

Программа минимум по электродинамике

Записать формулы и построить графики (без вывода), объяснить используемые в них обозначения: дать требуемые определения

- 1) Запись функции, определяющей зависимость полей и векторных потенциалов гармонической плоской волны в линии передачи от времени t и продольной координаты z . Понятия частоты, временного периода, продольного волнового числа, длины волны, фазовой и групповой скорости.
- 2) Волновое уравнение для векторного потенциала в отсутствие источников при произвольной и гармонической зависимости от времени. Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$. Понятие поперечного волнового числа.
- 3) Понятие о ТЕ, ТМ и ТЕМ волнах. Импедансная связь поперечных компонент полей. Определение поперечного волнового импеданса.
- 4) Граничные условия для полей и функций $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ в линиях передачи с идеально проводящими границами. Математическая формулировка задачи отыскания собственных волн различных типов в идеальной линии.
- 5) Дисперсионное уравнение для волн в идеальных линиях. Понятие критической частоты и критической длины волны. Графики зависимости полей от продольной координаты в различные моменты времени при частотах, больших или меньших критической. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости в линии передачи от частоты.
- 6) В каких линиях могут существовать главные (ТЕМ) волны? Поля ТЕМ волны в коаксиальной линии.
- 7) Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода. Низшая мода (поперечное волновое число, графики поля, картина силовых линий). Низшая мода круглого волновода (поперечное волновое число, картина силовых линий).
- 8) Причины затухания волн в линиях передачи. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени.
- 9) Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения: определения величин тока и напряжения, погонной емкости и индуктивности, определения волнового сопротивления, импеданса нагрузки, импеданса в любом сечении линии с произвольной нагрузкой на конце.
- 10) Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии. Понятие согласования линии с нагрузкой.

- 11) Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора. Низшая мода прямоугольного резонатора (собственная частота, структура поля).
- 12) Причины затухания колебаний в реальных резонаторах. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. График зависимости поля собственного колебания в реальном резонаторе от времени
- 13) Представление полей, создаваемых в волноводе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных мод (общий вид формул возбуждения волноводов)
- 14) Представление полей, создаваемых в резонаторе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных колебаний (общий вид формул возбуждения резонатора). Резонансные свойства полей.
- 15) Способы возбуждения волноводов и резонаторов при помощи штыря и петли.
- 16) Определения дифференциального и полного сечений рассеяния тела. Выражение для амплитуды поля и плотности потока энергии рассеянной волны в дальней зоне через дифференциальное сечение рассеяния.
- 17) Условие применимости приближения геометрической оптики в задачах дифракции.

Задачи № 10.1 (а), 10.2, 10.4(а,б), 10.5(а,б), 10.7, 10.8, 10.16, 10.18(б), 10.19, 10.22, 10.23, 10.31(а,б), 10.33 (резонатор без плазмы), 10.35(а), 10.36, 10.38, 10.48, 11.1(1,2,3) (В.Б. Гильденбург, М.А. Миллер, Сборник задач по электродинамике, 2001 г.).

Вопрос минимума №1

Для плоской гармонической волны (ТЕМ) функция, определяющая зависимость полей, задается следующим образом

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$$

Где \vec{A}^e – векторный потенциал поля, а $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$ называется поперечной волновой функцией. Поля \vec{E} и \vec{H} определяются следующим образом

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} - \nabla \varphi$$

Где φ – скалярный потенциал поля. Используя условие калибровки Лоренца

$$\text{div} \vec{A}^e + \frac{\varepsilon \mu}{c} i \omega \varphi = 0$$

Получим выражения для нахождения полей \vec{E} и \vec{H} в случае гармонической волны:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{ik_0 \varepsilon \mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Понятие частоты ω – равна количеству повторений или возникновения событий (процессов) в единицу времени.

Понятие временного периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – время, за которое совершается полное колебание.

Понятие продольного волнового числа $h = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновым числом называется быстрота роста фазы волны по пространственной продольной координате.

Понятие длины волны λ – пространственный период колебаний. Расстояние между двумя ближайшими друг к другу точками в пространстве, в которых колебания происходят в одинаковой фазе.

Понятие фазовой v_ϕ и групповой скорости $v_{\text{гр}}$. Фазовая скорость – скорость перемещения поверхности постоянной фазы. Групповая скорость – скорость перемещения квазимонохроматического пакета.

$$v_\phi = \frac{\omega}{h}, \quad v_{\text{гр}} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial h} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Где ω_0 – несущая частота группового пакета.

Вопрос минимума №2

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае произвольной зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае гармонической зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu$$

Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$. Понятие поперечного волнового числа.

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– для декартовой системы координат.

