数字信号处理

2017年秋冬学期

第二讲
2017年9月25日

第二章 离散时间信号与离散时间系统

2.5 离散时间信号的傅里叶变换-Parseval 定理

- DTFT前后能量保持不变

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

证明: 信号 $x(n)$ 在时域的总能量 E_x 为：

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)x(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{jn\omega}\right]d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E(e^{j\omega})d\omega$$

Parseval 定理说明，信号在时域的总能量等于其在频域的总能量。频域的总能量等于 $|X(e^{j\omega})|^2$ 在一个周期内的积分，因此，$|X(e^{j\omega})|^2$ 是信号的能量谱

2.6 Z变换的定义及收敛域

- **线性模拟系统：**

  L变换（拉氏变换）：解常系数微分方程的运算方法

  微分方程 → 代数方程（时域 → s 域）

- **离散系统:**

  Z变换：解常系数差分方程的运算方法

  差分方程 → 代数方程（时域 → z 域）；

用零极点图形象的表示离散系统的时间与频率特性，避免大量的数学分析。

2.6 Z变换的定义及收敛域

- 序列 $x(n)$ 的 Z 变换定义　　双边 Z 变换定义

$$\boxed{X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}}$$

z —复变量，它所在的平面称为复平面

令 $z = re^{j\omega}$ —复指数形式。

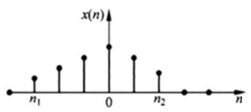
- 收敛域
  - ✓ X(z) 是幂级数，收敛问题？
  - ✓ 对于任意给定的序列 x(n)，使其 Z 变换收敛的 z 值集合称作 X(z) 的收敛域 ROC（Region of Convergence），即：{ z : X(z) 存在 }。
  - ✓ 即 ROC 是满足 $\left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}\right| < \infty$ 的区域

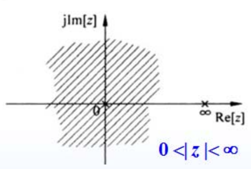
注意：不同的序列 $x(n)$，可能对应相同的 Z 变换，只是收敛域不同。

2.6 Z变换的定义及收敛域

- 四种典型序列的Z变换收敛域
- ➢ 有限长序列

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}$$





$0 < |z| < \infty$

(1) $X(z)$中只有 z 的正幂时，即 $n_1<0$，$n_2\leqslant0$ 时，ROC：$0\leqslant|z|<\infty$；

(2) $X(z)$中只有 z 的负幂时，即 $n_1\geqslant0$，$n_2>0$ 时，ROC：$0<|z|\leqslant\infty$；

(3) $X(z)$中既有 z 的正幂又有 z 的负幂时，即 $n_1<0$，$n_2>0$ 时，ROC：$0<|z|<\infty$。

2.6 Z变换的定义及收敛域

- 四种典型序列的Z变换收敛域
- ➢ 右边序列

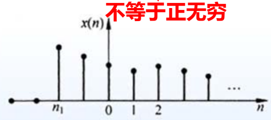
$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n}, \quad R_{x-} < |Z| < \infty$$

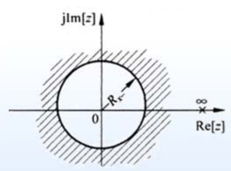
幂级数收敛定理

$$\sum_{n=n_1}^{-1} x(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

负指数

不等于正无穷





2.6 Z变换的定义及收敛域

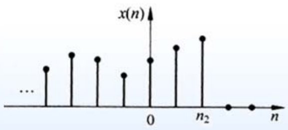
四种典型序列的Z变换收敛域

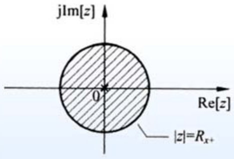
左边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n}+\sum_{n=1}^{n_2}x(n)z^{-n}$$

正指数

$0<|z|<R_{x+}$ 小于某一半径的圆内 不等于0



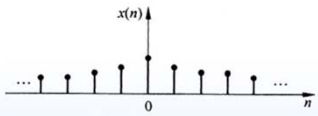


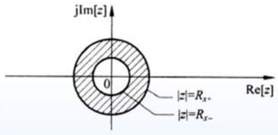
2.6 Z变换的定义及收敛域

四种典型序列的Z变换收敛域

双边序列

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n},\quad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$





