

专业： 信息工程
姓名： 黄嘉欣
学号： 3190102060
日期： 2021.10.11

浙江大学实验报告

课程名称： 数字信号处理 成绩： _____
实验名称： DFT 的应用—确定性信号谱分析

一、实验目的和要求

谱分析即求信号的频谱。本实验采用 DFT 技术对周期性信号进行谱分析。通过实验，了解用 $X(k)$ 近似地表示频谱 $X(e^{j\omega})$ 带来的栅栏效应、混叠现象和频谱泄漏，了解如何正确地选择参数（抽样间隔 T 、抽样点数 N ）。

二、实验内容和步骤

2-1 选用最简单的周期信号：单频正弦信号、频率 $f = 50$ 赫兹，进行谱分析。

2-2 谱分析参数可以从下表中任选一组（也可自定）。对每组参数时的序列，计算：一个正弦周期是否对应整数个抽样间隔？观察区间是否对应整数个正弦周期？

信号频率 f (赫兹)	谱分析参数	抽样间隔 T (秒)	截断长度 N (抽样个数)
50	第一组参数	0.000625	32
50	第二组参数	0.005	32
50	第三组参数	0.0046875	32
50	第四组参数	0.004	32
50	第五组参数	0.0025	16

2-3 对以上几个正弦序列，依次进行以下过程。

2-3-1 观察并记录一个正弦序列的图形（时域）、频谱（幅度谱、频谱实部、频谱虚部）形状、幅度谱的第一个峰的坐标 (U, V) 。

2-3-2 分析抽样间隔 T 、截断长度 N （抽样个数）对谱分析结果的影响；

2-3-3 思考 $X(k)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 的关系；

2-3-4 讨论用 $X(k)$ 近似表示 $X(e^{j\omega})$ 时的栅栏效应、混叠现象、频谱泄漏。

三、主要仪器设备

MATLAB 编程。

四、实验数据记录和处理

4-1 选用最简单的周期信号: 单频正弦信号、频率 $f = 50$ 赫兹, 进行谱分析。

MATLAB 代码:

```
% DFT.m
clc; clear;
T = 0.000625; N = 32; % 谱分析参数, 每组在此处修改 (此为第一组)
% T = 0.005; N = 32; % 第二组参数
% T = 0.0046875; N = 32; % 第三组参数
% T = 0.004; N = 32; % 第四组参数
% T = 0.0025; N = 16; % 第五组参数
t = 0:0.001:N*T; xt = sin(2*pi*50*t); % 原信号
n = 0:N-1; xn = sin(2*pi*50*n*T); % 抽样所得序列
k = 0:N-1; X = dftmtx(N)*xn'; % DFT

figure; % 时域图像对比
subplot(2,1,1); plot(t,xt); xlim([0 N*T]); % 原信号图像
xlabel('t'); ylabel('x(t)'); title('原信号');
subplot(2,1,2); stem(n,xn); xlim([0 N]); % 序列图像
xlabel('n'); ylabel('x(n)'); title('抽样所得序列');

figure; % 序列时域图形
subplot(2,2,1); stem(n,real(xn)); xlim([0 N]); % 序列实部
xlabel('n'); ylabel('Re\{x(n)\}'); title('序列实部');
subplot(2,2,2); stem(n,imag(xn)); xlim([0 N]); % 序列虚部
xlabel('n'); ylabel('Im\{x(n)\}'); title('序列虚部');
subplot(2,2,3); stem(n,abs(xn)); xlim([0 N]); % 序列的模
xlabel('n'); ylabel('|x(n)|'); title('序列模长');
subplot(2,2,4); stem(n,180/pi*angle(xn)); xlim([0 N]); % 序列相角
xlabel('n'); ylabel('\phi'); title('序列相角');

figure; % 序列频谱
subplot(4,1,1); stem(k,X); xlim([0 N]); % DFT频谱
xlabel('k'); ylabel('X'); title('频谱');
subplot(4,1,2); stem(k,abs(X)); xlim([0 N]); % 幅度谱
xlabel('k'); ylabel('|X|'); title('幅度谱');
max_value = roundn(max(abs(X)),-4); % 最大值
max_index = find(roundn(abs(X),-4)==max_value); % 寻找最大值的索引
index = max_index(1); % 取第一个最大值的索引
format = sprintf('( %d, %.2f )', (index-1), max_value); % 第一个峰的坐标
text((index-1), max_value, format); % 在图形上显示
subplot(4,1,3); stem(k,real(X)); xlim([0 N]); % 频谱实部
xlabel('k'); ylabel('Re\{X\}'); title('频谱实部');
```

```
subplot(4,1,4); stem(k,imag(X)); xlim([0 N]); % 频谱虚部
xlabel('k'); ylabel('Im\{X\}'); title('频谱虚部');
```

五、实验结果与分析

5-1 实验前预习有关概念,并根据上列参数来推测相应频谱的形状、谱峰所在频率(U)和谱峰的数值(V)、混叠现象和频谱泄漏的有无。

解: $\because x(t) = \sin(2\pi ft)$

$$x(n) = \sin(2\pi fnT)$$

$$\therefore x(n) \text{ 的 DTFT 为: } X(e^{j\omega}) = j\pi[\delta(\omega + 2\pi fT) - \delta(\omega - 2\pi fT)]$$

