

2016-2017 《矩阵论》回忆卷

By Laughing 哥

一、矩阵 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 的特征值为 λ_i, σ_i ($i=1, \dots, n$)

证明: (1) $\det(\mathbf{AB}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i$;

(2) 若 $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i$;

(3) $\text{SVD}(\mathbf{A}^H \mathbf{A})$ 的奇异值为 λ_i^2 。

二、对于方阵 $\mathbf{A}_{8 \times 8}$, 已知 $\mathbf{A}^3 = 3\mathbf{A}$, 请求出所有可能的 $\det(\mathbf{A})$ 。

三、已知方阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 均为可逆矩阵，

证明：

$$(\mathbf{I} + \mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{BA})^{-1}$$

四、当 α 为何值时，线性方程组：

$$\alpha x_1 + \alpha x_3 = 3 - 2\alpha$$

$$2x_1 + x_2 + (\alpha + 3)x_3 = \alpha$$

$$3x_1 + \alpha x_2 + (2\alpha + 3)x_3 = 2\alpha$$

有唯一解、无解和无穷多解。

五、Tikhonov 正则化，其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda > 0$:

$$\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2$$

求出 \mathbf{x} 的最优解。

六、 $f(\mathbf{c})$ 是关于 \mathbf{c} 的优化问题，请求出利用梯度下降法进行优化的 \mathbf{c}_k 的迭代方程，其中 k 为迭代的次数，并说明迭代步长与收敛性的关系。

$$f(\mathbf{c}) = \mathbf{c}^H \mathbf{R} \mathbf{c} - \mathbf{c}^H \mathbf{d} + \mathbf{d}^H \mathbf{c}$$

七、已知数据点 $(2, 4)$, $(2, 1)$ $(5, 1)$, 请求出总体最小二乘的拟合直线。

八、 \mathbf{u} 和 λ 是矩阵 \mathbf{A} 的特征向量和对应的特征值, 请证明 \mathbf{u} 是 $\mathbf{A}^3 + \mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + 3\mathbf{I}$ 的特征向量, 并求出与此特征向量对应的特征值。

九、简答题

1. 试写出三种可用于有色噪声白化的矩阵分解方法。

2. 请说明凸函数的特点。

3. 请叙述外罚函数和内罚函数的优缺点。

4. 请说明 Tikhonov 正则化和反正则化的目的