



Matematica applicata (6cfu)

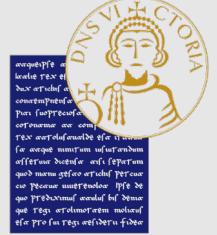
Decisioni in condizioni di Certezza

Dr. Fattoruso Gerarda

fattoruso@unisannio.it

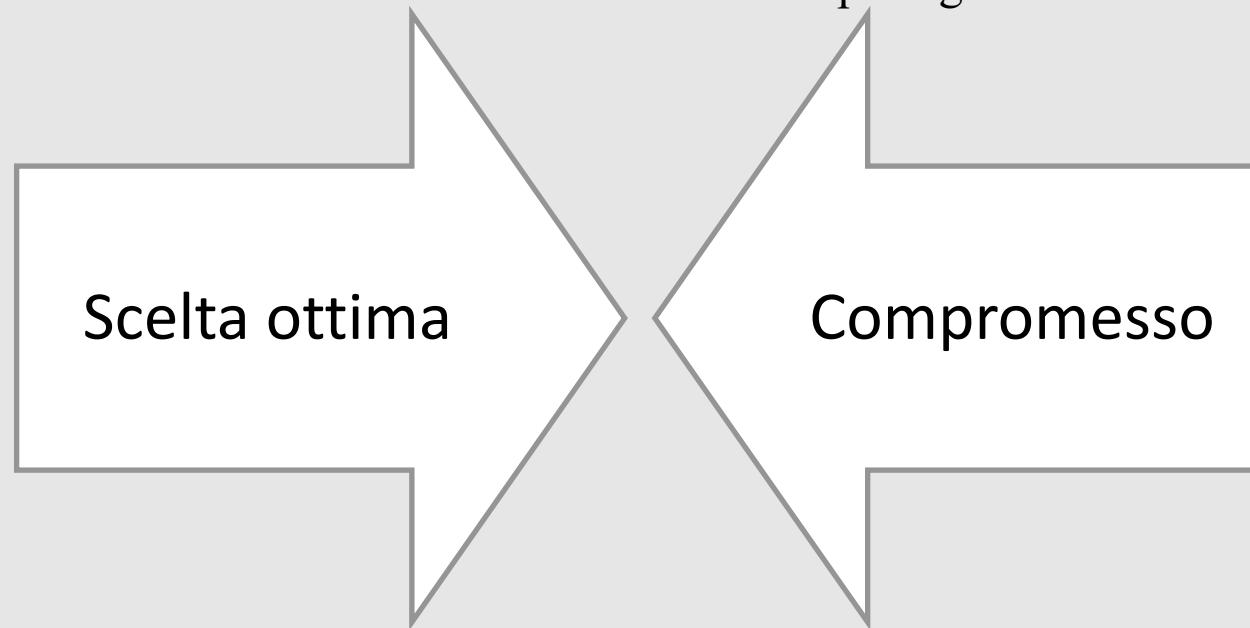
#UNISANNIO

et quae ipse et solus rex et eius
laetare rex est firmatus et solus
dux et iehis etenim iussus et eius
contempnens et pro eo quod et
pici suopreciosam depositum et
coronam et compescit laetare
rex et solus et uelde est iste et
et et que nimis umius usus et dum
cesseruit dicens et nisi separatum
quod manu gesto et iehis per eum
cio pectus uiuet enoloque ipse de
quo prediximus etculus bis dem
que regi et olimos et molitus
est pro sui regi et sideru fidei



Metodi Multi-Criteriali

L'analisi multicriteriale si prefigge di fornire un **supporto al decisore** per realizzare un **compromesso accettabile** tra i diversi obiettivi perseguiti.



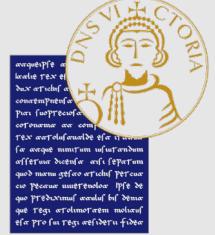


Metodi Multi-Criteriali

I diversi **obiettivi** che il decisore si pone con l'intervento in esame vanno preliminarmente **trasformati in criteri** che permettono di **comparare le varie alternative**

Criteri

Alternative



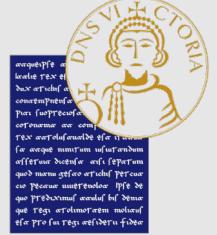
Metodi Multi-Criteriali

Criteri

I criteri costituiscono la traduzione operativa degli obiettivi.

I criteri sono **variabili quantitative o qualitative** che misurano le prestazioni e gli impatti delle alternative analizzate.

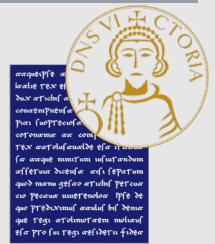
Un criterio consiste in una **funzione g** , definita sull'insieme **A** delle **alternative**, che permette di poter effettuare una **comparazione** tra due alternative **a e b** dell'insieme rispetto ad uno dei differenti punti di vista che descrivono il problema decisionale.



Metodi Multi-Criteriali

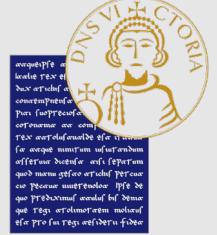
Alternative

Tutte le possibili alternative (azioni) utili a risolvere il problema decisionale



MADM - Definizione di un problema di decisione multicriterio

- Definire l'obiettivo della decisione
- Individuare:
 - un insieme finito $A=\{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ di alternative, o azioni, tra le quali il decisore deve operare la scelta
 - un insieme finito di criteri $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ che le alternative devono soddisfare al fine di realizzare l'obiettivo
- La risoluzione del problema di decisione passa attraverso:
 - la valutazione delle alternative rispetto ai criteri;
 - la determinazione dell'importanza dei criteri per il raggiungimento dell'obiettivo
 - il processo di valutazione deve condurre ad un relazione di ordine debole \geq sull'insieme delle alternative che consente di operare una scelta



Rappresentazione di un problema Multi-Criteriale

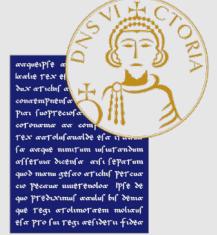
Fasi dell'Analisi Multi-criteriale

- ✓ Determinazione di obiettivo, criteri e alternative
- ✓ Costruzione della Matrice di valutazione
- ✓ Assegnazione di pesi ai criteri
- ✓ Ordinamento delle alternative
- ✓ Analisi di sensitività

