

Программа минимум по электродинамике

Записать формулы и построить графики (без вывода), объяснить используемые в них обозначения: дать требуемые определения

- 1) Запись функции, определяющей зависимость полей и векторных потенциалов гармонической плоской волны в линии передачи от времени t и продольной координаты z . Понятия частоты, временного периода, продольного волнового числа, длины волны, фазовой и групповой скорости.
- 2) Волновое уравнение для векторного потенциала в отсутствие источников при произвольной и гармонической зависимости от времени. Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$. Понятие поперечного волнового числа.
- 3) Понятие о ТЕ, ТМ и ТЕМ волнах. Импедансная связь поперечных компонент полей. Определение поперечного волнового импеданса.
- 4) Граничные условия для полей и функций $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ в линиях передачи с идеально проводящими границами. Математическая формулировка задачи отыскания собственных волн различных типов в идеальной линии.
- 5) Дисперсионное уравнение для волн в идеальных линиях. Понятие критической частоты и критической длины волны. Графики зависимости полей от продольной координаты в различные моменты времени при частотах, больших или меньших критической. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости в линии передачи от частоты.
- 6) В каких линиях могут существовать главные (ТЕМ) волны? Поля ТЕМ волны в коаксиальной линии.
- 7) Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода. Низшая мода (поперечное волновое число, графики поля, картина силовых линий). Низшая мода круглого волновода (поперечное волновое число, картина силовых линий).
- 8) Причины затухания волн в линиях передачи. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени.
- 9) Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения: определения величин тока и напряжения, погонной емкости и индуктивности, определения волнового сопротивления, импеданса нагрузки, импеданса в любом сечении линии с произвольной нагрузкой на конце.
- 10) Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии. Понятие согласования линии с нагрузкой.

- 11) Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора. Низшая мода прямоугольного резонатора (собственная частота, структура поля).
- 12) Причины затухания колебаний в реальных резонаторах. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. График зависимости поля собственного колебания в реальном резонаторе от времени
- 13) Представление полей, создаваемых в волноводе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных мод (общий вид формул возбуждения волноводов)
- 14) Представление полей, создаваемых в резонаторе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных колебаний (общий вид формул возбуждения резонатора). Резонансные свойства полей.
- 15) Способы возбуждения волноводов и резонаторов при помощи штыря и петли.
- 16) Определения дифференциального и полного сечений рассеяния тела. Выражение для амплитуды поля и плотности потока энергии рассеянной волны в дальней зоне через дифференциальное сечение рассеяния.
- 17) Условие применимости приближения геометрической оптики в задачах дифракции.

Задачи № 10.1 (а), 10.2, 10.4(а,б), 10.5(а,б), 10.7, 10.8, 10.16, 10.18(б), 10.19, 10.22, 10.23, 10.31(а,б), 10.33 (резонатор без плазмы), 10.35(а), 10.36, 10.38, 10.48, 11.1(1,2,3) (В.Б. Гильденбург, М.А. Миллер, Сборник задач по электродинамике, 2001 г.).

Вопрос минимума №1

Для плоской гармонической волны (ТЕМ) функция, определяющая зависимость полей, задается следующим образом

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$$

Где \vec{A}^e – векторный потенциал поля, а $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$ называется поперечной волновой функцией. Поля \vec{E} и \vec{H} определяются следующим образом

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} - \nabla \varphi$$

Где φ – скалярный потенциал поля.

Используя условие калибровки Лоренца

$$\text{div } \vec{A}^e + \frac{\varepsilon\mu}{c} i\omega\varphi = 0$$

Получим выражения для нахождения полей \vec{E} и \vec{H} в случае гармонической волны:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{ik_0\varepsilon\mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$$

Понятие частоты ω – равна количеству повторений или возникновения событий (процессов) в единицу времени.

Понятие временного периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – время, за которое совершается полное колебание.

Понятие продольного волнового числа $h = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновым числом называется быстрота роста фазы волны по пространственной продольной координате.

Понятие длины волны λ – пространственный период колебаний. Расстояние между двумя ближайшими друг к другу точками в пространстве, в которых колебания происходят в одинаковой фазе.

Понятие фазовой v_ϕ и групповой скорости $v_{\text{гр}}$. Фазовая скорость – скорость перемещения поверхности постоянной фазы. Групповая скорость – скорость перемещения квазимонохроматического пакета.

$$v_\phi = \frac{\omega}{h}, \quad v_{\text{гр}} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial h} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Где ω_0 – несущая частота группового пакета.

Вопрос минимума №2

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае произвольной зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае гармонической зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu$$

Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$.
Понятие поперечного волнового числа.