可见,序列的 DTFT 的实部恒为 0,虚部在 $\omega = 2\pi fT$ 及 $\omega = -2\pi fT$ 处分别存在一冲激。

$$\therefore X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} = \frac{jN}{2}[\delta(k + fTN) - \delta(k - fTN)]$$

\therefore 序列的 DFT 的实部恒为 0,且当 fTN 为整数时,其虚部会在 $k = fTN$ 和 $k = (1 - fT)N$ 处分别存在一冲激,前者的峰值为 $-\frac{N}{2}$,后者的峰值为 $\frac{N}{2}$;当 fTN 不为整数时, fTN 对应的谱峰不会出现在频谱图上,而是 $k = [fTN]$ 和 $k = [fTN]$ 处出现峰值(不一定相等)。

由采样定理,当 $f_s \geq 2f_m$ 时,不会发生混叠现象;否则频谱会发生混叠。另外,由于有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 变换 $X(k)$ 可以定义为 $x(n)$ 的周期延拓序列 $x((n))_N$ 的 DFS 变换的主值序列,若观察区间对应的正弦周期非整数,则其所对应的周期延拓序列不是标准正弦序列,时域上存在跳变,即存在高频分量,不满足采样定理,此时频谱会发生混叠;反之,若观察区间对应的正弦周期为整数,则不会发生混叠(各参数情况计算见 5-2-1)。

同理,当对时域进行非周期截断时,跳变必然会产生高频分量,进而导致频谱泄露;只有当观察区间对应的正弦周期为整数时,频谱泄露现象才不会发生。

综上所述,在各组谱分析参数条件下,频谱的特征如下表所示:

表 5.1 频谱特征推测

谱分析参数	f_s	fTN	频谱形状	谱峰频率(U)	谱峰数值(V)	混叠现象	频谱泄露
第一组参数	1600	1	两峰	$k = 1, 31$	16	无	无
第二组参数	200	8	两峰	$k = 8, 24$	16	无	无
第三组参数	213.3	7.5	四峰	$k_1 = 7, 25$ $k_2 = 8, 24$	10.25 (k_1)	有	有
第四组参数	250	6.4	四峰	$k_1 = 6, 26$ $k_2 = 7, 25$	11.97 (k_1)	有	有
第五组参数	400	2	两峰	$k = 2, 30$	8	无	无

5-2 观察实验结果（数据及图形）的特征，做必要的记录。

5-2-1 对各组参数时的序列，计算：一个正弦周期是否对应整数个抽样间隔？观察区间是否对应整数个正弦周期？

解：由所给参数，正弦周期为 $T_0 = \frac{1}{f} = 0.02s$ ，则对抽样间隔 T ，截断长度 N ，一个正弦周期所对应的抽样间隔数为 $m_1 = \frac{T_0}{T}$ ，观察区间对应的正弦周期数为 $m_2 = \frac{NT}{T_0}$ ，故可得下表：

表 5.2.1 周期分析

谱分析参数	m_1	m_1 是否为整数?	m_2	m_2 是否为整数?
第一组参数	32	是	1	是
第二组参数	4	是	8	是
第三组参数	4.26	否	7.5	否
第四组参数	5	是	6.4	否
第五组参数	8	是	2	是

5-2-2 观察并记录正弦序列的图形（时域）、频谱（幅度谱、频谱实部、频谱虚部）形状、幅度谱的第一个峰的坐标（ U, V ），并用基本理论、基本概念来解释各种现象。

