

# Программа минимум по электродинамике

*Записать формулы и построить графики (без вывода), объяснить используемые в них обозначения: дать требуемые определения*

- 1) Запись функции, определяющей зависимость полей и векторных потенциалов гармонической плоской волны в линии передачи от времени  $t$  и продольной координаты  $z$ . Понятия частоты, временного периода, продольного волнового числа, длины волны, фазовой и групповой скорости.
- 2) Волновое уравнение для векторного потенциала в отсутствие источников при произвольной и гармонической зависимости от времени. Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат  $\varphi^{(e)}$  и  $\varphi^{(m)}$ . Понятие поперечного волнового числа.
- 3) Понятие о ТЕ, ТМ и ТЕМ волнах. Импедансная связь поперечных компонент полей. Определение поперечного волнового импеданса.
- 4) Граничные условия для полей и функций  $\varphi^{(e)}$  и  $\varphi^{(m)}$  в линиях передачи с идеально проводящими границами. Математическая формулировка задачи отыскания собственных волн различных типов в идеальной линии.
- 5) Дисперсионное уравнение для волн в идеальных линиях. Понятие критической частоты и критической длины волны. Графики зависимости полей от продольной координаты в различные моменты времени при частотах, больших или меньших критической. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости в линии передачи от частоты.
- 6) В каких линиях могут существовать главные (ТЕМ) волны? Поля ТЕМ волны в коаксиальной линии.
- 7) Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода. Низшая мода (поперечное волновое число, графики поля, картина силовых линий). Низшая мода круглого волновода (поперечное волновое число, картина силовых линий).
- 8) Причины затухания волн в линиях передачи. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени.
- 9) Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения: определения величин тока и напряжения, погонной емкости и индуктивности, определения волнового сопротивления, импеданса нагрузки, импеданса в любом сечении линии с произвольной нагрузкой на конце.
- 10) Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии. Понятие согласования линии с нагрузкой.

- 11) Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора. Низшая мода прямоугольного резонатора (собственная частота, структура поля).
- 12) Причины затухания колебаний в реальных резонаторах. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. График зависимости поля собственного колебания в реальном резонаторе от времени
- 13) Представление полей, создаваемых в волноводе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных мод (общий вид формул возбуждения волноводов)
- 14) Представление полей, создаваемых в резонаторе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных колебаний (общий вид формул возбуждения резонатора). Резонансные свойства полей.
- 15) Способы возбуждения волноводов и резонаторов при помощи штыря и петли.
- 16) Определения дифференциального и полного сечений рассеяния тела. Выражение для амплитуды поля и плотности потока энергии рассеянной волны в дальней зоне через дифференциальное сечение рассеяния.
- 17) Условие применимости приближения геометрической оптики в задачах дифракции.

Задачи № 10.1 (а), 10.2, 10.4(а,б), 10.5(а,б), 10.7, 10.8, 10.16, 10.18(б), 10.19, 10.22, 10.23, 10.31(а,б), 10.33 (резонатор без плазмы), 10.35(а), 10.36, 10.38, 10.48, 11.1(1,2,3) (В.Б. Гильденбург, М.А. Миллер, Сборник задач по электродинамике, 2001 г.).

## Вопрос минимума №1

Для плоской гармонической волны (ТЕМ) функция, определяющая зависимость полей, задается следующим образом

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$$

Где  $\vec{A}^e$  – векторный потенциал поля, а  $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$  называется поперечной волновой функцией. Поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  определяются следующим образом

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} - \nabla \varphi$$

Где  $\varphi$  – скалярный потенциал поля.

Используя условие калибровки Лоренца

$$\text{div } \vec{A}^e + \frac{\varepsilon\mu}{c} i\omega\varphi = 0$$

Получим выражения для нахождения полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в случае гармонической волны:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{ik_0\varepsilon\mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$$

Понятие частоты  $\omega$  – равна количеству повторений или возникновения событий (процессов) в единицу времени.

Понятие временного периода  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  – время, за которое совершается полное колебание.

Понятие продольного волнового числа  $h = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновым числом называется быстрота роста фазы волны по пространственной продольной координате.

Понятие длины волны  $\lambda$  – пространственный период колебаний. Расстояние между двумя ближайшими друг к другу точками в пространстве, в которых колебания происходят в одинаковой фазе.

Понятие фазовой  $v_\phi$  и групповой скорости  $v_{\text{гр}}$ . Фазовая скорость – скорость перемещения поверхности постоянной фазы. Групповая скорость – скорость перемещения квазимонохроматического пакета.

$$v_\phi = \frac{\omega}{h}, \quad v_{\text{гр}} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial h} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Где  $\omega_0$  – несущая частота группового пакета.

## Вопрос минимума №2

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае произвольной зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае гармонической зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu$$

Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат  $\varphi^{(e)}$  и  $\varphi^{(m)}$ .  
Понятие поперечного волнового числа.

