Operadores y Matrices

Las Reglas del Juego Cuántico

> *En las próximas dos clases, veremos que **los operadores** tienen dos personalidades: a veces son 'actores' que transforman estados (**evolución**), y a veces son 'jueces' que extraen información (**medición**). Hoy nos enfocaremos en los actores: los operadores unitarios.*

Operadores: Las Acciones en un Espacio Vectorial

Hemos definido los **estados cuánticos** como vectores. Ahora, necesitamos definir las **acciones** que podemos realizar sobre estos estados.

> Un **operador** ($\hat{A}$) es una regla matemática que actúa sobre un vector de estado (un ket) para transformarlo en otro.
>
> $$\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle$$
>
> Los operadores son la forma en que describimos tanto la **evolución** (compuertas) como la **medición** de un sistema cuántico.

¿A qué nos referimos cuando hablamos de evolución de un sistema cuántico?

La Evolución de un Sistema Cuántico

La ejecución de un algoritmo cuántico es un proceso dinámico llamado **evolución**. Funciona de la siguiente manera:

1) **Inicio:** Se prepara el sistema en un estado inicial simple y bien conocido (generalmente, todos los qubits en el estado $|0\rangle$).

2) **Evolución:** Se aplica una secuencia de operadores (**compuertas cuánticas**)

3) **Transformación:** Cada operador actúa sobre el estado actual, transformándolo en uno nuevo. El vector de estado "viaja" y "rota" a través del Espacio de Hilbert, paso a paso.

La Evolución de un Sistema Cuántico

> **Un algoritmo cuántico es una receta de compuertas cuidadosamente diseñada para guiar esta evolución.** El objetivo es que el estado final contenga la solución a nuestro problema, codificada en sus amplitudes de probabilidad, lista para ser revelada por una medición.

Cuando escribimos un circuito en Qiskit, estamos definiendo la **evolución** de nuestros qubits en el tiempo.

La Regla de Oro: Linealidad

Todos los operadores que usaremos en computación cuántica deben ser **lineales**.

Linealidad: Un operador $\hat{A}$ es lineal si cumple:

$$\hat{A}(\alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle) = \alpha(\hat{A}|\psi_1\rangle) + \beta(\hat{A}|\psi_2\rangle)$$

La linealidad es la misma propiedad que vimos en una clase anterior definía sobre las transformaciones lineales. Ello es porque un operador lineal es un caso especial de transformación lineal que va de un espacio vectorial a sí mismo ($T : V \to V$), por lo que es un *endomorfismo*.

Como en cuántica nuestras compuertas transforman estados de un espacio en otros estados del **mismo espacio** (ej: $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$), usaremos el término **operador**.

Describiendo Operadores: El Producto Externo $|v\rangle\langle w|$

Si el producto *interno* $\langle v|w\rangle$ devuelve un **número**, existe una operación complementaria que nos ayuda a **describir y construir** operadores.

Producto Externo (Outer Product)

> El producto de un ket $|v\rangle$ con un bra $\langle w|$, escrito como $|v\rangle\langle w|$, es una herramienta matemática que produce una **matriz**.
>
> $$|v\rangle\langle w| = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^* & \dots & w_n^* \end{pmatrix} = \text{Matriz } n \times n$$
>
> Si bien cualquier producto externo es un operador lineal, no todos representan operaciones cuánticas válidas. Su papel más importante es el de ser un "bloque de construcción" para describir operadores más complejos.

Resumen: La Jerarquía de los Operadores

1. ¿Toda matriz de $n \times n$ es un operador lineal?

> **SÍ.** La operación de multiplicación de una matriz por un vector siempre cumple las condiciones de linealidad (aditividad y homogeneidad).

2. ¿Todo producto externo $|v\rangle\langle w|$ es un operador lineal?

> **SÍ.** Porque el producto externo siempre produce una matriz.

3. ¿Todo operador lineal es una compuerta cuántica válida?

> **NO.** Para ser una compuerta (una evolución física), un operador lineal debe ser **unitario** (lo veremos más adelante). Esto preserva el producto interior y, por ende, la norma de los vectores.

El Producto Externo define una Matriz

Veamos un ejemplo. Consideremos dos kets genéricos en $\mathbb{C}^2$:

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad , \quad |w\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

El bra correspondiente a $|w\rangle$ es $\langle w| = \begin{pmatrix} c^* & d^* \end{pmatrix}$.

El producto externo $|v\rangle\langle w|$ se calcula como la multiplicación de una matriz de 2×1 (ket) por una matriz de 1×2 (bra):

$$|v\rangle\langle w| = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot c^* & a \cdot d^* \\ b \cdot c^* & b \cdot d^* \end{pmatrix}$$

> **El resultado del producto externo es siempre una matriz.** Las matrices serán formas válidas de representar operadores.

¿Cómo actúa el operador $|v\rangle\langle w|$ sobre el ket $|\psi\rangle$?

Para averiguarlo podemos simplemente multiplicar la matriz $|v\rangle\langle w|$ por el ket $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$

Aplicamos la matriz a $|\psi\rangle$:

$$(|v\rangle\langle w|)|\psi\rangle = \begin{pmatrix} ac^* & ad^* \\ bc^* & bd^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} (ac^*)e + (ad^*)f \\ (bc^*)e + (bd^*)f \end{pmatrix}}_{\text{ket resultante}}$$

Pero dado que $(|v\rangle\langle w|)|\psi\rangle$ son dos multiplicaciones de matrices y la multiplicación de matrices es asociativa, podemos establecer la siguiente igualdad:

$$(|v\rangle\langle w|)|\psi\rangle = |v\rangle(\langle w|\psi\rangle)$$

Es decir, podemos calcular primero el producto interno $\langle w|\psi\rangle$ y el resultado (un escalar complejo) se multiplica por el ket $|v\rangle$:

Por lo tanto, el resultado es un vector en la dirección de $|v\rangle$, una versión escalada del vector $|v\rangle$ donde el factor de escala es el número complejo $\langle w|\psi\rangle$

$$|v\rangle(\langle w|\psi\rangle) = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\text{el vector } |v\rangle} \cdot \underbrace{(c^* e + d^* f)}_{\text{el escalar } \langle w|\psi\rangle}$$

Se puede verificar fácilmente, que los dos resultados anteriores son iguales

$$\begin{pmatrix} (ac^*)e + (ad^*)f \\ (bc^*)e + (bd^*)f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot (c^* e + d^* f)$$

Ejercicio: La Acción de un Operador

Vamos a analizar el operador $\hat{A} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$ actuando sobre un qubit genérico $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

Instrucción:

Encuentra el vector resultante $\hat{A}|\psi\rangle$ usando **dos métodos distintos** para demostrar que llegamos al mismo resultado.

Método 1: Enfoque Matricial

1. Construye la matriz de 2×2 para el operador $\hat{A}$.
2. Representa $|\psi\rangle$ como un vector columna.
3. Calcula el resultado multiplicando la matriz por el vector.

Método 2: Enfoque Algebraico

1. Aplica $\hat{A}$ a la expresión $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.
2. Usa la linealidad y las propiedades de ortonormalidad de la base para simplificar la expresión ($\langle 0|0\rangle = 1$, $\langle 0|1\rangle = 0$, etc.).

Solución: La Acción de un Operador

Método 1: Enfoque Matricial

1. **Construcción de la matriz:**
   - Matriz de $|0\rangle\langle 0|$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
   - Matriz de $|1\rangle\langle 1|$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - Matriz de $\hat{A}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. **Cálculo:**

$$\hat{A}|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta \\ 0 \cdot \alpha - 1 \cdot \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

Método 2: Enfoque Algebraico

1. **Aplicación y distribución (linealidad):**
   $$\hat{A}|\psi\rangle = (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$
   $$= \alpha|0\rangle\langle 0|0\rangle - \alpha|1\rangle\langle 1|0\rangle + \beta|0\rangle\langle 0|1\rangle - \beta|1\rangle\langle 1|1\rangle$$
2. **Usando ortonormalidad**
   $(\langle 0|0\rangle = 1, \langle 1|1\rangle = 1, \langle 1|0\rangle = 0, \langle 0|1\rangle = 0)$:
   $$= \alpha|0\rangle \cdot 1 - \alpha|1\rangle \cdot 0 + \beta|0\rangle \cdot 0 - \beta|1\rangle \cdot 1$$
   $$= \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$$

Conclusión:

Ambos métodos nos dan el mismo resultado: $\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$ o $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$.

Este operador deja la componente $|0\rangle$ igual y añade un signo negativo a la componente $|1\rangle$. **En realidad, es el operador Z de Pauli, ¡cuya matriz construiremos en las próximas diapositivas!**

Operadores como Matrices

> Un operador **lineal** queda **completamente definido** por la forma en que actúa sobre los vectores de una base. Si conocemos $\hat{A}|0\rangle$ y $\hat{A}|1\rangle$, conocemos $\hat{A}|\psi\rangle$ para cualquier $|\psi\rangle$.

La receta para construir la matriz M de un operador $\hat{A}$ es:

1. **Primera Columna:** El vector resultante $\hat{A}|0\rangle$.
2. **Segunda Columna:** El vector resultante $\hat{A}|1\rangle$.

$$M = \begin{pmatrix} | & | \\ \hat{A}|0\rangle & \hat{A}|1\rangle \\ | & | \end{pmatrix}$$

La fórmula para cada elemento es $M_{ij} = \langle i|\hat{A}|j\rangle$.

La "Fórmula Sándwich": $M_{ij} = \langle i|\hat{A}|j\rangle$

Esta fórmula es una forma compacta y poderosa de describir cada elemento de la matriz de un operador. Vamos a desglosarla.

El elemento M_{ij} (ubicado en la fila i, columna j) nos dice:

> **"Toma el j-ésimo vector de la base, $|j\rangle$, aplícale el operador $\hat{A}$. Luego, toma ese vector resultante y proyecta sobre el i-ésimo vector de la base, $\langle i|$. El número complejo resultante es el elemento M_{ij}."**

$M_{ij} = \langle i|\hat{A}|j\rangle$ es la "cantidad" (amplitud de probabilidad) de la componente $|i\rangle$ que hay en el vector transformado $\hat{A}|j\rangle$.

Para una base genérica $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_n\rangle\}$, la matriz del operador $\hat{A}$ se ve así:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \langle u_1|\hat{A}|u_1\rangle & \langle u_1|\hat{A}|u_2\rangle & \ldots & \langle u_1|\hat{A}|u_n\rangle \\ \langle u_2|\hat{A}|u_1\rangle & \langle u_2|\hat{A}|u_2\rangle & \ldots & \langle u_2|\hat{A}|u_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle u_n|\hat{A}|u_1\rangle & \ldots & & \langle u_n|\hat{A}|u_n\rangle \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Construyendo la Matriz del Operador $\hat{Z}$

Vamos a aplicar la "receta" para construir la matriz del operador $\hat{Z}$ sabiendo que $\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle$ y $\hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$

1. Calculamos la primera columna:

$$\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Calculamos la segunda columna:

$$\hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Ensamblamos la matriz:

$$Z = \begin{pmatrix} \hat{Z}|0\rangle & \hat{Z}|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las Compuertas Pauli: El Kit de Herramientas Básico

Hay un conjunto de operadores que forman la base del álgebra de un qubit. Tres de ellos son las **Compuertas de Pauli**. A menudo se incluye la Identidad.

