线性代数 12112627 李乐平

2.2.24.

证明：考虑行空间维数可知。

AB 的每一行都是 B 的行的线性组合。

$\therefore rank(AB) \le rank(B)$.

2.4.3.

$\dim C(A) = 2$.

$C(A) = Span\{(1,0,1),(0,1,0)\}$.

$\dim R(A) = 2$

$R(A) = Span\{(1,2,0,1),(0,1,1,0)\}$

$\dim N(A) = 2$.

$\begin{bmatrix} 1&2&0&1 \\ 0&1&1&0 \\ 1&2&0&1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&2&0&1 \\ 0&1&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix}$.

$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\therefore N(A) = Span\{(-2,1,-1,0),(-1,0,0,1)\}$.

$\dim N(A^T) = 1$

$\begin{bmatrix} 1&0&1 \\ 2&1&2 \\ 0&1&0 \\ 1&0&1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&0&1 \\ 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$

$A^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\therefore N(A^T) = Span\{(1,0,-1)\}$.

13. $d = \frac{cb}{a}$.

该阵主元仅有 a.

18. $R(A) = Span\{(0,1,2,3,4),(0,0,0,1,2)\}$.

$C(A) = Span\{(1,1,0),(3,4,1)\}$.

$N(A) = R(A)^\perp = Span\{(0,-2,1,0,0),$

$(1,0,0,0,0),(0,2,0,-2,1)\}$.

$N(A^T) = C(A)^\perp = Span\{(-1,1,-1)\}$.

21. (a) $\begin{bmatrix} 1&0 \\ 1&0 \\ 0&1 \end{bmatrix}$ 即符合要求

(b) 不存在。

这是因为 $\dim(C(A)) = \dim(R(A))$

$\dim(R(A)) + \dim(N(A)) = 3$.

$\therefore \dim(N(A)) = 2 \neq 1$.

(c) 如 $\begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 1&1&1 \end{bmatrix}$.

其零空间是2维的

而左零空间是一维的

(d). $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

(e) 不存在。

这是因为

$N(A) = C(A)^\perp$

$N(A^T) = R(A)^\perp$

若 $C(A) = R(A)$

则必有 $N(A) = N(A^T)$.

25.

(a) $[A]$ $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ 有相同的行空间和零空间.

(b) $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$ 有相同的列空间和左零空间.

显然 $\begin{bmatrix} A \\ A \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} A & A \\ A & A \end{bmatrix}$

经过线性变换可得

$\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

∴ 其秩与 [A] 相同.

27. 因为存在 b 使 $Ax=b$ 无解.

$\therefore \dim N(A) < m$

$\therefore r < m$, $r \le n$.

(b) 这是因为 A^T 有 m 列. 而 $rank(A^T) = r < m$

∴ A^T 的列向量必线性相关.

∴ $A^T y = 0$ 有非零解.

34. (a) $\begin{bmatrix} 1&2&b_1 \\ 3&4&b_2 \\ 4&6&b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&2&b_1 \\ 0&-2&b_2-3b_1 \\ 0&-2&b_3-4b_1 \end{bmatrix}$.

$\to \begin{bmatrix} 1&2&b_1 \\ 0&-2&b_2-3b_1 \\ 0&0&b_3-b_2-b_1 \end{bmatrix}$.

$\therefore R_3 - R_2 - R_1 = 0$.

$N(A^T) = Span(-1,-1,1)$.

(b) $\begin{bmatrix} 1&2&b_1 \\ 2&3&b_2 \\ 2&4&b_3 \\ 2&5&b_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1&2&b_1 \\ 0&-1&b_2-2b_1 \\ 0&0&b_3-2b_1 \\ 0&1&b_4-2b_1 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1&2&b_1 \\ 0&-1&b_2-2b_1 \\ 0&0&b_3-2b_1 \\ 0&0&b_4+b_2-4b_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $R_3 - 2R_1 = 0$

$R_4 + R_2 - 4R_1 = 0$

$\therefore N(A^T) = Span\{(-2,0,1,0),(-4,1,0,1)\}$

35. (a) u, w

(b) v, z.

(c) w, u 线性相关或 v, z 线性相关.

(d) $A = \begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$

$rank A = 2$.

38. $\because AB = 0$. $\therefore C(B) \subset N(A)$.