- 在收敛域内的 X(z) 是解析函数，X(z) 的极点在收敛域 ROC 之外，收敛域以极点为边界，收敛域内无极点。

2.6 Z变换的定义及收敛域

四种典型序列的Z变换收敛域

例 2.16 求序列 $x(n)=a^{|n|}$ ($|a|<1$)的 Z 变换，并求出对应的零、极点和收敛域。

解 由 Z 变换的定义可知

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}\cdot z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}a^{n}z^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

$$=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$$

$$=\frac{(a^2-1)z}{a(z-a^{-1})(z-a)}$$

收敛域：$|az|<1$，且 $\left|\frac{a}{z}\right|<1$，即：$|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$。

极点：$z=a$，$z=\frac{1}{a}$，零点：$z=0$，$z=\infty$。 $X(z)|_{z=\infty}\to 0$

收敛域如图 2.32 所示。

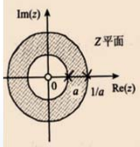


图 2.32 $x(n)=a^{|n|}$ ($|a|<1$)的收敛域

2.7 Z反变换

- 从给定的 Z 变换闭合式 X(z)中还原出原序列 $x(n)$，称为 Z 反变换：

$$X(z)\xrightarrow{z^{-1}}x(n)\qquad z\in R$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c(n)z^{-n}$$

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{R_k}{1-p_kz^{-1}}+\sum_{k=0}^{M-N}C_kz^{-k}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

- **常用方法**
  - 幂级数展开法（长除法）
  - 部分分式分解法
  - 留数法（围线积分法）
  - Matlab
  - 注意：收敛域 ROC

2.7 Z反变换

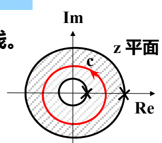
- **柯西定理**

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{k-1}dz=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$$

式中 c 是一条逆时针方向环绕原点的围线。

- **Z 变换的定义：**

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$



两边同乘上 z^{k-1}，在 X(z) 的收敛区域内取一条包围原点的逆时针闭合曲线 c 作围线积分，得到

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{k-1}dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_c\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n+k-1}dz$$

2.7 Z反变换

右边表达式，交换积分与求和次序，根据柯西定理

$$=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n+k-1}dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-n+k-1}dz$$

$$=x(n)$$

Z 反变换的定义：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

c 是 X(z) 收敛域内的一条逆时针方向绕原点的闭合围线。

- 问题：如何求解上述围线积分？

2.7 Z反变换-留数法

■ 利用留数定理可以求解围线积分运算

设 z_k 是被积函数 $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 内的一组极点。根据留数定理，$x(n)$ 等于围线 c 内全部极点留数之和，即：

$$x(n)=\sum_k \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_k]$$

■ 求极点的留数

✧ $X(z)z^{n-1}$在单极点 z_0 的留数

$$(z-z_0)X(z)z^{n-1}\big|_{z=z_0}$$

✧ $X(z)z^{n-1}$ 在 z_0 有 K 阶极点的留数

$$\frac{1}{(K-1)!}\frac{d^{K-1}}{dz^{K-1}}[(z-z_0)^K X(z)z^{n-1}]\big|_{z=z_0}$$ 求解复杂

2.7 Z反变换-留数法

■ 利用围线外极点留数求 $x(n)$

$$\sum_k \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_k]+\sum_m \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_m]+\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},\infty]=0$$

围线c内极点　围线c外极点　无穷远处极点

➢ 围线 c 内有多阶极点，c 外没有多阶极点：改求围线 c 外的极点留数之和：

$$x(n)=-\sum_m \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_m]-\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},\infty]$$

无穷远点的留数为非零

两点注意：

– 极点的确定：判断 $X(z)z^{n-1}$ 极点是否发生了变化。

– 当 $X(z)z^{n-1}$ 在 $z=0$ 处有极点时应特别注意多 阶极点。

2.7 Z反变换-留数法

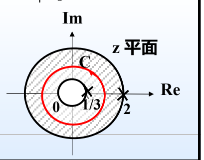
例：$X(z)=\dfrac{5z}{(2-z)(3z-1)}$　　$\dfrac{1}{3}<z<2$

解：$X(z)z^{n-1}=\dfrac{5z}{(2-z)(3z-1)}z^{n-1}=\dfrac{5z^n}{(2-z)(3z-1)}$

(1) 当 n≥0 时c内有极点 $z=1/3$

$$\therefore x(n)=\sum_{留数}\frac{5z(z^{n-1})}{(2-z)(3z-1)}=(z-\frac{1}{3})\frac{5z\cdot z^{n-1}}{(2-z)(3z-1)}\Big|_{z=\frac{1}{3}}$$

$$=\left(z-\frac{1}{3}\right)\frac{5\cdot z^n}{3(2-z)\left(z-\frac{1}{3}\right)}\Big|_{z=\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^n$$