Il fulcro centrale dei MCDM è costituito dalla **matrice di decisione** che permette di valutare:
alternative diverse, poste sulle **righe della matrice** secondo diversi obiettivi, o **criteri**, situati sulle **colonne della matrice**

		Criteri			
		C_1	C_2	\dots	C_n
Alternative	A_1	x_{11}	x_{12}	\dots	x_{1n}
	A_2	x_{21}	x_{22}	\dots	x_{2n}
	A_m	x_{m1}	x_{m2}	\dots	x_{mn}

$$W = [w_1, w_2, \dots, w_n]$$



Finalità dell'analisi Multi-criteriale

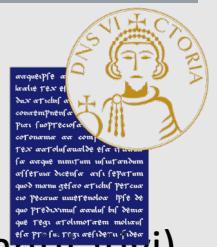
I metodi Multi-Criteriali possono essere utilizzate per:

- Problemi di Ranking: Otttenere un ordinamento delle alternative
- Problemi di Sorting: Classificare le alternative
- Problemi di scelta: Identificare l'alternativa migliore
- Definizione del problema: Distinguere tra alternative accettabili e non accettabili



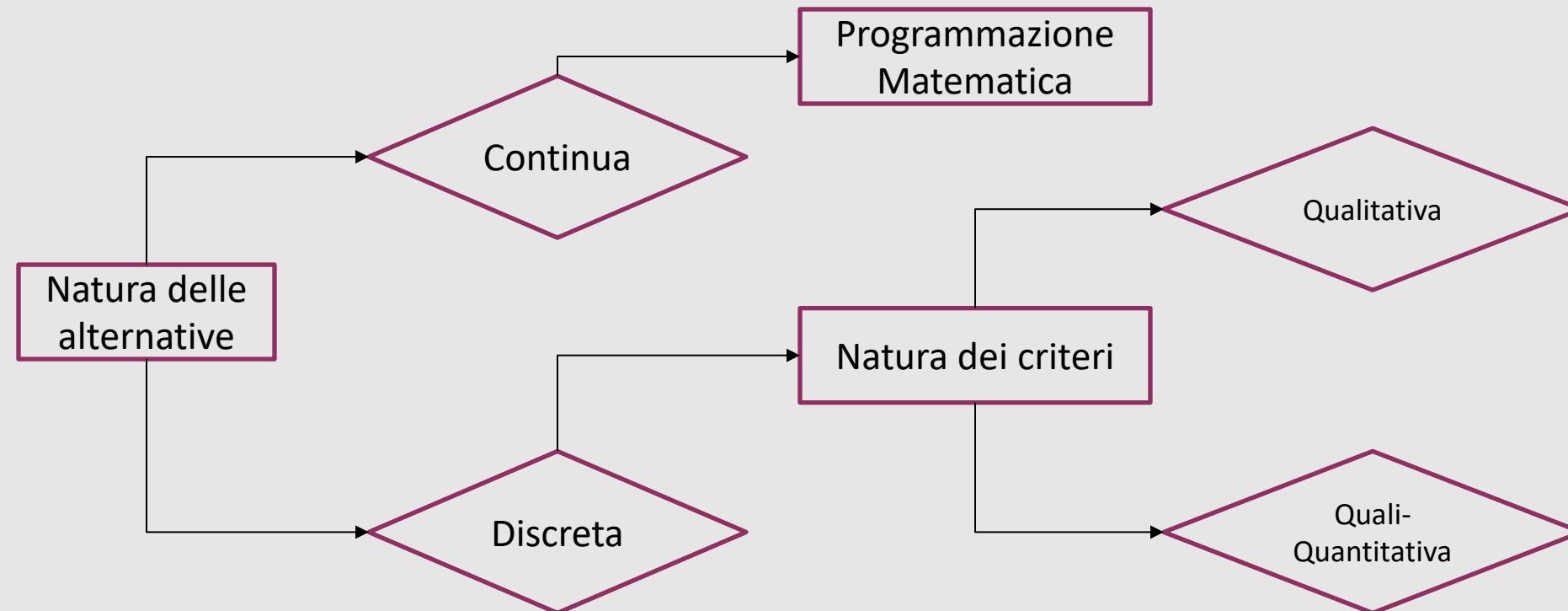
Sistema di Supporto alle Decisioni (DSS)

- Tiene conto dei differenti punti di vista dei DMs o criteri
- Definisce il trade-off tra i criteri
- Formalizza la visione generale in un modello



Analisi Multicriteriale - scelta di un metodo

In base alla tipologia dei fenomeni da valutare, alla natura delle alternative e dei criteri (qualitativi e/o quantitativi), alla quantità e qualità di informazioni (dati) disponibili e all'obiettivo da perseguire, si procede alla scelta del metodo di valutazione.





Metodi Multi-Criteriali

Metodi Multi
Obiettivo (MODM)

- ricercano la **soluzione di un compromesso ideale** assumendo, generalmente, che il problema da risolvere possa essere schematizzato con un modello matematico. **Assumono infinite soluzioni.**

Metodi Multi
Attributo (MADM)

- applicano la matematica discreta ad un gruppo ben definito di **possibili soluzioni** consentendo di fornire un valido supporto alla decisione in molteplici e variegati casi reali.

