浙江大学实验报告

专业：信息工程
姓名：黄嘉欣
学号：3190102060
日期：2021.10.1

课程名称：数字信号处理　　成绩：

实验名称：有限长序列、频谱、DFT 的性质

一、实验目的和要求

通过演示实验，建立对典型信号及其频谱的直观认识，理解 DFT 的物理意义、主要性质。

二、实验内容和步骤

2-1 用 MATLAB，计算得到五种共 9 个序列：

2-1-1 实指数序列 $x(n)=\begin{cases} a^n & 0\le n\le \text{length-1} \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ 例如，a=0.5, length=10

a=0.9, length=10

a=0.9, length=20

2-1-2 复指数序列 $x(n)=\begin{cases} (a+jb)^n & 0\le n\le \text{length-1} \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ 例如，a=0.5, b=0.8, length=10

2-1-3 从正弦信号 $x(t)=\sin(2\pi ft+\phi)$抽样得到的正弦序列 $x(n)=\sin(2\pi fnT+\phi)$。如，信号频率 f=1 Hz，初始相位ϕ=0，抽样间隔 T=0.1 秒，序列长 length=10。

2-1-4 从余弦信号 $x(t)=\cos(2\pi ft+\phi)$抽样得到的余弦序列 $x(n)=\cos(2\pi fnT+\phi)$。如，信号频率 f=1 Hz，初相位ϕ=0，抽样间隔 T=0.1 秒，序列长 length=10。

2-1-5 含两个频率分量的复合函数序列 $x(n)=\sin(2\pi f_1nT)+\Delta\times\sin(2\pi f_2nT+\phi)$。如，

频率 f_1 (Hz)	频率 f_2 (Hz)	相对振幅 Δ	初相位ϕ (度)	抽样间隔 T (秒)	序列长 length
1	3	0.5	0	0.1	10
1	3	0.5	90	0.1	10
1	3	0.5	180	0.1	10

2-2　用 MATLAB，对上述各个序列，重复下列过程。

2-2-1 画出一个序列的实部、虚部、模、相角；观察并记录实部、虚部、模、相角的特征。

2-2-2 计算该序列的幅度谱、频谱实部、频谱虚部；观察并记录它们的特征，给予解释。

2-2-3 观察同种序列取不同参数时的频谱，发现它们的差异，给予解释。

三、主要仪器设备

MATLAB 编程。

四、实验数据记录和处理

4-1 实指数序列 $x(n)=\begin{cases} a^n & 0\le n\le \text{length-1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$　　例如，a=0.5, length=10

a=0.9, length=10

a=0.9, length=20

MATLAB 代码：

```
% real_index_seq.m
clc;
clear;

% x(n)=0.5^n，序列长度为10
length1 = 10;
a1 = 0.5;
n1 = 0:length1-1;
x1 = a1.^n1; % 计算0.5^n
k1 = 0:length1-1;
y1 = dftmtx(10)*x1'; % DFT
figure; % 绘图
% 此序列的实部
subplot(2,2,1);stem(n1,real(x1));xlabel('n');ylabel('Re\{x(n)\}');title('实部');
% 此序列的虚部
subplot(2,2,2);stem(n1,imag(x1));xlabel('n');ylabel('Im\{x(n)\}');title('虚部');
% 此序列的模与相角
subplot(2,2,3);stem(n1,abs(x1));xlabel('n');ylabel('|x(n)|');title('模');
subplot(2,2,4);stem(n1,(180/pi)*angle(x1)); % 将弧度转为角度
xlabel('n');ylabel('\phi');title('相角');
figure;
% 幅度谱
subplot(3,1,1);stem(k1,abs(y1));xlabel('k');ylabel('|y|');title('幅度谱');
% 频谱实部
subplot(3,1,2);stem(k1,real(y1));xlabel('k');ylabel('Re\{y\}');title('频谱实部');
% 频谱虚部
subplot(3,1,3);stem(k1,imag(y1));xlabel('k');ylabel('Im\{y\}');title('频谱虚部');

% x(n)=0.9^n，序列长度为10
length2 = 10;
a2 = 0.9;
n2 = 0:length2-1;
```

```
x2 = a2.^n2; % 计算0.9^n
k2 = 0:length2-1;
y2 = dftmtx(10)*x2'; % DFT
figure; % 绘图
% 此序列的实部
subplot(2,2,1);stem(n2,real(x2));xlabel('n');ylabel('Re\{x(n)\}');title('实部');
% 此序列的虚部
subplot(2,2,2);stem(n2,imag(x2));xlabel('n');ylabel('Im\{x(n)\}');title('虚部');
% 此序列的模与相角
subplot(2,2,3);stem(n2,abs(x2));xlabel('n');ylabel('|x(n)|');title('模');
subplot(2,2,4);stem(n2,(180/pi)*angle(x2)); % 将弧度转为角度
xlabel('n');ylabel('\phi');title('相角');
figure;
% 幅度谱
subplot(3,1,1);stem(k2,abs(y2));xlabel('k');ylabel('|y|');title('幅度谱');
% 频谱实部
subplot(3,1,2);stem(k2,real(y2));xlabel('k');ylabel('Re\{y\}');title('频谱实部');
% 频谱虚部
subplot(3,1,3);stem(k2,imag(y2));xlabel('k');ylabel('Im\{y\}');title('频谱虚部');

% x(n)=0.9^n，序列长度为20
length3 = 20;
a3 = 0.9;
n3 = 0:length3-1;
x3 = a3.^n3; % 计算0.9^n
k3 = 0:length3-1;
y3 = dftmtx(20)*x3'; % DFT
figure; % 绘图
% 此序列的实部
subplot(2,2,1);stem(n3,real(x3));xlabel('n');ylabel('Re\{x(n)\}');title('实部');
% 此序列的虚部
subplot(2,2,2);stem(n3,imag(x3));xlabel('n');ylabel('Im\{x(n)\}');title('虚部');
% 此序列的模与相角
subplot(2,2,3);stem(n3,abs(x3));xlabel('n');ylabel('|x(n)|');title('模');
subplot(2,2,4);stem(n3,(180/pi)*angle(x3)); % 将弧度转为角度
xlabel('n');ylabel('\phi');title('相角');
figure;
% 幅度谱
subplot(3,1,1);stem(k3,abs(y3));xlabel('k');ylabel('|y|');title('幅度谱');
% 频谱实部
subplot(3,1,2);stem(k3,real(y3));xlabel('k');ylabel('Re\{y\}');title('频谱实部');
% 频谱虚部
subplot(3,1,3);stem(k3,imag(y3));xlabel('k');ylabel('Im\{y\}');title('频谱虚部');
```

4-2 复指数序列 $x(n)=\begin{cases}(a+jb)^n & 0\le n\le \text{length-1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ 例如，a=0.5, b=0.8, length=10

