Matematica Attuariale

Matteo Morella

June 11, 2022

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Operazioni finanziarie aleatorie—-> scambio di denaro ad epoche diverse con importi e tempi aleatorie. Si opera su durata di vita.
In un operazione assicurativa su vita l'assicuratore contro un compenso corrisposto in un'unica soluzione o in più rate, si impegna a pagre somme prefissate, o comunque determinabili secondo prefissati schemi, allorchè si verifichino prefissati eventi relativi alla sopravvivenza di una o più persone.

Ciclo vitale assicurazione

Assicuratore(impresa) vende un prodotto assicurativo (contratto) a un contraente che verserà un compenso(premio) che frutterà a condizione di dati eventi, una rendita per i beneficiari che hanno una copertura assicurativa.
Abbiamo bisogno un modello finanziario e uno probabilistuco.
Il modello finanziario mette in relazione premio(U) e rata(R): $U = f(\tilde{R})$
$U = R(+i)^{-t} \cdot P$ dove i è il tasso di attualizzazione e t la durata del contratto. Si noti che il primo membro è un'attualizzazione certa e si pondera per la probabilità del verificarsi dell'evento.
In un'assicurazione abbiamo un'inversione del processo produttivo: i ricavi precedono i costi.
Si definiscono basi tecniche di primo ordine tutte le ipotesi demografiche e finanziarie utilizzate per il calcolo del premio. U^T si definisce premio tariffa ed è il premio puro più le spese.

Capitolo 2

Modello probabilistico

Il modello probabilistico fa riferimento alla varibile $\tilde{T}$(durata aleatoria di vita). $\tilde{T} \in (0, \omega) o (0, +\infty)$.

2.1 Funzione di ripartizione v.a $\tilde{T}$ anni vissuti

Si ha una funzione di ripartizione nota, continua e dotata di densità$(f(x))$
$F_0(t) = P\{\tilde{T} \leq t\}\, con\, t \geq 0$ è la probabilità di morire entro t anni(q_x)
$U = C(1+i)^{-t} \cdot q_x$

$$\text{F}_0(t) \begin{cases} \text{non decrescente} \\ \text{continua a destra} \\ \lim_{t \to \infty} F_0(t) = 1 \\ f_0(t)\text{non negativa e normalizzata tale che} F_0(t) = \displaystyle\int_0^t f_0(u)\, du \text{ per t} \leq 0 \\ \text{dove} f_0(u)\, du \text{ è la probabilità di morte in un intervallo infinitesimo} \end{cases}$$

$f_0(u)\, du = P\{u < \tilde{T}_0 \leq u + du\}$
Se f_0 è continua e derivabile allora $f_0(t) = F'(t)$
Si definisce la funzione di sopravvivenza $S(t) = 1 - F_0(t) = P\{\tilde{T}_0 > t\}$ tale che $\lim_{t \to \infty} S(t) =$ e $S(0) = 1$
Sia ${}_{/t}q_0 = F_0(t)$ la probabilità di morte entro t anni. ${}_tP_o = S_0(t)$ dove ${}_{/t}q_0 + {}_tP_0 = 1$
Sia $\tilde{T}_x$ la v.a. durata di vita di una testa di età x con $\tilde{T}_x \in (0; \omega - x] o (0; +\infty)$
$\tilde{T}_x = (\tilde{T}_0 - x) | \tilde{T}_x > x$

$\mathrm{F}_x(t) = P\{\tilde{T}_x \leq t\}, t \geq 0 = P\{\tilde{T}_0 - x \leq t | \tilde{T}_0 > x\} = P\{\tilde{T}_0 \leq t + x | \tilde{T}_0 > x\} =$

$$= \frac{P\{x < \tilde{T}_0 \leq x + t\}}{P\{\tilde{T}_0 > x\}} = \frac{F_0(x+t) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} = \frac{[1 - S(x+t)] - [1 - S(x)]}{S(x)} =$$

$$= \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)} = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

$F_x(t) + \dfrac{S(x+t)}{S(x)} = 1$ dove il primo membro è ${}_{/t}q_x$ e il secondo è ${}_tP_x$

Quindi $\dfrac{S(x+t)}{S(x)} =_{/t} P_x$

$$F_x(t) = \int f_x(u)\, du \Rightarrow f_x(t) = F_x'(t) = \frac{\partial \frac{S(x+t)}{S(x)}}{\partial t} = -\frac{S'(x+t)}{S(x)}$$

Probabilità di morte differita

Si definisce probabilità differita di morte la probablità di more tra due tempi:

$${}_{\frac{t'}{t''-t'}}q_x = P\{t' < \tilde{T}_x \leq t''\} = P\{t' < \tilde{T}_0 - x \leq t'' | \tilde{T} > x\} =$$

$$= P\{x + t' < \tilde{T}_0 \leq x + t'' | \tilde{T}_0 > x\} = \frac{P\{x + t' < \tilde{T}_0 + t''\}}{P\{\tilde{T}_0\}} =$$

$$= \frac{F_0(x+t'') - F_0(x+t')}{1 - F_0(x)} = \frac{S(x+t') - S(x+t'')}{S(x)} =$$

$$= \frac{S(x+t') - S(x+t'')}{S(x)} \cdot \frac{S(x+t')}{S(x+t')} = \frac{S(x+t')}{S(x)} \cdot \frac{S(x+t') - S(x+t'')}{S(x+t')} =$$

$$=_{t'} P_x{}^{1} \cdot_{/t''-t'} q_{x+t'}{}^{2} =_{t'} P_x{}^{3} -_{t''} P_x{}^{4} = (1 -_{/t'} q_x) - (1 -_{/t''} q_x) =_{/t''} q_x{}^{5} -_{/t'} q_x{}^{6} =$$

$$= \int_{t'}^{t''} f_x(u)\, du$$

[1]probabilità di superare in vita l'anno t'

[2]prbabilità di morire tra t' e t'

[3]probabilità di superare t'

[4]probabilità di superare t"

[5]probabilità di morte entro t"

[6]probabilità di morte entro t'

Tassi annui

Considerando $\{\tilde{T}_x; x = 1; 2; ...\}$ si definiscono tassi annui di sopravvivenza e di mortalità $P_x =_1 P_x \, e \, q_x =_{/1} q_x \, con \, P_x + q_x = 1$ Considerando t intero si ha che ${}_tP_x = P_x \cdot ..._{x+t-1} = \dfrac{S_{x+1}}{S_x} \cdot ... \cdot \dfrac{S_{x+t}}{S_{x+t-1}} = \dfrac{S_{x+t}}{S_x}$

Siano noti $q_x \, e \, P_x$ $P_x + q_x \Rightarrow \dfrac{S(x+1)}{S(x)} = 1 - q_x \Rightarrow S(x+1) = (1 - q_x) \cdot S(x)$

2.2 Intensità di mortalità

$${}_{/\Delta x}q_x = P\{\tilde{T}_x \leq \Delta x\} = P\{\tilde{T}_0 \leq x + \Delta x | \tilde{T}_0 > x\} = \frac{P\{\tilde{T}_0 \leq x + \Delta x\}}{P\{\tilde{T}_0 > x\}} =$$

$$= \frac{F_0(x + \Delta x) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} = \frac{F_0(x + x) - F_0(x)}{1 - F_0(x)} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta x} \simeq \frac{F_0'(x)}{S(x)} \cdot \Delta x = \frac{f_0(x)}{}$$

Ponendo $\mu_x : \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\frac{f_0(x)}{S(x)} \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to x} \left[\dfrac{f_0}{S(x)} + \dfrac{O(\Delta x)}{\Delta x} \right]$

$\dfrac{f_0(x)}{S(x)} = \mu_x$ dove μ_x è l'intesità istantanea di mortalità con dimensioni $[1]/[t] = [t]^-1$ intensità. ${}_{/\Delta x}q_x \simeq \mu_x \cdot \Delta x$

μ_x è una velocità istantanea di riduzione della sopravvivenza rapportata all'età.

$\mu_x = \dfrac{f_0}{S(x)} = \dfrac{F'(x)}{S(x)} = -\dfrac{S'(x)}{S(x)} = -\dfrac{\partial \ln S(x)}{\partial x}$

Sia $\epsilon_S(x; \Delta x) = \dfrac{\dfrac{S(x + \Delta x) - S(x)}{S(x)}}{\dfrac{\Delta x}{x}}$

$\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon_S(x; \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{S(x + \Delta x) - S(x)}{\Delta x} \cdot \dfrac{x}{S(x)} = \dfrac{S'(x)}{S(x)} \cdot x = \epsilon_S(x)$ ed è l'elasticità della funzione sopravvivenza. μ_x è la durata a partire da x_0 che sarebbe necessaria per azzerare la probabilità di vita se da x_0 in poi consideriamo come funzione di sopravvivenza la tangente al punto P al posto della funzione di sopravvivenza effettiva.

Sia $\mu(x) = -\dfrac{S'(x)}{S(x)}$ un'equazione differenziale di I° ordine. Si cerca S(x)

$\displaystyle\int_0^x \mu(t) \, dt = -\int \frac{S'(x)}{S(x)} \, dt = -\big[\ln S(t) \big]_0^x = -\ln S(x) + \ln S(0) = -\ln S(x)$

$\ln S(x) = -\displaystyle\int_0^x \mu(t) \, dt \Rightarrow S(x) = e^{-\int_0^x \mu(t) \, dt}$

Sia $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$ allora $\lim \int_0^x \mu(t)\,dt = +\infty$

Sia $P_x = \dfrac{S(x+1)}{S(x)} = \dfrac{e^{\int_0^{x+1} \mu(t)\,dt}}{e^{-\int_0^x \mu(t)\,dt}} = e^{-\int_x^{x+1} \mu(t)\,dt} = e^{-\int_0^1 \mu(t)\,dt}$

$Sia \mathrm{q}_x = 1 - P_x = 1 - e^{-\int_0^1 \mu(t)\,dt}$

Valore approssimato dell'intensità di mortalità

Sia $P_x = \dfrac{S(x+1)}{S(x)} = e^{-\int_0^1 \mu(t)\,dt} \Rightarrow -\ln P_x = -\int_0^1 \mu(t)\,dt \simeq 1 - \mu(x+1/2)$

Sia $P_{x-1x} = \dfrac{S(x+1)}{S(x-1)} = e^{-\int_{-1}^1 \mu(t)\,dt} \Rightarrow -(\ln P_{x-1} + \ln P_x) =$

$= -\int_{-1}^1 \mu(x+t)\,dt \simeq 2\cdot\mu(t)$. Quindi $\mu(x) \simeq -\frac{1}{2}[\ln(P_{x-1}) + \ln(P_x)] =$

$= \frac{1}{2}[\ln S(x-1) - \ln S(x+1)]$

2.3 Coefficiente di mortalità e tasso centrale di mortalità

Il coefficiente di mortalità tra x e x+1 è la media ponderata di $\mu(x) con pesi pari a S(x)$

m(x;x+t)$= \dfrac{\int_0^t \mu(x+u)\cdot S(x+u)\,du}{\int_0^t S(x+u)\,du}$. Sapendo che $\mu(x+u) = -\dfrac{S'(x+u)}{S(x+u)}$ allora:

$$m(x;x+t) = \frac{\int_0^t \frac{S'(x+u)}{S(x+u)}\cdot S(x+u)\,du}{\int_0^t S(x+u)\,du} = \frac{S(x) - S(x+t)}{\int_0^t S(x+u)\,du}$$

Con $t = 1 \Rightarrow m(x;x+1) \simeq \dfrac{S(x) - S(x+1)}{[S(x) + S(x+1)]/2} = 2\cdot\dfrac{S(x) - S(x+1)}{S(x) + S(x+1)}$

Contestualmento si hanno $m_x = 2\cdot\dfrac{1-P_x}{1+P_x}$ e $m_x = 2\cdot\dfrac{q_x}{2-q_x}$

2.4 Valori caratteristici di $\tilde{T}_x$

2.4.1 Vita media residua/Speranza di vita

Si definisce speranza di vita residua: $\bar{e} = E[\tilde{T}_x] = \int_0^{\omega-x} t \cdot f_x(t)\,dt$

Sia $\mathrm{f}_x(t)n = \dfrac{\partial F_x(t)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left[1 - \dfrac{S(x+t)}{S(x)}\right] \Rightarrow \bar{e}_x = -\dfrac{1}{S(x)}\int_0^{+\infty} S'(x+t)\cdot t\,dt =$
$= -\dfrac{1}{S(x)} \cdot \left\{\left[t \cdot S(x+t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} S(x+t)\,dt\right\} = -\dfrac{1}{S(x)} \cdot \int_0^{+\infty} S(x+t)\,dt$

Formule di approssimazione

Quadratura dei trapezi

Si definisce la vita media residua completa $\dot{e}_x = \int_0^{+\infty} S(x{+}t)\,dt = \sum_{h=1}^{+\infty} \dfrac{S(x+h-1)+S(x+h)}{2}$

Quadratura dei rettangoli inferiore

Si definisce vita media residua incompleta $e_x = \int_0^{+\infty} S(x{+}t)\,dt \simeq \sum_{h=1}^{+\infty}[S(x{+}h)]$

Quadratura dei rettangoli superiore

Si definisce vita media residua anticipata $\ddot{e} = \int_0^{+\infty} S(x{+}t)\,dt \simeq \sum_{h=1}^{+\infty} S(x{+}h =$
$= \dfrac{1}{S(x)}\sum_{h=1}^{+\infty} S(x+h)$. Si noti che $\ddot{e} = 1 + e_x$ *ed* $\dot{e} = 1/2 + e_x$
$\ddot{e}_x = \sum \dfrac{S(x+h}{S(x)} = \sum P_x = P_x \sum_{h=2}^{\infty} {}_hP_x = P_x {+} \sum_{h=2}^{\infty} {}_{h-1}P_{x+1}$ dove la sommatoria è e_{x+1}. Si noti quindi che ${}_hP_x = P_x \cdot_{h1} P_{x+1}$ *ed* $e_x = P_x(1 + e_{x+1}$

2.4.2 Durata di vita probabile/Vita residua probabile

È la mediana della funzione F_x
$F_x(\pi_x) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 1 - \dfrac{S(x+\pi_x)}{S(x)} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S(x+\pi_x) = \dfrac{1}{2} \cdot S(x)$ dove $S(x+\pi_x)$ è la durata necessaria per diminuire la probabilità di vita di una testa di età x.

