Ejercicio de Revisión de Conceptos

Realizar los cuestionarios publicados sobre las teorías 5 y 6

Sistemas Compuestos

Separables y entrelazados

Estados Producto (Separables)

Cuando el estado de un sistema compuesto se puede escribir como el producto tensorial de los estados de sus subsistemas, decimos que es un **estado producto** o **estado separable**.

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_0\rangle$$

Significado Físico:

> En un estado producto, los subsistemas son **independientes**. Podemos describir cada qubit por separado.

Ejemplo Práctico: ¿Es este estado separable?

Problema:

Considera el estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$.
¿Es este un estado producto? Si es así, ¿cuáles son los estados $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_0\rangle$ de los qubits individuales tales que $|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_0\rangle$?

Estrategia:

Intentaremos "factorizar" la expresión de $|\Psi\rangle$, de manera similar a como factorizamos expresiones algebraicas.

Solución: El Mecanismo de Factorización

Paso 1: Agrupar términos ("Factor Común").

Tomamos la expresión $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$ y sacamos factor común considerando el primer qubit.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{|00\rangle - |01\rangle}_{\text{Términos con } |0\rangle \text{ primero}} + \underbrace{|10\rangle - |11\rangle}_{\text{Términos con } |1\rangle \text{ primero}} \Big)$$

Usando la propiedad $|ab\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ y la linealidad:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\Big(|0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) + |1\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle)\Big)$$

Solución: El Mecanismo de Factorización (cont.)

Paso 2: Volver a sacar factor común.

Vemos que el término $(|0\rangle - |1\rangle)$ es común en ambos sumandos (a la derecha de $\otimes$). Podemos sacarlo como factor común (a la derecha):

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}\Big((|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)\Big)$$

Paso 3: Distribuir el escalar y reconocer los estados.

Distribuimos el $\frac{1}{2}$ como $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ para normalizar cada parte:

$$|\Psi\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

Reconocemos estos estados como la base de Hadamard:

$$|\Psi\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle$$

Conclusión:

Sí, el estado **es separable**. Es el producto tensorial del estado $|+\rangle$ para el primer qubit (q_1) y el estado $|-\rangle$ para el segundo (q_0).

Amplitudes para Estados Producto

Ahora, veamos qué sucede con las amplitudes cuando el estado $|\Psi\rangle$ es un **estado producto**, es decir,

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_0\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$$

Cálculo de la Amplitud c_{ab}:

$$c_{ab} = \langle ab|\Psi\rangle = \langle ab|(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_0\rangle) = \langle a|\psi_1\rangle \cdot \langle b|\psi_0\rangle$$

Traducción del Resultado:

- $\langle a|\psi_1\rangle$: Es la amplitud de medir $|a\rangle$ en el primer qubit (q_1).
- $\langle b|\psi_0\rangle$: Es la amplitud de medir $|b\rangle$ en el segundo qubit (q_0).

> **Descubrimiento:** Para un estado producto, la amplitud del resultado conjunto es simplemente el **producto de las amplitudes individuales**.

La Conexión con la Independencia Estadística

El resultado que acabamos de deducir es la versión cuántica de la independencia estadística en un estado producto (separable).

$$\text{Amplitud}(ab) = \text{Amplitud}(a) \times \text{Amplitud}(b)$$

Si elevamos al cuadrado ambos lados para obtener las probabilidades:

$$|\text{Amplitud}(ab)|^2 = |\text{Amplitud}(a)|^2 \times |\text{Amplitud}(b)|^2$$

$$P(ab) = P(a) \cdot P(b)$$

> **La Intuición Clave:**
> El producto tensorial es la operación matemática que **codifica la independencia** entre sistemas cuánticos. Un estado se llama "producto" o "separable" precisamente porque sus estadísticas de medición se comportan como si los subsistemas fueran eventos estadísticamente independientes.

Estados Entrelazados (No Separables)

La Pregunta Clave: ¿Puede **todo** estado en $\mathbb{C}^4$ escribirse como el producto tensorial de dos estados en $\mathbb{C}^2$?

La Respuesta: ¡NO!

> Un estado que **no puede** ser factorizado como el producto tensorial de los estados de sus subsistemas se llama un **estado entrelazado** (*entangled*).

En un estado entrelazado, los subsistemas están correlacionados de una manera que no tiene análogo clásico. Es imposible describir un qubit sin hacer referencia al otro.

Demostración: Un Estado Entrelazado

Consideremos el famoso estado de Bell:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Supongamos que es separable. Entonces, deben existir dos estados de un qubit $|\phi_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ y $|\phi_0\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$ tales que:

$$|\phi_1\rangle \otimes |\phi_0\rangle = |\Phi^+\rangle \implies \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_0 \\ \alpha_1\beta_0 \\ \beta_1\alpha_0 \\ \beta_1\beta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Demostración: Un Estado Entrelazado (Cont.)

Esto nos da un sistema de cuatro condiciones que deben cumplirse **simultáneamente**:

i. $\alpha_1 \alpha_0 = 1/\sqrt{2}$
ii. $\alpha_1 \beta_0 = 0$
iii. $\beta_1 \alpha_0 = 0$
iv. $\beta_1 \beta_0 = 1/\sqrt{2}$

Analizando la Ecuación (ii): $\alpha_1 \beta_0 = 0 \implies$ o $\alpha_1 = 0$ o $\beta_0 = 0$.

- Si $\alpha_1 = 0$, entonces por (i) $\alpha_1 \alpha_0 = 0$. Esto contradice que $\alpha_1 \alpha_0 = 1/\sqrt{2}$.
- Si $\beta_0 = 0$, entonces por (iv) $\beta_1 \beta_0 = 0$. Esto contradice que $\beta_1 \beta_0 = 1/\sqrt{2}$.

En ambos casos llegamos a una **contradicción**.

> **Conclusión:** La suposición inicial es falsa. El estado no es separable $\implies$ ***¡Está entrelazado!***.

Un Test Rápido para la Separabilidad en 2 Qubits

Para un estado de 2 qubits

$$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$$

¿cómo podemos saber si es separable sin tener que encontrar sus factores?

La respuesta está en la estructura de sus amplitudes.

> **Test de Separabilidad:**
> Un estado de 2 qubits $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + \cdots + c_{11}|11\rangle$ es **separable** $\iff c_{00} \cdot c_{11} = c_{01} \cdot c_{10}$

Ejercicio: Aplicando el Test a nuestro primer ejemplo

Problema:

Determina si el siguiente estado es separable o entrelazado usando el test de separabilidad.

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

Solución: Aplicando el Test a nuestro primer ejemplo

1. Identificamos las amplitudes:

$$c_{00} = \frac{1}{2}, \quad c_{01} = -\frac{1}{2}, \quad c_{10} = \frac{1}{2}, \quad c_{11} = -\frac{1}{2}$$

2. Aplicamos la condición: $c_{00} \cdot c_{11} \stackrel{?}{=} c_{01} \cdot c_{10}$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \implies -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

3. Conclusión:

> Como la igualdad **se cumple**, el test confirma que el estado **es separable**. ✅

Ejercicio: Aplicando el test a nuestro segundo ejemplo

Problema:

Ahora, aplica el test al estado de Bell $|\Phi^+\rangle$ para verificar si está entrelazado.