MATLAB 代码：

```
% complex_index_seq.m
clc;
clear;

% x(n)=(0.5+j0.8)^n，序列长度为10
length = 10;
a = 0.5;
b = 0.8;
n = 0:length-1;
x = (a+1i*b).^n;
k = 0:length-1;
y = dftmtx(10)*x';
figure; % 绘图
% 此序列的实部
subplot(2,2,1);stem(n,real(x));xlabel('n');ylabel('Re\{x(n)\}');title('实部');
% 此序列的虚部
subplot(2,2,2);stem(n,imag(x));xlabel('n');ylabel('Im\{x(n)\}');title('虚部');
% 此序列的模与相角
subplot(2,2,3);stem(n,abs(x));xlabel('n');ylabel('|x(n)|');title('模');
subplot(2,2,4);stem(n,(180/pi)*angle(x)); % 将弧度转为角度
xlabel('n');ylabel('\phi');title('相角');
figure;
% 幅度谱
subplot(3,1,1);stem(k,abs(y));xlabel('k');ylabel('|y|');title('幅度谱');
% 频谱实部
subplot(3,1,2);stem(k,real(y));xlabel('k');ylabel('Re\{y\}');title('频谱实部');
% 频谱虚部
subplot(3,1,3);stem(k,imag(y));xlabel('k');ylabel('Im\{y\}');title('频谱虚部');
```

4-3 从正弦信号 $x(t)=\sin(2\pi ft+\phi)$抽样得到的正弦序列 $x(n)=\sin(2\pi fnT+\phi)$。如，信号频率 f = 1Hz，初始相位ϕ=0，抽样间隔 T=0.1 秒，序列长 length=10。

MATLAB 代码：

```
% sine_seq.m
clc;
clear;

% x(n)=sin(0.2*pi*n)，序列长度为10
length = 10;
```

```
n = 0:length-1;
x = sin(2*pi*0.1.*n);
k = 0:length-1;
y = dftmtx(10)*x'; % DFT
figure; % 绘图
% 此序列的实部
subplot(2,2,1);stem(n,real(x));xlabel('n');ylabel('Re\{x(n)\}');title('实部');
% 此序列的虚部
subplot(2,2,2);stem(n,imag(x));xlabel('n');ylabel('Im\{x(n)\}');title('虚部');
% 此序列的模与相角
subplot(2,2,3);stem(n,abs(x));xlabel('n');ylabel('|x(n)|');title('模');
subplot(2,2,4);stem(n,(180/pi)*angle(x)); % 将弧度转为角度
xlabel('n');ylabel('\phi');title('相角');
figure;
% 幅度谱
subplot(3,1,1);stem(k,abs(y));xlabel('k');ylabel('|y|');title('幅度谱');
% 频谱实部
subplot(3,1,2);stem(k,real(y));xlabel('k');ylabel('Re\{y\}');title('频谱实部');
% 频谱虚部
subplot(3,1,3);stem(k,imag(y));xlabel('k');ylabel('Im\{y\}');title('频谱虚部');
```

4-4 从余弦信号 $x(t)=\cos(2\pi ft+\phi)$抽样得到的余弦序列 $x(n)=\cos(2\pi fnT+\phi)$。如，信号频率 $f = 1\text{Hz}$，初相位$\phi=0$，抽样间隔 $T=0.1$ 秒，序列长 length=10。

MATLAB 代码：

```
% cosine_seq.m
clc;
clear;

% x(n)=cos(0.2*pi*n)，序列长度为10
length = 10;
n = 0:length-1;
x = cos(2*pi*0.1.*n);
k = 0:length-1;
y = dftmtx(10)*x'; % DFT
figure; % 绘图
% 此序列的实部
subplot(2,2,1);stem(n,real(x));xlabel('n');ylabel('Re\{x(n)\}');title('实部');
% 此序列的虚部
subplot(2,2,2);stem(n,imag(x));xlabel('n');ylabel('Im\{x(n)\}');title('虚部');
% 此序列的模与相角
subplot(2,2,3);stem(n,abs(x));xlabel('n');ylabel('|x(n)|');title('模');
subplot(2,2,4);stem(n,(180/pi)*angle(x)); % 将弧度转为角度
```

```
xlabel('n');ylabel('\phi');title('相角');
figure;
% 幅度谱
subplot(3,1,1);stem(k,abs(y));xlabel('k');ylabel('|y|');title('幅度谱');
% 频谱实部
subplot(3,1,2);stem(k,real(y));xlabel('k');ylabel('Re\{y\}');title('频谱实部');
% 频谱虚部
subplot(3,1,3);stem(k,imag(y));xlabel('k');ylabel('Im\{y\}');title('频谱虚部');
```

