线性代数 02班 12112627 李乐平

2.6.7.

(1) 所求矩阵

$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0&-1\\0&0\end{bmatrix}$

(2) 所求矩阵

$B=\begin{bmatrix}0&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$

15.

$T(e_1)=e_1$

$T(e_2)=e_3$

$T(e_3)=e_2$

$T(e_4)=e_4$

$\therefore A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$\because (M^T)^T=M$.

$\therefore A^2=I$ 一定成立.

34.

(a) 成立. 由15题可知.

(b) 成立.

(c) 成立.

(d) 不成立. 如 $\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}^T=-\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

44.

$T(v)=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}v$

$S(v)=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}v.$

$S(T(v))=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}v=\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}.$

ST: 关于原点的对称变换.

3.1.1.

$\|x\|=\sqrt{21}$ $\|y\|=3\sqrt{2}$.

$\langle x,y\rangle=0.$

4. 这是因为 $BB^{-1}=I$.

$\therefore i\neq j$ 时, ~~$R_i(B)$ $C_j(B^{-1})$~~

$\langle R_i(B), C_j(B^{-1})\rangle=0$

$\therefore$ B的第i行与 B^{-1} 第j列正交。

7. $R(A)=\text{Span}\{(1,2,1),(2,4,3)\}$.

$x=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$ 满足题意.

$C(A)=\text{Span}\{(1,2,3),(1,3,4)\}$

$y=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ 满足题意.

$N(A)=R(A)^{\perp}=\text{Span}\{(-2,1,0)\}$

$\therefore z=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ 即满足题意.

10.

~~3x+y-z~~

$x+y-z=0.$

即符合题意.

12.

$N(A)=\text{Span}\{(-2,-2,1)\}$.

$\therefore x=(1,1,4)+(2,2,-1)$

$(1,1,4)\subset R(A)$

$(2,2,-1)\subset N(A)$.

21. $P=\text{Span}\{(2,-1,0),(1,0,1)\}$.

$v=(1,2,-1)\perp P$.

$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ $R(A)=P$.

$B=\begin{bmatrix}1&2&-1\end{bmatrix}$ $N(A)=P$.

23.

给出非对称矩阵 $\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$

$(1,1)\subset R(A)$ $(1,-1)\subset N(A)$

$(1,0)\subset C(A)$ $(0,1)\subset N(A^T)$.

$(1,1)\perp(1,-1)$ $(1,0)\perp(0,1)$

25.

(a) $\begin{bmatrix}1&2&-3\\2&-3&1\\-3&5&-2\end{bmatrix}$ 符合题意.

(b) 不存在. 因为 $(2,-3,5)$ 不与 $(1,1,1)$ 正交.

(c) 不存在.

因为若 $Ax=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 有解.

A必满秩. 则 $N(A)=\text{Span}\{(0,0,0)\}$.

$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\notin N(A)$, 而 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\in N(A)$, 矛盾.

(d). $\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$

(e) 不存在.

这是因为一个矩阵所有元素之和不可能既等于0又等于m×n.

35. $\begin{bmatrix}5\\6\\5\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$

$\therefore$ 其既在C(A)内又在C(B)内.

36. $p+q>n$ 时. 可保证

$V\cap W\setminus\{0\}\neq\emptyset$.

42.

$S^{\perp}=\text{Span}\{(-10,1,1,2),(0,1,-1,0)\}$.

$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\1&3&3&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$.

基础解系即为 $(-10,1,1,2)$,

$(0,1,-1,0)$

49(a) 一个平面不能仅由一个向量张成.

推导过程错误、结论亦错.

(b) 在五维空间内. 二维子空间的正交补应为三维.

(c) 还需要其中的向量也正交.

如两条夹角非直角的直线不正交。

51. $\because AB=0.$

$\therefore$ B ~~的列向量~~

$C(B) \subset N(A).$

$R(A) \perp N(A).$

$\therefore \operatorname{rank} A = \dim R(A).$

$\because \dim C(B) \le \dim N(A) = 4-\operatorname{rank} A.$

$\operatorname{rank} B = \dim C(B).$

$\therefore \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B \le 4.$

3.2.1. (a).

$\langle b, a\rangle = 2\sqrt{xy} \le \|a\|\|b\| = x+y.$

$\therefore \frac{1}{2}(x+y) \ge \sqrt{xy}.$

(b). $\because \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

$\therefore \|(x+y)^T(x+y)\| \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2.$

$\therefore \|x^Tx + y^Tx + x^Ty + y^Ty\|$

$= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$

$\therefore \langle x, y\rangle \le 2\|x\|\|y\|$

3. $\frac{a^Tb}{a^Ta} = \frac{10}{3}$ a的$\frac{10}{3}$倍离b最近.

最近的点为 $(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3})$.

17(a) $p = \frac{aa^T}{a^Ta} b = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

$e = b - p = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$\langle e, a\rangle = 0.$ $\therefore e \perp a.$

(b) $p = \frac{aa^Tb}{a^Ta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\langle e, a\rangle = 0.$ $e \perp a$

24. $\operatorname{Proj}_{a_1}(b) = \frac{a_1 a_1^T b}{a_1^T a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$\operatorname{Proj}_{a_2}(b) = \frac{a_2 a_2^T b}{a_2^T a} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} \end{bmatrix}.$