Fundamentos Matemáticos de Sistemas Compuestos

El Producto Tensorial

La Necesidad de Combinar Espacios

En mecánica cuántica y computación cuántica, rara vez trabajamos con partículas aisladas. La mayoría de los sistemas interesantes involucran múltiples partículas o qubits.

El Desafío Matemático:

> ¿Cómo construimos un único **Espacio de Hilbert** $\mathcal{H}$ que describa correctamente un sistema compuesto a partir de los espacios de Hilbert independientes $(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots)$ de cada partícula?

La maquinaria matemática para esta construcción es el **Producto Tensorial** (o Producto de Kronecker).

El Espacio Compuesto: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

Para el caso de dos sistemas (o partículas), sus espacios de Hilbert individuales $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ se combinan para formar un espacio más grande $\mathcal{H}$ mediante la operación de **producto tensorial ($\otimes$)**.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

La Regla Clave: Multiplicación de Dimensiones

La dimensión del nuevo espacio compuesto es el **producto** de las dimensiones de los espacios originales.
Si $\dim(\mathcal{H}_1) = N_1$ y $\dim(\mathcal{H}_2) = N_2$, entonces:

$$\dim(\mathcal{H}) = N_1 \cdot N_2$$

> Esto explica el crecimiento exponencial del poder computacional. Cada qubit que añadimos (dimensión 2) **multiplica** el tamaño del espacio de estados.

Estados Producto (o Separables)

El espacio compuesto $\mathcal{H}$ contiene todos los posibles estados del sistema combinado. Aquellos estados en los que cada subsistema puede ser descrito de forma independiente se llaman **estados producto** (o separables).

Estos estados se construyen tomando el producto tensorial de los vectores de estado de los espacios individuales.

Si tenemos un estado $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$ y un estado $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$, su estado producto $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ es:

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$$

> **Importante:** Como veremos más adelante, no todos los estados del espacio compuesto son estados producto. ¡Aquellos que no pueden ser factorizados de esta manera se llaman **estados entrelazados**!

Propiedades Algebraicas del Producto Tensorial

El producto tensorial ($\otimes$) es una operación que respeta la estructura del espacio vectorial.

Bilinealidad: La operación es **lineal en cada argumento** por separado.

1. **Linealidad en el primer argumento:**
   - $(|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle) \otimes |\psi\rangle = (|\phi_1\rangle \otimes |\psi\rangle) + (|\phi_2\rangle \otimes |\psi\rangle)$
   - $(\alpha|\phi\rangle) \otimes |\psi\rangle = \alpha(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle)$
2. **Linealidad en el segundo argumento:**
   - $|\phi\rangle \otimes (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = (|\phi\rangle \otimes |\psi_1\rangle) + (|\phi\rangle \otimes |\psi_2\rangle)$
   - $|\phi\rangle \otimes (\alpha|\psi\rangle) = \alpha(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle)$

Consecuencia práctica: Los escalares "flotan libremente" a través del producto tensorial:

$$(\alpha|\phi\rangle) \otimes |\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes (\alpha|\psi\rangle) = \alpha(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle)$$

Por lo tanto, no hay ambigüedad en escribir simplemente:

$$\alpha|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle,$$

o alternativamente (notación abreviada):

$$\alpha|\phi\rangle|\psi\rangle \quad \text{o} \quad \alpha|\phi \otimes \psi\rangle.$$

Notación Abreviada: Dos Convenciones Clave

Para simplificar la escritura, se utilizan dos abreviaturas principales:

1. **Omisión del Símbolo $\otimes$ (Regla General):**

> Para **cualquier** estado, el símbolo del producto tensorial puede omitirse.
>
> $$|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle \equiv |\phi\rangle|\chi\rangle$$

2. **Fusión de Kets (Regla Específica):**

> Para la **base computacional**, las etiquetas de los kets se concatenan en uno solo.
>
> $$|a\rangle \otimes |b\rangle \equiv |ab\rangle \quad (\text{donde } a, b \in \{0, 1\})$$

La Convención en la Práctica

La "fusión de kets" se reserva casi exclusivamente para la base computacional por claridad.

- **Ejemplo 1: Base Computacional (Se fusiona)**

$$|1\rangle \otimes |0\rangle \quad \rightarrow \quad |10\rangle$$

- **Ejemplo 2: Base de Hadamard (NO se fusiona)**

$$|+\rangle \otimes |-\rangle \quad \rightarrow \quad |+\rangle|-\rangle$$

> La notación $|+-\rangle$, aunque matemáticamente está permitido, no es estándar en el contexto de la computación cuántica y debe evitarse.

- **Ejemplo 3: Un estado de Bell** (luego lo estudiaremos)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

La Base del Espacio Compuesto

Para construir una base para el espacio de Hilbert compuesto $\mathcal{H}$, simplemente formamos los productos tensoriales de los vectores de las bases de los espacios originales.

