数字信号处理

2017年秋冬学期

第三讲

2017年10月9日

第3章 离散傅里叶变换及其快速计算方法

3.1 问题的提出

3.1 问题的提出

工业革命前后的一些重要发明

年份	发明者	发明
1733年	约翰・凯	飞梭
1764年	詹姆士・哈格里夫斯	珍妮纺纱机
1778年	约瑟夫・勃拉姆	抽水马桶
1781年	詹姆斯・瓦特	蒸汽机
1796年	塞尼菲尔德	平版印刷术
1797年	亨利・莫兹莱	螺丝切削机床
1812年	特列维雪克	科尔尼锅炉
1815年	汉・戴维	矿工灯
1829年	理查德・特里维西克	蒸汽火车头
1844年	成廉・费阿柏恩	兰开夏锅炉

Joseph Fourier

出生	1768年3月21日 法國约讷省欧塞尔
逝世	1830年5月16日 法國巴黎
居住地	法國
国籍	法国
研究領域	數學、物理和歷史
任職於	巴黎高等師範學校 巴黎综合理工学院
母校	巴黎高等師範學校
著名成就	傅立葉變換

崇德・顺治・康熙・雍正・乾隆33年・嘉庆・道光10年・咸丰・同治・光绪・宣统

3.1 问题的提出

四种傅里叶变换形式的归纳总结：

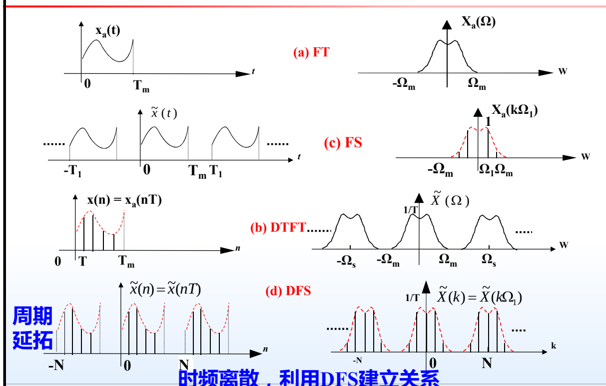
形式	时间函数	频率函数
傅里叶变换 FT	连续 非周期	非周期 连续
傅里叶级数 FS	连续 周期(T_0)	非周期 离散($\Omega_0=2\pi/T_0$)
离散时间傅里叶变换DTFT	离散(T) 非周期	周期($\Omega_s=2\pi/T$) 连续
离散傅里叶级数 DFS	离散(T) 周期(T_0)	周期($\Omega_s=2\pi/T$) 离散($\Omega_0=2\pi/T_0$)

结论：
① 时域中函数取样(离散) →（映射）频域中函数周期重复；
② 频域中函数取样 →（映射）时域中函数周期重复；
③ 取样间隔 →（映射）周期（2π/间隔）

✓ 离散时间函数的取样间隔：T_1，取样频率：$f_s=\frac{\Omega_s}{2\pi}=\frac{1}{T_1}$

✓ 离散频率函数的取样间隔：F_0，时间周期：$T_0=\frac{1}{F_0}=\frac{2\pi}{\Omega_0}$

3.1 问题的提出



3.2 DFS及其性质

$\boxed{\text{周期序列}}$ $\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n-rN)=\boxed{x(n)}*\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta(n-rN)$

主周期

$$\mathrm{DTFT}[\tilde{x}(n)]=X(e^{j\omega})\times\left[\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\right]=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(e^{j\omega})\times\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\right)\times\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$ 离散

令 $\tilde{X}(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$

DTFT逆变换 $\tilde{x}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\tilde{X}(k)\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\right]e^{jn\omega}d\omega$

$$=\frac{1}{N}\int_0^{2\pi}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)\right]e^{jn\omega}d\omega$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{jn\frac{2\pi}{N}k}\int_0^{2\pi}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)d\omega=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{jn\frac{2\pi}{N}k}$$

DFS频域→时域

3.2 DFS及其性质

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\Big(\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}(l)W_N^{-nl}}_{\tilde{x}(n)}\Big)W_N^{nk}=\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}(l)\boxed{\left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-n(l-k)}\right]}$$

$$=\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}(l)\times\boxed{\delta(l-k)}=\tilde{X}(k)$$ **DFS 时域→频域**

