数字信号处理

2017年秋冬学期

第七讲

2017年11月6日

4.2 模拟滤波器设计

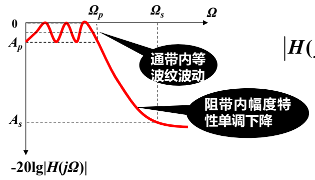
4.4 冲激响应不变法

4.5 双线性变换法

4.6.3 利用模拟频率变换的高通、带通和带阻IIR设计

4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

目的：获取更为快速衰落的幅频特性



幅度平方函数

$$|H(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^{\,2}(\Omega/\Omega_p)}$$

Ω_p: 通带截止频率

ε 表示 $|H(j\Omega)|$ 通带内波动范围

$C_N(\Omega/\Omega_p)$ 是 N 阶切比雪夫函数或多项式

4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

Chebyshev LPF 特点

$$|H(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N^{\,2}(\Omega/\Omega_p)}$$

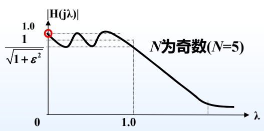
$$C_N(x)=\begin{cases}\cos[N\ \arccos x], & 0\le x\le 1\\ \cosh[N\ \operatorname{arccosh} x], & x>1\end{cases}$$

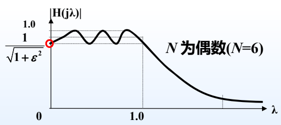
1）无论 N为何值，都经过 $(\Omega_p, \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}})$

2）通带内等波纹；通带外单调下降，下降速度高于同阶的 Butterworth 滤波器

3）N：过中间点的次数 $N=$奇数，$|H(j0)|=1$;

$N+1$：极值点的数量 $N=$偶数，$|H(j0)|=\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$





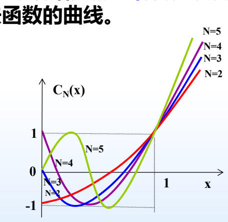
4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

■ Chebyshev 多项式

$$C_N(x)=\begin{cases}\cos[N\ \arccos x], & 0\le x\le 1\\ \cosh[N\ \operatorname{arccosh} x], & x>1\end{cases}$$

当 $x\ge1$ 时，即当 x 从 1 开始无限增长时，$C_N(x)$ 定义为双曲余弦函数 cosh 的表达式，是无穷单调增加的。利用迭代递归关系，可以得到各阶切比雪夫函数的曲线。

- 切比雪夫滤波器的通带位于频率 $0\le x\le1$ 范围内，而阻带位于 $x>1$ 范围内；
- 在通带内是等幅度波动的，N 越大波动的次数越多；
- 在通带外是单调上升函数，N 越大上升越快。



4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

■ Chebyshev 多项式

切比雪夫函数可以写成如下多项式的形式

$$\begin{aligned}C_{N+1}(x)+C_{N-1}(x)&=\cos[(N+1)\arccos x]+\cos[(N-1)\arccos x]\\&=\cos(\arccos x)\cdot\cos(N\ \arccos x)+\sin(\arccos x)\cdot\sin(N\ \arccos x)\\&\quad+\cos(\arccos x)\cdot\cos(N\ \arccos x)-\sin(\arccos x)\cdot\sin(N\ \arccos x)\\&=2\cos(\arccos x)\cdot\cos(N\ \arccos x)\\&=2xC_N(x)\end{aligned}$$

即 $C_{N+1}(x)=2xC_N(x)-C_{N-1}(x)$

其中 $C_0(x)=1,\quad C_1(x)=x$

利用上述递归关系，得到更高阶的切比雪夫多项式：

$C_2(x)=2xC_1(x)-C_0(x)=2x^2-1$ (偶对称)

$C_3(x)=2xC_2(x)-C_1(x)=4x^3-3x$ (奇对称)

$C_4(x)=2xC_3(x)-C_2(x)=8x^4-8x^2+1$ (偶对称)

$C_N(\Omega)$ 是Ω的 N 阶多项式，其首项系数为 2^{N-1}。

4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

设计过程

- 性能指标 → 求波动参数ε
- 性能指标 → 求滤波器阶数 N
- 计算极点/查表 → 归一化系统函数 $H(p)$
- 计算或反归一化 → 系统函数 $H(s)$

LPF 技术要求：
- 通带频率Ω_p
- 通带内最大衰减 A_p
- 阻带下限频率 Ω_s
- 阻带内最小衰减 A_s

1）由给定的通带指标Ω_p 和A_p，求得通带内的参量ε

$$A_p=-10\lg|H(j\Omega)|^2=-10\lg\left[\frac{1}{1+\varepsilon^2C_N^{\,2}(\Omega/\Omega_p)}\right]$$

$$=10\lg(1+\varepsilon^2C_N^{\,2}(\Omega/\Omega_p))\Big|_{\Omega=\Omega_p}=10\lg(1+\varepsilon^2)$$

⇩

$$\varepsilon=\sqrt{10^{0.1A_p}-1}$$

若 $A_p=3\,\text{dB}$，则 $\varepsilon=1$

4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

2）求滤波器的阶数 N

根据给定的滤波器阻带起始频率 Ω_s 和阻带最小衰减 A_s (dB)，得

$$A_s = 10\lg\left(1+\varepsilon^2 C_N{}^2(\Omega/\Omega_p)\right)$$
$$= 10\lg\left(1+\varepsilon^2 C_N{}^2(\Omega_s/\Omega_p)\right)$$
$$= 10\lg\left(1+\varepsilon^2\ \cosh^2[N\ \mathrm{arcosh}(\Omega_s/\Omega_p)]\right)$$

$$\Downarrow$$

$$N \ge \frac{\mathrm{arcosh}\left[\dfrac{\sqrt{10^{0.1A_s}-1}}{\varepsilon}\right]}{\mathrm{arcosh}[\Omega_s/\Omega_p]} = \frac{\mathrm{arcosh}\left[\sqrt{\dfrac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1A_p}-1}}\right]}{\mathrm{arcosh}[\Omega_s/\Omega_p]}$$

上取整

$$\mathrm{arcosh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

3）求滤波器归一化系统函数 $H(p)$

Chebyshev LPF 传输函数平方

$$H(s)H(-s) = \left.\frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N{}^2(\Omega/\Omega_p)}\right|_{\Omega=s/j} = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N{}^2(\dfrac{s}{j\Omega_p})}$$

将 $H(s)$ 表示为归一化形式 $H(p)$ ，令 $p=s/\Omega_p$ ，且令 $H(p)$ 的分母多项式为零

$$1+\varepsilon^2 C_N{}^2\left(\frac{p}{j}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos[N\ \arccos(-jp)] = \pm j\frac{1}{\varepsilon}$$

