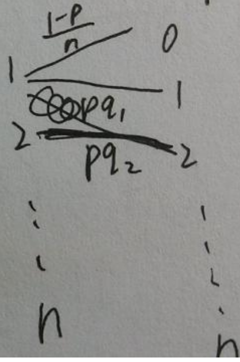
Information Science I

-collected by *wzh* from cc98.org

试题 1： Z 是一个取值空间在{0，1}上的随机变量，且 $p(Z=0)=1-p$，X 是独立于 Z 的随机变量，$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n\end{pmatrix}$，令 $Y=XZ$。

$P(Z=1)=p$ $Y=\begin{pmatrix}0 \\ 1-p\end{pmatrix}$



(1) 用 $H(X)$ 和 $H(Z)$ 来表示 $H(Y)$。

(2) 求使得 $H(Y)$ 最大的 p 和 **q**。

(3) 对于给定的 p，计算 X 与 Y 之间形成的信道的容量 $C(p)$。

(4) 求使得 $C(p)$ 最大的 p。

试题 2： 设有 4 个独立的高斯信道，其噪声电平分别为 1，2，4，10（单位：mW）。

（1）设发送信号可用的总功率为 17mW，则对该信道进行**平行**组合，计算所能达到的总容量以及达到总容量时各信道的最佳功率分配方法；

（2）设发送信号可用的总功率为 17mW，则对该信道进行**级联**组合，计算所能达到的总容量以及达到总容量时各信道的最佳功率分配方法；

（3）设发送信号的可用总功率为 P mW，给出 P 的取值范围，使得对该信道进行平行组合以及最佳功率分配时有且仅有 3 个信道上的发射功率为正。

再赠一份去年余官定老师课堂小测题。。。其中第四题难道较大，不必深究，当时小测完全做对的没几个人，ylqbluesky 除外……

一、令 X 是一个离散随机变量，$H(X)$=4bits。

（1）假设 $Y=f(X)$ 是 X 上的一对一函数，试写出 $H(Y)$，$H(Y|X)$，$H(X|Y)$，$H(X,Y)$，$I(X;Y)$ 的结果。 ~~$H(X,Y)=H(X)+H(X|Y)$~~

（2）假设 $Z=g(X)$，试证明 $H(Z)\le$4bits。

二、令 X 是一个具有如下概率密度函数的连续随机变量

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, x\ge 0 \\ 0, x<0 \end{cases}$$

$H(Z)=H(X)-H(X|Z)$

（1）计算 $h(X)$。

（2）令 $y=ax$（$a\neq 0$），请说明 $h(Y)$ 能否为 0？若能，请给出使 $h(Y)=0$ 的 a。

三、设信源 $U=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0.3 & 0.25 & 0.15 & 0.15 & 0.1 & 0.05 \end{pmatrix}$。

（1）码 $C=\{1,01,110,1001,01101,10111\}$ 是不是上述信源的一个可行的编码？说明理由。

（2）给出上述信源的最佳二元编码，并计算其编码效率。

（3）给出上述信源的最佳三元编码，并计算其编码效率。

（4）给出上述信源的 Shannon 编码，并计算其编码效率。

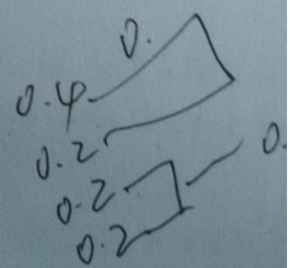
四、设 $X=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{pmatrix}$，满足 $q_1>q_2\ge\cdots\ge q_m$，对该信源进行 Huffman 编码，试证明：

(1) 如果 $q_1>0.4$，则 a_1 的码长必然为 1。

(2) 如果 $q_1<1/3$，则 a_1 的码长至少为 2。

(3) 如果 $q_1=0.4$，构造一个信源，使 a_1 的码长为 2。

(4) 如果 $q_1=1/3$，构造一个信源，使 a_1 的码长为 1。



再送去年张朝阳老师课堂小测题一份，其中第二题仅供娱乐，第三题仅供观看......

- 题一

1) 证明 H(X) >=H(X|Y)，从而说明 I(X;Y) 总不小于 0;

$H(X)=H(X|Y)+I(X;Y)$

2) 举一个 I(x) < I(x|y) 的例子，从而说明 I(x;y) 可以小于 0.

解：（1）答案略

（2）$I(x)=-\log q(x), I(x/y)=-\log q(x/y)$

要满足 $I(x)<I(x/y)$，则要求 $q(x)>q(x/y)$。显然若 x 和 y 为互斥事件，则有 $q(x/y)=0$，即满足条件。

- 题二：设 N 个硬币中有一枚与真币质量不同的假币。

1) 用天平比较随机选择的两枚硬币的质量，其结果对于判断其中是否有假币能提供多少信息量？对于判断其中某一枚是否是假币提供多少信息量？

2) （选做）当 N 足够大时，大约需要尝试多少次才能分辨出假币？

解：

1) 记 $X=0$ 表示无假币，$X=1$ 表示有假币；$Y=0$ 表示天平平衡，$Y=1$ 表示天平不平衡。则有以下结果：

$$p(X=0)=\frac{C_{N-1}^2}{C_N^2}=\frac{N-2}{N}；\quad p(X=1)=\frac{2}{N}$$

$p(X=0/Y=0)=1; p(X=1/Y=1)=1$。则有

$$I(X;Y)=H(X)-H(X/Y)$$

$$=h(\frac{2}{N})-p(Y=0)H(X/Y=0)-p(Y=1)H(X/Y=1)=h(p)$$

记 $Z=0$ 表示该枚硬币为真币；$Z=1$ 表示该枚硬币为假币。则有

$$p(Z=0)=\frac{N-1}{N}, p(Z=1)=\frac{1}{N}$$

$$p(Z=0/Y=0)=1, p(Z=1/Y=0)=0$$

$$p(Z=0/Y=1)=p(Z=1/Y=1)=\frac{1}{2}$$

所以有

$$I(Y;Z)=H(Z)-H(Z/Y)=h(\frac{1}{N})-p(Y=0)H(Z/Y=0)-p(Y=1)H(Z/Y=1)$$

$$=h(\frac{1}{N})-\frac{N-2}{N}h(1)-\frac{2}{N}h(\frac{1}{2})=h(\frac{1}{N})-\frac{2}{N}$$

记 $Z=0$ 表示该枚硬币为真币；$Z=1$ 表示该枚硬币为假币。则有

$$p(Z=0)=\frac{N-1}{N}, p(Z=1)=\frac{1}{N}$$

$$p(Z=0/Y=0)=1, p(Z=1/Y=0)=0$$

$$p(Z=0/Y=1)=p(Z=1/Y=1)=\frac{1}{2}$$

所以有

$$I(Y;Z)=H(Z)-H(Z/Y)=h(\frac{1}{N})-p(Y=0)H(Z/Y=0)-p(Y=1)H(Z/Y=1)$$

$$=h(\frac{1}{N})-\frac{N-2}{N}h(1)-\frac{2}{N}h(\frac{1}{2})=h(\frac{1}{N})-\frac{2}{N}$$