# Preliminares matemáticas

## Espacios Vectoriales

# Espacios Vectoriales: Los Fundamentos

Un espacio vectorial se compone de dos conjuntos:

- **Escalares ($K$):**
- **Vectores ($V$):**

La clave es que podamos **sumar** vectores entre sí y **multiplicarlos** por los escalares, todo bajo un conjunto específico de propiedades.

# Definiciones previas

Primero vamos a enfocarnos en las propiedades que debe cumplir el conjunto de escalares. Para ello necesitamos una serie de definiciones previas

**Operación binaria** *(Def.)* Sea $A$ un conjunto no vacío. Una operación (o ley de composición interna u operación binaria) de $A$ es una función $*: A \times A \to A$.

- **Notación.** $*(a, b) = c$ se escribe $a * b = c$.

# Ejemplos de Operaciones

- **Suma en $\mathbb{N}$:** $+(a,b) = a + b$. Esta **es** una operación porque el resultado de sumar dos números naturales es siempre otro número natural.
- **Resta en $\mathbb{N}$:** $-(a,b) = a - b$. Esta **no es** una operación en $\mathbb{N}$ porque el resultado (ej: $3 - 5 = -2$) no pertenece al conjunto de los números naturales.
- La suma, resta y producto sí son operaciones en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$.

**¡Importante!** Nos van a interesar sólo las operaciones que cumplan ciertas **propiedades particulares**.

Sea $* : A \times A \to A$ una operación binaria

**¿Qué propiedades puede presentar la operación * ?**

**Propiedades básicas** *(Def.)* Sea $* : A \times A \to A$ una operación. Se definen las siguientes propiedades:

1. **Asociativa:** $*$ es asociativa si $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in A$.
2. **Elemento neutro:** $*$ tiene elemento neutro si $\exists e \in A$ tal que $e * a = a * e = a$ para cada $a \in A$.
3. **Inverso:** Si $*$ tiene elemento neutro $e$, se dice que todo elemento tiene inverso para $*$ si $\forall a \in A$, $\exists a' \in A$ tal que $a * a' = a' * a = e$.
4. **Conmutativa** $*$ es conmutativa si $a * b = b * a \quad \forall a, b \in A$.

Estudiar estas propiedades nos permite clasificar conjuntos con operaciones. Una estructura importante que surge de estas propiedades es la de **grupo**.

Observar que si $*$ tiene elemento neutro, éste es único.

- Si $e$ y $e'$ son elementos neutros, entonces:
  $e' = e * e'$ (porque $e$ es elemento neutro)
  a su vez, $e * e' = e$ (porque $e'$ es neutro)
  entonces, $e' = e$ (transitividad de la igualdad).
  Por lo tanto, **el elemento neutro es único**

# Ejercitación en Clase

**Ejercicio:** Considerar el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ y las siguientes operaciones:

- a) Multiplicación: $a \cdot b$
- b) Definimos una nueva operación $\oplus$ como: $a \oplus b = a + b + 1$.

Para cada una de estas operaciones en $\mathbb{Z}$, determinar cuáles de las siguientes propiedades se cumplen:

1. Asociativa
2. Elemento neutro
3. Inverso para cada elemento
4. Conmutativa

Justificar las respuestas con ejemplos o demostraciones.

# Resolución

**a) Multiplicación (·) en $\mathbb{Z}$**

1. **Asociativa:** **Sí**. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
    - *Justificación:* Propiedad asociativa de la multiplicación de enteros.
2. **Elemento neutro:** **Sí**. El elemento neutro es $1$, ya que para todo $a \in \mathbb{Z}$, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
3. **Inverso para cada elemento:** **No**. Solo los elementos $1$ y $-1$ tienen inverso multiplicativo dentro de $\mathbb{Z}$ (que son ellos mismos). Por ejemplo, el inverso de $2$ sería $1/2$, que no pertenece a $\mathbb{Z}$.
4. **Conmutativa:** **Sí**. Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \cdot b = b \cdot a$.
    - *Justificación:* Propiedad conmutativa de la multiplicación de enteros.

# Resolución

**b) Operación $a \oplus b = a + b + 1$ en $\mathbb{Z}$**

1. **Asociativa: Sí**. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$:
   - $(a \oplus b) \oplus c = (a + b + 1) \oplus c = (a + b + 1) + c + 1 = a + b + c + 2$
   - $a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (b + c + 1) = a + (b + c + 1) + 1 = a + b + c + 2$
   - Como ambos resultados son iguales, la operación es asociativa.
2. **Elemento neutro: Sí**. Buscamos un $e \in \mathbb{Z}$ tal que $e \oplus a = a \oplus e = a$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.
   - $e \oplus a = e + a + 1$. Si esto es igual a $a$, entonces $e + a + 1 = a \implies e + 1 = 0 \implies e = -1$.
   - Comprobamos con $a \oplus e$: $a \oplus (-1) = a + (-1) + 1 = a$.
   - Por lo tanto, el elemento neutro es $-1$.

3. **Inverso para cada elemento:** Sí. Si el elemento neutro es $e = -1$, buscamos un $a'$ tal que $a \oplus a' = -1$.
    - $a \oplus a' = a + a' + 1$. Si esto es igual a $-1$, entonces $a + a' + 1 = -1 \implies a + a' = -2 \implies a' = -2 - a$.
    - Este $a' = -2 - a$ pertenece a $\mathbb{Z}$ para cualquier $a \in \mathbb{Z}$.
    - Comprobamos la otra condición: $a' \oplus a = (-2 - a) \oplus a = (-2 - a) + a + 1 = -2 + 1 = -1$
    - Así que, para cada $a \in \mathbb{Z}$, su inverso es $-2 - a$.
4. **Conmutativa:** Sí. Para todos $a, b \in \mathbb{Z}$:
    - $a \oplus b = a + b + 1$.
    - $b \oplus a = b + a + 1$.
    - Dado que la suma es conmutativa, $a + b = b + a$, entonces $a \oplus b = b \oplus a$.

## Grupos: La Estructura Fundamental

**Grupo** *(Def.)* Sea $A$ un conjunto y $*$ una operación en $A$.

Si $*$ satisface las siguientes propiedades:

1. **Asociatividad:** $(a * b) * c = a * (b * c)$
2. **Elemento Neutro:** Existe $e \in A$ tal que $e * a = a * e = a$
3. **Inverso:** Para cada $a \in A$, existe $a' \in A$ tal que $a * a' = a' * a = e$

Entonces, el par $(A, *)$ se llama un **Grupo**.

## Una nota sobre la "Propiedad de Cerradura":

Notarán que no listamos la **"cerradura"** (el resultado de $a * b$ debe estar en $A$) como un axioma de grupo. Esto se debe a que ya está incluida en nuestra definición de **operación binaria.**

En la práctica, al analizar si una estructura es un grupo, ¡verificar la cerradura es siempre el primer paso! Si no se cumple, la regla ni siquiera es una operación en el conjunto y podemos detener el análisis.

**Grupo Abeliano o conmutativo** *(Def.)* Si un grupo $(A, *)$ además satisface la propiedad:

4. **Conmutatividad:** $a * b = b * a$

...entonces se dice que $(A, *)$ es un **Grupo Abeliano** o **Grupo Conmutativo**.