极点： $p_k = \sinh\phi_2 \sin\left[\left(\dfrac{2k+1}{2N}\right)\pi\right] + j\cosh\phi_2 \cos\left[\left(\dfrac{2k+1}{2N}\right)\pi\right]$

$$\phi_2 = \frac{1}{N}\mathrm{arsinh}\frac{1}{\varepsilon}, \qquad k = 0,1,2,......,(2N-1)$$

$$\mathrm{arsinh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

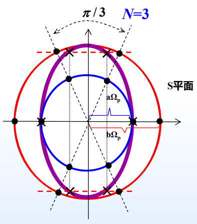
3）求滤波器归一化系统函数 $H(p)$

令 $p_k = \sigma_k + j\lambda_k$，则 $\left(\dfrac{\sigma_k}{\sinh(\phi_2)}\right)^2 + \left(\dfrac{\lambda_k}{\cosh(\phi_2)}\right)^2 = \left(\dfrac{\sigma_k}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{\lambda_k}{b}\right)^2 = 1$

由切比雪夫逼近得到的极点位于 s 平面的一个椭圆上。

$$a = \sinh(\frac{1}{N}\mathrm{arcsinh}\frac{1}{\varepsilon})$$
$$b = \cosh(\frac{1}{N}\mathrm{arcsinh}\frac{1}{\varepsilon})$$

- $2N$ 个极点分布在椭圆上；
- 对称性；
- 选择位于 s 左半平面的极点。



4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

3）求滤波器归一化系统函数 $H(p)$

为使系统稳定，选择位于 S 平面左平面的 p_k 作为 $H(p)$ 的极点，并且考虑到**切比雪夫多项式首项系数**的特点，得

$$H(p) = \frac{1}{\varepsilon 2^{N-1}\prod_{k=0}^{N-1}(p-p_k)}$$

$$p_k = -\sinh\phi_2 \sin\left[\left(\frac{2k+1}{2N}\right)\pi\right] + j\cosh\phi_2 \cos\left[\left(\frac{2k+1}{2N}\right)\pi\right]$$

$$\phi_2 = \frac{1}{N}\mathrm{arsinh}\frac{1}{\varepsilon}, \qquad k = 0,1,2,......,(N-1)$$

4）求滤波器系统函数 $H(s)$

$$H(s) = H(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}} = \frac{\Omega_p^N}{\varepsilon 2^{N-1}\prod_{k=0}^{N-1}(s-p_k\Omega_p)}$$

4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

■ **图表法**

$$\lambda = \frac{\Omega}{\Omega_p}$$

- 归一化 λ_p, λ_s；
- 查曲线（图4.12），确定滤波器的阶数 N;
- 查表（表4.3~4.5 上部），得 ε ；
- 查表 (表4.3~4.5)，得 $H(p)$ 分母多项式的因式形式，求得 $H(p)$；
- 求 $H(s) = H(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}$

注：这里的切比雪夫表格曲线，没有特指 3 dB 频率点，即 ω_p 可以是任意频率点（0.2 dB、1 dB、3 dB）。

4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

例 设计一个满足下列技术指标的低通切比雪夫滤波器，技术要求：通频带最高频率 f_p=3 MHz，通带衰减要小于 0.1 dB，阻带起始频率 f_s=12 MHz，阻带内衰减要大于60 dB。

1）由给定的通带指标 Ω_p 和 A_p，求得通带内的参量 ε

$$\varepsilon^2 = 10^{\frac{A_p}{10}} - 1 = 10^{0.01} - 1 = 0.1526$$

2）求滤波器的阶数 N

$$N = \frac{\mathrm{arcosh}\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\sqrt{10^{0.1A_s-1}}\right]}{\mathrm{arcosh}(\Omega_s/\Omega_p)} = 4.6, \quad 取 \quad N=5$$

4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

3）求滤波器归一化系统函数 $H(p)$

$$H(p)=\frac{1}{\sqrt{0.1526}\cdot 2^{(5-1)}\prod_{k=1}^{5}(p-p_k)}$$

$$p_k=-\sinh\phi_2\sin\left[\left(\frac{2k+1}{2N}\right)\pi\right]+j\cosh\phi_2\cos\left[\left(\frac{2k+1}{2N}\right)\pi\right]$$

$$\phi_2=\frac{1}{N}\operatorname{arsinh}\frac{1}{\varepsilon},\qquad k=0,1,2,\ldots\ldots,(N-1)$$

$$H(p)=\frac{1}{2.441(p+0.5389)(p^2+0.3331p+1.1949)(p^2+0.87198p+0.63592)}$$

4）求滤波器系统函数 $H(s)$

$$H(s)=H(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}=$$

$$\frac{0.974852\times10^{35}}{(s+1.01580\times10^{7})(s^2+6.27899\times10^{6}s+4.2459\times10^{14})(s^2+1.64368\times10^{7}s+2.25946\times10^{14})}$$

4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

例 设计一个模拟 chebyshev 滤波器，技术要求如下：

$$\Omega_p=2\pi(5\text{kHz}),A_p=3\text{dB},\Omega_s=2\pi(10\text{kHz}),A_s=30\text{dB}$$

(1) 归一化 $\lambda_s=2$　　$\lambda=\frac{\Omega}{\Omega_p}$

(2) 根据 A_p=3 dB，查图4.10 中曲线，得 N=4；

(3) 查表 4.5，得 ε=0.99763

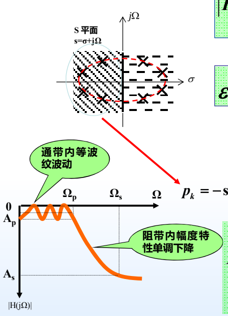
(4) 查表4.5 栏 c，得 H(p) 的分母多项式：

$$H(p)=\frac{1}{\varepsilon 2^{N-1}(0.903087+0.170341p+p^2)(0.195980+0.411239p+p^2)}$$
$$=\frac{0.125297}{(0.903087+0.170341p+p^2)(0.195980+0.411239p+p^2)}$$

(5) 求 $H(s)$　　$H(s)=H(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}$

4.2 模拟滤波器设计——切比雪夫滤波器

Chebyshev 模拟滤波器设计



$$|H(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_N^{\,2}(\Omega/\Omega_p)}$$

$$\varepsilon=\sqrt{10^{0.1A_p}-1}$$

$$N=\frac{\operatorname{arcosh}\left[\frac{\sqrt{10^{0.1A_s}-1}}{\varepsilon}\right]}{\operatorname{arcosh}[\Omega_s/\Omega_p]}$$