1. Identidad ($\hat{I}$)

- **Acción:** No hace nada. Es la operación nula.
- $\hat{I}|0\rangle = |0\rangle$, $\hat{I}|1\rangle = |1\rangle$
- **Matriz:** $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Pauli-X (NOT o Bit-Flip) También se conoce como $\hat{\sigma}_x$

- **Acción:** Invierte el estado. Análogo a la compuerta NOT clásica.
- $\hat{X}|0\rangle = |1\rangle$, $\hat{X}|1\rangle = |0\rangle$
- **Matriz:** $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Compuertas Pauli (cont.)

3. Pauli-Z (Phase-Flip) También se conoce como $\hat{\sigma}_z$

- **Acción:** Introduce una fase de -1 al estado $|1\rangle$.
- $\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle$, $\hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$
- **Matriz:** $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. Pauli-Y También se conoce como $\hat{\sigma}_y$

- **Acción:** Realiza un Bit-Flip y aplica fases complejas.
- $\hat{Y}|0\rangle = i|1\rangle$, $\hat{Y}|1\rangle = -i|0\rangle$
- **Matriz:** $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

La Compuerta Más Importante: Hadamard

La Compuerta de Hadamard ($\hat{H}$)

- **Acción:** ¡Crea superposiciones! Es la compuerta más importante para iniciar algoritmos cuánticos.
- $\hat{H}|0\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$
- $\hat{H}|1\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} = |-\rangle$
- **Matriz:** $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 1: Aplicando Compuertas Pauli

Considera un qubit en un estado de superposición genérico:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Instrucción:

1. Calcula el estado resultante de aplicar la compuerta **Pauli-X** al estado $|\psi\rangle$. ¿Qué le ocurre a las amplitudes α y β?
2. Calcula el estado resultante de aplicar la compuerta **Pauli-Z** al estado $|\psi\rangle$. ¿Qué le ocurre a las amplitudes?

Usa la multiplicación de la matriz de la compuerta por el vector de estado para encontrar los resultados.

Solución Ejercicio 1: Compuertas Pauli

1. Aplicando la compuerta X (Bit-Flip):

$$X|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \beta \\ 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

El estado resultante es $\beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$.

> **Conclusión:** La compuerta X **intercambia** las amplitudes de probabilidad entre los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

2. Aplicando la compuerta Z (Phase-Flip):

$$Z|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta \\ 0 \cdot \alpha - 1 \cdot \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}$$

El estado resultante es $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$.

> **Conclusión:** La compuerta Z deja la amplitud de $|0\rangle$ igual, pero **invierte el signo (aplica una fase)** de la amplitud de $|1\rangle$.

Ejercicio 2: La Magia de Hadamard

La compuerta Hadamard es especial. Vamos a explorar su acción sobre los estados de la base de Hadamard, $|+\rangle$ y $|-\rangle$. Resolver por medio del enfoque matricial.

Recordatorio:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Instrucción:

1. Calcula el resultado de aplicar la compuerta Hadamard al estado $|+\rangle$. Es decir, calcula $H|+\rangle$.
2. Calcula el resultado de aplicar la compuerta Hadamard al estado $|-\rangle$. Es decir, calcula $H|-\rangle$.

¿Qué observas?

Solución Ejercicio 2: Hadamard

1. Aplicando Hadamard a $|+\rangle$:

$$H|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Primero, multiplicamos los escalares: $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$

2. Aplicando Hadamard a $|-\rangle$:

$$H|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 1 + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

Conclusión: La compuerta Hadamard transforma los estados de la base computacional a la base de Hadamard ($H|0\rangle = |+\rangle, H|1\rangle = |-\rangle$) y viceversa ($H|+\rangle = |0\rangle, H|-\rangle = |1\rangle$). ¡Actúa como su propia inversa! ($H^2 = I$).

Ejercicio 3: Enfoque Algebraico

Ahora vamos a resolver un problema usando únicamente la manipulación algebraica de bras y kets, sin construir las matrices explícitamente.

Datos:

- El operador Pauli-Y se puede escribir con productos externos como:

$$\hat{\sigma}_y = -i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|$$

- Considera un qubit en el siguiente estado:

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle$$

Instrucción:
Calcula el estado resultante $\hat{\sigma}_y|\psi\rangle$ aplicando el operador a la expresión del ket y usando las propiedades de linealidad y ortonormalidad de la base.

Solución Ejercicio 3: Enfoque Algebraico

Aplicamos el operador $\hat{\sigma}_y$ al estado $|\psi\rangle$:

$$\hat{\sigma}_y|\psi\rangle = (-i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|)(\frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{i}{2}|1\rangle)$$

Usamos la linealidad y la distributiva :

$$= -\frac{\sqrt{3}i}{2}|0\rangle\langle 1|0\rangle + \frac{\sqrt{3}i}{2}|1\rangle\langle 0|0\rangle - \frac{i^2}{2}|0\rangle\langle 1|1\rangle + \frac{i^2}{2}|1\rangle\langle 0|1\rangle$$

Usamos la ortonormalidad ($\langle 1|0\rangle = 0, \langle 0|0\rangle = 1, \langle 1|1\rangle = 1, \langle 0|1\rangle = 0$):

$$= \frac{\sqrt{3}i}{2}|1\rangle - \frac{i^2}{2}|0\rangle$$

Finalmente, sabiendo que $i^2 = -1$:

$$= \frac{\sqrt{3}i}{2}|1\rangle - \frac{-1}{2}|0\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}i}{2}|1\rangle$$

La Condición para ser una Compuerta Válida

Hemos visto varias compuertas (X, Z, H) que transforman estados cuánticos. Pero, ¿puede cualquier matriz ser una compuerta cuántica válida? **La respuesta es no.**

Hay una condición fundamental que toda evolución cuántica debe respetar.

