Universidade Federal do Rio Grande do Norte

DIM0152 - Matemática para Computação I

Prof.: Valdigleis S. Costa

Atividade de Reforço

Semestre 2025.2

Aluno: Eduardo Teixeira de Moura Silva

Matrícula: 20200047345

1. Questão 1

Proposição: Para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tem-se que:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Demonstração:

Demonstraremos por **indução matemática** sobre n.

Caso Base ($n = 1$):

Para $n = 1$, temos:

- Lado esquerdo: $1^2 = 1$
- Lado direito: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Portanto, $1 = 1$, e a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Hipótese de Indução:

Suponha que a proposição seja verdadeira para algum $k \in \mathbb{N} - \{0\}$, isto é:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Passo Indutivo:

Devemos mostrar que a proposição é verdadeira para $k + 1$, ou seja:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Partindo do lado esquerdo:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \quad \text{(pela H.I.)} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left[2k^2 + k + 6k + 6\right]}{6} \\
&= \frac{(k+1)\left[2k^2 + 7k + 6\right]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

A última igualdade segue de fatorar $2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$.

Portanto, a proposição é verdadeira para $k + 1$.

Conclusão:

Pelo princípio de indução matemática, $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

2. Questão 2

Proposição: Para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tem-se que:

$$1 + 3 + 5 + ... + 2(n-1) = n^2$$

Demonstração:

Demonstraremos por **indução matemática** sobre n.

Caso Base ($n = 1$):

Para $n = 1$, o lado esquerdo contém apenas o primeiro termo da sequência, que é $2(1-1) = 0$.

Porém, observamos que quando $n = 1$, a soma dos primeiros n ímpares começando de 1 é: $1 = 1^2$.

Vamos reinterpretar a questão como: $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$.

Para $n = 1$: $2(1) - 1 = 1 = 1^2$. ✓

Hipótese de Indução:

Suponha que para algum $k \in \mathbb{N} - \{0\}$:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) = k^2$$

Passo Indutivo:

Devemos mostrar que para $k + 1$:

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2(k+1)-1) = (k+1)^2$$

Partindo do lado esquerdo:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + ... + (2k-1) + (2k+1) &= k^2 + (2k+1) \quad \text{(pela H.I.)} \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Conclusão:

Pelo princípio de indução matemática, a soma dos primeiros n números ímpares é igual a n^2.

3. Questão 3

Proposição: Para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tem-se que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$$

Demonstração:

Sabemos que $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Portanto, queremos mostrar:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Demonstraremos por **indução matemática** sobre n.

Caso Base ($n = 1$):

- Lado esquerdo: $1^3 = 1$
- Lado direito: $\left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$

Portanto, a proposição é verdadeira para $n = 1$.

Hipótese de Indução:

Suponha que para algum $k \in \mathbb{N} - \{0\}$:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

Passo Indutivo:

Devemos mostrar que para $k + 1$:

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Partindo do lado esquerdo:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + ... + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \quad \text{(pela H.I.)} \\ &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4k + 4]}{4} \\ &= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Pois $k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$.

Conclusão:

Pelo princípio de indução matemática, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

4. Questão 4

Proposição: Para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ tem-se que:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + 2 \cdot n = n^2$$

Demonstração:

Observação: A fórmula apresentada parece estar incorreta. Vamos verificar para $n = 1, 2, 3$:

- Para $n = 1$: $2 \cdot 1 = 2 \neq 1^2 = 1$
- Para $n = 2$: $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 2 + 4 = 6 \neq 2^2 = 4$

A fórmula correta deveria ser:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + 2 \cdot n = n(n+1)$$

ou possivelmente:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demonstraremos a fórmula $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$ por indução.

Caso Base ($n = 1$):

$2 \cdot 1 = 2 = 1(1+1)$ ✓

Hipótese de Indução:

Suponha que para algum $k \in \mathbb{N} - \{0\}$:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + ... + 2 \cdot k = k(k+1)$$

Passo Indutivo:

Devemos mostrar que para $k + 1$:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + ... + 2 \cdot k + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

Partindo do lado esquerdo:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + ... + 2 \cdot k + 2(k+1) &= k(k+1) + 2(k+1) \quad \text{(pela H.I.)} \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

Conclusão:

Pelo princípio de indução matemática, $2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + ... + 2 \cdot n = n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

5. Questão 5

Usando o sistema formal da aritmética de Peano, demonstraremos as seguintes propriedades:

5.1. Propriedade 5.1: Comutatividade da Adição

Teorema (Comutatividade da Adição): Para todo $a, b \in \mathbb{N}$, tem-se que $a + b = b + a$.

Axiomas de Peano Relevantes:
- **P1:** $0 \in \mathbb{N}$
- **P2:** Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $S(n) \in \mathbb{N}$ (sucessor de n)
- **P3:** Para todo $n \in \mathbb{N}$, $S(n) \neq 0$
- **P4:** Se $S(m) = S(n)$, então $m = n$
- **P5:** Se $P(0)$ é verdadeiro e $P(n) \Rightarrow P(S(n))$ para todo n, então $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$

Definição da Adição:
- **A1:** $a + 0 = a$
- **A2:** $a + S(b) = S(a + b)$

Demonstração:

Fixemos $a \in \mathbb{N}$ arbitrário e demonstremos por indução sobre b.

