《信息论与编码》第七、第八章习题解答

7-2　**设** E_n **是** n **维二元矢量空间中所有具备偶数重量的矢量集合。证明** E_n **是线性码，并确定** E_n **的参数（**n, k, d**），以及它的系统生成矩阵。**

［证明］设 $\mathbf{c}_1$ **和** $\mathbf{c}_2$ **均属于** E_n **，即均是重量为偶数的** n **维二元矢量。于是** $\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2$ **的重量为**

$$w_H(\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2)=w_H(\mathbf{c}_1)+w_H(\mathbf{c}_2)-2w_H(\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2)$$

是偶数，其中 $\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{c}_2$ **表示** $\mathbf{c}_1$ **和** $\mathbf{c}_2$ **的交截。因此** $\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2\in E_n$ **，所以** E_n **是一个线性码。**

由于对称性，在所有长度为 n **的二元矢量中，奇数重量与偶数重量的矢量数相等，所以** E_n **中码字数为** 2^{n-1} **，从而** $k=n-1$ **；又** E_n **中最小非零码字的重量为** 2**，所以** $d=2$ **，于是** E_n **的参数为** $(n,n-1,2)$ **。**

7-4　**设二元线性码** M **的生成矩阵为**

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

求 M **的最小距离。**

［解］由 G **生成的（**5**，**3**）码的八个码字为**

（00000），（10011），（00101），（01111）

（10110），（01010），（11100），（11001）

所以非零码字最小重量为 2**，从而最小** Hamming **矩离** $d_{\min}=2$**。**

7-5　**设二元线性码** M **的生成矩阵为**

$$G=\begin{pmatrix}1&1&0&1&0\\0&1&0&1&0\end{pmatrix},$$

建立码 M **的标准阵，并对码字** 11111 **和** 10000 **分别进行译码。**

［解］由 G **生成的（**5**，**2**）码** M **的标准阵列为**

（00000），（11010），（01010），（10000）

（00001），（11011），（01011），（10001）

（00010），（11000），（01000），（10010）

（00100），（11110），（01110），（10100）

（00011），（11001），（01001），（10011）

（00101），（11111），（01111），（10101）

（01100），（10110），（00110），（11100）

（00111），（11101），（01101），（10111）

接收到矢量（11111）**译成码字**（11010）

接收到矢量（10000）**译成码字**（10000）

7-7　**设二元线性码** M **的生成矩阵为**

$$G=\left[\begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & 0 & 0\\ & 1 & 0 & 1 & 0\\ & 0 & 1 & 1 & 0\\ I_7 & 1 & 1 & 1 & 1\\ & 1 & 1 & 0 & 1\\ & 0 & 1 & 0 & 1\\ & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right],$$

确定 M **的校验矩阵并求其最小距离。**

［**解**］**与** G **相应的系统生成矩阵为**

$$G^{'}=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & I_{7\times 7}\\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

相应的校验矩阵为

$$H'=\left[\begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ I_{4\times 4} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]$$

G **和** $G^{'}$ **的差别仅是列的置换，所以** H **和** H' **的差别也是同样的列置换，所以**

$$H=\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & I_{4\times 4}\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{array}\right]$$

该码的校验矩阵任意二列线性独立，而第 1，2，3 **列之和为零矢量，所以存在着相关的三列，从而最小** Hamming **重量为** 3。

$d_{\min}=3$

7-8　**建立二元（7, 4）Hamming 码的包含陪集首项和伴随式的伴随表，并对收到的矢量** 0000011，1111111，1100110，1010101 **进行译码。**

[**解**]（7.4）Hamming **码的校验矩阵为**

$$H=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&1\\0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

错误形式和伴随矢量表为

e	s
（1000000）	（100）
（0100000）	（010）
（0010000）	（110）
（0001000）	（001）
（0000100）	（101）
（0000010）	（011）
（0000001）	（111）

接收矢量　伴随矢量　相应译出码字

（0000011）$\Rightarrow$（100）$\Rightarrow$（1000011）

（1111111）$\Rightarrow$（000）$\Rightarrow$（11111111）

（1100110）$\Rightarrow$（000）$\Rightarrow$（1100110）

（1010101）$\Rightarrow$（000）$\Rightarrow$（1010101）

7-9　**设二元（15，11）Hamming 码的校验矩阵为**

$$H=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

试对收到的字 011011001111000，**和** 001100110011000 **进行译码。**

[**解**]

接收到矢量	伴随式	错误形式	译出码字
（011011001111000），	（0110），	（000001000000000），	（011010001111000）
（001100110011000），	（1111），	（000000000000001），	（001100110011001）

7-10 **设** $C=\{11100, 01001, 10010, 00111\}$ **是一个二元码**

（1）求码 C 的最小距离 d**；**

（2）根据最小距离译码准则，对 10000，01100，00100 **进行译码；**

（3）计算码 C 的码率 R**；**

[解]（1）首先注意到码 $C=\{11100, 01001, 10010, 00111\}$ **不是线性码，所以它的最小重量不等于最小距离。因此我们只能通过计算成对码字距离，求最小距离。计算结果如下：**

d(11100,01001)=3, d(11100,10010)=3, d(11100,00111)=4,

d(01001,10010)=4, d(01001,00111)=3, d(10010,00111)=3

所以码 C 的最小距离 d=3。

（2）根据最小距离译码准则，10000 **对应码字为** 10010

01100 **对应码字为** 11100

00100 **对应码字为** 11100**，或** 00111

（3）由于分组码 $C=\{11100, 01001, 10010, 00111\}$ **中码字数** $M=4$**，码字长度** $n=5$**，所以碼率为** $R=\dfrac{\log_2 M}{n}=\dfrac{2}{5}$