## Ejemplos de Grupos (¡y contraejemplos!)

Vamos a examinar algunos conjuntos con operaciones para ver si forman grupos:

- $(\mathbb{N}, +)$: **No es un grupo.** ¿Por qué?
  - *Motivo:* El $0$ no está incluido en $\mathbb{N}$ en algunas definiciones, en tal caso no cumple la propiedad de **elemento neutro**, pero aún si se incluyera al cero, **no pesee inverso** para todos los elementos (solo el $0$ lo tiene).
- $(\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$: **Son grupos abelianos.**
  - Cumplen las cuatro propiedades.

## Más Ejemplos de Grupos

- $(\mathbb{Z}, \cdot)$**: No es un grupo.** ¿Por qué?
  - *Motivo:* Solo $1$ y $-1$ tienen inverso multiplicativo dentro de $\mathbb{Z}$.
- $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot), (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$**: Son grupos abelianos.**
  - La multiplicación en estos conjuntos (excluyendo el cero) satisface todas las propiedades.
- $A = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, * = \circ$ **(composición de funciones): No es un grupo.**
  - *Motivo:* Solo las funciones biyectivas tienen inversa para la composición.

## Ejemplos Adicionales de Grupos

- $(S_{\mathbb{R}}, \circ)$**:** Donde $S_{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$, y $*$ es la composición de funciones ($\circ$).
    - $(S_{\mathbb{R}}, \circ)$ **es un grupo**. (Las funciones biyectivas son cerradas bajo composición, la composición es asociativa, la función identidad es el elemento neutro, y la inversa de una función biyectiva existe y es biyectiva).
- $(\mathcal{P}(C), \triangle)$**:** Sea $C$ un conjunto y $\mathcal{P}(C)$ el conjunto de todos sus subconjuntos. La operación es la **diferencia simétrica**:

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

    - $(\mathcal{P}(C), \triangle)$ **es un grupo abeliano**. (Se puede demostrar que cumple todas las propiedades).

A partir de la definición de grupo puede probarse propiedades que poseen todos los conjuntos con esa estructura. Por ejemplo: la **unicidad del inverso**.

Sea $(G, *)$ un grupo. Entonces, para cada elemento $a \in G$, existe un **único** inverso para $a$.

- **<u>Demostración:</u>** Sea $e$ el elemento neutro de $(G, *)$. Supongamos que tanto $a'$ como $a''$ son inversos de $a$. Entonces:

$$\begin{aligned} a' &= e * a' \quad (\text{por ser } e \text{ el neutro}) \\ a' &= (a'' * a) * a' \quad (\text{por ser } a'' \text{ inverso de } a) \\ a' &= a'' * (a * a') \quad (\text{por asociatividad}) \\ a' &= a'' * e \quad (\text{por ser } a' \text{ inverso de } a) \\ a' &= a'' \quad (\text{por ser } e \text{ el neutro}) \end{aligned}$$

- Esto demuestra que los inversos de los elementos son únicos.

**Notación:** Si $G$ es un grupo abeliano y la operación se nota $+$, el elemento neutro se notará $0$ y, para cada $a \in G$, el inverso de $a$ se notará $-a$. (En otros casos, el elemento neutro se nota $1$ y el inverso de $a$ se nota $a^{-1}$).

# ¿Son grupos o no lo son?

- **Los enteros bajo la adición** $(\mathbb{Z}, +)$
  - **Sí es un grupo**
  - **Razones:**
    - El **elemento identidad cero** $(0)$ es un entero.
    - Al sumar dos enteros, el resultado es otro entero (operación cerrada).
    - El opuesto de cualquier entero es también un entero (existen inversos).
    - La adición es asociativa.

# ¿Son grupos o no lo son?

- **Los enteros pares bajo la adición** $(2\mathbb{Z}, +)$
  - **Sí es un grupo**
  - **Razones:**
    - El **elemento identidad cero** $(0)$ es un entero par.
    - Sumar dos números pares da como resultado un número par (operación cerrada).
    - El opuesto de un entero par es un entero par (existen inversos).
    - La adición es asociativa.

## ¿Son grupos o no lo son?

- **Los enteros impares bajo la adición** $(\{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$
  - **NO es un grupo**
  - **Razones:**
    - Al sumar dos números impares, el resultado es un número par, lo que significa que la **operación no es cerrada** para el conjunto de números impares.
    - El **elemento identidad cero** $(0)$ no es impar.
    - Aunque la adición es asociativa y existen inversos para los números impares dentro del conjunto de enteros, las otras condiciones no se cumplen.

## ¿Son grupos o no lo son?

- **Los enteros bajo la multiplicación** $(\mathbb{Z}, \cdot)$
  - **NO es un grupo**
  - **Razones:**
    - El **cero no tiene un inverso** multiplicativo, ya que no se puede dividir por cero.
    - Excepto para $1$ y $-1$, el inverso multiplicativo de un entero no es un entero (los inversos no pertenecen al conjunto).

# ¿Son grupos o no lo son?

- **Todos los múltiplos de siete bajo la adición** $(\{7k \mid k \in \mathbb{Z}\}, +)$
  - **Sí es un grupo**
  - **Razones:**
    - El **elemento identidad cero** $(0)$ es un múltiplo de siete (ya que $0 = 7 \cdot 0$). De hecho, cero es múltiplo de todo.
    - Si se suman dos elementos, por ejemplo $7x$ y $7y$, se obtiene $7(x + y)$, que también es un múltiplo de siete (operación cerrada).
    - El inverso de un elemento $7x$ es $7(-x)$, que también es un múltiplo de siete (existen inversos).
    - La adición es asociativa porque los elementos son enteros.

**Anillo** *(Def.)* Sea $A$ un conjunto con dos operaciones, $+$ y $\cdot$. La tripleta $(A, +, \cdot)$ se llama un **Anillo** si se cumplen las siguientes condiciones:

- i. $(A, +)$ **es un Grupo Abeliano:**
- ii. **La operación · es asociativa y tiene elemento neutro:**
  - $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ para todo $a, b, c \in A$.
  - Existe un elemento neutro para la multiplicación (lo denotaremos como $1$).
- iii. **Propiedades distributivas:** La operación · se distribuye sobre la operación $+$:
  - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributividad por la izquierda)
  - $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (Distributividad por la derecha)
- Si además la operación · es **conmutativa** ($a \cdot b = b \cdot a$), entonces $(A, +, \cdot)$ se llama un **Anillo Conmutativo**.

- **Notación:**
  - Cuando las operaciones $+$ y $\cdot$ son claras por el contexto, a menudo nos referimos al anillo simplemente como $A$.
  - Al elemento neutro de la operación $\cdot$ multiplicación se le denota comúnmente como $1$.

- **Importante:** En las definiciones anteriores, como la de anillo $(A, +, \cdot)$, al utilizar los símbolos $+$ y $\cdot$ no nos estamos refiriendo específicamente a las operaciones de suma y multiplicación conocidas sino a operaciones binarias genéricas. Cuando hablamos de ejemplos concretos (como $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), al utilizar los símbolos $+$ y $\cdot$ sí nos referimos a las operaciones de suma y multiplicación usuales, a menos que se explicite lo contrario.