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Solución: Aplicando el Test (2/2)

1. Identificamos las amplitudes:

$$c_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_{01} = 0, \quad c_{10} = 0, \quad c_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2. Aplicamos la condición: $c_{00} \cdot c_{11} \stackrel{?}{=} c_{01} \cdot c_{10}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \stackrel{?}{=} (0) \cdot (0)$$

$$\frac{1}{2} \neq 0$$

3. Conclusión:

> Como la igualdad **no se cumple**, el test confirma que el estado de Bell $|\Phi^+\rangle$ **está entrelazado**. ✅

La Familia de Estados de Bell

El estado $|\Phi^+\rangle$ que demostramos que está entrelazado no es una simple curiosidad. Es el prototipo de una familia de **cuatro estados máximamente entrelazados**.

Notación	Expresión	Correlación de Medición
$|\Phi^+\rangle$	$\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$	Los resultados siempre **coinciden** (00 o 11)
$|\Phi^-\rangle$	$\frac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}}$	Los resultados siempre **coinciden** (00 o 11)
$|\Psi^+\rangle$	$\frac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}$	Los resultados siempre son **diferentes** (01 o 10)
$|\Psi^-\rangle$	$\frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}$	Los resultados siempre son **diferentes** (01 o 10)

> Juntos, estos cuatro estados forman un conjunto con propiedades extraordinarias y son fundamentales para la computación cuántica.

No Todo el Entrelazamiento es Igual: Un Espectro

El entrelazamiento no es una propiedad de "todo o nada". Es un espectro que va desde cero (estados separables) hasta un límite máximo.

Distinguimos dos grandes categorías de entrelazamientos:

a. **Entrelazamiento Parcial:** Hay correlaciones, pero los qubits individuales todavía contienen algo de información local (sus resultados están "sesgados").
b. **Entrelazamiento Máximo:** Toda la información se ha movido a la correlación. Los qubits individuales son completamente aleatorios.

Entrelazamiento Parcial

Un estado está **parcialmente entrelazado** cuando la descripción de sus subsistemas locales (la "incertidumbre local") no es completamente aleatoria.

Ejemplo:

$$|\Psi\rangle = \sqrt{0.8}|00\rangle + \sqrt{0.2}|11\rangle$$

Análisis del Subsistema de Alice (qubit q_1):

- **Incertidumbre Local Parcial:** Si Alice mide su qubit en la base Z, la probabilidad de obtener $|0\rangle$ es $P(q_1 = 0) = 80\%$. Su resultado está **sesgado**. Como su estado local no es completamente aleatorio, el entrelazamiento es parcial.
- **Correlación de Resultados (en esta base):** A pesar del sesgo, este estado particular exhibe una correlación de **resultados** perfecta *en la base Z*: si Alice mide $|0\rangle$, Bob medirá $|0\rangle$.

Entrelazamiento Máximo

Un estado está **máximamente entrelazado** cuando la descripción de sus subsistemas locales es completamente aleatoria.

Ejemplo (Estado de Bell):

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

Análisis del Subsistema de Alice (qubit q_1):

- **Incertidumbre Local Total:** Si Alice mide su qubit, el resultado es 50/50 **independientemente de la base en que mida** (Z, X, etc.). Su estado local es máximamente incierto. Esto, por definición, significa que el entrelazamiento es máximo.
- **Propiedad Especial (Correlación de Resultados):** Los estados de Bell, además, tienen la propiedad especial de mostrar una correlación de **resultados** perfecta (o anti-correlación) tanto en la base Z como en la base X.

> **Lección Clave:** El **grado** de entrelazamiento se define por la **aleatoriedad del estado local**, no por la perfección de la correlación de resultados.

La Base de Bell: Propiedades y Notación

Los estados de Bell forman la **Base de Bell**, una base ortonormal para el espacio de 2 qubits ($\mathbb{C}^4$).

Propiedades Clave:

- **Máximamente Entrelazados:** Ninguno pasa el test de separabilidad ($c_{00}c_{11} \neq c_{01}c_{10}$) y la incertidumbre local es máxima.
- **Base Ortonormal:** Son mutuamente ortogonales ($\langle \Phi^+ | \Phi^- \rangle = 0$, etc.) y están normalizados. Cualquier estado de 2 qubits se puede expresar como una combinación lineal de ellos.
- **Recurso Físico:** Son la piedra angular de protocolos como la **teleportación cuántica**, la **codificación superdensa** y la **criptografía cuántica**.

Ejercicio: Ortonormalidad de la Base de Bell

Problema:

Demostrar que la base de Bell es ortonormal significa probar dos cosas:

1. **Normalidad:** La norma de cada vector de la base es 1.
2. **Ortogonalidad:** El producto interno entre dos vectores distintos de la base es 0.

Instrucción:

- **Parte 1 (Normalidad):** Demuestra que el estado $|\Psi^+\rangle$ está normalizado, es decir, calcula $\langle\Psi^+|\Psi^+\rangle$ y verifica que es 1.
- **Parte 2 (Ortogonalidad):** Demuestra que los estados $|\Phi^+\rangle$ y $|\Psi^+\rangle$ son ortogonales, es decir, calcula $\langle\Phi^+|\Psi^+\rangle$ y verifica que es 0.

Solución: Ortonormalidad de la Base de Bell (Normalidad)

Parte 1: Verificamos que $|\Psi^+\rangle$ está normalizado ($\langle\Psi^+|\Psi^+\rangle = 1$).

1. **Escribimos el producto interno:**

$$\langle\Psi^+|\Psi^+\rangle = \left(\frac{\langle 01| + \langle 10|}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

2. **Sacamos los escalares y distribuimos:**

$$= \frac{1}{2}\Big(\langle 01|01\rangle + \langle 01|10\rangle + \langle 10|01\rangle + \langle 10|10\rangle\Big)$$

3. **Aplicamos la ortonormalidad de la base computacional:**
   - $\langle 01|01\rangle = 1, \quad \langle 01|10\rangle = 0, \quad \langle 10|01\rangle = 0, \quad \langle 10|10\rangle = 1$

4. **Calculamos el resultado final:**

$$= \frac{1}{2}(1 + 0 + 0 + 1) = \frac{2}{2} = 1$$

✅ **El estado está normalizado.** Un cálculo similar se aplica a los otros tres estados de Bell.

Solución: Ortonormalidad de la Base de Bell (Ortogonalidad)

Parte 2: Verificamos que $|\Phi^+\rangle$ y $|\Psi^+\rangle$ son ortogonales ($\langle\Phi^+|\Psi^+\rangle = 0$).

