Jensen's Inequality: $E(g(X)) \ge g(E(X))$ (Both exist)
Cauchy-Schwarz: $(E(XY))^2 \le E(X^2)E(Y^2)$ (=:Pr(Y=cX)=1)
Chebyshev: $Pr(|X-u| \ge c\sigma) \le 1/c^2$
Markov: $Pr(|X| \ge c) \le E|X|^r/c^r$ ($E|X|^r$ exists)
General case: $Pr(g(X) \ge c) \le E(g(X))/c$
复合随机变量 Compound r.v.: $S_N=\sum_{[1,N]}X_i$, X_i i.i.d.
$E(S_N)=E(N)E(X)$; $Var(S_N)=E(N)Var(X)+Var(N)E^2(X)$
泊松分布 Poisson distribution:
$f(x|\lambda)=\lambda^x e^{-\lambda}/x!$, $x\in Z$; $E(X) = Var(X) = \lambda$
$M_X(t)=\exp(\lambda(e^t-1))$
$X_i \sim Poisson(\lambda_i) \to \sum X_i \sim Poisson(\sum\lambda_i)$
$\sum_{[k,\infty)}Poisson(x|\lambda) = \int_{[0,\lambda]}Gamma(y|k,1)dy$
二项分布 Binomial distribution:
$f(x|n,p)=C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$, $x = 0,1,\dots,n$
$E(X)=np$; $Var(X)=np(1-p)$; $M_X(t)=(pe^t+1-p)^n$
$X_i \sim Bin(n_i,p) \to \sum X_i \sim Bin(\sum n_i,p)$
$\sum_{[0,k]}Bin(x|n,p)=\int_{[0,1-p]}Beta(x|n-k,k+1)dx$, $0\le k\le n$
负二项分布 Negative Binomial distribution: $NB(r,p)$, $x\in N_r$
$f(x)=C_{x-1}^{r-1}p^r(1-p)^{x-r}$; $E(X)=r/p$; $Var(X)=r(1-p)/p^2$
$M_X(t)=(pe^t/(1-(1-p)e^t))^r$
均匀分布 Uniform: $E(X)=(a+b)/2$; $Var(X)=(b-a)^2/12$;
$M_X(t)=(e^{tb}-e^{ta})/(t(b-a))$; $X_{(1)} \sim Beta(1,n)$
伽玛分布 Gamma distribution:
$\Gamma(\alpha)=\int_{(0,+\infty)}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\alpha\Gamma(\alpha-1)$; $\Gamma(n)=(n-1)!$; $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$
$f(x)=\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}/\Gamma(a)$, $x>0$; $E(X)=\alpha/\beta$; $Var(X)=\alpha/\beta^2$
$M_X(t)=(\beta/(\beta-t))^\alpha$; $cX\sim Gamma(\alpha, \beta/c)$;
$Gamma(1, \beta)=Exp(\beta)$; $Gamma(v/2, 1/2)=\chi^2(v)$
$X\sim Gamma(\alpha,\beta) \to E(\log(X))=\Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)-\log(\beta)$
贝塔分布 Beta distribution:
$f(x)=x^{a-1}(1-x)^{b-1}/B(a,b)$; $B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$
$E(X)=a/(a+b)$; $E(X^2)=a(a+1)/[(a+b)(a+b+1)]$
$Var(X)=ab/[(a+b)^2(a+b+1)]$
$Y_1\sim Gamma(a,1), Y_2\sim Gamma(b,1) \to Y_1/(Y_1+Y_2)\sim Beta(a,b)$
$X_i\sim U[0,1] \to X_{(k)}\sim Beta(k,n-k+1)$; $Beta(1,1)=U[0,1]$
指数分布 Exponential distribution:
$f(x|\beta)=\beta e^{-\beta x}$, $\beta>0$, $x\ge0$; $E(X)=1/\beta$; $Var(X) = 1/\beta^2$
$-\log(U(0,1))/\beta\sim Exp(\beta)$; $X_i\sim Exp(\beta) \to \sum X_i\sim Gamma(n,\beta)$
卡方分布 Chi-square distribution: $\chi^2(v)$ $v>0$
$f(x|v)=2^{-v/2}x^{v/2-1}e^{-x/2}/\Gamma(v/2)$, $x>0$; $E(X)=v$; $Var(X)=2v$
$Y\sim N(0,1) \to X=Y^2\sim\chi^2(1)$; $X_i\sim\chi^2(v_i) \to \sum X_i\sim\chi^2(\sum v_i)$
$$X_i \overset{i.i.d}{\sim} N(\mu,\sigma^2) \to \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$
正态分布: $N(u,\sigma^2)$
$f(x)=e^{-(x-\mu)(x-\mu)/(2\sigma\sigma)}/(\sigma\sqrt{2\pi})$, $x\in R$; $E(X)=\mu$; $Var(X)=\sigma^2$;
$M_X(t)=\exp(\mu t+\sigma^2t^2/2)$, $E_{N(0,1)}(X^{2n})=(2n-1)!!$, $E_{N(0,1)}(X^{2n+1})=0$
$X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2) \to \sum a_iX_i\sim N(\sum a_i\mu_i, \sum a_i^2\sigma_i^2)$
$X_1|X_2\sim N(X_2,\sigma_1^2)$, $X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2) \to X_1\sim N(\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$
t 分布: $t(v)$ $v > 0$
$f(x|v)=\Gamma((v+1)/2)(1+x^2/v)^{-(v+1)/2}/(\Gamma(v/2)\sqrt{\pi v})$, $x\in R$
$E(X)=0 (v>1)$; $Var(X)=v/(v-2)$ $(v>2)$ $(v=1\to Cauchy)$
$$Z\sim N(0,1), Y\sim\chi^2(v) \to \frac{Z}{\sqrt{Y/v}} \sim t(v)$$
$$X_i \overset{i.i.d}{\sim} N(\mu,\sigma^2) \to \frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S} \sim t(n-1)$$
F 分布: $F(n_1,n_2)$ $x > 0$
$f(x)=(n_1/n_2)^{n_1/2}x^{n_1/2-1}(1+n_1x/n_2)^{-(n_1+n_2)/2}/B(n_1/2,n_2/2)$
$E(X)=n_2/(n_2-2)$ $(n_2 > 2)$
$Var(X)=2n_2^2(n_1+n_2-2)/(n_1(n_2-4)(n_2-2)^2)$ $(n_2 > 4)$
$Y_i\sim\chi^2(n_i) \to Y_1n_2/(Y_2n_1)\sim F(n_1,n_2)$
拉普拉斯分布 Laplace distribution
$f(x)=e^{-|x-\mu|/\sigma}/(2\sigma)$, $x,\mu\in R$ $\mu^{MLE}=med(\mathbf{x})$
单调变换: ($y=h(x)$ 单调且可微)
$g(y)=f(x)\times|dx/dy|=f(h^{-1}(y))\times|dh^{-1}(y)/dy|$
二元变换: $Y_1=h_1(X_1,X_2)$, $Y_2=h_2(X_1,X_2)$;
$J=\partial(x_1,x_2)/\partial(y_1,y_2)$
$g(y_1,y_2)=f(x_1,x_2)\times|J| = f(h_1^{-1}(y_1,y_2),h_2^{-1}(y_1,y_2))\times|J|$
样本方差: $$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$$
顺序统计量 Order Statistics
$F_{X(n)}(x)=F^n(x)$; $f_{X(n)}(x)=nf(x)F^{n-1}(x)$
$F_{X(1)}(x)=1-(1-F(x))^n$; $f_{X(1)}(x)=nf(x)(1-F(x))^{n-1}$
$F_{X(r)}(x)=\int_{[0,F(x)]}(t^{r-1}(1-t)^{n-r})dt/B(r,n-r+1)$
$=\sum_{[r,n]}C_n^iF^i(x)(1-F(x))^{n-i}$
$f_{X(r)}(x)=n!f(x)F^{r-1}(x)(1-F(x))^{n-r}/((r-1)!(n-r)!)$
$f_{med}(x)=f(x)F^m(x)(1-F(x))^m(2m+1)!/(m!)^2$ $(n=2m+1)$
$f_{X(1),\dots,X(n)}(\mathbf{x})=n!f_X(x_{(1)})\dots f_X(x_{(n)})$
强收敛: $Pr(X_n=X(n\to\infty))=1$(almost surely) 「a.s.」
均方收敛: $E(X_n-X)^2=0(n\to\infty)$ 「m.s.」
→弱收敛: $Pr(|X_n-X|\ge\varepsilon)=0$ $(n\to\infty)$ 「P」
→依分布收敛: $F_n(x)=F(x)$ $(n\to\infty)$ 「L」
弱大数律: $Pr(|X_{nbar}-u|\ge\varepsilon)\le Var(X_{nbar})/\varepsilon^2=\sigma^2/n\varepsilon^2\to0$
强大数律: $E(X_i)=u<\infty$, X_i i.i.d. $\to \sum_{[1,n]}X_i/n\to u$(a.s.)
中心极限定理: X_i i.i.d., $0<\sigma^2<\infty$, Common μ, $\sigma<\infty\to$
$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma} \xrightarrow{P} N(0,1)$$
似然函数 Likelihood function
$L(\vec{\theta})=f(x_1,\dots,x_n;\vec{\theta})=\prod_{[1,n]}f(x_i;\vec{\theta})$; $l(\vec{\theta})=\log(L(\vec{\theta}))$
极大似然估计量 Maximum Likelihood Estimator (MLE)
$\vec{\theta}^* = \underset{\vec{\theta}\in\Theta}{\arg\max}L(\vec{\theta}) = \underset{\vec{\theta}\in\Theta}{\arg\max}\,l(\vec{\theta})$, 一般有 $\nabla l(\vec{\theta}^*) = \vec{0}$

