

引力论习题解答

EsyDragonOne

October 6, 2014

Contents

1	空时物理学	2
1.1	第一章 几何动力学概要	2
1.1.1	圆柱体的曲率	2
1.1.2	春潮与小潮	3
1.1.3	被包裹在里面的Kepler	4
2	平直空时中的物理学	5
2.1	第二章 狭义相对论基础	5
2.2	电磁场	6
2.3	电磁学和微分形式	6
2.4	压强-能量张量和守恒律	6
2.5	加速的观测者	6
2.6	引力与狭义相对论的不相容性	6

Chapter 1

空时物理学

1.1 第一章 几何动力学概要

1.1.1 圆柱体的曲率

试证明圆柱体表面上各短程线(不缠绕!)无短程线偏差,并由此证明圆柱体表面的Gauss曲率 R 为零.再利用公式 $R = 1/\rho_1\rho_2$ 独立地证明上述结论,式中的 ρ_1 和 ρ_2 是题中相对于圆柱所在的三维Euclid空间的主曲率半径.

Solution:

在圆柱体上考虑不缠绕的短程线即为圆柱的圆截线.而考虑任意两条短程线,将圆柱体沿母线展开得到一矩形,其中圆截线则对应与矩形的边平行的直线.故任意两条不缠绕的短程线均平行,即无短程偏差.

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = 0$$

故Gauss曲率为零.

而圆柱在三维Euclid空间中的主曲率 $k_1 = 1/a, k_2 = 0$,故其高斯曲率为 $R = k_1k_2 = 0$.既有

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = 0$$

证毕

1.1.2 春潮与小潮

试用约定单位制以及几何单位制计算

(1)月亮($m_{\text{约定}} = 7.35 \times 10^{25}g$, $r = 3.84 \times 10^{10}cm$)在地球上产生的Newton潮汐加速度 $R_{n0}^m(m,n=1,2,3)$ 之大小.

(2)太阳($m_{\text{约定}} = 1.989 \times 10^{33}g$, $r = 1.496 \times 10^{13}cm$)在地球上产生的Newton潮汐加速度 $R_{n0}^m(m,n=1,2,3)$ 之大小.

(3)估计对春潮所得之结果应超过小潮多少倍.

Solution:

考虑牛顿极限下有等式:

$$\begin{pmatrix} R_{010}^1 & R_{010}^2 & R_{010}^3 \\ R_{020}^1 & R_{020}^2 & R_{020}^3 \\ R_{030}^1 & R_{030}^2 & R_{030}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2m}{r^3} \end{pmatrix}$$

在约定单位下 G 取 $6.674 \times 10^{-8}cm^3g^{-1}s^{-2}$,则有当为约定单位制时:

$$\frac{GM_{sun}}{r_{sun}^3} \simeq 3.96 \times 10^{-14}s^{-2}$$

$$\frac{GM_{moon}}{r_{moon}^3} \simeq 8.66 \times 10^{-14}s^{-2}$$

转换为几何单位制时:

$$\frac{M_{sun}}{r_{sun}^3} \simeq 4.41 \times 10^{-35}cm^{-2}$$

$$\frac{M_{moon}}{r_{moon}^3} \simeq 9.62 \times 10^{-35}cm^{-2}$$

故采用几何单位制中,

而考虑最简单模型,春潮中月亮和太阳同时对潮汐加速度有贡献,而小潮仅仅是由月亮引起的.既有春潮的潮汐加速度是小潮的约1.46倍.

1.1.3 被包裹在里面的Kepler

一个小卫星绕质量为 $m(cm)$ 的中心物体,在半径为 r 的轨道上,以圆频率 $\omega(cm^{-1})$ 运动.试证明,由已知的 ω 值,不可能单独确定 r 或 m 的值,而只能得到物体的有效"Kepler密度",即以轨道半径为半径的球体平均密度.给出以Kepler密度表示的 ω^2 的公式.

Solution:

由Newton第二定律可得:

$$\frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r$$

又因为由定义

$$\rho_\kappa = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3}$$

所以得到

$$\omega^2 = \frac{4}{3}\pi\rho_\kappa$$

Chapter 2

平直空时中的物理学

2.1 第二章 狭义相对论基础

练习2.1

试证明式 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \rangle$ 与de Broglie波的量子力学性质一致

$$\psi = e^{i\phi} = \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$$

Solution:

我们已知

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{k}, \mathbf{v} \rangle &= \phi(P) - \phi(P_0) \\ &= d\phi\end{aligned}$$

而两边同时乘以 \hbar

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \hbar \mathbf{k}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \hbar d\phi\end{aligned}$$

de Broglie波的动量期待值的分量为

$$\begin{aligned}p^j &= \langle \psi | p^j | \psi \rangle = \int \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx \\ &= \hbar k^j \int \psi^* \psi dx \\ &= \hbar k^j\end{aligned}$$

将 \boldsymbol{p} 与任意单位矢量做标积得

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} = p^j = \hbar k^j = \hbar d\phi$$

故可得 $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} \rangle$

2.2 电磁场

2.3 电磁学和微分形式

2.4 压强-能量张量和守恒律

2.5 加速的观测者

2.6 引力与狭义相对论的不相容性