Revisa la Sección 1 del cuaderno jupyter

clase08-qiskit.ipynb

Compuertas y Circuitos Cuánticos

El Lenguaje de los Algoritmos

Del Álgebra a los Algoritmos: El Circuito Cuántico

Hasta ahora, hemos usado el lenguaje del álgebra: kets, bras y matrices. Para diseñar algoritmos de forma práctica, necesitamos un lenguaje de más alto nivel, uno que sea visual e intuitivo.

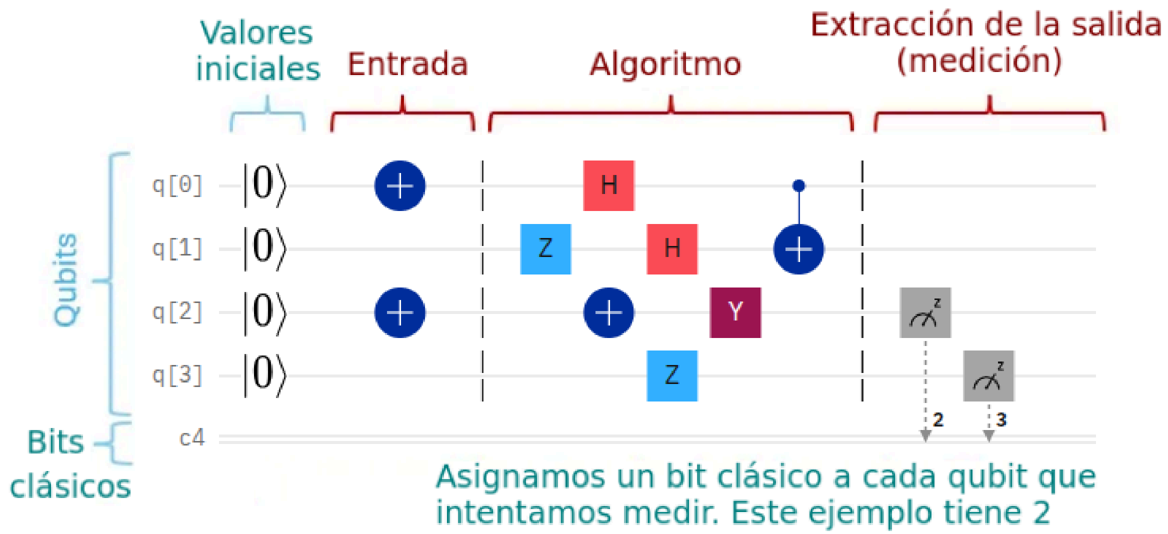
¿Qué es un Circuito Cuántico?

> Un circuito cuántico es la **representación visual y matemática** de un algoritmo cuántico. **No es un diagrama de hardware físico**, sino una convención para especificar una secuencia de operaciones.

- Los **cables** horizontales representan los **qubits** (y a veces bits clásicos).
- El tiempo fluye de **izquierda a derecha**.
- Los **bloques** en los cables son las **compuertas cuánticas** (nuestros operadores unitarios), que manipulan el estado de los qubits.

La Anatomía de un Circuito Cuántico

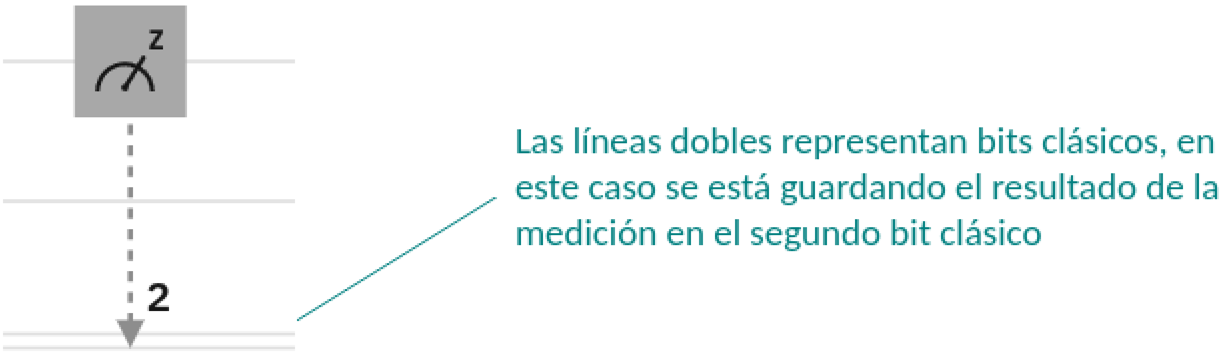
Un circuito cuántico tiene una estructura estándar que refleja los pasos de un algoritmo.