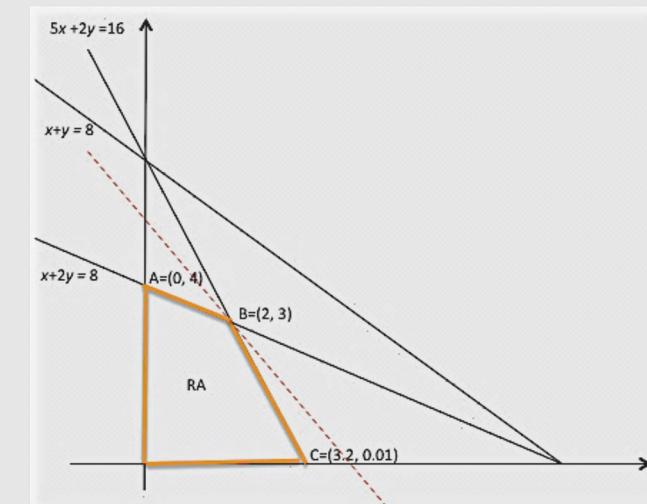


MODM - La programmazione matematica

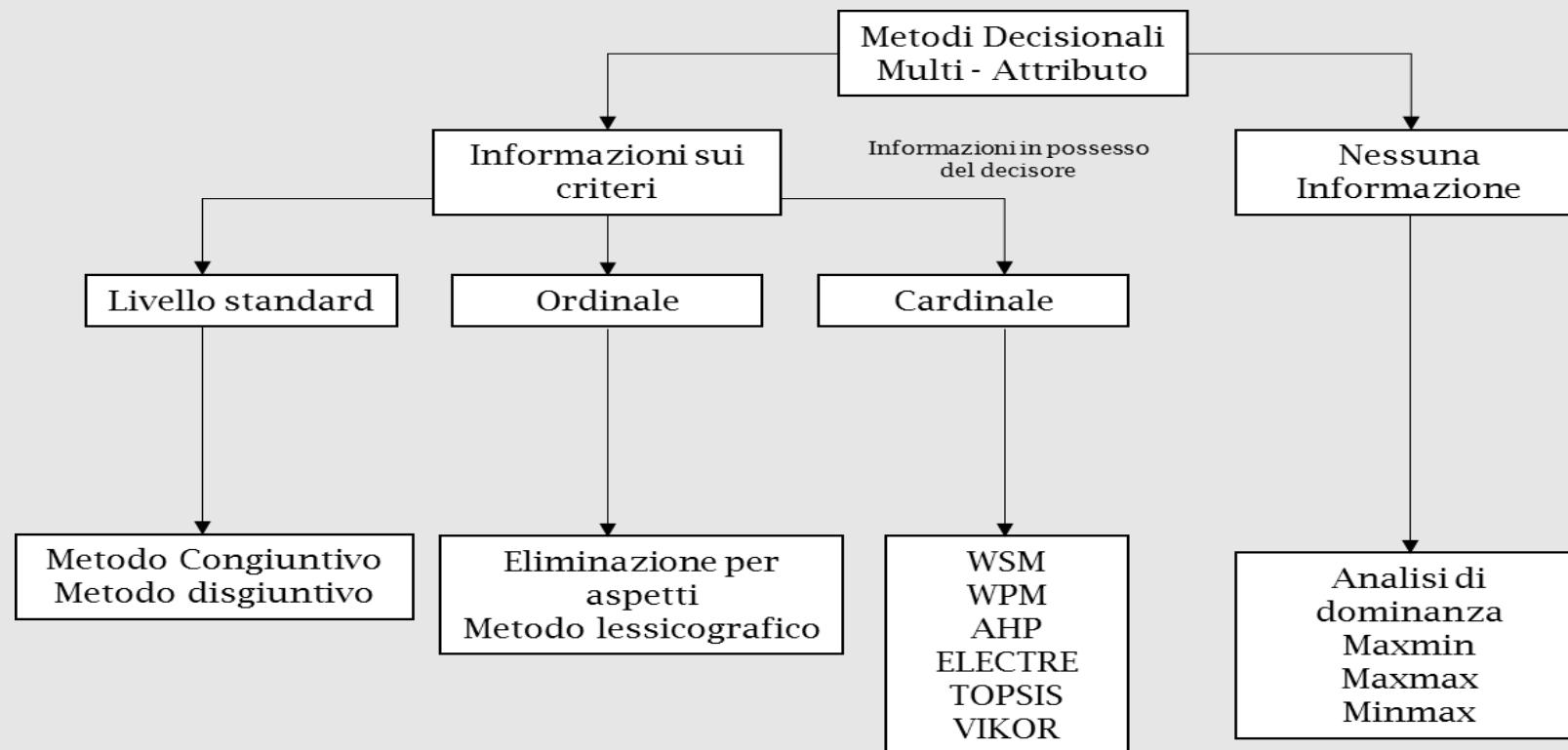
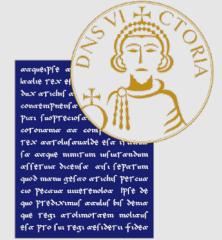
Un problema decisionale multi-obiettivo segue un processo di modellizzazione matematica volto alla ricerca di soluzioni che possano definire il miglior compromesso per il decisore.

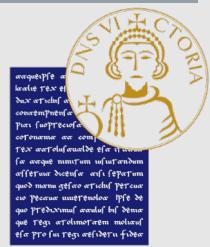
In un problema di programmazione matematica figurano (almeno):

- una *funzione obiettivo* identificabile in un'espressione il cui significato può essere interpretato come un costo (problema di minimizzazione, ad esempio: $\min 3x + 2y - 4xy$) o come un guadagno (problema di massimizzazione, ad esempio: $\max x+y-xy$);
- un *insieme di vincoli* quali relazioni, espresse sotto forma di equazioni o disequazioni, che devono essere soddisfatti tra le variabili.



MADM





Metodi Multi-Criteriali

Per verificare se si è effettuata una corretta valutazione degli obiettivi del problema si può effettuare
una *analisi di sensitività*.

Sensitività sul metodo

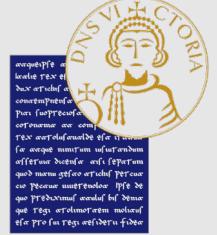
- si applica un diverso metodo di standardizzazione dei dati e (quando possibile) di computazione dei punteggi finali. **Serve a controllare la dipendenza dei risultati dal metodo di calcolo**

Sensitività sui criteri

- garantisce **la validità dello schema adottato** aggiungendo o togliendo alcuni criteri di decisione

Sensitività sui pesi

- si fanno **variare i giudizi di merito** di alcuni criteri permettendo di constatare il grado di influenza di ogni fattore sulla decisione finale.

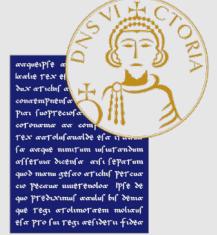


Il problema della scelta delle alternative

Come scegliere l'alternativa?