2.7 Z反变换-留数法

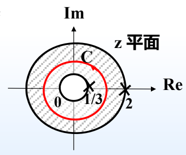
(2) 当 n<0 时 $X(z)z^{n-1}$ 在围线 c 内的极点有 $z=1/3$ 和 $z=0$，而 $z=0$ 是一个多阶极点，改求围线外的留数之和，围线外只有极点 $z=2$。

$$\frac{5z}{(2-z)(3z-1)}\cdot z^{n-1}=\frac{5z^n}{(2-z)(3z-1)}$$ 在 $z=2$ 有极点（在 C 的外部）

$$x(n)=-\sum_{留数}\frac{5z(z^{n-1})}{(2-z)(3z-1)}\Big|_{z=2}$$

$$=-(z-2)\frac{5z(z^{n-1})}{(2-z)(3z-1)}\Big|_{z=2}=2^n$$

$$\therefore\ x(n)=\begin{cases}\left(\frac{1}{3}\right)^n & n\ge 0\\ 2^n & n<0\end{cases}$$



2.7 Z反变换-留数法

例：计算因果系统的 z 反变换：$X(z)=\dfrac{z^2}{(z-0.2)(z+0.8)}$

解一：因果（p. 39）系统 z 变换的收敛域为 $|z|>r_1$, 极点都在圆内，因此，$r_1=0.8$，则反变换 $x(n)$ 为：

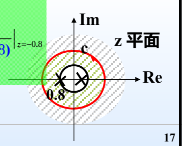
$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\frac{1}{2\pi j}\oint_c\frac{z^{n+1}}{(z-0.2)(z+0.8)}dz$$

1）当 $n\ge-1$ 时，在围线 c 内有两个极点，$z=0.2$ 和 $z=-0.8$

$$x(n)=\sum_{留数}\frac{z^{n+1}}{(z-0.2)(z+0.8)}$$

$$=(z-0.2)\frac{z^{n+1}}{(z-0.2)(z+0.8)}\Big|_{z=0.2}+(z+0.8)\frac{z^{n+1}}{(z-0.2)(z+0.8)}\Big|_{z=-0.8}$$

$$=(0.2)^{n+1}-(-0.8)^{n+1}$$



2.7 Z反变换-留数法

2）当 $n\le-2$ 时，在围线 c 内有三个极点，$z=0.2$ 、$z=-0.8$ 和 $z=0$，其中 $z=0$ 是多阶极点，改求围线外的留数之和，围线 c 外没有极点（包括无穷远点处留数为零），得

$$x(n)=0$$

解二：先把假有理式变成真有理式和直接项

$$X(z)=\frac{z^2}{(z-0.2)(z+0.8)}=1+\frac{0.16-0.6z}{(z-0.2)(z+0.8)}$$

$$x(n)=\delta(n)+\sum_{留数}\left[\frac{0.16-0.6z}{(z-0.2)(z+0.8)}\right]z^{n-1}$$

2.7 Z反变换-留数法

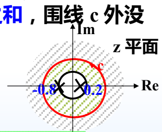
1）当 $n\geq1$ 时，在围线 c 内有两个极点，z=0.2 和 z=-0.8

$$x(n)=(z-0.2)\frac{(0.16-0.6z)z^{n-1}}{(z-0.2)(z+0.8)}\Big|_{z=0.2}+(z+0.8)\frac{(0.16-0.6z)z^{n-1}}{(z-0.2)(z+0.8)}\Big|_{z=-0.8}$$

$$=(0.2)^{n+1}-(-0.8)^{n+1}=(0.2)^{n+1}u(n-1)-(-0.8)^{n+1}u(n-1)$$

2）当 $n\leq0$ 时，在围线 c内有三个极点，z=0.2 、z=-0.8 和 $z=0$，其中 z=0 是多阶极点，改求围线外的留数之和，围线 c 外没有极点，得

$$x(n)=0$$



综上，得

$$x(n)=\delta(n)+(0.2)^{n+1}u(n-1)-(-0.8)^{n+1}u(n-1)$$
$$=(0.2)^{n+1}u(n)-(-0.8)^{n+1}u(n)$$