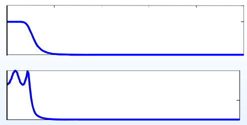
$$p_k=-\sin h\phi_2\sin\left[\left(\frac{2k+1}{2N}\right)\pi\right]+j\cos h\phi_2\cos\left[\left(\frac{2k+1}{2N}\right)\pi\right]_{k=0,1,\ldots,N-1}$$

$$H_a(S)=H(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}=\frac{\Omega_p^{\,N}}{\varepsilon 2^{N-1}\prod_{k=0}^{N-1}(s-p_k\Omega_p)}$$

4.2 模拟滤波器设计

Butterworth和Chebyshev 比较

- 相同阶数下 Butterworth 型实现最简单。
- 通带内等波纹；通带外单调下降，下降速度高于同阶的 Butterworth 滤波器
- 要根据具体要求综合考虑选择设计类型



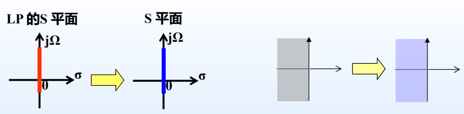
4.2 模拟滤波器设计——模拟滤波器的频率变换

频率变换：把归一化低通滤波器的传输函数变换为一般的低通、高通、带通和带阻滤波器的传输函数。

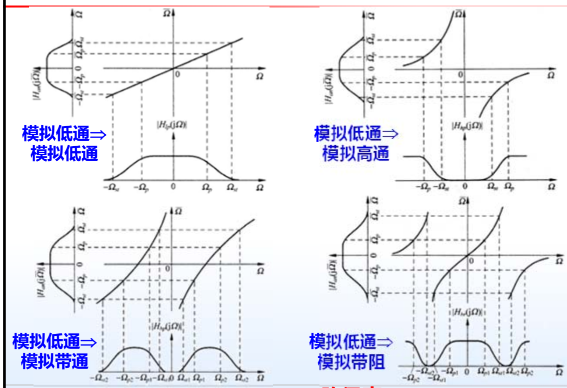
- ✓ 频率变换函数 $p=q(s)$，（$q(s)$ 是 s 的有理函数），把归一化低通滤波器传输函数 $H_{LP}(p)$ 映射为 → 所要求的 $H_d(s)$：

$$H_d(s)=H_{LP}(p)|_{p=q(s)}$$

- ✓ 保持频率响应：$q(s)$ 必须使低通滤波器所在的 s 平面的 $j\Omega$ 轴映射到要求的滤波器所在的 s 平面的 $j\Omega$ 轴。
- ✓ 保持滤波器的稳定性：低通滤波器所在的s 平面的左半平面必须映射到要求的滤波器所在的 s 平面的左半平面。



4.2 模拟滤波器设计——模拟滤波器的频率变换



 陈佩青：p.377，Sec.7.5.7

4.2 模拟滤波器设计——模拟滤波器的频率变换

■ 参数的定义

- ✧Ω_p ：所要求滤波器的通带截止频率
- ✧Ω_{p2} 和 Ω_{p1}：所要求滤波器的通带上下截止频率
- ✧Ω_s ：所要求滤波器的阻带起始频率
- ✧Ω_{s2} 和 Ω_{s1} ：所要求滤波器的阻带上下截止频率
- ✧Ω_0：滤波器的通带中心频率
- ✧B：滤波器的通带带宽 $B=\Omega_{p_2}-\Omega_{p_1}$

$\Omega_0=\sqrt{\Omega_{p_1}\Omega_{p_2}}$

巴特沃思滤波器通带衰减3 dB

滤波器类型	归一化低通滤波器 $H_{LP}(p)$的技术指标要求	要求的滤波器 $H_d(s)$ $H_d(s)=H_{LP}(p)\vert_{p=q(s)}$
低通 $H_{LP}(p)\longleftrightarrow$低通 $H_{LP}(s)$	$\lambda_p=\frac{1}{a}$ $\lambda_s=\frac{1}{a}\frac{\Omega_s}{\Omega_p}$	$p=\frac{1}{a}\frac{s}{\Omega_p}$
低通 $H_{LP}(p)\longleftrightarrow$高通 $H_{HP}(s)$	$\lambda_p=\frac{1}{a}$ $\lambda_s=\frac{1}{a}\frac{\Omega_p}{\Omega_s}$	$p=\frac{1}{a}\frac{\Omega_p}{s}$
低通 $H_{LP}(p)\longleftrightarrow$带通 $H_{BP}(s)$	$\lambda_p=\frac{1}{a}$ $\lambda_s=\frac{1}{a}\frac{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}$	$p=\frac{1}{a}\frac{s^2+\Omega_0^2}{Bs}$
低通 $H_{LP}(p)\longleftrightarrow$带阻 $H_{BS}(s)$	$\lambda_p=\frac{1}{a}$ $\lambda_s=\frac{1}{a}\frac{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}$	$p=\frac{1}{a}\frac{Bs}{s^2+\Omega_0^2}$

巴特沃思/切比雪夫滤波器 *a*=1

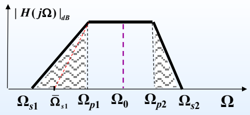
4.2 模拟滤波器设计——模拟滤波器的频率变换

非几何对称型滤波器的频率转换

- 当所求带通或带阻滤波器的两个通带截止频率和两个阻带起始频率都关于中心频率 Ω_0 呈几何对称时，有：

$$\Omega_0=\sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}}=\sqrt{\Omega_{s1}\Omega_{s2}}$$

- 由归一化低通滤波器频率转换得到的带通滤波器和带阻滤波器都是关于 Ω_0 呈几何对称的。
- 当不满足对称特性时，必须在满足设计指标的前提下，调整阻带/通带的起始/截止频率，以调整后的几何对称参数进行设计。

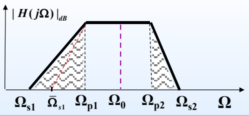


4.2 模拟滤波器设计——模拟滤波器的频率变换

非对称带通滤波器阻带起始频率调整

以通带中心频率 Ω_0 为基准，在满足最小阻带衰减要求的情况下，改变阻带起始频率中的一个，使非对称带通滤波器变成几何对称带通滤波器，步骤如下：

- ➢ 计算 $\Omega_0^2=\Omega_{p1}\Omega_{p2}$
- ➢ 计算 $\bar{\Omega}_{s1}=\frac{\Omega_0^2}{\Omega_{s2}}$，如果 $\bar{\Omega}_{s1}>\Omega_{s1}$，用$\bar{\Omega}_{s1}$代替 Ω_{s1}
- ➢ 如果 $\bar{\Omega}_{s1}\le\Omega_{s1}$，计算 $\bar{\Omega}_{s2}=\frac{\Omega_0^2}{\Omega_{s1}}$，并用 $\bar{\Omega}_{s2}$ 代替 Ω_{s2}
- ➢ 如果 $A_{s1}\ne A_{s2}$，选择 $A_s=\max\{A_{s1},A_{s2}\}$

