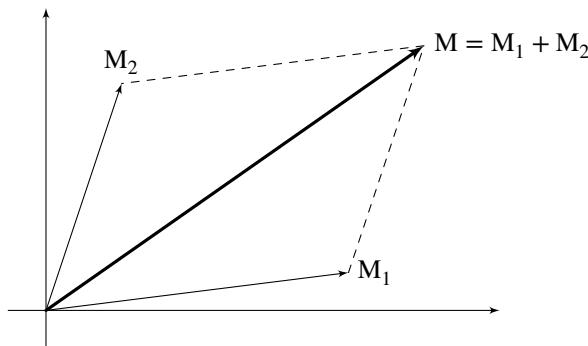


FIGURE 4.2 – Représentation de la somme de deux nombres complexes

#### Définition 4.10 : éléments du plan complexe

On munit le plan complexe du repère  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ . Soient A, B et C trois points du plan complexes d'affixe respectives  $z_A, z_B$  et  $z_C$ .

- L'*affixe du vecteur*  $\overrightarrow{AB}$  est le nombre complexe  $z_B - z_A$ .
- L'*affixe du milieu* M du segment  $[AB]$  est le nombre complexe  $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$ .
- La *mesure de l'angle orienté* entre le premier vecteur de la base  $\vec{u}$  et  $\overrightarrow{AB}$  est donnée par l'argument du nombre complexe  $z_B - z_A$  :  $\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AB}} = \arg(z_B - z_A)$ .
- La mesure de l'*angle orienté* entre  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  est donnée par l'argument du rapport des affixes des vecteurs :  $\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}} = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ .

Voir l'exercice 2 du TD 3.

## 8 Racines énièmes d'un nombre complexe

On cherche à résoudre ici les équations du type

$$z^n = \lambda, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{C} \text{ donné.} \quad (4.2)$$

- Si  $\lambda = 0$ , la seule solution de (4.2) est bien sûr  $z = 0$ .
- Si  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , alors on pose  $\lambda = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ , et une solution de (4.2) est forcément non nulle. On pose alors  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Le module de  $z^n$  vaut  $\rho^n$  et son argument  $n\theta$  (à  $2\pi$  près). L'égalité (4.2) est donc équivalente à  $\rho^n = r$  et  $n\theta \equiv \alpha [2\pi]$ . D'où il vient

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Quand  $k$  prend les valeurs  $0, 1, 2, \dots, n - 1$ ,  $\theta$  prend  $n$  valeurs distinctes et l'équation (4.2) possède alors  $n$  racines distinctes ayant même module. Leurs images sont les sommets d'un polygone régulier à  $n$  côtés inscrit dans le cercle centré à l'origine et de rayon  $\rho$ .

### Exemple 4.3

Racines cubiques de l'unité :  $z^3 = 1$ .

D'après ce qui précède, on a  $\rho = 1$  et  $3\theta \equiv 0[2\pi]$ . Les trois racines complexes distinctes de l'unité sont

$$\text{donc } \begin{cases} z_1 = 1 \left( \cos\left(0 \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(0 \frac{2\pi}{3}\right) \right) = 1, \\ z_2 = 1 \left( \cos\left(1 \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(1 \frac{2\pi}{3}\right) \right) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ z_3 = 1 \left( \cos\left(2 \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(2 \frac{2\pi}{3}\right) \right) = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Ces trois affixes forment le triangle équilatéral présenté à la figure 4.3.

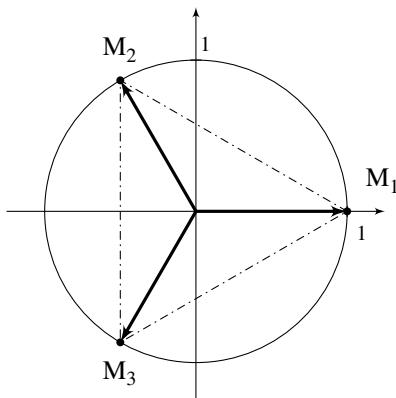


FIGURE 4.3 – Racines cubiques de l'unité

## 9 Résolution de l'équation du deuxième degré

Soit l'équation

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \text{ et } a \neq 0 \quad (4.3)$$

Comme dans le cas de l'équation à coefficients réels, la mise sous forme canonique de ce trinôme mène à

$$a \left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0.$$

En notant  $\Delta = b^2 - 4ac$  le discriminant complexe, et comme  $a \neq 0$ , on a

$$\left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0.$$

Avec  $\delta$  la racine carrée de  $\Delta$  (possible dans  $\mathbb{C}$  même si  $\Delta < 0$ , d'après la section précédente), on peut alors écrire

$$\left( z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{\delta}{2a} \right)^2 = 0,$$

et en utilisant une identité remarquable

$$\left( z + \frac{b - \delta}{2a} \right) \left( z + \frac{b + \delta}{2a} \right) = 0.$$

- Si  $\Delta = 0$  (et donc  $\delta = 0$ ), (4.3) possède une racine double  $z = \frac{-b}{2a}$
- Si  $\Delta \neq 0$  (et donc  $\delta \neq 0$ ), (4.3) possède deux racines distinctes  $\begin{cases} z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \\ z_2 = \frac{-b + \delta}{2a} \end{cases}$

On notera que si  $\Delta > 0$ , on retrouve les formules bien connues :  $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ . Si  $\Delta < 0$ , les racines sont complexes et conjuguées de la forme  $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ .



## Chapitre 5

# Fonctions d'une variable réelle

### Sommaire

---

1	Définitions . . . . .	49
2	Limite et continuité . . . . .	50
2.1	Définitions . . . . .	50
2.2	Opérations sur les limites . . . . .	53
2.3	Propriétés des fonctions continues . . . . .	54
3	Compléments . . . . .	56
3.1	Continuité uniforme . . . . .	56
3.2	Extension aux fonctions à valeurs complexes . . . . .	56

---

En complément, on pourra se référer

- aux sections 1.1 *Généralités sur les fonctions* p. 1, 1.5 *Limites de fonctions* p. 23 ; 1.6.2 *Continuité* p. 36 et 2.1 *Fonctions réciproques* p. 61 de ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011 ;
- aux fiches 36 et 37 (p. 146 à 153) et 57 (p. 230) de FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013 ;
- à la section 1.2 *Fonction numérique de variable réelle* p. 7 et aux chapitres 2 *Limite et continuité* p. 17 et 5 *Fonctions continues sur un intervalle* p. 71 de LIRET et MARTINAIS 1997b ;
- au chapitre 9 *Fonctions d'une variable réelle. Limites. Continuité* p. 268 de AZOULAY, AVIGNANT et AULIAC 1996.

Dans ce chapitre on s'intéresse aux fonctions ne dépendant que d'une seule variable réelle et à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Sauf mention contraire, on note  $f : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) \end{cases}$  où  $E \subset \mathbb{R}$  est le domaine de définition de  $f$  (cf.

définition 1.32 p. 16).

## 1 Définitions

### Définition 5.1 : majoration, minoration...

On dit que  $f$  est

- *majorée* si  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leq M$
- *minorée* si  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \geq m$
- *bornée* si  $\exists M \in \mathbb{R}^*, \forall x \in E, |f(x)| \leq M$
- *croissante* (respectivement *strictement croissante*) sur  $E$  si et seulement si  $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$  (respectivement  $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ )
- *décroissante* (respectivement *strictement décroissante*) sur  $E$  si et seulement si  $\forall (x, y) \in I^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$  (respectivement  $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ )
- *monotone* (respectivement *strictement monotone*) sur  $E$  si et seulement si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante)

### Définition 5.2 : extrema

On dit que  $f$  admet

- un *maximum (global)* sur  $E$  si  $\exists x_0 \in E, \forall x \in E, f(x) \leq f(x_0)$

- un *minimum (global)* sur  $E$  si  $\exists x_0 \in E, \forall x \in E, f(x) \geq f(x_0)$
  - un *extremum (global)* sur  $E$  quand  $f$  admet un maximum ou un minimum (global)
- On parle d'*extremum local* lorsque la propriété est vraie non pas sur  $E$  mais sur un sous-ensemble de  $E$ .

### Définition 5.3 : parité

On dit que  $f$  est

- *paire* si  $\forall x \in E, f(x) = f(-x)$
- *impaire* si  $\forall x \in E, f(x) = -f(-x)$

### Définition 5.4 : périodicité

Soit  $T \in \mathbb{R}^{+*}$ . On dit que  $f$  est  $T$ -périodique si  $\forall x \in E, f(x + T) = f(x)$ .

### Définition 5.5 : fonction lipschitzienne

Soit  $k \in \mathbb{R}^{+*}$ . On dit que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne si  $\forall x \in \mathbb{R}, y \in E, |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$ .

On appelle  $k$  la *constante de Lipschitz* de  $f$ .

Autrement dit, si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne, ses taux d'accroissement sont bornés : la fonction ne peut pas (dé)croître « trop vite ».

#### Exemple 5.1

- La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $x \mapsto x$  est 1-lipschitzienne.
- La fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $x \mapsto x^2$  n'est pas lipschitzienne.
- La fonction  $g : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $x \mapsto x^2$  est 2-lipschitzienne.
- La fonction  $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $x \mapsto \sqrt{x}$  n'est pas lipschitzienne.
- La fonction  $h : [1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $x \mapsto \sqrt{x}$  est  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne.

### Définition 5.6 : voisinage

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On appelle *voisinage* de  $a$  un intervalle de la forme  $]a - \epsilon ; a + \epsilon[$ , avec  $\epsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ .

Si  $a = -\infty$  (respectivement  $a = +\infty$ ), le voisinage de  $a$  est de la forme  $]-\infty ; A[$  (respectivement  $]A ; +\infty[$ ), avec  $A \in \mathbb{R}$ .

Si une fonction  $f$  vérifie une certaine propriété au voisinage d'un point  $a$ , cela signifie qu'il existe un voisinage de  $a$  tel que  $f$  vérifie la propriété dans ce voisinage.

#### Exemple 5.2

- La fonction  $f$  est bornée au voisinage de 1 signifie  $\exists \epsilon > 0, \exists M > 0, \forall x \in ]1 - \epsilon ; 1 + \epsilon[, |f(x)| \leq M$ .
- La fonction  $f$  est strictement négative au voisinage de  $+\infty$  s'exprime par  $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x > A, f(x) < 0$ .

## 2 Limite et continuité

### 2.1 Définitions

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On note  $\mathcal{V}(a)$  l'ensemble des voisinages de  $a$ .

### Définition 5.7 : limite

Soit  $(a, \ell) \in \mathbb{R}^2$ . On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  lorsque  $\forall W \in \mathcal{V}(\ell), \exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in E, x \in V \Rightarrow f(x) \in W$ . On note alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .



Pour parler de la limite de  $f$  en un point  $a$ , il faut que tout voisinage de  $a$  intersecte l'ensemble de définition  $E$  de  $f$ .

**Exemple 5.3**

Soit  $f : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ . Parler de la limite de  $f$  en  $a$  n'a de sens que si  $a \in [\alpha; \beta]$ .

Selon les valeurs de  $\ell$  et de  $a$ , la définition précédente s'écrit différemment :

**1<sup>er</sup> cas :**  $(\ell, a) \in \mathbb{R}^2$ , voir la figure 5.1(a).

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

**2<sup>e</sup> cas :**  $\ell \in \mathbb{R}, a = +\infty$ , voir la figure 5.1(b).

$$\forall \epsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x > A \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

**3<sup>e</sup> cas :**  $\ell = -\infty, a \in \mathbb{R}$ , voir la figure 5.1(c).

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in E, |x - a| < \eta \Rightarrow f(x) < A.$$

**4<sup>e</sup> cas :**  $\ell = +\infty, a = +\infty$ , voir la figure 5.1(d).

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in E, x > B \Rightarrow f(x) > A.$$

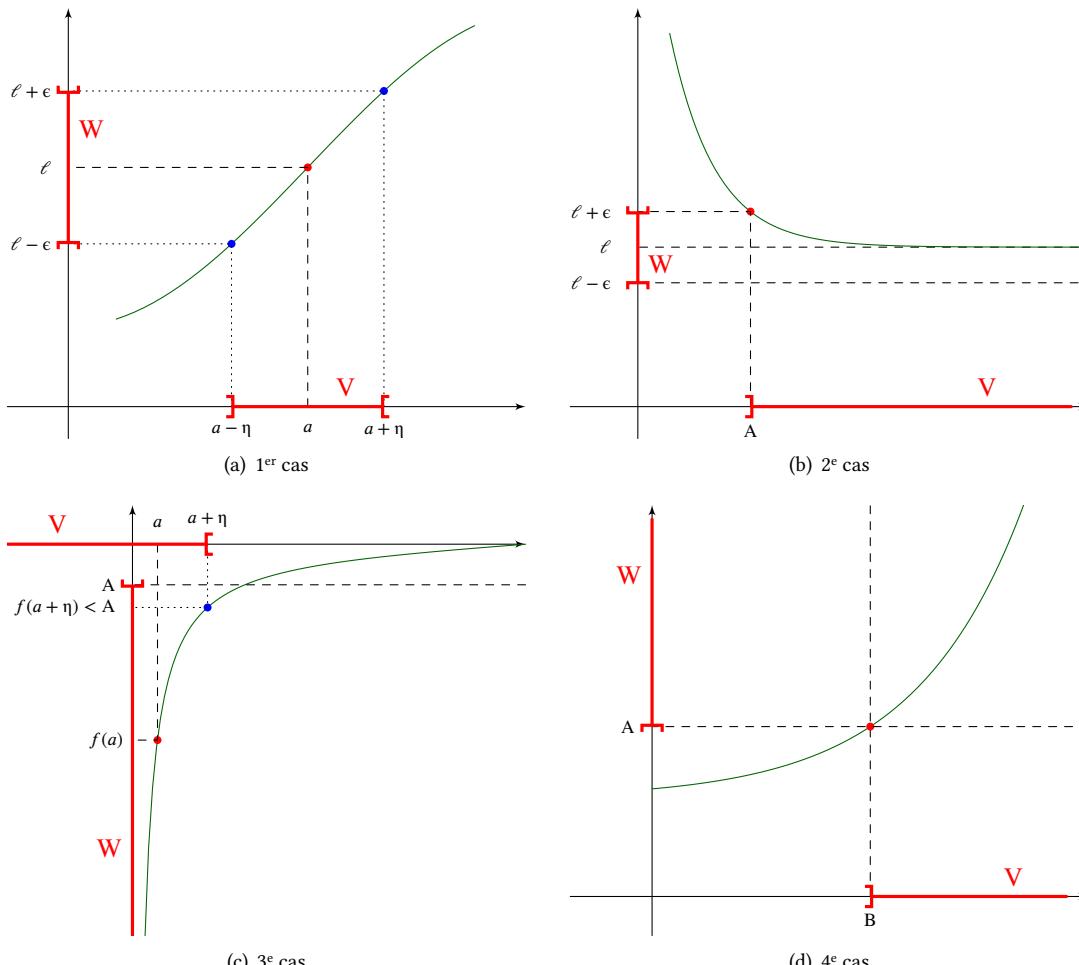


FIGURE 5.1 – Schéma des limites possibles

**Propriété 5.1**

Si  $f$  a une limite  $a \in \mathbb{R}$ , alors cette limite est unique.

**Démonstration 5.1**

Supposons que  $f$  admette deux limites  $\ell_1$  et  $\ell_2$  en  $a$ , et plaçons-nous dans le cas où  $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$ .

On suppose  $\ell_1 \neq \ell_2$ , c'est-à-dire  $\exists \alpha > 0, |\ell_1 - \ell_2| = \alpha$ . Par définition de la limite, on a alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, |x - a| < \eta \Rightarrow |\ell_1 - f(x)| < \epsilon \\ \forall \epsilon > 0, \exists \eta' > 0, \forall x \in E, |x - a| < \eta' \Rightarrow |\ell_2 - f(x)| < \epsilon \end{array} \right.$$

On pose  $\epsilon = \alpha/3$  et  $\eta'' = \min(\eta, \eta')$ . De la sorte,

$$\begin{cases} \forall x \in E, |x - a| < \eta'' \Rightarrow |f(x) - \ell_1| < \epsilon \\ \forall x \in E, |x - a| < \eta'' \Rightarrow |f(x) - \ell_2| < \epsilon \end{cases}$$

Par suite, en utilisant l'inégalité triangulaire, on forme

$$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2|, \forall x \in [a - \eta'' ; a + \eta'']$$

$$\leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2|$$

$$\alpha < \epsilon + \epsilon$$

$$< \frac{2\alpha}{3}, ce qui est absurde$$

D'où il vient nécessairement que  $\ell_1 = \ell_2$ .

□

### Définition 5.8 : continuité en un point

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $E$  est l'ensemble de définition de  $f$ , et soit  $a \in E$ .

On dit que  $f$  est *continue* en  $a$  si  $f$  admet une limite en  $a$ .

Si une telle limite existe, alors elle est finie et vaut  $f(a)$ .

Avec des quantificateurs,  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$ .

### Définition 5.9 : continuité sur un ensemble

Soit  $F$  un sous-ensemble de  $E$ .

On dit que  $f$  est *continue sur  $F$*  lorsque  $f$  est continue en tout point de  $F$  :

$$\forall x \in F, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in F, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

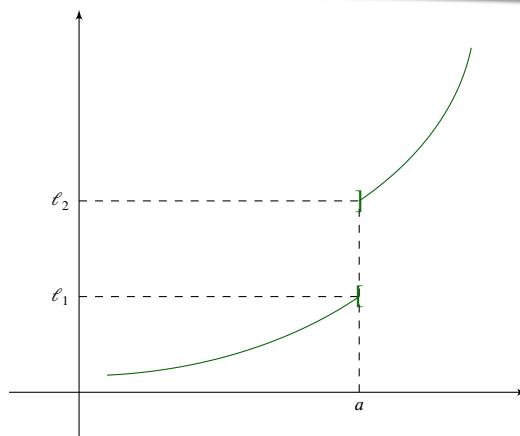
☞ Voir l'exercice 1 du TD 4.

### Définition 5.10 : limite à gauche et à droite

Soit la fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall \epsilon > 0, ]a - \epsilon; a + \epsilon[$  intersecte  $E$ .

On dit que  $f$  admet une *limite à droite* (respectivement à gauche) si  $f|_{E \cap [a; +\infty[}$  (respectivement  $f|_{E \cap [-\infty; a[}$ ) possède une limite en  $a$ .

On note  $f(a^+)$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  (respectivement  $f(a^-)$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ) la limite à droite (respectivement à gauche) de  $f$  quand elle existe.



Sur la figure ci-contre, la fonction  $f$  représentée en vert admet les limites  $\ell_1$  à gauche et  $\ell_2$  à droite, mais pas de limite en  $a$

### Propriété 5.2

Une fonction  $f$  admet une limite en un point  $a$  de son domaine de définition si  $f$  possède une limite à gauche et une limite à droite en ce point, et que ces deux limites valent  $f(a)$ .

**Définition 5.11 : continuité à gauche et à droite**

On dit qu'une fonction  $f$  est *continue à droite* (respectivement à gauche) en un point  $a$  de son domaine de définition si  $f$  possède une limite à droite (respectivement à gauche) en ce point, et que cette limite vaut  $f(a)$ .

**Propriété 5.3**

Une fonction  $f$  est continue en un point de son domaine de définition si et seulement si  $f$  est continue à gauche et à droite en ce point.

💡 Voir l'exercice 2 du TD 4.

**2.2 Opérations sur les limites****Lemme 5.1**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Si  $|f| \leq g$  au voisinage d'un point  $a$  et si  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ , alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ .

**Démonstration 5.2**

Soit  $a \in E$ . Par hypothèses, on a  $\exists \eta > 0, \forall x \in ]a - \eta ; a + \eta[, |f(x)| \leq g(x)$  (inégalité dans le voisinage de  $a$ ) et  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta' > 0, \forall x \in ]a - \eta' ; a + \eta'[, |g(x)| < \epsilon$ .

On pose  $\eta'' = \min(\eta, \eta')$ . Il vient alors  $\forall x \in ]a - \eta'' ; a + \eta'', \begin{cases} |f(x)| \leq g(x) \\ |g(x)| < \epsilon \end{cases}$

Par suite  $|f(x)| < \epsilon$ .

□

**Lemme 5.2**

Soit  $f$  une fonction de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ , alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

**Démonstration 5.3**

Par hypothèse,  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ , ce qui se traduit par  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$ . Comme cela est vrai pour tout  $\epsilon$ , c'est vrai pour un certain  $\epsilon_0 > 0$  et donc  $\exists \eta > 0, \forall x \in ]a - \eta ; a + \eta[, |f(x) - b| < \epsilon_0$ . En utilisant l'inégalité  $|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$ , et en posant  $M = |b| + \epsilon_0$ , on établit que  $|f(x)| < M$ . On a ainsi  $\exists M > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in ]a - \eta ; a + \eta[, |f(x)| < M$ , qui par définition indique que  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

□

**Lemme 5.3**

Soit  $f$  une fonction de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  et soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $b > 0$ . Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b$ , alors  $\exists m > 0$  tel que  $|f(x)| > m$  au voisinage de  $a$ .

**Démonstration 5.4**

On pose  $m = \epsilon = b/2$ . Alors par définition de la limite,  $\exists \eta > 0, \forall x \in ]a - \eta ; a + \eta[, |f(x) - b| < \epsilon$  et par suite  $|b + (f(x) - b)| \geq b - |f(x) - b| > b - \epsilon = b/2 = m > 0$ .

□

**Théorème 5.1 : opérations sur les limites**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $a \in E$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_1 \in \mathbb{R}$  et que  $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell_2 \in \mathbb{R}$ .

**— Limite de  $\lambda f$** 

$\ell_1$	$< 0$	$0$	$> 0$
$-\infty$	$+\infty$	$0$	$-\infty$
valeur finie	$\lambda\ell_1$	$0$	$\lambda\ell_1$
$+\infty$	$-\infty$	$0$	$+\infty$

**— Limite de  $f + g$** 

$\ell_1$	$-\infty$	$\ell_2$ valeur finie	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
valeur finie	$-\infty$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$
$+\infty$	?	$+\infty$	$+\infty$

**— Limite de  $fg$** 

$\ell_1$	$< 0$	$0$	$> 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$
$< 0$	$+\infty$	$\ell_1\ell_2$	$0$	$\ell_1\ell_2$
$0$	?	$0$	$0$	?
$> 0$	$-\infty$	$\ell_1\ell_2$	$0$	$\ell_1\ell_2$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$

**— Limite de  $f/g$** 

$\ell_1$	$< 0$	$0^-$	$0^+$	$> 0$	$\pm\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	?
$< 0$	$\ell_1/\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$	$\ell_1/\ell_2$	$0$
$0$	$0$	?	?	$0$	$0$
$> 0$	$\ell_1/\ell_2$	$-\infty$	$+\infty$	$\ell_1/\ell_2$	$0$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

**Corollaire 5.1**

Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues en un point  $a$  de leurs domaines de définition et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda f$ ,  $f + g$  et  $fg$  sont des fonctions continues en  $a$ . De plus, si  $g(a) \neq 0$ ,  $f/g$  est continue en  $a$ .

**Théorème 5.2**

Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  et soient  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications. Pour  $a \in A$  et  $b \in B$ , si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  et  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = \ell$ .

**Démonstration 5.5**

Soit  $\epsilon > 0$ . Comme  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = \ell$ ,  $\exists \eta > 0$ ,  $\forall y \in B$ ,  $|y - b| < \eta \Rightarrow |g(y) - \ell| < \epsilon$ . Or Puisque  $B = f(A)$ , l'expression précédente peut s'écrire  $\exists \eta > 0$ ,  $\forall x \in A$ ,  $|f(x) - b| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - \ell| < \epsilon$ . Par ailleurs  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  se traduit par  $\exists \eta' > 0$ ,  $\forall x \in A$ ,  $|x - a| < \eta' \Rightarrow |f(x) - b| < \eta$ . D'où il vient  $\forall x \in A$ ,  $|x - a| < \eta' \Rightarrow |g \circ f(x) - \ell| < \epsilon$ . □

**Corollaire 5.2**

Si  $f$  est continue en un point  $a$  de son domaine de définition et si  $g$  est continue en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

**2.3 Propriétés des fonctions continues**

! Soit  $I \subset \mathbb{R}$ . On note  $C^0(I)$  l'ensemble des applications continues sur  $I$ .

**Propriété 5.4**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ . Alors

- 1.  $\lambda f \in C^0(I)$
- 2.  $f + g \in C^0(I)$
- 3.  $fg \in C^0(I)$
- 4.  $f/g \in C^0(I)$ , si  $\forall x \in I$ ,  $g(x) \neq 0$
- 5.  $|f| \in C^0(I)$
- 6.  $\sup(f, g) \in C^0(I)$

**Théorème 5.3 : des valeurs intermédiaires**

Soit  $I = [a ; b]$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose que  $f(a) > f(b)$  (respectivement  $f(a) < f(b)$ ).

Alors  $\forall \gamma \in ]f(b) ; f(a)[$  (respectivement  $\forall \delta \in ]f(a) ; f(b)[$ ),  $\exists c \in ]a ; b[$ ,  $f(c) = \gamma$  (respectivement  $\exists d \in ]a ; b[$ ,  $f(d) = \delta$ ).

**Démonstration 5.6**

Plaçons-nous dans le cas où  $f(a) < f(b)$  (la démarche est similaire dans le second cas).

Soit  $\delta \in ]f(a); f(b)[$ . On pose  $A = \{x \in [a; b] \mid f(x) \leq \delta\}$ .

Alors on a  $f(a) \leq \delta$  (et donc  $a \in A$ ) mais aussi  $f(b) > \delta$ . A est donc un ensemble non vide, majoré par  $b$  : il possède donc une borne supérieure et on pose  $d = \sup(A)$ . Il faut donc montrer que  $f(d) = \delta$ .

– Supposons que  $f(d) < \delta$ .

Alors  $\exists \epsilon > 0, \forall x \in ]d - \epsilon; d + \epsilon[, f(x) < \delta$ . Cela reste bien sûr vrai  $\forall x \in ]d; d + \epsilon[ \subset ]d - \epsilon; d + \epsilon[, ce qui signifie donc  $\exists x > d, x \in A$ , contredisant directement le fait que  $d = \sup(A)$ . Donc  $f(d) \geq \delta$ .$

– Supposons maintenant que  $f(d) > \delta$ .

Alors  $\exists \epsilon > 0, \forall x \in ]d - \epsilon; d + \epsilon[, f(x) > \delta$ . Donc  $\exists x_0 \in ]d - \epsilon; d] \subset A, f(x_0) > \delta$ . Cependant, par définition même de A, on a aussi  $f(x_0) \leq \delta$ .

L'hypothèse menant à cette contradiction est donc fausse :  $f(d) \leq \delta$ .

– En conclusion, comme  $f(d)$  n'est ni strictement inférieur ni strictement supérieur à  $\delta$ , on a  $f(d) = \delta$ .  $\square$

**Corollaire 5.3**

Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f(a) > f(b)$  (ou  $f(a) < f(b)$ ).

Alors  $f([a; b])$  est un intervalle.

**Démonstration 5.7**

Comme  $f$  est continue et strictement monotone, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi,  $\forall \gamma \in ]f(a); f(b)[$ , on peut trouver  $c \in [a; b]$  tel que  $\gamma = f(c)$  et donc, comme  $[a; b]$  est un intervalle, on a  $c \in [a; b]$  et par suite  $\gamma \in f([a; b])$ .  $\square$

**Théorème 5.4**

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle fermé borné I (de la forme  $[a; b]$ ).

Alors  $f$  admet un maximum et un minimum global sur I.

Autrement dit,  $f$  est bornée et atteint ses bornes.



Les trois hypothèses « continue », « fermé » et « borné » sont nécessaires :

- $f_1 : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas continue en 0 et n'admet pas de maximum global.  
 $x \mapsto \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
- $f_2 : ]0; 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas définie sur un intervalle fermé et a ni maximum ni minimum.  
 $x \mapsto x$
- $f_3 : [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  n'est pas définie sur un intervalle borné et n'admet pas de maximum.  
 $x \mapsto \sqrt{x}$

Voir l'exercice 3 du TD 4.

**Théorème 5.5**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et strictement monotone. On note  $J = f(I)$ . Alors

1.  $f$  définit une bijection de I dans J;
2. la bijection réciproque  $f^{-1} : J \rightarrow I$  est continue sur J.

**Démonstration 5.8**

D'après le corollaire 5.3, J est bien un intervalle, c'est-à-dire que tout élément compris entre deux éléments de J est lui-même dans J.

**5.5-1** Plaçons-nous dans le cas où  $f$  est strictement croissante (le raisonnement est équivalent si  $f$  est strictement décroissante).

$\forall (x, y) \in I^2$ , si  $x \neq y$ , alors soit  $x < y$  et alors  $f(x) < f(y)$ , soit  $x > y$  et  $f(x) > f(y)$ . Dans les deux cas on a bien  $f(x) \neq f(y)$ . Donc  $f$  est injective. Comme cela a été indiqué à la suite de la définition 1.35 (bijeクトivité) p. 17,  $f$  est alors une bijection de I dans J = f(I).

**5.5-2** Soit  $y_0 \in J$ . Montrons que  $f^{-1}$  est continue en  $y_0$ , en considérant que ce point n'est pas une borne de J (les autres cas se traitent de façon similaire).

Soit  $x_0 = f^{-1}(y_0)$  et soit  $\epsilon > 0$ , de sorte que  $[x_0 - \epsilon ; x_0 + \epsilon] \subset I$ . Alors  $\forall y \in J, |f^{-1}(y_0) - f^{-1}(y)| \leq \epsilon \Leftrightarrow x_0 - \epsilon \leq f^{-1}(y) \leq x_0 + \epsilon \Leftrightarrow f(x_0 - \epsilon) \leq y \leq f(x_0 + \epsilon)$ . Or la croissance de  $f$  est stricte donc les inégalités précédentes sont strictes. On peut donc prendre  $\eta > 0$  tel que  $[y_0 - \eta ; y_0 + \eta] \subset [f(x_0 - \epsilon) ; f(x_0 + \epsilon)]$ . Et on a alors  $\forall y \in J, |y - y_0| \leq \eta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \epsilon$ , ce qui signifie bien que  $f^{-1}$  est continue en  $y_0$ .  $\square$

### 3 Compléments

#### 3.1 Continuité uniforme

##### Définition 5.12 : continuité uniforme

Soit  $I$  un intervalle et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *uniformément continue* sur  $I$  quand  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, \forall y \in I, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ .

C'est donc une propriété plus forte que la continuité « simple » qui s'écrit  $\forall x \in F, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in F, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ . Ainsi dans la continuité uniforme,  $\eta$  dépend toujours de  $\epsilon$ , mais plus du point considéré : il est *uniforme* sur  $F$ .

##### Propriété 5.5

Soit  $I$  un intervalle et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , uniformément continue sur  $I$ . Alors  $f$  est continue sur  $I$ .

##### Théorème 5.6 : de Heine

Si  $f$  est une fonction continue sur un segment, alors elle est uniformément continue sur ce segment.

#### 3.2 Extension aux fonctions à valeurs complexes

##### Définition 5.13 : limite complexe

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  $f$  a pour *limite*  $\ell \in \mathbb{C}$  en un point  $x_0 \in I$  si  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$ .

On dit que  $f$  est continue en un point  $x_0 \in I$  si  $f$  admet une limite en  $x_0$ .

##### Propriété 5.6

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est continue en un point  $x_0 \in I$  si et seulement si  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  sont continues en  $x_0$ .

Le théorème 5.1 (**opérations sur les limites**) p. 53 reste vrai lorsque les fonctions  $f$  et  $g$  sont à valeurs dans  $\mathbb{C}$ .

# Chapitre 6

## Dérivation

### Sommaire

---

1	Notion d'application dérivable . . . . .	57
1.1	Définition . . . . .	57
1.2	Dérivée à gauche et à droite . . . . .	58
1.3	Dérivabilité et continuité . . . . .	58
2	Opérations sur les dérivées . . . . .	58
2.1	Somme . . . . .	58
2.2	Produit . . . . .	59
2.3	Composition . . . . .	59
2.4	Inverse, quotient . . . . .	59
2.5	Réciproque . . . . .	60
3	Dérivées d'ordres supérieurs . . . . .	60
3.1	Opérations sur les applications $C^k$ . . . . .	61
4	Propriétés des fonctions dérивables sur un intervalle . . . . .	61
4.1	Extremum local . . . . .	62
4.2	Théorème de Rolle . . . . .	62
4.3	Théorème des accroissements finis . . . . .	62
4.4	Dérivée et sens de variation . . . . .	63
5	Extension aux applications à valeurs complexes . . . . .	64
5.1	Généralités . . . . .	64
5.2	Ce qui reste vrai . . . . .	64
5.3	Ce qui n'est plus vrai . . . . .	64

---

En complément, on pourra se référer

- à la section 1.6.1 *Dérivation* p. 28 de ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011;
- aux fiches 38 (p. 154) et 57 (p. 230) de FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013;
- aux chapitres 6 *Dérivée d'une fonction* p. 85, 7 *Utilisation de la dérivée* p. 97 et 11 *Utilisation des dérivées successives* p. 177 de LIRET et MARTINAIS 1997b ;
- aux chapitres 10 *Fonctions d'une variable réelle. Dérivée et différentielle* p. 294 et 14 *Formules de Taylor. Développements limités. Applications* p. 371 de AZOULAY, AVIGNANT et AULIAC 1996.

Sauf mention contraire, on considère dans ce chapitre que I et J deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}$ .

## 1 Notion d'application dérivable

### 1.1 Définition

#### Définition 6.1 : dérivabilité

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *dérivable* en  $x_0 \in I$  si

- il existe un réel noté  $f'(x_0)$  tel que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ ;
- il existe une application  $\phi$  continue en  $x_0$  telle que  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\phi(x)$ , avec  $\phi(x_0) = f'(x_0)$ .

On dit que  $f$  est dérivable sur un intervalle lorsqu'elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

La droite d'équation  $y = f(x) + (x - x_0)f'(x_0)$  est la tangente à la courbe de  $f$  au point  $(x_0; f(x_0))$ .

## 1.2 Dérivée à gauche et à droite

### Définition 6.2 : dérivabilité à gauche et à droite

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ . On dit que  $f$  est *dérivable à gauche* (respectivement à droite) en  $x_0$  si  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  possède une limite finie quand  $x$  tend vers  $x_0^-$  (respectivement vers  $x_0^+$ ).

Si  $f$  est dérivable à gauche ou à droite en un point, sa courbe représentative admet des demi-tangentes à gauche ou à droite. On note  $f'_g(x_0)$  et  $f'_d(x_0)$  les dérivées à gauche et à droite de  $f$  en  $x_0$ .

### Propriété 6.1

- Si  $f$  est dérivable en  $x_0$ , alors  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$ .
- Si  $f$  est dérivable à gauche et à droite en  $x_0$  et si  $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$ .

### Exemple 6.1

- $f : x \mapsto |x|$  est dérivable à gauche et à droite en 0, mais n'est pas dérivable en 0.
- $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$  n'est dérivable ni à droite ni à gauche en 0 car  $\frac{x \sin(1/x)}{x} = \sin(1/x)$  n'a pas de limite à droite ni à gauche en 0.

## 1.3 Dérivabilité et continuité

### Théorème 6.1

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable en un point  $x_0 \in I$ .  
Alors  $f$  est continue en  $x_0$ .



La réciproque est fausse.

### Démonstration 6.1

Comme  $f$  est dérivable en  $x_0$ , il existe une application  $\phi$  continue en  $x_0$  telle que  $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\phi(x)$ .  
Donc  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  :  $f$  est continue en  $x_0$ .

□

## 2 Opérations sur les dérivées

### 2.1 Somme

### Théorème 6.2

Soient deux fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , soit  $x_0 \in I$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont dériviales en  $x_0$ .

Alors

- $f + g$  est dérivable en  $x_0$  et  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$ ,
- $\lambda f$  est dérivable en  $x_0$  et  $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ .

**Démonstration 6.2**

Comme  $f$  et  $g$  sont dérивables en  $x_0$ , il existe deux applications  $\phi$  et  $\psi$  continues en  $x_0$  telles que  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\phi(x)$  et  $g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\psi(x)$ .

Il vient alors  $(f + g)(x) = (f + g)(x_0) + (x - x_0)(\phi(x) + \psi(x))$ .

$$\begin{aligned} \text{Donc } f + g \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } (f + g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \phi(x_0) + \psi(x_0) \\ &= f'(x_0) + g'(x_0) \end{aligned}$$

□

**2.2 Produit****Théorème 6.3**

Soient deux fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont dériviales en  $x_0$ .

Alors  $fg$  est dérivable en  $x_0$  et  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$ .

**Démonstration 6.3**

Comme  $f$  et  $g$  sont continues en  $x_0$ , il existe deux applications  $\phi$  et  $\psi$  continues en  $x_0$  telles que  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\phi(x)$  et  $g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\psi(x)$ .

