

# Программа минимум по электродинамике

*Записать формулы и построить графики (без вывода), объяснить используемые в них обозначения: дать требуемые определения*

- 1) Запись функции, определяющей зависимость полей и векторных потенциалов гармонической плоской волны в линии передачи от времени  $t$  и продольной координаты  $z$ . Понятия частоты, временного периода, продольного волнового числа, длины волны, фазовой и групповой скорости.
- 2) Волновое уравнение для векторного потенциала в отсутствие источников при произвольной и гармонической зависимости от времени. Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат  $\varphi^{(e)}$  и  $\varphi^{(m)}$ . Понятие поперечного волнового числа.
- 3) Понятие о ТЕ, ТМ и ТЕМ волнах. Импедансная связь поперечных компонент полей. Определение поперечного волнового импеданса.
- 4) Граничные условия для полей и функций  $\varphi^{(e)}$  и  $\varphi^{(m)}$  в линиях передачи с идеально проводящими границами. Математическая формулировка задачи отыскания собственных волн различных типов в идеальной линии.
- 5) Дисперсионное уравнение для волн в идеальных линиях. Понятие критической частоты и критической длины волны. Графики зависимости полей от продольной координаты в различные моменты времени при частотах, больших или меньших критической. Зависимости длины волны, фазовой и групповой скорости в линии передачи от частоты.
- 6) В каких линиях могут существовать главные (ТЕМ) волны? Поля ТЕМ волны в коаксиальной линии.
- 7) Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода. Низшая мода (поперечное волновое число, графики поля, картина силовых линий). Низшая мода круглого волновода (поперечное волновое число, картина силовых линий).
- 8) Причины затухания волн в линиях передачи. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени.
- 9) Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения: определения величин тока и напряжения, погонной емкости и индуктивности, определения волнового сопротивления, импеданса нагрузки, импеданса в любом сечении линии с произвольной нагрузкой на конце.
- 10) Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии. Понятие согласования линии с нагрузкой.

- 11) Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора. Низшая мода прямоугольного резонатора (собственная частота, структура поля).
- 12) Причины затухания колебаний в реальных резонаторах. Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде. График зависимости поля собственного колебания в реальном резонаторе от времени
- 13) Представление полей, создаваемых в волноводе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных мод (общий вид формул возбуждения волноводов)
- 14) Представление полей, создаваемых в резонаторе заданными сторонними токами, в виде суперпозиции полей собственных колебаний (общий вид формул возбуждения резонатора). Резонансные свойства полей.
- 15) Способы возбуждения волноводов и резонаторов при помощи штыря и петли.
- 16) Определения дифференциального и полного сечений рассеяния тела. Выражение для амплитуды поля и плотности потока энергии рассеянной волны в дальней зоне через дифференциальное сечение рассеяния.
- 17) Условие применимости приближения геометрической оптики в задачах дифракции.

Задачи № 10.1 (а), 10.2, 10.4(а,б), 10.5(а,б), 10.7, 10.8, 10.16, 10.18(б), 10.19, 10.22, 10.23, 10.31(а,б), 10.33 (резонатор без плазмы), 10.35(а), 10.36, 10.38, 10.48, 11.1(1,2,3) (В.Б. Гильденбург, М.А. Миллер, Сборник задач по электродинамике, 2001 г.).

## Вопрос минимума №1

Для плоской гармонической волны (ТЕМ) функция, определяющая зависимость полей, задается следующим образом

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$$

Где  $\vec{A}^e$  – векторный потенциал поля, а  $\varphi^e(\vec{r}_\perp)$  называется поперечной волновой функцией. Поля  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  определяются следующим образом

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^e}{\partial t} - \nabla \varphi$$

Где  $\varphi$  – скалярный потенциал поля. Используя условие калибровки Лоренца

$$\text{div} \vec{A}^e + \frac{\varepsilon \mu}{c} i \omega \varphi = 0$$

Получим выражения для нахождения полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в случае гармонической волны:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{ik_0 \varepsilon \mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$$

Понятие частоты  $\omega$  – равна количеству повторений или возникновения событий (процессов) в единицу времени.

Понятие временного периода  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  – время, за которое совершается полное колебание.

