$$\left|H_a(\mathrm{j}\Omega)\right|^2\Big|_{\Omega=\frac{s}{\mathrm{j}}}=H_a(s)H_a(-s)=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_N^2\left(\frac{s}{\mathrm{j}\Omega_c}\right)}$$

令其分母多项式为零，即

$$1+\varepsilon^2C_N^2\left(\frac{s}{\mathrm{j}\Omega_c}\right)=0$$

即

$$C_N\left(\frac{s}{\mathrm{j}\Omega}\right)=\pm\mathrm{j}\frac{1}{\varepsilon}\tag{6-91}$$

令

$$\begin{aligned}\frac{s}{\mathrm{j}\Omega_c}&=\cos(\alpha+\mathrm{j}\beta)=\cos\alpha\cdot\cos(\mathrm{j}\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(\mathrm{j}\beta)\\&=\cos\alpha\cdot\mathrm{ch}\beta-\mathrm{j}\sin\alpha\cdot\mathrm{sh}\,\beta\end{aligned}\tag{6-92}$$

ch(·)和 sh(·)分别为双曲余弦函数与双曲正弦函数。由(6-92)式可得

$$s=\Omega_c\sin\alpha\cdot\mathrm{sh}\,\beta+\mathrm{j}\Omega_c\cos\alpha\cdot\mathrm{ch}\,\beta\tag{6-93}$$

为了导出 α,β 与 N,ε 的关系，把(6-92)式代入(6-91)式，且考虑到 $C_N(x)$ 的定义(见(6-81)式)

$$\begin{aligned}C_N\left(\frac{s}{\mathrm{j}\Omega_c}\right)&\triangleq\cos\left[N\arccos\left(\frac{s}{\mathrm{j}\Omega_c}\right)\right]=\cos[N(\alpha+\mathrm{j}\beta)]\\&=\cos(N\alpha)\cdot\mathrm{ch}(N\beta)-\mathrm{j}\sin(N\alpha)\cdot\mathrm{sh}(N\beta)\\&=\pm\mathrm{j}\frac{1}{\varepsilon}\end{aligned}$$

由此得出

$$\cos(N\alpha)\cdot\mathrm{ch}(N\beta)=0\tag{6-94a}$$

$$\sin(N\alpha)\cdot\mathrm{sh}(N\beta)=\mp\frac{1}{\varepsilon}\tag{6-94b}$$

由(6-94a)式，且考虑 $\mathrm{ch}(N\beta)\neq0$，可解出

$$\cos(N\alpha)=0$$

则有

$$\alpha=\frac{2k-1}{N}\cdot\frac{\pi}{2},\quad k=1,2,\cdots,2N\tag{6-95}$$

把 α 代入(6-94b)式，可得

$$\mathrm{sh}(N\beta)=\mp\frac{1}{\varepsilon}$$

因而

$$\beta=\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\left(\mp\frac{1}{\varepsilon}\right)=\mp\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\frac{1}{\varepsilon}\tag{6-96}$$

把(6-95)式的 α 及(6-96)式的 β 代入(6-93)式，可得 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点为

$$s_k=\sigma_k+\mathrm{j}\Omega_k=\mp\Omega_c\sin\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\cdot\mathrm{sh}\left(\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$+\mathrm{j}\Omega_c\cos\left(\frac{2k-1}{2N}\pi\right)\cdot\mathrm{ch}\left(\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\,\frac{1}{\varepsilon}\right),\quad k=1,2,\cdots,2N \tag{6-97}$$

即

$$\sigma_k=\mp\Omega_c a\sin\left[\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right],\quad k=1,2,\cdots,2N \tag{6-98a}$$

$$\Omega_k=\Omega_c b\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right],\quad k=1,2,\cdots,2N \tag{6-98b}$$

其中

$$a=\mathrm{sh}\left[\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \tag{6-99a}$$

$$b=\mathrm{ch}\left[\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \tag{6-99b}$$

将(6-98a)式和(6-98b)式分别取平方再化简，可得 $H_a(s)H_a(-s)$ 在 s 平面的极点分布满足的关系式

$$\frac{\sigma_k^2}{\Omega_c^2a^2}+\frac{\Omega_k^2}{\Omega_c^2b^2}=1 \tag{6-100}$$

