Ley de Gauss

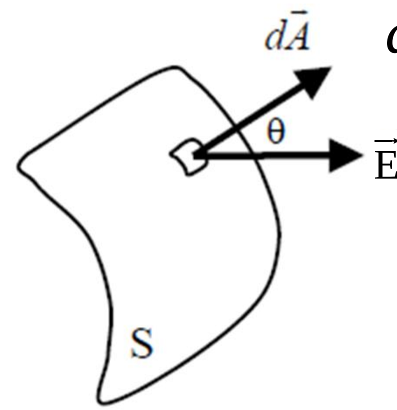
Hasta aquí hemos analizado los problemas de la electrostática basándonos en la ley de Coulomb, a partir de la cual se define el campo eléctrico.

La **ley de Gauss** ofrece una manera más simple de calcular campos eléctricos en situaciones con alto grado de simetría.

Flujo de un campo vectorial

Se define el flujo Φ del campo vectorial $\vec{\mathrm{E}}$ a través de la superficie *S*

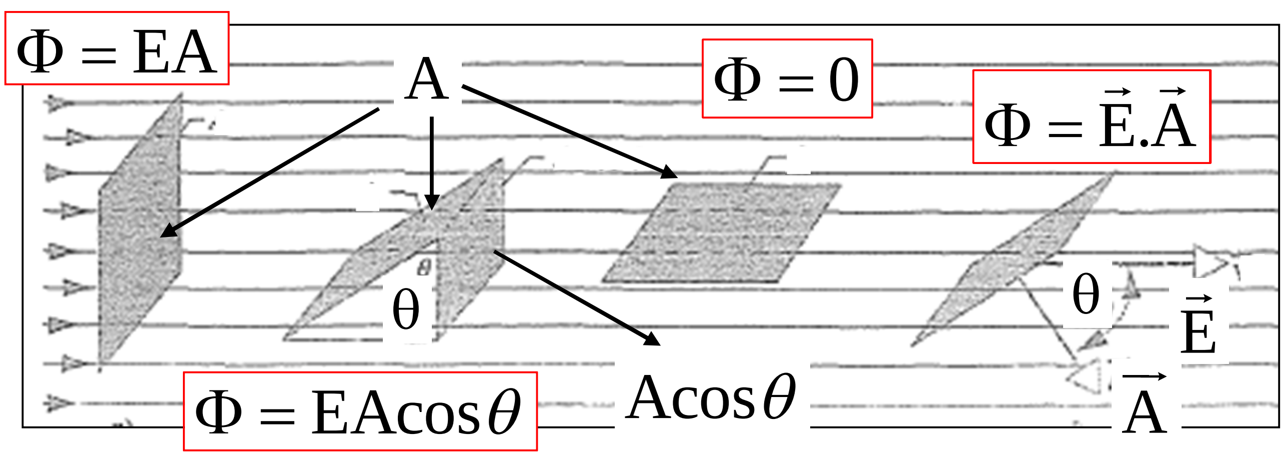
$$\Phi = \int_S \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{\mathrm{A}}$$



$$d\Phi = \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{\mathrm{A}}$$

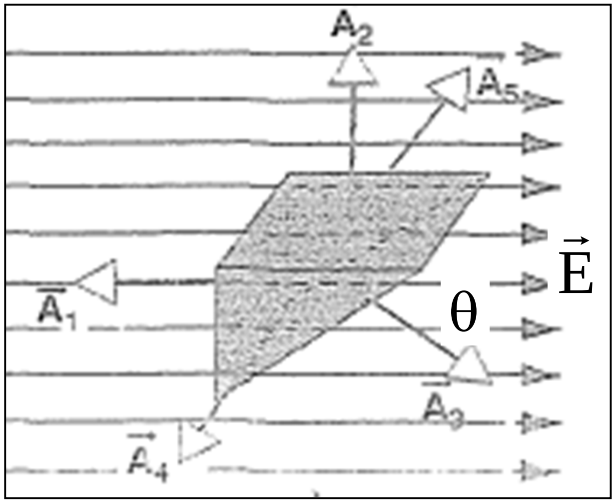
Se lo puede considerar como una medida del número de líneas de campo que atraviesan la superficie *S*

$$[\Phi] = \frac{Nm^2}{C}$$



En **superficies abiertas**, la dirección del vector normal es arbitrario, existen dos posibilidades, el signo del flujo depende de esta elección.

