Week 7. 线性代数 补充题 12112627 李乐平

1: 与 Week 6 重复.

2. (a). $T(A)=A+A^T=\begin{bmatrix}2a & b+c\\ b+c & 2d\end{bmatrix}$.

$T(kA+l\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}2ak+2el & k(b+c)+(f+g)l\\ k(b+c)+(f+g)l & 2kd+2lh\end{bmatrix}$

$=kT(A)+lT(\begin{bmatrix}e & f\\ g & h\end{bmatrix})$.

∴ T 是线性变换.

(b) $T(b_1)=2b_1$

$T(b_2)=b_2+b_3$

$T(b_3)=b_3+b_2$.

$T(b_4)=2b_4$.

∴ $R=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$.

3. 因为 $w_1,\cdots,w_{n-m}$ 线性无关

所以方程

$x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_{n-m}w_{n-m}=0$

只有零解.

现考虑方程 $Aw_j=0$.

∴ $\forall w_j$ 与 v_i 正交. $\forall w_j$ 不能由 V 的线性组合表示

考虑 w 与 v_1 的线性关系.

假设 $x_0v_1+x_1w_1+\cdots+x_{n-m}w_{n-m}=0$.

∵ w_j 与 v_1 正交.

∴ $\langle v_1, x_0v_1+x_1w_1+\cdots+x_{n-m}w_{n-m}\rangle$

$=x_0\langle v_1, v_1\rangle=0$.

∴ $x_0=x_1=\cdots=x_{n-m}=0$.

∴ $\forall v_i$ 无法由 w 的线性组合表示.

现考虑方程

$x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_mv_m+x_{m+1}w_1+\cdots+x_nw_{n-m}=0$.

若有非零解. 则有

$x_1v_1+x_2v_2+\cdots+x_mv_m=-x_{m+1}w_1-\cdots-x_nw_{n-m}$.

两边同乘 A. 则得 $x_1Av_1+x_2Av_2+\cdots+x_mAv_m=0$

∵ $v_1\sim v_m$ 线性无关 ∴ $x_1=\cdots=x_m=0$. 而 $w_1\sim w_{n-m}$ 线性无关 ∴ $x_{m+1}=\cdots=x_n=0$ 矛盾! ∴ $v_1\sim v_m, w_1,\cdots,w_{n-m}$ 线性无关.