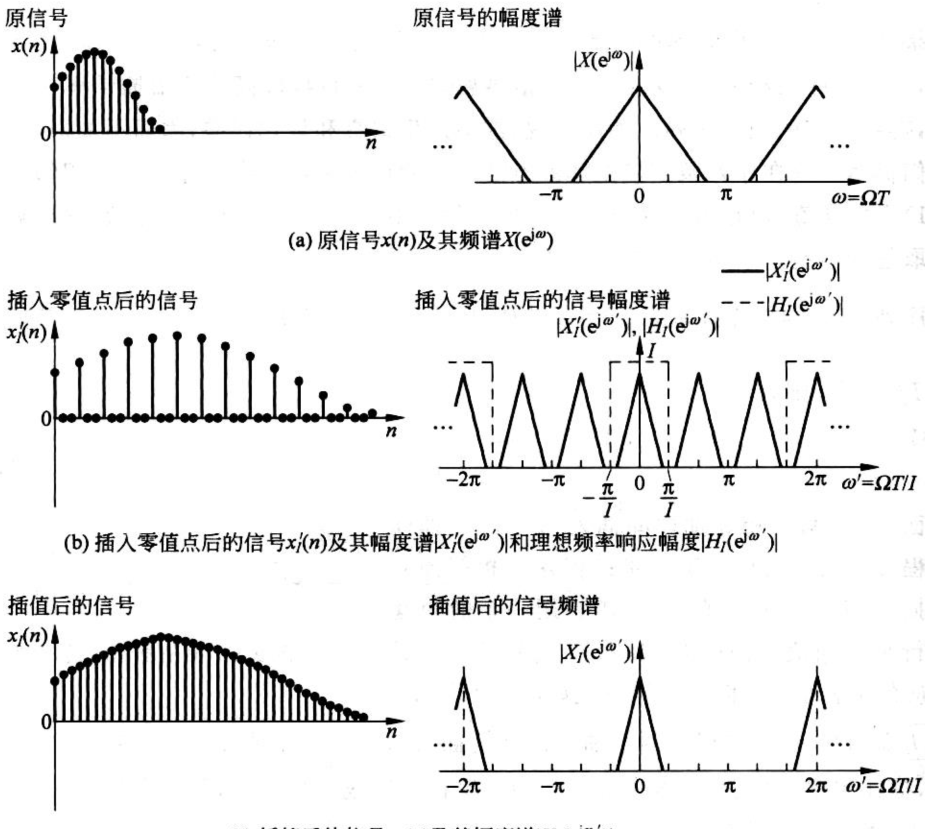
考虑到 n 不为 I 的整数倍时 $x'_I(n)=0$,则 $x'_I(n)$ 的 z 变换为

$$\begin{aligned}
X'_I(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'_I(n)z^{-n} = \sum_{n=I\text{的整数倍}} x'_I(n)z^{-n} \\
&= \sum_{n=I\text{的整数倍}} x(n/I)z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)z^{-mI} \\
&= X(z^I)
\end{aligned} \tag{9.3.3}$$

代入 $z=e^{j\omega'}$,即可得 $x'_I(n)$ 的频谱 $X'_I(e^{j\omega'})$,即

$$X'_I(e^{j\omega'}) = X(e^{j\omega' I}) = X(e^{j\omega}),\quad \omega' = \Omega T' = \Omega T/I = \Omega/(If_s) = \omega/I \tag{9.3.4}$$

图 9.7 画出了插值($I=3$)全过程中的各信号及其频谱。从图 9.7(b)的 $|X'_I(e^{j\omega'})|$ 看出,它**不仅包含基带频谱**,即 $|\omega'|\leqslant\pi/I$ 之内的有用频谱,而且在 $|\omega'|\leqslant\pi$ 的范围内**还有基带信号的镜像**,它们的中心频率在 $\pm 2\pi/I, \pm 4\pi/I\cdots$ 处。在此例中,在 $|\omega'|\leqslant\pi$ 内只有 $\pm\frac{2\pi}{3}$ 有镜像。



(a) 原信号 $x(n)$ 及其频谱 $X(e^{j\omega})$

(b) 插入零值点后的信号 $x'_I(n)$ 及其幅度谱 $|X'_I(e^{j\omega'})|$ 和理想频率响应幅度 $|H_I(e^{j\omega'})|$

