

# 数字信号处理

2017年秋冬学期

第六讲

2017年10月30日

## 第3章 离散傅里叶变换及其快速计算方法

### 3.4 FFT——基2时域抽选法 矩阵表示

DFT 定义表示为矩阵形式为:  $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$

$$DFT: \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$IDFT: \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ W_N^0 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

2

### 3.4 FFT——基2时域抽选法 矩阵表示

$$x \triangleq \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}, \quad X \triangleq \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix}, \quad W_N \triangleq \begin{bmatrix} W_N^0 & W_N^0 & W_N^0 & \cdots & W_N^0 \\ W_N^0 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ W_N^0 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^0 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

■ 矩阵  $W_N$  为:

$$\{W_N\}_{ij} = W_N^{ij}, \quad \text{for } 0 \leq i, j \leq N-1$$

■ DFT 矩阵简单地表示为:

$$X = W_N x$$

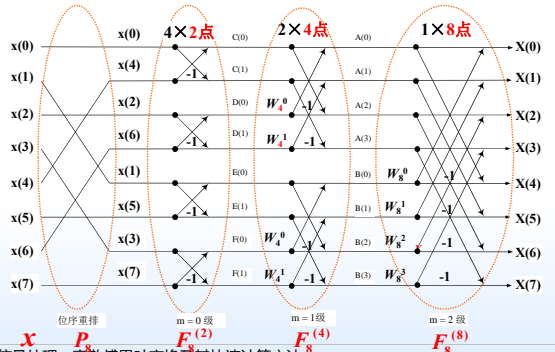
$$x = \frac{1}{N} W_N^* X$$

数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

3

### 3.4 FFT——基2时域抽选法 矩阵表示

FFT 基 2 时间抽选法信号流图 (N=8)



数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

4

### 3.4 FFT——基2时域抽选法 矩阵表示

FFT 矩阵形式表示为:

$$X = F_8^{(0)} F_8^{(1)} F_8^{(2)} P_8 x$$

输入向量  $x$  与  $P_8$  相乘, 则只是输入的位置重排, 没有乘法操作。

$$P_8 x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_7 \end{bmatrix}$$

数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

5

### 3.4 FFT——基2时域抽选法 矩阵表示

FFT算法看成是 DFT 矩阵  $W_8$  的分解:

$$W_8 = F_8^{(0)} F_8^{(1)} F_8^{(2)} P_8$$

$$\begin{bmatrix} W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 & W_8^0 \\ W_8^0 & W_8^1 & W_8^2 & W_8^3 & W_8^4 & W_8^5 & W_8^6 & W_8^7 \\ W_8^0 & W_8^2 & W_8^4 & W_8^6 & W_8^8 & W_8^{10} & W_8^{12} & W_8^{14} \\ W_8^0 & W_8^3 & W_8^6 & W_8^9 & W_8^{12} & W_8^{15} & W_8^{18} & W_8^{21} \\ W_8^0 & W_8^4 & W_8^8 & W_8^{12} & W_8^{16} & W_8^{20} & W_8^{24} & W_8^{28} \\ W_8^0 & W_8^5 & W_8^{10} & W_8^{15} & W_8^{20} & W_8^{25} & W_8^{30} & W_8^{35} \\ W_8^0 & W_8^6 & W_8^{12} & W_8^{18} & W_8^{24} & W_8^{30} & W_8^{36} & W_8^{42} \\ W_8^0 & W_8^7 & W_8^{14} & W_8^{21} & W_8^{28} & W_8^{35} & W_8^{42} & W_8^{49} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_8^{(0)} & F_8^{(1)} & F_8^{(2)} & F_8^{(3)} & F_8^{(4)} & F_8^{(5)} & F_8^{(6)} & F_8^{(7)} \end{bmatrix}$$

这个因式分解对应于快速算法, 因为矩阵  $F_8^{(0)}$ ,  $F_8^{(1)}$ ,  $F_8^{(2)}$  和  $P_8$  的大部分元素为 0, 是稀疏矩阵。因此上述每个矩阵的乘法运算最多只需要 8 次复乘运算, 而  $P_8$  只是置换操作, 没有乘法操作。

不同的 FFT 算法对应于将 DFT 矩阵  $W_N$  分解成不同的稀疏矩阵。

数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

6

### 3.4 FFT——基2频域抽选法 (DIF-FFT)

- 算法原理：根据时间-频率的对偶性
  - 时间抽选法：是把输入  $x(n)$  按奇偶分解成两个子序列，即  $N$  点  $x(n)$  序列  $\rightarrow N/2$  点子序列，而输出  $X(k)$  是按自然顺序排列的。
  - 频率抽选法：是把输入  $x(n)$  按照前后对半分，而不是奇偶数分开，而输出  $X(k)$  逐项分解成偶数点序列和奇数点序列。
- DFT 变换表达式为：

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk}$$

如果将输入  $x(n)$  按前后等分，即将求和分成两部分，范围分别为：

$$n = 0 \sim \left(\frac{N}{2} - 1\right) \quad n = \frac{N}{2} \sim (N-1)$$

数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

7

### 3.4 FFT——基2频域抽选法 (DIF-FFT)

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{\left(n + \frac{N}{2}\right)k} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{Nk/2} \right] W_N^{nk} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) + (-1)^k x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{nk} \end{aligned}$$

$W_N^{N/2} = -1$   
 $k = 0, 1, \dots, N-1$

数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

8

### 3.4 FFT——基2频域抽选法 (DIF-FFT)

按  $k$  的奇偶将  $X(k)$  分成两部分：
 
$$\begin{cases} k = 2r \\ k = 2r + 1 \end{cases} \quad r = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$\begin{aligned} X(2r) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{2nr} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{nr} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(2r+1) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^{n(2r+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} \left[ x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{N/2}^{nr} \end{aligned}$$

数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

9

### 3.4 FFT——基2频域抽选法 (DIF-FFT)

令：

$$\begin{cases} k \text{ 为偶数: } & x_1(n) = x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \\ k \text{ 为奇数: } & x_2(n) = \left[ x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n \end{cases}$$

$n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$

则  $X(2r)$  和  $X(2r+1)$  分别是  $x_1(n)$  和  $x_2(n)$  的  $N/2$  点 DFT，记为  $X_1(k)$  和  $X_2(k)$ 。

