线性代数 02班 12112627 李乐平

Week 9 补充题.

1. 设 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix}-1\\4\\4\\-1\end{bmatrix}$ $\alpha_3=\begin{bmatrix}4\\-2\\2\\0\end{bmatrix}$.

令 $q_1=\alpha_1=[1\ 1\ 1\ 1]^T$

$q_2=\alpha_2-\frac{\alpha_2^Tq_1}{\|q_1\|^2}q_1=[-\frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\ -\frac{5}{2}]^T$

$q_3=\alpha_3-\frac{\alpha_3^Tq_1}{\|q_1\|^2}q_1-\frac{\alpha_3^Tq_2}{\|q_2\|^2}q_2=$

$\begin{bmatrix}4\\-2\\2\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}+\frac{2}{5}\begin{bmatrix}-\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\-\frac{5}{2}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2\\-2\\2\\-2\end{bmatrix}$.

$e_1=\frac{q_1}{\|q_1\|}=[\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}]^T$

$e_2=\frac{q_2}{\|q_2\|}=[-\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}]^T$

$e_3=[\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}]^T$

$\therefore Q=\begin{bmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\alpha_1=2e_1$. $\alpha_2=3e_1+5e_2$.

$\alpha_3=2e_1-2e_2+4e_3$.

$\therefore R=\begin{bmatrix}2&3&2\\0&5&-2\\0&0&4\end{bmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix}1+x&2&3\\2&1+x&2\\3&3&1+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&2&3\\0&1+x&2\\2-x&3&1+x\end{vmatrix}$

$=(x-2)\left[(1+x)^2-6-4+3(1+x)\right]$

$=(x-2)\left[(1+x)^2+3(1+x)-10\right]=0$.

$\therefore x=2$ 或 $x=-1+\frac{-3\pm7}{2}$

$\therefore x=2$ 或 $x=1$ 或 $x=-6$.

3. $\because A,B$ 为正交矩阵.

$\therefore |A|=\pm1$. $|B|=\pm1$. ($\because A^TA=I$).

而 $|A|+|B|=0$. $\therefore |A|=-|B|$.

$\therefore |A^T||B^T||A+B|=-|A+B|$

$=|A^TAB^T+A^TBB^T|=|(B+A)^T|$

$=|A+B|$ $\therefore |A+B|=-|A+B|=0$

4. (1).

$\begin{vmatrix}-1&1&1&1\\2&-1&3&-2\\4&1&-1&-2\\-3&1&5&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&1&1\\0&1&5&0\\0&5&3&2\\0&-2&2&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&1&1\\0&1&5&0\\0&0&-22&2\\0&0&12&-4\end{vmatrix}$

$=-~~(44+24)=-20~~$.

$-(88-24)=-64$.

(2) $\begin{vmatrix}0&a_1&b_1&0\\a_2&0&0&b_2\\a_3&0&0&b_3\\x&a_4&b_4&y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&0&0\\0&0&a_2&b_2\\0&0&a_3&b_3\\a_4&b_4&x&y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&0&0\\a_4&b_4&x&y\\0&0&a_2&b_2\\0&0&a_3&b_3\end{vmatrix}$

$=(a_1b_4-b_1a_4)(a_2b_3-b_2a_3)$

(3) $D_3=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}a_{i(n+1-i)}$

(4) $D_4\overset{R_3-R_2}{=}\begin{vmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&\cdots&1+x_1y_n\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&\cdots&1+x_2y_n\\(x_3-x_2)y_1&(x_3-x_2)y_2&\cdots&(x_3-x_2)y_n\\\vdots&&&\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&\cdots&1+x_ny_n\end{vmatrix}$

$\overset{R_2-R_1}{=}\begin{vmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&\cdots&1+x_1y_n\\(x_2-x_1)y_1&(x_2-x_1)y_2&\cdots&(x_2-x_1)y_n\\(x_3-x_2)y_1&(x_3-x_2)y_2&\cdots&(x_3-x_2)y_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\end{vmatrix}$

$=0$ (第2行/第3行为零或2,3行线性相关)

$(n>2)$