- Nella matrice di valutazione, i valori presenti nelle diverse righe sono in generale espressi in unità di misura differenti e non confrontabili tra loro.
- La struttura delle preferenze su un criterio non dipendente dal valore assunto dagli indicatori sugli altri criteri
- I criteri risultano mutuamente indipendenti da un punto di vista delle preferenze



Analytic Hierarchy Process (AHP)

Analytic

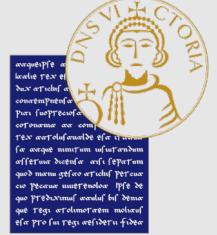
- un metodo di decisione che utilizza dei ragionamenti logico-matematici può essere definito con il termine “Analitico”.

Hierarchy

- Una gerarchia è un sistema che permette di classificare ed organizzare persone, cose, idee, e dove ciascun elemento del sistema gerarchico, fatta eccezione per l'elemento situato al livello più alto, è subordinato ad uno o più elementi.

Process

- Un processo è una serie di azioni, modulazioni, o funzioni che portano ad un fine o ad un risultato.



Analytic Hierarchy Process (AHP)

Ogni problema di valutazione viene affrontato mediante la costruzione di una struttura gerarchica multi-livello comprendente tutti gli elementi che entrano in gioco nel processo decisionale:

- obiettivi globali,
- criteri,
- sotto-criteri,
- alternative.

I dati derivano da confronti a coppie e questi confronti sono utilizzati per ottenere i pesi (importanza) dei criteri e le misure relative dell'importanza delle alternative rispetto a ciascun criterio.

Il metodo AHP:

- può essere utilizzato quando i criteri sono di tipo quantitativo, qualitativo e misto;
- viene utilizzato per ordinare le alternative, determinare la migliore alternativa, allocare le risorse, valutare la sensibilità delle alternative ai cambiamenti dei giudizi;
- consente di valutare le priorità di azioni che possono essere, a seconda dei casi: programmi, strategie d'intervento, piani, progetti, ecc.
- può essere utilizzato per determinare il rapporto benefici/costi di un progetto quando non è possibile valutare in termini esclusivamente monetari i vantaggi e gli svantaggi che deriverebbero dalla sua realizzazione.



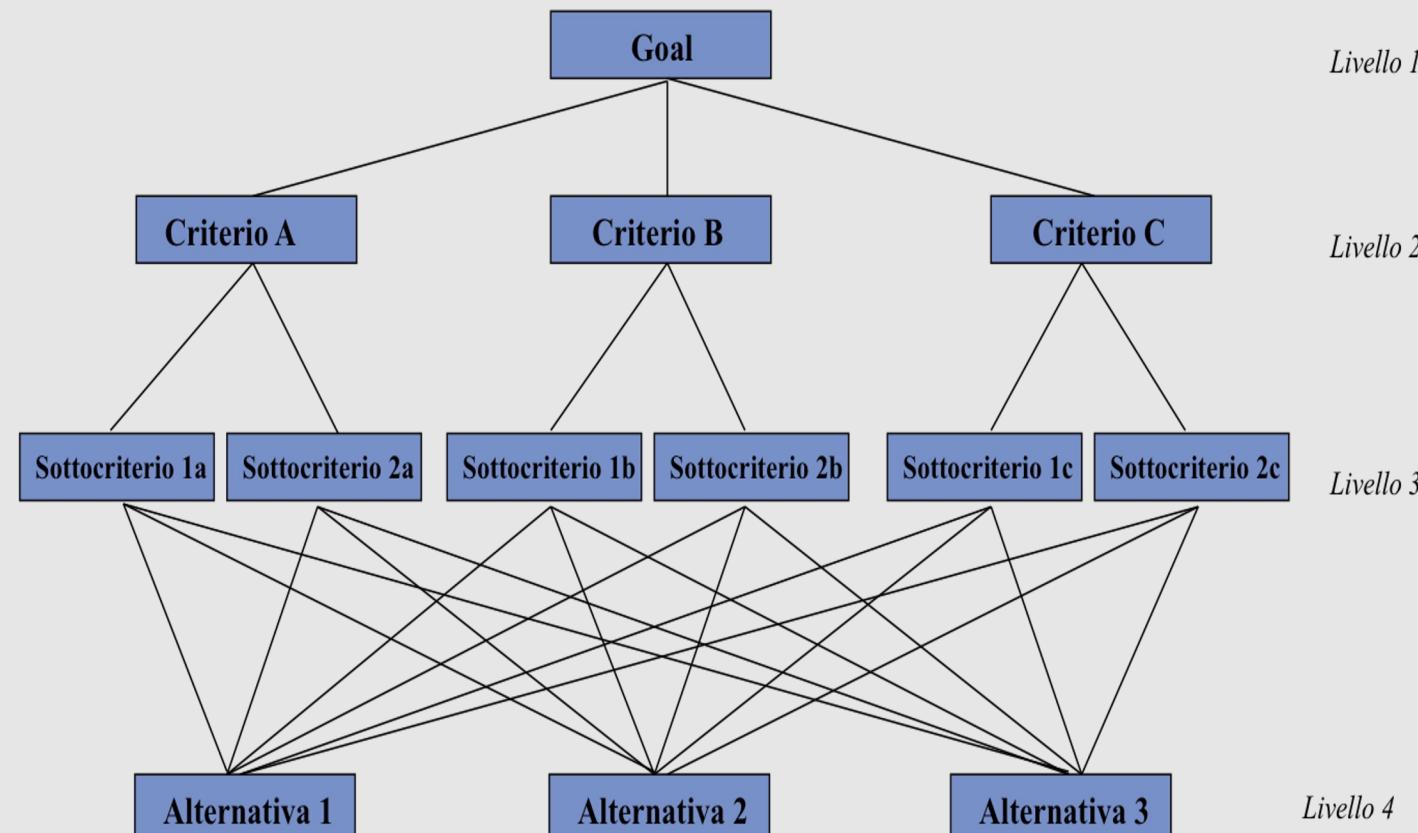
Analytic Hierarchy Process (AHP)

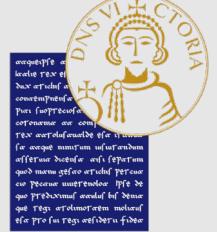
- Sviluppo della gerarchia
- Costruzione della matrice dei confronti a coppie
- Analisi della consistenza dei giudizi
- Determinazione dei pesi locali relativi
- Determinazione dei pesi globali



Fase I: Sviluppo della gerarchia

Un problema complesso può essere meglio compreso spezzettandolo nei suoi elementi costituenti, strutturandoli gerarchicamente, e componendo o sintetizzando i giudizi sull'importanza relativa degli elementi di ogni livello gerarchico in un insieme di priorità globali.