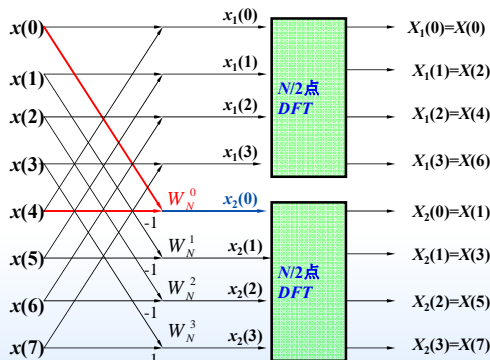
$$k \text{ 为偶数: } X_1(k) = X(2r) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{nr}$$

$$k \text{ 为奇数: } X_2(k) = X(2r+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{nr}$$

数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

10

### 3.4 FFT——基2频域抽选法 (DIF-FFT)



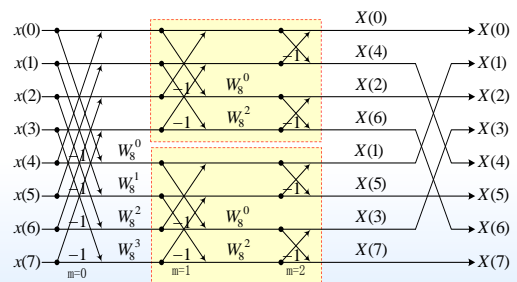
数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

11

### 3.4 FFT——基2频域抽选法 (DIF-FFT)

■ 逐级分解，直到 2 点 DFT

■ FFT 基 2 频率抽选法信号流程图 (N=8)



数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

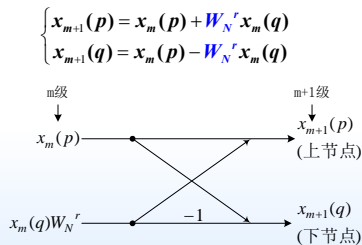
12

### 3.4 FFT——基2频域抽选法 (DIF-FFT)

#### DIT vs DIF

##### 基本蝶形运算不同

DIT: 先复乘后加減,  $W$  因子在上下节点都有体现



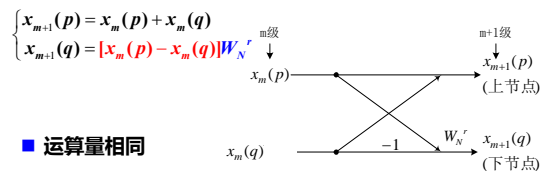
数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

13

### 3.4 FFT——基2频域抽选法 (DIF-FFT)

#### DIT vs DIF

DIF: 先減后复乘,  $W$  因子仅体现在下节点



##### 运算量相同

$$\text{乘法: } m_F = \frac{N}{2} \log_2 N \quad \text{加法: } a_F = N \log_2 N$$

##### DIF 输出位序重排, DIT 输入位序重排

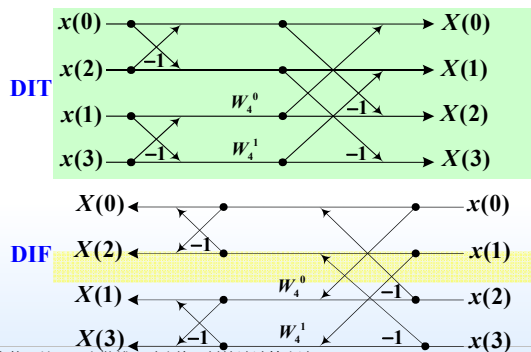
$$X(n_{M-1} \cdots n_2 n_1 n_0) \xrightarrow{\text{倒置}} X(n_0 n_1 \cdots n_{M-1})$$

数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

14

### 3.4 FFT——基2频域抽选法 (DIF-FFT)

##### DIT 和 DIF 的基本蝶形互为信号流程图转置

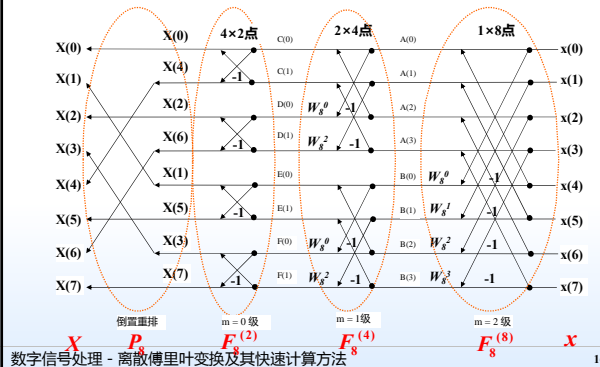


数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

15

### 3.4 FFT——基2频域抽选法 (DIF-FFT)

##### DIT 和 DIF 的基本蝶形互为信号流程图转置



数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

16

### 3.4 FFT——IDFT 快速算法 (IFFT)

##### DFT 和 IDFT 的定义:

$$\text{DFT: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk}$$

$$\text{IDFT: } x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk}$$

##### DFT 和 IDFT 的区别:

- ① 因子  $W$  的指数相差一个负号;
- ② 相差一个因子  $1/N$ 。

$$\text{FFT: } W_N^{nk} \rightarrow W_N^{-nk}, \left(\times \frac{1}{N}\right) \rightarrow \text{IFFT}$$

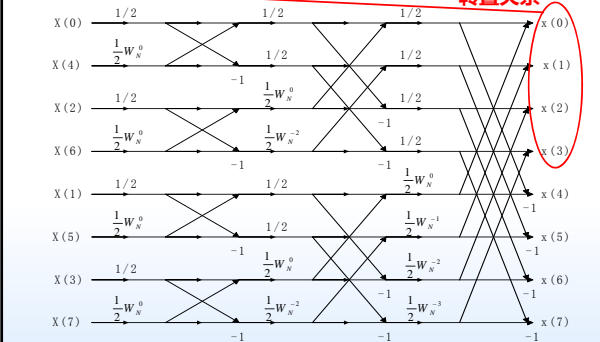
FFT 算法中的分组方式、排序方式以及蝶形运算结构都可用于 IFFT 算法的设计, 可依据现有的 FFT 算法直接得出 IFFT 算法。

数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

17

### 3.4 FFT——IDFT 快速算法 (IFFT)

##### 8 点 DIF-FFT 算法 频域分组, 时域顺序 转置关系



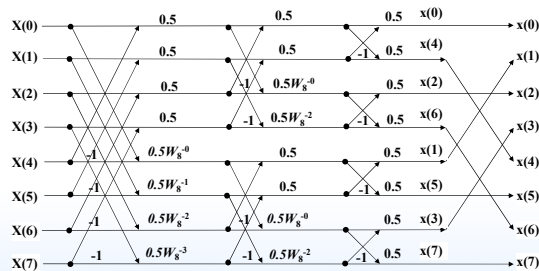
数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

