线性代数 02班 12112627 李乐平

Week 14.

1. $f=(x+2y)^2-(\sqrt{2}y)^2$

3. $|A-\lambda I|=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0.$

$$\lambda=\frac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2}$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{a+c\pm\sqrt{4b^2+(a-c)^2}}{2}$$

∵ $ac>b^2$. $a>0$. $c>0$.

∴ $a+c>\sqrt{4b^2+(a-c)^2}$

∴ $\lambda_1>0$. $\lambda_2>0$.

5.(a) $\begin{vmatrix}1&b\\b&9\end{vmatrix}=9-b^2>0$

$-3<b<3$ 时 A正定.

(b) $A=\begin{bmatrix}1&\\b&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&9-b^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&b\\&1\end{bmatrix}$

(c) 取最小值时有

$$\begin{cases}x+by=0\\bx+9y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{b}{b^2-9}\\y=\frac{1}{9-b^2}\end{cases}$$

代入得最小值为 $\frac{b^2-17}{(b^2-9)^2}$

(d) 无最小值.

7(a) $A_1=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$

$A_2=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&2&-2\\-1&-2&11\end{bmatrix}$

(b)

$f_1=(x_1-x_2-x_3)^2.$

$f_1=0\Rightarrow x=\lambda\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\varphi\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

(c) $A_2=\begin{bmatrix}1&&\\-1&1&\\-1&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\&1&-3\\&&1\end{bmatrix}$

$x^TA_2x=$ $(x_1-x_2-x_3)^2+(x_2-3x_3)^2+x_3^2$

11 (a) 主元: a. $c-\frac{b\bar{b}}{a}$.

$|A|=ac-b\bar{b}$

(b) $c-\frac{|b|^2}{a}$.

(c) $x^TAx=a|x_1+\frac{b}{a}x_2|^2+ac-|b|^2$

$>0.$

(d) $\begin{vmatrix}1&1+i\\1-i&2\end{vmatrix}=0$. 非正定.

$\begin{vmatrix}3&4+i\\4-i&6\end{vmatrix}=1$. 正定.

13. $(a-1)(c-1)>b^2$ 时.

14. A_1 ×

A_2 ×

A_3 ×

A_4 √.

16. $f=\cancel{(x+1)(x+3)}$.

$(x+y)(x+3y)$.

如点 $(-2,1)$ 时 $f(-2,1)=-1<0$.

17. $x^TA^TAx=\langle Ax,Ax\rangle$

$=|Ax|^2\geq0.$

∵A可逆∴ 仅当 $x=0$ 时取"=".

∴ A^TA 正定.

19. $A=\begin{bmatrix}4&-4&8\\-4&4&-8\\8&-8&16\end{bmatrix}$

主元: 4.

rank: 1.

λ: 0. 0. 24.

det: 0.

22. $z=[x\ y]\begin{bmatrix}4&6\\6&c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

$c>9$ 时. z为碗形.

~~c<9时~~ $c=9$ 时. 有鞍点.

6.2.

1. $a>2$ 时. A正定.

对于B. 其主元不可能正定..

3. $|A|=1-b-2b^2<0$.

$|b|<1$.

由 $b_{1,2}=\frac{1\pm3}{-2}$.

$=-2$ 或 $\frac{1}{2}$.

取 $b=\frac{3}{4}$ 即可.

4. ∵ $\lambda_{A^2}=\lambda_A^2>0$.

$\lambda_{A^{-1}}=\frac{1}{\lambda_A}>0$.

6. 主元: 5. $\frac{9}{5}$

$\lambda_1=1$ $\lambda_2=9$

特征向量:

$\lambda=1\Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

$\lambda=9\Rightarrow v_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

$A=\begin{bmatrix}1&\\\frac{4}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&\\&\frac{9}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}\\&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&\\\frac{4}{5}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt5&\\&\frac{3}{\sqrt5}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1&\frac{4}{5}\\&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}\sqrt5&\\\frac{4}{\sqrt5}&\frac{3}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt5&\frac{4}{\sqrt5}\\&\frac{3}{\sqrt5}\end{bmatrix}$

$A=\cancel{\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt{41}}&\frac{4}{\sqrt{41}}\\\frac{4}{\sqrt{41}}&\frac{5}{\sqrt{41}}\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\\&3\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&\\&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$.

$=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{3}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{3}{\sqrt2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{3}{\sqrt2}&\frac{3}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

$A=(Q^T\sqrt{\Lambda}Q)(Q^T\sqrt{\Lambda}Q)$

$=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}^2$

7. $\lambda_R=\sqrt{\lambda}>0.$

8.

x^TBx

$=x^TC^TACx$

$=(Cx)^TA(Cx)>0.$

B正定.

11.

