Repaso de Números Complejos

La Herramienta para la Fase Cuántica

Definición Formal de los Números Complejos

Formalmente, definimos el conjunto de los **números complejos**, $\mathbb{C}$, como el conjunto de pares ordenados $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ junto con dos operaciones especiales:

1. **Suma:**

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

2. **Producto:**

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

- **Ejemplo:** Sean los complejos $z_1 = (2, 3)$ y $z_2 = (4, 1)$.
  - **Suma:** $z_1 + z_2 = (2 + 4, 3 + 1) = (6, 4)$
  - **Producto:** $z_1 \cdot z_2 = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 1, 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4) = (8 - 3, 2 + 12) = (5, 14)$

El Plano $\mathbb{R}^2$ vs. El Cuerpo $\mathbb{C}$

El conjunto de pares ordenados (a, b) es nuestra base, pero puede ser visto de diferentes maneras dependiendo de la **estructura** (las reglas de operación) que le impongamos.

$\mathbb{R}^2$ como Espacio Vectorial Euclídeo (El Plano Cartesiano)

- **Elementos:** Los llamamos **puntos** o **vectores**.
- **Operaciones:** Suma de vectores y producto por un escalar **real**.
- **Estructura:** Espacio Vectorial. Podemos medir distancias y ángulos (norma y producto escalar usual), pero no podemos "multiplicar" dos vectores entre sí para obtener un tercer vector.

$\mathbb{C}$ como Cuerpo (El Plano Complejo)

- **Elementos:** Los llamamos **números complejos**.
- **Operaciones:** Suma (idéntica a la vectorial) y el **producto complejo** que definimos.
- **Estructura:** Cuerpo. ¡Esta es la gran diferencia! La existencia del producto complejo nos permite multiplicar **y dividir** cualquier par de números complejos no nulos.

> **La Diferencia Fundamental:** Lo que distingue a un número complejo (a, b) de un vector (a, b) es la existencia de la operación de **producto complejo**. Esta operación es la que le da a $\mathbb{C}$ su rica estructura de **cuerpo**.

De Pares Ordenados a la Forma Binomial

Para conectar esta definición con la notación usual, hacemos dos identificaciones clave:

1. Identificamos los pares de la forma $(a, 0)$ con el **número real** a.

> $(a, 0) \equiv a$

2. Le damos un nombre especial al par $(0, 1)$: la **unidad imaginaria** i.

> $(0, 1) \equiv i$

Ahora, observemos cómo podemos descomponer cualquier par ordenado (a, b):

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

Y el segundo término lo podemos escribir como un producto:

$$(0, b) = (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Juntando todo:

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1)$$

Usando nuestras identificaciones, llegamos a la forma familiar:

$$(a, b) = a + b \cdot i$$

Forma Binmial (o Binómica): $a + bi$

Un **número complejo** z se escribe generalmente en su **forma binomial**:

$$z = a + bi$$

Donde:

- a es la **parte real** de z, denotada $\mathrm{Re}(z)$.
- b es la **parte imaginaria** de z, denotada $\mathrm{Im}(z)$.
- a y b son ambos números reales.

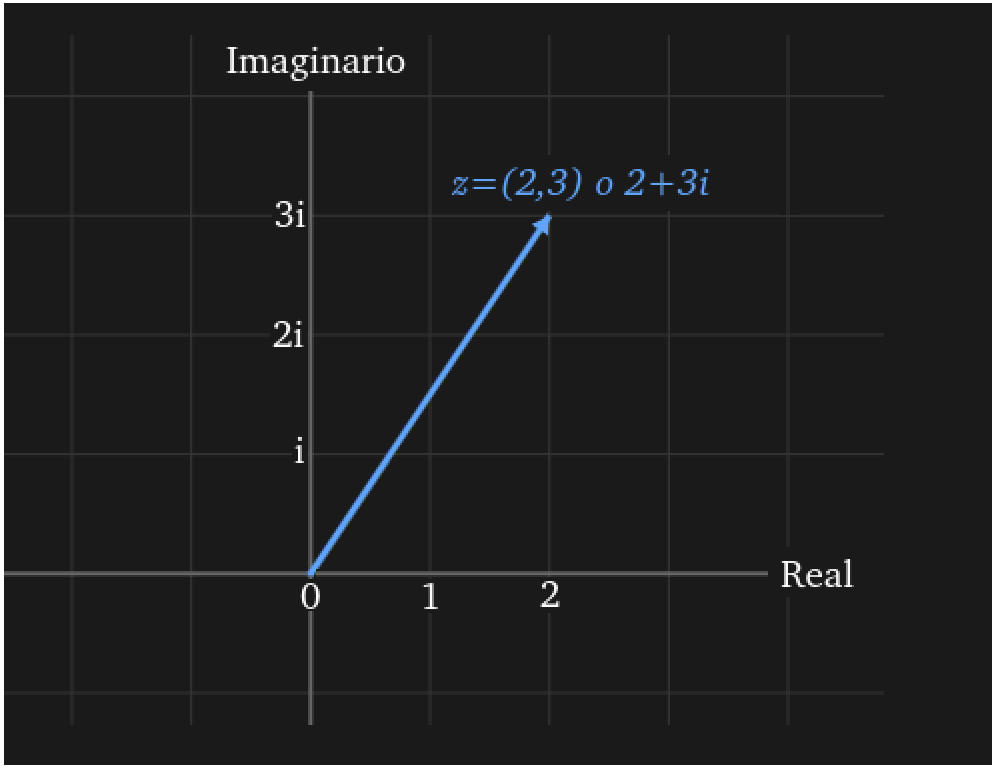
> Si $b = 0$, el número $z = a$ es un número real.
> Si $a = 0$, el número $z = bi$ se llama un imaginario puro.
>
> **Los números reales son un subconjunto de los números complejos**.

El Plano Complejo: Una Visión Geométrica

Nuestra definición de $\mathbb{C}$ como el conjunto de pares ordenados $\mathbb{R}^2$ nos da una forma natural de visualizar los números complejos.

Simplemente, representamos el número complejo $z = a + bi$ como el punto (a, b) en un plano cartesiano.

- El **eje horizontal** se llama **eje Real**.
- El **eje vertical** se llama **eje Imaginario**.



El Origen de $i^2 = -1$

Con nuestra definición formal, no necesitamos "creer" que $i^2 = -1$. Podemos **demostrarlo** usando la regla de multiplicación de pares ordenados.

Ejercicio

Demostrar que $i^2 = -1$

Solución. Demostración de $i^2 = -1$

Recordemos que $i \equiv (0, 1)$. Calculemos $i \cdot i$:

$$i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1)$$

Usamos la regla $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, con $a = 0, b = 1, c = 0, d = 1$:
Entonces $i \cdot i = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$
Y como habíamos identificado que los pares de la forma $(x, 0)$ se corresponden con el número real x, tenemos que:

$$(-1, 0) \equiv -1$$

Por lo tanto, hemos demostrado rigurosamente que $i^2 = -1$.

Aritmética en Forma Binomial

Ahora que entendemos su origen, podemos usar la forma $a + bi$ que es más cómoda para los cálculos, recordando siempre que $i^2 = -1$.

Suma y Resta: Se agrupan las partes reales y las partes imaginarias.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

- *Ejemplo:* $(3 + 2i) + (1 - 5i) = (3 + 1) + (2 - 5)i = 4 - 3i$.

Multiplicación: Se distribuye como un producto de binomios.