MLE(θ_{hat}) 是随机变量的函数, mle (θ^*) 是样本的
定理 3.1 MLE 不变性: 若$\boldsymbol{\theta}^*$是 $g(X_1,\dots,X_n)$的 MLE, $\boldsymbol{\eta}=\mathbf{h}_{p\times1}(\boldsymbol{\theta})$ 是一个一一映射, 则$\boldsymbol{\eta}^*=\mathbf{h}(\boldsymbol{\theta}^*)$ 是$\boldsymbol{\eta}$的 MLE
定理 3.2: 若θ^*是 $g(X_1,\dots,X_p)$的 MLE, $\eta_{r\times1}=h(\theta)$, $1\le r\le p$, 则$\eta^*=h(\theta^*)$ 是η的 MLE

矩估计量 Moment Estimator
样本矩: $\sum_{[1,n]}X_i^r/n$ 总体矩: $E(X^r)$, 构建二者的相等关系

$f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$=Likelihood×Prior$=f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})\times\pi(\boldsymbol{\theta})=\prod_{[1,n]}f(x_i|\boldsymbol{\theta})\times\pi(\boldsymbol{\theta})$
后验分布 Posterior density: $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})=f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})/f(\mathbf{x})\propto f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$
$f(\mathbf{x})=\int_{\boldsymbol{\theta}}f(\mathbf{x},\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}$
贝叶斯估计量 Bayesian Estimator
$E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})=\int_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{\theta}\cdot p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})d\boldsymbol{\theta}$