18

### 3.4 FFT——IDFT 快速算法 (IFFT)

#### 8 点 DIT-IFFT 算法

#### 基2 DIF-FFT 因子变化

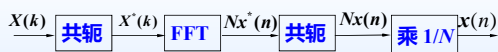


### 3.4 FFT——IDFT 快速算法 (IFFT)

#### ■ 共轭法

$$\begin{aligned} x^*(n) &= \frac{1}{N} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \right]^* \\ &= \frac{1}{N} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) W_N^{nk} \right] \\ &= \frac{1}{N} [\text{FFT/DFT}[X^*(k)]] \quad n=0,1,\dots,N-1 \end{aligned}$$

#### 流程



### 3.4 FFT——基4 时间抽选法

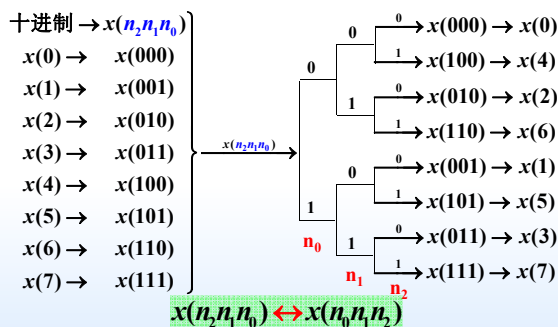
- 前面讲的都是基2 FFT/IFFT 算法, 除此之外, 还有基4, 基8 快速算法。原理和基2 类似, 分解为4 个交错的集合。相比基2 FFT, 可以进一步节约复数乘的次数。

- 算法原理自学。

$N$  不满足2或4的 $n$ 次方, 补零? 别的方法?

### 3.4 FFT——混合基FFT (多基多进制FFT)

输入位序重排:  $N$  点 DFT 分解为两个  $N/2$  点 DFT → 输入序列按奇偶分组 → 再分解 → 再奇偶重排 → 直到 2 点 DFT。



### 3.4 FFT——混合基 FFT (多基多进制FFT)

#### 二进制

$$N = 2^L$$

$$(n)_2 = (n_{L-1}, n_{L-2}, \dots, n_1, n_0), \quad n_i = 0 \text{ 或 } 1, \quad i = 0, 1, \dots, L-1$$

此二进制的十进制表示

$$(n)_{10} = n_{L-1}2^{L-1} + n_{L-2}2^{L-2} + \dots + n_12 + n_0$$

倒位序后所代表的十进制数

$$(\bar{n})_{10} = n_02^{L-1} + n_12^{L-2} + \dots + n_{L-2}2 + n_{L-1}$$

$r$  进制(多进制)FFT。当  $N=r^L$ ,  $r, L$  皆为大于1 的正整数

$$(n)_r = (n_{L-1}, n_{L-2}, \dots, n_1, n_0), \quad n_i = 0, 1, \dots, r-1, \quad i = 0, 1, \dots, L-1$$

此  $r$  进制数所代表的数值为

$$(n)_{10} = n_{L-1}r^{L-1} + n_{L-2}r^{L-2} + \dots + n_1r + n_0$$

此  $r$  进制倒位序后为  $(\bar{n})_r = (n_0, n_1, \dots, n_{L-2}, n_{L-1})$ , 它们代表的数值为

$$(\bar{n})_{10} = n_0r^{L-1} + n_1r^{L-2} + \dots + n_{L-2}r + n_{L-1}$$

### 3.4 FFT——混合基 FFT (多基多进制FFT)

当  $N=r_0r_1\cdots r_{L-1}$ , 各  $r_i (i=0,1,\dots,L-1)$  为大于1 的正整数

$$(n)_{r_0r_1\cdots r_{L-1}} = (n_{L-1}, n_{L-2}, \dots, n_1, n_0)$$

$$\begin{aligned} (n)_{10} &= (r_0r_1\cdots r_{L-1})n_{L-1} + (r_0r_1\cdots r_{L-2})n_{L-2} + \dots \\ &\quad + (r_0r_1)n_2 + r_0n_1 + n_0 \end{aligned}$$

其倒位序后为

$$(\bar{n})_{r_0r_1\cdots r_{L-1}} = (n_0, n_1, \dots, n_{L-2}, n_{L-1})$$

$$\begin{aligned} (\bar{n})_{10} &= (r_1r_2\cdots r_{L-1})n_0 + (r_2r_3\cdots r_{L-1})n_1 + \dots \\ &\quad + (r_{L-2}r_{L-1})n_{L-3} + r_{L-1}n_{L-2} + n_{L-1} \end{aligned}$$

各  $n_i$  的取值范围为

$$n_i = 0, 1, \dots, r_i - 1, \quad i = 0, 1, \dots, L-1$$

### 3.4 FFT——混合基 FFT（多基多进制FFT）

试用混合基 FFT 算法求  $N=30$  的结果,并画出流程图。

采用  $N=r_0 r_1 r_2=5 \times 2 \times 3$ , 即  $r_0=5, r_1=2, r_2=3$  的混合基 FFT 算法

用输入  $n$  按正序排列,输出  $k$  按倒位序排列的办法

$$\left. \begin{aligned} n &= r_0 r_1 n_2 + r_0 n_1 + n_0 = 10n_2 + 5n_1 + n_0 \\ \bar{k} &= r_1 r_2 k_0 + r_2 k_1 + k_2 = 6k_0 + 3k_1 + k_2 \\ n_0, k_0 &= 0, 1, \dots, r_0 - 1 = 0, 1, 2, 3, 4 \\ n_1, k_1 &= 0, 1, \dots, r_1 - 1 = 0, 1 \\ n_2, k_2 &= 0, 1, \dots, r_2 - 1 = 0, 1, 2 \end{aligned} \right\}$$

