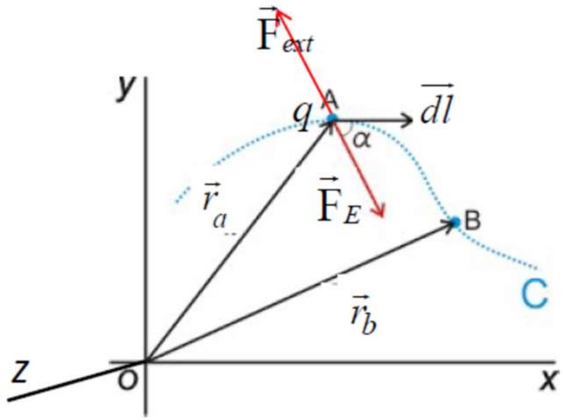
Energía potencial eléctrica – Potencial eléctrico

Prof. Gustavo Forte

En una región donde existe un campo eléctrico, se transporta una carga puntual desde A hasta B a lo largo de la curva C mediante una fuerza externa. El trabajo del agente externo es:

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{\mathrm{F}}_{ext} \cdot \overrightarrow{dl}$$



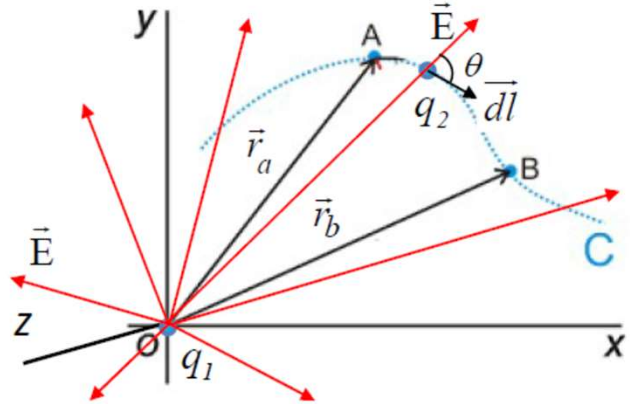
Si el movimiento es cuasi-estático $\vec{\mathrm{F}}_{ext} = -\vec{\mathrm{F}}_E$

$$W_{\mathrm{AB}} = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{\mathrm{F}}_E \cdot \overrightarrow{dl}$$

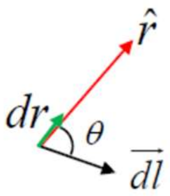
Veamos si el campo eléctrico es conservativo. Suponemos una carga puntual en el origen de coordenadas que genera un campo eléctrico y otra carga que se mueve desde A hasta B (ambas cargas positivas):

$$\vec{E} = k\frac{q_1}{r^2}\hat{r} = E\hat{r}$$

$$W_{AB} = -\int_{r_a}^{r_b} \vec{F}_E \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{r_a}^{r_b} q_2\vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = -\int_{r_a}^{r_b} q_2 E\hat{r}\cdot\overrightarrow{dl}$$



$$\hat{r}\cdot\overrightarrow{dl} = dl\cos\theta = dr$$



$$W_{AB} = -q_2\int_{r_a}^{r_b} E\,dr = -kq_1q_2\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}dr = kq_1q_2\left(\frac{1}{r_b}-\frac{1}{r_a}\right)$$

W_{AB} es una constante independiente del camino que conecta los puntos A y B

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales es conservativa. El campo eléctrico generado por una carga puntual es conservativo.

Energía potencial eléctrica

Según el Teorema de trabajo y energía

$$W_{\mathrm{AB}} = \Delta U + \underbrace{\Delta E_c}_{}$$

= 0 si el movimiento es cuasi-estático

$$\boxed{\Delta U = U_B - U_A = k\, q_1 q_2 \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)}$$