Понятие продольного волнового числа  $h = \frac{2\pi}{\lambda}$  – волновым числом называется быстрота роста фазы волны по пространственной продольной координате.

Понятие длины волны  $\lambda$  – пространственный период колебаний. Расстояние между двумя ближайшими друг к другу точками в пространстве, в которых колебания происходят в одинаковой фазе.

Понятие фазовой  $v_\Phi$  и групповой скорости  $v_{\text{гр}}$ . Фазовая скорость – скорость перемещения поверхности постоянной фазы. Групповая скорость – скорость перемещения квазимонохроматического пакета.

$$v_\Phi = \frac{\omega}{h}, \quad v_{\text{гр}} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial h} \right|_{\omega=\omega_0}$$

Где  $\omega_0$  – несущая частота группового пакета.

## Вопрос минимума №2

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае произвольной зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta \vec{A} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

Волновое уравнение для векторного потенциала в случае гармонической зависимости от времени и отсутствия сторонних источников

$$\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu$$

Дифференциальное уравнение для функций поперечных координат  $\varphi^{(e)}$  и  $\varphi^{(m)}$ . Понятие поперечного волнового числа.

$$\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– для декартовой системы координат.

$$\Delta A_z^e + k^2 A_z^e = \Delta_\perp \varphi^e + (k^2 - h^2) \varphi^e = 0$$

Тогда дифференциальное уравнение для функций поперечных координат  $\varphi^{(e)}$  и  $\varphi^{(m)}$  выглядит следующим образом

$$\Delta_\perp \varphi^{(e,m)} + \varkappa^2 \varphi^{(e,m)} = 0$$

Где  $\varkappa$  – поперечное волновое число. Если функции  $\varphi^{(e)}$  и  $\varphi^{(m)}$  удовлетворяют двумерному уравнению Гельмгольца, то поля удовлетворяют уравнению Максвелла.

### Вопрос минимума №3

Используем выражения для полей через векторный потенциал

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}^e$$

$$\vec{E} = \frac{1}{k_0 \varepsilon \mu} (\nabla \text{div} + k^2) \vec{A}^e$$

Вычислим  $\nabla \text{div} \vec{A}^e$  и  $\text{rot} \vec{A}^e$  при условии  $\vec{A}^e = \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz} \vec{z}_0$

$$\text{div} \vec{A}^e = -ih \varphi^e(\vec{r}_\perp) e^{-ihz}$$

$$\nabla \text{div} \vec{A}^e = (-h^2 \varphi^e \vec{z}_0 - ih \nabla_\perp \varphi^e) e^{-ihz}$$

$$\text{rot} \vec{A}^e = [\nabla A_z^e, \vec{z}_0] = [\nabla_\perp \varphi^e, \vec{z}_0] e^{-ihz}$$

Тогда получим следующие выражения для комплексных амплитуд полей ТМ волны

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} E_z = \frac{\varkappa^2}{k_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ H_z = 0 \end{cases}$$

ТМ - поперечная магнитная волна. Магнитное поле чисто поперечно пути распространения, но поле  $\vec{E} = \vec{E}_\parallel + \vec{E}_\perp$  имеет продольную и поперечную составляющую.

Уравнения Максвелла симметричны относительно полей, но мы получили неравные выражения для векторов. Это объясняется тем, что мы нашли одно из решений. Воспользовавшись принципом двойственности  $\vec{E} \rightarrow \vec{H}$ ,  $\vec{H} \rightarrow -\vec{E}$ , можно получить выражения для комплексных амплитуд полей ТЕ волны.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = \frac{\varkappa^2}{k_0 \varepsilon \mu} \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = -\frac{h}{k_0 \varepsilon \mu} \nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp) \\ \vec{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon} [\nabla_\perp \varphi^e(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \\ E_z = 0 \end{cases}$$

функция  $\varphi$  не обязана быть такой же, поэтому изменяется верхний индекс на  $m$ , эта функция также должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta_\perp \varphi^m + \varkappa^2 \varphi^m = 0$$

Таким образом для системы уравнений Максвелла возможны два решения ТМ и ТЕ волны. Но есть случай, когда поля чисто поперечны это случай ТЕМ волны. Когда  $\varkappa = 0$ , то есть  $k = h$ , продольные компоненты магнитного и электрического полей отсутствуют это и есть ТЕМ волна.

