Программа минимум по электродинамике

Записать формулы и построить графики (без вывода), объяснить используемые в них обозначения: дать требуемые определения

1) Запись функции, определяющей зависимость полей и векторных потенциалов гармонической плоской волны в линии передачи от времени t и продольной координаты z. Понятия частоты, временного периода, продольного волнового числа, длины волны, фазовой и групповой скорости.

2) Волновое уравнение для векторного потенциала в отсутствие источников при произвольной и гармонической зависимости от времени. Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$. Понятие поперечного волнового числа.

3) Понятие о TE, TM и TEM волнах. Импедансная связь поперечных компонент полей. Определение поперечного волнового импеданса.

4) Граничные условия для полей и функций $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ в линиях передачи с идеально проводящими границами. Математическая формулировка задачи отыскания собственных волн различных типов в идеальной линии.

5) Дисперсионное уравнение для волн в идеальных линиях. Понятие критической частоты и критической длины волны. Графики зависимости полей от продольной координаты в различные моменты времени при частотах, больших или меньших критической. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости в линии передачи от частоты.

6) В каких линиях могут существовать главные (TEM) волны? Поля TEM волны в коаксиальной линии.

7) Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода. Низшая мода (поперечное волновое число, графики поля, картина силовых линий). Низшая мода круглого волновода (поперечное волновое число, картина силовых линий).

8) Причины затухания волн в линиях передачи. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени.

9) Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения: определения величин тока и напряжения, погонной емкости и индуктивности, определения волнового сопротивления, импеданса нагрузки, импеданса в любом сечении линии с произвольной нагрузкой на конце.

10) Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии. Понятие согласования линии с нагрузкой.

11) Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора. Низшая мода прямоугольного резонатора (собственная частота, структура поля).

12) Причины затухания колебаний в реальных резонаторах. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. График зависимости поля собственного колебания в реальном резонаторе от времени

13) Представление полей, создаваемых в волноводе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных мод (общий вид формул возбуждения волноводов)

14) Представление полей, создаваемых в резонаторе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных колебаний (общий вид формул возбуждения резонатора). Резонансные свойства полей.

15) Способы возбуждения волноводов и резонаторов при помощи штыря и петли.

16) Определения дифференциального и полного сечений рассеяния тела. Выражение для амплитуды поля и плотности потока энергии рассеянной волны в дальней зоне через дифференциальное сечение рассеяния.

17) Условие применимости приближения геометрической оптики в задачах дифракции.

Задачи № 10.1 (а), 10.2, 10.4(а,б), 10.5(а,б), 10.7, 10.8, 10.16, 10.18(6), 10.19, 10.22, 10.23, 10.31(а,б), 10.33 (резонатор без плазмы), 10.35(а), 10.36, 10.38, 10.48, 11.1(1,2,3) (В.Б. Гильденбург, М.А. Миллер, Сборник задач по электродинамике, 2001 г.).

Вопрос минимума №1

Для плоской гармонической волны (TEM) функция, определяющая зависимость полей, задается следующим образом

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z}_0$$

Где $\vec{A}^e$ – векторный потенциал поля, а $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$ называется поперечной волновой функцией. Поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ определяются следующим образом

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}^e$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}^e}{\partial t} - \nabla\varphi$$

Где φ – скалярный потенциал поля.

Используя условие калибровки Лоренца

$$\operatorname{div}\vec{A}^e + \frac{\varepsilon\mu}{c}i\omega\varphi = 0$$

Получим выражения для нахождения полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в случае гармонической волны:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{ik_0\varepsilon\mu}(\nabla\operatorname{div} + k^2)\vec{A}^e$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Понятие частоты ω – равна количеству повторений или возникновения событий (процессов) в единицу времени.

Понятие временного периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$ – время, за которое совершается полное колебание.

Понятие продольного волнового числа $h = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновым числом называется быстрота роста фазы волны по пространственной продольной координате.

Понятие длины волны λ – пространственный период колебаний. Расстояние между двумя ближайшими друг к другу точками в пространстве, в которых колебания происходят в одинаковой фазе.

Понятие фазовой $v_\text{ф}$ и групповой скорости $v_\text{гр}$. Фазовая скорость – скорость перемещения поверхности постоянной фазы. Групповая скорость – скорость перемещения квазимонохроматического пакета.

$$v_\text{ф} = \frac{\omega}{h}, \quad v_\text{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial h}\Big|_{\omega=\omega_0}$$

Где ω_0 – несущая частота группового пакета.

Вопрос минимума №2

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае произвольной зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta\vec{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае гармонической зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta\vec{A} + k^2\vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu$$

Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$. Понятие поперечного волнового числа.

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z}_0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– для декартовой системы координат.

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = \Delta_\perp\varphi^e + (k^2 - h^2)\varphi^e = 0$$

Тогда дифференциальное уравнение для функций поперечных координат $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ выглядит следующим образом

$$\Delta_\perp\varphi^{(e,m)} + \varkappa^2\varphi^{(e,m)} = 0$$

Где $\varkappa$ – поперечное волновое число.

Если функции $\varphi^{(e)}$ и $\varphi^{(m)}$ удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца, то поля удовлетворяют уравнению Максвелла.

Вопрос минимума №3

Используем выражения для полей через векторный потенциал

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{k_0\varepsilon\mu}(\nabla\operatorname{div} + k^2)\vec{A}^e$$

Вычислим $\nabla div\vec{A}^e$ и $rot\vec{A}^e$ при условии $\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}\vec{z}_0$

$$\operatorname{div}\vec{A}^e = -ih\varphi^e(\vec{r}_\perp)e^{-ihz}$$

$$\nabla\operatorname{div}\vec{A}^e = (-h^2\varphi^e\vec{z}_0 - ih\nabla_\perp\varphi^e)e^{-ihz}$$
$$\operatorname{rot}\vec{A}^e = [\nabla A_z^e, \vec{z}_0] = [\nabla_\perp\varphi^e, \vec{z}_0]e^{-ihz}$$

Тогда получим следующие выражения для комплексных амплитуд полей ТМ волны

$$e^{-ihz}\cdot\begin{cases} E_z = \dfrac{\varkappa^2}{k_0\varepsilon\mu}\varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\dfrac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \dfrac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ H_z = 0 \end{cases}$$

ТМ - поперечная магнитная волна. Магнитное поле чисто поперечно пути распространения, но поле $\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$ имеет продольную и поперечную составляющую.