- Sea $\{|u_i\rangle\}$ la base de $\mathcal{H}_1$.
- Sea $\{|v_i\rangle\}$ la base de $\mathcal{H}_2$.

Una base para $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ estará formada por todos los vectores $|w_{ij}\rangle$ de la forma:

$$|w_{ij}\rangle = |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$$

Ejemplo Práctico 1: La Base de Dos Qubits

Problema:

Sean $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ dos espacios de Hilbert para qubits. Describe la base del espacio compuesto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Solución - Paso 1: Identificar las bases individuales.

La base para un solo qubit (en ambos espacios) es la base computacional:

$$\{|0\rangle, |1\rangle\}$$

Solución Ejemplo 1 (cont.)

Paso 2: Formar todos los productos tensoriales posibles.

De acuerdo a la regla $|w_{ij}\rangle = |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$, combinamos cada vector de la primera base con cada vector de la segunda.

1. $|w_1\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$
2. $|w_2\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$
3. $|w_3\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle$
4. $|w_4\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$

> **Conclusión:** La base para el espacio de dos qubits, $\mathbb{C}^4$, está formada por los cuatro vectores ortonormales:
>
> $$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$$

Ejercicio Práctico: Expandiendo un Producto Tensorial

Vamos a aplicar las propiedades de linealidad para "expandir" el producto tensorial de dos qubits en superposición.

Problema:

Sean dos qubits, cada uno en un estado de superposición general:

- $|\psi_A\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$
- $|\psi_B\rangle = \beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle$

Calcula el estado combinado $|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ expresado en la base de 2 qubits $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$.

> **Pista:** Usa la propiedad de bilinealidad. Trata la operación como si estuvieras multiplicando dos binomios: $(a+b) \otimes (c+d)$.

Solución: Expansión Paso a Paso

1. Escribimos la expresión completa:

$$(\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes (\beta_0|0\rangle + \beta_1|1\rangle)$$

2. Distribuimos el segundo ket sobre el primero (Linealidad):

$$= (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes (\beta_0|0\rangle) + (\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle) \otimes (\beta_1|1\rangle)$$

3. Distribuimos de nuevo en cada término (Linealidad):

$$= (\alpha_0|0\rangle \otimes \beta_0|0\rangle) + (\alpha_1|1\rangle \otimes \beta_0|0\rangle) + (\alpha_0|0\rangle \otimes \beta_1|1\rangle) + (\alpha_1|1\rangle \otimes \beta_1|1\rangle)$$

4. Reagrupamos los escalares y usamos la notación abreviada:

$$= \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$$

5. Ordenamos los términos según la base estándar ($|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$):

$$|\psi_{AB}\rangle = \alpha_0\beta_0|00\rangle + \alpha_0\beta_1|01\rangle + \alpha_1\beta_0|10\rangle + \alpha_1\beta_1|11\rangle$$

> ¡Ahora estamos listos para ver la fórmula general de esta expansión!

Expansión de un Estado Producto

Ahora, consideremos un estado producto general $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$, donde $|\phi\rangle$ y $|\chi\rangle$ son superposiciones.

- $|\phi\rangle$ en $\mathcal{H}_1$ se expande en su base $\{|u_i\rangle\}$:

$$|\phi\rangle = \sum_i \alpha_i |u_i\rangle$$

- $|\chi\rangle$ en $\mathcal{H}_2$ se expande en su base $\{|v_j\rangle\}$:

$$|\chi\rangle = \sum_j \beta_j |v_j\rangle$$

¿Cómo se expande $|\psi\rangle$ en la base combinada $\{|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle\}$?

Usando la propiedad de bilinealidad, simplemente multiplicamos las expansiones:

$$|\psi\rangle = \left(\sum_i \alpha_i |u_i\rangle\right) \otimes \left(\sum_j \beta_j |v_j\rangle\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j (|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle)$$

> La amplitud del estado base $|u_i v_j\rangle$ en el estado compuesto es el producto de las amplitudes originales, $\alpha_i \beta_j$.

El Producto de Kronecker: La Receta del Cálculo

La forma práctica de calcular el producto tensorial de dos vectores columna es mediante el **Producto de Kronecker**.

La Regla:

Si $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ y $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$, entonces:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 |\phi\rangle \\ \alpha_2 |\phi\rangle \\ \vdots \\ \alpha_m |\phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 \beta_k \\ \vdots \\ \alpha_m \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \beta_k \end{pmatrix}$$

El Producto de Kronecker entre dos qubits

Sean $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ y $|\chi\rangle = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$. Su producto tensorial es:

$$|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ b \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac \\ ad \\ bc \\ bd \end{pmatrix}$$

Ejercicio: La Base Computacional de 2 Qubits

Usando la regla del Producto de Kronecker, encuentra la representación en vector columna de los cuatro estados de la base computacional de 2 qubits.