Fase I: Sviluppo della gerarchia

Per ogni livello gerarchico devono valere due proprietà:

- **INDIPENDENZA INTERNA**

Indipendenza tra gli elementi di ogni singolo livello (inner independence).

- **INDIPENDENZA ESTERNA**

- indipendenza degli elementi dei livelli superiori dagli elementi dei livelli inferiori (outer independence)
- dipendenza degli elementi di un livello dagli elementi di un livello superiore e indipendenza dagli elementi del livello inferiore



Fase II: Costruzione della matrice dei confronti a coppie

Determinazione delle priorità locali che esprimono l'importanza relativa degli elementi di un livello gerarchico rispetto ad ogni elemento del livello immediatamente superiore

Dato l'insieme delle alternative $A=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$, ad ogni coppia (A_i, A_j) è assegnato un numero reale positivo a_{ij} che esprime quanto A_i è preferita ad A_j rispetto ad un determinato criterio di valutazione C

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{matrix} & \left(\begin{matrix} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{matrix} \right) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \dots \\ v_{ni} \end{matrix} \quad \text{Weighting vector}$$

Il vettore delle priorità $v = (v_{1i}, v_{2i}, \dots, v_{ni})$ stabilisce un ordinamento di preferenza sull'insieme delle alternative in modo che $A_h > A_k \Leftrightarrow v_{hi} > v_{ki}$



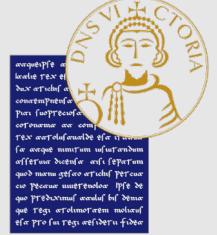
Fase II: Costruzione della matrice dei confronti a coppie

$$A = \begin{matrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{\text{Weighting vector}} & v_{1i} \\ & \xrightarrow{\text{Weighting vector}} & v_{2i} \\ & \xrightarrow{\text{Weighting vector}} & \ddots \\ & \xrightarrow{\text{Weighting vector}} & v_{ni} \end{matrix}$$

$$a_{ij} > 1 \Leftrightarrow A_i \succ A_j$$

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow A_i \sim A_j$$

$$a_{ij} < 1 \Leftrightarrow A_i \prec A_j$$

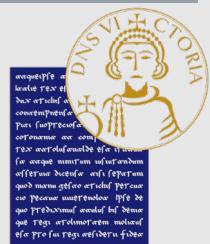


Fase II: Costruzione della matrice dei confronti a coppie

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ A_1 & 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice dei confronti a coppie deve avere le seguenti caratteristiche:

1. È **positiva**: tutti i **minori principali sono positivi** (per minore principale si intende il determinante della sottomatrice quadrata formata dalle prime m righe e m colonne (con $1 \leq m \leq n$)
2. È **reciproca** con $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \quad \forall \quad i, j$
e quindi gli elementi presenti sulla diagonale principale sono tutti unitari: $a_{ii} = 1 \quad \forall \quad i$
Questa relazione di reciprocità scaturisce dalla necessità di **garantire la simmetria dei giudizi di importanza**.
3. È costituita da **elementi finiti**, infatti per ciascun criterio c considerato si ha: $a_{ij} \neq \infty \quad \forall \quad i, j$



Fase II: Costruzione della matrice dei confronti a coppie

Scala semantica di Saaty

Per poter ottenere i valori a_{ij} e costruire la matrice A delle stime dei rapporti w_i/w_j Saaty propone l'utilizzo di una scala di valori denominata **“Scala semantica di Saaty”**

Scala dell'importanza relativa		
Intensità di importanza	Definizione	Spiegazione
a_{ij}		
1	Uguale importanza	Due attività contribuiscono ugualmente all'obiettivo
3	Importanza debole di uno rispetto ad un altro	Leggermente favorita un'attività rispetto ad un'altra
5	Essenziale o forte importanza	L'esperienza e il giudizio fortemente favoriscono un'attività rispetto ad un'altra
7	Importanza molto forte	Un'attività è fortemente favorita e la sua dominanza dimostrata nella pratica

Intensità di importanza	Definizione	Spiegazione
a_{ij}		
9	Importanza assoluta	L'evidenza dell'importanza di un'attività su di un'altra è del più alto ordine di affermazione
2,4,6,8	Valori intermedi tra due giudizi adiacenti	Quando è necessario un compromesso
Valori reciproci non nulli	Se un'attività i assume uno dei valori sopra riportati quando è comparata con un'attività j, allora quest'ultima attività assume un valore reciproco del precedente se comparata con l'attività i	



Fase II: Costruzione della matrice dei confronti a coppie

Rappresentazione delle preferenze

A = insieme delle alternative

$$a > b \quad a, b \in A$$

vuol dire che il decisore preferisce strettamente l'alternativa a all'alternativa b

TRANSITIVITA'

$$a > b \quad b > a \quad \Rightarrow \quad a > c$$

ASIMMETRIA

$$a > b \Rightarrow b \not< a$$

Rappresentazione dell'indifferenza

A = insieme delle alternative

$$a \sim b \quad a, b \in A$$

vuol dire che il decisore è indifferente alle due alternative

TRANSITIVITA'

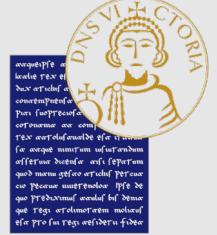
$$a \sim b \quad b \sim a \quad \Rightarrow \quad a \sim c$$

