Modelli di Programmazione Intera

In questa lezione

- Introduzione
- Modelli dello zaino
- Modelli di ottimizzazione con costi fissi di avviamento

Introduzione

- La proprietà di interezza è un attributo delle variabili di decisione
- In molte applicazioni reali, le variabili sono naturalmente intere (numero di prodotti realizzati, scelta tra un numero finito di alternative …)
- In questo caso si parla di Programmazione a numeri interi (PI).
- Considereremo sempre il caso di funzioni di vincolo ed obiettivo lineare, quindi ci concentreremo sulla PLI.
- In base ai valori delle variabili di decisione, si parla di:
  - ✓ *PLI «pura»*: quando tutte le variabili di decisione sono vincolate ad assumere valori interi e/o binari;
  - ✓ *PI* «mista» (PIM): quando solo alcune delle variabili di decisione sono vincolate ad assumere valori interi e/o binari.

Introduzione

- In taluni casi, è possibile trascurare il vincolo di interezza sulle variabili di decisione.
- Questo si verifica quando la soluzione, determinata arrotondando i valori frazionari ottenuti risolvendo il modello di ottimizzazione come se le varabili di decisione fossero continue, ha un effetto trascurabile sia sul mancato soddisfacimento dei vincoli e sia sul valore della funzione obiettivo.
- Inoltre, nel caso in cui la matrice dei coefficienti tecnologici soddisfi alcune specifiche proprietà (TUM), la soluzione del problema continuo è comunque a valori interi

Modelli dello zaino

- Il modello dello zaino («knapsack») è un modello di PLI di tipo binario, che presenta una struttura molto semplice, utilizzata per rappresentare diversi problemi di interesse pratico.

- Sia dato un insieme di n «oggetti», a ciascuno dei quali è associato un «valore» c_j e un «peso» $p_j, j = 1, \dots, n$.

- Definita una limitazione *b* sul peso totale trasportabile da uno «zaino», il problema consiste nello scegliere il sottoinsieme di oggetti da inserire nello zaino in modo tale da massimizzarne il valore complessivo, rispettando la capacità dello zaino.

Modelli dello zaino

- Indichiamo con x_j le variabili di decisione. Per ogni oggetto j, la corrispondente variabili assume valore pari a 1 se l'oggetto j è inserito nello zaino, 0 altrimenti.

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.v.

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq b$$

$$x_j \in \{0,1\}, j = 1,\ldots,n.$$

Modelli dello zaino

- Si assume che $c_j > 0, j = 1, \dots, n$, altrimenti, banalmente, non si avrebbe alcun vantaggio nell'inserire l'oggetto *j* nel sacco.

- Si assume inoltre che $p_j \leq b, j = 1, \dots, n$, cioè, che ogni oggetto preso singolarmente non violi il vincolo di capacità e quindi possa essere inserito nel sacco, altrimenti, l'oggetto *j* non si potrebbe comunque inserire nello zaino (indipendentemente da quali altri oggetti vengano inseriti).

- Infine, affinché il problema sia significativo, si assume che $\sum_{j=1}^{n} p_j > b$ altrimenti la soluzione banale in cui tutti gli oggetti siano inseriti nel sacco rappresenterebbe la soluzione ottima del problema.

Modelli dello zaino

- Il modello dello zaino può essere utilizzato per rappresentare una vasta gamma di problemi tra cui quello relativo alla «pianificazione degli investimenti».

- Dato un certo budget e un insieme di possibili progetti di investimento indipendenti e competitivi, ognuno dei quali ha un rendimento e comporta un esborso iniziale di capitale, l'obiettivo del problema di pianificazione degli investimenti è quello di scegliere il sottoinsieme di progetti di investimento da realizzare, in modo tale da massimizzare il rendimento totale, entro i limiti imposti dal budget disponibile.

- In questo caso, gli oggetti rappresentano i possibili investimenti alternativi, il peso indica il capitale richiesto da ciascun investimento, il valore indica il rendimento atteso, mentre il peso totale rappresenta il budget disponibile.

Esempio

La società finanziaria svizzera Finest dispone di un capitale di 200000€ da investire in progetti di ricerca e sviluppo.

In particolare, sono al vaglio tre progetti promettenti: **A** , **B** e **C**. La seguente tabella riporta, per ognuno dei tre progetti, il capitale richiesto e il ritorno atteso.

Progetto	Costo [k€]	Ritorno atteso [k€]
A	90	100
B	80	80
C	70	75

Tabella 3.4 Dati relativi al problema dell'investimento finanziario società Finest.