En **superficies cerradas** hay dos regiones claramente determinadas, el interior a la superficie y el exterior. Por convención, la dirección de $\vec{A}$ es **normal hacia afuera de la superficie cerrada**



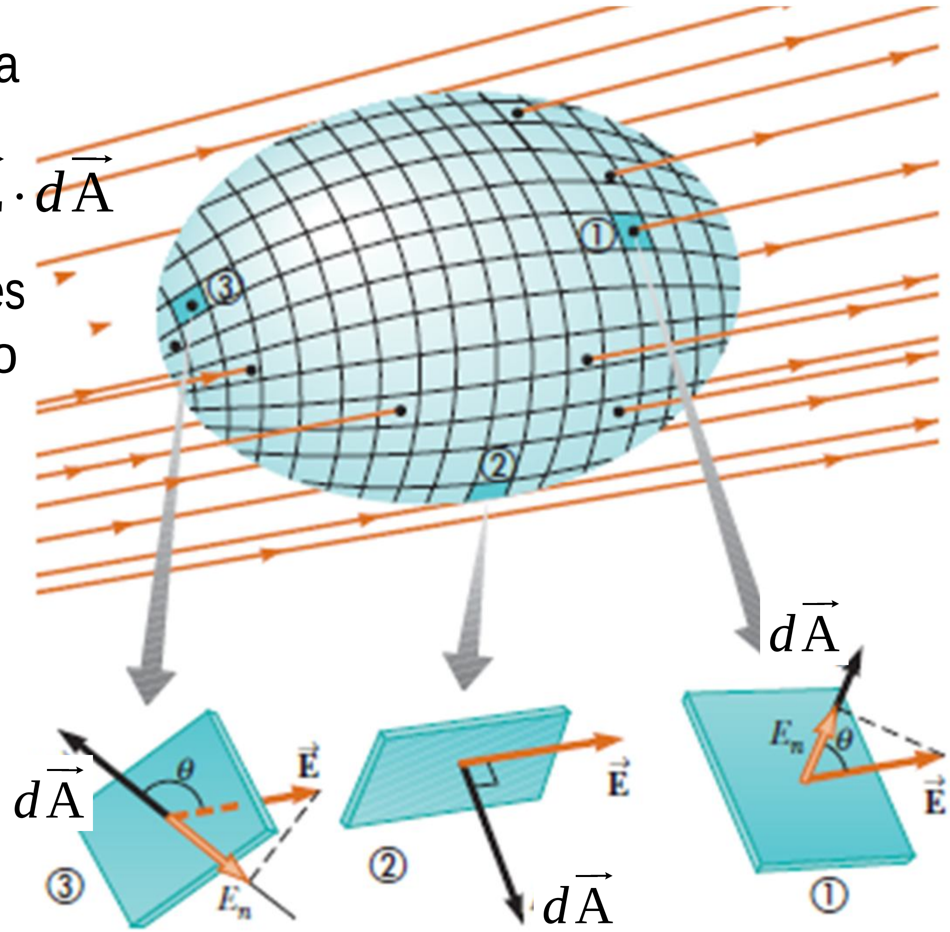
$$\begin{cases} 0 \le \theta < \pi/2 \;\rightarrow\; \Phi = \vec{E}\cdot\vec{A} > 0 \;\rightarrow \\ \pi/2 < \theta \le \pi \;\rightarrow\; \Phi = \vec{E}\cdot\vec{A} < 0 \;\rightarrow \end{cases}$$

El flujo **saliente** a través de la superficie cerrada es **positivo.**
El flujo **entrante** a través de la superficie cerrada es **negativo.**

Para una superficie cerrada cualquiera se divide la superficie en áreas infinitesimales cuyo flujo es: $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$

Considerando todas las contribuciones de cada área infinitesimal el flujo neto es:

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA}$$



$\boxed{\Phi = 0}$ El nro de líneas de campo que salen es igual al nro de las que entran; no hay fuentes (+) ni sumideros (-) netos de campo en el volumen.

$\boxed{\Phi > 0}$ El nro de líneas de campo que salen es mayor al nro de las que entran; hay más fuentes (+) que sumideros (-) de campo en el volumen.