① 第一组参数

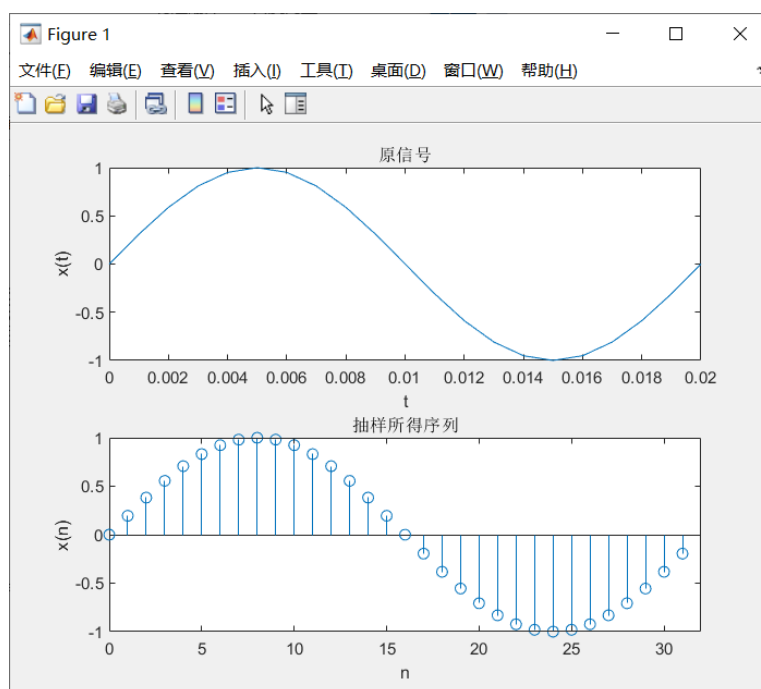


图 5.2.2.1.1 原信号与抽样序列

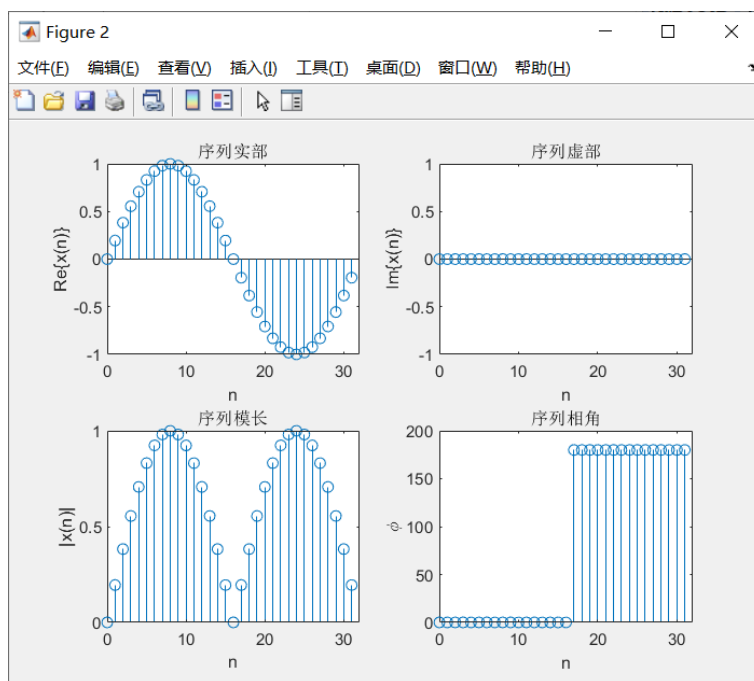


图 5.2.2.1.2 时域图像

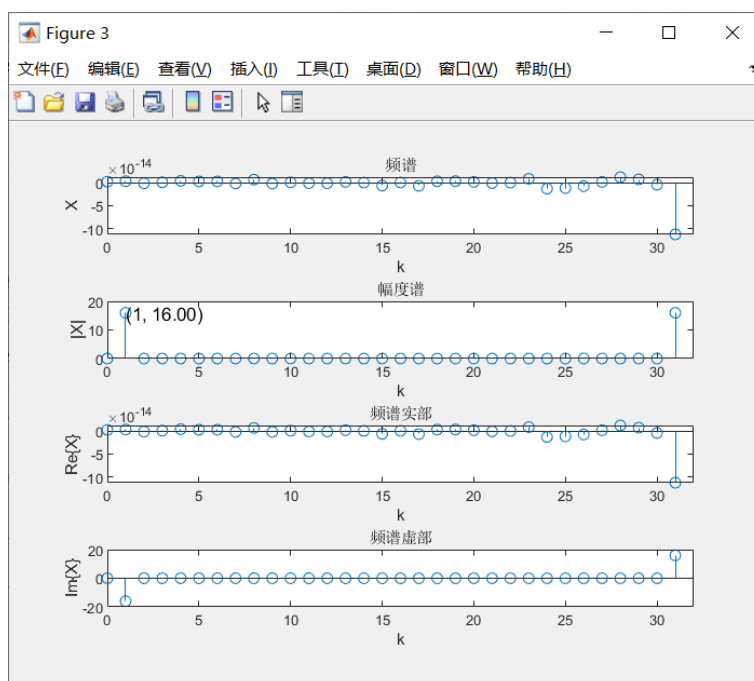


图 5.2.2.1.3 DFT 频谱

分析: 如图, 在第一组参数条件下, 一个正弦周期对应 32 个抽样间隔, 观察区间对应 1 个正弦周期, 与计算值一致。抽样所得序列为实序列, 奇对称, 虚部始终为 0。当序列取正值时, 相角为 0° ; 当序列为负时, 相角为 180° , 与三角函数的性质相符。幅度谱在 $k = 1$ 及 $k = 31$ 两处存在峰值, 峰值均为 16, 其余处的值为 0, 此时幅度谱第一个峰值的坐标为 (1, 16); 由于时域为实奇序列, 其 DFT 所得频谱实部为 0, 虚部为奇对称, 且在 $k = 1$ 及 $k = 31$ 两处存在峰值, 分别为 -16 和 16, 与 5-1 的分析结果基本吻合。此时, 该频谱没有发生明显的混叠和泄露现象, 故可用 DFT