Recordatorio: $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Instrucción:

Calcula explícitamente:

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \quad , \quad |01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle \quad , \quad |11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

Solución: La Base Computacional de 2 Qubits

1. $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. $|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4. $|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio

Problema:

Calcula el producto tensorial de los siguientes dos estados de un qubit:

$$|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |w\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución

Paso 1: Manejar los escalares.

La propiedad de linealidad nos permite sacar los escalares (constantes de normalización) fuera de la operación primero.

$$|v\rangle \otimes |w\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Solución (cont.)

Paso 2: Aplicar la regla del Producto de Kronecker.

Ahora nos enfocamos en el producto tensorial de los vectores:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ -1 \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Paso 3: Combinar el resultado con el escalar.

Finalmente, reincorporamos el escalar que habíamos separado al principio.

$$|v\rangle \otimes |w\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

> Este es el vector de 4 componentes en $\mathbb{C}^4$ que representa el estado combinado de los dos qubits.

Ejercicio Adicional

Para reforzar el concepto, calcula el producto tensorial $|w\rangle \otimes |v\rangle$.

$$|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad |w\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pregunta:

¿Obtienes el mismo vector columna que en el ejemplo anterior? ¿Qué nos dice esto sobre el producto tensorial de vectores?

Pista: El orden de los vectores **sí importa** al calcular el vector columna resultante.

Solución

$$|w\rangle \otimes |v\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Conclusión: El producto tensorial de vectores columna **no es conmutativo**. $|v\rangle \otimes |w\rangle \neq |w\rangle \otimes |v\rangle$.

NOTA: El Producto Tensorial es NO Conmutativo

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad |\chi\rangle = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix} \neq |\chi\rangle \otimes |\phi\rangle = \begin{pmatrix} \gamma\alpha \\ \gamma\beta \\ \delta\alpha \\ \delta\beta \end{pmatrix}$$

Los dos vectores resultantes son claramente diferentes.

Nota sobre la literatura: A veces, en textos de física, se lee que "el orden en el producto tensorial no es relevante". Esto se refiere a una propiedad matemática abstracta (los espacios $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ y $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1$ son matemáticamente isomórficos, es decir, equivalentes). Sin embargo, para todos los propósitos prácticos de cálculo y programación, **el orden es fundamental y la operación no es conmutativa.**

Productos Internos en Espacios Compuestos

Ya sabemos cómo construir vectores en el espacio tensorial. Ahora, necesitamos saber cómo calcular el **producto interno** entre ellos. Esto es esencial para calcular probabilidades y verificar la ortonormalidad.

La Regla del Producto Interno Tensorial:

> El producto interno de dos estados producto se calcula multiplicando los productos internos de sus componentes individuales.

Si tenemos dos estados producto:
$|\psi_1\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\chi_1\rangle$
$|\psi_2\rangle = |\phi_2\rangle \otimes |\chi_2\rangle$

Entonces, su producto interno es:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\phi_1|\phi_2\rangle \cdot \langle\chi_1|\chi_2\rangle$$

Propiedades Clave del Producto Tensorial

Para entender *por qué* la regla del producto interno funciona como lo hace, necesitamos conocer dos propiedades matemáticas del producto tensorial que se aplican a vectores y operadores por igual.

1. El Adjunto (†) de un Producto Tensorial:

> La daga de un producto tensorial es el producto tensorial de las dagas.
>
> $$(A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$$
>
> **Aplicación a Kets:** Como la daga de un ket es un bra, esto nos da la regla para construir el bra de un estado compuesto:
>
> $$(|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle)^\dagger = |\phi\rangle^\dagger \otimes |\chi\rangle^\dagger = \langle\phi| \otimes \langle\chi|$$

Propiedades Clave del Producto Tensorial (cont.)

2. La Multiplicación de Productos Tensoriales:

> El producto de dos operadores tensoriales es el producto tensorial de los productos de sus componentes individuales.
>
> $$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$
>
> **La Intuición:** Los operadores que actúan sobre el primer espacio (A, C) se agrupan, y los que actúan sobre el segundo espacio (B, D) se agrupan.

Ahora, con estas dos herramientas, estamos listos para desglosar la fórmula del producto interno.

Desglosando la Fórmula $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\phi_1|\phi_2\rangle \cdot \langle\chi_1|\chi_2\rangle$

Esta fórmula surge directamente de las propiedades del producto tensorial.
Sean $|\psi_1\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\chi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle = |\phi_2\rangle \otimes |\chi_2\rangle$.

- **Paso 1: Construir el Bra y el Ket**
  - $|\psi_2\rangle = |\phi_2\rangle \otimes |\chi_2\rangle$
  - $\langle\psi_1| = (|\phi_1\rangle \otimes |\chi_1\rangle)^\dagger = \langle\phi_1| \otimes \langle\chi_1|$
- **Paso 2: Aplicar la Propiedad de la Multiplicación**
  Juntamos el bra y el ket y usamos la regla $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = (\langle\phi_1| \otimes \langle\chi_1|)(|\phi_2\rangle \otimes |\chi_2\rangle) = (\langle\phi_1|\phi_2\rangle) \otimes (\langle\chi_1|\chi_2\rangle)$$

- **Paso 3: Interpretar el Resultado**
  Observar que $(\langle\phi_1|\phi_2\rangle)$ y $(\langle\chi_1|\chi_2\rangle)$ son escalares que resultan del producto interno!

