# 数字信号处理

2017年秋冬学期

第九讲

2017年12月4日

5.3 窗函数法

## 5.3 窗函数法 ——设计思路

**目的：**

理想数字滤波器

$$H_d(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d(n)e^{-jn\omega} \Longrightarrow h_d(n)\ \text{无限长，且非因果}$$

设计的 FIR 数字滤波器

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-jn\omega} \Longrightarrow h(n)\ \text{有限长，且因果（物理可实现）}$$

$$\Rightarrow h_d(n)\xrightarrow[\text{截短}]{\text{窗函数}}h(n)$$

**要求：** 线性相位

尽可能降低逼近误差



## 5.3 窗函数法 ——设计思路

- 设所求 DF 的频率响应是 $H_d(e^{j\omega})$，可能是低通、高通、带通和带阻 FIR DF。
- 不管是何种 FIR DF，具有傅立叶变换关系：

$$H_d(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d(n)e^{-jn\omega}$$

其中

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega$$



## 5.3 窗函数法 ——设计思路

因此，所求的 DF 系统函数为：

$$H_d(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d(n)z^{-n}$$

– 显然，$H_d(z)$ 是非因果的，且 $h_d(n)$ 的持续时间为 $-\infty$ ~ $+\infty$，物理上不可实现。

采用逼近 $H_d(e^{j\omega})$ 的方法

❶ 首先把 $h_d(n)$ 截为长度为 $N$（有限项）的有限长序列：

$$H_d(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h_d(n)z^{-n} \Longrightarrow H_1(z)=\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}h_d(n)z^{-n}$$



## 5.3 窗函数法 ——设计思路

❷ 然后把截短后的 $h_d(n)$ 右移，使之变成因果性的序列。

$$H(z)=z^{-\frac{N-1}{2}}H_1(z)=\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}}h_d(n)z^{-(n+\frac{N-1}{2})}=\sum_{n=0}^{N-1}h_d(n-\tfrac{N-1}{2})z^{-n}$$

❸ 令 $h(n)=h_d(n-\frac{N-1}{2}),\ n=0,1,2,\cdots,N-1$，则

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}$$

$\Downarrow$ 频率响应 $z=e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-jn\omega}$$

✓H($z$) 物理可实现

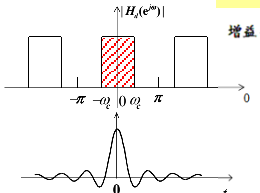
✓其冲激响应 $h(n)$ 的持续时间也是有限的

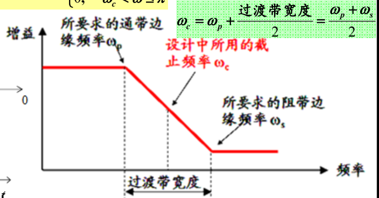
✓选择 $h_d(n)=\pm h_d(N-1-n)$，保证 $H(z)$ 具有线性相位。



## 5.3 窗函数法 ——设计思路

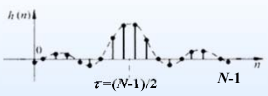
理想低通滤波器频响 $|H_d(e^{j\omega})|=\begin{cases}1, & 0\le|\omega|\le\omega_c\\0, & \omega_c<\omega\le\pi\end{cases}$




$$\omega_c=\omega_p+\frac{\text{过渡带宽度}}{2}=\frac{\omega_p+\omega_s}{2}$$

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}H_d(e^{j\omega})\cdot e^{jn\omega}d\omega=\frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}$$




**拟设计的 FIR 滤波器要求：**

- 冲击响应有限长，且因果
- 通带/阻带边缘频率
- 阻带最小衰减
- 线性相位

## 5.3 窗函数法 ——窗函数法性能分析

■ $h_d(n)$ 截短

$$h(n)=\begin{cases} h_d(n), & |n|\le \frac{N-1}{2} \\ 0, & else \end{cases}$$

相当于将 $h_d(n)$ 与一窗函数 $w_R(n)$ 相乘，即

$$h(n)=h_d(n)w_R(n)$$

其中

$$w_R(n)=\begin{cases} 1, & |n|\le \frac{N-1}{2} \\ 0, & else \end{cases}$$

窗函数决定了我们能够"看到"冲激响应序列的数量——"窗"的含义。



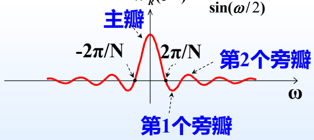
## 5.3 窗函数法 ——窗函数法性能分析

■ 窗函数的频谱

$$W_R(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_R(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{-jn\omega}=\frac{e^{-j(-\frac{N-1}{2})\omega}-e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}e^{-j\omega}}{1-e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{N}{2}\omega}-e^{-j\frac{N}{2}\omega}\right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)}=\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$W_R(e^{j\omega})=\frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}$$




矩形窗谱为一钟形偶函数，在 $\omega=\pm 2\pi/N$ 之间为其主瓣，主瓣宽度 $\Delta\omega=4\pi/N$，在主瓣两侧有幅度逐渐减小的旁瓣，主瓣以 $2\pi$ 为周期。



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法性能分析

■ 窗函数的频谱

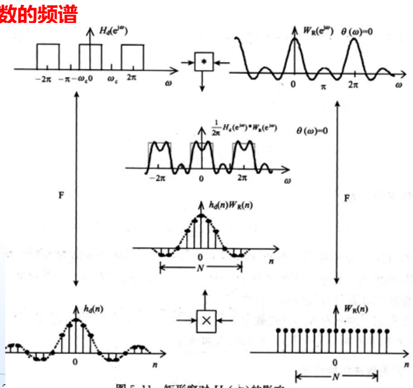



图 5.11 矩形窗对 $H_d(e^{j\omega})$ 的影响



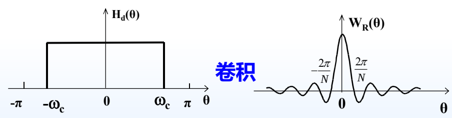
## 5.3 窗函数法 ——窗函数法性能分析

■ 截短，根据时域相乘映射为频域卷积，得：

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\left[H_d(e^{j\omega})*W_R(e^{j\omega})\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\theta})W_R[e^{j(\omega-\theta)}]d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}W_R[e^{j(\omega-\theta)}]d\theta$$