1. **Inicialización:** Los qubits se preparan en un estado inicial simple, casi siempre $|0\rangle$.
2. **Algoritmo:** Se aplica una secuencia de compuertas cuánticas para hacer evolucionar el estado.
3. **Medición:** Al final, se mide uno o más qubits para extraer un resultado clásico, que se almacena en bits clásicos.

La Puerta de Medición

La medición es una operación especial, distinta de las compuertas unitarias.



Propiedades Clave:

- **Colapso:** La medición colapsa la superposición de un qubit a un resultado clásico definitivo (0 o 1).
- **Irreversibilidad:** Una vez medido, el qubit pierde su información cuántica. Por esta razón, la medición se realiza casi siempre al **final** del circuito, para no interrumpir el cómputo.

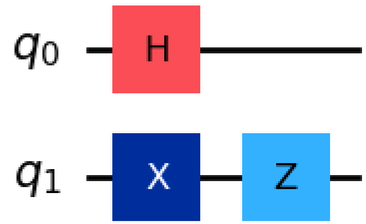
Traduciendo Circuitos a Álgebra

La verdadera potencia de los circuitos es que son una representación exacta de nuestro formalismo matemático. Podemos "traducir" cualquier circuito a una única expresión algebraica.

Las Dos Reglas de Traducción:

1. **Producto Tensorial ($\otimes$):** Se usa para compuertas que ocurren **al mismo tiempo** (en la misma "columna" vertical). El orden sigue la convención de Qiskit: el operador del qubit de mayor índice va a la izquierda.
2. **Producto Matricial ($\cdot$):** Se usa para compuertas que ocurren **en secuencia** (en el mismo "cable"). **Importante:** El orden de aplicación es el inverso al del circuito (de derecha a izquierda).

Ejemplo de Traducción



Análisis del Circuito:

- **Paso 1 (Columna 1):** Operador $\hat{U}_1 = (X \otimes H)$.
- **Paso 2 (Columna 2):** Operador $\hat{U}_2 = (Z \otimes I)$.

Construyendo el Operador del Circuito Total:

Toda la secuencia de compuertas puede ser "compilada" en un único operador unitario, $\hat{U}_{circuito}$, que representa la evolución total. Este se obtiene multiplicando los operadores de cada paso en **orden inverso**:

$$\hat{U}_{circuito} = \underbrace{(Z \otimes I)}_{\text{Paso 2}} \cdot \underbrace{(X \otimes H)}_{\text{Paso 1}}$$

Calculando el Estado Final:

Para encontrar el estado final, simplemente aplicamos este operador total al estado inicial:

$$|\psi_{final}\rangle = \hat{U}_{circuito}|\psi_{inicial}\rangle$$

Una Observación Interesante: Agrupando por "Cable"

Para el circuito anterior, vimos que el operador total era:

$$\hat{U}_{circuito} = (Z \otimes I) \cdot (X \otimes H)$$

Existe una forma alternativa de calcular esto. Gracias a la **propiedad multiplicativa** del producto tensorial, $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$, podemos reagrupar la expresión:

$$\hat{U}_{circuito} = (Z \cdot X) \otimes (I \cdot H)$$

Interpretación:

- $Z \cdot X$: Es el operador total para el "cable" del qubit q_1.
- $I \cdot H$: Es el operador total para el "cable" del qubit q_0.

> Podemos calcular el operador de cada qubit por separado y luego combinarlos con el producto tensorial.

> **¡Advertencia Crucial!** Este método de "agrupar por cable" **solo funciona** si el circuito está compuesto **únicamente por compuertas de 1 qubit**. Si el circuito contiene compuertas de múltiples qubits (como una CNOT), esta separación no es posible y debemos usar el método de multiplicar por columnas.