2.7 Z反变换-Matlab实现（自学）

■ Matlab 的 residuez 函数

¤ residuez 可计算出有理函数的留数部分和直接（或多项式）项，展成部分分式形式。有理函数的分子分母都按 z^{-1} 的递增顺序排列，设有如下形式：

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_Nz^{-N}}=\frac{B(z)}{A(z)}$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{R_k}{1-p_kz^{-1}}+\sum_{k=0}^{M-N}C_kz^{-k}$$

¤ 分子、分母多项式 B(z) 和 A(z) 分别由矢量 a、b 给定。

¤ 用语句 [R,p,C] = residuez(b,a) 可求得 X(z) 的留数R、极点p和直接项C。

¤ 求得的列向量 R 包含着留数；列向量 p 包含着极点；行向量 C 包含着直接项。

2.7 Z反变换-Matlab实现（自学）

¤ 则求得 $x(n)$ 为：

$$x(n)=\sum_{k=1}^{N}R_kZ^{-1}\left[\frac{1}{1-p_kz^{-1}}\right]+\sum_{k=0}^{M-N}C_k\delta(n-k)$$

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{1-p_kz^{-1}}\right]=\begin{cases}p_k^{\,n}u(n) & |z_k|>r_1 \quad 右边序列\\ -p_k^{\,n}u(-n-1) & |z_k|<r_2 \quad 左边序列\end{cases}$$

¤ 如果 $p(k)=\ldots.=p(k+r+1)$ 是 r 阶极点，则其展开形式包括如下形式的项：

$$\frac{R_k}{1-p_kz^{-1}}+\frac{R_{k+1}}{(1-p_kz^{-1})^{-2}}+\cdots+\frac{R_{k+r-1}}{(1-p_kz^{-1})^{-r}}$$

类似的，函数 [b,a] = residuez(R,p,C) 有三个输入变量和两个输出变量，它把部分分式变成多项式的系数行向量 b 和 a。

2.7 Z反变换-Matlab实现（自学）

例2.10 求 $X(z)=\dfrac{z}{3z^2-4z+1}$ 的 Z 反变换

$$X(z)=\frac{z}{3z^2-4z+1}=\frac{0+z^{-1}}{3-4z^{-1}+z^{-2}}$$

```
% Check of residues in the Example
b = [0,1]; a = [3,-4,1];
[R,p,C] = residuez(b,a)
[b,a] = residuez(R,p,C)
```

运行结果如下（留数、极点、直接项以及分子分母多项式的系数）：

```
R =
   0.5000
  -0.5000
p =
   1.0000
   0.3333
C =
    []
b =
  -0.0000    0.3333
a =
   1.0000   -1.3333    0.3333
```

$$X(z)=\frac{1}{3}\frac{0+z^{-1}}{1-\frac{4}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-z^{-1}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

根据收敛域情况，$x(n)$ 表示为右边序列、左边序列或者双边序列。

2.8 Z变换的性质

◆ 线性 $Z[ax(n)+by(n)]=aZ[x(n)]+bZ[y(n)]$

$r_1=\max[r_{x-},r_{y-}],r_2=\min[r_{x+},r_{y+}]$

◆ 时移特性

$Z[x(n+n_0)]=z^{n_0}X(z) \qquad r_{x-}<|z|<r_{x+}$

◆ 尺度变换

$Z[a^nx(n)]=X\left(\frac{z}{a}\right) \qquad |a|r_{x-}<|z|<|a|r_{x+}$

◆ 微分

$Z[nx(n)]=-z\dfrac{dX(z)}{dz} \qquad r_{x-}<|z|<r_{x+}$

例 2.25 求 $x(n)=n\sin(\omega_0 n)$，$n\geq0$（ω_0 为常数）的 Z 变换。

解 设 $y(n)=\sin(\omega_0 n)\cdot u(n)$，则有 $y(n)=\{\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u[n]-\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u[n]\}\frac{1}{j}$

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)\cdot z^{-n}=\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}} \qquad |z|>1$$

而 $x(n)=n\cdot y(n)$，所以

$$X(z)=-z\frac{d}{dz}\cdot Y(z)=\frac{z^{-1}(1-z^{-2})\sin\omega_0}{(1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2})^2} \qquad |z|>1$$

2.8 Z变换的性质

◆ 复共轭序列

◆ 初值/终值定理

◆ 卷积定理

◆ 复卷积定理

$$w(n)=x(n)y(n) \qquad W(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c_1}X\left(\frac{z}{v}\right)Y(v)v^{-1}dv$$

$z=e^{j\omega},\ v=e^{j\theta}$ 等价于等式(2.101)