$\therefore \dim C(B) \le \dim N(A)$

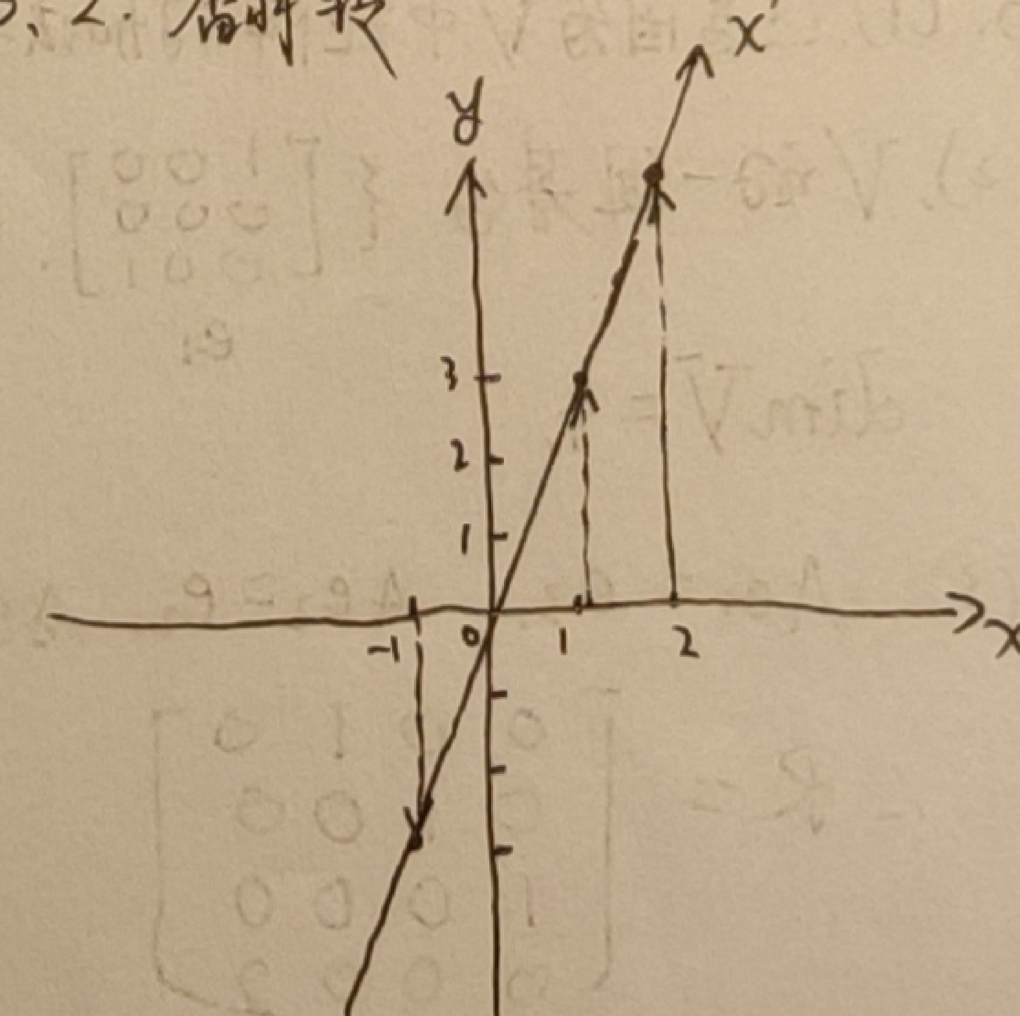
而 $\dim N(A) = n - \dim C(A)$.

$\therefore \dim C(A) + \dim C(B) \le n - \dim N(A) \le n$.

$\therefore rank A + rank B \le n$.

2.6.2. 翻转

5.



15. ~~A = V₂ + V₃~~

A^2 相当于翻转2次. 相当于没有翻转.

将四个基分别转置可知

$A = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$.

显然 $A^2 = A$

19. 显然

只有 d 是不可逆的.

33.

不存在这样的矩阵 A.

如 $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $T(M) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

对 $\forall A \in R^{2\times 2}$. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$AM = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} \neq T(M)$.

48. 由提示.

$Vb = Wc$.

$\therefore b = V^{-1}Wc$.

$\therefore M = V^{-1}W$