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– для декартовой системы координат.

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = \Delta_\perp \varphi^e + (k^2 - h^2) \varphi^e = 0$$

Тогда дифференциальное уравнение для функций поперечных координат  $\varphi^{(e)}$  и  $\varphi^{(m)}$  выглядит следующим образом

$$\Delta_\perp \varphi^{(e,m)} + \varkappa^2 \varphi^{(e,m)} = 0$$

Где  $\varkappa$  – поперечное волновое число.

Если функции  $\varphi^{(e)}$  и  $\varphi^{(m)}$  удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца, то поля удовлетворяют уравнению Максвелла.

### Вопрос минимума №3

Используем выражения для полей через векторный потенциал

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{k_0 \varepsilon \mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e$$

Вычислим  $\nabla \text{div } \vec{A}^e$  и  $\text{rot } \vec{A}^e$  при условии  $\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$

$$\text{div } \vec{A}^e = -ih \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz}$$

$$\nabla \text{div } \vec{A}^e = (-h^2 \varphi^e \vec{z}_0 - ih \nabla_\perp \varphi^e) e^{-ihz}$$

$$\text{rot } \vec{A}^e = [\nabla A_z^e, \vec{z}_0] = [\nabla_\perp \varphi^e, \vec{z}_0] e^{-ihz}$$

Тогда получим следующие выражения для комплексных амплитуд полей ТМ волн

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} E_z = \frac{\kappa^2}{ik_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp), \vec{z}_0] \\ H_z = 0 \end{cases}$$

ТМ – поперечная магнитная волна. Магнитное поле чисто поперечно пути распространения, но поле  $\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$  имеет продольную и поперечную составляющую.

Уравнения Максвелла симметричны относительно полей, но мы получили неравноправные выражения для векторов. Это объясняется тем, что мы нашли одно из решений. Воспользовавшись принципом двойственности  $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ ,  $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$ , можно получить выражения для комплексных амплитуд полей ТЕ волны.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = \frac{\kappa^2}{ik_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp), \vec{z}_0] \\ E_z = 0 \end{cases}$$

функция  $\varphi$  не обязана быть такой же, поэтому изменяется верхний индекс на  $m$ , эта функция также должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta_\perp \varphi^m + \kappa^2 \varphi^m = 0$$

Таким образом для системы уравнений Максвелла возможны два решения ТМ и ТЕ волны. Но есть случай, когда поля чисто поперечны это случай ТЕМ волны. Когда  $\varkappa = 0$ , то есть  $k = h$ , продольные компоненты магнитного и электрического полей отсутствуют это и есть ТЕМ волна.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = E_z = 0 \\ \vec{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \end{cases}$$

$\varphi$  – поперечная волновая функция, удовлетворяющая уравнению  $\Delta\varphi = 0$ . Из формул выше видно, что поперечные компоненты полей удовлетворяют импедансному соотношению

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp\text{в}} [\vec{H}_\perp, \vec{z}_0]$$

где  $\eta_{\perp\text{в}}$  называется поперечным волновым сопротивлением

$$\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left( \frac{k}{h} \right)^{\pm 1}$$

«+» – соответствует волне типа ТЕ, а «-» – волне типа ТМ. Для ТЕМ волны

$$\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

## Вопрос минимума №4

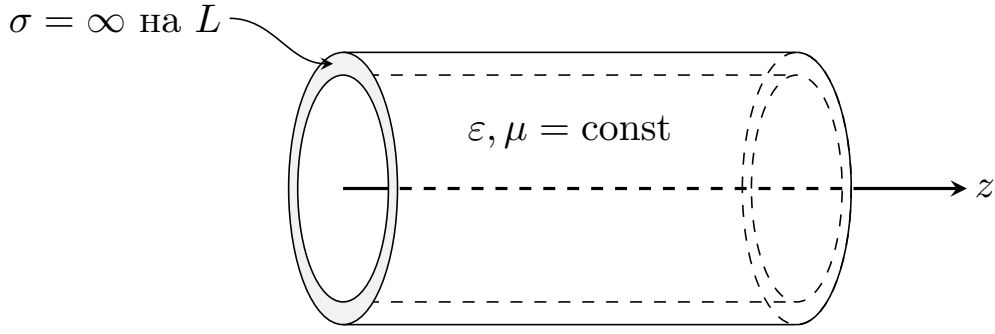


Рис. 1. Линия передачи

Поперечные волновые функции удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta_{\perp} \varphi^{(e,m)} + \varkappa^2 \varphi^{(e,m)} = 0$$

На границе проводящих стенок справедливы следующие граничные условия

$$E_{\tau} = 0|_S, \quad B_n = 0|_S$$

Рассмотрим граничные условия для функций  $\varphi^{(e,m)}$  для различных типов волн. Математическая формулировка задачи описания волн в линии передач.