Il vient alors  $f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0) + (x - x_0)(\phi(x_0)g(x_0) + f(x_0)\psi(x_0) + (x - x_0)\phi(x)\psi(x))$

$$\begin{aligned} \text{Donc } fg \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } (fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \phi(x_0)g(x_0) + f(x_0)\psi(x_0) \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

□

**2.3 Composition****Théorème 6.4**

Soient  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ , soient  $x_0 \in I$  et  $y_0 = f(x_0) \in J$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont respectivement dériviales en  $x_0$  et  $y_0$ .

Alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et  $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$ .

**Démonstration 6.4**

Comme  $f$  et  $g$  sont respectivement continues en  $x_0$  et  $y_0 = f(x_0)$ , il existe deux applications  $\phi$  et  $\psi$  respectivement continues en  $x_0$  et  $y_0$  telles que  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\phi(x)$  et  $g(y) = g(y_0) + (y - y_0)\psi(y)$ .

Avec  $y = f(x)$ , la dernière égalité donne  $g(f(x)) = g(f(x_0)) + (f(x) - f(x_0))\psi(f(x))$ . En utilisant la définition de la dérivarilité de  $f$  en  $x_0$ , on a alors  $g(f(x)) = g(f(x_0)) + (x - x_0)\phi(x)\psi(f(x))$  :  $g \circ f$  est

$$\begin{aligned} \text{dérivable en } x_0 \text{ et } (g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \phi(x_0)\psi(f(x_0)) \\ &= f'(x_0)g'(f(x_0)) \end{aligned}$$

□

☞ Voir les exercices 1 à 5 du TD 5.

**2.4 Inverse, quotient****Théorème 6.5**

Soient  $f$  et  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in I$ . On suppose que  $f$  et  $g$  sont dériviales en  $x_0$  et que  $g(x_0) \neq 0$ .

Alors  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont dériviales en  $x_0$  avec  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$  et  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$ .

**Démonstration 6.5**

Comme  $g$  est continue en  $x_0$ , il existe une application  $\psi$  continue en  $x_0$  telle que  $g(x) = g(x_0) + (x - x_0)\psi(x)$ . Formons  $\frac{1}{g} : \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{g(x_0) + (x - x_0)\psi(x)}$ . D'où il vient  $\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} = (x - x_0) \frac{-\psi(x)}{g(x_0)^2 + (x - x_0)g(x_0)\psi(x)}$ . Par suite  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-\psi(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ . Comme  $\psi$  est continue en  $x_0$  et que  $g(x_0) \neq 0$ , cette limite est bien définie.

Pour montrer la dérivable de  $f/g$ , on utilise le résultat précédent en considérant que  $f/g = f \times 1/g$ .

□

💡 Voir l'exercice 6 du TD 5.

**2.5 Réciproque****Théorème 6.6**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une bijection continue. Soit  $x_0 \in E$ . On pose  $y_0 = f(x_0) \in F$ . On suppose que  $f$  est dérivable en  $x_0$  et que  $f'(x_0) \neq 0$ .

Alors l'application réciproque  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0$  et  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ .

**Démonstration 6.6**

Comme  $f$  est dérivable en  $x_0$ , il existe une application  $\phi$  continue en  $x_0$  telle que  $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\phi(x)$ . De plus,  $f'(x_0) = \phi(x_0) \neq 0$ . Ainsi, dans un voisinage de  $x_0$  on a  $x - x_0 = \frac{f(x) - f(x_0)}{\phi(x)}$ . Avec  $x = f^{-1}(y)$  et  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ , on a alors  $f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + (y - y_0) \frac{1}{\phi(f^{-1}(y))}$ .

Or, puisque  $\phi$  est continue en  $x_0$ ,  $\phi \circ f^{-1}$  est continue en  $y_0$ .

Donc  $f^{-1}$  est dérivable en  $y_0$  et  $(f^{-1})'(y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0}$ .

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\phi(f^{-1}(y_0))} \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \end{aligned}$$

□

**3 Dérivées d'ordres supérieurs****Définition 6.3 : dérivées d'ordres supérieurs**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On note  $f^{(0)} = f$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Si  $f^{(n-1)}$  existe et si elle est dérivable sur  $I$ , on définit  $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ .

Si  $f^{(n)}$  existe, on dit que  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $f^{(n)}$  est la dérivée  $n$ -ième de  $f$ .

On note respectivement  $f'$ ,  $f''$  et  $f'''$  les dérivées première, deuxième et troisième de  $f$ , au lieu de  $f^{(1)}$ ,  $f^{(2)}$  et  $f^{(3)}$ .

**Définition 6.4 : fonction de classe  $C^n$** 

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $I$  et on note  $f \in C^n(I)$  si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et si  $f^{(n)}$  est continue sur  $I$ .

Si  $\forall n \in \mathbb{N}, f \in C^n(I)$ , on dit que  $f$  est de classe  $C^\infty$ .

**Théorème 6.7 : formule de Leibniz (XVIII<sup>e</sup>)**

Soient  $f$  et  $g$  deux applications de classe  $C^n(I)$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$ ). Alors  $fg$  est  $n$  fois dérivable et

$$\forall x \in I, (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x).$$

Voir les définitions 1.22 et 1.30.

### Démonstration 6.7

Soit un naturel  $n$  et soient deux applications  $f$  et  $g$  de classe  $C^n(I)$ . On note  $P_n$  la proposition «  $(fg)$  est dérivable  $n$  fois et  $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}$  ».

- Cette proposition est trivialement vraie pour  $n = 0$ . On a déjà établit (théorème 6.3 p. 59) que pour  $n = 1$ ,  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ . Comme  $f$ ,  $f'$ ,  $g$  et  $g'$  sont toutes continues sur  $I$ , on a bien que  $(fg)'$  aussi. Donc l'initialisation est vérifiée aussi bien pour  $n = 0$  que pour  $n = 1$ .
- Supposons  $P_n$  pour un certain  $n$  et montrons  $P_{n+1}$ .

On suppose donc que  $f$  et  $g$  sont  $(n+1)$  fois dérивables. Comme on a  $P_n$ , alors  $(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$ . Or tous les termes qui composent cette fonction sont dérivables, donc

$(fg)^{(n+1)}$  est dérivable et ainsi  $fg$  est  $n+1$  fois dérivable.

$$(fg)^{(n+1)} = ((fg)^{(n)})'$$

$$= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \right)' = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k)} g^{(n-k)})'$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)})$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

on pose  $k' = k + 1$  : quand  $k$  varie de 0 à  $n$ ,  $k'$  varie de 1 à  $n+1$

$$= \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} f^{(k')} g^{(n+1-k')} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k'=1}^n \binom{n}{k'-1} f^{(k')} g^{(n+1-k')} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

$$= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left[ \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right]$$

$$= f^{(n+1)} g + f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right] \text{ (cf. propriété 1.12-2 p. 14)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \left[ \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right]$$

- La propriété étant donc vraie au rang  $n+1$ , elle est vraie pour tout  $n$ .

□

## 3.1 Opérations sur les applications $C^k$

### Propriété 6.2

Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , de classe  $C^k$  sur  $I$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

- $f + g \in C^k(I)$
- $\lambda f \in C^k(I)$
- $fg \in C^k(I)$
- si  $f$  ne s'annule pas sur  $I$ ,  $1/f \in C^k(I)$
- si  $f : I \rightarrow J$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f \in C^k(I)$  et  $g \in C^k(J)$ , alors  $g \circ f \in C^k(I)$ .

## 4 Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On note  $\overset{\circ}{I}$  le plus grand intervalle ouvert inclus dans  $I$  :  $\overset{\circ}{I}$  est l'intérieur de  $I$ .

► **Exemple 6.2**

Si  $I = [2 ; 3]$ , alors  $\mathring{I} = ]2 ; 3[$ .

## 4.1 Extremum local

**Théorème 6.8**

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$  et soit  $x_0 \in \mathring{I}$ .

Alors, si  $x_0$  est un extremum local (voir définition 5.2 p. 49), on a  $f'(x_0) = 0$ .

### Démonstration 6.8

Supposons que  $f$  admet un maximum local en  $x_0$ . Alors  $\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$ ,  $\forall x \in V$ ,  $f(x) \leq f(x_0)$ .

De plus  $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} : f'_g(x_0) \geq 0$  et  $f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} : f'_d(x_0) \leq 0$ .

Or  $f$  est dérivable en  $x_0$ , donc  $f'_g(x_0) = f'_d(x_0) = f'(x_0) = 0$ .



□

Il est important de prendre  $x_0 \in \mathring{I}$  et non dans  $I$ . Par exemple  $f : \begin{cases} [1 ; 2] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x \end{cases}$  admet un maximum en 2, mais  $f'(2) \neq 0$ .

## 4.2 Théorème de Rolle

**Théorème 6.9 : de Rolle**

Soit  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est de classe  $C^0$  sur  $[a ; b]$  et dérivable sur  $]a ; b[$ . On suppose de plus que  $f(a) = f(b)$ .

Alors  $\exists c \in ]a ; b[$ ,  $f'(c) = 0$ .

### Démonstration 6.9

- Si  $f$  est constante sur  $[a ; b]$ , alors  $\forall x \in ]a ; b[$ ,  $f'(x) = 0$ .
- Si  $f$  n'est pas constante,  $\exists x_0 \in ]a ; b[$ ,  $f(x_0) \neq f(a)$ . Prenons par exemple le cas où  $f(x_0) > f(a)$ . Comme  $f$  est continue sur le fermé borné  $[a ; b]$ ,  $f$  admet un maximum global sur cet intervalle (cf. théorème 5.4). On note  $c$  un point où  $f$  atteint ce maximum. Or  $f(x_0) > f(a)$ , donc  $c \neq a$  et  $c \neq b$  et  $c \in ]a ; b[$ . Ainsi, comme  $f$  est dérivable sur  $]a ; b[$  et que  $c$  est un extremum local sur ce même intervalle, on peut appliquer le théorème 6.8 et alors  $f'(c) = 0$ .

□

## 4.3 Théorème des accroissements finis

**Théorème 6.10 : des accroissements finis**

Soit une fonction  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $[a ; b]$  et dérivable sur  $]a ; b[$ .

Alors  $\exists c \in ]a ; b[$ ,  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

### Démonstration 6.10

Soit  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $[a ; b]$  et dérivable sur  $]a ; b[$ .

On pose  $A = (a ; f(a))$  et  $B = (b ; f(b))$ . Notons  $g$  la fonction affine dont le graphe est la droite (AB). On a alors  $g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ .

On définit  $h = f - g$ . Étant données les propriétés de  $f$  et de  $g$ , on a que  $h$  est continue sur  $[a ; b]$ , dérivable sur  $]a ; b[$  et  $h(a) = h(b) = 0$ .

L'application du théorème de Rolle (théorème 6.9) à  $h$  sur  $[a ; b]$  permet alors d'écrire que  $\exists c \in ]a ; b[$ ,  $h'(c) = 0$ .

D'où il vient  $\exists c \in ]a ; b[$ ,  $f'(c) - g'(c) = 0$ , et par conséquent,  $\exists c \in ]a ; b[$ ,  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

□

D'un point de vue géométrique, ce théorème affirme qu'il existe un point  $c$  tel que la tangente à la courbe au point  $(c ; f(c))$  est parallèle à la droite définie par les points  $(a ; f(a))$  et  $(b ; f(b))$ . Attention, ce point n'est pas forcément unique, comme le montre la figure 6.1.

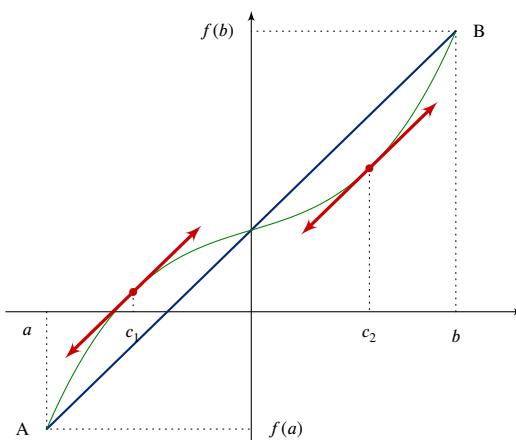


FIGURE 6.1 – Illustration du théorème des accroissements finis

**Corollaire 6.1 : inégalité des accroissements finis**

Soit  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur  $[a ; b]$  et dérivable sur  $]a ; b[$ . On suppose que  $f'$  est bornée sur  $]a ; b[$ , c'est-à-dire  $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, m \leq M$  tels que  $\forall x \in ]a ; b[, m \leq f'(x) \leq M$ .  
Alors  $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$ .

💡 Voir l'exercice 7 du TD 5.

**Propriété 6.3**

Soit I un intervalle et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est continue sur I et dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ . On suppose de plus que  $\exists k > 0, \forall x \in \overset{\circ}{I}, |f'(x)| \leq k$ .  
Alors  $f$  est  $k$ -lipschitzienne sur I (cf. la définition 5.5 p. 50).

**Démonstration 6.11**

Soit  $(x, y) \in I^2$  avec  $x < y$ . Alors  $f$  est continue sur  $[x ; y]$  et dérivable sur  $]x ; y[$ . Le théorème des accroissements finis donne ainsi  $\exists c \in ]x ; y[, \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c)$ . D'où il vient  $\left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| = |f'(c)| \leq k$  et  $|f(y) - f(x)| \leq k |y - x|$ , ce qui montre que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne. □

**4.4 Dérivée et sens de variation****Propriété 6.4**

Soit I un intervalle et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  est continue sur I et dérivable sur  $\overset{\circ}{I}$ . Alors, si  $\forall x \in \overset{\circ}{I}$

- $f'(x) = 0$ ,  $f$  est constante sur I,
- $f'(x) \geq 0$ ,  $f$  est croissante sur I,
- $f'(x) \leq 0$ ,  $f$  est décroissante sur I,
- $f'(x) > 0$ ,  $f$  est strictement croissante sur I,
- $f'(x) < 0$ ,  $f$  est strictement décroissante sur I.

**Démonstration 6.12**

Soit  $(x, y) \in I^2$  avec  $x < y$ . Alors  $f$  est continue sur  $[x ; y]$  et dérivable sur  $]x ; y[$ .

Le théorème des accroissements finis donne ainsi  $\exists c \in ]x ; y[, f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$ .

Or  $y - x > 0$  et  $f'(c) > 0$  (par exemple). Donc  $f(y) - f(x) > 0$  et par suite  $f(y) > f(x)$  :  $f$  est strictement croissante sur I.

La démarche est la même dans les autres cas. □

**Corollaire 6.2**

Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$  et dérivables sur  $\overset{\circ}{I}$  et si  $\forall x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = g'(x)$ , alors  $\exists c \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + c$ .

## 5 Extension aux applications à valeurs complexes

### 5.1 Généralités

**Définition 6.5 : dérivabilité d'une fonction complexe**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ . On dit que  $f$  est *dérivable* en  $x_0 \in I$  si  $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$  a une limite complexe quand  $x$  tend vers  $x_0$ .

**Propriété 6.5**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et soit  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ . Alors  $f$  est dérivable sur  $I$  si et seulement si  $\Re(f)$  et  $\Im(f)$  le sont aussi. De plus  $f' = (\Re(f))' + i(\Im(f))'$ .

### 5.2 Ce qui reste vrai

**Propriété 6.6**

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ , dérivables sur  $I$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

- $f + g$  est dérivable sur  $I$
- $fg$  est dérivable sur  $I$
- $\lambda f$  est dérivable sur  $I$
- $f + g$  est dérivable sur  $I$
- $f/g$  est dérivable sur  $I$ , si  $g$  ne s'annule pas sur  $I$
- $g \circ f$  est dérivable sur  $I$ , (avec  $f : I \rightarrow J$  dérivable sur  $I$  et  $g : J \rightarrow \mathbb{C}$  dérivable sur  $J$ ).

**Théorème 6.11 : inégalité des accroissements finis**

Soit une application  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{C}$ , continue sur  $[a ; b]$  et dérivable sur  $]a ; b[$ . On suppose que  $\exists M \in \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in ]a ; b[, |f'(x)| \leq M$ .

Alors  $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$ .

**Démonstration 6.13**

On pose  $\theta = \arg(f(b) - f(a))$ . Alors  $f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)| e^{i\theta}$ .  
 ∀  $x \in [a ; b]$ , on pose  $g(x) = \Re(e^{i\theta} f(x))$ . Alors  $g(b) - g(a) = \Re(e^{i\theta}(f(b) - f(a))) = |f(b) - f(a)|$ . Comme  $g$  est continue sur  $[a ; b]$  et dérivable sur  $]a ; b[$ , d'après le théorème 6.10 (des accroissements finis) p. 62,  $\exists c \in ]a ; b[, \frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c)$ . Or  $|g'(c)| = |\Re(e^{i\theta} f'(c))| \leq |e^{i\theta} f'(c)| = |f'(c)| \leq M$ . Et ainsi  $|f(b) - f(a)| \leq M |b - a|$ . □

### 5.3 Ce qui n'est plus vrai

Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis ne s'étendent pas aux fonctions à valeurs complexes.

**Exemple 6.3**

$f : \begin{array}{ccc} [0 ; 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array}$  est continue sur  $[0 ; 2\pi]$  et dérivable sur  $]0 ; 2\pi[$ . De plus  $f(0) = f(2\pi)$ , mais  $\forall c \in ]0 ; 2\pi[, f'(c) \neq 0$ .



## Chapitre 7

# Fonctions usuelles

### Sommaire

---

1	Étude de fonction . . . . .	67
2	Fonctions polynomiales et rationnelles . . . . .	69
2.1	Fonctions polynomiales . . . . .	69
2.2	Fonctions rationnelles . . . . .	71
3	Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances . . . . .	75
3.1	Fonction exponentielle . . . . .	75
3.2	Fonction logarithme népérien . . . . .	77
3.3	Fonctions exponentielles et logarithmes de base quelconque . . . . .	78
3.4	Croissances comparées . . . . .	79
4	Fonctions circulaires et réciproques . . . . .	80
4.1	Fonctions circulaires directes . . . . .	80
4.2	Fonctions circulaires réciproques . . . . .	82
5	Fonctions hyperboliques et réciproques . . . . .	86
5.1	Fonctions hyperboliques directes . . . . .	86
5.2	Fonctions hyperboliques réciproques . . . . .	89
6	Fonctions échelon, Dirac, rampe et créneau . . . . .	93
6.1	Fonction échelon . . . . .	93
6.2	Fonction Dirac . . . . .	93
6.3	Fonction rampe . . . . .	94
6.4	Fonction créneau . . . . .	94

---

En complément, on pourra se référer

- aux sections 1.4 *Fonctions usuelles* p. 21 et 2.1 *Fonctions réciproques* p. 61 de ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011 ;
- aux fiches 39 et 40 (p. 158 à 165) et 57 (p. 230) de FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013 ;
- aux chapitres 8 *Fonctions usuelles* p. 117 et 14 *Étude de fonctions* p. 227 de LIRET et MARTINAIS 1997b ;
- aux chapitres 11 *Fonctions trigonométriques réciproques* p. 308, 12 *Primitives. Fonctions exponentielles et logarithmiques. Fonctions puissances* p. 330 et 13 *Fonctions hyperboliques directes et inverses* p. 347 de AZOULAY, AVIGNANT et AULIAC 1996.

## 1 Étude de fonction

L'étude d'une fonction s'effectue suivant le schéma suivant :

1. détermination de l'ensemble de définition (voir définition 1.32 p. 16),
2. réduction du domaine d'étude par étude de la parité (voir définition 5.3 p. 50) et de la périodicité (voir définition 5.4 p. 50),
3. continuité, dérivabilité et mise en évidence des points particuliers,
4. sens de variations,
5. points remarquables (aux bornes de l'ensemble de définition) : si  $x_0$  est un tel point, on regarde si  $f(x)$  a une limite  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $x_0$ . Si  $\ell$  est finie,  $f$  est prolongeable par continuité en  $x_0$ , sinon la courbe représentative admet une asymptote verticale en  $x_0$ .

6. étude en  $\pm\infty$  pour la recherche d'asymptotes et de directions asymptotiques : si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$  admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$ , alors la courbe représentative de  $f$  admet une direction asymptotique. Si  $\ell$  est finie, on étudie  $f(x) - \ell x$  et son éventuelle limite  $\ell'$  en  $\pm\infty$  : si  $\ell'$  est finie, la droite d'équation  $d : y = \ell x + \ell'$  est asymptote à la courbe ; si  $\ell' = \pm\infty$ , on a une branche parabolique dans la direction  $y = \ell x$  : la courbe regarde dans la direction  $y = \ell x$  tout en s'en éloignant.

☞ Voir les exercices 1, 2 et 5 du TD 6.

## 2 Fonctions polynomiales et rationnelles

### 2.1 Fonctions polynomiales

#### Définition 7.1 : fonction polynomiale

On appelle *fonction polynomiale* toute fonction de la forme  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , avec  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $a_n \neq 0$ , on dit que la fonction est de degré  $n$  : c'est l'exposant le plus grand dont le coefficient associé est non nul.

On note  $\mathbb{C}[x]$  l'ensemble des polynômes à coefficients complexes ( $\mathbb{R}[x]$  si les coefficients sont réels). La notation  $P \in \mathbb{C}_n[x]$  indique que  $P$  est un polynôme à coefficients complexes, de degré au plus  $n$ .

#### Propriété 7.1

- Les fonctions polynomiales sont continues et dérивables sur  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et soit  $k \in \mathbb{Z}$ . La dérivée de  $f : x \mapsto \lambda x^k$  est  $f' : x \mapsto \lambda kx^{k-1}$ .
- Soit  $P$  un polynôme de degré  $n$ . Les limites en  $\pm\infty$  de  $P$  sont celles de  $a_nx^n$  car  $P(x) = a_nx^n \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right)$ , si  $x \neq 0$  avec  $a_n \neq 0$ , et la parenthèse tend vers 1 en  $\pm\infty$ .

#### Définition 7.2 : racine

Soit  $P \in \mathbb{C}_n[x]$  ou  $P \in \mathbb{R}_n[x]$ . On appelle *racine* de  $P$  tout point  $\alpha$  tel que  $P(\alpha) = 0$ .

Si  $\alpha$  est racine de  $P$ , alors on peut trouver un unique  $Q \in \mathbb{C}_{n-1}[x]$  tel que  $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ .

On dit que  $\alpha$  est une racine de multiplicité  $\mu$  s'il est possible de factoriser  $P$  par  $(x - \alpha)^\mu$ . Dans ce cas,  $\alpha$  est aussi racine des dérivées successives de  $P$ , jusqu'à celle d'ordre  $\mu - 1$ .

Pour calculer les racines d'un polynôme, on peut

- trouver des racines évidentes (généralement 0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ )
- repérer une identité remarquable dans le polynôme
- effectuer un changement de variable
- utiliser la méthode ci-dessous

La méthode présentée ici permet de trouver dans certains cas des racines « évidentes » d'un polynôme. Considérons le polynôme  $P$  défini par  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ .

Alors les  $m$  racines  $x_k$  ( $1 \leq k \leq m$ ) de  $P$  vérifient le système  $\begin{cases} \sum_{k=1}^m x_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ \prod_{k=1}^m x_k = (-1)^m \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$  !

Cela ne signifie pas que les racines sont forcément entières...

Si  $P$  admet des racines entières (c'est-à-dire  $x_k \in \mathbb{Z}$ ), alors il faut les considérer parmi les diviseurs de  $\frac{a_0}{a_n}$ .

De plus,

- si les coefficients du polynôme sont tous positifs, alors les racines entières du polynôme sont toutes négatives,
- si les coefficients sont alternativement positif et négatif (le coefficient du monôme de plus haut degré étant positif), alors les racines entières sont toutes positives,
- si le signe des coefficients n'est pas régulier, alors il y a à la fois des racines positives et des racines négatives.

#### Exemple 7.1

Soit le polynôme réel  $P$  défini sur  $\mathbb{R}$  par  $P(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$ . Il est clair que 0 est racine :  $P(x) = x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = xQ(x)$ .

Pour déterminer les autres racines, on peut chercher d'autres solutions évidentes. La somme des racines de  $Q$  vaut 3, tandis que leur produit vaut 1. De plus, les coefficients de  $Q$  sont alternés (en commençant par un positif). Alors les trois racines sont positives et figurent parmi les diviseurs de 1 (qui sont  $\pm 1$ ). Si ces racines sont entières, alors 1 en est une. En effet,  $Q(1) = 1^3 - 3 + 3 - 1 = 0$ .

En effectuant la division euclidienne de  $Q$  par  $(x - 1)$ , on trouve un reste nul et un quotient égal à  $x^2 - 2x + 1$  dans lequel on identifie une identité remarquable.

Ainsi  $P(x) = x(x - 1)^3$  : 0 est racine simple et 1 est racine triple.

On peut vérifier que 0 n'annule pas la dérivée de P, tandis que 1 est racine de  $P'$  et de  $P''$ .  $P'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1$ ,  $P'(0) = -1 \neq 0$ ,  $P'(1) = 4 - 9 + 6 - 1 = 0$  et  $P''(x) = 12x^2 - 18x + 6$  donc  $P''(1) = 12 - 18 + 6 = 0$ .

### Théorème 7.1 : décomposition en polynômes irréductibles

Tout polynôme P de  $\mathbb{C}[x]$  peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) sous la forme

$$P(x) = \lambda \prod_{k=0}^n (x - x_k)^{\mu_k} \quad (7.1)$$

où

- $\lambda \in \mathbb{C}$ ,
- les  $x_k \in \mathbb{C}$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq n$  sont les racines du polynômes c'est-à-dire que  $P(x_k) = 0$  ;  $n$  est donc le nombre de racines,
- les  $\mu_k \in \mathbb{N}$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq n$  sont les multiplicités des racines vérifiant  $\sum_{k=0}^n \mu_k = \deg(P)$ .

Tout polynôme P de  $\mathbb{R}[x]$  peut se factoriser de manière unique (à l'ordre des facteurs près) sous la forme

$$P(x) = \lambda \prod_{k=0}^m (x - x_k)^{\mu_k} \prod_{k=0}^n (x^2 + a_k x + b_k)^{\nu_k} \quad (7.2)$$

où

- $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
- les  $x_k \in \mathbb{R}$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq m$  sont les racines du polynômes c'est-à-dire que  $P(x_k) = 0$ ,
- les  $\mu_k \in \mathbb{N}$  avec  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq k \leq m$  sont les multiplicités des racines,
- avec  $k \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq k \leq n$ ,  $\nu_k \in \mathbb{N}$
- les couples  $(a_k ; b_k)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , tous distincts et vérifiant  $a_k^2 - 4b_k < 0$  (pas de racine réelle au polynôme de degré 2)
- $\sum_{k=0}^m \mu_k + 2 \sum_{k=0}^n \nu_k = \deg(P)$ .

### Exemple 7.2

Soit le polynôme Q défini par  $Q(x) = x^9 - 2x^8 + 5x^7 - 5x^6 + 6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 4x^2$ . Le premier terme non nul est celui de degré deux : il est clair que 0 est racine double et on a  $Q(x) = x^2(x^7 - 2x^6 + 5x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 5x^2 + 4x - 4)$ .

La somme des racines du polynôme d'ordre sept vaut 2 et leur produit vaut 4. Comme les diviseurs (entiers) de 4 sont  $\{\pm 1 ; \pm 2 ; \pm 4\}$ , on peut vérifier si ces valeurs sont racines : on a  $Q(1) = 0$ ,  $Q(-1) = -32$  les autres évaluations donnent des valeurs non nulles. Donc seul 1 est une racine entière de Q. Après avoir effectué la division euclidienne, on obtient la factorisation

$$Q(x) = x^2(x - 1)(x^6 - x^5 + 4x^4 - x^3 + 5x^2 + 4) = x^2(x - 1)q(x).$$

On note que 1 est racine simple car  $q(1) = 24 \neq 0$ .

Supposons que  $q(x) = (x^2 + ax + b)^3$ . En développant et en identifiant les coefficients des polynômes, on doit avoir

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 3a = -1 \\ 3a^2 + 3b = 4 \\ a^3 + 6ab = -1 \quad \text{qui est un système incompatible } (3a = -1 \text{ et } b^3 = 4 \text{ ne peuvent donner } 3ab^2 = 0). \\ 3a^2b + 3b^2 = 5 \\ 3ab^2 = 0 \\ b^3 = 4 \end{cases}$$

Supposons donc maintenant que  $q(x) = (x^2 + ax + b)^2(x^2 + cx + d)$ . En développant et en identifiant les coefficients des polynômes, on doit avoir

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ 2a + c = -1 \\ a^2 + 2ac + 2b + d = 4 \\ a^2c + 2ab + 2ad + 2bc = -1 \\ a^2d + 2abc + b^2 + 2bd = 5 \\ 2abd + b^2c = 0 \\ b^2d = 4 \end{cases}$$

La première équation permet d'écrire  $c = -(2a + 1)$ .

La dernière équation indique que  $b$  et  $d$  sont non nuls (et on retrouve que 0 ne peut donc pas être racine).

La pénultième, en combinaison avec ce qui vient d'être établi, donne  $bc = -2ad$ , soit  $2ad = b(2a + 1)$  et  $a$  ne peut être nul. Donc  $d = b + \frac{b}{2a}$ .

Dans la relation  $a^2 + 2ac + 2b + d = 4$ , en remplaçant  $c$  et  $d$ , on obtient  $b = \frac{6a^3 + 4a^2 + 8a}{6a + 1}$ . Cela permet de relier  $a$  et  $d$  :  $d = \frac{6a^3 + 7a^2 + 10a + 4}{6a + 1}$ .

Avec l'une ou l'autre des deux équations non encore utilisées, on a une relation qui ne dépend que de  $a$  :  $a^2c + 2ab + 2ad + 2bc = -1$

$$\Leftrightarrow -a^2(2a + 1) + 2a \left( \frac{6a^3 + 4a^2 + 8a}{6a + 1} + \frac{6a^3 + 7a^2 + 10a + 4}{6a + 1} \right) - 2(2a + 1) \frac{6a^3 + 4a^2 + 8a}{6a + 1} = -1$$

$$\Leftrightarrow -12a^4 - 14a^3 - 5a^2 - 2a + 1 = 0$$

Étant donné la factorisation cherchée, on a  $a \in \mathbb{Z}$  et  $-1$  est racine évidente.

Par conséquent,  $b = 2$ ,  $c = 1$  et  $d = 1$ . Et ainsi, la factorisation (réelle) s'écrit

$$q(x) = (x^2 - x + 2)^2(x^2 + x + 1).$$

$$Q(x) = x^2(x - 1)(x^2 - x + 2)^2(x^2 + x + 1).$$

À partir de cette écriture, il est aisément de déterminer la factorisation complexe. Il suffit en effet de trouver les racines de  $x^2 - x + 2$  et de  $x^2 + x + 1$ .

En passant par le discriminant, on a dans le premier cas  $\Delta = 1 - 8 < 0$  et les deux racines sont complexes conjuguées (et doubles car le polynôme est au carré) :  $x = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$ .

Dans le deuxième cas, on a  $\Delta = -1 - 4 < 0$  et les deux racines sont complexes et conjuguées :  $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ .

Ces nombres s'expriment aisément sous forme d'exponentielles complexes :  $x = e^{2i\frac{\pi}{3}}$  et  $x = e^{4i\frac{\pi}{3}}$ .

La factorisation complexe de  $Q$  est donc

$$Q(x) = x^2(x - 1) \left( x - \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} \right)^2 \left( x - \frac{1 + i\sqrt{7}}{2} \right)^2 \left( x - e^{2i\frac{\pi}{3}} \right) \left( x + e^{2i\frac{\pi}{3}} \right).$$

## 2.2 Fonctions rationnelles

### Définition 7.3 : fonction rationnelle

On appelle *fonction rationnelle* toute fonction de la forme  $R : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ , où  $P$  et  $Q$  sont des fonctions polynomiales et  $Q$  est non identiquement nulle.

### Propriété 7.2

- Les fonctions rationnelles sont continues et dérivables sur leur ensemble de définition. On calcule la dérivée par  $\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$ .
- Les limites en  $\pm\infty$  sont celles du quotient des termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur

 Voir l'exercice 2 du TD 6.

### Définition 7.4 : zéro et pôle

Soit une fonction rationnelle de la forme  $R : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$ .

- On appelle *zéro* de  $R$  toute racine de  $P$ ;
- toute racine de  $Q$  est un *pôle* de  $R$ .

La *décomposition en éléments simples* est un outil qui permet d'obtenir une écriture additive de  $R$ , mettant en jeu des fractions « plus simples » construites à partir des pôles de  $R$ . Ceci permet par exemple de simplifier certains calculs d'intégrales. Cette technique sera également utilisée lors de l'utilisation des transformées de Laplace.

La décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle  $R : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$  suit toujours le même schéma :

1. déterminer la factorisation du numérateur  $P$  et du dénominateur  $Q$  et procéder aux éventuelles simplifications
2. si  $\deg(P) \geq \deg(Q)$ , opérer la division euclidienne pour obtenir  $R = \tilde{R} + \frac{\tilde{P}}{Q}$  (avec  $\deg(\tilde{P}) < \deg(Q)$ ), puis décomposer  $\frac{\tilde{P}}{Q}$
3. les pôles de  $R$  donnent ensuite la structure de la décomposition, faisant apparaître un certains nombre de paramètres à calculer
4. quatre approches permettent de calculer ces derniers :
  - multiplier par le facteur  $(x - x_k)^{\mu_k}$  puis évaluer en  $x_k$ , y compris lorsque cette racine est un complexe pur,
  - multiplier par  $x$  puis passer à la limite en  $+\infty$ ,
  - évaluer en un point,
  - mettre au même dénominateur et identifier.

Soit la fraction rationnelle  $R = \frac{P}{Q}$  (on suppose ici que  $\deg(P) < \deg(Q)$ ), et supposons que  $Q$  est un polynôme de degré  $n$ . La factorisation complexe de  $Q$  donne alors  $m$  racines distinctes (complexes) qui peuvent être multiples. Notons  $x_k$  ces racines et  $\mu_k$  les multiplicités associées, telles que  $\sum_{k=1}^m \mu_k = n$ . Alors  $Q(x) = \lambda \prod_{k=1}^m (x - x_k)^{\mu_k}$ . Il s'agit de la décomposition de  $Q$  en produit de polynômes unitaires irréductibles.

Alors  $R$  admet la décomposition en éléments simples (complexes) de la forme

$$R(x) = \sum_{k=1}^m \frac{p_k(x)}{(x - x_k)^{\mu_k}} = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{a_{k,j}}{(x - x_k)^j} \right)$$

où les  $p_k$  sont des polynômes de degrés inférieurs (strictement) à  $\mu_k$  et les  $a_{k,j}$  des complexes.

Dans  $\mathbb{R}$ , les pôles peuvent être de première ou de deuxième espèce. On obtient ainsi  $Q(x) = \lambda \prod_{k=1}^{m_1} (x - x_k)^{\mu_k} \prod_{k=1}^{m_2} (x^2 + \alpha_k x + \beta_k)^{\nu_k}$ , avec  $\sum_{k=1}^{m_1} \mu_k + 2 \sum_{k=1}^{m_2} \nu_k = n$ .

Alors  $R$  admet la décomposition en éléments simples (réels) de la forme

$$R(x) = \sum_{k=1}^{m_1} \frac{p_{1,k}(x)}{(x - x_k)^{\mu_k}} + \sum_{k=1}^{m_2} \frac{p_{2,k}(x)}{(x^2 + \alpha_k x + \beta_k)^{\nu_k}} = \sum_{k=1}^{m_1} \left( \sum_{j=1}^{\mu_k} \frac{a_{k,j}}{(x - x_k)^j} \right) + \sum_{k=1}^{m_2} \left( \sum_{j=1}^{\nu_k} \frac{b_{k,j}x + c_{k,j}}{(x^2 + \alpha_k x + \beta_k)^j} \right)$$

où les  $p_{1,k}$  et les  $p_{2,k}$  sont des polynômes de degrés respectivement inférieurs (strictement) à  $\mu_k$  et à  $2\nu_k$ , et les  $a_{k,j}$ ,  $b_{k,j}$  et  $c_{k,j}$  sont des réels.



La décomposition en éléments simples est unique, mais dépend néanmoins de l'espace sur lequel on travaille. Dis autrement, la fraction rationnelle  $R$  admet une unique décomposition réelle et une unique décomposition complexe, celles-ci pouvant être différentes.

### Exemple 7.3

Pour fixer les idées, considérons la fraction rationnelle  $R$  définie par

$$R(x) = \frac{x^{12} + 5x^{11} - 9x^{10} + 31x^9 - 39x^8 + 65x^7 - 85x^6 + 69x^5 - 71x^4 + 9x^3 + 4x^2 - 4x}{x^{10} - 2x^9 + 5x^8 - 5x^7 + 6x^6 - 5x^5 + 4x^4 - 4x^3}.$$

Il est assez clair que  $R$  se simplifie :  $R(x) = \frac{x^{11}+5x^{10}-9x^9+31x^8-39x^7+65x^6-85x^5+69x^4-71x^3+9x^2+4x-4}{(x^9-2x^8+5x^7-5x^6+6x^5-5x^4+4x^3-4x^2)}$ .

Étant donnés les degrés des polynômes au numérateur et au dénominateur, il convient d'opérer la division euclidienne, laquelle donne :

$$R(x) = x(x+7) + \frac{x^8 - 10x^7 + 28x^6 - 54x^5 + 45x^4 - 43x^3 + 9x^2 + 4x - 4}{x^9 - 2x^8 + 5x^7 - 5x^6 + 6x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 4x^2} = x(x+7) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

On note  $r = \frac{P}{Q}$ . Le polynôme  $Q$  a déjà été factorisé dans la section précédente.