Formulare un modello di ottimizzazione che supporti il management nella scelta dei progetti su cui investire in modo da massimizzare il ritorno atteso.

Esempio

- Siano $x_j, j = A, B, C$, le variabili di decisione di tipo binario, ognuna delle quali assume valore pari a 1 se si decide di investire nel progetto j, 0 altrimenti.

- Il modello risulta

$$\max z(x) = 100x_A + 80x_B + 75x_C$$

$$s.v.$$

$$90x_A + 80x_B + 70x_C \leq 200$$

$$x_A, x_B, x_C \in \{0,1\}$$

- La soluzione ottima risulta essere

$$x^*_A = 1;\ x^*_B = 1;\ x^*_C = 0;$$

- con valore ottimo pari a $z^* = 180$.

Un altro esempio

L'azienda irlandese Load Service si occupa del trasporto di merci sul territorio nazionale. L'azienda dispone di un furgone di capacità pari a 10 quintali, e deve decidere tra 12 scatole isotermiche quali trasportare. Ogni scatola ha un peso e un valore secondo quanto indicato in tabella.

Tipologia	Peso [kg]	Valore [€]
1	114	50
2	90	50
3	75	80
4	80	10
5	55	10
6	140	30
7	120	50
8	105	80
9	66	100
10	98	20
11	165	60
12	100	50

Tabella 3.3 Dati relativi al problema del caricamento dell'azienda Load Service.

Formulare un modello di ottimizzazione di ausilio al decisore.

Modelli dello zaino

Il problema può essere formulato come problema dello zaino considerando le variabili binarie associate alla scelta o meno della scatola

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, \in \{0,1\}$$

Vincolo

$$1{,}14x_1 + 0{,}90x_2 + 0{,}75x_3 + 0{,}80x_4 + 0{,}55x_5 + 1{,}40x_6 + 1{,}20x_7 + 1{,}05x_8 + 0{,}66x_9 + 0{,}98x_{10} + 1{,}65x_{11} + 1{,}10x_{12} \leq 10$$

Funzione obiettivo

$$\max z(x) = 50x_1 + 50x_2 + 80x_3 + 10x_4 + 10x_5 + 30x_6 + 50x_7 + 80x_8 + 100x_9 + 20x_{10} + 60x_{11} + 50x_{12}$$

La soluzione ottima risulta essere

$$x^*_1 = 1;\ x^*_2 = 1;\ x^*_3 = 1;\ x^*_4 = 0;\ x^*_5 = 0;\ x^*_6 = 1;\ x^*_7 = 1;\ x^*_8 = 1;\ x^*_9 = 1;\ x^*_{10} = 0;\ x^*_{11} = 1;\ x^*_{12} = 1$$

$z^* = 550.$

Modelli dello zaino

- Il <u>modello dello zaino classico </u>può essere facilmente modificato in modo da rappresentare situazioni in cui si prevede l’impiego di diversi tipi di risorse, disponibili in quantità limitata, oppure di una unica risorsa, la cui disponibilità varia nel tempo.

- Ad esempio, nel caso del <u>problema della pianificazione di investimenti finanziari</u>, è ragionevole ipotizzare che, accanto alle risorse finanziarie, sia necessario prevedere anche l’utilizzo di risorse umane e tecnologiche e di materie prime, oppure, vi possono essere situazioni in cui l’investimento finanziario avviene su base multiperiodale e la realizzazione di ciascuno progetto richiede un certo finanziamento nell’arco dei diversi periodi dell’orizzonte di riferimento.

Esercizio: l’azienda FlyMex

La compagnia aerea messicana FlyMex valuta la possibilità di ampliare la propria flotta aerea attraverso l’acquisto di nuovi velivoli.

Il progetto si articola su un orizzonte temporale di 4 mesi e mira a valutare 3 diverse opzioni: l’acquisto di un aereo a lunga percorrenza (1), a media percorrenza (2), a breve percorrenza (3).

Il finanziamento richiesto per la realizzazione dei progetti per ciascun mese è indicato in tabella:

	Mese			
Progetto	1	2	3	4
1	750.000	550.000	820.000	500.000
2	200.000	150.000	80.000	105.000
3	980.000	70.000	600.000	203.000

Tabella 3.6 Dati (in €) relativi al problema della pianificazione dei progetti di investimento della compagnia aerea FlyMex.

Esercizio: l'azienda FlyMex

L'azienda stima una disponibilità di budget (in €) pari a 1000000, 750000, 950000 e 1400000, per il primo, secondo, terzo e quarto mese, rispettivamente.

