线性代数 02班 12112627 李乐平

Week3 补充题.

1.(1) 这是因为 $B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}B = I$.

$\therefore AB$ 可逆且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(2) A 初等行变换 $\Leftrightarrow$ EA $\because$ E 可逆, A 可逆.

由(1)知 EA 可逆. 进行若干次亦然.

(3) ~~原理:任意矩阵均可由若干初等~~

原理: $[A \,\vdots\, I] \to [E_n \cdots E_2E_1A \,\vdots\, E_n \cdots E_2E_1 I]$

$\to [I \,\vdots\, E_n \cdots E_2E_1] = [I \,\vdots\, A^{-1}]$.

其中. E_i 为初等矩阵.

(4). 因可逆矩阵经过若干次初等变换后可得到单位矩阵.

2.(1). $\because 2B^T(A^T)^{-1} = B^T - 4I$.

$\therefore I = \frac{1}{4}B^T(I - 2(A^T)^{-1})$.

$I^T = \frac{1}{4}(I - 2(A^T)^{-1})^T B$

$= \frac{1}{4}(I - 2(A^T)^{-1\,T})B = I$.

$\therefore B$ 可逆.

$\because 2B^T(A^T)^{-1} = B^T - 4I$

$\therefore 2A^{-1}B = B - 4I$.

$\therefore 2A^{-1}B = B - 4I$

$2B = AB - 4A$

$A = \frac{1}{4}B(A - 2I)$.

$I = \frac{1}{4}A^{-1}B(A - 2I)$.

$\therefore A - 2I$ 可逆. 且 $(A - 2I)^{-1} = \frac{1}{4}A^{-1}B$.

(2) 由(1).易知 $B - 4I = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

$(B - 4I)^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$A = 2B(B - 4I)^{-1}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3.(1)

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & a^2 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & a_2 & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}$ $(a_i \neq 0, \forall i)$

4.(1)

$(I - uv^T)(I + \frac{1}{k}uv^T) = I - uv^T + \frac{1}{k}uv^T - \frac{1}{k}uv^Tuv^T$

$= I + \left(\frac{1 - v^Tu}{k} - 1\right)uv^T$

$= I$.

$\therefore k = 1 - v^Tu$.

(2) 由题及(1).

$\because M = A - uv^T$. A^{-1} 已知. $\therefore A^{-1}M = I - A^{-1}uv^T$

由(1)易知 $(I - A^{-1}uv^T)^{-1} = \left(I + \frac{1}{1 - v^TA^{-1}u}A^{-1}uv^T\right)$

$\therefore M^{-1} = \left(I + \frac{A^{-1}uv^T}{1 - v^TA^{-1}u}\right)A^{-1} = A^{-1} + \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 - v^TA^{-1}u}$.

(3) 令 $A = -I$ $u = [-1\ -1 \cdots -1]^T$ $v^T = [1\ 1 \cdots 1]$.

则 $B = A - uv^T$

$\therefore B^{-1} = A^{-1} + \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 - v^TA^{-1}u} = -I + \frac{uv^T}{1 - n} = -I + \frac{uv^T}{1 - n}$.

$= \begin{bmatrix} \frac{2-n}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1} & \frac{2-n}{n-1} \end{bmatrix}$

5. 证: 考虑一个 2×2 的上三角矩阵 $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$, 其逆为 $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$ 仍为上三角矩阵.

现考虑一个一般的上三角矩阵 $N = \begin{bmatrix} A_{2\times2} & B \\ 0 & D \end{bmatrix}$ (A, D 均为上三角矩阵) 其逆为 $\begin{bmatrix} A_{2\times2}^{-1} & M \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$ 我们已经知道 $A_{2\times2}^{-1}$ 为上三角矩阵. $\therefore$ 仅需证明 D^{-1} 也为上三角矩阵即可. 因为 D 也为上三角矩阵. 若 D 为 1×1 或 2×2 的方阵, 立知 D^{-1} 为上三角矩阵. 而若 D 为 $n\times n$ $(n\geq3)$ 则可同样对其作与 N 相同的分割求逆. 由数学归纳法可知 D^{-1} 为上三角矩阵. $\therefore N^{-1}$ 为上三角矩阵 $\therefore$ n 阶可逆的上三角矩阵的逆仍为上三角矩阵. QED.