2.17 有 n 枚硬币，其中有一枚是假币，它可能比真币重或轻。今用一个无砝码的天平对这 n 个硬币称重，检测出这个假币，并确定它比真币“重”还是“轻”。

(a) 通过 k 次称重，可以检测出假币，并正确判定它比真币“重”还是“轻”的硬币数 n 最多为多大？

(b) 对 $k=3$，$n=12$ 这种情况，试设计一种称重的方案。

[解]

（a） n 个硬币中有一个假币，它重量可比真币重或轻，如果每个硬币是假币是等可能的，又假币是重还是轻也是等概的，则确定哪个硬币是假，同时确定比真币重还是轻的实验 A 有 $2n$ 个等可能结局，所以 A 的不确定性为

$$H(A)=\log 2n$$

用无砝码天平称一次所构成的实验 B 可能有 3 个结果，即平衡、右重和左重，所以每次实验所能消除的不确定性最多为 log3，用 B_1，B_2，……，B_K 表示称 K 次，则

$$\begin{aligned}I(A;B_1B_2\cdots\cdots B_K)&=H(A)-H(A\,|\,B_1,B_2\cdots\cdots B_K)\\&=H(B_1B_2\cdots\cdots B_K)-H(B_1B_2\cdots\cdots B_K\,|\,A)\end{aligned}$$

如果称 K 次能完全确定假币，即 $H(A\,|\,B_1B_2\cdots\cdots B_K)=0$，则

$$\begin{aligned}H(B_1B_2\cdots\cdots B_K)&=H(A)+H(B_1B_2\cdots\cdots B_K\,|\,A)\\&\geq H(A)\end{aligned}$$

也就是说要称 K 次能完全确定假币，必须要求

$$H(B_1B_2\cdots\cdots B_K)\geq \log 2n$$

而称 K 次最多提供的信息量为 $K\log 3$，所以为了确定 n 个硬币中的假币至少要称次数 K 必须满足 $K\log 3\geq \log 2n$，或者说用称 K 次可以分辨的硬币数最多为

$$n\leq \frac{3^K}{2}$$

由于 n 和 K 都是整数，所以

$$\boxed{n\leq \frac{3^K-1}{2}}$$

下面证明，当 $n=\dfrac{3^K-1}{2}$ 时，称 K 次是不能确定假币的。

因为 $n=\dfrac{3^K-1}{2}$ 不能为 3 整除，所以在第一次称时不可能达到最大熵 log3 。为了使第一次称达到最大熵，我们在天平二边各放上 $\dfrac{n-1}{3}=\dfrac{3^{K-1}-1}{2}$ 个硬币，这样实验 B_1 的三

种可能结果的概率最接近，分别为

$$P(\textbf{右重}) = P(\textbf{左重}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n}，\quad P(\textbf{平}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3n}，$$

如果出现"平衡"，则假币在余下的$\frac{n+2}{3} = \frac{3^{K-1}+1}{2}$**个硬币中，于是有**$3^{K-1}+1$**种等概结局，这时不能用称 *K*-1 次来分辨余下的硬币。**

下面我们证明当$n < \frac{3^K - 1}{2}$**，即**$n \le \frac{3^K - 3}{2}$**时，称 *K* 次可以确定其中的假币。为此我们先证明二个辅助命题。**

辅助命题 1、*n* 个硬币分成 2 组，甲组由 *a* 个硬币，乙组有 *b*=*n*–*a* 个硬币，已知其中有一个假币，若假币在甲组则假币重于真币，若假币在乙组，则假币轻于真币，用无砝码天平确定假币，最少称的次数 *K* 满足。

$$3^{K-1} < n \le 3^K$$

［证明］用归纳法，当 *K*=1 时，这时 *n* 可以取 1、2、3，容易验证对这三种情况称 1 次都可以确定假币。假定$n \le 3^K$**时结论正确，即可以用称不多于 *K* 次来分辨出假币；现考虑**$3^K < n \le 3^{K+1}$**。**

这时从甲组选 2*x* 个硬币，从乙组选 2*y* 个硬币使得

$$2x + 2y \le 2 \cdot 3^K，\quad n - (2x + 2y) \le 3^K$$

即

$$3^K \ge x + y \ge \frac{n - 3^K}{2}$$

现把甲组的 2*x* 个硬币在天平二边各放一半，也把乙组的 2*y* 个硬币各放一半在天平二边，于是剩下还有$n_1 = n - (2x + 2y) \le 3^K$**个硬币没有使用，若天平"平衡"，则说明重的假币可能在甲组**$a_1 = a - 2x$**中或轻的假币在乙组**$b_1 = b - 2y$**中。若天平向一边倾斜，则假币在偏重一边的 *x* 个甲组硬币中，或在偏轻一边的 *y* 个乙组硬币中。因为**$x + y \le 3^K$**，**$n_1 = a_1 + b_1 \le 3^K$**，所以无论出现那种情况，由归纳假设称 *K* 次就够了。**

辅助命题 2、如果除了其中有一个是假币的 *n* 个硬币之外，我们还可以利用一个已知是真的硬币，则当$n = \frac{3^K - 1}{2}$**时，称 *K* 次可以分辨出硬币。**

［证明］用归纳法，当 *K*=1 时，*n*=1,显然利用已知的真币与唯一的假币比较可以确定其轻重。

假设当 *K* 时命题正确，现考虑$\frac{3^K - 1}{2} < n \le \frac{3^{K+1} - 1}{2}$**时，称 *K*+1 次确定假币。**

