

Программа минимум по электродинамике

Записать формулы и построить графики (без вывода), объяснить используемые в них обозначения: дать требуемые определения

- 1) Запись функции, определяющей зависимость полей и векторных потенциалов гармонической плоской волны в линии передачи от времени t и продольной координаты z . Понятия частоты, временного периода, продольного волнового числа, длины волны, фазовой и групповой скорости.
- 2) Волновое уравнение для векторного потенциала в отсутствие источников при произвольной и гармонической зависимости от времени. Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$. Понятие поперечного волнового числа.
- 3) Понятие о ТЕ, ТМ и ТЕМ волнах. Импедансная связь поперечных компонент полей. Определение поперечного волнового импеданса.
- 4) Граничные условия для полей и функций $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ в линиях передачи с идеально проводящими границами. Математическая формулировка задачи отыскания собственных волн различных типов в идеальной линии.
- 5) Дисперсионное уравнение для волн в идеальных линиях. Понятие критической частоты и критической длины волны. Графики зависимости полей от продольной координаты в различные моменты времени при частотах, больших или меньших критической. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости в линии передачи от частоты.
- 6) В каких линиях могут существовать главные (ТЕМ) волны? Поля ТЕМ волны в коаксиальной линии.
- 7) Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода. Низшая мода (поперечное волновое число, графики поля, картина силовых линий). Низшая мода круглого волновода (поперечное волновое число, картина силовых линий).
- 8) Причины затухания волн в линиях передачи. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени.

- 9) Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения: определения величин тока и напряжения, погонной емкости и индуктивности, определения волнового сопротивления, импеданса нагрузки, импеданса в любом сечении линии с произвольной нагрузкой на конце.
- 10) Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии. Понятие согласования линии с нагрузкой.
- 11) Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора. Низшая мода прямоугольного резонатора (собственная частота, структура поля).
- 12) Причины затухания колебаний в реальных резонаторах. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. График зависимости поля собственного колебания в реальном резонаторе от времени
- 13) Представление полей, создаваемых в волноводе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных мод (общий вид формул возбуждения волноводов)
- 14) Представление полей, создаваемых в резонаторе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных колебаний (общий вид формул возбуждения резонатора). Резонансные свойства полей.
- 15) Способы возбуждения волноводов и резонаторов при помощи штыря и петли.
- 16) Определения дифференциального и полного сечений рассеяния тела. Выражение для амплитуды поля и плотности потока энергии рассеянной волны в дальней зоне через дифференциальное сечение рассеяния.
- 17) Условие применимости приближения геометрической оптики в задачах дифракции.

Задачи № 10.1 (а), 10.2, 10.4(а,б), 10.5(а,б), 10.7, 10.8, 10.16, 10.18(б), 10.19, 10.22, 10.23, 10.31(а,б), 10.33 (резонатор без плазмы), 10.35(а), 10.36, 10.38, 10.48, 11.1(1,2,3) (В.Б. Гильденбург, М.А. Миллер, Сборник задач по электродинамике, 2001 г.).

Для плоской гармонической волны (ТЕМ) функция, определяющая зависимость полей, задается следующим образом

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$$

Где \vec{A}^e – векторный потенциал поля, а $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$ называется поперечной волновой функцией. Поля \vec{E} и \vec{H} определяются следующим образом

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} - \nabla \varphi$$

Где φ – скалярный потенциал поля.

Используя условие калибровки Лоренца

$$\text{div } \vec{A}^e + \frac{\varepsilon\mu}{c} i\omega\varphi = 0$$

Получим выражения для нахождения полей \vec{E} и \vec{H} в случае гармонической волны:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{ik_0\varepsilon\mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}$$

Понятие частоты ω – равна количеству повторений или возникновения событий (процессов) в единицу времени.

Понятие временного периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – время, за которое совершается полное колебание.

Понятие продольного волнового числа $h = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновым числом называется быстрота роста фазы волны по пространственной продольной координате.

Понятие длины волны λ – пространственный период колебаний. Расстояние между двумя ближайшими друг к другу точками в пространстве, в которых колебания происходят в одинаковой фазе.

Понятие фазовой v_f и групповой скорости $v_{гр}$. Фазовая скорость – скорость перемещения поверхности постоянной фазы. Групповая скорость – скорость перемещения квазимонохроматического пакета.

$$v_f = \frac{\omega}{h}, \quad v_{гр} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial h} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Где ω_0 – несущая частота группового пакета.