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- *Ejemplo:* $(3 + 2i)(1 - 5i) = 3 - 15i + 2i - 10i^2$
  $= 3 - 13i - 10(-1)$
  $= 3 - 13i + 10$
  $= 13 - 13i$

¿Es $i = \sqrt{-1}$? Una Precaución Necesaria

La identidad $i^2 = -1$ nos tienta a escribir $i = \sqrt{-1}$. Sin embargo, la regla de los radicales $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ **no siempre es válida** para números negativos.

La "Paradoja" (cuando la regla falla):

Consideremos el caso en que **ambos** números bajo la raíz son negativos:

$$-1 = i^2 = i \cdot i = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$$

> **¡Aquí está el error!** Aplicamos ciegamente la regla:
>
> $$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \stackrel{?}{=} \sqrt{(-1) \cdot (-1)}$$

Seguimos calculando $\sqrt{(-1) \cdot (-1)} = \sqrt{1} = 1$

Y llegamos al absurdo: $-1 = 1$.

La Explicación y el Camino Seguro

El error es suponer que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$ siempre funciona.

- Esta regla **falla** si $a < 0$ y $b < 0$.
- **Funciona** si al menos uno de los dos, a o b, es no negativo.

¿Cómo operar de forma segura?

> **El Camino Seguro:**
>
> 1. La definición fundamental es $i^2 = -1$. Esta es la única verdad que necesitamos.
> 2. Para encontrar $\sqrt{-x}$ (con $x > 0$), no separamos la raíz. Buscamos un número que al cuadrado dé $-x$. La solución es $\sqrt{x} \cdot i$, porque:
>
> $$(\sqrt{x} \cdot i)^2 = (\sqrt{x})^2 \cdot i^2 = x \cdot (-1) = -x$$
>
> 3. Por lo tanto, la forma correcta de proceder es sacar primero la parte imaginaria: $\sqrt{-4} \to \sqrt{4} \cdot i = 2i$.

El Conjugado Complejo

Una de las operaciones más importantes es la **conjugación**.

Conjugado Complejo *(Def.)*
Dado un número complejo $z = a + bi$, su **conjugado**, denotado z^*, se obtiene cambiando el signo de su parte imaginaria:

$$z^* = a - bi$$

En forma de par ordenado: Si $z = (a, b)$, entonces $z^* = (a, -b)$.

- **Ejemplo 1:** Si $z = 3 + 2i$, entonces $z^* = 3 - 2i$.
- **Ejemplo 2:** Si $z = -4i$, entonces $z^* = 4i$.

> **Conexión Cuántica:** El conjugado es la operación matemática que nos permitirá pasar de un "ket" $|\psi\rangle$ a un "bra" $\langle\psi|$, y es fundamental para calcular probabilidades.

Para pensar

Si z_1 y $z_2 \in \mathbb{C}$,

1. ¿Cómo será el conjugado de $(z_1 + z_2)$?
2. ¿Y el conjugado de $(z_1 z_2)$?

Propiedades Útiles de la Conjugación

El conjugado tiene un comportamiento predecible y muy útil con las operaciones aritméticas. Para cualesquiera números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

1. **Conjugado de una Suma:** El conjugado de una suma es la suma de los conjugados.

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

2. **Conjugado de un Producto:** El conjugado de un producto es el producto de los conjugados.

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

3. **Doble Conjugación:** Conjugar dos veces nos devuelve al número original.

$$(z^*)^* = z$$

4. **Conjugado de un Real:** El conjugado de un número real es el propio número.

Módulo: El "Tamaño" de un Número Complejo

El **módulo** o **valor absoluto** de un número complejo nos da su "tamaño" o "longitud".

Módulo *(Def.)*
El módulo de $z = a + bi$, denotado $|z|$, es la distancia desde el origen hasta el punto (a, b) en el plano. Por Pitágoras:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- **Ejemplo:** Si $z = 3 - 4i$, entonces $|z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Ejercicio

Sea $z = a + bi$,

1. ¿Que obtenemos si multiplicamos z por su conjugado $(z \cdot z^*)$?

La Propiedad Más Importante

Ahora combinamos las dos últimas ideas (conjugado y módulo) en la identidad más útil para la computación cuántica.

Consideremos el producto de un número por su conjugado:

$$z \cdot z^* = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (abi) + (abi) - (bi)^2$$
$$z \cdot z^* = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$$

Pero, por definición, $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$.

> **Por lo tanto:** $|z|^2 = z \cdot z^*$

Aplicación a la Computación Cuántica:

$|z|^2 = z \cdot z^*$ es la base de la **regla de Born** que veremos más adelante. Cuando tengamos una amplitud de probabilidad $\alpha \in \mathbb{C}$, la probabilidad asociada será $|\alpha|^2$. Por convención, y para ser consistentes con la notación que veremos más adelante, y debido a que la multiplicación es conmutativa en $\mathbb{C}$ calcularemos esto como:

$$\text{Probabilidad} = |\alpha|^2 = \alpha^* \cdot \alpha$$

Módulo vs. Norma: Una Distinción Fundamental

Es fácil confundir estos dos conceptos, y es vital entender su diferencia. Aunque sus fórmulas a veces se parecen, operan en "mundos" distintos: el mundo de los **escalares** y el mundo de los **vectores**.

- **Módulo (de un escalar complejo)**
  - **¿Sobre qué actúa?** Sobre un **escalar** del cuerpo K. En nuestro caso, sobre un número $z \in \mathbb{C}$.
  - **¿Qué es?** Es una función que va de $\mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
  - **Fórmula:** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (con $z = a + bi$).
  - **Propósito:** Mide el "tamaño", la "magnitud" de un número (escalar) complejo.
- **Norma (de un vector)**
  - **¿Sobre qué actúa?** Sobre un **vector** del espacio vectorial V.
  - **¿Qué es?** Es una función que va de $V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
  - **Fórmula:** $||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
  - **Propósito:** Mide la "longitud" de un vector.

La Diferencia Clave:

En computación cuántica, el **módulo** lo aplicaremos a los escalares que componen un vector de estado (las amplitudes complejas α, β de un qubit, representado por un vector de estado).

La **norma** la aplicaremos al vector de estado completo, por ejemplo al vector columna $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Ejercicios: Operaciones Básicas

Sean los números complejos:

$z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 1 - i$

Instrucción:

Calcula lo siguiente:

1. $z_1 + z_2$
2. $z_1 \cdot z_2$
3. El conjugado de z_1, es decir, z_1^*.
4. El módulo de z_1, es decir, $|z_1|$.
5. El producto $z_1 \cdot z_1^*$ y verifica que es igual a $|z_1|^2$.

Solución: Operaciones Básicas

$z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 1 - i$.

1. **Suma:**
   $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - i) = (2 + 1) + (3 - 1)i = 3 + 2i$.

2. **Multiplicación:**
   $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i - 3(-1) = 2 + i + 3 = 5 + i$.

3. **Conjugado:**
   $z_1^* = (2 + 3i)^* = 2 - 3i$.

4. **Módulo:**
   $|z_1| = |2 + 3i| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$.