2.5 Tavola di sopravvivenza

Basata suna collettività L_a di coetanei, omogenei, con individui $i = 1; 2; \dots ; L_a$ con stessa funzione di sopravvivenza $S(x)$

Si associa ad ogni individuo una v.c. Bernoulli $\tilde{y}_x^{(i)} = \begin{cases} 0 :_{/t} q_a \\ 1 :_t P_a \end{cases} \quad \forall i \in L_a$

$\tilde{y}_x = \sum_{i=1}^{L_a} \tilde{y}_x^{(i)} \sim Binomiale$

$E[\tilde{y}_x] = E\left[\sum_{i=1}^{L_a} \tilde{y}_x^{(i)}\right] = L_a \cdot_t P_a = L_x$ La tavola di sopravvivenza mostra i sopravviventi ad ogni età di una collettività di coetanei, omogenei[7],i.i.d.

Si noti che $\dfrac{L(a+t)}{L(a)} = \dfrac{S(a+t)}{S(a)} \quad L_x - L_{x-1} = d_x \quad q_x = 1 - P_x = \dfrac{L_x - L_{x+1}}{L_x} = \dfrac{d_x}{L_x}$

[7]Stessa funzione e parametro

Capitolo 3

Modelli analitici per $\mu(x); S(x); f_0(x)$; odds

3.1 Modelli per $\mu(x)$

3.1.1 Modello di Gompertz(1825)

L'intensità di mortalità si incrementa in un intervallo Δx in misura proporzionale a Δx e al valore di $\mu(x)$ assunto all'inizio dell'intervallo, a meno di infinitesimi di ordine superiore a $O(\Delta x)$

$\Delta\mu(x) = \mu(x + \Delta x) - \mu(x) = \beta \cdot \mu(x) \cdot \Delta x + O(\Delta x)\ con\ \beta > 0$

$\dfrac{\Delta\mu(x)}{\Delta x} = \beta \cdot \mu(x) + \dfrac{O(\Delta x)}{\Delta x} \Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta\mu(x)}{\Delta x} = \beta \cdot \mu(x) \Rightarrow \mu'(x) = \beta \cdot \mu(x)$

$\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \beta \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)}\, dx = \int \beta\, dx \Rightarrow \ln \mu(x) = \beta x + c$

$\mu(x) = e^{(\beta x+c)} = e^{\beta x} \cdot e^{c}$. Ponendo $e^{c} = \alpha \Rightarrow \mu(x) = e^{\beta x} \cdot \alpha$

3.1.2 Modello di Makeham(1865)

È una generalizzazione del modello di Gompertz, aggiungendo un parametro γ per le morti accidentali
$\mu(x) = \alpha \cdot e^{\beta x} \cdot \gamma \; con \; \alpha, \beta, \gamma > 0$

$$S(x) = \exp\left[-\int_0^x \mu(t)\,dt\right] = \exp\left[\int_0^x (\alpha \cdot e^{\beta x} + \gamma\,dt\right] = exp\left\{-\left[\frac{\alpha}{\beta}e^{\beta x} + \gamma t\right]_0^x\right\}$$

$$S(x) = \exp\left[-\frac{\alpha}{\beta}e^{\beta x} - \gamma x + \frac{\alpha}{\beta}\right] = e^{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot e^{-\gamma x} \cdot e^{\frac{\alpha}{\beta} \cdot e^{\beta x}}$$

Ponendo $s = e^{-\gamma}; g = e^{-\frac{\alpha}{\beta}}; c = e^{\beta}; k = \frac{1}{g}$

$S(x) = k \cdot s^x \cdot g^{e^x}$. Per Gompertz si ha $S(x) \cdot g^{e^x}$
Sia Makeham che Gompertz sono modelli per età adulte.

3.1.3 Modello di Lazarus (1867)

$\mu(x) = \alpha_1 \cdot e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 \cdot e^{\beta_2 x} + \gamma$ dove i due membri dell'espressione rappresentano modelli per età infantile e adulta.

3.1.4 Modello di Thiele(1867)

$\mu(x) = \alpha_1 \cdot e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 \cdot e^{\beta_2 x} + \gamma + \alpha_3 \cdot e^{[-\frac{1}{2}\beta_3(x-\gamma)]} \; con \; \alpha_1; \alpha_2; \beta_1; \beta_2 > 0 \; e \; \alpha_3; \beta_3; \gamma \geq 0$

3.1.5 Modello di Weibull(1939)

$\mu(x) = \frac{c}{\theta^c} x^{c-1}$ dove c è un parametro di forma e θ uno di scala.

3.1.6 Modello di Quiquet(1893)

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^{r} P_i(x) \cdot e^{\beta_i x} \text{ dove } P_i \text{ è un polinomio.}$$

Se $r = 1 \Rightarrow S(x)$ Gompertz
Se $r = 2 \Rightarrow S(x)$ Makeham
Se $r = 3 \Rightarrow S(x)$ Lazarus e Thiele

3.2 Modelli per $S(x)$

3.2.1 Modello di DeMoivre(1725)

È un modello lineare $S(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{\omega} \; per \; 0 \leq x \leq \omega \\ 0 \; per \; x > \omega \end{cases}$ dove ω è l'età estrema.
Nel 1725 era di soli 86 anni.

$$\mu(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)} = \frac{\frac{1}{\omega}}{\frac{\omega - x}{\omega}} = \frac{1}{\omega - x}$$

$$f_0(x) = F_0'(x) = \frac{\partial}{\partial x}[1 - S(x)] = -S'(x) = \frac{1}{\omega}$$

Avendo $dx = L_x - L_{x+1} = L_0[S(x) - S(x+1)] \Rightarrow \dfrac{L_x}{L_0} = \dfrac{S(x)}{S(0) = 1} \Rightarrow L_x = L_0 \cdot S(x)$

$$dx = L_0 \left[\left(1 - \frac{x}{\omega}\right) - \left(1 - \frac{x+1}{}\right) \right] = L_0 \left[\frac{1}{\omega} \right]$$

$$q_x = \frac{dx}{L_x} = \frac{L_0 \cdot \frac{1}{\omega}}{L_0 \cdot S(x)} = \frac{\frac{1}{\omega}}{\frac{\omega - x}{\omega}} = \frac{1}{\omega - x}$$

$$P_x = 1 - \frac{1}{\omega - x} = \frac{\omega - x - 1}{\omega - x}$$

3.2.2 Modello di De Graaf(1727)

$S(x) = \begin{cases} 1 - \left(\dfrac{x}{\omega}\right)^n \; per 0 \leq x \leq \omega \\ 0 \; per \; x > \omega \end{cases}$ $\quad con \, n \geq 1$

3.2.3 Modello di Dormoy(1878)

$S(x) = e^{-\mu \cdot x} \, per \, x \geq 0$ $\mu(x) = -\dfrac{S'(x)}{S(x)} = -\dfrac{-\mu \cdot e^{-\mu x}}{e^{-\mu x}} = \mu$ intensità costante.

$$q_x = 1 - \frac{S(x+1)}{S(x)} = 1 - \frac{e^{\mu_0(x+1)}}{e^{-\mu x}} = 1 - e^{\mu}$$

3.3 Modelli per $f_0(x)$

3.3.1 Modello di Lexis (1878)

$f_0(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2^2}\right]$ $per\ x \geq x'$ Si noti che $\bar{x}$ è il punto di Lexis.

3.4 Modelli per odds

Sia $\mathbb{E}$ un evento; si definisce odds il rapporto tra la probabilità che l'evento si verifichi e la probabilità che l'evento non si verifichi: $\frac{P\{\mathbb{E}\}}{1-P\{\mathbb{E}\}}$ Gli odds sono: $\frac{q_x}{P_x}$; $\frac{/_t q_x}{_tP_x}$; $\frac{/_t q_x}{_tP_0} = \frac{1-S(t)}{S(t)}$

L'ultimo rapporto è il margine di miglioramento dell'aspettativa di vita ad età t.

Sia $\frac{q_x}{P_x} = V(x) = \frac{q_x}{1-q_x} \Rightarrow q_x = \frac{V(x)}{1+V(x)}$

3.4.1 Modello inglese(1976)

Usato per rappresentare la vita rimanente dei pensionati.

$\frac{q(x)}{P_x} = e^{P''(x)}$ dove $P''(x)$ è un polinomio di secondo grado.

3.4.2 Modello di Barnett

Usato per la rappresentazione della sopravvivenza ad età anziane.

$\frac{q(x)}{P_x} = A - H + B^x\ con\ A; H; B; C > 0$

3.4.3 Modello di Heligman-Pollard(1980)

$\frac{q(x)}{P_x} = A^{(x+B)^C + D\cdot\exp[-E(\ln x - \ln F)^2] + G\cdot H^x}$ a parametri positivi.

I tre addendi rappresentano rispettivamente la mortalità ad età infantile, giovanile e adulta-senile.

Capitolo 4

Modelli per gruppi di teste

Sia $G(x;y)$ un gruppo di teste con rispettive v.a. anni rimanenti di vita $\tilde{T}'_x$; $\tilde{T}''_y$. Si usano modelli uguali per teste omogenee. Si distinguono

1. Gruppo che si ritiene estinto al primo decesso

2. Gruppo che si ritiene estinto al secondo decesso

1. $\tilde{T}_{x,y} = min(\tilde{T}'_x; \tilde{T}''_y)$

2. $\tilde{T}_{\bar{x,y}} = max(\tilde{T}'_x; \tilde{T}''_y)$

4.1 Al primo decesso

Sia $S_{x,y}(t)$ funzione di sopravvivenza $= P\{\tilde{T}'_x > t \cap \tilde{T}''_y > y\} =$

$= P\{(\tilde{T}'_0 - x) > t \cap (\tilde{T}''_0 - y) > t \big| (\tilde{T}'_0 > 0 \cap \tilde{T}''_0 > y)\} =$

$= \dfrac{P\{\tilde{T}'_0 > t + x \cap \tilde{T}''_0 > t + y\}}{P\{\tilde{T}'_0 > x \cap \tilde{T}''_0 > y\}} = \dfrac{P\{\tilde{T}'_0 > t + x\}}{P\{\tilde{T}'_0 > x\}} \cdot \dfrac{P\{\tilde{T}''_0 > t + y\}}{P\{\tilde{T}''_0 > y\}}$

Siano date le seguenti ipotesi: $\tilde{T}'_0$ e $\tilde{T}''_0$ indipendenti e identicamente distribuiti.
$S_{x,y} = \dfrac{S(x+t)}{S(x)} \cdot \dfrac{S(y+t)}{S(y)} =_t P_x \cdot_t P_y =_t P_{x,y}$

$F_{x,y}(t) = P\{\tilde{T}_x < t \cup \tilde{T}_y < t\} = 1 - S_{x,y}(t) = 1 -_t P_{x,y} = 1 -_t P_x \cdot_t P_y =$

$= 1 - (1 -_{/t} q_x) \cdot (1 -_{/t} q_y) =_{/t} q_x +_{/t} q_y -_{/t} q_x \cdot_{/t} q_y =_{/t} q_{x,y}$

$$\mu_{x,y}(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\ln S_{x,y}(t) = -\frac{\partial}{\partial t}\ln\left[\frac{S(x+t)}{S(x)}\cdot\frac{S(y+t)}{S(y)}\right] =$$

$= -\frac{\partial}{\partial t}\ln S(x+t) - \frac{\partial}{\partial t}\ln S(y+t)$

$\mu_{x,y}(t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$

Sia $G(x_1; x_2; \ldots; x_n) \to \tilde{T}_{x_1;x_2;\ldots;x_n} = min(\tilde{T}^1_{x_1}; \ldots; \tilde{T}^n_{x_n})$, si ha

$\mu_{x_1;x_2;\ldots;x_n}(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i + t)$ e ${}_tP_{x_1;x_2;\ldots;x_n} \prod_{i=1}^{n} {}_tP_{x_i}$

4.1.1 Modello di Gompertz($\mu(h) = \alpha e^{\beta h}$)

$$\mu_{x,y}(t) = \alpha e^{\beta(x+t)} + \alpha e^{\beta(y+t)} = \alpha(e^{\beta(x+t)} + e^{\beta(y+t)}) = \alpha e^{\beta t}(e^{\beta x} + e^{\beta y})$$

Si definisce un'età W tale che: $e^{\beta W} = e^{\beta x} + e^{\beta y} \Rightarrow W = \frac{1}{\beta}\ln(e^{\beta x} + e^{\beta y})$