以截止频率为 $\omega_c$ 的理想低通滤波器 $|H_d(e^{j\omega})|$ 的逼近为例分析。





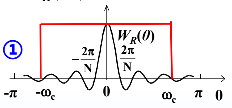

## 5.3 窗函数法 ——窗函数法性能分析

■ 分析几个特殊频率点的滤波器性能

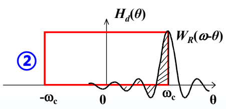
❶ $\omega=0$ $\quad H(e^{j0})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}W_R(\theta)d\theta=H(\omega=0)\approx 1$

一般情况下满足 $\omega_c >> 2\pi/N$，$H(0)$ 的值近似等于窗谱函数 $W_R(e^{j\omega})$ 与 $\theta$ 轴围出的整个面积。

①




②




$\omega=\omega_c$

❷ $\omega=\omega_c$ $\quad H_1(e^{j\omega_c})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}W_R(\omega_c-\theta)d\theta\approx\frac{H_1(e^{j0})}{2}$

窗谱主瓣一半在积分区间内一半在区间外，面积近似为 $\omega=0$ 时所围面积的一半，即 $H(\omega_c)\approx\frac{1}{2}H(0)$。



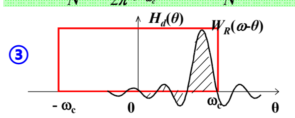
## 5.3 窗函数法 ——窗函数法性能分析

■ 分析几个特殊频率点的滤波器性能

❸ $\omega=\omega_c-2\pi/N$ 时，正肩峰

$$H_1(\omega_c-\frac{2\pi}{N})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}W_R(\omega_c-\frac{2\pi}{N}-\theta)d\theta=1.0895H_1(0)=Max$$

③

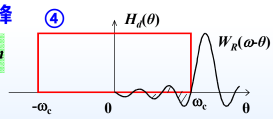



$\omega=\omega_c-\frac{2\pi}{N}$

❹ $\omega=\omega_c+2\pi/N$ 时，负肩峰

$$H(\omega_c+\frac{2\pi}{N})=-0.0895H(0)=Min$$

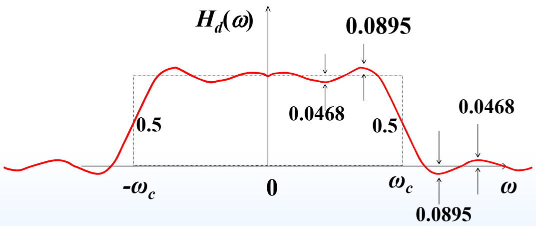
④




$\omega=\omega_c+\frac{2\pi}{N}$

## 5.3 窗函数法 ——窗函数法性能分析

■ 分析几个特殊频率点的滤波器性能






## 5.3 窗函数法 ——窗函数法性能分析

■ 加窗处理对理想矩形频响的影响

❶ 理想滤波器的不连续点演化为过渡带

过渡带：正负肩峰之间的频带，宽度为 $4\pi/N$。

❷ 通带与阻带内出现起伏波动

肩峰及波动：由窗函数的旁瓣引起的。
旁瓣越多，波动越快、越多。主旁瓣相对值越大，肩峰越强。

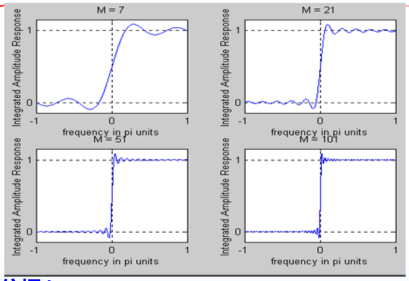
❸ Gibbs 现象

- 窗函数频谱的旁瓣在与 $H_d(e^{j\omega})$ 卷积时产生了通带内与阻带内的波动，称为吉布斯现象。
- $N$ 的变化只能改变 $\omega$ 坐标的比例，但不能改变肩峰和波动的相对大小（不能改变窗函数主瓣和旁瓣的相对比例，波动是由旁瓣引起的），即增加 $N$，只能使通、阻带内振荡加快，过渡带减小，但相对振荡幅度却不减小。



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法性能分析

Gibbs现象




结论（设计依据）：

① 选择窗：滤波器阻带最小衰减（与旁瓣的相对幅度有关）由窗函数决定，与窗函数的长度 $N$ 无关。

② 计算 $N$：过渡带宽度与窗的宽度 $N$ 有关。



## 5.3 窗函数法 ——常用窗函数

窗函数不仅影响过渡带宽度，还影响肩峰和波动的大小（阻带的衰减），因此选择窗函数应使其频谱：

❶主瓣宽度尽量小，以使过渡带尽量陡。

❷旁瓣相对于主瓣越小越好，可使肩峰和波动减小。

两个要求相互矛盾，根据需要进行折衷选择。

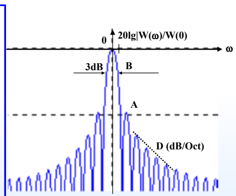
窗函数性能的三个频域指标：

❶3db带宽 B（频率分辨力）

❷最大旁瓣峰值 A(dB)，A 越小，由旁瓣引起的谱失真越小

❸旁瓣谱峰渐进衰减速度 D（dB/oct）

一个好的窗函数，应该有最小的 B、A 及最大的 D。






## 5.3 窗函数法 ——矩形窗

- 以下介绍的窗函数
  - 均为偶对称函数，都具有线性相位特性。
  - 设窗的宽度为$N$，窗函数的对称中心点在$(N-1)/2$处。因此，均为因果函数。
- 矩形窗
  - 最简单的窗函数，从阻带衰减角度看，性能最差。

$$w(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le N-1\\ 0, & else\end{cases}$$

  - 频谱函数：

$$W_R(e^{j\omega})=e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \xrightarrow{\text{幅度函数}} W_R(\omega)=\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