7-11 **研究系统码（8，4），其校验方程为**

$$c_0=m_1+m_2+m_3$$
$$c_1=m_0+m_1+m_2$$
$$c_2=m_0+m_1+m_3$$
$$c_3=m_0+m_2+m_3$$

其中 m_0, m_1, m_2, m_3 **是信息位，**c_0, c_2, c_3, c_4 **是校验位，求此码的生成矩阵和校验矩阵，并证明此码的最小距离为** 4。

[解] **设系统码的校验矩阵为**

$$H=\begin{bmatrix}1&0&0&0&g_{00}&g_{10}&g_{20}&g_{30}\\0&1&0&0&g_{01}&g_{11}&g_{21}&g_{31}\\0&0&1&0&g_{02}&g_{12}&g_{22}&g_{32}\\0&0&0&1&g_{03}&g_{13}&g_{23}&g_{33}\end{bmatrix}$$

任何码字

$$\mathbf{c}=(c_0c_1c_2c_3m_0m_1m_2m_3)$$

满足 $\mathbf{c}\cdot H^T=0$

即

$$c_0=g_{00}m_0+g_{10}m_1+g_{20}m_2+g_{30}m_3$$
$$c_1=g_{01}m_0+g_{11}m_1+g_{21}m_2+g_{31}m_3$$
$$c_2=g_{02}m_0+g_{12}m_1+g_{22}m_2+g_{32}m_3$$
$$c_3=g_{03}m_0+g_{13}m_1+g_{23}m_2+g_{33}m_3$$

所以

$g_{00}=0$，$g_{10}=g_{20}=g_{30}=1$

$g_{31}=0$，$g_{01}=g_{11}=g_{21}=1$

$g_{22}=0$，$g_{02}=g_{12}=g_{32}=1$

$g_{13}=0$，$g_{03}=g_{23}=g_{33}=1$

因此

$$H=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&1&1&0\\0&0&1&0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1&0&1&1\end{array}\right]$$

所以

$$G=\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&1&1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&0&1&0\\1&0&1&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

因为在 H **矩阵中没有任何** 3 **列线性相关，同时** 1，2，3，6 **列是线性相关的，所以最小重量为** 4，**也就是最小** Hamming **重量为** 4。

7-12 **证明** Hamming **距离的三角不等式，即若** $\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3$ **是** GF(2)**上三个长度为** n **的矢量，则**

$$d(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2)+d(\boldsymbol{c}_2,\boldsymbol{c}_3)\geq d(\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_3)$$

[证明] **设**

$$\mathbf{c}_1=(c_{10},c_{11},\cdots,c_{1,n-1})$$
$$\mathbf{c}_2=(c_{20},c_{21},\cdots,c_{2,n-1})$$

$$\mathbf{c}_3=(c_{30},c_{31},\cdots,c_{3,n-1})$$

考虑第 i **位分量，如果** c_{1i} **和** c_{3i} **取相同符号，即**

$$d(c_{1i},c_{3i})=0$$

则显然 $$d(c_{1i},c_{2i})+d(c_{2i},c_{3i})\geq d(c_{1i},c_{3i})=0$$

如果 c_{1i} **和** c_{3i} **取相异符号，即**

$$d(c_{1i},c_{3i})=1$$

则不管 c_{2i} **取什么符号，至少它与** c_{1i} **和** c_{3i} **中一个符号相反，所以**

$$d(c_{1i},c_{2i})+d(c_{2i},c_{3i})\geq d(c_{1i},c_{3i})=1$$

所以 $$d(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_2)+d(\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3)\geq d(\mathbf{c}_1,\mathbf{c}_3)$$

8-7 **考虑由** $g(X)=1+X+X^4$ **生成的（**15，11**）循环** Hamming **码。**

（a）**确定此码的校验多项式。**

（b）**确定它对偶码的生成多项式。**

（c）**找出此码的系统生成矩阵和一致校验矩阵。**

[解] （a）**校验多项式**

$$h(X)=(X^{15}+1)/g(x)$$

$$=X^{11}+X^8+X^7+X^5+X^3+X^2+X+1$$

（b）**对偶码生成多项式为** $h(X)$ **的倒易多项式，即**

$$G^1(x)=X^{11}\cdot h\left(\frac{1}{X}\right)$$

$$=1+X^3+X^4+X^6+X^8+X^9+X^{10}+X^{11}$$

（c）**此码的一个非系统生成矩阵为**

$$G=\begin{pmatrix}1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$$

系统生成矩阵为

$$G = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & I_{11\times 11} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \right)$$

$$H = \left(\begin{array}{c|ccccccccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ I_{4\times 4} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$