W si definisce età di calcolo ed è un'età fittizia che riassume il comportamento di n teste in una. $\mu_{x,y}(t) = \alpha e^{\beta t}\cdot e^{\beta W} = \alpha e^{\beta(W+t)} = \mu(W+t)$

$$S_{x,y}(t) = e^{-\int_0^t \mu(W+S)\,ds} =_t P_W = \frac{S(W+t)}{S(W)} =_t P_{x,y} =_t P_{xt}P_y$$

Per $G(x_1; x_2; \ldots; x_n) \to e^{betaW} = \sum_{i=1}^{n} e^{\beta x_i}$ $\mu(t) = \mu(W+t)$ e ${}_tP_x =_t P_W$

4.1.2 Modello di Makeham($\mu(x) = \alpha e^{\beta x} + \gamma$)

$$\mu_{x,y}(t) = \alpha e^{\beta(x+t)} + \gamma + \alpha e^{\beta(y+t)} + \gamma = \alpha e^{\beta t}(e^{\beta x} + e^{\beta y}) + 2\gamma$$

Si definisce un'età z detta età ragguagliata tale che:

$$e^{\beta z} = \frac{e^{\beta x} + e^{\beta y}}{2} \Rightarrow z = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{e^{\beta x} + e^{\beta y}}{2}\right)$$

$$S_{x,y}(t) = e^{-\int_0^t \mu_{x,y}(s)\,ds} = e^{-\int_0^t 2\mu(z+s)\,ds} = 2 \cdot_t P_z =_t P_{x,y}$$

Per $G(x_1; x_2; \ldots; x_n) \to e^{\beta z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{\beta x_i}$ $\mu_{x_i} = n\mu(z+t)$ e ${}_tP_{x_i} = ({}_tP_z)^n$

4.2 Gruppo al secondo decesso

Sia $S_{x\bar{,}y}(t)$ funzione di sopravvivenza:

$S_{x\bar{,}y}(t) = P\{\tilde{T}_{x\bar{,}y} > t\} = P\{\tilde{T}'_x > t \cup \tilde{T}''_y > t\} =$

$= P\{\tilde{T}'_x > t\} + P\{\tilde{T}'_y > t\} - P\{(\tilde{T}'_x > t) \cap (\tilde{T}''_y > t)\} =$

$= P\{\tilde{T}'_0 > x + t | \tilde{T}'_0 > x\} + P\{\tilde{T}''_0 > y + t | \tilde{T}''_0 > y\} -$

$- P\{\tilde{T}'_0 > x + t \cap \tilde{T}''_0 > y + t | \tilde{T}'_0 > x \cap \tilde{T}''_0 > y\} =$

$$= \frac{P\{\tilde{T}'_0 > x + t\}}{P\{\tilde{T}'_0 > x\}} + \frac{P\{\tilde{T}''_0 > y + t\}}{P\{\tilde{T}''_0 > y\}} - \frac{P\{(\tilde{T}'_0 > x + t) \cap \tilde{T}''_0 > y + t\}}{P\{(\tilde{T}'_0 > x) \cap (\tilde{T}''_0 > y)\}} =$$

$$= \frac{S^1(x + t)}{S^1(x)} + \frac{S^2(y + t)}{S^2(y)} - \frac{P\{(\tilde{T}'_0 > x + t) \cap \tilde{T}''_0 > y + t\}}{P\{(\tilde{T}'_0 > x) \cap (\tilde{T}''_0 > y)\}}$$

Se omogenee e indipendenti:$S_{x\bar{,}y}(t) = \frac{S(x + t)}{S(x)} + \frac{S(y + t)}{S(y)} - \frac{S(x + t)}{S(x)} \cdot \frac{S(y + t)}{S(y)} =$

$=_t P_x +_t P_y -_t P_y =_t P_{x\bar{,}y}$

$F_{x\bar{,}y}(t) = 1 - S_{x\bar{,}y(t)} = P\{\tilde{T}_{x\bar{,}y} < t\} = 1 -_t P_x -_t P_y +_t P_x \cdot_t P_y =_{/t} q_x -_t P_y(1 -_t P_x) =$

$=_{/t} q_x -_t P_y(_{/t} q_x) =_{/t} q_x(1 -_t P_y) =_{/t} q_x \cdot_{/t} q_x$

$\mu_{x\bar{,}y}(t) = -\frac{\partial}{\partial t} \ln S_{x\bar{,}y}(t)$

Capitolo 5

Modelli di soprammortalità

Se al momento della stipula del contratto, la testa presenta una tara[1], il modello deve essere ricalibrato. Siano $S(x)$ e $\mu(x)$ funzione di sopravvivenza e intensità di mortalità di soggetti normali si hanno due modelli.

5.1 Soprammortalità moltiplicativa

$\bar{\mu}(x+t) = \mu(x+t) \cdot (1+k)\ con\ k > 0$

k è detto tasso di soprammortalità ed è una costante pari a: $\dfrac{\bar{\mu}(x+t) - \mu(x+t)}{\mu(x+t)}$
Il modello rappresenta un aggravamento di mortalità crescente al crescere dell'età.

5.2 Soprammortalità additiva

$\dot{\mu}(x+t) = \mu(x+t) + h \cdot \mu(x)$

5.3 Soprammortalità decrescente

$$\hat{\mu} = \begin{cases} (1+\alpha)\mu(x+t) + \beta\mu(x)\ per\ t \leq n \\ \mu(x+t)\ per\ t > n \end{cases}$$

[1]Patologia

Capitolo 6

Assicurazione caso vita

Le assicurazioni su durata di vita si dividono in

1. caso vita $\rightarrow$ paga se la testa sopravvive
2. caso morte $\rightarrow$ paga se la testa decede
3. caso misto$\rightarrow$ paga o in casi di sopravvivenza o di morte

1. Obiettivo: coprire il rischio di scarsa disponibilità finanziaria; trasferimento del rischio all'assicurazione
   Prestazioni: capitale o rendita
   Generalmente contraente$\equiv$assicurato$\equiv$beneficiario.
2. Obiettivo: coprire rischio di morte assicurato e conseguente ristrettezza finanziaria
   Prestazioni: generalmente capitali
   Generalmente contraente$\equiv$assicurato$\neq$beneficiario.
3. Obiettivo: coprire il rischio di morte e contemporaneamente garantire capitali o rendita in caso di sopravvivenza.
   Prestazioni: generalmente capitali.
   Generalmente contraente$\equiv$assicurato$\equiv$beneficiario in caso vita. Beneficiario diverso nel cso morte

Le polizze possono essere valutate come composizione di contratti elementari, se vengono utilizzati operatori lineari come la speranza matematica. Poichè un contratto complesso è un insieme di contratti elementari, allora il prezzo del contratto complesso si otterrà come somma dei contratti elementari che la compongono. Verranno valutate le prestazioni pure, ovvero le prestazioni nei confronti del beneficiario (al netto delle spese). Nella valutazione si assumerà che l'epoca (0) è l'epoca della stipula del contratto. L'età (x) dell'assicurato è l'eta di quet'ultimo al momento della stipula del contratto. Il tempo (t) è la durata che trascorre dalla stipula del contratto, detta anche antidurata. L'anno (h) è il tempo che intercorre tra l'anno h-1 e h. Es: l'anno 2 sarà il tempo tra l'anno 1 e l'anno 2. In un contratto il premio si determina in base alle prestazioni → Principio di equivalenza attuariale. Siano:

- $\tilde{z}$ v.a. prestazioni attualizzate contraente
- $\tilde{y}$ v.a. prestazioni eventuali e future attualizzate dell'assicuratore

Sia (dal punto di vista dell'assicurazione) $\tilde{x}$[1] $= \tilde{z}$[2] $- \tilde{y}$[3]
Il contratto si dice equo se: $E[\tilde{x}] = 0 \Leftrightarrow E[\tilde{y}] = E[\tilde{z}]$; dove E è VAM: valore attuale medio.
Se $\tilde{z} = U$ unico importo in t=0, allora $U = E[\tilde{y}] \Rightarrow$ premio unico, puro, equo.
Per le valutazioni bisogna avere:

- Modello finanziario per l'attualizzazione delle prestazione, dove i è detto tasso tecnico o base tecnica finanziaria di primo ordine
- Modello probabilstico per descrivere probabilsticamente le prestazioni future; si definisce una dustribuzione per $\tilde{T}_x$ così da ricavare$\{q_x\}$, detta base tecnica demografica di primo ordine

[1] Utile
[2] Ricavi
[3] Costi

6.1 Assicurazioni caso vita caso elementare: Assicurazione di capitale differito

Siano fissate le basi tecniche di primo ordine $(i; \{q_x\})$ Prestazioni assicurate: l'assicuratore si impegna a pagare il capitale assicurato alla scadenza della polizza se l'assicurato supera in vita tale epoca.
Considerato la v.a. $\tilde{y}$; siano:

- $c = 1$ capitale assicurato
- h= scadenza
- x= età della testa

si ha $\tilde{y} = \begin{cases} (1+i)^{-h} \; per \; P\{\tilde{T}_x > h\} \\ 0 \; per \; 1 - P\{\tilde{T}_x\} \end{cases}$

$E[\tilde{y}] = v^h \cdot P\{T_x\} = v^h \cdot \dfrac{1 - F_0(x+h)}{1 - F_0(x)} = v^h \cdot \dfrac{S(x+h)}{S(x)}$

$E[\tilde{y}] = v^h \cdot_h P_x =_h E_x \longrightarrow$ tasso di premio di capitale differito. E è un fattore di sconto attuariale/finanziario-demografico, quindi il suo reciproco è un fattore montante.
U=c$\cdot_h E_x$

6.1.1 Metodo della mutua

Sia L_x una collettività e ${}_hE_x$ una "quota sociale" incognita:

Impieghi	Fondi
${}_hE_x \cdot L_x$	${}_hE_x \cdot L_x$

Se la mutua investe al tasso tecnico i si avrà:

Ricavi	Costi
${}_hE_x \cdot L_x \cdot (1+i)^h$	$1 \cdot L_{x+h}$

quindi se l'impiego non avviene al tasso i non vi è pareggio di bilancio. In $t = 4$ si avrà ${}_hE_x \cdot L_x \cdot (1+i)^h = L_{x+h} \Rightarrow_h E_x^h \cdot \dfrac{L_{x+h}}{L_x} \Rightarrow_h E_x = v^h \cdot_h P_x$
Sia:

- 1: la "quota sociale" investita in $t = 0$
- $\dfrac{1}{{}_hE_x}$: il "capitale liquidato" in h anni ai soci ancora in vita

Si avrà a bilancio:

Ricavi	Costi
$1 \cdot L_x \cdot (1+i)^h$	$L_{x+h} \cdot \dfrac{1}{{}_hE_x}$

da cui $L_x(1+i)^h = L_{x+h} \cdot \dfrac{1}{{}_hE_x} \Rightarrow \dfrac{1}{{}_hE_x} = (1+i)^h \cdot \dfrac{L_x}{L_{x+h}} \Rightarrow$
$(1+i)^h + \dfrac{(L_x - L_{x+h})(1+i)^h}{L_{x+h}}$ dove il primo membro è un montante finanziario e il secondo è il montante finanziario calcolato sui soci deceduti e diviso tra i soci ancora in vita

6.2 Rendita: operazione complessa caso vita a Rata fissa

6.2.1 Rendita vitalizia, perpetua, anticipata, immediata con R=1

Definizione: Pagamento della rata all'inizio di ogni anno a partire dall'epoca di stipula , fin quando la testa assicurata è in vita.

$$\tilde{y} = \begin{cases} v^0; \quad v^0 + v^1; \quad v^0 + v^1 + v^2; \ldots; v^0 + v^1 + \cdots + v^{\omega-x-1} \\ {}_{/1}q_x \quad ;_{1/1}\, q_x; \quad {}_{2/1}q_x; \qquad \ldots;_{(\omega-x-1)/1}\, q_x \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = v^0 \cdot_{/1} q_x + (v^0 + v^1) \cdot_{1/1} q_x + (v^0 + v^1 + v^2) \cdot_{2/1} q_x + \ldots$
$+ (v^0 + v^1 + \cdots + v^{\omega-x-1} \cdot_{(\omega-x-1)/1} q_x =$

$= v^0({}_{/1}q_x +_{1/1} q_x + \cdots +_{(\omega-x-1)/1} q_x) + v^1({}_{1/1}q_x + \cdots +_{(\omega-x-1)} q_x) +^{\omega-x-1}_{(\omega-x-1/1)} q_x =$

$= v^0(1) + v^1(1 -_{/1} q_x) + v^2(1 -_{/2} q_x) + \cdots + v^{\omega-x-}(-_{/(\omega-x-1}q_x) =$

$= v^0({}_0P_x) + v^1({}_1P_x) + v^2({}_2P_x) + \cdots + v^{\omega-x-1}({}_{(\omega-x-1)}P_x) =$

$=_0 E_x +_1 E_x +_2 E_x + \cdots +_{\omega-x-1} E_x = \displaystyle\sum_{h=0}^{\omega-x-1} ({}_hE_x) = \ddot{a}_x \; se \; R \geq 1 \Rightarrow U = R \cdot \ddot{a}_x$

6.2.2 Rendita vitalizia, perpetua, anticipata, differita con R=1

Definizione: Pagamento della rata all'inizio di ogni anno, dopo il perido di differimento e finchè l'assicurato è in vita.