1. **Escribimos el producto interno:**

$$\langle\Phi^+|\Psi^+\rangle = \left(\frac{\langle 00| + \langle 11|}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

2. **Sacamos los escalares y distribuimos:**

$$= \frac{1}{2}\Big(\langle 00|01\rangle + \langle 00|10\rangle + \langle 11|01\rangle + \langle 11|10\rangle\Big)$$

3. **Aplicamos la ortonormalidad de la base computacional:**
   Todos los kets son diferentes de los bras, por lo que todos los productos internos son cero.

$$= \frac{1}{2}(0 + 0 + 0 + 0) = 0$$

✅ **Los estados son ortogonales.** Un cálculo similar demuestra que todos los pares de estados de Bell distintos son ortogonales.

Aplicando operadores a sistemas de dos qubits

Ejercicios de práctica

Vamos a ver cómo los operadores actúan sobre sistemas de 2 qubits, tanto en estados separables como entrelazados.

Ejercicio 1

Problema:

Comenzamos en el estado $|00\rangle$ y aplicamos la operación $H \otimes H$.

¿El estado resultante está entrelazado?

Solución - Paso 1: Calcular el estado final.

$$(H \otimes H)|00\rangle = (H|0\rangle) \otimes (H|0\rangle) = |+\rangle \otimes |+\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)$$

Paso 2: Aplicar el test de separabilidad.

Las amplitudes son: $c_{00} = c_{01} = c_{10} = c_{11} = 1/2$.

$$c_{00} \cdot c_{11} = (1/2)(1/2) = 1/4$$

$$c_{01} \cdot c_{10} = (1/2)(1/2) = 1/4$$

Como $1/4 = 1/4$, el test se cumple.

Conclusión: El estado **es separable**. Esto tiene sentido, porque lo construimos como un producto tensorial simple ($|+\rangle \otimes |+\rangle$).

Ejercicio 2: Actuando sobre un Estado Entrelazado

Problema: Encuentra el resultado de aplicar el operador $X \otimes Z$ al estado de Bell $\left|\Phi^-\right\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$

Instrucción:

1. **Usa la linealidad y Aplica la regla del operador tensorial** a cada estado base:

   $$(A \otimes B)|ab\rangle = (A|a\rangle) \otimes (B|b\rangle)$$

2. **Ensambla** el resultado final y simplifícalo.

Recordatorio (Acción de las Compuertas Pauli):
$X|0\rangle = |1\rangle$, $X|1\rangle = |0\rangle$
$Z|0\rangle = |0\rangle$, $Z|1\rangle = -|1\rangle$

Solución: Actuando sobre un Estado Entrelazado

Paso 1: Aplicar la Linealidad

El operador se distribuye a cada término de la superposición:

$$(X \otimes Z)|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((X \otimes Z)|00\rangle - (X \otimes Z)|11\rangle\Big)$$

Paso 2: Evaluar cada término por separado

Usamos la regla $(A \otimes B)|ab\rangle = (A|a\rangle) \otimes (B|b\rangle)$.

- **Para el término $|00\rangle$:**

$$(X \otimes Z)|00\rangle = (X|0\rangle) \otimes (Z|0\rangle) = |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle$$

- **Para el término $|11\rangle$:**

$$(X \otimes Z)|11\rangle = (X|1\rangle) \otimes (Z|1\rangle) = |0\rangle \otimes (-|1\rangle) = -|01\rangle$$

Solución: Actuando sobre un Estado Entrelazado (Final)

Paso 3: Ensamblar el resultado final

Sustituimos los resultados de cada término en la expresión del Paso 1:

$$(X \otimes Z)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|10\rangle - (-|01\rangle)\Big)$$

$$= \frac{|10\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}}$$

Conclusión:

La operación $X \otimes Z$ ha transformado un estado de Bell ($\left|\Phi^-\right\rangle$) en otro estado de Bell ($\left|\Psi^+\right\rangle$).

$$X \otimes Z \left(\frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

Este tipo de transformaciones entre estados entrelazados es una operación fundamental en muchos protocolos cuánticos.

Ejercicio 3: Proyectando un Estado Entrelazado

Problema:

Considera un sistema de 2 qubits en el estado de Bell $|\Psi^+\rangle$.

$$|\Psi^+\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

Aplica el operador de proyección $\hat{C} = |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|$ a este estado.

Instrucción:

1. Aplica el operador $\hat{C}$ a la superposición usando la propiedad de **linealidad**.
2. Para cada término, usa la regla de acción del operador tensorial:

$$(A \otimes B)|ab\rangle = (A|a\rangle) \otimes (B|b\rangle)$$

3. Calcula la acción de los proyectores individuales y ensambla el resultado final.

> **Pista:** Recuerda que un proyector $|i\rangle\langle i|$ actuando sobre un estado base $|j\rangle$ da como resultado $|i\rangle$ si $i = j$, y el vector nulo (0) si $i \neq j$.

Solución (Parte 1): Descomponiendo el Problema

1. Aplicamos la Linealidad:

$$\hat{C}|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{C}|01\rangle + \hat{C}|10\rangle\right)$$

2. Evaluamos la acción de $\hat{C}$ sobre cada estado base:

- **Primer Término ($\hat{C}|01\rangle$):**

$$\hat{C}|01\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|)|01\rangle = (|0\rangle\langle 0|0\rangle) \otimes (|1\rangle\langle 1|1\rangle)$$
$$= (|0\rangle \cdot 1) \otimes (|1\rangle \cdot 1) = |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$$

- **Segundo Término ($\hat{C}|10\rangle$):**

$$\hat{C}|10\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|)|10\rangle = (|0\rangle\langle 0|1\rangle) \otimes (|1\rangle\langle 1|0\rangle)$$
$$= (|0\rangle \cdot 0) \otimes (|1\rangle \cdot 0) = 0 \otimes 0 = \vec{0} \quad \text{(el vector nulo)}$$

Solución (Parte 2): Resultado Final e Interpretación

3. Ensamblamos el resultado final:

Sustituimos los resultados de cada término en la expresión del Paso 1:

$$\hat{C}|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle + \vec{0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$$

Interpretación:

El operador $\hat{C} = |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|$ es, de hecho, el **proyector sobre el estado base** $|01\rangle$, que podemos escribir como $\hat{P}_{01}$.

Al aplicarlo al estado $|\Psi^+\rangle$, el operador ha "filtrado" la superposición, quedándose únicamente con la componente que "vivía" en la dirección de $|01\rangle$. El resultado es un nuevo vector (no normalizado, en general) que apunta en la dirección de $|01\rangle$.

Ejercicio 4 - Aplicando la compuerta X a uno sólo de los qubits

Problema:

Considera el estado de Bell $|\Phi^-\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$.

Describe la acción de la compuerta $\hat{X} \otimes \hat{I}$ sobre este estado.

La Pregunta Física:

> ¿Qué pasa si Alice y Bob comparten este par entrelazado, y solo Alice (que tiene el primer qubit) aplica una compuerta NOT ($\hat{X}$)?