> El producto tensorial de dos escalares, $s_1 \otimes s_2$, se define como su **multiplicación normal**, $s_1 \cdot s_2$.

- **Por lo tanto, la expresión final es:** $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\phi_1|\phi_2\rangle \cdot \langle\chi_1|\chi_2\rangle$

Ejercicio: Ortonormalidad de la Base Computacional

En un ejemplo anterior, construimos la base de 2 qubits $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ y afirmamos que era ortonormal. ¡Ahora podemos demostrarlo!

Problema:

Usando la regla del producto interno tensorial, verifica que la base computacional de 2 qubits es ortonormal.

Recordatorio:

- La base de 1 qubit $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ es ortonormal: $\langle 0|0\rangle = 1, \langle 1|1\rangle = 1, \langle 0|1\rangle = 0$.
- **Regla a usar:** $\langle \psi_1|\psi_2\rangle = \langle \phi_1|\phi_2\rangle \cdot \langle \chi_1|\chi_2\rangle$.

Instrucción:

1. Verifica la **normalidad** de un vector base (ej: $|01\rangle$).
2. Verifica la **ortogonalidad** entre dos vectores base distintos (ej: $|01\rangle$ y $|10\rangle$).

Solución: Verificando la Base Computacional

Parte 1: Verificación de la Normalidad

Para que un vector $|ij\rangle$ sea normal, su producto interno consigo mismo debe ser 1. Tomemos como ejemplo el vector $|01\rangle$:

$$\langle 01|01\rangle = \langle 0|0\rangle \cdot \langle 1|1\rangle$$

Como la base de 1 qubit es normal, sabemos que $\langle 0|0\rangle = 1$ y $\langle 1|1\rangle = 1$:

$$= (1) \cdot (1) = 1$$

✅ El vector está normalizado. El mismo razonamiento aplica para $|00\rangle$, $|10\rangle$ y $|11\rangle$.

Solución: Verificando la Base Computacional (Cont.)

Parte 2: Verificación de la Ortogonalidad

Para que dos vectores distintos $|ij\rangle$ y $|kl\rangle$ sean ortogonales, su producto interno debe ser 0. Tomemos como ejemplo $|01\rangle$ y $|10\rangle$:

$$\langle 01|10\rangle = \langle 0|1\rangle \cdot \langle 1|0\rangle$$

Como la base de 1 qubit es ortogonal, sabemos que $\langle 0|1\rangle = 0$ y $\langle 1|0\rangle = 0$:

$$= (0) \cdot (0) = 0$$

✅ Los vectores son ortogonales. Si al menos un índice difiere, al menos uno de los productos internos será cero, haciendo que el resultado total sea cero.

Conclusión: Hemos demostrado que la base computacional de 2 qubits es **ortonormal**.

Ejemplo Práctico 2: La Base de Hadamard para 2 Qubits

La base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ no es la única base útil. La base de Hadamard $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ es igualmente importante.

Problema:

Usa los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$ para construir una base para el espacio de dos qubits ($\mathbb{C}^4$) y verifica que es ortonormal.

Recordatorio:

La base de Hadamard es ortonormal:

$\langle +|+\rangle = 1, \langle -|-\rangle = 1, \langle +|-\rangle = 0.$

Solución Ejemplo 2 (Parte 1): Construcción de la Base

Siguiendo el mismo procedimiento que para la base computacional, construimos los cuatro nuevos vectores base:

1. $|w_1\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle = |+\rangle|+\rangle$
2. $|w_2\rangle = |+\rangle \otimes |-\rangle = |+\rangle|-\rangle$
3. $|w_3\rangle = |-\rangle \otimes |+\rangle = |-\rangle|+\rangle$
4. $|w_4\rangle = |-\rangle \otimes |-\rangle = |-\rangle|-\rangle$

Para que esta sea una base **ortonormal**, debemos verificar que la norma de cada vector es 1 y que el producto interno entre vectores distintos es 0.

Solución Ejemplo 2 (Parte 2): Verificación de la Norma

Usamos la regla $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \langle\phi_1|\phi_2\rangle \cdot \langle\chi_1|\chi_2\rangle$.

Norma de $|w_1\rangle$:

$$\langle w_1|w_1\rangle = \langle + + \mid + +\rangle = \langle +|+\rangle \cdot \langle +|+\rangle = (1) \cdot (1) = 1$$

Norma de $|w_2\rangle$:

$$\langle w_2|w_2\rangle = \langle + - \mid + -\rangle = \langle +|+\rangle \cdot \langle -|-\rangle = (1) \cdot (1) = 1$$

(De igual forma se puede verificar para $|w_3\rangle$ y $|w_4\rangle$).