$$\tilde{y} = \begin{cases} 0; \quad v^m; \quad v^m + v^{m+1}; \ldots; v^m + v^{m+1} + \cdots + v^{\omega-x-1} \\ {}_{/m}q_x \quad ;_{m/1}\, q_x; \quad {}_{(m+1)/1}q_x; \qquad \ldots;_{(\omega-x-1)/1}\, q_x \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = v^m \cdot_{m/1} q_x + (v^m + v^{m+1}) \cdot_{(m+1)/1} q_x + \cdots +$
$+ (v^m + v^{m+1} + \cdots + v^{\omega-x-1}) \cdot_{(\omega-x-1)/1} q_x =$

$= v^m(1 -_{/m} q_x) + v^{m+1}(1 -_{/(m+1)} q_x) + \cdots + v^{\omega-x-1}({}_{/(\omega-x-1}q_x) =$

$= v^m({}_mP_x) + v^{m+1}({}_{m+1}P_x) + \cdots + v^{\omega-x-1}({}_{(\omega-x-1)}P_x) =$

$= \displaystyle\sum_{h=m}^{\omega-x-1} ({}_hE_x) =_{m/} \ddot{a}_x$ per il criterio di scindibilità attuariale.
Se $R \geq 1 \Rightarrow U = R \cdot_{m/} \ddot{a}_x$

6.2.3 Rendita vitalizia, anticipata, immediata temporanea con R=1

Definizione: Pagamento della rata all'inizio di ogni anno, a partire dalla stipula, finchè la testa assicurata è in vita e al più fino alla scadenza della polizza

$$\tilde{y} : \begin{cases} v^0; \quad ; (v^0 + v^1); \dots ; (V^0 + v^1 + \cdots + v^{n-1}); (V^0 + v^1 + \cdots + v^{n-1}) \\ {}_{/1}q_x; \quad {}_{1/1}q_x; \quad \dots ;_{(n-1)/1}\, q_x; \quad \dots ;_{(\omega-x-1)}\, q_x \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = V^0 \cdot_{/1} q_x + (V^0 + v^1) \cdot_{1/1} q_x + \cdots + (v^0 + v^1 + \cdots + v^{n-1}) \cdot_{(n-1)/1} q_x + \dots$
$+ (v^0 + v^1 + \cdots + v^{n-1})_{(\omega-x-1)/1} q_x$

$= v^0({}_{/1}q_x +_{1/1} q_x + \cdots +_{(\omega-x-1)/1} + v^1({}_{1/1}q_x + \cdots +_{(\omega-x-1)/1} q_x + \cdots + v^{n-1}({}_{(n-1)/1}q_x +$
$\cdots +_{(\omega-x-1)/1} q_x)$

$$=_0 P_x \cdot v^0 +_1 P_x \cdot v^1 + \cdots +_{n-1} P_x \cdot v^{n-1} = \sum_{h=0}^{n-1} {}_hE_x =_{/n} \ddot{a}_x \; se \; R \geq 1 \Rightarrow U = R \cdot_{/n} \ddot{a}_x$$

6.2.4 Rendita vitaliazia, anticipata, differita, temporanea con R=1

Definizione: Pagamento della rata all'inizio di ogni anno dopo il periodo di differimento, finchè la testa assicurata è in vita e al più per n anni

$$\tilde{y} = \begin{cases} 0; \quad v^m; \quad v^m + v^{m+1}; \dots ; v^m + v^{m+1} + \cdots + v^{\omega-x-1} \\ {}_{/m}q_x \quad ;_{m/1}\, q_x; \quad {}_{(m+1)/1}q_x; \quad \dots ;_{(\omega-x-1)/1}\, q_x \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = v^m({}_{m/1}q_x) + (v^m + v^{m+1})({}_{(m+1)/1}q_x) + \cdots + (v^m + \cdots + v^{m+n+1})({}_{(\omega-x-1)/1}q_x) =$

$= v^m({}_{m/}q_x +_{(m+1)/1} q_x + \cdots +_{(\omega-x-1)/1} q_x) + \cdots + v^{m+n+1}({}_{(m+n+1)/1}q_x + \cdots +_{(-x-1)/1}$
$q_x) =$

$=_m P_x \cdot v^m +_{m+1} P_x \cdot v^{m+1} + \cdots +_{m+n-1} P_x \cdot v^{m+n-1} =$

$$= \sum_{h=m}^{m+n-1} {}_hE_x =_{m/n} \ddot{a}_x =_m E_x \cdot_{/n} \ddot{a}_{x+m} \; se \; R \geq 1 \Rightarrow U = R \cdot_{m/n} \ddot{a}_x$$

6.2.5 Metodo dei simboli di computazione per rendite anticipate

Se vale il principio della scindibiltà$\longrightarrow$ se l'equilibrio attuariale tra le prestazioni della compagnia e le controprestazioni dell'assicurato sussite alla stipula, allora sussite in ogni momento.
${}_{x+n}E_0 =_n E_x \cdot_x E_0 \Rightarrow_n E_0 = \frac{{}_{x+n}E_0}{{}_xE_0} = \frac{{}_{x+n}P_0 \cdot v^{x+n}}{{}_xP_0 \cdot v^x}$

Sia $D_x =_x P_0 \cdot v^x \Rightarrow_n E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$ dove D è un tasso di premio di capitale differito ad età x

In rendita vitalizia, perpetua, immediata, anticipata

$$U = \ddot{a}_x = \sum_{h=0}^{\infty} E_x = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{D_{x+h}}{D_x} = \frac{1}{D_x}\sum_{h=0}^{\infty} D_{x+h}$$

Sia $N_x = \sum_{h=0}^{\infty} D_{x+h} \Rightarrow U = \ddot{a} = \frac{N_x}{D_x}$

In Rendita vitalizia, perpetua, immediata, differita

$$U =_{m/} \ddot{a}_x = \sum_{h=m}^{\infty} {}_hE_m = \sum_{h=0}^{\infty} {}_{m+h}E_x = \frac{1}{D_x}\sum_{h=0}^{\infty} D_{(x+m)+h} = \frac{N_{x+m}}{D_x}$$

In rendita temporanea immediata anticipata

$$U =_{/n} \ddot{a}_x = \sum_{h=0}^{n-1} {}_hE_x = \sum_{h=0}^{\infty} {}_hE_x - \sum_{h=n}^{\infty} = \frac{N_x}{D_x} - \sum_{h=0}^{\infty} {}_{n+h}E_x = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+n}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

In rendita temporanea immediata differita

$$U =_{m/n} \ddot{a} = \frac{N_{x+m} - N_{x+n+m}}{D_x}$$

6.2.6 Rendita vitalizia, perpetua, posticipata, immediata con R=1

Defiinizione: Pagamneto della rata alla fine di ogni anno a partire dall'epoca di stipula, fin quando la testa assicurata è in vita

$$\tilde{y} = \begin{cases} 0; \quad v^1; \quad v^1+v^2; \ldots ; v^1+\cdots+v^{\omega-x-1} \\ {}_{/1}q_x \quad ;{}_{1/1}\, q_x; \quad {}_{2/1}q_x; \qquad \ldots ;{}_{(\omega-x-1)/1}\, q_x \end{cases}$$

$$U = E[\tilde{y}] = v({}_{1/1}q_x) + (v^1+v^2)({}_{2/1}q_x) + \cdots + (v^1+v^2+\cdots+v^{\omega-x-1})({}_{(\omega-x-1)/1}q_x) =$$

$$=_1 P_x \cdot v^1 +_2 P_x \cdot v^2 + \cdots +_{\omega-x-1} P_x \cdot v^{\omega-x-1} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} {}_hE_x = a_x \; se \; R \geq 1 \Rightarrow U = R \cdot a_x \quad \ddot{a}_x = a_x + 1$$

6.2.7 Rendita vitalizia, immediata, posticipata, temporanea con R=1

Definizione: Pagamento della rata alla fine di ogni anno, a partire dall'anno di stipula della polizza, se l'assicurato è in vita e al più per n-anni

$$\tilde{y} : \begin{cases} 0; \quad ; v^1; \ldots ; (v^1+\cdots+v^n); (v^1+\cdots+v^n) \\ {}_{/1}q_x ;{}_{1/1}\, q_x; \quad \ldots ;{}_{(n)/1}\, q_x; \quad \ldots ;{}_{(\omega-x-1)}\, q_x \end{cases}$$

$$U = E[\tilde{y}] = \sum_{h=1}^{n} {}_hE_x =_{/n} a_x \; se \; R \geq 1 \Rightarrow U = R \cdot_{/n} a_x$$

6.2.8 Rendita, vitalizia, differita, posticipata, perpetua con R=1

Definizione: Pagamento della rata alla fine di ogni anno, dopo il periodo di differimento e finchè l'assicurato è in vita.

$$\tilde{y} = \begin{cases} 0; 0; v^{m+1}; (v^{m+1} + v^{m+2}; \dots ; (v^{m+1} + \dots + V^{\omega-x-1} \\ {}_{/m}q_x;_{m/1} q_x;_{(m+1)/1} q_x;_{(m+2)/1} q_x; \dots ;_{(\omega-x-1)/1} q_x \end{cases}$$

$$U = E[\tilde{y}] = \sum_{h=m+1}^{\infty} {}_hE_x =_{m/} a_x =_m E_x \cdot a_{x+m} \; se \; R \geq 1 \Rightarrow U = R \cdot_{m/} a_x$$

6.2.9 Rendita vitalizia, differita, posticipata, temporanea con R=1

Definizione: Pagamento della rata alla fine di ogni anno, dopo il periodo di differimento, finchè l'assicurato è in vita e al più per n-anni.

$$\tilde{y} = \begin{cases} 0; 0; v^{m+1}; (v^{m+1} + v^{m+2}); \dots ; (v^{m+1} + \dots + v^{m+n}); \dots ; (v^{m+1} +^{m+1} \\ {}_{/m}q_x;_{m/1} q_x;_{(m+1)/1} q_x;_{(m+2)/1} q_x; \dots ;_{(m+n+1)/1} q_x; \dots ;_{(\omega-x-1)/1} q_x \end{cases}$$

$$U = E[\tilde{y}] = \sum_{h=m+1}^{m+n} {}_hE_x =_{m/n} a_x =_m E_x \cdot_{/n} a_{x+m} \; se \geq 1 \Rightarrow U = R \cdot_{m/n} a_x$$

6.2.10 Metodo dei simboli di computazione per rendite posticipate

6.2.11 Rendita vitalizia, immediata, perpetua, anticipata, frazionata con R=1

Definizione: Pagamento della rata annua, corrisposta anticipatamente e frazionata nell'anno, a partire dalla stipula della polizza e finchè l'assicurato è in vita
Sia $k = \#$frazioni della rata$\rightarrow R = 1 = \frac{1}{k} \cdot k$
Applicando il principio di composizione dei contratti si ha:

$$\ddot{a}_x^{(k)} = \frac{1}{k}\left[\left({}_0E_x + {}_{\frac{1}{k}}E_x + {}_{\frac{2}{k}}E_x + \cdots + {}_{\frac{k-1}{k}}E_x\right) + \right.$$

$$\left. + \left({}_1E_x + {}_{1+\frac{1}{k}}E_x + \cdots + {}_{1+\frac{k-1}{k}}E_x\right) + \cdots + \left({}_{(\omega-x-1)}E_x + {}_{(\omega-x-1)+\frac{1}{k}}E_x + \cdots + {}_{(\omega-x-1)+\frac{k-1}{k}}E_x\right)\right]$$

$$\ddot{a}_x^{(k)} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{r=0}^{\omega-x-1} \sum_{h=0}^{k-1} {}_{r+\frac{h}{k}}E_x$$

Approssimando tramite interpolazione lineare si ha:

$${}_{r+\frac{h}{k}}E_x \simeq {}_rE_x - \frac{h}{k}\left({}_rE_x - {}_{r+1}E_x\right)$$

$$\ddot{a}_x^{(k)} \simeq \frac{1}{k}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{k-1}\left[{}_rE_x - \frac{h}{k}\left({}_rE_x - {}_{r+1}E_x\right)\right] = \frac{1}{k}\sum_{r=0}^{\infty}\left[\sum_{h=0}^{k-1}{}_rE_x - \frac{1}{k}\left({}_rE_x - {}_{r+1}E_x\right)\sum_{h=0}^{k-1}\right] \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{k}\sum_{r=0}^{\infty}\left[k \cdot {}_rE_x - \frac{k-1}{2}\left({}_rE_x - {}_{r+1}E_x\right)\right] = \frac{1}{2k}\sum_{r=0}^{\infty}\left[(k+1)\,{}_rE_x + (k-1)\,{}_{r+1}E_x\right] \simeq$$

$$\simeq \frac{1}{2k}\left[(k+1)\sum_{r=0}^{\infty}{}_rE_x + (k-1)\sum_{r=0}^{\infty}{}_{r+1}E_x\right] \simeq \frac{1}{2k}\left[(k+1)\ddot{a}_x + (k-1)(\ddot{a}_x - 1)\right] \simeq$$

$$\simeq \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} \Rightarrow \ddot{a}_x^{(k)} = \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} \leq \ddot{a}_x$$

$$U = R \cdot \ddot{a}_x^{(k)} = R \cdot \left(\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\right)$$