Уравнения Максвелла симметричны относительно полей, но мы получили неравноправные выражения для векторов. Это объясняется тем, что мы нашли одно из решений. Воспользовавшись принципом двойственности $\vec{E} \to \vec{H}$, $\vec{H} \to -\vec{E}$, можно получить выражения для комплексных амплитуд полей ТЕ волны.

$$e^{-ihz}\cdot\begin{cases} H_z = \dfrac{\varkappa^2}{k_0\varepsilon\mu}\varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = -\dfrac{h}{k_0\varepsilon\mu}\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\dfrac{1}{\varepsilon}[\nabla_\perp\varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ E_z = 0 \end{cases}$$

функция φ не обязана быть такой же, поэтому изменяется верхний индекс на m, эта функция также должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta_\perp\varphi^m + \varkappa^2\varphi^m = 0$$

Таким образом для системы уравнений Максвелла возможны два решения ТМ и ТЕ волны. Но есть случай, когда поля чисто поперечны это случай ТЕМ волны.

Когда $\varkappa = 0$, то есть $k = h$, продольные компоненты магнитного и электрического полей отсутствуют это и есть ТЕМ волна.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = E_z = 0 \\ \vec{E}_\perp = -\dfrac{1}{\varepsilon\mu}\nabla_\perp\varphi(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \dfrac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \end{cases}$$

φ – поперечная волновая функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta\varphi = 0$.

Из формул выше видно, что поперечные компоненты полей удовлетворяют импедансному соотношению

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp\text{в}}[\vec{H}_\perp, \vec{z}_0]$$

где $\eta_{\perp\text{в}}$ называется поперечным волновым сопротивлением

$$\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{k}{h}\right)^{\pm 1}$$

«+» – соответствует волне типа ТЕ, а «–» – волне типа ТМ. Для ТЕМ волны $\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$

Вопрос минимума №4

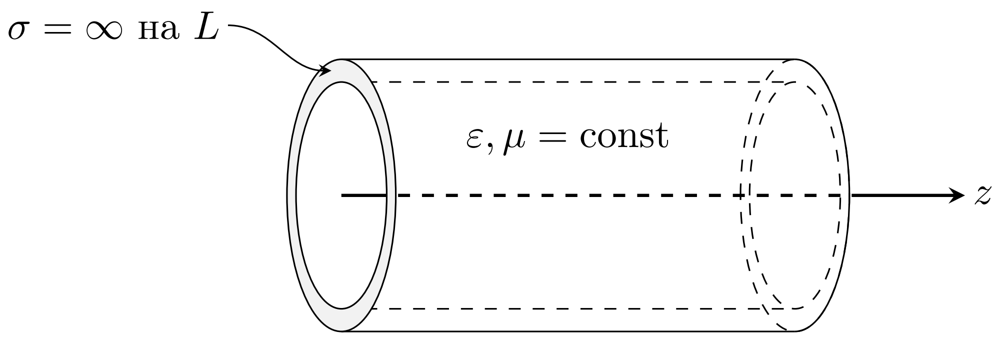


Рис. 1. Линия передачи

Поперечные волновые функции удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца

$$\Delta_\perp \varphi^{(e,m)} + \varkappa^2 \varphi^{(e,m)} = 0$$

На границе проводящих стенок справедливы следующие граничные условия

$$E_\tau = 0|_S, \quad B_n = 0|_S$$

Рассмотрим граничные условия для функций $\varphi^{(e,m)}$ для различных типов волн.
ТМ-волна. φ^e
$E_z = 0, \quad , E_{\perp\tau} = 0$ на границе.
$E_z \sim \varphi^e(\vec{r}\perp) \Rightarrow \varphi^e|_S = 0$
Граничное условие для ТМ волны.

ТЕ-волна. φ^m
$E_{\perp\tau} = 0$ на границе.
$E_{\perp\tau} \sim ([\nabla\varphi^m(\vec{r}\perp), \vec{z}_0], \vec{\tau}) \Rightarrow \dfrac{\partial\varphi^e}{\partial n}\Big|_S = 0$
Граничное условие для ТЕ волны.

ТЕМ-волна. φ
$\vec{E}_\perp \sim \nabla\varphi$
$\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S = 0 \Rightarrow \varphi|_S = \text{const}$
Граничное условие для ТЕМ волны.
Важно, что эта const может быть разной на разных проводниках (пример коаксиальная линия).

Математическая формулировка задачи описания волн в линии передач.

TM

$\Delta_\perp \varphi^e + \varkappa^2 \varphi^e = 0$

$\varphi^e|_L = 0$ Условие Дирихле.

TE

$\Delta_\perp \varphi^m + \varkappa^2 \varphi^m = 0$

$\dfrac{\partial \varphi^m}{\partial n}|_L = 0$ Условие Неймана.

Где $\vec{n}$ – нормаль к контуру L на границе поперечного сечения.

TEM

$\Delta_\perp \varphi = 0$

$\varphi|_{L_i} = C_i$

Таким образом описание волн в линии передач сводится к двумерной задачи Гельмгольца с следующими граничными условиями на контуре, охватывающим поперечное сечение волновода.

Вопрос минимума №5

Дисперсионное соотношение

$$\varkappa^2 = k^2 - h^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - h^2$$

Где $\varkappa$ – поперечное волновое число, а h - продольное волновое число.

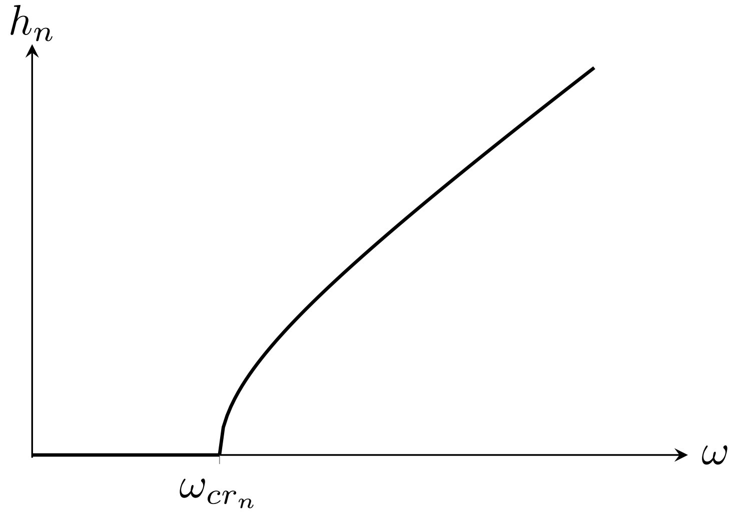


Рис. 2. Зависимость реальной части поперечного волнового числа от частоты

Любая мода в линии передачи характеризуется поперечным волновым числом, а поперечное волновое число определяет продольное.

