线性代数 02班 12112627 李乐平

Week 1 附加题.

1. 化为增广矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-\lambda R_1]{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda-\lambda^2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{bmatrix}.$$

① $\lambda=1$ 时. ~~矩阵变为~~ 化为 $x_1+x_2+x_3=1$. 有无穷解.

② $\lambda\neq 1$ 时. 化简得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & 1+\lambda & 1+\lambda+\lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 2+\lambda & (1+\lambda)^2 \end{bmatrix}$

Ⅰ. $\lambda=-2$ 时. 第三行无主元. 无解.

Ⅱ. $\lambda\neq-2$ 且 $\lambda\neq1$ 时. 有唯一解.

2. 化为增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-5R_1]{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & a-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & b \end{bmatrix}$$

此时 R_2. R_3. R_4 系数成倍数关系. 要使方程有解. 当且仅当 $\begin{cases} a=0 \\ b=-3. \end{cases}$

3. 充要条件: $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$

4. 化为增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 11 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{回代}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{16}{3} \\ b=\frac{4}{3} \\ c=-\frac{11}{3}. \end{cases}$$

5.(i) 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 则 $A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 观察可知 $a^2=d^2$

① 若 $a=d$. 易推出 ~~$a=b=c=d=0$~~ $b.c$ 中有一为0, $a=d=0$.

② 若 $a=-d$. 易知 $a=\pm\sqrt{-bc}$. $d=\mp\sqrt{-bc}$ 若 $bc=0$. 与①相同.

$\Rightarrow$ 符合条件的矩阵为 $\begin{bmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{bmatrix}$ $b.c\in R$, $bc\leq 0$.

(ii) 设 $X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. $XA=B \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ 3a+5b=6 \end{cases}$ $\begin{cases} c+2d=1 \\ 3c+5d=4 \end{cases}$ $\Rightarrow X=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$