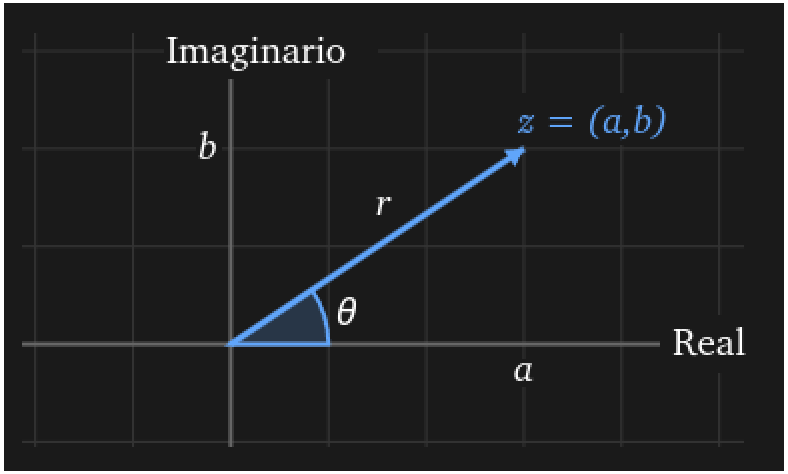
5. **Verificación de la Identidad de Oro:**
   $z_1 \cdot z_1^* = (2 + 3i)(2 - 3i) = 2^2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 - 9(-1) = 4 + 9 = 13$.
   $|z_1|^2 = (\sqrt{13})^2 = 13$.
   ¡Se cumple la identidad! ✅

De Coordenadas Cartesianas a Polares

Hasta ahora, describimos un punto en el plano complejo con sus coordenadas cartesianas (a, b).

Pero hay otra forma igualmente válida y muy poderosa: usar **coordenadas polares**.

- r: La distancia desde el origen al punto.
- θ **(theta)**: El ángulo que forma el vector con el eje Real positivo.



- El radio r es simplemente el **módulo** de z: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- El ángulo θ se llama el **argumento** de z.

Forma Polar

Usando trigonometría básica, vemos que:

$a = r\cos(\theta)$

$b = r\sin(\theta)$

Sustituyendo esto en la forma binomial $z = a + bi$:

$z = r\cos(\theta) + i(r\sin(\theta))$

Forma polar

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

La Fórmula de Euler

Ahora, introducimos una de las ecuaciones más bellas y poderosas de las matemáticas.

> **La Fórmula de Euler**
>
> Presentada como una definición, esta fórmula conecta la exponencial con la trigonometría:
>
> $$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Esto nos permite escribir la forma polar de una manera increíblemente compacta.

Forma Exponencial

Gracias a la fórmula de Euler, podemos expresar cualquier número complejo z en su forma exponencial:

Forma exponencial

$$z = re^{i\theta}$$

Donde $r = |z|$ y θ es su argumento o fase.

Ejercicio

Expresar en forma exponencial los siguientes números complejos:

1. i
2. -1

Solución al Ejercicio

1. **El número i.**
   - En forma cartesiana: $(0,1)$.
   - Módulo $r = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.
   - Argumento (o fase) $\theta = 90^\circ$ o $\pi/2$ radianes.
   - **Forma exponencial: $i = 1 \cdot e^{i\pi/2}$.**
2. **El número -1.**
   - En forma cartesiana: $(-1,0)$.
   - Módulo $r = |-1| = 1$.
   - Argumento (o fase) $\theta = 180^\circ$ o π radianes.
   - **Forma exponencial: $-1 = 1 \cdot e^{i\pi}$.**

La Potencia de la Forma Exponencial

Esta forma no es solo compacta, sino que simplifica enormemente la multiplicación.

Si tenemos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, su producto es:

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{i\theta_1}) \cdot (r_2 e^{i\theta_2}) = (r_1 r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

> **Interpretación Geométrica de la Multiplicación:**
>
> Para multiplicar dos números complejos:
>
> 1. **Se multiplican sus módulos** (se escala la longitud).
> 2. **Se suman sus argumentos** (se rota el ángulo).

Multiplicar por un complejo $z = re^{i\theta}$ es una operación de **escalar por r y rotar por θ**.

Abrir Aplicación Interactiva

Ejercicio: Conversión y Multiplicación

Sea el número complejo $z = 1 + i$.

Instrucción:

1. Encuentra su módulo r y su argumento θ.
2. Escribe z en su forma exponencial $re^{i\theta}$.
3. Calcula z^2 usando:
   a) La forma binomial $(1 + i)(1 + i)$.
   b) La forma exponencial.

Comprueba que ambos métodos dan el mismo resultado.

Solución: Conversión y Multiplicación

1. Módulo y Argumento de $z = 1 + i$:

- Módulo: $r = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
- Argumento: El punto $(1, 1)$ forma un ángulo de 45° o $\pi/4$ radianes con el eje real. $\theta = \pi/4$.

2. Forma Exponencial:

$$z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

3. Cálculo de z^2:

a) Método Binomial:
$z^2 = (1 + i)(1 + i) = 1 + i + i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.

b) Método Exponencial:
$z^2 = (\sqrt{2}e^{i\pi/4})^2 = (\sqrt{2})^2 \cdot (e^{i\pi/4})^2 = 2 \cdot e^{i(2\cdot\pi/4)} = 2e^{i\pi/2}$.
Recordando que $e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = 0 + i \cdot 1 = i$.
Entonces, $z^2 = 2i$.

Ambos resultados coinciden. ✅

Conexión Cuántica: La Importancia de la Fase

La forma exponencial $z = re^{i\theta}$ es clave para entender el concepto de **fase**, que es fundamental en la mecánica cuántica.

Más adelante, representaremos los estados cuánticos con vectores en $\mathbb{C}^{2^n}$ (sistema de n qubits). Veamos un ejemplo para $n = 1$. Sea $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, la fase de estos números complejos jugará dos roles distintos:

1. **Fase Global:** Si multiplicamos todo el vector por un factor de fase, como $e^{i\gamma} \cdot v = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} z_1 \\ e^{i\gamma} z_2 \end{pmatrix}$, este factor "global" no afectará a las probabilidades de medición.
2. **Fase Relativa:** Sin embargo, la **diferencia de fase** entre las componentes del propio vector, como el ángulo entre z_1 y z_2, es crucial.

   Por ejemplo, los vectores $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ tienen distintas fases relativas y se comportarán de forma muy diferente en un sistema cuántico.

> **Conclusión:** La forma exponencial será nuestra herramienta principal para manejar estas fases. La **fase relativa** entre las componentes de un vector de estado es la que da lugar a la **interferencia cuántica**, el fenómeno que impulsa muchos algoritmos cuánticos.

Espacios de Hilbert

Uniendo el Álgebra Lineal y los Números Complejos

El Escenario Cuántico: Espacios de Hilbert

Ya estamos listos para nombrar formalmente nuestro escenario.

Espacio de Hilbert *(Def. simplificada)*
Un **Espacio de Hilbert** es un espacio vectorial (generalmente sobre los números complejos $\mathbb{C}$) que está dotado de un producto interior.
(Nota: La definición completa requiere una propiedad extra llamada "completitud", pero para especios de dimensiones finitas, como en el caso de la Cumputación Cuántica, no debemos preocuparnos por ella).

> **Importante: El estado de un sistema cuántico es un vector en un Espacio de Hilbert.**

Resumen del Camino Recorrido

En nuestras clases anteriores hemos construido dos pilares fundamentales:

- **Álgebra Lineal sobre $\mathbb{R}$:**
    - Definimos **Espacios Vectoriales** con sus reglas.
    - Introdujimos el **Producto Interior** para medir ángulos y distancias.
    - Vimos que en $\mathbb{R}$, el producto interior es simétrico y lineal.
- **Números Complejos ($\mathbb{C}$):**
    - Entendimos su estructura, el conjugado (z^*) y el módulo ($|z|$).
    - Vimos que son necesarios para describir la **fase**.
- Ahora, uniremos estos dos pilares para construir el lenguaje matemático de la computación cuántica.

El Desafío de los Espacios Complejos

El siguiente paso lógico es definir un espacio vectorial donde los escalares no son reales, sino **complejos**.

Pregunta: ¿Podemos usar la misma definición de producto interior que vimos para los espacios reales ('producto punto' o 'producto escalar')?