## Ejemplos de Anillos

Veamos algunos conjuntos con operaciones que forman anillos:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$**:**
    - Son todos **anillos conmutativos**.
- **Conjunto Potencia:** Si $C$ es un conjunto, $(\mathcal{P}(C), \triangle, \cap)$ es un **anillo conmutativo**, donde $\triangle$ es la diferencia simétrica y $\cap$ es la intersección.
- **Funciones:** El conjunto de funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con la suma y producto usuales de funciones también forma un **anillo conmutativo**.

# Propiedades de los Anillos

Al igual que con los grupos, existen propiedades generales que se cumplen en *todos* los anillos.

**Propiedad Fundamental:**

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo, y sea $0$ el elemento neutro de la suma. Entonces:

$$0 \cdot a = 0 \quad \text{para todo } a \in A$$

**Demostración**

1. Por la propiedad del elemento neutro de la suma, sabemos que $0 = 0 + 0$.
2. Multiplicamos ambos lados de esta igualdad por el elemento $a \in A$
   $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a$.
3. Aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma a la derecha:
   $0 \cdot a = (0 \cdot a) + (0 \cdot a)$.

4. Ahora, sea $x = 0 \cdot a$. La ecuación se convierte en:
   $x = x + x$.

5. Dado que $(A, +)$ es un grupo abeliano, existe un inverso aditivo para $x$, denotado como $-x$. Sumamos $-x$ a ambos lados de la igualdad:
   $x + (-x) = (x + x) + (-x)$.

6. Usando la propiedad asociativa de la suma, tenemos:
   $x + (-x) = x + (x + (-x))$.

7. Por la definición de inverso aditivo, $x + (-x) = 0$. Sustituimos:
   $0 = x + 0$.

8. Por la propiedad del elemento neutro de la suma, $x + 0 = x$. Sustituimos:
   $0 = x$.

9. Como definimos $x = 0 \cdot a$, concluimos que:
   $0 \cdot a = 0$.

## Estructuras Algebraicas: Cuerpos (o Campos)

Hemos visto **grupos** y **anillos**. Ahora, definiremos una estructura que es fundamental para los **escalares** en los espacios vectoriales: el **Cuerpo**.

Un **cuerpo** combina las propiedades de los anillos conmutativos con una exigencia adicional sobre la multiplicación (inverso multiplicativo).

**Cuerpo** (Def) Sea $K$ un conjunto con dos operaciones, $+$ y $\cdot$. La tripleta $(K, +, \cdot)$ se llama un **Cuerpo** si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $(K, +)$ **es un Grupo Abeliano.**
   - La suma es asociativa, conmutativa, tiene neutro ($0$) y todo elemento tiene inverso aditivo.
2. $(K - \{0\}, \cdot)$ **es un Grupo Abeliano:**
   - La multiplicación es asociativa y conmutativa.
   - Tiene un elemento neutro (denotado como $1$, y $1 \neq 0$).
   - Todo elemento *no nulo* en $K$ tiene un inverso multiplicativo.
3. **Propiedad Distributiva:** La multiplicación se distribuye sobre la suma:
   - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ para todo $a, b, c \in K$.

*Nota: Estas condiciones implican que $(K, +, \cdot)$ es un anillo conmutativo, más la condición del inverso multiplicativo para elementos no nulos.*

## Ejemplos de Cuerpos

Consideremos los siguientes conjuntos con sus operaciones usuales:

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$**:** Los números racionales forman un cuerpo.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$**:** Los números reales forman un cuerpo.
- $(\mathbb{C}, +, \cdot)$**:** Los números complejos forman un cuerpo.

## Propiedad

También en el caso de los cuerpos se pueden probar propiedades generales. Por ejemplo:

- Todo cuerpo $(K,+,\cdot)$ es un dominio de integridad.
  - Es decir, $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$

**<u>Demostración</u>**

Supongamos que $a \cdot b = 0$.

- Si $a = 0$, ya está demostrado.
- Si $a \neq 0$, entonces existe $a^{-1}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
  $\Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0$
  $\Rightarrow \left(a^{-1} \cdot a\right) \cdot b = 0$
  $\Rightarrow 1 \cdot b = 0$
  $\Rightarrow b = 0$
  Por lo tanto, $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$

## Ejercicio: Cuerpos (1/2)

**Pregunta:** ¿Por qué el anillo de los números enteros $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **no** es un cuerpo?

**Instrucción:**
Revisa las tres condiciones principales que definen un cuerpo. Identifica cuál de ellas no se cumple para los enteros y justifica tu respuesta con un contraejemplo claro.

**Pista:** La falla no está en la suma, ni en la distributividad. El problema yace en la segunda condición: que $(K - \{0\}, \cdot)$ sea un grupo abeliano.

## Solución: Cuerpos (1/2)

El anillo $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ **no es un cuerpo** porque no cumple la segunda condición de la definición de cuerpo:

**Condición 2:** $(K - \{0\}, \cdot)$ debe ser un **Grupo Abeliano**.
Para que sea un grupo, cada elemento debe tener un **inverso multiplicativo** dentro del conjunto.

- **Análisis en $\mathbb{Z}$:**
  - El conjunto de enteros no nulos es $\mathbb{Z} - \{0\}$.
  - Tomemos un elemento, por ejemplo, el $2 \in \mathbb{Z}$.
  - Su inverso multiplicativo es el número $a'$ tal que $2 \cdot a' = 1$.
  - Este inverso es $a' = 1/2$.
  - El problema es que $1/2 \notin \mathbb{Z}$.
- **Conclusión:**
  La mayoría de los elementos de $\mathbb{Z}$ (todos excepto $1$ y $-1$) no tienen inverso multiplicativo **dentro del conjunto de los enteros**. Por lo tanto, $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$ no es un grupo, y $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ no es un cuerpo.

# Ejercicio: Cuerpos (2/2)

**Contexto:** Los enteros módulo 5, denotados como $\mathbb{Z}_5$, son el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. La suma y la multiplicación se realizan y luego se toma el resto de la división por 5.

- Ej: $3 + 4 = 7 \equiv 2 \pmod 5$
- Ej: $2 \cdot 4 = 8 \equiv 3 \pmod 5$

**Pregunta:** ¿Es $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ un cuerpo?

**Instrucción:**

Para demostrarlo, enfócate en la propiedad del **inverso multiplicativo** para cada elemento no nulo de $\mathbb{Z}_5$. Encuentra el inverso para $1, 2, 3$ y $4$
.

## Solución: Cuerpos (2/2)

**Sí, $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ es un cuerpo.** Verifiquemos la existencia de inversos multiplicativos para cada elemento de $\mathbb{Z}_5 - \{0\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Buscamos un $a'$ tal que $a \cdot a' \equiv 1 \pmod 5$.

- **Para el elemento 1:**
  $1 \cdot x = 1 \implies x = 1$. El inverso de $1$ es $1$.
- **Para el elemento 2:**
  $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1 \pmod 5$. El inverso de $2$ es $3$.
- **Para el elemento 3:**
  $3 \cdot 2 = 6 \equiv 1 \pmod 5$. El inverso de $3$ es $2$.
- **Para el elemento 4:**
  $4 \cdot 4 = 16$. Como $16 = 3 \cdot 5 + 1$, entonces $16 \equiv 1 \pmod 5$. El inverso de $4$ es $4$.