◆ 帕塞瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

2.9 一些常用的Z变换对

表 2.1 常用的 Z 变换对

序列	Z 变换	收敛域
$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert>1$
$-u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert<1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-b^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-bz^{-1}}$	$\lvert z\rvert<\lvert b\rvert$
$[a^n \sin\omega_0 n]u(n)$	$\frac{(a\sin\omega_0)z^{-1}}{1-(2a\cos\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$[a^n \cos\omega_0 n]u(n)$	$\frac{1-(a\cos\omega_0)z^{-1}}{1-(2a\cos\omega_0)z^{-1}+a^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ 职 2.83	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-nb^n u(-n-1)$	$\frac{bz^{-1}}{(1-bz^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert<\lvert b\rvert$

2.10 Z变换与拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系

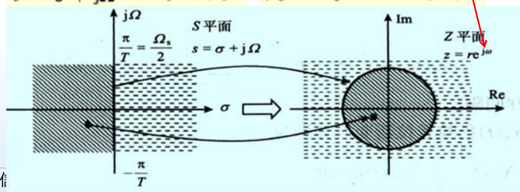
□ Z变换与拉普拉斯变换的关系

$$\hat{X}_a(s)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{x}_a(t)e^{-st}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)\Big]e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_a(nT)e^{-nsT}$$

$$z=e^{sT}\qquad X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

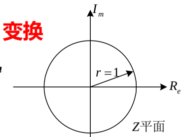
$$s=\sigma+j\Omega\qquad z=re^{j\omega}\qquad re^{j\omega}=e^{(\sigma+j\Omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\Omega T}$$



2.10 Z变换与拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系

□ Z变换与DTFT的关系

- 序列的傅里叶变换就是在单位圆上的 Z 变换
- 序列 $x(n)$ 的 Z 变换为：$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$



令复变量 $z=e^{j\omega}$，则

$$\boxed{X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}}$$

- 傅里叶变换的表达式

ω—数字角频率，复数 Z 的幅角

✓ 单位圆上的 Z 变换就是傅里叶变换。
✓ 傅里叶变换是 Z 变换的特例。
✓ 傅里叶 变换的一切特性可直接由 Z 变换的特性得到。

2.10 Z变换与拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系

□ Z变换与DTFT的关系

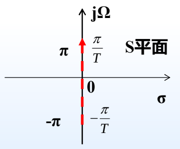
Z 反变换定义为： $x(n)=\frac{1}{2j\pi}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$

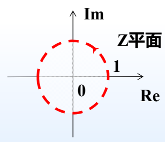
设单位圆在 X(z) 的收敛域内，单位圆作为积分围线 c，即

$$z=e^{j\omega}\qquad dz=je^{j\omega}d\omega$$

$$x(n)=\frac{1}{2j\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)}je^{j\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega=\frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}X(e^{j\Omega T})e^{jn\Omega T}d\Omega$$

在 Z 平面单位圆（对应 DTFT）上转一圈，相当于在 S 平面的虚轴（对应 CTFT）上从 $-\pi/T$ 到 π/T。





2.10 Z变换与拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系

□ Z 变换DTFT是级数求和 —— 存在是否收敛的问题

傅里叶变换的收敛： $X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}$

收敛就是指

$$\left|X(e^{j\omega})\right|<\infty$$

$$|X(e^{j\omega})|=\Big|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-jn\omega}\Big|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|\left|e^{-jn\omega}\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|$$

收敛条件

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$$

2.10 Z变换与拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系

□ Z 变换和 F 变换是级数求和 —— 存在是否收敛的问题

Z 变换的收敛：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-jn\omega}$$

$$|X(z)|=\Big|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}\Big|=\Big|\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-jn\omega}\Big|$$

$$\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|\left|r^{-n}\right|\left|e^{-jn\omega}\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|r^{-n}$$

因此，若 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|r^{-n}<\infty$，则 $|X(z)|<\infty$，即 Z 变换收敛。

2.10 Z变换与拉普拉斯变换、傅里叶变换的关系

□ 收敛问题

结论：傅里叶 变换收敛对于 $x(n)$ 的要求高于 Z 变换收敛对于 $x(n)$ 的要求。

- 因为即使 $x(n)$ 不满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty$ ，仍可以找到适当的 r，使

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|r^{-n}<\infty$$

- 即可在 Z 平面上找一个合适的区域，也就是说，即使 $x(n)$ 的DTFT不收敛，也可设法使其 Z 变换收敛。

2.11 离散系统的频域分析

□ 传输函数/系统函数/传递函数

一个 LSI 因果系统的差分方程为：

$$y(n)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)-\sum_{j=1}^{N}a_j y(n-j)$$

