Medición y Autovalores

La Matemática para Extraer Información Cuántica

De la Evolución a la Medición

Ya estudiamos la **evolución** de un sistema cuántico.

- Vimos que está descrita por **operadores unitarios** (compuertas).
- Aprendimos que la evolución es como una **rotación rígida** y es reversible.

Pero, ¿cómo obtenemos un resultado de un cómputo? Necesitamos **medir**.

> El acto de medir es fundamentalmente diferente a la evolución. Es irreversible y extrae información clásica de un estado cuántico.

Para entender la medición, necesitamos una nueva y poderosa herramienta del álgebra lineal: los **autovalores y autovectores**.

Las Tres Preguntas Clave de la Medición

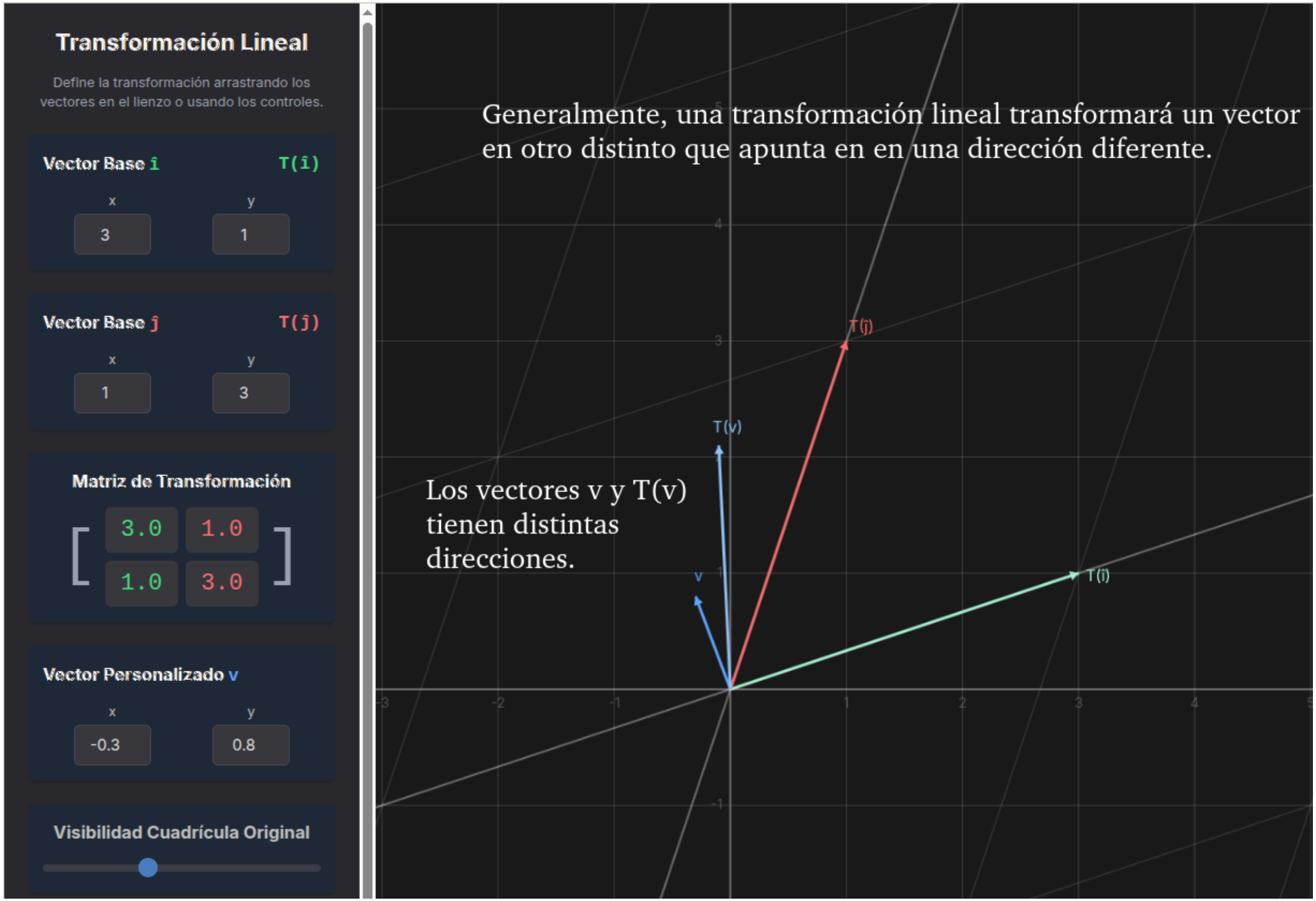
Para entender matemáticamente la medición, debemos responder tres preguntas fundamentales. El álgebra lineal nos dará la herramienta para cada una.

1. **¿Qué resultados podemos obtener?**
   - *Herramienta:* **Autovalores**. Veremos que deben ser números reales, lo que nos llevará a los **Operadores Hermitianos**.
2. **¿En qué estado queda el sistema después de la medición?**
   - *Herramienta:* **Autovectores**. Veremos que deben formar una base completa (**Teorema Espectral**).
3. **¿Cómo calculamos las probabilidades de cada resultado?**
   - *Herramienta:* **Proyectores** y la **Regla de Born**.

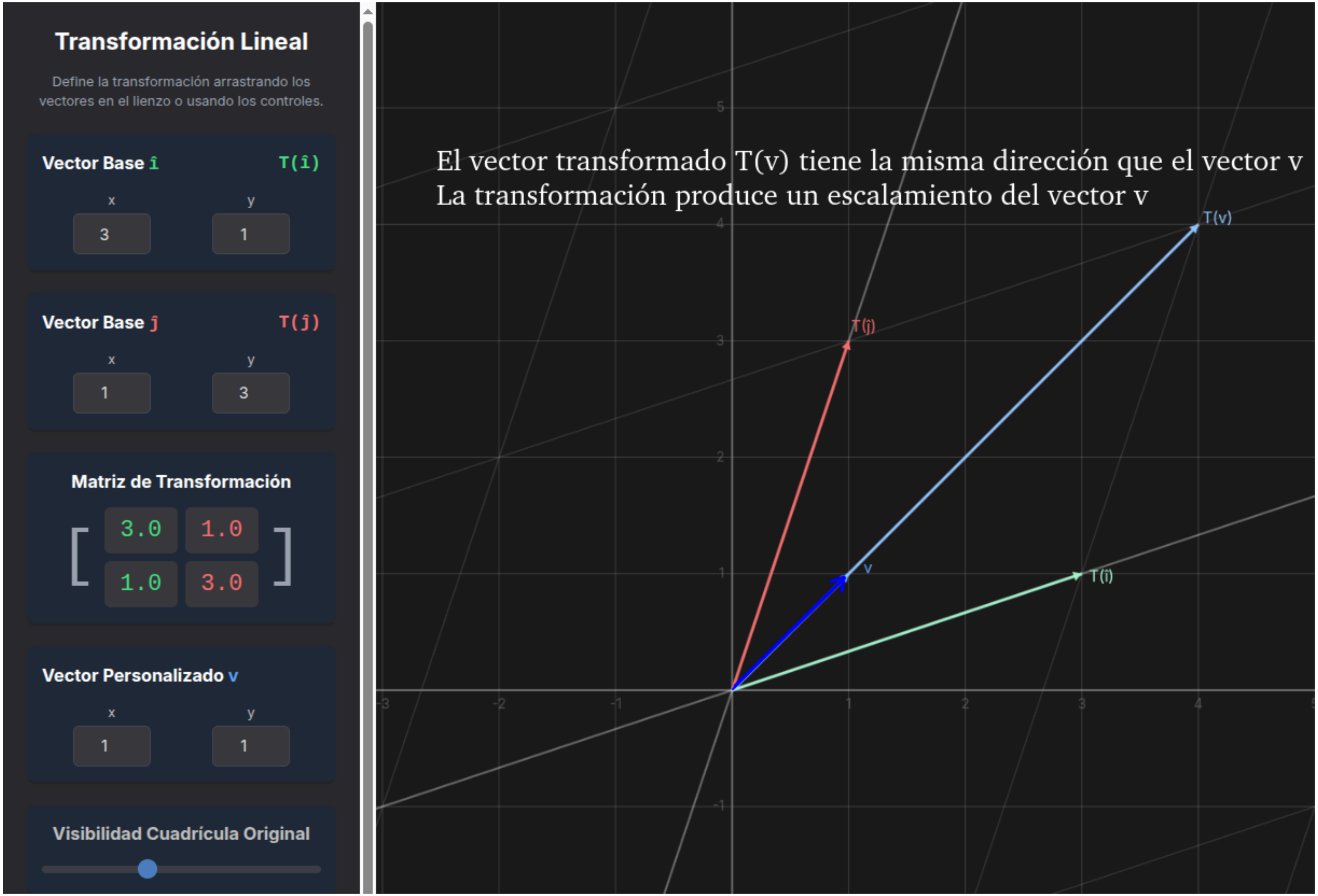
Esta clase es el viaje para responder a estas tres preguntas.

La Idea Central: Vectores Especiales

Cuando un operador (o una matriz) actúa sobre un vector, generalmente lo transforma en un vector completamente nuevo, que apunta en una dirección diferente.


