概率论 2022 Fall Final

Estraie

1.

$$F(x,y)=\begin{cases} c(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), x>0, y>0 \\ 0, otherwise \end{cases}$$

(i)求 c、f(x,y).

(ii)求 $f_X(x)$、$f_Y(y)$，指出 X 和 Y 分别遵从的分布，并判断 X 和 Y 是否独立，给出理由.

(iii)求 P(1<X<3,1<Y<2).

2.X~$N(\mu,\sigma^2)$，$Y=X^2$.

(i)求 M_X.

(ii)利用 M_X，求 E(X)、Var(X)和 $E(X^4)$.

(iii)求 $f_Y(y)$、E(Y)和 Var(Y).

3.

(i)证明：$Var(\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y})=2(1+\rho), Var(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y})=2(1-\rho)$，其中 $\rho=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$.

(ii)证明：$\rho\in[-1,1]$，并给出 $\rho=1$ 和 $\rho=-1$ 时 X 和 Y 的精确函数关系.

(iii)证明：$|Cov(X,Y)|\le\sigma_X\sigma_Y$，然后证明协方差矩阵

$$C=\begin{bmatrix} Cov(X,X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Cov(Y,Y) \end{bmatrix}$$

对称非负定.

4.ε 是大于 0 的实数.

(i)证明：$P(|X-E(X)|\ge\varepsilon)\le\frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.

(ii)$\{X_n\}$是一系列离散随机变量，其均值有限，方差一致有界，且 $E(X^2)<\infty$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}P(|\overline{X_n}-E(\overline{X_n})|\ge\varepsilon)=0.$$

(iii)$\{Y_n\}$是一系列独立同分布的随机变量，Y_i 具有期望 μ 和方差 σ^2. 求 $E(\overline{Y_n})$、$Var(\overline{Y_n})$ 和

$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\overline{Y_n})^2).$$

5.一家店铺在一定时间内的客流量 N~Poisson(λ). 假设每个顾客有 p 的概率买走一件货物，1-p 的概率什么都不买. 记此段时间内卖出的货物数量为 X，求：

(i)P(X=0).

(ii)P(X=k), $k\in\mathbf{N}_+$.

(iii)E(X).