Z 变换后，得 $\sum_{j=0}^{N}a_j z^{-j}Y(z)=\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}X(z)$

系统函数（须指定收敛域）

$$\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{N}a_j z^{-j}}=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{1+\sum_{j=1}^{N}a_j z^{-j}}=\frac{B(z)}{A(z)}=H(z)$$

2.11 离散系统的频域分析

□ LSI系统的因果稳定性

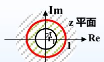
- 因果性：右边序列，Z 变换只包含 z 的负指数项(z^{-n})，收敛域一定包括 ∞ 点，收敛域是某个圆外的Z 平面， $r_1<|z|\le\infty$ 。
- 稳定性：任何稳定系统，其系统函数的收敛域一定包括单位圆。系统稳定充要条件 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$，对于单位圆（$|z|=1$）上的 z，有

$$|H(z)|=\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}\right|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h(n)z^{-n}\right|\le\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|\left|z^{-n}\right|=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|\overset{\text{收敛}}{<}\infty$$

$H(z)$ 在单位圆上收敛。

因果稳定性：因果稳定系统函数 H(z) 的收敛域必包括：

$$1\le|z|\le\infty$$ （收敛域内无极点）



系统的因果稳定性可由系统传递函数 $H(z)$ 的极点判断。如果全部极点都在单位圆内，则系统因果稳定。

2.11 离散系统的频域分析

□ 单边Z变换解线性差分方程

输入序列$x(n)$在n=0时刻加入到系统的输入端

$$\sum_{j=0}^{N}a_j y(n-j)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-i)$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{i=0}^{M}b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{N}a_j z^{-j}}$$

例 2.29 一阶差分方程 $y(n)=x(n)+ay(n-1)$，当给定输入序列 $x(n)=e^{j\omega_0 n}, n\ge 0$，以及初始条件 $y(-1)=k$，求 $y(n)$。

p. 58

$$y(n)=\left[\underbrace{ka^{n+1}}_{\text{与初始值有关}}+\underbrace{\frac{a^{n+1}}{a-e^{j\omega_0}}}_{\text{暂态响应}}-\underbrace{\frac{e^{j\omega_0(n+1)}}{a-e^{j\omega_0}}}_{\text{稳态响应}}\right]u(n)$$

2.11 离散系统的频域分析

□ 传输函数的零极点

$$H(z)=K\frac{\prod_{i=1}^{M}(z-z_i)}{\prod_{i=1}^{N}(z-p_i)}\qquad \begin{matrix}z_i \text{ 是零点}\\ p_i \text{ 是极点}\end{matrix}$$

- 正指数更易于求零极点。
- Matlab 求解
  - 分别对有理函数 H(z) 的分子分母多项式使用 Matlab 的 roots 函数，就可求得其零极点。
  - 也可利用 DSP Toolsbox 中的 zplane(b,a) 函数，由给定的分子行向量 b 和分母行向量 a 绘制出系统的零极点图。

2.11 离散系统的频域分析

□ 传输函数的零极点

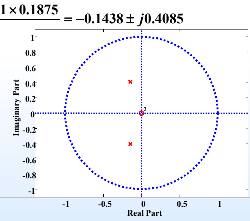
例 求下列系统函数的零极点 $H(z)=\frac{1}{0.8+0.23z^{-1}+0.15z^{-2}}$

解：$$H(z)=\frac{z^2}{0.8z^2+0.23z+0.15}=\frac{1.25z^2}{z^2+0.2875z+0.1875}$$

用一元二次方程求分母多项式的根，即极点：

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-0.2875\pm\sqrt{0.2875^2-4\times1\times0.1875}}{2\times1}=-0.1438\pm j0.4085$$

```
>> b=[1,0];
>> a=[0.8,0.23,0.15];
>> p=roots(a)
>> zplane(b,a)
```



此系统有两个零点，都位于 z=0 处；有两个极点，位于–0.1438±j0.4085

2.11 离散系统的频域分析

□ 零/极点对系统频率响应的影响

若函数 $H(z)$ 的收敛域包括单位圆（$z=e^{j\omega}$），就可在这个单位圆上计算 $H(z)$，并得到系统频率响应 $H(e^{j\omega})$。

$$H(e^{j\omega})=K\frac{\prod_{i=1}^{M}(e^{j\omega}-c_i)}{\prod_{i=1}^{N}(e^{j\omega}-d_i)}$$