Transformación Lineal
Define la transformación arrastrando los vectores en el lienzo o usando los controles.
Vector Base î
T(î)
x
y
3
1
Vector Base ĵ
T(ĵ)
x
y
1
3
Matriz de Transformación
3.0 1.0
1.0 3.0
Vector Personalizado v
x
y
-0.3
0.8
Visibilidad Cuadrícula Original
Generalmente, una transformación lineal transformará un vector en otro distinto que apunta en en una dirección diferente.
Los vectores v y T(v) tienen distintas direcciones.
T(j)
T(v)
v
T(i)

Sin embargo, para casi todo operador, existen ciertos **vectores especiales** que la transformación los afecta de una manera especial. Al aplicar el operador, estos vectores **no cambian su dirección**. Lo único que les ocurre es que son re-escalados (estirados o encogidos).



El vector transformado T(v) tiene la misma dirección que el vector v
La transformación produce un escalamiento del vector v

- Estos vectores que solo son re-escalados se llaman **autovectores** (o *eigenvectors*).
- El factor por el cual son re-escalados se llama **autovalor** (o *eigenvalue*).

Ejercicio

Utilizar la herramienta transformacionLinealApp para encontrar gráficamente autovectores de una transformación lineal. Para ello podemos mover el vector v hasta hacer que $T(v)$ y v tengan la misma dirección.

1. Buscar transformaciones que no tengan ningún autovector
2. Buscar transformaciones en las que todo vector sea un autovector

Definición Formal

Un vector ***no nulo*** $|\psi\rangle$ es un **autovector** de un operador $\hat{A}$ si existe un escalar λ tal que:

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

$\hat{A}$: El operador (la transformación).
$|\psi\rangle$: El autovector (el vector que mantiene su "eje").
λ: Es el autovalor (el factor de escala) correspondiente a $|\psi\rangle$.

> Nuestro objetivo será, dado un operador $\hat{A}$, encontrar su conjunto de autovectores y los autovalores asociados.

¿Cómo Encontrarlos? La Ecuación Característica

Para encontrar los autovalores, debemos resolver la ecuación

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

Podemos reescribirla así (donde $\hat{I}$ es el operador identidad):

$$\hat{A}|\psi\rangle - \lambda\hat{I}|\psi\rangle = \vec{0}$$

$$(\hat{A} - \lambda\hat{I})|\psi\rangle = \vec{0}$$

Esta ecuación nos dice que la matriz $(A - \lambda I)$ transforma el vector ***no nulo*** $|\psi\rangle$ en el vector cero. Esto solo puede ocurrir si la matriz $(A - \lambda I)$ **no es invertible**, por lo tanto, su **determinante debe ser cero**.

La Ecuación Característica:

Para encontrar los autovalores λ de una matriz A, debemos resolver la ecuación:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Las raíces de este polinomio en λ son los autovalores.

Ejemplo: Encontrando Autovalores y Autovectores

Vamos a practicar el procedimiento con una matriz simple en $\mathbb{R}^2$.

Sea el operador $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Instrucción:

1. **Encontrar los autovalores:**
    - Construye la matriz $A - \lambda I$.
    - Calcula su determinante, $\det(A - \lambda I)$.
    - Iguala el determinante a cero y resuelve la ecuación para λ.
2. **Encontrar los autovectores:**
    - Para cada autovalor λ que encontraste, resuelve el sistema de ecuaciones $A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$ para encontrar el autovector $|\psi\rangle$ correspondiente.

Solución: Parte 1 (Autovalores)

1. **Construir $A - \lambda I$:**

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

2. **Calcular el determinante:**

$$\det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(3-\lambda) - (1)(1)$$

$$= 9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

3. **Resolver la ecuación característica:**

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

Esto se factoriza como $(\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$.

Los autovalores son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = 2$.

Solución: Parte 2 (Autovectores)

Para $\lambda_1 = 4$:

Buscamos $|\psi_1\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $A|\psi_1\rangle = 4|\psi_1\rangle$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 3x + y = 4x \\ x + 3y = 4y \end{cases} \implies \begin{cases} y = x \\ x = y \end{cases}$$

La condición es $y = x$. Cualquier vector que la cumpla esta condición es un autovector, por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, pero normalizamos para estados cuánticos: $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda_2 = 2$:

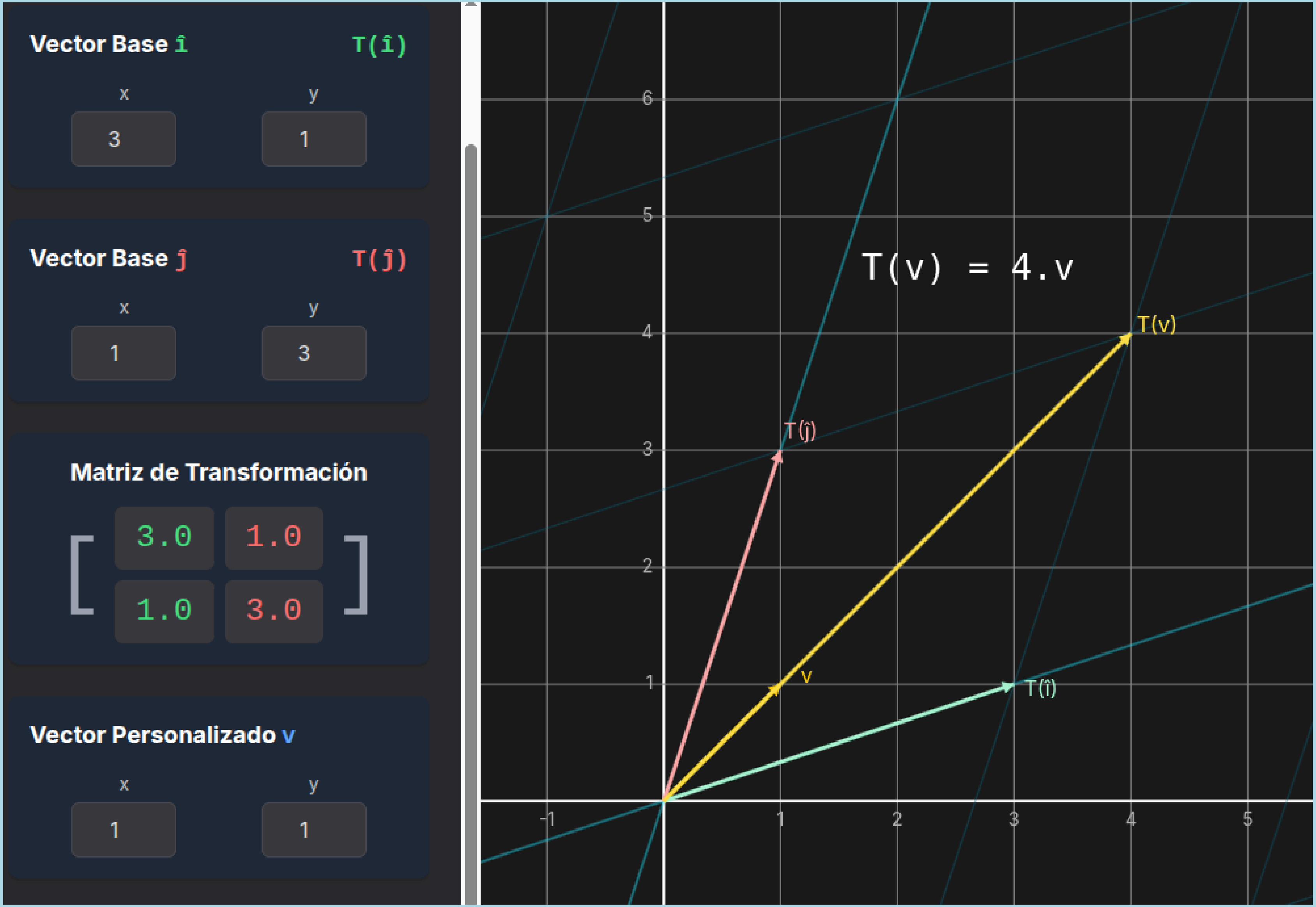
Buscamos $|\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $A|\psi_2\rangle = 2|\psi_2\rangle$.