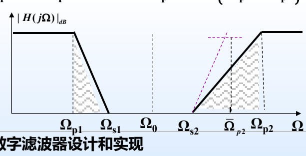


4.2 模拟滤波器设计——模拟滤波器的频率变换

非对称带阻滤波器通带截止频率调整

以阻带中心频率 Ω_0 为基准，在满足通带衰减要求的情况下，改变通带截止频率中的一个，使非对称带阻滤波器变成几何对称带阻滤波器，步骤如下：

- ➢ 计算 $\Omega_0^2=\Omega_{s1}\Omega_{s2}$
- ➢ 计算 $\bar{\Omega}_{p1}=\frac{\Omega_0^2}{\Omega_{p2}}$，如果 $\bar{\Omega}_{p1}>\Omega_{p1}$，用 $\bar{\Omega}_{p1}$代替 Ω_{p1}
- ➢ 如果$\bar{\Omega}_{p1}\le\Omega_{p1}$，计算$\bar{\Omega}_{p2}=\frac{\Omega_0^2}{\Omega_{p1}}$，并用$\bar{\Omega}_{p2}$ 代替Ω_{p2}
- ➢ 如果 $A_{p1}\ne A_{p2}$，选择 $A_p=\min\{A_{p1},A_{p2}\}$



4.2 模拟滤波器设计——模拟滤波器的频率变换

用频率变换法设计模拟滤波器的步骤:

- ➢确定低通、高通、带通、带阻模拟滤波器的技术要求，（若带通、带阻是非几何对称时，要首先作参数调整，使其呈对称）；
- ➢根据参数表确定归一化低通滤波器的技术指标：通带截止频率λ_p，阻带起始频率λ_s，阻带衰减A_p(dB)，阻带衰减A_s(dB)；
- ➢根据上述四个技术指标，用巴特沃思、切比雪夫或椭圆逼近法来设计归一化低通滤波器；
- ➢查变换关系表得到要求的非归一化模拟滤波器。

4.2 模拟滤波器设计——模拟滤波器的频率变换

例 设计一个巴特沃思带阻滤波器，其性能指标要求如下：阻带的起始频率和截止频率分别为 3.8MHz和4.8MHz，阻带最小衰减为 20 dB；通带的起始频率和截止频率分别为 3.1 MHz 和 5.5 MHz，通带内最大衰减为 3 dB。

1）判断所要求的带阻滤波器是否是几何对称

$$\Omega_{p1}\Omega_{p2}=2\pi\times3.1\times2\pi\times5.5\times10^{12}=6.7311\times10^{14}$$

$$\Omega_{s1}\Omega_{s2}=2\pi\times3.8\times2\pi\times4.8\times10^{12}=7.2009\times10^{14}$$

因为 $\Omega_{p1}\Omega_{p2}\ne\Omega_{s1}\Omega_{s2}$，而且设计的是带阻滤波器，所以需要调整这个带阻滤波器的通带起始频率或截止频率。

$$\bar{\Omega}_{p1}=\frac{\Omega_{s_1}\Omega_{s_2}}{\Omega_{p2}}=\frac{2\pi\times3.8\times2\pi\times4.8}{2\pi\times5.5}=2\pi\times3.3\ \text{MHz}\ >\Omega_{p1}$$

4.2 模拟滤波器设计——模拟滤波器的频率变换

用 $\bar{\Omega}_{p1}$ 值代替 Ω_{p1} 值，即令 $\Omega_{p1}=\bar{\Omega}_{p1}=2\pi\times3.3$ MHz

2）根据频率变换关系式，将上述给定的带阻滤波器指标要求转化为相应的归一化低通技术要求，有

$$\lambda_p=1$$

$$\lambda_s=\frac{\Omega_{p2}-\bar{\Omega}_{p1}}{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}=\frac{2\pi\times5.5-2\pi\times3.3}{2\pi\times4.8-2\pi\times3.8}=2.2$$

3）根据技术要求，采用查表法或计算法来设计归一化的巴特沃思低通滤波器，这里采用计算法。

由式子 (4.9) 得滤波器的阶数为：

$$N\ge\frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1A_p}-1}\right)}{2\lg\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_c}\right)}=\frac{\lg(10^{0.1\times20}-1)}{2\lg2.2}=2.91$$

取整后，得 N=3。

4.2 模拟滤波器设计——模拟滤波器的频率变换

$H(p)H(-p)$ 的极点为：

$$p_k=e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi}{2}\frac{(2k+1)}{N}}=e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{(2k+1)\pi}{6}}\qquad k=0,1,2$$

$$p_0=e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=\text{-}0.5000+0.8660\text{j}\qquad p_1=e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{6}\right)}=\text{-}1.0000+0.0000\text{j}$$

$$p_2=e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)}=\text{-}0.5000-0.8660\text{j}$$

$$A_p\ne3\,\mathrm{dB}$$

$$\lambda_c=\frac{\lambda_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1A_p}-1}}$$

$$\lambda_c=\frac{\lambda_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1A_s}-1}}$$

$$p=\frac{p}{\lambda_c}$$

所以，低通滤波器的归一化传输函数 $H_{LP}(p)$ 为：

$$H_{LP}(p)=\frac{1}{(p-p_0)(p-p_1)(p-p_2)}=\frac{1}{(p+1)(p^2+p+1)}=\frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

4.2 模拟滤波器设计——模拟滤波器的频率变换

根据频率变换关系式，把归一化低通滤波器变成所要求的带阻滤波器的传输函数 $\mathrm{H_{BP}(s)}$：

$$H_{Bs}(s)=H_{LP}(p)\Big|_{p=\frac{Bs}{s^2+\Omega_0^2}}$$

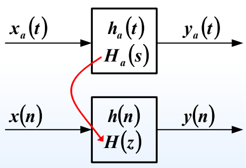
$$=\frac{s^6+2.1603\times10^{15}s^4+1.5556\times10^{30}s^2+3.7339\times10^{44}}{s^6+2.7646\times10^7s^5+2.5424\times10^{15}s^4+4.2456\times10^{22}s^3+1.8308\times10^{30}s^2+1.4335\times10^{37}s+3.7339\times10^{44}}$$

4.4 冲击响应不变法

1 冲激响应不变法的设计方法

2 Z 平面与 S 平面的映射关系

3 冲激响应不变法的特点



4.4 冲击响应不变法

设计步骤

- 对已知的 $H_a(s)$ 进行拉普拉斯反变换，求得 $h_a(t)$；
- 对 $h_a(t)$ 进行取样，得 $h_a(nT)$；
- 根据冲激响应不变，令 $h(n)=T\,h_a(nT)$，以求得 $h(n)$；
- 对 $h(n)$ 进行 z 变换，得 $H(z)$。

$$\hat{X}_a(\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}X_a(\Omega-n\Omega_s)$$