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = \Delta_\perp \varphi^e + (k^2 - h^2) \varphi^e = 0$$

Тогда дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ выглядит следующим образом

$$\Delta_\perp \varphi^{(e,m)} + \varkappa^2 \varphi^{(e,m)} = 0$$

Где \varkappa – поперечное волновое число. Если функции $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца, то поля удовлетворяют уравнению Максвелла.

Вопрос минимума №3

Используем выражения для полей через векторный потенциал

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{k_0 \varepsilon \mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e$$

Вычислим $\nabla \text{div} \vec{A}^e$ и $\text{rot} \vec{A}^e$ при условии $\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$

$$\text{div} \vec{A}^e = -ih \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz}$$

$$\nabla \text{div} \vec{A}^e = (-h^2 \varphi^e \vec{z}_0 - ih \nabla_\perp \varphi^e) e^{-ihz}$$

$$\text{rot} \vec{A}^e = [\nabla A_z^e, \vec{z}_0] = [\nabla_\perp \varphi^e, \vec{z}_0] e^{-ihz}$$

Тогда получим следующие выражения для комплексных амплитуд полей ТМ волны

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} E_z = \frac{\varkappa^2}{k_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ H_z = 0 \end{cases}$$

ТМ - поперечная магнитная волна. Магнитное поле чисто поперечно пути распространения, но поле $\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$ имеет продольную и поперечную составляющую.

Уравнения Максвелла симметричны относительно полей, но мы получили неравные выражения для векторов. Это объясняется тем, что мы нашли одно из решений. Воспользовавшись принципом двойственности $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$, $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$, можно получить выражения для комплексных амплитуд полей ТЕ волны.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = \frac{\varkappa^2}{k_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ E_z = 0 \end{cases}$$

функция φ не обязана быть такой же, поэтому изменяется верхний индекс на m , эта функция также должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta_\perp \varphi^m + \varkappa^2 \varphi^m = 0$$

Таким образом для системы уравнений Максвелла возможны два решения ТМ и ТЕ волны. Но есть случай, когда поля чисто поперечны это случай ТЕМ волны. Когда $\varkappa = 0$, то есть $k = h$, продольные компоненты магнитного и электрического полей отсутствуют это и есть ТЕМ волна.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = E_z = 0 \\ \vec{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \end{cases}$$

φ – поперечная волновая функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta\varphi = 0$. Из формул выше видно, что поперечные компоненты полей удовлетворяют импедансному соотношению

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp\text{в}} [\vec{H}_\perp, \vec{z}_0]$$

где $\eta_{\perp\text{в}}$ называется поперечным волновым сопротивлением

$$\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{k}{h} \right)^{\pm 1}$$

где «+» – соответствует волне типа ТЕ, а «-» – волне типа ТМ. Для ТЕМ волны

$$\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода. Поперечные волновые числа появляются как собственные числа решения уравнения Гельмгольца с граничными условиями прямоугольного волновода. Спектр найденных таким образом собственных чисел описывается формулой

$$\kappa_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (1)$$

Здесь m, n – индексы моды, a, b – размеры сечения волновода. Для однозначности мы всегда считаем, что $a > b$.

Низшая мода. По определению, такой модой называется мода с наименьшим поперечным волновым числом. Так как мы предполагали $a > b$, очевидно, наименьшее возможное нетривиальное поперечное волновое число будет при $m = 1, n = 0$:

$$\kappa_{10}^2 = \frac{\pi^2}{a^2} \quad (2)$$

Заметим, что это возможно только для ТЕ-волн, так как решение ТМ-волн не позволяет занулить m, n одновременно (это приведет к тривиальной поперечной волновой функции). Так что *низшая мода прямоугольного волновода* – TE_{10} .

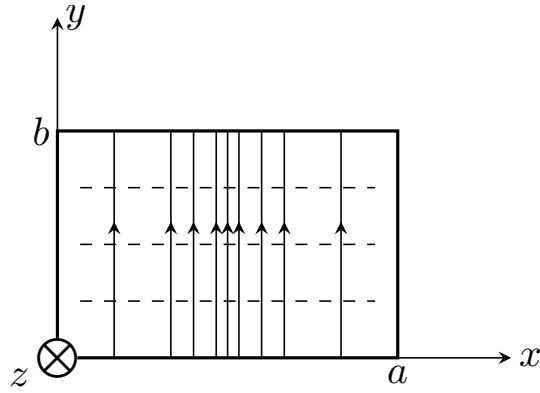


Рис. 1. Структура полей \vec{E} и \vec{H} моды TE_{10} (\vec{H} изображено пунктиром)

Низшая мода круглого волновода . Она определяется так же, но решение уравнения идет в бесселевых функциях, и поэтому поперечное волновое число имеет другой вид, и низшей модой будет TE_{11} :

$$\kappa_{11} = \frac{\mu_{11}}{a}, \quad (3)$$

где μ_{11} – значение аргумента функции Бесселя J_1 при 1-м нуле своей производной. При этом график моды будет похож на график в прямоугольном волноводе: его можно получить чисто геометрически, постепенно сминая границы волновода, делая его более круглым. Говоря более точно, топологически эти моды подобны.