ΔU es la diferencia de energía potencial eléctrica. Se define como el trabajo que debe realizar el agente externo para transportar la carga q_2 desde A hasta B en contra del campo eléctrico de q_1

cargas de igual signo $(q_1 q_2 > 0)$

si q_2 se acerca a q_1 , $r_b < r_a \rightarrow \Delta U > 0$

si q_2 se aleja de q_1 , $r_b > r_a \rightarrow \Delta U < 0$

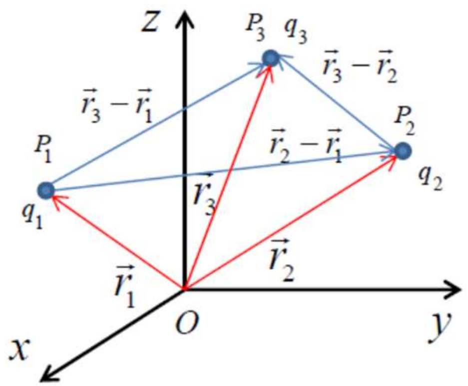
cargas de signo opuesto $(q_1 q_2 < 0)$

si q_2 se acerca a q_1 , $r_b < r_a \rightarrow \Delta U < 0$

si q_2 se aleja de q_1 , $r_b > r_a \rightarrow \Delta U > 0$

Energía potencial de un sistema de N cargas

Trabajo total para llevar las cargas desde el infinito a las posiciones del espacio donde se encuentran ubicadas.



$$W_1 = -q_1 \int_{\infty}^{P_1} \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$$

$$W_2 = -q_2 \int_{\infty}^{P_2} \vec{E}_1 \cdot \vec{dl} = \frac{kq_2 q_1}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}$$

$$W_3 = -q_3 \int_{\infty}^{P_3} \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right) \cdot \vec{dl} = \frac{kq_3 q_1}{\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right|} + \frac{kq_3 q_2}{\left|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\right|}$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = U$$

La energía electrostática de un sistema de N cargas se calcula como la suma de las energías electrostáticas extendida sobre todos los pares de cargas.

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i \qquad U_i = \sum_{j=1}^{i-1} k \frac{q_i q_j}{\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|}$$

Diferencia de potencial eléctrico

Si quiero caracterizar exclusivamente el efecto de la carga central *q* sobre el espacio que la rodea se define la diferencia de potencial como la diferencia de energía potencial por unidad de carga

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0}$$

$[\Delta V] = \text{joule}/\text{coulomb} = \text{volt}$

q_0 : carga móvil

$$\Delta V = V_b - V_a = \frac{U_b - U_a}{q_0}$$

$$\Delta V = \frac{W_{ab}}{q_0}$$

El electrón - volt

Cuando una partícula con carga q se desplaza desde un punto en el que el potencial es V_a a otro en el cual es V_b el cambio en la energía potencial de la partícula es

$$\underbrace{\Delta U = U_b - U_a}_{\text{Diferencia de energía potencial de la partícula cuando va desde } a \text{ hasta } b} = q\underbrace{\left(V_b - V_a\right)}_{\text{Diferencia de potencial entre } a \text{ y } b} = q\Delta V$$

Si la carga q es la carga del electrón $1{,}602 \times 10^{-19}$ C y la diferencia de potencial es 1 V , el cambio en la energía es

$$U_b - U_a = \left(1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}\right)\left(1\ \mathrm{V}\right) = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Esta cantidad de energía se define como 1 **electrón – volt** (1 eV):

$$1\ \mathrm{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Potencial eléctrico

Se llama potencial eléctrico a la diferencia de potencial eléctrico respecto de un **punto arbitrario** donde se conoce el potencial

El punto arbitrario se llama **referencia**l, en ese punto el **valor del potencial** se considera **cero** o **un valor finito**

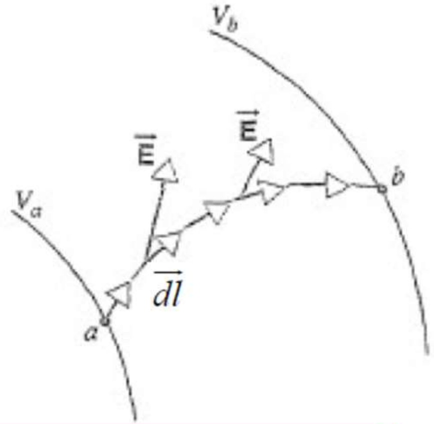
La **ubicación del referencial** depende de la distribución de carga que genera el campo eléctrico:

i) Distribución de carga **finita** (se la puede encerrar con una superficie cerrada, está confinada en una región finita del espacio) → **referencial en el infinito** (a una distancia grande se comporta como una carga puntual)

ii) Distribución de carga **infinita** (no se la puede encerrar con una superficie cerrada) → **referencial en cualquier lugar donde el potencial sea finito**