Eq. (2.8)

$$H(Z)=Z\left\{T\left[\underbrace{\left(L^{-1}[H_a(s)]\right)}_{h_a(t)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\right]\right\}$$

$$H_a(s)\xrightarrow{h(n)=Th_a(nT)}H(z)$$

4.4 冲击响应不变法

模拟滤波器的系统函数

$$H_a(s)=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_is^i}{\sum_{i=0}^{N}b_is^i}=A\frac{\prod_{i=1}^{M}(s-s_{qi})}{\prod_{i=1}^{N}(s-s_{pi})}$$

一般 $M<N$，上式可分解为部分分式

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_{pi}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$$

进行拉普拉斯反变换

$$h_a(t)=L^{-1}[H_a(s)]=\sum_{i=1}^{N}A_ie^{s_it}u(t)$$

4.4 冲击响应不变法

对 $h_a(t)$ 以间隔 T 进行取样，有：

$$h_a(nT)=\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i nT}u(nT)$$

由冲激响应不变准则，得

$$h(n)=Th_a(nT)=T\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i nT}u(nT)$$

进行 z 变换，得数字滤波器的系统函数

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}T\sum_{i=1}^{N}A_i e^{s_i nT}u(nT)z^{-n}$$

$$=T\sum_{i=1}^{N}A_i\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{s_i nT}u(nT)z^{-n}=T\sum_{i=1}^{N}A_i\sum_{n=0}^{\infty}(e^{s_i T}z^{-1})^n$$

$$=T\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_i T}z^{-1}}$$

ROC : $|e^{s_i T}z^{-1}|<1$ 即 $|z|>|e^{s_i T}|$

4.4 冲击响应不变法

$H(z)$ 特点

- $H(z)$ 也是部分分式形式
- 系数 A_i 与 $H_a(s)$ 系数相同
- 各极点分别对应于 $H_a(s)$ 的各极点 s_i

可直接得到 数字滤波器的系统函数

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_{pi}}=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$$

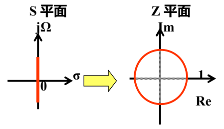
$$\Downarrow$$

$$H(z)=T\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_i T}z^{-1}}$$

4.4 冲击响应不变法

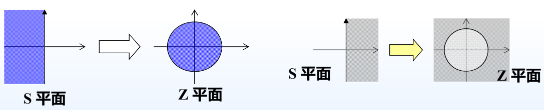
S平面与Z平面之间的映射关系:

$z=re^{j\omega}$, $s=\sigma+j\Omega$ $z=e^{sT}\Rightarrow r=e^{\sigma T},\omega=\Omega T$



当 σ=0 时，r=1

$$-\frac{\pi}{T}\le\Omega\le\frac{\pi}{T}\Rightarrow -\pi\le\omega\le\pi$$

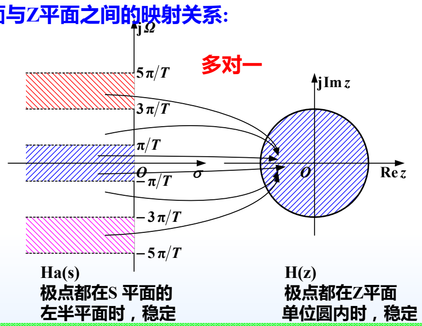


当σ<0 时，r<1

当σ>0 时，r>1

4.4 冲击响应不变法

S平面与Z平面之间的映射关系:



为防止混迭现象，模拟滤波器 的系统函数 $H_a(\Omega)$ 应在 $[-\pi/T, \pi/T]$ 上严格限带。

4.4 冲击响应不变法

给定DF技术指标 ω_p、ω_s、A_p 和 A_s，采用冲激响应不变法设计数字滤波器的过程如下：

- 根据 $\omega=\Omega T$（取样周期）计算AF的频率

  $$\Omega_p=\frac{\omega_p}{T},\qquad \Omega_s=\frac{\omega_s}{T}$$

- 设计ALPF $H_a(s)$ （Butterworth/chebyshevI）
- 把 $H_a(s)$ 展成部分分式形式 $H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i}$
- 极点$\{s_i\}\longrightarrow\{e^{s_iT}\}$，得到数字滤波器的传输函数

  $$H(z)=T\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_i T}z^{-1}}$$

4.4 冲击响应不变法

例4.7 利用冲激响应不变法，把 $H_a(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$ 转换成数字滤波器 $H(z)$，其中 $T=0.1$。

展成部分分式形式

$$H_a(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{2}{s+3}-\frac{1}{s+2}$$

极点为 $s_1=-3$ 和 $s_2=-2$，而且 $T=0.1$，得DF系统函数：

$$H(z)=T\left[\frac{2}{1-e^{-3T}z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-2T}z^{-1}}\right]=\frac{0.1-0.08966z^{-1}}{1-1.5595z^{-1}+0.6065z^{-2}}$$

4.4 冲击响应不变法

例4.8

利用冲激响应不变法设计一个数字巴特沃思低通滤波器，通带截止频率 750 Hz，通带内衰减不大于 3 dB，阻带最低频率为 1600 Hz，阻带内衰减不小于 7 dB，给定 T=1/4000 s。

AF技术要求 $\Omega_p = 2\pi f_p = 1500\pi \qquad A_p = 3\ \mathrm{dB}$

$\Omega_s = 2\pi f_s = 3200\pi \qquad A_s = 7\ \mathrm{dB}$

根据巴特沃思滤波器设计，得

$$N \ge \frac{\lg\left(\dfrac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1A_p}-1}\right)}{2\lg\left(\dfrac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} = \frac{\lg(10^{0.1\times 7}-1)}{2\lg 2.13} = 0.917$$

取整后 N=1

4.4 冲击响应不变法

例4.8

p_k取 左半平面极点（ k=0 ）

$$p_k = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{2}\frac{(2k+1)}{N}} = e^{j(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})} = -1$$

所以归一化的一阶巴特沃思模拟滤波器传输 $H(p) = \dfrac{1}{(p+1)}$

得 1 阶巴特沃思模拟滤波器传输函数为：

$$H(s) = H(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_p}} = \frac{\Omega_p{}^N}{\prod\limits_{k=0}^{N-1}(s-p_k\Omega_p)} = \frac{\Omega_p}{s+\Omega_p} = \frac{1500\pi}{s+1500\pi}$$

根据冲激响应不变法，把 $H(s) \longrightarrow H(z)$：

$$H(z) = T\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}} = \frac{T\Omega_p}{1-e^{-\Omega_p T}z^{-1}} = \frac{1500\pi T}{1-e^{-1500\pi T}z^{-1}}$$

