Программа минимум по электродинамике

Записать формулы и построить графики (без вывода), объяснить используемые в них обозначения: дать требуемые определения

1) Запись функции, определяющей зависимость полей и векторных потенциалов гармонической плоской волны в линии передачи от времени t и продольной координаты z. Понятия частоты, временного периода, продольного волнового числа, длины волны, фазовой и групповой скорости.

2) Волновое уравнение для векторного потенциала в отсутствие источников при произвольной и гармонической зависимости от времени. Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$. Понятие поперечного волнового числа.

3) Понятие о TE, TM и TEM волнах. Импедансная связь поперечных компонент полей. Определение поперечного волнового импеданса.

4) Граничные условия для полей и функций $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ в линиях передачи с идеально проводящими границами. Математическая формулировка задачи отыскания собственных волн различных типов в идеальной линии.

5) Дисперсионное уравнение для волн в идеальных линиях. Понятие критической частоты и критической длины волны. Графики зависимости полей от продольной координаты в различные моменты времени при частотах, больших или меньших критической. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости в линии передачи от частоты.

6) В каких линиях могут существовать главные (TEM) волны? Поля TEM волны в коаксиальной линии.

7) Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода. Низшая мода (поперечное волновое число, графики поля, картина силовых линий). Низшая мода круглого волновода (поперечное волновое число, картина силовых линий).

8) Причины затухания волн в линиях передачи. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени.

9) Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения: определения величин тока и напряжения, погонной емкости и индуктивности, определения волнового сопротивления, импеданса нагрузки, импеданса в любом сечении линии с произвольной нагрузкой на конце.

10) Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии. Понятие согласования линии с нагрузкой.

11) Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора. Низшая мода прямоугольного резонатора (собственная частота, структура поля).

12) Причины затухания колебаний в реальных резонаторах. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. График зависимости поля собственного колебания в реальном резонаторе от времени

13) Представление полей, создаваемых в волноводе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных мод (общий вид формул возбуждения волноводов)

14) Представление полей, создаваемых в резонаторе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных колебаний (общий вид формул возбуждения резонатора). Резонансные свойства полей.

15) Способы возбуждения волноводов и резонаторов при помощи штыря и петли.

16) Определения дифференциального и полного сечений рассеяния тела. Выражение для амплитуды поля и плотности потока энергии рассеянной волны в дальней зоне через дифференциальное сечение рассеяния.

17) Условие применимости приближения геометрической оптики в задачах дифракции.

Задачи № 10.1 (а), 10.2, 10.4(а,б), 10.5(а,б), 10.7, 10.8, 10.16, 10.18(б), 10.19, 10.22, 10.23, 10.31(а,б), 10.33 (резонатор без плазмы), 10.35(а), 10.36, 10.38, 10.48, 11.1(1,2,3) (В.Б. Гильденбург, М.А. Миллер, Сборник задач по электродинамике, 2001 г.).

Для плоской гармонической волны (TEM) функция, определяющая зависимость полей, задается следующим образом

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z}_0$$

Где $\vec{A}^e$ – векторный потенциал поля, а $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$ называется поперечной волновой функцией. Поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ определяются следующим образом

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} rot\vec{A}^e$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} - \nabla\varphi$$

Где φ – скалярный потенциал поля. Используя условие калибровки Лоренца

$$div\vec{A}^e + \frac{\varepsilon\mu}{c} i\omega\varphi = 0$$

Получим выражения для нахождения полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в случае гармонической волны:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} rot\vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{ik_0\varepsilon\mu}(\nabla div + k^2)\vec{A}^e$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Понятие частоты ω – равна количеству повторений или возникновения событий (процессов) в единицу времени.

Понятие временного периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – время, за которое совершается полное колебание.

Понятие продольного волнового числа $h = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновым числом называется быстрота роста фазы волны по пространственной продольной координате.

Понятие длины волны λ – пространственный период колебаний. Расстояние между двумя ближайшими друг к другу точками в пространстве, в которых колебания происходят в одинаковой фазе.