4-5 含两个频率分量的复合函数序列 $x(n)=\sin(2\pi f_1 nT)+\Delta\times\sin(2\pi f_2 nT+\phi)$。

MATLAB 代码：

```
% compound_seq.m
clc;
clear;

% x(n)=sin(0.2*pi*n)+0.5sin(0.6*pi*n)，序列长度为10
length1 = 10;
n1 = 0:length1-1;
x1 = sin(2*pi*0.1.*n1)+0.5*sin(2*pi*3*0.1.*n1);
k1 = 0:length1-1;
y1 = dftmtx(10)*x1'; % DFT
figure; % 绘图
% 此序列的实部
subplot(2,2,1);stem(n1,real(x1));xlabel('n');ylabel('Re\{x(n)\}');title('实部');
% 此序列的虚部
subplot(2,2,2);stem(n1,imag(x1));xlabel('n');ylabel('Im\{x(n)\}');title('虚部');
% 此序列的模与相角
subplot(2,2,3);stem(n1,abs(x1));xlabel('n');ylabel('|x(n)|');title('模');
subplot(2,2,4);stem(n1,(180/pi)*angle(x1)); % 将弧度转为角度
xlabel('n');ylabel('\theta');title('相角');
figure;
% 幅度谱
subplot(3,1,1);stem(k1,abs(y1));xlabel('k');ylabel('|y|');title('幅度谱');
% 频谱实部
subplot(3,1,2);stem(k1,real(y1));xlabel('k');ylabel('Re\{y\}');title('频谱实部');
% 频谱虚部
subplot(3,1,3);stem(k1,imag(y1));xlabel('k');ylabel('Im\{y\}');title('频谱虚部');

% x(n)=sin(0.2*pi*n)+0.5sin(0.6*pi*n+0.5*pi)，序列长度为10
length2 = 10;
n2 = 0:length2-1;
x2 = sin(2*pi*0.1.*n2)+0.5*sin(2*pi*3*0.1.*n2+0.5*pi);
k2 = 0:length2-1;
```

```
y2 = dftmtx(10)*x2'; % DFT
figure; % 绘图
% 此序列的实部
subplot(2,2,1);stem(n2,real(x2));xlabel('n');ylabel('Re\{x(n)\}');title('实部');
% 此序列的虚部
subplot(2,2,2);stem(n2,imag(x2));xlabel('n');ylabel('Im\{x(n)\}');title('虚部');
% 此序列的模与相角
subplot(2,2,3);stem(n2,abs(x2));xlabel('n');ylabel('|x(n)|');title('模');
subplot(2,2,4);stem(n2,(180/pi)*angle(x2)); % 将弧度转为角度
xlabel('n');ylabel('\theta');title('相角');
figure;
% 幅度谱
subplot(3,1,1);stem(k2,abs(y2));xlabel('k');ylabel('|y|');title('幅度谱');
% 频谱实部
subplot(3,1,2);stem(k2,real(y2));xlabel('k');ylabel('Re\{y\}');title('频谱实部');
% 频谱虚部
subplot(3,1,3);stem(k2,imag(y2));xlabel('k');ylabel('Im\{y\}');title('频谱虚部');

% x(n)=sin(0.2*pi*n)+0.5sin(0.6*pi*n+pi)，序列长度为10
length3 = 10;
n3 = 0:length3-1;
x3 = sin(2*pi*0.1.*n3)+0.5*sin(2*pi*3*0.1.*n3+pi);
k3 = 0:length3-1;
y3 = dftmtx(10)*x3'; % DFT
figure; % 绘图
% 此序列的实部
subplot(2,2,1);stem(n3,real(x3));xlabel('n');ylabel('Re\{x(n)\}');title('实部');
% 此序列的虚部
subplot(2,2,2);stem(n3,imag(x3));xlabel('n');ylabel('Im\{x(n)\}');title('虚部');
% 此序列的模与相角
subplot(2,2,3);stem(n3,abs(x3));xlabel('n');ylabel('|x(n)|');title('模');
subplot(2,2,4);stem(n3,(180/pi)*angle(x3)); % 将弧度转为角度
xlabel('n');ylabel('\theta');title('相角');
figure;
% 幅度谱
subplot(3,1,1);stem(k3,abs(y3));xlabel('k');ylabel('|y|');title('幅度谱');
% 频谱实部
subplot(3,1,2);stem(k3,real(y3));xlabel('k');ylabel('Re\{y\}');title('频谱实部');
% 频谱虚部
subplot(3,1,3);stem(k3,imag(y3));xlabel('k');ylabel('Im\{y\}');title('频谱虚部');
```

