数字信号处理

2017年秋冬学期

第四讲
2017年10月16日

第3章 离散傅里叶变换及其快速计算方法

3.3 DFT及其性质——DFT 与 DTFT 和 Z 变换的关系

■取样 Z 变换（Z 变换和 DFT是取样和内插的关系）

设 $x(n)$ 为一个长度为N的有限长序列，则有：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jn\omega}=DTFT\{x(n)\}$$

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

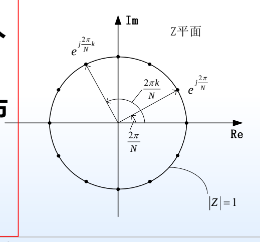
$$=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\qquad k\in\{0,1,\cdots,(N-1)\}$$

$$=DFT\{x(n)\}$$

3.3 DFT及其性质——DFT 与 DTFT 和 Z 变换的关系

■ 从 DTFT 的角度：有限长序列的 DFT 结果包含了 N 个离散频率点处的 DTFT 结果，这个离散频率点等间隔地分布在区间 $[0，2\pi)$ 内；

■ 从 Z 变换的角度：DFT 结果包含了 z 平面上 N 个离散点处的 Z 变换结果，这 N 个离散点均匀地分布在单位圆上，由此也称 DFT为单位圆上的取样 Z 变换。



3.3 DFT及其性质——DFT 与 DTFT 和 Z 变换的关系

■ Z 域内插公式：由 DFT $X(k)$ 可确定 z平面上任一点处的 $X(z)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}(W_N^{-k}z^{-1})^n\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-Nk}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(z)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi(W_N^k z)$$

z 平面内插公式

$$\Phi(v)=\frac{1}{N}\frac{1-v^{-N}}{1-v^{-1}}$$

内插函数

3.3 DFT及其性质——DFT 与 DTFT 和 Z 变换的关系

■ 内插函数的零极点分布

$$\Phi(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}=\frac{1}{N}\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}$$

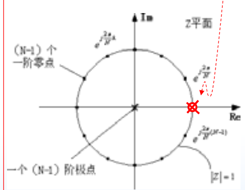
¤极点：$(N\text{-}1)$阶极点$z=0$；
　　　一阶极点 $z=1$；

¤零点：N 个一阶零点:

$$z_l=e^{j\frac{2\pi l}{N}}\ ,\quad l=0,1,2,\cdots,(N-1)$$

¤抵消：$z=1$ 处的一阶极点和一阶零点互相抵消，一阶零点数量变为（N-1）个。

零、极点互相抵消



$\Phi(z)$ 的零、极点分布

3.3 DFT及其性质——DFT 与 DTFT 和 Z 变换的关系

■ F 域内插公式：由频域取样 DFT $X(k)$ 表示 DTFT $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{j\frac{2\pi k}{N}}e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{e^{-j\frac{\omega N}{2}}}{e^{j\frac{\pi k}{N}}e^{-j\frac{\omega}{2}}}\frac{e^{j\frac{\omega N}{2}}-e^{-j\frac{\omega N}{2}}}{e^{-j\frac{\pi k}{N}}e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{j\frac{\pi k}{N}}e^{-j\frac{\omega}{2}}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{(-1)^k e^{-j\frac{\omega N}{2}}}{e^{-j\frac{1}{2}\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)}}\frac{(-1)^k\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{1}{2}(\omega-\frac{2\pi k}{N}))}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{e^{-j\frac{N}{2}\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)}}{e^{-j\frac{1}{2}\left(\omega-\frac{2\pi k}{N}\right)}}\frac{\sin(\frac{N}{2}(\omega-\frac{2\pi k}{N}))}{\sin(\frac{1}{2}(\omega-\frac{2\pi k}{N}))}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{-j\frac{N-1}{2}(\omega-\frac{2\pi k}{N})}\frac{\sin\left(\frac{N}{2}(\omega-\frac{2\pi k}{N})\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\omega-\frac{2\pi k}{N})\right)}$$

频域内插公式

即: $X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(\omega)=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi(\omega-\frac{2\pi k}{N})$

频域内插函数

其中: $\Phi(\omega)=\frac{1}{N}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}=\Phi(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$

$\Phi(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$

■ F 内插函数的零极点分布

根据Φ(z) 的零极点分布规律可知:

(零极点对系统频率响应的影响)

极点: $e^{j\omega}$ 到极点 z=0 的距离恒为1，对幅频特性没有影响

零点:

- 在区间 [0, 2π] 内，|Φ(ω)| 存在(N-1)个零值点

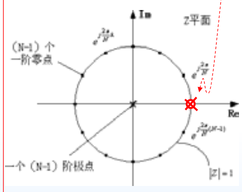
$$\omega=\frac{2\pi k}{N},\ k=1,2,\cdots,(N-1)$$

- 存在 (N-1)个极值点，分别为:

$$\omega=0$$

$$\omega=\frac{(2k+1)\pi}{N},\ k=1,2,\cdots,(N-2)$$

零、极点互相抵消



Φ(z) 的零、极点分布

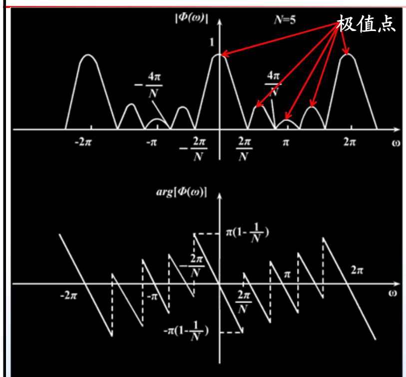
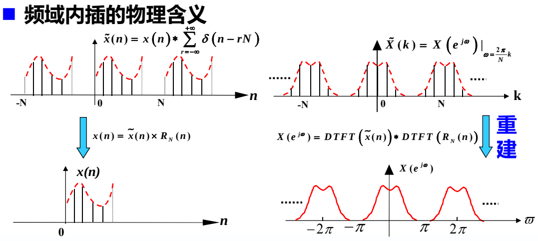


图3-13 插值函数 Φ(ω)的幅度特性与相位特性 (N=5)

DFT 从整体上可看成是由窄带相邻滤波器组成的滤波器组，此窄带滤波器的中心位于数字频率 (2k+1)π/N 弧度，带宽为 2π/N 。

■ 频域内插的物理含义



- 当频域取样点数 N 大于等于序列长度 M 时，$\tilde{x}(n)$不混迭，即可从 $\tilde{x}(n)$ 恢复 $x(n)$，由 $X(k)$ 准确重建 $X(z)$ 和 $X(e^{j\omega})$。
- 对序列作 DFT 变换点数不应低于序列的长度。
- $X(k)$ 浓缩了 $x(n)$ 在变换域中的全部特性。

- ■线性
- ■对称性
- ■帕斯瓦尔定理
- ■反转定理

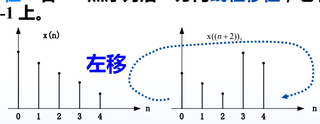
p. 88-89

■ 序列的循环移位(圆周移位)

循环移位的定义：

$$x_m(n)=x((n+m))_N R_N(n)$$

- 称其为循环移位的原因在于，当序列从一端移出范围时，移出的部分又会从另一端移入该范围。
- 线性移位：若 N 点序列沿一方向线性移位，它将不再位于区间 $0\le n\le N-1$ 上。



$$x(n)\xrightarrow[\text{延拓}]{\text{周期}}\tilde{x}(n)\xrightarrow{\text{移位}}\tilde{x}(n+m)\xrightarrow[\text{序列}]{\text{取主值}}x_m(n)=x((n+m))_N R_N(n)$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环移位后的DFT

若 $x(n) \xrightarrow{DFT} X(k)$ ，则

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n) \xrightarrow{DFT} W_N^{-mk} X(k)$$

证明：

$$\begin{aligned} DFT[x((n+m))_N R_N(n)] &= DFT[\tilde{x}(n+m)R_N(n)] \\ &= DFS[\tilde{x}(n+m)]R_N(k) \\ &= W_N^{-mk}\tilde{X}(k)R_N(k) \\ &= W_N^{-mk}X(k) \end{aligned}$$

结论：
有限长序列的循环移位，在离散频域中只引入了一个和频率成正比的线性相移 $W_N^{-mk} = e^{j\frac{2\pi}{N}mk}$ ，对幅频特性没有影响。

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 频域循环移位后的 IDFT（调制特性）

由 DFT 所具有的对偶特性不难看出，在频域内循环移位时，将有类似的结果，即：

$$x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} = W_N^{nl}x(n) \xleftarrow{IDFT} X((k+l))_N R_N(k)$$

$$\begin{aligned} IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] &= IDFT[\tilde{X}(k+l)R_N(k)] \\ &= IDFS[\tilde{X}(k+l)]R_N(n) \\ &= W_N^{nl}\tilde{x}(n)R_N(n) \\ &= W_N^{nl}x(n) \end{aligned}$$