Понятие фазовой $v_{\text{ф}}$ и групповой скорости $v_{\text{гр}}$. Фазовая скорость – скорость перемещения поверхности постоянной фазы. Групповая скорость – скорость перемещения квазимонохроматического пакета.

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{h}, \quad v_{\text{гр}} = \frac{\partial\omega}{\partial h}\Big|_{\omega=\omega_0}$$

Где ω_0 – несущая частота группового пакета.

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае произвольной зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае гармонической зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta\vec{A} + k^2\vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu$$

Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$. Понятие поперечного волнового числа.

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z}_0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– для декартовой системы координат.

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = \Delta_\perp\varphi^e + (k^2 - h^2)\varphi^e = 0$$

Тогда дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ выглядит следующим образом

$$\Delta_\perp\varphi^{(e,m)} + \varkappa^2\varphi^{(e,m)} = 0$$

Где $\varkappa$ – поперечное волновое число. Если функции $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца, то поля удовлетворяют уравнению Максвелла.

Используем выражения для полей через векторный потенциал

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} rot \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{k_0 \varepsilon \mu}(\nabla div + k^2)\vec{A}^e$$

Вычислим $\nabla div \vec{A}^e$ и $rot \vec{A}^e$ при условии $\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$

$$div \vec{A}^e = -ih\varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz}$$

$$\nabla div \vec{A}^e = (-h^2 \varphi^e \vec{z}_0 - ih \nabla_\perp \varphi^e) e^{-ihz}$$

$$rot \vec{A}^e = [\nabla A^e_z, \vec{z}_0] = [\nabla_\perp \varphi^e, \vec{z}_0] e^{-ihz}$$

Тогда получим следующие выражения для комплексных амплитуд полей ТМ волны

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} E_z = \dfrac{\varkappa^2}{k_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\dfrac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \dfrac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ H_z = 0 \end{cases}$$

ТМ - поперечная магнитная волна. Магнитное поле чисто поперечно пути распространения, но поле $\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$ имеет продольную и поперечную составляющую.

Уравнения Максвелла симметричны относительно полей, но мы получили неравноправные выражения для векторов. Это объясняется тем, что мы нашли одно из решений. Воспользовавшись принципом двойственности $\vec{E} \to \vec{H}$, $\vec{H} \to -\vec{E}$, можно получить выражения для комплексных амплитуд полей ТЕ волны.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = \dfrac{\varkappa^2}{k_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = -\dfrac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\dfrac{1}{\varepsilon} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ E_z = 0 \end{cases}$$

функция φ не обязана быть такой же, поэтому изменяется верхний индекс на m, эта функция также должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta_\perp \varphi^m + \varkappa^2 \varphi^m = 0$$

Таким образом для системы уравнений Максвелла возможны два решения ТМ и ТЕ волны. Но есть случай, когда поля чисто поперечны это случай ТЕМ волны. Когда $\varkappa = 0$, то есть $k = h$, продольные компоненты магнитного и электрического полей отсутствуют это и есть ТЕМ волна.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = E_z = 0 \\ \vec{E}_\perp = -\dfrac{1}{\varepsilon\mu}\nabla_\perp\varphi(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \dfrac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \end{cases}$$

φ – поперечная волновая функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta\varphi = 0$. Из формул выше видно, что поперечные компоненты полей удовлетворяют импедансному соотношению

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp\text{в}}[\vec{H}_\perp, \vec{z}_0]$$

где $\eta_{\perp\text{в}}$ называется поперечным волновым сопротивлением

$$\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{k}{h}\right)^{\pm 1}$$

где «+» – соответствует волне типа ТЕ, а «–» – волне типа ТМ. Для ТЕМ волны $\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$

Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода. Поперечные волновые числа появляются как собственные числа решения уравнения Гельмгольца с граничными условиями прямоугольного волновода. Спектр найденных таким образом собственных чисел описывается формулой

$$\varkappa_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \tag{1}$$

Здесь m, n – индексы моды, a, b – размеры сечения волновода. Для однозначности мы всегда считаем, что $a > b$.