Todos los vectores base tienen norma 1. ✅

Solución Ejemplo 2 (Parte 3): Verificación de Ortogonalidad

Ahora, verificamos que los vectores distintos son ortogonales.

Producto interno entre $|w_1\rangle = |+\rangle|+\rangle$ **y** $|w_2\rangle = |+\rangle|-\rangle$**:**

$$\langle w_1|w_2\rangle = \langle +|+\rangle \cdot \langle +|-\rangle = (1) \cdot (0) = 0$$

Producto interno entre $|w_2\rangle = |+\rangle|-\rangle$ **y** $|w_1\rangle = |+\rangle|+\rangle$**:**

$$\langle w_2|w_1\rangle = \langle +|+\rangle \cdot \langle -|+\rangle = (1) \cdot (0) = 0$$

(De manera similar se puede demostrar para todos los otros pares distintos).

Conclusión:

Los cuatro estados $\{|+\rangle|+\rangle, |+\rangle|-\rangle, |-\rangle|+\rangle, |-\rangle|-\rangle\}$ forman una **base ortonormal** para el espacio de estados de dos qubits $\mathbb{C}^4$.

Amplitudes en Sistemas de Múltiples Qubits

En un solo qubit, aprendimos a encontrar la amplitud de una componente usando el producto interno.

- El estado es: $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$
- La amplitud de $|0\rangle$ es: $\alpha = \langle 0|\psi\rangle$
- La probabilidad de medir $|0\rangle$ es: $P(0) = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = |\alpha|^2$

¡Esta idea se generaliza directamente a múltiples qubits!

La Amplitud de una Componente Compuesta

Consideremos un estado general de 2 qubits:

$$|\Psi\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$$

Para encontrar la amplitud de una componente específica, como $|01\rangle$, simplemente calculamos el producto interno entre el estado base $|01\rangle$ y el estado total $|\Psi\rangle$.

La amplitud de $|01\rangle$ es el escalar $c_{01} = \langle 01|\Psi\rangle$.

Demostración:

$$\langle 01|\Psi\rangle = \langle 01|(c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle)$$

Por la linealidad, distribuimos:

$$= c_{00}\langle 01|00\rangle + c_{01}\langle 01|01\rangle + c_{10}\langle 01|10\rangle + c_{11}\langle 01|11\rangle$$

Como la base es ortonormal, todos los productos internos son 0 excepto $\langle 01|01\rangle = 1$:

$$= c_{00}(0) + c_{01}(1) + c_{10}(0) + c_{11}(0) = c_{01}$$

La Regla de Born se mantiene: La probabilidad de medir el estado $|01\rangle$ es:

$$P(01) = |\langle 01|\Psi\rangle|^2 = |c_{01}|^2$$

Resumiendo

Regla General de Amplitudes:

> La amplitud c_{ab} del estado base $|ab\rangle$ en un estado compuesto general $|\Psi\rangle$ se calcula con el producto interno:
>
> $$c_{ab} = \langle ab|\Psi\rangle$$
>
> Y la probabilidad de medir $|ab\rangle$ sigue siendo la Regla de Born:
>
> $$P(ab) = |\langle ab|\Psi\rangle|^2 = |c_{ab}|^2$$

Operadores en Sistemas Compuestos

Ya sabemos cómo describir estados de múltiples qubits. Ahora, necesitamos definir cómo actúan las **operaciones** (compuertas) sobre ellos.

Ya vimos la Regla Fundamental:

> La acción de un operador tensorial $(A \otimes B)$ sobre un estado tensorial $(|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle)$ es el producto tensorial de las acciones individuales.
>
> $$(A \otimes B)(|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle) = (A|\phi\rangle) \otimes (B|\chi\rangle)$$

La Intuición:

> El operador A actúa **únicamente** sobre el primer subsistema (el espacio $\mathcal{H}_1$ de $|\phi\rangle$), mientras que el operador B actúa **únicamente** sobre el segundo subsistema (el espacio $\mathcal{H}_2$ de $|\chi\rangle$).

Ejemplo Práctico 3: Autovectores de Operadores Tensoriales

Problema:

Supongamos que $|\psi\rangle = |v\rangle \otimes |w\rangle$.

Además, $|v\rangle$ es un autovector del operador A con autovalor λ_v (es decir, $A|v\rangle = \lambda_v|v\rangle$), y $|w\rangle$ es un autovector de B con autovalor λ_w ($B|w\rangle = \lambda_w|w\rangle$).

¿Qué es $(A \otimes B)|\psi\rangle$?

Solución - Paso a Paso:

1. Aplicar la regla de acción del operador tensorial:

$$(A \otimes B)|\psi\rangle = (A \otimes B)(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (A|v\rangle) \otimes (B|w\rangle)$$

Solución Ejemplo 3 (cont.)