时域序列的调制等效于频域的循环移位

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 频域循环移位后的 IDFT

$$DFT\left[x(n)\cos\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[X((k-l))_N + X((k+l))_N\right]R_N(k)$$

$$DFT\left[x(n)\sin\left(\frac{2\pi nl}{N}\right)\right] = \frac{1}{2j}\left[X((k-l))_N - X((k+l))_N\right]R_N(k)$$

证明： $IDFT\left\{\frac{1}{2j}\left[X((k-l))_N - X((k+l))_N\right]R_N(k)\right\}$

$$= \frac{1}{2j}\left[W_N^{-nl}x(n) - W_N^{nl}x(n)\right] = \frac{e^{j\frac{2\pi}{N}nl} - e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}}{2j}x(n)$$

$$= x(n)\sin\frac{2\pi nl}{N}$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积（圆周卷积）

循环卷积定义：设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是长度为 N 的有限长序列，把它们分别拓展为周期序列 $\tilde{x}_1$ 和 $\tilde{x}_2$ ，定义循环卷积为

$$\begin{aligned} x_3(n) &= x_1(n) \otimes x_2(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)\right]R_N(n) \end{aligned}$$

——周期序列卷积后取主值

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积（圆周卷积）

– 因为上式的求和范围是 m 由 0 到 N-1，因此第一个序列 $x_1(m)$ 可以不作周期拓展，即

$$x_3(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1}\underbrace{x_1(m)}_{\text{有限长序列}}\underbrace{x_2((n-m))_N}_{\text{周期序列}}\right]R_N(n)$$

– 注意两个 N 点序列的线性卷积将导致一个更长的序列。而循环卷积将区间限制在 $0 \le n \le N-1$ ，结果仍为 N 点序列，它与线性卷积的结构类似。不同点在于求和范围和 N 点循环移位。它与 N 有关，也叫做 N 点循环卷积。

周期序列卷积取主周期

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积（圆周卷积）

循环卷积的时频映射关系

– 由 DTFT 的性质可知，两个序列时域上的线性卷积运算在频域上表现为两个序列 DTFT 结果的乘积。

– 同样的，若

$$x_1(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k), \quad x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_2(k)$$

– 则

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \xleftrightarrow{DFT} X_1(k)X_2(k)$$

即<u>当在频域中进行两个 N 点 DFT 相乘时，在时域中映射为循环卷积（而不是通常的线性卷积！）</u>。

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积（圆周卷积）

证明：

将 $X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 作周期延拓，分别得到 $X_1((k))_N$ 和 $X_2((k))_N$。

令 $Y(k)=X_1(k)\cdot X_2(k)$ 则 $Y((k))_N=X_1((k))_N\cdot X_2((k))_N$

再设 $y((n))_N \xleftrightarrow{DFS} Y((k))_N$

于是

$$
\begin{aligned}
y((n))_N &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y((k))_N W^{-kn} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N W^{km}\right]\left[\sum_{r=0}^{N-1} x_2((r))_N W^{kr}\right]W^{-kn} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N \sum_{r=0}^{N-1} x_2((r))_N \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W^{-k(n-m-r)}\right]
\end{aligned}
$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积（圆周卷积）

因为 $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W^{-k(n-m-r)} = \begin{cases} 1 & r=n-m \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

所以

$$y((n))_N = \sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N \sum_{r=0}^{N-1} x_2((n-m))_N)$$

此时上式最后一个求和号中，已不对 r 求和，故此求和号可以去掉，因此，

$$y((n))_N = \sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N) x_2((n-m))_N)$$

因而，

$$y(n) = y((n))_N)R_N(n) = x_1(n)\otimes x_2(n)$$

即

$$x_1(n)\otimes x_2(n) \xleftrightarrow{IDFT} X_1(k)X_2(k)$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

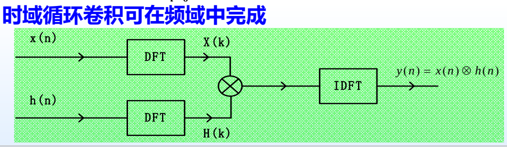
■ 利用时域、频域的对偶性可得频域循环卷积:

若 $y(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$

则

$$
\begin{aligned}
Y(k) = DFT[y(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W_N^{nk} \\
&= \frac{1}{N}[\sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l))_N]R_N(k) \\
&= \frac{1}{N}[\sum_{l=0}^{N-1} X_2(l) X_1((k-l))_N]R_N(k)
\end{aligned}
$$

