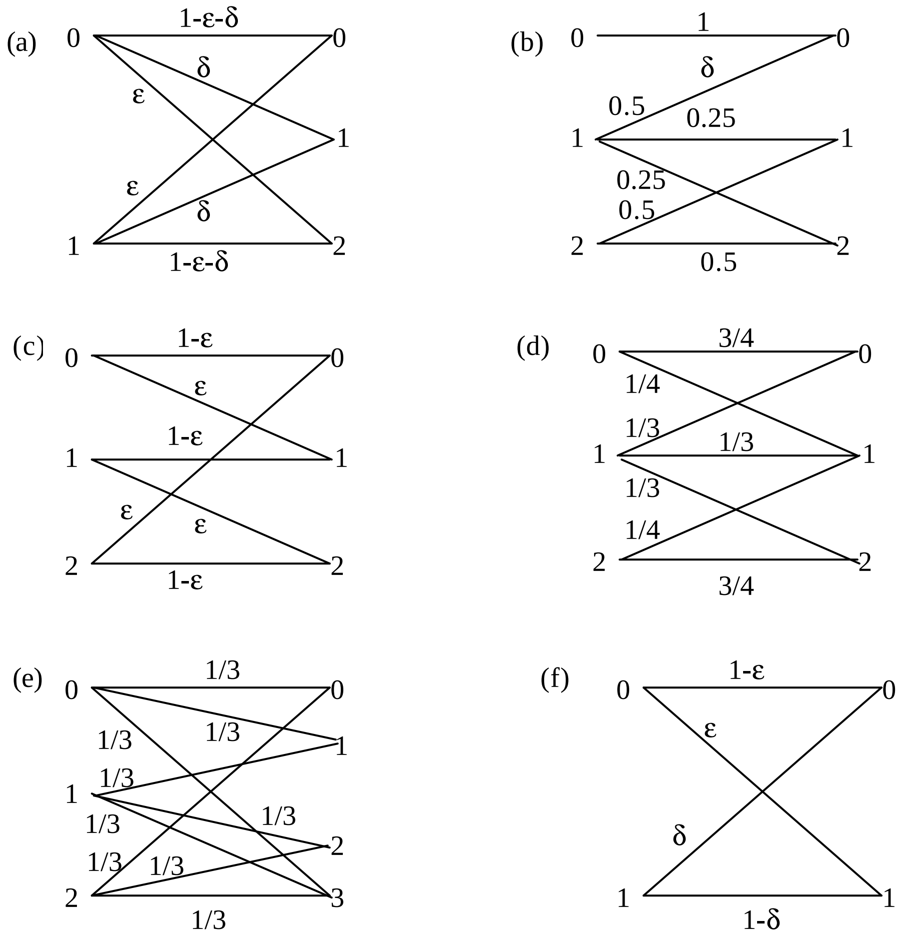
《信息论与编码》第四章习题解答

4.1 **计算如下所示离散无记忆信道的容量：**



习题 4.1 **图**

[解]

（a）**信道概率转移矩阵为**

$$P=\begin{pmatrix} 1-e-d & d & e \\ e & d & 1-e-d \end{pmatrix},$$

信道是准对称信道，因此在输入为等概分布时达到信道容量，即 $P(X=0)=P(X=1)=0.5$ **时达到信道容量。这时**

$$P(Y=0)=0.5-0.5d$$

$$P(Y=1)=d$$

$$P(Y=2)=0.5-0.5d$$

相应的信道容量为

$$C=I(X=0;Y)=I(X=1;Y)$$

$$=\sum_{j=0}^{2} p(j\,|\,0)\log\frac{p(j\,|\,0)}{p(j)}$$

$$= (1-e-d)\log\frac{1-e-d}{0.5-0.5d} + d\log\frac{d}{d} + e\log\frac{e}{0.5-0.5d}$$
$$= (1-e-d)\log(1-e-d) + e\log e - (1-d)\log(0.5-0.5d)$$