**Conclusión:**
Como cada elemento no nulo tiene un inverso multiplicativo (y se cumplen las demás propiedades de grupo abeliano para la suma y la distributividad), $\mathbb{Z}_5$ es un cuerpo.

**NOTA: $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$:** Los enteros módulo $p$ forman un cuerpo con la **suma módulo $p$** y la **multiplicación módulo $p$ si y solo si $p$ es un número primo**, de lo contrario no ocurre que todo elemento no nulo tenga inverso multiplicativo

## El Espacio Vectorial: La Estructura Central

Ya hemos hablado de **escalares** y de algunas estructuras algebraicas que los incluyen (grupos, anillos y cuerpos).

Ahora, necesitamos definir cómo interactúan estos dos componentes: un conjunto de **escalares** y otro conjunto de **elementos** que llamaremos **vectores**.

Esto nos lleva a la definición fundamental de **Espacio Vectorial**.

**Espacio Vectorial** *(Def.)* Sea $(K, +, \cdot)$ un cuerpo. Sea $V$ un conjunto no vacío, sea $+$ una operación en $V$ y sea $\cdot$ una función de $K \times V \to V$ llamada producto por escalar. Se dice que $(V, +, \cdot)$ es un $K$-espacio vectorial si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $(V, +)$ es un grupo abeliano.
2. El producto por escalar satisface las siguientes 4 propiedades:

   ...

(continúa en la próxima diapositiva).

1. **Distributividad del escalar sobre la suma de vectores:**
   $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \quad \forall a \in K; \forall v, w \in V$.

2. **Distributividad de la suma de escalares sobre el producto por vector:**
   $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \quad \forall a, b \in K; \forall v \in V$.

3. **Elemento neutro de los escalares:**
   $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$. ($1$ es el neutro multiplicativo de $K$)

4. **Asociatividad mixta del producto:**
   $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v) \quad \forall a, b \in K; \forall v \in V$.

Los elementos de $V$ se llaman vectores y los elementos de $K$ se llaman escalares.

**Nota sobre el producto por escalar:**

Por convención formal, el producto por escalar se define con el escalar a la izquierda ($a \cdot v$). Sin embargo, como la multiplicación es conmutativa en el cuerpo K (donde $a \cdot b = b \cdot a$), la expresión con el escalar a la derecha ($v \cdot a$) es totalmente equivalente y se usa con frecuencia.

**En la práctica:** $a \cdot v = v \cdot a$

# Ejercicio: Espacios Vectoriales (1/2)

**Pregunta:** Sea $V = \mathbb{R}^n$ (vectores de $n$ componentes reales) y $K = \mathbb{R}$ (escalares reales). Con las operaciones usuales:

- **Suma de vectores:** $(v_1, \ldots, v_n) + (w_1, \ldots, w_n) = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$
- **Producto por escalar:** $a \cdot (v_1, \ldots, v_n) = (av_1, \ldots, av_n)$

¿Es $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

**Instrucción:**

Para no extender este ejercicio demasiado, sólo verificar que se cumplen los 4 axiomas del producto por escalar:

1. **Axioma 1:** $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$
2. **Axioma 2:** $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
3. **Axioma 3:** $1 \cdot v = v$
4. **Axioma 4:** $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$

## Solución: Espacios Vectoriales (1/2) - (Revisado)

**Sí, es un espacio vectorial.** Verifiquemos los cuatro axiomas del producto por escalar. Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$ y $a, b \in \mathbb{R}$.
$v = (v_1, \ldots, v_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$. Con $v_i, w_i \in \mathbb{R}$

1. **Axioma 1:** $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$
   - **Lado Izquierdo:**
     $a \cdot (v + w) = a \cdot (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n) = (a(v_1 + w_1), \ldots, a(v_n + w_n))$
     $= (av_1 + aw_1, \ldots, av_n + aw_n)$
   - **Lado Derecho:**
     $a \cdot v + a \cdot w = (av_1, \ldots, av_n) + (aw_1, \ldots, aw_n) = (av_1 + aw_1, \ldots, av_n + aw_n)$
   - Ambos lados son iguales. ✅
2. **Axioma 2:** $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
   - **Lado Izquierdo:**
     $(a + b) \cdot v = ((a + b)v_1, \ldots, (a + b)v_n) = (av_1 + bv_1, \ldots, av_n + bv_n)$
   - **Lado Derecho:**
     $a \cdot v + b \cdot v = (av_1, \ldots, av_n) + (bv_1, \ldots, bv_n) = (av_1 + bv_1, \ldots, av_n + bv_n)$
   - Ambos lados son iguales. ✅

## Solución: Espacios Vectoriales (1/2) - (Continuación)

3. **Axioma 3:** $1 \cdot v = v$
   - $1 \cdot v = 1 \cdot (v_1, \dots, v_n) = (1 \cdot v_1, \dots, 1 \cdot v_n) = (v_1, \dots, v_n) = v$. ✅
4. **Axioma 4:** $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$ (Asociatividad mixta)
   - **Lado Izquierdo:**
     $(a \cdot b) \cdot v = (a \cdot b) \cdot (v_1, \dots, v_n)$
     $= ((ab)v_1, \dots, (ab)v_n)$
   - **Lado Derecho:**
     $a \cdot (b \cdot v) = a \cdot (b \cdot (v_1, \dots, v_n)) = a \cdot (bv_1, \dots, bv_n)$
     $= (a(bv_1), \dots, a(bv_n)) = ((ab)v_1, \dots, (ab)v_n)$
   - Ambos lados son iguales, gracias a la propiedad asociativa de la multiplicación en $\mathbb{R}$. ✅

# Ejercicio: Espacios Vectoriales (2/2)

**Pregunta:** Consideremos el mismo conjunto $V = \mathbb{R}^2$ y el cuerpo $K = \mathbb{R}$.
Mantenemos la suma de vectores usual, pero definimos un **producto por escalar "extraño"** $\odot$:

$$a \odot (x, y) = (ax, y)$$

(El escalar solo multiplica a la primera componente del vector).

¿Es $(V, +, \odot)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial?

**Instrucción:**
Revisa los axiomas del producto por escalar. Intenta encontrar al menos uno que **no** se cumpla con esta nueva operación.

**Pista:** Prueba el axioma de distributividad para la suma de escalares:
$(a + b) \odot v = (a \odot v) + (b \odot v)$.

## Solución: Espacios Vectoriales (2/2)

**No,** $(\mathbb{R}^2, +, \odot)$ **no es un espacio vectorial.** Falla en cumplir varios axiomas. Veamos el que sugiere la pista: $(a+b) \odot v = (a \odot v) + (b \odot v)$.