$\boxed{\Phi < 0}$ El nro de líneas de campo que entran es mayor al nro de las que salen; hay más sumideros (-) que fuentes (+) de campo en el volumen

Ley de Gauss

La **ley de Gauss** relaciona el **flujo de campo eléctrico** Φ_E a través de una superficie cerrada con la **carga neta *q* encerrada** por ella:

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2}$

permitividad eléctrica del vacío

Superficie imaginaria cerrada (gaussiana)

Campo eléctrico en la superficie imaginaria cerrada

Diferencial de superficie con normal hacia fuera

El número neto de líneas de campo que salen o entran a través de cualquier superficie que encierra cargas es proporcional a la carga encerrada por la superficie

Ley de Gauss

$$\Phi_E = \oint_S \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{\mathrm{A}} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

La carga q_{enc} es la carga total encerrada por la superficie imaginaria S o superficie gaussiana

Cargas puntuales: $q_{enc} = \sum_{i=1}^{n} q_i$

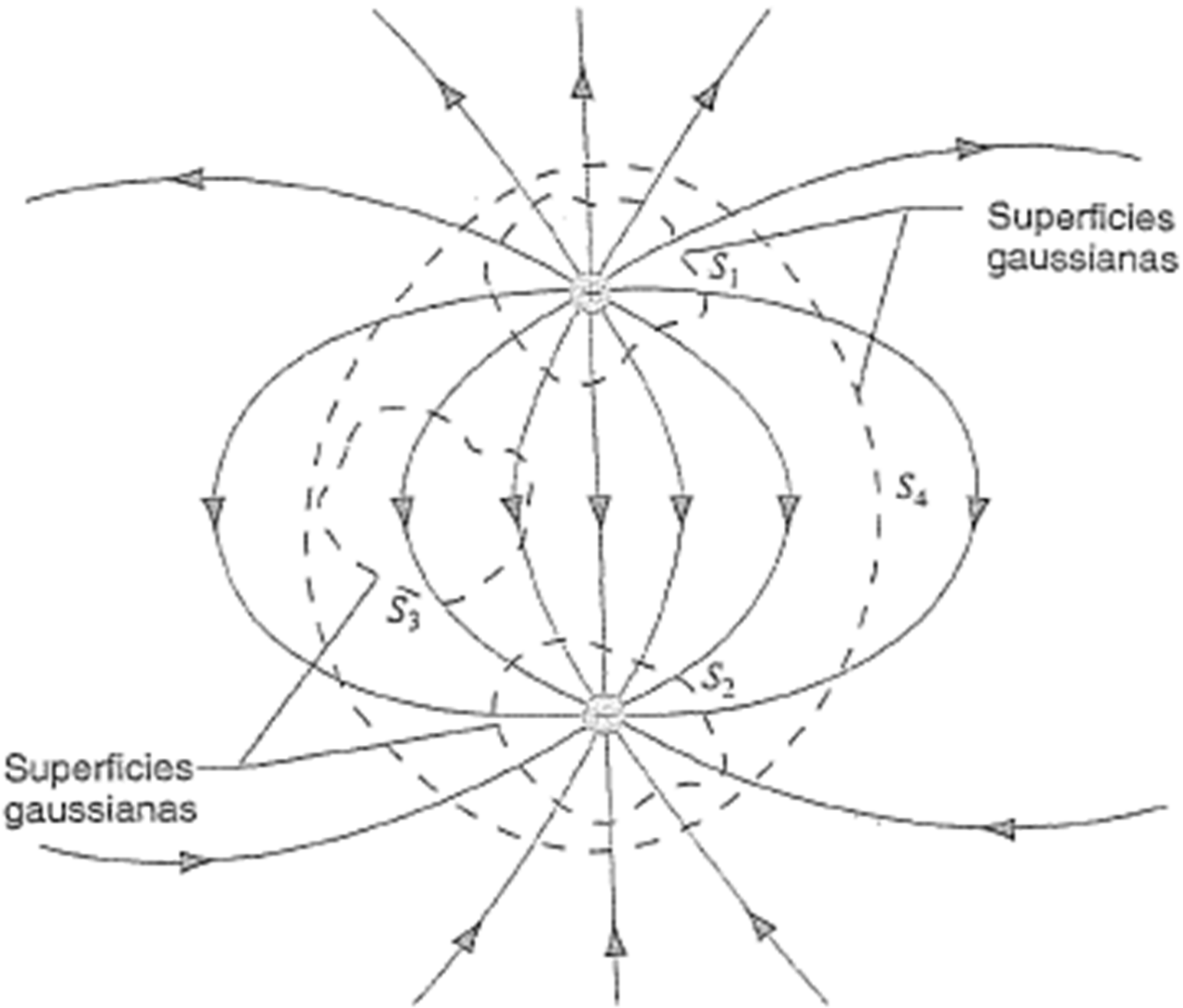
q_i son todas las cargas encerradas por la superficie imaginaria