Calculo de la diferencia de potencial a partir del campo $\vec{\mathrm{E}}$

$$\Delta V = \frac{W_{ab}}{q_0} = \frac{-\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{\mathrm{F}}.\,\overrightarrow{dl}}{q_0} = \frac{-\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} q_0 \vec{\mathrm{E}}.\,\overrightarrow{dl}}{q_0}$$



$$\Delta V = V_b - V_a = \underbrace{-\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{\mathrm{E}}.\,\overrightarrow{dl}}_{\text{Diferencia de potencial entre } a \text{ y } b}$$

Si queremos el potencial en cualquier punto P de coordenadas $\vec{r}$ debemos elegir el referencial adecuado y calculamos la diferencia de potencial entre $\vec{r}$ y $\vec{r}_{ref}$:

$$V(\vec{r}) - V(\vec{r}_{ref}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{\mathrm{E}}.\,\overrightarrow{dl}$$

Luego

$$\boxed{V(\vec{r}) = V(\vec{r}_{ref}) - \int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{\mathrm{E}}.\,\overrightarrow{dl}}$$

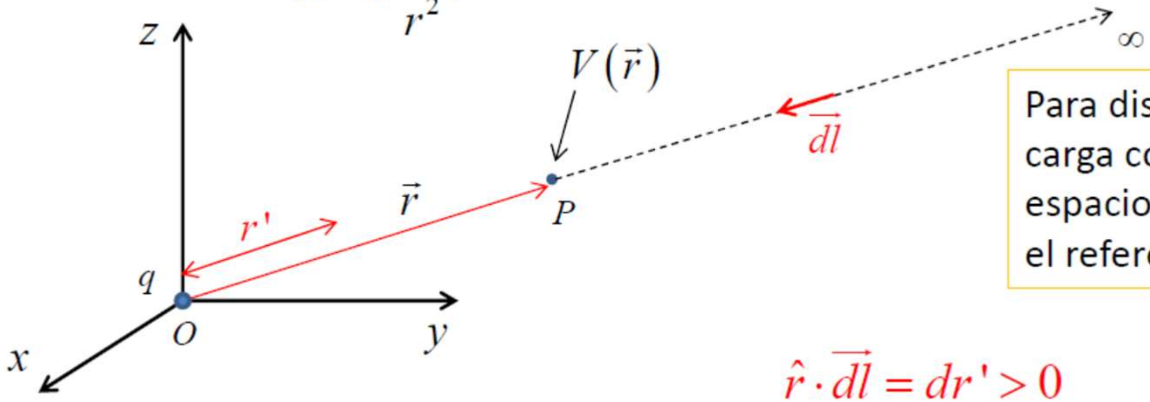
es el potencial en todo punto del espacio

Potencial eléctrico de una carga puntual

Carga en el origen

$$V\left(\vec{r}_{ref} = \infty\right) = 0$$

$$\vec{\mathrm{E}} = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$$



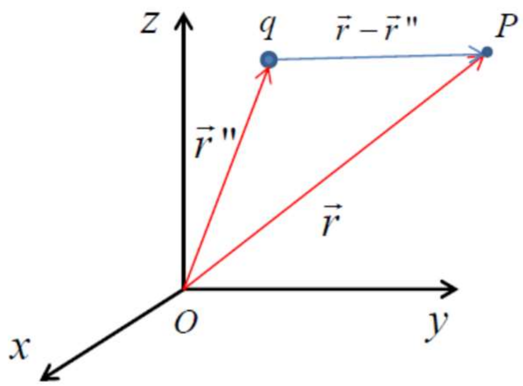
Para distribuciones de carga confinadas en el espacio conviene elegir el referencial en ∞