ASIMMETRIA

$$a \sim b \Rightarrow b \sim a$$

RIFLESSIVITA'

$$a \sim a$$

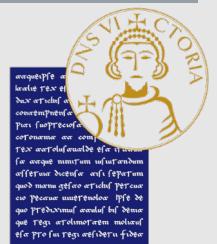


Fase II: Costruzione della matrice dei confronti a coppie

Compatibilità tra le relazioni di preferenza e di indifferenza

$$a \sim b \quad b > c \quad \Rightarrow \quad a > c$$

$$a > b \quad b \sim c \quad \Rightarrow \quad a > c$$



Fase II: Costruzione della matrice dei confronti a coppie

Cause di inconsistenza

1. Violazione della transitività della relazione di preferenza

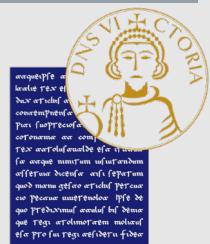
$$a > b \quad b > a \quad a < c$$

La mancata consistenza di A dipende sia dalla difficoltà che incontra il decisore nel mantenere la coerenza di giudizio in tutti i confronti a coppie, sia dal fatto che i giudizi possono essere strutturalmente non consistenti. Le relazioni di preferenza che scaturiscono dai confronti possono essere non transitive, ad esempio: se a è preferito a b e b è preferito a c può capitare che c sia preferito ad a.

2. Violazione della proporzionalità

$$a = 2 \cdot b \quad b = 3 \cdot c \quad a \neq 6 \cdot c$$

Un'altra causa di inconsistenza è la violazione della proporzionalità dei giudizi, anche se viene rispettata la transitività. Se A=2B e B=3C può capitare che a sia diverso da 6C. La stessa scala di Saaty è strutturalmente inconsistente: Se A=4B e B=5C non può essere A=20C perché 20 non è compreso nella scala; al più si può attribuire valore 9 al confronto tra A e C.



Fase II: Costruzione della matrice dei confronti a coppie

Analisi della consistenza dei giudizi

Affinché i giudizi comparativi siano “consistenti” occorre che sia rispettato il **principio di transitività delle preferenze**:

se $A > B$, e $B > C$, allora $\rightarrow A >> C$

Consistenza nei giudizi

Matrice di confronto a coppie

Criterio: ...

		Alternative				
		A	B	C	D	E
Alternative	A	1	1	3	5	3
	B		1	3	5	3
	C			1	2	1
	D				1	1/2
	E					1

Inconsistenza nei giudizi

Matrice di confronto a coppie

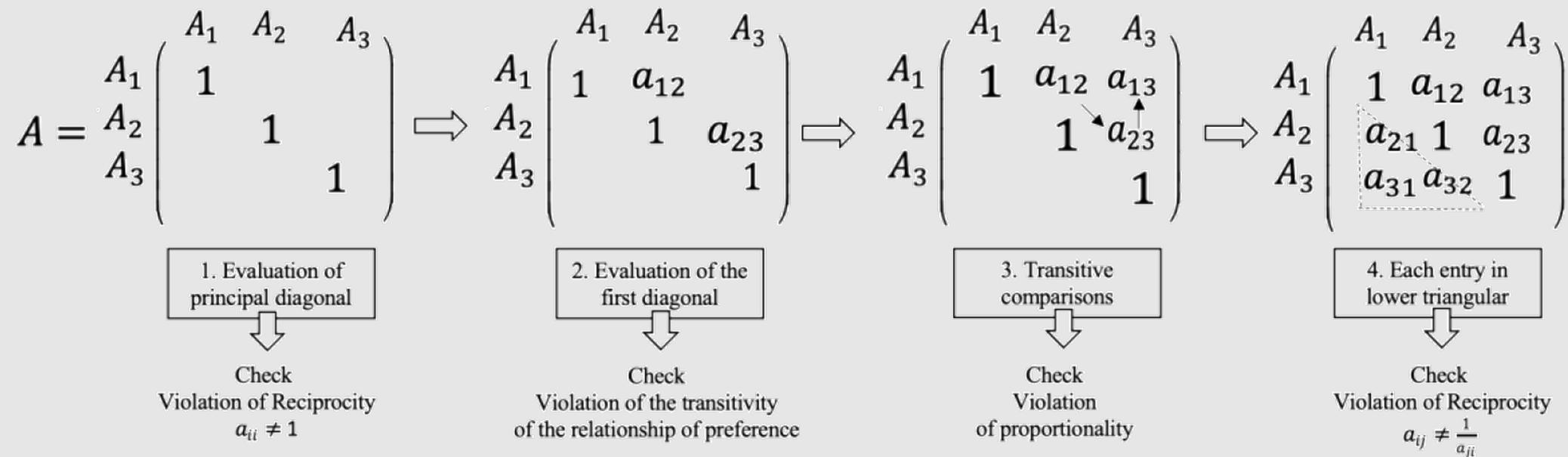
Criterio: ...

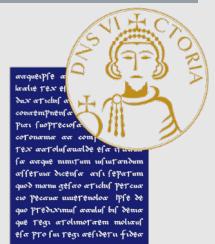
		Alternative				
		A	B	C	D	E
Alternative	A	1	1	3	1	3
	B		1	3	5	3
	C			1	2	1
	D				1	1/2
	E					1



Fase II: Costruzione della matrice dei confronti a coppie

Analisi della consistenza dei giudizi





Fase II: Costruzione della matrice dei confronti a coppie

CONDIZIONE DI CONSISTENZA

$$a_{ij} * a_{jk} = a_{ik} \quad \text{per ogni } i,j,k=1,\dots,n$$

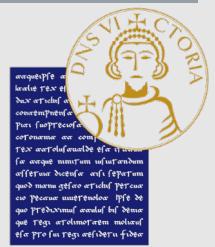
Nella pratica il decisore non fornisce una matrice dei rapporti veri e propri tra i pesi dei criteri, ma una matrice di stime di tali rapporti.

Nell'analisi della **consistenza dei giudizi** viene calcolato l'**indice di consistenza**

$$CI \text{ (Consistency Index)} CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$$

che permette di ottenere gli scarti tra i rapporti w_i/w_j e le sue stime a_{ij} .

Nel caso di perfetta consistenza $\lambda_{max}=n$ e, di conseguenza, $CI=0$. Il valore dell'indice di consistenza aumenta all'aumentare dell'inconsistenza



Fase II: Costruzione della matrice dei confronti a coppie

Analisi della consistenza dei giudizi

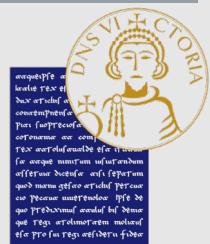
L'indice di consistenza CI viene confrontato con l'indice RI (Random Index) ottenendo il rapporto di consistenza CR (Consistency Ratio).