无偏估计量: $E(\varphi(x))=\theta$; 偏差 $b(\theta)=E(\varphi(x))-\theta$
样本均值和样本方差是总体均值和总体方差的无偏估计量
均方误差 $MSE=E(\varphi(x)-\theta)^2$ **MSE 小的估计量更好**
Score Function: $S(\theta)=L'(\theta)/L(\theta)=dl(\theta)/d\theta=S(\theta;x)$
Fisher Information: $I_n(\theta) = Var_x(S(\theta;x))$
定理 3.3: CR 下界不等式: $Var(\hat{\theta}) \ge (\tau'(\theta))^2/I_n(\theta)$
其中, θ_{hat}是$\tau(\theta)$的无偏估计, 且 $f(x;\theta)$的存在域与θ无关
此时, 有 $E(S(\theta;x))=0\to I_n(\theta)=E(S^2(\theta;x))$
定理 3.4: 若 $E(S(\theta))=0$, 则 $I_n(\theta)=E(-d^2l(\theta;\mathbf{X})/d\theta^2)=nI(\theta)$, 其中 $I(\theta)=E(d\log f(X;\theta)/d\theta)^2=E(-d^2\log f(X;\theta)/d\theta^2)$

有效估计量: θ_{hat}是$\tau(\theta)$的无偏估计, 且其方差为 CR 下界
有效性 Efficiency: $Eff_{\theta hat}(\theta)=CR/Var(\theta_{hat})=1/I_n(\theta)Var(\theta_{hat})$
UMVUE: 一致最小方差无偏估计量 (不存在或唯一)
有效估计量→UMVUE
充分统计量: 假如给定统计量 $T(\mathbf{X})=t$, 可以使 X 的条件分布不再依赖于参数θ, 则称 $T(\mathbf{X})$是θ的充分统计量。
定理 3.5/6 因子分解定理 Factorization: 若 X 的分布可写作 $f(\mathbf{X};\theta)=g(T(\mathbf{X});\theta)\times h(\mathbf{X})$, 则 $T(\mathbf{X})$是θ的充分统计量
完备统计量: 假如对于任意θ属于Θ, 均有: 对于函数 $h(T)$, $E(h(T))=0\to Pr(h(T)=0)=1$, 则 T 是$\theta$的完备统计量。
Lehmann-Scheffé定理: 如果 $T(\mathbf{X})$是θ的完备且充分的统计量, $g(T)$是$\tau(\theta)$的无偏估计量, 则 $g(T)$是$\tau(\theta)$唯一的 UMVUE。
MLE 的极限性质: $\theta_n^{MLE}\to\theta(n\to\infty)$ 「P, L」
MLE 的渐近性质: 若 $E(S(\theta;X))=0$, $Var(S(\theta;X))=nI(\theta)$, 则
$$\frac{S(\theta;X_1,\dots,X_n)}{\sqrt{nI(\theta)}} \xrightarrow{L} N(0,1)(n\to\infty),$$ 且
$$(\theta_n^{MLE}-\theta)\sqrt{nI(\theta)} \xrightarrow{L} N(0,1)(n\to\infty),$$ 进而对一般函数 g
$$(g(\hat{\theta}_n)-g(\theta))\sqrt{nI(\theta)}/g'(\theta) \xrightarrow{L} N(0,1)(n\to\infty)$$
这表明θ_n^{MLE}是θ的一个渐近无偏估计量, 而且是渐近 UMVUE, 同时还渐近地正态分布。(Asymptotic)

枢轴量 Pivotal quantity/Pivot:
X_i i.i.d $f(x;\theta)$, $T=T(\mathbf{X})$是θ的充分统计量, 如果 $P=P(T,\theta)$满足 P 的分布与θ无关, 则 P 是一个枢轴量。
构造枢轴量: $-2\sum_{[1,n]}\log F(X_i;\theta)\sim\chi^2(2n)$

已知方差构造正态分布均值的置信区间: (中心极限定理)
$$\left[\bar{X}-\frac{z_{\alpha/2}\sigma_0}{\sqrt{n}}, \bar{X}+\frac{z_{\alpha/2}\sigma_0}{\sqrt{n}}\right]$$ $z_{\alpha/2}$ 为 N(0,1)的上$\alpha/2$ 分位点

未知方差构造正态分布均值的置信区间: (t 分布的性质)
$$\left[\bar{X}-\frac{t(\alpha/2,n-1)S}{\sqrt{n}}, \bar{X}+\frac{t(\alpha/2,n-1)S}{\sqrt{n}}\right]$$

大样本下构造置信区间的三种办法:
I.中心极限定理
II.利用 $S(\theta,\mathbf{X})$的渐近性质 $$1-\alpha\approx Pr\left(-z_{\alpha/2}\le\frac{S(\theta;X)}{\sqrt{nI(\theta)}}\le z_{\alpha/2}\right)$$
III.利用 MLE 的渐近性质
$$1-\alpha\approx Pr(-z_{\alpha/2}\le(\theta_n^*-\theta)\sqrt{nI(\theta)}\le z_{\alpha/2})$$

构造两个正态分布均值之差的置信区间:
两个方差已知:
$$\sigma_0=\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$
枢轴量: $$Z=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_0}\sim N(0,1)$$
方差未知但相等:
$$\frac{(n_i-1)S_i^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_i-1);\quad S_p^2=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$
$$Y=\frac{(n_1+n_2-2)S_p^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n_1+n_2-2)$$
$$\frac{Z}{\sqrt{Y/(n_1+n_2-2)}}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$$
CI: $$\bar{X}_1-\bar{X}_2\mp t\left(\frac{\alpha}{2},n_1+n_2-2\right)\cdot S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$
方差未知:
$$T_{Welch}=\frac{(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}\sim t(v)$$
$$t(v)=1/\left(\frac{c^2}{n_1-1}+\frac{(1-c)^2}{n_2-1}\right), c=\frac{S_1^2/n_1}{S_1^2/n_1+S_2^2/n_2}$$
已知均值构造正态分布方差的置信区间
$$P=\sum_{i=1}^n\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$$
未知均值构造正态分布方差的置信区间
$$P=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$
构造两个正态分布方差之比的置信区间
$$\frac{\sigma_2^2S_1^2}{\sigma_1^2S_2^2}\sim F(v_1,v_2);\ f(1-\frac{\alpha}{2},v_1,v_2)=\frac{1}{f(\frac{\alpha}{2},v_2,v_1)}$$
$v_i = n_i - 1$; $$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{1}{f(\alpha/2,v_1,v_2)}, \frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot f(\alpha/2,v_2,v_1)\right]$$