五、实验结果与分析

5-1 序列图形与频谱特征及分析

1 实指数序列

1.1 实指数序列：$a = 0.5$, length $= 10$

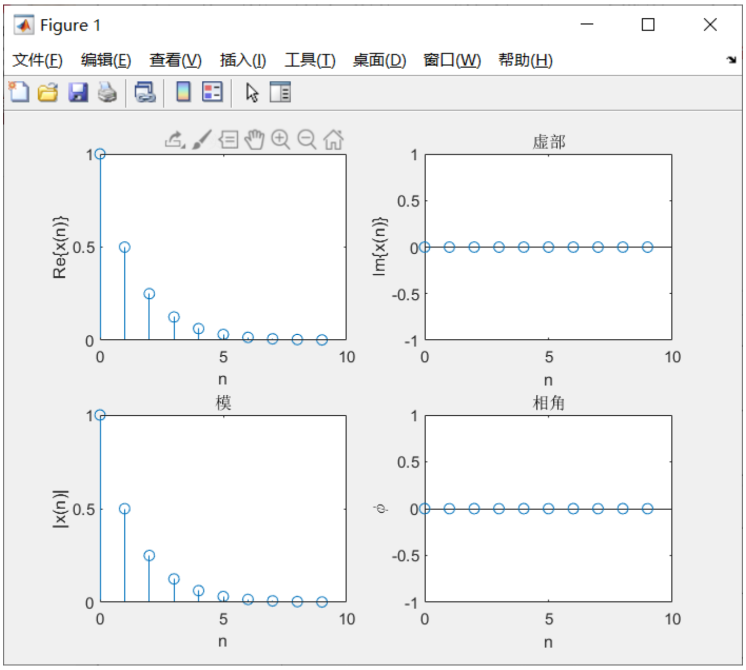

图 5.1.1.1 序列时域图形

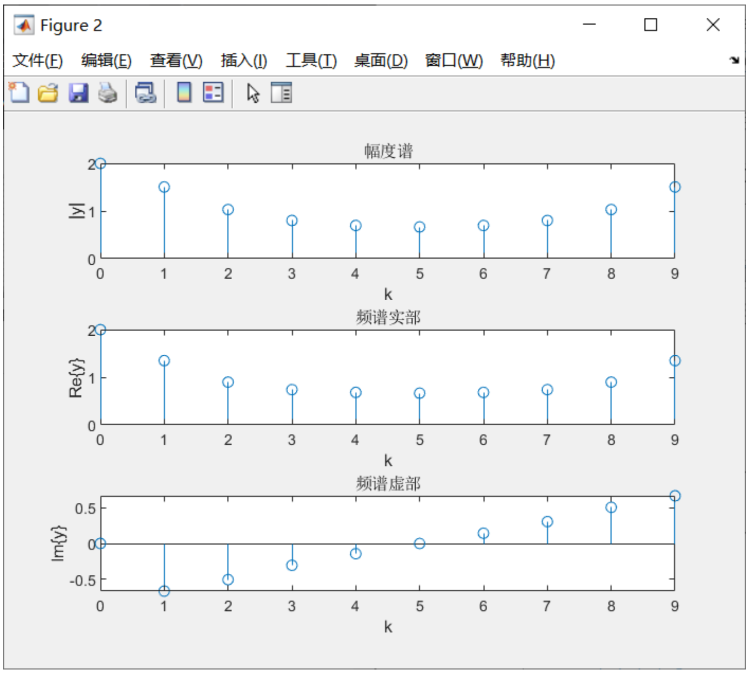

图 5.1.1.2 序列频谱

1.2 实指数序列：$a = 0.9$, length $= 10$

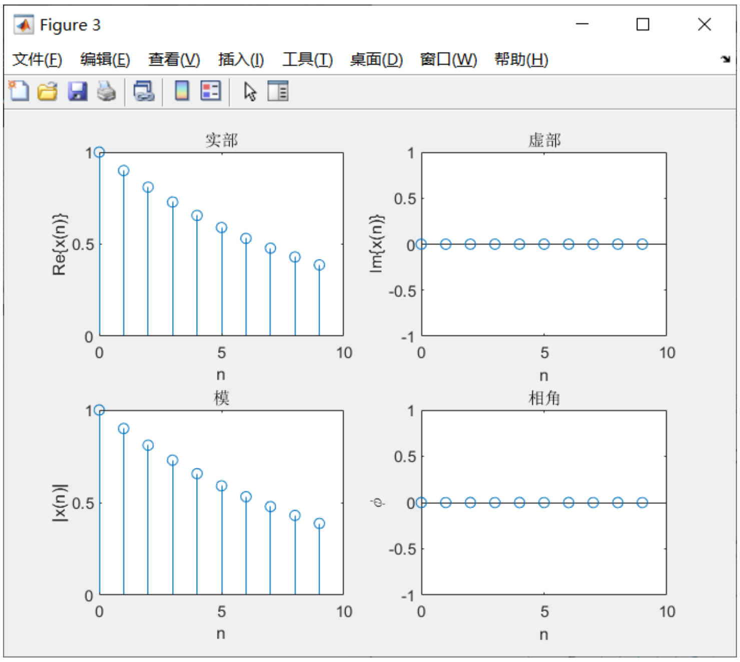

图 5.1.2.1 序列时域图形

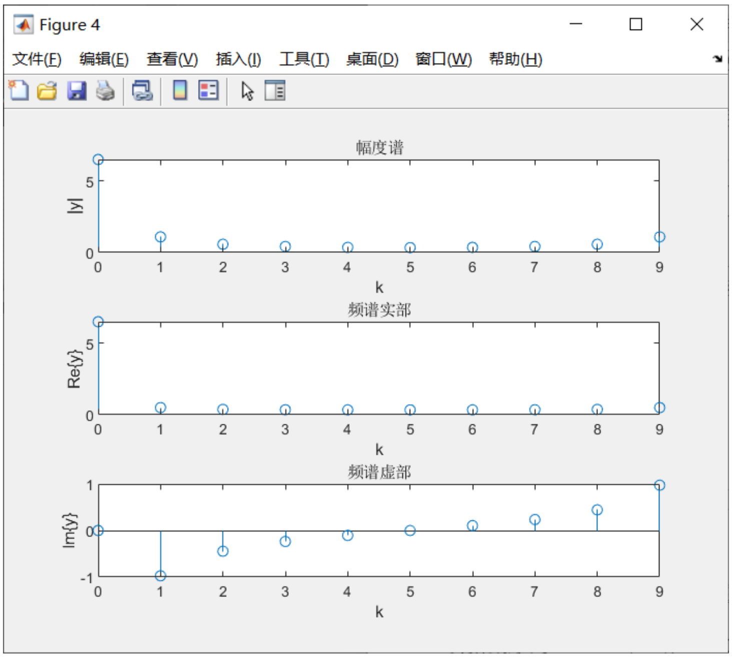

图 5.1.2.2 序列频谱

1.3 实指数序列：$a = 0.9$, length $= 20$

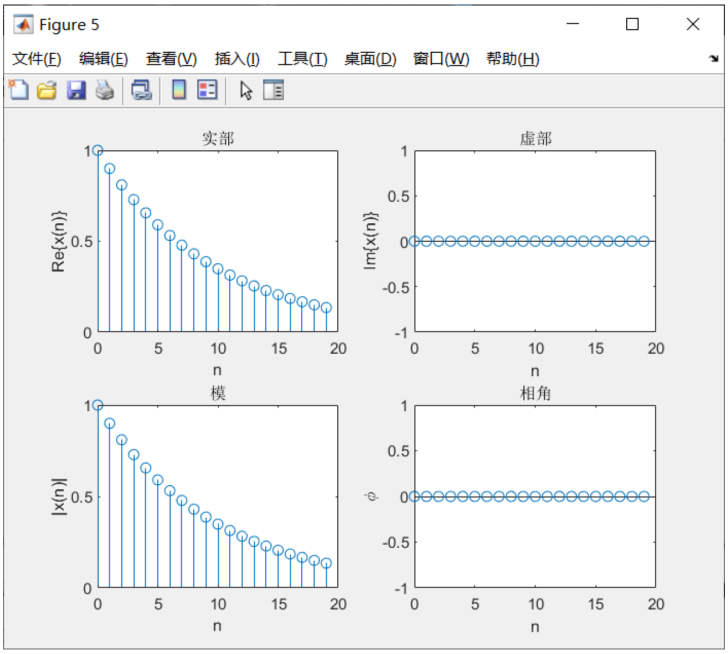

图 5.1.3.1 序列时域图形

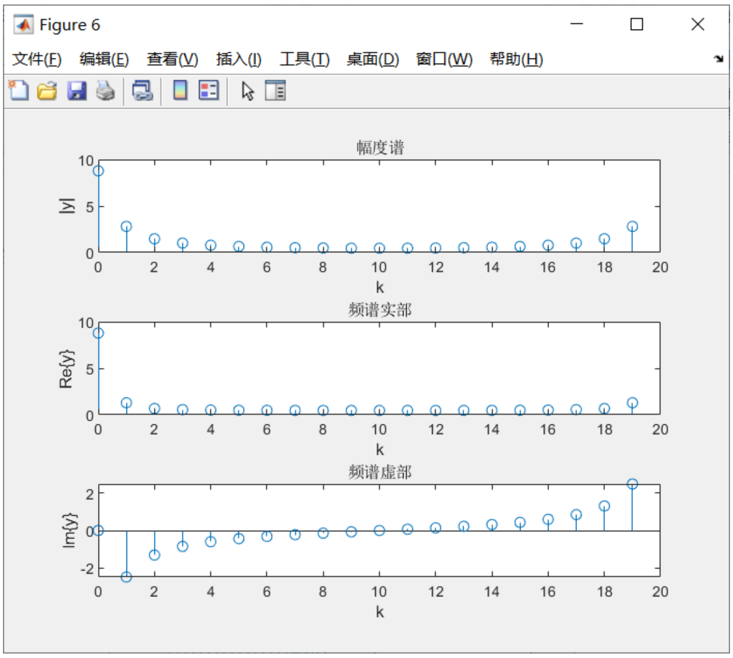

图 5.1.3.2 序列频谱

分析：对于时域序列，由于这三个序列都是正的实序列，故虚部、相角都为 0，模长即为序列实部的大小；对于频域，由序列的虚实性可知，其频谱实部均为偶对称，虚部均为奇对称，与结果相对应。当 a 由小到大逐渐趋近于 1 时，可以发现，序列的频谱逐渐集中在 $k = 0$ 处，即直流分量，这是由于随着 a 逐渐增大，序列的变化越来越慢，其频率为 0 处的频谱值也就会相应地增大。当序列的长度逐渐增加时，频谱分辨率不断提高，所得的频谱越发与真实的频谱序列相接近，这是由于采集到的数据更多，与理论相一致。