2. Sustituir las ecuaciones de autovalores:

Reemplazamos $A|v\rangle$ por $\lambda_v|v\rangle$ y $B|w\rangle$ por $\lambda_w|w\rangle$.

$$(A|v\rangle) \otimes (B|w\rangle) = (\lambda_v|v\rangle) \otimes (\lambda_w|w\rangle)$$

3. Usar la linealidad para sacar los escalares:

Los autovalores λ_v y λ_w son escalares. Pueden "flotar libremente" fuera del producto tensorial.

$$(\lambda_v|v\rangle) \otimes (\lambda_w|w\rangle) = \lambda_v\lambda_w(|v\rangle \otimes |w\rangle)$$

4. Reconocer el estado original: Recordamos que $|\psi\rangle = |v\rangle \otimes |w\rangle$.

$$\lambda_v\lambda_w(|v\rangle \otimes |w\rangle) = \lambda_v\lambda_w|\psi\rangle$$

> **Conclusión:** Si un estado producto está formado por autovectores de los operadores individuales, entonces también es un autovector del operador tensorial. El nuevo autovalor es el **producto** de los autovalores originales.

Propiedades de los Operadores Tensoriales

Una de las características más elegantes del producto tensorial es que **preserva las propiedades fundamentales** de los operadores individuales.

Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son operadores que actúan sobre sus respectivos espacios, su producto tensorial $\hat{A} \otimes \hat{B}$ hereda sus buenas cualidades:

- Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son **Hermitianos**, entonces $\hat{A} \otimes \hat{B}$ es **Hermitiano**.
- Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son **Unitarios**, entonces $\hat{A} \otimes \hat{B}$ es **Unitario**.
- Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son **Proyectores**, entonces $\hat{A} \otimes \hat{B}$ es un **Proyector**.

> **La Intuición:** Si realizas una acción válida en el sistema A y otra acción válida en el sistema B de forma independiente, la acción combinada sobre el sistema AB también es válida.

Demostración: La Hermiticidad se Conserva

Teorema: Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son Hermitianos, entonces $\hat{C} = \hat{A} \otimes \hat{B}$ también es Hermitiano.

Objetivo: Demostrar que $\hat{C}^\dagger = \hat{C}$.

Paso 1: Aplicar la daga al operador compuesto.

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})^\dagger$$

Paso 2: Usar la propiedad de la daga sobre el producto tensorial.
Una propiedad fundamental de la operación daga (†) es que se distribuye sobre el producto tensorial:

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger \otimes \hat{B}^\dagger$$

Paso 3: Usar la premisa de que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son Hermitianos.
Por definición, sabemos que $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ y $\hat{B}^\dagger = \hat{B}$. Sustituimos esto en la ecuación:

$$\hat{A}^\dagger \otimes \hat{B}^\dagger = \hat{A} \otimes \hat{B}$$

> **Conclusión:** Hemos demostrado directamente que $(\hat{A} \otimes \hat{B})^\dagger = \hat{A} \otimes \hat{B}$, por lo que el operador compuesto es Hermitiano. ✅

Ejercicio: Las Compuertas Compuestas son Válidas

Hemos visto que las compuertas cuánticas deben ser **unitarias**. Ahora, demostraremos que si combinamos dos compuertas válidas (una para cada qubit), la compuerta combinada también es válida.

Problema:
Demuestra que si los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son unitarios, entonces su producto tensorial $\hat{C} = \hat{A} \otimes \hat{B}$ también es unitario.

Instrucción:
Debes probar que $\hat{C}^\dagger \hat{C} = \hat{I}_{compuesto}$. Para ello, necesitarás las siguientes herramientas:

1. **Condición de unitariedad:** $\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{I}_A$ y $\hat{B}^\dagger \hat{B} = \hat{I}_B$.
2. **Propiedad de la daga:** $(\hat{A} \otimes \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger \otimes \hat{B}^\dagger$.
3. **Propiedad multiplicativa:** $(M_1 \otimes M_0)(N_1 \otimes N_0) = (M_1 N_1) \otimes (M_0 N_0)$.

Solución: La Unitaridad se Conserva

1. Partimos de la expresión $\hat{C}^\dagger \hat{C}$ y sustituimos $\hat{C} = \hat{A} \otimes \hat{B}$:

$$\hat{C}^\dagger \hat{C} = (\hat{A} \otimes \hat{B})^\dagger (\hat{A} \otimes \hat{B})$$

2. Aplicamos la propiedad de la daga:

$$= (\hat{A}^\dagger \otimes \hat{B}^\dagger)(\hat{A} \otimes \hat{B})$$

3. Usamos la propiedad multiplicativa para agrupar los operadores de cada espacio:

$$= (\hat{A}^\dagger \hat{A}) \otimes (\hat{B}^\dagger \hat{B})$$

4. Aplicamos la condición de que $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son unitarios:
Sabemos que $\hat{A}^\dagger \hat{A} = \hat{I}_A$ y $\hat{B}^\dagger \hat{B} = \hat{I}_B$.

$$= \hat{I}_A \otimes \hat{I}_B$$

5. El producto tensorial de identidades es la identidad del espacio compuesto:

$$\hat{I}_A \otimes \hat{I}_B = \hat{I}_{AB}$$

Conclusión: Hemos demostrado que $(\hat{A} \otimes \hat{B})^\dagger (\hat{A} \otimes \hat{B}) = \hat{I}_{AB}$. Por lo tanto, el operador compuesto **es unitario**. ✅

Demostración: La Propiedad de Proyección se Conserva

Teorema: Si $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son proyectores, entonces $\hat{C} = \hat{A} \otimes \hat{B}$ también es un proyector.