- **Respuesta:** No directamente. Si lo hiciéramos, la "longitud al cuadrado" de un vector, $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$, podría ser un número complejo, ¡y eso no tiene sentido físico!
- Necesitamos **ajustar las reglas** del producto interior para que la norma siempre sea un número real no negativo.

Una Notación más Conveniente: Notación de Dirac

Existen diversas notaciones para indicar que una variable v es un vector, como $\vec{v}$, $\mathbf{v}$, etc. En computación cuántica, la notación más común es la de Dirac: $|v\rangle$. Una secuencia de vectores se denota como $|v_0\rangle$, $|v_1\rangle$, $|v_2\rangle$, y así sucesivamente.

Además, $|v\rangle$ es un vector columna.

La notación fue creada por el físico Paul Dirac, y es el estándar universal en mecánica cuántica y simplifica enormemente los cálculos.

1. Ket - $|\psi\rangle$

- Un **ket** es simplemente un **vector columna**. Representa el estado de un sistema cuántico.
- Ejemplo: El vector $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ se escribe como un ket $|\psi\rangle$.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

El Dual del Ket: Bra

2. Bra - $\langle\psi|$

- Para cada ket $|\psi\rangle$, existe un objeto correspondiente llamado **bra**, denotado $\langle\psi|$.
- El bra es el **vector fila conjugado y traspuesto** del ket. Esta operación se llama **daga** (†) o **"adjunto hermitiano"**.

$$\langle\psi| = (|\psi\rangle)^\dagger$$

- **Ejemplo:** Si $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces su bra correspondiente es:

$$\langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix}$$

Propiedades del Adjunto Hermitiano (†)

La operación daga (†) tiene dos reglas fundamentales que debemos conocer para manejar combinaciones lineales de vectores. Sean $|v\rangle, |w\rangle$ kets y $k \in \mathbb{C}$ un escalar.

1. Aditividad: La daga de una suma es la suma de las dagas.

$$(|v\rangle + |w\rangle)^\dagger = (|v\rangle)^\dagger + (|w\rangle)^\dagger = \langle v| + \langle w|$$

2. Interacción con Escalares:

$$(k|v\rangle)^\dagger = k^*\langle v|$$

> Al aplicar la daga, el escalar "sale fuera" pero se **conjuga**, y el ket se convierte en su bra.

> **Aplicando ambas reglas a una combinación lineal arbitraria:**
> Podemos encontrar el bra de cualquier superposición. Por ejemplo:
>
> $$(c_1|v_1\rangle + c_2|v_2\rangle)^\dagger = (c_1|v_1\rangle)^\dagger + (c_2|v_2\rangle)^\dagger$$
> $$= c_1^*\langle v_1| + c_2^*\langle v_2|$$

Ejercicio: Del Ket al Bra

Encuentra el **bra** correspondiente para los siguientes **kets**:

a) $|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 2-3i \\ 5i \end{pmatrix}$

b) $|v_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ (¡un estado cuántico real!)

Instrucción:

Recuerda los dos pasos para pasar de ket a bra:

1. **Conjugar** cada componente del vector.
2. **Trasponer** el vector columna a un vector fila.

Solución: Del Ket al Bra

a) $|v_1\rangle = \begin{pmatrix} 2-3i \\ 5i \end{pmatrix}$

1. **Conjugar:** Las componentes conjugadas son $(2-3i)^* = 2+3i$ y $(5i)^* = -5i$.
2. **Trasponer:** Ponemos estos resultados en una fila.

$$\langle v_1| = \begin{pmatrix} 2+3i & -5i \end{pmatrix}$$

b) $|v_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

1. **Conjugar:** Como los componentes son números reales, el conjugado no los altera. Siguen siendo $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
2. **Trasponer:**

$$\langle v_2| = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

El Producto Interior: La Fusión de Bra y Ket

Sean los vectores $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ y $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

El producto interior se **define** como la **multiplicación matricial** del bra $\langle\phi|$ por el ket $|\psi\rangle$:

$$\langle\phi| \cdot |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_1^* & \phi_2^* & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \phi_1^*\psi_1 + \phi_2^*\psi_2 + \ldots$$

La Notación Ingeniosa: Paul Dirac se dio cuenta de que la notación para esta operación podía simplificarse. En lugar de escribir el bra y el ket como dos entidades separadas, los "fusionó" en uno solo.

Al multiplicar el bra $\langle\phi|$ por el ket $|\psi\rangle$ nos queda la expresión:

$$\langle\phi||\psi\rangle$$

Las dos barras verticales en el medio son redundantes. Eliminando una, se forma un "sándwich" perfecto:

$$\langle\phi|\psi\rangle$$

> **En resumen:** La expresión $\langle\phi|\psi\rangle$ es la **notación abreviada** para la operación de multiplicación matricial $\langle\phi| \cdot |\psi\rangle$. La genialidad de Dirac fue crear una notación que no solo nombra el resultado, sino que **muestra visualmente su construcción**: un bra y un ket que se unen para formar un "bracket".

En inglés, un **"bracket"** es un par de símbolos de puntuación que se usan para encerrar o agrupar algo. Es un término general para:

- Paréntesis: ( )
- Corchetes: [ ]
- Llaves: { }
- Y, lo más importante para nosotros, los corchetes angulares: < >

Ejemplo explícito de un producto interior en $\mathbb{C}^2$:

Sean $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Entonces $\langle\phi| = \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix}$. El producto interior es:

$$\langle\phi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = a^*c + b^*d$$

El resultado es un **escalar complejo**.

Recordando la Norma de un Vector

En nuestra clase sobre espacios vectoriales, definimos un concepto fundamental: la **norma inducida** a partir del producto interior, que nos daba la "longitud" de un vector.

Definición de Norma (Recordatorio):

Dado un espacio vectorial con producto interior, la norma de un vector $|v\rangle$ se define como:

$$||v|| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$$

Esta definición es completamente general y la adoptaremos directamente para nuestros nuevos Espacios de Hilbert.

Producto Interior Complejo: Propiedades

Al pasar de escalares reales a complejos, la definición del producto interior se ha ajustado para mantener una noción coherente de "longitud" (la norma). Veamos las propiedades de este producto interior en espacios complejos.

Para $|\phi\rangle, |\psi\rangle, |\chi\rangle \in V$ y $k \in \mathbb{C}$:

1. **Simetría Conjugada:** El orden ahora importa, introduciendo un conjugado.

$$\langle \phi | \psi \rangle = (\langle \psi | \phi \rangle)^*$$

   - *Diferencia clave: Ya no es simétrico como en el caso real.*

2. **Linealidad (en el Ket):** Se comporta de forma lineal en el **segundo** argumento.

$$\langle \phi | \psi + \chi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle + \langle \phi | \chi \rangle \quad \text{y} \quad \langle \phi | k\psi \rangle = k \langle \phi | \psi \rangle$$

3. **Anti-Linealidad (en el Bra):** Es "casi" lineal en el **primer** argumento, pero el escalar sale **conjugado**.

$$\langle \phi + \chi | \psi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle + \langle \chi | \psi \rangle \quad \mathbf{y} \quad \langle \boldsymbol{k\phi} | \psi \rangle = \boldsymbol{k^*} \langle \phi | \psi \rangle$$

   - *Diferencia clave: En el caso real, era lineal en ambos argumento.*

> **NOTA:**
> El producto interior complejo es **lineal** en el segundo argumento (el ket) y **conjugado-lineal** en el primer argumento (el bra).

4. **Definida Positiva:** Esta propiedad se mantiene intacta. ¡Es el objetivo!
   - $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$ (el resultado es un número real no negativo).
   - $\langle \psi | \psi \rangle = 0 \iff |\psi\rangle = \vec{0}$.