Sulla base di studi di mercato, il management ha stimato un profitto annuo (in €) pari a 480000, 300000 e 250000 derivante dall'impiego dell'aereo a lunga, media e breve percorrenza, rispettivamente.

Stabilire quali progetti finanziare in modo da massimizzare il profitto della compagnia

Esercizio: l'azienda FlyMex

- Il problema può essere formulato attraverso un modello di tipo zaino multi-dimensionale
- Le variabili di decisione, di tipo binario, esprimano la scelta o meno dell'investimento su un progetto.

- In particolare, $x_j, j = 1,2,3$, è uguale a 1 se il progetto j è selezionato, 0 altrimenti.

- I vincoli derivano dalla limitata disponibilità monetaria imposta in ogni mese:

$$
\begin{gathered}
750x_1 + 200x_2 + 980x_3 \leq 1000 \\
550x_1 + 150x_2 + 70x_3 \leq 750 \\
820x_1 + 80x_2 + 600x_3 \leq 950 \\
500x_1 + 105x_2 + 203x_3 \leq 1400
\end{gathered}
$$

Esercizio: l'azienda FlyMex

- L'obiettivo dell'azienda è la massimizzazione del ritorno totale che, espresso in k€ , risulta essere pari a:

$$\max z(x) = 480x_1 + 300x_2 + 250x_3$$

- La soluzione ottima risulta essere:

$$x^*_1 = 1;\ x^*_2 = 1;\ x^*_3 = 0;$$

con valore ottimo pari a $z^* = 780$.

Modelli dello zaino

- In termini generali, il problema dello zaino «multidimensionale» si può formulare assumendo di disporre di *m* risorse o di considerare un orizzonte di pianificazione caratterizzato da *m* periodi di tempo.

- A ogni oggetto $j, j = 1, \dots, n$, oltre al valore c_j, vengono associati *m* pesi $p_{ij}, i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, ciascuno dei quali rappresentante la quantità di risorsa *i* utilizzata dall'oggetto j.

- Supponendo, inoltre, che la quantità di risorsa disponibile, per ogni risorsa $i = 1, \dots, m$, sia b_i, il modello si ottiene dal problema dello zaino classico, in cui il vincolo di capacità viene sostituito dai seguenti vincoli:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \leq b_j, i = 1, \dots, m$$

Varianti problema dello zaino

- È possibile considerare una versione del modello dello zaino nella quale ciascuna variabile di decisione rappresenti il numero di oggetti di un certo tipo da selezionare.

- In questo caso, si assume di avere n tipi di oggetto, e ogni oggetto di tipo j si assume caratterizzato da un valore c_j e da un peso $p_j, j = 1, .., n$, mentre b è il massimo peso totale trasportabile dello zaino.
- Il problema consiste nello scegliere quanti oggetti di ciascun tipo inserire nello zaino, nel rispetto del vincolo di capacità dello zaino, in modo da massimizzarne il valore complessivo.

- Le variabili di decisione intere, sono $x_j, j = 1, \dots, n$, ciascuna indicante il numero di oggetti di tipo j inseriti nello zaino.

- La formulazione del problema coincide con il modello dello zaino formulato in precedenza, in cui i vincoli di tipo binario sono rimpiazzati dai seguenti:

$$x_j \geq 0, intero; \; j = 1, \dots, n$$

Esercizio: l'azienda Sugar

Nel reparto di confezionamento dell'azienda austriaca Sugar, produttrice di biscotti, si deve decidere come riempire ogni scatola di latta considerando di disporre di nove tipi di biscotti differenti. Ciascun tipo di biscotto è caratterizzato da un peso (in g) e un valore (% di cioccolato pregiato contenuto), indicati nella seguente tabella:

Tipo di biscotto	Peso [g]	Valore [% cioccolato pregiato]
1	20	32
2	25	58
3	26	65
4	21	18
5	36	28
6	28	55
7	28	40
8	27	40
9	23	25

Tabella 3.5 Dati relativi al problema dell'azienda Sugar.

Assumendo che la capacità delle scatole sia pari a 120 g, decidere come riempire le scatole in modo da offrire un prodotto pregiato.

Esercizio: l'azienda Sugar

Le variabili di decisione $x_j, j = 1, \dots, 9$, sono intere ed indicano il numero di biscotti di ciascun tipo da inserire nella scatola.

Il modello corrispondente è:

$$\max z(x) = 32x_1 + 58x_2 + 65x_3 + 18x_4 + 28x_5 + 55x_6 + 40x_7 + 40x_8 + 25x_9$$

s.v.

$$20x_1 + 25x_2 + 26x_3 + 21x_4 + 36x_5 + 28x_6 + 28x_7 + 27x_8 + 23x_9 \le 120$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \ge 0, intero;$$

La soluzione ottima risulta essere:

$$x^*_1 = 1;\ x^*_4 = 4;$$

con $z^* = 264$.