Si l'on cherche la décomposition en éléments simples réels de  $r$ , elle est basée sur cette factorisation. Il faut donc trouver les paramètres réels  $a_{k,j}$ ,  $b_{k,j}$  et  $c_{k,j}$  tels que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_{1,1}}{x} + \frac{a_{1,2}}{x^2} + \frac{a_{2,1}}{x-1} + \frac{b_{1,1}x + c_{1,1}}{x^2 + x + 1} + \frac{b_{2,1}x + c_{2,1}}{x^2 - x + 2} + \frac{b_{2,2}x + c_{2,2}}{(x^2 - x + 2)^2}.$$

Pour trouver la valeur de  $a_{1,2}$ , il suffit de multiplier toute l'équation précédente par  $x^2$ , puis d'évaluer en  $x = 0$  :

À gauche on obtient  $\frac{x^8 - 10x^7 + 28x^6 - 54x^5 + 45x^4 - 43x^3 + 9x^2 + 4x - 4}{x^2(x-1)(x^2-x+2)^2(x^2+x+1)}$  qui vaut  $\frac{-4}{-4} = 1$  en  $x = 0$ . À droite on a  $a_{1,2} + x^2 \left[ \frac{a_{1,1}}{x} + \frac{a_{2,1}}{x-1} + \frac{b_{1,1}x + c_{1,1}}{x^2 + x + 1} + \frac{b_{2,1}x + c_{2,1}}{x^2 - x + 2} + \frac{b_{2,2}x + c_{2,2}}{(x^2 - x + 2)^2} \right]$ . Ainsi  $a_{1,2} = 1$ .

De même, pour trouver la valeur de  $a_{2,1}$ , il suffit de multiplier toute l'équation précédente par  $(x-1)$ , puis d'évaluer en  $x = 1$  :

À gauche :  $\frac{x^8 - 10x^7 + 28x^6 - 54x^5 + 45x^4 - 43x^3 + 9x^2 + 4x - 4}{x^2(x-1)(x^2-x+2)^2(x^2+x+1)}$  dont l'évaluation en  $x = 1$  donne  $\frac{1-10+28-54+45-43+9+4-4}{(1-1+2)^2(1+1+1)} = \frac{-24}{12} = -2$ . À droite :  $a_{2,1} + (x-1) \left[ \frac{a_{1,1}}{x} + \frac{a_{1,2}}{x^2} + \frac{b_{1,1}x + c_{1,1}}{x^2 + x + 1} + \frac{b_{2,1}x + c_{2,1}}{x^2 - x + 2} + \frac{b_{2,2}x + c_{2,2}}{(x^2 - x + 2)^2} \right]$ . Et  $a_{2,1} = -2$ .

En multipliant par  $(x^2 + x + 1)$  et en évaluant sur l'une des racines, par exemple en  $x = e^{2i\pi/3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ , on a

$$\begin{aligned} b_{1,1}e^{2i\pi/3} + c_{1,1} &= \frac{e^{16i\pi/3} - 10e^{14i\pi/3} + 28e^{12i\pi/3} - 54e^{10i\pi/3} + 45e^{8i\pi/3} - 43e^{6i\pi/3} + 9e^{4i\pi/3} + 4e^{2i\pi/3} - 4}{e^{14i\pi/3} - 3e^{12i\pi/3} + 7e^{10i\pi/3} - 9e^{8i\pi/3} + 8e^{6i\pi/3} - 4e^{4i\pi/3}} \\ &= \frac{e^{4i\pi/3} - 10e^{2i\pi/3} + 28 - 54e^{4i\pi/3} + 45e^{2i\pi/3} - 43 + 9e^{4i\pi/3} + 4e^{2i\pi/3} - 4}{e^{2i\pi/3} - 3 + 7e^{4i\pi/3} - 9e^{2i\pi/3} + 8 - 4e^{4i\pi/3}} \\ &= \frac{-44\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} + 39\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} - 19}{3\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} - 8\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} + 5} \\ &= \frac{-33 + 83i\sqrt{3}}{15 - 11i\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\frac{-b_{1,1}}{2} + c_{1,1} + b_{1,1}\sqrt{3} = \frac{-3234 + 882i\sqrt{3}}{588}$$

Alors  $b_{1,1} = 2\frac{882}{588} = 3$  et  $c_{1,1} = \frac{3}{2} - \frac{3234}{588} = -4$ .

Enfin, en multipliant toute l'égalité par  $(x^2 - x + 2)^2$  et en évaluant sur l'une des racines trouvées précédemment, c'est-à-dire  $x = \frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$ , il sera possible d'avoir une relation permettant de déterminer  $b_{2,2}$  et  $c_{2,2}$ . Malheureusement, si le module de ces racines vaut  $\sqrt{2}$ , leurs arguments ne s'obtiennent pas sous forme exacte. Il faut donc travailler avec l'écriture algébrique.

$$\begin{aligned}
b_{2,2} \frac{1+i\sqrt{7}}{2} + c_{2,2} &= \frac{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^8 - 10\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^7 + 28\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^6 - 54\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^5 + 45\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4}{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^2} \\
&\quad + \frac{-43\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^3 + 9\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right) - 4}{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\left(-\frac{31}{2} - \frac{3\sqrt{7}i}{2}\right) - 10\left(-\frac{13}{2} + \frac{7\sqrt{7}i}{2}\right) + 28\left(\frac{9}{2} + \frac{5\sqrt{7}i}{2}\right) - 54\left(\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{7}i}{2}\right)}{\left(\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{7}i}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2}\right)} \\
&\quad + \frac{45\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{7}i}{2}\right) - 43\left(-\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{7}i}{2}\right) + 9\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2}\right) - 4}{\left(\frac{11}{2} - \frac{\sqrt{7}i}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}i}{2}\right)} \\
&= \frac{-14 + 42i\sqrt{7}}{14 - 2i\sqrt{7}} = \frac{-784 + 560i\sqrt{7}}{224} = \frac{-7 + 5i\sqrt{7}}{2}
\end{aligned}$$

Alors en identifiant, on a  $b_{2,2} = 5$  et  $c_{2,2} = -b_{2,2} - \frac{7}{2} = -6$ .  
Nous avons donc à présent l'égalité

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_{1,1}}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{-2}{x-1} + \frac{3x-4}{x^2+x+1} + \frac{b_{2,1}x+c_{2,1}}{x^2-x+2} + \frac{5x-6}{(x^2-x+2)^2}.$$

Il reste donc trois paramètres à déterminer, ce qui requiert trois équations.

Comme le numérateur est de degré 8 et le dénominateur de degré 9, on peut multiplier l'équation précédente par  $x$  et prendre ensuite la limite en l'infini. On obtient que  $a_{1,1} + b_{2,1} = 0$ .

Si l'on évalue l'équation en  $-1$  et en  $2$  (par exemple ; on ne peut évaluer sur les racines...), on a alors deux nouvelles équations :  $\frac{1+10+28+54+45+43+9-4-4}{(1)(-2)(1)(4)^2} = -a_{1,1} + 1 + 1 + (-3 - 4) + \frac{-b_{2,1}+c_{2,1}}{4} + \frac{-5-6}{4^2}$  et  $\frac{2^8-10\times 2^7+28\times 2^6-54\times 2^5+45\times 2^4-43\times 2^3+9\times 4+4\times 2-4}{(4)(1)(7)(4)^2} = \frac{a_{1,1}}{2} + \frac{1}{4} - 2 + \frac{2}{7} + \frac{2b_{2,1}+c_{2,1}}{4} + \frac{4}{4^2}$ .

En procédant de manière classique sur ce système linéaire, on a

$$\begin{cases} b_{2,1} = -a_{1,1} \\ c_{2,1} = 3a_{1,1} \Leftrightarrow a_{1,1} = b_{2,1} = c_{2,1} = 0 \\ a_{1,1} = 0 \end{cases}$$

Et finalement la décomposition en éléments simples réels de la fraction rationnelle initiale est

$$R(x) = x(x-7) + \frac{1}{x^2} + \frac{-2}{x-1} + \frac{3x-4}{x^2+x+1} + \frac{5x-6}{(x^2-x+2)^2}.$$

Pour obtenir la décomposition complexe, il suffit de repartir de ce résultat et décomposer les deux dernières fractions.

$$\begin{aligned}
\frac{3x-4}{x^2+x+1} &= \frac{a_{1,1}}{x - e^{2i\frac{\pi}{3}}} + \frac{a_{2,1}}{x - e^{4i\frac{\pi}{3}}} && \text{Par conséquent } a_{1,1} = \frac{3}{2} + \frac{11i\sqrt{3}}{6} \text{ et} \\
&= (a_{1,1} + a_{2,1})x - \left(a_{1,1}e^{4i\frac{\pi}{3}} + a_{2,1}e^{2i\frac{\pi}{3}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_{1,1} + a_{2,1} = 3 \\ a_{1,1}i\sqrt{3} = \frac{-11+3i\sqrt{3}}{2} \\ a_{2,1} = \frac{3}{2} - \frac{11i\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$\frac{3x-4}{x^2+x+1} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{11i\sqrt{3}}{6}}{x - e^{2i\frac{\pi}{3}}} + \frac{\frac{3}{2} - \frac{11i\sqrt{3}}{6}}{x - e^{4i\frac{\pi}{3}}}$$

Pour alléger l'écriture, posons  $z = \frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ . Alors  $\frac{5x-6}{(x^2-x+2)^2} = \frac{a_{1,1}}{x-z} + \frac{a_{1,2}}{(x-z)^2} + \frac{a_{2,1}}{x-\bar{z}} + \frac{a_{2,2}}{(x-\bar{z})^2}$ .

En multipliant par  $(x - z)^2$  et en évaluant en  $z$ , on obtient  $a_{1,2} = \frac{1}{2} + \frac{5\imath\sqrt{7}}{14}$ . De même, en multipliant par  $(x - \bar{z})^2$  et en évaluant en  $\bar{z}$ , on obtient  $a_{2,2} = \frac{1}{2} - \frac{5\imath\sqrt{7}}{14}$ .

En prenant la limite en l'infini après avoir multiplié l'équation par  $x$ , on a  $a_{1,1} + a_{2,1} = 0$ . Cette relation sert ensuite à modifier l'équation obtenue en évaluant l'expression en 0 :

$$\begin{aligned}\frac{-6}{4} &= \frac{a_{1,1}}{-z} + \frac{a_{1,2}}{z^2} + \frac{a_{2,1}}{-\bar{z}} + \frac{a_{2,2}}{\bar{z}^2} \\ &= \frac{-a_{1,1}z\bar{z}^2 + a_{1,2}\bar{z}^2 + a_{1,1}\bar{z}z^2 + a_{1,2}z^2}{z^2\bar{z}^2} \\ &= \frac{a_{1,1}|z|2\imath\Im(z) + 2\Re(a_{1,2}\bar{z}^2)}{|z|^4} \\ &= \frac{-2\imath a_{1,1}\sqrt{7} - 4}{4}\end{aligned}$$

Ainsi,  $a_{1,1} = \frac{-\imath\sqrt{7}}{7}$  et  $a_{2,1} = \frac{\imath\sqrt{7}}{7}$ . D'où

$$\frac{5x - 6}{(x^2 - x + 2)^2} = \frac{-\imath\sqrt{7}}{7(x - z)} + \frac{\frac{1}{2} + \frac{5\imath\sqrt{7}}{14}}{(x - z)^2} + \frac{\imath\sqrt{7}}{7(x - \bar{z})} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{5\imath\sqrt{7}}{14}}{(x - \bar{z})^2}.$$

 Voir l'exercice 3 du TD 6.

### 3 Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances

Voir AZOULAY, AVIGNANT et AULIAC 1996, p. 331-333, LIRET et MARTINAIS 1997b, p. 117 et ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011, p. 21

#### 3.1 Fonction exponentielle

##### Définition et propriétés

###### Définition 7.5 : fonction exponentielle

Il existe une unique fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ , appelée *exponentielle*, telle que

$$\begin{cases} \exp(0) = 1 \\ \exp'(x) = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

###### Propriété 7.3

- Par définition, la fonction  $\exp$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{Q}, (\exp(x))^r = \exp(rx)$ . En particulier,  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ .

##### Dérivée, sens de variation, limites et représentation

On a  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$ . En particulier,  $\exp' = \exp$  est strictement positive : la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Aux bornes du domaine de définition, on a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ . La courbe représentative de la fonction admet ainsi une asymptote horizontale en  $-\infty$ .

###### Propriété 7.4

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty.$$

**Démonstration 7.1**

On pose  $h(x) = \exp(x) - x$ . Étant la somme d'applications dérивables,  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \exp(x) - 1$ . Il s'ensuit que  $h$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+\star}$  (avec  $e^0 = 1$ ). De plus, comme  $h(0) = 1$ , on en déduit que  $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, e^x > x$ .

En particulier,  $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \frac{x}{2} > 0$  et donc  $e^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2}$ . Alors en multipliant par  $e^{\frac{x}{2}} > 0$  on a  $e^x > \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}$  et par suite  $\frac{e^x}{x} > \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}$ , car  $x > 0$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ , on a alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} = +\infty$ . On a ainsi par comparaison que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$ .  $\square$

Étant donnée cette dernière limite, on a que la courbe représentative admet une branche parabolique de direction ( $Oy$ ).

Pour la représentation graphique, on se reportera à la figure 7.1 p. 77.

**Propriété 7.5**

$$1. \forall n \in \mathbb{N}^\star, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}^\star, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

**Démonstration 7.2**

Soit  $n \in \mathbb{N}^\star$ .

1 Pour tout  $x > 0$ ,  $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n$ . Or on a établi que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{x} = +\infty$ . Ainsi, avec  $n$  constant, on a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{x} = +\infty$  et par suite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = +\infty$ .

2 Chercher une limite pour  $x \rightarrow -\infty$  revient à déterminer la limite quand  $-x \rightarrow +\infty$ . Pour tout  $x > 0$  on a  $\frac{1}{x^n e^x} = \frac{e^{-x}}{(-1)^n (-x)^n}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^n} = +\infty$ . De la sorte  $\frac{1}{x^n e^x}$  tend vers  $\pm\infty$  selon la parité de  $n$ . D'où il vient que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ .  $\square$

**Exponentielle complexe****Propriété 7.6**

Soit  $\phi$  une fonction à valeurs complexes, définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et dérivable en  $t \in I$ .

Alors la fonction  $f : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \longmapsto e^{\phi(t)} \end{cases}$  est dérivable en  $t$  et  $f'(t) = \phi'(t)e^{\phi(t)}$ .

**Démonstration 7.3**

On pose  $\phi_1 = \Re(\phi)$  et  $\phi_2 = \Im(\phi)$ . Alors  $\forall t \in I, f(t) = e^{\phi_1(t)} (\cos(\phi_2(t)) + i \sin(\phi_2(t)))$ .

Or l'exponentielle réelle, cosinus et sinus sont des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  (donc sur  $I$ ). De plus, comme  $\phi$  est dérivable en  $t \in I$ ,  $\phi_1$  et  $\phi_2$  le sont aussi d'après la propriété 6.5 p. 64. Ainsi

$$\begin{aligned} f'(t) &= (\phi'_1(t)e^{\phi_1(t)} \cos(\phi_2(t)) - \phi'_2(t)e^{\phi_1(t)} \sin(\phi_2(t))) \\ &\quad + i(\phi'_1(t)e^{\phi_1(t)} \sin(\phi_2(t)) + \phi'_2(t)e^{\phi_1(t)} \cos(\phi_2(t))) \\ &= e^{\phi_1(t)} \left( \phi'_1(t) (\cos(\phi_2(t)) + i \sin(\phi_2(t))) \right. \\ &\quad \left. + \phi'_2(t) (-\sin(\phi_2(t)) + i \cos(\phi_2(t))) \right) \\ &= e^{\phi_1(t)} (\phi'_1(t) + i \phi'_2(t)) (\cos(\phi_2(t)) + i \sin(\phi_2(t))) \\ &= \phi'(t) e^{\phi(t)} \end{aligned}$$

### 3.2 Fonction logarithme népérien

#### Définition 7.6 : fonction logarithme népérien

La fonction *logarithme népérien* notée  $\ln$  est la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur  $]0; +\infty[$ .

Cette fonction est bien définie car  $\exp$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

#### Propriété 7.7

1.  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+\star})^2, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \forall r \in \mathbb{Q}, \ln(x^r) = r \ln(x)$ . En particulier,  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
3.  $\ln$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^{+\star}$  avec  $\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \ln'(x) = \frac{1}{x}$
4.  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+\star}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

#### Démonstration 7.4

**7.7-3** Puisque la fonction  $\exp$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors sa réciproque est continue sur  $\mathbb{R}^{+\star}$ .

De plus, exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée ne s'annule pas. Donc  $\ln$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^{+\star}$  et, d'après le théorème 6.6 p. 60,  $\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}}$ . Ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+\star}, \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

**7.7-4** D'après la propriété 7.7-3, la dérivée de  $\ln$  est strictement positive puisqu'elle n'est définie que sur  $\mathbb{R}^{+\star}$ . Ainsi la fonction est-elle strictement croissante (cf. propriété 6.4 p. 63).

**7.7-5** Pour montrer ces deux limites on peut utiliser la caractérisation séquentielle de la continuité : une application  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si pour toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $x_0$ , on a que  $f(u_n)$  converge vers  $f(x_0)$ . On prend alors la suite  $\left(\frac{1}{2^n}\right)$  qui converge vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Alors, comme  $\ln$  est continue, on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} -n \ln(2) = -\infty$ .

Pour la seconde limite, il suffit de prendre la suite  $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $+\infty$  en l'infini :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln(2) = \infty$ .

□

La courbe représentative de  $\ln$  est symétrique de celle de l'exponentielle par rapport à la première bissectrice, comme présenté sur la figure 7.1.

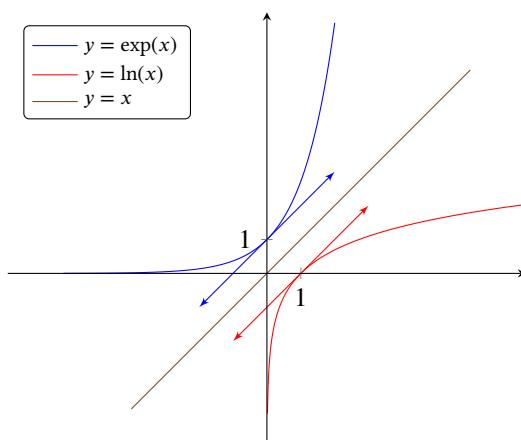


FIGURE 7.1 – Courbes représentatives de  $\exp$  et  $\ln$

**Propriété 7.8**

$$1. \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \ln(x) = 0 (0)$$

**Démonstration 7.5**

**7.8-1** On pose  $t = \ln x$ . Alors  $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{t}{e^{nt}} = \frac{1}{n} \frac{nt}{e^{nt}}$ . Si  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $t \rightarrow +\infty$ . On a établit également que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty$  (cf. propriété 7.4 p. 75). D'où il vient que  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ .

**7.8-2** On pose ici  $t = \frac{1}{x}$ . Ainsi  $x^n \ln x = \frac{1}{t^n} \ln\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{-\ln t}{t^n}$ . De plus, si  $x \rightarrow 0$ , alors  $t \rightarrow +\infty$ . En utilisant la propriété 7.8-1 précédente, on a alors que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln t}{t^n} = 0$  et par suite  $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \ln x = 0$ .

□

☛ Voir l'exercice 1 du TD 6.

**3.3 Fonctions exponentielles et logarithmes de base quelconque***Fonctions exponentielles de base a*

Soit  $a$  un nombre réel strictement positif. Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $x \mapsto a^x$ .

**Définition 7.7 : fonction exponentielle de base a**

Soit  $a > 0$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on définit  $a^x = \exp(x \ln a)$ .

En posant  $\alpha = \ln a$ , on a alors  $a^x = \exp(\alpha x)$  et l'étude se ramène à celle des fonctions  $x \mapsto e^{\alpha x}$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ .

On notera que la définition ci-dessus est une extension de la définition d'une puissance au cas d'exposants irrationnels.

**Propriété 7.9**

La fonction  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = a$ , et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a^x \ln a$ .

**Propriété 7.10**

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) \times f(y)$  et  $f(xy) = (f(x))^y$ . En particulier  $f(-x) = \frac{1}{a^x} = \frac{1}{f(x)}$ .

**Propriété 7.11**

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ .

De plus,  $f$  est strictement croissante si  $a > 1$ , strictement décroissante si  $0 < a < 1$  et constante égale à 1 si  $a = 1$ .

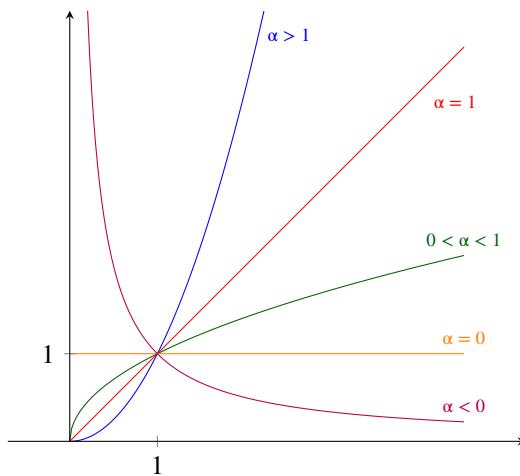
**Propriété 7.12**

Les limites aux bornes dépendent de la position de  $a$  par rapport à 1 :

**$a > 1$**   $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln a = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln a = +\infty$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ ;

**$a < 1$**  les limites précédentes sont échangées car  $a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ , avec  $\frac{1}{a} > 1$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ;

**$a = 1$**  la fonction est constante et  $f(a) = 1$ .

FIGURE 7.2 – Représentation des fonctions  $x \mapsto x^\alpha$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ 

### Fonctions logarithmiques

#### Définition 7.8 : logarithme de base $a$

Soit  $a > 0$  avec  $a \neq 1$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ , le *logarithme de base  $a$  de  $x$*  est défini par  $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ .  
On note simplement  $\log$  le logarithme décimal ( $a = 10$ ).

Voir l'exercice 4 du TD 6.

Modulo un scalaire, ceci correspond donc à la fonction  $\ln$ .

### Fonctions puissances

#### Définition 7.9 : fonction puissance

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On définit la *fonction puissance*  $f_\alpha$  par  $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}^{+\star} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}. \end{cases}$

Dans certains cas (par exemple  $\alpha \in \mathbb{Q}$ ) on peut étendre  $f_\alpha$  à  $\mathbb{R}^+$  ou même  $\mathbb{R}$  tout entier.  
Si  $\alpha = 0$ ,  $f_\alpha$  est la fonction constante égale à 1.

#### Propriété 7.13

1.  $f_\alpha$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^{+\star}$ , avec  $f'_\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ .
2.  $\forall x > 0$ ,  $f_\alpha(x) > 0$ . Par conséquent,  $f_\alpha$  est strictement croissante si  $\alpha > 0$ , strictement décroissante si  $\alpha < 0$  et constante égale à 1 si  $\alpha = 0$ .
3. Si  $\alpha > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\alpha(x) = +\infty$ .  
Si  $\alpha < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f_\alpha(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\alpha(x) = 0$ .
4.  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\begin{cases} x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \times x^\beta \\ x^{\alpha\beta} = (x^\alpha)^\beta \\ x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} \end{cases}$

### 3.4 Croissances comparées

#### Propriété 7.14

Soit  $\alpha > 0$  et soient  $a, b > 1$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0$ .

**Démonstration 7.6**

- On a  $\ln\left(\frac{a^x}{x^\alpha}\right) = x \ln a - \alpha \ln x = x \ln a \left(1 - \frac{\alpha}{\ln a} \frac{\ln x}{x}\right)$ . Or  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{a^x}{x^\alpha}\right) = +\infty$   
et par suite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty$ .
- On pose  $t = \ln x$ . Alors  $\frac{\log_b x}{x^\alpha} = \frac{\frac{t}{\ln b}}{e^{\alpha t}} = \frac{1}{\alpha \ln b} \frac{\alpha t}{e^{\alpha t}}$ . Puisque  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha t}{e^{\alpha t}} = 0$ , on a donc  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_b x}{x^\alpha} = 0$ .

□

Cette propriété signifie que  $\log$  croît « moins vite » que la fonction puissance qui elle-même croît « moins vite » que  $\exp$ .

**Propriété 7.15**

Soit  $\alpha < 0$  et soit  $0 < a < 1$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = 0$ .

**Démonstration 7.7**

On a  $\ln\left(\frac{a^x}{x^\alpha}\right) = x \ln a - \alpha \ln x = x \ln a \left(1 - \frac{\alpha}{\ln a} \frac{\ln x}{x}\right)$ . Avec  $\ln a < 0$  on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{a^x}{x^\alpha}\right) = -\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = 0$ .

□

**Propriété 7.16**

Soit  $\alpha > 0$  et soit  $b > 1$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log_b x = 0$ .

**Démonstration 7.8**

On pose  $t = \ln x$ , d'où il vient  $x^\alpha \log_b x = e^{\alpha t} \frac{t}{\ln b} = \frac{-1}{\alpha \ln b} \frac{(-\alpha t)}{e^{-\alpha t}}$ . Avec  $x \rightarrow 0$ , on a  $t \rightarrow -\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\alpha t)}{e^{-\alpha t}} = 0$ . D'où le résultat.

□

## 4 Fonctions circulaires et réciproques

Voir AZOULAY, AVIGNANT et AULIAC 1996, p. 308, LIRET et MARTINAIS 1997b, p. 126 et ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011, p. 63.

Les fonctions circulaires cosinus, sinus, tangente et cotangente ont déjà été évoquées au chapitre 3 (Trigonométrie) p. 29 et plus particulièrement à la section section 5 (Cercle trigonométrique) p. 32. Nous en donnons ici une étude détaillée.

### 4.1 Fonctions circulaires directes

#### Fonctions cosinus et sinus

**Propriété 7.17 : sinus et cosinus**

1. Par construction, cosinus et sinus sont des fonctions définies, continues et dérивables sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs dans  $[-1 ; 1]$  (cf. propriété 3.1 p. 31), avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos'(x) = -\sin(x) \\ \sin'(x) = \cos(x) \end{cases}$$

2. Toujours par construction, ces fonctions sont  $2\pi$ -périodiques
3. cos est paire et sin est impaire (voir la propriété 3.6 p. 37)

Étant donnée la périodicité, on peut se contenter d'étudier ces fonctions sur un intervalle de longueur  $2\pi$ , quitte à compléter ensuite par des translations de vecteur  $n2\pi\vec{i}$ , où  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\vec{i}$  est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses.

De plus, la parité permet de ramener l'étude à l'intervalle  $[0 ; \pi]$ .

La propriété 3.6, qui indique que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$  et  $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ , se traduit par le fait que la courbe de  $\cos$  admet le point de coordonnée  $(\frac{\pi}{2}; 0)$  comme centre de symétrie, et que celle de  $\sin$  admet  $x = \frac{\pi}{2}$  comme axe de symétrie, comme représenté à la figure 7.3.

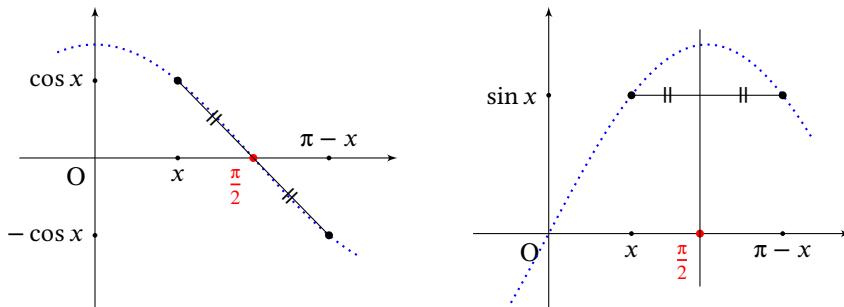


FIGURE 7.3 – Symétries pour les fonctions cosinus et sinus

L'intervalle d'étude se réduit alors à  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

Du fait que sinus et cosinus sont des fonctions positives sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  (cf. section 5 (Cercle trigonométrique) p. 32), et étant données les dérivées de ces mêmes fonctions, on en déduit que sur cet intervalle cosinus est décroissante tandis que sinus est croissante (cf. propriété 6.4 p. 63).

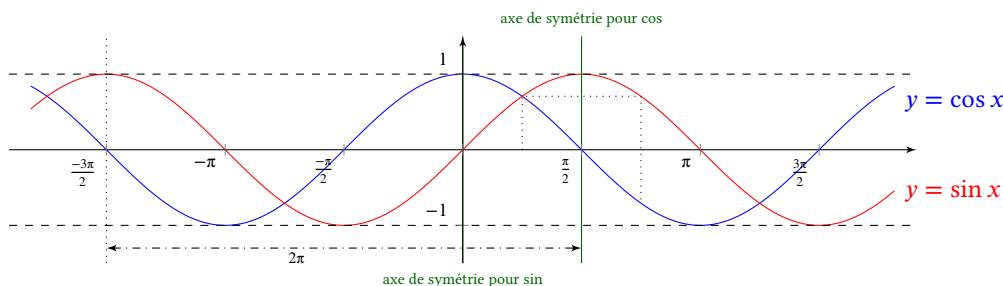


FIGURE 7.4 – Représentation des fonctions sinus et cosinus

### Fonctions tangente et cotangente

#### Propriété 7.18 : tangente et cotangente

1.  $\tan$  est définie sur la réunion des intervalles  $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$
2.  $\cot$  est définie sur la réunion des intervalles  $]k\pi; (k+1)\pi[$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$
3.  $\tan$  et  $\cot$  sont continues et dérivables sur leurs ensembles de définition
4.  $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[, \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
5.  $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in ]k\pi; (k+1)\pi[, \cot' x = -1 - \cot^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$
6.  $\tan$  (respectivement  $\cot$ ) est strictement croissante (respectivement décroissante) sur chacun des intervalles composant son domaine de définition.
7.  $\tan$  et  $\cot$  sont des fonctions  $2\pi$ -périodiques
8.  $\tan$  et  $\cot$  sont des fonctions impaires

### Démonstration 7.9

**7.18-1 et 7.18-2** Il a été vu au chapitre 3 (Trigonométrie) p. 29 que  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  et  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ , pour tout  $x$  vérifiant respectivement  $\cos x \neq 0$  et  $\sin x \neq 0$ .

Or  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$  et  $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \equiv 0[\pi]$ . Ainsi  $\tan$  est définie sur la réunion des intervalles  $\left]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right[$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ , tandis que  $\cot$  est définie sur la réunion des intervalles  $]k\pi; (k+1)\pi[$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

**7.18-3** Les fonctions  $\tan$  et  $\cot$  sont continues et dérivables sur leurs ensembles de définition, puisque ce sont des quotients de fonctions continues et dérivables.

**7.18-4 et 7.18-5** Ces expressions s'obtiennent en appliquant la formule de la dérivée d'un quotient (cf. théorème 6.5 p. 59).

Étant données les dérivées des fonctions  $\tan$  et  $\cot$ , il est clair qu'elles sont strictement positives sur leurs domaines de définition. Cela permet d'établir que  $\tan$  (respectivement  $\cot$ ) est strictement croissante (respectivement décroissante) sur chacun des intervalles composant son domaine de définition.

**7.18-7** Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\cos x \neq 0$  on a  $\cos(\pi + x) = -\cos(x) \neq 0$  et  $\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$ , ce qui montre que  $\tan$  est une fonction  $\pi$ -périodique. On montre de la même manière que  $\cot$  est également  $\pi$ -périodique.

**7.18-8** Pour tout  $x$  dans le domaine de définition, on a  $\tan(-x) = -\tan x$  et  $\cot(-x) = -\cot x$  : les fonctions sont impaires.

Étant donnée la périodicité, il est possible de restreindre l'intervalle d'étude de ces fonctions à  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ , quitte à compléter par des translations de vecteur  $n\pi\vec{i}$ , où  $n \in \mathbb{Z}$  et  $\vec{i}$  est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses.

Avec la parité, pour  $\tan$  on se ramène à l'intervalle d'étude  $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$  (on retrouve  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  par la symétrie de centre O), et à  $\left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$  pour  $\cot$  (on retrouve  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  par la symétrie de centre  $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ).

On a de plus  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = +\infty$ .

De même  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cot x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin x} = 0$ .

D'où les tableaux de variations

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	
$\tan'(x)$	1	+	
$\tan(x)$	0	$\nearrow +\infty$	

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	
$\cot'(x)$		-	1
$\cot(x)$	$+\infty$	$\searrow 0$	

Finalement on aboutit aux représentations graphiques de la figure 7.5.

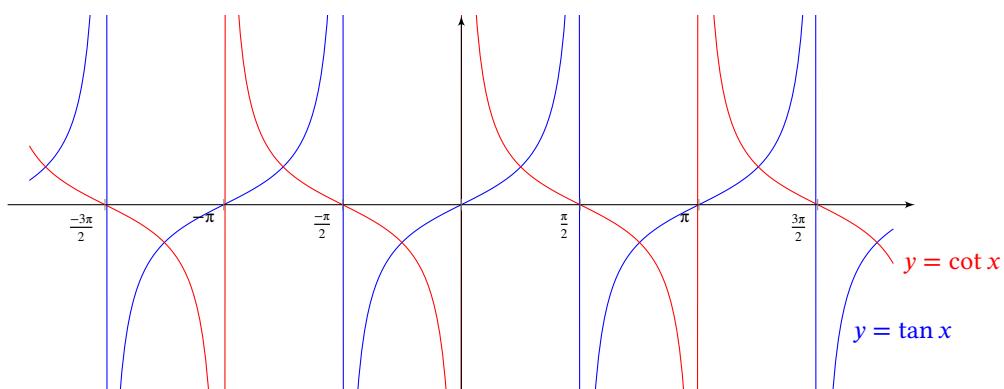


FIGURE 7.5 – Représentation des fonctions tangente et cotangente

💡 Voir l'exercice 5 du TD 6.

## 4.2 Fonctions circulaires réciproques

### Fonction arc cosinus

#### Définition 7.10 : arc cosinus

La restriction de la fonction cosinus à l'intervalle  $[0; \pi]$  est une bijection continue et strictement décroissante (cf. figure 7.4 p. 81), avec  $\cos 0 = 1$  et  $\cos \pi = -1$ . Alors en utilisant le théorème 5.5-2 p. 55, elle admet une application réciproque, bijective de  $[-1; 1]$  dans  $[0; \pi]$ , appelée *arc cosinus* et notée  $\arccos$ .



Il ne faut pas perdre de vue qu'arc cosinus est la réciproque de la *restriction* de cosinus à  $[0 ; \pi]$ . Ainsi,  $\cos(\arccos \frac{5}{7}) = \frac{5}{7}$  et  $\arccos(\cos \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ , mais  $\arccos(\cos \frac{7\pi}{5}) = \frac{3\pi}{5}$  : c'est l'unique angle dans  $[0 ; \pi]$  ayant le même cosinus que  $\frac{7\pi}{5}$ .

### Propriété 7.19

1. arc cosinus est continue sur  $[-1 ; 1]$
  2. arc cosinus est dérivable sur  $] -1 ; 1 [$  et  $\forall x \in ] -1 ; 1 [$ ,
- $$\arccos' x = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$
3. arc cosinus est une fonction strictement décroissante

### Démonstration 7.10

**7.19-1** Puisque cosinus est continue sur  $[0 ; \pi]$ , d'après le théorème 5.5 p. 55, sa réciproque arc cosinus est continue sur  $[-1 ; 1]$ .

**7.19-2** Cosinus est dérivable sur  $[0 ; \pi]$  et sa dérivée s'annule en 0 et en  $\pi$ . Or  $\cos 0 = 1$  et  $\cos \pi = -1$ , donc arc cosinus est dérivable sur  $] -1 ; 1 [$  d'après le théorème 6.6 p. 60) et on a  $\arccos' x = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)}$ . De plus, comme  $\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1$ , on a  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ . Et ainsi  $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**7.19-3** Puisque  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1 ; 1]$ ,  $\arccos x \in ]0 ; \pi[$ , on a donc  $\sin(\arccos x) > 0$  et par suite la dérivée est strictement négative. Ainsi arc cosinus est une fonction strictement décroissante.

□

La figure 7.6 donne la représentation graphique de la fonction arc cosinus.

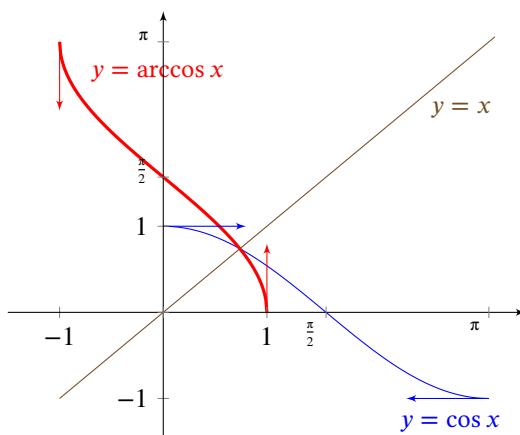


FIGURE 7.6 – Représentation graphique de cosinus et arc cosinus

### Fonction arc sinus

#### Définition 7.11 : arc sinus

La restriction de la fonction sinus à l'intervalle  $\left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$  est une bijection continue et strictement croissante (cf. figure 7.4 p. 81), avec  $\sin \frac{-\pi}{2} = -1$  et  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ . Alors en utilisant le théorème 5.5-2 p. 55, elle admet une application réciproque, bijective de  $[-1 ; 1]$  dans  $\left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ , appelée *arc sinus* et notée arcsin.