时域循环卷积可在频域中完成



3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积计算方法

1) 同心圆法
2) 利用求周期卷积的作图法
3) 解析式法（时域、频域）
4) Matlab 方法

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积计算方法

同心圆法

可用两个同心圆来表示：

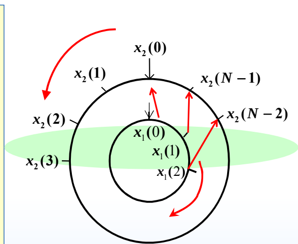
$$x_3(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)$$

$$=\left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2((n-m))_N\right]R_N(n)$$

$x_1(n)$：内圆顺时针方向**排列**

$x_2(n)$：外圆逆时针方向排列

$x_1(0)$ 与 $x_2(0)$ 对齐。

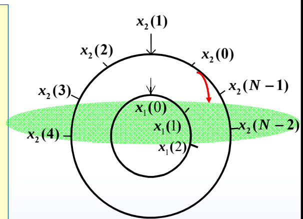


3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积计算方法

同心圆法

- 两圆上对应数两两相乘后求和，得 $x_3(0)$；
- 将 $x_2(n\text{-}m)$ 移位一位，即**外圆顺时针转动一位**，重复（1）步骤，得 $x_3(1)$ ；
- 依次下去，求得 $x_3(n),\quad 0\le n\le N-1$



3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积计算方法

作图法

1）$x_1(m)$ 和 $x_2(m)$ 在 m 轴上周期延拓，成为 $\tilde{x}_1(m),\tilde{x}_2(m)$

2）将 $\tilde{x}_2(m)$ 反转 $\tilde{x}_2(-m)$ ；

3）计算周期卷积 $\tilde{x}_3(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$

4）取 $\tilde{x}_3(n)$ 一个周期，得到 $x_3(n)$

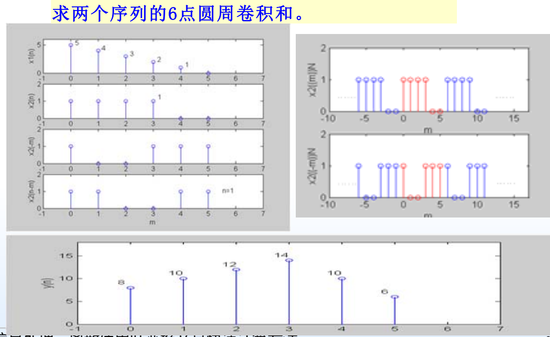
上述过程：只需将 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 分别做周期延拓，得到 $\tilde{x}_1(n)$ 和 $\tilde{x}_2(n)$ ，再按照计算周期卷积的作图法，计算出 n 由 0 到 N-1 的周期卷积，即为循环卷积。

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积计算方法

例：已知序列 $x_1(n)=(5-n)R_5(n)$，$x_2(n)=R_4(n)$

求两个序列的6点圆周卷积和。



3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积计算方法

解析式法

例 设 $x_1(n)=\{1,2,2\}$，$x_2(n)=\{1,2,3,4\}$，计算 4 点循环卷积

$$x_1(n)\otimes x_2(n)$$

解：

注意 $x_1(n)$ 为 3 点序列，进行循环卷积之前在其尾部填一个零，使其成为 4 点序列，分别在时域和频域中求解这个问题。

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积计算方法

解析式法

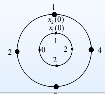
1）时域方法

4 点循环卷积由下式给出

$$x_3(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)=\sum_{m=0}^{3}x_1(m)x_2((n-m))_4$$

对每个 n 产生一个循环移位序列，将它的样本逐个与 $x_1(m)$ 相乘，然后求和，得此 n 值的循环卷值，在 $0\le n\le 3$ 上重复此过程。考虑 $x_1(m)=\{1,2,2,0\}$ 和 $x_2(m)=\{1,2,3,4\}$。

–n=0 时, $\sum_{m=0}^{3}x_1(m)x_2((0-m))_4=\sum_{m=0}^{3}[\{1,2,2,0\}.*\{1,4,3,2\}]$



$$=\sum_{m=0}^{3}\{1,8,6,0\}=15$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积计算方法

解析式法

$n=2$ 时，$\sum_{m=0}^{3}x_1(m)x_2((2-m))_4=\sum_{m=0}^{3}[\{1,2,2,0\}.*\{3,2,1,4\}]$

$$=\sum_{m=0}^{3}\{3,4,2,0\}=9$$

$n=3$ 时，$\sum_{m=0}^{3}x_1(m)x_2((3-m))_4=\sum_{m=0}^{3}[\{1,2,2,0\}.*\{4,3,2,1\}]$

$$=\sum_{m=0}^{3}\{4,6,4,0\}=14$$

因此，$x_1(n)\otimes x_2(n)=\{15,12,9,14\}$

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积计算方法-**解析式法**

2）频域方法：

首先计算 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 4 点 DFT，逐个样本相乘，取IDFT，得到循环卷积。