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– для декартовой системы координат.

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = \Delta_\perp \varphi^e + (k^2 - h^2) \varphi^e = 0$$

Тогда дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ выглядит следующим образом

$$\Delta_\perp \varphi^{(e,m)} + \varkappa^2 \varphi^{(e,m)} = 0$$

Где \varkappa – поперечное волновое число.

Если функции $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца, то поля удовлетворяют уравнению Максвелла.

Вопрос минимума №3

Используем выражения для полей через векторный потенциал

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{k_0 \varepsilon \mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e$$

Вычислим $\nabla \text{div} \vec{A}^e$ и $\text{rot} \vec{A}^e$ при условии $\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$

$$\text{div } \vec{A}^e = -ih \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz}$$

$$\nabla \text{div } \vec{A}^e = (-h^2 \varphi^e \vec{z}_0 - ih \nabla_\perp \varphi^e) e^{-ihz}$$

$$\text{rot } \vec{A}^e = [\nabla A_z^e, \vec{z}_0] = [\nabla_\perp \varphi^e, \vec{z}_0] e^{-ihz}$$

Тогда получим следующие выражения для комплексных амплитуд полей ТМ волн

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} E_z = \frac{\kappa^2}{k_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ H_z = 0 \end{cases}$$

ТМ – поперечная магнитная волна. Магнитное поле чисто поперечно пути распространения, но поле $\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$ имеет продольную и поперечную составляющую.

Уравнения Максвелла симметричны относительно полей, но мы получили неравноправные выражения для векторов. Это объясняется тем, что мы нашли одно из решений. Воспользовавшись принципом двойственности $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$, можно получить выражения для комплексных амплитуд полей ТЕ волны.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = \frac{\kappa^2}{k_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \text{vec} E_\perp = -\frac{1}{\varepsilon} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ E_z = 0 \end{cases}$$

функция φ не обязана быть такой же, поэтому изменяется верхний индекс на m , эта функция также должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta_\perp \varphi^m + \kappa^2 \varphi^m = 0$$

Таким образом для системы уравнений Максвелла возможны два решения ТМ и ТЕ волны. Но есть случай, когда поля чисто поперечны это случай ТЕМ волны. Когда $\varkappa = 0$, то есть $k = h$, продольные компоненты магнитного и электрического полей отсутствуют это и есть ТЕМ волна.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = E_z = 0 \\ \vec{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \end{cases}$$

φ – поперечная волновая функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta\varphi = 0$. Из формул выше видно, что поперечные компоненты полей удовлетворяют импедансному соотношению

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp\text{в}} [\vec{H}_\perp, \vec{z}_0]$$

где $\eta_{\perp\text{в}}$ называется поперечным волновым сопротивлением

$$\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{k}{h} \right)^{\pm 1}$$

«+» – соответствует волне типа ТЕ, а «-» – волне типа ТМ. Для ТЕМ волны

$$\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Вопрос минимума №4

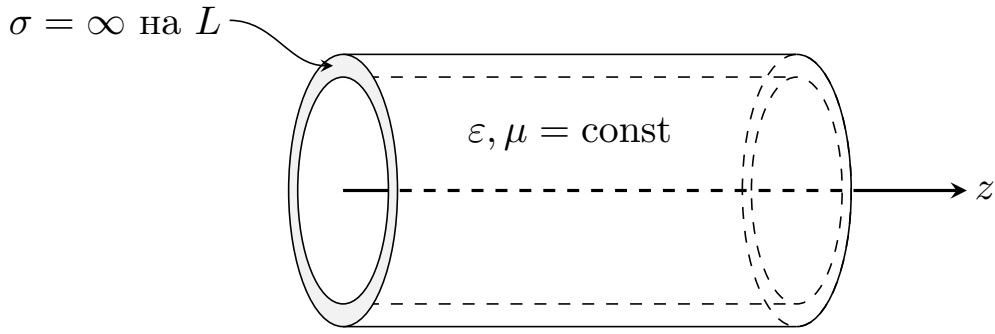


Рис. 1. Линия передачи

Поперечные волновые функции удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta_{\perp} \varphi^{(e,m)} + \kappa^2 \varphi^{(e,m)} = 0$$

На границе проводящих стенок справедливы следующие граничные условия

$$E_{\tau} = 0|_S, \quad B_n = 0|_S$$

Рассмотрим граничные условия для функций $\varphi^{(e,m)}$ для различных типов волн. Математическая формулировка задачи описания волн в линии передач.

ТМ

$$\Delta_{\perp} \varphi^e + \kappa^2 \varphi^e = 0$$

$\varphi^e|_L = 0$ Условие Дирихле.

