

# 2020-2021学年秋《矩阵论（本）》回忆卷

made by 竝

一、

已知线性方程组

$$\begin{aligned}\alpha x_1 + \alpha x_3 &= 3 - 2\alpha \\ 2x_1 + x_2 + (\alpha + 3)x_3 &= \alpha \\ 3x_1 + \alpha x_2 + (2\alpha + 3)x_3 &= 2\alpha\end{aligned}$$

当  $\alpha$  为何值时，方程组有唯一解、无解、有无穷解？

二、

求矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  的非零奇异值、右奇异向量和非零奇异值对应的左奇异向量。

三、

已知  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  均为方阵，且都存在逆矩阵，求证： $(\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}$

四、

已知  $\alpha_1 = [1, 2, 2, 3]^T$   $\alpha_2 = [1, 1, 2, 3]^T$   $\alpha_3 = [-1, 1, -4, -5]^T$   $\alpha_4 = [1, -3, 6, 7]^T$

- (1) 求  $W = \text{span}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$  的一组基
- (2)  $\mathbf{A} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$  求  $\text{Ker}(\mathbf{A})$  或  $\text{Null}(\mathbf{A})$  的一组基
- (3) 求  $\text{Range}(\mathbf{A})$  (的一组基? 有点忘了)

五、

已知  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- (1) 令  $f(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_F^2$ ，求  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}}$
- (2) 令  $f(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$ ，求证  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{A}} = \det(\mathbf{A})(\mathbf{A}^{-1})^T$

## 六、

已知矩阵  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- (1) 求特征多项式
- (2) 用  $C-H$  定理求  $e^{\mathbf{A}}$

## 七、

已知方程  $\vec{y} = \mathbf{A}\vec{c} + \vec{e}$ ,  $\vec{e}$  为误差向量, 加权误差平方和  $E_w = \vec{e}^H \mathbf{W} \vec{e}$

- (1) 求使  $E_w$  最小的  $\hat{\vec{c}}$
- (2) 若有约束条件  $\vec{c}^H \vec{y} = 1$ , 求最优化滤波器  $\vec{c}$

## 简答题、

- (1) 简述内罚函数与外罚函数的区别。
- (2) 写出普通最小二乘, 数据最小二乘, 总体最小二乘的函数表达式, 并简述如何得到总体最小二乘的最优解。
- (3) 条件数的物理意义以及与奇异值的关系。