Solución

1. Escribir la expresión completa.

Recordamos que $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ y $|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$.

$$(\hat{X} \otimes \hat{I})|\Phi^-\rangle = (\hat{X} \otimes \hat{I}) \left(\frac{|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

2. Usar la linealidad.

El operador actúa sobre cada término de la superposición.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\hat{X} \otimes \hat{I})(|0\rangle \otimes |0\rangle) - (\hat{X} \otimes \hat{I})(|1\rangle \otimes |1\rangle) \right]$$

3. Aplicar la regla del operador tensorial a cada término.

La compuerta $\hat{X}$ actúa sobre el primer qubit y la $\hat{I}$ sobre el segundo.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\hat{X}|0\rangle \otimes \hat{I}|0\rangle) - (\hat{X}|1\rangle \otimes \hat{I}|1\rangle) \right]$$

Solución (cont.)

4. Evaluar las acciones de las compuertas.

Sabemos que $\hat{X}|0\rangle = |1\rangle$, $\hat{X}|1\rangle = |0\rangle$, y $\hat{I}$ no hace nada.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[(|1\rangle \otimes |0\rangle) - (|0\rangle \otimes |1\rangle)\Big]$$

5. Escribir el resultado final en notación abreviada.

$$= \frac{|10\rangle - |01\rangle}{\sqrt{2}}$$

> **Conclusión:** Al aplicar una compuerta $\hat{X}$ solo al primer qubit, el estado ha cambiado de $\left|\Phi^-\right\rangle$ al estado de Bell $\left|\Psi^-\right\rangle$. ¡Las operaciones locales sobre una parte de un sistema entrelazado afectan al estado global del sistema!

Ejercicio 5 - Aplicando la compuerta Z a uno sólo de los qubits

Veamos el efecto de una compuerta de fase.

Problema:

Considera el estado de Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$.

Demuestra que la acción del operador $\hat{Z} \otimes \hat{I}$ sobre este estado lo transforma en el estado $|\Phi^-\rangle$.

$$(\hat{Z} \otimes \hat{I}) \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

Solución del Ejercicio

1. Aplicar linealidad:

$$(\hat{Z} \otimes \hat{I})|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\hat{Z} \otimes \hat{I})|00\rangle + (\hat{Z} \otimes \hat{I})|11\rangle\right]$$

2. Aplicar la regla del operador tensorial:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\hat{Z}|0\rangle \otimes \hat{I}|0\rangle) + (\hat{Z}|1\rangle \otimes \hat{I}|1\rangle)\right]$$

3. Evaluar las acciones de las compuertas:
Recordamos que $\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle$ y $\hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$.

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(|0\rangle \otimes |0\rangle) + (-|1\rangle \otimes |1\rangle)\right]$$

4. Resultado Final:

$$= \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\Phi^-\rangle$$

> **Observación:** Aplicar una compuerta $\hat{Z}$ al primer qubit es equivalente a aplicarla al segundo qubit en este estado particular, ya que $(\hat{I} \otimes \hat{Z})|\Phi^+\rangle$ también resulta en $|\Phi^-\rangle$. ¡Esto es una consecuencia del entrelazamiento!

Ejercicio 6: - Aplicando la compuerta H al primer qubit de $|\Phi^+\rangle$

Problema:

Calcula el estado final que resulta de aplicar el operador $\hat{O} = H \otimes I$ al estado de Bell $|\Phi^+\rangle$.

$$(H \otimes I)|\Phi^+\rangle = ?$$

Instrucción:

1. Escribe el estado $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ y aplica el operador usando la **linealidad**.
2. Usa la regla de acción del operador tensorial para cada término:

$$(A \otimes B)|ab\rangle = (A|a\rangle) \otimes (B|b\rangle)$$

3. Sustituye los resultados de aplicar H y I a los kets correspondientes.
4. **(Paso Clave):** Expande el resultado final para expresarlo en la base computacional $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.

Recordatorio: $H|0\rangle = |+\rangle$ y $H|1\rangle = |-\rangle$.

Solución (Parte 1): Aplicación del Operador

1. Aplicamos el operador al estado usando la linealidad:

$$(H \otimes I)|\Phi^+\rangle = (H \otimes I)\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big((H \otimes I)|00\rangle + (H \otimes I)|11\rangle\Big)$$

2. Evaluamos la acción sobre cada estado base:

- **Primer Término:**

$$(H \otimes I)|00\rangle = (H|0\rangle) \otimes (I|0\rangle) = |+\rangle \otimes |0\rangle = |+\rangle|0\rangle$$

- **Segundo Término:**

$$(H \otimes I)|11\rangle = (H|1\rangle) \otimes (I|1\rangle) = |-\rangle \otimes |1\rangle = |-\rangle|1\rangle$$

3. Juntamos los resultados (en la base mixta):

$$|\Psi_{final}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle|0\rangle + |-\rangle|1\rangle\Big)$$

Este es un resultado correcto, pero para analizarlo mejor, lo expandiremos a la base computacional.

Solución (Parte 2): Expansión a la Base Computacional

4. Expandimos el resultado:

Sustituimos las definiciones de $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ y $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

$$|\Psi_{final}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle + \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle\right]$$

Sacamos el factor común $\frac{1}{\sqrt{2}}$ y distribuimos:

$$= \frac{1}{2}\Big[(|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle + (|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle - |1\rangle|1\rangle\Big)$$

Ordenando y usando la notación fusionada:

$$|\Psi_{final}\rangle = \frac{1}{2}\Big(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\Big)$$

Solución (Parte 3): Interpretación del Resultado

Hemos encontrado que:

$$(H \otimes I)\left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\Big(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\Big)$$

Interpretación:

1. Una **operación local** sobre un solo qubit de un par entrelazado ha cambiado el **estado global** del sistema de forma no trivial.
2. El estado resultante es una superposición de los cuatro estados base.

¿El estado final sigue estando entrelazado? ¡Apliquemos el test!

- $c_{00} = 1/2$, $c_{01} = 1/2$, $c_{10} = 1/2$, $c_{11} = -1/2$.
- $c_{00} \cdot c_{11} = -1/4, \qquad c_{01} \cdot c_{10} = 1/4$.

Como $-1/4 \neq 1/4$, el estado **sigue estando entrelazado**.

> **Conclusión Clave:** La operación local (un sólo qubit) sobre $|\Phi^+\rangle$ no "rompió" el entrelazamiento, sino que lo transformó en otro estado entrelazado. Puede demostrarse que este nuevo estado también es máximamente entrelazado al igual que $|\Phi^+\rangle$.

Operaciones unitarias locales aplicadas a estados entrelazados

> El principio fundamental es que ***las operaciones unitarias locales preservan la cantidad de entrelazamiento (no pueden crear ni destruir entrelazamiento)***. Como un estado de Bell está máximamente entrelazado, cualquier compuerta unitaria local que se aplique simplemente lo convertirá en otro estado máximamente entrelazado.

Medición en Sistemas Compuestos

Extrayendo información Clásica

Medición: Extrayendo la Información Clásica

Hemos aprendido a construir y manipular estados de múltiples qubits. El paso final de cualquier algoritmo es la **medición**: el proceso de extraer un resultado clásico (una cadena de 0s y 1s) del estado cuántico.