（b）**信道概率转移矩阵为**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

当 $P(X=0)=P(X=2)=0.5$，$P(X)=0$ **时，**

$P(Y=0)=0.5$，$P(Y=1)=0.25$，$P(Y=2)=0.25$

$$I(X=0;Y)=\sum_{j=0}^{2} p(j\,|\,0)\log\frac{p(j\,|\,0)}{p(j)} = 1 \ \text{bit}$$
$$I(X=2;Y)=\sum_{j=0}^{2} p(j\,|\,2)\log\frac{p(j\,|\,2)}{p(j)}$$
$$= 0.5\log\frac{0.5}{0.25} + 0.5\log\frac{0.5}{0.25} = 1 \ \text{bit}$$

$I(X=1;Y)=0\le 1$；

所以满足定理 4.2.2 **条件，由达到信道容量充要条件可知，信道容量**

C=1 bit/**次**

（c）**信道转移概率矩阵为**

$$P = \begin{pmatrix} 1-e & e & 0 \\ 0 & 1-e & e \\ e & 0 & 1-e \end{pmatrix},$$

信道是对称信道，当输入为均匀分布时，即

$$P(X=0)=P(X=1)=P(X=2)=\frac{1}{3}$$

时，达到信道容量。

$$C = \log 3 + e\log e + (1-e)\log(1-e)$$
$$= \log 3 - H(e, 1-e)$$

（d）**信道转移概率矩阵为**

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

当 $p(X=0)=p(X=2)=0.5$，$p(X=1)=0$ **时，**

$$P(Y=0)=P(Y=2)=\frac{3}{8}，\ P(Y=1)=\frac{2}{8}$$

$$I(X=0;Y)=\sum_{j=0}^{2} p(j\,|\,0)\log\frac{p(j\,|\,0)}{p(j)}$$

$$= \frac{3}{4}\log 2 + \frac{1}{4}\log 1$$

$$= \frac{3}{4} \text{ bit}$$

$$I(X=2;Y) = \frac{3}{4} \text{ bit}$$

$$I(X=1;Y) = \sum_{j=0}^{2} p(j|1)\log\frac{p(j|1)}{p(j)}$$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{1/3}{3/8} + \frac{1}{3}\log\frac{1/3}{2/8} + \frac{1}{3}\log\frac{1/3}{3/8}$$

$$= \frac{2}{3}\log\frac{8}{9} + \frac{1}{3}\log\frac{8}{6}$$

$$\le \frac{3}{4} \text{ bit}$$

所以满足定理 4.2.2 所规定的达到信道容量的充要条件，信道容量为

$$C = \frac{3}{4} \text{ bit/次}$$

（e）

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

信道是准对称信道，当输入分布为均匀分布时达到信道容量，即

$p(X=0) = p(X=1) = p(X=2) = \frac{1}{3}$时达到信道容量。信道容量为

$$C = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3} p(i)p(j|i)\log\frac{p(j|i)}{p(j)}$$

其中 $p(Y=0) = p(Y=1) = p(Y=2) = \frac{2}{9}$

$$p(Y=3) = \frac{1}{3}$$

所以

$$C = 6\cdot\frac{1}{9}\log\frac{1/3}{2/9} + 3\cdot\frac{1}{9}\log\frac{1/3}{1/3}$$

$$= \frac{2}{3}\log\frac{3}{2} \text{ bit/次}$$

（f）信道转移概率矩阵

$$P = \begin{pmatrix} 1-e & e \\ d & 1-d \end{pmatrix}$$

利用方程求逆方法计算信道容量。设

$p(X=0) = q$，$p(X=1) = 1-q$，$0 < q < 1$

则 $$w_0 = p(Y=0) = q(1-e) + (1-q)d$$
$$w_1 = p(Y=1) = q \cdot e + (1-q)\cdot(1-d)$$

记 $$b_0 = C + \log w_0$$
$$b_1 = C + \log w_1$$

于是得到

$$(1-e)b_0 + eb_1 = (1-e)\log(1-e) + e\log e = -H(e)$$
$$db_0 + (1-d)b_0 = d\log d + (1-d)\log(1-d) = -H(d)$$

解上面方程得

$$b_0 = \frac{eH(d) - (1-d)H(e)}{1-d-e}$$
$$b_1 = \frac{dH(e) - (1-e)H(d)}{1-d-e}$$