Resumen: ¿Por Qué los Cambios?

> El producto interior en espacios de Hilbert se ha definido para que la **norma** (longitud) de un vector, definida como $||\psi|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$, sea siempre un **número real y positivo**.

La **Simetría conjugada** $\langle\phi|\psi\rangle = (\langle\psi|\phi\rangle)^*$ asegura que $\langle\psi|\psi\rangle$ sea igual a $(\langle\psi|\psi\rangle)^*$ y por lo tanto que $\langle\psi|\psi\rangle$ sea real, ya que un número complejo es real si es igual a su propio conjugado (la parte imaginaria debe ser 0).

Ejercicios: Demostrar las propiedades del producto interior complejo.

Sean los kets: $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Ejercicio 1. Demostrar la simetría Conjugada: $\langle\phi|\psi\rangle = (\langle\psi|\phi\rangle)^*$

- **Demostración:**
  Por un lado: $\langle\phi|\psi\rangle = a^*c + b^*d$.
  Por otro lado: $\langle\psi|\phi\rangle = c^*a + d^*b$.
  Ahora tomemos el conjugado de $\langle\psi|\phi\rangle$:
  $(\langle\psi|\phi\rangle)^* = (c^*a + d^*b)^*$
  $= (c^*a)^* + (d^*b)^*$ (usando conjugado de una suma)
  $= (c^*)^*a^* + (d^*)^*b^*$ (usando conjugado de un producto)
  $= c \cdot a^* + d \cdot b^*$ (usando doble conjugación)
  $= a^*c + b^*d = \langle\phi|\psi\rangle$.

  Hemos demostrado que $\langle\phi|\psi\rangle = (\langle\psi|\phi\rangle)^*$.

Sean los kets $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ y un escalar $k \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 2. Demostrar la Linealidad en el segundo argumento (en el Ket):

- **Aditividad:** $\langle\phi|\psi + \chi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle + \langle\phi|\chi\rangle$
  - **Demostración:**
    $|\psi + \chi\rangle = \begin{pmatrix} c+e \\ d+f \end{pmatrix}$.
    $\langle\phi|\psi + \chi\rangle = a^*(c+e) + b^*(d+f)$
    $= a^*c + a^*e + b^*d + b^*f$
    $= (a^*c + b^*d) + (a^*e + b^*f) = \langle\phi|\psi\rangle + \langle\phi|\chi\rangle$. ✅

- **Homogeneidad:** $\langle\phi|k\psi\rangle = k\langle\phi|\psi\rangle$
  - **Demostración:**
    $|k\psi\rangle = \begin{pmatrix} kc \\ kd \end{pmatrix}$.
    $\langle\phi|k\psi\rangle = a^*(kc) + b^*(kd)$
    $= k(a^*c) + k(b^*d) = k(a^*c + b^*d) = k\langle\phi|\psi\rangle$. ✅

Sean los kets $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ y un escalar $k \in \mathbb{C}$.

Ejercicio 3. Demostrar la antilinealidad en el primer argumento (en el Bra):

- **Aditividad:** Se puede demostrar (de forma similar al caso del ket) que también es aditivo en el bra: $\langle \phi + \chi|\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle + \langle\chi|\psi\rangle$.
- **Demostrar esta propiedad de Homogeneidad:** $\langle k\phi|\psi\rangle = k^*\langle\phi|\psi\rangle$
  - **Demostración**
    $|k\phi\rangle = \begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$, entonces $\langle k\phi| = ((ka)^* \quad (kb)^*) = (k^*a^* \quad k^*b^*)$.
    $\langle k\phi|\psi\rangle = (k^*a^*)c + (k^*b^*)d$
    $= k^*(a^*c) + k^*(b^*d) = k^*(a^*c + b^*d) = k^*\langle\phi|\psi\rangle$. ✅

Sean el ket $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ y el vector nulo $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4. Demostrar la propiedad Definida Positiva:

Esta propiedad tiene dos partes:

a) $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$.

b) $\langle\psi|\psi\rangle = 0 \iff |\psi\rangle = \vec{0}$.

- **Demostración de a) $\langle\psi|\psi\rangle \geq 0$:**

  Calculamos el producto interior de $|\psi\rangle$ consigo mismo:

  $\langle\psi|\psi\rangle = (c^* \quad d^*) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = c^*c + d^*d$.

  Recordemos que para cualquier número complejo z, $z^*z = |z|^2$ (el módulo al cuadrado), que es siempre un número **real no negativo**.

  Por lo tanto:

  $\langle\psi|\psi\rangle = |c|^2 + |d|^2$.

  Como $|c|^2 \geq 0$ y $|d|^2 \geq 0$, su suma también debe ser ≥ 0. ✅

Sean el ket $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ y el vector nulo $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- **Demostración de b) $\langle\psi|\psi\rangle = 0 \iff |\psi\rangle = \vec{0}$:**
  - **Dirección ($\Rightarrow$):** Si $\langle\psi|\psi\rangle = 0$, entonces $|c|^2 + |d|^2 = 0$.
    Como $|c|^2$ y $|d|^2$ son números reales no negativos, la única forma de que su suma sea cero es que ambos sean cero: $|c|^2 = 0$ y $|d|^2 = 0$.
    Esto implica que $c = 0$ y $d = 0$. Por lo tanto, $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$. ✅
  - **Dirección ($\Leftarrow$):** Si $|\psi\rangle = \vec{0}$, entonces $c = 0$ y $d = 0$.
    $\langle\psi|\psi\rangle = |0|^2 + |0|^2 = 0 + 0 = 0$. ✅

El Producto Interior Complejo: Cuestión de Convención

Al estudiar álgebra lineal en diferentes contextos (matemáticas puras, física, ingeniería), es común encontrar dos convenciones para definir el producto interior en espacios vectoriales complejos. Ambas son válidas, pero difieren en dónde aplican la linealidad y la conjugación:

1. Convención de Matemáticas Puras:

- **Linealidad en el primer argumento:** $\langle c\phi|\psi\rangle = c\langle\phi|\psi\rangle$
- **Conjugado-linealidad en el segundo argumento:** $\langle\phi|c\psi\rangle = c^*\langle\phi|\psi\rangle$

2. Convención de Física y Computación Cuántica (La que usaremos):

- **Conjugado-linealidad en el primer argumento:** $\langle c\phi|\psi\rangle = c^*\langle\phi|\psi\rangle$
- **Linealidad en el segundo argumento:** $\langle\phi|c\psi\rangle = c\langle\phi|\psi\rangle$

> **Advertencia:**
> Si consultan libros de álgebra lineal pura, podrían encontrar las reglas invertidas. Para alinearnos con Qiskit y la notación de Dirac, usaremos siempre la **Convención de Física/Computación Cuántica**.

Geometría del Producto Interior: Un Paso Atrás

Recordemos por un momento nuestro trabajo en espacios reales como $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Allí descubrimos una poderosa conexión entre el álgebra y la geometría.

La Fórmula del Ángulo en $\mathbb{R}^n$:

> Para dos vectores reales u y v, el producto escalar se relaciona con el ángulo θ entre ellos:
>
> $$\langle u, v \rangle = ||u|| \, ||v|| \cos(\theta)$$

Esta fórmula nos dio una intuición concreta:

- **Longitud:** $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$
- **Ortogonalidad:** Si $\langle u, v \rangle = 0$, entonces $\cos(\theta) = 0$, lo que significa que los vectores son perpendiculares ($\theta = 90^\circ$).

Ahora, la gran pregunta es: ¿cómo se traducen estas ideas geométricas a los espacios complejos?