第一次称时，在左盘放 x 个硬币，右盘放 x–1 个硬币和一个真币，这时尚有 $n_1=n-(2x-1)$ 个硬币没有使用；选 x 满足

$$2x-1\le 3^K\text{，}\ n-(2x-1)\le\frac{3^K-1}{2}$$

即 $$3^K\ge 2x-1\ge n-\frac{3^K-1}{2}$$

当 $n\le\frac{3^{K+1}-1}{2}$ 时，可以找到满足上式的 x。

如果第一次称"平衡"，则以后剩下 $n_1\le\frac{3^K-1}{2}$ 个未称硬币，同时显然那个已知真的硬币仍可使用，所以由归纳假设再称 K 次可以分辨出剩下 n_1 硬币中的假币。

如果第一次不平衡，在 $2x-1\le 3^K$ 个可疑硬币中若假币在偏重的一边，则该假币比真币重，若它在偏轻的一边，则假币比真币轻，这是属于辅助命题一所考虑的问题，在现在情况中 $a=x$, $b=x-1$(或 $a=x-1$, $b=x$)由辅助命题 1，$a+b=2x-1\le 3^K$，所以用称 K 次可以分辨出假币。

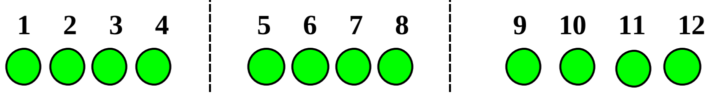
现来证明当 $\boxed{n\le\frac{3^K-3}{2}}$ 时，称 K 次可以确定其中的假币(没有附加的真币可利用)。

在第一次称时，天平二边都放 $\frac{3^{K-1}-1}{2}$ 个硬币，还剩 $n_1=n-2\cdot\frac{3^{K-1}-1}{2}\le\frac{3^{K-1}-1}{2}$ 硬币没有被称，若天平二边"平衡"，则剩下 $n_1\le\frac{3^{K-1}-1}{2}$ 个硬币可疑，其余 $3^{K-1}-1$ 个硬币是真，所以由辅助命题 2，用 $K-1$ 次可以分辨出剩余 n_1 硬币中的假币。

若天平不平衡，则重的一端 $a=\frac{3^{K-1}-1}{2}$ 个硬币中有假币时，该假币为重，轻的一端 $b=\frac{3^{K-1}-1}{2}$ 个硬币中有假币时，该假币为轻，因为 $a+b=3^{K-1}-1<3^{K-1}$，所以由辅助命题 1，用 $K-1$ 次称可以分辨假币。

这样我们证明了称 K 次总可以分辨 $n\le\frac{3^K-3}{2}$ 个硬币。

（b）下面举出一种对 n=12 个硬币，确定其中假币的方法。



我们把 12 个硬币分成三组，如上表所示。把第一和第二组放在天平上比较，当天平两边平衡时，后面的称法由图 1 所示；

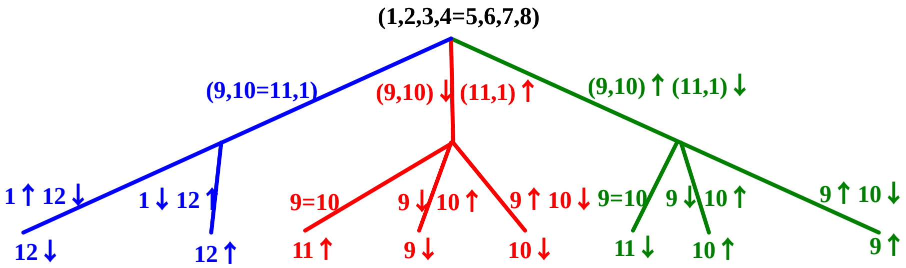


图 1

当天平两边(1,2,3,4)重（5,6,7,8）轻时，后面的称法由图 2 所示；

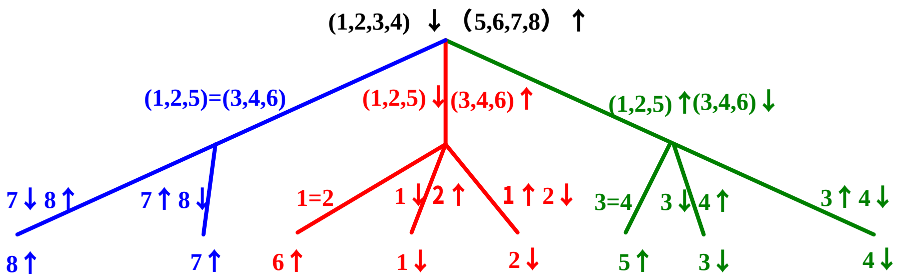


图 2

当天平两边(1,2,3,4) 轻（5,6,7,8）重时，后面的称法由图 3 所示；

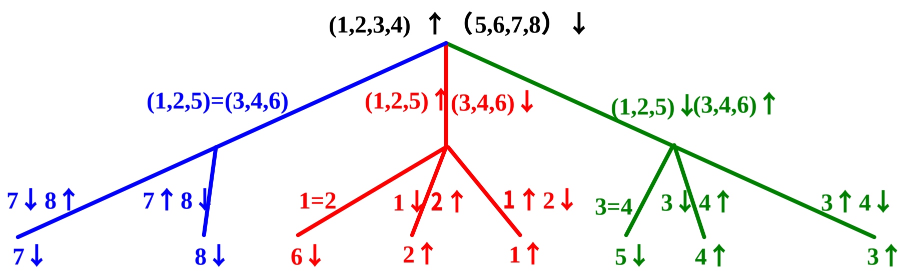


图 3