数字信号处理 - 离散傅里叶变换及其快速计算方法

25

### 3.4 FFT——混合基 FFT（多基多进制FFT）

混合基运算表达式

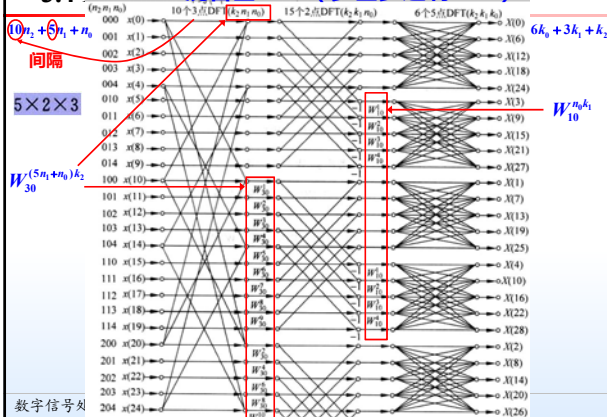
$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{29} x(n) W_{30}^{nk} = \sum_{n_0=0}^4 \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^2 x(n_2, n_1, n_0) W_{30}^{(10n_2+5n_1+n_0)(6k_0+3k_1+k_2)} \\ &= \sum_{n_0=0}^4 \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^2 x(n_2, n_1, n_0) W_{30}^{10n_2 k_0} W_{30}^{15n_1 k_0} W_{30}^{5n_1 k_1} W_{30}^{5n_0 k_0} W_{30}^{5n_0 k_1} W_{30}^{5n_0 k_2} \\ X(k) &= \sum_{n_0=0}^4 \sum_{n_1=0}^1 \left[ \sum_{n_2=0}^2 x(n_2, n_1, n_0) W_{30}^{5n_1 k_1} \right] W_{30}^{15n_1 k_0} W_{30}^{5n_1 k_1} W_{30}^{5n_0 k_0} W_{30}^{5n_0 k_1} \\ &= \sum_{n_0=0}^4 \sum_{n_1=0}^1 \left[ X_1(k_2, n_1, n_0) W_{30}^{5n_1 k_1} \right] W_{30}^{15n_1 k_0} W_{30}^{5n_1 k_1} W_{30}^{5n_0 k_0} W_{30}^{5n_0 k_1} \\ &= \sum_{n_0=0}^4 \left[ \sum_{n_1=0}^1 X_1(k_2, n_1, n_0) W_{30}^{5n_1 k_1} \right] W_{30}^{15n_1 k_0} W_{30}^{5n_1 k_1} W_{30}^{5n_0 k_0} W_{30}^{5n_0 k_1} \\ &= \sum_{n_0=0}^4 \left[ X_2(k_2, k_1, n_0) W_{30}^{5n_0 k_1} \right] W_{30}^{15n_1 k_0} W_{30}^{5n_1 k_1} W_{30}^{5n_0 k_0} W_{30}^{5n_0 k_1} \\ &= \sum_{n_0=0}^4 X_2(k_2, k_1, n_0) W_{30}^{5n_0 k_1} \\ &= X(k_2, k_1, k_0) \end{aligned}$$

3点DFT, 10个  
× 旋转因子  
2点DFT, 15个  
× 旋转因子  
5点DFT, 6个

数字信号

26

### 3.4 FFT——混合基 FFT（多基多进制FFT）

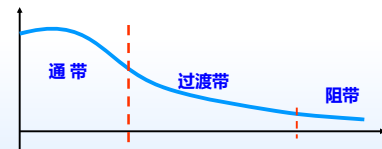


数字信号处理

### 4.1 概述

**滤波器：**选择所需的某一或某些频带的信号，而抑制不需要的其它频带的信号。

- **通带：**滤波器中使信号通过的频带，通带边缘所对应的频率称为通带截止频率。
- **阻带：**抑制信号或噪声通过的频带。
- **过渡带：**从通带到阻带的过渡频率范围。



数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

28

### 4.1 概述

#### 分类

**输入输出信号：**模拟和数字滤波器

**单位取样响应或实现结构：**IIR DF 和 FIR DF

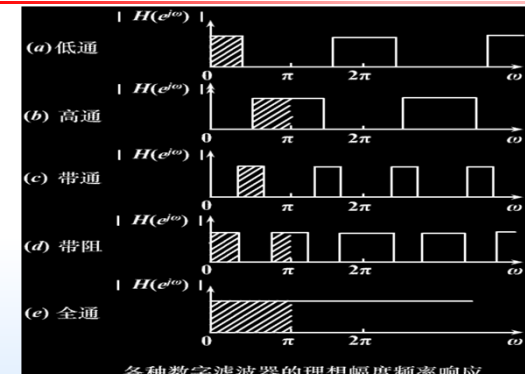
**频带**

- **低通滤波器：**只允许低频信号通过而抑制高频信号。
- **高通滤波器：**只允许高频信号通过而抑制低频信号。
- **带通滤波器：**允许某一频带的信号通过。
- **带阻滤波器：**抑制某一频带的信号。

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

29

### 4.1 概述



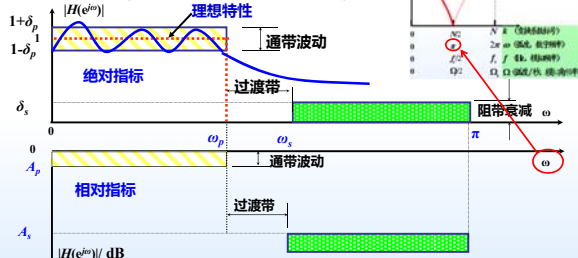
数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

30

## 4.1 概述

### 数字域性能指标

- 通带截止频率  $\omega_p$
- 通带波动  $A_p$  (dB, 相对指标) 或 通带容限  $\delta_p$  (绝对指标)
- 阻带起始频率  $\omega_s$
- 阻带衰减  $A_s$  (dB, 相对指标) 或 阻带容限  $\delta_s$  (绝对指标)



数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

31

## 4.1 概述

### 数字域性能指标

由上图所示, 由于绝对指标  $|H(e^{j\omega})|_{\max} = (1 + \delta_p)$ , 因此, 存在如下定义 (归一化):

$$-20 \log_{10} \frac{|H(e^{j\omega})|}{|H(e^{j\omega})|_{\max}} \Rightarrow \text{dB}$$

$$\begin{cases} 1 - \delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1 + \delta_p & |\omega| \leq \omega_p \\ |H(e^{j\omega})| \leq \delta_s & \omega_s \leq |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$$A_p = -20 \lg \frac{1 - \delta_p}{1 + \delta_p} > 0 \quad (\approx 0)$$

$$A_s = -20 \lg \frac{\delta_s}{1 + \delta_p} > 0 \quad (\geq 1)$$

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

32

## 4.1 概述

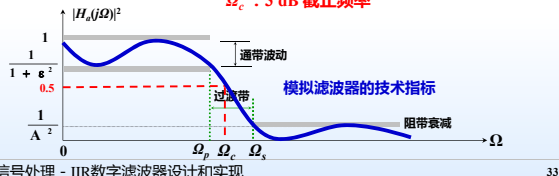
### 模拟域性能指标

假定模拟滤波器的频率响应为  $H_a(j\Omega)$ , 则基于幅度平方函数的低通滤波器技术指标为:

$$\frac{1}{1 + \epsilon^2} \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq 1 \quad |\Omega| \leq \Omega_p \quad 10 \lg(1 + \epsilon^2)$$

$$0 \leq |H_a(j\Omega)|^2 \leq \frac{1}{A^2} \quad |\Omega| \geq \Omega_s$$

其中:  $\epsilon$  为通带内波动系数,  $\Omega_p$ : 通带截止频率  
 $A$  为阻带衰减参数,  $\Omega_s$ : 阻带起始频率  
 $\Omega_c$ : 3 dB 截止频率