Можем ввести критическую длину волны (продольное волновое число h равно нулю):

$$\varkappa^2 = \frac{\omega}{c}^2 \varepsilon\mu$$
$$\omega_{cr} = \frac{\varkappa c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$
$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_{cr}} = \frac{2\pi}{\varkappa\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$\omega < \omega_{cr}$ дисперсионное уравнения не имеет действительных решений – режим нераспространяющейся волны.

При $\omega > \omega_{cr}$ – режим распространяющейся волны.

Если волна бежит вправо, то $h > 0$; если бежит влево, то $h < 0$

$$Re\vec{E}, Re\vec{H} \sim \cos(\omega t - hz)$$

При $\omega < \omega_{cr}$

$$h = \pm i|h|$$

$$ReE_x \sim \cos(\omega t + \varphi_0)\exp\{\mp|h|z\}$$

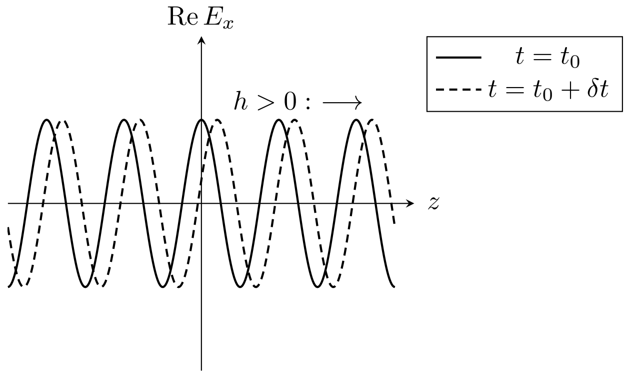


Рис. 3. Распространение волны ($h > 0$)

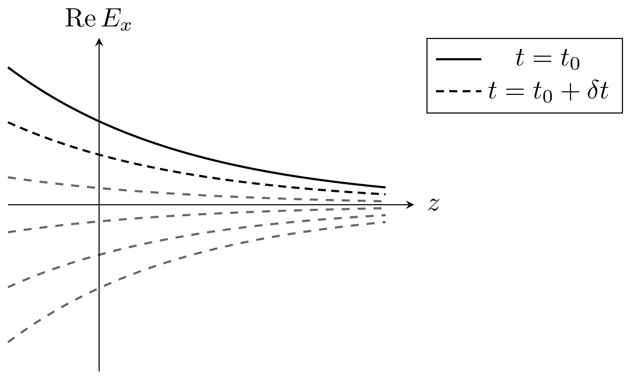


Рис. 4. Режим нераспространения ($h < 0$)

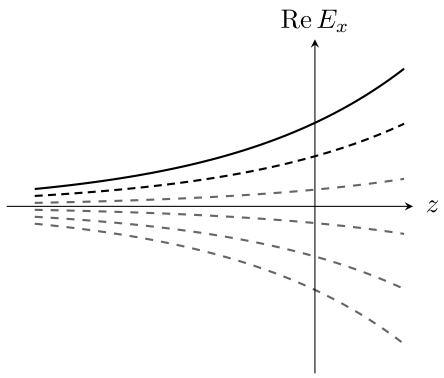


Рис. 5. Экспоненциальное нарастание амплитуды (при $h < 0$)

Бегучести нет. Зависимость экспонентальная

Картинка зависит от способа создания волны, то есть у экспоненты « $+$» или «$-$». В зависимости от того, где источник можем сказать, куда бежит волна. То есть определить знак.

Источник может порождать несколько мод, но не все, а какие-то конкретные. Изобразим числовую ось. Пусть задана ω, а то есть $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$

Если $k < \varkappa_1$ - все моды нераспространяющиеся.

Когда k перейдёт через $\varkappa_1$ появится низшая мода.

Когда перейдём через $\varkappa_2$ появится ещё одна критическая частота.

!!Можно дополнить описание числовой прямой!!

Кинематические соотношения

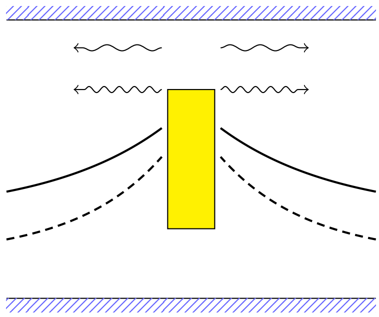
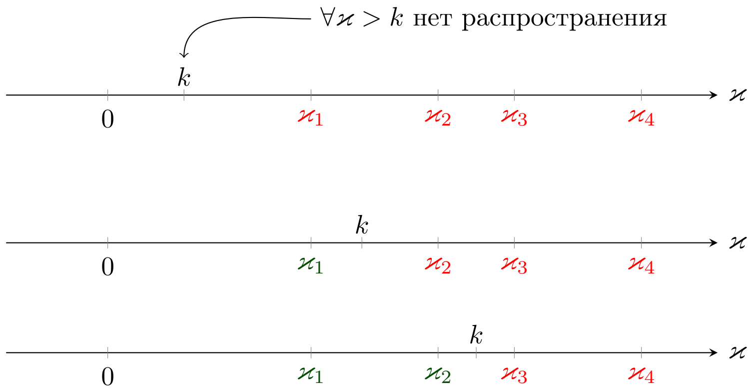


Рис. 6. Моды в линии передачи с источником



Определяют кинематические параметры волны.

1) Временной период

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

2) Длина волны в волноводе (подразумевают линию передачи или трубу, когда говорят волновод)

$$\lambda_v = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} = \frac{2\pi}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{k^2}}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c r^2}{\omega}}} > \lambda_0$$

Когда $\omega \to \omega_{cr}$ $\lambda_v \to \infty$

λ_0 - длина волны в пространстве без волновода в той же среде.

