

数字信号处理

2017年秋冬学期

第十二讲

2017年12月25日

6.4 运算中的有限字长效应

7 多抽样率数字信号处理

6.4 运算中的有限字长效应——FIR DF的有限字长效应

直接型/横截型/卷积型

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m)$$

$$y(n) + f(n) = \sum_{m=0}^{N-1} [h(m)x(n-m)]_Q = \sum_{m=0}^{N-1} h(m)x(n-m) + \sum_{m=0}^{N-1} e_m(n)$$

$$\Rightarrow f(n) = \sum_{m=0}^{N-1} e_m(n) \Rightarrow \sigma_f^2 = N\sigma_e^2 = \frac{1}{12}q^2 N = \frac{N}{3} \cdot 2^{-2(L+1)}$$

与阶数和字长有关，与滤波器系数值没有关系

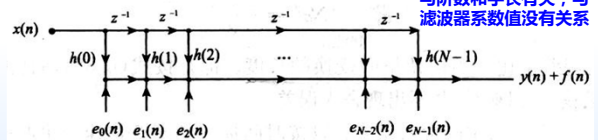


图 6.18 横截型结构 FIR 滤波器的舍入噪声的统计模型

数字信号处理 - 数字信号处理中的有限字长效应

6.4 运算中的有限字长效应——DFT中的有限字长效应

长度为N的复序列DFT $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$

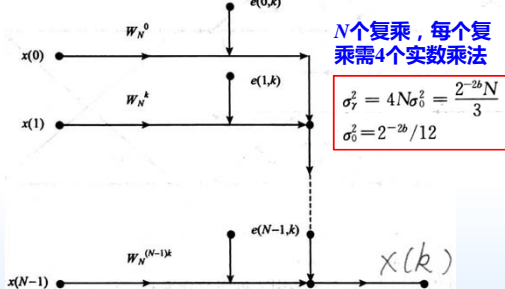


图 6.19 DFT 计算中定点舍入的统计模型

数字信号处理 - 数字信号处理中的有限字长效应

3

6.4 运算中的有限字长效应——FFT中的有限字长效应

每个X(k)的计算涉及m=lnN步，第r步有N/2^r=2^{m-r}个蝶形，总蝶形数

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{m-2} + 2^{m-1} = 2^m - 1 = N - 1$$

每个蝶形包含1个复乘，1个复乘包含4个实乘，误差源总数4(N-1)

$$\sigma_y^2 = 4(N-1) \frac{2^{-2b}}{12} \approx \frac{2^{-2b}N}{3}$$

相比DFT，FFT基本不改变单个X(k)计算的复乘总数（改变总的复乘数目）。

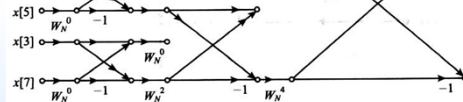


图 6.20 计算 X[3] 的简化流程图

数字信号处理 - 数字信号处理中的有限字长效应

4

6.4 运算中的有限字长效应——极限环振荡

运算中的量化，导致滤波器是一个非线性系统，引起有限精度下对特定输入信号呈现出不稳定行为，常产生两种极限环振荡——颗粒型极限环振荡和溢出振荡。

零输入极限环振荡/颗粒型极限环振荡

对于一个稳定的IIR DF，如果它的输入自 $n > n_0$ 后永远是零，那么它的输出在无限精度运算下必然逐渐衰减到零。

但在有限字长运算时，其输出可能衰减到某一非零的幅度范围，尔后呈现振荡特性，叫零输入极限环振荡。

数字信号处理 - 数字信号处理中的有限字长效应

6.4 运算中的有限字长效应——极限环振荡

零输入极限环振荡（一阶IIR滤波器为例）

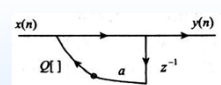
差分方程 $y(n) = ay(n-1) + x(n)$

$$\text{其中} \quad a = \frac{1}{2} (= 0_{\Delta} 100) \quad x(n) = \begin{cases} \frac{7}{8} (= 0_{\Delta} 111) & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

只在0时刻有输入，无限精度时， $n \rightarrow \infty$ ，则 $y \rightarrow 0$

设寄存器长度为4位，非线性差分方程为

$$\hat{y}(n) = Q[a\hat{y}(n-1)] + x(n)$$



(a) 乘积量化产生的非线性系统

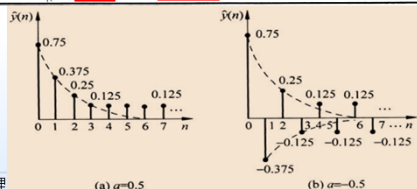
数字信号处理 - 数字信号处理中的有限字长效应

6.4 运算中的有限字长效应——极限环振荡

零输入极限环振荡

表 6.2 一阶 IIR 滤波器的有限精度运算过程 ($a=0.5$)