集合$\{W_N^{-nk},k=0,1,\cdots,N-1\}$为一完备的离散正交函数系

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-nk_1}\times W_N^{nk_2}=\begin{cases}1 & k_1=k_2\\ 0 & k_1\neq k_2\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-nk_1}\times W_N^{nk_2}=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^{-n(k_1-k_2)}=\frac{1-W_N^{-(k_1-k_2)N}}{1-W_N^{-(k_1-k_2)}}$$

3.2 DFS及其性质

■ **在什么条件下不产生混迭失真？**

$$\tilde{X}(k)=X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$ —频率取样

– 频率取样：若时间信号有限长，当满足下列条件时，$X(e^{j\omega})$ 的样本值 $X(k)$ 能不失真的恢复原信号。

– 为了避免时间上的混迭：

（1）必须是时间限制（有限时宽）

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), 0\le n\le N-1\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$

（2）取样频率间隔小于 $\omega_0\le\frac{2\pi}{N}$ 或 $\Omega_0\le\frac{2\pi}{NT_1}$

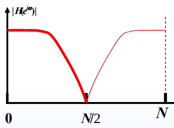
序列一个周期长度

3.2 DFS及其性质

时域 n 及频域 k 都是有物理意义的 $n\to nT_1, k\to k\Omega_0$

傅里叶系数的标号 k 和频率 f 的关系为：

$$\Omega=k\Omega_0=\frac{2\pi}{NT_1}k=\frac{2\pi f_s}{N}k=2\pi f \qquad f=\frac{f_s}{N}k$$

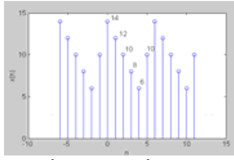


对应关系：

傅里叶系数标号k：$0\sim N$	0	$N/2$	N	k（变换系数标号）
数字频率ω：$0\sim 2\pi$	0	π	2π	ω（弧度，数字频率）
模拟频率f：$0\sim f_s$	0	$f_s/2$	f_s	f（Hz，模拟频率）
	0	$\Omega_s/2$	Ω_s	Ω（弧度/秒，模拟角频率）

3.2 DFS及其性质

例 已知序列 $x(n)$ 是周期为 6 的周期序列，如图所示，试求其DFS 的系数



解：根据定义求解

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{5}\tilde{x}(n)W_6^{nk}$$

$$=14+12e^{-j\frac{2\pi}{6}k}+10e^{-j\frac{2\pi}{6}2k}+8e^{-j\frac{2\pi}{6}3k}+6e^{-j\frac{2\pi}{6}4k}+10e^{-j\frac{2\pi}{6}5k}$$

$\tilde{X}(0)=60$ $\quad\tilde{X}(1)=9-j3\sqrt{3}$ $\quad\tilde{X}(2)=3+j\sqrt{3}$

$\tilde{X}(3)=0$ $\quad\tilde{X}(4)=3-j\sqrt{3}$ $\quad\tilde{X}(5)=9+j3\sqrt{3}$

时域上的周期序列可表示为复指数序列的线性组合

3.2 DFS及其性质

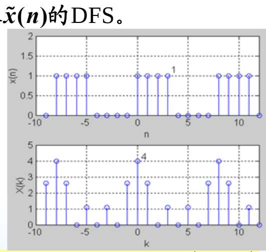
例：已知序列$x(n)=R_4(n)$，将x(n)以$N=8$为周期进行周期延拓成$\tilde{x}(n)$，求$\tilde{x}(n)$的DFS。

解法一

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}(n)W_8^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{3}W_8^{nk}$$

$$=1+e^{-j\frac{2\pi}{8}k}+e^{-j\frac{2\pi}{8}2k}+e^{-j\frac{2\pi}{8}3k}$$



$\tilde{X}(0)=4$ $\quad\tilde{X}(1)=1-j\left(\sqrt{2}+1\right)$ $\quad\tilde{X}(2)=0$ $\quad\tilde{X}(3)=1-j\left(\sqrt{2}-1\right)$