Recordatorio: Para que un operador $\hat{C}$ sea un proyector, debe cumplir **dos** condiciones:

1. **Hermiticidad:** $\hat{C}^\dagger = \hat{C}$
2. **Idempotencia:** $\hat{C}^2 = \hat{C}$

Datos (lo que sabemos):

- $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ y $\hat{A}^2 = \hat{A}$ (porque $\hat{A}$ es proyector)
- $\hat{B}^\dagger = \hat{B}$ y $\hat{B}^2 = \hat{B}$ (porque $\hat{B}$ es proyector)

Herramientas (las propiedades que usaremos):

- $(M \otimes N)^\dagger = M^\dagger \otimes N^\dagger$
- $(M \otimes N)(P \otimes Q) = (MP) \otimes (NQ)$

Solución: Parte 1

Ya hemos visto cque la Hermiticidad se conserva ($\hat{C}^\dagger = \hat{C}$)

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger \otimes \hat{B}^\dagger \quad \text{(Usando la propiedad de la daga)}$$

Como $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son Hermitianos, podemos sustituir $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ y $\hat{B}^\dagger = \hat{B}$:

$$= \hat{A} \otimes \hat{B}$$

✅ La primera condición (Hermiticidad) se cumple.

Solución: Parte 2

Verificando la Idempotencia ($\hat{C}^2 = \hat{C}$)

$$(\hat{A} \otimes \hat{B})^2 = (\hat{A} \otimes \hat{B})(\hat{A} \otimes \hat{B})$$

Usando la propiedad de la multiplicación de productos tensoriales:

$$= (\hat{A}\hat{A}) \otimes (\hat{B}\hat{B}) = \hat{A}^2 \otimes \hat{B}^2$$

Como $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son Idempotentes, podemos sustituir $\hat{A}^2 = \hat{A}$ y $\hat{B}^2 = \hat{B}$:

$$= \hat{A} \otimes \hat{B}$$

✅ La segunda condición (Idempotencia) se cumple.

> **Conclusión:** Como el operador compuesto $\hat{A} \otimes \hat{B}$ es tanto Hermitiano como Idempotente, hemos demostrado que **es un proyector**.

Actuando sobre un Solo Qubit

Una de las operaciones más comunes en un circuito cuántico es aplicar una compuerta a **un solo qubit** mientras los demás **no se modifican**.

¿Cómo representamos la acción de "no hacer nada"?

- Con el **operador Identidad ($\hat{I}$)**.

La Regla:

> Para construir un operador que actúa con $\hat{A}$ sobre el primer qubit y deja intacto al segundo, usamos el producto tensorial:
>
> $$\hat{A} \otimes \hat{I}$$

> Para actuar con $\hat{B}$ sobre el segundo qubit y dejar intacto al primero:
>
> $$\hat{I} \otimes \hat{B}$$

Ejemplo: La Compuerta Hadamard en un Sistema de 2 Qubits

Imagina que quieres aplicar una compuerta Hadamard solo al **primer qubit** de un sistema de dos.

El operador total que describe esta acción es $\hat{H} \otimes \hat{I}$.

Si el estado inicial es $|00\rangle$, el estado final será:

$$(\hat{H} \otimes \hat{I})|00\rangle = (\hat{H}|0\rangle) \otimes (\hat{I}|0\rangle)$$

$$= |+\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

> El primer qubit ha sido puesto en superposición, mientras que el segundo permanece en el estado $|0\rangle$. Esta es la base para construir circuitos cuánticos.

Producto Tensorial de Matrices

Hemos visto cómo actúa un operador tensorial $\hat{A} \otimes \hat{B}$ sobre los vectores. Pero, ¿cómo es la **matriz** que representa a este operador compuesto?

Esta es una operación crucial que nos permite construir la matriz de una compuerta de 2 qubits (una matriz 4×4) a partir de las matrices de 1 qubit (2×2).

La Regla: Producto de Kronecker para Matrices

> Es la misma idea que para los vectores. Se reemplaza cada elemento de la primera matriz por ese elemento multiplicado por la **segunda matriz completa**.

$$\hat{A} \otimes \hat{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \hat{B} = \begin{pmatrix} a_{11}\hat{B} & a_{12}\hat{B} \\ a_{21}\hat{B} & a_{22}\hat{B} \end{pmatrix}$$

La Regla en Detalle

Expandiendo la matriz de bloques, obtenemos la matriz 4×4 completa.

