

一、矩阵 A、B 的特征值为 λ_i 、 σ_i ($i=1, 2, \dots, n$)

(1) $\det(AB) = \prod_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i$

(2) 若 $A=B$, 则 $\text{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i$

(3) 若 A 可逆, 则 $\lambda_i \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|_2}$

二、对 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 奇异值分解, 写出其奇异矩阵

三、设 $A = \begin{bmatrix} -13 & 8 & -4 \\ -20 & 13 & -6 \\ 8 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, 求 $h(A) = A^5 - 3A^4 - A^3 + 3A^2 - A + 5I$ (其中 I 为三阶单位矩阵)

四、证明:

(1) 若 A 为 Hermitian 矩阵, 且 $A^2 = A$, $\text{rank}(A) = r < n$, 试证明存在 $n \times n$ 的酉矩阵 V 使得:

$$V^H A V = \text{diag}(I_r, \mathbf{0})$$

(2) 若 A 为 Hermitian 矩阵, 试证明 A 为正定矩阵的充分必要条件为, 存在可逆矩阵 Q 使得 $A = Q^H Q$ (证明充分性和必要性)

五、求微分

(1) $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + b \mathbf{x} + c$ (其中 c 为常数, B 为向量), 求 $f(\mathbf{x})$ 的梯度

(2) 设 $f(\mathbf{x}) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$, $f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \delta_i$, $\delta = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n]^T$ (每一项为常数), 求 $\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}$

六、最小二乘

已知三个数据点 $(2, 1)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$ ，求其总体最小二乘拟合和一般最小二乘拟合（写出拟合直线和距离平方和）

七、作业题

令代价函数为 $f(w) = w^H R_e w$ ，并且给滤波器加约束条件 $Re(w^H x) = b$ ，其中 b 为一常数。试求最优滤波器 w 。（ R_e 可逆）

八、概念题

- (1) 在混合约束条件下，写出混合内罚函数与混合外罚函数
- (2) 写出超定矩阵最小二乘解的形式（假设 $A^H A$ 可逆），若 $A^H A$ 可逆，写出一种解超定方程的最小二乘解的方法
- (3) 标准正交变换和旋转变换的区别和联系，举例说明其作用