$$V(\vec{r}) - \underbrace{V\left(\vec{r}_{ref}\right)}_{=0} = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \vec{\mathrm{E}}\cdot\overrightarrow{dl} = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\vec{r}} \frac{kq}{r'^2}\overbrace{\hat{r}\cdot\overrightarrow{dl}}^{\hat{r}\cdot\overrightarrow{dl} = dr' > 0} = -kq\int_{r_{ref}}^{r}\frac{dr'}{r'^2} = -kq\left[-\frac{1}{r'}\right]_{r_{ref}}^{r}$$

$$\boxed{V(r) = \frac{kq}{r}}$$

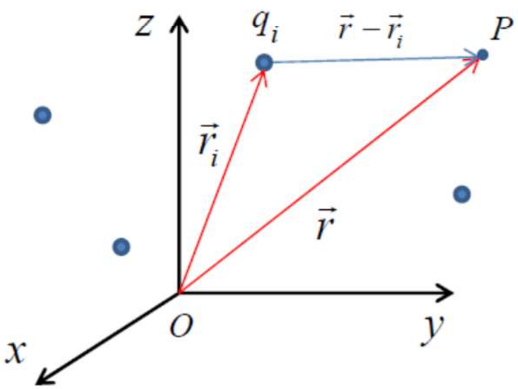
Potencial eléctrico de una carga puntual y sistema de N cargas

Carga fuera del origen



$$V = k\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,''\right|}$$

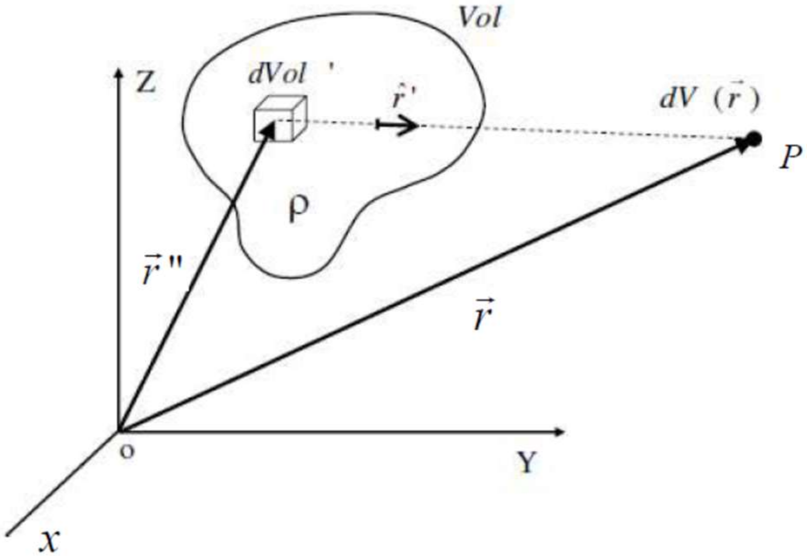
Sistema de N cargas



Por principio de superposición:

$$V = k\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}$$

Potencial eléctrico de distribución continua de carga

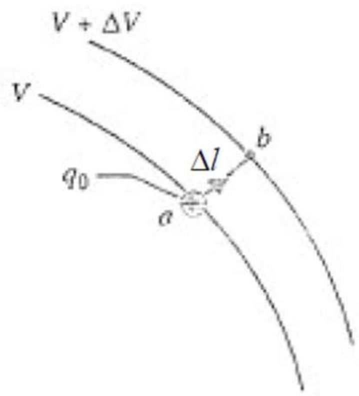


$$dq = \rho(\vec{r}\,'')dVol$$

$$dV = k\frac{dq}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,''\right|} = k\frac{\rho(\vec{r}\,'')dVol}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,''\right|}$$

$$\boxed{V = k\int_{vol}\frac{\rho(\vec{r}\,'')dVol}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,''\right|}}$$

