《信息论与编码》第五章习题解答

5.1 **一个四元对称信源** $\begin{Bmatrix} X \\ p(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{Bmatrix}$ **，再生字符集为** $\hat{X} = \{0, 1, 2, 3\}$ **，其失真矩阵为，** $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

求 $D_{\min}$ **和** $D_{\max}$ **及信源的** R(D)**。**

[解]

$$
\begin{aligned}
D_{\min} &= \sum_x p(x) \cdot C_x \\
&= \sum_x p(x) \min_{\hat{x} \in \hat{X}} d(x, \hat{x}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{\max} &= \min_{x \in \hat{X}} \sum_x p(x) d(x, \hat{x}) \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

显然失真矩阵和信源分布满足如下置换对称

① $\begin{cases} p(1) = 2, & p(2) = 3, & p(3) = 4, & p(4) = 1 \\ s(1) = 2, & s(2) = 3, & s(3) = 4, & s(4) = 1 \end{cases}$

② $\begin{cases} p(1) = 2, & p(2) = 3, & p(3) = 1, & p(4) = 4 \\ s(1) = 2, & s(2) = 3, & s(3) = 1, & s(4) = 4 \end{cases}$

和 ③ $\begin{cases} p(1) = 4, & p(2) = 3, & p(3) = 2, & p(4) = 1 \\ s(1) = 4, & s(2) = 3, & s(3) = 2, & s(4) = 1 \end{cases}$

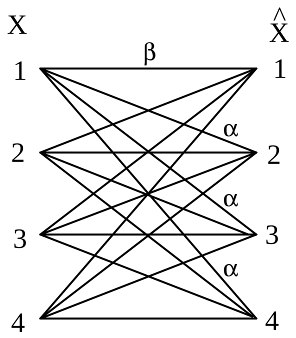
所以由定理 5.3.1，转移概率矩阵具有与失真矩阵相同的对称

$$
P = \begin{pmatrix} b & a & a & a \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ a & a & a & b \end{pmatrix}
$$

其中 $b + 3a = 1$**。设平均失真为** D**，则**

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{x, \hat{x}} p(x) p(\hat{x} \mid x) d(x, \hat{x}) \\
&= 3a
\end{aligned}
$$

因而$a=\frac{1}{3}D, b=1-D$。相应的转移概率图为如下所示



由于 $P(\hat{X}=1)=P(\hat{X}=2)$

$$=P(\hat{X}=3)=P(\hat{X}=4)=\frac{1}{4}$$

所以$H(\hat{X})=2bit$，

$$H(\hat{X}|X)=\sum_{i=1}^{4}P(X=i)H(\hat{X}|X=i)$$

$$=-b\log b-3\cdot a\log a$$

$$=-(1-D)\log(1-D)-D\cdot\log\frac{D}{3}$$

于是 $$R(D)=\begin{cases}2+(1-D)\log(1-D)+D\log\frac{D}{3}, & 0\le D<\frac{3}{4}\\ 0 & D\ge\frac{3}{4}\end{cases}$$

5.2 若某无记忆信源$\begin{Bmatrix}X\\p(x)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{Bmatrix}$，接收符号$\hat{X}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$，其失真矩阵为$D=\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix}$，求信源的最大失真度和最小平均失真度。

[解]
$$D_{\min}=\sum_x p(x)\min_{\hat{x}\in\hat{X}}d(x,\hat{x})$$

$$=1$$

$$D_{\max}=\min_{\hat{x}\in\hat{X}}\sum_x p(x)d(x,\hat{x})$$

$$=\min\left\{\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right\}$$

$$=\frac{4}{3}$$

5.3 **已知信源** X **取值范围为**{0, 1}**，再生字取值范围为**{0, 1, 2}**，设信源输入符号为等概分布，失真函数** $D=\begin{bmatrix}0 & \infty & 1\\ \infty & 0 & 1\end{bmatrix}$**，求信源率失真函数。**