- 用 C_i 表示在 Z 复平面上由零点 c_i 指向单位圆上的 $z=e^{j\omega}$ 点的向量：$C_i=e^{j\omega}-c_i$
- 用 D_i 表示在 Z 复平面上由极点 d_i 指向单位圆上的 $z=e^{j\omega}$ 点的向量：$D_i=e^{j\omega}-d_i$

因此 $$H(e^{j\omega})=K\frac{\prod_{i=1}^{M}C_i}{\prod_{i=1}^{N}D_i}$$

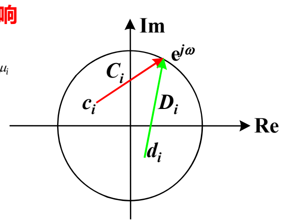
2.11 离散系统的频域分析

□ 零/极点对系统频率响应的影响

用极坐标表示

$C_i=|C_i|e^{j\upsilon_i}$ $\quad D_i=|D_i|e^{j\mu_i}$

$$H(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|e^{j\varphi(\omega)}$$



$$|H(e^{j\omega})|=|K|\frac{\prod_{i=1}^{M}|C_i|}{\prod_{i=1}^{N}|D_i|}$$

$$=|K|\frac{\text{从 } e^{jw}\text{ (到零点 } c_1\text{ 的距离)}\times\cdots\times\text{(到零点 } c_i\text{ 的距离)}}{\text{从 } e^{jw}\text{ (到极点 } d_1\text{ 的距离)}\times\cdots\times\text{(到极点 } d_i\text{ 的距离)}}$$

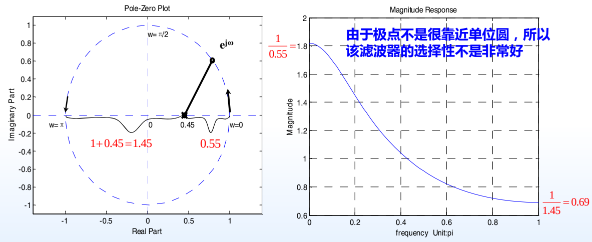
$$\varphi(\omega)=\sum_{i=1}^{M}\upsilon_i-\sum_{i=1}^{N}\mu_i$$

2.11 离散系统的频域分析

□ 零/极点对系统频率响应的影响

例 判断滤波器的形状， 滤波器的系统函数为：$H(z)=\dfrac{1}{z-0.45}$

解：滤波器在 $z=0.45$ 处有一极点，无零点。



2.11 离散系统的频域分析

□ 频率响应的 Matlab 实现

在 Matlab 中，提供了一个 freqz 函数来计算幅度和相位响应，该函数有如下几种调用方式。

1）[H, w] = freqz(b, a, N)

b 和 a 分别表示分子和分母的系数向量，与 filter(b,a,x) 函数中的相同。此函数在上半个单位圆 $[0，\pi)$ 上等间距的 N 点计算频率响应，返回该系统的 N 点频率矢量 ω 和对应的 N 点复数频率响应矢量 H。

2）[H, w] = freqz(b, a, N, 'whole')

在整个单位圆上等间距的 N 点计算频率响应。

3）H = freqz(b, a, w)

它返回矢量 ω 指定的那些频率点上的频率响应，通常在 0 到 π 之间。

2.11 离散系统的频域分析

□ 频率响应的 Matlab 实现

例 已知因果系统

$$y(n) = 0.9y(n-1) + x(n)$$

(1) 求 H(z)，并画出零极点示意图

(2) 画出 $|H(e^{jw})|$ 和 $\angle H(e^{jw})$

解：差分方程可以变形为： $y(n) - 0.9y(n-1) = x(n)$

(1) 由差分方程可得:

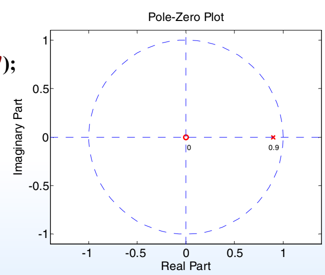
$$H(z)=\frac{1}{1-0.9z^{-1}}$$

系统有一个位于 0.9 的极点和一个位于原点的零点。下面用 Matlab 中的函数 zplane 画出它的零极点图。

2.11 离散系统的频域分析

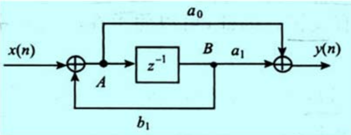
□ 频率响应的 Matlab 实现

```
b = [1,0];
a = [1, -0.9];
zplane(b,a);
title('Pole-Zero Plot');
text(0.85,-0.1,'0.9');
text(0.01,-0.1,'0');
```