En sistemas compuestos, podemos distinguir dos tipos de medición:

a. **Medición Completa:** Medimos **todos** los qubits del sistema a la vez.
b. **Medición Parcial :** Medimos solo un **subconjunto** de los qubits.

Vamos a empezar repasando el caso más sencillo.

Medición Completa: El Caso Sencillo

Medir todos los qubits de un sistema compuesto es una aplicación directa de la Regla de Born que ya conocemos.

Regla de Medición Completa:

1. Los posibles resultados son los estados de la base computacional del sistema completo (ej: $|00\rangle, |01\rangle, \ldots$).
2. La probabilidad de obtener un resultado específico $|ij\rangle$ es el módulo al cuadrado de su amplitud: $P(ij) = |c_{ij}|^2$.
3. Después de la medición, el sistema **colapsa** al estado único que se midió.

Medición Completa: El Caso Sencillo (cont.)

Ejemplo: Medición completa del estado de Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$:

- **Posibles Resultados:** $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$.
- **Probabilidades:**
  - $P(00) = |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = 1/2$
  - $P(01) = |0|^2 = 0$
  - $P(10) = |0|^2 = 0$
  - $P(11) = |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = 1/2$
- **Estado Final:** El sistema colapsará a $|00\rangle$ o a $|11\rangle$ con probabilidad $1/2$ para cada resultado.

Medición Parcial: La Pregunta Clave

El caso más interesante y común es cuando solo tenemos acceso a una parte del sistema.

El Escenario:
Alice y Bob preparan un par de qubits en el estado entrelazado $|\Psi\rangle$. Luego, cada uno se lleva su qubit a un laboratorio diferente.

La Pregunta:

> Si **solo Alice** mide su qubit, ¿cómo calculamos la probabilidad de su resultado? Y, lo más importante, ¿qué le sucede al qubit de Bob?

Para responder esto, necesitamos las reglas de la **medición parcial**.

Medición Parcial: La Pregunta Clave

Hasta ahora, hemos medido todos los qubits a la vez. Pero, ¿qué pasa si medimos **solo un subconjunto** de los qubits?

- **El Escenario:**
  Tenemos un estado de 2 qubits:
  $$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$$
- **La Pregunta:** Si medimos **solamente el primer qubit (q_1)**, ¿cuál es la probabilidad de obtener $|0\rangle$ y cuál es el estado del sistema después de eso?

La Regla para Calcular la Probabilidad

El proceso es muy intuitivo y se basa en la Regla de Born.

- **Regla de Probabilidad para Medición Parcial:**

> La probabilidad de obtener un resultado en un subsistema es la **suma de las probabilidades** de todos los estados base del sistema completo que son **consistentes** con ese resultado.

- **Aplicado a nuestro ejemplo (medir $|0\rangle$ en q_1):**
  - Los estados consistentes son $|00\rangle$ y $|01\rangle$.
  - La probabilidad es la suma de sus probabilidades individuales:

$$P(q_1 = 0) = P(00) + P(01) = |c_{00}|^2 + |c_{01}|^2$$

  - Del mismo modo, la probabilidad de medir $|1\rangle$ en q_1 es:

$$P(q_1 = 1) = P(10) + P(11) = |c_{10}|^2 + |c_{11}|^2$$

La Regla para el Colapso del Estado

Una vez que medimos y obtenemos un resultado, el estado del sistema colapsa.

Regla de Colapso para Medición Parcial:

> Si medimos $|a\rangle$ en un subsistema, el estado del sistema completo **colapsa a la parte de la superposición original que es consistente con ese resultado**. Luego, el nuevo estado debe ser **renormalizado**.

La Regla para el Colapso del Estado (Cont.)

Aplicado a nuestro ejemplo (si medimos $|0\rangle$ en q_1):

1. **Nos quedamos** solo con los términos que empiezan con $|0\rangle$:

$$|\Psi_{colapsado}\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle$$

2. **Renormalizamos** el estado dividiéndolo por su norma. La norma al cuadrado es precisamente la probabilidad que ya calculamos:

$$\||\Psi_{colapsado}\||^2 = |c_{00}|^2 + |c_{01}|^2 = P(q_1 = 0)$$

$$|\Psi_{final}\rangle = \frac{c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle}{\sqrt{P(q_1 = 0)}}$$

Ejercicio: Midiendo un Qubit de un Estado de 2 Qubits

Sea el siguiente estado Inicial:

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}|01\rangle + \sqrt{\frac{1}{8}}|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{8}}|11\rangle$$

Problema: Medimos solo el **primer qubit (q_1)**. Encuentra:

1. La probabilidad de obtener $|0\rangle$ y el estado final resultante.
2. La probabilidad de obtener $|1\rangle$ y el estado final resultante.
3. Verifica que las probabilidades suman 1.

Solución (Parte 1: Medir $|0\rangle$ en q_1)

1. Calculamos la Probabilidad:

Sumamos las probabilidades de los términos consistentes ($|00\rangle$ y $|01\rangle$).

$$P(q_1 = 0) = |c_{00}|^2 + |c_{01}|^2 = \left|\sqrt{\frac{1}{2}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{1}{4}}\right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

2. Calculamos el Estado Final:

- **Estado colapsado (no normalizado):** $|\Psi_{colapsado}\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}|01\rangle$
- **Renormalizamos** dividiendo por la raíz de la probabilidad ($\sqrt{3/4}$):

$$|\Psi_{final}\rangle = \frac{\sqrt{1/2}}{\sqrt{3/4}}|00\rangle + \frac{\sqrt{1/4}}{\sqrt{3/4}}|01\rangle$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}}|01\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|00\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|01\rangle$$

Esto se puede factorizar como: $|0\rangle \otimes \left(\sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1\rangle\right)$

Solución (Parte 2: Medir $|1\rangle$ en q_1)

1. Calculamos la Probabilidad:

Sumamos las probabilidades de los términos consistentes ($|10\rangle$ y $|11\rangle$).

$$P(q_1 = 1) = |c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 = \left|\sqrt{\frac{1}{8}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{1}{8}}\right|^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

2. Calculamos el Estado Final:

- **Estado colapsado (no normalizado):** $|\Psi_{colapsado}\rangle = \sqrt{\frac{1}{8}}|10\rangle + \sqrt{\frac{1}{8}}|11\rangle$
- **Renormalizamos** dividiendo por la raíz de la probabilidad ($\sqrt{1/4} = 1/2$):

$$|\Psi_{final}\rangle = \frac{\sqrt{1/8}}{1/2}|10\rangle + \frac{\sqrt{1/8}}{1/2}|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Esto se puede factorizar como: $|1\rangle \otimes \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right) = |1\rangle \otimes |+\rangle$

3. Verificación Final:

$$P(q_1 = 0) + P(q_1 = 1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

✅ Las probabilidades suman 1. El ejercicio está completo.

Volviendo al Entrelazamiento: Un Caso de Estudio

Hemos aprendido que el **grado** de entrelazamiento se define por la **incertidumbre local**, no por la correlación de resultados.