Sea $v = (x, y)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- **Lado Izquierdo:**
  $(a+b) \odot v = (a+b) \odot (x, y)$
  Por la definición de $\odot$, esto es:
  $((a+b)x, y) = (ax + bx, y)$

- **Lado Derecho:**
  $(a \odot v) + (b \odot v) = (a \odot (x, y)) + (b \odot (x, y))$
  Aplicamos $\odot$ a cada término:
  $(ax, y) + (bx, y)$
  Y ahora usamos la suma de vectores usual:
  $(ax + bx, y + y) = (ax + bx, 2y)$

- **Comparación:**
  Lado Izquierdo: $(ax + bx, y)$
  Lado Derecho: $(ax + bx, 2y)$

  Como $y \neq 2y$ (a menos que $y = 0$), los resultados no son iguales.
  **El axioma no se cumple.** Por lo tanto, la estructura $(V, +, \odot)$ no califica como un espacio vectorial.

# Demostración: El Escalar Cero Anula al Vector

**Proposición:** Sea $V$ un $K$-espacio vectorial. Para todo $v \in V$, se cumple que $0 \cdot v = \vec{0}$, donde $0$ es el neutro aditivo de $K$ y $\vec{0}$ es el neutro aditivo de $V$.

**Demostración basada en los axiomas:**

1. En el cuerpo de escalares $K$, sabemos que $0 = 0 + 0$ (por la propiedad del elemento neutro de la suma).
2. Multiplicamos esta igualdad por un vector cualquiera $v \in V$:
$$(0+0) \cdot v = 0 \cdot v$$
3. Aplicamos el axioma de **distributividad de la suma de escalares** en el lado izquierdo:
$$0 \cdot v + 0 \cdot v = 0 \cdot v$$
4. Ahora, trabajamos dentro del grupo $(V, +)$. Sumamos el inverso aditivo de $(0 \cdot v)$, es decir, $-(0 \cdot v)$, a ambos lados de la ecuación:
$$(0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-(0 \cdot v)) = 0 \cdot v + (-(0 \cdot v))$$
5. Simplificamos la expresión usando las propiedades de grupo de $(V, +)$:
    - $0 \cdot v + \underbrace{(0 \cdot v + (-(0 \cdot v)))}_{\text{esto es } \vec{0}} = \underbrace{0 \cdot v + (-(0 \cdot v))}_{\text{esto es } \vec{0}}$ *(Asociatividad e Inverso)*
    - $0 \cdot v + \vec{0} = \vec{0}$ *(Simplificando)*
    - $0 \cdot v = \vec{0}$ *(Propiedad del Neutro en V)*

**Conclusión:** La propiedad queda demostrada.

# Representando Vectores: Combinación Lineal

**Combinación Lineal** *(Def.)*

Sea $V$ un $K$-espacio vectorial. Dados un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset V$ y un conjunto de escalares $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset K$, un vector $w \in V$ es una **combinación lineal** de los $v_i$ si se puede escribir como:

$$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n$$

- **Ejemplo en $\mathbb{R}^2$:** El vector $w = (7, -2)$ es una combinación lineal de $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (0, 1)$, porque:

$$w = 7 \cdot (1, 0) + (-2) \cdot (0, 1)$$

# Conjunto Generador (Spanning Set)

La idea de combinación lineal nos lleva a una pregunta clave: ¿Con qué conjunto de vectores puedo "construir" el espacio entero?

**Conjunto Generador** *(Def.)*
Un conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un **conjunto generador** de un espacio vectorial $V$ si **todo** vector $v \in V$ puede expresarse como una combinación lineal de ellos.
Se dice que el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ **genera** a $V$.

- **Ejemplo:** El conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ genera todo el espacio $\mathbb{R}^2$, ya que cualquier vector $(x, y)$ se puede escribir como $x(1,0) + y(0,1)$.
- **Contraejemplo:** El conjunto $\{(1,1)\}$ **no** genera $\mathbb{R}^2$. Solo puede generar vectores de la forma $(c, c)$, es decir, la recta $y = x$.

# El Problema de la Redundancia

Un conjunto generador puede tener "ladrillos" de más.

Consideremos el espacio $\mathbb{R}^2$ y el conjunto generador:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Este conjunto genera todo $\mathbb{R}^2$, pero el tercer vector es **redundante**. ¿Por qué? Porque se puede construir a partir de los dos primeros:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Necesitamos una forma de describir conjuntos que no tengan esta redundancia. Esto nos lleva al concepto de **independencia lineal**.

# Independencia Lineal

La independencia lineal es la formalización de la idea de "no redundancia".

**Independencia Lineal** *(Def.)*
Un conjunto de vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es **linealmente independiente (L.I.)** si la única forma de que su combinación lineal sea el vector nulo es que todos los escalares sean cero.
Es decir, la ecuación:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = \vec{0}$$

tiene como **única solución** la **solución trivial**: $c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_n = 0$.

Si existe al menos una solución con algún $c_i \neq 0$, el conjunto es **linealmente dependiente (L.D.)**.

**En corto:** Un conjunto es L.D. si al menos un vector del conjunto se puede escribir como combinación lineal de los otros. Si ninguno puede, es L.I.

## Base de un Espacio Vectorial

Ahora podemos unir los dos conceptos (generación e independencia) para definir la idea más importante: la **base**.

**Base** *(Def.)*
Un conjunto de vectores $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una **base** de un espacio vectorial $V$ si cumple dos condiciones:

1. $\mathcal{B}$ es un **conjunto generador** de $V$.
2. $\mathcal{B}$ es **linealmente independiente**.

Una base es el conjunto de "ladrillos" más eficiente posible: contiene el número mínimo de vectores necesarios para construir todo el espacio.

**Propiedad Clave:** La representación de cualquier vector de $V$ en una base dada es **única**.

## Ejercicio: Independencia Lineal

**Pregunta:** Determina si los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^2$ son linealmente independientes (L.I.) o linealmente dependientes (L.D.).

**a)** $S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

**b)** $S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

**Instrucción:**

Para cada conjunto, plantea la ecuación $c_1v_1 + c_2v_2 = \vec{0}$ y busca si existe una solución no trivial (al menos un $c_i \neq 0$).

## Solución: Independencia Lineal

**a)** $S_1 = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$

Planteamos $c_1 v_1 + c_2 v_2 = \vec{0}$:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} c_1 - 2c_2 = 0 \\ 2c_1 - 4c_2 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación, $c_1 = 2c_2$. La segunda ecuación es un múltiplo de la primera.
Podemos elegir un valor no nulo para $c_2$, por ejemplo, $c_2 = 1$. Entonces $c_1 = 2$.
Una solución no trivial es $(c_1 = 2, c_2 = 1)$.
**Conclusión:** $S_1$ **es Linealmente Dependiente.** (Notar que $v_2 = -2v_1$).

**b)** $S_2 = \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Planteamos $c_1 w_1 + c_2 w_2 = \vec{0}$:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

Si $c_2 = 0$, la primera ecuación se convierte en $c_1 + 0 = 0$, lo que implica $c_1 = 0$.
La única solución es la trivial $(c_1 = 0, c_2 = 0)$.
**Conclusión:** $S_2$ **es Linealmente Independiente.**

## Ejercicio: ¿Es una Base?

**Pregunta:** El conjunto de vectores $\mathcal{B} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ¿forma una base para el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$?

**Instrucción:**

Debes verificar las dos condiciones para que un conjunto sea una base:

1. ¿Es linealmente independiente?
2. ¿Genera a $\mathbb{R}^2$?