2 复指数序列：$a = 0.5, b = 0.8$, length $= 10$

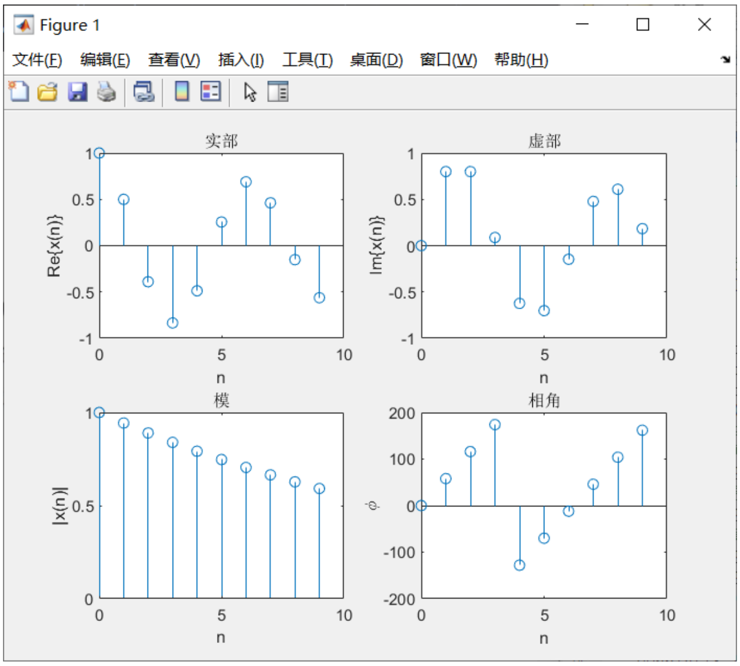

图 5.2.1 序列时域图形

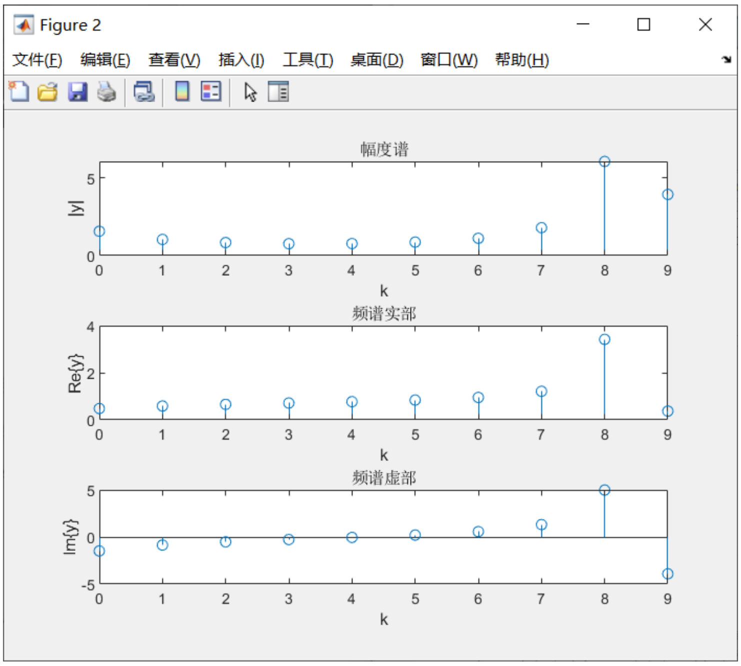

图 5.2.2 序列频谱

分析：对此复指数序列而言，由于 $a = 0.5, b = 0.8$，故其时域图形呈三角函数形，但并不具备对称性。随着 n 的增大，序列的模长逐渐减小，相角周期性增大（各处值不等）。对频域而言，序列频谱不具有对称性，且在 $k = 8$ 处的幅值最大，这是由序列本身的共轭对称性及频率特点所决定的，与理论相一致。

