

2015~2016 《矩阵论》回忆卷

By Laughing 哥

一. 设 λ_i 为矩阵 A 的特征值, 证明:

1. $\text{tr}(A^k) = \sum_i^n \lambda_i^k$

2. $\det(A^{-k}) = \prod_i^n \lambda_i^{-k}$

二. 当 α 为何值时, 线性方程组:

$$(\alpha + 3)x_1 + x_2 + x_2 = \alpha$$

$$3(\alpha + 1)x_1 + \alpha x_2 + (\alpha + 3)x_3 = 3$$

$$\alpha x_1 + (\alpha - 1)x_2 + x_3 = \alpha$$

有唯一解、无解和无穷多解 (《矩阵论》课本 P90-1.37 原题)

三. 考虑方程 $y = Ac + e$, 其中 e 为误差向量, 定义加权误差平方和

$$E_w = e^H W e$$

其中 W 为一 Hermitian 正定矩阵, 且有约束条件 $c^T y = 1$

求最优滤波器 \hat{c}

四. 对于混合约束优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) \text{ subject to. } f_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, I \quad h_j(x) = 0, j = 1, \dots, J$$

- (1). 使用混合外罚函数法, 请写出代价函数;
- (2). 使用混合内罚函数法, 请写出两种代价函数;
- (3). 使用增广 Lagrangian 乘子法, 请写出对应的代价函数

五. 给定三个数据点, 分别使用总体最小二乘法以及一般最小二乘法进行拟合, 分别求得各自的距离平方和并比较。

六. 设 $\frac{\sqrt{2}}{2}[j, 1]^T$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的特征向量, 求解:

- (1). a 的值
- (2). $A^H A$ 的奇异值
- (3). A 的左奇异矩阵 U 。

七. A, B 均为 Hermitian 矩阵

(1) Rayleigh 商如下, 当 x 取何值时, 取得极大值, 极大值为多少?

$$R(x) = \frac{x^H A x}{x^H x}$$

(2) 广义 Rayleigh 商如下, 当 x 取何值时, 取得极大值, 极大值为多少?

$$R(x) = \frac{x^H A x}{x^H B x}$$

八. 设 x 为一随机向量, 且 $x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, 其均值向量为 m_x , 协方差矩阵为 C_x . 求对 x 进行迷向圆变换。

九. 简单题

(1). 请简述内罚函数与外罚函数的特点。

(2). 请简述条件数 $\text{cond}(A)$ 的物理意义。

(3). 请简述 Tikhonov 正则化与反正则化的意义。