4.4 冲击响应不变法

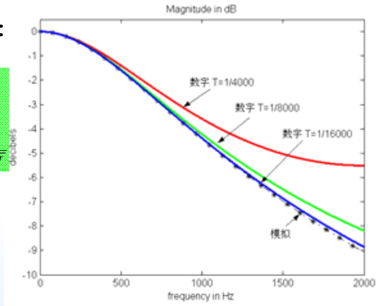
例4.8

AF和DF的幅频响应：

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{\Omega}{1500\pi}\right)^2+1}}$$

$$|H(e^{jw})| = \frac{1500\pi T}{\sqrt{1-2\cos\omega e^{-1500\pi T}+e^{-3000\pi T}}}$$

T增加 $\longrightarrow$ 混叠失真



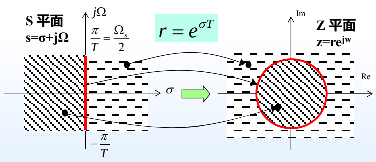
4.4 冲击响应不变法

小结

$$H_a(s) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{M} a_i s^i}{\sum\limits_{i=0}^{N} b_i s^i} = \sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s-s_i} \xRightarrow{h(n)=Th_a(nT)} H(z) = T\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{s_iT}z^{-1}}$$

部分分式展开

$\omega = \Omega T$



4.4 冲击响应不变法

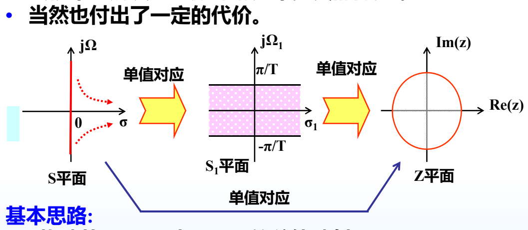
冲激响应不变法的特点

- 根据$h(n)$ =$Th_a(nT)$，从时域完成数字化设计，DF 和 AF 之间具有近似的**时域瞬态特征 (优点)**
- 数字和模拟频率呈线性关系ω=ΩT **(无非线性失真问题)**
- 延拓相加与混叠；S 与Z是多对一的关系**(缺点)**
- **当$H_a(\Omega)$不严格限带，或 $h_a(t)$ 平稳性不高**，而设计性能要求又高时，则不宜采用此法。包括：
  - ✓ **不能直接设计高通、带阻滤波器。**
  - ✓ 只适合频率响应在高频处单调递减的模拟原型滤波器。
  - ✓ **不能设计阻带内存在振荡的滤波器**，如 Chebyshev II。

4.5 双线性变换法

双线性变换主要目的:

- 从根本上解决上述脉冲响应不变法的问题；
- 当然也付出了一定的代价。



基本思路:

1) 构造从 S 平面到 S_1 平面的单值映射

2) 构造从 S_1 平面到 Z 平面的单值映射

简化步骤：直接求 s=$f(z)$ ，然后代入$H_a(s)$，即$H(z) = H_a(s)|_{s=f(z)}$

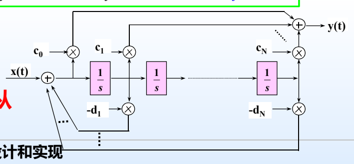
4.5 双线性变换法

映射关系

$$H_a(s)=\frac{\sum_{i=0}^{M}a_is^i}{\sum_{i=0}^{N}b_is^i}\xrightarrow{\text{令M=N}}H_a(s)=\frac{\sum_{i=0}^{N}a_is^{i-N}}{\sum_{i=0}^{N}b_is^{i-N}}$$

令 $j=N\text{-}i$ $\quad H_a(s)=\frac{\sum_{j=N}^{0}a_{N-j}s^{-j}}{\sum_{j=N}^{0}b_{N-j}s^{-j}}=\frac{\sum_{j=0}^{N}c'_js^{-j}}{\sum_{j=0}^{N}d'_js^{-j}}=A\frac{\sum_{j=0}^{N}c_js^{-j}}{1+\sum_{j=1}^{N}d_js^{-j}}$

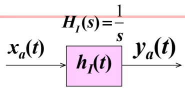
模拟滤波器的基本单元是积分器 s^{-1}



积分器 系统函数从模拟到离散域变换

4.5 双线性变换法

映射关系



✓ AF 积分器的系统函数 $H_I(s)=\frac{1}{s}$

冲激响应 $h_I(t)=L^{-1}[H_I(s)]=\begin{cases}1, & t\geq 0^+\\ 0, & t\leq 0^-\end{cases}$

✓ 设输入信号为 $x_a(t)$，则输出

$$y_a(t)=\int_0^t x_a(\tau)h_I(t-\tau)d\tau$$

✓ 设 $0<t_1<t_2$，则

$$y_a(t_1)=\int_0^{t_1}x_a(\tau)h_I(t_1-\tau)d\tau$$

$$y_a(t_2)=\int_0^{t_2}x_a(\tau)h_I(t_2-\tau)d\tau$$

4.5 双线性变换法

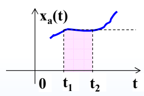
映射关系

$$\because \begin{cases}h_1(t_1-\tau)=1, & t_1-\tau\geq 0\\ h_1(t_2-\tau)=1, & t_2-\tau\geq 0\end{cases}$$

$$\therefore\ y_a(t_2)-y_a(t_1)=\int_0^{t_2}x_a(\tau)d\tau-\int_0^{t_1}x_a(\tau)d\tau=\int_{t_1}^{t_2}x_a(\tau)d\tau$$

当 $t_1\to t_2$ 时

$$y_a(t_2)-y_a(t_1)\approx\frac{[x_a(t_1)+x_a(t_2)]}{2}(t_2-t_1)$$



✓ 数字化, 即令 $y(n)=y_a(nT)$，$x(n)=x_a(nT)$，则得差分方程:

$$y(n)-y(n-1)=\frac{T}{2}[x(n-1)+x(n)]$$

模拟积分器转换成数字网络

4.5 双线性变换法

映射关系

两边进行 Z 变换

$$Y(z)-z^{-1}Y(z)=\frac{T}{2}[z^{-1}X(z)+X(z)]$$

数字积分器的系统函数

$$H_I(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\cdot\frac{T}{2}$$

即 $\quad \frac{1}{s}=\frac{T}{2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\Rightarrow s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$

则 $\quad H(z)=H_a(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$ 双线性变换法的基本转换关系

4.5 双线性变换法

S 平面和 Z 平面之间的映射关系

$$z=\frac{\frac{2}{T}+s}{\frac{2}{T}-s}$$

设 $s=\sigma+j\Omega$， $\quad z=re^{j\omega}$

$$r=\left[\frac{(\frac{2}{T}+\sigma)^2+\Omega^2}{(\frac{2}{T}-\sigma)^2+\Omega^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