Campo a partir del potencial



Se desplaza una carga q_0 positiva desde a hasta b

$$\Delta U = q_0 \Delta V$$

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} \rightarrow \quad W = -F_l \Delta l = -q_0 E_l \, \Delta l$$

$$W = \Delta U$$

$$-q_0 E_l \Delta l = q_0 \Delta V$$

$$\boxed{E_l = -\frac{\Delta V}{\Delta l}}$$

En el límite de desplazamientos infinitesimales:

$$\boxed{E_l = -\frac{dV}{dl}}$$

Tomando Δ*l* en dirección de los ejes coordenados y haciendo el límite, se obtiene:

$$\boxed{E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}} \quad \boxed{E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}} \quad \boxed{E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

Si el potencial es constante en una región del espacio, el campo eléctrico es nulo

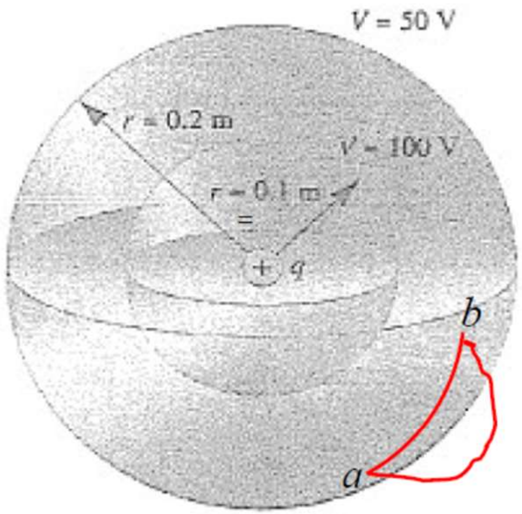
Resumen

	vector	escalar
Interacción entre dos cargas	Fuerza $\vec{F}$ ⟷	Energía potencial U
Efecto que una carga/cargas tienen en un punto del espacio	Campo $\vec{E}$ ⟷	Potencial V

Superficies equipotenciales

Potencial de una carga puntual: $\boxed{V = k\frac{q}{r}}$

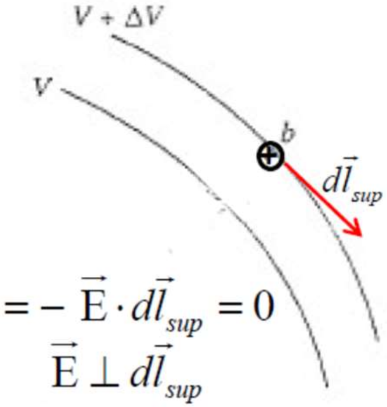
Por ej. para 1,11 nC →



Superficie equipotencial es aquella en la que el potencial tiene el mismo valor.
Si dos puntos **a** y **b** se encuentran sobre una equipotencial:

$$W_{ab} = -q_0 \Delta V = 0$$

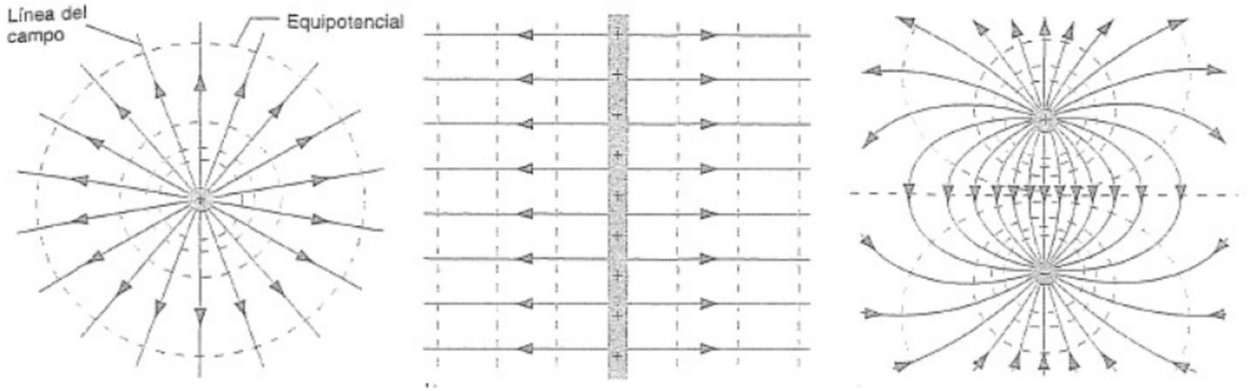
Líneas de campo y superficies equipotenciales



$$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{l}_{sup} = 0$$
$$\vec{E} \perp d\vec{l}_{sup}$$

