线性代数 02班 12112627 李乐平

1.4

1. (1)

$$\begin{bmatrix}4&0&1\\0&1&0\\4&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17\\4\\17\end{bmatrix}$$

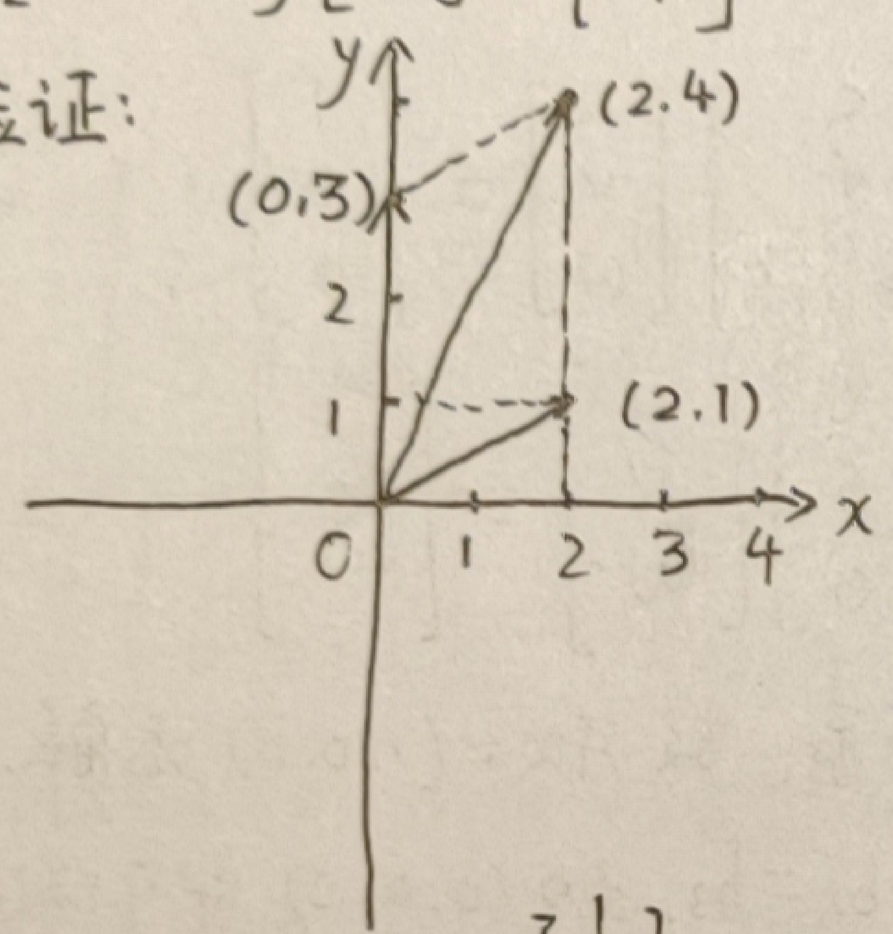
(2)

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\3\end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix}2&0\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$$

验证:



3. (1) $[1\ \ -2\ \ 7]\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\7\end{bmatrix}$

$=1\times1+(-2)\times(-2)+7\times7$

$=54$

(2) $[1\ \ -2\ \ 7]\cdot\begin{bmatrix}3\\5\\1\end{bmatrix}$

$=1\times3-2\times5+7\times1$

$=0$

(3) $\boxed{[1\ \ -2\ \ 7]}\ \boxed{\begin{bmatrix}3\\5\\1\end{bmatrix}}$

$$\begin{bmatrix}1\\-2\\7\end{bmatrix}[3\ 5\ 1]=\begin{bmatrix}3&5&1\\-6&-10&-2\\21&35&7\end{bmatrix}$$

6. $A=\begin{bmatrix}2&3\\3&4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}-1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

10. (a) 正确！由向量乘积的定义易知。

(b) 错误！如

$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

则 $AB=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{bmatrix}$

(c) 正确！同样由定义易知.

(d) 错误！如

$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

则 $A^2B^2=I_3$.

而 $(AB)^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\neq A^2B^2$.

13. (a) 设 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ $A^2=\begin{bmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&d^2+bc\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ 不妨取 $a=0.\ b=1.\ c=-1.\ d=0$

则可得出符合题意的例子 $A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

(b) 由(a)问知. 可令 $a=1$ $b=1$ $c=-1$ $d=-1$

即构造出满足题意的例子 $B=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$

(c) 如 $C=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

则 $CD=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$

$DC=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$

(续13)

(d) 如 $E=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ $F=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$

则 $EF=0$.