6.2.12 Rendita vitalizia, differita, perpetua, anticipata, frazionata con R=1

$$_{m/}\ddot{a}_x^{(k)} =_m E_x \cdot \ddot{a}_{x+m}^{(k)}$$

$$U = R \cdot_{m/}\ddot{a}_x^{(k)} = R \cdot_m E_x \cdot \ddot{a}_{x+m}^{(k)} = R \cdot_m E_x \left[\ddot{a}_{x+m} - \frac{k-1}{2k}\right] = R \cdot \left[_{m/}\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} \cdot_m E_x\right]$$

6.2.13 Rendita vitalizia, immediata, temporanea, anticipata, frazionata con R=1

$$_{/n}\ddot{a}_x^{(k)} = \ddot{a}_x^{(k)} -_{n/} \ddot{a}_x^{(k)} = \left(\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\right) - \left(_{n/}\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\,_n E_x\right) =$$

$$\left(\ddot{a}_x -_{n/} \ddot{a}_x\right) - \frac{k-1}{2k}\left(1 -_n E_x\right) =_{/n} \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\left(1 -_n E_x\right)$$

Si ha che $\ddot{a}_x =_{/n} \ddot{a}_x +_{n/} \ddot{a}_x \qquad \ddot{a}_x^{(k)} +_{n/} \ddot{a}_x^{(k)}$

6.2.14 Rendita vitalizia, differita, temporanea, anticipata, frazionata con R=1

$$_{m/n}\ddot{a}_x^{(k)} =_m E_x \cdot_{/n}\ddot{a}_{x+m}^{(k)} =_m E_x \left[\ddot{a}_{x+m}^{(k)} -_{n/} \ddot{a}_{x+m}^{(k)}\right] =_m E_x \left[_{/n}\ddot{a}_{x+m} - \frac{k-1}{2k}\left(1 -_n E_{x+m}\right)\right] =$$

$$=_{m/n} \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\left(_m E_x -_{m+n} E_x\right) \Longrightarrow U = R \cdot_{m/n} \ddot{a}_x^{(k)}$$

6.2.15 Rendita vitalizia, immediata, perpetua, posticipata, frazionata con R=1

Tasso di premio unico, puro:

$$a_x^{(k)} = \ddot{a}_x^{(k)} - \frac{1}{k} = \left(\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} - \frac{1}{k} = (a_x + 1) - \frac{k-1}{2k} - \frac{1}{k} = a_x + \frac{k-1}{2k} U = R \cdot \left(a_x + \frac{k-1}{2k} a_x^{(k)}\,_x\right.\right.$$

6.2.16 Rendita vitalizia, differita, perpetua, posticipata, frazionata con R=1

$$_{m/}a_x^{(k)} =_m E_x^{(k)}\,_{x+m} =_m E_x \left(a_{x+m} + \frac{k-1}{2k}\right) =_{m/} a_x + \frac{k-1}{2k}\,_m E_x$$

6.2.17 Rendita vitalizia, immediata, temporanea, immediata, frazionata con R=1

$$_{/n}a_x^{(k)} = a_x^{(k)} -_{n/} a_x^{(k)} =_{/n} a_x + \frac{k-1}{2k}(1 -_n E_x)$$

6.2.18 Rendita vitalizia, differita, temporanea, posticipata, frazionata con R=1

$$_{m/n}a_x^{(k)} =_m E_x \cdot_{/n} \ddot{a}_{x+m} =_{m/n} a_x + \frac{k-1}{2k}({}_nE_x -_{m+n} E_x)$$

6.3 Rendite a rata variabile

6.3.1 Rendita vitalizia, immediata, perpetua, anticipata, in progressione aritmetica di ragione D=1

Definizione: Pagamento della rata, la prima R=1 e le successive in progressione aritmetica di ragione D=1 all'inizio di ogni anno, a partire dall'epoca di stipula e fin quando la testa assicurata è in vita.

$$\tilde{y} = \begin{cases} v^0; v^0 + 2v^1; \dots; v^0 + \dots + (\omega - x)v^{\omega-x-1} \\ _{1/}q_x;_{1/1} q_x; \dots;_{(\omega-x-1)/1} q_x \end{cases}$$

$$U = E[\tilde{y}] = v^0({}_{/1}q_x) + \dots + v^0 + v^1 + \dots + (\omega - x - 1)v^{\omega-x-1}({}_{(\omega-x-1)/1}q_x) =$$

$$=_0 P_x v^0 + \dots +_{\omega-x-1} P_x(\omega - x)v^{\omega-x-1} =$$

$$\sum_{h=0}^{\infty}(1 + h) \cdot_h E_x = (I\ddot{a})_x \ se\ R > 1 \Rightarrow U = R \cdot (I\ddot{a})_x$$

Se differita: $U =_{m/} (I\ddot{a})_x =_m E_x(I\ddot{a})_{x+m}$
Se immediata e temporanea: $U =_{/n} (I\ddot{a})_x = (I\ddot{a})_x -_{n/} (I\ddot{a})_x - n \cdot \ddot{a}_x$
Se differita temporanea: $U =_{m/n} (I\ddot{a})_x =_m E_x \cdot_{/n} (I\ddot{a})_{x+m}$

Se immediata perpetua posticipata:$U = (Ia)_x = \sum_{h=1}^{\infty} h \cdot_h E_x$

Se differita: $U =_{/m} (Ia)_x =_m E_x(Ia)_{x+m}$

6.3.2 Simboli di computazione

$$(I\ddot{a})_x =_0 E_x + 2_1E_x + \dots = \frac{D_x}{D_x} + 2\frac{D_{x+1}}{D_x} + \dots = \frac{N_x + N_{x+1} + \dots + N_\omega}{D_x}$$

Si pone $S_x = \sum_{h=0}^{\infty} N_{x+h}$

$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$; ${}_{/m}(I\ddot{a})_x = \frac{S_{x+m}}{D_x}$;${}_{/n}(I\ddot{a})_x = \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+m}}{D_x}$;${}_{m/n}(I\ddot{a})_x = \frac{S_{x+m} - S_{x+n+m} - n \cdot N_x}{D_x}$

Rendita, vitalizia, immediata, perpetua, anticipata in progressione aritmetica con rata R e ragione D

$$\tilde{y} = \begin{cases} R \cdot v^0; Rv^0 + (R+D)v^1; Rv^0 + (R+D)v^1 + (R+2D)v^3; \dots \\ {}_{/1}q_x; \dots \end{cases}$$

$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$ *dove* :

$\tilde{y}_1 = \begin{cases} Rv^0; R(v^0 + v^1); R(v^0 + v^1 + v^2); \dots \\ {}_{/1}q_x; \dots \end{cases}$

$\tilde{y}_2 = \begin{cases} 0; D(v^1); D(v^1 + 2v^2); \dots \\ {}_{/1}q_x; \dots \end{cases}$

$E[\tilde{y}] = E[\tilde{y}_1] + E[\tilde{y}_2] = R \cdot \ddot{a}_x + D(Ia)_x$

Rendita, vitalizia, immediata, perpetua, anticipata, in progressione geometrica

Def: Pagamento della rata, inizialmente unitaria, variabile in progressione geometrica di ragione $q = 1 + \alpha$, all'inizio di ogni anno finchè la testa assicurata è in vita.

$\tilde{y} = \begin{cases} 1 \cdot v^0; [1 + (1+\alpha)v]; [1 + (1+\alpha)v + (1+\alpha)^2v^2]; \dots \\ {}_{/1}q_x; \dots \end{cases}$

$U = E[\tilde{y}] = v^0 \ {}_1q_x + [1 + (1+\alpha)v] \ {}_{1/1}q_x + \dots =$

$v^0({}_{/1}q_x + \dots) + (1+\alpha)v({}_{1/1}q_x + \dots) + (1+\alpha)^2v^2({}_{2/1}q_x + \dots)$

se $\alpha \le i \Rightarrow (1+\alpha) \cdot v = \frac{1+\alpha}{1+i} \le 1 \Rightarrow \eta = \frac{i-\alpha}{1+\alpha}$ dove η è una sintesi tra i ed α.

Pertanto si ha che $(1+\alpha)v = \frac{1}{1+\eta} = v^{[\eta]}$

$U = v^{0[\eta]} \ {}_0P_x + v^{[\eta]} \ {}_1P_x + \dots = \ {}_0E_x^{[\eta]} + \ {}_1E_x^{[\eta]} + \dots = \sum_{h=1}^{\infty} {}_hE_x = \ddot{a}_x^{[\eta]}$

6.3.3 Rendita vitalizia con prefissato numero di rate iniziali certe

$$\tilde{y} = \begin{cases} a_n; a_n; a_n; a_n; a_n; a_n + v^{n+1}; a_n; \ldots \\ {}_{/1}q_x;\ {}_{1/1}q_x; \ldots;\ {}_{(n-1)/1}q_x;\ {}_{n/1}q_x;\ {}_{n/1}q_x;\ {}_{(n+1)/1}q_x;\ {}_{(n+2)/1}q_x; \ldots \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = a_n + {}_{n/}a_x$

Capitolo 7

Assicurazione caso morte

Generalmente capitali pagato o all'atto del decesso o successivamente

7.1 Assicurazione elementare caso morte

Definizione: Pagamento del capitale alla fine dell'anno h (prefissato), se la testa assicurata muore nell'anno h. Sia C=1

$$\tilde{y} = \begin{cases} 1 - v^{-h}; 0 \\ {}_{(h-1)/1}q_x; \, altrimenti \end{cases}$$

$$U = E[\tilde{y}] = v^h \cdot \ {}_{(h-1)/1}q_x = \ {}_{(h-1)/1}A_x$$

7.2 Assicurazione a vita intera

La compagnia si impegna a pagare il capitale alla fine dell'anno in cui ha luogo il decesso.

$$\tilde{y} = \begin{cases} v; v^2; v^3; \ldots; v^{\omega-x} \\ {}_{/1}q_x; \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$U = E[\tilde{y}] = v \cdot \ {}_{/1}q_x + \cdots + v^{\omega-x} \ {}_{(\omega-x-1)/1}q_x = \ {}_{/1}A_x + \cdots + \ {}_{(\omega-x-1)/1}A_x =$$
$$= \sum_{h=1}^{\infty} \ {}_{(h-1)/1}A_x = A_x \Rightarrow \text{Tasso di premio a vita intera./1}$$

7.2.1 Assicurazione differita a vita intera

$$\tilde{y} = \begin{cases} 0; v^{m+1}; \dots ; v^{\omega-x} \\ {}_{/m}q; \ {}_{m/1}q_x; \dots ;{}_{(\omega-x-1)}q_x \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = v^{m+1} \cdot \ {}_{m/1}q_x + \dots + v^{\omega-x} \cdot \ {}_{(\omega-x-1)/1} =$

$= v^m \ {}_mP_x(v + \ {}_{/1}q_{x+m} + v^2 \ {}_{1/1}q_{x+m} + \dots = \sum_{h=m+1}^{\infty} {}_{(h-1)/1}A_x = \ {}_{m/}A_x = \ {}_mE_x \cdot A_{x+m}$

7.3 Immediata temporanea caso morte (ICM)

Pagamenti del capitale alla fine dell'anno in caso di decesso dell'assicurato, se questo avviene entro n anni dalla stipula

$$\begin{cases} v; v^2; \dots ; v^n; 0; 0; \dots ; 0 \\ {}_{/1}q_x; \ {}_{1/1}q_x; \dots ; \ (n-1)/1q_x; \ {}_{n/1}q_x; \dots ;{}_{(\omega-x-1)/1} \, q_x \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = vq_x + \dots =_{/1} A_x + \dots = \sum_{h=1}^{n} {}_{(h-1)/1}A_x = \ {}_{/n}A_x$

Se differita: $U = \sum_{h=m+1}^{n+m} {}_{(h-1)/1}A_x = \ {}_{m/n}A_x$

7.4 Simboli di computazione

Grazue alla scindibilità attuariale si ha:

$${}_{(x+h-1)/1}A_0 = {}_xE_0 = {}_{(h-1)/1}A_x \Rightarrow {}_{(h-1)/1}A_x = \frac{{}_{(x+h-1)/1}A_x}{{}_xE_0} = \frac{v^{x+h} \cdot {}_{(x+h-1)/1}q_0}{v^x \ {}_xP_0} =$$

$$= \frac{v^{x+h} \cdot \dfrac{S(x+h-1) - S(x+h)}{S(0)=1}}{v^x \cdot \dfrac{S(x)}{S(0)=1}} = \frac{v^{x+h} \cdot [S(x+h-1) - S(x+h)]}{v^x(x)}$$

Poniamo $C_{x+h-1} = v^{x+h} \cdot [S(x+h-1) - S(x+h)] \Rightarrow {}_{(h-1)/1}A_x = \dfrac{C_{x+h-1}}{D_x}$

$$A_x = \sum_{h=1}^{\infty} {}_{(h-1)/1}A_x = \sum_{h=0}^{\infty} {}_{h/1}A_x = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{C_{x+h}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{h=0}^{\infty} C_{x+h}$$

Sia $M_x = \sum_{h=0}^{\infty} C_{x+h} \Rightarrow A_x = \dfrac{M_x}{D_x}$

$${}_{m/}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}; \ {}_{/n}A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}; \ {}_{m/n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

7.4.1 Simboli di computazione per capitali variabili

$$(IA)_x = A_x +;_{1/} A_x + \cdots = \frac{M_x}{D_x} + \frac{M_{x+1}}{D_x} + \dots$$

Si pone $R_x = \sum_{h=0}^{\infty} M_{x+h} \Rightarrow (IA)_x = \dfrac{R_x}{D_x}$; ${}_{m/}(IA)_x \dfrac{R_{x+m}}{D_x}$;

$${}_{/n}(IA)_x = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{D_x}; \ {}_{m/n}(IA)_x = \frac{R_{x+m} - R_{x+m+n} - n \cdot M_{x+m+n}}{D_x}$$

7.5 Assicurazione caso morte variabile in progressione aritmetica crescente generalizzata di capitale C e ragione D

$$\tilde{y} = \begin{cases} Cv; (C+D)v^2; (C+2D)v^3; \dots; [C + (\omega - x - 1)D]v^{\omega - x} \\ {}_{/1}q_x; \dots\dots\dots; {}_{(\omega-x-1)/1}\, q_x \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = C(v \cdot {}_{/1}q_x + v^2 \cdot {}_{1/1}q_x + \dots) + D(v^2 \ {}_{1/1}q_x + \dots) = C \cdot (A_x) + D \ {}_{1/}(IA)_x$

dove $(IA)_x = \sum_{h=1}^{\infty} h \cdot {}_{(h-1)/1}$

7.6 ICM decrescente Assicurazione a rischio decrescente

Pagamento di un capitale inizialmente C, poi decrescente in progressione aritmetica di ragione $D = -\frac{C}{n}$, alla fine dell'anno di decesso dell'assicurato ed entro la scadenza della polizza.

$$\tilde{y} = \begin{cases} Cv; C\left(1 - \frac{1}{n}\right)v^2; C\left(1 - \frac{2}{n}\right)v^3; \dots; C\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)v^n \\ {}_{/1}q_x; \dots \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = C \cdot \ {}_{/n}A_x - \frac{c}{n}\ {}_{1/(n-1)}(IA)_x$

Rischio decrescente nella misura in cui i tassi di mortalità * i fattori di attulizzazione corrispondenti abbiano un andamento decrescente.