$$\mathbf{TM} \begin{cases} \Delta_{\perp} \varphi^e + \varkappa^2 \varphi^e = 0 \\ \varphi^e|_L = 0 \end{cases} \quad - \text{Условие Дирихле.}$$

$$\mathbf{TE} \begin{cases} \Delta_{\perp} \varphi^m + \varkappa^2 \varphi^m = 0 \\ \frac{\partial \varphi^m}{\partial n}|_L = 0 \end{cases} \quad - \text{Условие Неймана.}$$

Где  $\vec{n}$  – нормаль к контуру  $L$  на границе поперечного сечения.

$$\mathbf{TEM} \begin{cases} \Delta_{\perp} \varphi = 0 \\ \varphi|_{L_i} = C_i \end{cases}$$

Таким образом описание волн в линии передач сводится к двумерной задаче Гельмгольца с следующими граничными условиями на контуре, охватывающим поперечное сечение волновода.

## Вопрос минимума №5

Дисперсионное соотношение

$$\kappa^2 = k^2 - h^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - h^2$$

Где  $\kappa$  – поперечное волновое число, а  $h$  – продольное волновое число.

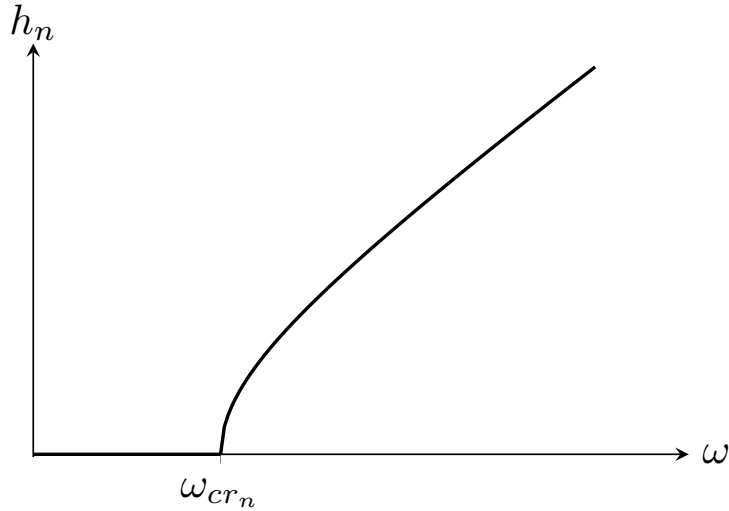


Рис. 2. Зависимость реальной части поперечного волнового числа от частоты

Любая мода в линии передачи характеризуется поперечным волновым числом, а поперечное волновое число определяет продольное.

Можем ввести критическую длину волны (продольное волновое число  $h$  равно нулю):

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \\ \omega_{cr} &= \frac{\kappa c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \\ \lambda &= \frac{2\pi c}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\kappa} \sqrt{\varepsilon \mu} \end{aligned}$$

$\omega < \omega_{cr}$  дисперсионное уравнения не имеет действительных решений – режим нераспространяющейся волны.

При  $\omega > \omega_{cr}$  – режим распространяющейся волны.

Бегучести нет. Зависимость экспоненциальная

- 1) Длина волны в волноводе (подразумевают линию передачи или трубу, когда говорят волновод)

$$\lambda_v = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} = \frac{2\pi}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{k^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}}} > \lambda_0$$



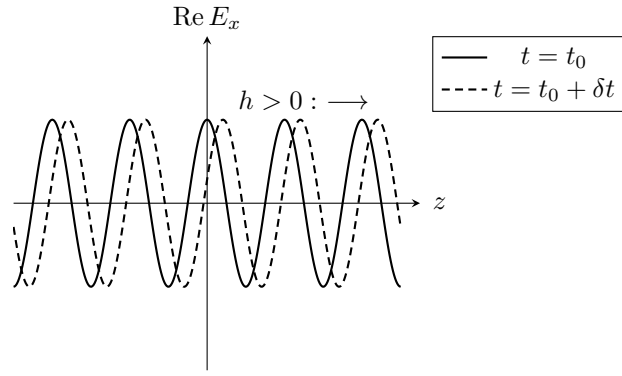


Рис. 3. Распространение волны ( $h > 0$ )

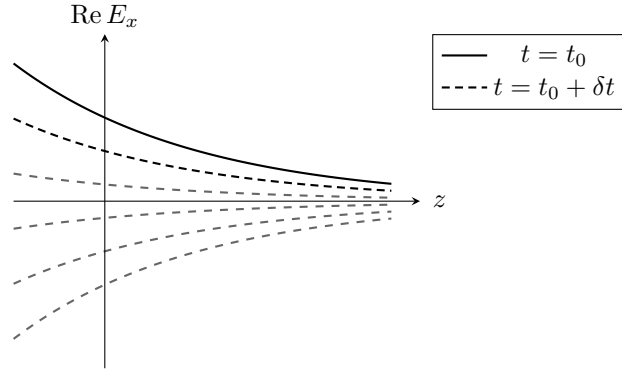


Рис. 4. Режим нераспространения ( $h < 0$ )