Modelli con costi fissi di avviamento

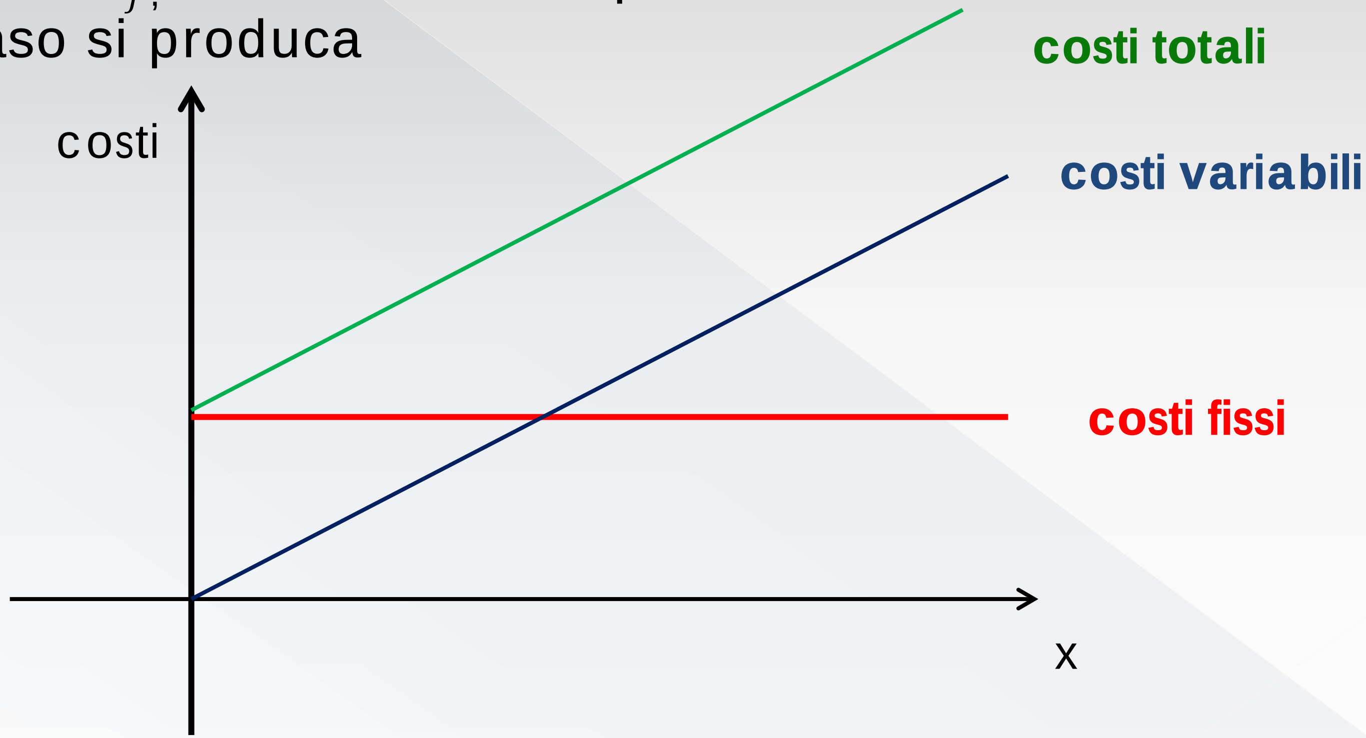
- In diversi contesti applicativi, è abbastanza frequente dover sostenere costi di avviamento o spese fisse per poter avviare una attività.

- Un tipico problema che rientra in un contesto del genere è quello relativo alla pianificazione della produzione di beni, che richiedono l'attrezzaggio e la configurazione dei macchinari usati nel processo produttivo.

- I costi corrispondenti sono detti «costi fissi» e sono sostanzialmente indipendenti dalla quantità prodotta, ma devono essere sostenuti esclusivamente se la produzione del corrispondente bene viene attivata.