7.7 Rendita Post-mortem

Pagamento della rata residua, alla morte dell'assicurato, di una rendita certa, posticipata, temporanea.

$$\tilde{y} = \begin{cases} (v + v^2 + \cdots + v^n); (v^2 + v^3 + \cdots + v^n); \dots; v^n; 0 \\ {}_{/1}q_x; \quad {}_{2/1}q_x; \quad ; \dots ;_{(n-1)/1} q_x; \ {}_nP_x \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = v \cdot \ {}_{/1}q_+ v^2({}_{/1}q_x + \ {}_{1/1}q_x) + \cdots = v(1 - \ {}_1P_x) + v^2(1 - \ {}_2P_x) + \cdots = (v + v^2 + \cdots + v^n) - (v\ {}_1P_x + v^2\ {}_2P_x + \cdots + v^n\ {}_nP_x) = a_{\overline{n}|i} - {}_{/n}a_x$

Capitolo 8

Assicurazione mista

È certo il pagamento di almeno una prestazione

8.1 Mista ordinaria e semplice

Definizione: La compagnia si impegna a pagare il capitale assicurato alla fine dell'anno di decesso se questo avviene entro la fine del contratto, o alla scadenza del contratto, se la testa assicutrata supera in vita tale scadenza. $\tilde{y} = \begin{cases} v^1; v^2; \ldots; v^n; v^n \\ {}_{/1}q_x;\ {}_{1/1}q_x; \ldots; {}_{(n-1)/1}; 1 - {}_{/n}q_x \end{cases}$

$U = E[\tilde{y}] = {}_{/n}A_x + {}_nE_x = A_{[x,n]} = \dfrac{(M_x - M_{x+n}) + D_{x+n}}{D_x}$

8.2 Mista combinata

Definizione: La compgnia paga un capitale $C^{(v)} = (1+k); k > 0$ se la testa assicurata supera in vita la scadenza del contratto, oppure pagamento di un capitale $C^{(m)} = 1$, se la testa assicurata muore entro la durata del contratto, alla fine dell'anno di decesso

$\tilde{y} = \begin{cases} v; v^2; \ldots; v^n; (1+k)v^n \\ {}_{/1}q_x;\ {}_{1/1}q_x; \ldots;\ {}_{(n-1)/1}q_x; (1 - {}_{/n}q_x) \end{cases}$

$U = E[\tilde{y}] = {}_{/n}A_x + (1+k)\,{}_nE_x = A_{[x,n]} + k\,{}_nE_x$ *se* $k = 1 \Rightarrow U = {}_{/n}A_x + 2\,{}_nE_x$: mista doppia = temporanea+ capitale differito.

8.3 Termine fisso

Definizione: pagamento del capitale alla fine del contratto, indipendentemente dall'esistenza in vita in vita dell'assicurato. Sia C=1

$$\tilde{y} = \begin{cases} v^n; \dots; v^n \\ {}_{/n}q_x; \dots; 1 - q_x \end{cases} \quad \Rightarrow U = E[\tilde{y}] = v^n \cdot_{/n} q_x + v^n \cdot_n P_x = v^n$$

8.4 Semimisto

Definizione: La compgania paga il capitale assicurato in caso di vita alla scadenza oppure metà dello stesso alla fine dell'anno di decesso e l'altra metà alla scadenza, se il decesso avviene entro la durata del contratto. Sia C=1

$$\tilde{y} = \begin{cases} \frac{1}{2}(v + v^n); \frac{1}{2}(v^2 + v^n); \dots; \frac{1}{2}(v^n + v^n); v^n \\ {}_{/1}q_x, ;\ {}_{1/1}q_x; \dots;\ {}_{(n-1)/1}q_x; 1 -\ {}_{/n}q_x \end{cases}$$

$$U = E[\tilde{y}] = \frac{1}{2}(v + v^n)\ {}_{/1}q_x + \frac{1}{2}(v^2 + v^n)\ {}_{1/1}q_x + \dots + v^n\ {}_nP_x =$$

$$= \frac{1}{2}(v\ {}_{/1} + v^2\ {}_{1/1}q_x + \dots +\ {}_{(n-1)/1}v^n) + \frac{1}{2}v^n(\ {}_{/1}q_x + \dots) + v^n\ {}_nP_x =$$

$$= \frac{1}{2}\ {}_{/n}A_x + \frac{1}{2}v^n \cdot\ {}_{/n}q_x + v^n \cdot\ {}_nP_x = \frac{1}{2}{}_{/n}A_x + \frac{1}{2}{}_nE_x + \frac{1}{2}v^n =$$

$$= A_{[x,n]+v^n}2$$

8.5 Mista a capitale raddoppiato

Def: pagamento del capitale assicurato alla fine di un anno prefissato n se la testa assicurata è ancora in vita in tale anno, oppure pagamento del capitale alla fine dell'anno di decesso in qualunque epoca avvenga

$$\frac{\tilde{y}=\begin{cases} v; v^2; \dots; v^n; v^n + v^{n+1}; v^n + v^{n+2}; \dots v^n + v^{\omega-x} \\ {}_{/1}q_x;\ {}_{1/1}q_x; \dots;\ {}_{n-1}/1 \end{cases}}{q_x;\ {}_{n/1}q_x;\ {}_{(n+1)/1}q_x; \dots;\ {}_{(\omega-x-1)}/1q_x}$$

U=E[]=A$_x$ + ${}_nE_x$; vita intera + capitale differito

8.6 Mista capitale e rendita

Pagamento del capitale assicurato C alla fine dell'anno di decesso dell'assicurato in qualunque momento avvenga, e pagamento di una rendita di rata $R = \alpha \cdot C\ 0 <$

$\alpha < 1$, anticipata, perpetua e differita finchè la testa assicurata è in vita

$$\tilde{y} : \begin{cases} v; v^2; \ldots; v^m; v^{m+1} + \alpha v^m; v^{m+2} + \alpha(v^m + v^{m+1}); \ldots \\ {}_{/1}q_x;\ {}_{1/1}q_x; \ldots \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = A_x + \alpha(v^m \cdot {}_mP_x + v^{m+1} \cdot_{m+1} P_x + \ldots) = A_x + \alpha\, {}_{m/}\ddot{a}_x\ con\ 0 < \alpha < 1$

Capitolo 9

Premi rateali

La rateizzazione può essere:

- Costante o Variabile

- Periodico o Non periodico

- Temporaneo o Vitalizio(perpetuo)

Condizioni per rateizzare:

1. La prima rata deve essere pagata alla stipula del contratto

2. Le rate successive sono pagate, in caso di vita dell'assicurato, all'inizio di ogni anno

3. Le rate di premio devono essere pagate tutte prima che abbiano inizio le prestazioni della compagnia, ed entro la scadenza del contratto

4. Il valore attuariale della rata di premio deve essere uguale al premio unico

Premio annuo, costante, temporaneo: $U = P' \cdot {}_{/m}\ddot{a}_x$
Premio annuo, costante, vitalizio:$U = P'' \cdot \ddot{a}_x \; con \; P' > P''$

Capitolo 10

Disuguaglianze notevoli

10.1 Valide per ogni base tecnica e qualunque età

$_{/n}A_x \leq A_x \leq A_{[x,n]}$

$Dim: \ _{/n}A_x \leq \ _{/n}A_x + \ _{n/}A_x = A_x$

$A_{x[x,n]} \Rightarrow \ _{/n}A_x + \ n/A_x \leq \ _{/n}A_x + \ _nE_x \Rightarrow \ _nE_x \cdot A_{x+n} \leq \ _nE_x \Rightarrow A_{x,n} \leq 1$
$\sum v^h \ _{(h-1)/1}q_x \leq v \sum \ _{(h-1)/1}q_x = v \leq 1$

$_{n/}A_x \leq \ _nE_x \leq v^n \leq A_{[x,n]]Dim: _nE_x = v^n \cdot (_nP_x \leq 1) \Rightarrow _nE_x \leq v^n \ _{/n}A_x + _nE_x = \sum v^h \ _{(h-1)/1}q_x + v^n \ _nP_x^n (\sum \ _{(h-1)/1}q_x + _nP_x) = v^n [(}$

10.2 Vale per i=0

$A_x = A_{[x,n]} = v^n = 1 \quad _{n/}A_x = \ _nE_x = \ _nP_x$

$(Ia)_x = \ _1E_x + 2\,_2E_x + \cdots = \ _1P_x + 2\,_2P_x + \ldots$
$(IA)_x = \ _1A_x + 2\,_2A_x + \cdots =_{/1} q_x + 2\,_{1/1}q_x + \cdots = (1 - P_x) + 2(1 - P_{x+1})\,_1P_x + \cdots =$
$= 1 - P_x + 2P_x - 2\,_2P_x + \cdots = 1 + P_x + \ _2P_x + \ _3P_x + \cdots = \ddot{e}_x$

10.3 Relazione tra $\ddot{a}_x$ e A_x

Consideriamo un contratto che assicura un capitale C=1 in caso di morte e una rendita di rata $R = d = \dfrac{i}{1+i} = i \cdot v$ in caso di vita

$$\tilde{y} : \begin{cases} dv; d + dv + v^2; d + dv + dv^2 + v^3; \ldots \\ _{/1}q_x; \ _{1/1}q_x; \ldots \end{cases}$$

$U = E[\tilde{y}] = d + dv(1 - \ _{/1}q_x) + dv^2(1 - \ _{/2}q_x) + \cdots + (v\,_{/1}q_x + v^2\,_{1/1}q_x + \ldots) =$
$= d[1 + v\,_1P_x + v^2\,_2P_x + \ldots] + A_x = d\ddot{a}_x + A_x$

$d+v = iv+v = (1+i)v = 1;\ d+dv+v^2 = iv+iv^2+v^2 = iv+v = v(1+i) = 1; \ldots$
$Quindi\, U = E[\tilde{y}] = 1 \Rightarrow d\ddot{a}_x + A_x$
$Allo\, stesso\, modo\ 1 = d\,_{/n}\ddot{a}_x + A_{[x,n]}$

Capitolo 11

Assicurazione a due teste

Consideriamo due teste di età iniziale c e y Gruppo che si estingue al primo decesso: $\tilde{T}_{x,y} = min(\tilde{T}'_x; \tilde{T}''_y)$
Teste indipendenti e statisticamente omogenee

Capitale differito sopravvivenza del gruppo

$\tilde{y} : \begin{cases} v^n \ se \ P\{\tilde{T}_{x,y} > n \\ 0 \ se \ altrimenti \end{cases}$
$U = E[\tilde{y}] = {}_nE_{x,y} = v^n \, {}_nP_{x,y} = v^n \, {}_nP_x \cdot {}_nP_y$

Se il gruppo si estingue al secondo decesso$\Rightarrow$ $\tilde{T}_{barx,y} = max(\tilde{T}'_x; \tilde{T}''_y)$

Capitale differito

$\tilde{y} = \begin{cases} v^n \ se \ P\{\tilde{T}_{\bar{x,y}} > n \\ 0 \ se \ altrimenti \end{cases}$

$U = E[\tilde{y}] = {}_nE_{\bar{x,y}} = v^n$

11.1 Capitale differito in caso di sopravvivenza di una testa (y) all'altra (x)

Pagamento del capitale assicurato alla scadenza del contratto se la testa di età x muore entro la scadenza del contratto e la testa di età iniziale y sopravvive a quell'epoca.