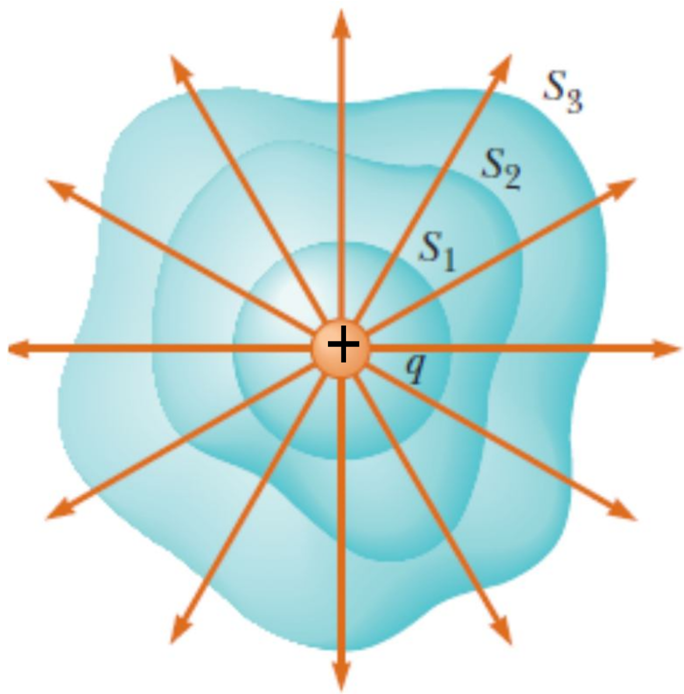
Cargas continuas:

Distribución lineal $q_{enc} = \int \lambda \, dl$

Distribución superficial $q_{enc} = \iint \sigma \, dA$

Distribución volumétrica $q_{enc} = \iiint \rho \, dV$


Superficies gaussianas
S_1
S_4
S_3
S_2
Superficies gaussianas

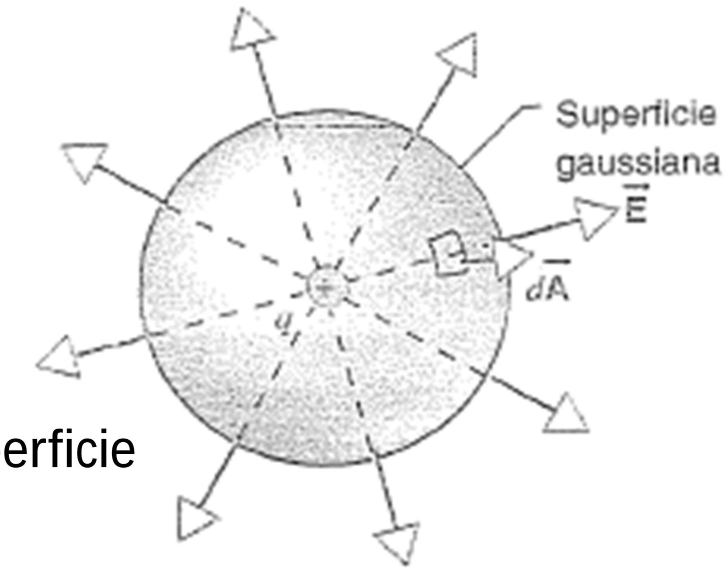


La elección de la superficie gaussiana es arbitraria, pero si el objetivo es calcular el CE, se elige una superficie **adecuada a la simetría de la distribución de cargas** (esférica, cilíndrica, etc.).

Ley de Gauss y ley de Coulomb

Apliquemos la ley de Gauss a una **carga puntual positiva y aislada**

Elegimos una superficie gaussiana con la simetría apropiada: **superficie esférica** de radio r centrada en la carga.



Esta superficie tiene dos ventajas:

i. $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ en toda la superficie

ii. $\vec{E}$ tiene la misma magnitud en toda la superficie

i. $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E \cdot dA$

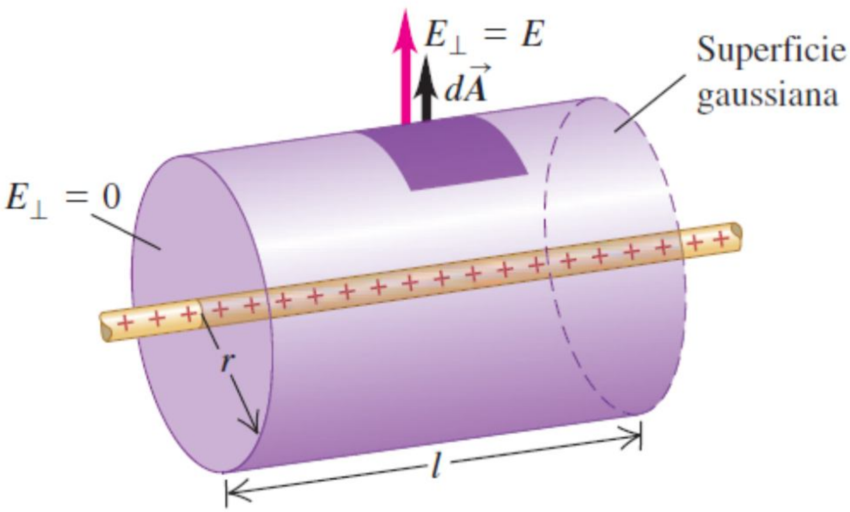
ii. $E \oint_S dA$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}}$$

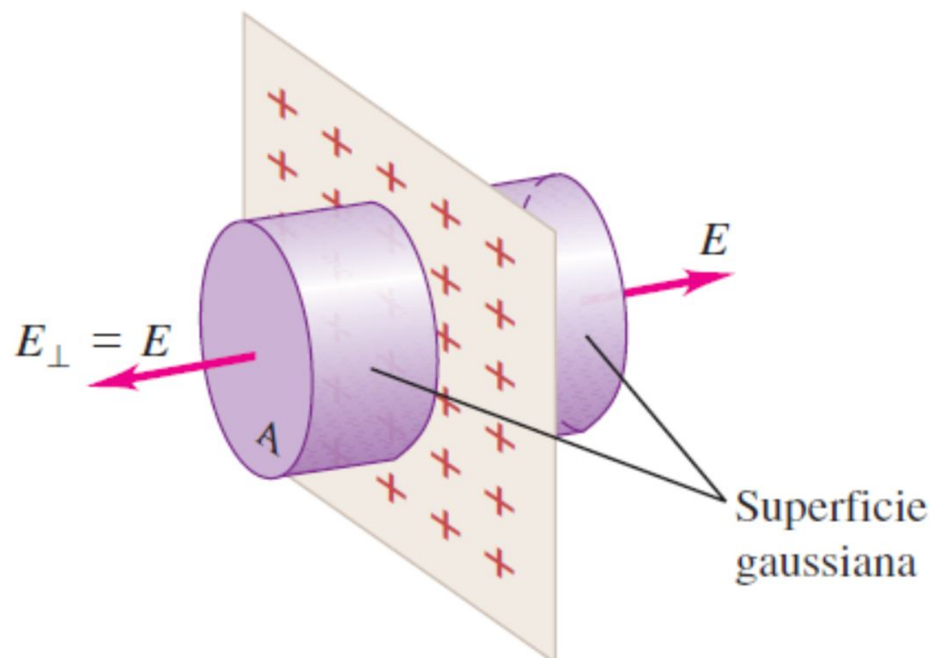
Colocar el versor!!!!

La ley de Coulomb está contenida en la ley de Gauss.
La ley de Gauss es una ley fundamental del electromagnetismo



Superficie gaussiana cilíndrica coaxial para una distribución lineal de carga uniforme

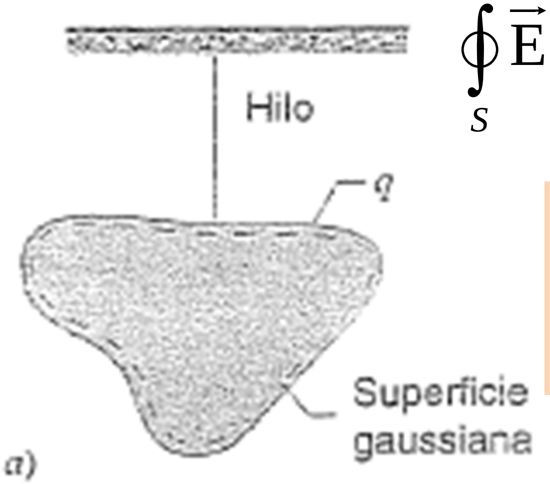
Superficie gaussiana cilíndrica para una lámina plana infinita cargada uniformemente