Compuertas Cuánticas

El Alfabeto de Nuestros Algoritmos

Compuertas de 1 Qubit: Nuestro Kit de Herramientas Básico

Ya conocemos los operadores de 1 qubit desde el punto de vista algebraico. Ahora, vamos a asociarlos con su representación estándar en un circuito cuántico: su **compuerta**.

Cada compuerta es una matriz unitaria de 2×2 que actúa sobre el vector de estado de un solo qubit.

En las siguientes diapositivas, repasaremos las compuertas más importantes, presentando su **acción**, su **matriz** y su **símbolo en el circuito**.

La Compuerta NOT (Pauli-X)

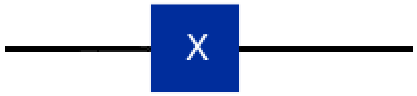
- **Acción:** Realiza un "bit-flip". Es el análogo cuántico de la compuerta NOT clásica.

$$X|0\rangle = |1\rangle \quad , \quad X|1\rangle = |0\rangle$$

- **Matriz:**

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Símbolo en el Circuito:**



La Compuerta de Cambio de Fase (Pauli-Z)

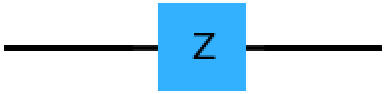
- **Acción:** Realiza un "phase-flip". Aplica una fase de -1 al estado $|1\rangle$ y deja el estado $|0\rangle$ sin cambios.

$$Z|0\rangle = |0\rangle \quad , \quad Z|1\rangle = -|1\rangle$$

- **Matriz:**

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Símbolo en el Circuito:**



La Compuerta Pauli-Y

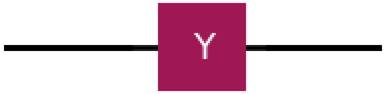
- **Acción:** Realiza una operación que combina un "bit-flip" con un "phase-flip" (aplicando fases complejas).

$$Y|0\rangle = i|1\rangle \quad , \quad Y|1\rangle = -i|0\rangle$$

- **Matriz:**

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

- **Símbolo en el Circuito:**



La Compuerta Hadamard (H)

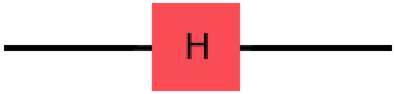
- **Acción:** La compuerta fundamental para **crear superposiciones**. Transforma los estados de la base computacional a la base de Hadamard y viceversa.

$$H|0\rangle = |+\rangle \quad , \quad H|1\rangle = |-\rangle$$

- **Matriz:**

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Símbolo en el Circuito:**



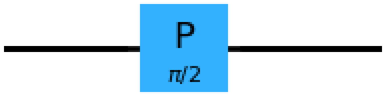
La Puerta de Fase (Puerta P): Rotaciones en Z

Más allá de las compuertas fijas, existe una familia de compuertas parametrizadas que nos dan un control más fino. La más importante es la **Puerta de Fase (P)**.

- **Acción:** Aplica una fase $e^{i\phi}$ al estado $|1\rangle$, donde ϕ es un ángulo en radianes. Corresponde a una rotación sobre el eje Z de la esfera de Bloch.
- **Matriz:**

$$P(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

- **Símbolo:** Un cuadrado con la letra 'P' y el ángulo ϕ.



> Esta compuerta es una "fábrica" de otras compuertas importantes, que son simplemente casos particulares de $P(\phi)$ para ángulos específicos.

Casos Particulares de la Puerta P

Las compuertas de fase que ya conocemos se pueden definir a partir de la Puerta P.

- **Compuerta S ($P(\pi/2)$):**

$$S = P(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

- **Compuerta T ($P(\pi/4)$):** Aunque por razones históricas se la conoce como la compuerta $\pi/8$

$$T = P(\frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$

- **Compuerta Z ($P(\pi)$):**
  Usando la identidad de Euler, $e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$.

$$Z = P(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Conclusión: Las compuertas S, T y Z no son compuertas arbitrarias, sino rotaciones específicas sobre el eje Z de 90°, 45° y 180° respectivamente.

Nota: La Confusa Nomenclatura de la Compuerta T

Es importante aclarar una posible fuente de confusión que encontrarán en muchos textos.