N	$y(n)$	$\hat{y}(n-1)$	$a \hat{y}(n-1)$	$Q[a \hat{y}(n-1)]$	$\hat{y}(n)=Q[a \hat{y}(n-1)]+x(n)$
0	0.111	0.000	0.000000	0.000	0.111=7/8
1	0.000	0.111	0.011100	0.100	0.100=1/2
2	0.000	0.100	0.010000	0.010	0.010=1/4
3	0.000	0.010	0.001000	0.001	0.001=1/8
4	0.000	0.001	0.000100	0.001	0.001=1/8



数字信号处理

(a) $a=0.5$

(b) $a=0.5$

6.4 运算中的有限字长效应——极限环振荡

零输入极限环振荡

$$\text{舍入误差 } |Q[a\hat{y}(n-1)] - a\hat{y}(n-1)| \leq \frac{1}{2} \times 2^{-L}$$

$$\text{极限环内有 } |Q[a\hat{y}(n-1)]| = |\hat{y}(n-1)|$$

$$\text{代入得 } |\hat{y}(n-1)| - |a| |\hat{y}(n-1)| \leq \frac{1}{2} \times 2^{-L}$$

$$\Rightarrow |\hat{y}(n-1)| \leq \frac{\frac{1}{2} \times 2^{-L}}{1 - |a|}$$

一阶IIR滤波器的死区

若 $a=1/2$, $L=3$, 死区值为 $1/8$ 。当输入为0, 输出落入死区之内时, 滤波器进入极限环状态, 并且一直保持这种工作模式, 直到输入为非零, 使输出脱离死区为止。

数字信号处理 - 数字信号处理中的有限字长效应

6.4 运算中的有限字长效应——极限环振荡

溢出振荡

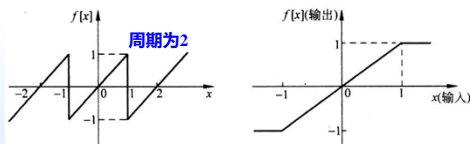
补码运算中, 当两数之和等于或大于1, 或小于-1时, 产生溢出, 其溢出特性为周期为2的周期性函数

$$f[x] = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 1 \\ f(x + 2K), & x < -1, x \geq 1 \end{cases}$$

其中K为整数, 如

$$f[4.15] = f[4.15 - 4] = f[0.15] = 0.15$$

$$f[-2.75] = f[-2.75 + 2] = f[-0.75] = -0.75$$



数字信号处

(a) 相加溢出特性

补码数相加特性

(b) 饱和加法特性

6.4 运算中的有限字长效应——极限环振荡

溢出振荡

尺度变换

$$|y_k(n)| = \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k(m)x(n-m) \right| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)| |x(n-m)|$$

若输入的上界为 A_x , 则

$$|y_k(n)| \leq A_x \sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)| \leq 1$$

对输入进行尺度变换, 使其上界满足 $A_x < \frac{1}{\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)|}$

其他变换方法

$$A_x < \frac{1}{\max_{0 \leq \omega \leq \pi} |H_k(\omega)|} \quad A_x < \frac{1}{\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h_k(m)|^2 \right]^{1/2}}$$

数字信号处理 - 数字信号处理中的有限字长效应

7.1 多抽样率数字信号处理——概述

- 单抽样率数字信号处理系统: 具有单一抽样率的数字系统
- 多抽样率数字信号处理系统: 具有多种抽样率的数字系统
- 多抽样率系统的应用: 音频/视频信号处理系统、时频数字信号处理系统等
- “多抽样率数字信号处理”的核心内容是信号抽样率的转换及滤波器组。

数字信号处理 - 多抽样率数字信号处理

11

7.1 多抽样率数字信号处理——概述

信号抽样率变换的方法

方法一: 数字信号经过 D/A 变换恢复出原模拟信号, 再按新抽样率对该模拟信号进行 A/D 变换, 最终得到所要求的数字信号。

特点: 可实现任意频率的转换, 但前后两个抽样率不同的数字信号之间有一定的误差 (信号重构误差和量化误差)。

方法二: 在数字域中采用抽取和内插的方法进行不同抽样率间的变换。

特点: 不引入误差, 但处理技术较复杂。

数字信号处理 - 多抽样率数字信号处理

12

7.1 多抽样率数字信号处理——概述

- **抽取 (Decimation)** : 取样率按整数因子降低, 也称为**下取样 (Down-Sampling)**——是去掉过多数据的过程。
- **内插 (Interpolation)** : 取样率按整数因子升高, 也称为**上取样 (Up-Sampling)**——是增加数据的过程。
- 抽取、内插及其二者相结合的使用便可实现信号取样率的转换。