代替 DTFT。

② 第二组参数

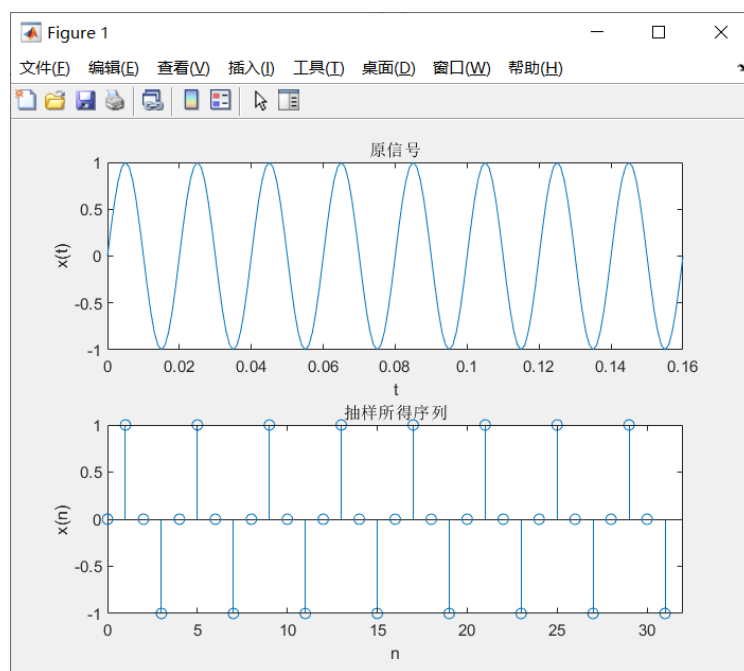


图 5.2.2.2.1 原信号与抽样序列

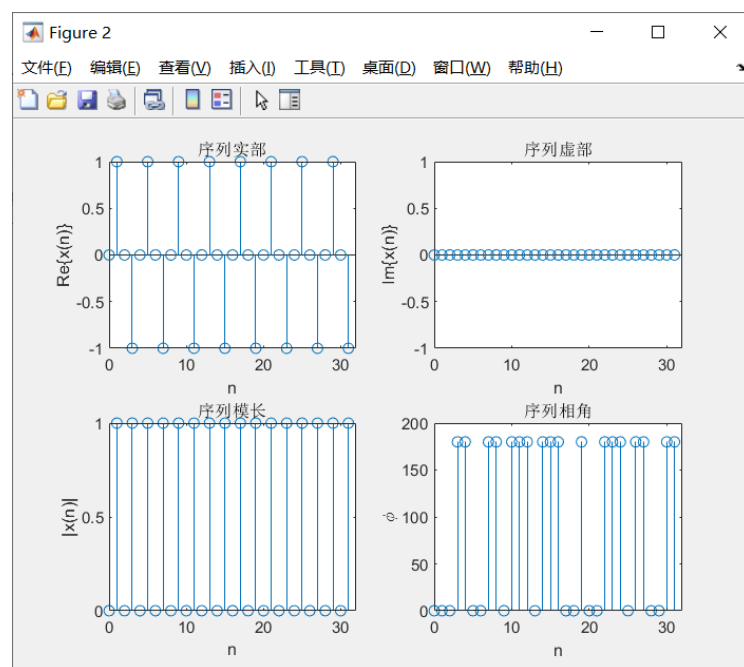


图 5.2.2.2.2 时域图像

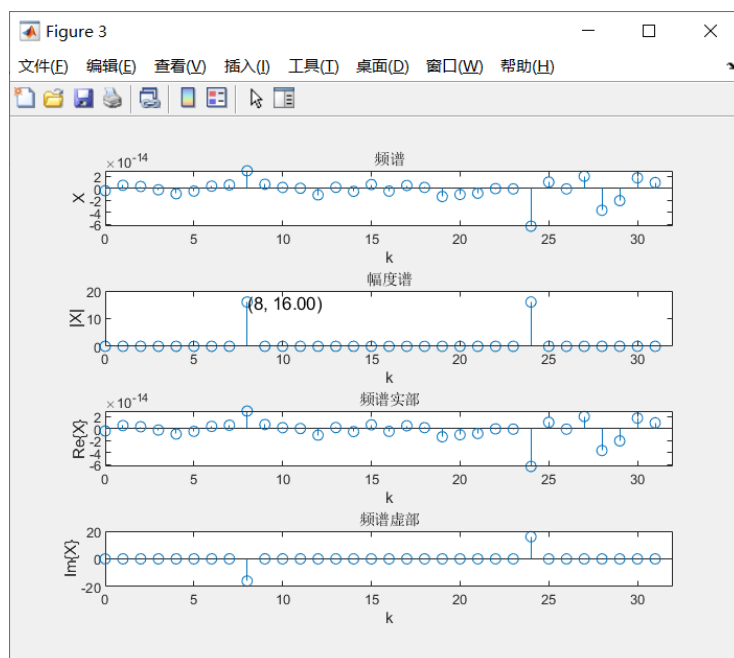


图 5.2.2.2.3 DFT 频谱

分析: 如图, 在第二组参数条件下, 一个正弦周期对应 4 个抽样间隔, 观察区间对应 8 个正弦周期, 与计算值一致。取样所得序列为实序列, 奇对称。当序列取正值时, 相角为 0° ; 当序列取负值时, 相角为 180° , 与三角函数的性质相符。幅度谱在 $k = 8$ 及 $k = 24$ 两处存在峰值, 峰值均为 16, 其余处的值为 0, 此时幅度谱第一个峰值的坐标为(8,16); 由于时域为实奇序列, 其 DFT 所得频谱实部为 0, 虚部为奇对称, 且在 $k = 8$ 及 $k = 24$ 两处存在峰值, 分别为-16 和 16, 与 5-1 的分析结果基本吻合。此时, 频谱未发生明显的混叠和泄露现象, 故可用 DFT 代替 DTFT。