$$x_1(n)=\{1,2,2,0\}\ \Rightarrow X_1(k)=\{5,\ -1-2j,1,\ -1+2j\}$$

$$x_2(n)=\{1,2,3,4\}\ \ ?\ \ X_2(k)=\{10,\ -2+2j,\ -2,\ -2-2j\}$$

则（$X_1(k)$ 和 $X_2(k)$ 对应位相乘）

$$X_1(k)\cdot X_2(k)=\{50,\ 6+2j,\ -2,\ 6-2j\}$$

IDFT 后，得

$$x_1(n)\otimes x_2(n)=\{15,12,9,14\}$$

表面看来，这样做反而更复杂，且涉及复数运算。但后面我们会看到，DFT 有快速算法 FFT，特别是当 N 很大时，效率会显著提高。

3.3 DFT及其性质—DFT 的性质

■ 循环卷积计算方法

例 序列为：$x_1(n)=\{1,2,2\}$，$x_2(n)=\{1，2，3，4\}$，在这个例子中，研究 N 的大小对循环卷积的影响，显然 $N\geq 4$；否则 $x_2(n)$ 将在时域内出现混叠，分别计算5点、6点、7点的循环卷积。

5点循环卷积结果为 {9，4，9，14，14}

6点循环卷积结果为= {1，4，9，14，14，8}

7点循环卷积结果为 {1，4，9，14，14，8，0}

对于不同的 N 值，循环卷积得到了不同的结果。
而对于线性卷积，结果是惟一的。

在什么条件下，线性卷积和循环卷积相同？

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解

循环卷积和线性卷积的关系

设：$x(n)\quad 0\leq n\leq N-1$

$h(n)\quad 0\leq n\leq M-1$

令 $N\geq \max[N,M]$

N点循环卷积：

$$y_c(n)=x(n)\otimes h(n)=[\boxed{\sum_{m=0}^{N-1}}x(m)\underline{h((n-m))_N}]R_N(n)$$

$$=[\sum_{m=0}^{N-1}h(m)x((n-m))_N]R_N(n)=h(n)\otimes x(n)$$

线性卷积：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty}}x(m)h(n-m)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)=h(n)*x(n)$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解

线性卷积 $y(n)=x(n)*h(n)$ 的长度

从 $x(m)$ 看，　非零值区为：　$0\leq m\leq N-1$

从 $h(n-m)$ 看，非零值区为：　$0\leq n-m\leq M-1$

将两不等式相加，得到 $y(n)$ 的非零区：

$0\leq n\leq M+N-2$

在此区间之外，不是 $x(m)=0$，就是 $h(n-m)=0$，即$y(n)=0$，因此，$y(n)$ 的长度为 $M+N-1$

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解

✧ 循环卷积的长度

循环卷积是周期卷积的主值序列。为研究长度不等的两个序列的周期卷积，构造周期序列 L。

$$\tilde{x}(n)\qquad \overbrace{x(0),\cdots\cdots,x(N-1),0,0,\cdots,0}^{L}$$

$$\tilde{h}(n)\qquad \overbrace{h(0),\cdots\cdots,h(M-1),0,0\cdots,0}^{L}$$

表示为

$$\tilde{x}(n)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}x(n+qL),\quad \tilde{x}(n)=x(n),\quad 0\leq n\leq N-1$$

$$\tilde{h}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}h(n+rL),\quad \tilde{h}(n)=h(n),\quad 0\leq n\leq M-1$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解

✧ 周期卷积如下：

$$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{L-1}\tilde{x}(m)\tilde{h}(n-m)=\sum_{m=0}^{L-1}\overbrace{\sum_{q=-\infty}^{\infty}x(m+qL)}^{\text{只取一个周期}}\sum_{r=-\infty}^{\infty}h(n-m+rL)$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}\underbrace{\sum_{m=0}^{L-1}x(m)h(n+rL-m)}_{\text{两段有限长数据的线性卷积的表达式}}$$