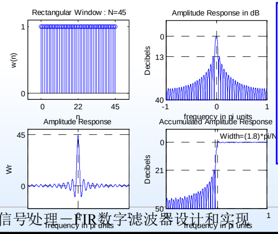


## 5.3 窗函数法 ——矩形窗

¤ 窗振幅响应进行连续积分（或累积振幅响应）

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\omega+\omega_c}W_R(\lambda)d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\omega+\omega_c}\frac{\sin\left(\frac{N\lambda}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)}d\lambda\ ,\quad N>>1$$

¤ 矩形窗函数 w(n) 以及它的幅度响应、累积幅度响应如下图所示。




性能指标

¤3dB 带宽

B=0.89Δω ($\Delta\omega=2\pi/N$)

¤最大旁瓣峰值

A= -13dB

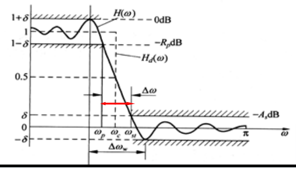
在 Matlab 中，实现矩形窗的函数为 w = boxcar(n)。

## 5.3 窗函数法 ——矩形窗

- 幅度响应
  - 第一个零点：$\Delta\omega = 2\pi/N$
  - 因而主瓣的宽度为 2Δω，过渡带宽近似为 2Δω。
  - ω ≈ 3π/N 处，出现第一个旁瓣（主旁瓣），峰值 A(dB) 为 A= -13db。
- 累积幅度响应
  - 第一旁瓣为 21dB（阻带衰减），与窗长度 $N$ 无关。
  - 根据最小阻带衰减，可以精确地计算出过渡带宽：

$$\omega_s - \omega_p = \frac{1.8\pi}{N}$$

约为近似带宽的一半。






## 5.3 窗函数法 ——三角窗（Bartlett 窗）

由于矩形窗从 0 到 1（或 1 到 0）有一个突变的过渡带，这造成了吉布斯现象。
Bartlett 提出了一种逐渐过渡的三角窗形式，它是两个矩形窗的卷积。

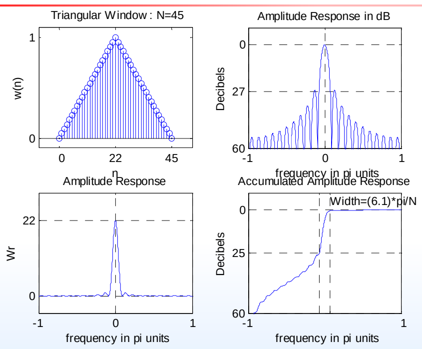
$$w(n)=\begin{cases}\dfrac{2n}{N-1}, & n=0,1,\cdots,\dfrac{N-1}{2}\\ 2-\dfrac{2n}{N-1}, & n=\dfrac{N}{2},\cdots,N-1\end{cases}$$

$$W(e^{j\omega}) \approx \frac{2}{N}e^{-j(\frac{N}{2}-1)\omega}\left(\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2$$

近似过渡带宽 8π/$N$，精确过渡带宽 6.1π/$N$，最小阻带衰减 25dB。
与矩形窗来比较，阻带衰减性能有所改善，但代价是过渡带的加宽。



## 5.3 窗函数法 ——三角窗（Bartlett 窗）




Matlab 函数 bartlett(n) 和 triang(n)



## 5.3 窗函数法 ——升余弦窗

– 汉宁窗、汉明窗、布莱克曼窗都是升余弦窗的特例。它们都是频率为 0、 2π/($N$-1) 和 4π/($N$-1) 的余弦序列的组合。

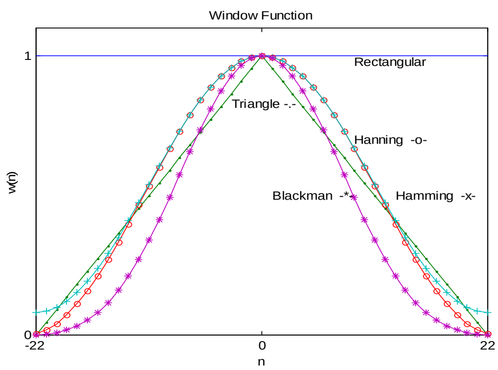
$$w(n) = A - B\cos\left(\tfrac{2\pi}{N-1}n\right) + C\cos\left(\tfrac{4\pi}{N-1}n\right)$$

– 其中 A、B、C 为常数。

❶当 A = 0.5，B=0.5，C=0 ，汉宁 (Hanning)窗。
Matlab 中，w = hanning($n$)
❷当 A = 0.54，B=0.46，C=0 ，为汉明 (Hamming) 窗。
Matlab 中，w = hamming($n$)
❸当 A = 0.42，B=0.5，C=0.08 ，为布莱克曼窗。
Matlab 中，w = blackman($n$)



## 5.3 窗函数法 ——升余弦窗

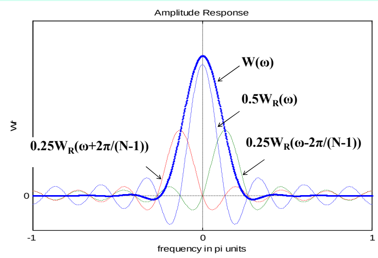





## 5.3 窗函数法 ——升余弦窗（汉宁窗）

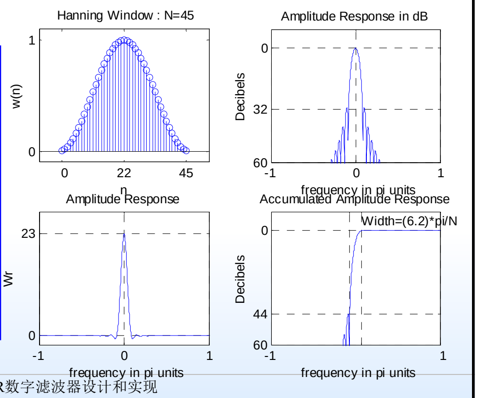
$$w(n)=\sin^2\left(\frac{n\pi}{N-1}\right)=0.5-0.5\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \qquad n=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$W(\omega)\approx 0.5W_R(\omega)+0.25\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]$$



