

16~17 矩阵论回忆卷

-By Wzh

一、已知 $(A+B)x$ 存在非零解，且 A, B 都可逆，证明

(1) $\lambda = -1$ 是 $A^{-1}B$ 的特征值

(2) $\lambda = -1$ 是 AB^{-1} 的特征值

二、若 $(A+B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ，证明 $A + ABA^{-1} = B + BAB^{-1}$

三、(1) 若 $|B| \neq 0$ ，求证 $A = B^H B$ 是正定矩阵

(2) 已知 A 是反对称矩阵，即 $A^T = -A$ ，求 $I - A$ 是非奇异

四、已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，求 A 的奇异值以及 A 的右奇异向量

五. 考虑方程 $y = Ac + e$, 其中 e 为误差向量, 定义加权误差平方和

$$E_w = e^H W e$$

其中 W 为一 Hermitian 正定矩阵, 且有约束条件 $c^T y = 1$

求最优化滤波器 \hat{c}

六、已知数据点 $(2, 4), (2, 1), (5, 1)$, 请求出总体最小二乘和一般最小二乘 (点到直线的水平距离) 的拟合直线, 并分析它们 D_{TLS} 和 D_{LS} 。

七. A, B 均为 Hermitian 矩阵

(1) Rayleigh 商如下, 当 x 取何值时, 取得极大值, 极大值为多少?

$$R(x) = \frac{x^H A x}{x^H x}$$

(2) 广义 Rayleigh 商如下, 当 x 取何值时, 取得极大值, 极大值为多少?

$$R(x) = \frac{x^H A x}{x^H B x}$$

八. 设 x 为一随机向量, 且 $x \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, 其均值向量为 m_x , 协方差矩阵为 C_x 。求对 x 进行正交变换。

九. 对于混合约束优化问题:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f_0(x) \text{ subject to. } f_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, I \quad h_j(x) = 0, j = 1, \dots, J$$

- (1). 使用混合外罚函数法, 请写出代价函数;
- (2). 使用混合内罚函数法, 请写出两种代价函数;
- (3). 使用增广 Lagrangian 乘子法, 请写出对应的代价函数

十、简答题部分

- (1) 试分析无约束优化中，步长对收敛性的影响。
- (2). 请简述条件数 $\text{cond}(A)$ 的物理意义。
- (3). 请简述 Tikhonov 正则化与反正则化的意义。