ТЕ

$$\Delta_{\perp} \varphi^m + \kappa^2 \varphi^m = 0$$

$\frac{\partial \varphi^m}{\partial n}|_L = 0$ Условие Неймана.

Где \vec{n} – нормаль к контуру L на границе поперечного сечения.

ТЕМ

$$\Delta_{\perp} \varphi = 0$$

$$\varphi|_{L_i} = C_i$$

Таким образом описание волн в линии передач сводится к двумерной задаче Гельмгольца с следующими граничными условиями на контуре, охватывающим поперечное сечение волновода.

Вопрос минимума №5

Дисперсионное соотношение

$$\kappa^2 = k^2 - h^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - h^2$$

Где κ – поперечное волновое число, а h – продольное волновое число.

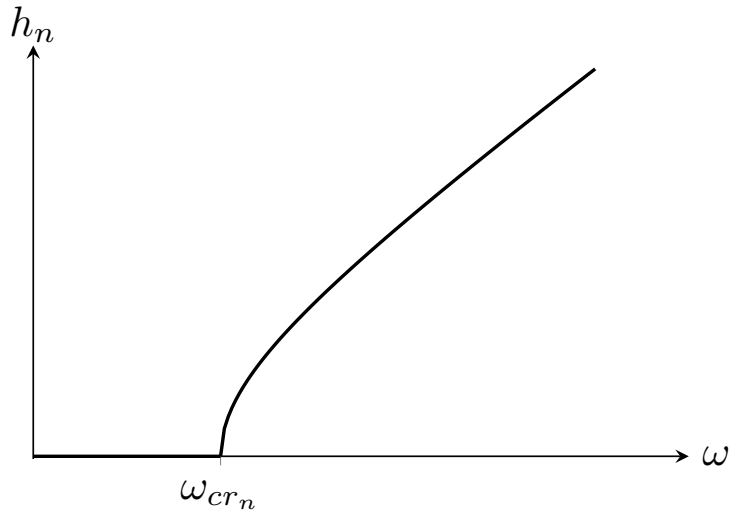


Рис. 2. Зависимость реальной части поперечного волнового числа от частоты

Любая мода в линии передачи характеризуется поперечным волновым числом, а поперечное волновое число определяет продольное.

Можем ввести критическую длину волны (продольное волновое число h равно нулю):

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \\ \omega_{cr} &= \frac{\kappa c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \\ \lambda &= \frac{2\pi c}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\kappa \sqrt{\varepsilon \mu}} \end{aligned}$$

$\omega < \omega_{cr}$ дисперсионное уравнения не имеет действительных решений – режим нераспространяющейся волны.

При $\omega > \omega_{cr}$ – режим распространяющейся волны.

Бегучести нет. Зависимость экспоненциальная

- 1) Длина волны в волноводе (подразумевают линию передачи или трубу, когда говорят волновод)

$$\lambda_v = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} = \frac{2\pi}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{k^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2 r^2}{\omega^2}}} > \lambda_0$$

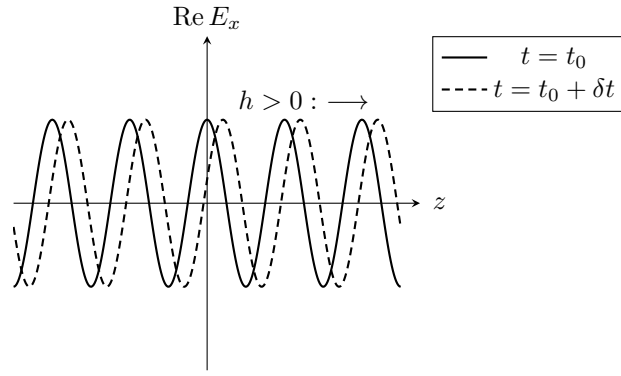


Рис. 3. Распространение волны ($h > 0$)

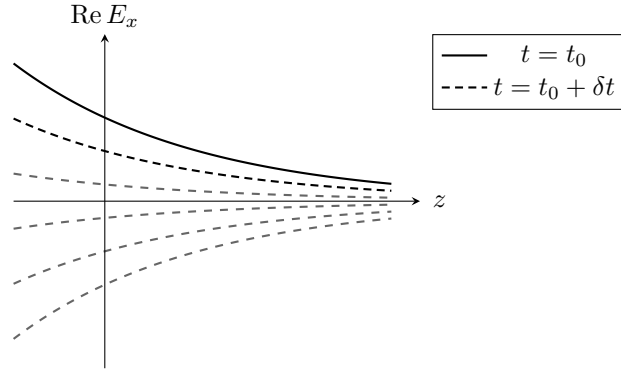


Рис. 4. Режим нераспространения ($h < 0$)