Il ne faut pas perdre de vue qu'arc sinus est la réciproque de la *restriction* de sinus à  $\left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ . Ainsi,  $\sin(\arcsin \frac{5}{7}) = \frac{5}{7}$  et  $\arcsin(\sin \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ , mais  $\arcsin(\sin \frac{7\pi}{5}) = \frac{-2\pi}{5}$  : c'est l'unique angle dans  $\left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$  ayant le même sinus que  $\frac{7\pi}{5}$ .

!

**Propriété 7.20**

1. arc sinus est continue sur  $[-1 ; 1]$
2. arc sinus est dérivable sur  $]-1 ; 1[$  et  $\forall x \in ]-1 ; 1[, \arcsin' x = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .
3. arc sinus est une fonction strictement croissante.
4. arc sinus est une fonction impaire

**Démonstration 7.11**

**7.20-1** Puisque sinus est continue sur  $\left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ , sa réciproque arc sinus est continue sur  $[-1 ; 1]$ .

**7.20-2** Sinus est dérivable sur  $\left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$  et sa dérivée s'annule en  $\frac{-\pi}{2}$  et en  $\frac{\pi}{2}$ . Or  $\sin \frac{-\pi}{2} = -1$  et  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , donc arc sinus est dérivable sur  $]-1 ; 1[$  d'après le théorème 6.6 p. 60. Et  $\forall x \in ]-1 ; 1[, \arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$ . De plus, comme  $\cos^2(\arcsin x) + \sin^2(\arcsin x) = 1$ , on a  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ . De la sorte,  $\forall x \in ]-1 ; 1[, \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**7.20-3** Puisque  $\forall x \in ]-1 ; 1[, \arcsin x \in \left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ , on a donc  $\cos(\arcsin x) > 0$  et par suite la dérivée est strictement positive. Ainsi arc sinus est une fonction strictement croissante.

**7.20-4** Soit  $y \in [-1 ; 1]$ . Alors  $\exists ! x \in \left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right], \arcsin(y) = x$  et  $y = \sin(x)$ . Or sin est impaire (cf. propriété 7.17-3 p. 80). Donc  $\sin(-x) = -y$ . Comme  $\forall x \in \left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right], \sin(-x) \in [-1 ; 1]$ , on peut appliquer la fonction arcsin (continue) à cette égalité :  $\arcsin(\sin(-x)) = -x = \arcsin(-y)$ . Ce qui achève de montrer que arcsin est impaire.

□

La figure 7.7 donne la représentation graphique de la fonction arc sinus.

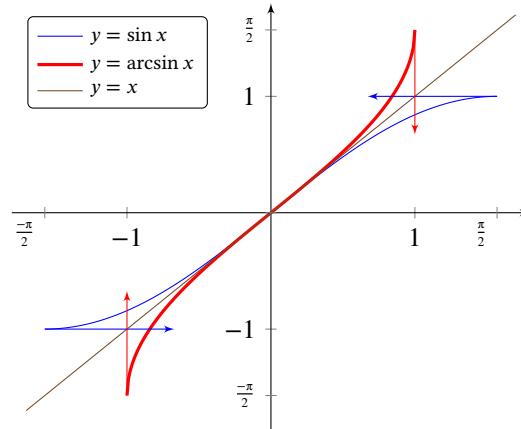


FIGURE 7.7 – Représentation graphique de sinus et arc sinus

💡 Voir l'exercice 6 du TD 6.

**Fonction arc tangente****Définition 7.12 : arc tangente**

La restriction de la fonction tangente à l'intervalle  $\left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$  est une bijection continue et strictement croissante (cf. figure 7.5 p. 82), avec  $\lim_{x \rightarrow \frac{-\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$ . Alors en utilisant le

théorème 5.5-2 p. 55, elle admet une application réciproque, bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $\left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ , appelée *arc tangente* et notée arctan.



Il ne faut pas perdre de vue qu'arc tangente est la réciproque de la *restriction* de tangente à  $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ . Ainsi,  $\tan(\arctan \frac{5}{7}) = \frac{5}{7}$  et  $\arctan(\tan \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ , mais  $\arctan(\tan \frac{7\pi}{5}) = \frac{2\pi}{5}$  : c'est l'unique angle dans  $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$  ayant la même tangente que  $\frac{7\pi}{5}$ .

### Propriété 7.21

1. arc tangente est continue sur  $\mathbb{R}$
2. arc tangente est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan' x = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$ .
3. arc tangente est une fonction strictement croissante.
4. arc tangente est une fonction impaire.

### Démonstration 7.12

**7.21-1** Puisque tangente est continue sur  $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ , sa réciproque arc tangente est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**7.21-2** Tangente est dérivable sur  $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$  et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc arc tangente est dérivable sur  $\mathbb{R}$  d'après le théorème 6.6 p. 60) et  $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan' x = \frac{1}{\tan'(\arctan x)} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$ .

**7.21-3** La dérivée est strictement positive,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Ainsi arc tangente est une fonction strictement croissante, d'après le propriété 6.4 p. 63.

**7.21-4** Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Alors  $\exists ! x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $\arctan(y) = x$  et  $y = \tan(x)$ . Or tan est impaire (cf. propriété 7.18-8 p. 81). Donc  $\tan(-x) = -y$ . Comme  $\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$ ,  $\tan(-x) \in \mathbb{R}$ , on peut appliquer la fonction arctan (continue) à cette égalité :  $\arctan(\tan(-x)) = -x = \arctan(-y)$ . Ce qui achève de montrer que arctan est impaire. □

La figure 7.8 donne la représentation graphique de la fonction arc tangente.

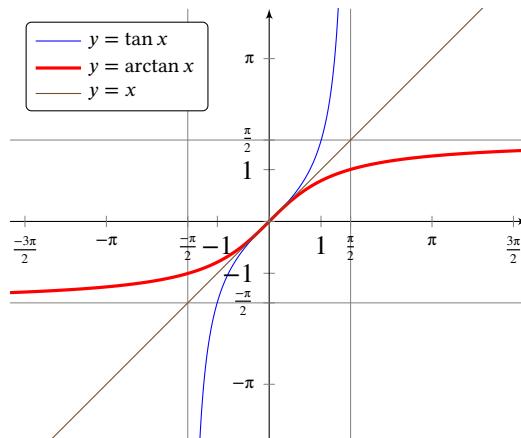


FIGURE 7.8 – Représentation graphique de tangente et arc tangente

### Fonction arc cotangente

#### Définition 7.13 : arc cotangente

La restriction de la fonction cotangente à l'intervalle  $]0 ; \pi[$  est une bijection continue et strictement décroissante (cf. figure 7.5 p. 82), avec  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot x = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \cot x = -\infty$ . Alors en utilisant le théorème 5.5-2 p. 55, elle admet une application réciproque, bijective de  $\mathbb{R}$  dans  $]0 ; \pi[$ , appelée *arc cotangente* et notée  $\text{arccot}$ .

Il ne faut pas perdre de vue qu'arc cotangente est la réciproque de la *restriction* de cotangente à  $]0 ; \pi[$ . Ainsi,  $\cot(\text{arccot } \frac{5}{7}) = \frac{5}{7}$  et  $\text{arccot}(\cot \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$ , mais  $\text{arccot}(\cot \frac{7\pi}{5}) = \frac{2\pi}{5}$  : c'est l'unique angle dans  $]0 ; \pi[$  ayant la même cotangente que  $\frac{7\pi}{5}$ . !

**Propriété 7.22**

1. arc cotangente est continue sur  $\mathbb{R}$
2. arc cotangente est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{arccot}' x = \frac{-1}{1+\cot^2(\text{arccot } x)} = \frac{-1}{1+x^2}$ .
3. arc cotangente est une fonction strictement croissante.
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{arccot } x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ .

**Démonstration 7.13**

**7.21-1** Puisque cotangente est continue sur  $]0 ; \pi[$ , sa réciproque arc cotangente est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**7.21-2** Cotangente est dérivable sur  $]0 ; \pi[$  et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle. Donc arc cotangente est dérivable sur  $\mathbb{R}$  d'après le théorème 6.6 p. 60) et  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{arccot}' x = \frac{1}{\cot'(\text{arccot } x)} = \frac{-1}{1+\cot^2(\text{arccot } x)} = \frac{-1}{1+x^2}$ .

**7.21-3** La dérivée est strictement négative,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Ainsi arc cotangente est une fonction strictement croissante (cf. propriété 6.4 p. 63).

**7.22-4**  $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in ]0 ; \pi[, y = \cot(x)$ . De plus,  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ . Ainsi  $\text{arccot } y = \text{arccot}(\cot x) = \text{arccot}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$ .

Or, si on a deux bijections telles que  $f(x) = g(x)$ , alors  $f^{-1}(f(x)) = x = f^{-1}(g(x))$ , et par suite  $f^{-1} = g^{-1}$ . Donc dans notre cas, on a  $\text{arccot} = (u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$ , avec  $u : x \mapsto \tan x$  et  $v : x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ . D'où il vient que  $\forall x \in \mathbb{R}, \text{arccot } x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ .

□

La figure 7.9 donne la représentation graphique de la fonction arc cotangente.

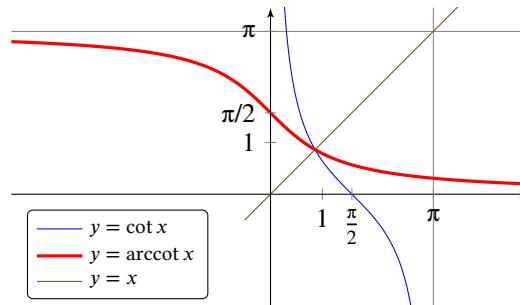


FIGURE 7.9 – Représentation graphique de cotangente et arc cotangente

## 5 Fonctions hyperboliques et réciproques

Voir AZOULAY, AVIGNANT et AULIAC 1996, p. 347 et LIRET et MARTINAIS 1997b, p. 130

### 5.1 Fonctions hyperboliques directes

#### Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

**Définition 7.14 : cosinus et sinus hyperboliques**

Par analogie avec les formules d'Euler (cf. théorème 4.2 p. 43), on appelle *cosinus hyperbolique* (noté  $\cosh$ ) et *sinus hyperbolique* (noté  $\sinh$ ) les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par

$$\begin{cases} \cosh : x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \sinh : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$$

**Propriété 7.23**

1. cosh et sinh sont continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh'(x) = \sinh(x)$  et  $\sinh'(x) = \cosh(x)$
2. cosh est paire, tandis que sinh est impaire
3. cosh et sinh sont des fonctions strictement croissantes
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
5.  $\forall x \in \mathbb{R}^+, \sinh(x) \leq \frac{e^x}{2} \leq \cosh(x)$

**Démonstration 7.14**

**7.23-1** Ces fonctions, construites comme des sommes de fonctions exponentielles, sont continues et dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Les expressions proviennent de la dérivée des deux exponentielles.

**7.23-2** En effet,  $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(-x) = \frac{e^{-x}+e^x}{2} = \cosh(x)$  et  $\sinh(-x) = \frac{e^{-x}-e^x}{2} = -\sinh(x)$

**7.23-3** Soit  $x > 0$ . Alors  $x > -x$ , et comme  $\exp$  est une fonction strictement croissante,  $e^x > e^{-x}$ . Alors sinh est strictement positive. De plus  $e^x > 0$  et  $e^{-x} = 1/e^x > 0$  : cosh est strictement positive.

Alors cosh et sinh sont des fonctions strictement croissantes (cf. la propriété 6.4 p. 63).

**7.23-4** Il suffit de repartir des définitions :

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^{2x}+e^{-2x}+2)-(e^{2x}+e^{-2x}-2)}{4} = 1.$$

**7.23-5** Comme  $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$ , on a  $\frac{e^x+e^{-x}}{2} > \frac{e^x}{2}$  et  $\frac{e^x-e^{-x}}{2} < \frac{e^x}{2}$ .

□

En raison de la parité, on peut ramener le domaine d'étude à  $\mathbb{R}^+$  : on complétera par symétrie d'axe Oy pour cosh et de centre O pour sinh.

Aux bornes de l'intervalle d'étude on utilise que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(-x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$ , ce qui permet d'obtenir  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(x) = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh(x) = \infty$ .

On peut alors établir les tableaux de variations de ces deux fonctions

$x$	0	$+\infty$
$\cosh'(x)$	0	+
$\cosh(x)$	1	$\nearrow +\infty$

$x$	0	$+\infty$
$\sinh'(x)$	1	+
$\sinh(x)$	0	$\nearrow +\infty$

Le tracé de ces deux fonctions est donné à la figure 7.10.

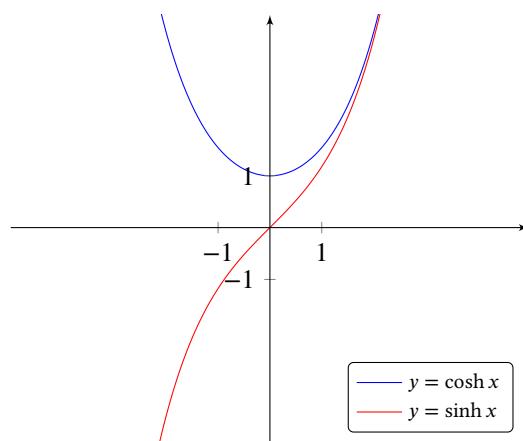


FIGURE 7.10 – Représentation des fonctions cosh et sinh

💡 Voir l'exercice 7 du TD 6.

### Fonction tangente hyperbolique

#### Définition 7.15 : tangente hyperbolique

On appelle *tangente hyperbolique* et on note  $\tanh$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$

#### Propriété 7.24

1.  $\tanh$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
2.  $\tanh$  est une fonction strictement croissante
3.  $\tanh$  est une fonction impaire

#### Démonstration 7.15

**7.24-1** Étant formée du quotient de deux applications continues et dérivables, avec le dénominateur non nul, la fonction  $\tanh$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)}$ . D'où le résultat

**7.24-2** Étant donnée l'expression de la dérivée de  $\tanh$  qui est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ , en utilisant la propriété 6.4 p. 63, on a la croissance stricte de la fonction.

**7.24-3**  $\forall x \in \mathbb{R}, \tanh(-x) = \frac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \frac{-\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\tanh(x)$ .

□

Comme la fonction  $\tanh$  est impaire, on peut restreindre le domaine d'étude à  $\mathbb{R}^+$  (et compléter par une symétrie ce centre O).

Aux bornes de l'intervalle d'étude on a  $\tanh(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$ , car  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} = 0$ . Ainsi la courbe représentative admet la droite  $y = 1$  comme asymptote horizontale en l'infini, et, par symétrie,  $y = -1$  comme asymptote horizontale en  $-\infty$ .

La figure 7.11 ci-dessous donne une représentation de cette fonction.

### Fonction cotangente hyperbolique

#### Définition 7.16 : cotangente hyperbolique

On appelle *cotangente hyperbolique* et on note  $\coth$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^\star$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star, \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}.$$

#### Propriété 7.25

1.  $\coth$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^\star$ , et  $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \coth'(x) = 1 - \coth^2(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$
2.  $\coth$  est une fonction strictement décroissante
3.  $\coth$  est une fonction impaire

#### Démonstration 7.16

**7.25-1** Étant formée du quotient de deux applications continues et dérivables, avec le dénominateur non nul, la fonction  $\coth$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}^\star$ , avec  $\coth'(x) = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)}$ . D'où le résultat.

**7.25-2** Étant donnée l'expression de la dérivée de  $\coth$  qui est strictement négative sur  $\mathbb{R}^\star$ , en utilisant la propriété 6.4 p. 63, on a la décroissance stricte de la fonction.

**7.25-3**  $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \coth(-x) = \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = \frac{\cosh(x)}{-\sinh(x)} = -\coth(x)$ .

□

Comme  $\coth$  est une fonction impaire, on peut restreindre le domaine d'étude à  $\mathbb{R}^{+\star}$  (et compléter par une symétrie ce centre O).

Aux bornes de l'intervalle d'étude on a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \coth(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \infty$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \coth(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = 1$ . Ainsi la courbe représentative admet la droite  $y = 1$  comme asymptote horizontale en l'infini, et, par symétrie,  $y = -1$  comme asymptote horizontale en  $-\infty$ . Elle admet également  $x = 0$  comme asymptote verticale.

La figure 7.11 ci-dessous donne une représentation de cette fonction.

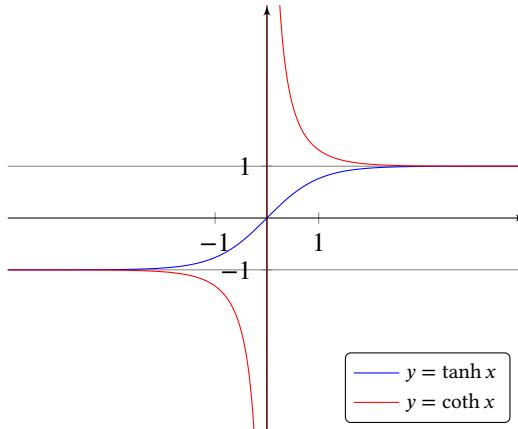


FIGURE 7.11 – Représentation des fonctions  $\tanh$  et  $\coth$

## 5.2 Fonctions hyperboliques réciproques

### Fonction argument cosinus hyperbolique

#### Définition 7.17 : argument cosinus hyperbolique

La restriction de  $\cosh$  à  $\mathbb{R}^+$  est une bijection continue et strictement croissante. De plus  $\cosh(0) = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cosh(x) = \infty$ . Alors  $\cosh|_{\mathbb{R}^+}$  admet une application réciproque définie sur  $[1 ; +\infty[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$ , appelée *argument cosinus hyperbolique* et notée  $\arg \cosh$ .

#### Propriété 7.26

1.  $\arg \cosh$  est continue sur  $[1 ; +\infty[$  et dérivable sur  $]1 ; +\infty[$  avec  $\arg \cosh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ .
2.  $\arg \cosh$  est une fonction strictement croissante
3.  $\forall x \in [1 ; +\infty[, \arg \cosh(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$

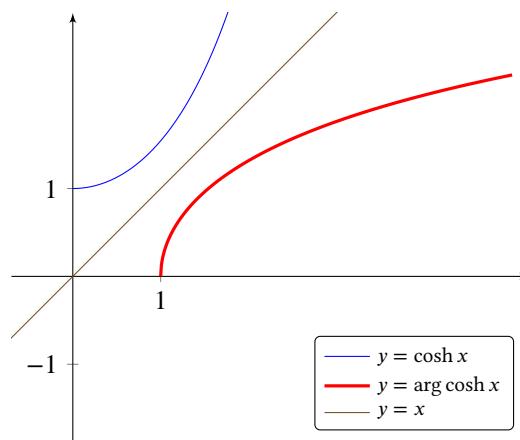
#### Démonstration 7.17

**7.26-1** Comme  $\cosh$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $[1 ; +\infty[$ , sa réciproque est continue sur  $[1 ; +\infty[$ . Cosinus hyperbolique est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  et sa dérivée s'annule en 0. Or  $\cosh(0) = 1$ , donc  $\arg \cosh$  est dérivable sur  $]1 ; +\infty[$  (cf. théorème 6.6 p. 60) et  $\forall x \in ]1 ; +\infty[, \arg \cosh'(x) = \frac{1}{\cosh'(\arg \cosh(x))} = \frac{1}{\sinh(\arg \cosh(x))}$ . De plus, comme  $\cosh^2(\arg \cosh(x)) - \sinh^2(\arg \cosh(x)) = 1$ , on a  $\sinh(\arg \cosh(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ . D'où le résultat.

**7.26-2** Étant donnée l'expression de la dérivée de  $\arg \cosh$  qui est strictement positive sur  $]1 ; +\infty[$ ,  $\arg \cosh$  est une fonction strictement croissante (cf. propriété 6.4 p. 63).

**7.26-3** Puisque  $\arg \cosh$  est la fonction réciproque de  $\cosh$ , on peut en obtenir une expression en résolvant l'équation  $\cosh(f(x)) = x$ , avec  $x \in [1 ; +\infty[$ . En utilisant la définition de  $\cosh$ , on a  $\frac{e^{f(x)} + e^{-f(x)}}{2} = x$ . On doit donc avoir  $f(x) \in \mathbb{R}^+$ , avec  $x \in [1 ; +\infty[$ . On pose  $F = e^{f(x)}$ , qui est donc strictement positif. On se ramène ensuite à une équation du deuxième ordre ayant un discriminant positif. Comme on doit avoir  $F > 0$ , on obtient une seule solution  $F = x + \sqrt{x^2 - 1}$  qui est bien défini car  $x \geq 1$ . Dans la mesure où  $F > 0$ , on peut en prendre le logarithme pour retrouver  $f$ . Ainsi  $\forall x \in [1 ; +\infty[, \arg \cosh(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$ . □

Le tracé de cette fonction est donné figure 7.12.

FIGURE 7.12 – Représentation graphique de  $\arg \cosh$ 

### Fonction argument sinus hyperbolique

#### Définition 7.18 : argument sinus hyperbolique

La fonction  $\sinh$  est une bijection continue et strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors  $\sinh$  admet une application réciproque définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , appelée *argument sinus hyperbolique* et notée  $\arg \sinh$ .

#### Propriété 7.27

1.  $\arg \sinh$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , avec  $\arg \sinh'(x) = \frac{1}{\cosh(\arg \sinh(x))} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
2.  $\arg \sinh$  est une fonction impaire
3.  $\arg \sinh$  est une fonction strictement croissante
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, \arg \sinh(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$

#### Démonstration 7.18

**7.27-1** Comme  $\sinh$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , sa réciproque est continue sur  $\mathbb{R}$ . Sinus hyperbolique est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée ne s'annule pas. Donc  $\arg \sinh$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  (cf. le théorème 6.6 p. 60) et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\arg \sinh'(x) = \frac{1}{\sinh'(\arg \sinh(x))} = \frac{1}{\cosh(\arg \sinh(x))}$ .

De plus, comme  $\cosh^2(\arg \sinh(x)) - \sinh^2(\arg \sinh(x)) = 1$ , on a  $\cosh(\arg \sinh(x)) = \sqrt{1+x^2}$  qui est bien défini pour tout  $x$ . De la sorte  $\forall x \in \mathbb{R}, \arg \sinh'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ .

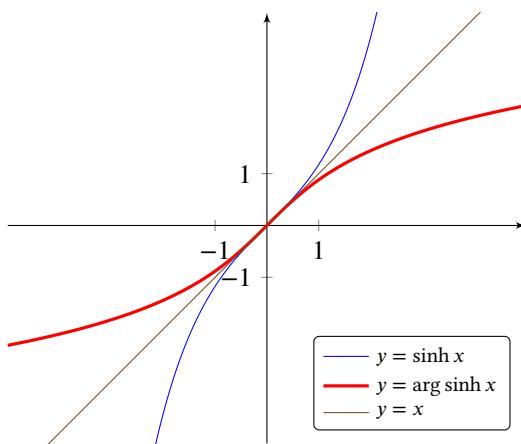
**7.27-2** Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Alors  $\exists ! x \in \mathbb{R}, \arg \sinh(y) = x$  et  $y = \sinh(x)$ . Or  $\sinh$  est impaire (cf. propriété 7.23-2 p. 87). Donc  $\sinh(-x) = -y$ . Comme  $\forall x \in \mathbb{R}, \sinh(-x) \in \mathbb{R}$ , on peut appliquer la fonction  $\arg \sinh$  (continue) à cette égalité :  $\arg \sinh(\sinh(-x)) = -x = \arg \sinh(-y)$ . Ce qui achève de montrer que  $\arg \sinh$  est impaire.

**7.27-3** Étant donnée l'expression de la dérivée de  $\arg \sinh$  qui est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ ,  $\arg \sinh$  est une fonction strictement croissante (cf. propriété 6.4 p. 63).

**7.27-4** Puisque  $\arg \sinh$  est la fonction réciproque de  $\sinh$ , on peut en obtenir une expression en résolvant l'équation  $\sinh(f(x)) = x$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ . En utilisant la définition de  $\sinh$ , on a  $\frac{e^{f(x)} - e^{-f(x)}}{2} = x$ . On doit donc avoir  $f(x) \in \mathbb{R}$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $F = e^{f(x)}$ , qui est donc strictement positif. On se ramène ensuite à une équation du deuxième ordre ayant un discriminant positif. Comme on doit avoir  $F > 0$ , on obtient une seule solution  $F = x + \sqrt{x^2 + 1}$ . Dans la mesure où  $F > 0$ , on peut en prendre le logarithme pour retrouver  $f$ . Ainsi  $\forall x \in \mathbb{R}, \arg \sinh(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$ .

□

Le tracé de cette fonction est donné figure 7.13.

FIGURE 7.13 – Représentation graphique de  $\arg \sinh$ 

### Fonction argument tangente hyperbolique

#### Définition 7.19 : argument tangente hyperbolique

La fonction  $\tanh$  est une bijection continue et strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $] -1 ; 1 [$ . Alors  $\tanh$  admet une application réciproque définie de  $] -1 ; 1 [$  dans  $\mathbb{R}$ , appelée *argument tangente hyperbolique* et notée  $\arg \tanh$ .

#### Propriété 7.28

1.  $\arg \tanh$  est continue et dérivable sur  $] -1 ; 1 [$  et  $\forall x \in ] -1 ; 1 [$ ,  $\arg \tanh'(x) = \frac{1}{1 - \tanh^2(\arg \tanh(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$
2.  $\arg \tanh$  est une fonction impaire
3.  $\arg \tanh$  est une fonction strictement croissante
4.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\arg \tanh(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$

#### Démonstration 7.19

**7.28-1** Comme  $\tanh$  est une bijection continue sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $] -1 ; 1 [$ , sa réciproque est continue sur  $] -1 ; 1 [$ . Tangente hyperbolique est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée ne s'annule pas. Donc  $\arg \tanh$  est dérivable sur  $] -1 ; 1 [$  (cf. le théorème 6.6 p. 60) et  $\forall x \in ] -1 ; 1 [$ ,  $\arg \tanh'(x) = \frac{1}{\tanh'(\arg \tanh(x))} = \frac{1}{1 - \tanh^2(\arg \tanh(x))}$ .

De plus, comme  $x \in ] -1 ; 1 [$ , on a  $\arg \tanh'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$ .

**7.28-2** Soit  $y \in ] -1 ; 1 [$ . Alors  $\exists ! x \in \mathbb{R}$ ,  $\arg \tanh(y) = x$  et  $y = \tanh(x)$ . Or  $\tanh$  est impaire (cf. propriété 7.24-3 p. 88). Donc  $\tanh(-x) = -y$ . Comme  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\tanh(-x) \in ] -1 ; 1 [$ , on peut appliquer la fonction  $\arg \tanh$  (continue) à cette égalité :  $\arg \tanh(\tanh(-x)) = -x = \arg \tanh(-y)$ . Ce qui achève de montrer que  $\arg \tanh$  est impaire.

Ou plus simplement, avec l'expression de la propriété 7.28-4 : on a  $\arg \tanh(-x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) = -\arg \tanh(x)$ .

**7.28-3** Étant donnée l'expression de la dérivée de  $\arg \tanh$  qui est strictement positive sur  $] -1 ; 1 [$ ,  $\arg \tanh$  est une fonction strictement croissante (cf. propriété 6.4 p. 63).

**7.28-4** Puisque  $\arg \tanh$  est la fonction réciproque de  $\tanh$ , on peut en obtenir une expression en résolvant l'équation  $\tanh(f(x)) = x$ , avec  $x \in ] -1 ; 1 [$ . En utilisant la définition de  $\tanh$ , on a  $\frac{e^{f(x)} - e^{-f(x)}}{e^{f(x)} + e^{-f(x)}} = x$ . On doit donc avoir  $f(x) \in \mathbb{R}$ , avec  $x \in ] -1 ; 1 [$ . On pose  $F = e^{f(x)}$ , qui est donc strictement positif. On se ramène ensuite à une équation du deuxième ordre ayant un discriminant positif. Comme on doit avoir  $F > 0$ , on obtient une seule solution  $F = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}$  qui est bien définie pour  $x \in ] -1 ; 1 [$ . Dans la mesure où  $F > 0$ , on peut en prendre le logarithme pour retrouver  $f$ . Ainsi  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\arg \tanh(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$ .

Comme la fonction est impaire, on peut ramener le domaine d'étude à  $[0 ; 1 [$  et compléter par une symétrie de centre O. □

Aux bornes de l'intervalle d'étude on a  $\arg \tanh(0) = \frac{1}{2} \ln(1) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} \arg \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \infty$ .

Le tracé de cette fonction est donné figure 7.14.

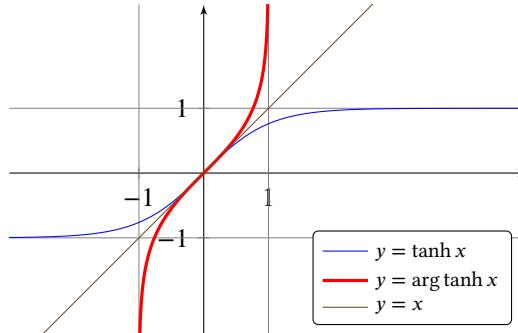


FIGURE 7.14 – Représentation graphique de  $\arg \tanh$

### Fonction argument cotangente hyperbolique

#### Définition 7.20 : argument cotangente hyperbolique

La fonction  $\coth$  est une bijection continue et strictement croissante de  $\mathbb{R}^*$  dans  $]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$ . Alors  $\coth$  admet une application réciproque définie de  $]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}^*$ , appelée *argument cotangente hyperbolique* et notée  $\arg \coth$ .

#### Propriété 7.29

1.  $\arg \coth$  est continue et dérivable sur  $]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$
2.  $\arg \coth$  est une fonction strictement décroissante
3.  $\forall x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[, \arg \coth(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
- 4.

#### Démonstration 7.20

**7.29-1** Comme  $\coth$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  à valeurs dans  $]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$ , sa réciproque est continue sur  $]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$ . Cotangente hyperbolique est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et sa dérivée ne s'annule pas. Donc  $\arg \coth$  est dérivable sur  $]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$  (cf. théorème 6.6 p. 60) et  $\forall x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[, \arg \coth'(x) = \frac{1}{\coth'(\arg \coth(x))} = \frac{1}{1 - \coth^2(\arg \coth(x))}$ . De plus, comme  $x \in \text{intoo}(-\infty, -1) \cup ]1 ; +\infty[$ , on a  $\arg \coth'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$ .

**7.29-2** Étant donnée l'expression de la dérivée de  $\arg \coth$  qui est strictement négative sur  $]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$ ,  $\arg \coth$  est une fonction strictement décroissante (cf. propriété 6.4 p. 63).

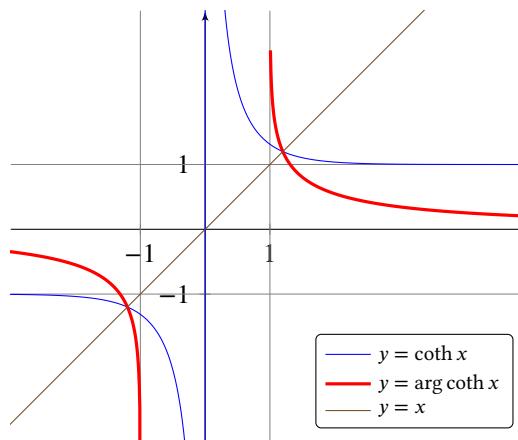
**7.29-3** Puisque  $\arg \coth$  est la fonction réciproque de  $\coth$ , on peut en obtenir une expression en résolvant l'équation  $\coth(f(x)) = x$ , avec  $x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$ . En utilisant la définition de  $\coth$ , on a  $\frac{e^{f(x)} + e^{-f(x)}}{e^{f(x)} - e^{-f(x)}} = x$ . On doit donc avoir  $f(x) \in \mathbb{R}^*$ , avec  $x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$ . On pose  $F = e^{f(x)}$ , qui est donc strictement positif. On se ramène ensuite à une équation du deuxième ordre ayant un discriminant positif. Comme on doit avoir  $F > 0$ , on obtient une seule solution  $F = \sqrt{\frac{1+x^2}{x-1}}$  qui est bien défini pour  $x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[$ . Dans la mesure où  $F > 0$ , on peut en prendre le logarithme pour retrouver  $f$ . Ainsi  $\forall x \in ]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[, \arg \coth(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ .

**7.29-4** On a  $\arg \coth(-x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{-1-x}\right) = -\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\arg \coth(x)$ . La fonction est donc impaire. □

Comme la fonction est impaire, on peut ramener le domaine d'étude à  $[0 ; 1[$  et compléter par une symétrie de centre O.

Aux bornes de l'intervalle d'étude on a  $\arg \tanh(0) = \frac{1}{2} \ln(1) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1} \arg \tanh(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) = \infty$ .

Le tracé de cette fonction est donné figure 7.15.

FIGURE 7.15 – Représentation graphique de  $\arg \coth$ 

## 6 Fonctions échelon, Dirac, rampe et créneau

### 6.1 Fonction échelon

En traitement du signal, pour modéliser un signal obtenu en fermant un interrupteur à un instant donné et en le maintenant fermé indéfiniment, on utilise la fonction échelon.

#### Définition 7.21 : fonction de Heaviside

On appelle *fonction échelon* ou *fonction de Heaviside* l'application discontinue en 0 qui est nulle pour les réels strictement négatifs et qui vaut 1 pour les réels positifs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La figure 7.16 donne une représentation de cette fonction.

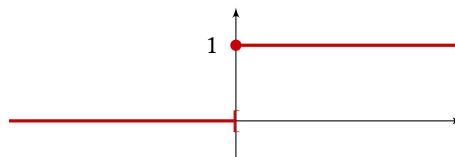


FIGURE 7.16 – Fonction de Heaviside

Dans certains cas on peut trouver d'autres valeurs en 0. Par exemple, on peut poser  $H(0) = \frac{1}{2}$ . Ceci n'a que peu d'importance car cette fonction est le plus souvent utilisée dans une intégrale.

Pour obtenir le changement de valeur en un  $x_0$ , il suffit de translater la courbe en prenant  $H(x - x_0)$ .

### 6.2 Fonction Dirac

#### Définition 7.22 : fonction de Dirac

La *distribution de Dirac*, aussi appelée par abus de langage *fonction de Dirac*, notée  $\delta$ , peut être considérée comme une fonction qui prend une « valeur » infinie en 0, et la valeur zéro partout ailleurs. Elle correspond, dans la théorie des distributions, à la dérivée de la fonction de Heaviside.

La distribution de Dirac sert en physique à décrire des événements ponctuels.

### 6.3 Fonction rampe

#### Définition 7.23 : fonction rampe

La *fonction rampe*, utilisée notamment en traitement du signal, peut se construire comme la fonction de Heaviside multipliée par la fonction identité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, R(x) = xH(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La figure 7.17 donne une représentation de cette fonction.

La dérivée de la fonction rampe est la fonction de Heaviside :  $\forall x \in \mathbb{R}, R'(x) = H(x)$ .

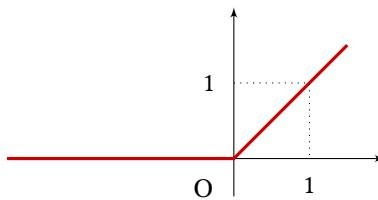


FIGURE 7.17 – Fonction rampe

☞ Voir les exercices 8 et 9 du TD 6.

### 6.4 Fonction créneau

En traitement du signal pour représenter un signal obtenu en fermant un interrupteur à un instant donné  $x_1$  et en le maintenant fermé jusqu'à l'instant  $x_2$ , on utilise la fonction créneau.

#### Définition 7.24 : fonction créneau

Soit  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , avec  $x_1 < x_2$ . On appelle *fonction créneau* l'application qui vaut 1 pour les réels compris entre  $x_1$  et  $x_2$  et qui est nulle ailleurs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette fonction peut se construire à l'aide de la fonction de Heaviside :  $C(x) = H(x - x_1) - H(x - x_2)$ . Une représentation en est donnée à la figure 7.18.