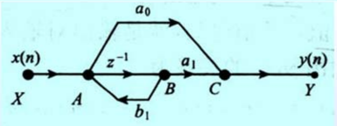


2.12 信号流图（2.4）

信号流图是表示复杂线性系统的一种有效分析方法，由连接节点的有向支路构成的网络，它可以从系统的方框图设计，也可由描述系统的线性代数方程设计。



系统的方框图



等效信号流图

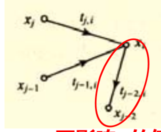
2.12 信号流图（2.4）

□ 信号流图计算规则

节点变量的值：等于流入该节点的全部信号的迭加，而从该节点流出的信号则不计。与基尔霍夫电流定律完全不同!

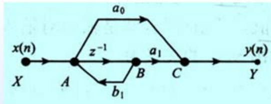
$$x_i = \sum_j x_j t_{j,i}$$

例 $x_i = x_j t_{j,i} + x_{j-1} t_{j-1,i}$



不影响x_i的值

例 $C = a_0 A + a_1 B$



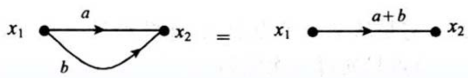
2.12 信号流图（2.4）

□ 信号流图的化简

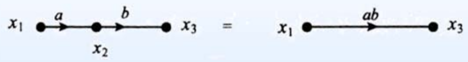
相当于：1）解代数方程组的消去法；2）利用代数方程组的恒等关系证明流图化简的正确性，即消除一些不必要的支路和节点。

（1）支路的合并

➢ 相加：将并联支路合并成单一支路



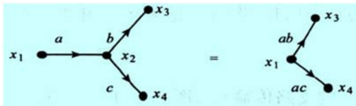
➢ 相乘 ：将几条串联支路合并成单一支路



2.12 信号流图（2.4）

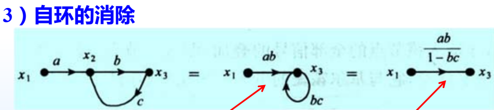
□ 信号流图的化简

（2）节点的吸收：可以消去混合节点



$x_3 = bx_2 = bax_1$ $\qquad$ $x_4 = cx_2 = cax_1$

（3）自环的消除

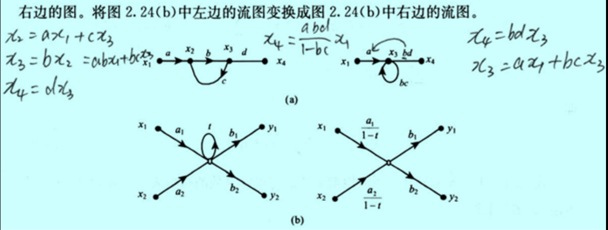


$x_3 = bx_2$ $\qquad$ $x_3 = b(ax_1 + cx_3) = abx_1 + bcx_3$

$x_2 = ax_1 + cx_3$ $\qquad$ $(1-bc)x_3 = abx_1$

2.12 信号流图（2.4）

□ 信号流图的化简

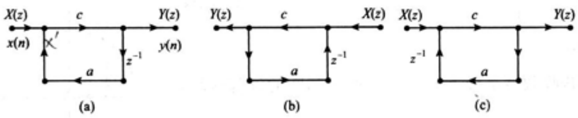


例 2.11 利用上述简化规则，我们可以将图 2.24(a)中左边的图变换成图 2.24(a)中右边的图。将图 2.24(b)中左边的流图变换成图 2.24(b)中右边的流图。

2.12 信号流图

□ 转置定理

若将信号流图全部支路的方向反向，且保持全部的支路传输不变，输入变量（源节点变量）和输出变量(汇点变量)交换位置，则当信号流图中只有一个输入和一个输出时，转置后的流图与原流图有相同的系统函数。



$H(z) = \frac{c}{1-acz^{-1}}$ $\qquad$ $H'(z) = \frac{c}{1-acz^{-1}}$ $\qquad$ $H'(z) = \frac{c}{1-acz^{-1}}$

因此每种系统都有多种不同的实现方案每一个系统函数都存在着多种不同的信号流图。

作业

2.11

2.13 (2)，(4) $\frac{1}{n}, n \geq 1$ ，(5)

2.15，2.19，2.23，2.24

10月9日，5节课