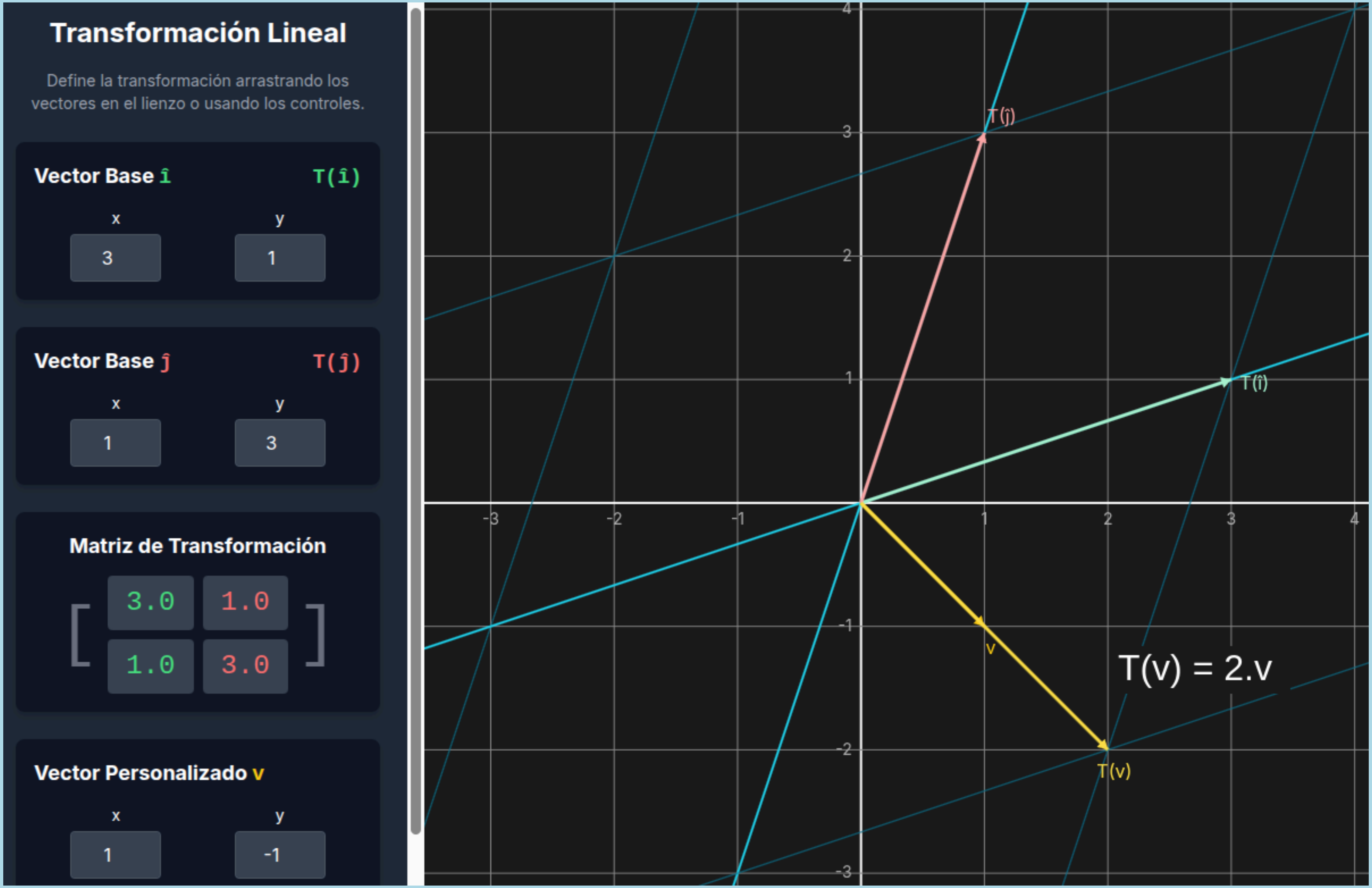
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 3x + y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{cases} \implies \begin{cases} y = -x \\ x = -y \end{cases}$$

La condición es $y = -x$. El autovector normalizado es $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio

Verificar el resultado obtenido utilizando la herramienta transformacionLinealApp


Vector Base î
T(î)
x
y
3
1
Vector Base ĵ
T(ĵ)
x
y
1
3
Matriz de Transformación
3.0
1.0
1.0
3.0
Vector Personalizado v
x
y
1
1
T(v) = 4.v
T(v)
T(ĵ)
v
T(î)


Transformación Lineal
Define la transformación arrastrando los vectores en el lienzo o usando los controles.
Vector Base î
T(î)
x
y
3
1
Vector Base ĵ
T(ĵ)
x
y
1
3
Matriz de Transformación
3.0
1.0
1.0
3.0
Vector Personalizado v
x
y
1
-1
T(ĵ)
T(î)
v
T(v)
T(v) = 2.v

Traza de una Matriz Cuadrada

La traza de una matriz cuadrada, denotada $\mathrm{Tr}(A)$, es la **suma de los elementos de la diagonal**.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \mathrm{Tr}(A) = a + d$$

Propiedades Importantes:

- La traza es independiente de la base en la que se represente la matriz.
- La traza es igual a la suma de sus autovalores.
  En nuestro ejemplo anterior $\mathrm{Tr}(A) = 3 + 3$ que coincide con la suma de los autovalores $4 + 2$.

Relevancia: Aunque no la usaremos extensivamente en esta introducción, la traza es una herramienta fundamental en temas más avanzados como los estados mixtos y el entrelazamiento, por lo que es bueno conocer su definición.

El Problema de la Medición

Hemos visto que un qubit puede existir en una infinita superposición de estados. Pero cuando medimos, solo obtenemos un resultado clásico y definitivo (por ejemplo, "0" o "1").

Esto plantea dos preguntas fundamentales:

1. **¿Qué determina los posibles resultados de una medición?** ¿Por qué solo "0" y "1" en la base computacional, y no algo intermedio?
2. **¿Cuál es el mecanismo matemático que describe este proceso?**

> **La respuesta de la mecánica cuántica es radical:** cada tipo de medición que podemos realizar está representado por un **operador**.

Medición y Estados Estables

Si un sistema está en un **estado definitivo**, no de superposición, y lo medimos repetidamente, siempre con **100 % de certeza** deberíamos obtener el mismo resultado (la medición no debería cambiar al estado).

> Los únicos estados que son **"estables"** bajo una medición son aquellos que **no son alterados por el operador de esa medición** (salvo por un factor numérico).

Matemáticamente, si $\hat{A}$ es el operador de nuestra medición, buscamos los estados $|\psi\rangle$ tales que:

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

¡Esta es exactamente la **ecuación de autovalores**!

El Postulado de la Medición

Esto nos lleva a uno de los postulados fundamentales de la mecánica cuántica, que conecta el álgebra con el experimento.

Postulado de Medición:

1. Toda cantidad físicamente medible (un **observable**, como el espín) se representa por un **operador**.
2. Los únicos resultados posibles de la medición de ese observable son los **autovalores** de dicho operador.
3. Inmediatamente después de la medición, el estado del sistema **colapsa** al **autovector** correspondiente al autovalor que se obtuvo.

¿Qué tienen de particular los autovectores?

> Son los **"estados de respuesta definitiva"**. Son los únicos estados para los cuales el resultado de la medición es predecible y no aleatorio.

¿Por qué esta relación entre observables, autovalores y autovectores es un postulado?

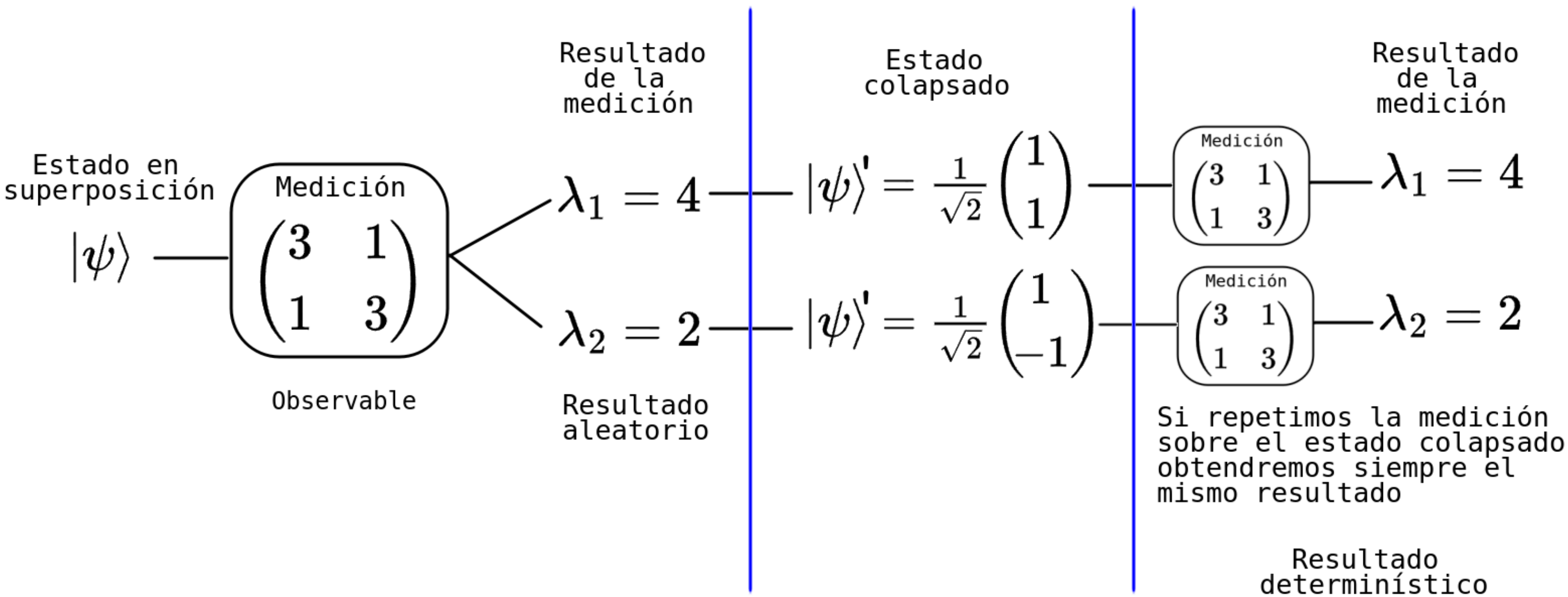
> Porque no es algo que se pueda deducir de principios más básicos; es un postulado fundamental. Es una de las **"reglas del juego"** del universo que se descubrió experimentalmente y luego se formalizó matemáticamente.