基础知识:
$Var(\sum c_iX_i)=\sum c_i^2Var(X_i)+2\sum_{i<j}Cov(X_i,X_j)$
$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2)$
$Pr(X\le med(X))\ge0.5$; $Pr(X\ge med(X))\ge0.5$
$E(g(X))=E(E(g(X)|Y))=\int E(g(X)|Y=y)f(y)dy$
$Var(g(X))=E(Var(g(X)|Y))+Var(E(g(X)|Y))$
$M_X(t)\ge e^{tE(X)}$ (Jensen)
$\rho=Corr(X,Y)=Cov(X,Y)/\sqrt{Var(X)Var(Y)}$
r 阶矩 r^{th} moment (about the origin): $u'_r=E(X^r)$
r 阶中心矩 r_{th} central moment (about the mean): $u_r=E(X-u)^r$
$\mu_r=\sum_{[0,r]}(-1)^iC_r^i\mu'_{r-i}\mu^i$
期望: μ_1 衡量 Central Location 方差: σ^2 衡量 Dispersion (散度)
斜度 Skewness: μ_3/σ^3 衡量 Asymmetry 左斜-长尾在左-斜度为负
峰度 Kurtosis: μ_4/σ^4 衡量 Flatness

乱七八糟的知识:
Probability Generating Function 概率生成函数 pgf.
$G_X(z)=E(z^X)=\sum_{[x\in Sx]}z^xp_X(x)$ 显然 $G(e^t)=M_X(t)$
Multi-dimensional Normal Distribution:
$$N_d(\vec{x}|\vec{\mu},\mathbf{\Sigma})=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d|\Sigma|}}e^{-\frac{(\vec{x}-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})}{2}}$$
其中$\Sigma=(Cov(X_i,X_j))$正定
$$M_{(X_1,X_2)}(t_1,t_2)=\exp(\mu_1t_1+\mu_2t_2+(\sigma_1^2t_1^2+\sigma_2^2t_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2t_1t_2)/2)$$
$$a_1X_1+a_2X_2\sim N(a_1\mu_1+a_2\mu_2, a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2+2a_1a_2\rho\sigma_1\sigma_2)$$

Stochastic representation 随机表示
若 X 与 $g(Y_1,\dots,Y_n)$同分布, 即 $X\overset{d}{\sim}g(Y_1,\dots,Y_n)$, 则称此式为一个「One-to-many SR」of the r.v. X, 随机表示不要求 V-C 矩阵正定。
Statistic 统计量
X_i i.i.d. F(x). An arbitrary function $T(X_1,\dots,X_n)$ is called a Statistic.
Or: A function of one or more r.v.'s that does not depend on any unknown parameters is called a Statistic.

定理 2.1:
$A_{m\times n}$, $B_{r\times n}$是两个标量矩阵, $\mathbf{X}\sim N_n(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$, 则
(1) $A\mathbf{X}\sim N_m(A\boldsymbol{\mu}, A\Sigma A^T)$;
(2) $B\mathbf{X}\sim N_r(B\boldsymbol{\mu}, B\Sigma B^T)$;
(3) $A\mathbf{X}$ 与 $B\mathbf{X}$ 独立当且仅当 $A\Sigma B^T=0_{m\times r}$
定理 2.5: 对于任意$|t|<h$, $M_{Xi}(t)$均存在时
如果 $\lim_{x\to\infty}M_{X_n}(t)=M_X(t)$, 则 $X_n\xrightarrow{L}X(n\to\infty)$。
Newton-Raphson&Fisher Scoring Algorithm
$$x_{t+1}=x_t-\frac{g(x_t)}{g'(x_t)}\longrightarrow\theta_{t+1}=\theta_t-\frac{l'(\theta_t)}{l''(\theta_t)}$$
逆贝叶斯公式: (sampling-wise 为正比关系)(f(x,y)必须存在)
$$f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)f_{X|Y}(x|y)=f(x,y)$$
$$f_X(x)=\frac{f_{X|Y}(x|y_0)}{f_{Y|X}(y_0|x)}\Big/\int_{S_X}\frac{f_{X|Y}(x|y_0)}{f_{Y|X}(y_0|x)}dx$$ (function-wise)
$$f_Y(y)=1\Big/\int_{S_X}\frac{f_{X|Y}(x|y)}{f_{Y|X}(y|x)}dx$$ (point-wise)
$$Pr(X=x)=\left(\sum_{y\in S_Y}\frac{Pr(Y=y|X=x)}{Pr(X=x|Y=y)}\right)^{-1}\propto\frac{Pr(X=x|Y=y_0)}{Pr(Y=y_0|X=x)}$$
Simple Hypothesis completely specifies the population distribution; Composite Hypothesis does not.
H_0: 零假设 Null H_1: 备择假设 Alternative
拒绝域 Critical Region: 当 $\mathbf{x}\in C$ 时拒绝 H_0
接受域 Acceptance Region: 当 $\mathbf{x}\in C'$时接受 H_0

$\alpha(\theta)$ = Pr(Type I Error) = Pr(Rejecting H_0 | H_0 is true) = $\Pr(\mathbf{x}\in C \mid \theta\in\Theta_0)$ //Type I Error Function

$\beta(\theta)$ = Pr(Type II Error) = Pr(Accepting H_0 | H_0 is false) = $\Pr(\mathbf{x}\in C' \mid \theta\in\Theta_1)$ //Type II Error Function

势函数 Power Function 在给定参数θ时拒绝 H_0 的概率

$p(\theta)$ = Pr(Rejecting H_0 |θ) = $\Pr(\mathbf{x}\in C \mid \theta)$（通用定义）

$$p(\theta)=\begin{cases}\alpha(\theta) & ,\theta\in\Theta_0\\ 1-\beta(\theta) & ,\theta\in\Theta_1\end{cases},(\theta\in\Theta\text{时成立})$$