Se libera una carga + en reposo en ***b*** del equipotencial $V + \Delta V$ → la partícula se acelera en el sentido del campo $\vec{E}$ → lo que hace que aumente su energía cinética, con lo cual disminuye su energía potencial → la partícula “cae” por la diferencia de potencial hacia el equipotencial V → El campo que la acelera deberá ser $\perp$ a la superficie equipotencial en ***b***

Las líneas de CE en todas partes son perpendiculares a las superficies equipotenciales



Potencial de un conductor cargado

Ya conocemos dos propiedades de un conductor cargado aislado (en equilibrio electrostático):

i. El CE es cero en su interior
ii. La carga se distribuye en su superficie externa

$\downarrow$

De ii. la superficie del conductor es una equipotencial*
De i. el interior del conductor está al mismo potencial

iii. El conductor entero está al mismo potencial

* Lo podíamos predecir a partir de que $\vec{E}$ es perpendicular a la superficie del conductor (equilibrio electroestático)

Potencial de un conductor cargado

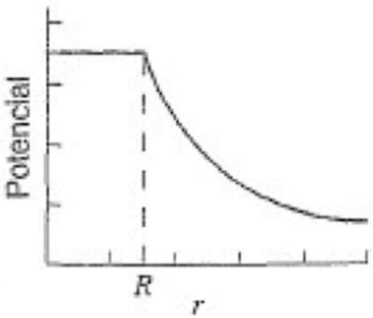
La propiedad ii. vale para cualquier forma del conductor:

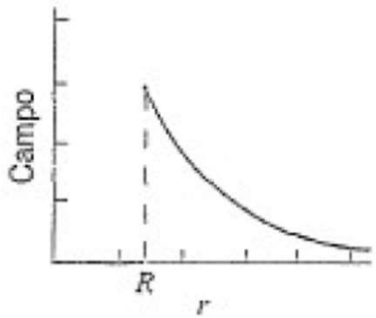
- Si es esférico, σ = cte.
- Si no es esférico, σ ≠ cte.

Para un conductor esférico sólido de radio R y carga *q*:

$$V = k\frac{q}{R} \quad , \quad r < R$$

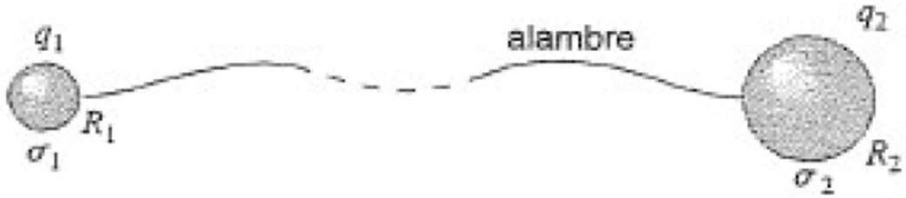
$$V = k\frac{q}{r} \quad , \quad r > R$$





Potencial de un conductor cargado

Para un conductor de forma arbitraria:



$$V = k\frac{q_1}{R_1} = k\frac{q_2}{R_2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1/4\pi R_1^{\,2}}{q_2/4\pi R_2^{\,2}} = \frac{q_1 R_2^{\,2}}{q_2 R_1^{\,2}}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

$\boxed{\sigma_1 > \sigma_2}$ $\rightarrow$ En un conductor irregular la carga tiende a acumularse en los puntos en los que el radio de curvatura es mínimo

Por ley de Gauss sabemos que: $\boxed{\mathrm{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$ Cuanto menor es el radio de la esfera, mayor es el CE fuera de la superficie $\rightarrow$ descarga en corona