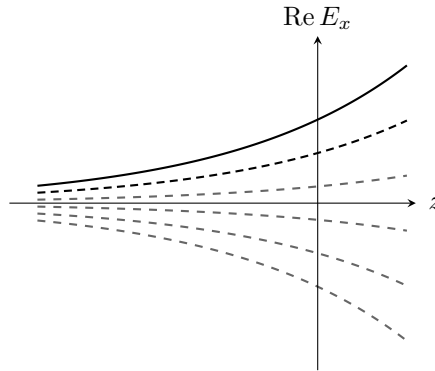


Рис. 5. Экспоненциальное нарастание амплитуды (при $h < 0$)

Когда $\omega \rightarrow \omega_{cr}$ $\lambda_v \rightarrow \infty$

λ_0 - длина волны в пространстве без волновода в той же среде.

λ_v - пространственный период.

2) Фазовая скорость - скорость перемещения плоскости постоянной фазы.

Поверхность постоянной фазы - это когда фаза константа.

$$faza = \omega t - hz + \varphi_0$$

При данном времени можно найти координату:

$$z = \frac{\omega t + \varphi_0}{h}$$

Координата будет перемещаться со скоростью:

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\varkappa^2}}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}}} > v_f^{(0)}$$
$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{k}$$

Фазовая скорость может быть больше скорости света.

- 3) Групповая скорость - скорость перемещения квазимонохроматического волнового пакета.

Пакет движется со скоростью $v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}|_{\omega=\omega_0}$ - это при малом или отсутствующем поглощении. (В пространстве, а не в линии передачи).

При большом поглощении это понятие теряет смысл.

По мере перемещения по волноводу форма сигнала будет меняться.

$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial h}|_{\omega=\omega_0}$ - формула для волновода.

Вопрос минимума №6

Главные (ТЕМ) волны в линиях передачи с идеальными границами
У ТЕМ-волн поперечное волновое число $\kappa = 0$:

$$\kappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Поля таких волн выражаются следующим образом через функцию φ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\perp} &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \nabla_{\perp} \varphi \\ \vec{H}_{\perp} &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_{\perp} \varphi, \vec{z}_0] \end{aligned}$$

вдоль одиночного проводника ТЕМ-волна с конечной энергией распространяться не может. Распространение возможно, если количество проводников будет больше одного. Например, в линии из двух проводников (рис. 6) ТЕМ-волна уже возможна.

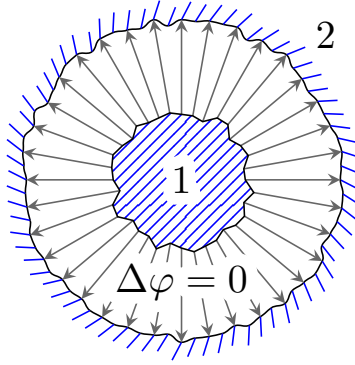


Рис. 6. Закрытая линия из двух проводников

ТЕМ-волна в идеальной линии передачи возможна, если число проводников ≥ 2 . Например, в коаксиальной линии (рис. 7) ТЕМ-волна возможна.

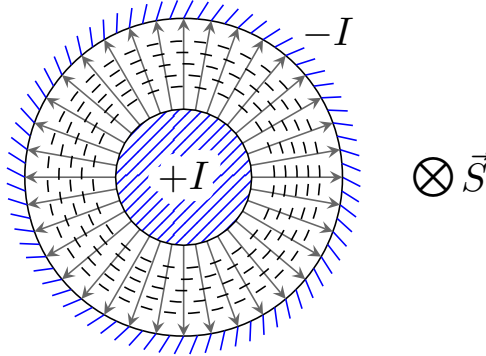


Рис. 7. Поле в коаксиальном кабеле

Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода. Поперечные волновые числа появляются как собственные числа решения уравнения Гельмгольца с граничными условиями прямоугольного волновода. Спектр найденных таким образом собственных чисел описывается формулой

$$\kappa_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Здесь m, n – индексы моды, a, b – размеры сечения волновода. Для однозначности мы всегда считаем, что $a > b$.

Низшая мода. По определению, такой модой называется мода с наименьшим поперечным волновым числом. Так как мы предполагали $a > b$, очевидно, наименьшее возможное нетривиальное поперечное волновое число будет при $m = 1, n = 0$:

$$\kappa_{10}^2 = \frac{\pi^2}{a^2}$$

Заметим, что это возможно только для ТЕ-волн, так как решение ТМ-волн не позволяет занулить m, n одновременно (это приведет к тривиальной поперечной волновой функции). Так что *низшая мода прямоугольного волновода* – TE_{10} .