$$e^{-ihz} \cdot \begin{cases} H_z = E_z = 0 \\ \vec{E}_\perp = -\frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp) \\ \vec{H}_\perp = \frac{1}{\mu} [\nabla_\perp \varphi(\vec{r}_\perp, \vec{z}_0)] \end{cases}$$

$\varphi$  – поперечная волновая функция, удовлетворяющая уравнению  $\Delta\varphi = 0$ . Из формул выше видно, что поперечные компоненты полей удовлетворяют импедансному соотношению

$$\vec{E}_\perp = \eta_{\perp\text{в}} [\vec{H}_\perp, \vec{z}_0]$$

где  $\eta_{\perp\text{в}}$  называется поперечным волновым сопротивлением

$$\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left( \frac{k}{h} \right)^{\pm 1}$$

где «+» – соответствует волне типа ТЕ, а «-» – волне типа ТМ. Для ТЕМ волны

$$\eta_{\perp\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

**Спектр поперечных волновых чисел прямоугольного волновода.** Поперечные волновые числа появляются как собственные числа решения уравнения Гельмгольца с граничными условиями прямоугольного волновода. Спектр найденных таким образом собственных чисел описывается формулой

$$\kappa_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (1)$$

Здесь  $m, n$  – индексы моды,  $a, b$  – размеры сечения волновода. Для однозначности мы всегда считаем, что  $a > b$ .

**Низшая мода.** По определению, такой модой называется мода с наименьшим поперечным волновым числом. Так как мы предполагали  $a > b$ , очевидно, наименьшее возможное нетривиальное поперечное волновое число будет при  $m = 1, n = 0$ :

$$\kappa_{10}^2 = \frac{\pi^2}{a^2} \quad (2)$$

Заметим, что это возможно только для ТЕ-волн, так как решение ТМ-волн не позволяет занулить  $m, n$  одновременно (это приведет к тривиальной поперечной волновой функции). Так что *низшая мода прямоугольного волновода* –  $TE_{10}$ .

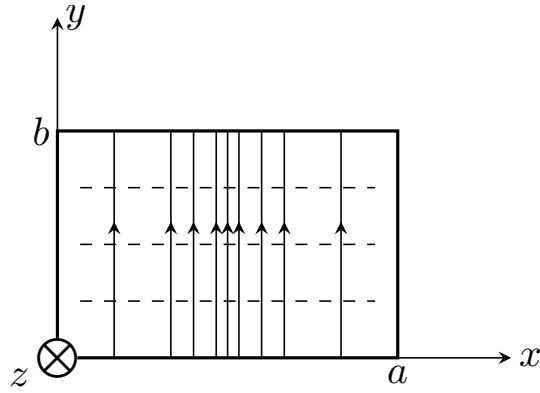


Рис. 1. Структура полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  моды  $TE_{10}$  ( $\vec{H}$  изображено пунктиром)

**Низшая мода круглого волновода .** Она определяется так же, но решение уравнения идет в бесселевых функциях, и поэтому поперечное волновое число имеет другой вид, и низшей модой будет  $TE_{11}$ :

$$\kappa_{11} = \frac{\mu_{11}}{a}, \quad (3)$$

где  $\mu_{11}$  – значение аргумента функции Бесселя  $J_1$  при 1-м нуле своей производной. При этом график моды будет похож на график в прямоугольном волноводе: его можно получить чисто геометрически, постепенно сминая границы волновода, делая его более круглым. Говоря более точно, топологически эти моды подобны.