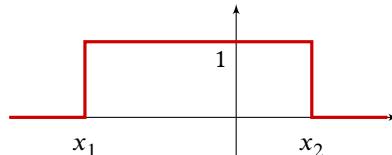


FIGURE 7.18 – Fonction rampe

## Chapitre 8

# Intégration

### Sommaire

---

1	Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment . . . . .	95
1.1	Fonctions en escalier . . . . .	95
1.2	Approximation des fonctions continues . . . . .	97
2	Propriétés de l'intégrale . . . . .	98
2.1	Linéarité . . . . .	98
2.2	Majorations et encadrements . . . . .	99
2.3	Relation de Chasles . . . . .	100
2.4	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	100
2.5	Somme de Riemann . . . . .	100
3	Intégrale fonction de la borne supérieure . . . . .	102
4	Extension aux applications à valeurs complexes . . . . .	104

---

En complément, on pourra se référer

- aux sections 1.7 *Généralités sur le calcul intégral* p. 38 et 2.2 *Méthode de calcul intégral* p. 69 de ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011 ;
- aux fiches 43 à 45 (p. 174 à 185) et 57 (p. 230) de FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013 ;
- aux chapitres 9 *L'intégrale* p. 139, 10 *Primitives* p. 155 et 16 *Étude de primitives* p. 261 de LIRET et MARTINAIS 1997b ;
- aux chapitres 15 *Intégration d'une fonction d'une variable* p. 1 et 16 *Calcul des primitives et des intégrales définies* p. 24 de Azoulay1996\_2\_CI-SST81T5 ;
- au chapitre 2 *Intégrales généralisées* p. 66 de Azoulay1997\_3\_CI-SST81T5.

## 1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

### 1.1 Fonctions en escalier

#### Définition 8.1 : subdivision

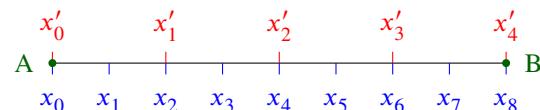
Soit  $[a ; b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ . On appelle *subdivision* de  $[a ; b]$  toute famille  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  croissante finie telle que  $a = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$ .

On appelle *pas de la subdivision* la longueur  $\max_{i \in \{1, \dots, n\}} (x_i - x_{i-1})$ .

#### Définition 8.2 : comparaison de subdivisions

Une subdivision  $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  de  $[a ; b]$  est dite *plus fine* qu'une autre subdivision  $S' = (x'_i)_{0 \leq i \leq m}$  de  $[a ; b]$  si  $\{x'_0 ; \dots ; x'_i ; \dots ; x'_m\} \subset \{x_0 ; \dots ; x_i ; \dots ; x_n\}$ .

Sur la figure 8.1 ci-contre, la subdivision  $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  (en bleu) de  $[a ; b]$  est plus fine que la subdivision  $S' = (x'_i)_{0 \leq i \leq m}$  (en rouge).

FIGURE 8.1 – subdivisions de  $[a ; b]$ 

### Définition 8.3 : fonction en escalier

Soit  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision  $S = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  de  $[a ; b]$  telle que  $\forall i \in \{1 ; \dots ; n\}, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall x \in ]x_{i-1} ; x_i[, f(x) = \lambda_i$ .

On dit qu'une subdivision est *adaptée* à  $f$  si cette fonction est constante sur chaque intervalle  $]x_{i-1} ; x_i[$  de la subdivision.

### Propriété 8.1

Si  $f$  est une fonction en escalier et si  $S$  est une subdivision adaptée à  $f$ , alors toute subdivision  $S'$  plus fine que  $S$  est aussi adaptée à  $f$ .



On note  $E([a ; b])$  l'ensemble des applications en escalier sur  $[a ; b]$ .

### Propriété 8.2

Soit  $(f, g) \in E([a ; b])^2$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

1.  $f + g \in E([a ; b])$
2.  $fg \in E([a ; b])$
3.  $\lambda f \in E([a ; b])$

### Démonstration 8.1 : (idée)

Pour montrer que  $f + g \in E([a ; b])$ , on prend une subdivision  $S''$  plus fine que les subdivision  $S$  adaptée à  $f$  et  $S'$  adaptée à  $g$ .

□

### Définition 8.4 : intégrale

Soit  $f \in E([a ; b])$ , c'est-à-dire que  $\exists (x_i)_{0 \leq i \leq n}, \exists \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall x \in ]x_{i-1} ; x_i[, f(x) = \lambda_i$ .

On définit l'*intégrale* de  $f$  sur le segment  $[a ; b]$  par  $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \lambda_i$ .

L'intégrale correspond ainsi à la somme des aires des rectangles compris entre l'axe des ordonnées, la fonction et les verticales en  $x_{i-1}$  et  $x_i$ . Ces aires sont de fait positives au-dessus de l'axe, et négatives en-dessous (selon la valeur des  $\lambda_i$ ).

### Propriété 8.3

Soient  $(f, g) \in E([a ; b])^2$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et soit  $c \in [a ; b]$ . Alors

1.  $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$
2.  $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$
3.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$
4. si  $f \geq 0, \int_a^b f(x) dx \geq 0$
5. si  $f \geq g, \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$
6.  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

### Démonstration 8.2 : de la propriété 8.3-1 p. 96

Soient  $S$  et  $S'$  des subdivisions respectivement adaptées à  $f$  et à  $g$ . On prend ensuite  $S'' = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$  une subdivision plus fine que  $S$  et  $S'$  (par exemple  $S'' = S \cup S'$ ). Alors, d'après la propriété 8.1 p. 96,  $S''$  est adaptée à  $f$ , à  $g$  mais aussi à  $f + g$  (cf. propriété 8.2 p. 96). Alors on peut trouver  $\lambda_i$  et  $\mu_i$  tels que  $\forall x \in ]x_{i-1} ; x_i[, f(x) = \lambda_i$  et  $g(x) = \mu_i$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Par suite } \int_a^b (f+g)(x) dx &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(\lambda_i + \mu_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\lambda_i + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\mu_i \\
 &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx
 \end{aligned}$$

□

## 1.2 Approximation des fonctions continues

### Propriété 8.4

Soit  $f \in C^0([a, b])$  et soit  $\epsilon > 0$ .  
Alors  $\exists (\Phi, \Psi) \in E([a; b])^2$  telles que  $\forall x \in [a; b], \Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$  et  $\Psi(x) - \Phi(x) \leq \epsilon$ .

La figure 8.2 donne une représentation graphique de cette propriété.

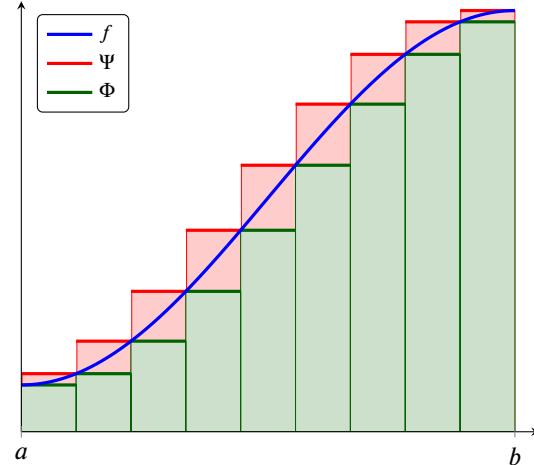


FIGURE 8.2 – Approximation d'une fonction continue

### Démonstration 8.3

Soit  $\epsilon > 0$ . Comme  $f \in C^0([a, b])$ ,  $\exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a; b]^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{b-a}{n} < \eta$ . On note  $I_k = \left]a + (k-1)\frac{b-a}{n}; a + k\frac{b-a}{n}\right[ = ]a + k_{k-1}; a + x_k[$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$ .

On pose alors  $\forall k \in (1, 2, \dots, n), \forall x \in I_k, \Phi(x) = \inf_{t \in I_k} f(t)$  et  $\Psi(x) = \sup_{t \in I_k} f(t)$ . Ainsi  $\forall x \in I_k, \Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$ .

Sur chacun des intervalles  $I_k$  on a  $\Psi(x) - \Phi(x) = \sup_{t \in I_k} f(t) - \inf_{t \in I_k} f(t) \leq \epsilon$  car ces intervalles ont des longueurs inférieures à  $\eta$  par construction.

De la sorte,  $\forall x \in [a; b], \Phi(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$  et  $\Psi(x) - \Phi(x) < \epsilon$ .

□

$$\begin{aligned}
 \text{On note à présent } A &= \left\{ \int_a^b \Phi(x) dx \mid \Phi \in E([a; b]) ; \Phi \leq f \right\} \subset \mathbb{R} \\
 B &= \left\{ \int_a^b \Psi(x) dx \mid \Psi \in E([a; b]) ; \Psi \geq f \right\} \subset \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Étant donnée la propriété précédente, on a  $(\Phi_0, \Psi_0) \in E([a; b])^2$  tel que  $\forall x \in [a; b], \Phi_0(x) \leq f(x) \leq \Psi_0(x)$ . Ainsi  $A \neq \emptyset$  et  $B \neq \emptyset$ .

Montrons que  $A$  est majorée par  $\Psi_0$ .

Soit  $\alpha \in A$ . Alors  $\alpha = \int_a^b \Phi(x) dx$ , avec  $\Phi \leq f \leq \Psi_0$ . Par suite  $\alpha = \int_a^b \Phi(x) dx \leq \int_a^b \Psi_0(x) dx$ . Ainsi l'ensemble  $A$  admet une borne supérieure  $S$ .

De la même manière on établit que  $B$  est minorée et admet une borne inférieure  $I$ .

Montrons maintenant que  $I = S$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . On sait que  $\forall x \in [a; b], \Psi_0(x) - \Phi_0(x) < \epsilon$ . Alors  $\int_a^b (\Psi_0(x) - \Phi_0(x)) dx \leq \epsilon(b-a)$ . Puis  $\int_a^b \Psi_0(x) dx - \int_a^b \Phi_0(x) dx \leq \epsilon(b-a)$ . Or  $\int_a^b \Psi_0(x) dx - \int_a^b \Phi_0(x) dx \geq I - S$ , par conséquent  $I - S \leq \epsilon(b-a)$ . Ceci étant vrai pour tout  $\epsilon$  positif, on a donc  $I = S$ .

On a alors la définition-propriété suivante

**Définition 8.5 : intégrale**

Soit  $f \in C^0([a, b])$ . Alors les ensembles  $A = \left\{ \int_a^b \Phi(x) dx \mid \Phi \in E([a; b]) ; \Phi \leq f \right\}$  et  $B = \left\{ \int_a^b \Psi(x) dx \mid \Psi \in E([a; b]) ; \Psi \geq f \right\}$  admettent respectivement une borne supérieure et une borne inférieure qui sont égales. On appelle cette valeur l'*intégrale de f sur [a; b]*. On la note  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Définition 8.6 : continuité par morceaux**

Soit  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est *continue par morceaux* si il existe une subdivision  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  telle que

- $\forall i \in \{1; \dots; n\}$ ,  $f$  est continue sur  $[x_{i-1}; x_i]$ ;
- $\forall i \in \{0; \dots; n\}$ ,  $f$  admet une limite à gauche et une limite à droite finies en  $x_i$ .

**Définition 8.7 : intégrale**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur un intervalle  $I$ . On note  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  une subdivision associée, et  $f_i$  le prolongement continu de  $f$  à  $[x_{i-1}; x_i]$ . On définit l'*intégrale de f sur [a; b] ⊂ I* par  $\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f_i(x) dx \right)$ .

## 2 Propriétés de l'intégrale

### 2.1 Linéarité

**Propriété 8.5**

L'application  $\cdot \mapsto \int_a^b \cdot$  est une forme linéaire, c'est-à-dire que  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  continues par morceaux,  $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$  et  $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$ .

**Démonstration 8.4**

- Soit  $f$  une application continue par morceaux. Montrons que  $\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ .  
Comme  $f$  est continue par morceaux, on peut trouver  $\Phi$  et  $\Psi$  des fonctions en escalier telles que  $\Phi \leq f \leq \Psi$ . D'où il vient  $-\Psi \leq -f \leq -\Phi$  et par suite  $\int_a^b -\Psi \leq \int_a^b -f \leq \int_a^b -\Phi$  et ainsi  $-\int_a^b \Psi \leq \int_a^b -f \leq \int_a^b \Phi$  (en utilisant la propriété 8.3-2 p. 96).  
On a de plus, par définition,  $\sup_{-\Psi \leq -f} \int_a^b -\Psi(x) dx = \int_a^b -f(x) dx = \inf_{-\Phi \geq -f} \int_a^b -\Phi(x) dx$ .  
Or  $\inf_{-\Phi \geq -f} \int_a^b -\Phi(x) dx = \inf_{\Phi \leq f} \int_a^b -\Phi(x) dx = \int_a^b \Phi_0(x) dx$  tel que  $\forall \Phi \leq f$ ,  $\int_a^b -\Phi_0(x) dx \leq \int_a^b -\Phi(x) dx$   
 $= -\int_a^b \Phi_0(x) dx$  tel que  $\forall \Phi \leq f$ ,  $\int_a^b \Phi(x) dx \leq \int_a^b \Phi_0(x) dx$   
 $= -\sup_{\Phi \leq f} \int_a^b \Phi(x) dx$   
Et de même,  $\sup_{-\Psi \leq -f} \int_a^b -\Psi(x) dx = \sup_{\Psi \geq f} \int_a^b -\Psi(x) dx = -\inf_{\Psi \geq f} \int_a^b \Psi(x) dx$ .  
D'où il vient  $-\inf_{\Psi \geq f} \int_a^b \Psi(x) dx \leq \int_a^b -f(x) dx \leq -\sup_{\Phi \leq f} \int_a^b \Phi(x) dx$  Et donc  $\int_a^b -f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$   
 $- \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b -f(x) dx \leq -\int_a^b f(x) dx$   
 $- \int_a^b f(x) dx$ .
- Soit  $\lambda > 0$ . Montrons que  $\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$ .  
Soient  $\Phi$  et  $\Psi$  en escalier telles que  $\Phi \leq f \leq \Psi$ .

Alors  $\lambda\Phi \leq \lambda f \leq \lambda\Psi$

Puis  $\int_a^b \lambda\Phi(x) dx \leq \int_a^b \lambda f(x) dx \leq \int_a^b \lambda\Psi(x) dx$

Soit  $\lambda \int_a^b \Phi(x) dx \leq \int_a^b \lambda f(x) dx \leq \lambda \int_a^b \Psi(x) dx$  ( cf. propriété 8.3-2 p. 96)

Donc  $\sup_{\Phi \leq f} \int_a^b \Phi(x) dx \leq \int_a^b \lambda f(x) dx \leq \inf_{\Psi \geq f} \int_a^b \Psi(x) dx$

Et ainsi  $\lambda \sup_{\Phi \leq f} \int_a^b \Phi(x) dx \leq \int_a^b \lambda f(x) dx \leq \lambda \inf_{\Psi \geq f} \int_a^b \Psi(x) dx$

D'où  $\lambda \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \lambda f(x) dx \leq \lambda \int_a^b f(x) dx$

De la sorte, en utilisant le point précédent, on a bien que  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$ .

- Soit une seconde fonction  $g$  continue par morceaux. Montrons que  $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ .

Comme  $f$  et  $g$  sont continues par morceaux, on a les fonctions  $\Phi, \Psi, \tilde{\Phi}$  et  $\tilde{\Psi}$  en escalier telles que  $\Phi \leq f \leq \Psi$  et  $\tilde{\Phi} \leq g \leq \tilde{\Psi}$ .

Alors  $\Phi + \tilde{\Phi} \leq f + g \leq \Psi + \tilde{\Psi}$

$$\int_a^b (\Phi + \tilde{\Phi})(x) dx \leq \int_a^b (f + g)(x) dx \leq \int_a^b (\Psi + \tilde{\Psi})(x) dx$$

$$\int_a^b \Phi(x) dx + \int_a^b \tilde{\Phi}(x) dx \leq \int_a^b (f + g)(x) dx \leq \int_a^b \Psi(x) dx + \int_a^b \tilde{\Psi}(x) dx$$

$$\sup_{\Phi \leq f} \int_a^b \Phi(x) dx + \sup_{\tilde{\Phi} \leq g} \int_a^b \tilde{\Phi}(x) dx \leq \int_a^b (f + g)(x) dx \leq \inf_{\Psi \geq f} \int_a^b \Psi(x) dx + \inf_{\tilde{\Psi} \geq g} \int_a^b \tilde{\Psi}(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b (f + g)(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

D'où  $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$

□

## 2.2 Majorations et encadrements

### Propriété 8.6

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a ; b]$ .

1. Si  $\forall x \in [a ; b], f(x) \geq 0$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .
2. Si  $\forall x \in [a ; b], f(x) \geq g(x)$ , alors  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .
3. Si  $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in [a ; b], m \leq f(x) \leq M$ , alors  $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$ .
4.  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .
5.  $\left| \int_a^b (fg)(x) dx \right| \leq \sup_{t \in [a ; b]} |f(t)| \int_a^b |g(x)| dx$ .
6. Si  $f \geq 0$ , continue sur  $[a ; b]$ , telle que  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , alors  $f = 0$ . La contraposée étant que si  $f \geq 0$ , continue sur  $[a ; b]$  et si  $f \neq 0$ , alors  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .

### Démonstration 8.5

**8.6-1** La fonction nulle est une fonction en escalier qui minore  $f$ . Donc  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b 0 dx = 0$ .

**8.6-2** On applique le résultat précédent à  $f - g : \int_a^b (f - g)(x) dx \geq 0$ , donc  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .

**8.6-3** Comme  $\forall x \in [a ; b], m \leq f(x) \leq M$ , on a  $\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$  et ainsi  $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$ .

**8.6-4**  $\forall x \in [a ; b], -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ , donc  $-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$ . Et par suite  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

**8.6-5**  $\left| \int_a^b (fg)(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \times |g(x)| dx$ . On note  $M = \sup_{x \in [a;b]} |f(x)|$ . Alors  $\left| \int_a^b (fg)(x) dx \right| \leq$

$\int_a^b M |g(x)| dx$ . Et comme  $M$  est un scalaire, on a alors  $\left| \int_a^b (fg)(x) dx \right| \leq M \int_a^b |g(x)| dx$ .

**8.6-6** Soit  $f \geq 0$ , continue sur  $[a;b]$  telle que  $f \neq 0$ . Alors  $\exists x_0 \in [a;b], f(x_0) > 0$ . Comme  $f$  est continue en  $x_0$ ,  $\exists \eta > 0, \forall x \in ]x_0 - \eta; x_0 + \eta[, f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$ . On note  $\phi$  la fonction en escalier telle que  $\phi(x) = 0$  si  $x \notin ]x_0 - \eta; x_0 + \eta[$  et  $\phi(x) = \frac{f(x_0)}{2}$  sinon. Alors  $f \geq \phi$  et par suite  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \phi(x) dx = \eta f(x_0) > 0$ .

□

## 2.3 Relation de Chasles

### Propriété 8.7 : Relation de Chasles

Soit  $f$  une application continue par morceaux sur  $[a;b]$ , et soit  $c \in [a;b]$ . Alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

### Démonstration 8.6

Comme  $f$  est continue par morceaux sur  $[a;b]$ ,  $\exists (\phi, \psi) \in E([a;b])^2$  telle que  $\phi \leq f \leq \psi$ . Alors  $\int_a^c \phi(x) dx + \int_c^b \phi(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq \int_a^c \psi(x) dx + \int_c^b \psi(x) dx$ .

En utilisant la propriété 8.3-6 p. 96, on a alors  $\int_a^b \phi(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq \int_a^b \psi(x) dx$ .

Par suite  $\sup_{\phi \leq f} \left( \int_a^b \phi(x) dx \right) \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq \inf_{\psi \geq f} \left( \int_a^b \psi(x) dx \right)$  et ainsi  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx$ , d'où le résultat.

□

### Propriété 8.8

Soit  $f$  une application continue par morceaux sur  $[a;b]$ .

Alors  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .



Avec cette propriété, la relation de Chasles reste vraie pour tous  $a, b$  et  $c \in \mathbb{R}$ , quel que soit leur ordre.

💡 Voir l'exercice 1 du TD 7.

## 2.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

### Théorème 8.1 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues par morceaux sur  $[a;b]$ . Alors

$$\left| \int_a^b (fg)(x) dx \right| \leq \sqrt{\left( \int_a^b f^2(x) dx \right) \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)} \text{ ou}$$

$$\left( \int_a^b (fg)(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right) \left( \int_a^b g^2(x) dx \right).$$

## 2.5 Somme de Riemann

### Définition 8.8 : Somme de Riemann

Soit une application  $f$  continue par morceaux sur  $[a ; b]$ . Soit  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  une subdivision de  $[a ; b]$ . Soit, pour tout  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,  $\xi_i \in [x_{i-1} ; x_i]$ . On appelle *somme de Riemann* une somme de la forme

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1})$$



Une somme de Riemann dépend

- de la fonction  $f$
- de la subdivision  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$
- des  $\xi_i$

Une somme de Riemann correspond à l'intégrale d'une fonction en escalier valant  $f(\xi_i)$  sur  $]x_{i-1} ; x_i[$ , comme schématisé à la figure 8.3.

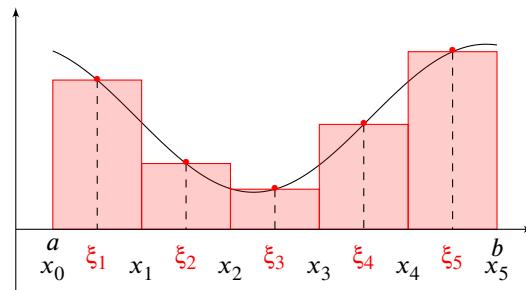


FIGURE 8.3 – Représentation d'une somme de Riemann

### Propriété 8.9

Soit une application  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux. Les sommes de Riemann relatives à  $f$  convergent toutes vers  $\int_a^b f(x) dx$  lorsque le pas de la subdivision tend vers 0. C'est-à-dire que  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x_i)_{0 \leq i \leq n}, \forall \xi_i \in [x_{i-1} ; x_i], \max_{i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket} (x_i - x_{i-1}) < \eta \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \right| < \epsilon$ .

### Démonstration 8.7

On peut se ramener à une fonction continue sur  $[a ; b]$ . Alors, par le théorème 5.6 (de Heine) p. 56,  $f$  est uniformément continue sur  $[a ; b]$ . Ainsi,  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in [a ; b]^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ . Soit donc  $\epsilon > 0$  et soit  $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$  une subdivision dont le pas est strictement inférieur à  $\eta$ .

Par ailleurs on a,  $\forall i \in \{0 ; \dots ; n\}$ ,  $\forall \xi_i \in [x_{i-1} ; x_i]$ , d'après la propriété 8.6-4 p. 99,

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \right| = \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) - f(\xi_i) dx \right| \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(\xi_i)| dx.$$

Or  $|x - \xi_i| < \eta$ , donc  $|f(x) - f(\xi_i)| < \epsilon$ , et  $\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) - f(\xi_i)| dx < \int_{x_{i-1}}^{x_i} \epsilon dx = (x_i - x_{i-1}) \epsilon$ .

$$\begin{aligned} D'où il vient \left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_i - x_{i-1}) \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i) \right| \\ &< \sum_{i=1}^n \epsilon (x_i - x_{i-1}) = \epsilon (b - a) \end{aligned}$$

□

En pratique, on considère pratiquement toujours des sommes de Riemann associées à des subdivisions régulières, c'est-à-dire  $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ .

De même, on choisit souvent  $\xi_i = x_{i-1}$  ou  $\xi = x_i$ .

**Corollaire 8.1 : limite d'une somme de Riemann**

Si  $f$  est continue sur  $[a ; b]$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$



☞ Voir l'exercice 2 du TD 7.

Dans le corollaire, le résultat est vrai avec  $\sum_{i=0}^{n-1}$  ou  $\sum_{i=1}^n$ , mais aussi avec  $\sum_{i=0}^n$ . En effet,  $\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) + \frac{b-a}{n} f(b)$ . Et ce dernier terme tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### 3 Intégrale fonction de la borne supérieure

**Définition 8.9 : intégrale fonction de la borne supérieure**

Soit  $f$  une application continue par morceaux sur  $[a ; b]$  et soit  $x \in [a ; b]$ . On appelle *intégrale fonction de la borne supérieure* la fonction  $F : x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

**Propriété 8.10**

Avec les hypothèses et les notations de la définition 8.9, on a que  $F$  est continue sur  $[a ; b]$ .

**Démonstration 8.8**

Soit  $x \in [a ; b]$  et soit  $h \in \mathbb{R}$ . Montrons que  $\lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x)$ .

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \\ &\leq \int_x^{x+h} |f(t)| dt \end{aligned}$$

Or  $f$  est continue par morceaux sur  $[a ; b]$ , donc elle est bornée (cf. théorème 5.4 p. 55) et  $\exists M > 0, |f(x)| \leq M$ . Ainsi  $|F(x+h) - F(x)| \leq \int_x^{x+h} M dt = Mh$ , d'où le résultat. □

**Propriété 8.11**

Soit  $f$  une application continue par morceaux sur  $[a ; b]$ , et soit  $F$  l'intégrale fonction de la borne supérieure associée. Soit  $x \in [a ; b]$  tel que  $f$  est continue en  $x$ . Alors  $F$  est dérivable en  $x$  et  $F'(x) = f(x)$ .



Si on se place en un point où  $f$  n'est pas continue, le résultat est faux.

**Exemple 8.1**

Soit  $f : \begin{cases} [0 ; 2] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0 ; 1] \\ 1 & \text{si } x \in ]1 ; 2] \end{cases} \end{cases}$

On a alors  $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0 ; 1] \\ x-1 & \text{si } x \in ]1 ; 2] \end{cases}$  qui n'est pas dérivable en  $x = 1$ .

**Démonstration 8.9**

On cherche à montrer que si  $x$  est un point où  $f$  est continue, alors  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \left( \int_x^{x+h} f(t) dt - h f(x) \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} M_h dt \right| = M_h \end{aligned}$$

où  $M_h = \sup_{t \in [x ; x+h]} |f(t) - f(x)|$ .

Il reste ainsi à montrer que  $\lim_{h \rightarrow 0} M_h = 0$ .

Comme  $f$  est continue en  $x$ ,  $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in [a ; b], |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$ . Soit donc  $h \in \mathbb{R}$  tel que  $|h| < \eta$ . Alors  $\forall t \in [x ; x+h], |f(t) - f(x)| < \epsilon$ . De la sorte  $\sup_{t \in [x ; x+h]} |f(t) - f(x)| = M_h < \epsilon$ .

D'où le résultat. □

### Corollaire 8.2

1. Toute fonction continue sur  $[a ; b]$  admet une primitive sur  $[a ; b]$ .
2. Si une fonction admet deux primitives sur un intervalle, alors ces primitives diffèrent d'une constante.
3. Si  $f$  est continue sur  $[a ; b]$ , alors  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ , où  $F$  est une primitive de  $f$ .

### Propriété 8.12 : Intégration par parties

Soit  $(f, g) \in (C^1([a, b]))^2$ . Alors

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

### Démonstration 8.10

On pose  $F(x) = \int_a^x f'(t)g(t) dt$  et  $G(x) = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f(t)g'(t) dt$ .

Alors  $F'(x) = f'(x)g(x) = G'(x)$ . Et en utilisant le corollaire 8.2 p. 103, on a que  $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in [a ; b], F(x) = G(x) + c$ . Or  $F(a) = G(a) = 0$ , donc  $F = G$  et en particulier  $F(b) = G(b)$ , d'où le résultat. □

Voir les exercices 3 et 4 du TD 7.

### Théorème 8.2 : Changement de variables

Soit  $\phi : [\alpha ; \beta] \rightarrow [a ; b]$ , appartenant à  $C^1([\alpha, \beta])$ , et soit  $f \in C^0([a, b])$ . Alors

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

### Démonstration 8.11

On pose  $F(x) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(x)} f(t) dt$  et  $G(x) = \int_{\alpha}^x f(\phi(t)) \phi'(t) dt$ .

Soit  $\tilde{f}$  une primitive de  $f$ . Alors  $F(x) = \tilde{f}(\phi(x)) - \tilde{f}(\phi(\alpha))$  et par suite  $F'(x) = \phi'(x)\tilde{f}'(\phi(x)) = \phi'(x)f(\phi(x))$ .

De plus  $G'(x) = f(\phi(x))\phi'(x)$ . Alors  $F' = G'$  et donc  $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in [a ; b], F(x) = G(x) + c$ .

Or  $G(\alpha) = 0 = F(\alpha)$ , d'où il vient que  $c = 0$  et finalement  $F = G$ .

En particulier  $F(\beta) = G(\beta)$ , d'où le résultat. □ !

Dans la majorité des cas, l'application  $\phi$  est bijective. Elle admet donc une réciproque et on a alors  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t)) \phi'(t) dt$ . ! !

Après avoir annoncé le changement de variables, il faut penser à changer

- la fonction sous l'intégrale,
- le «  $dx$  »,
- les bornes de l'intégrale.

Voir les exercices 5 et 6 du TD 7.

## 4 Extension aux applications à valeurs complexes

### Définition 8.10

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et soit  $f : [a ; b] \rightarrow \mathbb{C}$  une application continue par morceaux. Alors on pose

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \Re(f(x)) dx + i \int_a^b \Im(f(x)) dx.$$

### Propriété 8.13

Soient  $f$  et  $g$  deux applications à valeurs complexes, continue par morceaux sur  $[a ; b]$ , soit  $c \in \mathbb{R}$  et soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors

- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) + \lambda g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx$ ;
- $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ ;
- $\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \left( \sup_{t \in [a ; b]} |f(t)| \right) \int_a^b |g(x)| dx$ .

# Chapitre 9

## Matrices

### Sommaire

---

1	Systèmes linéaires . . . . .	105
1.1	Définitions . . . . .	105
1.2	Opérations sur les lignes . . . . .	106
1.3	Pivot de Gauss . . . . .	106
2	Définitions . . . . .	107
3	Opérations sur les matrices . . . . .	108
3.1	Trace . . . . .	108
3.2	Transposee . . . . .	108
3.3	Produit par un scalaire . . . . .	109
3.4	Somme de deux matrices . . . . .	109
3.5	Produit de deux matrices . . . . .	109
3.6	Extraction de ligne et de colonne . . . . .	110
3.7	Propriétés des opérations matricielles . . . . .	110
3.8	Puissance de matrice . . . . .	111
3.9	Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes . . . . .	111
3.10	Inverse d'une matrice . . . . .	112
4	Matrices remarquables . . . . .	113
4.1	Matrices symétriques et antisymétriques . . . . .	113
4.2	Matrices triangulaires . . . . .	113
4.3	Matrices diagonales . . . . .	114

---

En complément, on pourra se référer

- aux sections 3.2 *Système linéaire d'équation - algorithme du pivot de Gauss* p. 137 et 3.1 *Matrices et calcul matriciel* p. 119 de ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011 ;
- aux fiches 14 et 15 p. 54 à 61 et 22 et 23 p. 86 à 93 de FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013 ;
- au chapitre 3 *Matrices* p. 31 de LIRET et MARTINAIS 1997a ;
- au chapitre 20 *Espaces vectoriels. Applications linéaires. Matrices* p. 240 de Azoulay1996\_2\_CI-SST81T5.

Dans ce chapitre, on note  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Systèmes linéaires

### 1.1 Définitions

### Définition 9.1 : système linéaire

Soient deux entiers naturels non nuls  $n$  et  $p$  et soient  $a_{ij}, b_i$  des coefficients (réels ou complexes) avec  $1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$ . On appelle *système linéaire* de  $n$  équations à  $p$  inconnues le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les  $x_j$  sont les indéterminées.

Lorsque  $n = p$ , on dit que le système est *carré*. Si de plus les coefficients  $a_{ij}$  pour  $j < i$  sont nuls, on dit que le système est *triangulaire supérieur*.

Une solution du système est un  $p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p)$  qui vérifie les  $n$  équations. Résoudre un tel système consiste à déterminer toutes les solutions.

### Exemple 9.1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ 3x_2 + 9x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

est un système linéaire de trois équations à quatre inconnues.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3y + 5z = 2 \\ 8z = 3 \\ x + y + z + t = 5 \\ 3y + 5z - 6t = 7 \\ 8z + 15t = 33 \end{cases}$$

### Définition 9.2 : systèmes linéaires équivalents

Soient  $(S_1)$  et  $(S_2)$  deux systèmes linéaires. On dit que ces systèmes sont *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

## 1.2 Opérations sur les lignes

On note  $L_i$  l' $i$ -ième ligne d'un système linéaire.

### Définition 9.3 : opérations élémentaires

On appelle *opérations élémentaires sur les lignes* d'un système linéaire les opérations suivantes

- intervertir les lignes  $L_i$  et  $L_j$  (noté  $L_i \leftrightarrow L_j$ )
- remplacer  $L_i$  par  $\alpha L_i$  avec  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  (noté  $L_i \leftarrow \alpha L_i$ )
- remplacer  $L_i$  par  $L_i + \lambda L_j$  avec  $\lambda \in \mathbb{C}$  (noté  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ )

### Théorème 9.1

Soit  $(S)$  un système linéaire.

Le système  $(S')$  obtenu à partir de  $(S)$  par des opérations élémentaires sur les lignes est équivalent à  $(S)$ .

## 1.3 Pivot de Gauss

Le pivot de Gauss permet de ramener un système linéaire carré à un système triangulaire supérieur.

1. On place en première ligne une ligne dont le coefficient  $a_{11}$  est non nul (de préférence égal à  $\pm 1$ ). L'indéterminée  $x_1$  est une variable pivot.
2. On élimine l'inconnue  $x_1$  dans les autres équations par des opérations élémentaires.
3. On place en deuxième ligne une ligne dont le coefficient  $a_{22}$  est non nul (de préférence égal à  $\pm 1$ ). L'indéterminée  $x_2$  devient à son tour une variable pivot.

4. On répète les deux étapes précédentes jusqu'à ce que  $x_p$  soit la variable pivot.
5. On remonte alors ligne par ligne pour déterminer tous les  $x_j$ .

À la fin du pivot de Gauss, on aboutit (quitte à réordonner les inconnues) à un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha_1 x_1 + \dots & = b_1 \\ \alpha_2 x_2 + \dots & = b_2 \\ \vdots & & \\ \alpha_r x_r + \dots & = b_r \\ \vdots & & \\ 0 & = b_n \end{array} \right.$$

Si donc  $\exists r < k \leq n, b_k \neq 0$ , alors (S) n'a pas de solution. Sinon, pour chaque valeur de  $x_{r+1}, \dots, x_p$  on a une unique solution en résolvant le système triangulaire. On obtient alors un système à  $p - r$  paramètres, où les  $x_1, \dots, x_r$  sont les variables pivots.

### Exemple 9.2

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ -x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right. \quad (\text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 + \text{L}_1) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = 2 \\ -3y = -2 \end{array} \right. \quad (\text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 + 3\text{L}_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y = 2 \\ 0 = 4 \end{array} \right.$$

### Définition 9.4 : système linéaire compatible, incompatible ou indéterminé

On dit qu'un système linéaire est

- *compatible* s'il a au moins une solution,
- *incompatible* s'il n'a pas de solution,
- *indéterminé* s'il admet une infinité de solutions.

On peut utiliser une notation allégée pour ne pas écrire à chaque fois les indéterminées. Ainsi, par exemple,

! au lieu d'écrire      on peut noter

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{array} \right. \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

Dans la notation précédente, la partie à gauche de la barre verticale est la matrice des coefficients du système linéaire.

## 2 Définitions

### Définition 9.5 : matrice

Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls. On appelle *matrice* à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  une application

$$A : \left| \begin{array}{c} \llbracket 1 ; n \rrbracket \times \llbracket 1 ; p \rrbracket \\ (i ; j) \end{array} \right. \longrightarrow \mathbb{K} .$$

On note  $A$  sous la forme d'un tableau à  $n$  lignes et  $p$  colonnes, délimité par des parenthèses ou des crochets

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(p-1)} & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(p-1)} & a_{2p} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(p-1)} & a_{np} \end{pmatrix}.$$

- $A$  est une *matrice carrée* d'ordre  $n$  lorsque  $n = p$ ;
- $A$  est une *matrice colonne* quand  $p = 1$ ;
- $A$  est une *matrice ligne* quand  $n = 1$ ;
- $A$  est une *matrice diagonale* si elle est carrée et que tous les termes non diagonaux sont nuls (seuls les coefficients  $a_{ii}$  peuvent être non nuls ou encore  $a_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ );
- $A$  est une *matrice triangulaire supérieure* si elle est carrée et si  $a_{ij} = 0$  si  $i > j$ ;

- A est une *matrice triangulaire inférieure* si elle est carrée et si  $a_{ij} = 0$  si  $i < j$ .

! On note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Si  $n = p$ , on note simplement  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

### Exemple 9.3

La matrice dont tous les coefficients sont nuls s'appelle *matrice nulle* et se note par commodité 0.

! La matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 s'appelle *matrice identité* et se note  $I_n$ .

### Définition 9.6 : lignes et colonnes d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . La  $i$ -ième ligne de A est la matrice ligne  $[a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ip}]$ .

De façon similaire, la  $j$ -ième colonne de A est la matrice colonne  $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$ .

### Propriété 9.1

Deux matrices A et B construites par leurs coefficients  $a_{ij}$   $b_{kl}$  sont égales si et seulement si elles ont mêmes dimensions (si  $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ ) et que pour tous  $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$ ,  $a_{ij} = b_{ij}$ .

### Exemple 9.4

Les matrices  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  ne sont pas égales et  $\begin{bmatrix} 10 & 42 \\ -5 & 33 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 10 & 42 \\ -5 & 33 \\ \sqrt{2} & 7 \end{bmatrix}$ .