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае произвольной зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае гармонической зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu$$

Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$. Понятие поперечного волнового числа.

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– для декартовой системы координат.

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = \Delta_\perp \varphi^e + (k^2 - h^2) \varphi^e = 0$$

Тогда дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ выглядит следующим образом

$$\Delta_\perp \varphi^{(e,m)} + \varkappa^2 \varphi^{(e,m)} = 0$$

Где \varkappa – поперечное волновое число.

Если функции $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца, то поля удовлетворяют уравнению Максвелла.

Используем выражения для полей через векторный потенциал

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{k_0 \varepsilon \mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e$$

Вычислим $\nabla \text{div} \vec{A}^e$ и $\text{rot} \vec{A}^e$ при условии $\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$

$$\text{div } \vec{A}^e = -ih \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz}$$

$$\nabla \text{div } \vec{A}^e = (-h^2 \varphi^e \vec{z}_0 - ih \nabla_\perp \varphi^e) e^{-ihz}$$

$$\text{rot } \vec{A}^e = [\nabla A_z^e, \vec{z}_0] = [\nabla_\perp \varphi^e, \vec{z}_0] e^{-ihz}$$

Тогда получим следующие выражения для комплексных амплитуд полей ТМ волны

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} E_z = \frac{\varkappa^2}{k_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ H_z = 0 \end{cases}$$

ТМ - поперечная магнитная волна. Магнитное поле чисто поперечно пути распространения, но поле $\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$ имеет продольную и поперечную составляющую.

Уравнения Максвелла симметричны относительно полей, но мы получили неравноправные выражения для векторов. Это объясняется тем, что мы нашли одно из решений. Воспользовавшись принципом двойственности $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$, можно получить выражения для комплексных амплитуд полей ТЕ волны.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = \frac{\varkappa^2}{k_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ E_z = 0 \end{cases}$$

функция φ не обязана быть такой же, поэтому изменяется верхний индекс на m , эта функция также должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta_\perp \varphi^m + \varkappa^2 \varphi^m = 0$$

Таким образом для системы уравнений Максвелла возможны два решения ТМ и ТЕ волны. Но есть случай, когда поля чисто поперечны это случай ТЕМ волны. Когда $\varkappa = 0$, то есть $k = h$, продольные компоненты магнитного и электрического полей отсутствуют это и есть ТЕМ волна.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = E_z = 0 \\ \vec{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \end{cases}$$

φ – поперечная волновая функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta\varphi = 0$.

Из формул выше видно, что поперечные компоненты полей удовлетворяют импедансному соотношению

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp\text{в}} [\vec{H}_\perp, \vec{z}_0]$$

где $\eta_{\perp\text{в}}$ называется поперечным волновым сопротивлением

$$\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{k}{h} \right)^{\pm 1}$$

«+» – соответствует волне типа ТЕ, а «-» – волне типа ТМ. Для ТЕМ
волны $\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

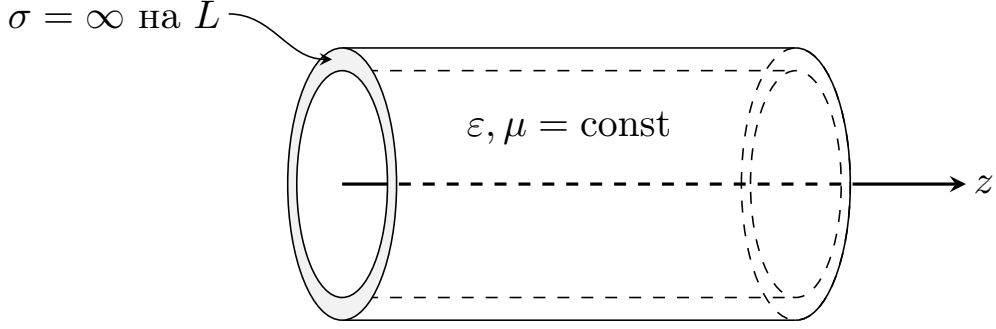


Рис. 1. Линия передачи

Поперечные волновые функции удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta_{\perp} \varphi^{(e,m)} + \kappa^2 \varphi^{(e,m)} = 0$$

На границе проводящих стенок справедливы следующие граничные условия

$$E_{\tau} = 0|_S, \quad B_n = 0|_S$$

Рассмотрим граничные условия для функций $\varphi^{(e,m)}$ для различных типов волн.