所以

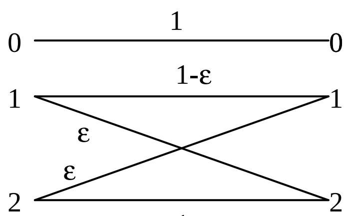
$$C = \log \sum_j 2^{b_j}$$
$$= \log\left[2^{\frac{eH(d)-(1-d)H(e)}{1-d-e}} + 2^{\frac{dH(e)-(1-e)H(d)}{1-d-e}}\right]$$

由 $w_0 = 2^{b_0 - C}$，$w_1 = 2^{b_1 - e}$

解出

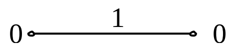
$$q = \frac{(1-d)w_0 - dw_1}{1-e-d}$$
$$1-q = \frac{(1-e)w_1 - ew_0}{1-e-d}$$

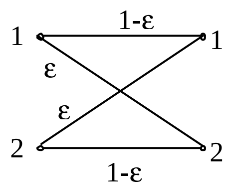
4.2 **计算如下信道的容量，**



习题 4.2 **图**

[解] 把该信道看成是退化信道C$_1$和二元对称信道C$_2$的和信道，





退化信道C$_1$ **二元对称信道C$_2$**

退化信道容量为$C_1=0$，二元对称信道容量为$C_2=1-H(e)$，

所以和信道的容量为

$$C=\log\left[1+2^{1-H(e)}\right]$$

达到信道容量的输入分布为

$$p(X=0)=2^{C_1-C}$$

$$=\frac{1}{1+2^{1-H(e)}}$$

$$p(X=1)=p(X=2)$$

$$=0.5\cdot 2^{C_2-C}$$

$$=\frac{2^{-H(e)}}{1+2^{1-H(e)}}$$

4.3 考虑离散无记忆信道 $Y=X+Z$（mod 11），

其中 $$Z=\begin{pmatrix}1, & 2, & 3\\ \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{3}\end{pmatrix} \qquad X\in\{0,1,\cdots,10\}$$

假定 Z 和 X 独立，求：

（1）信道容量，

（2）达到信道容量的输入分布$\{P^*(x)\}$。

［解］ 信道为对称信道，所以当输入为均匀分布时，即

$$p(X=i)=\frac{1}{11}，\ i=0,1,\cdots,10$$

时达到信道容量。信道容量为

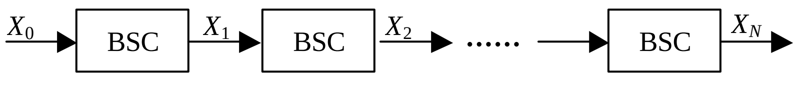
$$C=\log 11-H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$$

$$=\log\frac{11}{3}\quad \text{bit/次}$$

4.4 用差错率为e的二元对称信道 BSC 构成如下复合信道

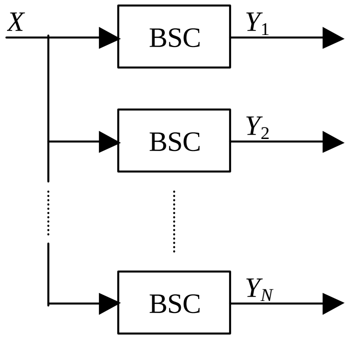
（1）长度为 N 的级联信道

求该级联信道的容量C_N，并证明$\lim\limits_{N\to\infty}C_N=0$

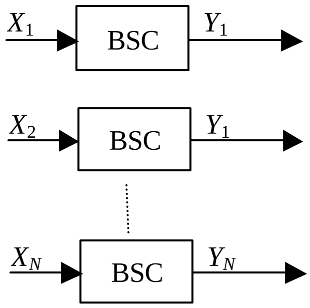


习题 4.4（1）图　级联信道

（2）并联输入信道，把输入 X 并联接到各信道，输出是矢量，当 $N\to\infty$ 时并联输入信道容量趋于 1。



习题 4.4（2）**图　并联输入信道**



习题 4.4（3）**图　积信道**

（3）N **个相同** BSC **的积信道，求这时积信道容量** C_N **，且证明** $\lim\limits_{N\to\infty} C_N = \infty$

[证明]