$\tilde{X}(4)=0$ $\quad\tilde{X}(5)=1+j\left(\sqrt{2}-1\right)$ $\quad\tilde{X}(6)=0$ $\quad\tilde{X}(7)=1+j\left(\sqrt{2}+1\right)$

3.2 DFS及其性质

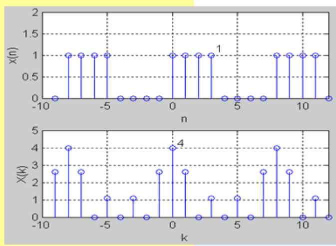
解法二

$$\tilde{X}(k)=DFS\left[\tilde{x}(n)\right]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{7}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{8}kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{3}e^{-j\frac{\pi}{4}kn}=\frac{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k\cdot 4}}{1-e^{-j\frac{\pi}{4}k}}$$

$$=\frac{e^{-j\frac{\pi}{2}k}\left(e^{j\frac{\pi}{2}k}-e^{-j\frac{\pi}{2}k}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{8}k}\left(e^{j\frac{\pi}{8}k}-e^{-j\frac{\pi}{8}k}\right)}$$

$$=e^{-j\frac{3}{8}\pi k}\frac{\sin\frac{\pi}{2}k}{\sin\frac{\pi}{8}k}$$



3.2 DFS及其性质

例 设

$$x(n) = (0.7)^n u(n)$$

当 N=5、10、20、50 时，分别对其 Z 变换在单位圆上取样，研究不同的 N 对时域的影响。

解：可得 $x(n)$ 的 Z 变换为：

$$X(z) = \frac{1}{1-0.7z^{-1}} = \frac{z}{z-0.7}, \quad |z| > 0.7$$

可用 Matlab 来实现取样运算：

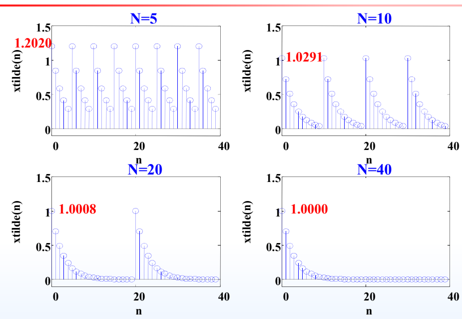
$$X(k) = X(z)|_{z=e^{j\frac{2\pi k}{N}}} = \frac{e^{j2\pi k/N}}{e^{j2\pi k/N} - 0.7}, \quad k = 0, \pm 1, ...$$

用 IDFS 计算，确定相应的时域序列。

3.2 DFS及其性质

```
% Frequency-domain sampling
% x(n)=(0.7)^n * u(n)
% X(z)=z/(z-0.7); |z|>0.7
subplot(1,1,1)
N = 5; (改变参数）
k = 0:1:N-1;
wk = 2*pi*k/N;
zk = exp(j*wk);
Xk = (zk)./(zk-0.7);
xn = real(idfs(Xk,N));%只取实部，去掉产生的虚部误差
xtilde = xn‘* ones(1,8); % 画出8个周期（N=5时）
xtilde = (xtilde(:))';
subplot(2,2,1);stem(0:39,xtilde);
axis([0,40,-0.1,1.5]);xlabel('n');ylabel('xtilde(n)');
title('N=5')
```


3.2 DFS及其性质



时域中出现的混叠，对于大的 N 值，其 x(n) 的尾部足够小，则不会导致明显的混迭。

3.2 DFS及其性质

■ **线性**

若两个周期序列的周期均为 N

且

$$\tilde{X}_1(k) = DFS[\tilde{x}_1(n)]$$

$$\tilde{X}_2(k) = DFS[\tilde{x}_2(n)]$$

则

$$DFS[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$$

——a,b为任意常数

3.2 DFS及其性质

■ **序列的周期移位（时域）**

若$\tilde{x}(n)$是周期序列，其周期为N，移位后仍为周期序列，且：

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk}\tilde{X}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk}\tilde{X}(k)$$