数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

33

## 4.1 概述

### 一个DF的设计过程可分3步

#### 性能指标确定

按需要确定滤波器的性能要求, 比如确定所要设计的滤波器是低通、高通、带通还是带阻, 截止频率是多少, 阻带的衰减有多大, 通带的波动范围是多少等。

#### 系统函数确定

用一个因果稳定的系统函数 (或差分方程、脉冲响应  $h(n)$ ) 去逼近上述性能要求 (IIR 与 FIR 系统函数)。

#### 算法设计

用一个有限精度的运算去实现这个系统函数 (速度、开销、稳定性等), 包括选择算法结构, 如级联型、并联型、正准型、横截型或频率取样型等; 还包括选择合适的字长以及选择有效的数字处理方法等。

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

34

## 4.1 概述

IIR DF: 用一因果稳定的离散 LSI 系统函数逼近给定的性能要求

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{i=1}^M (z - c_i)}{\prod_{i=1}^N (z - d_i)} \quad \begin{matrix} c_i \text{ 是零点} \\ d_i \text{ 是极点} \end{matrix}$$

IIR DF 设计的目的就是确定滤波器的各系数  $a_k$ 、 $b_k$ , 或者零极点  $c_i$ 、 $d_i$ , 使滤波器的性能满足要求。

S 平面逼近: 模拟滤波器  $H(s)$

Z 平面逼近: 数字滤波器  $H(z)$

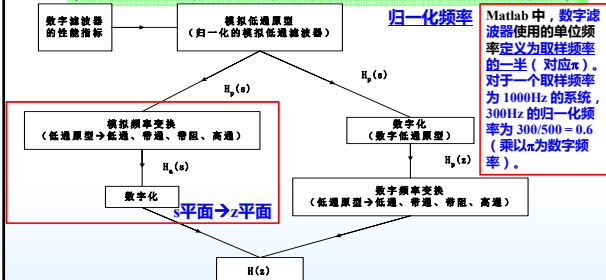
数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

35

## 4.1 概述

### 间接设计: 用模拟滤波器的理论来设计数字滤波器 (模拟原型法)

(模拟滤波器的设计理论已相当成熟, 并可利用完备的图、表加快设计过程)



模拟-数字滤波器变换方法: 冲激响应不变法和双线性变换法。根据不同准则把  $H_d(s)$  转换为  $H(z)$ 。

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

36



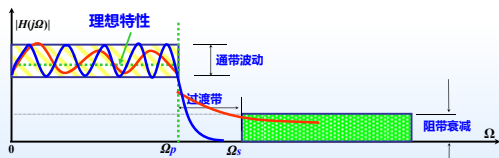
## 4.2 模拟滤波器设计

### ■ 为什么要研究模拟滤波器？

- 模拟滤波器本身很有用；
- DF是数字信号处理中极为重要的应用，但 DF 是近几十年发展起来的，它在很多方面要使用**模拟滤波器**的概念和知识；
- 在研究 DF 之前，先讨论模拟滤波器的特性和用逼近方法求其系统函数。

### ■ 为什么设计滤波器必须用逼近的方法？

- 由于滤波器的**理想特性是不能实现的**，而必须用逼近的方法。



数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

37

## 4.2 模拟滤波器设计

### ■ 理想滤波器

设一滤波器输入信号为  $x(t)$ ，其输出为  $y(t)$ ，系统的单位冲激响应为  $h(t)$ 。若  $y(t) = kx(t-t_d)$ ， $k$  为常数，则为**理想滤波器**

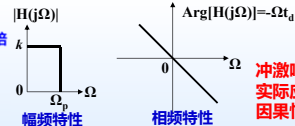
$$x(t) \xrightarrow{\text{理想滤波}} y(t) = kx(t-t_d)$$

频率响应定义为：

$$H(j\Omega) = \frac{Y(j\Omega)}{X(j\Omega)} = \frac{ke^{-j\Omega t_d} X(j\Omega)}{X(j\Omega)} = ke^{-j\Omega t_d}$$

### 理想滤波器的特性

- 通带内所有频率分量的放大倍数相同： $|H(j\Omega)| = k$
- 线性相位： $\arg[H(j\Omega)] = -\Omega t_d$
- 在阻带范围内  $|H(j\Omega)| = 0$
- 过渡带的宽度为 0。



冲激响应为  $\text{sinc}(x)$ ，实际应用中须具有因果性、有限长。

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

38

## 4.2 模拟滤波器设计

### ■ 幅度频率响应函数与系统函数关系

$$H(j\Omega) = |H(j\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)} \quad \varphi(\Omega) = \arg[H(j\Omega)]$$

模拟滤波设计：

- 采用不同的多项式逼近给定的滤波器幅度频率响应
- 通过幅度频率响应求系统函数  $H(s)$

如何由幅度频率响应求系统函数  $H(s)$ ？

►  $|H(j\Omega)|$  是  $\Omega$  的偶函数

在因果系统中

$$H(j\Omega) = \int_0^\infty h(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_0^\infty h(t)[\cos(\Omega t) - j\sin(\Omega t)] dt$$

$$= P(\Omega) - jQ(\Omega)$$

式中  $P(\Omega)$  是  $\Omega$  的偶函数， $Q(\Omega)$  是  $\Omega$  的奇函数。

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

39

## 4.2 模拟滤波器设计

### ■ 幅度频率响应函数与系统函数关系

$$|H(j\Omega)| = \sqrt{P^2(\Omega) + Q^2(\Omega)}$$

$P^2(\Omega)$  和  $Q^2(\Omega)$  都是  $\Omega$  的偶函数，故  $|H(j\Omega)|$  是  $\Omega$  的偶函数

$$\therefore H(-j\Omega) = P(-\Omega) - jQ(-\Omega) = P(\Omega) + jQ(\Omega) = H^*(j\Omega)$$

$$\therefore H(-j\Omega) \cdot H(j\Omega) = H^*(j\Omega) \cdot H(j\Omega) = |H(j\Omega)|^2 \quad (\text{幅度平方函数})$$

$$\therefore |H(j\Omega)|^2 = H(s) \cdot H^*(s) \Big|_{s=j\Omega} = H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\Omega} = |H(s)|^2 \Big|_{s=j\Omega}$$

目的：求模拟滤波器的系统函数  $H_a(s)$ ；

$H_a(s)$  的构造：

性能指标  $\rightarrow |H_a(j\Omega)|^2 \rightarrow |H(s)|^2_{s=j\Omega} \rightarrow$  零、极点的分配  $\rightarrow H_a(s)$