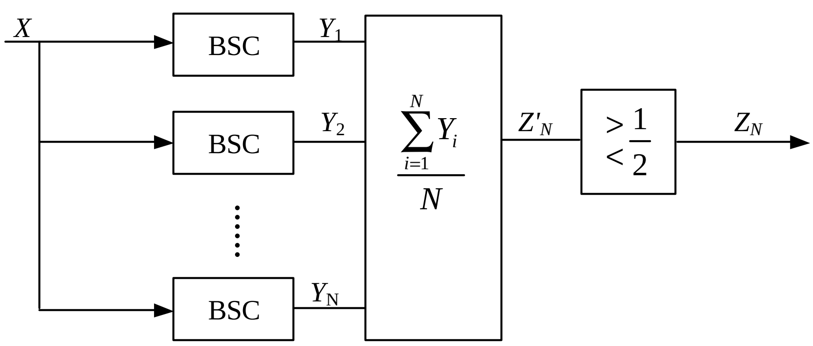
（1）**见例** 4.3.2

（2）**首先因为**

$$I(X;Y_1,Y_2,\cdots,Y_N) = H(X) - H(X \mid Y_1,Y_2\cdots Y_N)$$
$$\le H(X)$$
$$\le 1 \ \ \text{bit}$$

所以对任何 N**，并联输入信道容量** $C_N \le 1$ bit**，下面证明当** $N \to \infty$ **时，** $C_N \ge 1$ bit。

我们对输出 $Y_1,Y_2,\cdots Y_N$ **作进一步处理，如下图所示**



其中　　$Z'_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i / N$

$$Z_N=\begin{cases}0 & Z'_N\le \dfrac{1}{2}\\ 1 & Z'_N>\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

由于当 X=0 **时，**Y_i **是独立，同分布二元随机变量**

$$p(Y_i=1\,|\,X=0)=p\text{，}\ p(Y_i=0\,|\,X=0)=1-p$$

$$E[Z'_N\,|\,X=0]=p\text{，}\ s^2_{Z'_N|X=0}=\frac{p(1-p)}{N}$$

利用切比雪夫不等式

$$\begin{aligned}P[Z_N=1|\,X=0]&=P\left\{Z'_N>\frac{1}{2}|\,X=0\right\}\\&=P\left\{Z'_N-p>\frac{1}{2}-p\,|\,X=0\right\}\\&\le P\left\{|\,Z'_N-p\,|>\frac{1}{2}-p\,|\,X=0\right\}\\&\le\frac{s^2_{Z'_N|X=0}}{\left(\dfrac{1}{2}-p\right)^2}\\&=\frac{p(1-p)}{N(\dfrac{1}{2}-p)^2}\end{aligned}$$

当 $p<\dfrac{1}{2}$**，以及** N **充分大时**

$$P[Z_N=1\,|\,X=0]\to 0$$

类似的当 N **充分大时**

$$P[Z_N=0\,|\,X=0]\to 1$$

$$P[Z_N=0\,|\,X=1]\to 0$$

$$P[Z_N=1\,|\,X=1]\to 1$$

于是当 $N\to\infty$ **时，**X **和** Z_N **之间的等效信是趋于无噪信道，即**

$$\lim_{N\to\infty}\max_{\{p(x)\}}I(X;Z_N)=1\ \text{bit}$$

由于数据处理定理

$$I(X;Y_1\cdots Y_N)\ge I(X;Z_N)$$

所以 $\lim\limits_{N\to\infty}C_N\ge 1\ \text{bit}$**，**

从而 $\lim\limits_{N\to\infty}C_N=1\ \text{bit}$

（3）积信道容量

$$C_N=N\cdot C$$

其中 $C=1-H(p)$

所以 $\lim\limits_{N\to\infty}C_N=\infty$

4.5 **离散无记忆信道由下述矩阵描述**

	y_1	y_2	y_3
x_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
x_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
x_3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

如 $p(x_1)=\frac{1}{2}$**，** $p(x_2)=p(x_3)=\frac{1}{4}$**，求理想观察员判别方式，即最大后验概率判决方式，以及相应的错误概率。**