7.2 以整数因子D抽取

按整数因子D抽取 : 对序列 $x(n)$ 每隔 $D-1$ 个样值抽取出一个样值, 构成新的序列 $y_D(n)$ 。

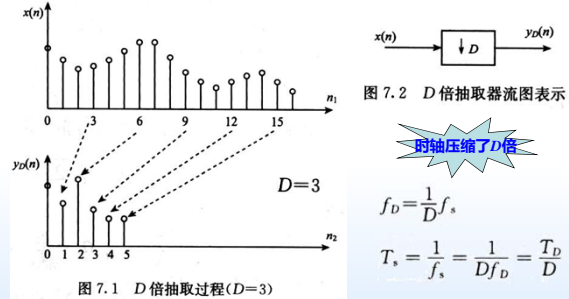


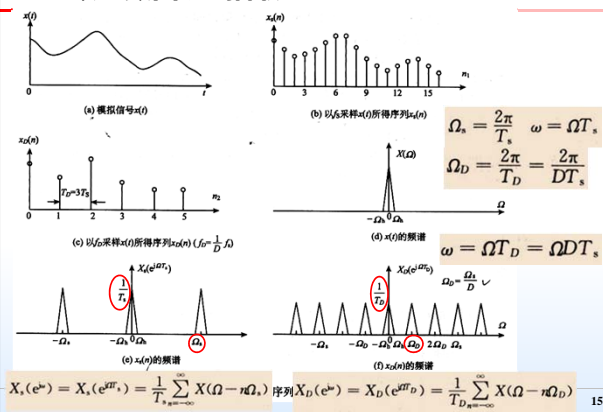
图 7.2 D 倍抽取器流图表示

时轴压缩了D倍

$$f_D = \frac{1}{D} f_s$$

$$T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{D f_D} = \frac{T_D}{D}$$

7.2 以整数因子D抽取



7.2 以整数因子D抽取——抽取前后数字域频谱关系

$$f_y = \frac{f_x}{D} \quad T_y = \frac{1}{f_y} = \frac{D}{f_x} = D T_x \quad \omega_y = \Omega T_y = \Omega D T_x = D \omega_x$$

抽取前后序列之间的关系 $y_D(nT_y) = x(nT_x)$

定义中间序列

$$x'(n) = x(n) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(n - mD) = \begin{cases} x(n) & n = mD, m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$y_D(n)$ 为该序列去除值为零的点后的序列 $y_D(n) = x'(Dn)$

$$Y_D(e^{j\omega_y}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y_D(m) e^{-j\omega_y m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x'(Dm) e^{-j\omega_y m}$$

傅里叶级数形式

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [x(Dm) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(Dm - kD)] e^{-j\omega_y m} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(Dm) \delta(l - kD) e^{-j\omega_y m}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(l - kD) = \frac{1}{D} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\frac{2\pi}{D} kl}$$

$$\text{令 } l = Dm \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x(l) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(l - kD)] e^{-j\omega_y l}$$

7.2 以整数因子D抽取——抽取前后数字域频谱关系

代入得频谱关系式

$$Y_D(e^{j\omega_y}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[x(l) \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} e^{j\frac{2\pi}{D} kl} \right] e^{-j\omega_y l}$$

$$= \frac{1}{D} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{D-1} x(l) e^{-j\frac{2\pi}{D} kl} \right] e^{-j\omega_y l} = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{j(\omega_y - \frac{2\pi}{D} k)})$$

以 ω_k 为变量的频谱关系式

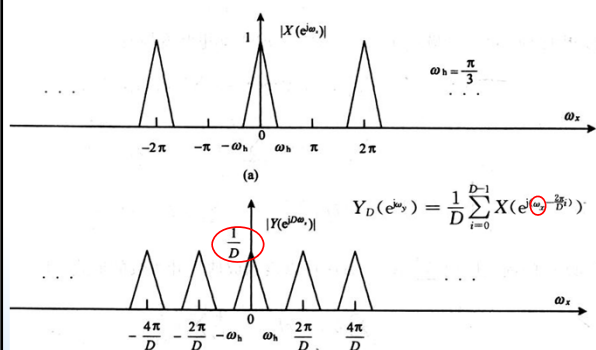
$$Y_D(e^{j\omega_y}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(e^{j(\omega_y - \frac{2\pi}{D} k)})$$