③ 第三组参数

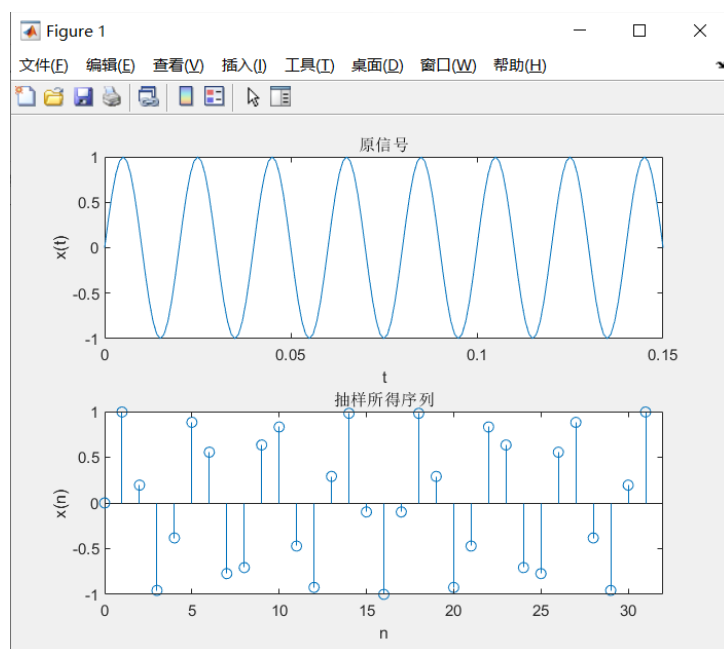


图 5.2.2.3.1 原信号与抽样序列

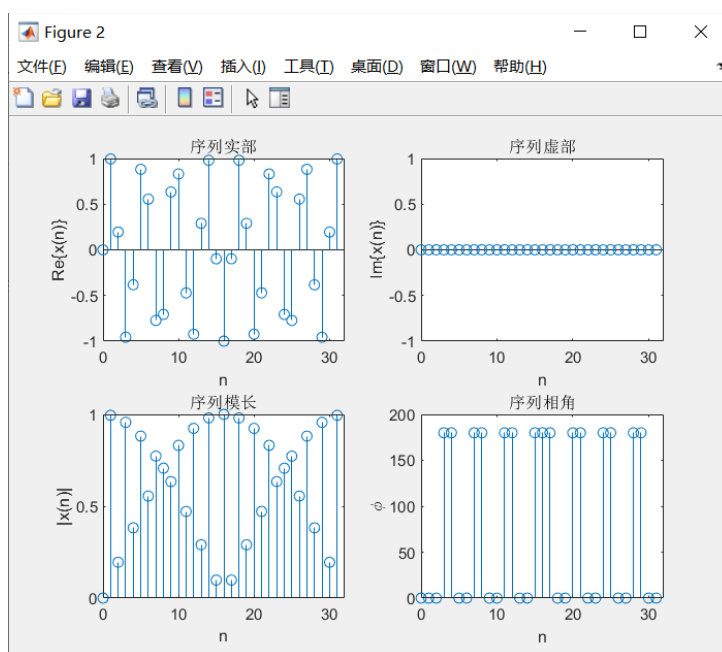


图 5.2.2.3.2 时域图像

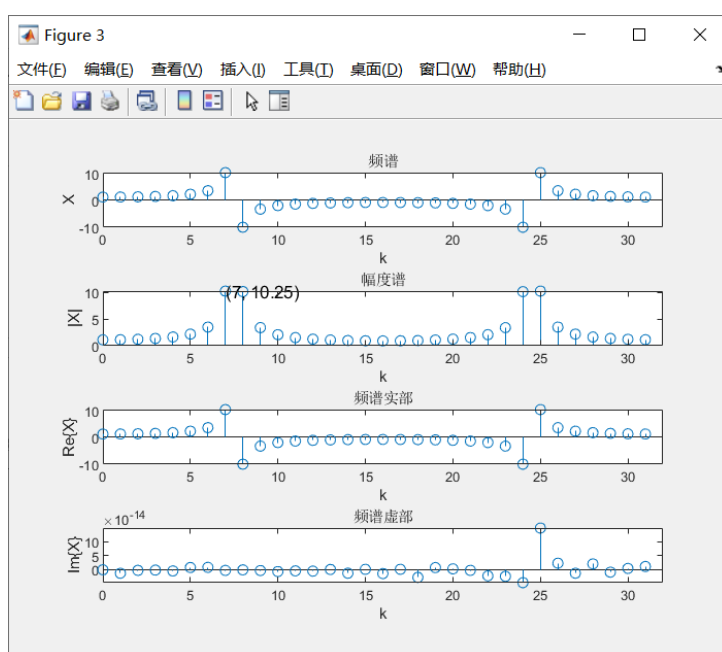


图 5.2.2.3.3 DFT 频谱

分析: 如图, 在第三组参数条件下, 一个正弦周期未对应整数个抽样间隔, 观察区间也未对应整数个正弦周期。此时抽样所得序列为实序列, 且偶对称。当序列取正值时, 相角为 0° ; 当序列取负值时, 相角为 180° , 与三角函数的性质相符。幅度谱在 $k = 7$ 、 $k = 25$ 和 $k = 8$ 、 $k = 24$ 四处存在峰值, 与 5-1 的分析结果相符。其中, $k = 7$ 、 $k = 25$ 两处的值更大, 为 10.25, 此时幅度谱第一个峰值的坐标为 (7, 10.25); 由于时域为实偶序列, 其 DFT 所得频谱虚部为 0, 实部为偶对称, 且在 $k = 7$ 、 $k = 25$ 两处的峰值为正, 在 $k = 8$ 、 $k = 24$ 两处的峰值为负。可以看到, 由于抽样

点未能完全呈现出原信号的形状和周期, 存在的跳变产生了高频分量, 此时的频谱发生了比较明显的频谱混叠和泄露现象, 不同频率值对应有新的频率分量, 与原信号频谱差异较大, 信号已经失真。