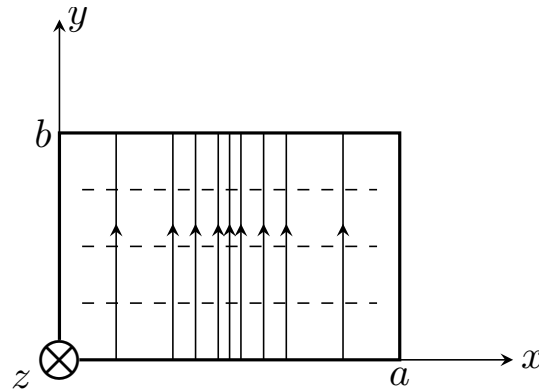


Рис. 8. Структура полей \vec{E} и \vec{H} моды TE_{10} (\vec{H} изображено пунктиром)

Низшая мода круглого волновода . Она определяется так же, но решение уравнения идет в бесселевых функциях, и поэтому поперечное волновое число имеет другой вид, и низшей модой будет TE_{11} :

$$\kappa_{11} = \frac{\mu_{11}}{a},$$

где μ_{11} – значение аргумента функции Бесселя J_1 при 1-м нуле своей производной. При этом график моды будет похож на график в прямоугольном волноводе: его можно получить чисто геометрически, постепенно сминая границы волновода, делая его более круглым. Говоря более точно, топологически эти моды подобны.

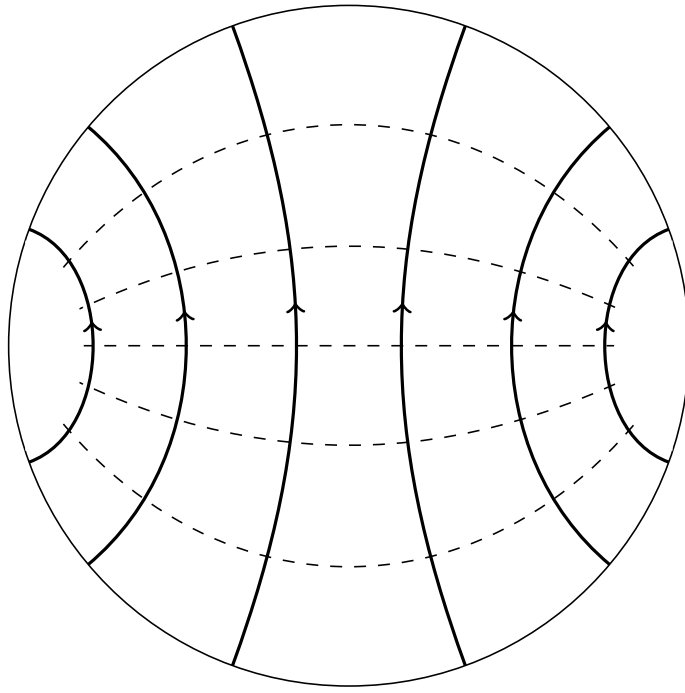


Рис. 9. Структура полей \vec{E} и \vec{H} моды TE_{11} круглого волновода (\vec{H} изображено пунктиром)

Причины затухания волн в линиях передачи. В реальных линиях передачи волна распространяется с затуханием за счет *двух* причин: *потери в заполняющей волновод среде* и *потери в стенках волновода*. Мы их учитываем по-отдельности: решаем задачу о потерях в среде, считая стенки $\sigma = \infty$, и наоборот.

Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. Чтобы учесть потери в среде, подставим комплексную диэлектрическую проницаемость в дисперсионное уравнение:

$$\varepsilon_k = \varepsilon' - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad \rightarrow \quad h^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa$$

Расчеты проводятся при $\mu = 1$. Волновое число становится комплексным $h = h' + ih''$, и в случае малых потерь можно найти h'' , которое определяет затухание. Для частот, далеких от критической,

$$h'' = \frac{\varepsilon'' k_0^2}{2h'}, \quad \text{где} \quad h' = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon' - \varkappa^2}$$

При $\omega > \omega_{\text{ср}}$ амплитуда волны уменьшается в e раз на расстоянии $L = (h'')^{-1}$. Нетрудно нарисовать графики: это будет сдвигающаяся волна с огибающей в виде спадающей экспоненты.

Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени. Здесь синим цветом показан график в следующий момент времени, желтым - в предыдущий, зеленым - огибающая (экспонента).