$$=\sum_{r=-\infty}^{\infty}y(n+rL)$$

IDFS，Eq. (3.25), p.95

➢周期卷积是线性卷积的周期延拓，周期为 L。

➢当周期为 $L\geq N+M-1$ 时，不会发生混迭，线性卷积正好是周期卷积的一个周期。

➢循环卷积又是周期卷积的主值序列。

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解

由于循环卷积是周期卷积的主值序列。因此，此时循环卷积与线性卷积完全相同。

$$y_c(n)=x(n)\otimes h(n)=\tilde{y}(n)R_N(n)$$

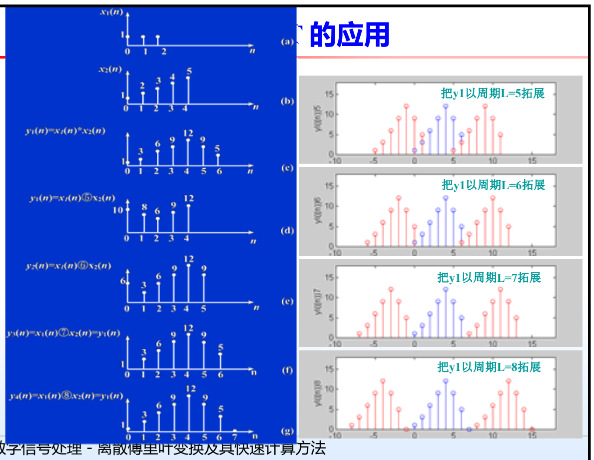
$$=y(n)=\sum_{m=0}^{L-1}x(m)h(n-m)\qquad 0\leq n\leq L-1$$

因此，循环卷积等于线性卷积的条件是：

$$L\geq M+N-1$$

即对于N长度的$x(n)$，M长度的$h(n)$，在它们后面补零，使其长度均变为 $L\geq M+N-1$。

的应用



3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

- **线性卷积求解**

用 DFT 求解线性卷积

设 $x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k), \quad h(n) \xleftrightarrow{DFT} H(k)$

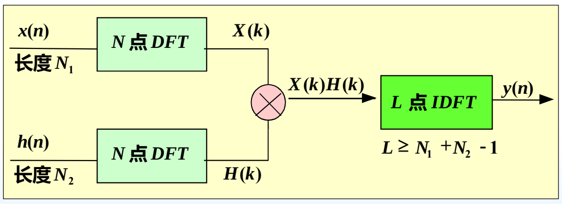
由于 $y(n) = x(n) \otimes h(n) \xleftrightarrow{DFT} Y(k) = X(k)H(k)$

即时域循环卷积 $\xrightarrow{DFT\text{ 映射}}$ 频域相乘

则 $y(n) = IDFT[Y(k)] = IDFT[X(k)H(k)]$

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

- **线性卷积求解**
  - 如果循环卷积的长度 L 满足 $L \ge N_1+N_2-1$，则此循环卷积 $y(k)$ 等于 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的线性卷积。用流程图表示法求 $y(n)=x(n)*h(n)$ 的过程如下：



  - 因为 DFT、IDFT 都有快速算法，因此，线性卷积可以实现快速算法。

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

- **线性卷积求解-分段卷积**

➢ 当其中某个序列会很长或无限长，若等长序列存储或输入完后再做卷积运算，将产生问题：

- 存储量过大，运算量也太大；
- 等待输入的时间很长，引起长延迟；
- 采用 DFT/FFT 快速算法的效率降低

➢ 解决此问题的思路：
把长序列分段，每一分段分别与短序列进行卷积——分段卷积。

具体方法：重叠相加法、重叠保留法

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

- **线性卷积求解-分段卷积**
- **误差分析**
  - 在分析分段卷积之前，首先分析两个有限长度序列的循环卷积的误差情况。
  - 设 $x(n)$ 为 N_1 点序列，$h(n)$ 为 N_2 点序列，线性卷积 $y(n)$ 和循环卷积 $y_C(n)$ 关系为：

$$y_c(n) = x(n) \otimes h(n) = \tilde{y}_N(n) R_N(n)$$
$$= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y(n+rN)\right] R_N(n) \qquad 0 \le n \le N-1$$

♣ 一般地讲，循环卷积是线性卷积的一种混叠形式，即是线性卷积以周期 N 延拓后取主值周期。但当 $N \ge N_1+N_2-1$，没有混迭产生，此时线性卷积 $y(n)$ 和循环卷积 $y_N(n)$ 相等。

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

- **线性卷积求解-分段卷积**

✧ 为了用 DFT 计算线性卷积，必须选择适当的 N，当小于 N 时，会引入误差，误差=？

✧ 令 $N \ge \max(N_1, N_2)$，设

$$\max(N_1, N_2) \le N \le (N_1 + N_2 - 1)$$

循环卷积 $y_c(n)$ 的取值范围

$$0 \le n \le N-1 \le (N_1 + N_2 - 1)$$

而线性卷积 y(n) 的非零范围

$$0 \le n \le (N_1 + N_2 - 1)$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解-分段卷积

循环卷积

$$y_c(n)=x(n)\otimes h(n)=\tilde{y}(n)R_N(n)$$

$$=\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}y(n+rN)\right]R_N(n)\quad 0\le n\le N-1$$