Si $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\hat{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, entonces:

$$\hat{A} \otimes \hat{B} = \begin{pmatrix} a_{11} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{12} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ a_{21} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} & a_{22} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Ejemplo Práctico 4: La Matriz de $X \otimes Z$

Problema:

Encuentra la representación matricial 4×4 del operador compuesto $X \otimes Z$.

Datos:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución - Aplicando la Regla:

$$X \otimes Z = \begin{pmatrix} 0 \cdot Z & 1 \cdot Z \\ 1 \cdot Z & 0 \cdot Z \end{pmatrix}$$

Solución Ejemplo 4 (cont.)

Sustituyendo los bloques:

- $1 \cdot Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $0 \cdot Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$X \otimes Z = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Matriz Final:

Juntando los bloques, obtenemos la matriz 4×4 final:

$$X \otimes Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio: La No Conmutatividad

El producto tensorial de matrices, al igual que el de vectores, **no es conmutativo**.

Problema:
Calcula la matriz para $Z \otimes X$ y demuestra explícitamente que es diferente de $X \otimes Z$.

Solución:

$$Z \otimes X = \begin{pmatrix} 1 \cdot X & 0 \cdot X \\ 0 \cdot X & -1 \cdot X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \neq X \otimes Z$$

Conclusión: El orden en que se aplican las compuertas a los qubits importa. Aplicar X al primero y Z al segundo es una operación fundamentalmente diferente a aplicar Z al primero y X al segundo.

Ejercicio Final: Dos Caminos, Un Destino

Objetivo: Verificar que la acción de un operador tensorial es consistente, sin importar cómo se calcule. Considera un sistema de 2 qubits en el estado inicial $|\psi_0\rangle = |10\rangle$.

Queremos aplicar la compuerta Hadamard (H) al qubit 1 (q_1) y la compuerta Pauli-X (X) al qubit 0 (q_0). El operador total es $\hat{O} = H \otimes X$.

Instrucción:
Calcula el estado final $|\psi_f\rangle = \hat{O}|\psi_0\rangle$ usando **dos métodos distintos**:

1. Enfoque por Acción Individual:

- Calcula $|\psi_1\rangle = H|1\rangle$ y $|\psi_0\rangle = X|0\rangle$.
- Luego, calcula el estado final como el producto tensorial de los resultados: $|\psi_f\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_0\rangle$.

2. Enfoque Matricial Compuesto:

- Calcula la matriz de 4×4 para el operador $\hat{O} = H \otimes X$.
- Luego, multiplica esta matriz por el vector columna del estado inicial $|\psi_0\rangle = |10\rangle$.

Verifica que ambos métodos producen el mismo vector de estado final.

Solución: Dos Caminos, Un Destino

Método 1: Enfoque por Acción Individual

1. **Acción sobre cada qubit por separado:**
   - Qubit 1: $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   - Qubit 0: $X|0\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. **Producto tensorial de los resultados:**

$$|\psi_f\rangle = (H|1\rangle) \otimes (X|0\rangle) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \otimes \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Solución: Dos Caminos, Un Destino (cont.)

Método 2: Enfoque Matricial Compuesto

1. **Matriz del operador compuesto $\hat{O} = H \otimes X$:**

$$H \otimes X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\cdot X & 1\cdot X\\ 1\cdot X & -1\cdot X\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

2. **Vector del estado inicial:** $|\psi_0\rangle = |10\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

3. **Multiplicación de matriz por vector:**

$$|\psi_f\rangle = (H \otimes X)|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Conclusión:

¡Ambos resultados son idénticos! ✅ Esto demuestra que la descripción abstracta $(H|1\rangle) \otimes (X|0\rangle)$ y el cálculo matricial $(H \otimes X)|10\rangle$ son dos formas consistentes y equivalentes de describir la misma realidad física.

Una Advertencia Crucial: El Orden de los Qubits Importa

A lo largo de esta clase, hemos visto que el producto tensorial **no es conmutativo**. Esto tiene una consecuencia muy importante en la práctica: no existe una única convención universal para ordenar los qubits.

Nuestra Convención (Informática Cuántica / Qiskit):

- **Ket:** El qubit de mayor índice (más significativo) va a la izquierda: $|q_1 q_0\rangle$.
- **Operador Compuesto:** La compuerta para q_1 va a la izquierda. Si quiero aplicar X a q_1 y H a q_0 aplicaría: $(X \otimes H)|q_1 q_0\rangle$.

Otra Convención, común en Física y en algunos libros de texto, invertie el orden

> **En este curso, usaremos SIEMPRE la convención de Informática Cuántica / Qiskit.**

Ejercicio de Revisión de Conceptos

Realizar los cuestionarios publicados sobre las teorías 3 y 4