证明：

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n+m)W_N^{nk} \qquad 令 i = n+m$$

$$= \sum_{i=m}^{N-1+m}\tilde{x}(i)W_N^{k(i-m)} = W_N^{-mk}\sum_{i=m}^{N-1+m}\tilde{x}(i)W_N^{ki}$$

$$= W_N^{-mk}\left(\sum_{i=m}^{N-1}\tilde{x}(i)W_N^{ki} + \sum_{i=N}^{N-1+m}\tilde{x}(i)W_N^{ki}\right) = W_N^{-mk}\left(\sum_{i=m}^{N-1}\tilde{x}(i)W_N^{ki} + \sum_{i=0}^{m-1}\tilde{x}(i)W_N^{ki}\right)$$

$$= W_N^{-mk}\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{x}(i)W_N^{ki} = W_N^{-mk}\tilde{X}(k)$$

3.2 DFS及其性质

■ 调制特性（频域周期移位）

$$DFS[W_N^{nl}\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k+l)$$

证明:

$$DFS[W_N^{ln}\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1}W_N^{ln}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{(l+k)n}$$

$$= \tilde{X}(k+l)$$

3.2 DFS及其性质

■ 周期卷积（时域）

若两个周期序列 $\tilde{x}_1(n)$和 $\tilde{x}_2(n)$，周期均为N，则周期卷积

$$\tilde{y}(n)=\tilde{x}_1(n)*\tilde{x}_2(n)$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_2(m)\tilde{x}_1(n-m)$$

若 $DFS[\tilde{x}_1(n)]=\tilde{X}_1(k)$ $\quad DFS[\tilde{x}_2(n)]=\tilde{X}_2(k)$

则

$$\tilde{y}(n)=\tilde{x}_1(n)*\tilde{x}_2(n)\xleftarrow{IDFS}\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)$$

频域相乘 → 时域卷积

周期卷积：两个周期序列在一个周期上的线性卷积，是一种特殊的卷积计算形式。

3.2 DFS及其性质

■ 周期卷积（时域）

证明：$\tilde{y}(n)=IDFS[\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)]$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(k)W_N^{-kn}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)W_N^{mk}\right]\tilde{X}_2(k)W_N^{-kn}$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}_2(k)W_N^{-(n-m)k}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

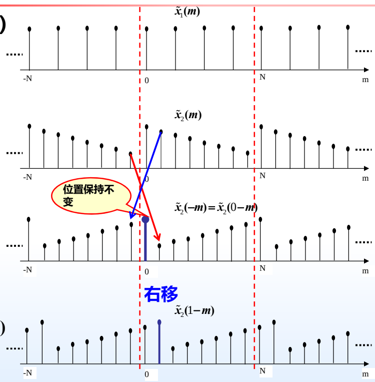
3.2 DFS及其性质

■ 周期卷积（时域）

（1）$x_1(n)$和$x_2(n)$是周期的

（2）求和范围为一个周期

（3）周期序列周期卷积后，序列的长度仍然是周期的



$$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

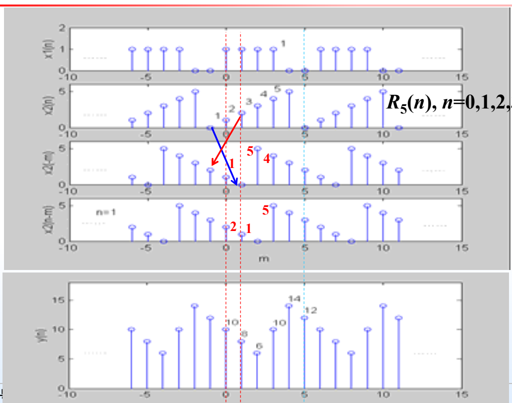
3.2 DFS及其性质

例 已知序列 $x_1(n)=R_4(n)$，$x_2(n)=(n+1)R_5(n)$，分别将序列以周期为$N=6$ 拓展成周期序列，求两个周期序列的周期卷积和。

解：

$$\tilde{y}(n)=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)=\sum_{m=0}^{5}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