> **Pista:** Un teorema importante dice que si tienes $n$ vectores linealmente independientes en un espacio de dimensión $n$ (como $\mathbb{R}^2$, donde $n = 2$), automáticamente forman una base (es decir, también lo generan).

## Solución: ¿Es una Base?

Verificamos las dos condiciones para $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

**1. Independencia Lineal:**

Planteamos $c_1 v_1 + c_2 v_2 = \vec{0}$:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, $c_1 = c_2$. Sustituyendo en la primera:

$c_2 + c_2 = 0 \implies 2c_2 = 0 \implies c_2 = 0$.

Y como $c_1 = c_2$, entonces $c_1 = 0$.

La única solución es la trivial $(c_1 = 0, c_2 = 0)$.

**El conjunto es linealmente independiente.** ✅

**2. Conjunto Generador:**

Como tenemos 2 vectores linealmente independientes en un espacio de 2 dimensiones ($\mathbb{R}^2$), el teorema nos asegura que también generan el espacio. ✅

**Conclusión: Sí, el conjunto $\mathcal{B}$ es una base para $\mathbb{R}^2$.** (Es una base muy usada, a veces llamada "base de Hadamard" en el contexto cuántico, aunque sin normalizar).

# El Siguiente Paso: Transformaciones Lineales

Ya entendemos los espacios vectoriales como el "escenario" donde viven nuestros vectores.

Ahora, introduciremos a los "actores": las **funciones** que toman un vector y lo transforman en otro. Pero no nos interesa cualquier tipo de función, sino aquellas que **respetan la estructura del espacio vectorial**.

Estas funciones especiales se llaman **transformaciones lineales**.

## ¿Qué es una Transformación?

De forma general, una transformación es simplemente una función que va de un espacio vectorial a otro.

$$T : V \to W$$

Para nuestros propósitos, a menudo $V$ y $W$ serán el mismo espacio (ej: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$).

# Transformación Lineal

**Transformación Lineal** *(Def.)*
Sean $V$ y $W$ dos $K$-espacios vectoriales. Una función $T : V \to W$ es una **transformación lineal** si cumple las siguientes dos condiciones para todos los vectores $u, v \in V$ y todo escalar $c \in K$:

1. **Preserva la suma de vectores:**

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

2. **Preserva el producto por escalar:**

$$T(c \cdot v) = c \cdot T(v)$$

> Una transformación lineal es aquella que respeta las operaciones del espacio vectorial. Es lo mismo aplicar la operación antes o después de la transformación.

## Ejemplo: Rotación en $\mathbb{R}^2$

Consideremos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que rota cada vector $90^\circ$ en sentido antihorario.

Intuitivamente, si rotas dos vectores y luego los sumas, obtienes el mismo resultado que si primero los sumas y luego rotas el vector resultante.

Esta transformación de rotación **es lineal**.

## Contraejemplo: Traslación en $\mathbb{R}^2$

Consideremos una transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que simplemente "desplaza" cada vector sumándole un vector fijo $v_0 = (2, 1)$.

$$T(v) = v + v_0$$

**¿$T$ es lineal?**

- Tomemos $u = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$.
- $T(u + v)$:
  $T((1, 0) + (0, 1)) = T(1, 1) = (1, 1) + (2, 1) = (3, 2)$
- $T(u) + T(v)$:
  $T(1, 0) + T(0, 1) = ((1, 0) + (2, 1)) + ((0, 1) + (2, 1))$
  $= (3, 1) + (2, 2) = (5, 3)$
- Como $T(u + v) \neq T(u) + T(v)$, la transformación **no es lineal**.

Nota: Era sencillo darse cuenta que la transformada $T(v) = v + (2,1)$ no es una transformada lineal, porque si lo fuera conservaría el origen, es decir $T((0,0)) = (0,0)$, y $T$ claramente no lo hace.

# Propiedad: Toda T. Lineal Mapea el Vector Nulo al Nulo

**Proposición:** Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Si $\vec{0}_V$ es el vector nulo de $V$ y $\vec{0}_W$ es el de $W$, entonces $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

**Demostración (usando la propiedad del producto por escalar):**

1. Partimos de la propiedad de espacios vectoriales que dice que el escalar $0$ anula a cualquier vector. Aplicada al propio vector nulo de $V$: $0 \cdot \vec{0}_V = \vec{0}_V$
2. Aplicamos la transformación $T$ a ambos lados de esta igualdad: $T(0 \cdot \vec{0}_V) = T(\vec{0}_V)$
3. Por la **propiedad de linealidad** (homogeneidad), podemos "sacar" el escalar del lado izquierdo: $0 \cdot T(\vec{0}_V) = T(\vec{0}_V)$
4. Ahora, observemos el término $T(\vec{0}_V)$. Este es un vector que pertenece al espacio de llegada $W$. La propiedad del escalar cero también se aplica en $W$: $0 \cdot T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$
5. Al combinar los resultados de los pasos 3 y 4, llegamos a la conclusión:

$$\vec{0}_W = T(\vec{0}_V)$$

**Conclusión:** Queda demostrado que la imagen del vector nulo bajo cualquier transformación lineal es siempre el vector nulo del espacio de llegada.

# Ejercicio: ¿Es Lineal?

Determina si las siguientes transformaciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son lineales.

**a)** $T_1(x, y) = (2x, -y)$ (Escala la coordenada x, invierte la y).

**b)** $T_2(x, y) = (x + 1, y)$ (Es una traslación horizontal).

**Instrucción:**

Para cada una, verifica si se cumplen las dos condiciones:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(c \cdot v) = c \cdot T(v)$

Si encuentras que una de las dos falla, ya puedes concluir que no es lineal.

## Solución: ¿Es Lineal?

**a)** $T_1(x, y) = (2x, -y)$
Sean $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$.

1. **Suma:**
   $T_1(u + v) = T_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2), -(y_1 + y_2)) = (2x_1 + 2x_2, -y_1 - y_2)$.
   $T_1(u) + T_1(v) = (2x_1, -y_1) + (2x_2, -y_2) = (2x_1 + 2x_2, -y_1 - y_2)$.
   ¡Coinciden! ✅
2. **Producto por escalar:**
   $T_1(c \cdot u) = T_1(cx_1, cy_1) = (2(cx_1), -(cy_1)) = (2cx_1, -cy_1)$.
   $c \cdot T_1(u) = c \cdot (2x_1, -y_1) = (c(2x_1), c(-y_1)) = (2cx_1, -cy_1)$.
   ¡Coinciden! ✅
   **Conclusión:** $T_1$ **es una transformación lineal.**

**b)** $T_2(x, y) = (x + 1, y)$
Sean $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$.

1. **Suma:**
   $T_2(u + v) = T_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = ((x_1 + x_2) + 1, y_1 + y_2)$.
   $T_2(u) + T_2(v) = (x_1 + 1, y_1) + (x_2 + 1, y_2) = (x_1 + x_2 + 2, y_1 + y_2)$.
   Como $(x_1 + x_2 + 1, \ldots) \neq (x_1 + x_2 + 2, \ldots)$, la condición falla. ❌
   **Conclusión:** $T_2$ **no es una transformación lineal.**

## De Transformaciones a Matrices

La propiedad más poderosa de las transformaciones lineales es que, una vez que elegimos una base, podemos representarlas de una forma muy conveniente: una **matriz**.