El Principio Físico:

> La aplicación de una compuerta **no puede alterar la probabilidad total** del sistema. Si un estado comienza con norma 1, debe seguir teniendo norma 1 después de la transformación.
>
> $$\text{Si } \|\psi\| = 1, \text{ entonces } \|\hat{U}\psi\| \text{ debe ser } 1$$

Las transformaciones que garantizan esto se llaman **unitarias**.

Operadores Unitarios

Definición Formal:

Un operador $\hat{U}$ es **Unitario** si su daga (adjunto hermitiano) es igual a su inverso.

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$$

La forma más común de verificar esto es comprobar si:

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I}$$

Antes de proseguir con las propiedades de los **operadores unitarios** recordemos algunas propiedades del adjunto hermitiano (†)

El Adjunto Hermitiano (Operación Daga †)

Recordemos esta operación, que ya apareció cuando definimos el "bra" a partir del "ket". Consiste en dos pasos: **transponer** y luego **conjugar complejamente**.

Propiedades para Kets y Bras (que ya conocemos):

- La daga de un ket es un bra: $(|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|$
- La daga de un bra es un ket: $(\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle$
- Es distributiva sobre la suma: $(|v\rangle + |w\rangle)^\dagger = \langle v| + \langle w|$
- Es antilineal con los escalares: $(k|v\rangle)^\dagger = k^*\langle v|$

El Adjunto Hermitiano (Daga †): Definición Formal

Hemos visto que la operación daga (†) es, en la práctica, **transponer y conjugar** una matriz. Esa es la **receta para calcularla**.

Pero su **definición fundamental** es más profunda y no depende de las matrices.

> **Definición Formal:**
>
> Un operador $\hat{A}^\dagger$ es el **adjunto** de $\hat{A}$ si cumple la siguiente regla para **cualesquiera** dos vectores $|a\rangle$ y $|b\rangle$:
>
> $$\langle a|\hat{A}^\dagger|b\rangle = (\langle b|\hat{A}|a\rangle)^*$$

La Intuición:

> Esta fórmula nos dice cómo se comporta un operador al "cruzar" el producto interior. Mover un operador de un lado al otro del "sándwich" equivale a tomar su daga ($\hat{A} \leftrightarrow \hat{A}^\dagger$) y conjugar el resultado numérico.

De la Definición Formal a la Regla Práctica

La definición formal puede parecer abstracta, pero tiene sus ventajas:

- Es la definición universal, independiente de la base o de si usamos matrices.
- Se utiliza en demostraciones de propiedades fundamentales.

Sin embargo, en computación cuántica, usamos operadores en espacios de dimensión finita (representados por matrices). Aquí la **única** operación que satisface la definición formal es nuestra receta:

> **Adjunto Hermitiano (†) = Transponer + Conjugar Complejamente**

Como los kets, bras y operadores tienen representación matricial, las propiedades del adjunto hermitiano sobre matrices aplica directamente a todos ellos.

Propiedades Generales del Adjunto Hermitiano (†)

Estas son las reglas fundamentales de la operación daga para **matrices arbitrarias** A y B, y un escalar complejo k.

- **Aditividad:** La daga de una suma es la suma de las dagas.

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$$

- **Interacción con Escalares (Antilinealidad):**

$$(kA)^\dagger = k^* A^\dagger$$

- **Producto de Matrices:** La daga de un producto invierte el orden.

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

Aplicación a nuestros objetos cuánticos:

- Un operador en producto externo $\hat{A} = |v\rangle\langle w|$ es un producto de dos matrices (una matriz $n \times 1$ multiplicada por una matriz $1 \times n$). Aplicando la regla del producto:

$$\hat{A}^\dagger = (|v\rangle\langle w|)^\dagger = (\langle w|)^\dagger(|v\rangle)^\dagger = |w\rangle\langle v|$$

Ejercicio: Calculando el Adjunto Hermitiano

Vamos a practicar la operación daga (†) con un operador genérico y con una de las compuertas que ya conocemos.

Instrucción:

1. Encuentra el adjunto Hermitiano ($\hat{A}^\dagger$) del siguiente operador:

$$\hat{A} = 2i|0\rangle\langle 0| + (1-i)|0\rangle\langle 1|$$

2. Encuentra el adjunto Hermitiano de la compuerta **Pauli-Y**, cuya matriz es $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. ¿Qué puedes concluir sobre el operador Y?

> **Pista para el punto 1:** Usa las propiedades $(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$, $(kA)^\dagger = k^* A^\dagger$ y $(|v\rangle\langle w|)^\dagger = |w\rangle\langle v|$.
> **Pista para el punto 2:** Recuerda que la daga de una matriz es su transpuesta conjugada.

Solución: Calculando el Adjunto Hermitiano

1. Adjunto de $\hat{A} = 2i|0\rangle\langle 0| + (1-i)|0\rangle\langle 1|$

Aplicamos la daga a toda la expresión y usamos la aditividad:

$$\hat{A}^\dagger = (2i|0\rangle\langle 0|)^\dagger + ((1-i)|0\rangle\langle 1|)^\dagger$$

Ahora aplicamos las reglas a cada término:

$$\begin{aligned} &= (2i)^*(|0\rangle\langle 0|)^\dagger + (1-i)^*(|0\rangle\langle 1|)^\dagger \\ &= (-2i)|0\rangle\langle 0| + (1+i)|1\rangle\langle 0| \end{aligned}$$

2. Adjunto de la Matriz Pauli-Y:

La matriz es $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

- **Paso 1: Transponer la matriz.** $Y^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$
- **Paso 2: Conjugar cada elemento.** $Y^\dagger = (Y^T)^* = \begin{pmatrix} 0^* & i^* \\ (-i)^* & 0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

> **Conclusión:** Hemos encontrado que $Y^\dagger = Y$. Esta propiedad es importante, veremos luego que a los operadores que la cumplen se los llama **operadores hermitianos**.

