线性代数 12112627 李乐平 02班

1.4

24.

$E_{32}(-2)E_{31}(2)E_{21}(-4)A=U$

$U=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&-2\end{bmatrix}$

31. $E_{21}(\frac{1}{2})$; $E_{32}(\frac{2}{3})$; $E_{43}(\frac{3}{4})$

49. $\begin{bmatrix}I&0\\-CA^{-1}&I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}A&B\\0&-CA^{-1}B\end{bmatrix}$

$\therefore S=-CA^{-1}B$.

1.5

3. $\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

这是因为 $EFGG^{-1}F^{-1}E^{-1}$

$=EFF^{-1}E^{-1}$

$=EE^{-1}$

$=I$

$G^{-1}F^{-1}E^{-1}EFG$

$=G^{-1}F^{-1}FG$

$=G^{-1}G$

$=I$

8. (a) 这是因为生成第三行时，前两行已经消元变成了U的前两行.

(b) 第三行的每个元素都是L的第三行乘以U对应的列

11.

$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&4\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$

$=\cancel{\begin{bmatrix}2u+4v+4w\\v+2w\\w\end{bmatrix}}$

$\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2u+4v+4w\\v+2w\\w\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix}$

对于增广矩阵 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\1&1&0&0\\1&0&1&2\end{array}\right]$.

消元得 $\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\end{bmatrix}$.

$\therefore\begin{cases}2u+4v+4w=2\\v+2w=-2\\w=0\end{cases}$

回代得 $\begin{cases}u=5\\v=-2\\w=0\end{cases}$

12. 将每一行最右边的非零元作为主元进行类似高斯消元的变换即得下三角矩阵L. 前述变换所对应矩阵的逆矩阵即为上三角矩阵U.

通常而言，UL分解与LU分解所得U与L各不相同

15. 对于 $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\2&3&4\end{bmatrix}$ 需先左乘以 $P=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ 确保对角元非零

$PA=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$.

$E_{32}(\frac{3}{2})E_{31}(-\frac{1}{2})PA=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&1&1\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=DU$.

$\therefore L=E_{31}(\frac{1}{2})E_{32}(-\frac{3}{2})$

$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}$

$D_3(-2)D_1(\frac{1}{2})DU=U=\begin{bmatrix}1&\frac{3}{2}&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

$D=D_1(2)D_3(-\frac{1}{2})=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$\therefore PA=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{3}{2}&2\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2&3&4\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$.

(续15题)

同理，可按相同步骤对 $PA=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&1\\2&4&2\end{bmatrix}$ 进行LDU分解

得 $L=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}$

$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$U=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

其中 $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&1&1\end{bmatrix}$

在此略去验算过程。

29. 对A进行~~高斯消元~~LU分解可得上三角矩阵

$U=\begin{bmatrix}a&a&a&a\\0&b-a&b-a&b-a\\0&0&c-b&c-b\\0&0&0&d-c\end{bmatrix}$.

为使之有四个主元，给出的四个条件为 $\begin{cases}a\neq0\\b\neq a\\c\neq b\\d\neq c.\end{cases}$

40. (1.3.4.2) (1,4,2,3)
(2.1.4.3) (2,3,1.4)
(2,4,1.3) (3,1,2.4)
(3,2,4,1) (3,4,1,2)
(4.1.3,2) (4,2,1,3)

43. 上三角: $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ (2.3行交换)

下三角: $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ (2.3行交换) $P_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ (1.3列交换)

AP_2是交换A的1.3列.

45. 解释：对于任意置换矩阵，以左乘为例，每一行变换后仅有唯一对应的行，同时也仅有唯一的行会变换后补至该行。因为行数有限，所以最多经过n轮变换后，所有行都至少回到原处过一次，即每一行都有最大周期n，则所有行回至原处周期的最小公倍数m必有$P^m=I$.

对于 $P=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\end{bmatrix}$

1、2行周期为2; 3.4.5行周期为3，最小公倍数6

$\therefore P^6=I$.

1.6

16.

(a)

$A = LDU$

$A^T = (LDU)^T$

$= U^T D^T L^T$

$= U^T D L^T$.

(b) 由(a)问可知

$A^T y = b$ 求解的三角系统为

$L^T y = b$

17. 证：因上三角矩阵的逆仍为上三角矩阵.

下三角矩阵的逆仍为下三角矩阵.

$\because A = L_1 D_1 U_1 = L_2 D_2 U_2$. 同左乘 L_1^{-1}, 右乘 U_2^{-1}.

$\therefore D_1 U_1 U_2^{-1} = L_1^{-1} L_2 D_2$

等式左边为上三角. 右边为下三角.

$\therefore$ 等式两边均为对角矩阵.

而显然 $U_1U_2^{-1}$, $L_1^{-1}L_2$ 的对角元全为1.

$\therefore$ 等式化为 $D_1 = D_2$.

$\therefore U_1 U_2^{-1} = I = U_2 U_2^{-1}$

$\therefore U_1 = U_2$. 同理 $L_1 = L_2$.

Q.E.D.

19. 由简单的计算, 易知

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而对于 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ $\quad E_{21}(-\frac{b}{a}) A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{b^2}{a} \end{bmatrix}$

$\therefore L = E_{21}(\frac{b}{a}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix}$. $\quad D = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{b^2}{a} \end{bmatrix}$

$\therefore LDL^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d - \frac{b^2}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

20. 由题意，写为增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3 - \frac{1}{3}R_1 \\ R_4 - \frac{1}{2}R_1}]{R_2 - \frac{1}{4}R_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 - \frac{1}{2}R_2]{R_3 - \frac{1}{3}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 - \frac{1}{2}R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

36

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1/2} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 - R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \times \frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot \frac{3}{4}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - \frac{2}{3}R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{2}R_2} A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

45.

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}$$

设 $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 由 $M \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

解得 $M = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -D & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$$