选择好的检验：先固定一个较小的 I 型错误率α^*，然后最小化 II 型错误率。即，考虑满足 $\sup_{\theta\in\Theta_0} p(\theta)=\sup_{\theta\in\Theta_0}\alpha(\theta)=\alpha^*$ 的检验，然后从中选择 II 型错误率最小的检验。

如果$\alpha_{T_1}(\theta), \alpha_{T_2}(\theta)\le\alpha^*$，且$\beta_{T_1}(\theta)\le\beta_{T_2}(\theta)$，则 T_1 好于 T_2。

Size of a test 检验的大小

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} p_\varphi(\theta)=\sup_{\theta\in\Theta_0}\alpha_\varphi(\theta)=\alpha$$

H_0 为简单零假设，即$\Theta_0=\{\theta_0\}$时，检验大小等于 I 型错误率。

最优势检验 Most Powerful Test (MPT)

假如测试φ：$H_0:\theta=\theta_0$ 对 $H_1:\theta=\theta_1$ 满足 $p_\varphi(\theta_0)=\alpha$，且对任意满足 $p_\psi(\theta_0)\le\alpha$的检验ψ，均有 $p_\varphi(\theta_1)\ge p_\psi(\theta_1)$，则φ称为大小α下的最优势检验(Most powerful test with size α)。即在 size≤α的所有试验中，此实验的 II 型错误率$\beta_\varphi(\theta_1)$最小。

构建最优势检验

Neyman-Pearson 引理：假设 $X_1, ..., X_n$~(i.i.d.)$f(x;\theta)$，其似然函数为 $L(\theta)=L(\theta;\mathbf{x})$，则具有大小α且拒绝域为

$$C=\left\{\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T \mid \frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)}\le k\right\}$$

的检验φ：$H_0: \theta=\theta_0$ 对 $H_1: \theta=\theta_1$ 是具有大小α的最优势检验。其中 k 是由大小α决定的值（通过α的定义和枢轴量转化）。

一致最优势检验 Uniformly Most Powerful Test (UMPT)

假如测试φ：$H_0:\theta\in\Theta_0$ 对 $H_1:\theta\in\Theta_1$ 满足

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} p_\varphi(\theta)=\sup_{\theta\in\Theta_0}\alpha_\varphi(\theta)=\alpha,$$

且对于任意满足

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} p_\psi(\theta)\le\alpha$$

的检验ψ，均有 $p_\varphi(\theta)\ge p_\psi(\theta)$ （$\theta\in\Theta_1$），则φ被称为大小α下的一致最优势检验（UMPT of size α）。

即在 size≤α的所有试验中，UMPT 的可能的 II 型错误率$\beta_\varphi(\theta)$（$\theta\in\Theta_1$）最小，即最有可能正确地拒绝 H_0。

注意：UMPT 的拒绝域不依赖于Θ_1 中的任何θ。

注意：对于某些问题，UMPT 可能不存在。

寻找一致最优势检验

Step1: 对于给定的复合假设 $H_0: \theta\in\Theta_0$ 和 $H_1: \theta\in\Theta_1$，先考虑两个简单假设 $H_{0s}: \theta=\theta_0\in\Theta_0$ 和 $H_{1s}: \theta=\theta_1\in\Theta_1$，根据 Neyman-Pearson 引理，可得具有大小α和拒绝域 C 的最优势检验φ。

Step2: 若 C 与θ_1 无关，则φ是 $H_0: \theta=\theta_0\in\Theta_0$ 对 $H_1: \theta\in\Theta_1$ 的 UMPT。

Step3: 如果 $\sup_{\theta\in\Theta_0} p_\varphi(\theta)=\alpha=p_\varphi(\theta_0)$，则φ是原复合假设在大小α下的一致最优势检验。

似然比检验 Likelihood Ratio Test (LRT)

当 UMPT 不存在时，我们可以尝试 LRT。LRT 不一定最优，但是是构造拒绝域的通用方法，适用于任何假设。

似然比统计量 LR Statistic

令 $X_1, ..., X_n$~(i.i.d.)$f(x;\theta)$。定义 $\mathbf{X}=(X_1,\cdots,X_n)^T, \vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$

$L(\theta)=\Pi f(x_i;\theta)$为θ的似然函数。则

$$\lambda(\mathbf{X})=\frac{L(\hat\theta^R)}{L(\hat\theta)}, 0<\lambda(\vec{x})=\frac{\sup_{\theta\in\Theta_0}L(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta}L(\theta)}\le 1$$

分别是似然比统计量和其统计值。其中θ^R 代表限制在Θ_0 内的θ的极大似然统计量，$\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1\subseteq\Theta^*$。

我们期待当 H_0 为真时，有$\hat\theta^R=\hat\theta$。具有大小α的 LRT 应该具有拒绝域 $C=\{x \mid \lambda(\mathbf{x})\le\lambda_\alpha\}$，$0<\lambda_\alpha<1$，其中$\lambda_\alpha$由下式决定：

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}\Pr\{\lambda(\mathbf{X})\le\lambda_\alpha \mid \theta\}=\alpha$$

构建似然比测试

Step1：计算$\lambda(\mathbf{x})=h(T)$。其中 $T=T(\mathbf{x})$是θ的一个充分统计量

Step2：计算拒绝域 C：[1]检验 h(t)是否单调或对数凹。[2]构造关于充分统计量 T 和常数 k 的等价拒绝域。[3]由检验大小α的定义和枢轴量 $P=P(T,\theta)$遵从的分布计算常数 k。

拟合优度检验 Goodness of Fit Test

问题：检验 $H_0: F(x;\theta)=F_0(x;\theta)$对 $H_1: F(x;\theta)\ne F_0(x;\theta)$

定理 5.1（大样本卡方分布）：

令$(N_1, ..., N_m)^T$~Multinomial$(n;p_1, ..., p_m)$, $\sum N_i = n$, $\sum p_i = 1$

