线性代数 02班 12112627 李乐平

2.1

2. 仅需判断对应的向量间的运算是否具有封闭性. 加法 数乘.

∴(a) 是

(b) 否.

(c) 否

(d) 是.

(e) 是.

4. I. 考虑一个一般的对称阵$_{3\times3}$与一个一般的下三角阵$_{(3\times3)}$加和, 结果得一个一般的矩阵. 因此同时包含所有对称阵和下三角阵的最小子空间为 $\mathbb{R}^{3\times3}$

II. 对称阵: $S=\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}, a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}$

下三角阵: $L=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}, a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}\right\}$.

最大子空间 $= S\cap L = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

即全体对角阵。

9(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

非奇异 非奇异 奇异

∴ 非奇异矩阵加法不具有封闭性.

不构成~~子空间~~. 向量空间

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

奇异 奇异 非奇异.

∴ 奇异矩阵加法不具有封闭性.

不构成~~子空间~~. 向量空间

14.(a) $S_a=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

(b) $S_b=\left\{\begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

(c) $S_c=\left\{\begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a\in\mathbb{R}\right\}$.

(d) $S_d=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$.

17.

(a) $\mathbb{R}^2$ 自身, 直线, $Z=\{(0,0)\}$.

(b) 直线、平面、空间、$\mathbb{R}^4$ 自身.

$Z=\{(0,0,0,0)\}$

20.

(a) 构成. 以 2×2 矩阵为例.

$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{bmatrix}$.

$k\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ka \\ -ka & 0 \end{bmatrix}$.

(b) 不构成, ~~该空间~~ 非对称矩阵 不包含零矩阵.

(c) 构成. 对于矩阵 $A_{3\times3}=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$

$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$.

对于另一矩阵 $B_{3\times3}=[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]$ 满足

$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$. 二者加和.

$A+B$ 仍满足 $(A+B)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=0$.

同时 $kA\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=k\cdot 0=0$. 亦成立。

22. (a) $b_1=\frac{1}{2}b_2=-b_3$

(b) 1.3行线性相关. 1,2线性无关.

给出的条件为 $b_1=-b_3$

25. $b\in C(A)$

例子1: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 列空间变大

例子2: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 列空间不变.

若 $[A\ b]$ 列空间大于 $[A]$ 说明 b 与 $C(A)$ 不相容. 此时 $Ax=b$ 无解. 即证。

28. (a) 错。因 $C(A)$ 中含零向量.

则不在 $C(A)$ 中的向量不包含零向量.

不构成子空间.

(b) 正确.

(c) 正确.

(d) 错误. 如 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

则 $A-I$ 的列空间仅包含零向量.

29.

I. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

II. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 列空间为一条直线.

31. 因为 $\mathbb{R}^2$ 中没有任何元素属于 $\mathbb{R}^3$, 这是因为 $\mathbb{R}^2$ 中的元素比 $\mathbb{R}^3$ 少一个维度。

2.2.

1. $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+b+c=1 \end{cases}$ 满足题意.

右端项改为零向量后, 写为

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2-R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

$\Rightarrow R_1x=0 \Rightarrow x=\begin{bmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{bmatrix}$.

7. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow{R_3-(R_1+R_2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & c-7 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c-7 \end{bmatrix}$.

$R_3 \Leftrightarrow c-7=0 \Leftrightarrow c=7$

∴ 解

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=1 \\ w=0. \end{cases}$

10. 由题知.

$x=\begin{bmatrix} 1+w \\ 2+3w \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$ w是一个自由变量.

∴ 可列式 $\begin{cases} u=w+1 \\ v=3w+2. \end{cases}$ 变换得

$u-w=1$

$v-3w=2$.

∴ 符合题意的 A, b 分别为

$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3=R_1+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

∴ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 即为所求

15. 考虑方程 $\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=0$

得 $\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1+\sum_{i=r+1}^{n} x_i F_{1i} \\ x_2+\sum_{i=r+1}^{n} x_i F_{2i} \\ \vdots \\ x_r \sum_{i=r+1}^{n} x_i F_{ri} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}=0.$

$\therefore x_{r+1},\cdots x_n$ 为自由变量.

$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$= x_{r+1}\begin{bmatrix} -F_{1(r+1)} \\ \vdots \\ -F_{r(r+1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_{r+2}\begin{bmatrix} -F_{1(r+2)} \\ \vdots \\ -F_{r(r+2)} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n\begin{bmatrix} -F_{1n} \\ \vdots \\ -F_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

$\therefore N=\begin{bmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{bmatrix}.$

33. I. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ \frac{x+2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}=x\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$

II. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-3y \\ y \\ \frac{1}{2}-2t \\ t \end{bmatrix}=y\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

58. 显然

$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，y, z 是自由变量.

$A\vec{x}=0 \Rightarrow \vec{x}=\begin{bmatrix} 3y+z \\ y \\ z \end{bmatrix}=y\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

因此基础解系为 (3,1,0) 和 (1,0,1)

对于平面 $x-3y-z=12$.

有 $\begin{bmatrix} 3y+z+12 \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+y\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+z\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

即通解

62. 题意即

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 3 & b \\ 5 & 1 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases} 1+2a=0 \\ 4+2b=0 \\ 6+2c=0. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$

$\therefore$ 所求矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$