## 3 Opérations sur les matrices

### 3.1 Trace

#### Définition 9.7 : trace d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On appelle *trace* de A et on note  $\text{Tr}(A)$  la somme des éléments diagonaux de A. Avec  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ , on a donc  $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ .

### Propriété 9.2

Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

- $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B)$ ;
- $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

### 3.2 Transposée

#### Définition 9.8 : transposée d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On appelle *transposée* de A et on note  ${}^t A$  la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  définie par  $({}^t A)_{ij} = (A)_{ji}$ .

Dit autrement,  ${}^t A$  s'obtient par une symétrie de  $A$  autour de sa diagonale principale.

D'une façon générale, la  $i$ -ième ligne de  ${}^t A$  est la  $i$ -ième colonne de  $A$ , et la  $j$ -ième colonne de  ${}^t A$  est la  $j$ -ième ligne de  $A$ .

### Propriété 9.3

Soient  $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

- ${}^t({}^t A) = A$ ;
- ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^t A$ ;
- ${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B$ ;
- ${}^t A C = {}^t C {}^t A$ ;
- Si  $A$  est inversible (voir définition 9.14 p. 112),  $({}^t A)^{-1} = {}^t (A^{-1})$ .

## 3.3 Produit par un scalaire

### Définition 9.9 : produit d'une matrice par un scalaire

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On définit le produit  $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  par  $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$ . Autrement dit, on multiplie chacun des coefficients de la matrice  $A$  par  $\lambda$ .

### Exemple 9.5

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 7 \\ 3 & -9 & 4 \end{bmatrix}, \text{ alors } 2A = \begin{bmatrix} 22 & 4 & 14 \\ 6 & -18 & 8 \end{bmatrix}.$$

## 3.4 Somme de deux matrices

### Définition 9.10 : somme matricielle

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On définit la somme  $(A + B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de ces matrices par  $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Autrement dit, on additionne terme à terme.

De même, la soustraction se définit par  $(A - B)_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ .



Pour effectuer une addition ou une soustraction de deux matrices, il faut qu'elles aient les mêmes dimensions.

## 3.5 Produit de deux matrices

### Définition 9.11 : produit matriciel

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . On définit le produit matriciel  $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$  de ces matrices par  $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$ .



La figure 9.1 donne une technique visuelle pour effectuer un produit matriciel : le terme  $(AB)_{ij}$  est donné par la somme des produits terme à terme de la  $i$ -ième ligne de  $A$  et de la  $j$ -ième colonne de  $B$ .



Le produit matriciel  $AB$  n'est défini que lorsque le nombre de colonnes de  $A$  est égal au nombre de lignes de  $B$ .



En général, on n'a pas  $AB = BA$ . En effet,

- $AB$  peut être défini mais pas  $BA$ , par exemple si  $A \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{5,7}(\mathbb{K})$ ,
- $AB$  et  $BA$  peuvent tous deux être définis, mais ne pas être de mêmes dimensions, par exemple si  $A \in \mathcal{M}_{2,5}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{5,2}(\mathbb{K})$ , alors  $AB \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{K})$  et  $BA \in \mathcal{M}_{5,5}(\mathbb{K})$ ,
- $AB$  et  $BA$  peuvent tous deux être définis, de mêmes dimensions, mais différents, par exemple avec  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  on a  $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  et  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

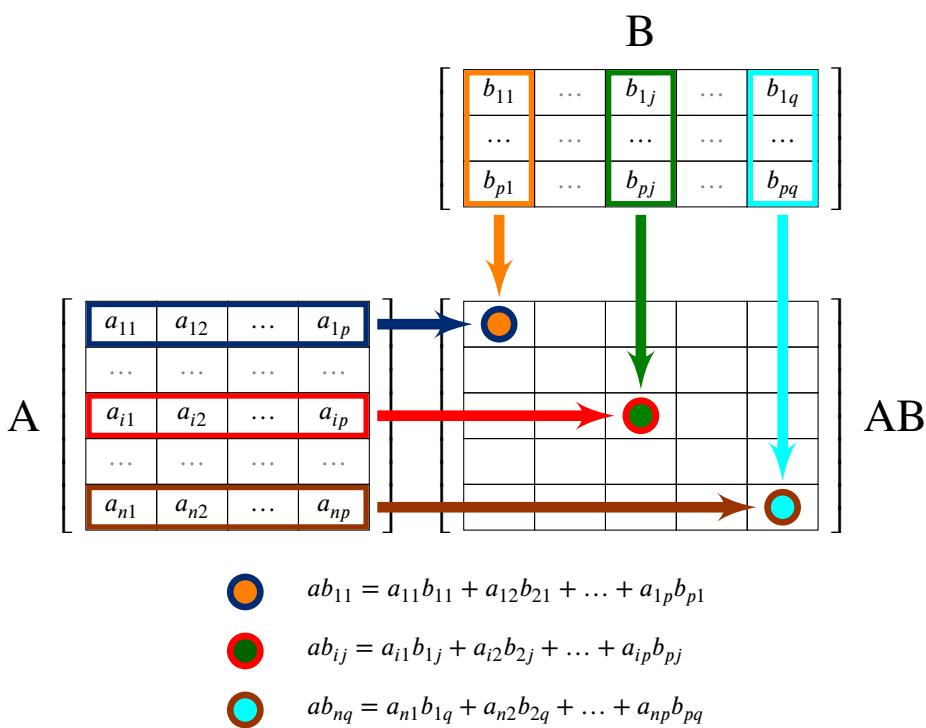


FIGURE 9.1 – Calcul du produit matriciel AB

### Définition 9.12 : noyau et image d'une matrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On appelle

- *noyau de A* l'ensemble des vecteurs colonnes  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  tels que  $AX = 0$ ;
- *image de A* l'ensemble des vecteurs colonnes  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  tels que  $\exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}), Y = AX$ .

### 3.6 Extraction de ligne et de colonne

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$ , on note  $E_j \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  la matrice colonne dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la  $j$ -ième ligne qui vaut 1. Le produit  $AE_j$  retourne alors la  $j$ -ième colonne de A.

Avec la même construction, si maintenant  $E_j \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,  ${}^tE_jA$  donne la  $j$ -ième ligne de A.

### 3.7 Propriétés des opérations matricielles

#### Propriété 9.4

Soit  $(\in \mathbb{N} n, p, q, r)$ . Soient  $(A_1, A_2, A_3) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^3$ ,  $(B_1, B_2) \in (\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}))^2$  et  $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ . Soient  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . Alors

- $A_1 + A_2 = A_2 + A_1$ ;
- $A + 0 = A$ ,  $A - A = 0$  (0 est la matrice nulle (ici de taille  $n \times p$ ) qui est l'élément neutre de l'addition matricielle);
- $A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3) = (A_1 + A_2) + A_3$ ;
- $\lambda(A_1 + A_2) = \lambda A_1 + \lambda A_2$ ,  $(\lambda + \mu)A_1 = \lambda A_1 + \mu A_1$ ,  $(\lambda\mu)A_1 = \lambda(\mu A_1)$ ;
- $I_n A = A I_p = A$  (la matrice identité est l'élément neutre de la multiplication matricielle);
- **le produit  $A_1 B_1$  n'est a priori pas commutatif**;
- $\lambda A_1 B_1 = (\lambda A_1) B_1 = A_1 (\lambda B_1)$ ;
- $(A_1 + A_2) B_1 = A_1 B_1 + A_2 B_1$ ,  $A_1 (B_1 + B_2) = A_1 B_1 + A_1 B_2$ ;
- $A_1 B_1 C = (A_1 B_1) C = A_1 (B_1 C)$ .

### 3.8 Puissance de matrice

En utilisant la caractérisation du produit matriciel, on peut définir les puissances d'une matrice. Ainsi pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on pose  $A^0 = I_n$  puis pour tout entier  $k$  strictement positif on note  $A^k = A^{k-1}A = \underbrace{A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$ .

#### Définition 9.13 : matrice nilpotente

On dit qu'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est *nilpotente* si  $\exists k \in \mathbb{N}, A^k = 0$ . On appelle *indice de nilpotence* le plus petit entier  $k$  tel que  $A^k = 0$ .

#### Exemple 9.6

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-7}{3} \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-5}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc  $A$  est nilpotente d'ordre 3, et  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, A^n = 0$ .

### 3.9 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

La méthode du pivot de Gauss-Jordan (évoquée à la section 1.3 p. 106) fait intervenir des opérations sur les lignes de la matrice. Ces opérations peuvent être décrites comme des multiplications par des matrices particulières.

Soit donc  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### Permutation de lignes

$$\text{Soit } P_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ définie par } (P_{i,j})_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } k = l = i \text{ ou } k = l = j \\ 1 & \text{si } k = l \neq i \text{ ou } k = l \neq j \\ 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 1 & \text{si } k = j \text{ et } l = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P_{i,j} = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & & & & & i \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 0 & \\ & & & 1 & & \\ 0 & & & & 1 & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & & j \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array} \right)$$

Alors permute les lignes  $i$  et  $j$  de  $A$  revient à effectuer le produit  $P_{i,j}A$  (on multiplie  $A$  à gauche par  $P_{i,j}$ ). De façon similaire, on permute les colonnes  $i$  et  $j$  de  $A$  en multipliant  $A$  à droite par  $P_{i,j}$ .

Cela correspond au fait que  $P_{i,j}$  est construite à partir de la matrice identité, dont on a permute les colonnes  $E_i$  et  $E_j$ .

On notera que  $P_{i,j} \times P_{i,j} = I_n$ . Cette matrice est donc inversible.

### Multiplication d'une ligne par un scalaire

La deuxième opération élémentaire consiste à multiplier la  $i$ -ième ligne de la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par un scalaire  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Pour ce faire, il suffit de multiplier  $A$  à gauche par la matrice  $D_{i,\alpha}$  (pour l'opération sur les colonnes, on multiplie à droite), définie comme la matrice diagonale identité  $I_n$  dont le  $i$ -ième coefficient

diagonal vaut  $\alpha$  :  $D_{i,\alpha} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $(D_{i,\alpha})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \neq i \\ \alpha & \text{si } k = l = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$D_{i,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \alpha & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \end{pmatrix}^i$$

On notera que  $D_{i,\alpha} \times D_{i,1/\alpha} = I_n$ , donc  $D_{i,\alpha}$  est une matrice inversible.

### Opération linéaire sur les lignes

Soit  $T_{i,j,\alpha} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par  $(T_{i,j,\alpha})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ \alpha & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$T_{i,j,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & 0 & & \\ & & \alpha & & & & & \\ & & & 0 & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \end{pmatrix}^i$$

Ainsi, remplacer la ligne  $L_i$  de  $A$  par  $L_i + \alpha L_j$  s'obtient par le produit matriciel  $T_{i,j,\alpha}A$  (de même pour l'opération sur les colonnes, mais en multipliant  $A$  à droite).

## 3.10 Inverse d'une matrice

Nous avons vu qu'il est possible d'effectuer des additions, des soustractions et des multiplications matricielles. La division matricielle, quant à elle n'existe pas.

Cependant, lorsque cela est possible, on pourra non pas diviser une matrice  $A$  par une matrice  $B$ , mais multiplier  $A$  par l'inverse de  $B$ .

### Définition 9.14 : matrice inversible

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est *inversible* s'il existe une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  notée  $A^{-1}$  telle que  $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ .

### Propriété 9.5

Soyent  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  et  $B$  sont inversibles alors

- $A^{-1}$  est aussi inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
- $AB$  est inversible et  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Pour inverser une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , il suffit d'appliquer la méthode du pivot de Gauss-Jordan :  $A$  sera inversible si et seulement si tous les termes diagonaux à la fin du pivot sont non nuls.

Puisque l'on cherche à obtenir la matrice  $A^{-1}$  telle que  $A^{-1}A = I_n$ , on applique la méthode du pivot de Gauss vue au chapitre précédent, sur  $A|I_n$ , en cherchant à ramener la partie à gauche du séparateur à la matrice identité  $I_n$ . À ce moment-là,  $A$  est inversible et  $A^{-1}$  est égale à la partie à droite du séparateur.

**Exemple 9.7**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . L'utilisation du pivot de Gauss-Jordan donne

$$\begin{array}{c} \left( \begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{L_1+L_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 10 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & 0 & 1 \end{array} \right) \xleftarrow{L_2+4L_1} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & 48 & 4 & 5 \end{array} \right) \xleftarrow{L_2/48} \\ \Leftrightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 10 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{48} & \frac{5}{48} \end{array} \right) \xleftarrow{L_1-10L_2} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{8}{48} & \frac{-2}{48} \\ 0 & 1 & \frac{4}{48} & \frac{5}{48} \end{array} \right) \end{array}$$

Ainsi A est inversible (on obtient la matrice identité à gauche du séparateur) et  $A^{-1} = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ .

Sur cet exemple, nous avons effectué différentes opérations sur les lignes. Celles-ci peuvent être décrites par des opérations matricielles. Nous sommes en effet partis de la matrice A pour aboutir, après ces opérations élémentaires, à la matrice identité.

La matrice  $A^{-1}$  se calcule donc comme le produit des différentes matrices utilisées pour réaliser le pivot de Gauss-Jordan. Dans l'exemple précédent, nous avons ainsi multiplié à gauche et dans l'ordre par  $T_{1,2,1}, T_{2,1,4}, D_{2,1/48}, T_{1,2,-10}$ . Ainsi  $A^{-1} = T_{1,2,-10} \times D_{2,1/48} \times T_{2,1,4} \times T_{1,2,1} \times A$ .

## 4 Matrices remarquables

Outre les matrices nulles et identité dont nous avons déjà parlé, d'autres types de matrices existent qui possèdent des propriétés intéressantes.

### 4.1 Matrices symétriques et antisymétriques

#### Définition 9.15 : matrice symétrique ou antisymétrique

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que A est

- *symétrique* si  ${}^tA = A$ ;
- *antisymétrique* si  ${}^tA = -A$ .

On note  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  (respectivement  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ) l'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) d'ordre  $n$ .

#### Propriété 9.6

- Soient A et B deux matrices de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors  $A + \lambda B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ ;
- Soient A et B deux matrices de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors  $A + \lambda B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ .

En général, le produit de deux matrices (anti-)symétriques n'est pas (anti-)symétrique.



#### Propriété 9.7

Toute matrice carrée peut se décomposer en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . En pratique, pour trouver  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$  et  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  telles que  $M = A + S$ , on utilise la transposée :  ${}^tM = {}^tA + {}^tS$ . D'où il vient  $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$  et  $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ .

### 4.2 Matrices triangulaires

#### Définition 9.16 : matrice triangulaire

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que M est *triangulaire supérieure* (respectivement *triangulaire inférieure*) si  $\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$  tels que  $i > j$  (respectivement  $i < j$ ), on a  $M_{i,j} = 0$ .

On note  $\mathcal{T}_{n;S}(\mathbb{K})$  (respectivement  $\mathcal{T}_{n;I}(\mathbb{K})$ ) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre  $n$ .

**Propriété 9.8**

Soient A et B deux matrices de  $\mathcal{T}_{n;S}(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

- $A + \lambda B \in \mathcal{T}_{n;S}(\mathbb{K})$ ;
- $AB \in \mathcal{T}_{n;S}(\mathbb{K})$  et  $(AB)_{ii} = (A)_{ii}(B)_{ii}$ ;
- A est inversible si et seulement si  $\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,  $a_{ii} \neq 0$ ;
- si A est inversible, alors  $A^{-1} \in \mathcal{T}_{n;S}(\mathbb{K})$ .

On a des propriétés similaires dans le cas de matrices triangulaires inférieures.

**4.3 Matrices diagonales****Définition 9.17 : matrice diagonale**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que M est *diagonale* si  $\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$  tels que  $i \neq j$ , on a  $M_{i,j} = 0$ .

On note  $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  l'ensemble des matrices diagonales.

**Propriété 9.9**

Soient A et B deux matrices de  $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

- $A + \lambda B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ;
- $AB \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  et  $(AB)_{ii} = (A)_{ii}(B)_{ii}$ ;
- A est inversible si et seulement si  $\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ ,  $a_{ii} \neq 0$ ;
- si A est inversible, alors  $A^{-1} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$  et  $(A^{-1})_{ii} = a_{ii}^{-1} = \frac{1}{a_{ii}}$ .

# Chapitre 10

## Déterminants

### Sommaire

---

1	Permutations . . . . .	115
1.1	Définition . . . . .	115
1.2	Permutations particulières . . . . .	116
1.3	Décomposition . . . . .	117
1.4	Signature . . . . .	117
2	Applications multilinéaires alternées . . . . .	118
2.1	Applications multilinéaires . . . . .	118
2.2	Application multilinéaires alternées . . . . .	118
3	Déterminants . . . . .	118
3.1	Définitions, propriétés . . . . .	119
4	Calcul pratique des déterminants . . . . .	119
4.1	Opérations sur les lignes et sur les colonnes . . . . .	119
4.2	Déterminants par blocs diagonaux . . . . .	120
4.3	Développement par rapport à une ligne ou à une colonne . . . . .	120

---

En complément, on pourra se référer

- à la section 3.3 *Déterminants de matrices carrées* p. 145 de ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011;
- aux fiches 24 et 25 p. 94 à 101 de FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013;
- au chapitre 4 *Déterminant d'une matrice* p. 79 de LIRET et MARTINAIS 1997a;
- au chapitre 21 *Déterminants. Systèmes d'équations linéaires* p. 316 de Azoulay1996\_2\_CI-SST81T5.

## 1 Permutations

### 1.1 Définition

#### Définition 10.1 : permutation

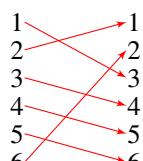
Soit  $E$  un ensemble fini. On appelle *permutation* de  $E$  une bijection de  $E$  sur  $E$ .

En pratique on ne considère que des permutations de l'ensemble  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ .

On note  $\mathcal{S}_n$  l'ensemble des permutations de  $\llbracket 1 ; n \rrbracket$ .

#### Exemple 10.1

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ se représente}$$



**Exemple 10.2**

L'ensemble  $\mathcal{S}_3$  correspond à l'ensemble de toutes les permutations possibles dans  $\{1; 2; 3\}$ . On a donc  
 $\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

**Définition 10.2 : orbite**

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  et soit  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ . On appelle *orbite* de  $k$  l'ensemble  $\{\sigma^p(k) \mid p \in \mathbb{N}\}$ .

**Exemple 10.3**

Soit  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 7 & 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ .

Orbite de 1 :  $\{1; 3\}$  c'est aussi l'orbite de 3

— 2 : {2}

— 4 : {4; 6} — de 6

— 5 : {5; 7; 8} — de 7 et de 8

On peut également noter les permutations sous forme de produits de cycles disjoints en utilisant les orbites.

**Exemple 10.4**

Soit  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 4 & 5 & 7 & 8 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ .

Orbite de 1 : {1; 3; 4; 5; 7}

— 2 : {2; 9}

— 6 : {6; 8}

Donc  $\sigma = (1 \ 3 \ 4 \ 5 \ 7)(2 \ 9)(6 \ 8)$ .

De même, avec  $\sigma \in \mathcal{S}_{11}$  si on note  $\sigma = (1 \ 4 \ 7 \ 11 \ 5)(3 \ 6 \ 9)$ , alors on a de façon équivalente

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 1 & 9 & 11 & 8 & 3 & 10 & 5 \end{pmatrix}$

## 1.2 Permutations particulières

**Définition 10.3 : transposition**

Soit  $\tau \in \mathcal{S}_n$ . On dit que  $\tau$  est une *transposition* si  $\exists (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, i \neq j$  tels que

$$\begin{cases} \tau(i) = j \\ \tau(j) = i \\ \tau(k) = k \quad \forall k \in \llbracket i; j \rrbracket, k \neq i \text{ ou } k \neq j \end{cases}$$

On note  $\tau_{i,j}$  la transposition qui permute  $i$  et  $j$ .

**Définition 10.4 : cycle**

On appelle *cycle* toute permutation n'ayant qu'une seule orbite non réduite à un seul élément.

Si  $p$  est la longueur de l'orbite, on parle de  $p$ -cycle.

**Exemple 10.5**

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_7$ , telle que  $\sigma = (1 \ 3 \ 7 \ 4 \ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 7 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ . On dit que  $\sigma$  est un 5-cycle.

Les transpositions (voir définition 10.3) sont des 2-cycles.

**Définition 10.5 : permutation circulaire**

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . On dit que  $\sigma$  est une *permutation circulaire* si elle n'a qu'une seule orbite. On dit aussi dans ce cas que  $\sigma$  est un  $n$ -cycle.



**Exemple 10.6**

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_7$ , telle que  $\sigma = (1 \ 4 \ 5 \ 6 \ 3 \ 2 \ 7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 5 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ . On dit que  $\sigma$  est un 7-cycle ou une permutation circulaire.

**1.3 Décomposition****Théorème 10.1**

Toute permutation se décompose en produit de transpositions.

**Théorème 10.2**

Toute permutation se décompose en produit de cycles disjoints de façon unique.

**1.4 Signature****Définition 10.6 : signature**

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . On appelle *signature* et on note  $\epsilon(\sigma)$  la quantité  $(-1)^I$ , où  $I$  est le nombre d'inversions de  $\sigma$ , c'est-à-dire le nombre de couples  $(i, j)$  avec  $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$  et  $i < j$  tels que  $\sigma(i) > \sigma(j)$ .

**Exemple 10.7**

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_6$ , telle que  $\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ . Le tableau 10.1 permet de compter le nombre d'inversions de  $\sigma$ .

TABLEAU 10.1 – Table d'inversion

$(i ; j)$	$(\sigma(i) ; \sigma(j))$								
$(1 ; 2)$	$(2 ; 6)$	$(2 ; 3)$	$(6 ; 3)$	$(3 ; 4)$	$(3 ; 5)$	$(4 ; 5)$	$(5 ; 4)$	$(5 ; 6)$	$(4 ; 1)$
$(1 ; 3)$	$(2 ; 3)$	$(2 ; 4)$	$(6 ; 5)$	$(3 ; 5)$	$(3 ; 4)$	$(4 ; 6)$	$(5 ; 1)$		
$(1 ; 4)$	$(2 ; 5)$	$(2 ; 5)$	$(6 ; 4)$	$(3 ; 6)$	$(3 ; 1)$				
$(1 ; 5)$	$(2 ; 4)$	$(2 ; 6)$	$(6 ; 1)$						
$(1 ; 6)$	$(2 ; 1)$								

On a ainsi ici  $I = 9$  et par conséquent  $\epsilon(\sigma) = (-1)^9 = -1$ .

**Propriété 10.1**

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Alors

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

**Propriété 10.2**

La signature d'une transposition vaut  $-1$ .

**Propriété 10.3**

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ . Alors

1. si on a écrit  $\sigma$  comme un produit de  $T$  transpositions,  $\epsilon(\sigma) = (-1)^T$ ;
2. si  $\sigma$  compte  $r$  orbites,  $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n-r}$ .

**Exemple 10.8**

Soit  $\sigma \in \mathcal{S}_7$ , définie par  $\sigma = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 5 & 7 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

On a donc  $\sigma = (1 \ 4)(4 \ 7)(3 \ 5)(5 \ 6) = (1 \ 4 \ 7)(2)(3 \ 5 \ 6)$ .  
 Donc  $\sigma$  s'écrit comme un produit de quatre transpositions ou comme un produit de trois orbites et ainsi  $\epsilon(\sigma) = (-1)^4 = (-1)^{7-3} = 1$ .

## 2 Applications multilinéaires alternées

### 2.1 Applications multilinéaires

#### Définition 10.7 : application multilinéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{K}$ , avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et soit  $\phi : E^p \rightarrow F$ , avec  $p \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $\phi$  est  $p$ -linéaire si et seulement si  $\phi$  est linéaire par rapport à chacune de ses variables. C'est-à-dire si et seulement si  $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $\forall y_i \in E$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\forall ((x_1, \dots, x_p)) \in E^3$ ,  $\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \lambda y_i, x_{i+1}, \dots, x_p) = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_p) + \lambda \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_p)$ .

#### Exemple 10.9

L'application  $\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}; \vec{v}) & \longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v} \end{cases}$  est bilinéaire.

$$\begin{aligned} \text{Soient, en effet, quatre vecteur } \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \text{ de } \mathbb{R}^3, \text{ et soit un réel } \lambda. \text{ Alors} \\ \phi(\vec{u}_1 + \lambda \vec{u}_2, \vec{v}_1) &= (\vec{u}_1 + \lambda \vec{u}_2) \cdot \vec{v}_1 = \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda \vec{u}_2 \cdot \vec{v}_1 \\ &= \phi(\vec{u}_1, \vec{v}_1) + \lambda \phi(\vec{u}_2, \vec{v}_1) \\ \phi(\vec{u}_1, \vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2) &= \vec{u}_1 \cdot (\vec{v}_1 + \lambda \vec{v}_2) = \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ &= \phi(\vec{u}_1, \vec{v}_1) + \lambda \phi(\vec{u}_1, \vec{v}_2) \end{aligned}$$

### 2.2 Application multilinéaires alternées

#### Définition 10.8 : application multilinéaires alternées

Soit  $\phi : E^p \rightarrow F$  une application  $p$ -linéaire. On dit que  $\phi$  est alternée si  $\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$ , avec  $i \neq j$ ,  $\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p$ ,  $x_i = x_j \Rightarrow \phi(x_1, \dots, x_p) = 0$ .

#### Exemple 10.10

$$\begin{aligned} \phi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{u}; \vec{v}) & \longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v} \end{cases} &\text{n'est pas alternée.} \\ \psi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u}; \vec{v}) & \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v} \end{cases} &\text{est alternée.} \end{aligned}$$

#### Propriété 10.4

Soit  $\phi : E^p \rightarrow F$  une application  $p$ -linéaire. Alors  $\phi$  est alternée si et seulement si  $\forall \sigma \in \mathcal{S}_p$ ,  $\phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma)\phi(x_1, \dots, x_p)$ .

#### Propriété 10.5

Soit  $\phi : E^p \rightarrow F$  une application  $p$ -linéaire alternée. Soit  $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$  telle que  $\exists i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $\exists ((\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_p)) \in E^{p-1}$ ,  $x_i = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p$ . Alors  $\phi(x_1, \dots, x_p) = 0$ .

## 3 Déterminants

### 3.1 Définitions, propriétés

#### Définition 10.9 : déterminant

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle *déterminant* de  $A$  et on note  $\det(A)$  la quantité  $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n}$ , où les coefficients  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  sont les éléments de  $A$ . Le déterminant est une application multilinéaire alternée de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}$ .

#### Propriété 10.6

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors

1.  $\det I_n = 1$ , où  $I_n$  est la matrice identité de taille  $n$ ;
2.  $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ ;
3.  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ;
4.  $A$  est inversible si et seulement si son déterminant est non nul, si et seulement si  $\det A \neq 0$ ;
5. si  $A$  est inversible alors  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A}$ ;
6.  $\det(tA) = \det A$ .



En règle générale  $\det(A + B)$  ne s'exprime pas simplement en fonction de  $\det A$  et de  $\det B$ .

## 4 Calcul pratique des déterminants

☞ Voir les exercices 1 à 3 du TD 9.

### 4.1 Opérations sur les lignes et sur les colonnes

#### Propriété 10.7

1. Si une colonne (ou une ligne) est nulle, le déterminant vaut 0.
2. Si deux colonnes (ou deux lignes) sont égales, le déterminant vaut 0 (car le déterminant est une application alternée).
3. Si on multiplie une colonne (ou une ligne) par un coefficient non nul, alors on multiplie le déterminant par ce même scalaire.
4. On ne modifie pas le déterminant en remplaçant une colonne (respectivement une ligne) par cette même colonne (respectivement cette même ligne) plus une combinaison linéaire des autres colonnes (respectivement des autres lignes).
5. Si on permute deux colonnes (ou deux lignes) **adjacentes**, le déterminant est multiplié par  $-1$ .

#### Propriété 10.8

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Si  $A$  est diagonale ( $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ), triangulaire inférieure ( $A \in \mathcal{T}_{n;I}(\mathbb{K})$ ) ou triangulaire supérieure ( $\mathcal{T}_{n;S}(\mathbb{K})$ ), alors son déterminant correspond au produit de ses termes diagonaux :

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

#### Démonstration 10.1

Cette propriété se démontre par récurrence.



## 4.2 Déterminants par blocs diagonaux

### Propriété 10.9 : déterminants par blocs diagonaux

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  que l'on peut scinder en blocs. Si  $A$  est *diagonale par blocs, triangulaire inférieure par blocs* ou *triangulaire supérieure par blocs*, son déterminant vaut alors le produit des déterminants des blocs diagonaux.

#### Exemple 10.11

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_2 & \\ & 0 & & A_3 \end{pmatrix}, \text{ alors } \det A = \det A_1 \times \det A_2 \times \det A_3.$$

## 4.3 Développement par rapport à une ligne ou à une colonne

Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $C_j = {}^t(a_{1j} \dots a_{nj})$  la  $j$ -ième colonne de  $A$ , pour  $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ . Comme déjà vu (cf. section 3.6), on note  $E_i$  le vecteur colonne nul avec un 1 à la  $i$ -ième ligne. Alors  $C_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} E_i$ .

On a donc  $\det A = \det(C_1 \dots C_n)$

$$= \det(C_1 \dots C_{j-1} \sum_{i=1}^n a_{ij} E_i C_{j+1} \dots C_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ij} \det(C_1 \dots C_{j-1} E_i C_{j+1} \dots C_n) \quad \text{car det est une application multilinéaire}$$

$$\text{On note } A_{ij} = (C_1 \dots C_{j-1} E_i C_{j+1} \dots C_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & 0 & & & \\ \vdots & & & 1 & & & \vdots \\ 0 & & & 0 & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & 0 & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow i \cdot j$$

On permute ensuite les colonnes en utilisant la permutation  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ j)$ , dont la signature est  $\epsilon(\sigma) = (-1)^{j-1}$ . Cela revient à placer la  $j$ -ième colonne en première position.

$$\text{Il vient donc } \det A_{ij} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & & a_{in} \\ 0 & & & & & & \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On permute alors de même les lignes avec la permutation  $\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ i)$ , dont la signature vaut  $\epsilon(\sigma) = (-1)^{i-1}$ , ce qui revient à placer la  $i$ -ième ligne en première position.

$$\text{D'où il vient } \det A_{ij} = (-1)^{j-1}(-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij+1} & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \Delta_{ij} & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Puis, en utilisant le calcul des déterminants par blocs (cf. propriété 10.9), on obtient que  $\det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \Delta_{ij}$ , où  $\Delta_{ij}$  est la matrice  $A$  à laquelle on a enlevé la  $i$ -ième ligne et la  $j$ -ième colonne.

Finalement,  $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det \Delta_{ij}$ .

**Définition 10.10 : mineur, cofacteur et comatrice**

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et soit  $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$ .

On appelle *mineur de la place*  $(i ; j)$  de  $A$  le déterminant de la matrice  $\Delta_{ij}$  introduite ci-dessus.

On appelle *cofacteur de  $a_{ij}$*  et on note  $\text{cof}(a_{ij})$  la quantité  $(-1)^{i+j} \det(\Delta_{ij})$ .

On appelle *comatrice de  $A$*  et on note  $\text{com}(A)$  la matrice des cofacteurs de  $A$  :  $\text{com}(A) \in \mathbb{R}\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2, (\text{com}(A))_{ij} = \text{cof}(a_{ij})$ .



Le mineur de la place  $(i ; j)$  s'obtient en calculant le déterminant de la matrice dans laquelle on a supprimé la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

**Propriété 10.10**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

- $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \text{cof}(a_{ij})$  : développement par rapport à la  $j$ -ième colonne ;
- $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{cof}(a_{ij})$  : développement par rapport à la  $i$ -ième ligne.

**Théorème 10.3 : inverse d'une matrice**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

$A$  est inversible si et seulement si  $\det A \neq 0$ . Dans ce cas  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{com}(A)$ .



Pour ce calcul de l'inverse d'une matrice les deux erreurs classiques sont d'oublier

- la transposée ;
- les signes (alternés) dans la comatrice.

**Exemple 10.12**

Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ .

En développant par rapport à la dernière ligne (qui possède un zéro), on a

$$\det(A) = 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} .$$

$$= 7(8 - 15) - 8(4 - 18)$$

$$= 63 \neq 0$$

Donc  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{63} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{63} \begin{pmatrix} -32 & 28 & 13 \\ 24 & -21 & 6 \\ -7 & 14 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{63} \begin{pmatrix} -32 & 24 & -7 \\ 28 & -21 & 14 \\ 13 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-32}{63} & \frac{8}{21} & \frac{-1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{21} & \frac{2}{9} \\ \frac{13}{63} & \frac{2}{21} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix}$$

! Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , alors  $\det(A) = ad - bc$ .  
Si ce déterminant est non nul, on a  $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .  
Cela revient à permute les deux coefficients diagonaux et à opposer les deux autres (c'est-à-dire changer leurs signes).

**Propriété 10.11**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et soient  $X$  et  $B$  deux vecteurs de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . Si  $A$  est inversible, l'unique solution du système  $AX = B$  est la matrice  $A^{-1}B$ .



Si  $A$  n'est pas inversible, le système a soit une infinité de solutions, soit aucune !

☞ Voir l'exercice 4 du TD 9.

**Propriété 10.12**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et soit  $B \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ . Si une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible, alors le système  $AX = B$  a les mêmes racines que le système  $PAX = PB$ .

**Théorème 10.4 : matrice inversible**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Cette matrice est inversible si et seulement si la seule solution du système  $AX = 0$  est  $X = 0$ .

# Chapitre 11

## Espaces vectoriels

### Sommaire

---

1	Généralités sur les espaces vectoriels . . . . .	123
1.1	Définition . . . . .	123
1.2	Sous-espaces vectoriels . . . . .	124
1.3	Sous-espace vectoriel engendré par une partie . . . . .	125
1.4	Dépendance linéaire . . . . .	125
1.5	Bases . . . . .	126
2	Dimension . . . . .	126
2.1	Dimension, base . . . . .	126
2.2	Théorème de la base incomplète . . . . .	127
2.3	Dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . .	127
2.4	Rang d'une famille de vecteurs . . . . .	128
3	Somme de sous-espaces vectoriels . . . . .	128
3.1	Somme de deux sous-espaces vectoriels . . . . .	128
3.2	Somme directe de deux sous-espace vectoriel . . . . .	128
3.3	Supplémentaires . . . . .	129
3.4	Cas de la dimension finie . . . . .	129

---

En complément, on pourra se référer

- à la section 3.4 *Espaces vectoriels* p. 152 de ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011 ;
- aux fiches 7 et 8 (p. 26 à 33) et 18 et 19 (p. 70 à 77) de FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013 ;
- aux chapitres 6 *Espaces vectoriels* p. 95, 11 *Groupes* p. 245 et 12 *Anneaux et corps* p. 261 de LIRET et MARTINAIS 1997a ;
- au chapitre 2 *Applications. Relations d'ordre et d'équivalence. Analyse combinatoire* p. 26 et 3 *Structures algébriques* de AZOULAY, AVIGNANT et AULIAC 1996 ;
- au chapitre 20 *Espaces vectoriels. Applications linéaires. Matrices* p. 240 de Azoulay1996\_2\_CI-SST81T5.

Dans ce chapitre, on note  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

## 1 Généralités sur les espaces vectoriels

### 1.1 Définition

#### Définition 11.1 : espace vectoriel

Soit  $E$  un sous-ensemble de  $\mathbb{K}$  muni d'une loi de composition interne « + » et d'une loi de composition externe « · » :

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x; y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \cdot : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda; x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

On dit que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (noté  $\mathbb{K}$ -ev) si on a les propriétés suivantes

1.  $(E, +)$  est un groupe abélien

- la loi « + » est associative :  $\forall (x, y, z) \in E^3, (x + y) + z = x + (y + z)$ ,
- la loi « + » possède un élément neutre :  $\exists n \in E, \forall x \in E, n + x = x + n = x$ ,

- tout élément de  $E$  possède un symétrique dans  $E$  :  $\forall x \in E, \exists x' \in E, x + x' = x' + x = n$ ,
- la loi « + » est commutative :  $\forall (x, y) \in E^2, x + y = y + x$ ;
- 2.  $\forall x \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ ;
- 3.  $\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ ;
- 4.  $\forall x \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x$ ;
- 5.  $\exists n \in E, \forall x \in E, n \cdot x = x \cdot n = x$  (neutre pour la loi « · » dans  $\mathbb{K}$ ).

### Exemple 11.1

- Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et soit  $E = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\}$ . Alors  $(E, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{R}$ -ev, où « + » et « · » sont les lois d'addition et de multiplication classiques.
- L'ensemble  $\mathbb{R}^n$  muni des lois  $+ :$   $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ ((x_1; \dots; x_n); (y_1; \dots; y_n)) & \longmapsto & (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{array}$  et  $\cdot :$   $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (\lambda; (x_1; \dots; x_n)) & \longmapsto & (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n) \end{array}$  est un  $\mathbb{R}$ -ev.

### Propriété 11.1

Soit  $(E; +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -ev. Alors

1.  $\forall x \in E, O_{\mathbb{K}} \cdot x = O_E$ ;
2.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot O_E = O_E$ ;
3.  $\forall x \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$ ;
4.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \text{ si } \lambda x = O_E, \text{ alors } \lambda = O_{\mathbb{K}}$  ou  $x = O_E$ .

