表 7.8 模拟-模拟频带变换

$H_{an}(\bar{s})$：归一化低通滤波器，$\bar{s}=\mathrm{j}\bar{\Omega}$，$\bar{\Omega}_p=1$，$\bar{\Omega}_{st}$

$H_a(s)$：变换后的 4 种滤波器 $H_{lp}(s)$，$H_{hp}(s)$，$H_{bp}(s)$，$H_{bs}(s)$，$s=\mathrm{j}\Omega$

$G(s)$：变换函数 $\bar{s}=G(s)$

$$H_a(s)=H_{an}(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=G(s)}=H_{an}(G(s))$$

$H_a(s)$	$\bar{s}=G(s)$	$\mathrm{j}\bar{\Omega}=G(\mathrm{j}\Omega)$
低通 $H_{lp}(s)$(通带截止频率 Ω_p)	$\bar{s}=\dfrac{s}{\Omega_p}$	$\bar{\Omega}=\dfrac{\Omega}{\Omega_p}$
高通 $H_{hp}(s)$(通带截止频率 Ω_p)	$\bar{s}=\dfrac{\Omega_p}{s}$	$\bar{\Omega}=-\dfrac{\Omega_p}{\Omega}$
带通 $H_{bp}(s)$(通带截止频率 Ω_{p1}，Ω_{p2})	$\bar{s}=\dfrac{s^2+\Omega_{p0}^2}{B_p\,s}$	$\bar{\Omega}=\dfrac{\Omega^2-\Omega_{p0}^2}{B_p\,\Omega}$，　$\Omega_{p0}=\sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}}$，　$B_p=\Omega_{p2}-\Omega_{p1}$
带阻 $H_{bs}(s)$(阻带截止频率 Ω_{st1}，Ω_{st2})	$\bar{s}=\dfrac{\bar{\Omega}_{st}B_s\,s}{s^2+\Omega_{st0}^2}$	$\bar{\Omega}=\dfrac{\bar{\Omega}_{st}B_s\Omega}{\Omega_{st0}^2-\Omega^2}$，　$\Omega_{st0}=\sqrt{\Omega_{st1}\Omega_{st2}}$，　$B_s=\Omega_{st2}-\Omega_{st1}$

注(1) 在对应的频率点上，转换前、后两系统的频率响应的衰减值是相同的(例如低通→带通变换中 $\bar{\Omega}_p=1$(低通)与 $\Omega=\Omega_{p2}$(带通)点上衰减值，例如 2dB)是相同的。

(2) 对巴特沃思滤波器，由于 $H_{an}(\bar{s})$ 是对 3dB 衰减处截止频率 $\bar{\Omega}_c$ 归一化的，若 $R_p\neq 3\mathrm{dB}$ 时，则必须由 $R_p(\neq 3\mathrm{dB})$ 衰减处 $\bar{\Omega}_p=1$ 的归一化滤波器来找出 3dB 衰减处的 $\bar{\Omega}_c$[利用(7.5.27)式]，然后将 $H_{an}(\bar{s})$ 用 $\bar{\Omega}_c$ 去归一化为 $H_a(\bar{s})=H_{an}(\bar{s}/\bar{\Omega}_c)$，此 $H_a(\bar{s})$ 就是满足衰减为 $R_p(\neq 3\mathrm{dB})$，其 $\bar{\Omega}_p=1$ 的归一化低通滤波器；当 $R_p=3\mathrm{dB}$ 时，则可直接利用 $H_{an}(\bar{s})$ 作为归一化低通滤波器。对切贝雪夫滤波则可直接利用求出的归一化低通滤波器 $H_{an}(\bar{s})$。