La Generalización a Espacios Complejos

En un espacio complejo como $\mathbb{C}^n$, el resultado de $\langle u|v\rangle$ es un número complejo, por lo que ya no podemos hablar de un simple "ángulo θ". Sin embargo, ¡la intuición geométrica no se pierde! Se generaliza.

De la Igualdad a la Desigualdad:
La propiedad $|\cos(\theta)| \leq 1$ en los reales nos llevaba a que $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$. Esta idea **sí sobrevive** a la transición a los complejos. Se convierte en un pilar fundamental conocido como la **Desigualdad de Cauchy-Schwarz**.

> **La Desigualdad de Cauchy-Schwarz:**
> Para **cualesquiera** dos vectores $|u\rangle$ y $|v\rangle$ en un Espacio de Hilbert, se cumple:
>
> $$|\langle u|v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

> **"¡La desigualdad de Cauchy-Schwarz es la generalización de la idea de ángulo para espacios complejos donde no podemos 'visualizar' un ángulo θ tan fácilmente!"**

Interpretación: El Producto Interior como Proyección Compleja

El producto interior $\langle\phi|\psi\rangle$ mide la "proyección con fase" de $|\psi\rangle$ sobre $|\phi\rangle$. El número complejo resultante nos da dos datos clave:

1. **Módulo** $|\langle\phi|\psi\rangle|$: La **magnitud** de la proyección. Nos dice "cuánto se alinean" los kets. Un valor de $||\phi|| \cdot ||\psi||$ significa colinealidad; 0 significa ortogonalidad.

2. **Fase** $\arg(\langle\phi|\psi\rangle)$: La fase resultante de la **interferencia** entre las componentes correspondientes de $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$. Mide su alineación de fase combinada.

Ejemplo para aislar la idea de fase:

- Sea el ket $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- Sea el ket con fase $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} e^{i\pi/2} \\ 0 \end{pmatrix}$.
- El producto interior es: $\langle\phi|\psi\rangle = e^{i\pi/2} = i$.

Análisis del resultado (i):

- **Módulo:** $|i| = 1$. (Los kets están perfectamente alineados en magnitud).
- **Fase:** $\arg(i) = \pi/2$. (En este caso simple, la fase del resultado es la diferencia de fase entre las únicas componentes no nulas).

> El producto interior es la herramienta que calcula **amplitudes de probabilidad**. La fase de esta amplitud es el resultado de la **interferencia constructiva o destructiva** entre las diferentes componentes del sistema, y es la clave del poder cuántico.

Ortogonalidad: De la Perpendicularidad a la Distinción

La idea de ortogonalidad también se generaliza.

- **En $\mathbb{R}^n$:** $\langle v, w \rangle = 0$ significaba que los vectores eran geométricamente perpendiculares.
- **En $\mathbb{C}^n$:** Mantenemos la misma definición algebraica:

  > Dos estados $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ son **ortogonales** si $\langle \psi | \phi \rangle = 0$.

Pero su significado se vuelve más abstracto y poderoso:

> En mecánica cuántica, si dos estados son ortogonales, son **perfectamente distinguibles**. Si un sistema está en el estado $|\psi\rangle$, la probabilidad de medirlo en un estado ortogonal $|\phi\rangle$ es **cero**.

El Qubit: Nuestro Primer Actor

Ahora podemos presentar formalmente al protagonista de la computación cuántica.

- El **estado de un qubit** es un **vector de norma 1** en el Espacio de Hilbert de 2 dimensiones, $\mathbb{C}^2$.
- La base estándar de este espacio está formada por los vectores:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Estos vectores son unitarios (norma = 1) y ortogonales, por lo que se trata de una base **ortonormal**. En álgebra lineal se denomina base canónica, mientras que en computación cuántica se conoce como la **base computacional**.

¿Cómo podemos verificar que estos vectores son unitarios y ortogonales?

- Si $\langle 0|0\rangle = 1$ y $\langle 1|1\rangle = 1$ implica que ambos kets tienen norma 1.

$$\langle 0|0\rangle = (1,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1$$

$$\langle 1|1\rangle = (0,1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$$

- Si $\langle 0|1\rangle = 0$ y $\langle 1|0\rangle = 0$ implica que ambos kets son ortogonales.

$$\langle 0|1\rangle = (1,0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

$$\langle 1|0\rangle = (0,1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0$$

> Nota: La última comprobación ya no era necesaria porque si $\langle 0|1\rangle = 0$ implica que $\langle 1|0\rangle = 0$ (ya que el conjuntado de 0 es 0)

Más Allá de 0 y 1: La Superposición

- Un **bit clásico** es simple: su valor es **0** o **1**.
- Un **qubit** es radicalmente diferente. Puede estar en el estado $|0\rangle$, en el estado $|1\rangle$, o en una **superposición lineal** de ambos.

El estado más general de un qubit, $|\psi\rangle$, se escribe como:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Los números complejos α y β se llaman **amplitudes de probabilidad**.
Estos números representan las componentes del vector $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$$

> Intuitivamente, las amplitudes nos dicen "cuánto" del estado $|0\rangle$ y "cuánto" del estado $|1\rangle$ hay en la "mezcla". Su magnitud al cuadrado (que veremos pronto) nos dará la probabilidad de medir cada resultado.

Ejercicio: Las Amplitudes son Proyecciones

Dado el estado general de un qubit:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

Instrucción:

Calcula $\langle 0|\psi\rangle$ y $\langle 1|\psi\rangle$ usando los dos métodos siguientes:

1. **Método Matricial:** Usando la representación de $|\psi\rangle$ como el vector columna $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.
2. **Método Algebraico:** Usando la representación de $|\psi\rangle$ como la combinación lineal $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ y las propiedades de la base ortonormal.

Solución (Método 1: Matricial)

1. Cálculo de $\langle 0|\psi\rangle$:

- Escribimos los vectores: $\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$
- Realizamos la multiplicación matricial:

$$\langle 0|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (1 \cdot \alpha) + (0 \cdot \beta) = \alpha$$

2. Cálculo de $\langle 1|\psi\rangle$:

- Escribimos los vectores: $\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$
- Realizamos la multiplicación matricial:

$$\langle 1|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = (0 \cdot \alpha) + (1 \cdot \beta) = \beta$$

Solución (Método 2: Algebraico)

Usamos la linealidad del producto interior y la ortonormalidad de la base.

1. Cálculo de $\langle 0|\psi\rangle$:

- Sustituimos la expresión de $|\psi\rangle$: $\langle 0|\psi\rangle = \langle 0|(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$
- Distribuimos el bra (por linealidad): $= \langle 0|\alpha|0\rangle + \langle 0|\beta|1\rangle = \alpha\langle 0|0\rangle + \beta\langle 0|1\rangle$
- Usamos la ortonormalidad ($\langle 0|0\rangle = 1, \langle 0|1\rangle = 0$): $= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha$

2. Cálculo de $\langle 1|\psi\rangle$:

- Sustituimos y distribuimos: $\langle 1|\psi\rangle = \langle 1|(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha\langle 1|0\rangle + \beta\langle 1|1\rangle$
- Usando $\langle 1|0\rangle = 0, \langle 1|1\rangle = 1$: $= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta$

> **Conclusión:** Ambos métodos confirman que $\alpha = \langle 0|\psi\rangle$ y $\beta = \langle 1|\psi\rangle$.
> Se demuestra que las amplitudes α y β son, de hecho, los productos interiores (proyecciones) del estado $|\psi\rangle$ sobre los vectores de la base.