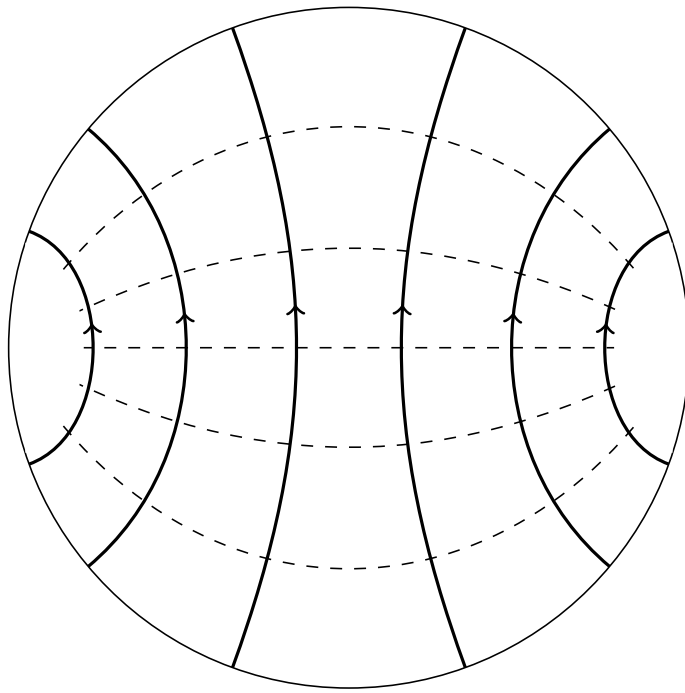


Рис. 2. Структура полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  моды  $\text{TE}_{11}$  круглого волновода ( $\vec{H}$  изображено пунктиром)



**Причины затухания волн в линиях передачи.** В реальных линиях передачи волна распространяется с затуханием за счет *двух* причин: *потери в заполняющей волновод среде* и *потери в стенках волновода*. Мы их учитываем по-отдельности: решаем задачу о потерях в среде, считая стенки  $\sigma = \infty$ , и наоборот.

**Описание затухания, обусловленного потерями энергии в заполняющей среде.** Чтобы учесть потери в среде, подставим комплексную диэлектрическую проницаемость в дисперсионное уравнение:

$$\varepsilon_k = \varepsilon' - i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \rightarrow h^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon\mu - \varkappa \quad (4)$$

Расчеты проводятся при  $\mu = 1$ . Волновое число становится комплексным  $h = h' + ih''$ , и в случае малых потерь можно найти  $h''$ , которое определяет затухание. Для частот, далеких от критической,

$$h'' = \frac{\varepsilon'' k_0^2}{2h'}, \quad \text{где} \quad h' = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon' - \varkappa^2} \quad (5)$$

При  $\omega > \omega_{\text{ср}}$  амплитуда волны уменьшается в  $e$  раз на расстоянии  $L = (h'')^{-1}$ . Нетрудно нарисовать графики: это будет сдвигающаяся волна с огибающей в виде спадающей экспоненты.

**Графики зависимости поля в линии передачи с потерями от продольной координаты в различные моменты времени.** Здесь синим цветом показан график в следующий момент времени, желтым - в предыдущий, зеленым - огибающая (экспонента).