Математическая формулировка задачи описания волн в линии передач.

ТМ

$$\Delta_{\perp} \varphi^e + \kappa^2 \varphi^e = 0$$

$\varphi^e|_L = 0$ Условие Дирихле.

ТЕ

$$\Delta_{\perp} \varphi^m + \kappa^2 \varphi^m = 0$$

$\frac{\partial \varphi^m}{\partial n}|_L = 0$ Условие Неймана.

Где \vec{n} – нормаль к контуру L на границе поперечного сечения.

ТЕМ

$$\Delta_{\perp} \varphi = 0$$

$$\varphi|_{L_i} = C_i$$

Таким образом описание волн в линии передач сводится к двумерной задаче Гельмгольца с следующими граничными условиями на контуре, охватывающим поперечное сечение волновода.

Дисперсионное соотношение

$$\kappa^2 = k^2 - h^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu - h^2$$

Где κ – поперечное волновое число, а h – продольное волновое число.

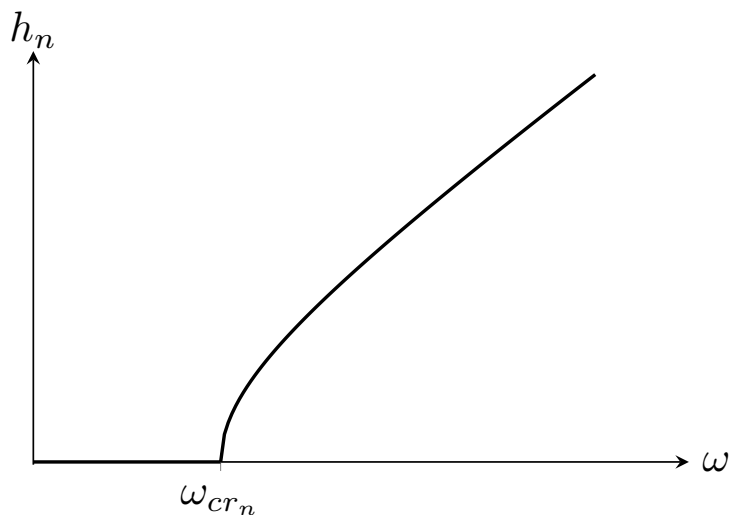


Рис. 2. Зависимость реальной части поперечного волнового числа от частоты

Любая мода в линии передачи характеризуется поперечным волновым числом, а поперечное волновое число определяет продольное.

Можем ввести критическую длину волны (продольное волновое число h равно нулю):

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \\ \omega_{cr} &= \frac{\kappa c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \\ \lambda &= \frac{2\pi c}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\kappa \sqrt{\varepsilon \mu}} \end{aligned}$$

$\omega < \omega_{cr}$ дисперсионное уравнения не имеет действительных решений – режим нераспространяющейся волны.

При $\omega > \omega_{cr}$ – режим распространяющейся волны.

Бегучести нет. Зависимость экспоненциальная

- 1) Длина волны в волноводе (подразумевают линию передачи или трубу, когда говорят волновод)

$$\lambda_v = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} = \frac{2\pi}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{k^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2 r^2}{\omega^2}}} > \lambda_0$$

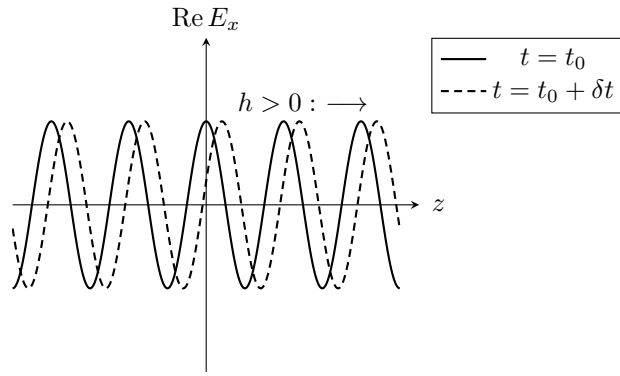


Рис. 3. Распространение волны ($h > 0$)