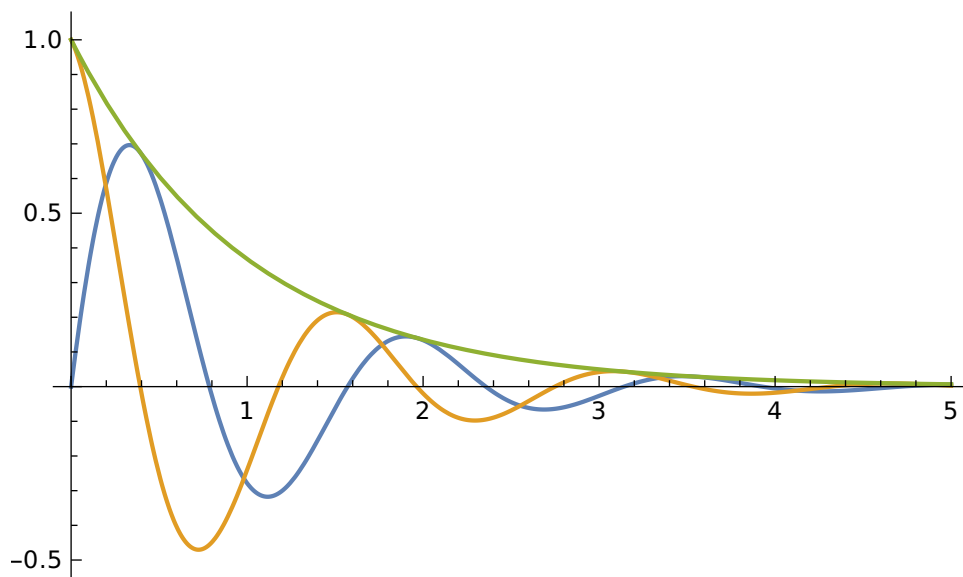


Рис. 10. Затухание поля в линии передачи

Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения.

В системе проводников, когда их количество больше или равно двум, могут распространяться главные (ТЕМ) волны. Именно их, в случае двухпроводной линии, можно описать с помощью телеграфных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{L}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} \end{cases}$$

Они были написаны раньше, чем уравнения Максвелла. Они не дают информации о поле во всем пространстве, а оперируют только интегральными характеристиками: током $V(z, t)$ и напряжением $I(z, t)$ ¹. Здесь введен ряд понятий, которые надо раскрыть подробнее.

Погонные емкость C , индуктивность L . Они вводятся как емкость (индуктивность) на единицу длины, или, выражаясь физически более верно, это отношение емкости (индуктивности) бесконечно малого отрезка двухпроводной линии к её длине. Так же вводится *погонный заряд Q* .

Напряжение. По определению, напряжение в двухпроводной линии, в которой распространяется главная волна, будет интеграл

$$V(z) = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl,$$

где интегрирование ведется в плоскости сечения $z = \text{const}$ от одного провода до другого, и не зависит от формы контура. Такое возможно в случае потенциальных полей: поле же главной волны в поперечном сечении потенциально ($\vec{E} = -\text{grad } \varphi$). Хотя в целом оно не потенциально:

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot } [\nabla_{\perp} \varphi(\vec{r}_{\perp}) \cdot e^{-ihz}]$$

Ток. Ток в сечении двухпроводной линии есть отношение количества заряда, проходящего в единицу времени через сечение $z = \text{const}$ одного провода, к единице времени ($I = dQ / dt$).

¹Продифференцировав второе уравнение по z и первое по t , и подставив первое во второе, мы получим волновое уравнение.

Волновое сопротивление (характеристический импеданс). В терминах тока и сопротивления, это есть отношение напряжения бегущей волны к току бегущей волны в одном сечении. Выражение можно получить, подставив $V = V_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$, $I = I_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$ в волновое уравнение:

$$Z_{\text{в}} = \left| \frac{V_{\text{бер}}(z)}{I_{\text{бер}}(z)} \right| = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Импеданс нагрузки. Он вводится как отношение напряжения на нагрузке к току в нагрузке:

$$Z_{\text{н}} = \frac{V_{\text{н}}}{I_{\text{н}}}$$

Импеданс в произвольном сечении линии. Он определяется как $Z(z) = V(z)/I(z)$, и с этим тесно связана формула пересчета импеданса, а именно, можно узнать импеданс в любом сечении линии, зная волновой импеданс и импеданс произвольной нагрузки на конце. Тогда, считая положение нагрузки в $z = 0$, формула принимает вид

$$Z(z = -L) = Z_{\text{в}} \frac{Z_{\text{н}} + iZ_{\text{в}} \operatorname{tg} kL}{Z_{\text{в}} + iZ_{\text{н}} \operatorname{tg} kL}$$

Вопрос минимума №10

Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии. Это может быть коэффициент отражения по току или по напряжению. Обычно, когда не упоминается чего, считается, что напряжения. По определению, это

$$\Gamma = \frac{V_{\text{отр}}}{V_{\text{пад}}} = (\text{если посчитать}) = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}}$$

Понятие согласования линии с нагрузкой. Линия называется согласованной, если нет отраженной волны: $\Gamma = 0$. Для этого нужно, чтобы было $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$.