Aplicar la transformación $T$ a un vector $v$ se convierte en una simple **multiplicación de matriz por vector**:

$$T(v) = M \cdot v$$

**La pregunta es:** ¿Cómo encontramos la matriz $M$ que corresponde a una transformación lineal $T$?

> Para encontrar la matriz, solo necesitamos ver qué le hace la transformación a los vectores de la base.

## ¿Por qué funciona la representación matricial?

La clave está en las **propiedades de la linealidad**. Cualquier vector puede escribirse como una combinación lineal de los vectores de la base. Veamos la derivación:

1. **Tomemos un vector cualquiera** $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$. Lo expresamos en la base canónica $\{e_1, e_2\}$:

$$v = x \cdot e_1 + y \cdot e_2 = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. **Aplicamos la transformación lineal $T$ al vector $v$:** $T(v) = T\left( x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

3. **Usamos la linealidad** : $T(v) = x \cdot T\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + y \cdot T\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

4. Si definimos el resultado de transformar los vectores de la base como $T(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $T(e_2) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, entonces podemos sustituir: $T(v) = x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$

5. **¡Este resultado es exactamente una multiplicación de matriz por vector!**

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

**Conclusión:** La matriz $M = \begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{pmatrix}$ no es una convención arbitraria. Es la consecuencia directa de aplicar las propiedades de linealidad a un vector expresado en una base.

## La Matriz de una Transformación Lineal

Este es el método para construir la matriz $M$ que representa una transformación lineal $T : V \to W$.

1. **Elige una base para el espacio de PARTIDA $V$.** Para $\mathbb{R}^n$, usamos la base canónica: Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{B}_V = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$
2. **Aplica la transformación $T$ a cada vector de la base de $V$.** Obtendrás un conjunto de vectores en $W$: $T(e_1), T(e_2), \ldots$
3. **Expresa los resultados como coordenadas en la base del espacio de LLEGADA $W$.** Estos vectores de coordenadas son las columnas de la matriz $M$.

$$M = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T(e_1)]_{\mathcal{B}_W} & [T(e_2)]_{\mathcal{B}_W} & \ldots & [T(e_n)]_{\mathcal{B}_W} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

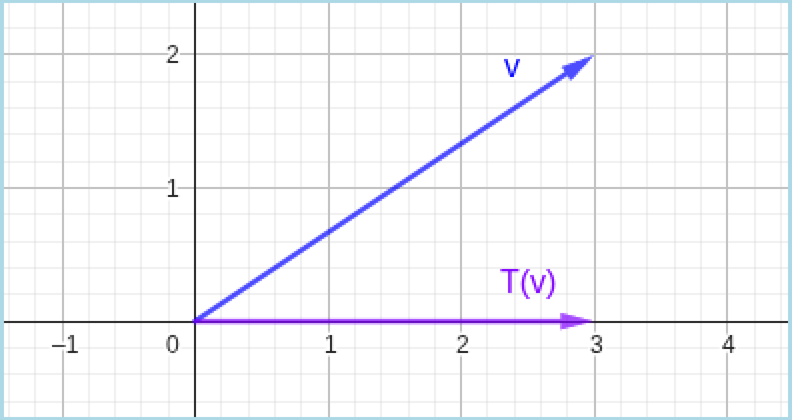
> **Nota:** En muchos casos, como en las compuertas cuánticas, el espacio de partida y de llegada es el mismo ($V = W$). En esa situación, se usa la misma base para ambos, y las columnas de la matriz son simplemente los vectores transformados $T(e_1), T(e_2)$, etc.

## Ejercicio: Encontrar la Matriz

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal que **proyecta** cada vector sobre el eje X.

Es decir, toma un vector $(x, y)$ y devuelve $(x, 0)$.

$$T(x, y) = (x, 0)$$




**Instrucción:**

Encuentra la matriz $M$ de 2x2 que representa esta transformación lineal $T$ utilizando la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

## Solución: Encontrar la Matriz

Seguimos el método de 3 pasos:

1. **Base:** Usamos la base canónica de $\mathbb{R}^2$, que es $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
2. **Transformar los vectores de la base:**
   - Para el primer vector base, $e_1$: $T(e_1) = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   - Para el segundo vector base, $e_2$: $T(e_2) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. **Construir la matriz:** Los resultados son las columnas de nuestra matriz $M$.
   - La primera columna es $T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   - La segunda columna es $T(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matriz es: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Comprobación:** $M \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x + 0y \\ 0x + 0y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. **¡Funciona!**

Abrir Aplicación Interactiva para visualizar transformaciones lineales

# Clasificación de Transformaciones Lineales

Una transformación lineal $f : V \to W$ se puede clasificar según sus propiedades de mapeo:

- **Monomorfismo:** Si la función $f$ es **inyectiva**.
- **Epimorfismo:** Si la función $f$ es **suryectiva** (sobreyectiva).
- **Isomorfismo:** Si la función $f$ es **biyectiva** (inyectiva y suryectiva).

Un caso especial y muy importante es cuando la transformación mapea un espacio sobre sí mismo:

- **Endomorfismo:** Es una transformación lineal $f : V \to V$.
- **Automorfismo:** Es un **endomorfismo** que además es **isomorfismo** (es decir, una transformación biyectiva de un espacio sobre sí mismo).

## Conexión con la Computación Cuántica

Aquí está el punto clave que justifica todo esto:

**Las compuertas cuánticas (X, H, CNOT, etc.) son transformaciones lineales.**

Cuando aplicamos una compuerta a un *qubit* (o a un registro de cúbits), lo que estamos haciendo matemáticamente es aplicar una transformación lineal al vector de estado que lo representa.

El "escenario" es el espacio de Hilbert (un tipo especial de espacio vectorial complejo), y las "acciones" son las compuertas cuánticas.

# Conexión con la Computación Cuántica

**1. Compuertas Cuánticas (Evolución Unitaria):**

- Son **AUTOMORFISMOS**.
- **Razón:** Son transformaciones del espacio de Hilbert sobre sí mismo $(H \to H)$, por lo que son **endomorfismos**. Además, son operaciones **reversibles** (unitarias), lo que garantiza que sean **biyectivas**.
- *Este proceso preserva la información cuántica.*

**2. Medición:**

- Son **ENDOMORFISMOS**, pero no automorfismos.
- **Razón:** Son transformaciones de $H \to H$ (**endomorfismos**), pero describen un proceso **irreversible** y no invertible (colapso del estado). Al no ser biyectivas, no pueden ser automorfismos.
- *Este proceso extrae información clásica a costa de perder la información de la superposición.*

## Más Allá de la Estructura: Añadiendo Geometría

Hasta ahora, nuestros espacios vectoriales tienen "álgebra": podemos sumar y escalar vectores.

Pero nos faltan herramientas para la "geometría":

- ¿Cómo medimos la **longitud** de un vector?
- ¿Cómo determinamos el **ángulo** entre dos vectores?
- ¿Qué significa que dos vectores sean **perpendiculares**?

Para responder a esto, necesitamos enriquecer nuestro espacio vectorial con una nueva operación: el **producto interior**.