Sin embargo, los ejemplos que hemos usado hasta ahora (tanto parciales como máximos) compartían una propiedad: una correlación de **resultados** perfecta en la base Z.

Esto nos lleva a una pregunta crucial para probar nuestra comprensión:

> ¿Es posible el entrelazamiento **sin** una correlación de resultados perfecta? ¿Y qué nos dice eso sobre su naturaleza fundamental?

La respuesta es **SÍ**. Analizar este caso nos revelará que el vínculo cuántico es, en su nivel más profundo, una **correlación de estados** (no una correlación de resultados).

Ejemplo: Aleatoriedad en la Base Z

Consideremos el siguiente estado normalizado de 2 qubits:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle + \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle$$

Análisis de la Medición de Alice en la Base Z (qubit q_1):

- **Probabilidad de que Alice mida $|0\rangle$:**

$$P(q_1 = 0) = |c_{00}|^2 + |c_{01}|^2 = \left|\frac{1}{2}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

- **Probabilidad de que Alice mida $|1\rangle$:**

$$P(q_1 = 1) = |c_{11}|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

✅ El resultado de Alice es **aleatorio (50/50) si mide en la base Z**.

Análisis del Colapso y la Correlación con Bob

Ahora, veamos qué le sucede al qubit de Bob después de la medición de Alice en la base Z.

- **Caso 1: Alice mide $|1\rangle$**
  - El sistema colapsa a $|11\rangle$. El estado de Bob es $|1\rangle$.
  - Aquí, la correlación de resultados **es perfecta**.
- **Caso 2: Alice mide $|0\rangle$**
  - El sistema colapsa (y se renormaliza) a:

$$|\Psi_{final}\rangle = \frac{|00\rangle + |01\rangle}{\sqrt{2}} = |0\rangle \otimes |+\rangle$$

  - ¡El estado de Bob es $|+\rangle$! Si Bob mide en la base Z, sus resultados serán 50/50.
  - Aquí, la correlación de resultados **no es perfecta**.

Conclusión: La Jerarquía de la Correlación Cuántica

Este ejemplo nos muestra la manifestación más general del entrelazamiento y podemos resumirlo en dos reglas fundamentales:

> 1. Cualquier estado entrelazado, por definición, posee **correlación de estados**: la medición de Alice siempre afecta el estado de Bob. Esto no siempre implica una correlación de *resultados*.
> 2. El **grado** de entrelazamiento (parcial vs. máximo) no depende de si la correlación de resultados es perfecta. Depende de la **incertidumbre local**: si el estado de un qubit individual es algo menos que "completamente aleatorio" (es decir, no es 50/50 en *todas* las bases de medición), el entrelazamiento es **parcial**.

Aplicando esto a nuestro último ejemplo:
El estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle + \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle$ es un caso de **entrelazamiento parcial**, precisamente porque la aleatoriedad 50/50 ocurre en la base Z, pero si midiera en otra base (como la base X), sus resultados estarían sesgados.

Un estado **máximamente entrelazado** (como los de Bell) es "perfectamente aleatorio" para Alice sin importar la base en la que mida.

Mirando más Allá: Entrelazamiento Multi-Qubit

Hemos explorado en detalle el entrelazamiento entre 2 qubits. Sin embargo, el verdadero poder (y la complejidad) emerge cuando añadimos más.

> A medida que el número de qubits crece, no solo aumenta la cantidad de entrelazamiento, sino que aparecen diferentes **"clases"** o **"sabores"** de entrelazamiento, con propiedades radicalmente distintas.

Para concluir esta clase, vamos a conocer los dos "arquetipos" más famosos de estados entrelazados de **tres qubits**: el estado **GHZ** y el estado **W**.

El Estado GHZ: Correlación de "Todo o Nada"

El estado GHZ (nombrado por Greenberger, Horne y Zeilinger) representa una forma de entrelazamiento global y maximal.

$$|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}}$$

Propiedad Clave: Fragilidad (en la base Z).
Si mides **un solo qubit** y obtienes $|0\rangle$, el estado del sistema colapsa a $|000\rangle$. Si mides $|1\rangle$, colapsa a $|111\rangle$.

> En ambos casos, el estado final es **separable**. La medición de una sola parte **destruye completamente** todo el entrelazamiento del sistema. Es un tipo de correlación "frágil".
> El efecto de "fragilidad" puede diferir si se mide en otra base (p. ej. X) .

El Estado W: Entrelazamiento Distribuido y Robusto

El estado W representa un tipo de entrelazamiento muy diferente, donde la correlación está "repartida" entre los qubits.

$$|\mathrm{W}\rangle = \frac{|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle}{\sqrt{3}}$$

Propiedad Clave: Robustez ante la Medición.
Analicemos la medición del **primer qubit (q_2):**

- **Si mides $|1\rangle$ (Prob. 1/3):** El sistema colapsa al único término consistente, $|100\rangle$. El estado de los otros dos qubits es $|00\rangle$, que es **separable**.
- **Si mides $|0\rangle$ (Prob. 2/3):** El sistema colapsa a la superposición (renormalizada) de los otros dos términos:

$$\frac{|001\rangle + |010\rangle}{\sqrt{2}} = |0\rangle \otimes \left(\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

¡El estado de los otros dos qubits es un **estado de Bell entrelazado**!

> A diferencia del estado GHZ, si mides un qubit de un estado W, **el entrelazamiento puede persistir** entre los qubits restantes.

GHZ vs. W: Dos Tipos de Entrelazamiento

Los estados GHZ y W nos enseñan que no todo el entrelazamiento es igual.

Propiedad	Estado GHZ	Estado W
Correlación	"Todo o nada", global.	Distribuida, de a pares.
Fragilidad	**Frágil**: medir un qubit destruye todo el entrelazamiento.	**Robusto**: medir un qubit puede dejar a los demás entrelazados.
Uso Principal	Demostraciones de no-localidad, algunos códigos de corrección de errores.	Protocolos que requieren robustez, computación cuántica distribuida.

La Gran Pregunta:

> Ahora que conocemos estos estados tan poderosos y diferentes, ¿cómo podemos crearlos en un ordenador cuántico? ¿Qué secuencia de operaciones transforma el simple estado $|000\rangle$ en un estado GHZ o W?
>
> **Para responder a esto, necesitamos aprender sobre Circuitos Cuánticos.**

Apéndice 1

Demostración del Test para la Separabilidad en 2 Qubits

(Material optativo)

Test Rápido para la Separabilidad en 2 Qubits

Para un estado de 2 qubits

$$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$$

¿cómo podemos saber si es separable sin tener que encontrar sus factores?

La respuesta está en la estructura de sus amplitudes.

> **Test de Separabilidad:**
> Un estado de 2 qubits $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + \cdots + c_{11}|11\rangle$ es **separable** $\iff c_{00} \cdot c_{11} = c_{01} \cdot c_{10}$

Demostración del Test (Parte 1: $\implies$)

Prueba de la implicación ($\implies$): Si $|\Psi\rangle$ es separable, entonces $c_{00}c_{11} = c_{01}c_{10}$.