[解] 见书上例题 5.3.3**，其中失真矩阵满足置换对称**

$$\begin{cases}p(1)=2, \quad p(2)=1,\\ r(1)=2, \quad r(2)=1, \quad r(3)=3\end{cases}$$

5.4 **设信源为无记忆，等概分布，取值范围为**{0,1,2,3}**，再生字符表为**{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}**。失真函数为**

$$d(x_i,\hat{x}_j)=\begin{cases}0 & i=j\\ 1 & i=0,1\text{且}j=4\\ 1 & i=2,3\text{且}j=5\\ 3 & j=6,i\text{为任意}\\ \infty & \text{其它}\end{cases}$$

求率失真函数 R(D)**。**

[解]

$$D_{\min}=\sum_x p(x)\min_{\hat{x}\in \hat{X}} d(x,\hat{x})$$

$$D_{\max}=\min_{\hat{x}\in \hat{X}}\sum_x p(x)d(x,\hat{x})$$

$$=\min\{\infty,\infty,\infty,\infty,3\}$$

$$=3$$

失真矩阵满足如下置换对称

$$\begin{cases}p(0)=2,\ p(1)=3,\ p(2)=0,\ p(3)=1\\ r(0)=2,\ \ r(1)=3, r(2)=0,\ \ r(3)=1,\ \ r(4)=5,\ \ \ r(5)=4,\ \ r(6)=6\end{cases}$$

$$\begin{cases}p(0)=1,\ p(1)=0,\ p(2)=3,\ p(3)=2\\ r(0)=1,\ \ r(1)=0,\ \ r(2)=3,\ \ r(3)=2,\ \ r(4)=4,\ \ \ r(5)=5,\ \ r(6)=6\end{cases}$$

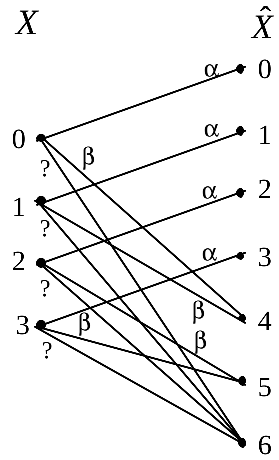
所以转移概率矩阵具有与失真矩阵相同的置换对称。

$$P=\begin{pmatrix}a & a_1 & a_2 & a_3 & b & b_1 & g\\ a_1 & a & a_3 & a_2 & b & b_1 & g\\ a_2 & a_3 & a & a_1 & b_1 & b & g\\ a_3 & a_2 & a_1 & a & b_1 & b & g\end{pmatrix}$$

由于对于使失真 $d(x_i,\hat{x}_j)=\infty$ **的** $(x_i,\hat{x}_i)$**，相应的转移概率必须为零，即** $p(\hat{x}_j\mid x_i)=0$**，所以转移矩阵中** $a_1=a_2=a_3=b_1=0$**，从而转移概率矩阵为**

$$P=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b & 0 & g \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & g \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & g \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & b & g \end{pmatrix}$$

相应的转移概率图为：



其中 $a+b+g=1$，$a,b,g\in[0,1]$

平均失真 $D=\frac{1}{4}[2b+2b+12g]=b+3g$

由于 $H(X)=2$ bit

$$H(X\mid\hat{X}=0)=H(X\mid\hat{X}=1)=H(X\mid\hat{X}=2)=H(X\mid\hat{X}=3)=0$$

$$H(X\mid\hat{X}=4)=H(X\mid\hat{X}=5)=1 \text{ bit}$$

$$H(X\mid\hat{X}=6)=2 \text{ bit}$$

$$P(\hat{X}=0)=P(\hat{X}=1)=P(\hat{X}=2)=P(\hat{X}=3)=\frac{a}{4}$$

$$P(\hat{X}=4)=P(\hat{X}=5)=\frac{b}{2}$$

$$P(\hat{X}=6)=g$$

所以 $H(X\mid\hat{X})=b+2g$

因此 $$R(D)=\min_{\substack{a+b+g=1\\ a+3g=D\\ a,b,g\in[0,1]}}\{H(X)-H(X\mid\hat{X})\}$$