$\tilde{y} = \begin{cases} v^n \ per \ P\{(\tilde{T}'_x \leq n) \cap (\tilde{T}''_y > n \\ 0 \ per \ altrimenti \end{cases}$

$U = E[\tilde{y}] = {}_nE_{x|y} = v^n P\{(\tilde{T}'_x \leq n) \cap (\tilde{T}''_y > n)\} = v^n(1 - {}_nP_x) \cdot {}_nP_y = v^n \cdot {}_nP_y - v^n \cdot {}_nP_x \cdot {}_nP_y =$
${}_nE_y - {}_nE_{x,y}$

11.2 Rendita anticipata fino al primo decesso

La compagnia paga una rendita anticipata a rata costante finchè entrambe le teste sono in vita

Per il principio di composizione dei contratti: $\ddot{a}_{x,y} = \sum_{h=0} {}_hE_{x,y}$

se posticipata: $a_{x,y} = \ddot{a}_{x,y} - 1$

11.3 Rendita anticipata all'ultimo decesso (Piano totalmente reversibile)

$$\ddot{a}_{\bar{x,y}} = \sum_{h=0}^{\infty} {}_hE_{\bar{x,y}} = \sum_{h=0}^{\infty}({}_hE_x + {}_xE_y - {}_hE_{x,y}) = \ddot{a}_x + \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$$

Se posticipata: $a_{\bar{x,y}} = \ddot{a}_{\bar{x,y}} - 1$

11.4 Rendita di sopravvivenza (anticipata)

Pagamento della rata annuale anticipata, a partire dall'inizio dell'anno successivo a quello di morte della testa di etò x e finchè la tetsa di età y è in vita

$\ddot{a}_{x|y} = \sum_{h=1}^{\infty} {}_hE_{x|y} = \sum_{h=1}^{\infty}({}_hE_y - {}_hE_{x,y}) = a_y - a_{x,y} = \ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}$ È aleatorio l'epoca di inizio della rendita

11.5 Rendita reversibile generale(anticipata)

Pagamento della rata $R_{x,y} = \gamma$ finchè sono in vita entrambe le teste, della rata $R_x = \alpha$ finchè è in vita solo x dopo la morte di y e della rata $R_y = \beta$ se è in vita y con x morto

$\ddot{a}_{\frac{(\alpha,\beta,\gamma)}{x,y}} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x,y} + \alpha \cdot \ddot{a}_{y|x} + \beta \cdot \ddot{a}_{x|y} = \gamma \cdot \ddot{a}_{x,y} + \alpha(\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x,y}) + \beta(\ddot{a}_y - \ddot{a}_{x,y}) =$

$= \alpha\ddot{a}_x + \beta\ddot{a}_y + (\gamma - \alpha - \beta)x, y\ddot{a}_{\frac{(1,1,\ddot{1})}{x,y}} = \ddot{a}_{\bar{x,y}} =$ rendita totalmente reversibile

11.6 Assicurazione elementare caso morte al primo decesso

Pagamento del capitale assicurato alla fine dell'anno h (prefissato) se il primo decesso avviene nell'anno h

$\tilde{y} : \begin{cases} v^h \; per \; P\{h-1 < \tilde{T}_{x,y} \leq h\} \\ 0 \; per \; altrimenti \end{cases}$

$U = E[\tilde{y}] = v^h \cdot P\{h-1 < \tilde{T}_{x,y} \leq h\} = {}_{(h-1)/1}A_{x,y}$

11.7 TCM al primo decesso

Pagamento del capitale alla fine dell'anno in cui avviebe il primo dcesso, entra la fine del contratto

${}_{/n}A_{x,y} = \sum^{n} {}_{(h-1)/1}A_{x,y}$

11.8 Vita intera al primo decesso

Def: Pagamento del capitale assicurato alla fine dell'anno in cui avviene il primo decesso

$A_{x,y} = \sum^{\infty} {}_{(h-1)/1}A_{x,y}$

11.9 Assicurazione elementare secondo decesso

Pagamento del capitale assicurato nell'anno h(prefissato) se il secondo decesso avviene nell'anno h

$\tilde{y}: \begin{cases} v^h \; per \; P\{h-1 < \tilde{T}_{\bar{x,y}} \le h \\ 0 \; per \; altrimenti \end{cases}$

$U = E[\tilde{y}] = v^h \cdot P\{...\} = v^h \cdot {}_{(h-1)/1}q_{\bar{x,y}} = {}_{(h-1)/1}A_x + {}_{(h-1)/1}A_y - {}_{(h-1)/1}A_{x,y} = {}_{(h-1)/1}A_{\bar{x,y}}$

11.10 TCM secondo decesso

$${}_{/n}A_{\bar{x,y}} = {}_{/n}A_x + {}_{/n}A_y - {}_{/n}A_{x,y}$$

11.11 Vita intera secondo decesso

$$A_{\bar{x,y}} = A_x + A_y - A_{x,y}$$

11.12 Mista semplice al primo decesso

Pagamento del capitale assicurato alla scadenza del contrattp se entrambe le teste sono in vita, oppure lo stesso capitale alla fine dell'anno in cui si verifica il primo decesso, entro la fine del contratto.

$\tilde{y}: \begin{cases} v; v^2; \ldots; v^n; v^n \\ [1.5ex]_{/1}q_{x,y}; {}_{1/1}q_{x,y}; \ldots; {}_{(n-1)/1}q_{x,y}; (1 - {}_{/n}q_{x,y} \end{cases}$

$U = E[\tilde{y}] = A_{[x,y;n]} = {}_{/n}A_{x,y} + {}_{n}E_{x,y}$

11.13 Premi rateali

Condizioni aggiuntive:

1. Se al primo decesso i premi possono essere corrisposti fino al primo decesso

2. Se al secondo decesso i premi possono essere corrisposti o al primo o al secondo decesso

$G(x,y) \Rightarrow P'_v = \dfrac{U}{\ddot{a}_{x,y}}; P'_T = \dfrac{U}{{}_{/m}\ddot{a}_{x,y}}$

$G(\bar{x,}y) \Rightarrow P''_v = \dfrac{U}{\ddot{a}_{\bar{x,y}}}; P''_T = \dfrac{U}{{}_{/m}\ddot{a}_{\bar{x,y}}}$

$con\, m \le n$: durata contratto o differimento iniziale

con $P' > P''$

11.14 Assicurazione totale

Contraente di età x chiede il pagamento del capitale assicurato alla scadenza del contratto al beneficiario di età y se è in vita. Il contraente paga premi annui finchè lui e il beneficiario sono in vita

$$P = C \cdot \frac{{}_{n}E_y}{{}_{/m}\ddot{a}_{x,y}} \, con \, m \leq n$$

Capitolo 12

Valutazioni nel continuo

12.1 capitale differito

Dati: $x, t \in R^+$; δ[1] $= ln(1+i)$ e μ[2]$(t) = -\dfrac{S'(x)}{S(x)}$

$$tildey : \begin{cases} 1 - e^{-\delta t}, \; {}_tP_x \\ 0, \; {}_{/t}P_x \end{cases}$$

$$U = E[\tilde{y}] = {}_t\bar{E}_x = e^{-\delta t} \cdot \frac{S(x+t)}{S(x)} = e^{-\delta t} \cdot \frac{e^{-\int_0^{x+t} \mu(z)\,dz}}{e^{-\int_0^{x} \mu(z)\,dz}}$$

$$e^{-\delta t} \cdot e^{-\int_x^{x+t} \mu(z)\,dz} = e^{\delta t} \cdot e^{-\int_0^{t} \mu(x+z)\,dz} = e^{-\delta t \cdot -\int_0^{t} \mu(x+z)\,dz}$$

[1] Forza di interesse

[2] Intensità istantanea di mortalità

12.2 Rendita vitalizia continua (immediata, perpetua)

Pagamento della rata annua, in maniera uniformemente "diffusa" nel corso dell'anno, finchè l'assicurato è in vita

Sia R un flusso = imprto/tempo= 1= $\int_t^{t+1} 1\,dt$

$$\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} {}_t\bar{E}_x\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t - \int_0^t \mu(x+z)\,dt}\,dt$$

Approssimazione dell'integrale

$$\bar{a}_x \simeq \sum_{h=0}^{\infty} \frac{{}_hE_x + {}_{h+1}E_x}{2} = \frac{1}{2}\,{}_0E_x + \sum_{h=1}^{\infty} {}_hE_x = \frac{1}{2} + a_x = \ddot{a}_x - \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{N.B.}\bar{a}_x = \lim_{k\to\infty} \ddot{a}_x^{(k)} = \lim_{k\to\infty}\left(\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\right) = \ddot{a}_x - \frac{1}{2}$$

12.3 Vita intera continua

Pagamento del capitale all'atto del decesso

Sia C=1=${}_{t/dt}A_x \cdot 1$

$$\bar{A}_x = \int_0^{\infty} {}_{t/dt}A_x \cdot 1 = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \cdot\ {}_{t/dt}q_x = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\,{}_tP_x \cdot\ {}_{/dt}q_{x+t} =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\delta t - \int_0^t \mu(x+z)\,dz}\,\mu(x+t)\,dt$$

$$\mathbf{N.B.} \int_0^{\infty} e^{-\delta t - \int_0^t \mu(x+z)\,dz} = [\delta + \mu(x+t)] - e^{-\delta t - \int_0^t \mu(x+z)\,dz}\Big|_0^{infty} = 1$$

$$Quindi: \int_0^{\infty} e^{-\delta t - \int_0^t \mu(x+z)\,dz}\,\mu(x+t)\,dt =$$

$$= 1 - \delta - \int_0^{\infty} e^{-\delta t - \int_0^t \mu(x+z)\,dz}\,dt =$$

$= 1 - \delta \cdot \bar{a}_x = \bar{A}_x$

12.4 Calcolo approssimato per le assicurazioni caso morte

- **Ipotesi**: Uniforme distrubuzione dei decessi nell'anno
- **Conseguenze**: Al capitale assicurato pagato in un istante aleatori ocompreso nell'anno generico (h-1; h), si attribuisce un fattore di attualizzazione $v^{h-\frac{1}{2}}$

Allora: $\bar{A}_x \simeq \sum_{h=1}^{\infty} v^{h-\frac{1}{2}} \cdot {}_{h-1/1}q_x = v^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{h=1}^{\infty} v^{-h} \cdot {}_{h-1/1}q_x = (1+i)^{\frac{1}{2}} A_x$

Simboli di computazione corretti

$\bar{C}_x = (1+i)^{\frac{1}{2}} C_x$ $\bar{M}_x = (1+i)^{\frac{1}{2}} M_x$ $\bar{R}_x = (1+i)^{\frac{1}{2}} R_x$

Capitolo 13

Durata critica

Siano:
$\tilde{T}_x$: durata aleatoria residua di vita dell'assicurato

$f_A(t)$: valore attuariale in t=0 delle prestazione dell'assicuratore se $\{\tilde{T}_x = t\}$

$f_C(t)$: valore attuariale in t=0 delle controprestazioni del contraente se $\{\tilde{T}_x = t\}$

Se esiste $\{\tilde{T}_x = t*\}$ tale che: $f_A(t*) = f_C(t*)$ allora $t*$ si definisce durata critica del contratto.
Sia $G_0(t) = f_C(t) - f_A(t)$ il guadagno in valore attuariale della compagnia.
Se $\{\tilde{T}_x = t*\}$, allora: $G_0(t*) = f_C(t*) - f_A(t*) = 0$ il guadagno in valora attuale, effettivamente conseguito dalla compagnia è nullo.

Capitolo 14

Riserve matematiche

Consideriamo un generico contratto di assicurazione. Siano:

- $A^{(i)}[t'; t'']$: valore attuariale in t' delle prestazioni dell'assicuratore nell'intervallo [t'; t'']
- $A^{(c)}[t'; t'']$: valore attuariale in t' delle controprestazioni del contraente nell'intervallo [t'; t'']

con t'; t'' anniversari di contratto e valutazioni attuariali con base tecnica di primo ordine.
Per $t' = 0 \; e \; t'' = n$ (durata del contratto), vale:

$$A^{(i)}[0; n] = A^{(c)}[0; n] \Longrightarrow Principio\, Equit\grave{a}\, Attuariale \tag{14.1}$$

Le riserve possono essere di due tipi:

- $A^{(i)}[t, n] \leq> A^{(c)}[t, n]$
- $A^{(i)}[0, t] \leq> A^{(c)}[0, t]$

Si ricerca sempre l'uguaglianza tra i due termini.

14.1 Riserve prospettive

Risolviamo la 14 nella forma $A^{(i)}[t, n] = A^{(c)}[t, n] + V_t^{(p)}$ con $V_t^{(p)} \leq> 0$. Risulta:

$$V_t^{(p)} = A^{(i)}[t, n] - A^{(c)}[t, n] \tag{14.2}$$

Def: La riserva matematica valutata con approccio prospettivo è la differenza, all'epoca di valutazione t, tra il vam delle prestazioni future della compagnia e il vam delle controprestazioni future del contraente.