La Pregunta y la Respuesta

Podemos pensar en el postulado de la medición usando una analogía simple:

- **Observable (Operador Hermitiano):** Es la **PREGUNTA** que le hacemos al sistema: *"¿Cuál es tu valor?"*
- **Autovalores:** Son las posibles **RESPUESTAS** clásicas que podemos obtener. *En nuestro ejemplo previo de búsqueda de autovalores y autovectores, las respuestas posibles son 2 o 4*
- **Autovectores:**
  Son los estados que **CONTIENEN** una respuesta definitiva. Si el sistema está en un autovector, el resultado de la medición es 100% seguro.
  En nuestro ejemplo, los estados con respuesta definitiva son $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ *y* $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Experimentación basada en nuestro ejemplo anterior



La Necesidad de Resultados Reales

Ahora sí, podemos conectar con la propiedad clave de los operadores.

- **El Hecho Físico:** En un laboratorio, los resultados de las mediciones son siempre **números reales** (una aguja en un medidor apunta a un número real, una energía se mide en Joules, etc.).
- **La Consecuencia Matemática:** Si los resultados de la medición son los autovalores de nuestro operador, entonces necesitamos una clase de operadores que **garanticen** que sus autovalores sean siempre números reales.

Operadores Hermitianos (o Hermíticos)

Afortunadamente, ¡existe exactamente esa clase de operadores! Son los operadores Hermitianos

Un operador $\hat{A}$ es **Hermitiano** si $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

> Es decir, un **operador hermitiano** es igual a su **adjunto hermitiano**

Se puede demostrar matemáticamente que esta condición garantiza dos propiedades fundamentales:

1. **Sus autovalores son siempre REALES.**
2. **Sus autovectores son ORTOGONALES.**

> Esto cierra el círculo: los **observables** físicos se representan por **operadores Hermitianos**.

Material optativo

Las Propiedades "Mágicas" de los Operadores Hermitianos

Afirmamos que los observables deben ser Hermitianos porque esto garantiza dos propiedades fundamentales. Ahora, vamos a **demostrar** estas propiedades.

Teorema 1: Los autovalores de un operador Hermitiano son siempre REALES.
Teorema 2: Los autovectores de un operador Hermitiano correspondientes a autovalores DIFERENTES son siempre ORTOGONALES.

Estas demostraciones son un excelente ejercicio para usar la notación de Dirac y la definición de la operación daga (†).

Demostración: Los Autovalores son Reales

Objetivo: Probar que si $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ y $\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$, entonces λ debe ser un número real ($\lambda = \lambda^*$).

Paso 1: Empezar con la ecuación de autovalores.

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

Paso 2: Multiplicar por la izquierda por el bra $\langle\psi|$.

Esto convierte la ecuación en una igualdad entre escalares.

$$\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\psi|\lambda|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle$$

Demostración: Los Autovalores son Reales (cont.)

Paso 3: Tomar el adjunto hermitiano (daga) de la ecuación del Paso 1.

$$(\hat{A}|\psi\rangle)^\dagger = (\lambda|\psi\rangle)^\dagger$$

Aplicando las reglas de la daga, obtenemos:

$$\langle\psi|\hat{A}^\dagger = \lambda^*\langle\psi|$$

Paso 4: Multiplicar esta nueva ecuación por la derecha por el ket $|\psi\rangle$.

$$\langle\psi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = \lambda^*\langle\psi|\psi\rangle$$

Demostración: Los Autovalores son Reales (Final)

Paso 5: Comparar los resultados y usar la propiedad Hermitiana.
Tenemos dos expresiones:

1. $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \lambda\langle\psi|\psi\rangle$
2. $\langle\psi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = \lambda^*\langle\psi|\psi\rangle$

Como $\hat{A}$ es Hermitiano, $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$. Por lo tanto, los lados izquierdos de ambas ecuaciones son idénticos. Esto significa que los lados derechos también deben serlo:

$$\lambda\langle\psi|\psi\rangle = \lambda^*\langle\psi|\psi\rangle$$

Paso 6: Concluir.
Como $|\psi\rangle$ es un autovector, no es el vector nulo, por lo que $\langle\psi|\psi\rangle = \|\psi\|^2 \neq 0$. Podemos dividir ambos lados por $\langle\psi|\psi\rangle$:

$$\lambda = \lambda^*$$

La única forma en que un número complejo es igual a su propio conjugado es si su parte imaginaria es cero. **Por lo tanto, λ es real.** ✅

Demostración: Los Autovectores son Ortogonales

Objetivo: Probar que si tenemos dos autovectores, $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$, con autovalores distintos, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces deben ser ortogonales ($\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0$).

Paso 1: Escribir las dos ecuaciones de autovalores.

1. $\hat{A}|\psi_1\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle$
2. $\hat{A}|\psi_2\rangle = \lambda_2|\psi_2\rangle$

Paso 2: Tomar la primera ecuación y multiplicarla por la izquierda por $\langle\psi_2|$.

$$\langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\lambda_1|\psi_1\rangle = \lambda_1\langle\psi_2|\psi_1\rangle$$

Demostración: Los Autovectores son Ortogonales (cont.)

Paso 3: Usar la propiedad Hermitiana para "mover" el operador.

Recordemos la definición del adjunto: $\langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|(\hat{A}|\psi_1\rangle)$.

Como $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, podemos moverlo para que actúe sobre el bra:

$$\langle\psi_2|\hat{A} = (\hat{A}^\dagger|\psi_2\rangle)^\dagger = (\hat{A}|\psi_2\rangle)^\dagger$$

Usando la segunda ecuación de autovalores ($\hat{A}|\psi_2\rangle = \lambda_2|\psi_2\rangle$):

$$= (\lambda_2|\psi_2\rangle)^\dagger = \lambda_2^*\langle\psi_2|$$

Como ya demostramos que los autovalores son reales, $\lambda_2^* = \lambda_2$. Así que:

$$\langle\psi_2|\hat{A} = \lambda_2\langle\psi_2|$$

Paso 4: Sustituir este resultado en la ecuación del Paso 2.

La ecuación $\langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle$ se convierte en:

$$(\lambda_2\langle\psi_2|)|\psi_1\rangle = \lambda_2\langle\psi_2|\psi_1\rangle$$

Demostración: Los Autovectores son Ortogonales (Final)

Paso 5: Comparar las dos expresiones y concluir.
Hemos encontrado dos formas de escribir la misma cantidad $\langle\psi_2|\hat{A}|\psi_1\rangle$:

1. Del Paso 2: $\lambda_1\langle\psi_2|\psi_1\rangle$
2. Del Paso 4: $\lambda_2\langle\psi_2|\psi_1\rangle$

Igualándolas:

$$\lambda_1\langle\psi_2|\psi_1\rangle = \lambda_2\langle\psi_2|\psi_1\rangle$$

$$\implies (\lambda_1 - \lambda_2)\langle\psi_2|\psi_1\rangle = 0$$

Por nuestra premisa inicial, los autovalores son distintos, por lo que $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. La única forma de que la ecuación sea cierta es que el otro término sea cero:

$$\langle\psi_2|\psi_1\rangle = 0$$

Por lo tanto, los autovectores son ortogonales. ✅

> **Nota sobre autovalores degenerados:** Si dos autovectores comparten el mismo autovalor ($\lambda_1 = \lambda_2$), no están obligados a ser ortogonales. Sin embargo, siempre podemos elegir combinaciones lineales de ellos que sí lo sean (usando el proceso de Gram-Schmidt).

Fin de material optativo

Relación entre Operadores Hermitianos y Observables

Desde el punto de vista matemático asumimos:

- **Observable $\Longleftrightarrow$ Operador Hermitiano**
- **Todo observable se representa con un operador hermitiano:** Ello garantiza las características necesarias (autovalores reales, autovectores ortogonales) para representar una medición física.
- **Aunque matemáticamente todo operador hermitiano es un observable** en la prácita puede ocurrir que no hayamos encontrado cómo construir un aparato de laboratorio para medirlo.

La Garantía de una Base Completa

Los autovectores de un observable (operador Hermitiano) forman una base para el espacio de estados

> **El Teorema Espectral:**
> Para cualquier operador Hermitiano $\hat{A}$ que actúa sobre un espacio de N dimensiones, está garantizado que se pueden encontrar N **autovectores** que forman una **base ortonormal** para todo el espacio.

Nota: La demostración de este teorema está fuera del alcance de este curso

¿Por Qué es Fundamental que los Autovectores Formen una Base?

El Teorema Espectral nos garantiza que los "estados de respuesta" de cualquier observable (sus autovectores) forman una base ortonormal completa.

Esto no es solo una curiosidad matemática. Es el pilar que asegura que la **teoría de la medición cuántica sea lógicamente consistente**.

> **La Relevancia Física:**
> El teorema garantiza que, para cualquier estado cuántico que preparemos, la teoría **siempre** podrá predecir los resultados de cualquier medición que queramos realizar.

Para entender por qué, imaginemos un mundo donde el teorema es falso.

Un Mundo sin el Teorema Espectral (El Escenario del Desastre)

Imaginemos que diseñamos un aparato de medición (un observable $\hat{A}$) cuyos autovectores $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, ...\}$ **NO** forman una base completa.