3.2 DFS及其性质



3.2 DFS及其性质

■ 频域周期卷积

利用 DFS 的对偶性有：

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}(l)W_N^{ln}$$

若 $\quad\tilde{y}(n)=\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)$

则 $\quad\tilde{Y}(k)=DFS[\tilde{y}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{y}(n)W_N^{nk}$

$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_2(l)\tilde{X}_1(k-l)$$

注意频域卷积的求和号前面有 $1/N$。

时域相乘 → 频域卷积

3.3 DFT及其性质—DFT的定义

■ **时域频域各取主值序列得有限长序列的 DFT 正反变换：**

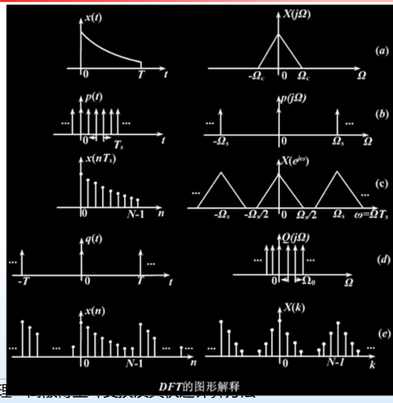
$$\begin{cases} X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)=\left[\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}\right]R_N(k) \\ x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}\right]R_N(n) \end{cases}$$

即 DFT

$$\begin{cases} X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} & 0\le k\le N-1 \\ x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk} & 0\le n\le N-1 \end{cases}$$

从工程角度看，DFS 和 DFT 的表达式没有本质区别。

3.3 DFT及其性质—DFT的定义



3.3 DFT及其性质—DFT的定义

■ **DFT 意义**

$$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk} \qquad 0\le k\le N-1$$

$$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk} \qquad 0\le n\le N-1$$

- $X(k)$ **不仅浓缩了** $\tilde{X}(k)$ **的全部内容，同时也浓缩了** $X(e^{j\omega})$ **的全部内容。**
- $X(k)$ **能够如实、全面地表示** $x(n)$**的频域特征，所以 DFT 具备明确的物理含义。**
- **由上面的讨论可知，在 $0\le n\le N-1$ 上，DFS 和 DFT 相同。**
- **实际中，我们用的更多的是 DFT 的快速算法 FFT。**

3.3 DFT及其性质—DFT的定义

例 $x(n)$ **是一个 4 点序列：**

$$x(n)=\begin{cases}1, & 0\le n\le 3\\ 0, & others\end{cases}$$

1）计算DTFT $X(e^{j\omega})$，并画出它的幅度和相位。
2）计算 $x(n)$ 的 4 点 DFT。

3.3 DFT及其性质—DFT的定义

解：1）离散时间傅氏变换为：

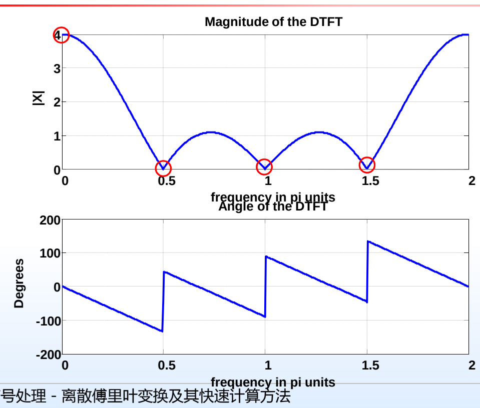
$$X(e^{j\omega})=\sum_{0}^{3}x(n)e^{-j\omega n}=1+e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}+e^{-j3\omega}$$

$$=\frac{1-e^{-j4\omega}}{1-e^{-j\omega}}=e^{-j\frac{3}{2}\omega}\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega/2}$$

因而 $$\left|X(e^{j\omega})\right|=\left|\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega/2}\right|$$

$$\angle X(e^{j\omega})=\begin{cases}-\frac{3\omega}{2}, & \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}>0\\ -\frac{3\omega}{2}\pm\pi, & \frac{\sin(2\omega)}{\sin(\omega/2)}<0\end{cases}$$

