线性代数 12112627 李乐平

Week 12.

11. (a) 正确.

$\because |A| = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 2$.

(b) 错误.

如 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} = A$.

$\lambda=1$ 时, $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 几何重数为1.

而 λ的代数重数为2.

所以A不可对角化

(c) 错误.

如 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$. 显然可对角化.

12. ~~(a) 正确~~
~~(b) 正确~~
~~(c) 正确~~

(a) 错误. 如 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$.

(b) 错误, 如 $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ & 1 \end{bmatrix}$

(c) 正确.

17. $A = S\Lambda S^{-1}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & \\ & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

19. (a) 正确.

(b) 正确.

(c) 正确.

(d) 错误

23. $\lambda_{A1} = \lambda_{A2} = 1$

$\lambda_{B1} = \lambda_{B2} = 1$.

$\lambda_{A+B1} = 1 \quad \lambda_{A+B2} = 3$.

不等于.

24. 上题已给出 A, B 特征值.

$\lambda_{AB} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

$\lambda_{BA} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

AB的特征值等于

BA的.

25. (a) 正确

(b) 错误

(c) 错误.

30.

$\lambda_1 = 1$. $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 0.2$. $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$A = S\Lambda S^{-1}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & 0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}$.

$\Lambda^k \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $(k \to \infty)$.

$A^k \to \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}$. $(k \to \infty)$

含有属于特征值1的特征向量 $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

38. (I) 列空间.

(II). 解空间

40. 将此乘积乘以可逆矩阵 S^{-1}.

得 $S^{-1}(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_n I)$

$= (\Lambda S^{-1} - \lambda_1 S^{-1})(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_n I)$

$= \cdots$

$= (\Lambda-\lambda_1 I)(\Lambda-\lambda_2 I)\cdots(\Lambda-\lambda_n I)S^{-1}$

$= 0$.

$\therefore (A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_n I) = 0$.

5.5.

5. (a)

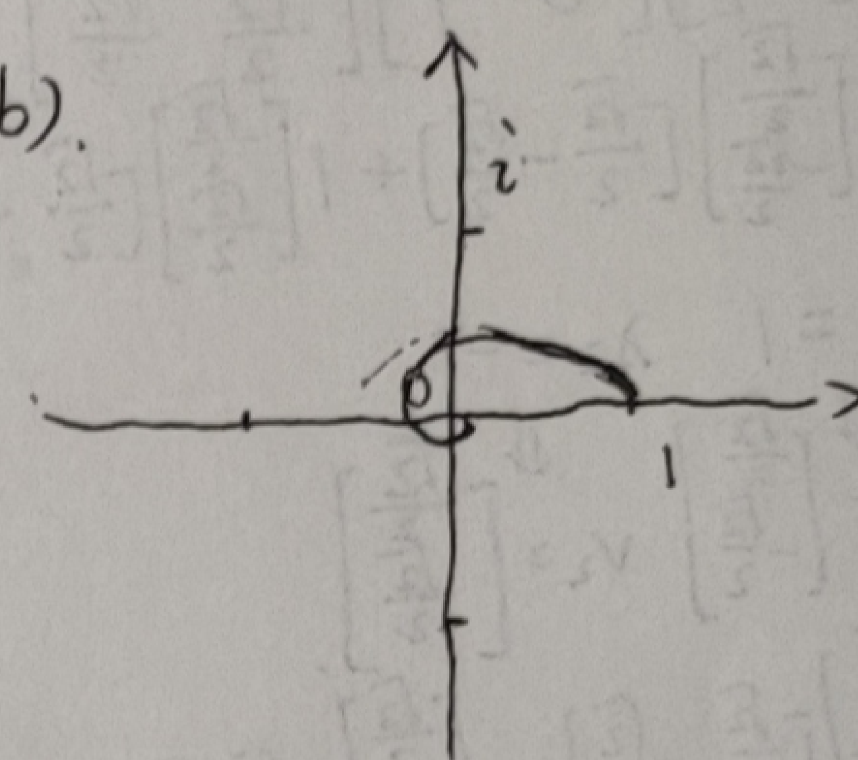
$x^2 = (r^2, 2\theta)$.

$x^{-1} = (\frac{1}{r}, -\theta)$.

$\bar{x} = (r, -\theta)$.

$x^{-1} = \bar{x} \Rightarrow r = 1$. 位于单位圆上.

(b).



7. $A^H = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A^H A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & i & -i \\ -i & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix} = C$.

$C^H = C$.

$C^H = (A^H A)^H$

$= A^H A^{H^H}$

$= A^H A = C$.

8. (a) $Ax = 0 \Rightarrow$

$\therefore x = a\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ i \end{bmatrix}$ $(a \in \mathbb{C})$

(b) 证明略.

9. (a) $|A^H| = \overline{|A|}$

(b) 证: $\because A^H = A$.

$\therefore |A^H| = \overline{|A|} = |A|$

$\therefore |A|$ 为实数.

11.

P: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$.

$$v_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}.$$

$$P=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix},$$

$$=0\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}.$$

Q: $\lambda_1=1$ $\lambda_2=-1$

$$v_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}.$$

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}.$$

R: $\lambda_1=5$ $\lambda_2=-5$.

$$v_1=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

$$R=5\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}\\-\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}$$

12. (a) 正确.

这是因为Hermitian矩阵的特征值一定为实数. $\therefore |A+iI|\neq 0$.

(b) 正确.

这是因为正交矩阵的特征值的模一定为1. $\therefore |A+\frac{1}{2}I|\neq 0$.

(c) 错误.

如 $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$ 的特征值为$\pm i$.

$\therefore |A+iI|=0$, 不可逆..

13. (a) u, v, w 线性无关, 且相互正交.

(b) $N(A)=\mathrm{Span}\{u\}$.
$C(A)=\mathrm{Span}\{v,w\}$.
$N(A^T)=\mathrm{Span}\{u\}$.
$R(A)=\mathrm{Span}\{v,w\}$

(c) $A(v+\frac{1}{2}w)=v+w$
$x=v+\frac{1}{2}w$. 唯一解.

(d) $b\in\mathrm{Span}\{v,w\}$时.

(e) $S^{-1}=S^T=\begin{bmatrix}u^T\\v^T\\w^T\end{bmatrix}$ $S^{-1}AS=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{bmatrix}$.

14. 包含A的有:

正交矩阵, 可逆矩阵, 置换矩阵, 可对角化矩阵, Markov矩阵.

包含B的有: 投影矩阵, 厄米特矩阵, 秩1矩阵, Markov矩阵.

A: $\lambda^4-1=0$
$\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$ $\lambda_3=i$ $\lambda_4=-i$.

B. $\lambda^4-\lambda^3=0$.
$\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$.