1. **El "Punto Ciego":** Si no forman una base, significa que existe al menos un estado, llamémoslo $|\phi_{ciego}\rangle$, que es ortogonal a **todos** los autovectores de nuestro aparato. Vive en un "punto ciego" que la base no cubre.

$$\langle a_i|\phi_{ciego}\rangle = 0 \quad \text{para todo } i$$

2. **La Pregunta Fatal:** ¿Qué sucede si preparamos un qubit en este estado $|\phi_{ciego}\rangle$ y lo medimos con nuestro aparato $\hat{A}$?

La Contradicción: Una Medición sin Resultado

Vamos a aplicar los postulados de la cuántica a nuestro escenario:

La Regla de Born nos dice que la probabilidad de obtener el resultado a_i es: $P(a_i) = |\langle a_i|\phi_{ciego}\rangle|^2$. Como $\langle a_i|\phi_{ciego}\rangle = 0$ para todos los resultados posibles, entonces:

$$\sum_i P(a_i) = 0$$

Esto contradice **el Postulado de Normalización** que exige que la suma de las probabilidades de todos los resultados posibles sea 1. $\sum_i P(a_i) = 1$

> **Conclusión:** El Teorema Espectral es la **garantía matemática** de que este escenario nunca ocurre. Asegura que no hay "puntos ciegos", que cualquier estado puede ser descrito en términos de los resultados de cualquier medición, y que la teoría cuántica es **coherente y predictiva**.

El Contraste: Un Operador No-Hermitiano

Veamos un operador que **NO** es Hermitiano y cómo **falla** en proporcionar una base de autovectores.

Consideremos la matriz: $\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (No es Hermitiana).

1. **Autovalores:** La ecuación característica es $(1-\lambda)^2 = 0$, por lo que el único autovalor es $\lambda = 1$.
2. **Autovectores:** Resolviendo $\hat{B}|\psi\rangle = |\psi\rangle$, encontramos que la única condición es que la segunda componente del vector sea cero ($\beta = 0$).

Todos los autovectores de $\hat{B}$ tienen la forma $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

> **¡No podemos formar una base!** Solo hemos encontrado autovectores a lo largo del eje $|0\rangle$. Es imposible generar el resto del espacio $\mathbb{C}^2$. Este operador no define una base de medición completa.

Los Dos Procesos Fundamentales

En el mundo cuántico, usamos los operadores para describir dos procesos físicos distintos:

1. **Evolución (Descrita por Operadores Unitarios):**
    - **Proceso:** Un estado cuántico cambia en el tiempo de forma aislada.
    - **Acción Matemática:** Aplicación directa del operador (multiplicación): $|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$.
    - **Resultado:** Un nuevo estado de superposición. Es **reversible**.
2. **Medición (Especificada por Operadores Hermitianos):**
    - **Proceso:** Un aparato externo interactúa con el sistema para extraer información.
    - **Acción Matemática:** El operador Hermitiano ($\hat{A}$) **NO se aplica directamente**. En su lugar, **define las reglas de la medición**:
        - Sus **autovalores** son los posibles resultados.
        - Sus **autovectores** son los posibles estados post-colapso.
        - Sus **proyectores** ($|v_i\rangle\langle v_i|$ que veremos más adelante) se usan para calcular las probabilidades.
    - **Resultado:** Un número clásico y el colapso del estado. Es **irreversible**.

La Doble Naturaleza de los Operadores Pauli

Hemos presentado los operadores Pauli (X, Y, Z) como **compuertas cuánticas** que transforman estados.

Sin embargo, estos operadores también representan **mediciones físicas (observables)**.

Por ejemplo, el Operador Z:

- **Como Compuerta (Unitario):** Es una **acción** que aplica una fase: $\hat{Z}|\psi\rangle$.
- **Como Observable (Hermitiano):** Es una **pregunta**: "¿Cuál es el estado del qubit en la base computacional? ¿Es $|0\rangle$ o $|1\rangle$?".

> En el primer caso actúa transformando un estado, en el segundo sólo es una especificación de cómo construir un aparato de medición.

1. **$\hat{Z}$ como compuerta (Evolución):** proceso **determinista y reversible**.
   - **Proceso Físico:** El qubit evoluciona de forma aislada, sin ser observado.
   - **Rol Matemático:** La matriz $\hat{Z}$ **se multiplica directamente** por el estado para transformarlo. $|\psi_{final}\rangle = \hat{Z}|\psi_{inicial}\rangle$.
2. **$\hat{Z}$ Como Observable (Medición):** proceso **probabilístico e irreversible**.
   - **Proceso Físico:** Un **aparato de medición** externo interactúa con el qubit, forzándolo a dar una respuesta.
   - **Rol Matemático:** $\hat{Z}$ **NO se multiplica por el estado**. Sirve como la **"receta" para construir el aparato de medición**:

> **En resumen:** Aplicar la compuerta $\hat{Z}$ es una acción interna. Medir con el observable $\hat{Z}$ es una interacción externa, donde el operador $\hat{Z}$ actúa como el **"manual de instrucciones"** que le dice al aparato qué preguntar (en este caso, "¿eres $|0\rangle$ o $|1\rangle$?").

Ejercicio: Verificando los Operadores de Medición de Pauli

Las compuertas Pauli X, Y y Z no solo son compuertas (unitarias), sino que también son los **observables** más importantes de un qubit.

Pregunta:
Verifica que los operadores Pauli X, Y y Z son Hermitianos ($A = A^\dagger$), lo que los califica como observables válidos.

Instrucción:
Para cada matriz, calcula su daga (transpuesta conjugada) y comprueba si es igual a la matriz original.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: Verificando los Operadores de Medición

1. Para el operador X:

- $X^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como es real, $X^\dagger = X^T = X$. **Sí, X es Hermitiano.** ✅

2. Para el operador Z:

- $Z^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Como es real, $Z^\dagger = Z^T = Z$. **Sí, Z es Hermitiano.** ✅

3. Para el operador Y:

- $Y^T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.
- Ahora conjugamos: $Y^\dagger = (Y^T)^* = \begin{pmatrix} 0^* & i^* \\ (-i)^* & 0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = Y$. **Sí, Y es Hermitiano.** ✅

> **Conclusión:** Los tres operadores de Pauli son Hermitianos. Esto significa que podemos realizar mediciones asociadas a cada uno de ellos: una "medición Z" (la estándar), una "medición X" y una "medición Y". Cada una corresponde a "preguntar" al qubit por su estado en una base diferente.

Aplicación: Los Observables de Pauli

Hemos visto que las matrices de Pauli (X, Y, Z) son **Hermitianas**. Por lo tanto, cada una representa un observable físico, es decir, un tipo de medición.

- **Observable $\hat{Z}$:** Corresponde a una **medición en la base computacional**. Los posibles estados post-medición son:

$$|0\rangle \quad \text{o} \quad |1\rangle$$

- **Observable $\hat{X}$:** Corresponde a una **medición en la base de Hadamard**. Los posibles estados post-medición son:

$$|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad |-\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

- **Observable $\hat{Y}$:** Corresponde a una **medición en la base circular**. Los posibles estados post-medición son:

$$|i\rangle = \frac{|0\rangle+i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{o} \quad |-i\rangle = \frac{|0\rangle-i|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Ejercicio 1.a: Descubriendo los Autovectores de Z

Objetivo: Encontrar los estados base de la medición en Z y sus resultados.

Instrucción:

Usa el método de la ecuación característica para encontrar los autovalores y autovectores del operador **Pauli-Z**, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. **Encuentra los autovalores** resolviendo $\det(Z - \lambda I) = 0$.
2. Para cada autovalor, **encuentra el autovector** correspondiente resolviendo $Z|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$.

Solución 1.a: Descubrimiento para Z

1. **Autovalores:**

   $$\det(Z - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) = 0.$$

   Las soluciones (autovalores) son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

2. **Autovector para $\lambda_1 = 1$:**

   $$Z|\psi\rangle = 1 \cdot |\psi\rangle \implies \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

   Esto requiere que $-\beta = \beta$, lo cual solo es posible si $\beta = 0$. La normalización ($|\alpha|^2 = 1$) nos da $\alpha = 1$. El autovector es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$.

3. **Autovector para $\lambda_2 = -1$:**

   $$Z|\psi\rangle = -1 \cdot |\psi\rangle \implies \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}.$$

   Esto requiere que $\alpha = -\alpha$, lo cual solo es posible si $\alpha = 0$. La normalización $(|\beta|^2 = 1)$ nos da $\beta = 1$. El autovector es $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$.

Ejercicio 1.b: Verificando los Autovectores de Z

Objetivo: Ahora que hemos "descubierto" los autovectores, vamos a verificarlo de forma directa.

Instrucción:
Aplica directamente el operador $\hat{Z}$ a los kets $|0\rangle$ y $|1\rangle$ y comprueba que son autovectores con los autovalores que acabamos de encontrar (+1 y -1).

Solución 1.b: Verificación para Z

1. Para el estado $|0\rangle$:

Por definición de la acción de Z:

$$\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle = (+1) \cdot |0\rangle$$

Esto confirma que $|0\rangle$ es un autovector con autovalor $\lambda = +1$. ✅

2. Para el estado $|1\rangle$:

Por definición de la acción de Z:

$$\hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle = (-1) \cdot |1\rangle$$

Esto confirma que $|1\rangle$ es un autovector con autovalor $\lambda = -1$. ✅

Conclusión: El método de la ecuación característica nos dio correctamente los estados base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ y los resultados de medición $\{+1, -1\}$ para el observable Z.