## 1.2 Sous-espaces vectoriels

### Définition 11.2 : sous-espace vectoriel

Soit  $(E; +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $F \subset E$ . On dit que  $F$  est un *sous-espace vectoriel* de  $E$  quand  $(F; +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -ev

### Propriété 11.2

Soit  $(E; +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $F \subset E$ . Alors  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si

1.  $F \neq \emptyset$ ;
2.  $\forall (x, y) \in F^2, x + y \in F$  (stabilité par addition);
3.  $\forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot x \in F$  (stabilité par multiplication par un scalaire).

### Théorème 11.1 : caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Soit  $(E; +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $F \subset E$ .  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$ .

☞ Voir les exercices 4 et 5 du TD 10.

### Propriété 11.3

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ , avec  $I$  un ensemble quelconque. Alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .



En général, la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel.

### Exemple 11.2

Soit  $E = \mathbb{R}^2$ . On pose  $F = \{\lambda(1 \ 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  et  $G = \{\lambda(0 \ 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ .  
On a  $F \cup G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \in F \text{ ou } x \in G\}$ .

Si  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors  $\forall (x, y) \in F \cup G^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x + y \in F \cup G$ . Or si on prend  $(x = (1, 0)) \in F^2$  et  $(y = (0, 1)) \in G^2$  et  $\lambda = 1 \in \mathbb{R}, \lambda x + y = (1, 1)$  qui appartient ni à  $F$  ni à  $G$  donc qui n'est pas dans  $F \cup G$ .

Ainsi,  $F \cup G$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ .

On peut montrer assez aisément que  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E \Leftrightarrow F \subset G$  ou  $G \subset F$ , cette condition n'étant pas vérifiée dans l'exemple précédent.

### 1.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

#### Définition 11.3 : sous-espace vectoriel engendré

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $A = \{x_1; \dots; x_n\} \subset E$ . On appelle *sous-espace vectoriel engendré* par  $A$  et on note  $\text{Vect}(A)$  l'ensemble des combinaisons linéaires des  $x_i$  :

$$\text{Vect}(A) = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n \mid \lambda_i \in \mathbb{K}; i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}.$$

#### Propriété 11.4

$\text{Vect}(A)$  est le plus petit espace vectoriel qui contient  $A$ .

#### Exemple 11.3

- Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et soit  $A = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Alors  $\text{Vect}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ . Il s'agit du plan d'équation  $z = 0$ .
- Soit  $E = \mathbb{R}[x]$  et soit  $A = \{1; x; \dots; x^n\}$ . Alors  $\text{Vect}(A) = \mathbb{R}_n[x]$  : c'est l'ensemble des polynômes de degré au plus  $n$ .

#### Définition 11.4 : partie génératrice

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et soit  $A \subset E$ . On dit que  $A$  est une *partie génératrice* de  $F$  si  $\text{Vect}(A) = F$ .

#### Exemple 11.4

Soit  $E = \mathbb{R}^3$  et soit  $A = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Alors  $A$  est une partie génératrice de  $E$ . En effet, tout vecteur de  $\mathbb{R}^3$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de  $A$ . En règle générale, si  $A = \{e_1; e_2; e_3\}$  avec  $e_1, e_2$  et  $e_3$  des vecteurs non coplanaires, alors  $\text{Vect}(A) = \mathbb{R}^3$ .

#### Propriété 11.5

Si  $A$  est une partie génératrice de  $E$  et si  $A \subset B$ , alors  $B$  est aussi une partie génératrice de  $E$ .

### 1.4 Dépendance linéaire

#### Définition 11.5 : famille libre et famille liée

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $\{x_1; \dots; x_n\}$  une famille de  $n \in \mathbb{N}^*$  vecteurs de  $E$ .

- On dit que la famille  $\{x_1; \dots; x_n\}$  est *liée* ou *linéairement dépendante* s'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses éléments qui est nulle, c'est-à-dire si  $\exists (\lambda_1; \dots; \lambda_n) \neq (0; \dots; 0) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ .
- On dit que la famille  $\{x_1; \dots; x_n\}$  est *libre* ou *linéairement indépendante* si  $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .



Pour montrer qu'une famille est libre, on part d'une combinaison linéaire nulle et on montre que tous les coefficients sont nuls.

☞ Voir l'exercice 2 du TD 10.

En règle générale, deux vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  forment une famille libre si et seulement si ils ne sont pas colinéaires. Dans  $\mathbb{R}^2$ , une famille de plus de deux vecteurs est forcément liée : chacun peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de deux autres.

### Propriété 11.6

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $A$  une partie de  $E$ .

1. Si  $0 \in A$ , alors  $A$  est liée.
2. Si  $B$  est une autre partie de  $E$  telle que  $A \subset B$ , et que  $A$  est liée, alors  $B$  est liée.
3. Si  $B$  est une autre partie de  $E$  telle que  $B \subset A$ , et que  $A$  est libre, alors  $B$  est libre.
4. Soit  $x \in E$ . Alors  $\{x\}$  est libre si et seulement si  $x \neq 0$ .
5.  $A$  est liée si et seulement s'il existe un élément de  $A$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire des autres.

## 1.5 Bases

### Définition 11.6 : base

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $A$  une famille de vecteurs de  $E$ . On dit que  $A$  est une *base* de  $E$  quand  $A$  est libre et génératrice.

☞ Exemple 11.5

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

Plus généralement, la famille  $\{e_1; \dots; e_n\}$ , avec  $e_i$  le vecteur nul sauf le  $i^{\text{e}}$  coefficient qui vaut 1, est une base de  $\mathbb{R}^n$ . De plus on appelle cette base la *base canonique* de  $\mathbb{R}^n$ .

### Propriété 11.7

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Alors tout vecteur de  $E$  s'écrit de façon unique comme une combinaison linéaire de vecteurs de  $\mathcal{B}$ .

Soit  $I \subset \mathbb{N}^*$ . Si  $\mathcal{B} = \{e_i \mid i \in I\}$ , alors  $\exists J \subset I$  et  $\exists! \{\lambda_j \mid j \in J\}$  telle que  $\forall x \in E, x = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$ . Les coefficients  $\lambda_j$  sont appelés les *composantes* de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

## 2 Dimension

### 2.1 Dimension, base

#### Théorème 11.2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev engendré par une partie finie. Alors  $E$  admet une base et toutes les bases de  $E$  admettent le même nombre d'éléments. Ce nombre, noté  $\dim(E)$ , est appelé *dimension* de l'espace vectoriel  $E$ .

☞ Exemple 11.6

$$\dim(\mathbb{R}^2) = 2; \dim(\mathbb{R}^4) = 4; \dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1.$$



Il existe des espaces vectoriels qui ne sont engendrés par aucune partie finie. On dit alors qu'il sont de dimension infinie.

☞ Exemple 11.7

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}[x] \\ &\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

**Théorème 11.3**

Soit  $\{e_1; \dots; e_n\}$  une famille génératrice du  $\mathbb{K}$ -ev E. Soit  $\{x_1; \dots; x_p\}$  une famille libre de E. Alors  $p \leq n$ .

**Propriété 11.8**

Soit E un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie ( $\dim E < \infty$ ).

1. Si  $\{x_1; \dots; x_n\}$  est une famille libre, alors  $n \leq \dim E$ .
2. Si  $\{x_1; \dots; x_n\}$  est une famille génératrice, alors  $n \geq \dim E$ .
3. Si  $\{x_1; \dots; x_n\}$  est une base, alors  $n = \dim E$ .
4. Si  $n > \dim E$ , alors  $\{x_1; \dots; x_n\}$  est une famille liée.

**Propriété 11.9**

Soit E un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ . On a équivalence entre les trois propriétés suivantes

1.  $\{x_1; \dots; x_n\}$  est une base ;
2.  $\{x_1; \dots; x_n\}$  est libre ;
3.  $\{x_1; \dots; x_n\}$  est génératrice.

En pratique, cette proposition permet de montrer que la famille  $\{x_1; \dots; x_n\}$  d'un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  est une base simplement en montrant qu'elle est libre.

**2.2 Théorème de la base incomplète****Théorème 11.4 : de la base incomplète**

Soit E un  $\mathbb{K}$ -ev de base  $\mathcal{B} = \{e_1; \dots; e_n\}$ . Soit  $\{x_1; \dots; x_p\}$  une famille libre de E. Alors, d'après la propriété 11.8,  $p \leq n$ . De plus, il existe  $(n - p)$  vecteurs parmi les  $e_i$  tels que la famille constituée de ces  $(n - p)$  vecteurs et des  $x_i$  soit une base de E.

**Corollaire 11.1**

Si  $\dim E = n$  et si  $\{x_1; \dots; x_p\}$  est une famille libre de E, alors on peut trouver  $x_{p+1}, \dots, x_n$  de E tels que  $\{x_1; \dots; x_n\}$  est une base de E.

☞ Voir l'exercice 1 du TD 10.

**2.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel****Propriété 11.10**

Soit E un  $\mathbb{K}$ -ev et soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que  $\dim E = n < \infty$ .

1. Alors  $\dim F \leq n < \infty$ .
2. Si  $\dim F = \dim E$ , alors  $E = F$ .

**Définition 11.7 : droite, plan et hyperplan**

Soit E un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ . Alors

1. un sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelé une *droite vectorielle* ;
2. un sous-espace vectoriel de dimension 2 est appelé un *plan vectoriel* ;
3. un sous-espace vectoriel de dimension 3 est appelé un *hyperplan* de E.

## 2.4 Rang d'une famille de vecteurs

### Définition 11.8 : rang d'une famille

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $\{x_1; \dots; x_p\}$  une famille de vecteurs de  $E$ . On appelle *rang* de cette famille la dimension de  $\text{Vect}(\{x_1, \dots, x_p\})$ :  $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(\text{Vect}(\{x_1, \dots, x_n\}))$ .

Pour déterminer le rang d'une famille  $\{x_1; \dots; x_p\}$ , on écrit les  $x_i$  dans la base canonique :

$$x_1 = x_{11}e_1 + x_{12}e_2 + \dots + x_{1n}e_n$$

$$\vdots = \vdots$$

$$x_p = x_{p1}e_1 + \dots + x_{pn}e_n$$

On utilise ensuite le pivot de Gauss (cf. section 1.3 p. 106) pour se ramener à une matrice triangulaire supérieure. Le rang est alors égal au nombre de lignes de cette matrice dont les coefficients sont non tous nuls.

☞ Voir l'exercice 3 du TD 10.

## 3 Somme de sous-espaces vectoriels

### 3.1 Somme de deux sous-espaces vectoriels

#### Définition 11.9 : somme de sous-espaces vectoriels

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On définit la *somme* de  $F$  et de  $G$  par

$$\begin{aligned} F + G &= \{x + y \mid x \in F; y \in G\} \\ &= \{z \in E \mid \exists (x, y) \in F \times G^2; z = x + y\} \end{aligned}$$

#### Propriété 11.11

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels.

1.  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2.  $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$ .

### 3.2 Somme directe de deux sous-espace vectoriel

#### Définition 11.10 : somme directe de sous-espaces vectoriels

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont en *somme directe* et on note  $F \oplus G$  si tout élément du sous-espace vectoriel  $F + G$  se décompose de façon unique comme la somme d'un élément de  $F$  et d'un élément de  $G$ . On ajoute donc l'unicité par rapport à la définition 11.9 précédente :

$$F \oplus G = \{z \in E \mid \exists! (x, y) \in F \times G^2; z = x + y\}.$$

#### Propriété 11.12

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{0\}$ .

#### Exemple 11.8

Soient  $E = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ ,  $F = \{f \in E \mid f$  paire $\}$  et  $G = \{f \in E \mid f$  impaire $\}$ .

Soit  $f \in F \cap G$ . Alors  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = f(x) = -f(x)$ . D'où il vient que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0$ . Ainsi  $F \oplus G$  dans  $E$ .

### 3.3 Supplémentaires

#### Définition 11.11 : sous-espaces vectoriels supplémentaires

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On dit que  $G$  est un *supplémentaire* de  $F$  quand

1.  $F \cap G = \{0\}$ ;
2.  $F + G = E$ .



$F$  et  $G$  sont supplémentaires lorsque  $F \oplus G = E$ .

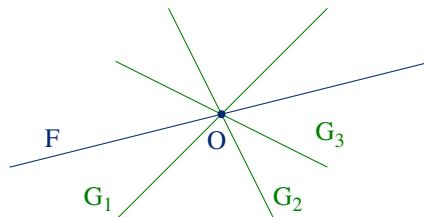
#### Exemple 11.9

Dans  $\mathbb{R}^3$ , un plan vectoriel ( $\mathcal{P}$ ) et une droite vectorielle ( $\mathcal{D}$ ) sont supplémentaires si et seulement si ( $\mathcal{D}$ ) n'est pas incluse dans ( $\mathcal{P}$ ). !

Si  $F$  admet un supplémentaire  $G$ , celui-ci n'est pas unique.

#### Exemple 11.10

Soit  $E = \mathbb{R}^2$ . On définit  $F, G_1, G_2$  et  $G_3$  comme sur la figure ci-contre. Alors les  $G_i$  sont des supplémentaires de  $F$  car  $\forall i \in \{1; 2; 3\}, F \cap G_i = \{0\}$ .



💡 Voir l'exercice 6 du TD 10.

### 3.4 Cas de la dimension finie

#### Propriété 11.13

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F$  possède un supplémentaire dans  $E$ . De plus, tout supplémentaire de  $F$  dans  $E$  a pour dimension  $\dim E - \dim F$ .

#### Propriété 11.14

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . On note  $\mathcal{B}$  une base de  $F$  et  $\mathcal{B}'$  une base de  $G$ . Alors  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  si et seulement si  $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$  est une base de  $E$ .

#### Théorème 11.5

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$ .

#### Corollaire 11.2

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  si et seulement si

1.  $F \cap G = \{0\}$ ;
2.  $\dim F + \dim G = \dim E$ .

#### Propriété 11.15

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies. Alors  $\dim E \times F = \dim E + \dim F$ .



## Chapitre 12

# Applications linéaires

### Sommaire

---

1	Définitions, exemples . . . . .	131
2	Image et noyau d'une application linéaire . . . . .	132
3	Isomorphismes . . . . .	133
4	Théorème du rang . . . . .	134
5	Projection et symétrie . . . . .	135
6	Écriture matricielle des applications linéaires . . . . .	136
6.1	Définitions . . . . .	136
6.2	Opérations sur les applications linéaires . . . . .	137
6.3	Changement de base . . . . .	138

---

En complément, on pourra se référer

- aux sections 3.5 *Familles libres et liées* p. 161 et 3.6 *Applications linéaires* p. 173 de ALHAEL, ARNAL et CHANCOGNE 2011 ;
- aux fiches 20 et 21 p. 78 à 85 de FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013 ;
- au chapitre 7 *Applications linéaires* p. 129 de LIRET et MARTINAIS 1997a ;
- au chapitre 20 *Espaces vectoriels. Applications linéaires. Matrices* p. 240 de Azoulay1996\_2\_CI-SST81T5.

Dans ce chapitre, on note  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les différents espaces vectoriels utilisés sont de dimensions finies, sauf mention contraire.

## 1 Définitions, exemples

### Définition 12.1 : application linéaire

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $f : E \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est une *application linéaire* ou un *morphisme d'espace vectoriel* lorsque

- $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$ ;
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$ .



Pour montrer qu'une application  $f : E \rightarrow F$  est linéaire, il faut considérer  $(x, y) \in E^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  et établir que  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$ . Les deux points de la définition sont ainsi regroupés.

### Propriété 12.1

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors

1.  $f(0) = 0$ ;
2.  $f(-x) = -f(x)$ , autrement dit,  $f$  est impaire.



On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Si  $E = F$ , on note alors simplement  $\mathcal{L}(E)$  au lieu de  $\mathcal{L}(E, E)$ .

**Définition 12.2 : morphismes**

Soient E et F deux  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- Si  $f$  est bijective, on dit que  $f$  est un *isomorphisme*;
- Si  $E = F$ , on dit que  $f$  est un *endomorphisme*;
- si  $E = F$  et si  $f$  est bijective, on dit que  $f$  est un *automorphisme*.

**Exemple 12.1**

- L'application nulle  $f : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto 0 \end{cases}$  est linéaire.
- L'application identité  $f : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto x \end{cases}$  est un automorphisme.

☞ Voir l'exercice 1 du TD 11.

**Propriété 12.2**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , et soit  $\mathcal{B}$  une base de E. Si on connaît l'image par  $f$  de chacun des vecteurs de  $\mathcal{B}$ , alors on connaît l'application  $f$  sur E.

En effet, si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et si  $\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$  on connaît  $f(e_i)$  alors, comme tout élément  $x$  de E peut s'exprimer de façon unique dans la base  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire que  $\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ , on a donc  $f(x) = f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_n f(e_n)$ .

De façon plus générale, on a la propriété suivante

**Propriété 12.3**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  et soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ . Alors  $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ .

**Propriété 12.4**

$(\mathcal{L}(E; F); +; \cdot)$  est un espace vectoriel.

**Propriété 12.5 : composée d'applications linéaires**

La composée de deux applications linéaires est une application linéaire. Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

**Définition 12.3 : application nilpotente**

On dit qu'une application  $f \in \mathcal{L}(E)$  est *nilpotente* si la composée par elle-même un nombre suffisant de fois donne le morphisme nul, si  $\exists n \in \mathbb{N}^*, f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} = 0$ .

On appelle *indice de nilpotence* le plus petit entier  $n$  tel que  $f^n = 0$ .

Par convention, on a  $f^0 = id_E$  pour avoir l'écriture  $f^n \circ f^m = f^{n+m}$ . On rappelle que  $id_E$  est l'application identité sur E définie par  $id_E : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto x \end{cases}$ .

## 2 Image et noyau d'une application linéaire

**Définition 12.4 : image d'une application linéaire**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle *image* de  $f$  et on note  $Im(f)$  l'ensemble  $f(E)$ , c'est-à-dire  $Im(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$ .

**Propriété 12.6**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Propriété 12.7**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Cette application est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .

**Définition 12.5 : noyau d'une application linéaire**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle *noyau* de  $f$  et on note  $\text{Ker}(f)$  l'ensemble des éléments de  $E$  dont l'image par  $f$  est l'élément nul de  $F$ , c'est-à-dire  $\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\})$ .

**Propriété 12.8**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .  $\text{Ker}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Propriété 12.9**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Cette application est injective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ .

Déterminer le noyau d'une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  revient à résoudre un système de  $p$  équations à  $n$  inconnues, avec  $\dim E = n$  et  $\dim F = p$ .

**Exemple 12.2**

Soit  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . On pose  $\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ f & \longmapsto f' \end{cases}$ .

- $\text{Ker}(f) = \{f \in E \mid \Phi(f) = 0\}$   
 $= \{f \in E \mid f = \lambda ; \lambda \in \mathbb{R}\}$  c'est l'ensemble des fonctions constantes.
- $\text{Im}(f) = E$ , car si  $f \in E$ , alors  $f$  possède une primitive sur  $\mathbb{R}$  car elle est continue.

Voir l'exercice 2 du TD 11.

Pour montrer qu'un ensemble  $E$  est un sous-espace vectoriel, on peut

1. revenir à la définition (peu recommandé);
2. montrer que  $E$  est l'espace vectoriel engendré par une partie;
3. montrer que  $E$  est le noyau d'une application linéaire;
4. montrer que  $E$  est l'image d'une application linéaire.



### 3 Isomorphismes

**Propriété 12.10**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  injective et soit  $\{x_1 ; \dots ; x_p\}$  une famille libre de  $E$ . Alors  $\{f(x_1) ; \dots ; f(x_p)\}$  est une famille libre de  $F$ .

**Propriété 12.11**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  surjective et soit  $\{x_1 ; \dots ; x_p\}$  une famille génératrice de  $E$ . Alors  $\{f(x_1) ; \dots ; f(x_p)\}$  est une famille génératrice de  $F$ .

**Propriété 12.12**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On a l'équivalence entre les trois assertions suivantes :

1.  $f$  est un isomorphisme (c'est-à-dire que  $f$  est bijective);

2. l'image de toute base de E est une base de F;
3. il existe une base de E telle que son image par  $f$  est une base de F.

### Exemple 12.3

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x; y) & \longmapsto (x + y; x - y) \end{cases}$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Alors

$$\begin{cases} f(e_1) = f(1, 0) = (1; 1) \\ f(e_2) = f(0, 1) = (1; -1) \end{cases}$$

Soient donc  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2) = 0$ . Il vient donc que la somme et la différence de ces deux coefficients doivent être nul. Par conséquent  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  et ainsi la famille  $\{f(e_1); f(e_2)\}$  est libre.

De plus  $\text{Vect}(\{f(e_1), f(e_2)\}) = \mathbb{R}^2$ , donc  $\{f(e_1); f(e_2)\}$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .

D'où il vient que  $f$  est un isomorphisme.

### Définition 12.6 : espaces vectoriels isomorphes

On dit que deux  $\mathbb{K}$ -ev E et F sont *isomorphes* lorsqu'il existe un isomorphisme de E dans F, c'est-à-dire quand  $\exists f \in \mathcal{L}(E, F)$  bijective.

### Propriété 12.13

Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension (finie).

## 4 Théorème du rang

### Propriété 12.14

Soient E et F deux  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $f$  induit un isomorphisme entre n'importe quel supplémentaire de  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ .

Autrement dit, si G est un supplémentaire de  $\text{Ker}(f)$  dans E, alors  $f|_G : G \rightarrow \text{Im}(f)$  est un isomorphisme.

### Définition 12.7 : rang d'une application linéaire

On appelle *rang* d'une application linéaire  $f$  et on note  $\text{rg}(f)$  la dimension de l'image de  $f$ :  $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$ .

### Théorème 12.1 : du rang

Soit E un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, et soit F un  $\mathbb{K}$ -ev. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f).$$

### Théorème 12.2

Soient E et F deux  $\mathbb{K}$ -ev de même dimension (finie) et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors on a l'équivalence entre les trois assertions suivantes

1.  $f$  est bijective;
2.  $f$  est injective;
3.  $f$  est surjective.



En dimension infinie, on peut avoir des applications linéaires qui sont injectives sans être surjectives, et réciproquement.

**Exemple 12.4**

L'application définie par  $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$  qui à un polynôme associe sa dérivée est surjective mais pas injective. En effet,  $\text{Ker}(\Phi) = \{\text{polynômes constants}\} \neq \{0\}$ , donc  $\Phi$  n'est pas injective. Par contre,  $\forall Q \in \mathbb{R}[x]$ , avec  $Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ ,  $\exists R \in \mathbb{R}[x]$ , défini par  $R(X) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k X^{k+1}}{k+1}$ , tel que  $\Phi(R) = Q$ , ce qui établit que  $\Phi$  est surjective.

**Propriété 12.15**

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

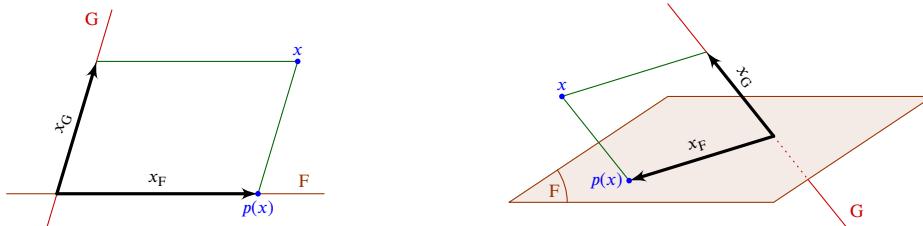
1. Si  $f$  est injective,  $\dim E \leq \dim F$ .
2. Si  $f$  est surjective,  $\dim E \geq \dim F$ .
3. Si  $f$  est bijective,  $\dim E = \dim F$ .

## 5 Projection et symétrie

**Définition 12.8 : projection**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . Alors  $\forall x \in E$ ,  $\exists! (x_F, x_G) \in \mathbb{R}^2 E \times F$  tel que  $x = x_F + x_G$ . La *projection* sur  $F$  parallèlement à  $G$  est l'application  $p$  qui retourne  $x_F$ :  $p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & x_F \end{array}$ .

De façon similaire, on a la projection sur  $G$  parallèlement à  $F$  qui à  $x$  associe  $x_G$ .

**Exemple 12.5****Propriété 12.16**

Avec les notations de la définition 12.8, une projection  $p$  vérifie les propriétés suivantes

- $p$  est une application linéaire;
- $p \circ p = p$ ;
- $\text{Ker}(p) = G$ ;
- $\text{Im}(p) = F$ .

Inversement, si  $p \in \mathcal{L}(E)$ , avec  $E$  de dimension finie, telle que  $p \circ p = p$ , alors  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$  et  $p$  est la projection sur  $\text{Im}(p)$  parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ .

**Définition 12.9 : projecteur**

On appelle *projecteur* (ou *projection*) tout endomorphisme idempotent, c'est-à-dire  $p \circ p = p$ .

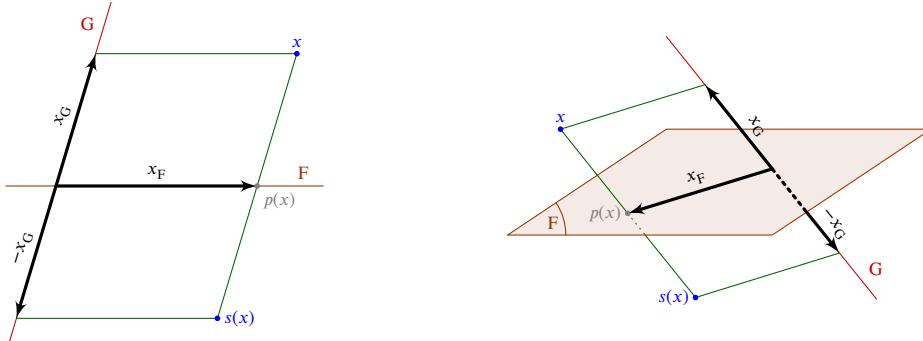
**Propriété 12.17**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur. Alors

1.  $\text{id}_E - p$  est un projecteur;
2.  $\text{Ker}(\text{id}_E - p) = \text{Im}(p)$ ;
3.  $\text{Im}(\text{id}_E - p) = \text{Ker}(p)$ .

**Définition 12.10 : symétrie**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ . Alors  $\forall x \in E$ ,  $\exists! (x_F, x_G) \in F \times G$  tel que  $x = x_F + x_G$ . La *symétrie* par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$  est l'application  $s$  définie par  $s(x) = x_F - x_G$ .

**Exemple 12.6****Propriété 12.18**

Avec les notations de la définition 12.10, une symétrie  $s$  vérifie les propriétés suivantes

- $s$  est une application linéaire ;
- $s \circ s = \text{id}_E$  ( $s$  est un automorphisme) ;
- $\text{Ker}(s) = \{0\}$  ;
- $\text{Im}(s) = E$  ;
- $\text{Ker}(s - \text{id}_E) = F$  ;
- $\text{Im}(s + \text{id}_E) = G$ .

Inversement, toute application  $s \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $s \circ s = \text{id}_E$  est une symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$  parallèlement à  $\text{Im}(s + \text{id}_E)$ .

## 6 Écriture matricielle des applications linéaires

### 6.1 Définitions

**Définition 12.11 : matrice colonne**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Tout élément  $x$  de  $E$  se décompose et s'écrit de façon unique  $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ , avec  $x_i \in \mathbb{K}, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ .

On appelle *matrice colonne* des composantes de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$  la matrice  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

**Définition 12.12 : matrice d'une famille**

Avec les mêmes notations que dans la définition 12.11, on considère une famille  $\mathcal{F} = \{u_1; \dots; u_p\}$  de  $p$  vecteurs de  $E$ . Alors  $\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \exists (a_{1i}, \dots, a_{ni}) \in \mathbb{K}^n$  tels que  $u_i = a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n$ .

On appelle *matrice de la famille  $\mathcal{F}$*  dans la base  $\mathcal{B}$  la matrice  $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ .

Cela correspond à concaténer les matrices colonnes des composantes des vecteurs  $u_i$  dans un tableau.

### Définition 12.13 : matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions respectives  $p$  et  $n$ . Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  une base de E et  $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$  une base de F. Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On appelle *matrice de f relative aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$*  et on note  $\mathcal{M}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  la matrice de la famille  $\mathcal{F} = \{f(e_1); \dots; f(e_p)\}$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

Si  $\forall i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket, \exists (a_{1i}, \dots, a_{ni}) \in \mathbb{K}^n$  tels que  $f(e_i) = a_{1i}f_1 + \dots + a_{ni}f_n$ , alors

$$\mathcal{M}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{matrix}.$$

Si  $f \in \mathbb{R}\mathcal{L}(E)$ , et si  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ , on note  $\mathcal{M}_{f; \mathcal{B}}$  au lieu de  $\mathcal{M}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ .

### Exemple 12.7

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  définie par  $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x; y; z) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix} \end{array}$

On prend  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$  les bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et de  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{cases} f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = f_1 + 4f_2; \\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2f_1 + 5f_2; \\ f(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3f_1 + 6f_2. \end{cases} \quad \text{Alors } \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}.$$

## 6.2 Opérations sur les applications linéaires

### Propriété 12.19

Soient  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ , avec  $\dim(E) = p$  et  $\dim(F) = n$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  des bases de E et de F.

Alors

1.  $\mathcal{M}_{f+g; \mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'} + \mathcal{M}_{g; \mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ ;
2.  $\mathcal{M}_{\lambda f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \lambda \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ .

Autrement dit,  $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n, p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'} \end{array}$  est un isomorphisme.

### Propriété 12.20

Soient E, F et G trois  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions respectives  $q, p$  et  $n$ , et de bases associées respectives  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q)$ ,  $\mathcal{B}' = (f)^p$  et  $\mathcal{B}'' = (g_1, \dots, g_n)$ . Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors

$$\mathcal{M}_{g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}''} = \mathcal{M}_{g; \mathcal{B}', \mathcal{B}''} \cdot \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'}.$$

### Propriété 12.21

Soient E et F deux  $\mathbb{K}$ -ev de bases respectives  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et soit  $x \in E$ . Alors

$$\mathcal{M}_{f(x); \mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot \mathcal{M}_{x; \mathcal{B}'}.$$

**Exemple 12.8**

On munit  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$  de leurs bases canoniques, et on considère  $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x; y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix} \end{array}$

$$\text{On a } \mathcal{M}_{f(x); \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}.$$

$$\text{Par ailleurs, } \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \text{ et } \mathcal{M}_{x; \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

**Propriété 12.22**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ , muni d'une base  $\mathcal{B}$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $f$  admet une application réciproque si et seulement si  $\mathcal{M}_{f; \mathcal{B}}$  est inversible. Dans ce cas,  $\mathcal{M}_{f^{-1}; \mathcal{B}} = (\mathcal{M}_{f; \mathcal{B}})^{-1}$ .

**Propriété 12.23**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{K}^n$ . Alors il existe une application linéaire  $f$  dont  $A$  est la matrice :  $\exists f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n), A = \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}}$ .

De plus, il y a équivalence entre les assertions

1.  $A$  est inversible;
2.  $f$  est bijective;
3.  $f$  est injective;
4.  $f$  est surjective;
5.  $\text{Ker}(f) = \{0\}$ ;
6.  $\text{Im}(f) = \mathbb{K}^n$ .

### 6.3 Changement de base

**Définition 12.14 : matrice de passage**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ . Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ . On appelle *matrice de passage* de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  et on note  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs  $e'_i$  de la base  $\mathcal{B}'$  dans la base  $\mathcal{B}$  :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & \overbrace{e'_1 \dots e'_n}^{\mathcal{B}'} & & \\ \hline & \dots & & \end{array} \right) \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \Bigg\} \mathcal{B}$$

**Exemple 12.9**

Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $\mathcal{B}' = (e'_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix})$ .

$$\text{Alors } P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \end{matrix}.$$

**Propriété 12.24**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ . Soient  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}''$  trois bases de  $E$ . Alors

1.  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}} = I_n$ ;
2.  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\text{id}_E; \mathcal{B}', \mathcal{B}}$ ;

3.  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  est inversible et  $(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ ;
4.  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \cdot P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}$ .

### Propriété 12.25

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et soit  $x$  un élément de  $E$ . On note  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ ,  $X = \mathcal{M}_{x; \mathcal{B}}$  et  $X' = \mathcal{M}_{x; \mathcal{B}'}$ . Alors  $X = PX'$  et  $X' = P^{-1}X$ .

### Exemple 12.10

Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $E = \mathbb{R}^2$  et soit  $\mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ . Soit  $x$  un élément de  $E$  dont les composantes dans  $\mathcal{B}$  sont notées  $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et celle dans  $\mathcal{B}'$  sont notées  $X' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ .

On a déjà établi dans un exemple précédent que  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

À l'aide du théorème 10.3 p. 121, on calcule aisément  $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Alors  $X' = P^{-1}X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4a - 3b \\ -a + 2b \end{pmatrix}$ , donc  $\begin{cases} a' = \frac{1}{5}(4a - 3b); \\ b' = \frac{1}{5}(-a + 2b). \end{cases}$

De même,  $X = PX' = \begin{pmatrix} 2a' + 3b' \\ a' + 4b' \end{pmatrix}$ , donc  $\begin{cases} a = 2a' + 3b'; \\ b = a' + 4b'. \end{cases}$

### Propriété 12.26

Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -ev de dimensions respectives  $p$  et  $n$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  et soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ .

On note  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ ,  $A = \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{C}}$  et  $Q = (P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$ ,  $A' = \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}', \mathcal{C}'}$ .  
Alors  $A' = Q^{-1}AP$ .

### Propriété 12.27

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

On note  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $A = \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}}$  et  $A' = \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}'}$ .

Alors  $A' = P^{-1}AP$ .

Voir l'exercice 3 du TD 11.

### Définition 12.15 : matrices équivalentes

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est *équivalente* à  $B$  et on note  $A \equiv B$  s'il existe  $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  et  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversibles telles que  $A = Q^{-1}BP$ .

### Propriété 12.28

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Alors  $A \equiv B$  si et seulement si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ .

### Définition 12.16 : matrices semblables

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est *semblable* à  $B$  s'il existe  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible telles que  $A = P^{-1}BP$ .

**Propriété 12.29**

Soient A et B deux matrices semblables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ .

## Chapitre 13

# Réduction des endomorphismes

### Sommaire

---

1	Spectre d'un endomorphisme . . . . .	141
1.1	Définitions, exemples . . . . .	141
1.2	Caractérisation des valeurs propres . . . . .	142
1.3	Spectre et polynôme annulateur . . . . .	142
2	Matrices et endomorphismes diagonalisables . . . . .	143
2.1	Définitions . . . . .	143
2.2	Recherche du spectre . . . . .	143
3	Trigonalisation . . . . .	145
4	Applications . . . . .	145
4.1	Puissance d'une matrice . . . . .	145

---

En complément, on pourra se référer

- au chapitre 9 *Diagonalisation de matrices* p. 163 de **Alhalel2013\_CI-SST81T5**;
- aux fiches 26 et 27 p. 102 à 109 de **FERRIGNO, MULLER-GUEUDIN et MARX 2013**;
- au chapitre 22 *Valeurs propres. Diagonalisation d'un endomorphisme* p. 366 de **Azoulay1996\_2\_CI-SST81T5**;
- au chapitre 13 *Réduction d'un endomorphisme* p. 199 de **Azoulay1997\_4\_CI-SST81T5**.

Soit  $u$  une application linéaire sur un espace vectoriel  $E$  de dimension finie. D'après la définition 12.13 p. 137, on peut associer une matrice à cette application. L'objectif de ce chapitre est de trouver une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\mathcal{M}_{u; \mathcal{B}}$  soit diagonale ou triangulaire.

## 1 Spectre d'un endomorphisme

### 1.1 Définitions, exemples

#### Définition 13.1 : valeur propre, vecteur propre, espace propre

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On dit que  $\lambda$  est *valeur propre* de  $f$  quand il existe un vecteur  $x$  de  $E$  non nul tel que  $f(x) = \lambda x$ .
- Soit  $x \in E$  non nul. On dit que  $x$  est *vecteur propre* de  $f$  s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(x) = \lambda x$ . Dans ce cas on dit que  $x$  est vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .
- Si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ , on appelle *espace propre* associé à  $\lambda$  et on note  $E_\lambda$  l'espace vectoriel  $E_\lambda = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\} = \{\text{vecteurs propres associés à } \lambda\} \cup \{0\}$ .



Un vecteur nul ne peut être vecteur propre.

#### Exemple 13.1

Soit  $f$  un projecteur ( $p^2 = p$ , cf. définition 12.9 p. 135). On suppose que  $f \neq 0$  et que  $f \neq \text{id}_E$ . Si  $\lambda$  est valeur propre de  $f$ , alors  $\exists x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $f(x) = \lambda x$ .

Comme  $f$  est un projecteur, on a donc  $f^2(x) = \lambda f(x) = \lambda^2 x$ , mais aussi  $f^2(x) = f(x) = \lambda x$ . D'où il vient que  $\lambda^2 - \lambda = 0$ , car  $x \neq 0$ .

Les valeurs propres de  $f$  sont donc  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = 1$ .

