线性代数 02班 12112627 李乐平

1.2.

3. $\begin{bmatrix} 1&1&1&1&6\\ 1&0&1&1&4\\ 1&0&1&0&2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2-R_3]{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 0&1&0&0&2\\ 0&0&0&1&2\\ 1&0&1&0&2 \end{bmatrix}$

(1) 可见 v、z 的值确定，u、w 线性相关，故为一条线.

(2) $u=-1$ 可使 w 的值也确定，故为一个点.

(3) 如 $u+w=3$.

5. 任给 x 的值，可使 y 也唯一确定.

如 (0,1,0,0) (1,0,0,0)

6. $\begin{bmatrix} 1&1&1&2\\ 2&0&3&5\\ 3&1&4&7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1&1&1&2\\ 0&-2&1&1\\ 0&-2&1&1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1&3&0&1\\ 0&-2&1&1\\ 0&-2&1&1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u+3v=1 \\ -2v+w=1. \end{cases}$

任给 v 值，可唯一确定 u、w.

为不同于 (1,0,1)，可取 $v=1$.

得 (−2,1,3).

12. (1) (0,0) 代入 $x+4y=b$ 得 $b=0$.

故为 $x+4y=0$.

(2) 由两点式得 $x-3y=0$.

16. $\begin{bmatrix} 1&1&3&6\\ 1&-1&1&4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\cancel{R_2-R_1}]{R_1+R_2} \begin{cases} x+2z=5 \\ x-y+z=4. \end{cases}$

(1). $z=2 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow (1,-1,2)$.

(2) $z=0 \Rightarrow (5,1,0)$.

中点为 (3,0,1).

17. (1) 第三个方程，因其为~~最~~前二者的加和.

固定 y 值为 1，任取 3 个 x 值可确定 z 值.

3 个可行解为 (1,1,0) (2,1,−1) (3,1,−2).

20. (1) 一个点.

(2) 解 $x\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\3\\2\end{bmatrix}$

得 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \\ t=2. \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x+y+z+t=3 \\ y+z+t=3 \\ z+t=3 \\ t=2 \end{cases}$

21. 由高斯消元的过程易知，

方程加和时，除方程组的解未改变以外，

其余各项（行图中的平面，列图中的平面，系数矩阵）均改变了。

1.3.

2. $\begin{bmatrix} 2&3&1\\ 0&-6&6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2&3&1\\ 0&1&-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1-3R_2]{\text{回代}} \begin{bmatrix} 2&0&4\\ 0&1&-1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\text{化简}} \begin{bmatrix} 1&0&2\\ 0&1&-1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

验证：$x\begin{bmatrix}2\\10\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times2-3\\2\times10-9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\11\end{bmatrix}$

新解：观察可知，分别乘 4 即得新解 $\begin{cases} x=8 \\ y=-4. \end{cases}$

3. (1) 观察可知，需减去 $-\frac{1}{2}$ 倍.（加 $\frac{1}{2}$ 倍）.

(2) $\begin{bmatrix} 2&-4&6\\ -1&5&0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+\frac{1}{2}R_1} \begin{bmatrix} 2&-4&6\\ 0&3&3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{化简}} \begin{bmatrix} 1&-2&3\\ 0&1&1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[R_1+2R_2]{\text{回代}} \begin{bmatrix} 1&0&5\\ 0&1&1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$

(3) $\begin{bmatrix} 2&-4&-6\\ -1&5&0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1&-2&-3\\ 0&1&-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1&0&-5\\ 0&1&-1 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-1. \end{cases}$

6. (1) x.y 系数成比例时方程组奇异.

∴ $b=4$.

(2). 显然 仅当 $g=32$ 时 方程组可解.

(3) 任定 x. 可确定 y 值.

可行的两解为 (8. 0). (0. 4).

8. ① $k=3$ 时. 方程组无解.

② $k=0$ 时. 方程组仅有一解.

此时可行变换继续解得 $\begin{cases} x=-2 \\ y=2. \end{cases}$

③ $k=-3$ 时. 有无穷解.

10.
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 4 & 7 & 5 & 20 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3+2R_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{化简}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2-3R_3]{\text{回代}} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{回代}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=1. \end{cases}$$

13.
$$\begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) 当 $b=-2$ 时. 为求解之需将 2.3 行进行交换

(2) $b=-1$ 时. 第3行将全为0. 主元缺失.

有无穷解. 可得非零解 (1. 1. −1)

14. (a) 如 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{2.3 交换}]{\text{1.3 交换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bigg| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{回代}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1. \end{cases}$$

(b). 如 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{1.2 行交换}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$ 停止.

18. 线性方程组的解可视为若干n维空间的交集. 解为一个低维的空间. 除无解和唯一解的情况外. 其余情况均包含无穷多的点. 所以不可能恰好仅有2解.

(a). 易知 $\left(\frac{x+X}{2}, \frac{y+Y}{2}, \frac{z+Z}{2}\right)$ 亦为一解.

(b). 该两点连成的线上的所有点均为公共点.

20. 写为增广矩阵.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-3R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{4R_4+R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=-3 \\ t=4 \end{cases}$$

28. (a) 真。否则由此带来的第一个分量的变化无法消除.

(b) 假。若第一个分量不为0. 在消去的时候可能会引起第二个分量的变化.

(c) 真。理由与(a)相似.

31. a 取 2.0. 4 时. 将无法计算三个主