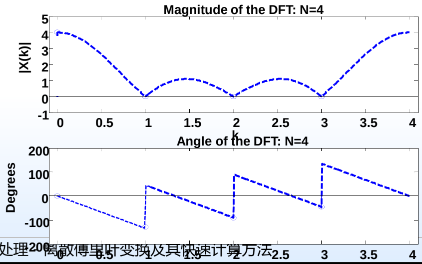
3.3 DFT及其性质—DFT的定义



3.3 DFT及其性质—DFT的定义

2）用 $X_4(k)$ 表示 4 点 DFT:

$$X_4(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{nk};\quad k=0,1,2,3;$$
$$W_4=e^{-j2\pi/4}=-j$$



3.3 DFT及其性质—DFT的定义

例 怎样得到 DTFT $X(e^{j\omega})$ 的其他样本？

解：显然，我们的采样频率间隔应更小一些，也就是说，应增加 N 的长度。

- 有两种方法，
  - 一种是取样时就采集更多的样本
  - 另一种是在序列后面添加一定长度的零，称为填零运算，在实际中，为了得到一个较密的频谱，这种运算是常用的。

3.3 DFT及其性质—DFT的定义

（a）给 x(n) 后附加 4 个零得到一个 8 点序列。

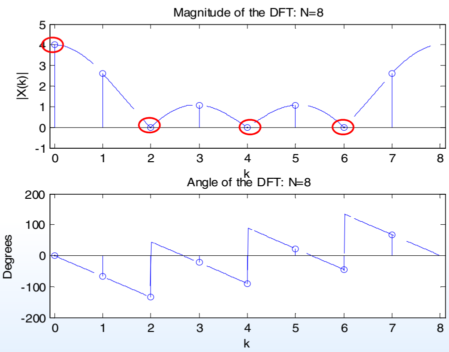
$x(n)=\{1,1,1,1,0,0,0,0\}$

设 $X_8(k)$ 为一 8 点 DFT，则

$$X_8(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{nk};\quad k=0,1,2,3\cdots 7;$$
$$W_8=e^{-j\pi/4}$$

在这种情况下，频率分辨率为 $\omega_1=2\pi/8=\pi/4$。

3.3 DFT及其性质—DFT的定义



3.3 DFT及其性质—DFT的定义

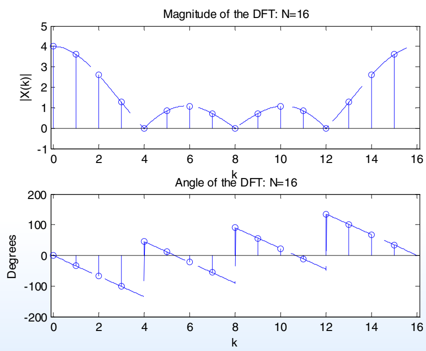
(b) 更进一步，给 $x(n)$ 填充 12 个零，变成一个 16 点序列，

$x(n)=\{1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$

$$X_{16}(k)=\sum_{n=0}^{16}x(n)W_{16}^{nk};\quad k=0,1,2,\cdots,15;$$
$$W_{16}=e^{-j\pi/8}$$

在这种情况下，频率分辨率为 $\omega_1=2\pi/16=\pi/8$。

3.3 DFT及其性质—DFT的定义



3.3 DFT及其性质—DFT的定义

基于以上例子，可以得到以下结论：

- 填零可导致较长的 DFT，会给原序列的DTFT提供间隔更密的样本。
- 因为 $x(n)$ 仅有 4 个非零样本，为精确地画出$X(e^{j\omega})$，只需 4 点 DFT $X_4(k)$。通过填零可得到 $X_8(k)$、$X_{16}(k)$ 等，用它们来填充 $X(e^{j\omega})$ 的值。
- 填零运算提供了一个较密的频谱和较好的图像显示，但因为在信号中只是附加了零，而没有增加任何新的信息，还是原始连续谱的 N 点取样，只是补零观察到了更多的频点，这并不意味着补零能够提高真正的频谱分辨率。
- 采集更多的数据，可以真正提高频谱分辨率。

