线性代数 02班 12112627 李乐平

Week 13.

5.5

17. 这是因为

$(UV)^H UV = V^H U^H U V$
$= V^H V$
$= I.$

$\therefore UV$ 是酉矩阵.

19. $U=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{i}{\sqrt2} & a \\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & b \\ \frac{i}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & c \end{bmatrix}$

$U^H U=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} & \frac{-i}{\sqrt3} \\ -\frac{i}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2} \\ \bar a & \bar b & \bar c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{i}{\sqrt2} & a \\ \frac{1}{\sqrt3} & 0 & b \\ \frac{i}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt2} & c \end{bmatrix}.$

$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt3}(a+b)-\frac{i}{\sqrt3}c \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt2}c-\frac{i}{\sqrt2}a \\ \frac{1}{\sqrt3}(\bar a+\bar b)+\frac{i}{\sqrt3}\bar c & \frac{1}{\sqrt2}\bar c+\frac{i}{\sqrt2}\bar a & \bar a a+\bar b b+\bar c c \end{bmatrix}.$

$\therefore \begin{cases} \frac{1}{\sqrt3}(a+b)-\frac{i}{\sqrt3}c=0. \\ \frac{1}{\sqrt2}c-\frac{i}{\sqrt2}a=0 \\ |a|^2+|b|^2+|c|^2=0. \\ \frac{1}{\sqrt3}(\bar a+\bar b)+\frac{i}{\sqrt3}\bar c=0. \\ \frac{1}{\sqrt2}\bar c+\frac{i}{\sqrt2}\bar a=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} b=-2a \\ c=ia. \end{cases}$

Assume $a=\frac{1}{\sqrt6}.$

Then $b=-\frac{2}{\sqrt6}.\ c=\frac{i}{\sqrt6}.$

Degree of Freedom = 1.

because b and c is dependent with a.
while a is independent.

30. 正交. 可逆. ~~Hermitian~~. Unitary.
可QR分解.

35.

A的特征值为

$\lambda_1=-1. \Rightarrow v_1=\begin{bmatrix} i-1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

$\lambda_2=2 \Rightarrow v_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$

$\therefore A=\begin{bmatrix} i-1 & 1 \\ 1 & 1+i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & \\ & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1-i & 1 \\ 1 & 1-i \end{bmatrix}\cdot\frac13$

$A=\begin{bmatrix} \frac{i-1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1+i}{\sqrt3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1-i}{\sqrt3} \end{bmatrix}.$

K的特征值为

$\lambda_1=2i \Rightarrow v_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}.$

$\lambda_2=-i \Rightarrow v_2=\begin{bmatrix} i+1 \\ -1 \end{bmatrix}.$

$K=\begin{bmatrix} 1 & i+1 \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}\cdot\frac13$

$=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1+i}{\sqrt3} \\ \frac{1-i}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1+i}{\sqrt3} \\ \frac{1-i}{\sqrt3} & -\frac{1}{\sqrt3} \end{bmatrix}$

46. $\because A+iB$ 为酉矩阵

$\therefore (A+iB)^H(A+iB)=(A^TA+B^TB)=I.$

$Q^TQ=\begin{bmatrix} A^T & B^T \\ -B^T & A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} A^TA+B^TB & 0 \\ 0 & B^TB+A^TA \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}=I.$ $\therefore Q$ 为正交矩阵.

47. $(A+iB)^H=(A^T-iB^T)=A+iB.$

A, B 为实矩阵 $\Rightarrow B=0.\ A^T=A.$

$\therefore Q$ 对称.

5.6.

2. 所有特征值为1, −1的矩阵.

如 $\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\end{bmatrix}$.

4. $M=\begin{bmatrix}1&&\\&-1&\\&&1&\\&&&-1\end{bmatrix}$.

5. ~~AB~~ ∵ B 可逆.

∴ $B^{-1}(BA)B = AB$.

∴ BA 与 AB 相似.

6. (a) ∵ $CD=-DC$.

∴ $D^{-1}CD=-C$.

∴ C 与 $-C$ 相似.

(b) 这是因为 C 与 $-C$ 有相同的特征值.

(c). ∵ $Cx=\lambda x$.

$CD=-DC$.

∴ $C(Dx) = -DCx$

$= -D\lambda x$

$= -\lambda Dx$.

10. (a) $V_1 = v_1 - v_2$.

$V_2 = 0v_1 + v_2$.

∴ $M=\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}$

(b) $c_1V_1+c_2V_2=$

$c_1(m_{11}V_1+m_{21}V_2)+c_2(m_{12}v_1+m_{22}V_2)$

$=(m_{11}c_1+m_{12}c_2)v_1+(m_{21}c_1+m_{22}c_2)v_2$

$= d_1v_1+d_2v_2$.