## 5.3 窗函数法 ——升余弦窗（汉宁窗）

近似过渡带宽 $8\pi/N$，精确过渡带宽 $6.2\pi/N$，最小阻带衰减44dB。与矩形窗比，最小阻带衰减性能明显提高，但过渡带也明显增大。



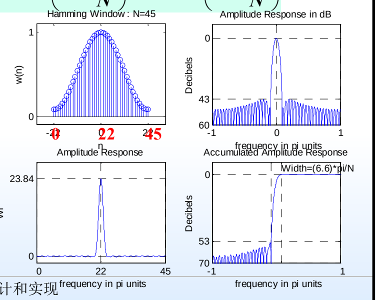

数字信号处理－FIR数字滤波器设计和实现

## 5.3 窗函数法 ——升余弦窗（汉明窗）

$$w(n)=0.54-0.46\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right)\qquad n=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$W(\omega)\approx 0.54W_R(\omega)+0.23W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+0.23W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)$$

近似过渡带宽 $8\pi/N$，精确过渡带宽 $6.6\pi/N$，最小阻带衰减53dB。通过这一系数调整，使能量的 99.963% 都集中在了窗谱的主瓣内。



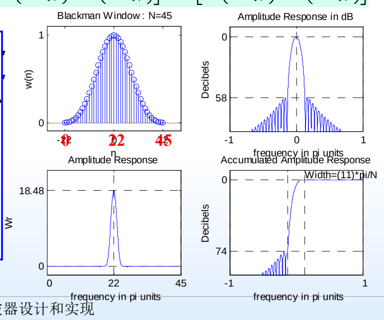

数字信号处理－FIR数字滤波器设计和实现

## 5.3 窗函数法 ——升余弦窗（布莱克曼窗）

$$w(n)=0.42-0.5\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right)+0.08\cos\left(\frac{2\pi}{N-1}2n\right)\qquad n=0,1,2,\ldots,N-1$$

$$W(\omega)\approx 0.42W_R(\omega)+0.25\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]+0.04\left[W_R\left(\omega-\frac{4\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{4\pi}{N}\right)\right]$$

近似过渡带宽 $12\pi/N$，精确过渡带宽 $11\pi/N$，最小阻带衰减74dB。通过增加余弦的二次谐波分量，能够进一步抑制旁瓣，但主瓣宽度比矩形窗谱的主瓣宽度大三倍。




数字信号处理－FIR数字滤波器设计和实现

## 5.3 窗函数法 ——凯塞尔（Kaiser）窗

– 前几种窗函数以牺牲主瓣宽度，换取旁瓣抑制；
– Kaiser 窗可反映主瓣和旁瓣衰减之间的互换关系；
  - 定义一组可调的由零阶Bessel 函数构成的窗函数；
  - 通过调整参数β可以在主瓣宽度和旁瓣衰减之间自由选择它们的比重。实现以同一种窗类型来满足不同窗性能需求的目的。
– Kaiser 窗函数由 J.F. Kaiser 提出，由下式给出：

$$w(n)=\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(1-\frac{2n}{N-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)},\qquad 0\le n\le N-1$$

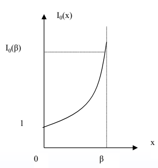
- 其中 $I_0$ 是第一类变形零阶Bessel 函数
- β是用来调整窗形状的参数。

数字信号处理－FIR数字滤波器设计和实现

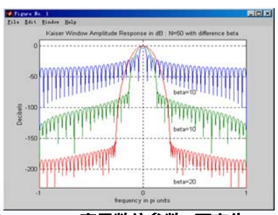
## 5.3 窗函数法 ——凯塞尔（Kaiser）窗

对于相同的 $N$，Kaiser 窗可以提供不同的过渡带宽，这是其他窗函数做不到的。通过调整参数β，就可以方便地完成对过渡带宽度和阻带衰减的调整。

弗里德里希·威廉·贝塞尔（Friedrich Wilhelm Bessel）
1784年—1846年
德国天文学家及数学家




零阶贝塞尔函数



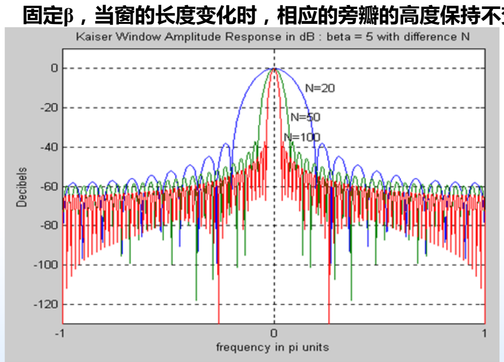
Kaiser 窗函数依参数β而变化

Matlab 中，函数 w = kaiser(n, beta) 实现 Kaiser 窗

数字信号处理－FIR数字滤波器设计和实现

## 5.3 窗函数法 ——凯塞尔（Kaiser）窗

固定β，当窗的长度变化时，相应的旁瓣的高度保持不变。




数字信号处理－FIR数字滤波器设计和实现

## 5.3 窗函数法 ——凯塞尔（Kaiser）窗

**凯瑟尔窗的计算**

- 由于 Bessel 函数的复杂性，很难推导，Kaiser 提出了经验公式。
- 给定 $\omega_p$、$\omega_s$、$R_p$ 和 $A_s$，参数β定义如下：

$$\beta=\begin{cases}0.1102(A_s-8.7), & A_s>50\\ 0.5842(A_s-21)^{0.4}+0.07886(A_s-21), & 21\le A_s\le 50\\ 0, & A_s<21\end{cases}$$

- 对于过渡带宽 $\Delta\omega=\omega_s-\omega_p$ (rad/s)，滤波器阶数为

$$N=\frac{A_s-7.95}{2.285\Delta\omega}+1 \quad \text{或} \quad N=\frac{A_s-7.95}{14.36\Delta f}+1$$