λ_v - пространственный период.

3) Фазовая скорость - скорость перемещения плоскости постоянной фазы.

Поверхность постоянной фазы - это когда фаза константа.

$$faza = \omega t - hz + \varphi_0$$

При данном времени можно найти координату:

$$z = \frac{\omega t + \varphi_0}{h}$$

Координата будет перемещаться со скоростью:

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$

$$v_f = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \varkappa^2}} = \frac{\omega}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{k}{\varkappa}^2}} = \frac{\omega}{k}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_{cr}}{\omega}^2}} > v_f^{(0)}$$

$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{k}$$

Фазовая скорость может быть больше скорости света.

4) Групповая скорость - скорость перемещения квазимонохроматического волнового пакета.

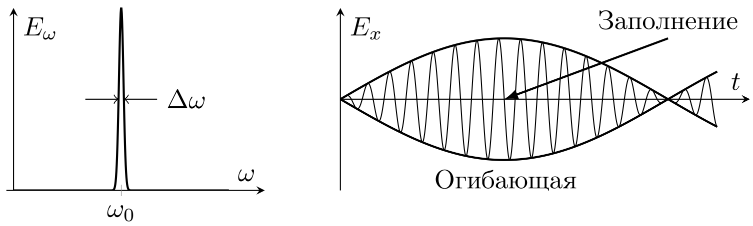


Рис. 7. Квазимонохроматический волновой пакет

Сигнал характеризуется высокочастотным заполнением и огибающей.

По сути это радиоимпульс.

Пакет движется со скоростью $v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k}|_{\omega=\omega_0}$ - это при малом или отсутствующем поглощении.(Это в пространстве, а не в линии передачи).

При большом поглощении это понятие теряет смысл.

По мере перемещения по волноводу форма сигнала будет меняться.

$v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial h}|_{\omega=\omega_0}$ - формула для волновода.

$$k^2 = h^2 + \varkappa^2$$

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Берём дифференциал от правой и левой части.$\varkappa$ не зависит от частоты.

$$2kdk = 2hdh$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{h}{k}$$

$$h = +\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa_n^2}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial h} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa_n^2} = \frac{{v_f^{(0)}}^2}{v_f}$$

$$v_f = \frac{\omega}{h}$$
$$v_f^{(0)} = \frac{c}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}}$$
$$v_f v_{gr} = {v_f^{(0)}}^2$$
$$v_{gr} = v_f^{(0)}\sqrt{1 - \frac{{\omega_{cr}}^2}{\omega}}$$

Всё это справедливо для сред без временной дисперсии.

$$\varepsilon \neq f(\omega), \mu \neq f(\omega)$$

$v_{gr} < c$ - она несёт информацию.

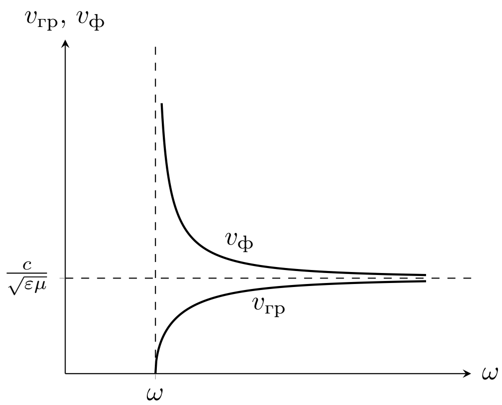


Рис. 8. Распространение волнового пакета

Вопрос минимума №6

Главные (TEM) волны в линиях передачи с идеальными границами

У TEM-волн поперечное волновое число $\varkappa = 0$:

$$\varkappa = 0 \Rightarrow h = k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

Поля таких волн выражаются следующим образом через функцию φ:

$$\vec{E}_\perp = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\nabla_\perp\varphi$$
$$\vec{H}_\perp = -\frac{1}{\mu}[\nabla_\perp\varphi, \vec{z}_0]$$

При этом выполняются **граничные условия**: на каждом из проводников (допустим, есть набор проводников, вдоль которых распространяется волна)

$$\varphi|_{l_i} = C_i,$$

причем константа не обязана быть одна для всех проводников.

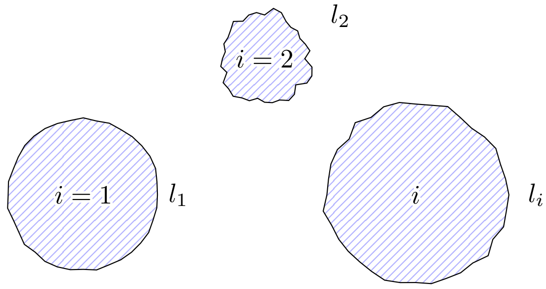


Рис. 9. Набор проводников в задаче

Внутренняя задача

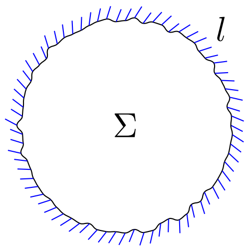


Рис. 10. Случай одного проводника

Пусть у нас есть только один проводник, в котором есть цилиндрическая полость (рис. 10). Рассмотрим внутреннюю задачу, т.е. распространение волны внутри цилиндрической полости. Оказывается, для граничного условия $\varphi_\perp|_l = C_1$ существует только тривиальное решение $\varphi_\perp = C_1$. Для доказательства необходимо воспользоваться теоремой и минимуме и максимуме для гармонической функции.

