线性代数 0221/3 12112627 李乐平

Week 5 补充题

1.(1) $\because$ a_1 不能由 $a_2 \cdots a_m$ 线性表示

而 a_{m+1} 可以由 $a_2 \cdots a_m$ 线性表示 *.

*：这是因为 $a_2 \cdots a_m$ 中任一向量均无法由其余向量线性表示，而 $a_2 \cdots a_{m+1}$ 线性相关，所以仅有可能是 a_{m+1} 可以由 $a_2 \cdots a_m$ 线性表示。

(2) $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = (x_1+x_2+2x_3)\alpha_1 + (2x_1+3x_2+5x_3)\alpha_2$.

因为 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=0 \end{cases}$ 显然有非零解.

$\therefore$ $\exists x_1x_2x_3$ 不全为0. s.t. $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$.

2.(1) 若 $x_1=a$, $x_2=b$, 则 $x_3=2a+3b$.

$x_4=3a+5b$.

$\therefore x = a\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\3\\5\end{bmatrix}$.

一个基础解系为 $\underbrace{(1,0,2,3)^T}_{\text{记为}\beta_1}$. $\underbrace{(0,1,3,5)^T}_{\text{记为}\beta_2}$.

dim N = 2.

(2) 若(I)(II)有公共解. 则 $\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&3&5\\2&-1&a+2&1\\-1&2&4&a+8\end{bmatrix}x=0$

有非零解.

对矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&3&5\\2&-1&a+2&1\\-1&2&4&a+8\end{bmatrix}$ 消元. 得

$\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&3&5\\0&0&a+1&0\\0&0&0&a+1\end{bmatrix}$. $\therefore$ 仅当 $a=-1$ 时.

(I)(II)有非零公共解

此时 $\begin{cases} x_1+2x_3+3x_4=0 \\ x_2+3x_3+5x_4=0 \\ \cancel{(a+1)x_3=0}. \\ \cancel{(a+1)x_4=0}. \end{cases}$

故(I)(II)的解空间重合.

公共解集为 span{(1,0,2,3), (0,1,3,5)}

3. 因为 rank(A) = 2 $\therefore$ A 的最大线性无关列数为2.

$\because Ax_1=Ax_2=b$ $\therefore A(x_1-x_2)=A\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\-2\end{bmatrix}=0$.

$\because Ax_3=0$ $\therefore A(x_1-x_2+x_3)=0=A\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-2\end{bmatrix}$.

$\therefore$ 知 A 中. C_1 与 C_3 线性相关. C_2 与 C_4 线性相关.

$C_1=-C_3$. $C_2=2C_4$

$\therefore x_1=x_2=C_1+5C_4$.

$\therefore$ 对 $A\begin{bmatrix}s\\t\\u\\v\end{bmatrix}=b$ 的一般解满足

$\begin{cases} s-u=1 \\ 2t+v=5 \end{cases}$ $\therefore x=\begin{bmatrix}s\\t\\s-1\\5-2t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\\5\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-2\end{bmatrix}$.

为通解， $(s,t\in R)$.

4.(1) 假设 $V_1^* \cdots V_k^*$ 线性相关.

则 $V_1^*x_1+\cdots+V_k^*x_k=0$ 有非零解.

对于前n行. 这意味着 $V_1x_1+\cdots+V_kx_k=0$ 有非零解.

则 $V_1, V_2 \cdots V_k$ 线性相关. 矛盾! $\therefore V_1^* \cdots V_k^*$ 线性无关。

(2) 对于 special solutions. 其自由变量的部分线性无关且 Special solutions 的个数为自由变量的个数. 即 N(A) 的维数. 由(1)中结论. Special Solutions 线性无关. 因此构成 N(A) 的一组基。

(3) 由于 $R(A)^{\perp}=N(A)$ $\therefore$ ~~rank N(A)~~

$\therefore \dim N(A) = m - \dim R(A) = m - r$.

5. 求 $V_1\cap V_2$. 即解方程 $x_1(1,-5,3,2)+x_2(4,1,-2,9)=x_3(2,0,-1,4)+x_4(0,3,4,-5)$

因为四个向量线性无关 所以方程仅有零解.

$\therefore V_1\cap V_2 = \text{span}\{(0,0,0,0)\}$. 一组基即为 {(0,0,0,0)}.