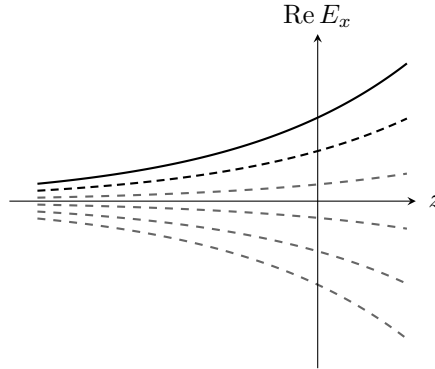


Рис. 5. Экспоненциальное нарастание амплитуды (при  $h < 0$ )

Когда  $\omega \rightarrow \omega_{cr}$   $\lambda_v \rightarrow \infty$

$\lambda_0$  - длина волны в пространстве без волновода в той же среде.

$\lambda_v$  - пространственный период.

2) Фазовая скорость - скорость перемещения плоскости постоянной фазы.

Поверхность постоянной фазы - это когда фаза константа.

$$\Phi = \omega t - hz + \varphi_0$$

При данном времени можно найти координату:

$$z = \frac{\omega t + \varphi_0}{h}$$

Координата будет перемещаться со скоростью:

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\kappa^2}}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}}} > v_f^{(0)}$$
$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{\omega}{k}$$

Фазовая скорость может быть больше скорости света.

- 3) Групповая скорость - скорость перемещения квазимонохроматического волнового пакета.

Пакет движется со скоростью  $v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}|_{\omega=\omega_0}$  - это при малом или отсутствующем поглощении. (В пространстве, а не в линии передачи).

При большом поглощении это понятие теряет смысл.

По мере перемещения по волноводу форма сигнала будет меняться.

$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial h}|_{\omega=\omega_0}$  - формула для волновода.

## Вопрос минимума №6

Главные (ТЕМ) волны в линиях передачи с идеальными границами  
У ТЕМ-волн поперечное волновое число  $\kappa = 0$ :

$$\kappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Поля таких волн выражаются следующим образом через функцию  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\perp} &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \nabla_{\perp} \varphi \\ \vec{H}_{\perp} &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_{\perp} \varphi, \vec{z}_0] \end{aligned}$$

**вдоль одиночного проводника ТЕМ-волна с конечной энергией распространяться не может.** Распространение возможно, если количество проводников будет больше одного. Например, в линии из двух проводников (рис. 6) ТЕМ-волна уже возможна.

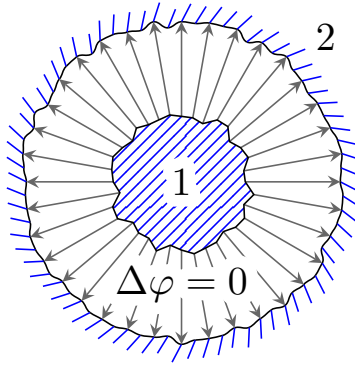


Рис. 6. Закрытая линия из двух проводников

ТЕМ-волна в идеальной линии передачи возможна, если число проводников  $\geq 2$ . Например, в коаксиальной линии (рис. 7) ТЕМ-волна возможна.

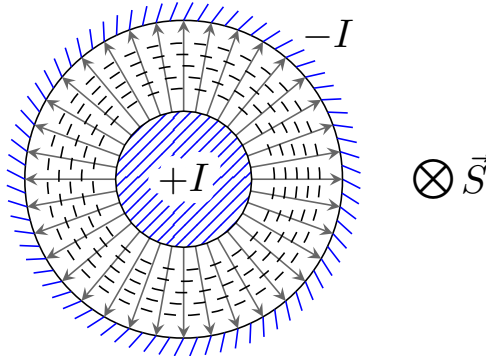


Рис. 7. Поле в коаксиальном кабеле

**Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода.** Поперечные волновые числа появляются как собственные числа решения уравнения Гельмгольца с граничными условиями прямоугольного волновода. Спектр найденных таким образом собственных чисел описывается формулой

$$\kappa_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Здесь  $m, n$  – индексы моды,  $a, b$  – размеры сечения волновода. Для однозначности мы всегда считаем, что  $a > b$ .

**Низшая мода.** По определению, такой модой называется мода с наименьшим поперечным волновым числом. Так как мы предполагали  $a > b$ , очевидно, наименьшее возможное нетривиальное поперечное волновое число будет при  $m = 1, n = 0$ :

$$\kappa_{10}^2 = \frac{\pi^2}{a^2}$$

Заметим, что это возможно только для ТЕ-волн, так как решение ТМ-волн не позволяет занулить  $m, n$  одновременно (это приведет к тривиальной поперечной волновой функции). Так что *низшая мода прямоугольного волновода* –  $TE_{10}$ .