代入 $z_y = e^{j\omega_y}$ 和 $z_x = e^{j\omega_x}$

得Z域关系式

$$Y_D(z_y) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(z_y^{\frac{1}{D}} e^{-j\frac{2\pi}{D} k}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(z_x e^{-j\frac{2\pi}{D} k}) = \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{D-1} X(z_x W_D^k)$$

7.2 以整数因子D抽取——抽取前后数字域频谱关系



7.2 以整数因子 D 抽取——抽取前后数字域频谱关系

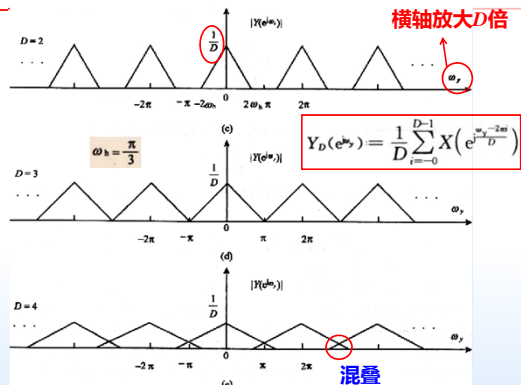


图 7.4 不同抽取后信号频谱的变化

19

7.2 以整数因子 D 抽取——抽取前后数字域频谱关系

抽取因子 D 确定时, 信号最高频率 $\omega_h \leq \pi/D$

信号带宽限制条件 $[-\frac{\pi}{D}, \frac{\pi}{D}]$

抗混叠滤波器 $H_D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\pi}{D} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

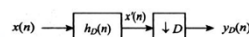
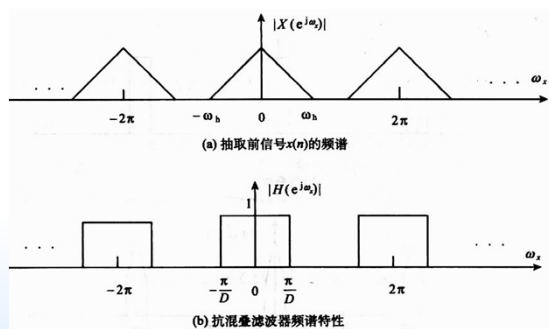


图 7.5 带抗混叠滤波器的抽取器系统框图

数字信号处理 - 多抽样率数字信号处理

20

7.2 以整数因子 D 抽取——抽取前后数字域频谱关系



21

7.2 以整数因子 D 抽取——抽取前后数字域频谱关系

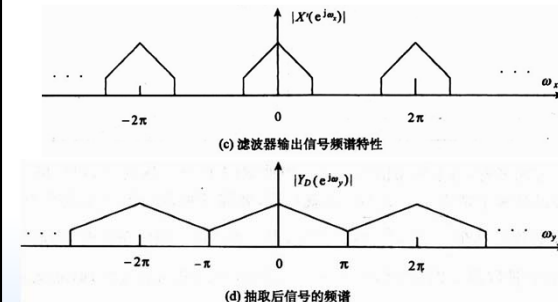


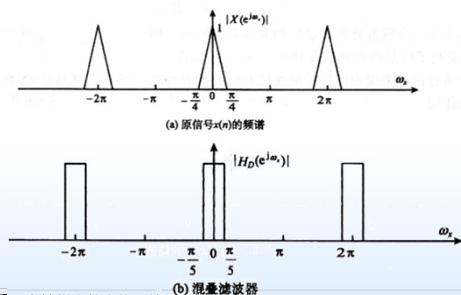
图 7.6 抗混叠滤波器在抽取系统中的作用

数字信号处理 - 多抽样率数字信号处理

22

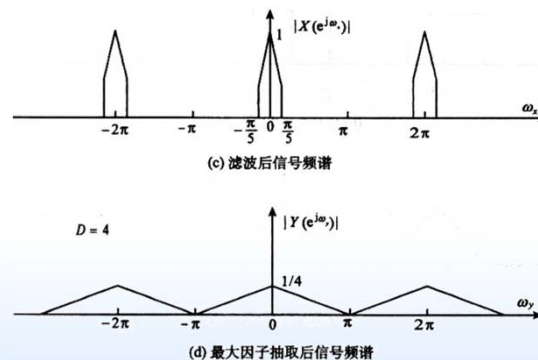
7.2 以整数因子 D 抽取——抽取前后数字域频谱关系

例 7.1 设信号 $x(n]$ 的频谱如图 7.7(a) 所示, 现对其进行抽取处理, 求(1)信号的最大抽取因子及抽取后信号的频谱。(2)若对 $x(n]$ 进行 $D=5$ 的抽取, 设抽取后信号为 $y[n]$, 求信号 $y[n]$ 的谱分布; 若要使信号 $y[n]$ 无失真, 求抗混叠滤波器的截止频率。