- **La Compuerta T** es una rotación en Z de $\pi/4$ **radianes (45°)**.
- Su matriz estándar es: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$

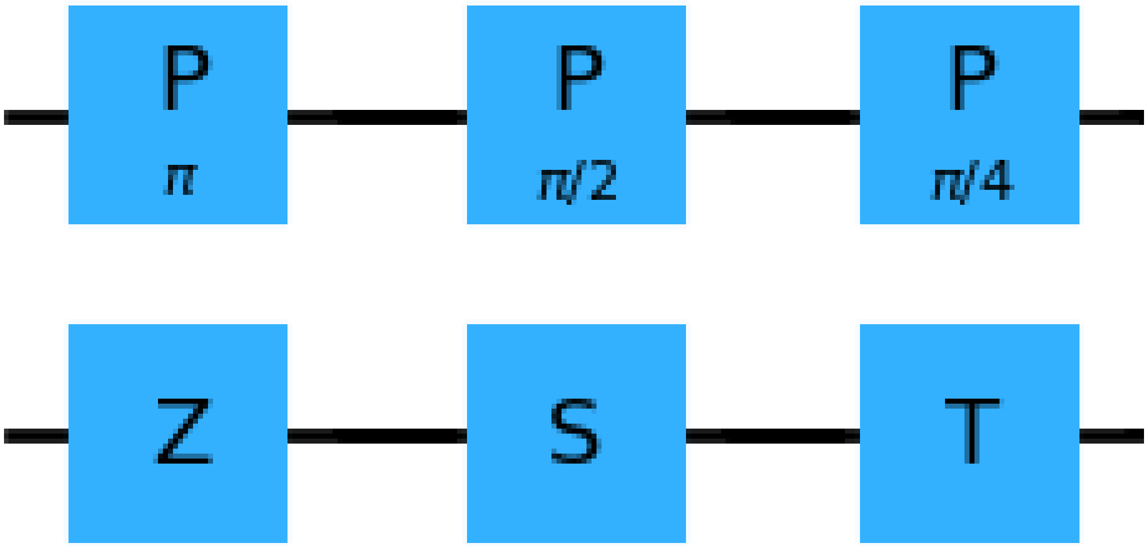
Sin embargo, a menudo se la conoce como la **compuerta** $\pi/8$. ¿Por qué?

La razón es que la matriz T se puede reescribir factorizando una fase global:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} = \underbrace{e^{i\pi/8}}_{\text{Fase Global}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-i\pi/8} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/8} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Rotación } R_z(\pi/4)}$$

> El nombre "$\pi/8$" proviene de este **factor de fase global** $e^{i\pi/8}$. Como la fase global no tiene efectos físicos medibles, la acción efectiva de la compuerta es una rotación de $\pi/4$.
>
> **Para recordar:** La **compuerta T** realiza una rotación de $\pi/4$. Su denominación "$\pi/8$ gate" proviene de una fase global sin efecto observable, lo que vuelve el nombre históricamente arraigado pero conceptualmente desafortunado.

Casos Particulares de la Puerta P



En ambos "cables" se han colocado exactamente las mismas compuertas y en el mismo orden.

Resumen de Identidades Útiles

Existen muchas relaciones interesantes entre las compuertas que hemos visto. Conocerlas es útil para simplificar circuitos y entender su comportamiento.

- **Inversas Propias ($U^2 = I$):**

$$X^2 = Y^2 = Z^2 = H^2 = I$$

> Aplicar estas compuertas dos veces seguidas es lo mismo que no hacer nada. Son sus propias inversas.

- **Relaciones de Composición:**

$$S = T^2 \quad , \quad Z = S^2 = T^4$$

- **Relaciones de "Sándwich":**

$$X = HZH \quad , \quad Z = HXH$$

> Estas identidades son fundamentales y muestran cómo cambiar de base (con H) puede transformar una compuerta en otra.

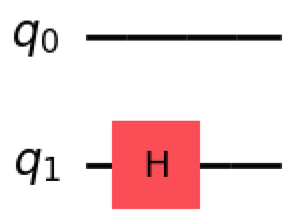
Compuertas de 1 Qubit en Circuitos Multi-Qubit

La Perspectiva Global: El Estado del Sistema Completo

Cuando aplicamos compuertas de 1 qubit a un sistema de N qubits, cada compuerta actúa sobre su "cable" correspondiente. Sin embargo, es fundamental recordar que lo que realmente evoluciona es el **único vector de estado global** en el espacio de 2^N dimensiones.