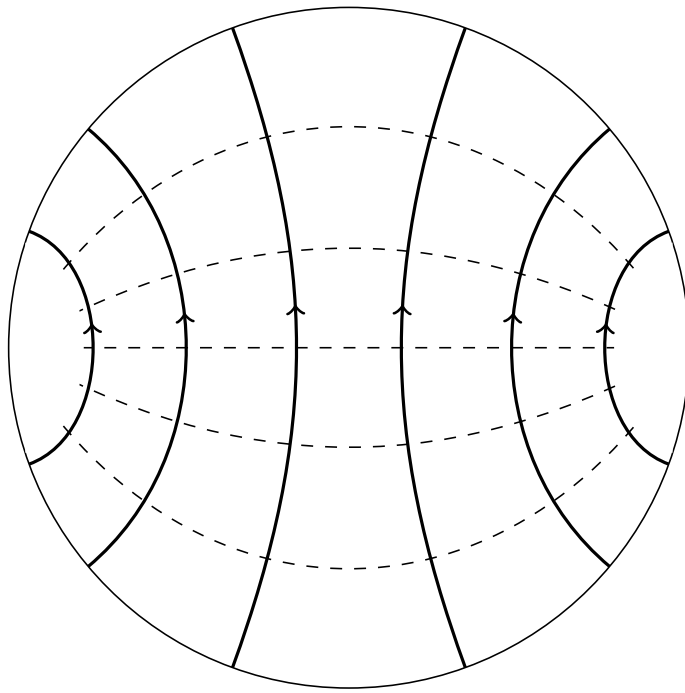


Рис. 2. Структура полей \vec{E} и \vec{H} моды TE_{11} круглого волновода (\vec{H} изображено пунктиром)

Причины затухания волн в линиях передачи. В реальных линиях передачи волна распространяется с затуханием за счет *двух* причин: *потери в заполняющей волновод среде* и *потери в стенках волновода*. Мы их учитываем по-отдельности: решаем задачу о потерях в среде, считая стенки $\sigma = \infty$, и наоборот.

Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. Чтобы учесть потери в среде, подставим комплексную диэлектрическую проницаемость в дисперсионное уравнение:

$$\varepsilon_k = \varepsilon' - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \rightarrow h^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu - \kappa^2 \quad (4)$$

Расчеты проводятся при $\mu = 1$. Волновое число становится комплексным $h = h' + ih''$, и в случае малых потерь можно найти h'' , которое определяет затухание. Для частот, далеких от критической,

$$h'' = \frac{\varepsilon'' k_0^2}{2h'}, \quad \text{где} \quad h' = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon' - \kappa^2} \quad (5)$$

При $\omega > \omega_{\text{кр}}$ амплитуда волны уменьшается в e раз на расстоянии $L = (h'')^{-1}$. Нетрудно нарисовать графики: это будет сдвигающаяся волна с огибающей в виде спадающей экспоненты.

Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени. Здесь синим цветом показан график в следующий момент времени, желтым - в предыдущий, зеленым - огибающая (экспонента).

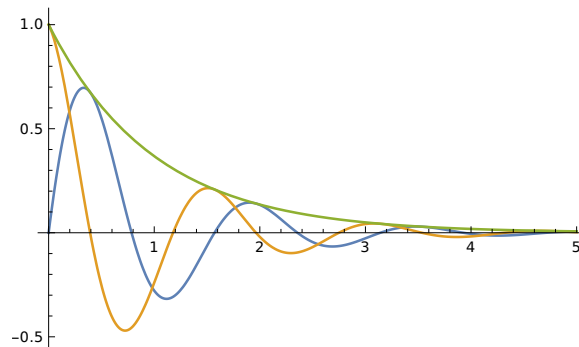


Рис. 3. Затухание поля в линии передачи

Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения.

В системе проводников, когда их количество больше или равно двум, могут распространяться главные (ТЕМ) волны. Именно их, в случае двухпроводной линии, можно описать с помощью телеграфных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{L}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} \end{cases} \quad (6)$$

Они были написаны раньше, чем уравнения Максвелла. Они не дают информации о поле во всем пространстве, а оперируют только интегральными характеристиками: током $V(z, t)$ и напряжением $I(z, t)$ ¹. Здесь введен ряд понятий, которые надо раскрыть подробнее.