El Postulado de la Normalización

> **Cualquier vector que represente un estado cuántico debe tener norma 1.**

La **norma al cuadrado** de un vector de estado, $||\psi||^2$, representa la **probabilidad total** de encontrar el sistema en *algún* estado posible. Como el sistema existe y está en algún estado, esa probabilidad es siempre 1.

$$||\psi||^2 = \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

¿Qué consecuencia tiene esto sobre las amplitudes α y β de un estado en superposición $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$?

La Regla para las Amplitudes de Probabilidad

Dado un estado genérico cualquiera $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, sabemos que su norma al cuadrado debe ser 1: $\||\psi\rangle\|^2 = 1$.

Nuestro Objetivo:

> Deducir la regla o condición que impone este postulado sobre las amplitudes α y β

Vamos a deducirlo expresando el cuadrado de la norma en función de las aplitudes α y β e igualando a 1.

Deducción de la Regla para las aplitudes α y β (Método Matricial)

Paso 1: Escribimos $|\psi\rangle$ y $\langle\psi|$ como vectores.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad , \quad \langle\psi| = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix}$$

Paso 2: Calculamos la norma al cuadrado.

$$\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha^*\alpha + \beta^*\beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

Paso 3: Aplicar el postulado físico ($\|\psi\|^2 = 1$).

Si $\|\psi\|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$ y sabemos que $\|\psi\|^2$ debe ser 1, entonces:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Conclusión:

Hemos deducido la **Condición de Normalización**. Para cualquier estado de qubit, la suma de los módulos al cuadrado de sus amplitudes debe ser 1. Esto se interpreta como que la suma de las probabilidades de medir cada resultado es 100%.

- Probabilidad de medir $|0\rangle = |\alpha|^2$
- Probabilidad de medir $|1\rangle = |\beta|^2$

Cálculo alternativo del producto interior (Enfoque Algebraico)

También pudimos haber calculado el producto interior usando la manipulación algebraica de bras y kets. Este método es importante para practicar las habilidades que necesitaremos más adelante.

Podemos entender el cálculo de $\langle\psi|\psi\rangle$ como una **multiplicación de matrices**.

$$\langle\psi|\psi\rangle = (\alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|) \cdot (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

La multiplicación de matrices es distributiva, por lo que podemos expandir esta expresión como si fuera un producto de binomios:

$$= (\alpha^*\langle 0|)(\alpha|0\rangle) + (\alpha^*\langle 0|)(\beta|1\rangle) + (\beta^*\langle 1|)(\alpha|0\rangle) + (\beta^*\langle 1|)(\beta|1\rangle)$$

Reagrupando escalares y matrices:

$$= (\alpha^*\alpha)\langle 0|0\rangle + (\alpha^*\beta)\langle 0|1\rangle + (\beta^*\alpha)\langle 1|0\rangle + (\beta^*\beta)\langle 1|1\rangle$$

Como la base es ortonormal ($\langle 0|0\rangle = 1, \langle 1|1\rangle = 1, \langle 0|1\rangle = 0, \langle 1|0\rangle = 0$), nos queda que:

$$\|\psi\|^2 = |\alpha|^2 \cdot 1 + (\alpha^*\beta) \cdot 0 + (\beta^*\alpha) \cdot 0 + |\beta|^2 \cdot 1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

La Regla de Born

Regla de Born: La probabilidad de que un sistema en el estado $|\psi\rangle$ colapse al estado $|\phi\rangle$ tras una medición se calcula como:

$$P(\text{medir } |\phi\rangle) = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$$

Coherencia de la Probabilidad

Podemos demostraremos que $|\langle\phi|\psi\rangle|^2 \leq 1$ usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Si $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ son estados cuánticos válidos, entonces $||\psi|| = 1$ y $||\phi|| = 1$.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dice:

$$|\langle\phi|\psi\rangle| \leq ||\phi|| \cdot ||\psi|| \implies |\langle\phi|\psi\rangle| \leq 1 \cdot 1 = 1$$

Y si elevamos al cuadrado:

$$|\langle\phi|\psi\rangle|^2 \leq 1$$

Ejercicio 1: Trabajando con un Qubit

Considera el siguiente estado de un qubit (no normalizado):

$$|v\rangle = (1+i)|0\rangle + (2i)|1\rangle$$

Instrucción:

1. Escribe $|v\rangle$ como un vector columna y encuentra su bra correspondiente, $\langle v|$.
2. Calcula la norma al cuadrado, $||v||^2 = \langle v|v\rangle$.
3. Encuentra el factor de normalización $N = \frac{1}{||v||}$.
4. Escribe el estado normalizado $|\psi\rangle = N|v\rangle$.
5. Verifica que el estado $|\psi\rangle$ que encontraste cumple la condición $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Solución: Trabajando con un Qubit

$|v\rangle = (1+i)|0\rangle + (2i)|1\rangle$

1. **Vectores Ket y Bra:**
   $|v\rangle = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \end{pmatrix} \implies \langle v| = \begin{pmatrix} 1-i & -2i \end{pmatrix}$

2. **Norma al Cuadrado:**
   $\|v\|^2 = \langle v|v\rangle = (1-i)(1+i) + (-2i)(2i)$
   $= (|1+i|^2) + (-4i^2) = (1^2+1^2) + (-4(-1)) = (1+1) + 4 = 2+4 = 6.$

3. **Factor de Normalización:**
   $\|v\| = \sqrt{6}$. Por lo tanto, el factor es $N = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

4. **Estado Normalizado:**
   $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$
   Este es nuestro estado, con $\alpha = \frac{1+i}{\sqrt{6}}$ y $\beta = \frac{2i}{\sqrt{6}}$.

5. **Verificación:**
   $|\alpha|^2 = \alpha^*\alpha = (\frac{1-i}{\sqrt{6}})(\frac{1+i}{\sqrt{6}}) = \frac{1^2+1^2}{6} = \frac{2}{6}.$
   $|\beta|^2 = \beta^*\beta = (\frac{-2i}{\sqrt{6}})(\frac{2i}{\sqrt{6}}) = \frac{-4i^2}{6} = \frac{4}{6}.$
   $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{6}{6} = 1.$ ✅ ¡Está normalizado

Ejercicio 2: La Regla de Born en Acción

Dado el estado general y normalizado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, usando la regla de Born:

1. Demuestrar que la probabilidad de medir el estado $|0\rangle$ es $|\alpha|^2$.
2. Demuestrar que la probabilidad de medir el estado $|1\rangle$ es $|\beta|^2$.

Pista: Recuerda la Regla de Born. La probabilidad de medir el estado $|\phi\rangle$ a partir del estado $|\psi\rangle$ es:

$$P(\text{medir } |\phi\rangle) = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$$

Solución: La Regla de Born en Acción

1. Probabilidad de medir el estado $|0\rangle$

Aplicamos la Regla de Born con $|\phi\rangle = |0\rangle$. La probabilidad es $P(0) = |\langle 0|\psi\rangle|^2$.

- **Paso 1: Calculamos el producto interior $\langle 0|\psi\rangle$.**

$$\langle 0|\psi\rangle = \langle 0|(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

  Por linealidad en el segundo argumento, distribuimos:

$$= \alpha\langle 0|0\rangle + \beta\langle 0|1\rangle$$

  Usando la ortonormalidad de la base ($\langle 0|0\rangle = 1, \langle 0|1\rangle = 0$):

$$= \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha$$

- **Paso 2: Calculamos el módulo al cuadrado.**

$$P(0) = |\alpha|^2$$

¡Demostrado! ✅

Solución: La Regla de Born en Acción

2. Probabilidad de medir el estado $|1\rangle$

Aplicamos la Regla de Born con $|\phi\rangle = |1\rangle$. La probabilidad es $P(1) = |\langle 1|\psi\rangle|^2$.