定义 $Q_n=\sum_{i=1}^m\frac{(N_i-np_i)^2}{np_i}$，则 $Q_n\xrightarrow{L}\chi^2(m-1)$。

若某栏 np_i＜5，则此栏需要与前一栏合并。

梨儿子卡方检验 Pearson's Chi-Square Test

已知分布的卡方检验

样本空间划分：$S=\cup A_i$ (i=1, ..., m)，A_i 互不相交。

记 N_i 为随机样本 $X_1, ..., X_n$ 落入集合 A，则$(N_1, ..., N_m)^T$ ~ Multinomial$(n;p_1, ..., p_m)$，其中 $p_i=\Pr(X\in A_i)\approx N_i/n$

等价假设：定义 $p_{j0}=\int_{A_j}dF_0(x;\theta)$，$Q_{n0}=\sum_{i=1}^m(N_j-np_{j0})^2/np_{j0}$，$Q_{n0}$ 为检验统计量。于是拟合优度检验变为检验

H_0':任意 j，$p_j=p_{j0}$ 对 H_1':存在 j，$p_j\ne p_{j0}$。

当 H_0 为真时，$Q_{n0}=Q_n\to\chi^2(m-1)$(L, n→∞)

$C=\{(n_1, ..., n_m)^T|Q_{n0}\ge c=\chi^2(\alpha, m-1)\}$

已知分布族但参数未知的卡方检验

$p_{j0}=p_{j0}(\theta_1, ..., \theta_q)$，基于样本变量，可以得到$\boldsymbol\theta$的极大似然估计量$\boldsymbol\theta^{hat}$。由极大似然估计量的不变性，可得 $p_{j0}^{hat}=p_{j0}(\theta^{hat})$。

等价假设：H_0''：任意 j，$p_j=p_{j0}^{hat}$ 对 H_1''：存在 j，$p_j\ne p_{j0}^{hat}$。

H_0 为真时，$Q_{n0}^{hat}=Q_n^{hat}\to\chi^2(m-q-1)$(L, n→∞)

正态均值检验

方差已知的单样本正态检验

检验：$H_0: \mu=\mu_0$ 对 $H_1: \mu\ne/>/<\mu_0$（三选一）

拒绝域法 CR Approach：X^{bar} 是μ的充分统计量，且 $Z=(X^{bar}-\mu)/(\sigma_0/\sqrt{n})\sim N(0,1)$，所以测试统计量为

$Z_0=(X^{bar}-\mu+\mu-\mu_0)/(\sigma_0/\sqrt{n})=Z+(\mu-\mu_0)/(\sigma_0/\sqrt{n})$

当 H_0 为真时，$\mu=\mu_0$，$Z_0\sim N(0,1)$

对于上述三种备择假设，拒绝域分别为

$C_1=\{\mathbf{x}:|z_0|\ge z_{\alpha/2}\}$; $C_2=\{\mathbf{x}:z_0\ge z_\alpha\}$; C_3: $\{\mathbf{x}:z_0\le -z_\alpha\}$

概率值法 p-value Approach：p-value 定义如下：

Pr(测试统计量 T 等于或比观测值 t_{obs} 更极端 | H_0)

对于上述三种备择假设，p-value 分别为

$p_1=2\Pr(|z_0|\le Z)$; $p_2=\Pr(z_0\le Z)$; $p_3=\Pr(z_0\ge Z)$

当 p-value≥α时，接受 H_0，否则拒绝 H_0。

单样本 t 检验（方差未知的正态均值检验，沿用上述检验）

(X^{bar}, S^2)对(μ, σ^2)充分，$T=(X^{bar}-\mu)/(S/\sqrt{n})\sim t(n-1)$，测试统计量 $T_1=(X^{bar}-\mu+\mu-\mu_0)/(S/\sqrt{n})\sim t(n-1)=T+(\mu-\mu_0)/(S/\sqrt{n})$

当 H_0 为真时，$\mu=\mu_0$，$T_1=T\sim t(n-1)$，

拒绝域分别为 $C_1=\{\mathbf{x}:|t_1|\ge t(\alpha/2,n-1)\}$; $C_2=\{\mathbf{x}:t_1\ge t(\alpha,n-1)\}$;

C_3: $\{\mathbf{x}:t_1\le -t(\alpha,n-1)\}$，

p-value 分别为 $p_1=2\Pr(T\ge|t_1|)$,$p_2=\Pr(T\ge t_1)$,$p_3=\Pr(T\le t_1)$

双样本 t 检验

$X_{i1}, ..., X_{in_i}\sim N(\mu_i, \sigma^2)$，i=1,2，两样本独立。

检验：$H_0: \mu_1-\mu_2=\delta$对 $H_1: \mu_1-\mu_2\ne/>/<\delta$（三选一）

记 $S_p=\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$，$T_2=\frac{(\bar X_1-\bar X_2)-\delta}{S_p\sqrt{1/n_1+1/n_2}}$

枢轴量：$T^*=\frac{(\bar X_1-\bar X_2)-(\mu_1-\mu_2)}{S_p\sqrt{1/n_1+1/n_2}}\sim t(n_1+n_2-2)$，则

H_0 为真时，$T_2=T^*\sim t(n_1+n_2-2)$。记 $n'=n_1+n_2-1$

拒绝域分别为 $C_1=\{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2):|t_2|\ge t(\alpha/2,n'-1)\}$;

$C_2=\{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2):t_2\ge t(\alpha,n'-1)\}$; C_3: $\{(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2):t_2\le -t(\alpha,n'-1)\}$

p-value 分别为 $p_1=2\Pr(T^*\ge|t_2|)$,

$p_2=\Pr(T^*\ge t_2)$, $p_3=\Pr(T^*\le t_2)$

例 1. X_i i.i.d. $N(\mu_0,\sigma^2)$，μ_0 已知。[1]寻找具有大小α的 MPT 检验：$H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$ 对 $H_1: \sigma^2=\sigma_1^2$，其中$\sigma_1^2>\sigma_0^2$；[2]寻找具有大小α的 UMPT 检验：$H_0: \sigma^2\le\sigma_0^2$ 对 $H_1: \sigma^2>\sigma_1^2$。