Погонные емкость C , индуктивность L . Они вводятся как емкость (индуктивность) на единицу длины, или, выражаясь физически более верно, это отношение емкости (индуктивности) бесконечно малого отрезка двухпроводной линии к её длине. Так же вводится *погонный заряд Q* .

Напряжение. По определению, напряжение в двухпроводной линии, в которой распространяется главная волна, будет интеграл

$$V(z) = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl, \quad (7)$$

где интегрирование ведется в плоскости сечения $z = \text{const}$ от одного провода до другого, и не зависит от формы контура. Такое возможно в случае потенциальных полей: поле же главной волны в поперечном сечении потенциально ($\vec{E} = -\text{grad } \varphi$). Хотя в целом оно не потенциально:

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot } [\nabla_{\perp} \varphi(\vec{r}_{\perp}) \cdot e^{-ihz}] \quad (8)$$

Ток. Ток в сечении двухпроводной линии есть отношение количества заряда, проходящего в единицу времени через сечение $z = \text{const}$ одного провода, к единице времени ($I = dQ / dt$).

¹Продифференцировав второе уравнение по z и первое по t , и подставив первое во второе, мы получим волновое уравнение.

Волновое сопротивление (характеристический импеданс). В терминах тока и сопротивления, это есть отношение напряжения бегущей волны к току бегущей волны в одном сечении. Выражение можно получить, подставив $V = V_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$, $I = I_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$ в волновое уравнение:

$$Z_{\text{в}} = \left| \frac{V_{\text{бер}}(z)}{I_{\text{бер}}(z)} \right| = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9)$$

Импеданс нагрузки. Он вводится как отношение напряжения на нагрузке к току в нагрузке:

$$Z_{\text{н}} = \frac{V_{\text{н}}}{I_{\text{н}}} \quad (10)$$

Импеданс в произвольном сечении линии. Он определяется как $Z(z) = V(z)/I(z)$, и с этим тесно связана формула пересчета импеданса, а именно, можно узнать импеданс в любом сечении линии, зная волновой импеданс и импеданс произвольной нагрузки на конце. Тогда, считая положение нагрузки в $z = 0$, формула принимает вид

$$Z(z = -L) = Z_{\text{в}} \frac{Z_{\text{н}} + iZ_{\text{в}} \operatorname{tg} kL}{Z_{\text{в}} + iZ_{\text{н}} \operatorname{tg} kL} \quad (11)$$

Вопрос минимума №10

Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии. Это может быть коэффициент отражения по току или по напряжению. Обычно, когда не упоминается чего, считается, что напряжения. По определению, это

$$\Gamma = \frac{V_{\text{отр}}}{V_{\text{пад}}} = (\text{если посчитать}) = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}} \quad (12)$$

Понятие согласования линии с нагрузкой. Линия называется согласованной, если нет отраженной волны: $\Gamma = 0$. Для этого нужно, чтобы было $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$.

Вопрос минимума №11

Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора. Его можно найти, если взять прямоугольный волновод и металлизировать сечения нулей электрического поля, удовлетворив граничному условию $E_\tau = 0$:

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}}, \quad (13)$$

где $a > b$ – размеры поперечного сечения, L – длина резонатора.

Низшая мода прямоугольного резонатора. Если $b < a$, $b < L$, то низшей модой будет TE_{101} :

$$\omega_{101} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} \quad (14)$$

Надо заметить, что ТЕ/ТМ здесь условно, так как зависит от выбора осей. Пусть ребро a вдоль x , b вдоль y , L вдоль z . Структура поля тогда

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\right) e^{i\omega_{101}t} \quad (15)$$

Причины затухания колебаний в реальных резонаторах. Как и в случае линии передачи, причин две: потери в заполняющей среде (комплексная ε) и потери в стенках ($\sigma \neq \infty$).

Затухание за счет потерь в заполнении. Чтобы его найти, нужно действовать стандартно: представить $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, аналогично $\mu = \dots$. Связь частот определяется формулой

$$\omega = \frac{\omega^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (16)$$

где $\omega^{(0)}$ – спектр незаполненного резонатора. Отсюда найдется ω'' ($\omega = \omega' + i\omega''$), и тогда затухание будет происходить как

$$E, H \sim e^{i\omega t} \sim e^{i\omega' t} \cdot e^{-i\omega'' t} \quad (17)$$

При $\mu = 1$ оказывается, что $\omega'' \sim -\varepsilon''$. Это не ошибка, так как $\varepsilon'' < 0$.

График собств. колебаний в реальном резонаторе от времени. Для прямоугольного резонатора можно построить $\text{Re } E_x(t)$, это будет синусоида, вписанная в огибающую – убывающую экспоненту.