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

I valori dell'indice RI vengono ottenuti effettuando la media dei valori di CI di numerose matrici reciproche dello stesso ordine, i cui coefficienti vengono generati in modo casuale da un calcolatore.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
R.I.	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59

→ Nella realtà le valutazioni non sono quasi mai perfettamente consistenti (coerenti). Non è necessario che le valutazioni siano perfettamente coerenti; proprio perché siamo nel campo della soggettività è data la possibilità di permettere un certo grado di incoerenza, purché questa non sia esagerata.



Fase III: Determinazione dei pesi locali relativi

$$A = \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{matrix} \left(\begin{matrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ 1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{matrix} \right) \rightarrow \begin{matrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \dots \\ v_{ni} \end{matrix}$$

Weighting vector

Eigenvector

$$A \cdot \hat{w} = \lambda_{\max} \cdot \hat{w}$$

Aritmetic mean

$$\underline{w}_{am} = \left(\frac{1}{n} \sum_j a_{1j}, \dots, \frac{1}{n} \sum_j a_{nj} \right)$$

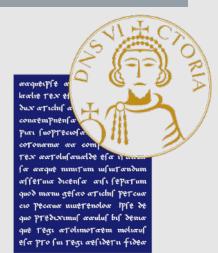
Geometric mean

$$\underline{w}_{gm} = \left(\sqrt[n]{a_{11} \cdot a_{12} \cdot \dots \cdot a_{1n}}, \dots, \sqrt[n]{a_{n1} \cdot a_{n2} \cdot \dots \cdot a_{nn}} \right)$$



Se la matrice è perfettamente **consistente** (oppure ha una inconsistenza tollerabile, cioè **CR≤ 0.1**) tutti i metodi utilizzati per determinare il vettore priorità forniscono lo **stesso ordinamento**.

Altrimenti i vari metodi possono generare ordinamenti diversi, dunque il risultato non è affidabile.



Fase IV: Determinazione dei pesi globali

Il passo finale consiste nel calcolare i pesi globali (o priorità) delle azioni applicando il principio di composizione gerarchica.

I pesi locali di ogni elemento vengono moltiplicati per quelli dei corrispondenti elementi sovraordinati e i prodotti così ottenuti sono sommati.

Procedendo dall'alto verso il basso, i pesi locali di tutti gli elementi della gerarchia vengono così trasformati progressivamente in pesi globali.

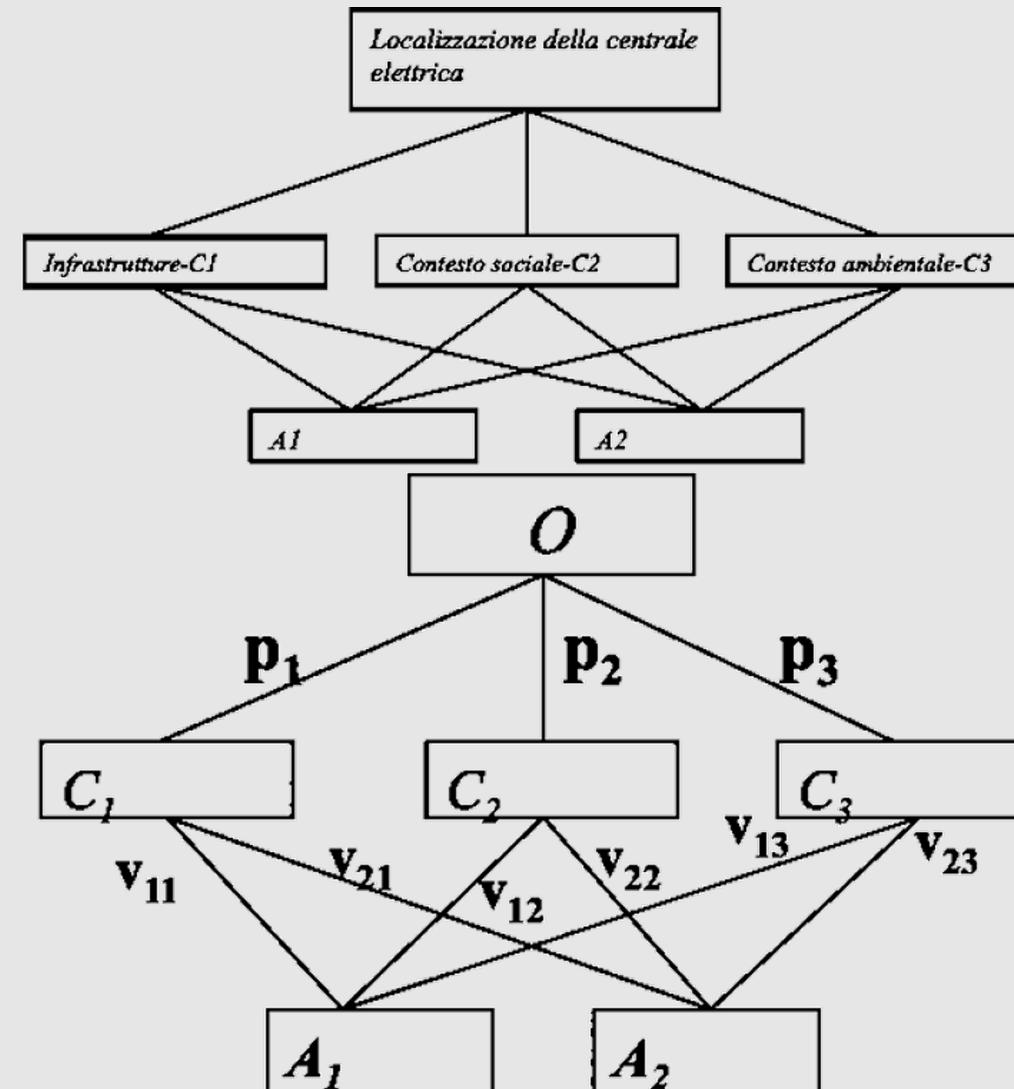
PRINCIPIO DI COMPOSIZIONE GERARCHICA

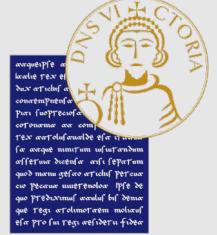
le priorità locali di ciascun elemento vengono moltiplicate per le priorità degli elementi sovraordinati e si sommano i prodotti così ottenuti. L'alternativa migliore avrà il peso globale maggiore.