5. 设计举例

模拟低通滤波器的设计前面已经讨论过了，以下用带通及带阻模拟滤波器设计的例子，作为讨论表 7.8 变换关系的实例。

【例 7.3】 设计一个模拟带通滤波器，分别采用巴特沃思型及切贝雪夫 Ⅰ 型。给定指标为①通带：通带下截止频率 $f_{p1}=200\mathrm{Hz}$，通带上截止频率 $f_{p2}=300\mathrm{Hz}$，通带边沿衰减 $R_p=2\mathrm{dB}$；②阻带：下阻带截止频率 $f_{st1}=100\mathrm{Hz}$，上阻带截止频率 $f_{st2}=400\mathrm{Hz}$，阻带最小衰减 $A_s=20\mathrm{dB}$。

解 (1) 各指标为 $\Omega_{p1}=2\pi\times 200$，$\Omega_{p2}=2\pi\times 300$，$\Omega_{st1}=2\pi\times 100$，$\Omega_{st2}=2\pi\times 400$，$R_p=2\mathrm{dB}$，$A_s=20\mathrm{dB}$

(2) 利用表 7.8，设归一化($\bar{\Omega}_p=1$)低通滤波器，其阻带衰减用 $\bar{\Omega}_{st}$ 表示，则有

$$B_p=\Omega_{p2}-\Omega_{p1}=2\pi\times 100,\quad \Omega_{p0}=\sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}}=2\pi\times 244.948\,97$$

$$\bar{\Omega}_{st2}=\frac{\Omega_{st2}^2-\Omega_{p0}^2}{\Omega_{st2}B_p}=\frac{4\pi^2(160\,000-60\,000)}{2\pi\times 400\times 2\pi\times 100}=2.5$$

$$\bar{\Omega}_{st1}=\frac{\Omega_{st1}^2-\Omega_{p0}^2}{\Omega_{st1}B_p}=\frac{4\pi^2(10\,000-60\,000)}{2\pi\times 100\times 2\pi\times 100}=-5$$

取归一化低通滤波器的阻带截止频率 $\bar{\Omega}_{st}=\min(|\bar{\Omega}_{st1}|,|\bar{\Omega}_{st2}|)=2.5$，即在较小的阻带截止频率处衰减大于 20dB，则在较大的阻带截止频率处的衰减一定会更大，更满足要求。

巴特沃思型

$\bar{\Omega}_p=1$，$\bar{\Omega}_{st}$，R_p，A_s 确定后，利用(7.5.24)式可求得巴特沃思低通滤波器阶次 N

$$N\geqslant \lg\left(\frac{10^{0.1A_s}-1}{10^{0.1R_p}-1}\right)\Big/\left[2\lg\left(\frac{\bar{\Omega}_{st}}{\bar{\Omega}_p}\right)\right]=\lg\left(\frac{99}{0.584\,893\,2}\right)\Big/\left[2\lg\left(\frac{2.5}{1}\right)\right]$$

$$=\frac{2.228\,558\,6}{0.795\,88}=2.8$$

取 $N=3$。

(3) 查表 7.2 可得到 $N=3$ 时的归一化原型巴特沃思低通滤波器系统函数 $H_{an}(\bar{s})$

$$H_{an}(\bar{s}) = \frac{1}{\bar{s}^3 + 2\bar{s}^2 + 2\bar{s} + 1}$$

由于这一公式是对衰减为 3dB 处截止频率 $\bar{\Omega}_c$ 归一化的(因为是巴特沃思滤波器),故必须由 2dB 衰减处的 $\bar{\Omega}_p=1$ 求出 $\bar{\Omega}_c$。

(4) 求 3dB 衰减处截止频率 $\bar{\Omega}_c$。

可按通带满足要求的(7.5.27a)式取等号求解

$$\bar{\Omega}_c = \bar{\Omega}_p / \sqrt[2N]{10^{0.1R_p}-1} = 1/\sqrt[6]{10^{0.2}-1} = 1/0.9145 = 1.0935$$

