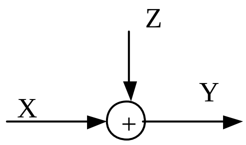
4.11 **信道输入，输出在实数轴上取值，即**$\mathcal{X}=\mathcal{Y}=R$**，**$Y=X+Z$**，**$Z$ **为**$\left[-0.5,0.5\right]$**上均匀分布随机变量，**X **的峰值限制为**$|X|\le b$ **，** b **为正整数，求证信道容量为**

$$C(b)=\log(2b+1)$$

[证明] 信道如图所示，其中 Z **为与** X **相独立的，在**$[-0.5,0.5]$**上均匀分布随机变量。**



$$\begin{aligned}I(X;Y)&=h(Y)-h(Y\mid X)\\&=h(Y)-h(X+Z\mid X)\\&=h(Y)-h(Z)\end{aligned}$$

$$h(Z)=\ln 1=0$$

Y **为峰值受限于**$|Y|<0.5+b$ **的随机变量。当** Y **是**$(-0.5-b,0.5+b)$**上均匀分布时，其微分熵极大，**

$$h(Y)\le\ln(2b+1)\quad\text{nat}$$

所以 $$I(X;Y)\le\ln(2b+1)\quad\text{nat}\qquad(*)$$

式（$*$**）中等号当** Y **为**$\mathcal{Y}=(-0.5-b,0.5+b)$ **上均匀分布时成立。**

由于当 X **为**$\mathcal{X}=\{-b,-b+1,\cdots,0,\cdots,b\}$ **上均匀分布时，即**

$$p\{X=i\}=\frac{1}{2b+1}\text{，}\quad i=0,\pm1,\cdots,\pm b$$

输出$Y=X+Z$ **是**$(-0.5-b,0.5+b)$**上均匀分布随机变量，从而（**$*$**）的等号成立，所以**

$$C=\ln(2b+1)\quad\text{nat/次}$$

4.12 **有一个叠加噪声的信道，输入 X 是离散随机变量，取值{+1，-1}，噪声 N 的概率密度为**

$$P_N(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & |n|\le 2\\ 0 & |n|>2\end{cases}$$

信道输出 $Y=X+N$ 是连续随机变量，求

（1）该半连续信道容量 $C=\max\limits_{\{p(x)\}} I(X;Y)$ **；**

（2）若在信道输出上接一个检测器作为这信道一部分，检测器输出变量为

$$Z=\begin{cases}1 & Y>1\\ 0 & -1\le Y\le 1\\ -1 & Y<-1\end{cases}$$

这样构成离散信道，求它的容量。

[解]**（1）由于信道的对称性，达到信道容量的分布为对称分布，即**

$$p(X=1)=p(X=-1)=0.5$$

因为 $$p(Y=y\mid X=1)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & -1<y\le 3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$p(Y=y\mid X=-1)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & -3<y\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

所以 $$p(y)=p(X=1)p(Y=y\mid X=1)+p(X=-1)p(Y=y\mid X=-1)$$

$$=\begin{cases}1/8 & -3<y\le -1\\ 1/4 & -1<y\le 1\\ 1/8 & 1<y\le 3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

因为 $$C=h(Y)-h(Y\mid X)$$

$$=h(Y)-h(N)$$

其中 $h(N)=\log 4=2\ \text{bit}$

$$h(Y)=\frac{5}{2}\ \text{bit}$$

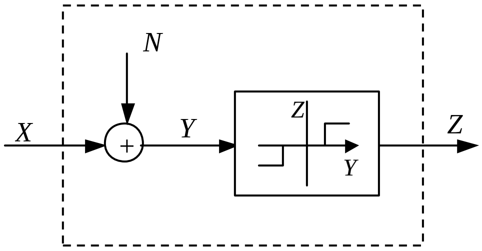
所以 $C=\dfrac{1}{2}$ bit/**次**

（2）这时信道为二元信道，信道转移概率为

$$p(Z=1\mid X=1)=\int_1^{\infty}p(y\mid X=1)dy=\frac{1}{2}$$

$$p(Z=0\mid X=1)=\int_{-1}^{1}p(y\mid X=1)dy=\frac{1}{2}$$

$$p(Z=-1\mid X=1)=0$$



同样 $p(Z=1\,|\,X=-1)=0$

$$p(Z=0\,|\,X-1)=\frac{1}{2}$$

$$p(Z=-1\,|\,X=-1)=\frac{1}{2}$$

经量化后的信道为除删信道。当输入为均匀分布时达到信道容量为

$$C=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \text{ bit}$$