3 正弦序列：$x(n) = \sin(0.2\pi n)$

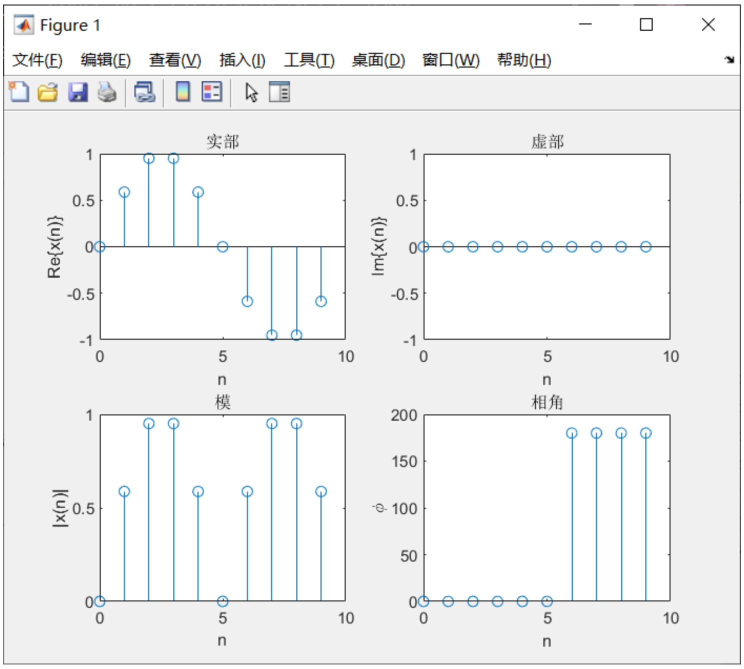

图 5.3.1 序列时域图形

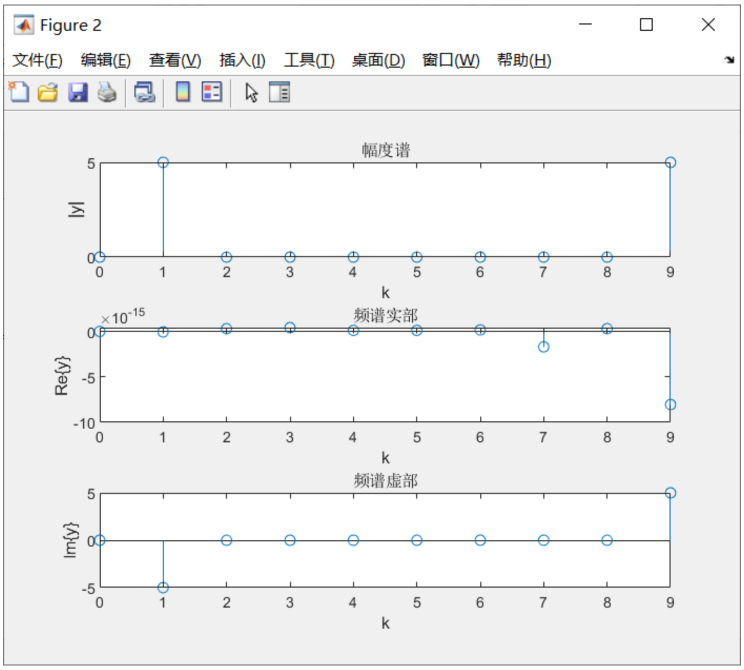

图 5.3.2 序列频谱

分析： 由所给数据，此正弦序列为正弦信号采样后所得，信号频率 $f = 1\text{Hz}$，初始相位 $\phi = 0$，采样周期 $T = 0.1$ 秒。对时域而言，其为实序列，且奇对称，虚部始终为 0。当序列取正值时，相角为 0°；当序列取负值时，相角为 180°，与三角函数的性质相符。由于时域为实奇序列，其 DFT 所得频谱实部为 0，虚部为奇对称，与绘图结果基本吻合。实际结果中频谱实部不为 0，可能是由于 MATLAB 计算时采用的是离散值所致。同时可以发现，当 $k = 1$ 时，频谱的

幅值最大，这与原序列的频率相一致。

4 余弦序列：$x(n)=\cos(0.2\pi n)$

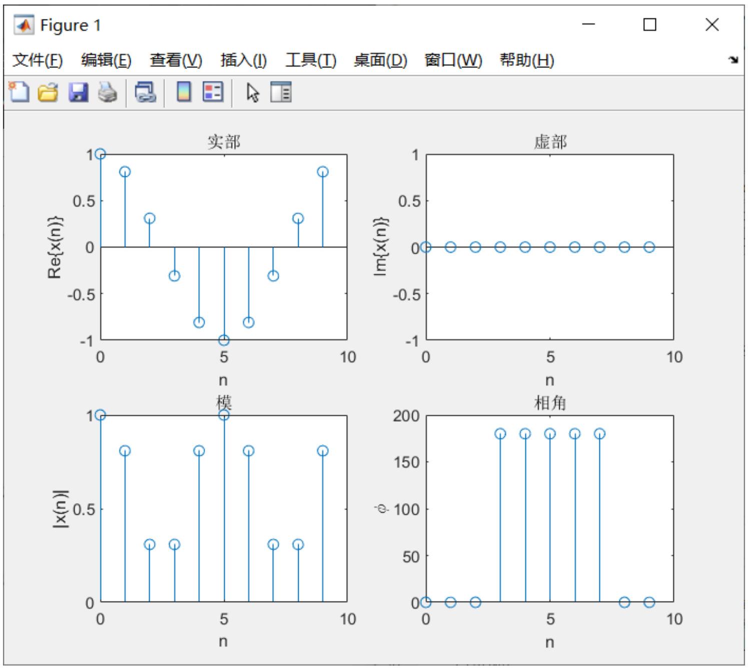

图 5.4.1 序列时域图形

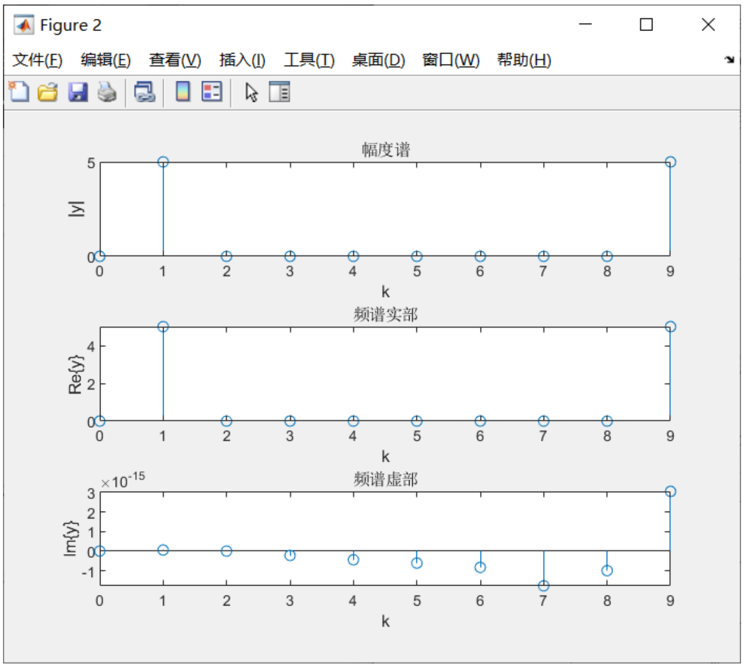

图 5.4.2 序列频谱

分析：同理，此余弦序列为余弦信号采样后所得，信号频率 $f=1$Hz，初始相位 $\phi=0$，采样周期 $T=0.1$ 秒。对时域而言，其为实序列，且偶对称，虚部始终为 0。当序列取正值时，相角为 0°；当序列取负值时，相角为 180°，与三角函数的性质相符。由于时域为实偶序列，其

DFT 所得频谱虚部为 0，实部为偶对称，与绘图结果基本吻合。实际结果中频谱虚部不为 0，可能与 MATLAB 计算时采用的是离散值有关。同时可以发现，当 $k = 1$ 时，频谱的幅值最大，这与原序列的频率相一致。