Низшая мода. По определению, такой модой называется мода с наименьшим поперечным волновым числом. Так как мы предполагали $a > b$, очевидно, наименьшее возможное нетривиальное поперечное волновое число будет при $m = 1$, $n = 0$:

$$\varkappa_{10}^2 = \frac{\pi^2}{a^2} \tag{2}$$

Заметим, что это возможно только для TE-волн, так как решение TM-волн не позволяет занулить m, n одновременно (это приведет к тривиальной поперечной волновой функции). Так что *низшая мода прямоугольного волновода – TE_{10}*.

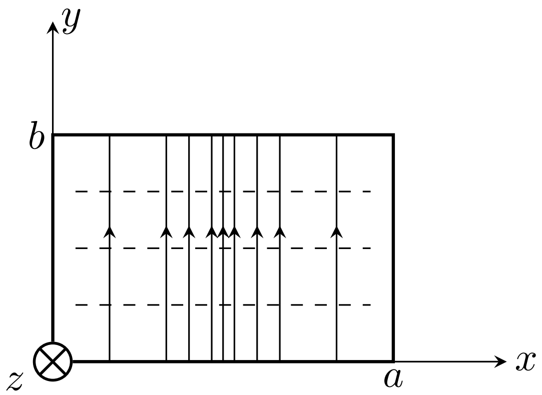

Рис. 1. Структура полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ моды TE_{10} ($\vec{H}$ изображено пунктиром)

Низшая мода круглого волновода . Она определяется так же, но решение уравнения идет в бесселевых функциях, и поэтому поперечное волновое число имеет другой вид, и низшей модой будет TE_{11}:

$$\varkappa_{11} = \frac{\mu_{11}}{a}, \tag{3}$$

где μ_{11} – значение аргумента функции Бесселя J_1 при 1-м нуле своей прозводной. При этом график моды будет похож на график в прямоугольном волноводе: его можно получить чисто геометрически, постепенно сминая границы волновода, делая его более круглым. Говоря более точно, топологически эти моды подобны.

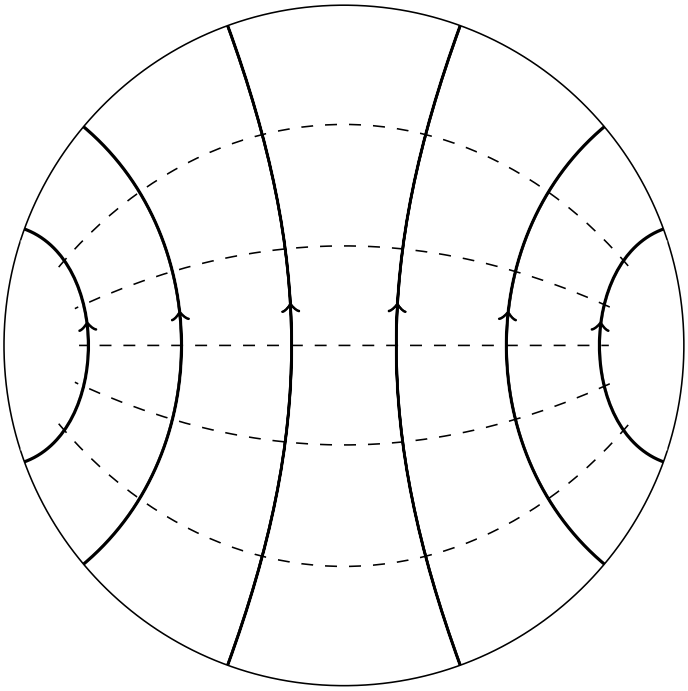

Рис. 2. Структура полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ моды TE_{11} круглого волновода ($\vec{H}$ изображено пунктиром)

Причины затухания волн в линиях передачи. В реальных линиях передачи волна распространяется с затуханием за счет *двух* причин: *потери в заполняющей волновод среде* и *потери в стенках волновода.* Мы их учитываем по-отдельности: решаем задачу о потерях в среде, считая стенки $\sigma = \infty$, и наоборот.

Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. Чтобы учесть потери в среде, подставим комплексную диэлектрическую проницаемость в дисперсионное уравнение:

$$\varepsilon_k = \varepsilon' - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad \rightarrow \quad h^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa \tag{4}$$

Расчеты проводятся при $\mu = 1$. Волновое число становится комплесным $h = h' + ih''$, и в случае малых потерь можно найти h'', которое определяет затухание. Для частот, далеких от критической,

$$h'' = \frac{\varepsilon'' k_0^2}{2h'}, \quad \text{где} \quad h' = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon' - \varkappa^2} \tag{5}$$

При $\omega > \omega_{\text{cr}}$ амплитуда волны уменьшается в e раз на расстоянии $L = (h'')^{-1}$. Нетрудно нарисовать графики: это будет сдвигающаяся волна с огибающей в виде спадающей экспоненты.

Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени. Здесь синим цветом показан график в следущий момент времени, желтым - в предыдущий, зеленым - огибающая (экспонента).

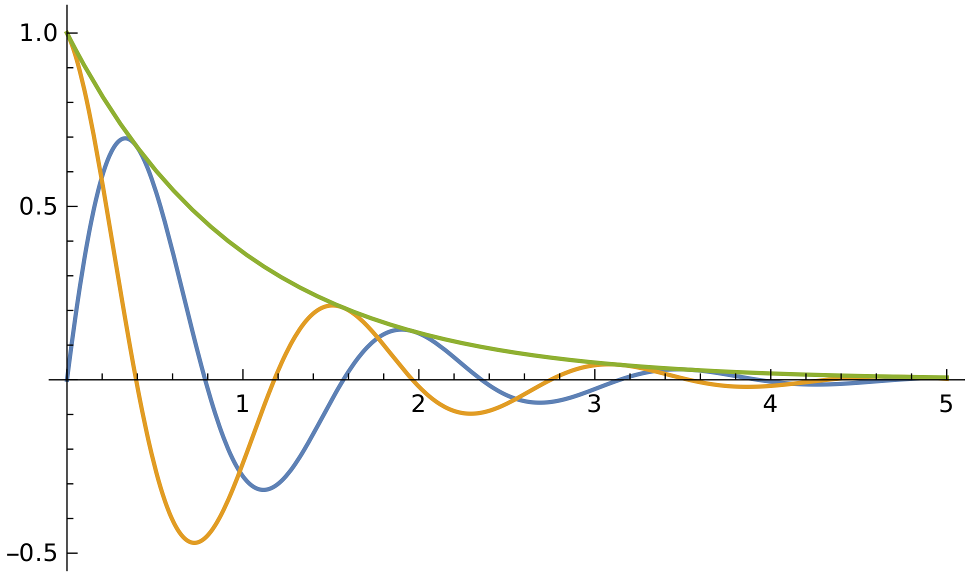

Рис. 3. Затухание поля в линии передачи

Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения. В системе проводников, когда их количество больше или равно двум, могут распространяться главные (TEM) волны. Именно их, в случае двухпроводной линии, можно описать с помощью телеграфных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial z} = -C\dfrac{\partial V}{\partial t} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -\dfrac{L}{c^2}\dfrac{\partial I}{\partial t} \end{cases} \tag{6}$$

Они были написаны раньше, чем уравнения Максвелла. Они не дают информации о поле во всем пространстве, а оперируют только интегральными характеристиками: током $V(z,t)$ и напряжением $I(z,t)$[1]. Здесь введен ряд понятий, которые надо раскрыть подробнее.

[1]Продифференцировав второе уравнение по z и первое по t, и подставив первое во второе, мы получим волновое уравнение.

Погонные емкость C, индуктивность L. Они вводятся как емкость (индуктивность) на единицу длины, или, выражаясь физически более верно, это отношение емкости (индуктивности) бесконечно малого отрезка двухпроводной линии к её длине. Так же вводится *погонный заряд* Q.