这是一个椭圆方程，由于双曲余弦 ch(·)大于双曲正弦 sh(·)，故长轴为 $\Omega_c b$(在虚轴上)，短轴为 $\Omega_c a$(在实轴上)。

取 $H_a(s)H_a(-s)$ 在 s 左半平面的极点，即(6-97)式的左半平面的 s_k，就是 $H_a(s)$ 的极点。

$$\sigma_k=-\Omega_c a\sin\left[\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right],\quad k=1,2,\cdots,N \tag{6-101a}$$

$$\Omega_k=\Omega_c b\cos\left[\frac{\pi}{2N}(2k-1)\right],\quad k=1,2,\cdots,N \tag{6-101b}$$

实际上，用(6-99)式求解 a,b 并不方便，还可以再加简化，考虑到

$$a=\mathrm{sh}\left[\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]=\frac{\exp\left[\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]-\exp\left[-\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\gamma^{\frac{1}{N}}-\gamma^{-\frac{1}{N}}\right) \tag{6-102a}$$

$$b=\mathrm{ch}\left[\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]=\frac{\exp\left[\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]+\exp\left[-\frac{1}{N}\mathrm{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\gamma^{\frac{1}{N}}+\gamma^{-\frac{1}{N}}\right) \tag{6-102b}$$

其中
$$\gamma=\exp\left[\mathrm{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$$

查数学手册知，若

$$y=\mathrm{arcsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

则有
$$y=\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+1}\right)$$

将此式取反变换有

$$\exp(y) = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}$$

由此得出

$$\gamma = \frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} \tag{6-103}$$

将 γ 代入(6-102a)式、(6-102b)式,可得

$$a = \frac{1}{2}(\gamma^{\frac{1}{N}} - \gamma^{-\frac{1}{N}}) \tag{6-104a}$$

$$b = \frac{1}{2}(\gamma^{\frac{1}{N}} + \gamma^{-\frac{1}{N}}) \tag{6-104b}$$

这样,由(6-103)式可求得 γ,由 γ 可求得 a,b,从而利用(6-101)式求得 $H_a(s)$的极点。

求出幅度平方函数的极点后,$H_a(s)$的极点就是 s 平面左半平面的诸极点 s_i,从而得到切贝雪夫滤波器的系统函数为

$$H_a(s) = \frac{K}{\prod_{i=1}^{N}(s - s_i)} \tag{6-105a}$$

常数 K 可由 $|H_a(\mathrm{j}\Omega)|$ 和 $H_a(s)$的低频或高频特性对比求得。

也可用下面的方法直接求出(6-105a)式的系数 K:将(6-80)式开平方,并代入 $\Omega = s/\mathrm{j}$,再考虑(6-105a)式,则有

$$|H_a(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{s}{\mathrm{j}\Omega_c}\right)}} = \frac{K}{\left|\prod_{i=1}^{N}(s - s_i)\right|}$$

可以看出,第一个等号后的公式,其分母多项式的首项(s^N)的系数不为 1,这是因为 $C_N\left(\frac{s}{\mathrm{j}\Omega_c}\right)$的首项$\left[\left(\frac{S}{\mathrm{j}\Omega_c}\right)^N\right]$系数为 2^{N-1},因而其 s^N 项的系数为$\frac{2^{N-1}}{\Omega_c^N}$,整个分母多项式 s^N 项的系数则为$\frac{\varepsilon \cdot 2^{N-1}}{\Omega_c^N}$。而第二个等号后的分式,其分母的首项($s^N$)的系数为 1,因而,为使第二个等号两端的函数(皆化为首项(s^N)的系数为 1)相等,必须满足

$$K = \frac{\Omega_c^N}{\varepsilon \cdot 2^{N-1}}$$

将此 K 值代入(6-105a)式,可得

$$H_a(s) = \frac{\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{2^{N-1}} \cdot \Omega_c^N}{\prod_{i=1}^{N}(s - s_i)} \tag{6-105b}$$

图 6-22 也画出了确定切贝雪夫 I 型滤波器极点在椭圆上的位置的方法。先求出大圆(半径为 $b\Omega_c$)和小圆(半径为 $a\Omega_c$)上按等间隔角 π/N 均分的各个点,这些点是虚轴对