误差

$$e(n)=y_c(n)-y(n)$$

$$=\left[\sum_{r=-\infty}^{\infty}y(n+rN)\right]R_N(n)-y(n)$$

$$=\left[\cdots+y(n-2N)+y(n-N)+y(n)+y(n+N)+y(n+2N)+\cdots\right]R_N(n)-y(n)$$

$$=\left[\cdots+y(n-2N)+y(n-N)+y(n+N)+y(n+2N)+\cdots\right]R_N(n)$$

$$=\left[\sum_{r\neq 0}y(n+rN)\right]R_N(n)$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解-分段卷积

因为 $\max(N_1, N_2)\le N\le(N_1+N_2-1)$，则求和式中只剩 $r=\pm1$ 项，其它的 r 超出了 $\max(N_1, N_2)\le N\le(N_1+N_2-1)$。因此，

$$e(n)=[y(n-N)+y(n+N)]R_N(n)$$

如果 $x(n)$ 和 $h(n)$ 为因果序列，则 $y(n)$ 也为因果序列，

$$y(n-N)=0;\qquad 0\le n\le N-1$$

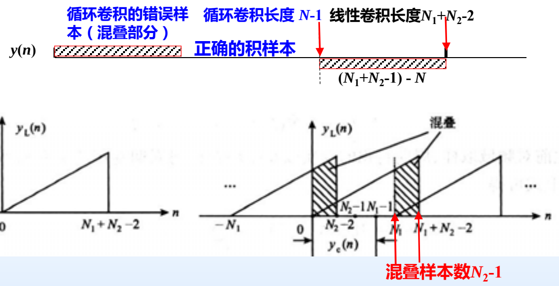
因此

$$e(n)=y(n+N)\qquad 0\le n\le N-1$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

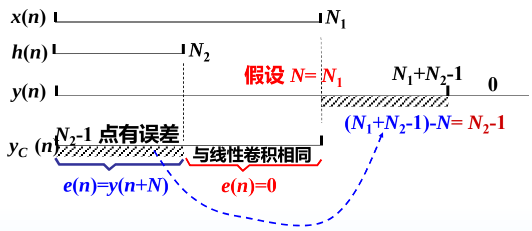
■ 线性卷积求解-分段卷积

当 $\max(N_1,N_2)\le N\le(N_1+N_2-1)$



3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解-分段卷积



错误样本数 = 线性卷积长度 – 循环卷积长度

$$e(n)=y(n+N)\qquad 0\le n\le N-1$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解-分段卷积

例 设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 是两个四点序列：

$$x_1(n)=\{1,2,2,1\}\ ,\ x_2(n)=\{1,-1,-1,1\}$$

计算当 $N=6$，5，4 时的循环卷积，并在每种情况下，验证它们的误差。

线性卷积为 7 点 $x_3(n)=\{1,1,-1,-2,-1,1,1\}$

当 $N=6$，得到 6 点序列的循环卷积为：

$$x_6(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)=\{2,1,-1,-2,-1,1\}$$

因此
$$\begin{aligned}e(n)=&\ \{2,1,-1,-2,-1,1\}\\&-\{1,1,-1,-2,-1,1\}\ \ 0\le n\le 5\\=&\ \{1,0,0,0,0,0\}\\=&\ x_3(n+N)=x_3(n+6)\end{aligned}$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解-分段卷积

当 $N=5$ 时，得到 5 点序列的循环卷积为

$$x_5(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)=\{2,2,-1,-2,-1\}$$

$$\begin{aligned}e(n)=&\ \{2,2,-1,-2,-1\}-\{1,1,-1,-2,-1\}\\=&\ \{1,1,0,0,0\}=x_3(n+5)\end{aligned}$$

当 $N=4$ 时，得到 4 点序列的循环卷积为

$$x_4(n)=x_1(n)\otimes x_2(n)=\{0,2,0,-2\}$$

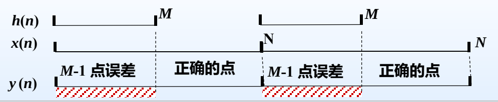
$$\begin{aligned}e(n)=&\ \{0,2,0,-2\}-\{1,1,-1,-2\}\\=&\ \{-1,1,1,0\}=x_3(n+4)\end{aligned}$$