1. **Partimos de la definición de estado separable.**
   Existen dos estados de un qubit $|\psi_1\rangle = \alpha_1|0\rangle + \beta_1|1\rangle$ y $|\psi_0\rangle = \alpha_0|0\rangle + \beta_0|1\rangle$ tal que:

   $$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_0\rangle = (\alpha_1\alpha_0)|00\rangle + (\alpha_1\beta_0)|01\rangle + (\beta_1\alpha_0)|10\rangle + (\beta_1\beta_0)|11\rangle$$

2. **Identificamos los coeficientes c_{ij}:**

   $$c_{00} = \alpha_1\alpha_0 \quad , \quad c_{01} = \alpha_1\beta_0 \quad , \quad c_{10} = \beta_1\alpha_0 \quad , \quad c_{11} = \beta_1\beta_0$$

3. **Comparamos los productos cruzados:**

   - $c_{00} \cdot c_{11} = (\alpha_1\alpha_0) \cdot (\beta_1\beta_0) = \alpha_1\beta_1\alpha_0\beta_0$
   - $c_{01} \cdot c_{10} = (\alpha_1\beta_0) \cdot (\beta_1\alpha_0) = \alpha_1\beta_1\alpha_0\beta_0$

Ambos productos son idénticos. Por lo tanto, la condición se cumple.

Demostración del Test (Parte 2: $\Longleftarrow$)

Prueba de la implicación ($\Longleftarrow$): Si $c_{00}c_{11} = c_{01}c_{10}$, entonces $|\Psi\rangle$ es separable.

Para demostrarlo, basta con mostrar que el estado puede ser factorizado. La normalización de los factores se puede ajustar después.

Caso 1: $c_{00} \neq 0$.
Podemos construir dos factores (en general, no normalizados):

$$|\phi_1\rangle = c_{00}|0\rangle + c_{10}|1\rangle \quad , \quad |\phi_0\rangle = |0\rangle + \frac{c_{01}}{c_{00}}|1\rangle$$

Su producto tensorial reconstruye el estado $|\Psi\rangle$ (usando la condición $c_{10}c_{01} = c_{00}c_{11}$).

$$|\phi_1\rangle \otimes |\phi_0\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle = |\Psi\rangle$$

Como $|\Psi\rangle$ puede escribirse como un producto tensorial, **es separable**.

> **Nota sobre la normalización:** Aunque $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_0\rangle$ no estén normalizados, el hecho de que su producto sea $|\Psi\rangle$ (que sí está normalizado) es suficiente. Siempre podemos absorber cualquier factor de normalización en los escalares de los kets para obtener factores normalizados cuyo producto siga siendo $|\Psi\rangle$ (salvo una fase global).

Demostración del Test (Parte 2: $\Longleftarrow$) Cont.

Caso 2: $c_{00} = 0$**.**

La condición se reduce a $c_{01}c_{10} = 0$, lo que implica que $c_{01} = 0$ o $c_{10} = 0$.

- Si $c_{01} = 0$, el estado es $|\Psi\rangle = c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle = |1\rangle \otimes (c_{10}|0\rangle + c_{11}|1\rangle)$, que es **separable**.
- Si $c_{10} = 0$, el estado es $|\Psi\rangle = c_{01}|01\rangle + c_{11}|11\rangle = (c_{01}|0\rangle + c_{11}|1\rangle) \otimes |1\rangle$, que es **separable**.

En todos los casos, si la condición se cumple, el estado es separable. **Q.E.D.**

(Quod Erat Demonstrandum = "Lo que se quería demostrar")

¿Y para 3 Qubits? ¿Hay un "Test Rápido"?

Una pregunta natural es si el test de separabilidad ($c_{00}c_{11} = c_{01}c_{10}$) se puede generalizar a 3 o más qubits.

La respuesta es, sorprendentemente, NO. El entrelazamiento se vuelve mucho más complejo a partir de 3 qubits.

En 2 Qubits, la situación es simple:

- El estado es **separable**.
- O está **entrelazado**.

En 3 Qubits, hay múltiples "niveles" de conexión:

1. **Totalmente Separable:** $(A \otimes B \otimes C)$.
2. **Entrelazamiento Bipartito:** Un qubit está separado del resto (ej: $(A \otimes B)_{entrelazado} \otimes C$).
3. **Entrelazamiento Genuino Tripartito:** Los tres están fundamentalmente ligados, y aquí existen diferentes "clases" de entrelazamiento, como la **clase GHZ** y la **clase W**.

> Debido a esta rica estructura, no existe una única ecuación simple que pueda distinguir entre todos estos casos. Caracterizar el entrelazamiento multi-qubit es un área de investigación activa y requiere herramientas matemáticas mucho más avanzadas.

Apéndice 2

¿Cómo se "mide" el Entrelazamiento?

(Material Optativo Avanzado)

La Pregunta: ¿Podemos Ponerle un Número al Entrelazamiento?

Hemos hablado de entrelazamiento "parcial" y "máximo" de forma intuitiva. Pero, ¿existe una forma matemática de calcular un **número** que nos diga exactamente "cuánto" entrelazamiento tiene un estado?

La respuesta es **SÍ**. La medida se llama **Entropía de Entrelazamiento**.

La Idea Central:

> El grado de entrelazamiento de un sistema global (Alice+Bob) es igual a la "cantidad de incertidumbre" o "aleatoriedad" que vemos en uno de los subsistemas locales (solo Alice).

- Si el estado de Alice es puro y predecible $\implies$ No hay entrelazamiento.
- Si el estado de Alice es completamente aleatorio $\implies$ Entrelazamiento máximo.

Para hacer esto, necesitamos dos herramientas nuevas: la **Matriz de Densidad Reducida** y la **Entropía de Von Neumann**.

Estados Puros vs. Mixtos: ¿Por Qué una Nueva Herramienta?

Hasta ahora, hemos trabajado exclusivamente con **estados puros**.

> Un **estado puro** es aquel que se puede describir completamente con un único vector de estado (ket), como $|\Psi\rangle$. Aunque el resultado de una medición sea probabilístico (**incertidumbre cuántica**), tenemos toda la información posible sobre el sistema (conocemos todas sus amplitudes).

Pero, ¿qué pasa si nuestra incertidumbre es Clásica?

Imagina que una máquina te da un qubit. Hay un 50% de probabilidad de que te dé el estado $|0\rangle$ y un 50% de que te dé el estado $|1\rangle$.

- Esto **NO** es la superposición $|+\rangle$.
- Es una situación de **ignorancia clásica**: el estado ya es $|0\rangle$ o $|1\rangle$, pero nosotros no sabemos cuál.

Este sistema se llama un **estado mixto**, y **no puede ser descrito por un único ket**.

La Conexión con el Entrelazamiento

¿Por qué nos importan los estados mixtos para medir el entrelazamiento?