Внешняя задача

Зададимся вопросом о решении той же задачи:

$$\Delta_\perp \varphi = 0, \quad \varphi|_l = \mathrm{const}$$

Только теперь будем рассматривать её в области вне проводника

Для начала рассмотрим задачу попроще, поле нити (рис. 11). Её решение известно:

$$\Delta_\perp \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \sim \ln r$$

Характер убывания полей здесь $E_r \sim \dfrac{1}{r}$, а для магнитного поля в силу импедансного соотношения $\dfrac{E_r}{H_\varphi} = \eta_{\perp\text{в}} = 1, \quad H_\varphi \sim \dfrac{1}{r}$:

$$E_r = H_\varphi \sim \frac{1}{r}$$

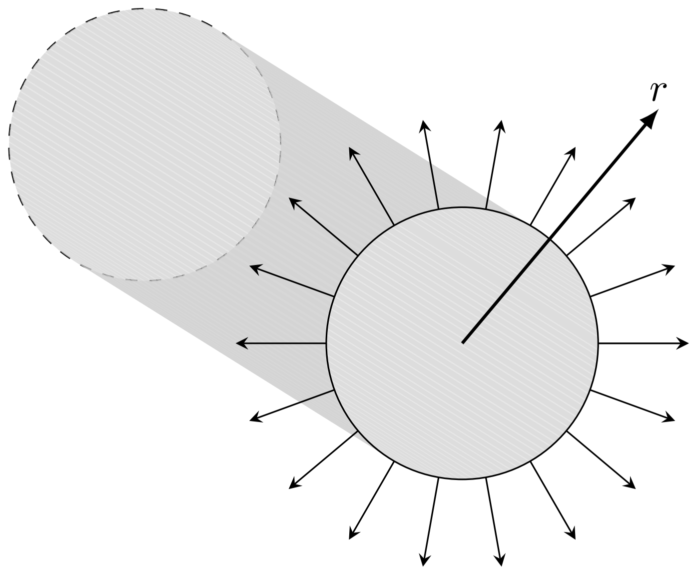


Рис. 11. Поле бесконечной проводящей нити

Посмотрим на поведение полей при $r \to \infty$. Говорят, нужно поставить граничные условия (или закон убывания) на бесконечности. Чем плох закон $\frac{1}{r}$?

Посчитаем средний по времени поток энергии через поперечное сечение, в котором распространяется волна. Сечение бесконечно, за исключением конечной площади проводника.

Сначала вычислим вектор Пойнтинга (средний по времени и в проекции на z):

$$\overline{S}_z = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\big(E_r \cdot H_\varphi^*\big) \sim \frac{1}{r^2}$$

$$\Pi = \iint\limits_{\Sigma} \overline{S}_z ds \sim \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{r^2}(2\pi r\,\mathrm{d}r) \sim \int\limits_a^\infty = \ln\frac{\infty}{a} = \infty$$

Интеграл расходится на бесконечности. Говорят, что расходимость носит логарифмический характер. Получили бесконечную мощность волны: такую волну невозможно создать реальным источником — волна не удовлетворяет критерию энергетической реализуемости.

Можно сделать важный вывод: **вдоль одиночного проводника ТЕМ-волна с конечной энергией распространятся не может**. Распространение возможно, если количество проводников будет больше одного. Например, в линии из двух проводников (рис. 12) ТЕМ-волна уже возможна.

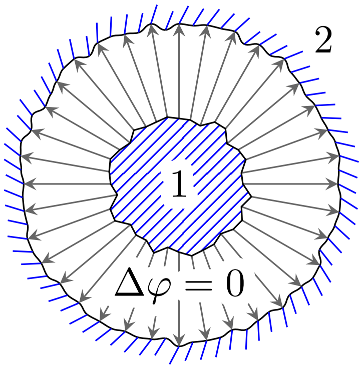


Рис. 12. Закрытая линия из двух проводников

Можно модифицировать задачу с нитью (рис. 13):

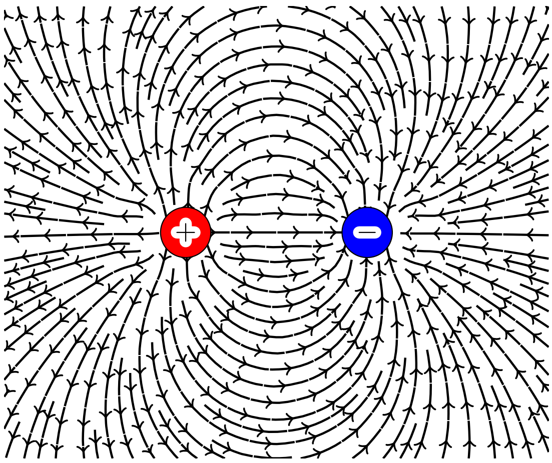


Рис. 13. Поле двухпроводной линии

В поперечном разрезе это поле диполя, а оно спадает быстрее, $\sim \frac{1}{r^2}$. Тогда

$$E_\perp \sim H_\perp \sim \frac{1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \overline{S}_z \sim \frac{1}{r^4}, \quad \Pi \sim \int\limits_{L_{\text{характ}}}^{\infty} \frac{1}{r^3}\,\mathrm{d}r$$

Мощность волны конечна, значит, в модифицированной задаче ТЕМ-волна энергетически реализуема.

Конечный вывод: ТЕМ-волна в идеальной линии передачи возможна, если число проводников ≥ 2.

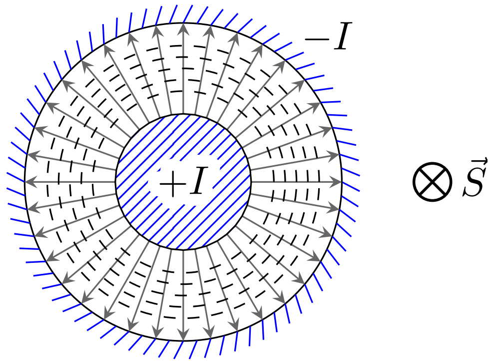


Рис. 14. Поле в коаксиальном кабеле

Например, в коаксиальной линии (рис. 14) ТЕМ-волна возможна.

Зададимся вопросом: возможны ли в такой линии ТЕ и ТМ волны? Сформулируем утверждение, пока без доказательства: **в открытых линиях передачи ТЕ и ТМ волны не существуют**.

Вопрос минимума №7

Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода. Поперечные волновые числа появляются как собственные числа решения уравнения Гельмгольца с граничными условиями прямоугольного волновода. Спектр найденных таким образом собственных чисел описывается формулой

$$\varkappa_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Здесь m, n – индексы моды, a, b – размеры сечения волновода. Для однозначности мы всегда считаем, что $a > b$.

Низшая мода. По определению, такой модой называется мода с наименьшим поперечным волновым числом. Так как мы предполагали $a > b$, очевидно, наименьшее возможное нетривиальное поперечное волновое число будет при $m = 1$, $n = 0$:

$$\varkappa_{10}^2 = \frac{\pi^2}{a^2}$$

Заметим, что это возможно только для TE-волн, так как решение TM-волн не позволяет занулить m, n одновременно (это приведет к тривиальной поперечной волновой функции). Так что *низшая мода прямоугольного волновода – TE_{10}*.