解：[1] $\frac{L(\sigma_0^2)}{L(\sigma_1^2)}=\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}\right)^2\exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2\right)\le k$，

等价于 $\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0)^2\ge\frac{2\ln k-n\ln(\sigma_1^2/\sigma_0^2)}{1/\sigma_1^2-1/\sigma_0^2}\doteq c$，

注意到$\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0^2)/\sigma^2\sim\chi^2(n)$，所以当 H_0 为真时，

$\Pr(\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2\ge c\mid\sigma^2=\sigma_0^2)$
$=\Pr(\chi^2(n)\ge c/\sigma_0^2)=\Pr(\chi^2(n)\ge\chi^2(\alpha,n))=\alpha$，所以由引理，

$C=\{x|\sum_{i=1}^n(x_i-\mu_0^2)/\sigma^2\ge\sigma_0^2\chi^2(\alpha,n)\}$的测试φ即为所求。

[2]在[1]中，MPT 的拒绝域与σ_1^2 无关，所以其亦是测试 $H_0: \sigma^2=\sigma_0^2$ 对 $H_1: \sigma^2=\sigma_1^2$ 的 UMPT。而

$$\sup_{\sigma^2\le\sigma_0^2}p_\varphi(\sigma^2)=\sup_{\sigma^2\le\sigma_0^2}\Pr(\sum_{i=1}^n(X_i-\mu_0)^2|\sigma^2)=\sup_{\sigma^2\le\sigma_0^2}\Pr(\chi^2(n)\ge c/\sigma^2)$$
$$=\Pr(\chi^2(n)\ge\chi^2(\alpha,n))=\alpha=p_\varphi(\sigma_0^2)$$

所以测试φ同样是检验 $H_0: \sigma^2\le\sigma_0^2$ 对 $H_1: \sigma^2>\sigma_1^2$ 的 UMPT。

例 2. X_i i.i.d. Exp(θ)，求检验：$H_0: \theta\le\theta_0$ 对 $H_1: \theta>\theta_0$ 的 LRT。

解：[1]计算λ(x)。对数似然函数 $l(\theta)=n\ln\theta-\theta\sum x_i$，导数为 $l'(\theta)=n/\theta-\sum x_i$，$l''(\theta)=-n/\theta^2<0$，所以 l(θ)严格凹并有极值$\theta^{hat}=1/x^{bar}$，于是

$$\hat\theta^R=\begin{cases}1/\bar x & ,\theta_0\ge 1/\bar x\\ \theta_0 & ,\theta_0<1/\bar x\end{cases}, \max_{\theta\in\Theta}L(\theta)=L(\hat\theta)=\left(\frac{1}{\bar x}\right)^n e^{-n},$$

$$\max_{\theta\in\Theta}L(\theta)=L(\hat\theta^R)=\begin{cases}(1/\bar x)^n e^{-n} & ,\theta_0\ge 1/\bar x\\ \theta_0^n e^{-\theta_0 n\bar x} & ,\theta_0<1/\bar x\end{cases}$$

$$\lambda(\vec x)=\begin{cases}1 & ,\theta_0\ge 1/\bar x\\ (\theta_0\bar x)^n e^{-\theta_0 n\bar x+n} & ,\theta_0<1/\bar x\end{cases}$$

[2]构造拒绝域 C。记 $y=\theta_0x^{bar}$，$h(y)=y^ne^{-n(y-1)}$，则

$C=\{\mathbf{x}|\lambda(x)<\lambda_\alpha\}=\{\mathbf{x}|0<y<1\ \&\ h(y)<\lambda_\alpha\}$

[2a]检验对数凹性。$(\ln h(y))''=-n/y^2<0$，严格凹。y=1 时取最大。

[2b]求等价拒绝域。$0<y<1\&h(y)<\lambda_\alpha$等价于 $y\le k$。$C=\{\mathbf{x}|\theta_0x^{bar}\le k\}$。

[2c]求 k。∵$2\theta\sum X_i\sim\chi^2(2n)$，于是

$$\alpha=\sup_{\theta\in\Theta_0}\Pr(\vec x\in C\mid\theta)=\max_{\theta\le\theta_0}\Pr(\chi^2(2n)\le 2\theta nk/\theta_0\mid\theta)$$
$$=\Pr(\chi^2(2n)\le 2nk)$$

$k=\chi^2(1-\alpha, 2n)$，最终求得拒绝域 $C=\{\mathbf{x}|x^{bar}\le\chi^2(1-\alpha,2n)/(2n\theta_0)\}$。

例 3. X_i i.i.d $N(0,\theta)$，求检验 $H_0: \theta=\theta_0$ 对 $H_1: \theta<\theta_0$ 的 LRT，θ>0。

解：[1]计算$\lambda(\mathbf{x})$。$L(\theta)=(2\pi\theta)^{-n/2}\exp(-nt/2\theta)$，其中 $t=\sum x_i^2/n$。

显然 $T=\sum X_i^2/n$ 对θ充分，且 $nT/\theta\sim\chi^2(n)$。

$l(\theta)=-n\ln(2\pi\theta)/n-nt/2\theta$, $l'(\theta)=-n/2\theta+nt/2\theta^2$, $l''(\theta)=n/2\theta^2-nt/\theta^3$

$$\hat\theta=\min(t,\theta_0), L(\hat\theta)=\sup_{\theta\le\theta_0}L(\theta)=\begin{cases}L(t) & ,t\le\theta_0\\ L(\theta_0) & ,t>\theta_0\end{cases}$$

$$\lambda(\vec x)=\begin{cases}(t/\theta_0)^{n/2}e^{-\frac{n}{2}(\frac{t}{\theta_0}-1)} & ,\theta_0\ge t\\ 1 & ,\theta_0<t\end{cases}$$