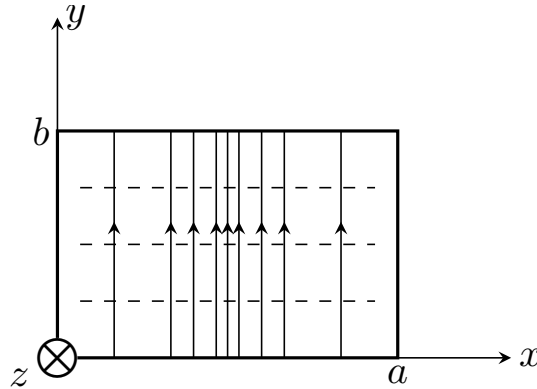


Рис. 8. Структура полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  моды  $TE_{10}$  ( $\vec{H}$  изображено пунктиром)

**Низшая мода круглого волновода .** Она определяется так же, но решение уравнения идет в бесселевых функциях, и поэтому поперечное волновое число имеет другой вид, и низшей модой будет  $TE_{11}$ :

$$\kappa_{11} = \frac{\mu_{11}}{a},$$

где  $\mu_{11}$  – значение аргумента функции Бесселя  $J_1$  при 1-м нуле своей производной. При этом график моды будет похож на график в прямоугольном волноводе: его можно получить чисто геометрически, постепенно сменяя границы волновода, делая его более круглым. Говоря более точно, топологически эти моды подобны.

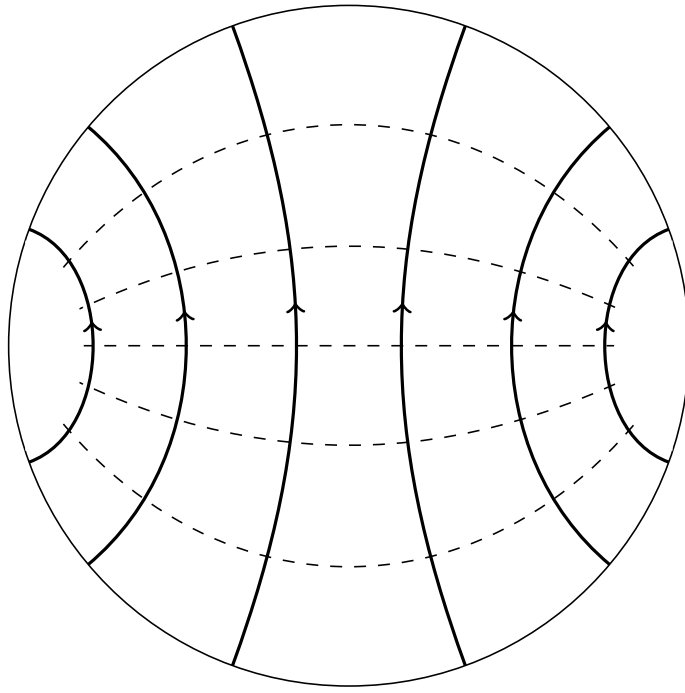


Рис. 9. Структура полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  моды  $\text{TE}_{11}$  круглого волновода ( $\vec{H}$  изображено пунктиром)

**Причины затухания волн в линиях передачи.** В реальных линиях передачи волна распространяется с затуханием за счет *двух* причин: *потери в заполняющей волновод среде* и *потери в стенках волновода*. Мы их учитываем по-отдельности: решаем задачу о потерях в среде, считая стенки  $\sigma = \infty$ , и наоборот.

**Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде.** Чтобы учесть потери в среде, подставим комплексную диэлектрическую проницаемость в дисперсионное уравнение:

$$\varepsilon_k = \varepsilon' - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \rightarrow h^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa$$

Расчеты проводятся при  $\mu = 1$ . Волновое число становится комплексным  $h = h' + ih''$ , и в случае малых потерь можно найти  $h''$ , которое определяет затухание. Для частот, далеких от критической,

$$h'' = \frac{\varepsilon'' k_0^2}{2h'}, \quad \text{где} \quad h' = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon' - \varkappa^2}$$

При  $\omega > \omega_{\text{сг}}$  амплитуда волны уменьшается в  $e$  раз на расстоянии  $L = (h'')^{-1}$ . Нетрудно нарисовать графики: это будет сдвигающаяся волна с огибающей в виде спадающей экспоненты.

**Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени.** Здесь синим цветом показан график в следующий момент времени, желтым - в предыдущий, зеленым - огибающая (экспонента).