Applicazione AHP

La gerarchia





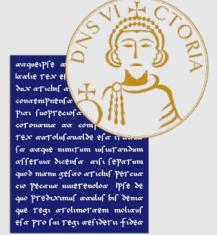
MATRICI DI CONFRONTO A COPPIE

O	C_1	C_2	C_3
C_1	1	2	4
C_2	1/2	1	2
C_3	1/4	1/2	1

C_1	A_1	A_2
A_1	1	1/2
A_2	2	1

C_2	A_1	A_2
A_1	1	4
A_2	1/4	1

C_3	A_1	A_2
A_1	1	5
A_2	1/5	1



DETERMINAZIONE PESI LOCALI

O	C ₁	C ₂	C ₃
C ₁	1	2	4
C ₂	1/2	1	2
C ₃	1/4	1/2	1

Media aritmetica

$$\underline{w}_{am} = \left(\frac{1}{n} \sum_j a_{1j}, \dots, \frac{1}{n} \sum_j a_{nj} \right) \quad \rightarrow \quad w^* = \frac{\underline{w}}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

$$\underline{w}_1 = \frac{1}{3}(1 + 2 + 4) = 2,33$$

$$\underline{w}_2 = \frac{1}{3}(1/2 + 1 + 2) = 1,16$$

$$\underline{w}_3 = \frac{1}{3}(1/4 + 1/2 + 1) = 0,58$$

$$w_1^* = \frac{2,33}{(2,33 + 1,16 + 0,58)} = 0,57$$

$$w_2^* = \frac{1,16}{(2,33 + 1,16 + 0,58)} = 0,29$$

$$w_3^* = \frac{0,58}{(2,33 + 1,16 + 0,58)} = 0,14$$



DETERMINAZIONE PESI LOCALI

O	C_1	C_2	C_3
C_1	1	2	4
C_2	1/2	1	2
C_3	1/4	1/2	1

Geometric mean

$$\underline{w}_{gm} = \left(\sqrt[n]{a_{11} \cdot a_{12} \cdot \dots \cdot a_{1n}}, \dots, \sqrt[n]{a_{n1} \cdot a_{n2} \cdot \dots \cdot a_{nn}} \right) \rightarrow w^* = \frac{\underline{w}}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

$$\underline{w}_1 = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 4} = 2$$

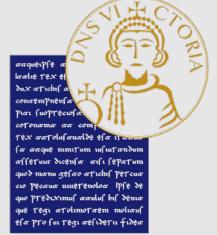
$$w_1^* = \frac{2}{(2 + 1 + 0,5)} = 0,57$$

$$\underline{w}_2 = \sqrt[3]{1/2 \cdot 1 \cdot 2} = 1$$

$$w_2^* = \frac{1}{(2 + 1 + 0,5)} = 0,29$$

$$\underline{w}_3 = \sqrt[3]{1/4 \cdot 1/2 \cdot 1} = 0,5$$

$$w_3^* = \frac{0,5}{(2 + 1 + 0,5)} = 0,14$$

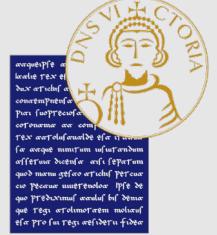


DETERMINAZIONE PESI LOCALI

$$\begin{array}{c|cc} C_1 & A_1 & A_2 \\ \hline A_1 & 1 & 1/2 \\ A_2 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow (v_{11}, v_{21}) = (0.33, 0.67)$$

$$\begin{array}{c|cc} C_2 & A_1 & A_2 \\ \hline A_1 & 1 & 4 \\ A_2 & 1/4 & 1 \end{array} \rightarrow (v_{12}, v_{22}) = (0.8, 0.2)$$

$$\begin{array}{c|cc} C_3 & A_1 & A_2 \\ \hline A_1 & 1 & 5 \\ A_2 & 1/5 & 1 \end{array} \rightarrow (v_{13}, v_{23}) = (0.83, 0.17)$$



DETERMINAZIONE PESI GLOBALI

	$C_1(0.57)$	$C_2(0,29)$	$C_3(0,14)$
A_1	0.33	0.8	0.83
A_2	0.67	0.2	0.17

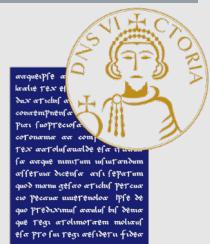


$$v(A_1) = p_1 v_{11} + p_2 v_{12} + p_3 v_{13} = 0.57 \cdot 0.33 + 0.29 \cdot 0.8 + 0.14 \cdot 0.83 = 0.54$$

$$v(A_2) = p_1 v_{21} + p_2 v_{22} + p_3 v_{23} = 0.57 \cdot 0.67 + 0.29 \cdot 0.2 + 0.14 \cdot 0.17 = 0.46$$



$$A_1 > A_2$$



AHP - Analisi di Sensitività

Per verificare se si è effettuata una corretta valutazione degli obiettivi del problema si può infine effettuare una “Analisi di sensitività”.

Dynamic Sensitivity analysis

- è utilizzata per determinare **come i cambiamenti dei pesi degli obiettivi influenzino i pesi delle alternative**

Performance Sensitivity analysis

- mostra **i pesi associati** a ciascuna **alternativa** *rispetto* ai vari **obiettivi** presenti nel problema

Gradient Sensitivity Graph

- questo grafo permette di visualizzare **i pesi associati** a ciascuna **alternativa** *rispetto* ad un **obiettivo alla volta**

Two-Dimensional (2D Plot)

- mostra **i pesi associati** a ciascuna **alternativa** *rispetto* a **due obiettivi** alla volta.

Head-to-Head Graph

- mette a **confronto** **due alternative** rispetto agli **obiettivi del problema**.