引力论习题解答

EsyDragonOne

September 30, 2014

Contents

Chapter 1

空时物理学

1.1 几何动力学概要

1.1.1 圆柱体的曲率

试证明圆柱体表面上各短程线(不缠绕!!)无短程线偏差,并由此证明圆柱体表面的Gauss曲率R为零.再利用公式$R=1/\rho_1\rho_2$独立地证明上述结论,式中的ρ_1和ρ_2是题中相对于圆柱所在的三维Euclid空间的主曲率半径.

Solution:

在圆柱体上考虑不缠绕的短程线即为圆柱的圆截线.而考虑任意两条短程线,将圆柱体沿母线展开得到一矩形,其中圆截线则对应与矩形的边平行的直线.故任意两条不缠绕的短程线均平行,即无短程偏差.

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}s^2}=0$$

故Gauss曲率为零.

而圆柱在三维Euclid空间中的主曲率$k_1=1/a, k_2=0$,故其高斯曲率为$R=k_1k_2=0$.既有

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}s^2}=0$$

证毕

1.1.2 春潮与小潮

试用约定单位制以及几何单位制计算

(1)月亮($m_{约定}=7.35\times10^{25}g,\quad r=3.84\times10^{10}cm$)在地球上产生的Newton潮汐加速度$R^{m}_{n0}$(m,n=1,2,3)之大小.

(2)太阳($m_{约定}=1.989\times10^{33}g,\quad r=1.496\times10^{13}cm$)在地球上产生的Newton潮汐加速度$R^{m}_{n0}$(m,n=1,2,3)之大小.

(3)估计对春潮所得之结果应超过小潮多少倍.

Solution:

考虑牛顿极限下有等式:

$$\begin{pmatrix} {R^1}_{010} & {R^2}_{010} & {R^3}_{010} \\ {R^1}_{020} & {R^2}_{020} & {R^3}_{020} \\ {R^1}_{030} & {R^2}_{030} & {R^3}_{030} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2m}{r^3} \end{pmatrix}$$

在约定单位下G取$6.674\times10^{-8}cm^3g^{-1}s^{-2}$,则有当为约定单位制时:

$$\frac{GM_{sun}}{r_{sun}^3}\simeq 3.96\times10^{-14}s^{-2}$$

$$\frac{GM_{moon}}{r_{moon}^3}\simeq 8.66\times10^{-14}s^{-2}$$

转换为几何单位制时:

$$\frac{M_{sun}}{r_{sun}^3}\simeq 4.41\times10^{-35}cm^{-2}$$

$$\frac{M_{moon}}{r_{moon}^3}\simeq 9.62\times10^{-35}cm^{-2}$$

故采用几何单位制中,

${R_{sun}}^{1}{}_{010} = {R_{sun}}^{2}{}_{020} = 4.41\times10^{-35}cm^{-2}$

${R_{sun}}^{3}{}_{030} = -8.82\times10^{-35}cm^{-2}$

${R_{moon}}^{1}{}_{010} = {R_{moon}}^{2}{}_{020} = 9.62\times10^{-35}cm^{-2}$

${R_{moon}}^{3}{}_{030} = -1.92\times10^{-34}cm^{-2}$

而考虑最简单模型,春潮中月亮和太阳同时对潮汐加速度有贡献,而小潮仅仅是由月亮引起的.既有春潮的潮汐加速度是小潮的约1.46倍.

1.1.3 被包裹在里面的Kepler

一个小卫星绕质量为$m(cm)$的中心物体,在半径为r的轨道上,以圆频率$\omega(cm^{-1})$运动.试证明,由已知的ω值,不可能单独确定r或m的值,而只能得到物体的有效"Kepler密度",即以轨道半径为半径的球体平均密度.给出以Kepler密度表示的ω^2的公式.

Solution:

由Newton第二定律可得:

$$\frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r$$

又因为由定义

$$\rho_\kappa = \frac{M}{frac43\pi r^3}$$

所以得到

$$\omega^2 = \frac{4}{3}\pi\rho_\kappa$$

Chapter 2

平直空时中的物理学