

1. Prove por indução matemática que para todo  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  tem-se que,  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .
2. Prove por indução matemática que para todo  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  tem-se que,  $1 + 3 + 5 + \dots + 2(n-1) = n^2$ .
3. Prove por indução matemática que para todo  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  tem-se que,  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$ .
4. Prove por indução matemática que para todo  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  tem-se que,  $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot n = n^2$ .
5. Usando o sistema formal da aritmética de Peano demonstre que:
  - Para todo  $a, b \in \mathbb{N}$  tem-se que  $a + b = b + a$ .
  - Para todo  $a, b, c \in \mathbb{N}$  tem-se que  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
  - Para todo  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , se  $a + c = b + c$ , então  $a = b$ .
6. Utilizando sua linguagem de programação favorita, construa uma pequena biblioteca que implementa o sistema formal da aritmética de Peano, como visto nas últimas aulas. Ressaltando que, além de conter a formalização dos números naturais, a biblioteca deve também implementar as seguintes operações:
  - Soma.
  - Subtração.
  - Multiplicação.
  - Máximo entre dois números.

Ps. Sua biblioteca deve oferecer ao usuário uma interface (talvez via REPL, ou função toString) que permita ver o comportamento (ou seja, não somente o resultado final) da aplicação de todas as operações contidas na biblioteca.