$[u\ v]\begin{bmatrix}3&-\sqrt2\\-\sqrt2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=1.$

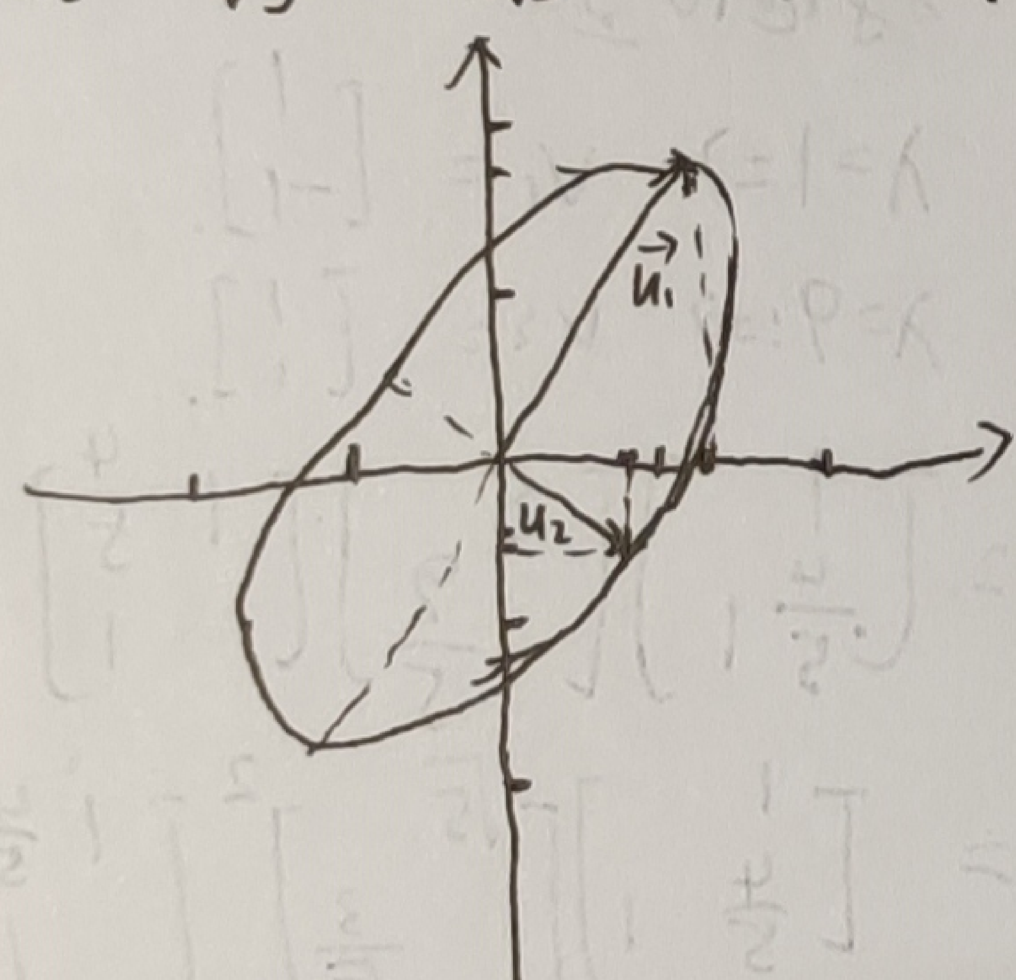
$A=\begin{bmatrix}3&-\sqrt2\\-\sqrt2&2\end{bmatrix}.$

$\lambda_1=1\quad\lambda_2=4.$

$v_1=\begin{bmatrix}1\\\sqrt2\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}\sqrt2\\-1\end{bmatrix}$

$u_1=\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}1\\\sqrt2\end{bmatrix}.\ u_2=\frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix}\sqrt2\\-1\end{bmatrix}.$

$\therefore(\frac{u}{\sqrt3}+\frac{\sqrt2 v}{\sqrt3})^2+(\frac{\sqrt2 u}{\sqrt3}-\frac{v}{\sqrt3})^2\times4=1.$



13. (I). $\forall x\neq0.\ x^TAx<0.$

(II) $\forall\lambda_i<0.\ i=1,2,3.$

(III) 奇数顺序主子式小于0.
偶数顺序主子式大于0.

(IV) 无行交换时,所有主元均小于0.

(V). 存在实矩阵R,使得
$A=-R^TR$. R可逆.

17. ∵A正定 ∴$\forall\lambda_i>0$.

~~证: $\prod_{i=1}^n\lambda_i\le(\frac{\sum\lambda_i}{n})^n=(\frac{\text{trace}A}{n})^n$~~

$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&&*\\&\ddots&\\*&&1\end{bmatrix}\triangleq B.$ 正定. $\lambda_{Bi}>0.$

$|B|=\prod_{i=1}^n\lambda_{Bi}\le(\frac{\sum\lambda_{Bi}}{n})^n=(\frac{tr(B)}{n})^n=1.$

$\therefore\left|\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}&&\\&\ddots&\\&&\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\end{bmatrix}\right|^2|A|=|B|\le1.$

$\therefore|A|\le\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$

Q.E.D.

23. (a) 因其特征值均大于0.

(b) 仅有I是非奇异的投影阵

(c) 错误!

(d) 如 $\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}>0.$

但其非正定.

27. (a) $A=CC^T=$
$\begin{bmatrix}3&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&3\\3&5\end{bmatrix}$

(b) $C=\begin{bmatrix}0&2\\2&43\end{bmatrix}.$

30. (a) $|A|\neq0$

(b) $\lambda_1=2.\ \lambda_2=5$

(c) $v_1=\begin{bmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{bmatrix}\quad v_2=\begin{bmatrix}-\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}.$

(d). A的特征值均大于0.
能表示为 R^TR.