④ 第四组参数

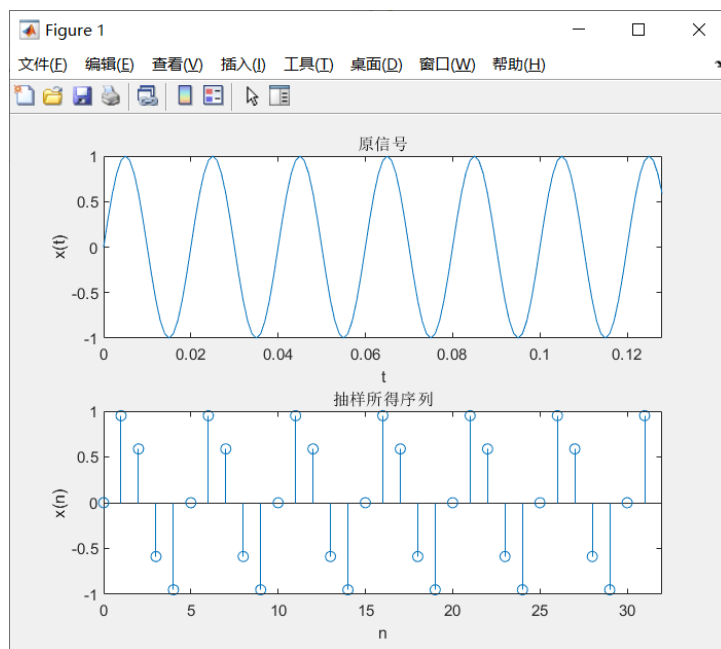


图 5.2.2.4.1 原信号与抽样序列

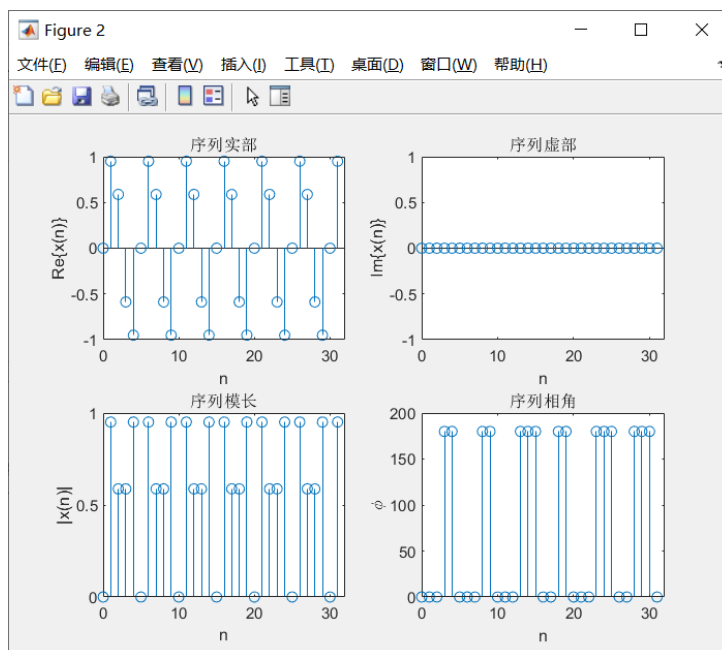


图 5.2.2.4.2 时域图像

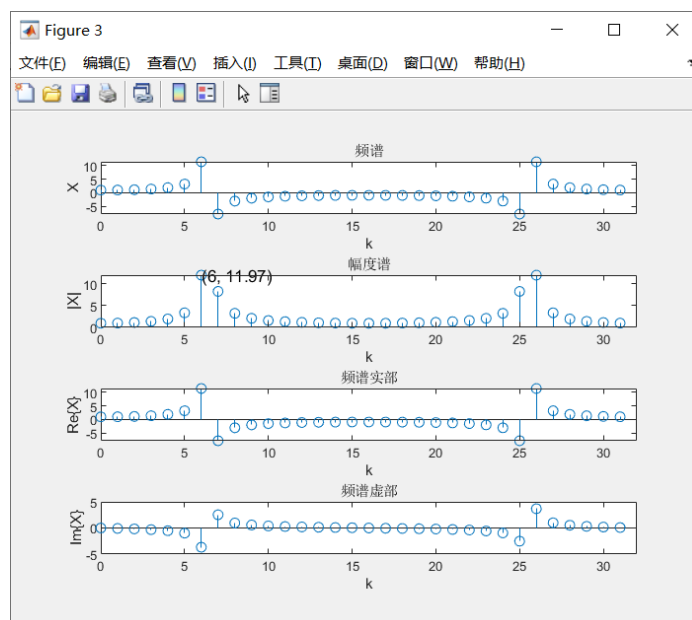


图 5.2.2.4.3 DFT 频谱

分析: 如图, 在第四组参数条件下, 一个正弦周期对应 5 个抽样间隔, 但观察区间未对应整数个正弦周期。抽样所得序列具有周期性, 但不具备对称性。当序列取正值时, 相角为 0° ; 当序列取负值时, 相角为 180° , 与三角函数性质相符。幅度谱在 $k=6$ 、 $k=26$ 和 $k=7$ 、 $k=25$ 四处存在峰值, 与 5-1 的分析结果吻合。其中, $k=6$ 、 $k=26$ 两处的值更大, 为 11.97, 此时幅度谱第一个峰值的坐标为 (6, 11.97); 与此同时, 由于时域为实偶序列, 其 DFT 所得频谱虚、实部分别为奇、偶对称, 且在 $k=6$ 、 $k=26$ 和 $k=7$ 、 $k=25$ 四处也取得峰值, 虚实部符号恰好相反。可见, 由于加窗后序列存在的跳变, 此时的频谱已经发生了混叠和泄露, 与原信号频谱差异较大。