Вопрос минимума №11

Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора. Его можно найти, если взять прямоугольный волновод и металлизировать сечения нулей электрического поля, удовлетворив граничному условию $E_\tau = 0$:

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}},$$

где $a > b$ – размеры поперечного сечения, L – длина резонатора.

Низшая мода прямоугольного резонатора. Если $b < a$, $b < L$, то низшей модой будет TE_{101} :

$$\omega_{101} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2}$$

Надо заметить, что ТЕ/ТМ здесь условно, так как зависит от выбора осей. Пусть ребро a вдоль x , b вдоль y , L вдоль z . Структура поля тогда

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\right) e^{i\omega_{101}t}$$

Причины затухания колебаний в реальных резонаторах. Как и в случае линии передачи, причин две: потери в заполняющей среде (комплексная ε) и потери в стенках ($\sigma \neq \infty$).

Затухание за счет потерь в заполнении. Чтобы его найти, нужно действовать стандартно: представить $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, аналогично $\mu = \dots$. Связь частот определяется формулой

$$\omega = \frac{\omega^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $\omega^{(0)}$ – спектр незаполненного резонатора. Отсюда найдется ω'' ($\omega = \omega' + i\omega''$), и тогда затухание будет происходить как

$$E, H \sim e^{i\omega t} \sim e^{i\omega' t} \cdot e^{-i\omega'' t}$$

При $\mu = 1$ оказывается, что $\omega'' \sim -\varepsilon''$. Это не ошибка, так как $\varepsilon'' < 0$.

График собств. колебаний в реальном резонаторе от времени. Для прямоугольного резонатора можно построить $\text{Re } E_x(t)$, это будет синусоида, вписанная в огибающую – убывающую экспоненту:

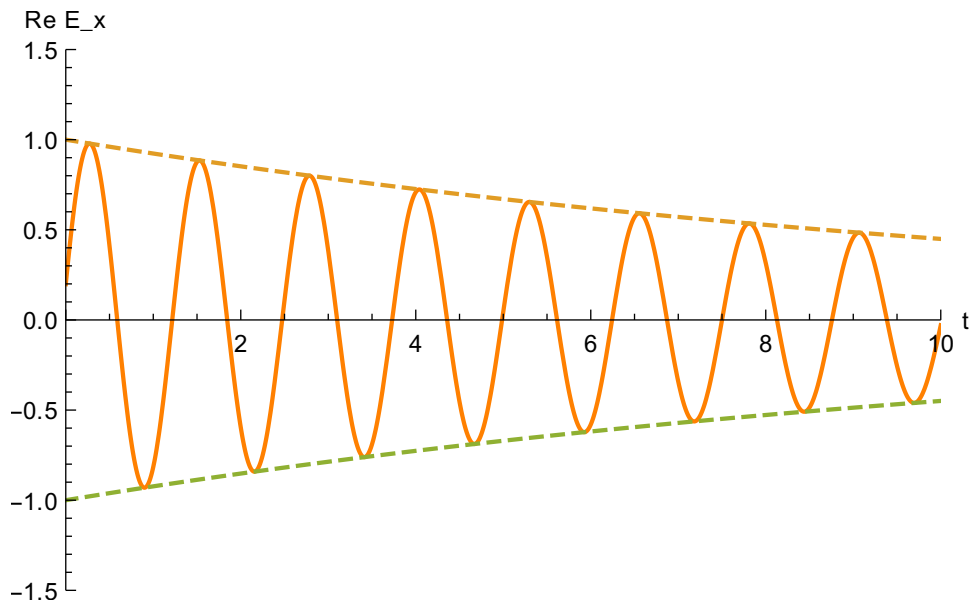


Рис. 11. Затухание поля в резонаторе со временем

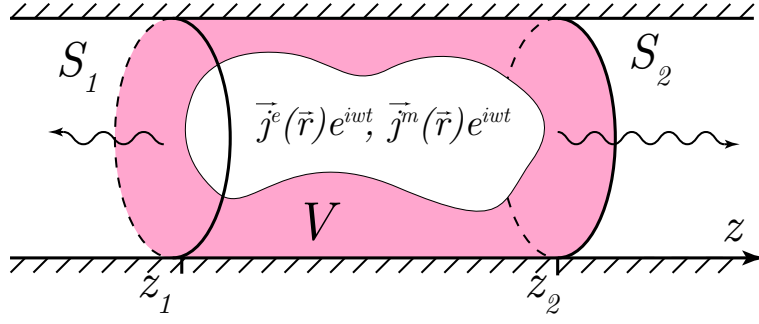


Рис. 12. Заданные источники тока в ЛП

Представление полей в ЛП как суперпозицию мод. Пусть в волноводе в области от z_1 до z_2 заданы токи \vec{j}^e и \vec{j}^m . Тогда поля вне области источников тока можно найти как суперпозицию собственных мод волновода:

$$\vec{E}(z > z_2) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \vec{E}_p$$

$$\vec{E}(z < z_1) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{-p} \vec{E}_{-p},$$

где p - индекс моды в волноводе. коэффициента a_p и a_{-p} находятся следующим образом:

$$a_p = \frac{1}{N_p} \int_V [(\vec{j}^e, \vec{E}_{-p}) - (\vec{j}^m, \vec{H}_{-p})] dV$$

$$a_{-p} = \frac{1}{N_p} \int_V [(\vec{j}^e, \vec{E}_p) - (\vec{j}^m, \vec{H}_p)] dV,$$

где N_p - это норма моды p , $N_p = \pm 4\Pi_p$, где Π_p - мощность моды типа p .

Представление полей в резонаторе как суперпозицию мод Пусть в резонаторе с идеально проводящими стенками заданы токи $\vec{j}^e e^{i\omega t}$ и $\vec{j}^m e^{i\omega t}$. Тогда вне области источников тока можно найти поля как суперпозицию собственных мод резонатора:

$$\vec{E} = \sum_{p=1}^{\infty} e_p \vec{E}_p + \vec{E}_{\Pi}$$

$$\vec{H} = \sum_{p=1}^{\infty} h_p \vec{H}_p + \vec{H}_{\Pi},$$

p – индекс собственной моды резонатора.

Сумма это вихревая часть поля, а \vec{E}_{Π} – потенциальная часть поля. Решения для первого и второго слагаемого рассматриваются отдельно. Для потенциальной части необходимо решить задачу Пуассона для φ^e и φ^m с гран. условиями

$$\Delta \varphi^e = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \rho^e, \quad \varphi^e \Big|_S = 0$$

$$\Delta \varphi^m = -\frac{4\pi}{\mu} \rho^m, \quad \frac{\partial \varphi^e}{\partial n} \Big|_S = 0$$

Коэффициенты e_p и h_p ищутся следующим образом:

$$e_p = \frac{1}{N_p} \left(\frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2} \right) \int_V \left(\omega \left(\vec{j}^e, \vec{E}_p \right) - \omega_p \vec{j}^m \vec{H}_p \right) dV$$

$$h_p = \frac{1}{N_p} \left(\frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2} \right) \int_V \left(\omega_p \left(\vec{j}^e, \vec{E}_p \right) - \omega \vec{j}^m \vec{H}_p \right) dV,$$

ω – частота источника, ω_p – собственная частота резонатора, N_p – норма собственного колебания

$$N_p = \frac{1}{4\pi} \int_V \varepsilon \left(\vec{E}_p \right)^2 dV = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mu \left(\vec{H}_p \right)^2 dV =$$

Вопрос минимума №15

Способы возбуждения волноводов и резонаторов при помощи штыря и петли. Основной идеей является расположение возбуждающего элемента таким образом, чтобы порождаемое им поле совпадало с полем одной из мод резонатора (или волновода). Возмущение будет минимальным, если располагать штырь или петлю в точке, где соответствующее поле максимально. Так, в случае прямоугольного волновода петлю лучше располагать вблизи его стенки, поскольку там поле \vec{H} принимает наибольшее значение

Вопрос минимума №16

Дифференциальное и полное сечения рассеяния тела.

$$\sigma_{\text{дифф}} = \frac{1}{S_{\text{пад}}} \frac{dP}{d\Omega},$$

где S – плотность потока падающей энергии (вектор Пойтинга), $dP = S_{\text{рассеяния}} d\sigma$ – дифференциал мощности, Ω – телесный угол.

$\sigma_{\text{дифф}}$ – площадка, через которую проходит столько энергии, сколько переизлучается в единице телесного угла в данном направлении.

$$\int_0^{4\pi} \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = P_{\text{полн}}$$

$P_{\text{полн}}$ – полный поток энергии, средний по времени, исходящий от тела.

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{P_{\text{полн}}}{S_{\text{пад}}}$$

$\sigma_{\text{полн}}$ указывает на полную рассеивающую способность тела.