3.3 DFT及其性质—DFT的定义

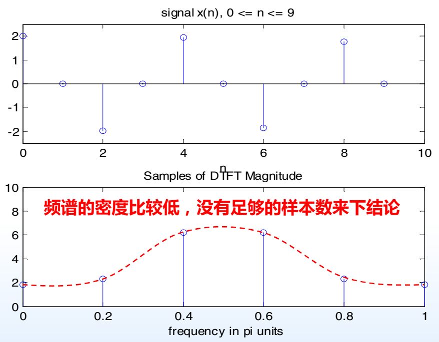
例 为了说明补零（高密度频谱）和采集更多数据（高分辨率频谱）之间的区别，考察序列

$$x(n) = \cos(0.48\pi n) + \cos(0.52\pi n)$$

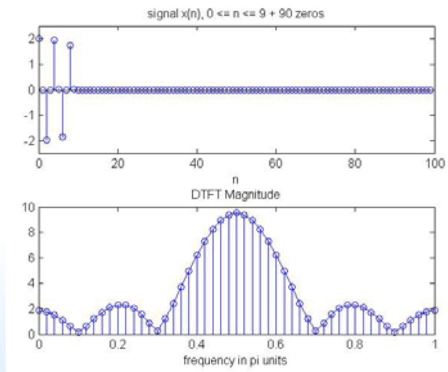
求出它基于有限个样本的频谱。

a）当 $0 \le n \le 10$ 时，确定并画出 $x(n)$ 的DFT。
b）当 $0 \le n \le 100$ 时，确定并画出 $x(n)$ 的DFT。

3.3 DFT及其性质—DFT的定义

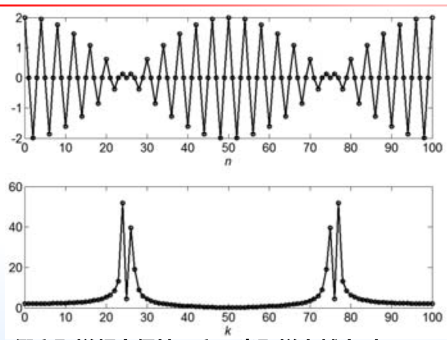


3.3 DFT及其性质—DFT的定义



从结果图中可以看到，此序列在 $\omega=0.5\pi$ 处有一主频率，原始序列则没有说明这一点。填零运算提供了更加平滑,高密度的频谱曲线

3.3 DFT及其性质—DFT的定义



采样更多的数据提供了更多的信息

DFT 清楚地表明了两个靠得很紧的频率，这是 x(n) 的高分辨率的频谱

假定取样频率保持不变，当取样点越大时，DFT 分辨率就会越好，这样频率间隔小，可获得频谱的许多细节。

3.3 DFT及其性质—DFT的定义

例 以 256Hz 取样频率对信号 $x(t) = \sin(120\pi t)$ 取样，得到离散信号 $x(n)$，计算其频谱。

解：

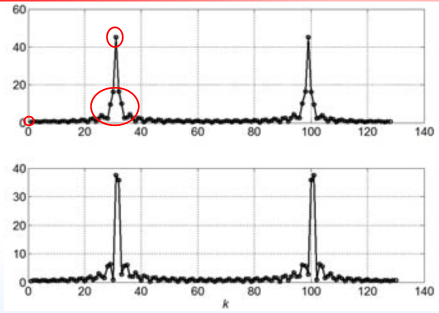
数字角频率：$\omega = \Omega T = 2\pi f \dfrac{1}{f_s} = \dfrac{2\pi \times 60}{256}$

数字信号：$x(n) = \sin(\dfrac{2\pi \times 60}{256} n)$

数字频率：$\dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{60}{256} = \dfrac{15}{64}$

数字周期为 64。

3.3 DFT及其性质—DFT的定义



对上述离散信号进行 N=128 和 N=130 点DFT，因为 128 **是64的整数倍**（2倍），从图中看，128点DFT 的幅度频谱中的尖锋明显高于 N=130 图中的尖锋——**频谱模糊现象**

习题 3.1（1）
3.4
3.10
3.15 (K→k)
3.18

实验一

实验要求请到DSP公邮下载zju_dsp@163.com
密码：dsp_zju
可交纸质版或PDF电子版发送到：
3130103370@zju.edu.cn

习题及实验一，10月16日交
10月23日讨论第二章习题及实验一