Les vecteurs propres de  $f$  associés à  $\lambda_1 = 0$  sont tous les  $x$  de  $E$  non nuls tels que  $f(x) = 0 \cdot x = 0$ :  $E_{\lambda_1} = \text{Ker}(f)$ , c'est l'espace vectoriel donnant la direction de projection.

Les vecteurs propres de  $f$  associés à  $\lambda_2 = 1$  sont tous les  $x$  de  $E$  non nuls tels que  $f(x) = 1 \cdot x = x$ :  $E_{\lambda_2} = \text{Im}(f)$ , c'est l'espace vectoriel sur lequel on projette.

☞ Voir l'exercice 1 du TD 12.

### Définition 13.2 : spectre

On appelle *spectre* d'un endomorphisme  $f$  et on note  $\text{Sp}(f)$  l'ensemble des valeurs propres de  $f$ .

## 1.2 Caractérisation des valeurs propres

### Propriété 13.1

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre

1. si et seulement si  $\exists x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $f(x) = \lambda x$
2. si et seulement si  $\exists x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $f(x) - \lambda x = 0$
3. si et seulement si  $\exists x \in E \setminus \{0\}$  tel que  $x \in \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$
4. si et seulement si  $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\}$
5. si et seulement si  $f - \lambda \text{id}_E$  n'est pas injective
6. si et seulement si  $\det(f - \lambda \text{id}_E) = 0$  lorsque  $\dim E < \infty$ .

## 1.3 Spectre et polynôme annulateur

### Définition 13.3 : polynôme annulateur

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle *polynôme annulateur* de  $f$  tout polynôme  $P$  tel que  $P(f) = 0$  (endomorphisme nul), avec  $P \neq 0$  (polynôme nul).

### Théorème 13.1

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Alors  $f$  possède un polynôme annulateur.



Il n'y a jamais unicité du polynôme annulateur.

Les polynômes annulateurs permettent de déterminer l'inverse d'une matrice. Si en effet  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et qu'il existe  $P \in \mathbb{K}[x]$  non nul tel que  $P(M) = 0$ , alors  $M$  est inversible et  $M^{-1}$  s'exprime comme un polynôme en  $M$ .

### Exemple 13.2

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $M^3 - 3M^2 + 7M + 5 \text{Id}_n = 0$ . Alors  $\frac{-1}{5}(M^3 - 3M^2 + 7M) = \text{Id}_n$  et  $\frac{-M}{5}(M^2 - 3M + 7 \text{Id}_n) = \text{Id}_n$ . D'où  $M^{-1} = \frac{-1}{5}(M^2 - 3M + 7 \text{Id}_n)$ .

### Théorème 13.2

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $P \in \mathbb{K}[x]$ , tel que  $P(f) = 0$ . Alors  $\text{Sp}(f) \subset \{\text{zéros de } P\}$ .

### Théorème 13.3

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme  $f$  et soient  $x_1, \dots, x_k$  les vecteurs propres associés à ces valeurs propres. Alors  $(x_1; \dots; x_k)$  est une famille libre.

**Théorème 13.4**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  des valeurs propres distinctes de  $f$ . Alors les espaces propres  $E_{\lambda_i}$  sont en somme directe, c'est-à-dire que

- $\forall x \in E, \exists! ((x_1, \dots, x_k)) \in E_{\lambda_1} \times \dots \times E_{\lambda_k}$  tel que  $x = x_1 + \dots + x_k$ ;
- ou si  $x = x_1 + \dots + x_k = 0$ , avec  $x_i \in E_{\lambda_i}$ , alors tous les  $x_i$  sont nuls;
- ou si  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $E_{\lambda_i}$ , alors  $\cup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{B}_i$  est une base de  $E$ .

**Corollaire 13.1**

Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 13.4 précédent, on a alors  $\dim E = \dim(E_{\lambda_1} + \dots + E_{\lambda_k}) = \dim E_{\lambda_1} + \dots + \dim E_{\lambda_k} = \sum_{i=1}^k \dim E_{\lambda_i}$ .

## 2 Matrices et endomorphismes diagonalisables

### 2.1 Définitions

**Définition 13.4 : endomorphisme diagonalisable**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  est *diagonalisable* quand il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  formée des vecteurs propres de  $f$ . Dans ce cas,  $\mathcal{M}_{f; \mathcal{B}}$  est diagonale.

**Définition 13.5 : matrice diagonalisable**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est *diagonalisable* quand  $A$  est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible et s'il existe  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .

**Propriété 13.2**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sa matrice dans une base quelconque.

On suppose qu'il existe  $n(\mathbb{N}^*) \in \mathbb{R}$  tel que  $\text{Sp}(A) = \{\lambda_i ; i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket\}$ .  
On note  $E_{\lambda_i}$  le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

Alors  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $A$  est diagonalisable  
si et seulement si  $E$  est somme directe des  $E_{\lambda_i}$   
si et seulement si  $\dim(E) = \sum_{i=1}^k \dim(E_{\lambda_i})$ .

**Théorème 13.5**

Soit  $E$  de dimension finie. Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- $f$  est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme  $P$  scindé à racines simples (c'est-à-dire que  $P(x) = \prod_i (x - \alpha_i)$  avec les  $\alpha_i \in \mathbb{K}$  distincts deux à deux) tel que  $P(f) = 0$ .
- $A$  est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme  $P$  scindé à racines simples tel que  $P(A) = 0$ .

### 2.2 Recherche du spectre

On a déjà vu que  $\lambda \in \text{Sp}(f)$  si et seulement si  $\det(f - \lambda \text{id}_E) = 0$  (cf. propriété 13.1-6 p. 142).

**Définition 13.6 : polynôme caractéristique**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle *polynôme caractéristique* de  $A$  et on note  $\chi_A$  le polynôme défini par  $\chi_A(x) = \det(x \text{Id}_n - A)$ .

**Propriété 13.3**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\chi_A$  est un polynôme

1. de degré  $n$ ,
2. unitaire (le coefficient dominant vaut 1),
3. dont le coefficient en  $x^{n-1}$  vaut  $-\text{Tr}(A)$ ,
4. dont le terme de degré 0 vaut  $\det(A)$ .

En utilisant les propriétés du déterminant, on peut aussi définir  $\chi_A(x) = \det(x\text{Id}_n - A)$ . Ce polynôme diffère du précédent d'un facteur  $(-1)^n$ . L'avantage de la première formulation est que l'on obtient toujours un polynôme unitaire (le coefficient dominant vaut 1), alors qu'ici ce coefficient dominant vaut  $(-1)^n$ .

**Théorème 13.6**

Soit  $f$  un endomorphisme de matrice associée  $A$  dans une base quelconque. Alors  $\lambda \in \text{Sp}(f) = \text{Sp}(A)$  si et seulement si  $\chi_A(\lambda) = 0$ .

☞ Voir l'exercice 2 du TD 12.

**Théorème 13.7 : de Caley-Hamilton**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\chi_A$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

**Définition 13.7 : polynôme minimal**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Le polynôme minimal de  $A$   $m \in \mathbb{K}_n[x]$  est le polynôme unitaire, annulateur de  $A$  ayant le plus petit degré.

**Propriété 13.4 : polynôme minimal**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On note  $\chi_A$  et  $m_A$  les polynômes caractéristique et minimal de  $A$ . Alors

- $m_A$  possède les mêmes racines que  $\chi_A$ ,
- $m_A$  divise  $\chi_A$ ,
- $m_A$  est annulateur de  $A$ , c'est-à-dire  $M_A(A) = 0$ .

Cette dernière propriété permet de déterminer le polynôme minimal d'une matrice à partir de son polynôme caractéristique.

☞ **Exemple 13.3**

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par définition,  $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda(\lambda - 3) + 2)$ , ce qui mène à  $\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$ . Il est aisément d'obtenir la factorisation de ce polynôme :  $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$ .

Donc  $\chi_A$  est scindé mais pas à racines simples.

Étant données les propriétés du polynôme minimal, les candidats possibles sont  $p_1(x) = (x - 2)(x - 1)$  et  $p_2(x) = \chi_A(x)$ . Ces deux polynômes ont en effet les mêmes racines que  $\chi_A$  et divisent  $\chi_A$ . Bien entendu, d'après le théorème 13.7 (de Caley-Hamilton) p. 144,  $p_2$  est annulateur de  $A$ .

$$\text{On calcule } p_1(A) = (A - 2\text{Id}_3)(A - \text{Id}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Donc  $p_1$  est annulateur de  $A$ . Comme c'est un polynôme unitaire et que  $\deg(p_1) < \deg(p_2)$  (c'est le polynôme annulateur de plus petit degré parmi les candidats), on a alors que le polynôme minimal de  $A$   $m_A = p_1$ .

**Théorème 13.8**

Soit  $E$  de dimension finie  $n$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  la matrice associée.

On note  $\chi_A$  et  $m_A$  les polynômes caractéristique et minimal de  $A$ .

Alors  $A$  est diagonalisable si et seulement si  $m_A$  est scindé à racines simples. Dans ce cas, on note  $\lambda_i$  les  $k$  valeurs propres distinctes de  $A$ , de multiplicités respectives  $\mu_i$  (donc  $\sum_{i=1}^k \mu_i = n$ ).

De plus  $A = PDP^{-1}$  avec la matrice diagonale  $D$  dont les coefficients sont les  $\lambda_i$  selon leurs multiplicités. La matrice de passage  $P$  est donnée par les vecteurs propres rangés dans le même ordre que les valeurs propres associées dans  $D$ .



- Si  $\chi_A$  est scindé à racines simples, alors  $\chi_A = m_A$  et  $A$  est diagonalisable.
- Si  $\chi_A$  est scindé à racines multiples et que  $m_A$  est à racines simples,  $A$  est diagonalisable.
- Si  $m_A$  est à racines multiples,  $A$  est trigonalisable.

Voir les exercices 2 et 3 du TD 12.

### 3 Trigonalisation

Un endomorphisme n'est pas toujours diagonalisable. On peut alors regarder s'il est *trigonalisable*, c'est-à-dire essayer de trouver une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle la matrice de cet endomorphisme est triangulaire.

**Théorème 13.9**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $\chi_A$  son polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{K}[x]$  (toutes ses racines sont dans  $\mathbb{K}$ , mais peuvent être multiples), alors  $A$  est trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , triangulaire et une matrice  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible telles que  $A = PTP^{-1}$ . De plus, les valeurs propres de  $A$  sont les coefficients diagonaux de  $T$ .

$T$  étant triangulaire et connaissant déjà ses coefficients diagonaux, il reste à déterminer ses éléments situés au-dessus de la diagonale principale. Pour ce faire, on utilise le fait que  $B = PTP^{-1}$ , sachant que  $P$  est la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}_0$  d'origine (dans laquelle est écrite  $A = \mathcal{M}_{f; \mathcal{B}_0}$ ) vers la base  $\mathcal{B}$  telle que  $\mathcal{M}_{f; \mathcal{B}} = T$ . De plus on connaît les vecteurs propres qui engendrent les différents espaces propres de  $A$ . Il faut donc enrichir la famille formée de ces vecteurs pour obtenir une base de  $E$ , en utilisant le théorème 11.4 p. 127.

Voir l'exercice 4 du TD 12.

### 4 Applications

#### 4.1 Puissance d'une matrice

**Propriété 13.5**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice  $D$  diagonale et une matrice  $P$  inversible telles que  $A = PDP^{-1}$ . Alors,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$ , sachant que  $D^k$  s'obtient en prenant simplement la puissance  $k^e$  de chacun des coefficients diagonaux.

**Propriété 13.6**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice trigonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice  $T$  triangulaire et une matrice  $P$  inversible telles que  $A = PTP^{-1}$ . Alors,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $A^k = (PTP^{-1})^k = PT^kP^{-1}$ .

Voir les exercices 2 et 4 du TD 12.



## Annexe A

### Alphabet grec

Le tableau A.1 ci-dessous donne les lettres de l'alphabet grec, avec leur nom.

TABLEAU A.1 – Alphabet grec

Majuscules	Minuscules	Nom des lettres	
A	$\alpha$	$\alpha\lambda\varphi\alpha$	alpha
B	$\beta$ (en début de mot)	$\beta\eta\tau\alpha$	bêta
	$\beta$ (en milieu de mot)		
Γ	$\gamma$	$\gamma\acute{a}m\mu\alpha$	gamma
Δ	$\delta$	$\delta\acute{e}\lambda\tau\alpha$	delta
Ε	$\epsilon$	$\mathring{\epsilon}\psi\iota\lambda\acute{o}v$	epsilon
Ζ	$\zeta$	$\zeta\tilde{\eta}\tau\alpha$	zêta
Η	$\eta$	$\mathring{\eta}\tau\alpha$	hêta
Θ	$\theta$	$\theta\tilde{\eta}\tau\alpha$	thêta
Ι	$\iota$	$\iota\tilde{\omega}\tau\alpha$	iota
Κ	$\kappa$	$\kappa\acute{a}\pi\pi\alpha$	kappa
Λ	$\lambda$	$\lambda\acute{a}\mu\beta\delta\alpha$	lambda
Μ	$\mu$	$\mu\tilde{s}$	mu
Ν	$\nu$	$\nu\tilde{s}$	nu
Ξ	$\xi$	$\xi\tilde{i}$	ksi
Ο	$\circ$	$\mathring{\circ}\mu\iota\kappa\rho\acute{o}v$	omicron
Π	$\pi$	$\pi\tilde{i}$	pi
Ρ	$\rho$	$\mathring{\rho}\tilde{\omega}$	rhô
Σ	$\sigma, \varsigma$	$\sigma\acute{y}\gamma\mu\alpha$	sigma
Τ	$\tau$	$\tau\alpha\tilde{s}$	tau
Υ	$\upsilon$	$\mathring{\upsilon}\psi\iota\lambda\acute{o}v$	upsilon
Φ	$\phi$	$\varphi\tilde{i}$	phi
Χ	$\chi$	$\chi\tilde{i}$	khi
Ψ	$\psi$	$\psi\tilde{i}$	psi
Ω	$\omega$	$\mathring{\omega}\mu\acute{e}\gamma\alpha$	omega



## **Annexe B**

### **Puissances de dix**

Le tableau B.1 ci-dessous donne les puissances de 10 et les préfixes du système métrique qui sont souvent utilisés en sciences physiques.

TABLEAU B.1 – Puissances de 10 dans le système international

Préfixe	Symbole	Puissance
yocto	y	-24
zepto	z	-21
atto	a	-18
femto	f	-15
pico	p	-12
nano	n	-9
micro	μ	-6
milli	m	-3
centi	c	-2
deci	d	-1
deca	da	1
hecto	h	2
kilo	k	3
mega	M	6
giga	G	9
tera	T	12
peta	P	15
exa	E	18
zetta	Z	21
yotta	Y	24



# Index

- Angle, 27
- Application, 15
  - image, 128
  - linéaire, 127
    - nilpotente, 128
    - multilinéaire, 113
      - alternée, 114
    - noyau, 129
  - Application linéaire
    - matrice, 133
    - projection, 131
    - rang, 130
    - symétrie, 132
  - Arc cosinus, 77
  - Arc cotangente, 80
  - Arc sinus, 78
  - Arc tangente, 79
  - Argument cosinus hyperbolique, 84
  - Argument cotangente hyperbolique, 87
  - Argument sinus hyperbolique, 84
  - Argument tangente hyperbolique, 85
  - Assertion, 1
  - Base, 122
    - changement, 134
  - Bijection, 17
  - Cauchy-Schwarz, 96
  - Cercle, 24
  - Cercle trigonométrique, 30
  - Chasles, 21, 96
  - Coefficient binomial, 14
  - Cofacteur, 116
  - Comatrice, 116
  - Complémentaire, 7
  - Complexe
    - affixe, 43
    - segment, 44
    - vecteur, 44
    - angle, 44
    - argument, 39
    - conjugué, 38
    - exponentielle, 41
    - forme exponentielle, 41
    - forme trigonométrique, 39
    - linéariser, 42
    - module, 38
    - partie imaginaire, 37
    - partie réelle, 37
    - vecteur image, 43
  - Composante, 122
  - Congruence, 39
  - Conjonction, 2
  - Connecteur, 1
  - Continuité, 50
    - à droite, 50
    - à gauche, 50
    - par morceaux, 93
    - uniforme, 54
  - Contraposée, 2
  - Coordonnées
    - cartésiennes, 20
    - polaires, 26
  - Corollaire
    - inégalité des accroissements finis, 60
  - Cosinus, 75
  - Cosinus hyperbolique, 81
  - Cotangente, 76
  - Cotangente hyperbolique, 83
  - Cycle, 112
  - Décomposition
    - en éléments simples, 67
    - en polynômes irréductibles, 65
  - Dérivation
    - à droite, 55
    - à gauche, 55
    - composée, 57
    - d'ordre supérieur, 58
    - produit, 56
    - quotient, 57
    - réciproque, 57
    - somme, 56
  - Déterminant, 114
  - Développer, 13
  - Discriminant, 18
  - Disjonction, 2
  - Domaine de définition, 16
  - Droite
    - équation, 24
    - intersection, 24
  - Droite vectorielle, 123
  - Échelon, 88
  - Ellipse
    - foyer, 25
  - Endomorphisme, 127
    - diagonalisable, 139
    - polynôme
      - annulateur, 138, 139
      - spectre, 138
      - valeur propre, 137
      - vecteur propre, 137
  - Ensemble, 5
    - complémentaire, 7
    - différence, 8
      - symétrique, 8
    - disjonction, 7
    - égalité, 6
    - entiers naturels, 10
    - entiers relatifs, 10
    - inclusion, 6

- intersection, 6
  - nombres rationnels, 10
  - nombres réels, 10
  - partie, 6
  - produit, 9
  - réunion, 6
  - sous-ensemble, 6
  - vide, 6
  - Équation polynomiale, *voir aussi* Polynôme
  - Équivalence, 2
  - Espace vectoriel, 119
    - sous-espace vectoriel, 120
      - engendré, 120
      - somme, 124
      - somme directe, 124
      - supplémentaire, 124
    - dimension, 122
    - droite, 123
    - hyperplan, 123
    - isomorphe, 130
    - morphisme, 127
    - partie génératrice, 121
    - plan, 123
    - rang, 123
  - Euler, 41, 42, 81
  - Exponentielle, 70
  - Extremum, 47, 59
  - Factorielle, 14
  - Factoriser, 13
  - Famille
    - libre, 121
    - liée, 121
  - Fonction, 15
    - arc cosinus, 77
    - arc cotangente, 80
    - arc sinus, 78
    - arc tangente, 79
    - argument cosinus hyperbolique, 84
    - argument cotangente hyperbolique, 87
    - argument sinus hyperbolique, 84
    - argument tangente hyperbolique, 85
    - bijection, 17
    - bornée, 47
    - composition, 17
    - continuité, 50
      - à droite, 50
      - à gauche, 50
      - par morceaux, 93
      - uniforme, 54
    - cosinus, 75
    - cosinus hyperbolique, 81
    - cotangente, 76
    - cotangente hyperbolique, 83
    - croissante, 47
      - strictement, 47
    - de Heaviside, 88
    - décroissante, 47
      - strictement, 47
    - dérivable, 55
      - à droite, 55
      - à gauche, 55
    - domaine de définition, 16
    - échelon, 88
    - en escalier, 91
  - exponentielle, 70, 73
  - extremum, 47
  - impaire, 48
  - injection, 16
  - intégrale, 92–94
  - limite
    - à droite, 50
    - à gauche, 50
    - complexe, 54
  - lipschitzienne, 48
  - logarithme népérien, 72
  - logarithmique, 74
  - majorée, 47
  - maximum, 47
  - minimum, 47
  - minorée, 47
  - monotone, 47
    - strictement, 47
  - paire, 48
  - périodique, 48
  - polynomiale, 64
  - puissance, 74
  - rationnelle, 66
  - sinus, 75
  - sinus hyperbolique, 81
  - surjection, 16
  - tangente, 76
  - tangente hyperbolique, 82
- Foyer, 25
- Groupe abélien, 119
- Heaviside, 88
- Heine, 54, 97
- Hyperplan, 123
- Image, 105, 128
- Implication, 2
- Injection, 16
- Intégrale, 92–94
- Intérieur, 59
- Intersection
  - de deux droites, 24
- Leibniz, 58
- Limite, 48, 54
- Logarithme népérien, 72
- Matrice, 103
  - antisymétrique, 109
  - application linéaire, 133
  - carrée, 103
  - cofacteur, 116
  - colonne, 103, 132
  - comatrice, 116
  - déterminant, 114
  - diagonale, 103, 109
    - par blocs, 115
  - diagonalisable, 139
  - équivalente, 136
  - famille de vecteurs, 132
  - image, 105
  - inversible, 108
  - ligne, 103
  - mineur, 116
  - nilpotente, 106

noyau, 105  
 passage, 134  
 semblable, 136  
 symétrique, 109  
 trace, 104  
 transposée, 104  
 triangulaire  
     inférieure, 103  
     supérieure, 103, 109  
 Maximum, 47  
 Mineur, 116  
 Minimum, 47  
 Modulo, 39  
 Moivre, 40  
 Morgan (de), 8  
 Morphisme, 127  
     automorphisme, 127  
     endomorphisme, 127  
     isomorphisme, 127  
 Multilinéaire, 113  
 Négation, 1  
 Newton, 14, 42, 43  
 Norme, 21  
 Noyau, 105, 129  
 Orbite, 111  
 Ordonner, 13  
 Partie, 6  
 Partie génératrice, 121  
 Permutation, 111  
     circulaire, 112  
     cycle, 112  
     orbite, 111  
     signature, 113  
     transposition, 112  
 Plan vectoriel, 123  
 Polynôme, 64  
     degré, 64  
     racine, 64  
 Polynôme  
     annulateur, 138  
     caractéristique, 139  
 Prédicat, 3  
 Produit, 12, 22  
     scalaire, 22  
     vectoriel, 23  
 Projecteur, 131  
 Projection, 131  
 Puissance, 12  
 Pythagore, 23, 29, 33  
 Quantificateur  
     existentiel, 4  
     universel, 4  
 Racine, 64  
 Rang, 123, 130  
 Réduire, 13  
 Référentiel, 4  
 Relation de Chasles, 21, 96  
 Repère, 19  
     direct, 21  
     orthonormé, 21  
     orthonormé direct, 21  
 Riemann, 96, 97  
 Rolle, 60, 62  
 Signature, 113  
 Sinus, 75  
 Sinus hyperbolique, 81  
 Somme, 12, 21  
 Somme de Riemann, 96  
 Sous-ensemble, 6  
 Sous-espace vectoriel, 120  
     engendré, 120  
 Soustraction, 22  
 Spectre, 138  
 Subdivision, 91  
 Surjection, 16  
 Symétrie, 132  
 Synonyme, 3  
 Système linéaire, 101  
     compatible, 102  
     équivalent, 102  
     incompatible, 102  
     indéterminé, 102  
     opérations élémentaires, 102  
 Tangente, 76  
 Tangente hyperbolique, 82  
 Thalès, 27  
 Théorème  
     base incomplète, 123  
     inverse d'une matrice, 116  
     matrice inversible, 117  
     rang, 130  
 Théorème  
     de Caley-Hamilton, 140  
     de Heine, 54, 97  
     de Rolle, 60  
     des accroissements finis, 60–62  
     des valeurs intermédiaires, 52  
     formule de Leibniz, 58  
     formule de Moivre, 40  
     formule du binôme de Newton, 14  
     formules d'Euler, 41  
     inégalité de Cauchy-Schwarz, 96  
     inégalité des accroissements finis, 62  
     lois de de Morgan, 8  
 Trace, 104  
 Transposée, 104  
 Transposition, 112  
 Valeur propre, 137  
 Vecteur  
     colinéaire, 19  
     directeur d'une droite, 24  
     libre, 19  
     lié, 19  
     norme, 21  
     produit par un scalaire, 22  
     produit scalaire, 22  
     produit vectoriel, 23  
     somme, 21  
     soustraction, 22  
 Vecteur propre, 137  
 Voisinage, 48



## Bibliographie

- ALHAEL, Thierry, Florent ARNAL et Laurent CHANCOGNE (2011), *Mathématiques IUT 1re année*, Paris : Dunod, ISBN : 978-2-10-055620-5, <http://univ.scholarvox.com/reader/docid/88805314> (cf. p. 29, 39, 49, 57, 67, 75, 80, 95, 105, 115, 123, 131).
- AZOULAY, Élie, Jean AVIGNANT et Guy AULIAC (1996), *Mathématiques cours et exercices résolus 1re année*, 2<sup>e</sup> éd., t. 1, Paris : Édiscience international, ISBN : 2840741377 (cf. p. 1, 39, 49, 57, 67, 75, 80, 86, 123).
- FERRIGNO, Sandie, Aurélie MULLER-GUEUDIN et Didier MARX (2013), *Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur*, Tout le cours en fiches, Dunod, p. 576, ISBN : 978-2-10-057061-4, <http://univ.scholarvox.com/reader/docid/88815263> (cf. p. 1, 21, 39, 49, 57, 67, 95, 105, 115, 123, 131, 141).
- KONINCK DE, Jean-Marie et Norbert LACROIX (2004), *Introduction aux mathématiques de l'ingénieur*, Longueuil, Québec : Loze-Dion, ISBN : 978-2-921180-80-1, <http://univ.scholarvox.com/reader/docid/45006873> (cf. p. 39).
- LIRET, François et Dominique MARTINAIS (1997a), *Mathématiques pour le DEUG : Algèbre 1re année (cours et exercices avec solutions)*, Paris : Dunod, ISBN : 9782100031498 (cf. p. 1, 21, 39, 105, 115, 123, 131).
- (1997b), *Mathématiques pour le DEUG : Analyse 1re année (cours et exercices avec solutions)*, Paris : Dunod, ISBN : 9782100031511 (cf. p. 1, 49, 57, 67, 75, 80, 86, 95).
- PHILIPPIN, Gérard (2014), *Éléments de mathématiques appliquées*, Longueuil, Québec : Loze-Dion, p. 299, ISBN : 978-2-923565-59-0, <http://univ.scholarvox.com/reader/docid/88821910> (cf. p. 39).



# Table des matières

<b>Table des figures</b>	vii
<b>Liste des tableaux</b>	ix
Liste des définitions . . . . .	x
Liste des théorèmes . . . . .	xiii
<b>Présentation</b>	xv
<b>1 Rappels fondamentaux</b>	1
1 Assertions et connecteurs . . . . .	1
1.1 Assertions . . . . .	2
1.2 Connecteurs . . . . .	2
2 Quantificateurs . . . . .	4
3 Méthodes de raisonnement . . . . .	5
3.1 Raisonnement par implication . . . . .	5
3.2 Raisonnement par contraposée . . . . .	5
3.3 Raisonnement par l'absurde . . . . .	5
3.4 Raisonnement par récurrence . . . . .	5
3.5 Raisonnement par disjonction de cas . . . . .	5
4 Ensembles de nombres . . . . .	6
4.1 Définitions . . . . .	6
4.2 Opérations sur les ensembles . . . . .	6
4.3 Ensembles usuels . . . . .	9
5 Calcul dans $\mathbb{R}$ . . . . .	12
5.1 Opérations de base . . . . .	12
5.2 Propriétés . . . . .	12
5.3 Puissances et puissances de 10 . . . . .	13
6 Réduire, ordonner, développer, factoriser . . . . .	13
6.1 Réduire . . . . .	13
6.2 Ordonner . . . . .	14
6.3 Développer . . . . .	14
6.4 Factoriser . . . . .	14
7 Binôme de Newton . . . . .	14
8 Applications . . . . .	16
9 Équations polynomiales . . . . .	18
9.1 Résolution d'équation polynomiale d'ordre un . . . . .	19
9.2 Résolution d'équation polynomiale d'ordre deux . . . . .	19
<b>2 Géométrie</b>	21
1 Vecteurs . . . . .	21
2 Repérage dans le plan et dans l'espace . . . . .	21
3 Opérations vectorielles . . . . .	23
4 Équations d'éléments du plan . . . . .	26
4.1 Droites . . . . .	26
4.2 Cercles et ellipses . . . . .	27
5 Projection . . . . .	27
<b>3 Trigonométrie</b>	29
1 Conversion radians-degrés . . . . .	29
2 Définitions, lignes ou rapports trigonométriques . . . . .	30
3 Relations entre les rapports trigonométriques . . . . .	31

4	Angles complémentaires . . . . .	32
5	Cercle trigonométrique . . . . .	32
6	Angles supplémentaires . . . . .	33
7	Angles qui diffèrent de $\pi$ . . . . .	35
8	Angles qui diffèrent de $\pi/2$ . . . . .	35
9	Angles particuliers . . . . .	35
9.1	Angle nul . . . . .	35
9.2	Angles de $\pi/6$ et $\pi/3$ . . . . .	35
9.3	Angles de $\pi/4$ . . . . .	36
9.4	Angles de $\pi/2$ . . . . .	36
9.5	Angles de $\pi$ . . . . .	36
9.6	Tableau récapitulatif . . . . .	36
10	Formulaire de trigonométrie . . . . .	37
10.1	Liens entre les rapports . . . . .	37
10.2	Parité, symétries et périodicités . . . . .	37
10.3	Additions . . . . .	38
10.4	Angle double . . . . .	38
10.5	Factorisation et linéarisation . . . . .	38
10.6	Équations trigonométriques . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Nombres complexes</b> . . . . .	<b>39</b>
1	Introduction . . . . .	39
2	Propriétés de base . . . . .	39
2.1	Parties réelle et imaginaire . . . . .	40
2.2	Règles de calcul . . . . .	40
2.3	Conjugué . . . . .	40
3	Module . . . . .	40
4	Argument . . . . .	41
5	Égalité de deux nombres complexes . . . . .	43
6	Exponentielle complexe . . . . .	43
6.1	Définitions . . . . .	43
6.2	Application à la recherche de formules trigonométriques . . . . .	43
7	Représentation géométrique . . . . .	45
8	Racines énièmes d'un nombre complexe . . . . .	46
9	Résolution de l'équation du deuxième degré . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Fonctions d'une variable réelle</b> . . . . .	<b>49</b>
1	Définitions . . . . .	49
2	Limite et continuité . . . . .	50
2.1	Définitions . . . . .	50
2.2	Opérations sur les limites . . . . .	53
2.3	Propriétés des fonctions continues . . . . .	54
3	Compléments . . . . .	56
3.1	Continuité uniforme . . . . .	56
3.2	Extension aux fonctions à valeurs complexes . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Déivation</b> . . . . .	<b>57</b>
1	Notion d'application dérivable . . . . .	57
1.1	Définition . . . . .	57
1.2	Dérivée à gauche et à droite . . . . .	58
1.3	Dérivabilité et continuité . . . . .	58
2	Opérations sur les dérivées . . . . .	58
2.1	Somme . . . . .	58
2.2	Produit . . . . .	59
2.3	Composition . . . . .	59
2.4	Inverse, quotient . . . . .	59
2.5	Réciproque . . . . .	60
3	Dérivées d'ordres supérieurs . . . . .	60
3.1	Opérations sur les applications $\mathbb{C}^k$ . . . . .	61
4	Propriétés des fonctions dérivables sur un intervalle . . . . .	61

4.1	Extremum local . . . . .	62
4.2	Théorème de Rolle . . . . .	62
4.3	Théorème des accroissements finis . . . . .	62
4.4	Dérivée et sens de variation . . . . .	63
5	Extension aux applications à valeurs complexes . . . . .	64
5.1	Généralités . . . . .	64
5.2	Ce qui reste vrai . . . . .	64
5.3	Ce qui n'est plus vrai . . . . .	64
<b>7</b>	<b>Fonctions usuelles</b>	<b>67</b>
1	Étude de fonction . . . . .	67
2	Fonctions polynomiales et rationnelles . . . . .	69
2.1	Fonctions polynomiales . . . . .	69
2.2	Fonctions rationnelles . . . . .	71
3	Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances . . . . .	75
3.1	Fonction exponentielle . . . . .	75
3.2	Fonction logarithme népérien . . . . .	77
3.3	Fonctions exponentielles et logarithmes de base quelconque . . . . .	78
3.4	Croissances comparées . . . . .	79
4	Fonctions circulaires et réciproques . . . . .	80
4.1	Fonctions circulaires directes . . . . .	80
4.2	Fonctions circulaires réciproques . . . . .	82
5	Fonctions hyperboliques et réciproques . . . . .	86
5.1	Fonctions hyperboliques directes . . . . .	86
5.2	Fonctions hyperboliques réciproques . . . . .	89
6	Fonctions échelon, Dirac, rampe et crêteau . . . . .	93
6.1	Fonction échelon . . . . .	93
6.2	Fonction Dirac . . . . .	93
6.3	Fonction rampe . . . . .	94
6.4	Fonction crêteau . . . . .	94
<b>8</b>	<b>Intégration</b>	<b>95</b>
1	Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment . . . . .	95
1.1	Fonctions en escalier . . . . .	95
1.2	Approximation des fonctions continues . . . . .	97
2	Propriétés de l'intégrale . . . . .	98
2.1	Linéarité . . . . .	98
2.2	Majorations et encadrements . . . . .	99
2.3	Relation de Chasles . . . . .	100
2.4	Inégalité de Cauchy-Schwarz . . . . .	100
2.5	Somme de Riemann . . . . .	100
3	Intégrale fonction de la borne supérieure . . . . .	102
4	Extension aux applications à valeurs complexes . . . . .	104
<b>9</b>	<b>Matrices</b>	<b>105</b>
1	Systèmes linéaires . . . . .	105
1.1	Définitions . . . . .	105
1.2	Opérations sur les lignes . . . . .	106
1.3	Pivot de Gauss . . . . .	106
2	Définitions . . . . .	107
3	Opérations sur les matrices . . . . .	108
3.1	Trace . . . . .	108
3.2	Transposée . . . . .	108
3.3	Produit par un scalaire . . . . .	109
3.4	Somme de deux matrices . . . . .	109
3.5	Produit de deux matrices . . . . .	109
3.6	Extraction de ligne et de colonne . . . . .	110
3.7	Propriétés des opérations matricielles . . . . .	110
3.8	Puissance de matrice . . . . .	111
3.9	Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes . . . . .	111

3.10	Inverse d'une matrice . . . . .	112
4	Matrices remarquables . . . . .	113
4.1	Matrices symétriques et antisymétriques . . . . .	113
4.2	Matrices triangulaires . . . . .	113
4.3	Matrices diagonales . . . . .	114
<b>10</b>	<b>Déterminants</b>	<b>115</b>
1	Permutations . . . . .	115
1.1	Définition . . . . .	115
1.2	Permutations particulières . . . . .	116
1.3	Décomposition . . . . .	117
1.4	Signature . . . . .	117
2	Applications multilinéaires alternées . . . . .	118
2.1	Applications multilinéaires . . . . .	118
2.2	Application multilinéaires alternées . . . . .	118
3	Déterminants . . . . .	118
3.1	Définitions, propriétés . . . . .	119
4	Calcul pratique des déterminants . . . . .	119
4.1	Opérations sur les lignes et sur les colonnes . . . . .	119
4.2	Déterminants par blocs diagonaux . . . . .	120
4.3	Développement par rapport à une ligne ou à une colonne . . . . .	120
<b>11</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>123</b>
1	Généralités sur les espaces vectoriels . . . . .	123
1.1	Définition . . . . .	123
1.2	Sous-espaces vectoriels . . . . .	124
1.3	Sous-espace vectoriel engendré par une partie . . . . .	125
1.4	Dépendance linéaire . . . . .	125
1.5	Bases . . . . .	126
2	Dimension . . . . .	126
2.1	Dimension, base . . . . .	126
2.2	Théorème de la base incomplète . . . . .	127
2.3	Dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . .	127
2.4	Rang d'une famille de vecteurs . . . . .	128
3	Somme de sous-espaces vectoriels . . . . .	128
3.1	Somme de deux sous-espaces vectoriels . . . . .	128
3.2	Somme directe de deux sous-espace vectoriel . . . . .	128
3.3	Supplémentaires . . . . .	129
3.4	Cas de la dimension finie . . . . .	129
<b>12</b>	<b>Applications linéaires</b>	<b>131</b>
1	Définitions, exemples . . . . .	131
2	Image et noyau d'une application linéaire . . . . .	132
3	Isomorphismes . . . . .	133
4	Théorème du rang . . . . .	134
5	Projection et symétrie . . . . .	135
6	Écriture matricielle des applications linéaires . . . . .	136
6.1	Définitions . . . . .	136
6.2	Opérations sur les applications linéaires . . . . .	137
6.3	Changement de base . . . . .	138
<b>13</b>	<b>Réduction des endomorphismes</b>	<b>141</b>
1	Spectre d'un endomorphisme . . . . .	141
1.1	Définitions, exemples . . . . .	141
1.2	Caractérisation des valeurs propres . . . . .	142
1.3	Spectre et polynôme annulateur . . . . .	142
2	Matrices et endomorphismes diagonalisables . . . . .	143
2.1	Définitions . . . . .	143
2.2	Recherche du spectre . . . . .	143
3	Trigonalisation . . . . .	145

4	Applications . . . . .	145
4.1	Puissance d'une matrice . . . . .	145
<b>A</b>	<b>Alphabet grec</b>	<b>147</b>
<b>B</b>	<b>Puissances de dix</b>	<b>149</b>
<b>Index</b>		<b>151</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>155</b>