S 平面的虚轴  $j\Omega$ ，即  $s=j\Omega$ ，对应于傅里叶变换。

若要求稳定且因果，则将左半平面的极点作为  $H_a(s)$  的极点。

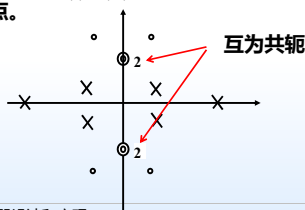
数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

40

## 4.2 模拟滤波器设计

### 系统函数 $H(s)$ 的确定

- 因为冲激响应  $h(t)$  是实函数的，因而  $H(s)$  的极点（或零点）必成共轭对存在。
- $H(s)H(-s)$  的极、零点分布如图所示，成象限对称，虚轴上零点上的“2”表示二阶零点。
- $H(s)H(-s)$  在虚轴上的极点或零点一定是二阶的，但对于因果稳定系统， $H(s)H(-s)$  在虚轴（对应  $z$  平面单位圆）上没有极点。



数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

41

## 4.2 模拟滤波器设计

### 系统函数 $H(s)$ 的确定

由幅度平方函数  $|H(j\Omega)|^2$  确定  $H(s)$  的方法如下：

- 由  $|H(j\Omega)|^2 = H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s=j\Omega}$  得到象限对称的  $s$  平面函数
- 求零极点：将  $H(s)H(-s)$  因式分解，得到各个零点和极点
- 极点选择：任何可实现的滤波器都是稳定的，因此将左半平面的极点归于  $H(s)$ ，右半平面的极点归于  $H(-s)$
- 零点选择：如果要求最小相位延时特性，则  $H(s)$  应取左半平面上的零点；如果没有特性要求，则可将对称零点的任一半（应为共轭对）取为  $H(s)$  的零点； $j\Omega$  轴上的零点或极点都是偶次的，其中一半（应为共轭对）属于  $H(s)$
- 增益：按照  $H(j\Omega)$  和  $H(s)$  的低频特性的对比，即  $H(j\Omega)|_{\Omega=0} = H(s)|_{s=0}$ ，或高频特性的对比，确定系统的增益常数  $K_0$
- 由求出的  $H(s)$  的零点、极点和增益常数，确定系统函数  $H(s)$ 。

$$H(s) = K_0 \frac{(s-z_0)(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_0)(s-p_1)\cdots(s-p_n)}$$

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

42

## 4.2 模拟滤波器设计

**例** 根据以下幅度平方函数确定系统函数  $H(s)$

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{4(\Omega^4 + 64)}{\Omega^4 - 10\Omega^2 + 169}$$

由  $|H(j\Omega)|^2$  的表达式, 可得

$$H(s)H(-s) = |H(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega^2 = -s^2} = \frac{4(s^4 + 64)}{s^4 + 10s^2 + 169}$$

其极点为:

$$s = 2 \pm 3j, \quad s = -2 \pm 3j$$

其零点为:

$$s = 2 \pm 2j, \quad s = -2 \pm 2j$$

## 4.2 模拟滤波器设计

**例**

为使系统稳定, 选择: 左半平面极点  $s = -2 \pm 3j$

一对共轭零点  $s = -2 \pm 2j$

作为  $H(s)$  的零、极点, 并设增益常数为  $K_0$ , 则  $H(s)$  为:

$$H(s) = \frac{K_0(s^2 + 4s + 8)}{s^2 + 4s + 13}$$

按  $H(j\Omega)$  和  $H(s)$  的低频特性或高频特性的对比可以确定增益常数。在这里我们采用低频特性, 即由  $H(j\Omega)|_{\Omega=0} = H(s)|_{s=0}$  的条件可得增益常数为:

$$K_0 = 2$$

最后得到  $H(s)$  为:

$$H(s) = \frac{2(s^2 + 4s + 8)}{s^2 + 4s + 13} = \frac{2s^2 + 8s + 16}{s^2 + 4s + 13}$$

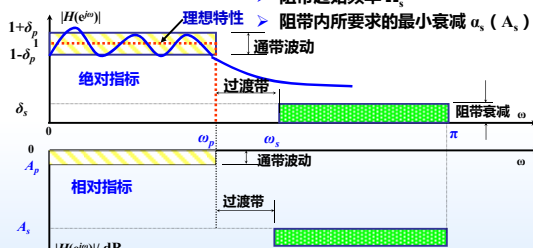
## 4.2 模拟滤波器设计

### ■ 模拟滤波器特性的逼近

LPF 的技术要求包括:

**滤波器技术指标**  
→ **幅频特性**

- 通带截止频率 (或通带的频率上限)  $\Omega_p$
- 通带内所允许的最大衰减或波动  $\alpha_p$  ( $A_p$ )
- 阻带起始频率  $\Omega_s$
- 阻带内所要求的最小衰减  $\alpha_s$  ( $A_s$ )



## 4.2 模拟滤波器设计

### ■ 模拟滤波器特性的逼近

**衰减特性**

衰减特性  $A_p$  ( $A_s$ ) 是单调变化的或者是波纹状变化。假设  $P_1$ 、 $P_2$  分别为滤波器输入、输出功率, 则定义:

$$\begin{aligned} A_p(\Omega) &= 10 \lg \left( \frac{P_1}{P_2} \right) = 10 \lg \left| \frac{X(j\Omega)}{Y(j\Omega)} \right|^2 \\ &= 10 \lg \frac{1}{|H(j\Omega)|^2} = -20 \lg |H(j\Omega)| \end{aligned}$$

**注意:** 这里只提到幅频特性而没有相位问题。因为数字滤波器的设计中用到的是模拟滤波器的幅频特性, 而不考虑其相频特性或群时延。如果对于相位有要求, 可通过全通滤波器来校正其相位。

## 4.2 模拟滤波器设计

### ■ 模拟滤波器特性的逼近

**逼近方法**

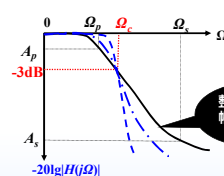
若给定了衰减指标或  $|H_d(j\Omega)|$ , 则找某种方法逼近 指标或  $|H_d(j\Omega)|$ 。根据逼近函数 (多项式或有理式) 的不同, 有多种不同类型的滤波器:

- 巴特沃思逼近
- 切比雪夫逼近
- 逆切比雪夫逼近
- 椭圆逼近
- .....