# Producto Interior (o Interno)

**Producto Interior** *(Def.)*

Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Un **producto interior** es una función que toma dos vectores, $u$ y $v$, y devuelve un **escalar real**, denotado como $\langle u, v\rangle$, que cumple las siguientes propiedades para todos los $u, v, w \in V$ y todo escalar $c \in \mathbb{R}$:

1. **Simetría:** $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

   > *Nota: Esta propiedad es específica para espacios vectoriales reales. Cuando pasemos a espacios complejos, se modificará ligeramente.*

2. **Aditividad en el primer argumento:**
   $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$

3. **Homogeneidad en el primer argumento:**
   $\langle c \cdot u, w\rangle = c\langle u, w\rangle$

4. **Definida positiva:**

   - $\langle v, v\rangle \geq 0$
   - $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = \vec{0}$ (el vector nulo).

Un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con un producto interior se llama **Espacio Euclídeo**.

## Nota: ¿Y la Linealidad en el Segundo Argumento?

Nuestra definición axiomática solo exige la linealidad (aditividad y homogeneidad) para el **primer argumento**. ¿Por qué no para el segundo?

La respuesta es que no es necesario: la linealidad en el segundo argumento es una **consecuencia directa** de los otros axiomas.

- **La Clave:** La propiedad de **Simetría** ($\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$) es la que nos permite "transferir" la linealidad de un argumento al otro.
- **El Resultado:** Al exigir simetría y linealidad en un argumento, la linealidad en el otro viene **"gratis"**. Esto nos permite tener un conjunto de axiomas **mínimo y elegante**.

> **La Terminología Formal:**
> Una función que es lineal en ambos argumentos se llama una **forma bilineal**. Por lo tanto, una descripción más completa es que un producto interior real es una **forma bilineal simétrica**.

# El Ejemplo Clave: Producto Escalar (Dot Product)

El producto interior más famoso y que usaremos constantemente es el **producto escalar** en $\mathbb{R}^n$.

Dados dos vectores $u = (u_1, \ldots, u_n)$ y $v = (v_1, \ldots, v_n)$, su producto escalar es:

$$\langle u, v \rangle = u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

- **Ejemplo en $\mathbb{R}^3$:**
  Sean $u = (1, 2, -3)$ y $v = (4, 0, -1)$.
  $$\langle u, v \rangle = (1)(4) + (2)(0) + (-3)(-1) = 4 + 0 + 3 = 7$$

Se puede verificar que esta operación cumple los axiomas del producto interior.

# Norma: La Longitud de un Vector

El producto interior nos da una forma natural de definir la "longitud" o **norma** de un vector.

**Norma inducida** *(Def.)*

La norma de un vector $v$, denotada $||v||$, se define como:

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

> Esta definición es general y aplica a cualquier espacio con producto interior. Nos permite extender la noción de "longitud" a vectores en espacios de dimensiones superiores o abstractos donde no podemos "visualizar" directamente.

# Norma: La Longitud de un Vector en $\mathbb{R}^n$

En particular, en $\mathbb{R}^n$, usando el producto escalar que ya definimos, la norma de $v = (v_1, \ldots, v_n)$, se convierte en:

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$$

¡Esto es la familiar fórmula de la distancia, o el Teorema de Pitágoras generalizado!

- Para $v = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$,
  $\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

## Vectores Unitarios y Normalización

Un vector cuya norma es igual a 1 se llama **vector unitario**. Son fundamentales en computación cuántica.

Para cualquier vector no nulo $v$, podemos encontrar su vector unitario correspondiente (es decir, un vector que apunta en la misma dirección pero tiene longitud 1). Este proceso se llama **normalización**.

Para normalizar un vector $v$, simplemente lo dividimos por su norma:

$$\hat{v} = \frac{1}{\|v\|} v$$

El vector $\hat{v}$ es la versión normalizada de $v$.

## Ortogonalidad: Vectores Perpendiculares

El producto interior nos da una forma simple de definir la perpendicularidad.

**Ortogonalidad** *(Def.)*

Dos vectores $u$ y $v$ se dicen **ortogonales** si su producto interior es cero.

$$\langle u, v \rangle = 0$$

Esto captura la noción geométrica de que son perpendiculares entre sí.

- **Ejemplo en $\mathbb{R}^2$:**
  Sean $u = (2, 1)$ y $v = (-1, 2)$.

  $$\langle u, v \rangle = (2)(-1) + (1)(2) = -2 + 2 = 0$$

  Por lo tanto, $u$ y $v$ son ortogonales.

## La Interpretación Geométrica en $\mathbb{R}^n$

La verdadera magia del producto escalar es que conecta el álgebra con la geometría del ángulo.

El producto escalar entre dos vectores $u$ y $v$ está relacionado con el ángulo $\theta$ entre ellos por la siguiente fórmula:

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos(\theta)$$

De aquí podemos despejar el ángulo:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

> Esto nos da una visión profunda: si $u$ y $v$ son ortogonales, $\langle u, v \rangle = 0$.
> La única forma de que eso ocurra (si los vectores no son nulos) es que $\cos(\theta) = 0$.
> ¡Esto sucede precisamente cuando el ángulo $\theta$ es $90^\circ$!

Abrir Aplicación Interactiva para visualizar el producto escalar

# Ejercicio: Cálculos Básicos

Sean los vectores en $\mathbb{R}^3$:

$u = (2, -2, 1)$

$v = (1, 2, 2)$

**Instrucción:**

Calcula lo siguiente:

1. El producto interior $\langle u, v \rangle$.
2. Las normas $\|u\|$ y $\|v\|$.
3. Determina si los vectores son ortogonales.

## Solución: Cálculos Básicos

$u = (2, -2, 1)$ y $v = (1, 2, 2)$.

**1. Producto Interior:**

$$\langle u, v \rangle = (2)(1) + (-2)(2) + (1)(2) = 2 - 4 + 2 = 0$$

**2. Normas:**

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\|v\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

**3. Ortogonalidad:**

Como $\langle u, v \rangle = 0$, podemos concluir que **sí, los vectores son ortogonales.**

# Ejercicio: Normalización y Ángulo

**Parte A:** Normaliza el vector $w = (1, 2, -2) \in \mathbb{R}^3$.

**Parte B:** Encuentra el ángulo $\theta$ entre los vectores $a = (1, 0)$ y $b = (1, 1)$ en $\mathbb{R}^2$.

## Solución: Normalización y Ángulo

**Parte A: Normalizar** $w = (1, 2, -2)$

1. **Calcular la norma:**
   $\|w\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3.$
2. **Dividir el vector por su norma:**
   $\hat{w} = \frac{1}{\|w\|} w = \frac{1}{3}(1, 2, -2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right).$

**Parte B: Ángulo entre** $a = (1, 0)$ **y** $b = (1, 1)$

1. **Calcular producto interior:** $\langle a, b \rangle = (1)(1) + (0)(1) = 1.$
2. **Calcular normas:**
   $\|a\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1.$
   $\|b\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$
3. **Aplicar la fórmula del coseno:**
   $\cos(\theta) = \frac{\langle a,b \rangle}{\|a\|\|b\|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$
4. **Encontrar el ángulo:**
   $\theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45^\circ.$