Resumiendo los resultados de los ejercicios para el Observable $\hat{Z}$:

- **Autovalores (Resultados):** $\lambda = +1, -1$.
- **Autovectores (Estados Base):**
  - Para $\lambda = +1$, el autovector es $|0\rangle$.
  - Para $\lambda = -1$, el autovector es $|1\rangle$.
- **Interpretación:** Una medición Z da como resultado +1 si el estado colapsa a $|0\rangle$, o -1 si colapsa a $|1\rangle$.

Verificar visualmente con la herramienta transformacionLinealApp

Ejercicio 2.a: Descubriendo los Autovectores de X

Objetivo: Encontrar los estados base de la medición en X.

Instrucción:

Usa el método de la ecuación característica para encontrar los autovalores y autovectores del operador **Pauli-X**, $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución 2.a: Descubrimiento para X

1. **Autovalores:**

   $$\det(X - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0.$$

   Los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

2. **Autovector para $\lambda_1 = 1$:**

   $$X|\psi\rangle = 1 \cdot |\psi\rangle \implies \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

   La condición es $\alpha = \beta$. El autovector normalizado es $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |+\rangle$.

3. **Autovector para $\lambda_2 = -1$:**

   $$X|\psi\rangle = -1 \cdot |\psi\rangle \implies \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}.$$

   La condición es $\alpha = -\beta$. El autovector normalizado es $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = |-\rangle$.

Ejercicio 2.b: Verificando los Autovectores de X

Objetivo: Verificar que $|+\rangle$ y $|-\rangle$ son los estados con respuesta definitiva para una medición X.

Instrucción:

Aplica el operador $\hat{X}$ a los kets $|+\rangle$ y $|-\rangle$ y comprueba que son autovectores con los autovalores que acabamos de encontrar (+1 y -1).

Solución 2.b: Verificación para X

1. Para el estado $|+\rangle$:

$$\hat{X}|+\rangle = \hat{X}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle) = (+1)\cdot|+\rangle$$

Esto confirma que $|+\rangle$ es un autovector con autovalor $\lambda = +1$. ✅

2. Para el estado $|-\rangle$:

$$\hat{X}|-\rangle = \hat{X}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |0\rangle) = (-1)\cdot|-\rangle$$

Esto confirma que $|-\rangle$ es un autovector con autovalor $\lambda = -1$. ✅

Conclusión: La base de medición para el observable X es la base de Hadamard $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, con resultados $\{+1, -1\}$.

Resumiendo los resultados de los ejercicios para el Observable $\hat{X}$:

- **Autovalores (Resultados):** $\lambda = +1, -1.$
- **Autovectores (Estados Base):**
  - Para $\lambda = +1$, el autovector es $|+\rangle$.
  - Para $\lambda = -1$, el autovector es $|-\rangle$.
- **Interpretación:** Una medición X da como resultado +1 si el estado colapsa a $|+\rangle$, o -1 si colapsa a $|-\rangle$.

Verificar visualmente con la herramienta transformacionLinealApp

Ejercicio 3.a: Descubriendo los Autovectores de Y

Objetivo: Encontrar los estados base de la medición en Y.

Instrucción:

Usa la ecuación característica para encontrar los autovalores y autovectores del operador **Pauli-Y**, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Solución 3.a: Descubrimiento para Y

1. **Autovalores:**
   $\det(Y - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^2 - (-i)(i) = \lambda^2 - (-i^2) = \lambda^2 - 1 = 0.$
   Los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

2. **Autovector para $\lambda_1 = 1$:**
   $Y|\psi\rangle = 1 \cdot |\psi\rangle \implies \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -i\beta \\ i\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$
   La condición es $\alpha = -i\beta$. Si $\beta = i/\sqrt{2}$, entonces $\alpha = -i(i/\sqrt{2}) = -i^2/\sqrt{2} = 1/\sqrt{2}$.
   El autovector es $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = |i\rangle$.

3. **Autovector para $\lambda_2 = -1$:**
   $Y|\psi\rangle = -1 \cdot |\psi\rangle \implies \begin{pmatrix} -i\beta \\ i\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha \\ -\beta \end{pmatrix}.$
   La condición es $\alpha = i\beta$. Si $\beta = -i/\sqrt{2}$, entonces $\alpha = i(-i/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}$.
   El autovector es $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = |-i\rangle$.

Ejercicio 3.b: Verificando los Autovectores de Y

Objetivo: Verificar que $|i\rangle$ y $|-i\rangle$ son los estados con respuesta definitiva para una medición Y.

Instrucción:

Aplica el operador $\hat{Y}$ a los kets $|i\rangle$ y $|-i\rangle$ y comprueba que son autovectores con los autovalores que acabamos de encontrar (+1 y -1).

Solución 3.b: Verificación para Y

1. Para el estado $|i\rangle$:

$$\hat{Y}|i\rangle = \hat{Y}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle + i(-i|0\rangle)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) = (+1)\cdot|i\rangle$$

Esto confirma que $|i\rangle$ es un autovector con autovalor $\lambda = +1$. ✅

2. Para el estado $|-i\rangle$:

$$\hat{Y}|-i\rangle = \hat{Y}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle - i(-i|0\rangle)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i|1\rangle - |0\rangle) = (-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle) = (-1)\cdot|-i\rangle$$

Esto confirma que $|-i\rangle$ es un autovector con autovalor $\lambda = -1$. ✅

Conclusión: La base de medición para el observable Y es la base circular $\{|i\rangle, |-i\rangle\}$, con resultados $\{+1, -1\}$.

Resumiendo los resultados para el Observable $\hat{Y}$:

- **Autovalores (Resultados):** $\lambda = +1, -1.$
- **Autovectores (Estados Base):**
  - Para $\lambda = +1$, el autovector es $|i\rangle$.
  - Para $\lambda = -1$, el autovector es $|-i\rangle$.
- **Interpretación:** Una medición Y da como resultado +1 si el estado colapsa a $|i\rangle$, o -1 si colapsa a $|-i\rangle$.

El Valor Esperado (Expectation Value) de un Observable

Si un qubit está en una superposición, cada medición puede dar un resultado diferente. ¿Cuál será el **promedio** de los resultados si repitiéramos el experimento muchas veces?
Este promedio se llama el **valor esperado**.

> **Definición de Valor Esperado:**
> El valor esperado de un observable $\hat{A}$ para un sistema en el estado $|\psi\rangle$ se denota $\langle\hat{A}\rangle$ y se calcula con la fórmula "sándwich":
>
> $$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$$

La Intuición:
El valor esperado es un **promedio ponderado** de los autovalores del operador. Cada autovalor se pondera por la probabilidad de obtener ese resultado.

$$\langle\hat{A}\rangle = \sum_i \lambda_i \cdot P(\lambda_i)$$

Ejercicio: Calculando un Valor Esperado

Pregunta:

Un qubit se encuentra en el estado $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. ¿Cuál es el valor esperado de una **medición Z**?

Instrucción:

Calcula el valor esperado de Z, $\langle Z\rangle$, para el estado $|+\rangle$ usando la fórmula $\langle Z\rangle = \langle +|\hat{Z}|+\rangle$.

Piensa: ¿Qué significa el resultado? ¿Coincide con la intuición?

Solución: Calculando un Valor Esperado

Estado: $|+\rangle$. Observable: $\hat{Z}$.
Calculamos $\langle Z\rangle = \langle +|\hat{Z}|+\rangle$.

Paso 1: Aplicar $\hat{Z}$ al ket $|+\rangle$.

$$\hat{Z}|+\rangle = \hat{Z}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle$$

Paso 2: Calcular el producto interior con el bra $\langle +|$.

$$\langle Z\rangle = \langle +|-\rangle = \frac{1}{2}(\langle 0| + \langle 1|)(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$= \frac{1}{2}(\langle 0|0\rangle - \langle 0|1\rangle + \langle 1|0\rangle - \langle 1|1\rangle) = \frac{1}{2}(1 - 0 + 0 - 1) = 0$$

Conclusión: El valor esperado de la medición Z para el estado $|+\rangle$ es **0**.

> **Intuición:** El estado $|+\rangle$ tiene una probabilidad de $|\langle 0|+\rangle|^2 = 1/2$ de dar el resultado +1, y una probabilidad de $|\langle 1|+\rangle|^2 = 1/2$ de dar el resultado -1. El promedio de muchos +1 y -1 es, lógicamente, 0. ¡La matemática coincide!

Medición cuántica y operadores de proyección

Ya sabemos que los autovectores son los "estados de respuesta definitiva". Ahora necesitamos una herramienta matemática que represente la acción de **"verificar si el sistema está en uno de esos estados"**.

Operador de Proyección *(Def.)*

> Dado un estado cuántico normalizado $|\phi\rangle$, el **operador de proyección** sobre ese estado se define usando el producto externo:
>
> $$\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$$

> **Importante:** Para cada autovector de un observable, podremos construir su proyector correspondiente

Ejemplo: Los proyectores para la base computacional (autovectores de $\hat{Z}$) son:

- Proyector sobre $|0\rangle$: $\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Proyector sobre $|1\rangle$: $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Relación de Cierre

La suma de los proyectores sobre una base ortonormal es el operador Identidad.

$$\hat{I} = \sum_i |i\rangle\langle i| \xrightarrow{\text{para un qubit}} |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \hat{I}$$

Aplicado a la base computacional de un qubit, donde i puede ser 0 o 1:

$$|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{I}$$

La Intuición:

Es como tener un juego de "ladrillos" de proyección. El proyector $|0\rangle\langle 0|$ captura la componente del vector en el eje $|0\rangle$. El proyector $|1\rangle\langle 1|$ captura la componente en el eje $|1\rangle$. Si sumas ambas componentes, has reconstruido el vector original por completo.