Conductores en equilibrio electrostático

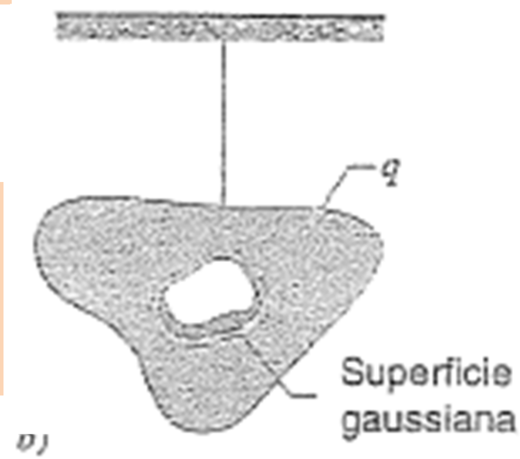
¿Qué sucede cuando se coloca una cantidad de carga eléctrica en un conductor aislado? Las cargas, en principio distribuidas en todo el volumen del conductor, se redistribuyen hasta que no se observan corrientes dentro del conductor → **equilibrio electroestático** → $\vec{F} = q\vec{E} = 0$ → **el CE es cero en el interior.**

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \rightarrow$$ Si $\vec{E} = 0$ sobre la superficie gaussiana, $q_{enc} = 0$ dentro del volumen.



Un exceso de carga colocada en un conductor aislado se dirige en su totalidad hacia la **superficie externa** del conductor

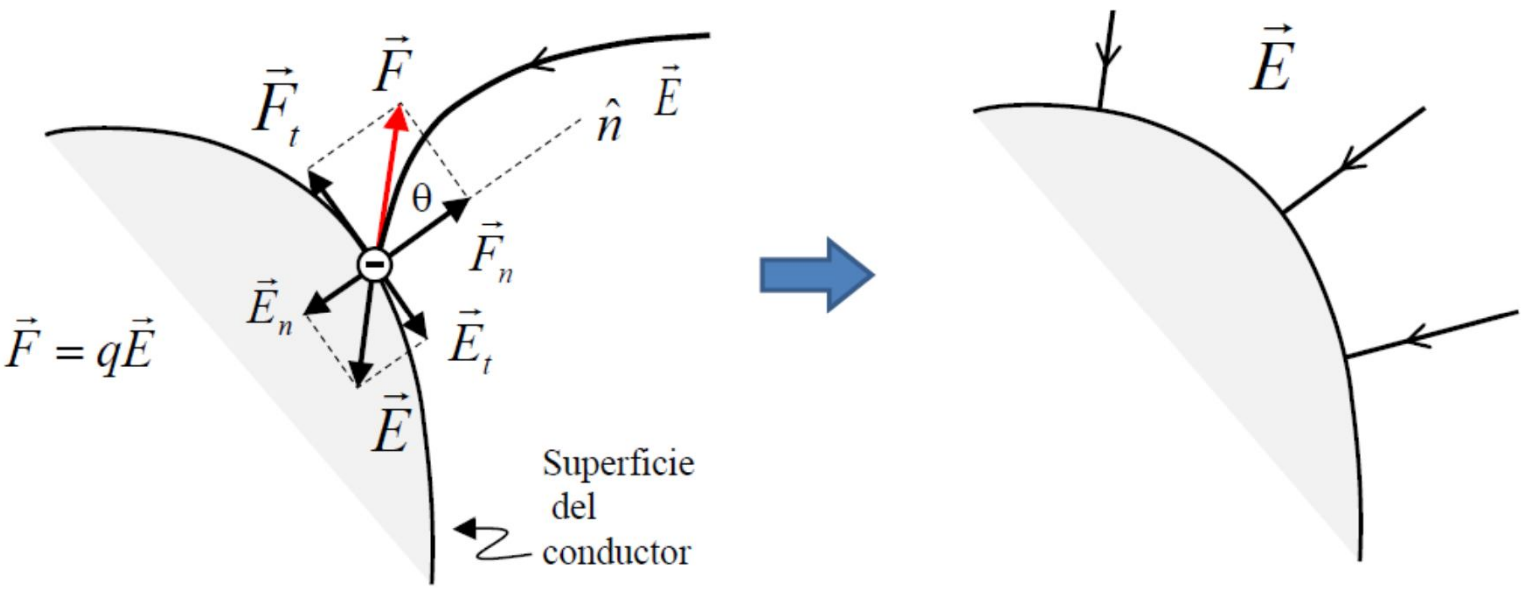
De manera similar, tampoco puede haber carga en la superficie de la cavidad interior del conductor aislado.