$$=\min_{\substack{a+b+g=1\\ a+2g=D\\ a,b,g\in[0,1]}}\{2-b-2g\}$$

当$0 \le D \le 1$**时**

$$\begin{cases} a+b+g=1 \\ b+3g=D \\ a,b,g\in[0,1] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b=D-3g\ge 0 \\ a=1-b-g=1-D+2g\ge 0 \\ g\ge 0 \end{cases}$$

所以
$$R(D)=\min_{\substack{b=D-3g\ge 0\\ a=1-D+2g\ge 0\\ g\ge 0}}\{2-D+g\}$$
$$=(2-D)\ \text{bit}$$

当$1\le D\le 3$**，**

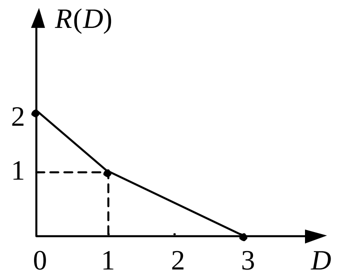
$$\begin{cases} a+b+g=1 \\ b+3g=0 \\ a,b,g\in[0,1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=D-3g\ge 0 \\ a=2g-D+1\ge 0 \\ g\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g\le \dfrac{D}{3} \\ g\ge \dfrac{D-1}{2} \end{cases}$$

所以
$$R(D)=\min_{\substack{b=D-3g\ge 0\\ g\ge \frac{D-1}{2}}}\{2-D+g\}$$
$$=\frac{(3-D)}{2}\ \text{bit}$$

所以

$$R(D)=\begin{cases} (2-D) & 0\le D\le 1 \\ (3-D)/2 & 1\le D\le 3 \\ 0 & D>3 \end{cases}$$

相应的率失真曲线为：



5.6　**设某二元源** $\begin{Bmatrix} U \\ p(u) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 & u_2 \\ 0.5 & 0.5 \end{Bmatrix}$**，失真矩阵为** $D = \begin{Bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix}$**，求** $D_{\min}$**，** $D_{\max}$ **和** $R(D)$**。**

[解]

$$D_{\min} = 0$$

$$D_{\max} = \min_{\hat{x}\in\hat{c}} \sum_x p(x)d(x,\hat{x})$$

$$= \min\{1, 0.5\}$$

$$=0.5$$

下面我们采用参数方程求解率失真函数。

根据定理 5.4.1**，假设** $p^*(\hat{x}) > 0, \ \forall \hat{x} \in \hat{X}$ **则**

$$q^*(\hat{x}\mid x) = l(x)p^*(x)e^{sd(x,\hat{x})}$$

上式二边乘 $p(x)$**，并对** x **求和得到**

$$p^*(\hat{x}) = p^*(x)\sum_{x\in X} l(x)p(x)e^{sd(x,\hat{x})}$$

所以　$$\sum_{x\in X} l(x)p(x)e^{sd(x,\hat{x})} = 1 \quad , \quad \forall \hat{x} \in \hat{X}$$

其中　$$l(x) = \left[\sum_{\hat{x}\in\hat{X}} p^*(\hat{x})e^{sd(x,\hat{x})}\right]^{-1}$$