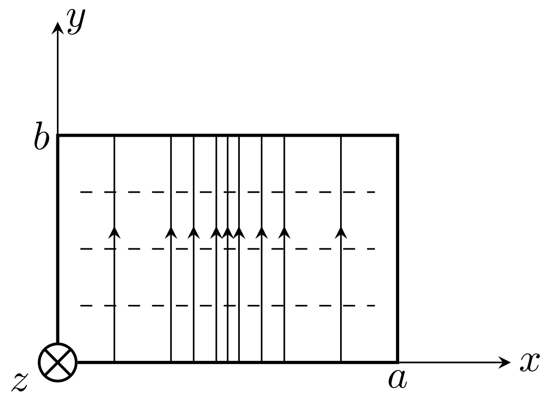


Рис. 15. Структура полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ моды TE_{10} ($\vec{H}$ изображено пунктиром)

Низшая мода круглого волновода . Она определяется так же, но решение уравнения идет в бесселевых функциях, и поэтому поперечное волновое число имеет другой вид, и низшей модой будет TE_{11}:

$$\varkappa_{11} = \frac{\mu_{11}}{a},$$

где μ_{11} – значение аргумента функции Бесселя J_1 при 1-м нуле своей прозводной. При этом график моды будет похож на график в прямоугольном волноводе: его можно получить чисто геометрически, постепенно сминая границы волновода, делая его более круглым. Говоря более точно, топологически эти моды подобны.

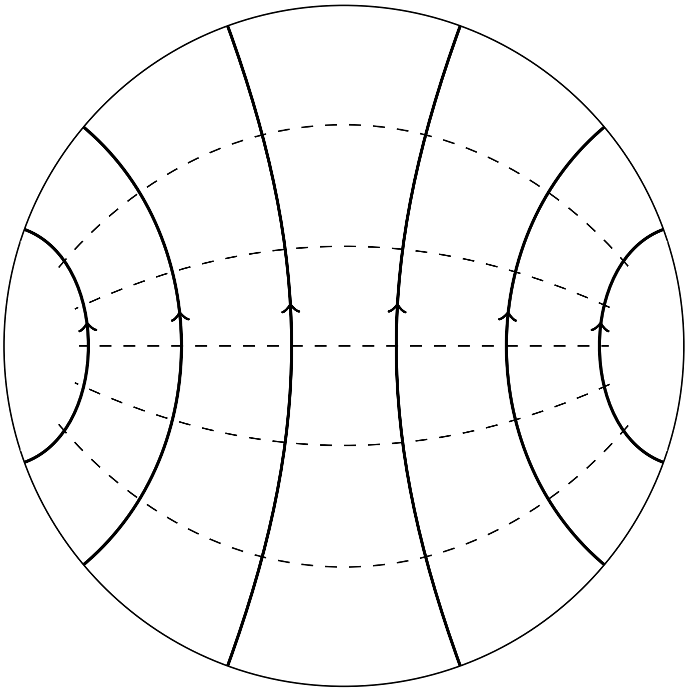


Рис. 16. Структура полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ моды TE_{11} круглого волновода ($\vec{H}$ изображено пунктиром)

Вопрос минимума №8

Причины затухания волн в линиях передачи. В реальных линиях передачи волна распространяется с затуханием за счет *двух* причин: *потери в заполняющей волновод среде* и *потери в стенках волновода*. Мы их учитываем по-отдельности: решаем задачу о потерях в среде, считая стенки $\sigma = \infty$, и наоборот.

Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. Чтобы учесть потери в среде, подставим комплексную диэлектрическую проницаемость в дисперсионное уравнение:

$$\varepsilon_k = \varepsilon' - i\frac{4\pi\sigma}{\omega} \quad \to \quad h^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu - \varkappa$$

Расчеты проводятся при $\mu = 1$. Волновое число становится комплесным $h = h' + ih''$, и в случае малых потерь можно найти h'', которое определяет затухание. Для частот, далеких от критической,

$$h'' = \frac{\varepsilon'' k_0^2}{2h'}, \quad \text{где} \quad h' = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon' - \varkappa^2}$$

При $\omega > \omega_{\text{cr}}$ амплитуда волны уменьшается в e раз на расстоянии $L = (h'')^{-1}$. Нетрудно нарисовать графики: это будет сдвигающаяся волна с огибающей в виде спадающей экспоненты.

Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени. Здесь синим цветом показан график в следущий момент времени, желтым - в предыдущий, зеленым - огибающая (экспонента).

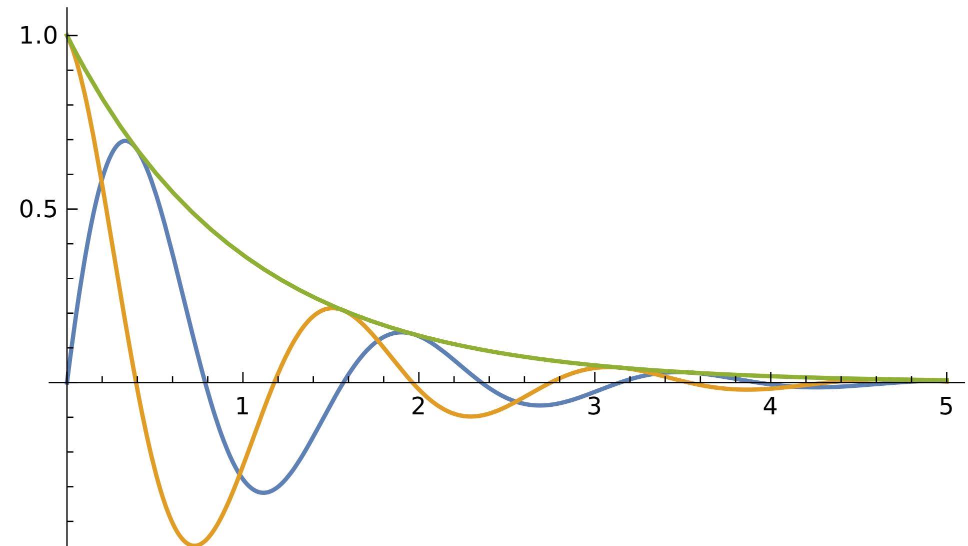


Рис. 17. Затухание поля в линии передачи

Вопрос минимума №9

Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения. В системе проводников, когда их количество больше или равно двум, могут распространяться главные (TEM) волны. Именно их, в случае двухпроводной линии, можно описать с помощью телеграфных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial z} = -C\dfrac{\partial V}{\partial t} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -\dfrac{L}{c^2}\dfrac{\partial I}{\partial t} \end{cases}$$

Они были написаны раньше, чем уравнения Максвелла. Они не дают информации о поле во всем пространстве, а оперируют только интегральными характеристиками: током $V(z,t)$ и напряжением $I(z,t)$[1]. Здесь введен ряд понятий, которые надо раскрыть подробнее.