[解] 理想观察员判别方式就是最大后验概率判别方式，即如果接收到$Y=j$**，则理想观察员按如下作出判别**

$$\hat{x}(Y=j)=\arg\max_{x\in X}\ p(x\,|\,Y=j)$$

$$=\arg\max_{x\in X}\frac{p(x)\cdot p(Y=j\,|\,x)}{p(Y=j)}$$

于是对于每个$Y=j$**，** $j=1,2,3$ **可以计算出** $\hat{x}(Y=j)$ **为：**

y	y_1	y_2	y_3
$\hat{x}(y)$	x_1	x_1	x_3

错误概率
$$P_e=P\{X\neq\hat{X}(Y)\}$$
$$=\sum_x p(x)\cdot p\{\hat{x}\neq x\,|\,x\}$$
$$=p(x_1)\cdot p(y_3\,|\,x_1)+p(x_2)\cdot 1+p(x_3)\cdot[p(y_1\,|\,x_3)+p(y_2\,|\,x_3)]$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{11}{24}$$

4.6 **信道输入，输出字符集相同**$\mathcal{X}=\mathcal{Y}=\{0,1,2,3,4,\}$**，信道转移概率为**

$$p(y\,|\,x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{如}\ y=x\pm 1\bmod 5\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

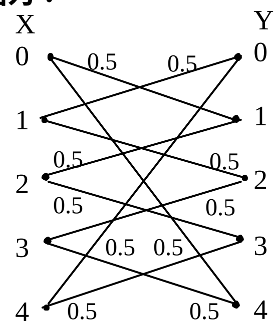
（1）求信道容量；

（2）信道的“0—错误”容量是指每次信道以 0 错误概率传输的最大比特数。显然对于本信道来说“0—错误”容量至少为 1 比特，（因为若以 $\frac{1}{2}$ **概率传输符号“0”和“1”可达“0—错误”传输）。请找出“0—错误”传输速率大于 1 比特的分组码？你能否估计该信道“0—错误”容量？**

[解]（1）转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5\\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0\end{pmatrix}$$

相应的转移概率图为：



由转移概率矩阵看出信道是对称信道，所以，在输入为均匀分布时达到信道容量

$$C=\log 5+0.5\log 0.5+0.5\log 0.5$$

$$=\log\frac{5}{2}\ \text{ bit/次}$$

（2）如果有二个 $i\neq j$，使得存在 k 使

$$p(Y=k\mid X=i)\neq 0\text{，以及 }P(Y=k\mid X=j)\neq 0$$

则称 i 和 j 相邻。如果选择彼此不相邻的符号传输，是不会发生错误的，这就是“0—错误”传输。显然 $X=0$ 和 $X=1$ 是二个不相邻的符号，于是如果采用 0.5 概率传 $X=0$，0.5 概率传 X=1 则可以达到以“0—错误”传送一个比特的码率。

可以构成长度为 2 的码字，这时有 25 种不同输入 (x_1,x_2)，$x_1,x_2\in\{0,1,2,3,4\}$，和 25 种不同输出 (y_1,y_2)，$y_1,y_2\in\{0,1,2,3,4\}$。对于长度为 2 的扩展符号来说，可以构成 25×25 转移概率矩阵和相应的转移概率图，发现（0,0)，(2,4)，(4,3)，(1,4)，(3,1）是 5 个不相邻的扩展符号，等概率使用这 5 个扩展符号传输信息可以得到“0—错误”传输，而且平均每次使用信道（每符号）传输信息速率为

$$R=\frac{1}{2}\log 5\ \text{ bit/次}$$

于是“0—错误”容量

$$C_0\geq\frac{1}{2}\log 5\ \text{ bit/次}$$

显然“0—错误”容量一定小于一般容量，所以下式应该成立

$$C_0\leq\log\frac{5}{2}\ \text{ bit/次}$$

4.7 给定一个信道 $\{p(y_j\mid x_i)\}_{MXL}$，输入、输出字符表分别为 $\{x_1,x_2,\cdots x_M\}$，$\{y_1,y_2,\cdots,y_L\}$。一个随机判决方式如下，对一个信道输出 $y_j(j=1,2,\cdots,L)$，译码器以概率 q_{ji} 选定符号 $x_i(i=1,2,\cdots,M)$，试证明对一个给定的输入分布，没有一种随机判决方式具有比理想观察员方式有更小的错误概率。