La Utilidad:

Es un poderoso "truco" matemático. Podemos insertar la identidad ($\sum_i |i\rangle\langle i|$) en **cualquier parte** de una ecuación sin cambiarla. Esto nos permite descomponer expresiones complejas en términos de la base.

La Acción de un Proyector

¿Qué hace un proyector $\hat{P}_\phi$ cuando actúa sobre otro estado $|\psi\rangle$?

$$\hat{P}_\phi|\psi\rangle = (|\phi\rangle\langle\phi|)|\psi\rangle = |\phi\rangle(\langle\phi|\psi\rangle)$$

La acción se puede leer en dos pasos:

i. **Calcula la "sombra":** El producto interno $\langle\phi|\psi\rangle$ calcula un escalar complejo que representa la proyección (la "sombra") de $|\psi\rangle$ sobre $|\phi\rangle$.

ii. **Escala el vector base:** El resultado es un nuevo vector que apunta en la dirección de $|\phi\rangle$, pero cuya longitud ha sido escalada por ese factor de proyección.

> Un proyector "filtra" un estado, quedándose únicamente con la parte que vive en la dirección sobre la que se proyecta.

Ejercicio: Proyectando una Superposición

Considera el estado $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.

Instrucción:

1. Calcula el resultado de aplicar el proyector $\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0|$ al estado $|+\rangle$.
2. Calcula la **norma al cuadrado** del vector resultante.
3. Interpreta el resultado. ¿Qué representa ese número?

Pista: La norma al cuadrado del estado proyectado, $\|\hat{P}_\phi|\psi\rangle\|^2$, está directamente relacionada con la probabilidad de medición.

Solución: Proyectando una Superposición

1. Aplicando el proyector $\hat{P}_0$:

$$\hat{P}_0|+\rangle = |0\rangle\langle 0| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle(1+0) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle$$

El resultado es un vector que apunta en la dirección de $|0\rangle$ con una amplitud de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Norma al cuadrado del resultado:

El vector resultante es $|\psi_{res}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle$. Su norma al cuadrado es:

$$\||\psi_{res}\|^2 = \langle \psi_{res}|\psi_{res}\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0| \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \right) = \frac{1}{2}\langle 0|0\rangle = \frac{1}{2}$$

3. Interpretación:

La norma al cuadrado del estado proyectado, $\frac{1}{2}$, es precisamente la **probabilidad de que al medir el estado** $|+\rangle$ **se obtenga el resultado** $|0\rangle$.

$$P(0) = \||\hat{P}_0|+\rangle\|^2 = |\langle 0|+\rangle|^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2}$$

> **Conclusión:** La proyección es el mecanismo matemático detrás de la Regla de Born.

Ejercicio: Verificando la Linealidad del Proyector

En la física cuántica, cuando hablamos de un "operador", casi siempre nos referimos a un "operador lineal". Vamos a demostrar formalmente que el proyector $\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$ cumple esta condición fundamental.

Pregunta:
Demuestra que el operador $\hat{P}_\phi$ es lineal.

Instrucción:
Debes demostrar que para un estado de superposición genérico $|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$, se cumple la regla de la linealidad:

$$\hat{P}_\phi(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha(\hat{P}_\phi|a\rangle) + \beta(\hat{P}_\phi|b\rangle)$$

Pista: Empieza aplicando $\hat{P}_\phi$ al lado izquierdo. Usa la asociatividad y la propiedad de linealidad del *producto interior* en su segundo argumento (el ket).

Solución: La Linealidad del Proyector

1. Partimos del lado izquierdo y sustituimos la definición de $\hat{P}_\phi$:

$$\hat{P}_\phi(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = (|\phi\rangle\langle\phi|)(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle)$$

2. Usamos la asociatividad para agrupar el bra y la superposición:

$$= |\phi\rangle\Big(\langle\phi|(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle)\Big)$$

3. Aplicamos la linealidad del producto interior (que ya conocemos) al término entre paréntesis:

$$= |\phi\rangle(\alpha\langle\phi|a\rangle + \beta\langle\phi|b\rangle)$$

4. Distribuimos el ket $|\phi\rangle$ y reagrupamos los escalares (ya que son solo números):

$$= \alpha|\phi\rangle\langle\phi|a\rangle + \beta|\phi\rangle\langle\phi|b\rangle$$

5. Reconocemos que $|\phi\rangle\langle\phi|$ es de nuevo el operador $\hat{P}_\phi$:

$$= \alpha(\hat{P}_\phi|a\rangle) + \beta(\hat{P}_\phi|b\rangle)$$

> **Conclusión:** Hemos llegado al lado derecho de la ecuación. Queda demostrado que todo proyector es un **operador lineal**. Esto justifica su rol como bloque de construcción fundamental para otros operadores cuánticos. ✅

La Propiedad Idempotente: $P^2 = P$

Una característica fundamental de los proyectores es que **aplicarlos dos veces es lo mismo que aplicarlos una vez**.

Demostración:

$$\hat{P}_\phi^2 = \hat{P}_\phi \hat{P}_\phi = (|\phi\rangle\langle\phi|)(|\phi\rangle\langle\phi|)$$

Reagrupando:

$$= |\phi\rangle(\langle\phi|\phi\rangle)\langle\phi|$$

Como $|\phi\rangle$ está normalizado, $\langle\phi|\phi\rangle = 1.$

$$= |\phi\rangle(1)\langle\phi| = |\phi\rangle\langle\phi| = \hat{P}_\phi$$

> **La Intuición:** Si ya has proyectado un objeto sobre el suelo, proyectarlo de nuevo sobre el mismo suelo no cambia su sombra. La acción ya está hecha.

Ejercicio: El Proyector como Observable

Hemos definido un proyector $\hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$. Para poder calcular su valor esperado, primero debemos demostrar que es un **observable válido**.

Pregunta:

¿Es un operador de proyección siempre un operador Hermitiano?

Instrucción:

Demuestra que $\hat{P}_\psi^\dagger = \hat{P}_\psi$ usando las propiedades del adjunto hermitiano que ya conocemos:

1. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$
2. $(|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|$ y $(\langle\psi|)^\dagger = |\psi\rangle$

Solución: El Proyector es Hermitiano

1. Partimos de la definición y aplicamos la daga:

$$\hat{P}_\psi^\dagger = (|\psi\rangle\langle\psi|)^\dagger$$

2. Usamos la regla del producto $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$:

Aquí, $A = |\psi\rangle$ (una matriz $n \times 1$) y $B = \langle\psi|$ (una matriz $1 \times n$).

$$\hat{P}_\psi^\dagger = (\langle\psi|)^\dagger(|\psi\rangle)^\dagger$$

3. Aplicamos la daga a cada parte:

Sabemos que la daga de un bra es un ket, y la daga de un ket es un bra.

$$\hat{P}_\psi^\dagger = (|\psi\rangle)(\langle\psi|) = |\psi\rangle\langle\psi|$$

4. Conclusión:

Hemos demostrado que:

$$\hat{P}_\psi^\dagger = \hat{P}_\psi$$

> Como todo proyector es igual a su adjunto hermitiano, **todo proyector es un operador Hermitiano**. Esto significa que es un observable válido, y por lo tanto, tiene perfecto sentido físico calcular su **valor esperado**. ✅

Ejercicio: ¿Es un Proyector una Compuerta Válida?

Ahora que sabemos que un proyector es un observable, investiguemos si también puede ser una compuerta cuántica.

Pregunta:

¿Es un operador de proyección (en general) un operador Unitario?

Instrucción:

Verifica si el proyector $\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0|$ cumple la condición de unitariedad: $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{I}$.

Pista: Ya sabemos que $\hat{P}_0$ es Hermitiano ($\hat{P}_0^\dagger = \hat{P}_0$) y que es idempotente ($\hat{P}_0^2 = \hat{P}_0$).

Solución: El Proyector NO es Unitario

1. Planteamos la condición de unitariedad para $\hat{P}_0$:

Queremos comprobar si $\hat{P}_0^\dagger \hat{P}_0 = \hat{I}$.

2. Usamos las propiedades de $\hat{P}_0$:

- Como es Hermitiano, $\hat{P}_0^\dagger = \hat{P}_0$. La ecuación se convierte en $\hat{P}_0 \hat{P}_0 = \hat{I}$.
- Como es Idempotente, $\hat{P}_0 \hat{P}_0 = \hat{P}_0^2 = \hat{P}_0$.
- Por lo tanto, la condición de unitariedad para $\hat{P}_0$ se reduce a preguntar si $\hat{P}_0 = \hat{I}$.

3. Comparamos las matrices:

$$\hat{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \neq \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La condición **no se cumple**.

> **Conclusión:** El proyector $\hat{P}_0$ no es unitario. Esto confirma nuestra intuición: la proyección es un proceso **irreversible** que causa un **colapso** y una **pérdida de información** (la componente β del estado original se ha perdido). No es una rotación reversible como las compuertas cuánticas. ❌

El Único Proyector que es Unitario

Hemos visto que, en general, un proyector no es unitario. Pero, ¿existe alguna excepción?