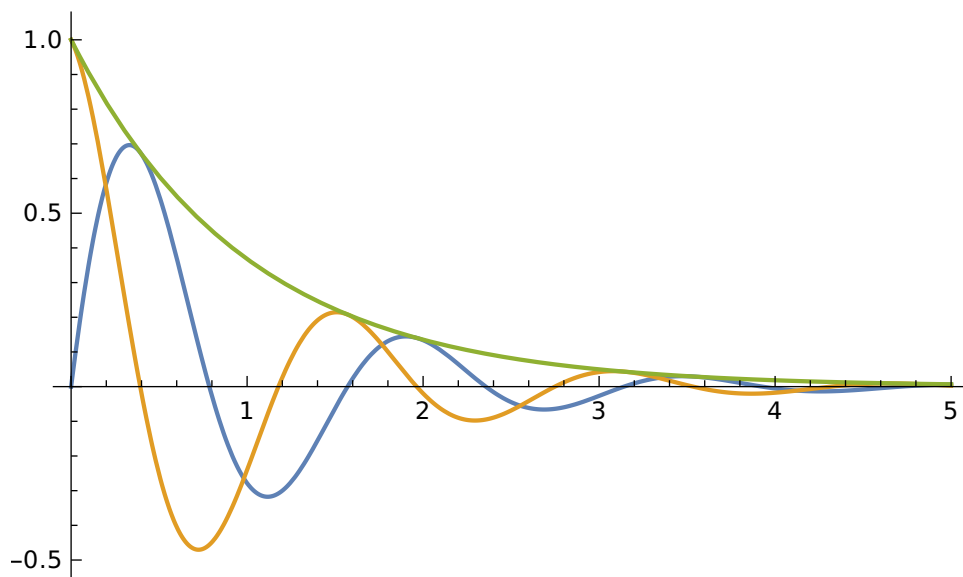


Рис. 10. Затухание поля в линии передачи

**Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения.**

В системе проводников, когда их количество больше или равно двум, могут распространяться главные (ТЕМ) волны. Именно их, в случае двухпроводной линии, можно описать с помощью телеграфных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{L}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} \end{cases}$$

Они были написаны раньше, чем уравнения Максвелла. Они не дают информации о поле во всем пространстве, а оперируют только интегральными характеристиками: током  $V(z, t)$  и напряжением  $I(z, t)$ <sup>1</sup>. Здесь введен ряд понятий, которые надо раскрыть подробнее.

**Погонные емкость  $C$ , индуктивность  $L$ .** Они вводятся как емкость (индуктивность) на единицу длины, или, выражаясь физически более верно, это отношение емкости (индуктивности) бесконечно малого отрезка двухпроводной линии к её длине. Так же вводится *погонный заряд  $Q$* .

**Напряжение.** По определению, напряжение в двухпроводной линии, в которой распространяется главная волна, будет интеграл

$$V(z) = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl,$$

где интегрирование ведется в плоскости сечения  $z = \text{const}$  от одного провода до другого, и не зависит от формы контура. Такое возможно в случае потенциальных полей: поле же главной волны в поперечном сечении потенциально ( $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ ). Хотя в целом оно не потенциально:

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot } [\nabla_{\perp} \varphi(\vec{r}_{\perp}) \cdot e^{-ihz}]$$

**Ток.** Ток в сечении двухпроводной линии есть отношение количества заряда, проходящего в единицу времени через сечение  $z = \text{const}$  одного провода, к единице времени ( $I = dQ / dt$ ).

---

<sup>1</sup>Продифференцировав второе уравнение по  $z$  и первое по  $t$ , и подставив первое во второе, мы получим волновое уравнение.

**Волновое сопротивление (характеристический импеданс).** В терминах тока и сопротивления, это есть отношение напряжения бегущей волны к току бегущей волны в одном сечении. Выражение можно получить, подставив  $V = V_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$ ,  $I = I_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$  в волновое уравнение:

$$Z_{\text{в}} = \left| \frac{V_{\text{бег}}(z)}{I_{\text{бег}}(z)} \right| = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

**Импеданс нагрузки.** Он вводится как отношение напряжения на нагрузке к току в нагрузке:

$$Z_{\text{н}} = \frac{V_{\text{н}}}{I_{\text{н}}}$$

**Импеданс в произвольном сечении линии.** Он определяется как  $Z(z) = V(z)/I(z)$ , и с этим тесно связана формула пересчета импеданса, а именно, можно узнать импеданс в любом сечении линии, зная волновой импеданс и импеданс произвольной нагрузки на конце. Тогда, считая положение нагрузки в  $z = 0$ , формула принимает вид

$$Z(z = -L) = Z_{\text{в}} \frac{Z_{\text{н}} + iZ_{\text{в}} \operatorname{tg} kL}{Z_{\text{в}} + iZ_{\text{н}} \operatorname{tg} kL}$$



## Вопрос минимума №10

**Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии.** Это может быть коэффициент отражения по току или по напряжению. Обычно, когда не упоминается чего, считается, что напряжения. По определению, это

$$\Gamma = \frac{V_{\text{отр}}}{V_{\text{пад}}} = (\text{если посчитать}) = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}}$$

**Понятие согласования линии с нагрузкой.** Линия называется согласованной, если нет отраженной волны:  $\Gamma = 0$ . Для этого нужно, чтобы было  $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$ .