14.

EA的每一行相当于E中对应的行矩阵乘以A得到的行矩阵。

EA有2行。

AE的每一列相当于A乘以E中对应的列得到的列矩阵.

AE有2列.

15. ∵对任何B. 有AB=BA.

∴由 $AB_1=B_1A$. 设 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$

$AB_1=\begin{bmatrix}a&0\\c&0\end{bmatrix}$

$B_1A=\begin{bmatrix}a&c\\0&0\end{bmatrix}$ ∴ $c=0$

$AB_2=\begin{bmatrix}0&b\\0&d\end{bmatrix}$ $B_2A=\begin{bmatrix}0&0\\b&d\end{bmatrix}$

$AB_2=B_2A\Rightarrow$ $b=0$.

于是 $A=\begin{bmatrix}a&0\\0&d\end{bmatrix}$.

考虑矩阵 $B_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$.

则 $AB_3=\begin{bmatrix}a&a\\d&d\end{bmatrix}$ $B_3A=\begin{bmatrix}a&d\\a&d\end{bmatrix}$.

∴ $a=d$.

进而可知 $A=aI$

17. $(A+B)^2=$ $A(A+B)+B(A+B)$

$=A^2+AB+BA+B^2$.

故 2.3.4项均正确

19. 如 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$

$B=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$

$AB=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}[5\ 6]+\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}[7\ 8]$

$=\begin{bmatrix}5&6\\15&18\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}14&16\\28&32\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}19&22\\43&50\end{bmatrix}$

20.

$A(\theta_1)A(\theta_2)$

$$=\begin{bmatrix}\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2 & -\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2\\ \sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2 & -\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2)\\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2)\end{bmatrix}$$

$$=A(\theta_1+\theta_2)$$

$$A(\theta)A(-\theta)=A(0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

33.

$$\begin{cases}a+b+c=4\\ a+2b+4c=8\\ a+3b+9c=14.\end{cases}$$ 写为增广矩阵，并求解.

$$\begin{bmatrix}1&1&1&4\\1&2&4&8\\1&3&9&14\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&3&4\\0&2&8&10\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&3&4\\0&0&2&2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3/2}\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&3&4\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

回代解得 $\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=1\end{cases}$

42. (a) 正确. 因其列数与行数必须相等.

(b) 错误. 只需A的行数等于B的列数.
同时A的列数等于B的行数.

(c) 正确.

(d) 错误. 若B=0. 则A可为任意矩阵.

1.6

2. (a) I. $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ II. $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

由置换矩阵的几何意义容易求出。

(b) 考虑单位矩阵 $I=[\hat{i}\ \hat{j}\ \hat{k}]$ 及转置矩阵P. 对于P. 若其第a行第b列为1. 说明其作用为将I中第a列的向量换为第b列的向量. 自然想到. P^{-1} 中是前述操作的撤回. 故 $P^{-1}=P^T$ ∴ $PP^T=I$.

9. 假设 A^{-1} 存在且 AA^{-1} 第3行为 $[0\ 0\ 1\ 0]$.
不妨设 A^{-1} 第3行为 $[a\ b\ c\ d]$,
则有 $[a\ b\ c\ d]A=[0\ 0\ 1\ 0]$.

于是 $\begin{cases}2a=0\\ a+3b=0\\ 4a+8b=0\\ 6a+\cancel{7}5b+7c+9d=0.\end{cases}$ ⇒ 显然无解!

故 A^{-1} 不存在。A不可逆.

25. 不妨设A为方阵 $\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\a+d&b+e&c+f\end{bmatrix}$

则 $A\xrightarrow{R_3-R_2-R_1}\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\0&0&0\end{bmatrix}$ ∴A非满秩. 不可逆.

(a) 对于等式 $\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\a+d&b+e&c+f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

进行消元得 $\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$

⇒ $0w=-1$. 矛盾. 故 $Ax=(1,0,0)$ 无解.

(b) 仅需满足 $b_1+b_2=b_3$. 如 $(0,0,0)$ 即可保证方程组有解.

(c). 缺失主元。

53. (a)

$$x^TAy=[4\ 5\ 6]\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=[5].$$

(b) $[4\ 5\ 6]$

(c) $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$