## 5.3 窗函数法

**常用窗函数的性能指标**

| 窗函数 | 旁瓣峰值衰减（dB） | 窗函数主瓣宽度 | 加窗后滤波器过渡带宽（△ω） | 加窗后滤波器阻带最小衰减（dB） |
|---|---|---|---|---|
| 矩形窗 | -13 | $4\pi/N$ | $1.8\pi/N$ | -21 |
| 汉宁窗(升余弦窗) | -31 | $8\pi/N$ | $6.2\pi/N$ | -44 |
| 汉明窗(改进升余弦窗) | -41 | $8\pi/N$ | $6.6\pi/N$ | -53 |
| 布莱克曼窗(二阶升余弦窗) | -57 | $12\pi/N$ | $11\pi/N$ | -74 |
| 凯塞尔窗（β=7.865） | -57 | $10\pi/N$ | $10\pi/N$ | -80 |



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

窗函数法设计 FIR DF关键：

- 窗函数的选择：阻带衰减指标
- 窗函数长度 $N$ 的选择：过渡带宽指标

  因为 FIR DF 的过渡带等于窗函数的主瓣宽度/精确过渡带，通过查表计算 $N$（上取整）：

$$\Delta\omega(N)=\omega_s-\omega_p$$

1）根据所要设计滤波器类型决定$N$取奇数或偶数。

2）一般选择 $N$ 为奇数（Type I）。



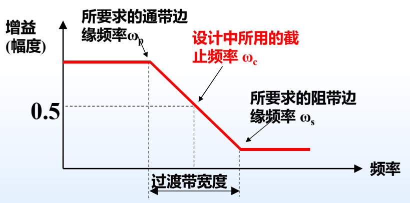
## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

**截止频率 $\omega_c$ 的确定**

✓ 截止频率 $\omega_c$ 对应于0.5 增益点。

✓ 对于非理想滤波器，其截止频率 $\omega_c$ 采用过渡带的中点。因此，窗函数法不能精确确定其通带和阻带的边缘频率：

$$\omega_c=\omega_p+\frac{\text{过渡带宽度}}{2}=\omega_p+\frac{\omega_s-\omega_p}{2}=\frac{\omega_p+\omega_s}{2}$$





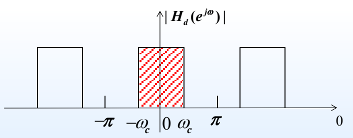

## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ **数字低通滤波器的设计**

例5.1 一个理想低通数字滤波器的频率响应如图所示，为：

$$|H_d(e^{j\omega})|=\begin{cases}1, & 0\le|\omega|\le\omega_c\\ 0, & \omega_c<\omega\le\pi\end{cases}$$

若 $\omega_c$=0.25$\pi$，分别取 $N$=11、21、31的线性相位 FIR，观察加窗后对滤波器幅频特性的影响。






## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ **数字低通滤波器的设计**

根据傅里叶变换，冲击响应为

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}H_d(e^{j\omega})\cdot e^{jn\omega}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}1\cdot e^{jn\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{jn2\pi}\left(e^{jn\omega_c}-e^{-jn\omega_c}\right)=\frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}$$

将 $h_d(n)$ 移位$\tau$，得：

$$h(n)=h_d(n-\tau)=\frac{\sin(n-\tau)\omega_c}{(n-\tau)\pi}$$

## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字低通滤波器的设计

然后乘以窗函数 $w(n)$进行截短，得到 $h(n)$。

对于 $\omega_c = 0.25\pi$：

$$h(n) = h_d(n-\tau) = \frac{\sin[(n-\tau)\times 0.25\pi]}{(n-\tau)\pi} w(n)$$

当 $N$=11 时，$\tau$=5，乘以矩形窗：

$h(0) = h(10) = -0.045$，$h(1) = h(9) = 0$，$h(2) = h(8) = 0.075$，$h(3) = h(7) = 0.1592$，$h(4) = h(6) = 0.2251$，$h(5) = 0.25$。

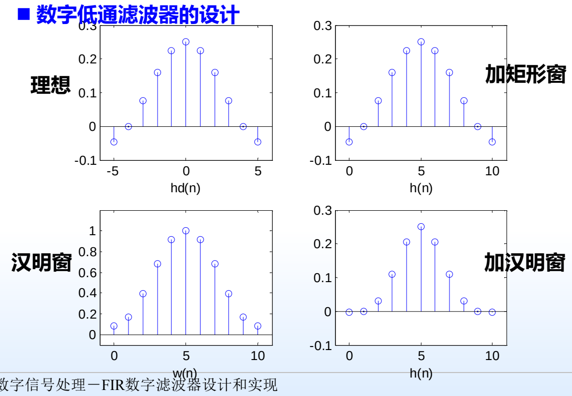
当 $N$=11 时，乘以汉明窗：

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \qquad n = 0,1,2,...,N-1$$



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字低通滤波器的设计






## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字低通滤波器的设计

✓ 当 $N$ 取不同值时，$H(e^{j\omega})$ 都不同程度上近似于 $H_d(e^{j\omega})$。$N$过小时，过渡带较宽，波动较少；当$N$增加时，通带接近于0.25π，过渡带变窄，波纹增加。

✓ 使用汉明窗后，通带内的振荡基本消失，阻带内的纹波也大大减小，但是，这是以过渡带的加宽为代价的。

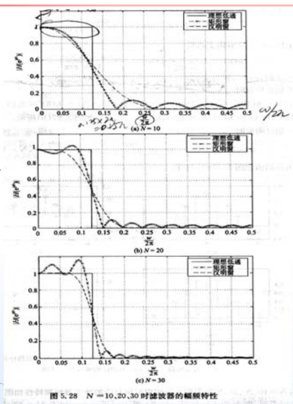


图 5.28 N＝10,20,30 时滤波器的幅频特性



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字低通滤波器的设计

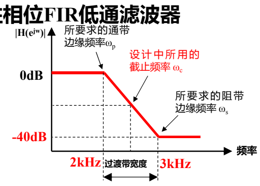
例5.2 根据下列指标设计一个线性相位FIR低通滤波器

通带边缘频率 $f_p$=2 kHz

阻带边缘频率 $f_{stop}$=3 kHz

阻带衰减 40 dB

取样频率 $f_s$=10 kHz




(1) 求对应的数字频率：

过渡带宽 = 3kHz – 2kHz = 1kHz。

转换为数字频率过渡带：$\Delta\omega = 2\pi\frac{\Delta f}{f_s} = \frac{2\pi\times 1}{10} = 0.2\pi$