(c) 插值后的信号 $x_I(n)$ 及其幅度谱 $|X_I(e^{j\omega'})|$

图 9.7 插值过程($I=3$)

2. 滤除镜像分量的滤波器

即图 9.7(b)中的 $H_I(e^{j\omega})$。为了滤除上述镜像分量,要加一个冲激响应为 $h(n)$ 的数字低通滤波器,以便消除这些不需要的镜像部分;从时域上看,则是平滑作用,对两个连贯的

样值之间的$(I-1)$个零值点进行插值,得到插值后的输出值。图9.7(b)中的虚线所示为$H_I(e^{j\omega'})$,它是实际$h(n)$要逼近的理想低通频率特性,可表示为

$$H_I(e^{j\omega'})=\begin{cases} I, & |\omega'|\leqslant \dfrac{\Omega_s T'}{2}=\dfrac{\pi}{I} \\ 0, & \text{其他 } \omega' \end{cases} \tag{9.3.5}$$

以下来证明,为了得到$x_I(n)$的正确幅值,滤波器增益应为上式中的I。为此,我们先假定它的幅值为R,求$n=0$时刻的输出$x_I(0)$,考虑到$X_I(e^{j\omega'})=X'_I(e^{j\omega'})H_I(e^{j\omega'})$(参见图9.6),有

$$x_I(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_I(e^{j\omega'})e^{j\omega'\cdot 0}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X'_I(e^{j\omega'})H_1(e^{j\omega'})\,d\omega'$$

代入(9.3.4)式,且考虑到已假定$H_I(e^{j\omega'})=R$,当$|\omega'|\leqslant\frac{\pi}{I}$时,则有

$$\begin{aligned} x_I(0)&=\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi/I}^{\pi/I}X(e^{j\omega' I})\,d\omega'=\frac{R}{2\pi I}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega'})\,d\omega' \\ &=\frac{R}{2\pi I}[2\pi x(0)]=\frac{R}{I}x(0) \end{aligned} \tag{9.3.6}$$

如果要求$x_I(0)=x(0)$,则必须有$R=I$,从而证明了(9.3.5)式中I数值的正确性。

实际上,由于滤波器滤除掉镜像分量后,在$0\leqslant\omega'\leqslant\pi$范围内只保留$I$个样本中的一个样本,而将$(I-1)$个镜像分量滤除掉了,使信号平均能量减少成原来的$1/I^2$倍,因而内插滤波器的增益必须是$I$,以补偿这一能量的损失。

3. 插值器系统

整个图9.6的系统称为插值器系统,或称插值器。

如果用来逼近$H_I(e^{j\omega'})$的实际的$h(n)$的频率特性为$H(e^{j\omega'})$,则插值器系统的输出$x_I(n)$可表示为

$$x_I(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(n-i)x'_I(i)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(n-i)x(i/I) \tag{9.3.7}$$

此式中,当i/I不为整数时,$x(i/I)=0$,则可将此式写为

$$x_I(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(n-kI)x(k) \tag{9.3.8}$$

(9.3.8)式还可表示成另一种形式,为此引入变量代换

$$k=\left\lfloor\frac{n}{I}\right\rfloor-m \tag{9.3.9}$$

式中$\left\lfloor\frac{n}{I}\right\rfloor$表示小于或等于$\frac{n}{I}$的整数。此外,考虑到以下的模运算关系式(模运算在3.3.1节中已经讨论过):

$$((n))_I=n-\left\lfloor\frac{n}{I}\right\rfloor I \tag{9.3.10}$$

$((n))_I$表示对I取模运算。将(9.3.9)式代入(9.3.8)式,并考虑到(9.3.10)式,则有

$$\begin{aligned} x_I(n)&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h\left(n-\left\lfloor\frac{n}{I}\right\rfloor I+mI\right)x\left(\left\lfloor\frac{n}{I}\right\rfloor-m\right) \\ &=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(mI+((n))_I)\,x\left(\left\lfloor\frac{n}{I}\right\rfloor-m\right) \end{aligned} \tag{9.3.11}$$