Para que un proyector $\hat{P}$ sea unitario, debe cumplir:

$$\hat{P}^\dagger \hat{P} = \hat{I}$$

Usando sus propiedades (Hermitiano e Idempotente), esto se simplifica a:

$$\hat{P} = \hat{I}$$

> El **único** operador que es a la vez un proyector y una compuerta unitaria es el **Operador Identidad $\hat{I}$**
>
> - Como proyector: $\hat{I}$ "proyecta" todo el espacio de Hilbert sobre sí mismo. No pierde información.
> - Como compuerta: $\hat{I}$ es la compuerta que "no hace nada", una evolución trivial y perfectamente reversible.
>
> La relación de cierre, $\sum_i |i\rangle\langle i| = \hat{I}$, nos dice que la suma de todos los proyectores de una base completa **sí** es unitaria, porque reconstruye la identidad.

La Definición General de un Proyector

Hemos visto que "la Identidad es la suma de proyectores" (relación de cierre) pero también afirmamos que "la Identidad es un proyector". Ello se debe a que existe una definición más general de proyector que la presentada anteriormente.

> Un operador $\hat{P}$ es un **proyector** si y solo si cumple dos condiciones:
>
> i. Es **Hermitiano** ($\hat{P}^\dagger = \hat{P}$)
>
> ii. Es **Idempotente** ($\hat{P}^2 = \hat{P}$)

$\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$, ya demostramos que es Hermitiano e Idempotente. Por lo tanto, **es un proyector**. Proyecta sobre el subespacio de 1D generado por $|\phi\rangle$.

Operador Identidad: $\hat{I}$. También es Hermitiano ($\hat{I}^\dagger = \hat{I}$) y es Idempotente ($\hat{I}^2 = \hat{I}$). Por lo tanto, **la Identidad también es un proyector**. Proyecta todo el espacio sobre sí mismo.

> **Conclusión:** La relación de cierre, $\sum_i |i\rangle\langle i| = \hat{I}$, nos muestra cómo la suma de proyectores sobre líneas base ortogonales reconstruye el proyector que abarca todo el espacio: la Identidad.

Proyectores y Probabilidad: La Conexión

Hemos visto dos conceptos que parecen describir la probabilidad: la **Regla de Born** (en una clase anterior) y el **Valor Esperado** en esta clase). Ahora demostraremos una relación fundamental.

La Identidad Clave:

> El **valor esperado** de un operador de proyección $\hat{P}_\phi$ es igual a la **probabilidad** de que la medición colapse el sistema al estado $|\phi\rangle$.
>
> $$\langle\psi|\hat{P}_\phi|\psi\rangle = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$$

Demostración:

1. Comenzamos con el valor esperado y sustituimos $\hat{P}_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$:

$$\langle\psi|(|\phi\rangle\langle\phi|)|\psi\rangle$$

2. Reagrupamos usando la asociatividad del producto de matrices:

$$(\langle\psi|\phi\rangle)(\langle\phi|\psi\rangle)$$

3. Reconocemos que el primer factor es el conjugado complejo del segundo: $(\langle\phi|\psi\rangle)^*(\langle\phi|\psi\rangle)$.
4. Esto es, por definición, el módulo al cuadrado de $\langle\phi|\psi\rangle$. Por lo tanto: $\langle\psi|\hat{P}_\phi|\psi\rangle = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$

> **Conclusión:** La Regla de Born no es una regla aislada. Es una consecuencia directa de la fórmula del valor esperado cuando el observable es un operador de proyección.

La Descomposición Espectral de un Observable

Hemos visto todas las piezas del rompecabezas de la medición:

- **Observables:** Operadores Hermitianos $\hat{A}$.
- **Resultados:** Sus autovalores reales λ_i.
- **Estados de Colapso:** Sus autovectores ortogonales $|v_i\rangle$.
- **Acción de Medición:** Los proyectores $P_i = |v_i\rangle\langle v_i|$.

La **Descomposición Espectral** es el teorema que une todo esto en una sola y elegante ecuación.

> **Teorema de Descomposición Espectral:**
> Todo operador Hermitiano $\hat{A}$ puede ser reescrito como una suma ponderada de sus proyectores, donde los pesos son sus autovalores.
>
> $$\hat{A} = \sum_i \lambda_i |v_i\rangle\langle v_i| = \sum_i \lambda_i \hat{P}_i$$

Ejercicio: Reconstruyendo el Operador Z

Vamos a verificar la Descomposición Espectral con nuestro viejo amigo, el operador Pauli-Z.

Datos que ya conocemos de ejercicios anteriores:

- **Observable:** $\hat{Z}$.
- **Autovalor 1:** $\lambda_1 = +1$, con autovector $|v_1\rangle = |0\rangle$.
- **Autovalor 2:** $\lambda_2 = -1$, con autovector $|v_2\rangle = |1\rangle$.

Instrucción:

1. Escribe los operadores de proyección $\hat{P}_0$ y $\hat{P}_1$.
2. Construye el operador $\hat{A}$ usando la fórmula de la descomposición espectral: $\hat{A} = \lambda_1 \hat{P}_0 + \lambda_2 \hat{P}_1$.
3. Verifica si la matriz resultante es, en efecto, la matriz del operador Z.

Solución: Reconstruyendo el Operador Z

1. Proyectores: $\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Construyendo el Operador: Usamos la fórmula $\hat{A} = \sum_i \lambda_i \hat{P}_i$:

$$\hat{A} = (+1) \cdot \hat{P}_0 + (-1) \cdot \hat{P}_1$$

$$= (+1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Verificación:

La matriz resultante es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, que es exactamente la matriz del operador Pauli-Z. ✅

> **Conclusión:** El operador Z **es** la suma de sus proyectores ponderados por sus resultados de medición. Esto nos da una profunda intuición física sobre la estructura matemática de los observables.

Observable vs. Proyector: La Distinción Clave

¿Qué relación hay entre el observable $\hat{Z}$ y los proyectores $\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0|$ y $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1|$? Están íntimamente relacionados, pero **no son lo mismo**.

El Observable $\hat{Z}$ no se aplica directamente al estado. En su lugar, **define el "tipo" de medición** que se va a realizar. Realizar una **medición con respecto a** $\hat{Z}$ significa que:

i. El estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ **colapsará** a uno de los autovectores de $\hat{Z}$: $|0\rangle$ o $|1\rangle$.

ii. La naturaleza elige el resultado de forma **aleatoria**, con probabilidades dadas por:

$$P(0) = \langle\psi|\hat{P}_0|\psi\rangle = |\alpha|^2, \quad P(1) = \langle\psi|\hat{P}_1|\psi\rangle = |\beta|^2$$

Los **proyectores** $\hat{P}_0$ y $\hat{P}_1$ son las **herramientas matemáticas** que nos permiten analizar cada resultado posible por separado.

La operación $\hat{P}_0|\psi\rangle$ **no es una medición**. Es el cálculo que nos dice "cómo quedaría el estado si el resultado de la medición fuera $|0\rangle$".

El estado normalizado post-medición será:

$$|\psi_{final}\rangle = \frac{\hat{P}_0|\psi\rangle}{||\hat{P}_0|\psi\rangle||} \quad \text{o} \quad |\psi_{final}\rangle = \frac{\hat{P}_1|\psi\rangle}{||\hat{P}_1|\psi\rangle||}$$

(Dependiendo del resultado aleatorio).

> **En resumen:** Medir con $\hat{Z}$ es como lanzar un dado cuántico cuyas caras y probabilidades están definidas por $\hat{Z}$. Aplicar $\hat{P}_0$ es como tomar el dado, ignorar el lanzamiento y simplemente ponerlo en la cara "0" para ver cómo se ve.

Resumen: Los Postulados de la Mecánica Cuántica que hemos presentado

Resumen: Los Postulados de la Mecánica Cuántica

Hemos cubierto mucho terreno. Ahora podemos formalizar todo lo que hemos aprendido en las **reglas fundamentales** (postulados) que gobiernan la computación cuántica.

Postulado 1: El Estado

> **El estado de un sistema cuántico aislado se describe por un vector de estado unitario $|\psi\rangle$ en un Espacio de Hilbert complejo.**
> *Visto en la clase en que abordamos los Espacios de Hilbert y el Qubit.*

Postulado 2: La Evolución

> **La evolución de un sistema cuántico cerrado se describe por una transformación Unitaria $\hat{U}$.**
>
> $$|\psi_{final}\rangle = \hat{U}|\psi_{inicial}\rangle$$
>
> *Visto en la clase donde abordamos Operadores y Compuertas.*

Resumen: Los Postulados (cont.)

Postulado 3: La Medición

- **A cada cantidad medible (observable) le corresponde un operador Hermitiano $\hat{A}$.**
- **Los posibles resultados de la medición son los autovalores λ_i** de $\hat{A}$.
- **Tras la medición, el estado del sistema colapsa al autovector $|v_i\rangle$ correspondiente**.
- **La probabilidad de obtener el resultado λ_i es $P(\lambda_i) = |\langle v_i|\psi\rangle|^2$.**

  ¡Visto en esta clase!

Postulado 4: Sistemas Compuestos (Adelanto)

El Espacio de Hilbert de un sistema compuesto es el producto tensorial de los espacios de sus componentes.

¡El tema de nuestra próxima clase!