截止频率：$f_c = \frac{f_p + f_s}{2} = 2.5$ kHz

数字截止频率：$\omega_c = 2\pi\frac{f_c}{f_s} = 0.5\pi$



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字低通滤波器的设计

(2) 设理想线性相位滤波器为：
$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

由此可得脉冲响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\omega\tau}e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin[(n-\tau)\omega_c]}{(n-\tau)\pi} = \frac{\sin(n-\tau)0.5\pi}{(n-\tau)\pi}$$

(3) 由阻带衰减确定窗函数：因为阻带衰减 40 dB，查表选择 Hanning窗

$$w(n) = 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \qquad n = 0,1,2,\cdots,N\text{-}1$$

(4) 由过渡带宽确定窗长：$N = \frac{6.2\pi}{\Delta\omega} = \frac{6.2\pi}{0.2\pi} = 31$　$\tau = (N\text{-}1)/2 = 15$

滤波器的脉冲响应为：

$$h(n) = \frac{\sin[(n-15)\times 0.5\pi]}{(n-15)\pi}\times w(n)$$



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字低通滤波器的设计

$h_d(n)$ =

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| -0.0212 | 0.0000 | 0.0245 | -0.0000 | -0.0289 | 0.0000 |
| 0.0354 | -0.0000 | -0.0455 | 0.0000 | 0.0637 | -0.0000 |
| -0.1061 | 0.0000 | 0.3183 | 0.5 | 0.3183 | 0.0000 |
| -0.1061 | -0.0000 | 0.0637 | 0.0000 | -0.0455 | -0.0000 |
| 0.0354 | 0.0000 | -0.0289 | -0.0000 | 0.0245 | 0.0000 |
| -0.0212 | | | | | |

$w(n)$ =

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0109 | 0.0432 | 0.0955 | 0.1654 | 0.2500 |
| 0.3455 | 0.4477 | 0.5523 | 0.6545 | 0.7500 | 0.8346 |
| 0.9045 | 0.9568 | 0.9891 | 1.0000 | 0.9891 | 0.9568 |
| 0.9045 | 0.8346 | 0.7500 | 0.6545 | 0.5523 | 0.4477 |
| 0.3455 | 0.2500 | 0.1654 | 0.0955 | 0.0432 | 0.0109 |
| 0 | | | | | |

## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ **数字低通滤波器的设计**

$h(n)$ =

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.0000 | 0.0011 | -0.0000 | -0.0048 | 0.0000 |
| 0.0122 | -0.0000 | -0.0251 | 0.0000 | 0.0477 | -0.0000 |
| -0.0960 | 0.0000 | 0.3148 | 0.5000 | 0.3148 | 0.0000 |
| -0.0960 | -0.0000 | 0.0477 | 0.0000 | -0.0251 | -0.0000 |
| 0.0122 | 0.0000 | -0.0048 | -0.0000 | 0.0011 | 0.0000 | 0 |

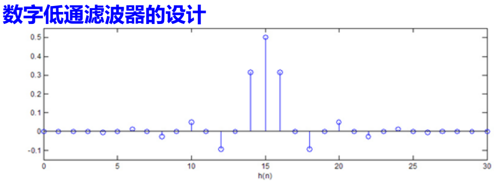
- 由 $h(n)$ 可以得到 $H(z)$、$H(e^{j\omega})$ 和差分方程，其中差分方程为：

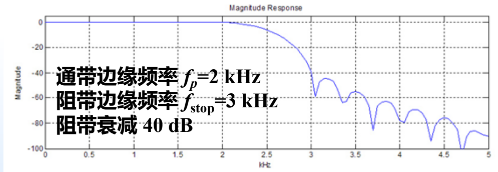
$y(n)$ = 0.0011x(n-2) - 0.0048x(n-4) +0.0122x(n-6)
- 0.0251x(n-8) + 0.0477x(n-10) - 0.0960x(n-12)
+ 0.3148x(n-14) + 0.5x(n-15) + 0.3148x(n-16)
- 0.0960x(n-18) + 0.0477x(n-20) - 0.0251x(n-22)
+ 0.0122x(n-24) - 0.0048x(n-26) + 0.0011x(n-28)



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ **数字低通滤波器的设计**



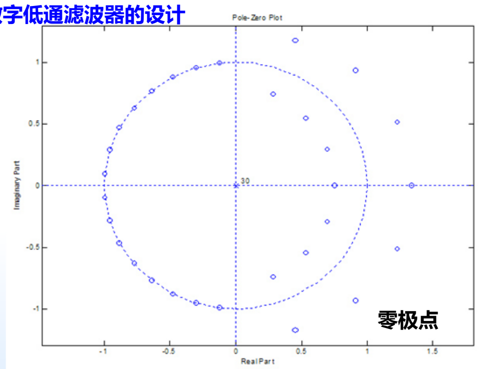




通带边缘频率 $f_p$=2 kHz
阻带边缘频率 $f_{stop}$=3 kHz
阻带衰减 40 dB



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ **数字低通滤波器的设计**



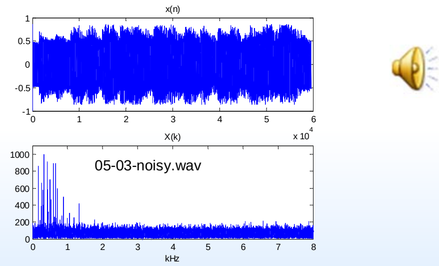

零极点



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ **数字低通滤波器的设计**

例5.3 一段乐曲中夹杂着高频噪声，严重影响收听质量。下图给出了噪声污染后的信号及其频谱。系统的取样频率为 16 kHz。设计一个滤波器来提高声音质量。






## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ **数字低通滤波器的设计**

- 从频谱图可知，噪声从 2kHz 开始占据支配地位，因这个频率很低，消除噪声的同时也会损失一部分音乐信息。
- 没有特殊的阻带衰减要求，选择Hamming窗。
- 对过渡带宽也没有特殊要求。为得到合理的陡峭过渡带，选择 $N = 101$，则过渡带宽为 ：

$$\frac{6.6\pi}{101}\times\frac{16000}{2\pi} = 523\ \mathrm{Hz}$$

**此低通滤波器的参数：**

取样频率： 16 kHz
通带边缘频率：2 kHz
过渡带宽： 523 Hz
截止频率：$f_c = 2000 + 523/2 = 2.262\ \mathrm{kHz}$