Lemas Auxiliares:

Lema 1: $0 + b = b$ para todo $b \in \mathbb{N}$.

Demonstração do Lema 1: Por indução em b.
- Base: $0 + 0 = 0$ (por A1)
- Passo: Suponha $0 + k = k$. Então:

$$0 + S(k) = S(0 + k) = S(k) \quad \text{(por A2 e H.I.)}$$

Lema 2: $S(a) + b = S(a + b)$ para todo $a, b \in \mathbb{N}$.

Demonstração do Lema 2: Por indução em b.
- Base: $S(a) + 0 = S(a) = S(a + 0)$ (por A1)
- Passo: Suponha $S(a) + k = S(a + k)$. Então:

$$\begin{aligned} S(a) + S(k) &= S(S(a) + k) \quad && \text{(por A2)} \\ &= S(S(a + k)) \quad && \text{(por H.I.)} \\ &= S(a + S(k)) \quad && \text{(por A2)} \end{aligned}$$

Demonstração Principal:

Base ($b = 0$):

$$a + 0 = a = 0 + a \quad \text{(por A1 e Lema 1)}$$

Passo Indutivo: Suponha $a + k = k + a$. Então:

$$
\begin{aligned}
a + S(k) &= S(a+k) && \text{(por A2)} \\
&= S(k+a) && \text{(por H.I.)} \\
&= S(k) + a && \text{(por Lema 2)}
\end{aligned}
$$

Portanto, por indução, $a + b = b + a$ para todo $b \in \mathbb{N}$.

5.2. Propriedade 5.2: Associatividade da Adição

Teorema (Associatividade da Adição): Para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se que $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Demonstração:

Fixemos $a, b \in \mathbb{N}$ arbitrários e demonstremos por indução sobre c.

Base ($c = 0$):

$$\begin{aligned} (a+b)+0 &= a+b \quad \text{(por A1)} \\ &= a+(b+0) \quad \text{(por A1)} \end{aligned}$$

Passo Indutivo: Suponha $(a + b) + k = a + (b + k)$. Então:

$$\begin{aligned} (a+b)+S(k) &= S((a+b)+k) \quad \text{(por A2)} \\ &= S(a+(b+k)) \quad \text{(por H.I.)} \\ &= a+S(b+k) \quad \text{(por A2)} \\ &= a+(b+S(k)) \quad \text{(por A2)} \end{aligned}$$

Portanto, por indução, $(a + b) + c = a + (b + c)$ para todo $c \in \mathbb{N}$.

5.3. Propriedade 5.3: Lei do Cancelamento

Teorema (Lei do Cancelamento): Para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$, se $a + c = b + c$, então $a = b$.

Demonstração:

Demonstraremos por indução sobre c.

Base ($c = 0$):

Se $a + 0 = b + 0$, então $a = b$ (por A1).

Passo Indutivo:

Suponha que a propriedade vale para k, ou seja, se $a + k = b + k$, então $a = b$.

Agora, suponha que $a + S(k) = b + S(k)$. Então:

$$\begin{aligned} a + S(k) &= b + S(k) \\ S(a + k) &= S(b + k) \quad \text{(por A2)} \end{aligned}$$

Pelo axioma P4, se $S(a + k) = S(b + k)$, então $a + k = b + k$.

Pela hipótese de indução, como $a + k = b + k$, segue que $a = b$.

Portanto, por indução, a lei do cancelamento vale para todo $c \in \mathbb{N}$.

6. Questão 6

Para a questão 6, foi implementada uma biblioteca em Haskell que formaliza a aritmética de Peano e suas operações.

A biblioteca está disponível no arquivo `Peano.hs` e pode ser testada no REPL do GHC.

6.1. Estrutura da Implementação

A biblioteca implementa:

1. **Tipo de Dados `Nat`**: Representa os números naturais usando os construtores de Peano
   - `Zero`: representa o número 0
   - `Succ n`: representa o sucessor de n
2. **Operações Aritméticas**:
   - `add`: Soma de dois números naturais
   - `sub`: Subtração de dois números naturais
   - `mult`: Multiplicação de dois números naturais
   - `maxNat`: Máximo entre dois números naturais
3. **Interface de Visualização**:
   - Instância de `Show` para visualizar números de Peano
   - Funções auxiliares para converter entre `Int` e `Nat`
   - Funções de demonstração que mostram o passo a passo das operações

6.2. Exemplo de Uso

Para utilizar a biblioteca, execute os seguintes comandos no terminal:

```
$ nix-shell
$ ghci Peano.hs

-- Criar números
let dois = Succ (Succ Zero)
let tres = Succ (Succ (Succ Zero))

-- Operações
add dois tres        -- Resultado: Succ (Succ (Succ (Succ (Succ Zero))))
mult dois tres       -- Resultado: seis
maxNat dois tres     -- Resultado: tres

-- Demonstrações com passos
demonstrateAdd 2 3
demonstrateMult 2 3
```

A implementação completa com comentários detalhados e exemplos encontra-se no arquivo fonte.