Consideremos el estado de Bell $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

- El **sistema global (Alice+Bob)** está en un **estado puro y coherente**. Lo describimos con un ket porque este contiene la información de fase crucial que produce correlaciones en múltiples bases de medición (algo imposible clásicamente).
- Pero si **Alice describe su qubit local**, ignorando a Bob, ella pierde acceso a esa información de fase compartida. Lo único que observa es una estadística 50/50 en la base Z.
- Este estado local **incoherente** es indistinguible de una mezcla clásica y ya no puede ser descrito por un ket.

> **La Revelación:** Para "medir" el entrelazamiento del estado global, necesitamos una forma de cuantificar la "incoherencia" o "mixtura" del estado local de Alice.
>
> Para describir este estado local mixto, necesitamos una herramienta más general que el ket: la **Matriz de Densidad**.

Herramienta 1: La Matriz de Densidad (ρ)

Hasta ahora, hemos descrito los estados con vectores (kets). Esta descripción solo funciona para **estados puros**, donde conocemos el estado con certeza.

Para describir un sistema sobre el que tenemos **incertidumbre** (como el qubit de Alice, cuyo estado parece aleatorio), usamos la **matriz de densidad (ρ)**.

La Idea:

- Un estado puro $|\psi\rangle$ se describe por la matriz $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.
- Un sistema que es una mezcla clásica (ej: 50% de ser $|0\rangle$, 50% de ser $|1\rangle$) se describe sumando las matrices de densidad ponderadas por su probabilidad:

$$\rho = 0.5|0\rangle\langle 0| + 0.5|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

> **La clave:** El estado de un subsistema de una pareja entrelazada se comporta como si fuera una mezcla clásica.

Herramienta 2: La Matriz de Densidad Reducida (ρ_A)

Para un sistema de 2 qubits en el estado $|\Psi\rangle$, la **matriz de densidad reducida de Alice (ρ_A)** es la matriz de 2x2 que describe todo lo que Alice puede saber sobre su qubit si "ignora" o "promedia" sobre todas las posibilidades del qubit de Bob.

Esta operación se llama **traza parcial**. En lugar de su definición formal, usaremos una receta de cálculo directa.

Receta para Calcular ρ_A:
Dado un estado de 2 qubits $|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$:
La matriz de densidad de Alice es:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} |c_{00}|^2 + |c_{01}|^2 & c_{00}c_{10}^* + c_{01}c_{11}^* \\ c_{10}c_{00}^* + c_{11}c_{01}^* & |c_{10}|^2 + |c_{11}|^2 \end{pmatrix}$$

> ¡Observa que la diagonal de ρ_A contiene las probabilidades de que Alice mida $|0\rangle$ y $|1\rangle$!

Herramienta 3: La Entropía de Von Neumann ($S(\rho_A)$)

Una vez que tenemos la matriz de densidad reducida ρ_A, necesitamos una forma de medir su "grado de mezcla" o "incertidumbre". Esta medida es la **Entropía de Von Neumann**.

Receta de Cálculo:

1. Calcula los **autovalores** de la matriz de 2x2, ρ_A. Llamémoslos λ_1 y λ_2. (Estos autovalores siempre serán reales, no negativos y sumarán 1).
2. La entropía de entrelazamiento es:

$$S(\rho_A) = -(\lambda_1 \log_2 \lambda_1 + \lambda_2 \log_2 \lambda_2)$$

(Por convención, si $\lambda = 0$*, entonces* $\lambda \log_2 \lambda = 0$*).*

> Esta fórmula es idéntica a la entropía de Shannon para una fuente de información clásica con probabilidades λ_1 y λ_2. Mide la incertidumbre en "bits cuánticos" (e-bits).

Ejemplo 1: Un Estado Separable

Vamos a probar nuestro método con un estado que sabemos que no tiene entrelazamiento.

Estado: $|\Psi\rangle = |0\rangle|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle$.

Amplitudes: $c_{00} = 1/\sqrt{2}, c_{01} = 1/\sqrt{2}, c_{10} = 0, c_{11} = 0$.

1. Calculamos ρ_A:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} |1/\sqrt{2}|^2 + |1/\sqrt{2}|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz de densidad de un estado puro $|0\rangle$.

2. Autovalores de ρ_A: Son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$.

3. Entropía:

$$S(\rho_A) = -(1 \cdot \log_2 1 + 0) = 0$$

> **Resultado:** La entropía es **0**. Esto confirma que no hay entrelazamiento.

Ejemplo 2: Un Estado Máximamente Entrelazado

Estado: $|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$.
Amplitudes: $c_{00} = 1/\sqrt{2}, c_{11} = 1/\sqrt{2}, c_{01} = 0, c_{10} = 0$.

1. Calculamos ρ_A:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} |1/\sqrt{2}|^2 + 0 & 0 \\ 0 & 0 + |1/\sqrt{2}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Esta es la matriz de un estado **máximamente mixto**.

2. Autovalores de ρ_A: Son $\lambda_1 = 1/2, \lambda_2 = 1/2$.

3. Entropía:

$$S(\rho_A) = -(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}) = -(\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(-1)) = 1$$

> **Resultado:** La entropía es **1**. Este es el valor máximo posible, confirmando 1 "e-bit" de entrelazamiento.

Ejemplo 3: El Estado con "Correlación Imperfecta"

Estado: $|\Psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$.

Amplitudes: $c_{00} = 1/2, c_{01} = 1/2, c_{10} = 0, c_{11} = 1/\sqrt{2}$.

1. Calculamos ρ_A:

$$\rho_A = \begin{pmatrix} |1/2|^2 + |1/2|^2 & (1/2)(0)^* + (1/2)(1/\sqrt{2})^* \\ (0)(1/2)^* + (1/\sqrt{2})(1/2)^* & |0|^2 + |1/\sqrt{2}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/(2\sqrt{2}) \\ 1/(2\sqrt{2}) & 1/2 \end{pmatrix}$$

2. Autovalores de ρ_A: Los autovalores de una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ son $a \pm b$.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.854 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0.146$$

3. Entropía:

$$S(\rho_A) = -(0.854 \log_2 0.854 + 0.146 \log_2 0.146) \approx 0.606$$

> **Resultado:** La entropía es ≈ 0.606. Como $0 < 0.606 < 1$, el estado es **parcialmente entrelazado**.

Resumen Final: La Escala del Entrelazamiento

La Entropía de Entrelazamiento nos da una escala numérica para medir la "fuerza" del vínculo cuántico en un estado puro de dos qubits.

Valor de $S(\rho_A)$	**Interpretación**	**Estado Local de Alice (ρ_A)**
$S = 0$	Estado **Separable** (sin entrelazamiento)	Estado Puro (ej: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)
$0 < S < 1$	Estado **Parcialmente Entrelazado**	Estado Mixto, sesgado (ej: $\begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}$)
$S = 1$	Estado **Máximamente Entrelazado**	Estado Máximamente Mixto ($\begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$)

> Esta herramienta matemática es la que permite a los físicos e informáticos cuánticos razonar de forma precisa sobre el entrelazamiento como un recurso cuantificable.