数字截止频率：$\omega_c = 2\pi\frac{f_c}{f_s} = 2\pi\frac{2.262}{16} = 0.283\pi$



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

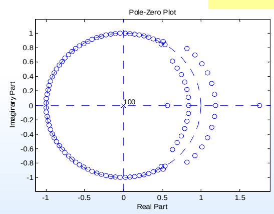
■ **数字低通滤波器的设计**

Hamming 窗

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \qquad n = 0,1,2,3,\cdots,N-1$$

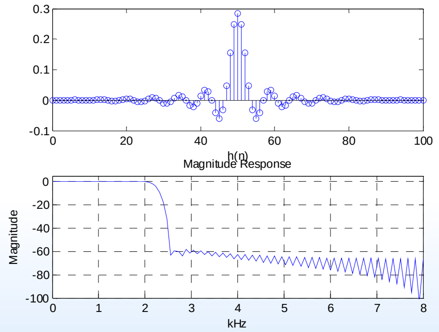
窗长：$N$=101

则滤波器的脉冲响应为：$h(n) = \frac{\sin[(n-50)\times 0.284\pi]}{(n-50)\pi}\times w(n)$



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

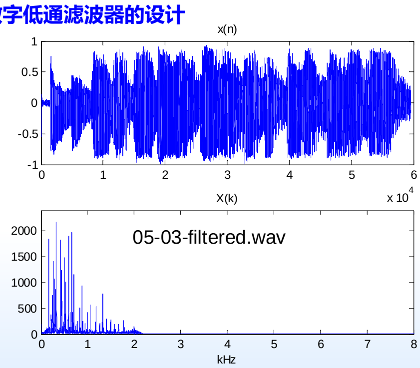
■ 数字低通滤波器的设计






## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字低通滤波器的设计






## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

**例 5.4** 利用凯塞尔窗设计低通滤波器。设计指标要求为：通带边缘频率 $\omega_p = 0.4\pi$，阻带边缘频率 $\omega_s = 0.6\pi$，阻带衰减 $A_s = 60\text{dB}$。

**解** 首先确定基本理想低通滤波器的截止频率

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0.5\pi$$

滤波器过渡带宽为

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.2\pi$$

将以上两个量分别代入式(5.61a)和式(5.61b)，则可求出凯塞尔窗的 $\beta$ 值和 $N$ 值

$$\beta = 0.1102(A_s - 8.7) = 5.653$$

$$N = \frac{A_s - 7.95}{2.286\Delta\omega} + 1 \approx 37$$

计算滤波器的脉冲响应

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\sin\omega_c(n-\alpha)}{\pi(n-\alpha)} \cdot \boxed{\frac{I_0[\beta(1-[(n-\alpha)/\alpha]^2)^{1/2}]}{I_0(\beta)}} & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$\tau$ $\tau$

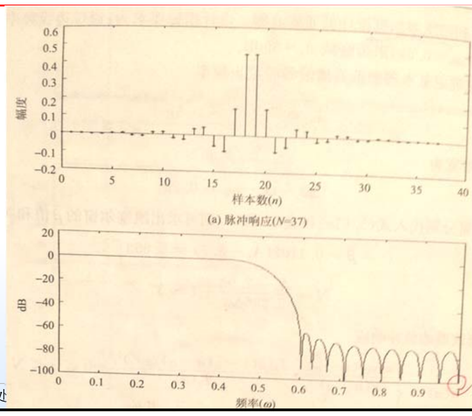
$\tau = \frac{N-1}{2} = 18$

式中，~~$\alpha = N/2 = 37/2 = 18.5$。~~

因为 $N=37$ 为奇数，因此所得线性相位系统为 1 型系统，该滤波器的响应特性示于图 5.33 中。图 5.33(a)为滤波器的脉冲响应，它具有偶对称特性；~~图 5.33(b)为滤波器的幅频响应，图中表明 $H(e^{j\omega})$ 在 $\omega=\pi$ 处为零，或等效的，系统函数 $H(z)$ 在 $z=-1$ 处有一个零点，正如 1 型 FIR 系统所要求的那样。~~ ×

3(b)

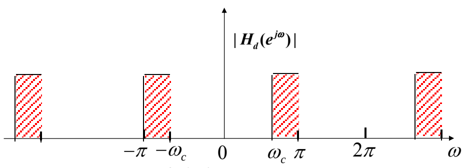
## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现






## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字高通滤波器的设计




数字高通滤波器

时域右移 τ后的幅频特性为：

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & 0 \leq |\omega| < \omega_c \end{cases}$$



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字高通滤波器的设计

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j(n-\tau)\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_c}^{\pi} e^{j(n-\tau)\omega} d\omega$$

$$= \frac{1}{j2(n-\tau)\pi}\left[\left(e^{-j(n-\tau)\omega_c} - e^{-j(n-\tau)\pi}\right) + \left(e^{j(n-\tau)\pi} - e^{j(n-\tau)\omega_c}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{j2(n-\tau)\pi}[\cos(n-\tau)\omega_c - j\sin(n-\tau)\omega_c - \cos(n-\tau)\pi$$
$$+ j\sin(n-\tau)\pi + \cos(n-\tau)\pi + j\sin(n-\tau)\pi - \cos(n-\tau)\omega_c$$
$$- j\sin(n-\tau)\omega_c]$$