- **Paso 1: Calculamos el producto interior $\langle 1|\psi\rangle$.**

$$\langle 1|\psi\rangle = \langle 1|(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha\langle 1|0\rangle + \beta\langle 1|1\rangle = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta$$

- **Paso 2: Calculamos el módulo al cuadrado.**

$$P(1) = |\beta|^2$$

¡Demostrado! ✅

Apéndice

Análisis Profundo de la Fase del Producto Interior

(Material optativo)

Apéndice: ¿Qué Mide la Fase de $\langle\phi|\psi\rangle$?

En la clase, interpretamos la fase de $\langle\phi|\psi\rangle$ como una medida de la alineación de fase. Pero, ¿qué significa esto exactamente cuando ambos kets son superposiciones complejas?

Una hipótesis intuitiva podría ser que la fase del resultado es una simple resta de las "fases relativas" de cada ket.

Vamos a investigar esta hipótesis con un cálculo formal.

Paso 1: Definir los Kets Generales

Consideremos dos kets de un qubit, $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$, en su forma más general. Escribiremos sus amplitudes en forma exponencial para ver claramente sus magnitudes y fases.

- **Primer Ket, $|\psi\rangle$:**

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \alpha = r_\alpha e^{i\theta_\alpha} \\ \beta = r_\beta e^{i\theta_\beta} \end{cases}$$

- **Segundo Ket, $|\phi\rangle$:**

$$|\phi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \gamma = r_\gamma e^{i\varphi_\gamma} \\ \delta = r_\delta e^{i\varphi_\delta} \end{cases}$$

Ahora, calcularemos el producto interior $\langle\phi|\psi\rangle$.

Paso 2: El Cálculo Formal de $\langle\phi|\psi\rangle$

1. **Formamos el bra** $\langle\phi|$ (el traspuesto conjugado de $|\phi\rangle$):

$$\langle\phi| = (\gamma^*\langle 0| + \delta^*\langle 1|) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \gamma^* = r_\gamma e^{-i\varphi_\gamma} \\ \delta^* = r_\delta e^{-i\varphi_\delta} \end{cases}$$

2. **Calculamos el producto** $\langle\phi|\psi\rangle = \gamma^*\alpha + \delta^*\beta$:

$$\langle\phi|\psi\rangle = (r_\gamma e^{-i\varphi_\gamma})(r_\alpha e^{i\theta_\alpha}) + (r_\delta e^{-i\varphi_\delta})(r_\beta e^{i\theta_\beta})$$

3. **Agrupamos magnitudes y sumamos exponentes**:

$$\langle\phi|\psi\rangle = (r_\gamma r_\alpha)e^{i(\theta_\alpha - \varphi_\gamma)} + (r_\delta r_\beta)e^{i(\theta_\beta - \varphi_\delta)}$$

Paso 3: Análisis del Resultado - La Interferencia

El resultado final es la **suma de dos números complejos**. Llamémoslos Z_0 y Z_1:

- $Z_0 = (r_\gamma r_\alpha)e^{i(\theta_\alpha - \varphi_\gamma)}$ (Proyección de la componente $|0\rangle$)
- $Z_1 = (r_\delta r_\beta)e^{i(\theta_\beta - \varphi_\delta)}$ (Proyección de la componente $|1\rangle$)

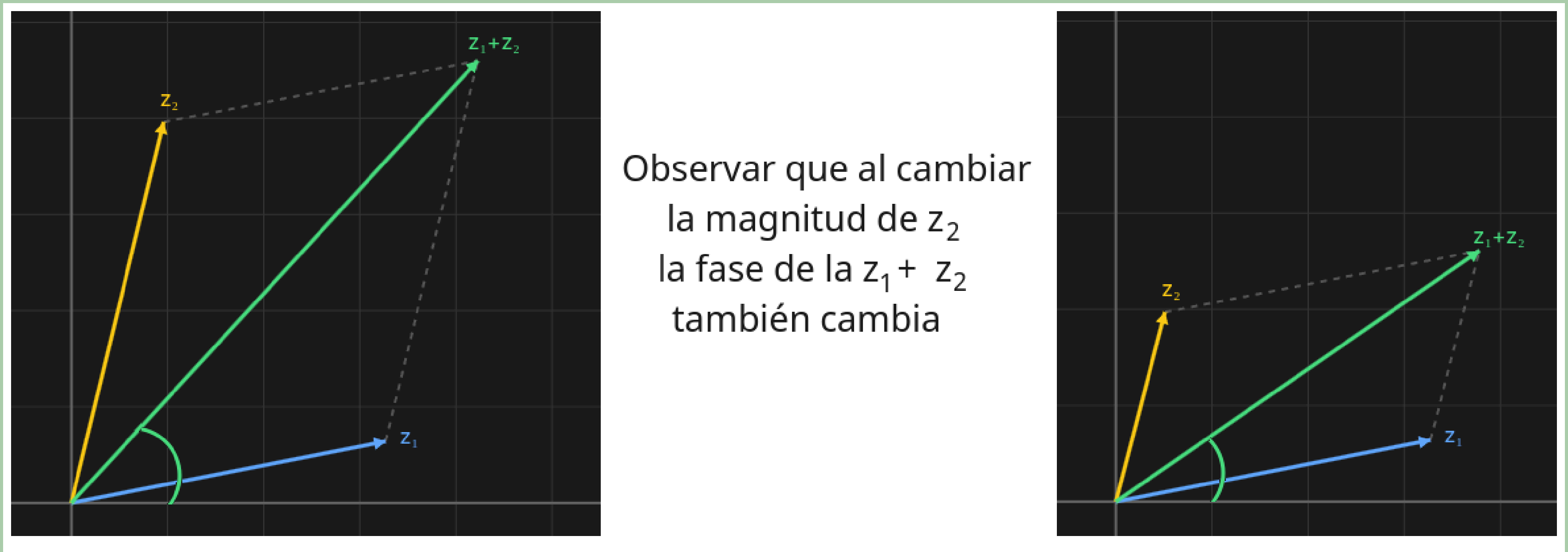
El producto interior es $\langle\phi|\psi\rangle = Z_0 + Z_1$.

> **El Momento de la Verdad:**
> La fase de una **suma** de números complejos, $\arg(Z_0 + Z_1)$, **no es** la suma ni la resta de las fases individuales. ¡Nuestra hipótesis inicial era incorrecta!

El resultado es una **interferencia** entre las proyecciones de cada componente.

Visualizando la Suma como una "Promedio Ponderado"

El resultado final es una **suma vectorial** en el plano complejo. La fase del vector resultante (verde) depende tanto de las fases como de las **magnitudes** de Z_1 y Z_2.



- La fase de Z_1 es la diferencia de fase de las componentes $|0\rangle$.
- La fase de Z_2 es la diferencia de fase de las componentes $|1\rangle$.

La fase final es un **"promedio ponderado complejo"**. Los "pesos" de este promedio son las magnitudes de Z_1 y Z_2.

Conclusión: ¿Qué Mide la Fase, Entonces?

> La fase del producto interior $\langle\phi|\psi\rangle$ es el resultado de la **interferencia** entre las diferencias de fase de las componentes correspondientes.

- Mide la diferencia de fase entre las componentes $|0\rangle$ de $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$.
- Mide la diferencia de fase entre las componentes $|1\rangle$ de $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$.
- Luego, combina estos dos resultados en una **suma compleja**, donde cada término está "ponderado" por el producto de las magnitudes de las amplitudes correspondientes.

Este proceso de **interferencia** es fundamental en la mecánica cuántica y es la razón por la cual la fase relativa es tan importante para el resultado de los algoritmos.