Погонные емкость C, индуктивность L. Они вводятся как емкость (индуктивность) на единицу длины, или, выражаясь физически более верно, это отношение емкости (индуктивности) бесконечно малого отрезка двухпроводной линии к её длине. Так же вводится *погонный заряд* Q.

Напряжение. По определению, напряжение в двухпроводной линии, в которой распространяется главная волна, будет интеграл

$$V(z) = \int\limits_{(1)}^{(2)} E_l \, \mathrm{d}l,$$

где интегрирование ведется в плоскости сечения $z = \mathrm{const}$ от одного провода до другого, и не зависит от формы контура. Такое возможно в случае потенциальных полей: поле же главной волны в поперечном сечении потенциально ($\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$). Хотя в целом оно не потенциально:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{rot}\left[\nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp) \cdot e^{-ihz}\right]$$

Ток. Ток в сечении двухпроводной линии есть отношение количества заряда, проходящего в единицу времени через сечение $z = \mathrm{const}$ одного провода, к единице времени ($I = \mathrm{d}Q \,/\, \mathrm{d}t$).

[1] Продифференцировав второе уравнение по z и первое по t, и подставив первое во второе, мы получим волновое уравнение.

Волновое сопротивление (характеристический импеданс). В терминах тока и сопротивления, это есть отношение напряжения бегущей волны к току бегущей волны в одном сечении. Выражение можно получить, подставив $V = V_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$, $I = I_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$ в волновое уравнение:

$$Z_{\text{в}} = \left| \frac{V_{\text{бег}}(z)}{I_{\text{бег}}(z)} \right| = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Импеданс нагрузки. Он вводится как отношение напряжения на нагрузке к току в нагрузке:

$$Z_{\text{н}} = \frac{V_{\text{н}}}{I_{\text{н}}}$$

Импеданс в произвольном сечении линии. Он определяется как $Z(z) = V(z)/I(z)$, и с этим тесно связана формула пересчета импеданса, а именно, можно узнать импеданс в любом сечении линии, зная волновой импеданс и импеданс произвольной нагрузки на конце. Тогда, считая положение нагрузки в $z = 0$, формула принимает вид

$$Z(z = -L) = Z_{\text{в}} \frac{Z_{\text{н}} + iZ_{\text{в}} \operatorname{tg} kL}{Z_{\text{в}} + iZ_{\text{н}} \operatorname{tg} kL}$$

Вопрос минимума №10

Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии. Это может быть коэффициент отражения по току или по напряжению. Обычно, когда не упоминается чего, считается, что напряжения. По определению, это

$$\Gamma = \frac{V_{\text{отр}}}{V_{\text{пад}}} = (\text{если посчитать}) = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}}$$

Понятие согласования линии с нагрузкой. Линия называется согласованной, если нет отраженной волны: $\Gamma = 0$. Для этого нужно, чтобы было $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$.

Вопрос минимума №11

Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора. Его можно найти, если взять прямоугольный волновод и металлизировать сечения нулей электрического поля, удовлетворив граничному условию $E_\tau = 0$:

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}},$$

где $a > b$ – размеры поперечного сечения, L – длина резонатора.

Низшая мода прямоугольного резонатора. Если $b < a$, $b < L$, то низшей модой будет TE_{101}:

$$\omega_{101} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2}$$

Надо заметить, что TE/TM здесь условно, так как зависит от выбора осей. Пусть ребро a вдоль x, b вдоль y, L вдоль z. Структура поля тогда

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}z\right)e^{i\omega_{101}t}$$

Вопрос минимума №12

Причины затухания колебаний в реальных резонаторах. Как и в случае линии передачи, причин две: потери в заполняющей среде (комплексная ε) и потери в стенках ($\sigma \neq \infty$).

Затухание за счет потерь в заполнении. Чтобы его найти, нужно действовать стандартно: представить $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, аналогично $\mu = \ldots$. Связь частот определяется формулой

$$\omega = \frac{\omega^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $\omega^{(0)}$ – спектр незаполненного резонатора. Отсюда найдется ω'' ($\omega = \omega' + i\omega''$), и тогда затухание будет происходить как

$$E, H \sim e^{i\omega t} \sim e^{i\omega' t} \cdot e^{-i\omega'' t}$$

При $\mu = 1$ оказывается, что $\omega'' \sim -\varepsilon''$. Это не ошибка, так как $\varepsilon'' < 0$.

График собств. колебаний в реальном резонаторе от времени. Для прямоугольного резонатора можно построить $\operatorname{Re} E_x(t)$, это будет синусоида, вписанная в огибающую – убывающую экспоненту:

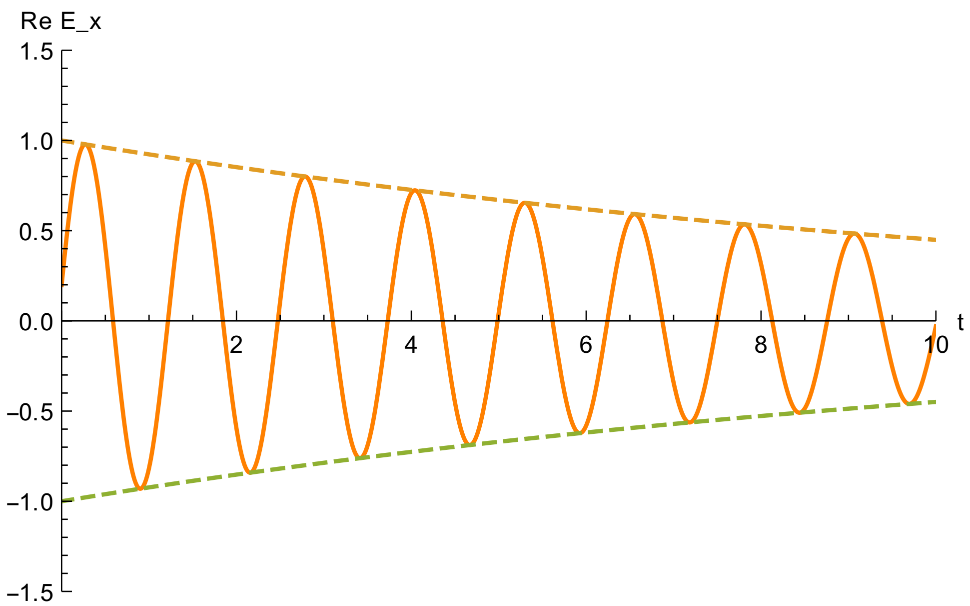


Рис. 18. Затухание поля в резонаторе со временем

Вопрос минимума №13

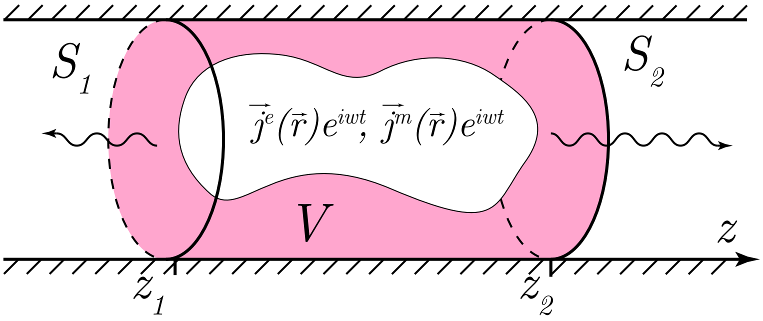


Рис. 19. Заданные источники тока в ЛП

Представление полей в ЛП как суперпозицию мод. Пусть в волноводе в области от z_1 до z_2 заданы токи $\vec{j}^e$ и $\vec{j}^m$. Тогда поля вне области источников тока можно найти как суперпозицию собственных мод волновода:

$$\vec{E}(z > z_2) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p \vec{E}_p$$

$$\vec{E}(z < z_1) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{-p} \vec{E}_{-p},$$

где p - индекс моды в волноводе. коэффициента a_p и a_{-p} находятся следующим образом:

$$a_p = \frac{1}{N_p} \int\limits_V \left[(\vec{j}^e, \vec{E}_{-p}) - (\vec{j}^m, \vec{H}_{-p}) \right] \mathrm{d}V$$

$$a_{-p} = \frac{1}{N_p} \int\limits_V \left[(\vec{j}^e, \vec{E}_{p}) - (\vec{j}^m, \vec{H}_{p}) \right] \mathrm{d}V,$$

где N_p - это норма моды p, $N_p = \pm 4\Pi_p$, где Π_p - мощность моды типа p.

Вопрос минимума №14

Представление полей в резонаторе как суперпозицию мод Пусть в резонаторе с идеально проводящими стенками заданы токи $\vec{j}^e e^{i\omega t}$ и $\vec{j}^m e^{i\omega t}$. Тогда вне области источников тока можно найти поля как суперпозицию собственных мод резонатора:

$$\vec{E} = \sum_{p=1}^{\infty} e_p \vec{E}_p + \vec{E}_\text{п}$$
$$\vec{H} = \sum_{p=1}^{\infty} h_p \vec{H}_p + \vec{H}_\text{п},$$

p – индекс собственной моды резонатора.

Сумма это вихревая часть поля, а $E_\text{п}$ – потенциальная часть поля. Решения для первого и второго слагаемого рассматриваются отдельно. Для потенциальной части необходимо решить задачу Пуассона для φ^e и φ^m с гран. условиями

$$\Delta\varphi^e = -\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho^e,\ \varphi^e\Big|_S = 0$$
$$\Delta\varphi^m = -\frac{4\pi}{\mu}\rho^m,\ \frac{\partial\varphi^e}{\partial n}\Big|_S = 0$$

Коэффициенты e_p и h_p ищутся следующим образом:

$$e_p = \frac{1}{N_p}\left(\frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2}\right)\int\limits_V \left(\omega\left(\vec{j}^e, \vec{E}_p\right) - \omega_p \vec{j}^m \vec{H}_p\right) \mathrm{d}V$$
$$h_p = \frac{1}{N_p}\left(\frac{i}{\omega^2 - \omega_p^2}\right)\int\limits_V \left(\omega_p\left(\vec{j}^e, \vec{E}_p\right) - \omega \vec{j}^m \vec{H}_p\right) \mathrm{d}V\ ,$$

ω – частота источника, ω_p – собственная частота резонатора, N_p – норма собственного колебания

$$N_p = \frac{1}{4\pi}\int_V \varepsilon\left(\vec{E}_p\right)^2 \mathrm{d}V = -\frac{1}{4\pi}\int_V \mu\left(\vec{H}_p\right)^2 \mathrm{d}V =$$

Вопрос минимума №15

Способы возбуждения волноводов и резонаторов при помощи штыря и петли. Основной идеей является расположение возбуждающего элемента таким образом, чтобы пораждаемое им поле совпадало с полем одной из мод резонатора (или волновода).

Вопрос минимума №16

Дифференциальное и полное сечения рассеяния тела.

$$\sigma_{\text{дифф}} = \frac{1}{S_{\text{пад}}} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega},$$

где S– плотность потока падающей энергии (вектор Пойтинга), $\mathrm{d}P = S_{\text{рассеяния}}\,\mathrm{d}\sigma$ – дифференциал мощности, Ω – телесный угол.

$\sigma_{\text{дифф}}$– площадка, через которую проходит столько энергии, сколько переизлучается в единице телесного угла в данном направлении.

$$\int\limits_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = P_{\text{полн}}$$

$P_{\text{полн}}$ – полный поток энергии, средний по времени, исходящий от тела.

$$\sigma_{\text{полн}} = \frac{P_{\text{полн}}}{S_{\text{пад}}}$$

$\sigma_{\text{полн}}$ указывает на полную рассеивающую способность тела.