Seguimos con los Operadores Unitarios

Propiedad clave de los Operadores Unitarios

> Los operadores unitarios tienen la propiedad importantísima de **preservar la norma** ($\|\hat{U}\psi\| = \|\psi\|$).

Dado que la evolución de un estado cuántico debe preservar la probabilidad total (norma al cuadrado = 1), **todas las compuertas cuánticas (X, H, CNOT, etc.) deben ser operadores Unitarios.**

¿Qué Significa "Preservar la Norma"?

En la diapositiva anterior, establecimos que las compuertas deben ser **unitarias** para preservar la norma ($\|\hat{U}\psi\| = \|\psi\|$).

Pero, ¿qué tipo de transformación hace esto? ¿Cuál es la **naturaleza geométrica** de una compuerta cuántica?

La respuesta reside en una propiedad matemática más profunda:

> Los operadores unitarios **preservan el producto interior**. La preservación de la norma es una **consecuencia** de esto (*recordar que la norma se define por medio del producto interior*).

Vamos a desglosar qué significa "preservar el producto interior".

Preservar el Producto Interior

Esta propiedad significa que si tomamos dos vectores cualesquiera, $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$, y les aplicamos la **misma** compuerta $\hat{U}$, el producto interior entre los vectores transformados es **idéntico** al original.

$$\langle \hat{U}\psi | \hat{U}\phi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle$$

La Intuición Geométrica:

> Una compuerta cuántica actúa como una **rotación rígida** del espacio de Hilbert. Imagina tomar todo el espacio de estados y girarlo sin estirar, encoger o deformar nada.
>
> - Las "longitudes" de los vectores no cambian.
> - Las "relaciones" entre distintos vectores (sus proyecciones y fases relativas) tampoco cambian. Sí puede cambiar la fase relativa entre las componentes (α y β) de un mismo vector.

Esta es la característica fundamental de toda evolución cuántica.

De la Definición a la Consecuencia

Esta propiedad de "rotación rígida" (conservación de la norma) es consecuencia directa de la definición de unitariedad ($\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I}$).

Demostración:

- Escribiremos $\langle \hat{U}\psi | \hat{U}\phi \rangle$ como una abreviatura de $\langle \, (\hat{U}|\psi\rangle) \, | \, (\hat{U}|\phi\rangle) \, \rangle$.
- Usaremos esta propiedad: el bra de $\hat{U}|\psi\rangle$ es $\langle\psi|\hat{U}^\dagger$.
- Por lo tanto: $\langle \hat{U}\psi | \hat{U}\phi \rangle = \langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{I} | \phi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle$. (se conserva el producto interior)

Ahora, la conexión final con la norma:

Recordemos que la norma se calcula en función del producto interior ($\|\psi\|^2 = \langle \psi | \psi \rangle$). Por lo tanto podemos afirmar que:

$$\|\hat{U}\psi\|^2 = \langle \hat{U}\psi | \hat{U}\psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = \|\psi\|^2$$

> ¡Hemos demostrado que la preservación del producto interior **implica** la preservación de la norma!

Ejercicio 1: ¿Es esta una Compuerta Cuántica Válida?

Supongamos que un ingeniero propone una nueva compuerta, el operador $\hat{A}$, definido por su acción sobre la base computacional:

1. Transforma $|0\rangle$ en el estado $|+\rangle$: $\hat{A}|0\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.
2. Deja el estado $|1\rangle$ sin cambios: $\hat{A}|1\rangle = |1\rangle$.

A primera vista, parece razonable: ambos resultados, $|+\rangle$ y $|1\rangle$, son estados normalizados.

Pregunta:

¿Es $\hat{A}$ un operador unitario? ¿Representa una evolución cuántica válida?

Instrucción:

Usa la propiedad fundamental de los operadores unitarios: la **preservación del producto interior**. Comprueba si $\langle \hat{A}0|\hat{A}1\rangle$ es igual a $\langle 0|1\rangle$.

> Escribimos $\langle \hat{A}0|\hat{A}1\rangle$ como una abreviatura de $\langle (\hat{A}|0\rangle)|(\hat{A}|1\rangle)\rangle$.

Solución: Verificando la Unitaridad

1. Calculamos el producto interior original:

La base computacional es ortogonal, por lo que sabemos que:

$$\langle 0|1\rangle = 0$$

Este es el valor que el producto interior **debería** tener después de la transformación.

Solución: Verificando la Unitaridad (Continuación)

2. Calculamos el producto interior de los vectores transformados:

Necesitamos calcular $\langle \hat{A}0|\hat{A}1\rangle$.

- El primer vector transformado es $|\psi'\rangle = \hat{A}|0\rangle = |+\rangle$.
- El segundo vector transformado es $|\phi'\rangle = \hat{A}|1\rangle = |1\rangle$.
  El producto interior es $\langle +|1\rangle$.

$$\langle +|1\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|)\right)|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|1\rangle + \langle 1|1\rangle)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Solución: Verificando la Unitaridad (Continuación)

3. Comparamos los resultados:

$$\text{Original: } \langle 0|1\rangle = 0$$

$$\text{Transformado: } \langle \hat{A}0|\hat{A}1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Como $0 \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$, el producto interior **no se preservó**.

> **Conclusión:** El operador $\hat{A}$ **no es unitario**. No es una compuerta cuántica válida porque, aunque transforma estados normalizados en otros estados normalizados, **no preserva la ortogonalidad**. "Deforma" el espacio de estados.