得

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n-\tau)\pi] - \sin[(n-\tau)\omega_c]}{(n-\tau)\pi}$$

$$= \frac{\sin[(n-\tau)\pi]}{(n-\tau)\pi} - \frac{\sin[(n-\tau)\omega_c]}{(n-\tau)\pi} = h_{ap}(n) - h_{lp}(n)$$

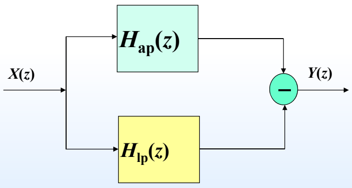
## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字高通滤波器的设计

一个高通滤波器相当于用一个全通滤波器（即$\omega_c=\pi$）减去一个低通滤波器。

传输函数：$H_{hp}(z)=H_{ap}(z)-H_{lp}(z)$

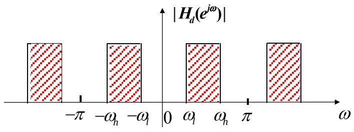
脉冲响应：$h_{hp}(n)=h_{ap}(n)-h_{lp}(n)$






## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字带通滤波器的设计




幅频特性为：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\tau} & \omega_l\le|\omega|\le\omega_h\\ 0 & others\end{cases}$$

则

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_h}^{-\omega_l}e^{j(n-\tau)\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_l}^{\omega_h}e^{j(n-\tau)\omega}d\omega$$



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

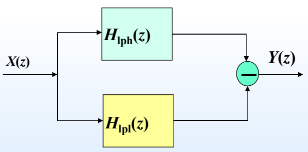
■ 数字带通滤波器的设计

求得 $$h_d(n)=\frac{\sin[(n-\tau)\omega_h]-\sin[(n-\tau)\omega_l]}{(n-\tau)\pi}$$

一个带通滤波器相当于两个低通滤波器相减，其中一个截止频率为 $\omega_h$，另一个为 $\omega_l$。

传输函数：$H_{bp}(z)=H_{lph}(z)-H_{lpl}(z)$

脉冲函数：$h_{bp}(n)=h_{lph}(n)-h_{lpl}(n)$





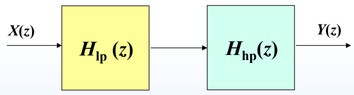

## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字带通滤波器的设计

或者一个带通滤波器相当于一个低通滤波器和一个高通滤波器相乘，即先经过一个 LP DF，再经过一个 HP DF。

传输函数：$H_{bp}(z)=H_{lp}(z)H_{hp}(z)$

脉冲函数：$h_{bp}(n)=h_{lp}(n)*h_{hp}(n)$

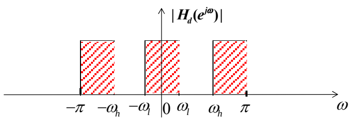



$0\sim\omega_h$ $\qquad$ $\omega_l\sim\pi$



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

■ 数字带阻滤波器的设计




幅频特性：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\tau} & |\omega|\le\omega_l,\quad \omega_h\le|\omega|\le\pi\\ 0 & \text{others}\end{cases}$$

则

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\omega_h}e^{j(n-\tau)\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_l}^{\omega_l}e^{j(n-\tau)\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{\omega_h}^{\pi}e^{j(n-\tau)\omega}d\omega$$



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

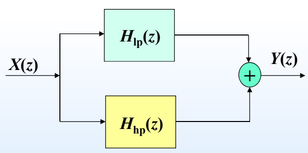
■ 数字带阻滤波器的设计

得 $$h_d(n)=\frac{\sin[(n-\tau)\omega_l]+\sin[(n-\tau)\pi]-\sin[(n-\tau)\omega_h]}{(n-\tau)\pi}$$

一个带阻滤波器相当于一个低通滤波器加上一个高通滤波器，低通滤波器的截止频率为 $\omega_l$，高通在 $\omega_h$。

传输函数：$H_{bp}(z)=H_{lp}(z)+H_{hp}(z)$

脉冲函数：$h_{bp}(n)=h_{lp}(n)+h_{hp}(n)$



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

例 5.5 用凯塞尔窗设计高通滤波器，且满足技术指标：通带截止频率 $\omega_p=0.5\pi$，阻带截止频率 $\omega_s=0.35\pi$，阻带最小衰减 $A_s=33\text{dB}$。

**解** 理想高通滤波器的截止频率为

$$\omega_c=\frac{(0.35\pi+0.5\pi)}{2}=0.425\pi$$

滤波器的过渡带宽为 $\omega_p - \omega_s$

$$\Delta\omega=\omega_p-\omega_s=0.5\pi-0.35\pi=0.15\pi$$

则可求出对应凯塞尔窗的 $\beta$ 值和 $N$ 值

$$\beta=0.5842(A_s-21)^{0.4}+0.07886(A_s-21)=2.6$$ 2.8(5.62)

$$N=\frac{A_s-7.95}{2.286\Delta\omega}+1\approx 24$$ $h(n)=h_d(n)\times W(n)$



## 5.3 窗函数法 ——窗函数法的具体实现

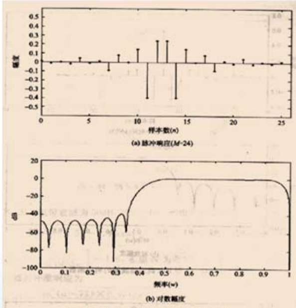


图 5.41 Ⅱ型 FIR 高通滤波器的响应函数

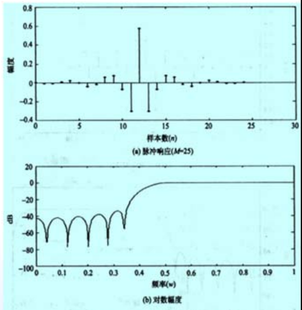


图 5.42 Ⅰ型 FIR 高通滤波器的响应函数



## 习题

**第9次作业请到DSP公邮下载：**
**邮箱：zju_dsp@163.com**

**12月11日交**