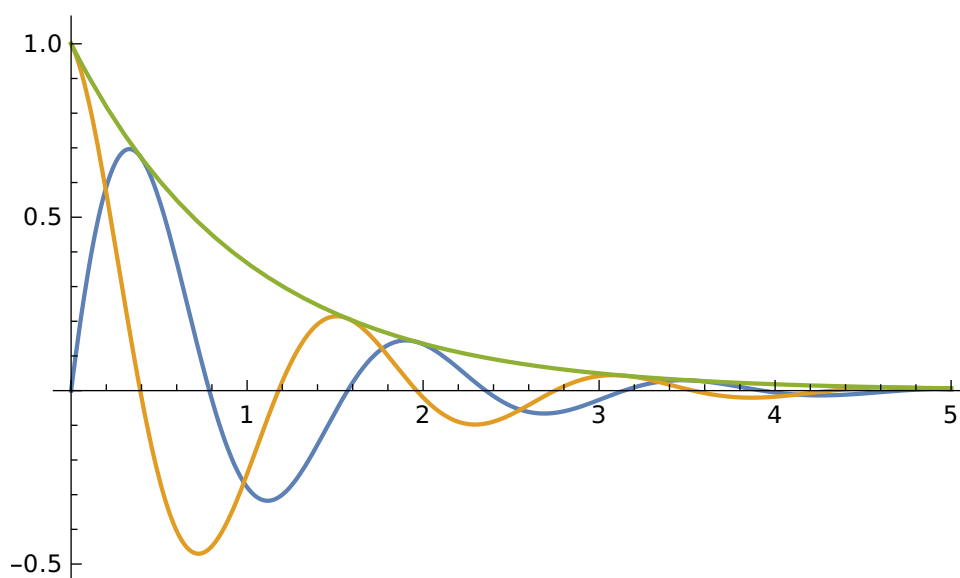


Рис. 3. Затухание поля в линии передачи

**Описание главных волн в линиях передачи в терминах тока и напряжения.**

В системе проводников, когда их количество больше или равно двум, могут распространяться главные (ТЕМ) волны. Именно их, в случае двухпроводной линии, можно описать с помощью телеграфных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{L}{c^2} \frac{\partial I}{\partial t} \end{cases} \quad (6)$$

Они были написаны раньше, чем уравнения Максвелла. Они не дают информации о поле во всем пространстве, а оперируют только интегральными характеристиками: током  $V(z, t)$  и напряжением  $I(z, t)$ <sup>1</sup>. Здесь введен ряд понятий, которые надо раскрыть подробнее.

**Погонные емкость  $C$ , индуктивность  $L$ .** Они вводятся как емкость (индуктивность) на единицу длины, или, выражаясь физически более верно, это отношение емкости (индуктивности) бесконечно малого отрезка двухпроводной линии к её длине. Так же вводится *погонный заряд  $Q$* .

**Напряжение.** По определению, напряжение в двухпроводной линии, в которой распространяется главная волна, будет интеграл

$$V(z) = \int_{(1)}^{(2)} E_l dl, \quad (7)$$

где интегрирование ведется в плоскости сечения  $z = \text{const}$  от одного провода до другого, и не зависит от формы контура. Такое возможно в случае потенциальных полей: поле же главной волны в поперечном сечении потенциально ( $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$ ). Хотя в целом оно не потенциально:

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot } [\nabla_{\perp} \varphi(\vec{r}_{\perp}) \cdot e^{-ihz}] \quad (8)$$

**Ток.** Ток в сечении двухпроводной линии есть отношение количества заряда, проходящего в единицу времени через сечение  $z = \text{const}$  одного провода, к единице времени ( $I = dQ / dt$ ).

---

<sup>1</sup>Продифференцировав второе уравнение по  $z$  и первое по  $t$ , и подставив первое во второе, мы получим волновое уравнение.

**Волновое сопротивление (характеристический импеданс).** В терминах тока и сопротивления, это есть отношение напряжения бегущей волны к току бегущей волны в одном сечении. Выражение можно получить, подставив  $V = V_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$ ,  $I = I_0 \cdot e^{i(\omega t \pm kz)}$  в волновое уравнение:

$$Z_{\text{в}} = \left| \frac{V_{\text{бер}}(z)}{I_{\text{бер}}(z)} \right| = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9)$$

**Импеданс нагрузки.** Он вводится как отношение напряжения на нагрузке к току в нагрузке:

$$Z_{\text{н}} = \frac{V_{\text{н}}}{I_{\text{н}}} \quad (10)$$

**Импеданс в произвольном сечении линии.** Он определяется как  $Z(z) = V(z)/I(z)$ , и с этим тесно связана формула пересчета импеданса, а именно, можно узнать импеданс в любом сечении линии, зная волновой импеданс и импеданс произвольной нагрузки на конце. Тогда, считая положение нагрузки в  $z = 0$ , формула принимает вид

$$Z(z = -L) = Z_{\text{в}} \frac{Z_{\text{н}} + iZ_{\text{в}} \operatorname{tg} kL}{Z_{\text{в}} + iZ_{\text{н}} \operatorname{tg} kL} \quad (11)$$

## Вопрос минимума №10

**Коэффициент отражения волны от нагрузки на конце линии.** Это может быть коэффициент отражения по току или по напряжению. Обычно, когда не упоминается чего, считается, что напряжения. По определению, это

$$\Gamma = \frac{V_{\text{отр}}}{V_{\text{пад}}} = (\text{если посчитать}) = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}} \quad (12)$$

**Понятие согласования линии с нагрузкой.** Линия называется согласованной, если нет отраженной волны:  $\Gamma = 0$ . Для этого нужно, чтобы было  $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$ .