Ejemplo: Aplicando $H \otimes I$ al estado $|00\rangle$

- **Circuito:**



- **Acción Algebraica:**

$$(H \otimes I)|00\rangle = (H|0\rangle) \otimes (I|0\rangle) = |+\rangle \otimes |0\rangle$$

- **Expansión en la Base Global:**

$$= \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

> Aunque solo "tocamos" el primer qubit, el **estado completo** del sistema ha cambiado de $|00\rangle$ a una superposición de $|00\rangle$ y $|10\rangle$.

Ejercicio: Creando una Superposición Uniforme

Problema:

En muchos algoritmos, el primer paso es poner un registro de N qubits en una superposición uniforme de todos los 2^N estados base.

¿Cómo creamos este estado para un sistema de 2 qubits partiendo de $|00\rangle$?

Estado Objetivo:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

Instrucción:

1. ¿Qué compuerta crea una superposición a partir de un estado base?
2. ¿Qué operador compuesto representa aplicar esta compuerta a **ambos** qubits simultáneamente?
3. Calcula el resultado de aplicar este operador al estado inicial $|00\rangle$.

Solución:

1. Operador: Para crear una superposición, usamos la compuerta Hadamard (H). Para aplicarla a ambos qubits, usamos el operador $H \otimes H$.

2. Cálculo:

$$(H \otimes H)|00\rangle = (H|0\rangle) \otimes (H|0\rangle) = |+\rangle \otimes |+\rangle$$

Ahora, expandimos el resultado:

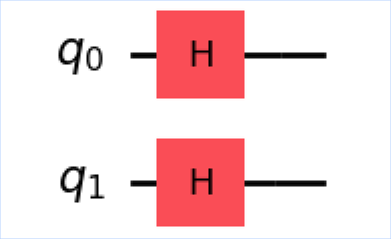
$$= \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

✅ ¡Hemos creado la superposición uniforme!

Circuito Equivalente:



Aplicando Compuertas a Múltiples Qubits en Paralelo

A menudo, queremos aplicar la misma compuerta de 1 qubit a varios qubits a la vez. El operador total se construye con el producto tensorial.

Notación Abreviada:

Para aplicar la misma compuerta U a un registro de N qubits, se utiliza la notación:

$$U^{\otimes N} \equiv \underbrace{U \otimes U \otimes \cdots \otimes U}_{N \text{ veces}}$$

Ejemplo: Para crear una **Superposición Uniforme** de todos los estados posibles, partiendo de N qubits todos en el estado $|0\rangle$, aplicamos una **Hadamard** a cada uno de ellos.

$$H^{\otimes N}|0\rangle^{\otimes N} = (H|0\rangle) \otimes \cdots \otimes (H|0\rangle) = |+\rangle^{\otimes N}$$

La Limitación Clave:

Las compuertas de 1 qubit (incluso aplicadas en paralelo) **nunca pueden crear entrelazamiento**. Cada qubit evoluciona de forma independiente. Para crear entrelazamiento, necesitamos compuertas que actúen sobre múltiples qubits a la vez.

Estado Global vs. Estado Individual

¿Podemos siempre describir el estado individual de un qubit si conocemos el estado global?

La respuesta es NO, y es la razón por la que el entrelazamiento es tan especial.

- **En un estado separable** como $|+\rangle|-\rangle$, la respuesta es SÍ. Podemos decir sin ambigüedad "el primer qubit está en el estado $|+\rangle$".
- **En un estado entrelazado** como $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$, la pregunta "¿en qué estado está el primer qubit?" **no tiene sentido**. El primer qubit no tiene un estado definido e independiente.

> Para describir formalmente un subsistema que forma parte de un estado entrelazado, la herramienta del **vector de estado (ket) ya no es suficiente**. Necesitamos un formalismo más general: la **matriz de densidad**. Aunque no profundizaremos en ella, es importante saber que el estado global es la única descripción completa y "real" del sistema.

Revisa la Sección 2 del cuaderno jupyter

clase08-qiskit.ipynb