[2]构造拒绝域 C。令 $y=t/\theta_0$，$h(y)=y^{n/2}e^{-n(y-1)/2}$，则

$C=\{\mathbf{x}|t\le\theta_0\ \&\ \lambda(x)\le\lambda_\alpha\}=\{\mathbf{x}|0<y\le 1\ \&\ h(y)\le\lambda_\alpha\}$。

[2a]检验对数凹性。令 $H(y)=\ln h(y)$，则 $H'(y)=n/2y-n/2$。由 $H''(y)=-n/2y^2<0$，$H'(1)=0$ 知 h(y)严格对数凹且有最大值 h(1)。

[2b]求等价拒绝域。$0<y\le 1\&h(y)\le\lambda_\alpha$当且仅当 $y\le k$，$0<k\le 1$。

[2c]求 k。当 H_0 为真时 $nT/\theta_0\sim\chi^2(n)$，于是

$\alpha=\Pr(T/\theta_0\le k|H_0)=\Pr(\chi^2(n)\le nk)$，$k=\chi^2(1-\alpha, n)/n$，最终，

$C=\{\mathbf{x}|\sum x_i^2\le\theta_0\chi^2(1-\alpha, n)\}$。

例 4. $Y_1\sim$Poisson(λ_1)，$Y_2\sim$Poisson(λ_2)，$Y_1\perp Y_2$。

[a]用 mgf 法证明 $Y_1+Y_2\sim$Poisson$(\lambda_1+\lambda_2)$；

解：$M_{Y_1+Y_2}(t)=\exp(\lambda_1(e^t-1))\cdot\exp(\lambda_2(e^t-1))=\exp((\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1))$

[b]计算 $E(Y_1|Y_1+Y_2=n)$；

解：$Y_1|Y_1+Y_2=n\sim$Bin$(n,\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2))$，$E(Y_1|Y_1+Y_2=n)=n\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$

[c]假设某建筑工地的单日事故数量统计如下：

数量 i	0	1	2	3	4	5	≥6	总计
频率 N_i	102	59	30	8	0	1	0	200

假设单日事故数量遵循 Poisson 分布在 0.05 的显著水平下是否合理？$[\chi^2(0.05, 2)=5.99, \chi^2(0.05, 3)=7.81, \chi^2(0.05, 4)=9.49, \chi^2(0.05, 5)=11.07]$

解：H_0：遵循 Poisson(λ) 对 H_1：不遵循。

当 H_0 为真时，λ的 mle 为(59+2*30+3*8+5)/200≈0.74，则

$\hat p_{i0}=\frac{\hat\lambda^i}{i!}e^{-\hat\lambda}, i=0,1,...,5, \hat p_{60}=1-\sum_{i=0}^5\hat p_{i0}$，合并低频的栏，得

数量 i	0	1	2	≥3	总计
频率 N_i	102	59	30	8	200
p_{i0}^{hat}	0.477	0.353	0.131	0.039	1.000
np_{i0}^{hat}	95.4	70.6	26.2	7.8	200

$$\because\hat Q_{200}=\sum_{i=0}^3\frac{(N_i-n\hat p_{i0})^2}{n\hat p_{i0}}\approx 3.10<\chi^2(0.05,4-1-1)=5.99$$

所以我们在 0.05 的显著水平下不能拒绝 H_0。

例 5. X_1,X_2 i.i.d. Exp(1/θ)，$Y_1=X_1+X_2$，$Y_2=X_1/(X_1+X_2)$。求 Y_1 和 Y_2 的联合分布及其分别的边际分布。

解：$x_1=y_1y_2$，$x_2=y_1(1-y_2)$，$J=\partial(x_1,x_2)/\partial(y_1,y_2)=-y_1$。

$g(y_1,y_2)=f(x_1,x_2)|J|=y_1e^{-y_1/\theta}/\theta^2 I(y_1\ge 0)I(0\le y_2\le 1)$

∴$Y_1\sim$Gamma(2,1/θ)，$Y_2\sim$U[0,1]

例 6. X_i i.i.d. Exp(θ)，[1]证明样本均值是 1/θ的有效估计量。

解：$I_n(\theta)=nE(d\ln f(x;\theta)/d\theta)^2=nE(1/\theta-X)^2=n\mathrm{Var}(X)=n/\theta^2$。

CR 下界：$[\tau'(\theta)]^2/I_n(\theta)=1/(n\theta^2)$，∵$E(X^{bar})=1/\theta=\tau(\theta)$，且 $\mathrm{Var}(X^{bar})=1/(n\theta^2)$，∴样本均值是$\tau(\theta)=1/\theta$的有效估计量

[2]为θ构建 100(1-α)%水平的等尾置信区间。

提示：$2\theta nX^{bar}\sim\chi^2(2n)$。

[3]将[0,∞)划分为 A_1=[0,100), A_2=[100,200), A_3=[200,300), A_4=[300,∞)。下表为 300 只灯泡样本的寿命分布。

寿命	A_1	A_2	A_3	A_4
数量	121	78	43	58

灯泡寿命服从 Exp(0.005)的分布的假设是否在 0.05 大小下合理?

解：检验 H_0：分布服从 Exp(0.005)对 H_1：不服从。

$F_0(x)=1-e^{-0.005x}$。$p_{10}=F_0(100)-F_0(0)=0.3935$，类似地，$p_{20}=0.2387$，$p_{30}=0.1447$，$p_{40}=0.2231$。于是有

类别 i	A_1	A_2	A_3	A_4
数量 N_i	121	78	43	58
p_{i0}	0.3935	0.2387	0.1447	0.2231
np_{i0}	118.05	71.61	43.41	66.93

$Q_{n0}=\sum_{i=1}^4(N_i-np_{i0})^2/np_{i0}=1.8392<\chi^2(0.05, 4-1)=7.8417$

因此，在 0.05 显著水平下我们无法拒绝 H_0。