S 平面	Z 平面
σ>0，右半平面，不稳定	r>1，单位圆外，不稳定
σ=0，虚轴，临界	r=1，单位圆，临界
σ<0，左半平面，稳定	r<1，单位圆内，稳定

$$\omega=\arctan\frac{\Omega}{\frac{2}{T}+\sigma}+\arctan\frac{\Omega}{\frac{2}{T}-\sigma}$$

数字频率ω和模拟频率Ω是非线性关系

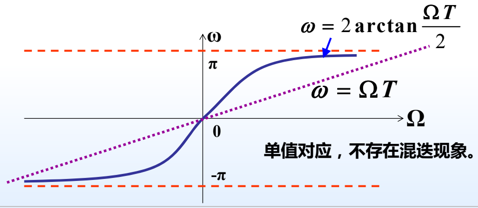
稳定的 AF 得到稳定的 DF， S 平面与 Z 平面的映射单值对应，不存在频域混迭失真，付出的代价—非线性关系。

4.5 双线性变换法

模拟频率和数字频率之间的映射关系

Z 域单位圆上 Z 变换对应于傅里叶变换，即频率响应，而 Z 平面单位圆对应于 S 平面的虚轴 jΩ（σ=0）。

σ=0，得 $\Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$



4.5 双线性变换法

例 利用双线性变换，把 $H_a(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$

转换成数字滤波器 $H(z)$，其中 $T=1$

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{2\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+1}{\left(2\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+5\left(2\dfrac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+6}=\frac{3+2z^{-1}-z^{-2}}{20+4z^{-1}}$$

$$=\frac{0.15+0.1z^{-1}-0.05z^{-2}}{1+0.2z^{-1}}$$

4.5 双线性变换法

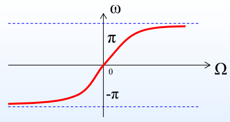
频率预畸变

频率失真分析

- ✓ ω 和 Ω间的非线性关系: $\Omega=\dfrac{2}{T}\tan\dfrac{\omega}{2}$
- ✓ 当ω很小时，Ω=(2/T)tan(ω/2) 的非线性不很突出，可作为线性看待。
- ✓ 当ω较大时，非线性非常突出;非线性将导致频率特性的失真, 可能不满足设计要求。

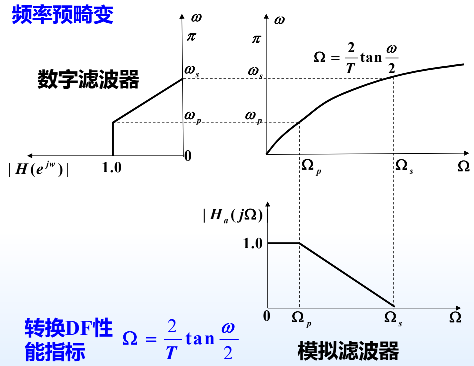
$$\because\ \Omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\omega_p}{\omega_s}\neq\frac{\Omega_p}{\Omega_s}$$



4.5 双线性变换法

频率预畸变



转换DF性能指标 $\Omega=\dfrac{2}{T}\tan\dfrac{\omega}{2}$

4.5 双线性变换法

频率预畸变校正的双线性变换法设计步骤

- ✓ DF 的性能指标：ω_s、ω_p、A_p 和 A_s；
- ✓ 预畸变，根据 Ω= (2/*T*) tan(ω/2) 转换 DF 性能指标，求得相应的 AF 的性能指标 Ω_s、Ω_p；
- ✓ 根据Ω_s、Ω_p、A_p、A_s 设计模拟低通原型滤波器，得到 AF 的系统函数 $H_a(s)$
- ✓ 利用双线性变换得到数字滤波器的传输函数，即：

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

4.5 双线性变换法

例 设计一个数字低通滤波器，要求 3 dB 截止频率为 0.2π，频率在 0.5π到π之间的阻带衰减至少为 15 dB，系统取样频率为 500 Hz，用双线性变换法设计满足指标的最低阶巴特沃思滤波器的传递函数。

数字滤波器频率指标为：$\omega_p=0.2\pi \quad \omega_s=0.5\pi$

经预畸变后，AF 频率指标为：

$$\Omega_p=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2}=325 \quad \text{rad/s}$$

$$\Omega_s=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega_s}{2}=999 \quad \text{rad/s}$$

$$\lambda_p=1,\quad \lambda_s=\frac{\Omega_s}{\Omega_p}=3$$

查表得 Butterworth AF 阶数为 $N=2$。

4.5 双线性变换法

查表得归一化 Butterworth LPF 系统函数为：

$$\mathrm{H}(p)=\frac{1}{1+1.414p+p^2}$$

$$\mathrm{H}(s)=\mathrm{H}(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_p}}=\frac{1}{1+1.414(\frac{s}{\Omega_p})+(\frac{s}{\Omega_p})^2}=\frac{1}{1+4.35\times10^{-3}s+9.47\times10^{-6}s^2}$$

$$H(z)=H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{0.0679+0.1359z^{-1}+0.0679z^{-2}}{1-1.1508z^{-1}+0.4226z^{-2}}$$

4.5 双线性变换法

例 设有一数字系统，它的取样频率f_s=2000 Hz，设计一个一阶巴特沃思低通数字滤波器，使其通带中允许的最大衰减为 A_p = 3 dB，通带的上限频率 f_p=400 Hz。

$$\omega_p = \frac{1}{f_s}\cdot 2\pi f_p = \frac{2\pi}{2000}\cdot 400 = 0.4\pi$$

预畸变处理 $\Omega_p = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2} = 2f_s\tan\frac{\omega_p}{2} = 2908$

一阶巴特沃思低通 AF 的归一化的系统函数 $H(p) = \frac{1}{1+p}$

$$H(s) = H(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_p}} = \frac{1}{1+s/\Omega_p} = \frac{2908}{s+2908}$$

4.5 双线性变换法

通过双线性变换，得到 DF 的系统函数 H(z) 为：

$$H(z) = H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.421(z+1)}{z-0.1583}$$

无预畸变处理 $\Omega_p = \frac{\omega_p}{T} = 0.4\pi\times 2000 = 800\pi$

$$H(s) = H(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_p}} = \frac{1}{1+s/\Omega_p} = \frac{2513}{s+2513}$$

$$\Rightarrow H(z) = H(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.3858(z+1)}{z-0.2283}$$