## 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

巴特沃思 (Butterworth) 滤波器的幅度平方函数表达式为:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$



$\Omega_c$ : 3dB 截止频率, 单位为 rad/s  
 $N$ : 待确定的滤波器阶数

**特点:**

- (1) 3 dB 点及其不变性
- (2) 单调下降性
- (3) 平坦性 (频率零值导数等于 0 dB)

$N$  越大, 越逼近于理想低通滤波器



#### 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

$$\because \Omega = \Omega_c$$

$$\therefore |H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{2}$$

$$-10\lg |H(j\Omega)|^2 = -10\lg \frac{1}{2} \approx 3\text{dB}$$

称  $\Omega_c$  为 3dB 带宽 (或半功率点截止频率)  
3 dB 点与  $N$  值无关, 称为 3 dB 不变性。

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

巴特沃思幅频特性和阶数的关系

当  $\Omega \rightarrow 0$ ,  $|H(j\Omega)|^2 \rightarrow 1$ ; 当  $\Omega \rightarrow \infty$ ,  $|H(j\Omega)|^2 \rightarrow 0$

#### 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

##### $N$ 的影响

通带内:  $0 < \Omega < \Omega_c \rightarrow 0 < \frac{\Omega}{\Omega_c} < 1$ ;  $|H(j\Omega)|^2$  随着  $N$  的增大而趋于平坦

阻带内:  $\Omega > \Omega_c \rightarrow 1 < \frac{\Omega}{\Omega_c}$ ;  $|H(j\Omega)|^2$  随着  $N$  的增大而快速下降

—  $N$  越大, 滤波器的特性

越接近理想的矩形形状(越陡峭)。

— 有限平面只有极点。

— 零点全部在  $s = \infty$ 。

(“全极点型”滤波器)

#### 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

##### 设计过程

- 性能指标  $\rightarrow$  求滤波器阶数  $N$ ;
- 性能指标  $\rightarrow$  3 dB 频率点  $\Omega_c$ ;
- 计算极点或查表  $\rightarrow$  归一化系统函数  $H(p)$ ;
- 计算或反归一化  $\rightarrow$  系统函数  $H(s)$ ;

##### LPF 技术要求包括:

- ✓ 通带频率  $\Omega_p$
- ✓ 通带内衰减  $A_p$
- ✓ 阻带下限频率  $\Omega_s$
- ✓ 阻带内最小衰减  $A_s$

#### 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

##### 滤波器的阶数 $N$ 计算

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

##### LPF 技术要求:

- 通带截止频率  $\Omega_p$
- 通带内最大衰减  $A_p$
- 阻带起始频率  $\Omega_s$
- 阻带内最小衰减  $A_s$

$$A_p = 10\lg \left[ 1 + \left( \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N} \right], \quad A_s = 10\lg \left[ 1 + \left( \frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N} \right]$$

$$\left( \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)^{2N} = \frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1} \quad \xrightarrow{\text{滤波器阶数}} \quad N \geq \frac{\lg \left( \frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1} \right)}{2\lg \left( \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)}$$

$N$  为满足上式的最小整数

#### 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

##### ■ 若给定的是其它频率处 (例如 $\Omega_p$ ) 的指标

求得  $N$  后, 可由  $A_p$  或  $A_s$  求得 3 dB 截止频率  $\Omega_c$

由通带截止频率  $\Omega_p$  处的衰减  $A_p$  求得  $\Omega_c$

$$A_p = 10\lg \left[ 1 + \left( \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \Rightarrow \Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1A_p} - 1}}$$

由此式确定的滤波器通带截止频率处满足设计要求。

也可由阻带起始频率  $\Omega_s$  处的衰减  $A_s$  求得  $\Omega_c$

$$A_s = 10\lg \left[ 1 + \left( \frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \Rightarrow \Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1A_s} - 1}}$$

由此式确定的滤波器在阻带处满足设计要求。

#### 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

##### ■ 求归一化系统函数 $H(p)$

得到巴特沃思滤波器的阶数  $N$  后, 就可以确定零极点形式的传输函数  $H(s)$ 。

$$|H(j\Omega)|^2 = H(s)H(-s)|_{s=j\Omega}$$

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} \Big|_{\Omega=s/j} = \frac{1}{1 + (-j)^{2N} (s/\Omega_c)^{2N}}$$

把拉普拉斯变量  $s$  归一化为  $p = s/\Omega_c$ ,

$$H(p)H(-p) = \frac{1}{1 + (-j)^{2N} (p)^{2N}}$$

## 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

### ■ 求归一化系统函数 $H(p)$

令分母多项式等于零  $1 + (-j)^{2N} (p)^{2N} = 0$ , 得到  $2N$  个极点

$$p_k = (-1)^{2N} j = \left[ e^{j(\pi+2\pi k)} \right]^{\frac{1}{2N}} j = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi(2k+1)}{2N}} \quad k=0,1,\dots,2N-1$$

极点的分布特性

- $2N$  个极点均匀地分布在  $s$  平面上半径为 1 的圆周上 (非归一化时半径为  $\Omega_c$ ) ;
- 极点之间相距  $\pi/N$  弧度;
- 极点一半位于  $s$  平面的左半平面, 另一半位于  $s$  平面的右半平面;
- 从  $\pi/2 + \pi/(2N)$  弧度开始, 极点不落在虚轴上。



数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

55

## 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

### ■ 求归一化系统函数 $H(p)$

为使系统稳定, 取  $p_k$  在  $s$  平面左半平面的  $N$  个根作为  $H(p)$  的极点

$$p_k = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi(2k+1)}{2N}} \quad k=0,1,\dots,N-1$$

$$H(p) = \frac{1}{(p-p_0)(p-p_1)\cdots(p-p_{N-1})}$$

### ■ 求系统函数 $H(s)$

把  $p=s/\Omega_c$  代入  $H(p)$  得到实际需要的  $H(s)$

$$H(s) = H(p) \Big|_{p=s/\Omega_c} = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=0}^{N-1} (s - p_k \Omega_c)}$$

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

56

## 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

### ■ 图表法

模拟滤波器理论已相当成熟, 实际中更多的是采用查表法:

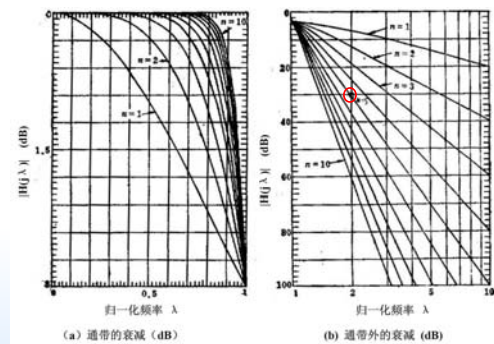
- 将频率归一化  $\lambda$  (注意: 给出的表格都是以 3 dB 点频率  $\Omega_c$  为参考频率, 如果给定的指标不是  $\Omega_c$ , 则需要根据公式计算  $\Omega_c$ );  $\lambda_p = \frac{\Omega_p}{\Omega_c}$ ,  $\lambda_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_c}$
- 由归一化频率—幅频特性曲线, 查得阶数  $N$ ;
- 查表 4.2, 得  $H(p)$  的分母多项式;
- 把  $p=s/\Omega_c$  代入分母多项式中, 得对应于真实频率的系统函数  $H(s)$

$$H(s) = H(p) \Big|_{p=s/\Omega_c}$$

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

57

## 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器



数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

58

## 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

表 4.2 归一化的巴特沃思低通滤波器传递函数的极点和分母多项式

(a) 极点	$p_{k=0}$	$p_{k=1}$	$p_{k=2}$	$p_{k=3}$	$p_{k=4}$	$p_{k=5}$
1	1.0000000					
2	-0.70710678 + j0.70710678					
3	-0.50000000 + j0.86602540					
4	-0.38268343 + j0.92387953	-0.92387953 + j0.38268343				
5	-0.30901699 + j0.95105652	-0.80901699 + j0.58778525				
6	-0.25982203 + j0.96592583	-0.70710678 + j0.70710678	-0.96592583 + j0.25982203			
7	-0.22252093 + j0.97447291	-0.63439812 + j0.78183829	-0.90096887 + j0.43189374			
8	-0.19509032 + j0.98026108	-0.55557023 + j0.83146961	-0.83146961 + j0.55557023	-0.98026108 + j0.19509032		
9	-0.17364818 + j0.98298321	-0.50000000 + j0.86602540	-0.86602540 + j0.50000000	-0.98298321 + j0.17364818		
(b) 分母多项式	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1	1.0000000					
2	1.0000000	1.41421356				
3	1.0000000	2.0000000	2.0000000			
4	1.0000000	2.61312593	3.46410162	2.61312593		
5	1.0000000	3.34732556	5.32095798	5.32095798	3.34732556	
6	1.0000000	3.86370331	7.46410162	9.14213562	7.46410162	3.86370331
7	1.0000000	4.49399311	10.07176548	14.59179589	19.59792465	14.59179589
8	1.0000000	5.22322090	13.81701188	23.86256907	37.68351063	51.98298321
9	1.0000000	6.06246341	18.48731274	33.16343748	51.98298321	71.02614180
(c) 分母多项式	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$
1	1.0000000					
2	1.0000000	1.41421356				
3	1.0000000	2.0000000	2.0000000			
4	1.0000000	2.61312593	3.46410162	2.61312593		
5	1.0000000	3.34732556	5.32095798	5.32095798	3.34732556	
6	1.0000000	3.86370331	7.46410162	9.14213562	7.46410162	3.86370331
7	1.0000000	4.49399311	10.07176548	14.59179589	19.59792465	14.59179589
8	1.0000000	5.22322090	13.81701188	23.86256907	37.68351063	51.98298321
9	1.0000000	6.06246341	18.48731274	33.16343748	51.98298321	71.02614180

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

59

## 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

### 例 技术要求:

通带截止频率:  $\Omega_c = 2\pi \times 5$  (kHz) 3 dB 频率

阻带起始频率:  $\Omega_s = 2\pi \times 10$  (kHz)

通带最大衰减:  $A_p = 3$  dB

阻带最小衰减:  $A_s = 30$  dB

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

60

## 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

### ■ 图表法

1) 将各频率归一化  $\lambda_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_c} = 2, \lambda_p = 1$

2) 求  $N$  : 查归一化幅频特性图, 得  $N=5$  ;

3) 查表得  $H(p)$  的分母多项式 (c 栏)

$$(p+1)(p^2+0.6180340p+1)(p^2+1.6180340p+1)$$

4) 对应于真实频率的转移函数  $H(s)$  用  $p = \frac{s}{\Omega_c} = \frac{s}{\pi \cdot 10^4}$  代入分母多项式, 得

$$H(s) = \frac{\pi^5 \cdot 10^{20}}{(s + \pi \cdot 10^4) [s^2 + 0.618(\pi \cdot 10^4)s + (\pi \cdot 10^4)^2] [s^2 + 1.618(\pi \cdot 10^4)s + (\pi \cdot 10^4)^2]}$$

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

61

## 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

### ■ 计算法

幅频响应函数平方形式

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + (\Omega/10000\pi)^{2N}}$$

1) 计算滤波器阶数:

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2 \lg\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)} = \frac{\lg(10^{0.1 \times 30} - 1)}{2 \lg 2} = 4.98 \quad \text{取整后, 得 } N=5.$$

2) 确定极点:  $H(p)H(-p)$  的极点为

$$p_k = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi(2k+1)}{2N}} = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{(2k+1)\pi}{10}} \quad k=0,1,\dots,9$$

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

62

## 4.2 模拟滤波器设计——巴特沃思滤波器

### ■ 计算法

3) 确定极点

当  $0 \leq k \leq 4$  时,  $p_k$  的相角处于  $\pi/2$  和  $3\pi/2$  之间,  $p_k$  在  $s$  平面的左半平面, 系统是稳定的。

$$p_0 = e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10})}, p_1 = e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{10})}, p_2 = e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{10})}, p_3 = e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{10})}, p_4 = e^{j(\frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{10})}$$

4) 求传输函数

$$H(p) = \frac{1}{(p - e^{j\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}})(p - e^{j\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{10}})(p + 1)(p - e^{j\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{10}})(p - e^{j\frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{10}})}$$

$$= \frac{1}{(p+1)(p^2+0.6180p+1)(p^2+1.6180p+1)}$$

最后  $H(s) = H(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$

$$= \frac{\pi^5 \cdot 10^{20}}{(s + \pi \cdot 10^4) [s^2 + 0.6180(\pi \cdot 10^4)s + (\pi \cdot 10^4)^2] [s^2 + 1.6180(\pi \cdot 10^4)s + (\pi \cdot 10^4)^2]}$$

数字信号处理 - IIR数字滤波器设计和实现

63

## 习题

请到DSP公邮下载:

[zju\\_dsp@163.com](mailto:zju_dsp@163.com) 密码: dsp\_zju

习题下周交

## 实验三: 基4-FFT算法编程

实验要求请到DSP公邮下载 [zju\\_dsp@163.com](mailto:zju_dsp@163.com)

密码: dsp\_zju

可交纸质版或PDF电子版发送到: [3130103370@zju.edu.cn](mailto:3130103370@zju.edu.cn)

实验11月6日交

64