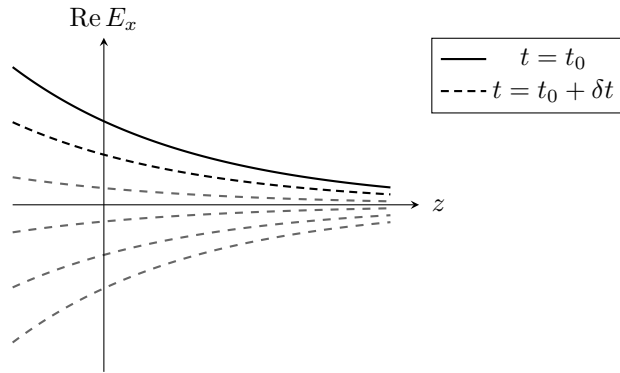


Рис. 4. Режим нераспространения ($h < 0$)

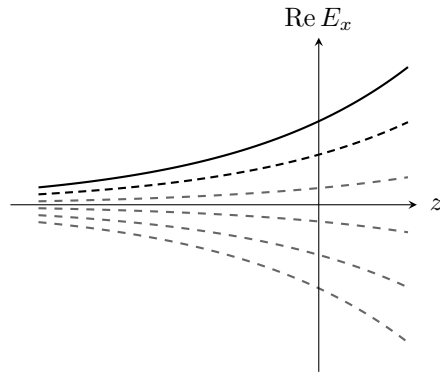


Рис. 5. Экспоненциальное нарастание амплитуды (при $h < 0$)

Когда $\omega \rightarrow \omega_{cr}$ $\lambda_v \rightarrow \infty$

λ_0 - длина волны в пространстве без волновода в той же среде.

λ_v - пространственный период.

2) Фазовая скорость - скорость перемещения плоскости постоянной фазы.

Поверхность постоянной фазы - это когда фаза константа.

$$faza = \omega t - hz + \varphi_0$$

При данном времени можно найти координату:

$$z = \frac{\omega t + \varphi_0}{h}$$

Координата будет перемещаться со скоростью:

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k^2}{\varkappa^2}}} = \frac{\omega}{k} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}^2}{\omega^2}}} > v_f^{(0)}$$

$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{k}$$

Фазовая скорость может быть больше скорости света.

- 3) Групповая скорость - скорость перемещения квазимонохроматического волнового пакета.

Пакет движется со скоростью $v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k}|_{\omega=\omega_0}$ - это при малом или отсутствующем поглощении. (В пространстве, а не в линии передачи).

При большом поглощении это понятие теряет смысл.

По мере перемещения по волноводу форма сигнала будет меняться.

$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial h}|_{\omega=\omega_0}$ - формула для волновода.

Главные (ТЕМ) волны в линиях передачи с идеальными границами
У ТЕМ-волн поперечное волновое число $\kappa = 0$:

$$\kappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Поля таких волн выражаются следующим образом через функцию φ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\perp} &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \nabla_{\perp} \varphi \\ \vec{H}_{\perp} &= -\frac{1}{\mu} [\nabla_{\perp} \varphi, \vec{z}_0] \end{aligned}$$

вдоль одиночного проводника ТЕМ-волна с конечной энергией распространяться не может. Распространение возможно, если количество проводников будет больше одного. Например, в линии из двух проводников (рис. 6) ТЕМ-волна уже возможна.

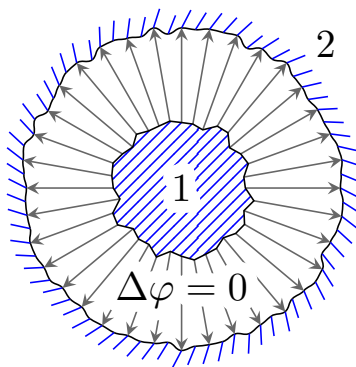


Рис. 6. Замкнутая линия из двух проводников

ТЕМ-волна в идеальной линии передачи возможна, если число проводников ≥ 2 .

Например, в коаксиальной линии (рис. 7) ТЕМ-волна возможна.

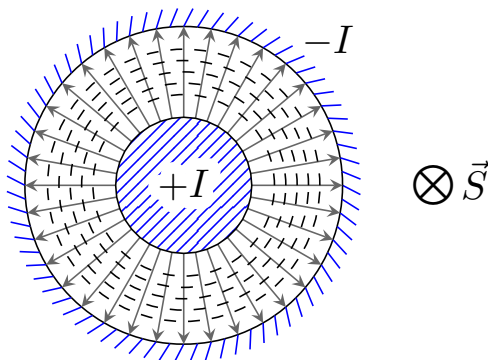


Рис. 7. Поле в коаксиальном кабеле