

1. 求以下级数的收敛半径:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln n \cdot x^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} a^n x^{3n+1} \quad (a > 0);$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{2^n} x^n.$$

2. 证明: 在 \mathbf{R}^3 中, $\mathbf{F} = (xe^{-y} + e^{-x}, ye^{-z} + e^{-y}, ze^{-x} + e^{-z})$ 是旋度场, 并给出 \mathbf{F} 的一个向量势.

3. 按 $1-x$ 的正整数次幂展开 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$.

4. 设 a, b, c 都是正实数. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n}} - c^{\frac{1}{n}} + 1$ 在

(1) $a = bc$ 时绝对收敛;

(2) $a \neq bc$ 时发散.

5. 对正整数 n , 定义 $f_n(x) = \frac{\sin nx}{1+nx}$. 证明:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上不一致收敛;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[\delta, \frac{\pi}{2}]$ 上一致收敛, 其中 $\delta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

6. 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x \sin^3 x}{x+1} dx$ 收敛.

7. 设 $a_n = \int_0^{\pi} \sqrt{x} \cos nx dx$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 的值.

8. 求反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1-\cos x}{x} dx$ 的值.