Ejercicio 2: Verificando las Compuertas Fundamentales

Hemos afirmado que todas las compuertas cuánticas deben ser operadores unitarios. Ahora, vamos a demostrarlo para las compuertas que hemos presentado.

Instrucción:
Demuestra que los operadores de Pauli y Hadamard son unitarios verificando la condición $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I}$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

H = $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

En la siguiente diapositiva, resolveremos el caso de la compuerta de Hadamard como ejemplo.

Solución: Demostración para la Compuerta Hadamard

Vamos a demostrar que $H^\dagger H = I$.

1. Encontramos el adjunto Hermitiano ($H^\dagger$):

La matriz de Hadamard, $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, tiene todos sus elementos reales. Por lo tanto, el conjugado complejo no afecta a sus componentes. Solo necesitamos trasponerla.

$$H^\dagger = (\frac{1}{\sqrt{2}})^* \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = H$$

> ¡La compuerta Hadamard es Hermitiana! ($H^\dagger = H$). Es una propiedad importante que veremos más adelante.

2. Calculamos el producto $H^\dagger H$:

Como $H^\dagger = H$, estamos calculando $H \cdot H$:

$$H^\dagger H = H^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) & (1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1))\\ (1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1) & (1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1))\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I$$

Hemos demostrado que $H^\dagger H = I$, por lo tanto, la compuerta de Hadamard es unitaria. ✅

Otra Consecuencia de la Unitariedad: La Reversibilidad Cuántica

Recordemos la definición:

Un operador $\hat{U}$ es unitario si su daga es su inverso:

$$\hat{U}^\dagger = \hat{U}^{-1}$$

Esto significa que para cada compuerta $\hat{U}$, **siempre existe una operación inversa**, $\hat{U}^\dagger$, que "deshace" perfectamente su efecto.

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} |\psi\rangle = \hat{I} |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

> **Toda operación en un computador cuántico es reversible.** A partir del estado final y conociendo la compuerta aplicada, siempre podemos reconstruir el estado inicial.

El Contraste con la Computación Clásica

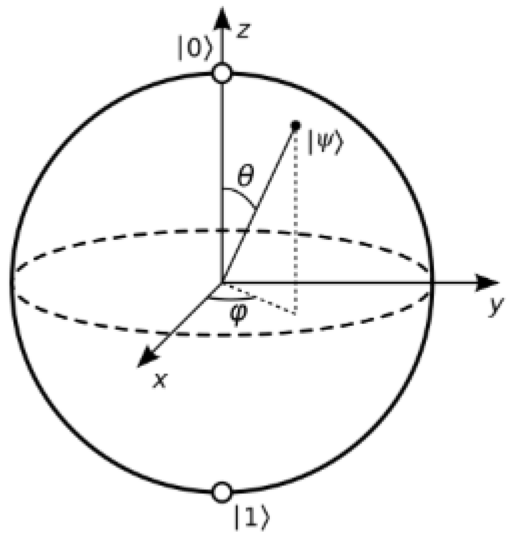
La mayoría de las compuertas lógicas clásicas **no son reversibles**. Si la salida de una compuerta AND es **0**, ¿cuáles eran las entradas? Es **imposible** saberlo con certeza. **La información se ha perdido.**

En la Computación Cuántica:

- La pérdida de información está prohibida por las leyes de la física (y la matemática de los operadores unitarios).
- No podemos tener una compuerta que tome dos qubits y devuelva uno solo. **Todas las compuertas deben tener el mismo número de qubits de entrada y de salida**.

> La **reversibilidad** no es una elección de diseño, es una **ley fundamental** de la evolución cuántica.

Esfera de Bloch - Visualizando un Qubit en 3D



$$|\psi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle$$

$$\text{con } \theta \in [0, \pi] \text{ y } \varphi \in [0, 2\pi]$$

Visualizando un Qubit en 3D

El estado de un qubit, $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, se define por dos números complejos, α y β (4 números reales).

$$\alpha = a + bi \quad , \quad \beta = c + di$$

Debido a ciertas **restricciones y redundancias** en la mecánica cuántica, podremos expresar a $|\psi\rangle$ en función de **dos números reales** (los ángulos θ y φ en una esfera 3D).

$$|\psi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle$$

Veremos paso a paso como se llega a esta expresión

Paso 1: Usar la Condición de Normalización

La primera restricción es la que ya conocemos. Las probabilidades deben sumar 1:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

Los módulos de α y β no son independientes

Para dar el siguiente paso, reescribiremos α y β en su forma polar:

$$\alpha = r_\alpha e^{i\varphi_\alpha} \quad , \quad \beta = r_\beta e^{i\varphi_\beta}$$

La condición de normalización se convierte en:

$$r_\alpha^2 + r_\beta^2 = 1$$

Ahora tenemos 3 parámetros independientes: r_α, r_β (que están ligados por la ecuación) y dos fases, φ_α y φ_β.

Paso 2: Eliminar la Fase Global

Una de las propiedades más importantes de la mecánica cuántica es que la **fase global** de un estado no tiene consecuencias físicas.
El estado $|\psi\rangle$ y el estado $e^{i\gamma}|\psi\rangle$ son físicamente indistinguibles.

Podemos usar esta libertad para simplificar nuestro estado.
Multipliquemos $|\psi\rangle$ por $e^{-i\varphi_\alpha}$:

$$|\psi'\rangle = e^{-i\varphi_\alpha}|\psi\rangle = (e^{-i\varphi_\alpha}r_\alpha e^{i\varphi_\alpha})|0\rangle + (e^{-i\varphi_\alpha}r_\beta e^{i\varphi_\beta})|1\rangle$$

$$|\psi'\rangle = r_\alpha|0\rangle + r_\beta e^{i(\varphi_\beta - \varphi_\alpha)}|1\rangle$$

El coeficiente de $|0\rangle$ es ahora un **número real positivo**, r_α.
El coeficiente de $|1\rangle$ ahora solo depende de la **fase relativa**, $\varphi = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$.