5 复合序列

5.1 复合序列：$x(n)=\sin(0.2\pi n)+0.5\sin(0.6\pi n)$

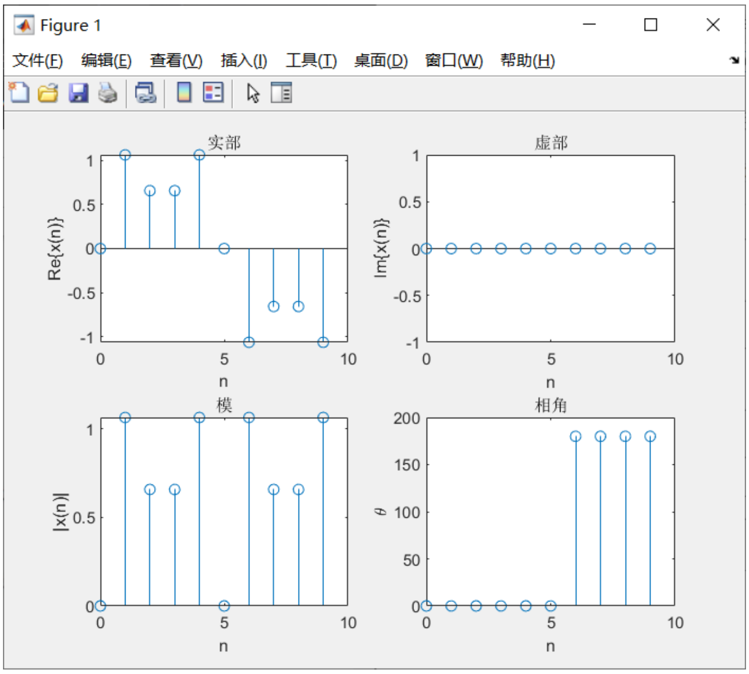

图 5.5.1.1 序列时域图形

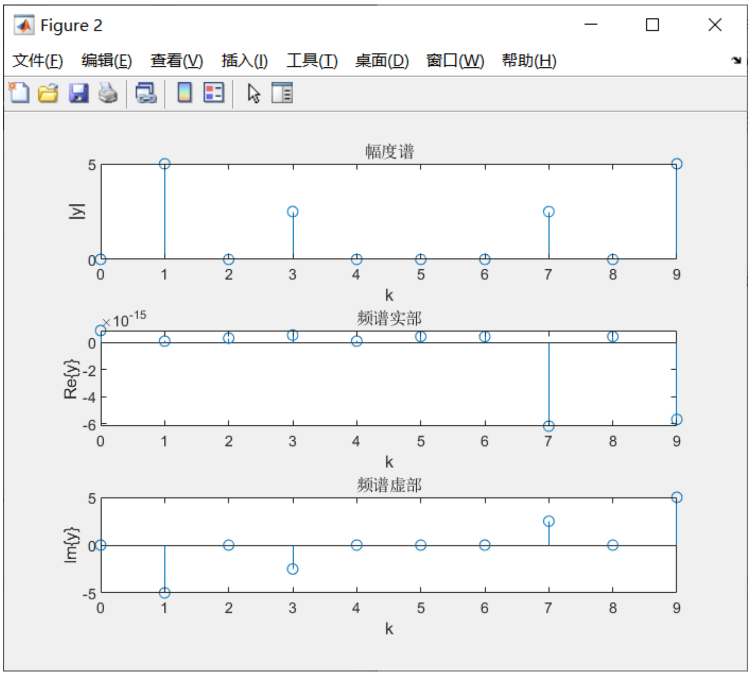

图 5.5.1.2 序列频谱

5.2 复合序列：$x(n)=\sin(0.2\pi n)+0.5\sin(0.6\pi n+0.5\pi)$

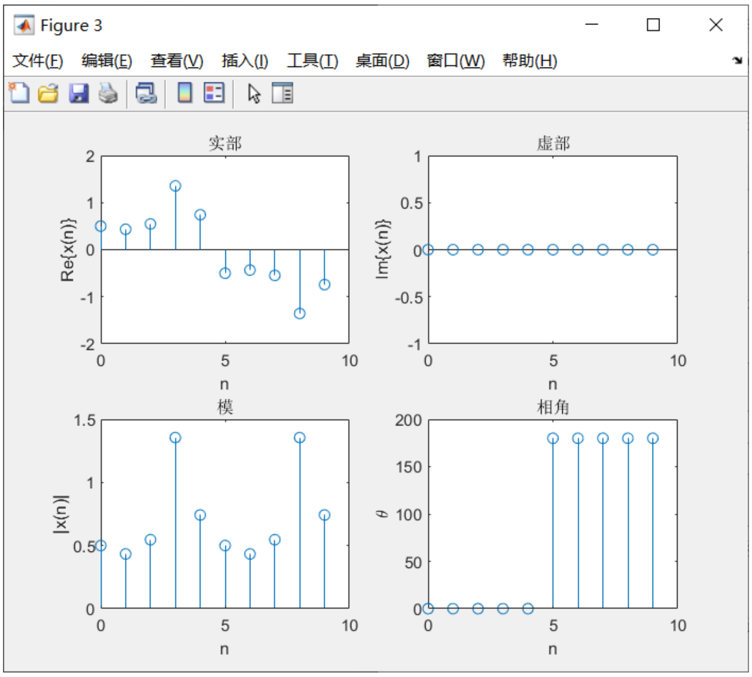

图 5.5.2.1 序列时域图形

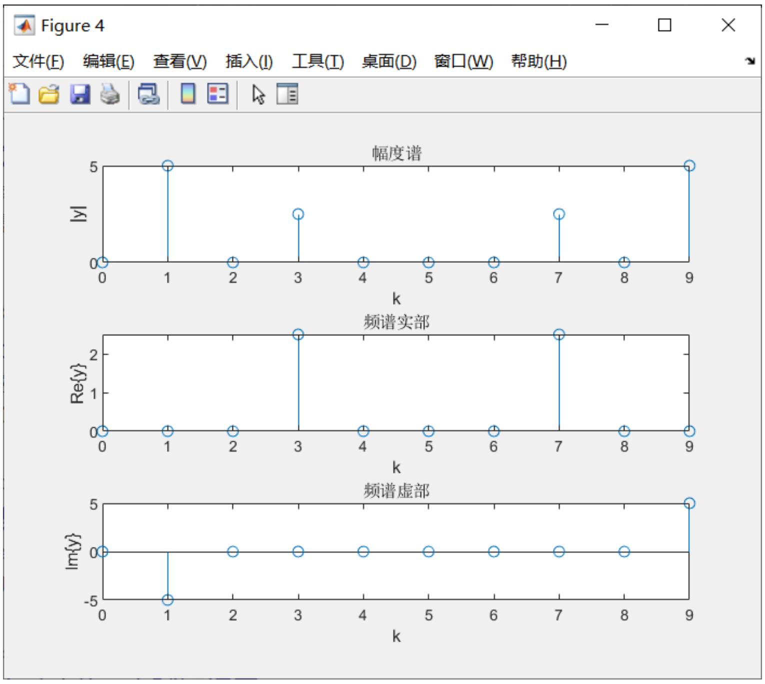

图 5.5.2.2 序列频谱

5.3 复合序列：$x(n)=\sin(0.2\pi n)+0.5\sin(0.6\pi n+\pi)$

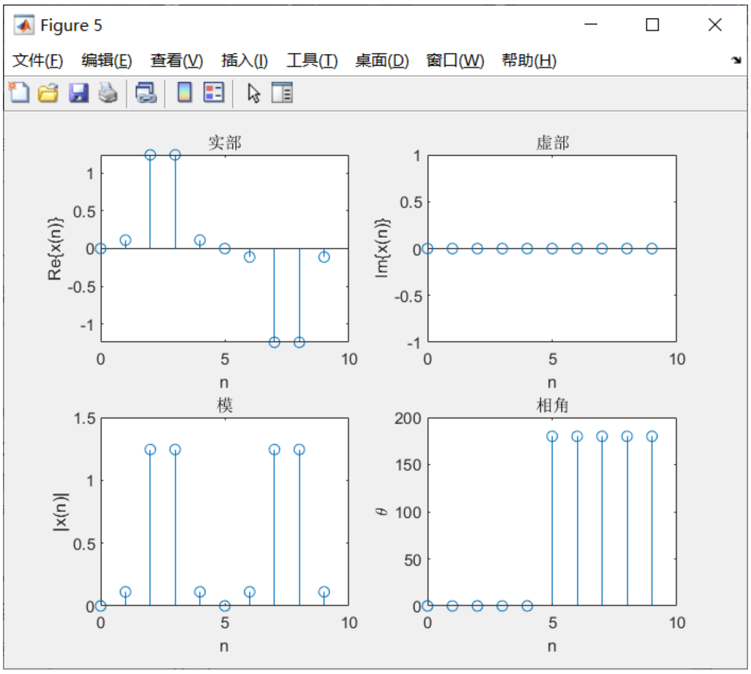

图 5.5.3.1 序列时域图形

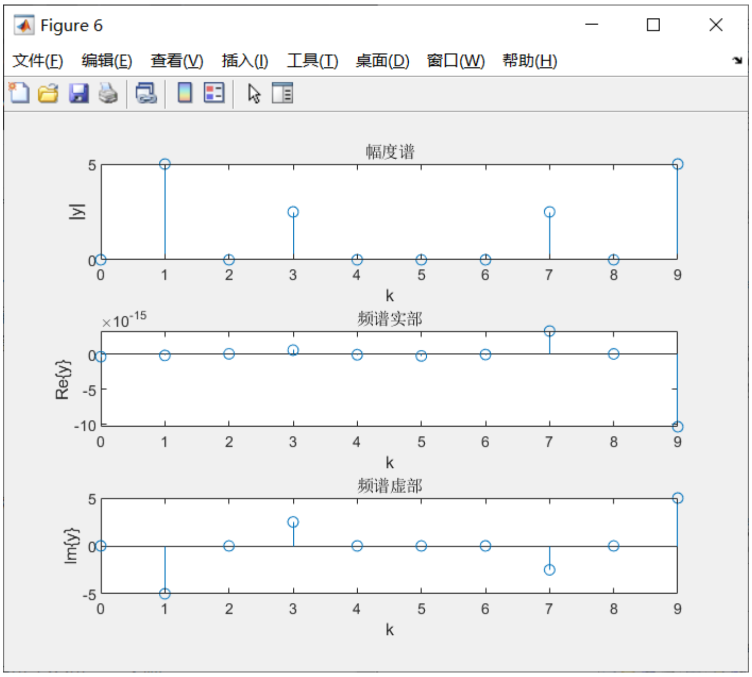

图 5.5.3.2 序列频谱

分析：在时域，此三个序列都是实序列，故虚部为 0。当序列值为正时，相角为 0°；当序列值为负时，相角为 180°，与三角函数的性质相符。对 5.1 与 5.3 中两个序列而言，其在时域为实奇对称，故频谱实部为 0，虚部为奇对称，与结果基本一致。由于 MATLAB 计算时采用的是离散值，故所绘频谱实部有些许偏差。对 5.2 中的实序列，其不具备对称性，故频谱实部为偶函数，虚部为奇函数，与理论相吻合。当 $k = 1$ 或 3 时，三个序列频谱的幅值存在两极值，且 $k = 1$ 处的值更大，这与原序列的频率 0.2π、0.6π及其相对振幅相一致。可以发现，

随着信号分量的初相位由 0° 增加到 180°，序列的幅度谱并未发生改变，只是其频谱的实部、虚部发生了相应变化，这是由于初相位的变化并未改变序列的频率组成，但对叠加所得信号的对称性、幅值等性质产生了影响，与理论知识相符。

5-2 DFT 的物理意义：

由定义：

$$DTFT: X(e^{j\omega}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$DFT: X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi kn/N}$$

故离散傅里叶变换是对序列的频谱在[0, 2π]上的 N 点等间隔采样，即对序列频谱的离散化，其能够全面、如实地表示 $x(n)$的频域特征。

总的来说，在得到 DFT 的过程中，有以下三个步骤：

① 时域离散化，频域周期化，得到离散时间傅里叶变换；