(5) 将 $H_{an}(\bar{s})$用 $\bar{\Omega}_c$“去归一化”得 $H_a(\bar{s})$,后者在 $\bar{\Omega}_p=1$ 处衰减就等于 2dB,是归一化($\bar{\Omega}_p=1$)的系统函数

$$H_a(\bar{s}) = H_{an}\left(\frac{\bar{s}}{\bar{\Omega}_c}\right) = \frac{\bar{\Omega}_c^3}{\bar{s}^3 + 2\bar{\Omega}_c\bar{s}^2 + 2\bar{\Omega}_c^2\bar{s} + \bar{\Omega}_c^3}$$

(6) 按表 7.8 的相应变换关系,求所需模拟带通滤波器的系统函数 $H_{bp}(s)$

$$\begin{aligned} H_{bp}(s) &= H_a(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=\frac{s^2+\Omega_{p0}^2}{sB_p}} \\ &= \frac{\bar{\Omega}_c^3 B_p^3 s^3}{s^6 + 2\bar{\Omega}_c B_p s^5 + (3\bar{\Omega}_{p0}^2 + 2\bar{\Omega}_c^2 B_p^2)s^4 + (4\bar{\Omega}_c B_p \Omega_{p0}^2 + \bar{\Omega}_c^3 B_p^3)s^3 + (3\Omega_{p0}^4 + 2\bar{\Omega}_c^2 B_p^2 \Omega_{p0}^2)s^2 + 2\bar{\Omega}_c B_p \Omega_{p0}^4 s + \Omega_{p0}^6} \\ &= \frac{3.243\,366 \times 10^8 s^3}{s^6 + 1.374\,138\,4\times 10^3 s^5 + 8.050\,235\times 10^6 s^4 + 6.834\,166\times 10^9 s^3 + 1.906\,863\,2\times 10^{13} s^2 + 7.770\,993\,28\times 10^{15} s + 1.329\,024\,3\times 10^{19}} \end{aligned}$$

切贝雪夫 I 型

(1) 由 $\bar{\Omega}_p=1$ 且已求出的低通滤波器的参量 $\bar{\Omega}_{st}$ 及给定的 R_p、A_s,利用(7.5.65)式,可求得切贝雪夫 I 型低通滤波器的阶次 N

$$N \geqslant \frac{\operatorname{arcch}\left[\sqrt{10^{0.1A_s}-1}\Big/\sqrt{10^{0.1R_p}-1}\right]}{\operatorname{arc\,ch}(\bar{\Omega}_{st}/\bar{\Omega}_p)} = \frac{\operatorname{arcch}(13.010\,06)}{\operatorname{arcch}(2.5)} = \frac{3.257\,344}{1.566\,768} = 2.07$$

取 $N=2$,因为它与 2.07 很接近,当然最后要验证频率响应是否满足要求,若不满足,再改取 $N=3$。

(2) 查表 7.5,可得 $N=2$,$R_p=2$dB 时的归一化原型切贝雪夫低通滤波器的系统函数 $H_{an}(s)$,同时可查出 $\varepsilon=0.764\,783\,1$($\varepsilon$ 也可用(7.5.58)式算出 $\varepsilon=\sqrt{10^{0.1R_p}-1}$)。

$$H_{an}(\bar{s}) = \frac{\dfrac{1}{2^{(2-1)}\varepsilon}}{\bar{s}^2 + 0.803\,816\,4\,\bar{s} + 0.823\,060\,3}$$

(3) 按表 7.8 的相应变换关系,求出所需模拟带通滤波器的系统函数 $H_{bp}(s)$

$$\begin{aligned} H_{bp}(s) &= H_{an}(\bar{s})\Big|_{\bar{s}=\frac{s^2+\Omega_{p0}^2}{sB_p}} \\ &= \frac{\dfrac{B_p^2}{2\varepsilon}s^2}{s^4 + 0.803\,816\,4B_p s^3 + (2\Omega_{p0}^2 + 0.823\,060\,3B_p^2)s^2 + 0.803\,816\,4B_p\Omega_{p0}^2 s + \Omega_{p0}^4} \end{aligned}$$