Hemos pasado de 4 números a solo 3: r_α, r_β y la fase relativa φ.

Paso 3: El Ángulo Polar θ

Nuestro estado ahora es $|\psi\rangle = r_\alpha|0\rangle + r_\beta e^{i\varphi}|1\rangle$, con la condición $r_\alpha^2 + r_\beta^2 = 1$.

Esta condición es la ecuación de un **círculo unitario**. Cualquier punto (x, y) en un círculo unitario puede ser parametrizado por un ángulo, por ejemplo, $x = \cos(\theta'), y = \sin(\theta')$.

Podemos hacer lo mismo con r_α y r_β. Por convención, usamos un ángulo $\frac{\theta}{2}$:

$$r_\alpha = \cos(\frac{\theta}{2}) \quad , \quad r_\beta = \sin(\frac{\theta}{2})$$

Esta sustitución **satisface automáticamente** la condición de normalización, ya que $\cos^2(\frac{\theta}{2}) + \sin^2(\frac{\theta}{2}) = 1$.

El rango de θ se elige entre 0 y π para cubrir todos los valores posibles de r_α y r_β (desde 0 hasta 1). El ángulo $\frac{\theta}{2}$ está en el primer cuadrante, así r_α y r_β son ambos no negativos, como se requiere (son los módulos de α y β).

Hemos reducido los dos parámetros r_α, r_β a **un solo ángulo**, θ.

La Representación General de un Qubit

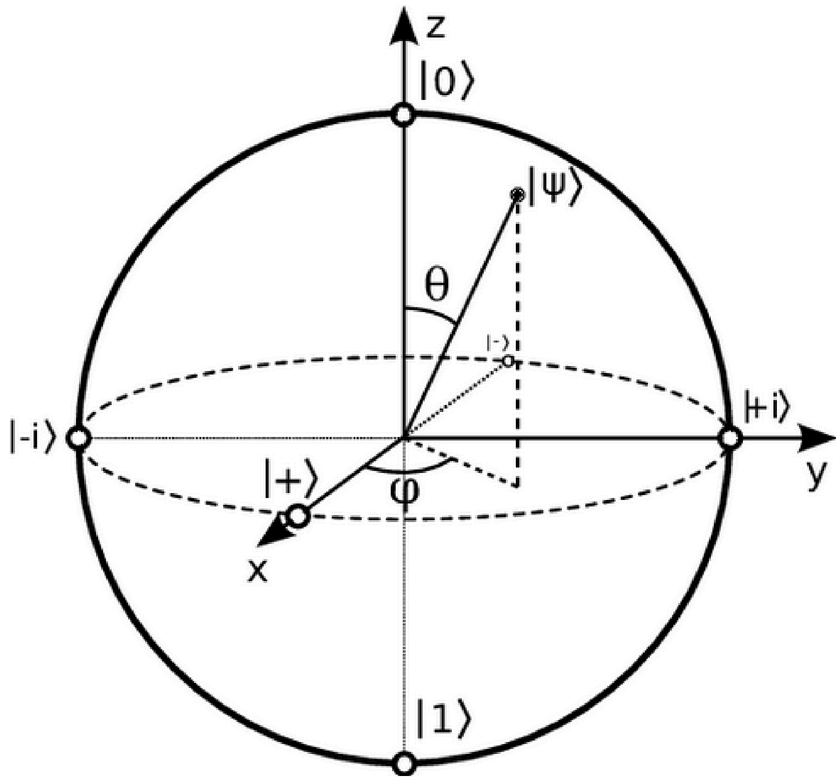
Juntando todas las piezas, hemos demostrado que cualquier estado de qubit, después de eliminar las redundancias, se puede escribir como:

$$|\psi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle$$

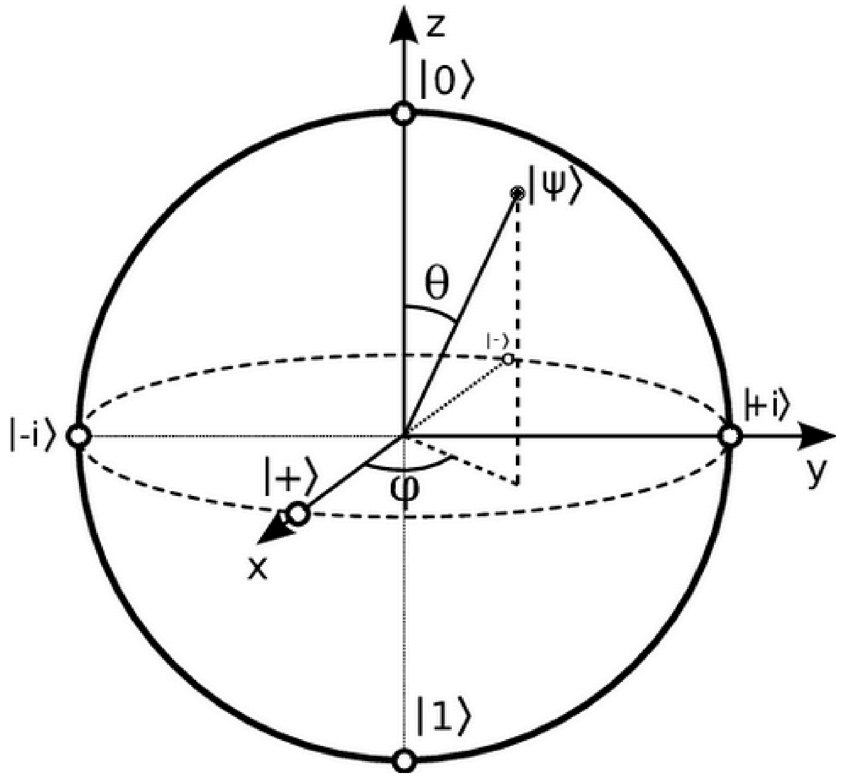
¡Hemos pasado de 4 números reales a solo **dos ángulos**, θ y φ!