## Вопрос минимума №11

**Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора.** Его можно найти, если взять прямоугольный волновод и металлизировать сечения нулей электрического поля, удовлетворив граничному условию  $E_\tau = 0$ :

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}},$$

где  $a > b$  – размеры поперечного сечения,  $L$  – длина резонатора.

**Низшая мода прямоугольного резонатора.** Если  $b < a$ ,  $b < L$ , то низшей модой будет  $TE_{101}$ :

$$\omega_{101} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}$$

Надо заметить, что ТЕ/ТМ здесь условно, так как зависит от выбора осей. Пусть ребро  $a$  вдоль  $x$ ,  $b$  вдоль  $y$ ,  $L$  вдоль  $z$ . Структура поля тогда

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\right) e^{i\omega_{101}t}$$

**Причины затухания колебаний в реальных резонаторах.** Как и в случае линии передачи, причин две: потери в заполняющей среде (комплексная  $\varepsilon$ ) и потери в стенках ( $\sigma \neq \infty$ ).

**Затухание за счет потерь в заполнении.** Чтобы его найти, нужно действовать стандартно: представить  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ , аналогично  $\mu = \dots$ . Связь частот определяется формулой

$$\omega = \frac{\omega^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где  $\omega^{(0)}$  – спектр незаполненного резонатора. Отсюда найдется  $\omega''$  ( $\omega = \omega' + i\omega''$ ), и тогда затухание будет происходить как

$$E, H \sim e^{i\omega t} \sim e^{i\omega' t} \cdot e^{-i\omega'' t}$$

При  $\mu = 1$  оказывается, что  $\omega'' \sim -\varepsilon''$ . Это не ошибка, так как  $\varepsilon'' < 0$ .

**График собств. колебаний в реальном резонаторе от времени.** Для прямоугольного резонатора можно построить  $\text{Re } E_x(t)$ , это будет синусоида, вписанная в огибающую – убывающую экспоненту:

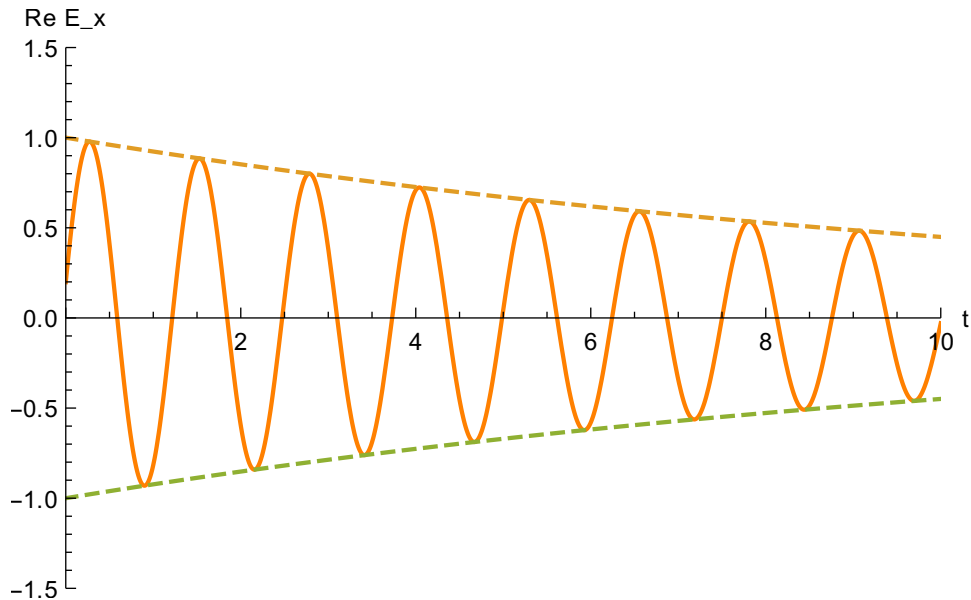


Рис. 11. Затухание поля в резонаторе со временем

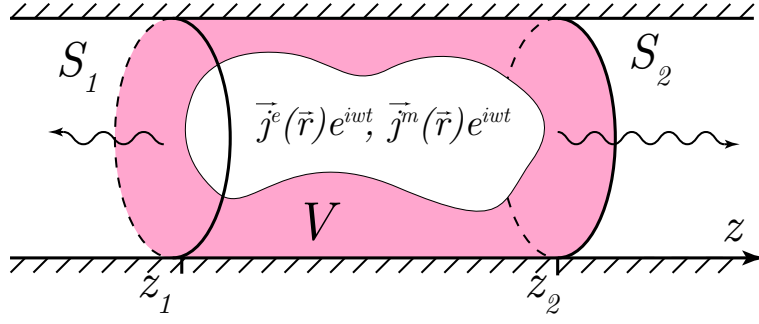


Рис. 12. Заданные источники тока в ЛП

**Представление полей в ЛП как суперпозицию мод.** Пусть в волноводе в области от  $z_1$  до  $z_2$  заданы токи  $\vec{j}^e$  и  $\vec{j}^m$ . Тогда поля вне области источников тока можно найти как суперпозицию собственных мод волновода:

$$\vec{E}(z > z_2) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \vec{E}_p$$

$$\vec{E}(z < z_1) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{-p} \vec{E}_{-p},$$