23

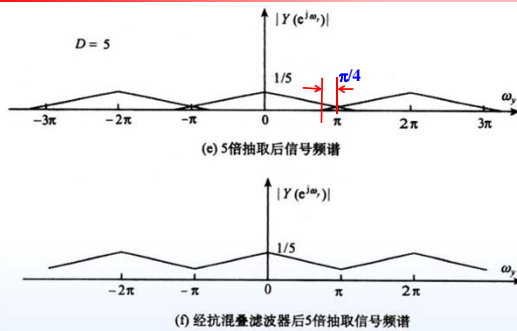
7.2 以整数因子 D 抽取——抽取前后数字域频谱关系



数字信号处理 - 多抽样率数字信号处理

24

7.2 以整数因子D抽取——抽取前后数字域频谱关系



p. 371 图 7.7 例 7.1 中信号频谱特性

数字信号处理 只对信号 $[-\pi/5, \pi/5]$ 频域内的信息感兴趣 X

25

7.3 以整数因子I内插

零值内插：在原序列 $x(n)$ 的相邻取样点之间插入 $I-1$ 个零值，形成一个新的序列 $y_I(n)$ 。

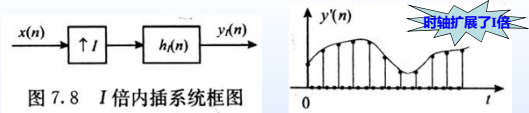
✓ 内插前后和 取样周期间关系： $T_y = T_x / I$

✓ 取样频率间关系： $f_y = I \cdot f_x$

✓ 数字角频率间关系： $\omega_y = \omega_x / I = \Omega T_x / I$

✓ 两个信号间关系：

$$y_I(n) = \begin{cases} x(n/I) & n = 0, \pm I, \pm 2I, \dots \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (7.14)$$



数字信号处理 - 多抽样率数字信号处理

26

7.3 以整数因子I内插——内插前后信号频谱关系

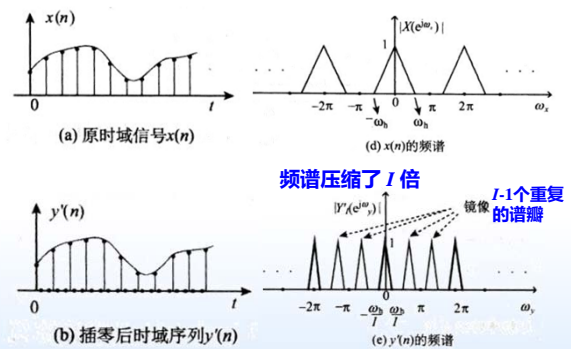
$$\begin{aligned} Y_I(e^{j\omega_y}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_I(nT_y) e^{-j\omega_y nT_y} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_x/I) e^{-j\omega_y nT_y} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_x) e^{-j\omega_y mT_x} = X(e^{j\omega_x}) = X(e^{j\omega_y/I}) \\ Y_I(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_I(n) z^{-n} = \sum_{n=nd}^{\infty} y_I(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=nd}^{\infty} x\left(\frac{n}{I}\right) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-md} = X(z^I) \end{aligned}$$

$z = e^{j\omega_y}$

数字信号处理 - 多抽样率数字信号处理

27

7.3 以整数因子I内插——内插前后信号频谱关系



数字信号处理 - 多抽样率数字信号处理

28

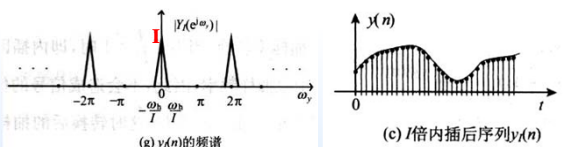
7.3 以整数因子I内插——内插前后信号频谱关系

低通滤波器，滤除镜像谱瓣

$$H_I(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\pi}{I} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(f) 去镜像滤波器频率特性

$$Y_I(e^{j\omega_y}) = X(e^{j\omega_y/I})$$



数字信号处理 - 多抽样率数字信号处理

29

习题

第12次作业请到DSP公邮下载：
邮箱：zju_dsp@163.com

1月8日交

阅读资料：

- 1) IIR滤波器定点运算中零输入的极限环振荡和溢出振荡
- 2) 升采样中低通滤波器增益I的推导

30