## Вопрос минимума №11

**Спектр собственных частот идеального прямоугольного резонатора.** Его можно найти, если взять прямоугольный волновод и металлизировать сечения нулей электрического поля, удовлетворив граничному условию  $E_\tau = 0$ :

$$\omega_{mnp} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{L^2}}, \quad (13)$$

где  $a > b$  – размеры поперечного сечения,  $L$  – длина резонатора.

**Низшая мода прямоугольного резонатора.** Если  $b < a$ ,  $b < L$ , то низшей модой будет  $\text{TE}_{101}$ :

$$\omega_{101} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2} \quad (14)$$

Надо заметить, что ТЕ/ТМ здесь условно, так как зависит от выбора осей. Пусть ребро  $a$  вдоль  $x$ ,  $b$  вдоль  $y$ ,  $L$  вдоль  $z$ . Структура поля тогда

$$\vec{E} = \vec{y}_0 E_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L}z\right) e^{i\omega_{101}t} \quad (15)$$

**Причины затухания колебаний в реальных резонаторах.** Как и в случае линии передачи, причин две: потери в заполняющей среде (комплексная  $\varepsilon$ ) и потери в стенках ( $\sigma \neq \infty$ ).

**Затухание за счет потерь в заполнении.** Чтобы его найти, нужно действовать стандартно: представить  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ , аналогично  $\mu = \dots$ . Связь частот определяется формулой

$$\omega = \frac{\omega^{(0)}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad (16)$$

где  $\omega^{(0)}$  – спектр незаполненного резонатора. Отсюда найдется  $\omega''$  ( $\omega = \omega' + i\omega''$ ), и тогда затухание будет происходить как

$$E, H \sim e^{i\omega t} \sim e^{i\omega' t} \cdot e^{-i\omega'' t} \quad (17)$$

При  $\mu = 1$  оказывается, что  $\omega'' \sim -\varepsilon''$ . Это не ошибка, так как  $\varepsilon'' < 0$ .

**График собств. колебаний в реальном резонаторе от времени.** Для прямоугольного резонатора можно построить  $\text{Re } E_x(t)$ , это будет синусоида, вписанная в огибающую – убывающую экспоненту:

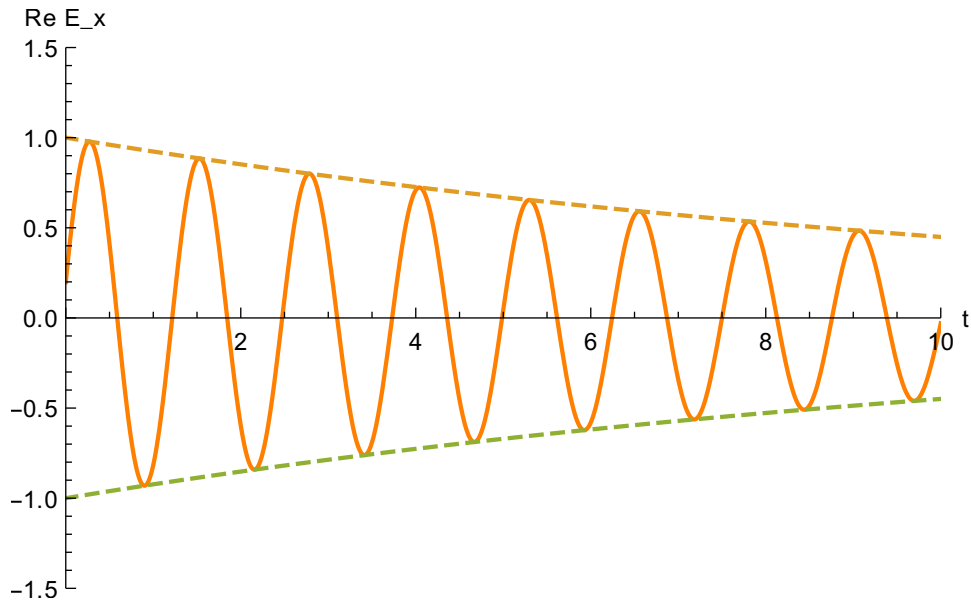


Рис. 4. Затухание поля в резонаторе со временем