Campo eléctrico en la superficie de un conductor

Si bien el exceso de carga en un conductor aislado se distribuye en su superficie, en general no lo hace uniformemente (salvo en un conductor **esférico** aislado) → la densidad superficial de carga $\sigma = dq/dA$ varía de un punto a otro de la superficie.
Podemos encontrar una relación en cualquier punto superficial entre σ y $\vec{E}$ fuera de la superficie en ese mismo punto:

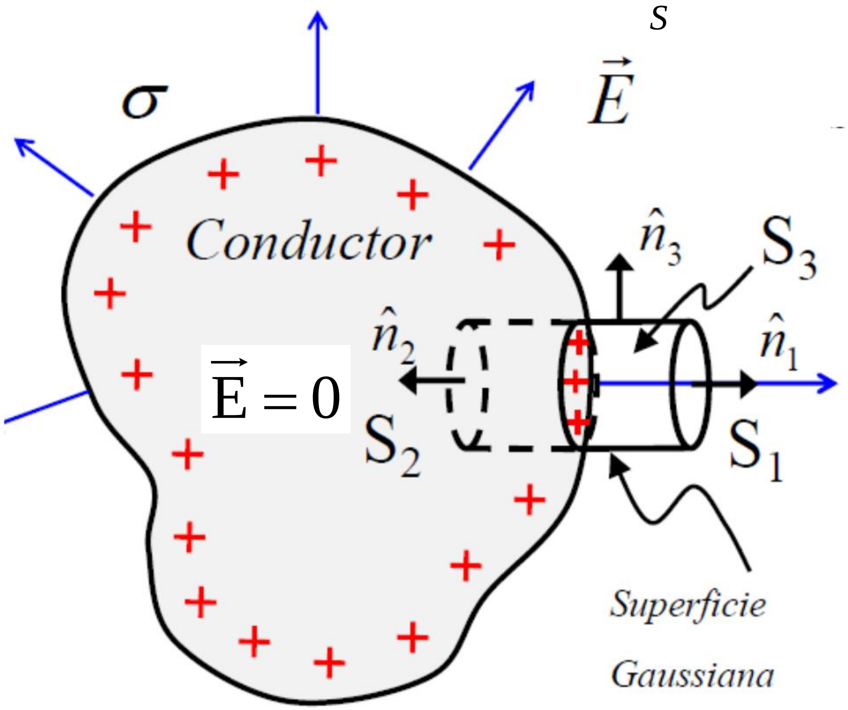
1) $\vec{E}$ justo en la superficie de un conductor cargado es **perpendicular** a la misma (equilibrio electroestático)



Campo eléctrico fuera de un conductor

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dA + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dA + \int_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dA$$



$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n}_1 dA = \int_{S_1} \left|\vec{E}\right| \cdot dA = \left|\vec{E}\right| \cdot dA$$

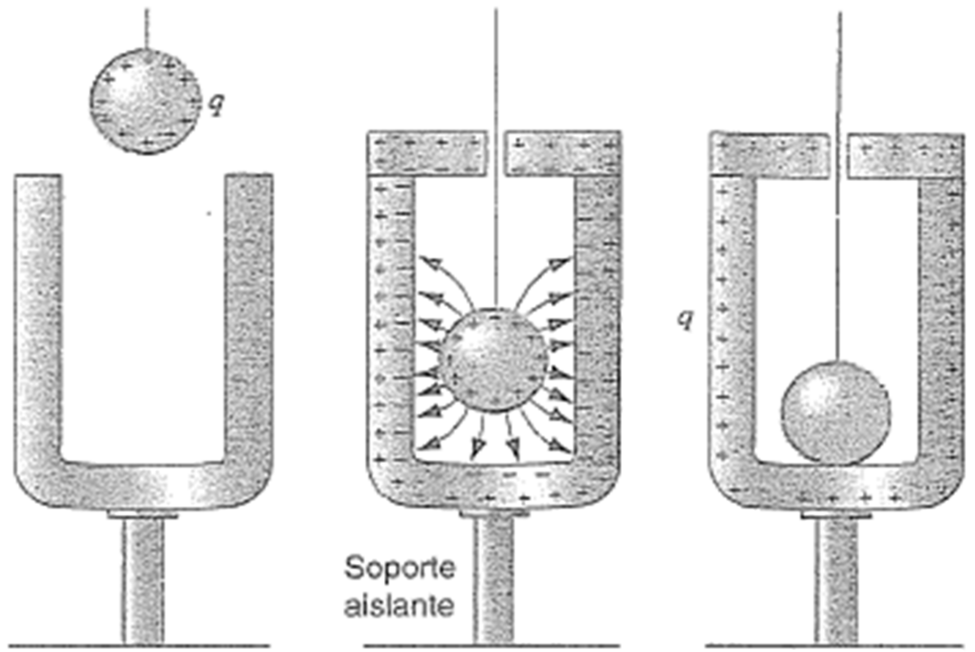
$$\int_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n}_2 dA = 0$$ → el campo en el interior del conductor es nulo

$$\int_{S_3} \vec{E} \cdot \hat{n}_3 dA = \int_{S_3} \left|\vec{E}\right| \cdot \cos\frac{\pi}{2} dA = 0$$

