Лекция 1

Основы матричных вычислений

Рахуба М.В.

14.01.22

Основы матричного анализа

1 Векторные нормы

над $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$\boxed{\text{Опр. 1}}$ $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ – норма, если

1) $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall x \in V$
2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|, \quad \alpha \in \mathbb{F}$
4) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

$y = z - x$

$$\|\cancel{x} + z - \cancel{x}\| \leqslant \|x\| + \|z - x\|$$

$$\|z\| \leqslant \|x\| + \|z - x\|$$

$$\big|\|z\| - \|x\|\big| \leqslant \|z - x\| \quad \text{(обрат. нер-во треуг)}$$

$\Downarrow$

Непр. ф-я

$$\left(\big|f(z) - f(x)\big| \leqslant \|z - x\| \right.$$

$f(z) = \|z\|$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \varepsilon : \; \forall z \in U_\delta(x) \quad |f(z) - f(x)| < \varepsilon$

$U_\delta(x) = \{y : \|y - x\| < \delta\}$)

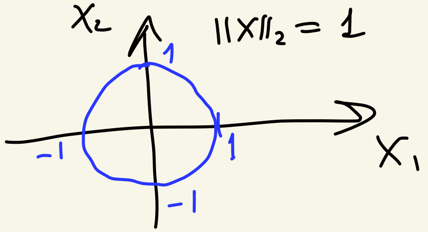
$\boxed{\text{Примеры}}$ $V = \mathbb{C}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

•) $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2} =$

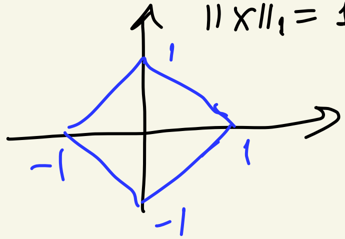
$$= \sqrt{\underbrace{(\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)}_{} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \sqrt{x^* x}$$

$x^* \equiv \bar{x}^T$
(эрмит. сопряж.)

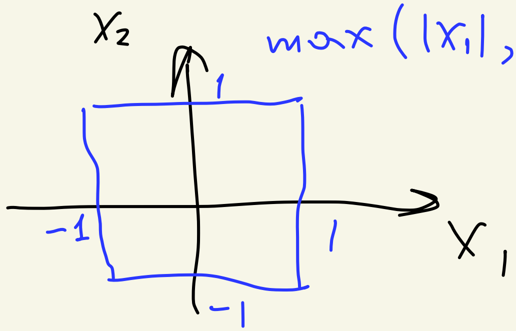
$\mathbb{R}^2$



•) $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$



•) $\|x\|_\infty = \max\limits_i |x_i|$



•) $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1$

$\left(\|x\|_p \xrightarrow{p \to \infty} \|x\|_\infty \right)$

$\boxed{\text{Теор 1}}$ $\forall$ 2 нормы $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$ на конечномер. V эквивалентны, то есть $\exists$ $c_1, c_2 > 0$:

$$c_1 \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2 \|x\|_a \quad \forall x \in V$$

$\square$ $\|\cdot\|_b$ — Непр. ф-я на $S^{n-1} = \{y : \|y\|_2 = 1\}$

компакт

$\Downarrow$ теор. Вейерштрасса

$$0 < \tilde{C}_1 \leq \|y\|_b \leq \tilde{C}_2, \quad y \in S^{n-1}$$

$$y = \frac{x}{\|x\|_2} \qquad \left(\|y\|_2 = \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = 1 \right)$$

$$\tilde{C}_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_b \leq \tilde{C}_2$$

$$\tilde{C}_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_b \leq \tilde{C}_2 \|x\|_2$$

Аналогично для $\|\cdot\|_a \Rightarrow$

$$\|x\|_2 \leq 1/\tilde{C}_1 \|x\|_a$$

$$\geq 1/\tilde{C}_2 \|x\|_a$$

$\blacksquare$

Сходимость: $x_k \to x$, если $\|x_k - x\| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Из теор 1. определение сходимости не зависит от нормы.