[证明]如果接收到$Y=y_j$，则由随机判决方式正确传输概率为

$$P_C(y_j)=\sum_{i=1}^{M} q_{ji}P(X=x_i\mid y_j)$$

如采用理想观察员方式，即

$$\hat{x}(y_j)=\arg\max_i P(X=x_i\mid y_j)$$

或者说

$$P\{X=\hat{x}(y_j)\mid y_j\}=\max_i P\{X=x_i\mid y_i\}$$

则正确传输概率为

$$\begin{aligned}\hat{P}_C(y_j)&=P\{X=\hat{x}(y_j)\mid y_j\}\\&=\sum_i q_{ji}\cdot P\{X=\hat{x}(y_j)\mid y_j\}\\&\ge\sum_i q_{ji}\cdot p\{X=x_i\mid y_i\}\\&=P_C(y_j)\end{aligned}$$

所以理想观察员方式具有比任何随机判决方式更大的正确判决概率。

4.9 计算下述信道容量

$$P=\begin{bmatrix}\overline{p} & p & 0 & 0\\ p & \overline{p} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \overline{p} & p\\ 0 & 0 & p & \overline{p}\end{bmatrix}$$

[解] 本信道是二个相同的二元对称信道的和信道，每个分量信道的容量为

$$C_1=C_2=1-H(p)$$

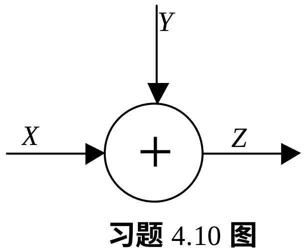
在输入为均匀分布时达到容量。于是和信道容量为

$$C=\log[2^{C_1}+2^{C_2}]=2-H(p)\quad \text{bit/次}$$

相应输入均匀分布为：

$$p(x_0)=p(x_1)=p(x_2)=p(x_3)=\frac{1}{4}$$

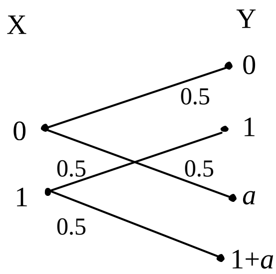
4.10 离散无记忆加性噪声信道如图所示。其输入随机变量 X 和噪声 Y 统计独立。X 的取值为{0，1}，Y 取值为{0，a}（$a\ge1$），又 $p(y=0)=p(y=a)=0.5$，信道输出 $Z=X+Y$，求此信道容量，以及达到信道容量的最佳输入分布。注意信道容量依赖于 a 的取值。



习题 4.10 图

[解] 由题意 $Z = X + Y$，当 $a > 1$ 时相应的转移概率图与转移概率矩阵为

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & a & 1+a \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P = & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}} \end{array}$$

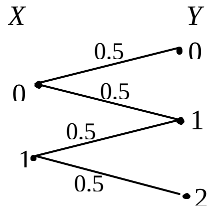


这时为无损信道，容量为

C=1 bit/次

当 a=1 时，相应转移概率图和转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$



这时为二元除删信道，容量为

$C = 1 - 0.5 = 0.5$ bit/次

4.14 给定系统带宽为 W，噪声功率谱密度为 N_0，试证明传送一比特信息所需最小能量为 $0.693\,N_0$（瓦）。如果要求 $\frac{S}{WN_0} > 4000$，其中 S 为信号功率，试证明所需的信号能量至少为此最小值的 482 倍。

[证明] 由 4.6.1 节可知在频带效率 h 下，每传 1bit 所需能量为

$$E_b(h) \geq \frac{2^h - 1}{h} \cdot N_0$$

其中不等式右边是 $h = \frac{R_b}{W} = \frac{1}{WT_b}$ 的增函数。对固定 W，当 $T_b \to \infty$ 时，$h \to 0$，这时达到最小值

$$E_{\min} = \lim_{h \to 0} E_b(h) = 0.693 N_0$$

设用 T_b 时间传送 1bit 信息，由 Shannon 公式

$$C_{T_b} = T_b \cdot W \log \cdot \left(1 + \frac{S}{N_0 W}\right) = 1 \text{ bit}$$

得到 $$T_b W = 1 / \log\left(1 + \frac{S}{N_0 W}\right)$$

当 $\frac{S}{N_0 W} > 4000$ 时，由于 $S = E_b / T_b$，所以

$$E_b > 4000 N_0 \cdot W T_b = \frac{4000 N_0}{\log\left(1 + \dfrac{S}{N_0 W}\right)}$$

因此 $$\frac{E_b}{E_{\min}} \geq \frac{4000 N_0}{0.693 \cdot N_0 \cdot \log(4001)} = 482$$