15. $R=\begin{bmatrix}1&&&\\&&1&\\&1&&\\&&&1\end{bmatrix}$. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$, $\lambda_4=-1$.

$\lambda=1$ 时.

特征向量为 $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$

$\lambda=-1$ 时 特征向量为 $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$.

16. (a) $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\0&-\frac{2}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\end{bmatrix}$.

(b) $x_1=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$ $x_2=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$

$q_1q_1^T+q_2q_2^T=\begin{bmatrix}\frac12&-\frac12&0\\-\frac12&\frac12&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac16&\frac16&-\frac26\\\frac16&\frac16&-\frac26\\-\frac26&-\frac26&\frac46\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac23&-\frac13&-\frac13\\-\frac13&\frac23&-\frac13\\-\frac13&-\frac13&\frac23\end{bmatrix}$

$x_1x_1^T+x_2x_2^T=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac12&-\frac12\\0&-\frac12&\frac12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac23&-\frac13&-\frac13\\-\frac13&\frac16&\frac16\\-\frac13&\frac16&\frac16\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac23&-\frac13&-\frac13\\-\frac13&\frac23&-\frac13\\-\frac13&-\frac13&\frac23\end{bmatrix}=q_1q_1^T+q_2q_2^T$

22. $A=\begin{bmatrix}5&-3\\4&-2\end{bmatrix}$

$\lambda_1=1 \Rightarrow q_1=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$.

$\lambda_2=2 \Rightarrow q_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

$u_1=\begin{bmatrix}\frac35\\\frac45\end{bmatrix}$ $b_2=q_2-u_1u_1^Tq_2=\begin{bmatrix}\frac{4}{25}\\-\frac{3}{25}\end{bmatrix}$.

$u_2=\begin{bmatrix}\frac45\\-\frac35\end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix}\frac35&\frac45\\\frac45&-\frac35\end{bmatrix}$

$U^{-1}AU=\begin{bmatrix}\frac35&\frac45\\\frac45&-\frac35\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-3\\4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac35&\frac45\\\frac45&-\frac35\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\frac{31}{5}&-\frac{17}{5}\\\frac85&-\frac65\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac35&\frac45\\\frac45&-\frac35\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&7\\0&2\end{bmatrix}$.

$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$. $\lambda_{1,2,3}=0$.

$V=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. $u_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ $u_2=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ $u_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

$U=\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\1&&\end{bmatrix}$ $U^{-1}AU=\begin{bmatrix}&&1\\1&&\\&1&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\\&&\\1&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\1&&\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\1&&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

24. (a) 设 $T=\begin{bmatrix}a&u&v\\&b&w\\&&c\end{bmatrix}$.

$(T-\lambda_1I)(T-\lambda_2I)(T-\lambda_3I)=$

$\begin{bmatrix}0&u&v\\0&b-a&w\\0&0&c-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a-b&u&v\\0&0&w\\0&0&c-b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a-c&u&v\\0&b-c&w\\0&0&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&0&uw+v(c-b)\\0&0&w(c-a)\\0&0&(c-a)(c-b)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a-c&u&v\\&b-c&w\\&&\end{bmatrix}$.

$=0$.

(b) $A=UTU^{-1}$

右式左乘 U^{-1}. 得

$(T-\lambda_1)(T-\lambda_2)(T-\lambda_3)U^{-1}$

$=0U^{-1}=0$.

30. 略.

33. (a) $M^{-1}AMM^{-1}x$

$=M^{-1}Ax=0$.

(b) 这是因为 M^{-1} 可逆.

∴ $\dim N(M^{-1}AM)=\dim(A)$.

39. 无需作答

41. (a) 正确. 因其无0特征值.

(b) 错误 如 $\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$

(c) 错误 如 $\begin{bmatrix}&1\\1&\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}&-1\\-1&\end{bmatrix}$.

(d) 正确.

42. $|A||BA-\lambda I|=|AB-\lambda I||A|$.

∴ $|BA-\lambda I|=|AB-\lambda I|$.

∴ $|AB-\lambda I|=0$ 与 $|BA-\lambda I|=0$ 同解.

∴ AB, BA 有相同特征值(A 非可逆).

44. (a) $MAM^{-1}MAM^{-1}=MA^2M^{-1}=B^2$.

(b) 如 $\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1&\\&-1\end{bmatrix}$. (c) 显然

(d) ∵ $\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}$ 无法对角化.