4.5 双线性变换法

结论

（1）两者结果不一样

（2）预变形矫正：3dB → 400Hz，符合要求

不预变形矫正：

$$\omega_p = 2\arctan\frac{\Omega_p T}{2} = 0.357\pi$$

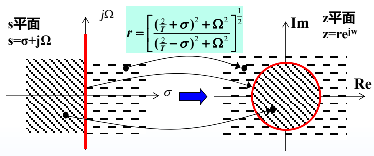
$$f_p = \frac{f_s}{2\pi}\cdot\omega_p = 357\ \text{Hz} \text{ --- } 3\text{dB}$$

无预畸变处理所得的 DF 性能不符合技术要求

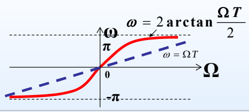
4.5 双线性变换法

小结

$$H(z) = H_a(s)|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$



$$\omega = 2\arctan\frac{\Omega T}{2}$$



4.5 双线性变换法

小结

缺点：非线性的频率变换将导致相频特性的失真。

优点：

- **无混叠**，可设计带通、高通、带阻等滤波器。
- **处理简单**，S 平面与 Z 平面之间积分器函数投影。
- **易于获得DF 幅频特性**。如果已知 AF 的幅频特性 |H(jΩ)|,把 Ω= (2/T) tan(ω/2) 直接代入|H(jΩ)|，即可得到 DF 的幅频特性 |H(e^{jω})|。
- **目前最普遍采用的设计方法。**

4.6.3 利用模拟频率变换的IIR设计

DF $H_d(z)$ 性能要求 —①数字模拟指标转换 $\Omega = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$→ AF $H_d(s)$ 性能要求 —低通模拟指标转换 ②→ AF $H_{LP}(p)$ 性能要求 —模拟滤波器设计 ③→ 模拟低通原型$H_{LP}(p)$

—④ 模拟频率变换→ 所需的(HP、BP、BS) AF的传输函数$H_d(s)$ —⑤ 模拟数字滤波器变换 $s = \frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ 双线性变换→ 所需的DF传输函数$H_d(z)$

滤波器类型	归一化低通滤波器 $H_{LP}(p)$ 的技术指标要求	要求的滤波器 $H_d(s)$ $H_d(s) = H_{LP}(p)\|_{p=q(s)}$
低通←→低通 $H_{LP}(p)$ $H_{LP}(p)$	$\lambda_p = \frac{1}{a}$ $\lambda_s = \frac{1}{a}\frac{\Omega_s}{\Omega_p}$	$p = \frac{1}{a}\frac{s}{\Omega_p}$
低通←→高通 $H_{HP}(s)$ $H_{LP}(p)$	$\lambda_p = \frac{1}{a}$ $\lambda_s = \frac{1}{a}\frac{\Omega_p}{\Omega_s}$	$p = \frac{1}{a}\frac{\Omega_p}{s}$
低通←→带通 $H_{LP}(p)$ $H_{BP}(s)$	$\lambda_p = \frac{1}{a}$ $\lambda_s = \frac{1}{a}\frac{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}$	$p = \frac{1}{a}\frac{s^2+\Omega_0^2}{Bs}$
低通←→带阻 $H_{LP}(p)$ $H_{BS}(s)$	$\lambda_p = \frac{1}{a}$ $\lambda_s = \frac{1}{a}\frac{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}$	$p = \frac{1}{a}\frac{Bs}{s^2+\Omega_0^2}$

4.6.3 利用模拟频率变换的IIR设计

例4.13 用双线性变换法设计一个数字巴特沃思带通滤波器，给定取样频率为f_s=2000 Hz，通带范围300 Hz～400 Hz，通带内衰减不大于3 dB，在200 Hz 以下和500 Hz以上的阻带衰减大于18dB。

转换为数字频率

$$\omega_{p1}=2\pi\times\frac{f_{p1}}{f_S}=2\pi\times\frac{300}{2000}=0.3\pi \qquad \omega_{s1}=2\pi\times\frac{f_{s1}}{f_S}=2\pi\times\frac{200}{2000}=0.2\pi$$

$$\omega_{p2}=2\pi\times\frac{f_{p2}}{f_S}=2\pi\times\frac{400}{2000}=0.4\pi \qquad \omega_{s2}=2\pi\times\frac{f_{s1}}{f_S}=2\pi\times\frac{500}{2000}=0.5\pi$$

预畸变处理

$$\Omega_{p1}=2f_S\tan\frac{\omega_{p1}}{2}=2038.1 \qquad \Omega_{s1}=2f_S\tan\frac{\omega_{s1}}{2}=1299.7$$

$$\Omega_{p2}=2f_S\tan\frac{\omega_{p2}}{2}=2906.2 \qquad \Omega_{s2}=2f_S\tan\frac{\omega_{s2}}{2}=4000.0$$

4.6.3 利用模拟频率变换的IIR设计

$\Omega_{p1}\Omega_{p2}\neq\Omega_{s1}\Omega_{s2}$

带通滤波器不是几何对称，调整其中一个阻带截止频率。

$$\bar{\Omega}_{s1}=\frac{\Omega_{p1}\Omega_{p2}}{\Omega_{s2}}=1480.8>\Omega_{s1}$$ ⟹ 用 $\bar{\Omega}_{s1}$ 值代替 Ω_{s1} 值

指标转化为相应的归一化低通技术指标

$$\lambda_p=1 \qquad \lambda_s=\frac{\Omega_{s2}-\bar{\Omega}_{s1}}{\Omega_{p2}-\Omega_{p1}}=2.9020$$

由已知 A_p=3 dB，A_s=18 dB，所求低通滤波器的阶数 N 为

$$N\geq\frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1A_p}-1}\right)}{2\lg\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_p}\right)}=\frac{\lg\left(\frac{10^{0.1\times18}-1}{10^{0.1\times3}-1}\right)}{2\lg(2.9020)}=1.9376$$

取 N=2

4.6.3 利用模拟频率变换的IIR设计

查表得巴特沃思模拟LPF：

$$H_{LP}(p)=\frac{1}{p^2+1.41421356p+1}$$

模拟频率变换：低通 ⟶ 带通

$$B=\Omega_{p2}-\Omega_{p1}=868.1 \qquad \Omega_0^{\,2}=\Omega_{p1}\Omega_{p2}=5923126.22$$

$$H_{BP}(s)=H(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_0^2}{Bs}}=\frac{7.5360\times10^5s^2}{s^4+1.2277\times10^3s^3+1.2600\times10^7s^2+7.2717\times10^9s+3.5083\times10^{13}}$$

双线性变换：模拟 ⟶ 数字

$$H(z)=H_{BP}(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}=\frac{0.0213-0.0426z^{-2}+0.0213z^{-4}}{1-1.6303z^{-1}+2.2183z^{-2}-1.2919z^{-3}+0.6320z^{-4}}$$

习题

请到DSP公邮下载：
zju_dsp@163.com 密码：dsp_zju

11月27日交