Por ley de Gauss: $\Phi_E = EA = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \rightarrow E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

Prueba experimental de la ley de Gauss

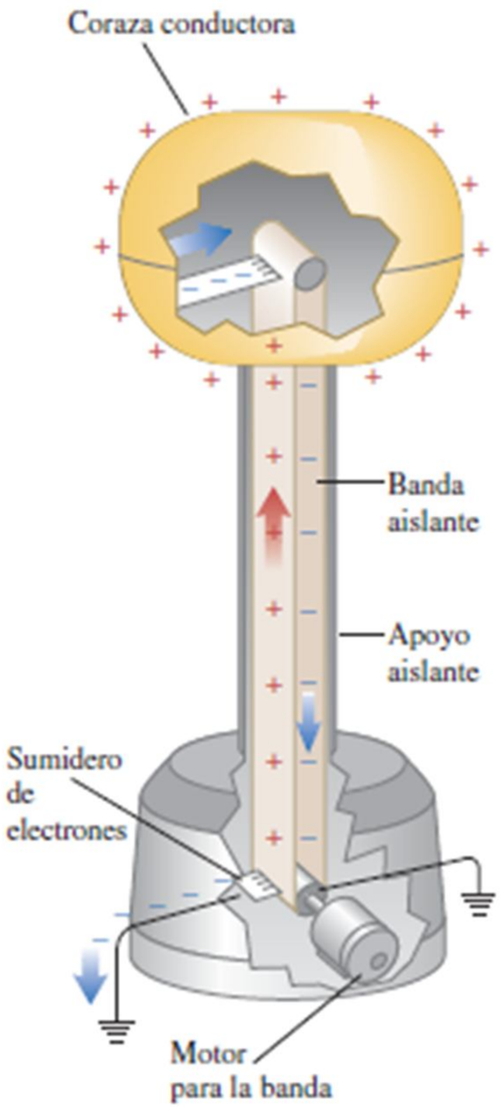
Experimento de Faraday



Toda la carga efectivamente se encuentra en la superficie externa → se verifica la ley de Gauss → se verifica la ley de Coulomb

En principio la carga en el conductor hueco se puede incrementar sin límite repitiendo el proceso ☞

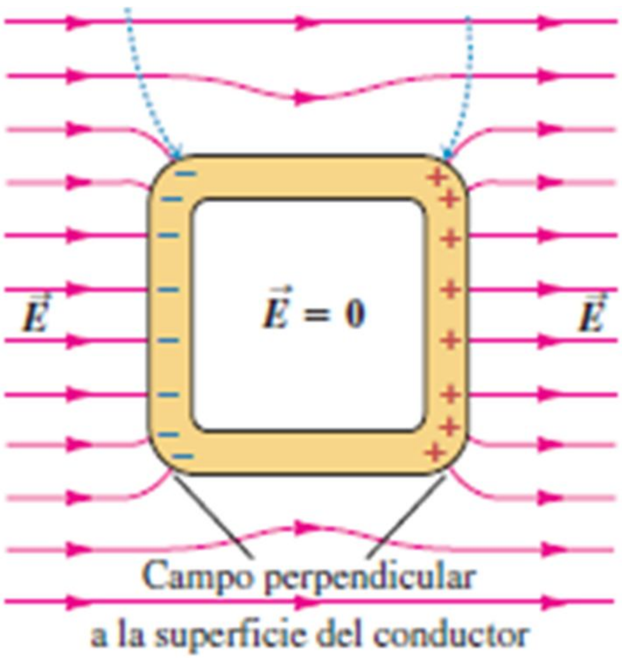
Generador de Van de Graaff



En la práctica es posible aumentar el CE de la coraza conductora hasta el valor de la ruptura eléctrica del aire

Se utiliza como acelerador de partículas con carga

Blindaje electrostático



Se desea proteger un objeto de CE externos

El CE externo redistribuye los e^- libres en el conductor, dejando regiones de la superficie exterior con carga neta positiva y negativa.

Esta redistribución de la carga origina un CE adicional tal que el CE total dentro de la caja es nulo