② 频域离散化，时域周期化，得到离散周期傅里叶级数；

③ 对周期离散化的时域和频域，取一个周期进行研究，即为离散傅里叶变换。

$X(0)$的物理意义：当 $k = 0$ 时，

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

故 $X(0)$为序列在一个周期内的幅值之和；当然，其也为对序列的 DTFT 在$\omega = 0$处的采样值；

$X(1)$的物理意义：同理，$X(1)$为对序列的 DTFT 进行等间距 N 个离散频率点采样后，所得的第二个点的采样值；

$X(N-1)$的物理意义：$X(N\text{-}1)$为对序列的 DTFT 进行等间距 N 个离散频率点采样后，所得的最后一个点的采样值；

5-3 DFT 的主要性质：

根据实验结果，可以发现 DFT 的主要性质如下：

① 若 $x(n)$为实序列，则有：

$$Re\{X(k)\} = Re\{X((-k))_N\}$$

$$Im\{X(k)\} = -Im\{X((-k))_N\}$$

② 共轭偶对称分量对应原序列离散傅里叶变换的实部，共轭奇对称分量对应原序列离散傅里叶变换的虚部，即：

$$DFT\{x_e(n)\} = Re\{X(k)\}$$

$$DFT\{x_o(n)\} = jIm\{X(k)\}$$

③ 若 $x(n)$为实偶序列，则其离散傅里叶变换虚部为 0，即：

$$Re\{X(k)\} = Re\{X((-k))_N\}$$

$$Im\{X(k)\} = 0$$

④ 若 $x(n)$为实奇序列，则其离散傅里叶变换实部为 0，即：

$$Re\{X(k)\} = 0$$

$$Im\{X(k)\} = -Im\{X((-k))_N\}$$

⑤ 相同长度的有限长序列的线性组合，其离散傅里叶变换亦为各序列离散傅里叶变换的线性组合，即：

$$DFT\{ax_1(n) + bx_2(n)\} = aX_1(k) + bX_2(k)$$

六、心得与讨论

此次实验，我们利用 MATLAB 对有限长序列及其 DFT 频谱进行了计算、分析，比较直观地了解了参数变化对各种序列的影响，并进一步温习了奇偶序列的频谱性质，对于我们理解、掌握 DFT 的性质具有很大的帮助。

虽然在课堂上还没有学习过相关的 MATLAB 函数，但通过查阅教材、官方文档，我比较快捷地了解了实验的做法。俗话说，“熟能生巧”，多次尝试之后，便可以很好地利用 MATLAB 进行实验操作。总的来说，我在实验过程当中并未遇到有较大的困难，但在对各个序列、频谱进行分析时，由于对 DFT 的性质较为生疏，所以花费了较多时间进行复习。在掌握学习工具的同时加深对知识的理解，我觉得，这也不失为一次良好的学习体验。