где  $p$  - индекс моды в волноводе. коэффициента  $a_p$  и  $a_{-p}$  находятся следующим образом:

$$a_p = \frac{1}{N_p} \int_V [(\vec{j}^e, \vec{E}_{-p}) - (\vec{j}^m, \vec{H}_{-p})] dV$$

$$a_{-p} = \frac{1}{N_p} \int_V [(\vec{j}^e, \vec{E}_p) - (\vec{j}^m, \vec{H}_p)] dV,$$

где  $N_p$  - это норма моды  $p$ ,  $N_p = \pm 4\Pi_p$ , где  $\Pi_p$  - мощность моды типа  $p$ .

**Представление полей в резонаторе как суперпозицию мод** Пусть в резонаторе с идеально проводящими стенками заданы токи  $\vec{j}^e e^{i\omega t}$  и  $\vec{j}^m e^{i\omega t}$ . Тогда вне области источников тока можно найти поля как суперпозицию собственных мод резонатора:

$$\vec{E} = \sum_{p=1}^{\infty} e_p \vec{E}_p + \vec{E}_{\Pi}$$

$$\vec{H} = \sum_{p=1}^{\infty} h_p \vec{H}_p + \vec{H}_{\Pi},$$

$p$  – индекс собственной моды резонатора.

Сумма это вихревая часть поля, а  $\vec{E}_{\Pi}$  – потенциальная часть поля. Решения для первого и второго слагаемого рассматриваются отдельно. Для потенциальной части необходимо решить задачу Пуассона для  $\varphi^e$  и  $\varphi^m$  с гран. условиями

$$\Delta \varphi^e = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho^e, \quad \varphi^e \Big|_S = 0$$

$$\Delta \varphi^m = -\frac{4\pi}{\mu} \rho^m, \quad \frac{\partial \varphi^e}{\partial n} \Big|_S = 0$$

Коэффициенты  $e_p$  и  $h_p$  ищутся следующим образом:

$$e_p = \frac{1}{N_p} \left( \frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2} \right) \int_V \left( \omega \left( \vec{j}^e, \vec{E}_p \right) - \omega_p \vec{j}^m \vec{H}_p \right) dV$$

$$h_p = \frac{1}{N_p} \left( \frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2} \right) \int_V \left( \omega_p \left( \vec{j}^e, \vec{E}_p \right) - \omega \vec{j}^m \vec{H}_p \right) dV,$$

$\omega$  – частота источника,  $\omega_p$  – собственная частота резонатора,  $N_p$  – норма собственного колебания

$$N_p = \frac{1}{4\pi} \int_V \varepsilon \left( \vec{E}_p \right)^2 dV = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mu \left( \vec{H}_p \right)^2 dV =$$

## Вопрос минимума №15

**Способы возбуждения волноводов и резонаторов при помощи штыря и петли.** Основной идеей является расположение возбуждающего элемента таким образом, чтобы порождаемое им поле совпадало с полем одной из мод резонатора (или волновода). Возмущение будет минимальным, если располагать штырь или петлю в точке, где соответствующее поле максимально. Так, в случае прямоугольного волновода петлю лучше располагать вблизи его стенки, поскольку там поле  $\vec{H}$  принимает наибольшее значение

## Вопрос минимума №16

**Дифференциальное и полное сечения рассеяния тела.**

$$\sigma_{\text{дифф}} = \frac{1}{S_{\text{пад}}} \frac{dP}{d\Omega},$$

где  $S$  – плотность потока падающей энергии (вектор Пойтинга),  $dP = S_{\text{рассеяния}} d\sigma$  – дифференциал мощности,  $\Omega$  – телесный угол.

$\sigma_{\text{дифф}}$  – площадка, через которую проходит столько энергии, сколько переизлучается в единице телесного угла в данном направлении.

$$\int_0^{4\pi} \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = P_{\text{полн}}$$

$P_{\text{полн}}$  – полный поток энергии, средний по времени, исходящий от тела.

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{P_{\text{полн}}}{S_{\text{пад}}}$$

$\sigma_{\text{полн}}$  указывает на полную рассеивающую способность тела.

## Вопрос минимума №17

**Приближение геометрической оптики.** Геометрическая оптика не работает в случае если:

- 1) задача на границе света и тени
- 2) задача на ребре или отверстии
- 3) задача в области каустики

Во всех других случаях г.о. можно применять, если характерный размер тела много больше длины волны.

$$L \gg \lambda$$