⑤ 第五组参数

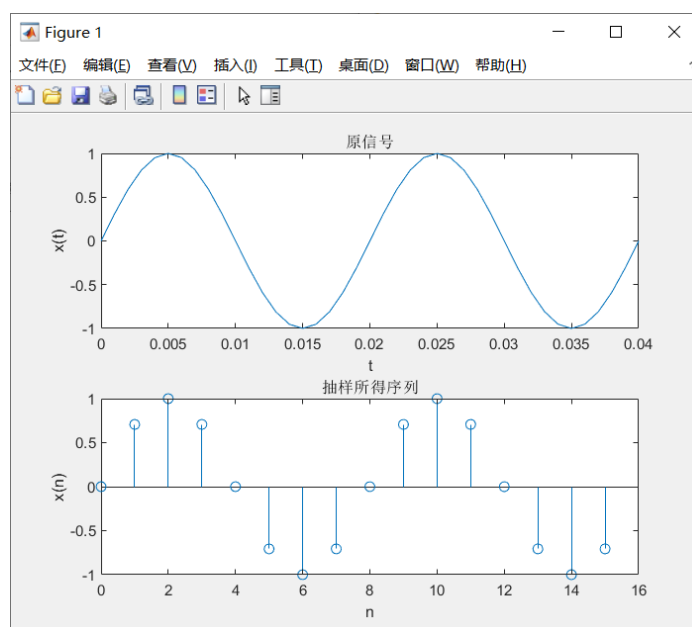


图 5.2.2.5.1 原信号与抽样序列

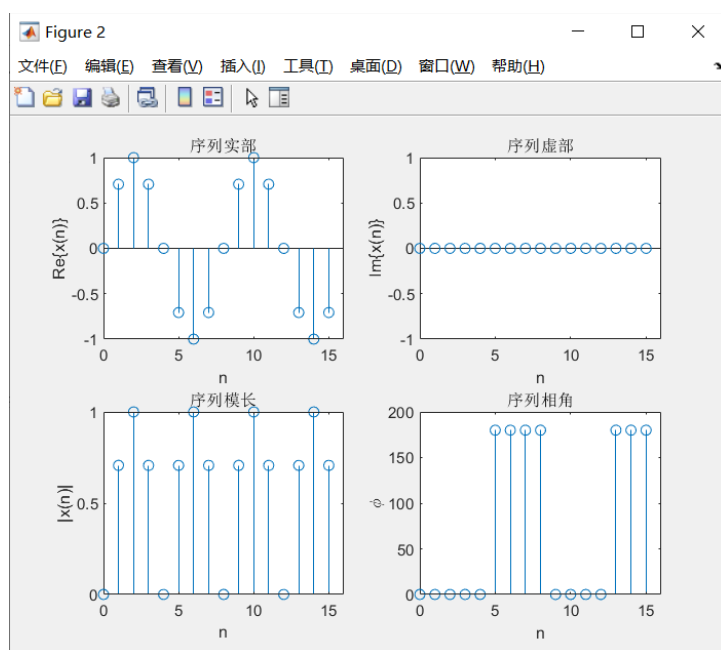


图 5.2.2.5.2 时域图像

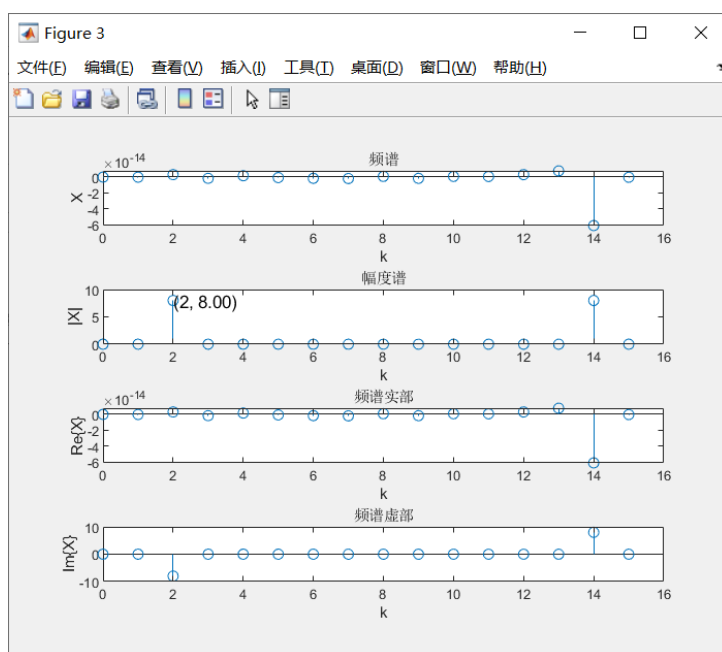


图 5.2.2.5.3 DFT 频谱

分析: 如图, 在第五组参数条件下, 一个正弦周期对应 8 个抽样间隔, 观察区间对应 2 个正弦周期, 与计算值一致。取样所得序列为实序列, 奇对称。当序列取正值时, 相角为 0° ; 当序列取负值时, 相角为 180° , 与三角函数的性质相符。幅度谱在 $k=2$ 及 $k=14$ 两处存在峰值, 峰值均为 8, 其余处的值为 0, 此时幅度谱第一个峰值的坐标为 (2, 8); 由于时域为实奇序列, 其 DFT 所得频谱实部为 0, 虚部为奇对称, 且在 $k=2$ 及 $k=14$ 两处存在峰值, 分别为 -8 和 8, 与 5-1 的分析结果相吻合。由于频谱未发生明显的混叠和泄露现象, 故此时可用 DFT 代替 DTFT。