② Матричные нормы

Опр $\|\cdot\|$, заданная $\forall$ матриц

назыв. матричной, если

1) явл. нормой на $V = \mathbb{F}^{m \times n}$, $\forall m, n \geq 1$

2) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ (усл. субмультипликативности)

Пример

•) $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} =$ (норма Фробениуса)

субмульт

$= \sqrt{tr(A^* A)} = \sqrt{tr(A A^*)}$

•) $\|A\|_C = \max_{i,j} |a_{ij}|$ (Чебышёвская)

Не субмульт

•) $\|A\|_{sum} = \sum_i \sum_j |a_{ij}|$

субмульт

•) Оператор. нормы :

$$\|A\|_{a\to b} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_b}{\|x\|_a} =$$

$$= \sup_{x\neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|_a}\right)\right\|_b = \sup_{\|y\|_a=1} \|Ay\|_b$$

$$\Downarrow$$

$$\|Ax\|_b \leq \|A\|_{a\to b} \|x\|_a \quad \forall x$$

(усл. согласованности)

Субмульт. не для $\forall$ пары $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b$

•) $$\|A\|_p \equiv \|A\|_{p\to p} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

субмульт. $\forall p \geq 1$

p-норма матрицы

$p=2$: $\|A\|_2 = \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_1(A^*A)} =$

(след. лекция) $= \sqrt{\lambda_1(AA^*)}$

$p=1$, $p=\infty$ на семинаре

3 Скаляр. произв. и ортог.

а)

$\boxed{\text{Опр. 3}}$ $(\cdot\,,\cdot) : V \times V \to \mathbb{F}$ – скаляр. произв.

1) $(x, x) \geq 0$
2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$
3) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$
4) $(x+y, z) = (x, z) + (y, z)$

$$|(x, y)| \leq (x, x)^{1/2} (y, y)^{1/2}$$ (Коши-Буняк.-Шварца)

$$(x, y) = \sum_i x_i \overline{y_i} = y^* x$$ – естеств. на $\mathbb{C}^n$

$$|y^* x| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \overbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}^{\text{Гёльд. пара}} = 1$$ – Нер-во Гёльдера

$p, q \geq 1$

$x \perp y$, если $(x, y) = 0$

Гёльд. пары:

p	q
2	2
1	∞
∞	1

б) Унитар. матрица

$\boxed{\text{Опр 4}}$ Матрица $U = [u_1 \dots u_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ унитарная, если

$$U^{-1} = U^*$$

$$\left(U U^* = \underbrace{U^* U}_{\substack{u_i^* u_j = 0, \; i \neq j \\ u_i^* u_i = 1}} = I \right)$$

ортог.

$\boxed{\text{Утв 1}}$ Если $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ - унитар, то

$$\| Ux \|_2 = \| x \|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

$\square$ $\| Ux \|_2^2 = (Ux)^* Ux = x^* U^* U x =$

$= x^* x = \| x \|_2^2$ $\blacksquare$

Утв 2 Пусть $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ — унитар, тогда

$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2$$

$$\|UAV\|_F = \|A\|_F$$

□

$$\|UAV\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\overset{\text{(утв. 1)}}{\cancel{U}}\, A \overbrace{Vx}^{y}\|_2}{\overset{\text{утв. 1}}{}\ \|\underbrace{Vx}_{y}\|_2} =$$

$$= \sup_{y \neq 0} \frac{\|Ay\|_2}{\|y\|_2} = \|A\|_2 \qquad \blacksquare$$

4 Разложение Шура

$S^{-1}BS$ — преобр. подобия

Собств. разлож.:

$$A = \underbrace{S}_{[s_1 \ldots s_n]} \overset{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\Lambda} S^{-1}$$

∃ не для $\forall A$ даже над $\mathbb{C}$

$$A s_i = \lambda_i s_i$$

ЖНФ $A = PJP^{-1}$

$\exists\ \forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, но неустойчива Альтернативы:

$\boxed{\text{Теор}}$ (Шура) $\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ с собств. знач. $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $\exists\ U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ — унитар:

$$A = U T U^*$$

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad U^* = U^{-1}$$

$\square$ По индукции $n = 1$ - очевидн.

$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n}\ \exists\ v_1, \lambda_1 : Av_1 = \lambda_1 v_1$

$\|v_1\|_2 = 1$

$$U_1 = [v_1 \underbrace{v_2 \dots v_n}_{\text{дополним до ортог. базиса}}] \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ — унитар.}$$

$$U_1^* A U_1 = \begin{bmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{bmatrix} \left[\overset{\lambda_1 v_1}{\overset{\shortparallel}{A v_1}} \ \dots \ A v_n \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} v_1^* \overbrace{A v_1}^{\lambda_1 v_1} & \dots & v_1^* A v_n \\ \vdots & & \vdots \\ v_n^* \underbrace{A v_1}_{\lambda_1 v_1} & \dots & v_n^* A v_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \underset{\underset{U_2 T_2 U_2^*}{\shortparallel}}{A_1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} =$$

(предп. индукции)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^* \end{bmatrix}$$

$$A = \underbrace{U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^* \end{bmatrix} U_1^*}$$

унитар как произв. унитар

$$\left(U_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^* \end{bmatrix}\right)^*$$

[redacted]