Напряжение. По определению, напряжение в двухпроводной линии, в которой распространяется главная волна, будет интеграл

$$V(z) = \int\limits_{(1)}^{(2)} E_l \, \mathrm{d}l, \tag{7}$$

где интегрирование ведется в плоскости сечения $z = \text{const}$ от одного провода до другого, и не зависит от формы контура. Такое возможно в случае потенциальных полей: поле же главной волны в поперечном сечении потенциально ($\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$). Хотя в целом оно не потенциально:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{rot}\left[\nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp) \cdot e^{-ihz}\right] \tag{8}$$

Ток. Ток в сечении двухпроводной линии есть отношение количества заряда, проходящего в единицу времени через сечение $z = \text{const}$ одного провода, к единице времени ($I = \mathrm{d}Q \,/\, \mathrm{d}t$).

Волновое сопротивление (характеристический импеданс). В терминах тока и сопротивления, это есть отношение напряжения бегущей волны к току бегущей волны в одном сечении. Выражение можно получить, подставив $V = V_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$, $I = I_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$ в волновое уравнение:

$$Z_{\text{в}} = \left|\frac{V_{\text{бег}}(z)}{I_{\text{бег}}(z)}\right| = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{9}$$

Импеданс нагрузки. Он вводится как отношение напряжения на нагрузке к току в нагрузке:

$$Z_{\text{н}} = \frac{V_{\text{н}}}{I_{\text{н}}} \tag{10}$$

Импеданс в произвольном сечении линии. Он определяется как $Z(z) = V(z)/I(z)$, и с этим тесно связана формула пересчета импеданса, а именно, можно узнать импеданс в любом сечении линии, зная волновой импеданс и импеданс произвольной нагрузки на конце. Тогда, считая положение нагрузки в $z = 0$, формула принимает вид

$$Z(z = -L) = Z_{\text{в}} \frac{Z_{\text{н}} + iZ_{\text{в}} \operatorname{tg} kL}{Z_{\text{в}} + iZ_{\text{н}} \operatorname{tg} kL} \tag{11}$$

Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии. Это может быть коэффициент отражения по току или по напряжению. Обычно, когда не упоминается чего, считается, что напряжения. По определению, это

$$\Gamma = \frac{V_{\text{отр}}}{V_{\text{пад}}} = (\text{если посчитать}) = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}} \tag{12}$$

Понятие согласования линии с нагрузкой. Линия называется согласованной, если нет отраженной волны: $\Gamma = 0$. Для этого нужно, чтобы было $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$.

Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора. Его можно найти, если взять прямоугольный волновод и металлизировать сечения нулей электрического поля, удовлетворив граничному условию $E_\tau = 0$:

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}}, \tag{13}$$

где $a > b$ – размеры поперечного сечения, L – длина резонатора.

Низшая мода прямоугольного резонатора. Если $b < a$, $b < L$, то низшей модой будет TE_{101}:

$$\omega_{101} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2} \tag{14}$$

Надо заметить, что TE/TM здесь условно, так как зависит от выбора осей. Пусть ребро a вдоль x, b вдоль y, L вдоль z. Структура поля тогда

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}z\right)e^{i\omega_{101}t} \tag{15}$$

Причины затухания колебаний в реальных резонаторах. Как и в случае линии передачи, причин две: потери в заполняющей среде (комплексная ε) и потери в стенках ($\sigma \neq \infty$).

Затухание за счет потерь в заполнении. Чтобы его найти, нужно действовать стандартно: представить $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, аналогично $\mu = \ldots$. Связь частот определяется формулой

$$\omega = \frac{\omega^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \tag{16}$$

где $\omega^{(0)}$ – спектр незаполненного резонатора. Отсюда найдется ω'' ($\omega = \omega' + i\omega''$), и тогда затухание будет происходить как

$$E, H \sim e^{i\omega t} \sim e^{i\omega' t} \cdot e^{-i\omega'' t} \tag{17}$$

При $\mu = 1$ оказывается, что $\omega'' \sim -\varepsilon''$. Это не ошибка, так как $\varepsilon'' < 0$.

График собств. колебаний в реальном резонаторе от времени. Для прямоугольного резонатора можно построить $\operatorname{Re} E_x(t)$, это будет синусоида, вписанная в огибающую – убывающую экспоненту.