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解-分段卷积-重叠保留法

➢ 重叠保留法 —— 对输入 $x(n)$ 预处理

- 基本思路
  - 把序列 $x(n)$ 分成多段 N 点序列，系统的脉冲响应为 M 点序列，M<N。
  - 输入分段序列和脉冲响应之间的 N 点循环卷积产生该段的输出序列，其中前 M-1 个样本不是正确的输出值。
  - 若将 $x(n)$ 简单地分成互不重叠的各段，则所得的输出序列会有不正确样本区间存在。
  - 输入数据如何分段？结果如何处理？



3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解-分段卷积-重叠保留法

☞ 为了解决这个问题，将 $x(n)$ 分为长度 N_1 的分段，然后每段再往前多取（M-1）个样本，即第 k 段的最后 M-1 点保留下来作为第 (k+1) 段的前 M-1 点，各段长变为：

$$N = N_1 + M - 1$$

其中最前面的一段 $x_0(n)$，在其前面补上 M-1 个零，使其长度也为 N。其中任一段 $x_k(n)$ 与 $h(n)$ 进行 N 点卷积运算。

☞ 循环卷积：
$$y_k'(n) = x_k(n) \otimes h(n)$$

相应的周期为：N=N_1+M-1

☞ 线性卷积：
$$y_k(n) = x_k(n) * h(n)$$

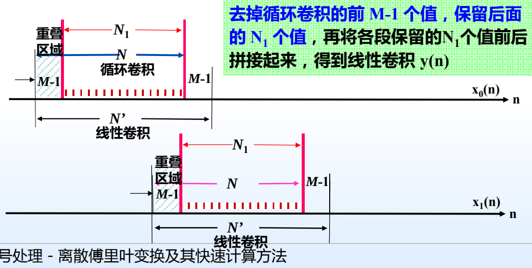
3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解-分段卷积-重叠保留法

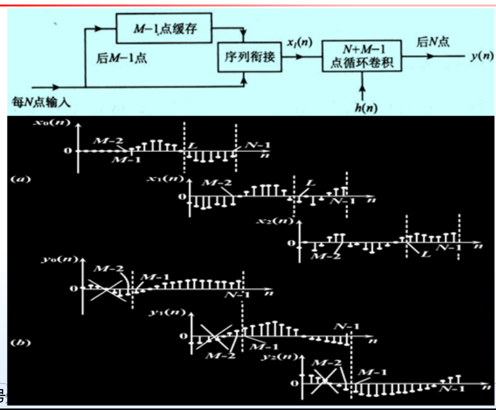
$y_k(n)$ 的长度为：$N' = N + M - 1 = N_1 + 2(M-1)$

错误样本数 = 线性卷积长度 – 循环卷积长度
= [N_1+2(M-1)] – [N_1+(M-1)] = M-1

去掉循环卷积的前 M-1 个值，保留后面的 N_1 个值，再将各段保留的N_1个值前后拼接起来，得到线性卷积 y(n)



3.3 DFT及其性质—DFT 的应用



重叠保留法示意图

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解-分段卷积-重叠保留法

例 3.20 设 $x(n)$ = (n+1), 0≤n≤9, $h(n)$={1,0,-1}，按 N =6 用重叠保留法计算

$$y(n) = x(n)*h(n)$$

解：由于 M =3，必须使每一段与前一段重叠2个样本，$x(n)$ 为 10 点序列，需要在开头加 (M-1) = 2 个零。因为 N = 6，则可划分为三部分：

$$x_1(n) = \{0, 0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$x_2(n) = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$
$$x_3(n) = \{7, 8, 9, 10, 0, 0\}$$

因为 $x(n)$ 在 n>9 时无值，因此在 $x_3(n)$ 中必须填两个零。

3.3 DFT及其性质—DFT 的应用

■ 线性卷积求解-分段卷积-重叠保留法

现在计算每一部分与 $h(n)$ 循环卷积 (不是线性卷积)

$$y_1(n) = x_1(n) \otimes h(n) = \{-3, -4, 1, 2, 2, 2\}$$
$$y_2(n) = x_2(n) \otimes h(n) = \{-4, -4, 2, 2, 2, 2\}$$
$$y_3(n) = x_3(n) \otimes h(n) = \{7, 8, 2, 2, -9, -10\}$$

舍去前两个样本，装配输出 y(n) 为

$$y(n) = \{1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, -9, -10\}$$

也可以直接计算线性卷积，结果为：

$$x(n) * h(n) = \{1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, -9, -10\}$$

与重叠保留法结果相同。

习题　3.19，3.21，3.23，3.25

实验二

实验要求请到DSP公邮下载
zju_dsp@163.com 密码：dsp_zju
可交纸质版或PDF电子版发送到：
3130103370@zju.edu.cn

习题，10月23日交
实验二，10月30日交
10月23日讨论习题及实验一

55