5-2-3 分析抽样间隔 T 、截断长度 N (抽样个数) 对谱分析结果的影响。

解: ① 由奈奎斯特采样定理, 为防止频谱混叠, 需要 $f_s = \frac{1}{T} \geq 2f_m$, 因此, 只有当抽样间隔 T 足够小时, 所得抽样序列的频谱才不会发生混叠; 否则会导致谱分析结果产生偏差。

② 由实验结果与分析, 只有当序列的观察区间内含有整数个信号周期时, 即 $NT = mT_0$, 其中 m 为整数, T_0 为信号周期, 所得的 DFT 频谱图才是准确的; 否则, 若信号截断时不在整周期节点, 得到的频谱图会出现比较严重的频谱泄露及混叠现象, 频率值及其幅值偏差较大, 不能反映原信号的频谱特征。根据第三组与第四组参数的实验结果可以发现, 当非整周期部分占整体信号的比例逐渐减少时, 频谱泄露也会逐渐减弱, 频率幅值偏差逐渐减小。

③ 当提高抽样个数 N 时, 得到的频谱更为密集, 频率分辨率提高, 有利于抑制栅栏效应, 方便我们更为全面地了解信号的频谱, 避免因栅栏效应而无法直接观测到较为重要的频域特征, 但其不会改善频谱中频率及其幅值的准确性。

5-2-4 思考 $X(k)$ 与 $X(e^{j\omega})$ 的关系。

解: $X(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}$, 即 $X(k)$ 是对 $X(e^{j\omega})$ 进行频域取样的结果。显然, 无论 N 如何变化, $X(k)$ 的谐波频率始终在 $[0, 2\pi]$ 之间, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, DFT 对区间 $[0, 2\pi]$ 的划分越来越细致, ω 从离散的值变为整个实数区间, 即 DTFT 为 DFT 当 $N \rightarrow \infty$ 时的极限。对任意有限长序列而言, DFT 结果仅能反映有限个离散频率值 ($\omega = \frac{2\pi k}{N}$) 处该序列表现出来的特性, 即栅栏效应, 其可以通过频域内插或提高 DFT 点数进行抑制。

5-2-5 讨论用 $X(k)$ 近似表示 $X(e^{j\omega})$ 时的栅栏效应、混叠现象、频谱泄漏。

解: 当用 $X(k)$ 近似表示 $X(e^{j\omega})$ 时, 由 5-2-4 可知, 栅栏效应始终存在, 但抽样个数 N 决定了栅栏效应的强弱。对于混叠现象, 在进行时域取样的过程中, 若信号不具备限带的特性 (跳变产生的高频分量), 或取样频率不满足采样定理, 即会产生混叠, 此时需要对信号进行滤波处理, 从而抑制混叠产生的偏差。在另一个方面, 由于加窗处理时产生的时域跳变, 得到的频谱可能会存在高频分量, 从而导致混叠和频谱泄露。因此, 对于周期信号, 我们需要做到周期截断, 即观察区间对应的正弦周期为整数 ($NT = mT_0$, m 为整数), 避免时域值发生突变, 进而抑制频谱混叠和泄露的发生。

六、讨论

此次实验, 我们使用 DFT 对信号谱进行了分析, 虽然只是简单的正弦信号, 但通过参数的改变, 我们分析、了解了抽样间隔、截断长度对频谱的影响, 更深刻认识到了周期截断与非周期截断之间所存在的巨大差异, 既有效联系了课本所学, 也对其进行了进一步地升华。

总的来说, 由于有限长序列 $x(n)$ 的 N 点 DFT 变换 $X(k)$ 与 $x(n)$ 的周期延拓序列 $x((n))_N$ 的 DFS 变换之间的特殊关系, 我们可以很方便地得到周期截断与非周期截断对信号频率的不同影响。在周期截断 (即观察区间对应的正弦周期为整数) 的条件下, 信号取值不会发生跳变, 频谱不会受到影响; 当进行非周期截断时, 跳变产生的高频分量会将频带延展, 导致频谱泄露, 并很有可能引起频谱混叠。从这个角度看来, 加窗并不一定会引起频谱的泄露, 其只是当加窗操作导致时域产生跳变时的一个必然结果。除此之外, 当抽样间隔、截断长度取不同值时, 频谱的形状、谱峰会发生改变, 实验所得结果与理论计算吻合很好。

通过这次实验, 我们对栅栏效应、混叠现象和频谱泄漏有了一次更加直观的接触和分析, 既回顾了上课所学知识, 又学习了如何正确选择谱分析参数, 受益匪浅。相信, 此次与 DFT 信号谱分析的“亲密接触”, 对于我们后续知识的深入学习, 将会产生巨大的帮助。