设 $u(x) = l(x)\cdot p(x)$**，则对本题参数**

$$u(0) + u(1)\cdot e^s = 1$$

$$u(0)\cdot e^{2s} + u(1) = 1$$

解出　$$u(0) = \frac{1-e^{-s}}{1-e^{3s}}$$

$$u(1) = \frac{1-e^{-2s}}{1-e^{3s}}$$

由于　$$\frac{1}{l(x)} = \frac{p(x)}{u(x)}$$

所以　$$p^*(0) + p^*(1)e^{2s} = \frac{1-e^{3s}}{2(1-e^s)}$$

$$p^*(0)e^s + p^*(1) = \frac{1-e^{3s}}{2(1-e^{2s})}$$

解出：

$$p^*(0)=\frac{1-2e^{2s}+e^{3s}}{2(1-e^{2s})(1-e^{s})}$$

$$p^*(1)=\frac{1-2e^{s}+e^{3s}}{2(1-e^{2s})(1-e^{s})}$$

$$l(0)=\frac{2(1-e^{s})}{1-e^{3s}}$$

$$l(1)=\frac{2(1-e^{2s})}{1-e^{3s}}$$

把 $p^*(x), p(x), l(x)$ **代入率失真函数的参数表示式**

$$\begin{aligned}D_s&=\sum_x\sum_{\hat{x}} l(x)\cdot p(x)\cdot p^*(x)\cdot e^{sd(x,\hat{x})}\cdot d(x,\hat{x})\\&=l(0)\cdot p^*(1)\cdot e^{2s}+0.5\cdot l(1)\cdot p^*(0)\cdot e^{s}\end{aligned}$$

$$R_s=s\cdot D_s+0.5\cdot[\log l(0)+\log l(1)]$$

其中参数 $s<0$。

5.7 **设信源** $\begin{Bmatrix} X \\ p(x)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} x_1 & x_2 \\ p & 1-p\end{Bmatrix}$ $(p<\frac{1}{2})$**，其失真度为** Hamming **失真度，试问当允许平均失真度** $D=\frac{1}{2}p$ **时，每个信源符号平均最少需要几个二进制符号表示？**

[解] 由于率失真函数为

$$R(D)=\begin{cases}H(p)-H(D) & 0\le D\le p<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当 $D=\frac{p}{2}$ **时，最低码率不能低于**

$$R(D=\frac{p}{2})=H(p)-H\left(\frac{p}{2}\right)\ \text{bit/符号}$$

5.8　**令**$X \sim \mathrm{N}(0, s^{2})$**，失真度量为平方误差失真函数。请证明最佳** 1 **化特量化的再生点为**$\pm\sqrt{\frac{2}{p}s^{2}}$**；**1 **比特量化的平均失真为**$\frac{p-2}{p}s^{2}$**。与高斯随机变量的失真率函数**$D = s^{2}\cdot 2^{-2R}$**比较，试说明为什么有这样的差异？**

[解] 由对称性，1 **比特最佳量化的再生电平设为**$\pm\hat{x}$**，**$\hat{x} > 0$**，于是量化误差为**

$$E = E[(X-\hat{x})^{2}] = \int_{0}^{\infty}(x-\hat{x})^{2}\frac{1}{\sqrt{2p}\,s}\exp\left\{-\frac{x^{2}}{2s^{2}}\right\}dx$$

由

$$\frac{d}{d\hat{x}}E[(X-\hat{x})^{2}] = -2\int_{0}^{\infty}(x-\hat{x})\frac{1}{\sqrt{2p}\,s}\exp\left\{-\frac{x^{2}}{2s^{2}}\right\}dx = 0$$

解出最佳量化电平为

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{2}{p}}s$$

这时量化误差为

$$E = \int_{0}^{\infty}\left(x-\sqrt{\frac{2}{p}}s\right)^{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2p}\,s}\cdot\exp\left\{-\frac{x^{2}}{2s^{2}}\right\}dx$$

$$=\frac{p-2}{p}s^{2}$$

从失真率函数$D = s^{2}\cdot 2^{-2R}$**可知，当** R=1 **时，最小失真为**

$$E = s^{2}/4 < \frac{p-2}{p}s^{2}$$

这个性能上的差异是由于最佳 1 **比特量化的编码是仅采用了长度为** 1 **的压缩编码，而由率失真函数得出的是在保持码率**$R=1$**比特条件下，码长可以任意长时的最佳量化。**