Modelli con costi fissi di avviamento

- Si supponga che ad ogni prodotto $j, j = 1, \ldots, n$, oltre al costo unitario variabile di produzione c_j, sia associato anche un costo fisso f_j.
- Il costo di produzione varia in funzione della quantità prodotta x_j, a differenza di quello fisso da considerare solo nel caso si produca



Modelli con costi fissi di avviamento

- Il costo di produzione varia in funzione della quantità prodotta x_j , a differenza di quello fisso da considerare solo nel caso si produca

- Il costo complessivo, relativo al prodotto j, può essere espresso come:

$$z_j(x_j) = \begin{cases} f_j + c_j x_j, & se\ x_j > 0 \\ 0, & altrimenti \end{cases}$$

- Ciò implica che, se $x_j = 0$, allora il costo totale per la produzione del prodotto j è nullo; se, invece, $x_j > 0$, il costo complessivo legato alla produzione del prodotto j è ottenuto sommando il costo fisso f_j e quello variabile $c_j x_j$.

Modelli con costi fissi di avviamento

- La funzione di costo $z_j(x_j)$ presenta chiaramente una discontinuità nell'origine ed è quindi non lineare.

- Utilizzando soltanto le variabili di decisione $x_j, j = 1, \ldots, n$, non è possibile risolvere il problema di discriminare la presenza o meno dei corrispondenti costi fissi

- Si introduce, pertanto, per ogni $j = 1, \ldots, n$, una variabile di tipo binario y_j, avente valore pari a 1 se $x_j > 0$, mentre nel caso in cui $x_j = 0$, risulta pari a 0.

- La funzione obiettivo $z(x, y)$, da minimizzare, del modello di pianificazione della produzione può essere riscritta come segue:

$$z(x, y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} f_j y_j$$

Modelli con costi fissi di avviamento

- Le variabili di decisione di tipo binario $y_j, j = 1, \dots, n$, sono dette variabili «indicatrici» e per esse devono valere le seguenti condizioni logiche:

  se $x_j > 0$, allora $y_j = 1$;
  se $x_j = 0$, allora $y_j = 0$.

- Le condizioni logiche evidenziate possono essere soddisfatte mediante l'introduzione di vincoli opportunamente definiti.

Modelli con costi fissi di avviamento

- Si indichi con M_j una limitazione superiore sul livello di produzione del prodotto j , $j = 1, \ldots, n$.

- L'insieme dei vincoli
$$x_j \leq M_j y_j \text{ , } j = 1, \ldots, n$$

- garantisce che, ciascuna delle variabili di decisione y_j, $j = 1, \ldots, n$, assuma valore 1 se la corrispondente variabile di decisione x_j assume valore positivo (prima condizione logica).

- Il soddisfacimento della seconda condizione logica è garantito attraverso la minimizzazione della funzione obiettivo.
- Infatti, se $x_j = 0, j = 1, \ldots, n$, non sarebbe conveniente far assumere alle corrispondenti variabili indicatrici y_j il valore 1, giacché a ciascuna di esse è associato un costo fisso f_j positivo.

Esercizio

In una centrale elettrica sono disponibili 3 generatori e quotidianamente occorre decidere quali usare in modo da garantire una produzione di almeno 4 MW.

L'uso di un generatore comporta la presenza di personale specializzato che ne sorveglia il funzionamento. Il costo di attivazione, il costo di produzione per MW e la massima capacità di produzione dei 3 generatori sono riportati in tabella. Formulare un modello di ottimizzazione per rappresentare il problema in analisi.

	Costo fisso	Costo MW	Capacità MW
Gen_1	150	30	2
Gen_2	200	50	1,7
Gen_3	100	60	2,5

Esercizio

Si definiscono le variabili di decisione:

- x_j, $j = 1,2,3$, ciascuna delle quali corrispondente ai MW prodotti da ogni generatore j
- y_j, $j = 1,..,3$, di tipo binario, ognuna delle quali avente valore pari a 1 se il corrispondente generatore j è attivato, 0 altrimenti.

Il vincolo relativo alla quantità di energia da soddisfare:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$$

Inoltre, occorre inserire i seguenti vincoli di legame tra le variabili di decisione:

$$x_1 \leq 2y_1;$$
$$x_2 \leq 1{,}7y_2;$$
$$x_3 \leq 2{,}5y_3;$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$y_1, y_2, y_3 \text{ binarie}$$

$$min z(x, y) = 30x_1 + 50x_2 + 60x_3 + 150y_1 + 200y_2 \ +100y_3$$

Template modello con costi fissi

Il problema di pianificazione della produzione con costi fissi di avviamento può essere formulato come modello di PIM binario nel seguente modo:

$$\min z(x,z) = \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j + f_j y_j)$$

s.v.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \leq M_j y_j, j = 1,\ldots,n$$

$$x_j \geq 0, j = 1,\ldots,n$$

$$y_j \in \{0,1\}, j = 1,\ldots,n$$