线性代数 02班 12112627李乐平 $\beta\alpha^T=[2]$

1.(1) $\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\-2a_{11}+a_{21}&-2a_{12}+a_{22}&-2a_{13}+a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&b_{14}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&b_{24}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}&b_{34}\\b_{41}&b_{42}&b_{43}&b_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&3&0&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}+3b_{14}&b_{13}&b_{14}\\b_{21}&b_{22}+3b_{24}&b_{23}&b_{24}\\b_{31}&b_{32}+3b_{34}&b_{33}&b_{34}\\b_{41}&b_{42}+3b_{44}&b_{43}&b_{44}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{21}&a_{23}&a_{22}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{2021}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-4042&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}^{2021}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

∴原式 $=\begin{bmatrix}a_{13}&a_{12}&a_{11}\\-4042a_{13}+a_{23}&-4042a_{12}+a_{22}&-4042a_{11}+a_{21}\\a_{33}&a_{32}&a_{31}\end{bmatrix}$

2.(1) $B^2=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ $B^3=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$B^4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\\vdots&&&0&0\\\vdots&&&&0\\&&&&0\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{bmatrix}$ $B^n=0\ (n\geq5)$.

(2) $A^k=\begin{bmatrix}\lambda^k&C_k^1\lambda^{k-1}&C_k^2\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&C_k^1\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{bmatrix}\ (k\geq2)$.

3. $A^n=(\alpha^T\beta)^n$

$=\alpha^T(\beta\alpha^T)^{n-1}\beta$

$=2^{n-1}\alpha^T\beta=2^{n-1}\begin{bmatrix}2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\4&-1&\frac{2}{3}\\6&-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$

4. $\because A^2+A-5E=0$

$\therefore (A^2+A-5E)A^{-1}=0.$

$\therefore A+E-5A^{-1}=0$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{5}(A+E)$

同理. $\because A^2+A-5E=0.$

$\therefore (A+2E)^2-3(A+2E)-3E=0.$

$A+2E-3E=3(A+2E)^{-1}$

$\therefore (A+2E)^{-1}=\frac{1}{3}(A-E)$

5(1) $x^TAx=\left[\sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n x_ja_{ji}\right]$

$=\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_ja_{ij}\right]=[0]$ (因A为反对称矩阵)

(2) $\cancel{(x^TAx)^T=x^TA^Tx=0\quad 而\ x^TAx=0}$

因x的任意性. 考虑控制变量法。

① 不妨设 $x=[1\ 0\ 0]^T$.

则 $x^TAx=[1\,0\,0]A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=a_{11}=0$

同理可知 $a_{22}=a_{33}=0$.

② 不妨设 $x=[1\ 1\ 0]^T$.

则 $x^TAx=[1\ 1\,0]A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=a_{12}+a_{21}=0.$

同理可知 $\forall i\neq j$. $a_{ij}+a_{ji}=0$

综上可证明A为反对称矩阵。