Estos dos ángulos tienen una interpretación geométrica directa: son las coordenadas de un punto en la superficie de una esfera de radio 1.

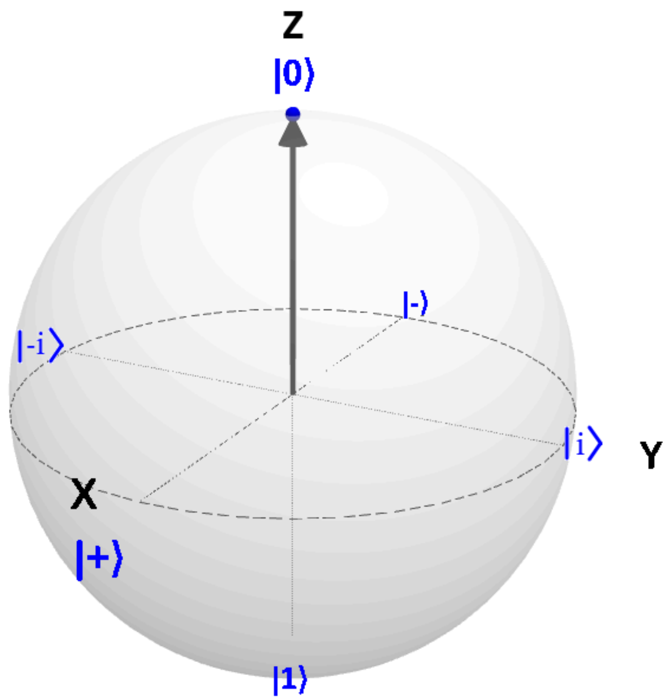
Esta es la Esfera de Bloch.
Una herramienta de visualización para el estado de un único qubit.



- **Ángulo Polar (θ):** Mide la "latitud" desde el polo norte (eje Z).
  - $\theta = 0$ corresponde al estado $|0\rangle$ (polo norte).
  - $\theta = \pi$ (180°) corresponde al estado $|1\rangle$ (polo sur).
  - $\theta = \pi/2$ (90°) corresponde a una superposición equitativa (el ecuador).



- **Ángulo Azimutal (φ):** Mide la "longitud" (rotación alrededor del eje Z).
  - Es la **fase relativa** entre las componentes $|0\rangle$ y $|1\rangle$.
  - **Los estados en el ecuador ($\theta = \pi/2$) son de especial interés:**
    - $\varphi = 0$ define el estado $|+\rangle$ (punto en el eje X positivo).
    - $\varphi = \pi$ define el estado $|-\rangle$ (punto en el eje X negativo).
    - $\varphi = \pi/2$ define el estado $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ (punto en el eje Y positivo).



https://javafxpert.github.io/grok-bloch/

> Los estados ortogonales se ven en puntos opuestos de la esfera: $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son polos opuestos en el eje Z; $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son opuestos en el eje X y $|i\rangle$ y $|-i\rangle$ son opuestos en el eje Y.

Ejercicio Final: Identidades de Compuertas

Objetivo:

Demostrar que la secuencia de compuertas Hadamard, seguida de Z, seguida de otra Hadamard, es equivalente a la compuerta Pauli-X.

$$HZH = X$$

Instrucción:

1. **Demostración Analítica:** Calcula el producto de las matrices correspondientes a H, Z y H. Verifica que la matriz resultante es idéntica a la matriz X.
2. **Verificación Visual (usando una herramienta visual esfera de Bloch):** Verificar que aplicar en secuencia la compuerta H, luego Z y luego H tiene el mismo efecto sobre cualquier ket que aplicar la compuerta X

Solución: Demostración de $HZH = X$

1. Demostración Analítica (Multiplicación de Matrices)

Recordamos las matrices:

$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Primero, calculemos el producto ZH:

$$ZH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora, multiplicamos el resultado por H por la izquierda ($H \cdot (ZH)$):

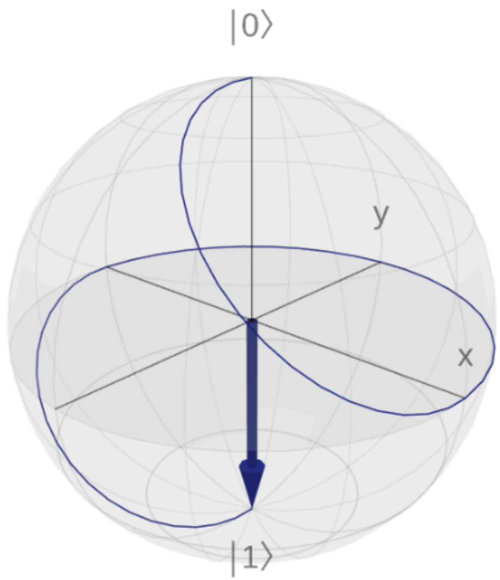
$$H(ZH) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1-1) & (1+1) \\ (1+1) & (1-1) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¡El resultado es exactamente la matriz X! ✅

Solución: Demostración de $HZH = X$

2. **Verificación Visual (usando una herramienta visual esfera de Bloch)**



Este es el resultado de aplicar **H** luego **Z** y luego **H** al ket $|0\rangle$

https://bloch.kherb.io/

> Es una demostración visual que se puede obtener el comportamiento de la puerta X aplicando secuencialmente las compuertas H luego Z y luego H nuevamente.