称的，且一定都不落在虚轴上。N 为奇数时，有落在实轴上的点，N 为偶数时，实轴上也没有。幅度平方函数的极点(在椭圆上)的位置是这样确定的：其垂直坐标由落在大圆上的各等间隔点规定，其水平坐标由落在小圆上的各等间隔点规定。

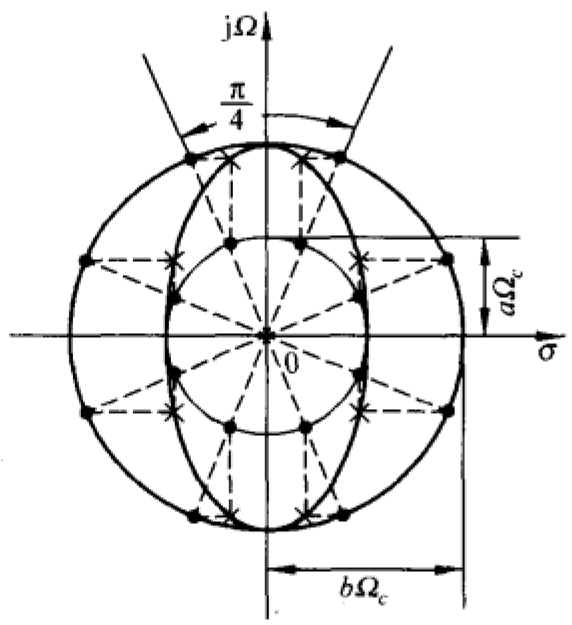

图 6-22　$N=4$ 时模拟切贝雪夫 Ⅰ 型滤波器的极点位置图

切贝雪夫 Ⅱ 型滤波器的幅度特性在通带内具有单调的特性(在 $\Omega=0$ 附近最平坦)，而在阻带内具有等波纹特性，其幅度平方函数可表示成

$$|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2\left[\dfrac{C_N(\Omega_{st})}{C_N(\Omega_{st}/\Omega)}\right]^2} \qquad (6\text{-}106)$$

式中 Ω_{st} 是阻带衰减达到规定数值的最低频率。

可以证明，切贝雪夫 Ⅱ 型滤波器既有极点又有零点，零点是虚数。由于篇幅有限，这里就不作讨论了。

还有一种通带阻带都具有等波纹幅度特性的滤波器，称为椭圆函数滤波器或考尔滤波器，因为比较专门，这里不作讨论。

［**例 6-5**］　试导出二阶切贝雪夫系统函数，已知通带波纹为 1dB，归一化截止频率为 $\Omega_c=1\mathrm{rad/s}$。

解　由于 $\delta_1=1\mathrm{dB}$。根据(6-85)式，可得

$$\varepsilon^2=10^{\delta_1/10}-1=10^{0.1}-1=0.25892541$$

由于 $\Omega_c=1$，故 $x=\dfrac{\Omega}{\Omega_c}=\Omega$，由表 6-2，代入 $x=\Omega$ 可得

$$C_2(\Omega)=2\Omega^2-1$$

则

$$C_2^2(\Omega)=4\Omega^4-4\Omega^2+1$$

代入 $C_2^2(\Omega)$ 及 ε^2 到(6-80)式，可得

$$|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{1}{1.0357016\Omega^4-1.0357016\Omega^2+1.25892541}$$

令 $s=\mathrm{j}\Omega$，即 $s^2=-\Omega^2$，可得

$$H_a(s)H_a(-s)=|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2\big|_{\Omega^2=-s^2}=\frac{1}{1.0357016s^4+1.0357016s^2+1.25892541}$$

从分母多项式的根得出 $H_a(s)H_a(-s)$ 的极点为

$$s_1=1.0500049\mathrm{e}^{\mathrm{j}58.484569^\circ}$$

$$s_2=1.0500049\mathrm{e}^{\mathrm{j}121.51543^\circ}$$

$$s_3=1.0500049\mathrm{e}^{-\mathrm{j}121.51543^\circ}$$

$$s_4=1.0500049\mathrm{e}^{-\mathrm{j}58.484569^\circ}$$