14.1.1 Esempi di $V_t^{(p)}$

14.1.2 Capitale differito con C=1

$$\text{Premio unico, } V_t^{(p)} = \begin{cases} {}_nE_x \; per \; t=0 \\ {}_{n-t}E_{x+t} \; per \; 0<t<n \\ 1 \; per \; t=n \end{cases} \quad \text{Premio annuo } P = \frac{{}_nE_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$$

$$V_t^{(p)} = \begin{cases} 0 \; per \; t=0 \\ {}_{n-t}E_{x+t} - P \cdot {}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} \; per \; 0n \\ {}_{n-t}E_{x+t} \; per \; mn \\ 1 \; per \; t=n \end{cases}$$

Interpretazione della $V_t^{(p)}$

Risolviamo: $A^{(i)}[t,n] = A^{(c)}[t,n] + V_t^{(p)}$
Se $V_t^{(p)} > 0$ allora $V_t^{(p)}$ è interpretabile come il prezzo che sarebbe equo pagare all'assicuratore in t, per avviare in t l'operazione finanziaria. V è detto Prezzo equo di ingaggio in Assicurazione. Peraltro, poichè l'operazione è già stata avviata in t=0, allora dalla 14, $V_t^{(p)} > 0$ indica l'importo (in vam) che l'assicuratore deve aver accantonato fino a t per

14.1.3 Temporanea caso morte con C=1

$$\text{Premio unico: } V_t^{(p)} = \begin{cases} {}_{/n}A_x \; per \; t=0 \\ {}_{/n-t}A_{x+t} \; per \; 0<t<n \\ 0 \; per \; t=n \end{cases}$$

Premio annuo; $P = \dfrac{{}_{/n}A_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$ $con \; m \leq n$

$$V_t^{(p)} = \begin{cases} 0 \; per \; t=0 \\ {}_{/n-t}A_{x+t} - P \cdot {}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} \; per \; 0<t<m \\ {}_{/n-t}A_{x+t} \; per \; m \leq t < n \\ 0 \; per \; t=n \end{cases}$$

14.1.4 Mista semplice/ordinaria con C=1

$$\text{Premio unico: } V_t^{(p)} = \begin{cases} A_{\overline{x,n|}} \; per \; t=0 \\ A_{\overline{x+t,n-t|}} \; per \; 0<t<n \\ 1 \; per \; t=n \end{cases}$$

Premio annuo: $P = \frac{A_{\overline{x,n|}}}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$ *con* $m \leq n$

$$V_t^{(p)} = \begin{cases} 0 \; per \; t = 0 \\ A_{\overline{x+t,n-t|}} - P \cdot {}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} \; per \; 0 < t < m \\ A\overline{x+t,n-t|} \; per \; m \leq t < n \\ 1 \; per \\ t = n \end{cases}$$

14.1.5 Vita intera C=1

Premio unico: $V_t^{(p)} = \begin{cases} A_x \; per \; t = 0 \\ A_{x+t} \; per \; 0 < t < \omega - x \\ 1 \; per \; t = \omega - x \end{cases}$

Premio annuo; $P = \frac{A_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$ *con* $m \leq \omega - x$

$$V_t^{(p)} = \begin{cases} 0 \; per \; t = 0 \\ A_{x+t} - P \cdot {}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} \; per \; 0 < t < m \\ A_{x+t} \; perm \leq < \omega - x \\ 1 \; per \; t = \omega - x \end{cases}$$

14.1.6 Mista a capitale raddoppiato con C=1

Premio unico $V_t^{(p)} = \begin{cases} A_x + {}_nE_x \; per \; t = 0 \\ A_{x+t} + {}_{n-t}E_{x+t} \; per \; 0 < t < n \\ A_{x+n} + 1 \; per \; t = n \\ A_{x+t} \; per \; n < t < \omega - x \\ 1 \; per \; t = \omega - x \end{cases}$

Premio annuo: $P = \frac{U}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$ *con* $m \leq n$

$$V_t^{(p)} = \begin{cases} 0 \; per \; t = 0 \\ (A_{x+t} + {}_{n-t}E_{x+t}) - P \cdot {}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} \; per \; 0 < t < m \\ A_{x+t} + {}_{n-t}E_{x+t} \; per \; m \leq t < n \\ A_{x+n} + 1 \; pert = n \\ A_{x+t} \; per \; n < t < \omega - x \\ 1 \; per \; t = \omega - x \end{cases}$$

14.1.7 Rendota differita, posticipata. R=1

$$\textbf{Premio unico } V_t^{(p)} = \begin{cases} {}_{m/}a_x \ per\ t = 0 \\ {}_{m-t/}a_{x+t} \ per\ 0 < t < m \\ a_{x+t} \ per\ m \leq t < \omega - x - 1 \\ 0 \ per\ t = \omega - x - 1 \end{cases}$$

Premio annuo: $P = \dfrac{U}{{}_{/h}\ddot{a}_x}\ con\ h \leq m$

$$V_t^{(p)} = \begin{cases} 0 \ per\ t = 0 \\ {}_{m-t/}a_{x+t} - P \cdot {}_{/h-t}\ddot{a}_{x+t} \ per\ 0 < t < h \\ {}_{m-t/}a_{x+t} \ per\ h \leq t < m \\ a_{x+t} \ per\ m \leq t < \omega - x - 1 \\ 0 \ per\ t = \omega - x - 1 \end{cases}$$

14.1.8 Rendita immediata, posticipata, R=1

$$\textbf{Premio unico } V_t^{(p)} = \begin{cases} a_x \ per\ t = 0 \\ a_{x+t} \ per\ 0 < t < \omega - x - 1 \\ 0 \ per\ t = \omega - x - 1 \end{cases}$$

14.1.9 Assicurazione di annualità R=1

$$\textbf{Premio unico } V_t^{(p)} = \begin{cases} a_{\overline{n}|} - {}_{/n}a_x \ per\ t = 0 \\ a_{\overline{n-t}|} - {}_{/n-t}a_{x+t} \ per\ 0 < t < n \\ 0 \ per\ t = n \end{cases}$$

Premio annuo: $P = \dfrac{U}{{}_{/m*}\ddot{a}_x}\ con\ m* \leq n$

$$V_t^{(p)} = \begin{cases} 0 \ per\ t = 0 \\ (a_{\overline{n-t}|} - {}_{/n-t}a_{x+t} - P \cdot {}_{m*-t}\ddot{a}_{x+t} \ per\ 0 < t < m* \\ a_{\overline{n-t}|} - {}_{n-t}a_{x+t} \ per\ m* \leq t < n \\ 0 \ per\ t = 0 \end{cases}$$

14.1.10 Rendita differita, temporanea, posticipata R=

Premio unico $V_t^{(p)} = \begin{cases} {}_{\frac{m}{n}}a_x \; per \; t=0 \\ {}_{\frac{m-t}{n}}a_{x+t} \; per \; 0<t<m \\ {}_{\overline{m+n-t}}a_{x+t} \; per \; m \leq t < m+n \\ 0 \; per \; t=m+n \end{cases}$

Premio annuo: $P = \dfrac{U}{{}_{/h}\ddot{a}_x} \; con \; h \leq m$

$V_t^{(p)} = \begin{cases} 0 \; per \; t=0 \\ {}_{\frac{m-t}{n}}a_{x+t} - P \cdot {}_{/(h-t)}\ddot{a}_{x+t} \; per \; 0<t<h \\ {}_{\frac{m-t}{n}}a_{x+t} \; per \; h \leq t < m \\ {}_{/(m+n-t)}a_{x+t} \; per \; m \leq t < m+n \\ 0 \; per \; t=m+n \end{cases}$

14.1.11 Termine fisso C=1

Premio unico $V_t^{(p)} = \begin{cases} v^n \; per \; t=0 \\ v^{n-t} \; per \; 0<t<n \\ 1 \; per \; t=n \end{cases}$

Premio annuo: $P = \dfrac{v^n}{{}_{/n}a_x}$

$V_t^{(p)} = \begin{cases} 0 \; per \; t=0 \\ v^{n-t} - P \cdot {}_{/(n-t)}\ddot{a}_{x+t} \; per \; 0<t<n \\ 1 \; per \; t=n \end{cases}$

14.2 Formule della differenza di premio

Consideriamo:

$$V_t^{(p)} = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} \tag{14.3}$$

, riserva matematica di una vita intera a premi annui vitalizi con $P_x = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$. Se la vita intera fosse stipulata all'età x+t, con le stesse basi tecniche, il premio annuo varrà: $P_{x+t} = \dfrac{A_{x+t}}{\ddot{a}_{x+t}}$. Risulta: $P_{x+t} > P_x$ perchè al crescere dell'età A_x cresce e $\ddot{a}_x$ decresce. Quindi la 14.3 si riscriverà:

$$V_t^{(p)} = P_{x+t} \cdot \ddot{a}_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t} = (P_{x+t} - P_x)\ddot{a}_{x+t} \tag{14.4}$$

La 14.4 è detta formula della differenza.

14.3 Capitale ridotto teorico

Consideriamo: $V_t^{(p)} = A_{x+t} - P_x \cdot \ddot{a}_{x+t}\; con\; C = 1$
Riscriviamo come: $1 = \frac{V_t^{(p)}}{A_{x+t}} + P_x \cdot \frac{\ddot{a}_{x+t}}{A_{x+t}}$
Il capitale assicurato C=1 è coperto in parte dalla riserva $V_t^{(p)}$ e in parte dai premi futuri. Se i premi futuri non verranno più pagati, la prestazione assicurata dall'epoca di cessazione del pagamento dei premi, sia t tale epoca, sarebbe: $C_t' = \frac{V_t^{(p)}}{A_{x+t}} < 1$ dove C_t' è detto **Capitale ridotto "teorico"**

14.4 Riserva matematica prospettiva per assicurazione su gruppi di teste

Osservazione: La $V_t^{(p)}$ deve essere calcolata tenendo conto dell'effettiva composizione del gruppo all'epoca di valutazione. Per un gruppo di due teste, $G(x, y)\; o\; G(\bar{x,y})$, all'epoca di valutazione delle riserve occorre considerare la seguente partizione:

- H_1= sono in vita entrambe le teste
- H_2= è in vita la sola testa x
- H_3= è in vita la sola testa y
- H_4= sono decedute entrambe le teste

Nel caso H_4, il contratto è estinto. Per gruppi fino al primo decesso, nei casi $H_2,\; H_3\; ed\; H_4$ il contratto è estinto.

14.4.1 Esempi: vita intera

Fino al primo decesso con premi vitalizi

$Caso\; H_1$: $V_t^{(p)} = A_{x+t,y+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t,y+t}$

Gruppo fino al secondo decesso a premi vitalizi con oremi vitalizi fino al secondo decesso

$$P = \frac{A_{\bar{x,y}}}{\ddot{a}_{\bar{x,y}}}$$

$$V_t^{(p)} = \begin{cases} A_{\bar{x+t,y+t}} - P \cdot \ddot{a}_{\bar{x+t,y+t}} \ se \ H_1 \\ A_{x+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t} \ se \ H_2 \\ A_{y+t} - P \cdot \ddot{a}_{y+t} \ se \ H_3 \end{cases}$$

Gruppo fino al secondo decesso con premi vitalizi fino al primo decesso

$$P = \frac{A_{\bar{x,y}}}{\ddot{a}_{x,y}}$$

$$V_t^{(p)} = \begin{cases} A_{\bar{x+t,y+t}} - P \cdot \ddot{a}_{x+t,y+t} \ seH_1 \\ A_{x+t} \ se \ H_2 \\ A_{y+t} \ se \ H_3 \end{cases}$$

14.5 Riserva matematica retrospettiva

La relazione: $A^{(i)}[0;z] \leq> A^{(c)}[0;t]$ è bilanciata come: $A^{(i)}[0;t]+t = A^{(c)}[0;t]\ con\ t = {}_tE_x \cdot V_t^{(R)} \leq> 0$. R è il VAM in $t = 0$ dell'importo $V_t^{(R)}$ che rappresenta il prezzo il uscita dal contratto che la compagnia dovrebbe versare al contraente in t, qualora questi decida di abbandonare il contratto all'epoca t.
Si definisce

$$V_t^{(R)} = \frac{A^{(c)}[0;t] - A^{(i)}[0;t]}{{}_tE_x}$$

riserva matematica retrospettiva: il montante attuariale, all'epoca di calcolo, della differenza tra il VAM delle prestazioni del contraente in $[0;t]$ e il VAM delle prestazioni della compagnia in $[0;t]$

14.5.1 Esempi di $V_t^{(R)}$

14.5.2 Capitale differito

Premio unico $U = {}_nE_x \ V_t^{(R)} = \frac{{}_nE_x}{{}_tE_x} \ con\ 0 \leq t < n$

Premio annuo $P = \dfrac{U}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$ *con* $m \leq n$

$$V_t^{(R)} = \begin{cases} \dfrac{P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x}{{}_tE_x} \; per\ 0 < t < m \\ \dfrac{U}{{}_tE_x} \; per\ m \leq t < n \end{cases}$$

14.5.3 TCM

Premio unico: $U = {}_{/n}A_x$ $V_t^{(R)} = \dfrac{{}_{/n}A_x - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x}$ *con* $0 < t < n$

Premio annuo: $U = {}_{/n}A_x$ $V_t^{(R)} = \dfrac{{}_{/n}A_x - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x}$ *con*$0 < t < n$

Premio annuo: $P = \dfrac{U}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$ *con*$m \leq n$

$$V_t^{(R)} = \begin{cases} \dfrac{P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x} \; per\ 0 < t < m \\ \dfrac{U - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x} \; per\ m \leq t < n \end{cases}$$

14.5.4 Mista semplice

Premio unico: $U = A_{\overline{x,n}|}$ $V_t^{(R)} = \dfrac{A_{\overline{x,n}|} - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x}$ *con* $0 < t < n$

Premio annuo: $P = \dfrac{U}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$ *con* $m \leq n$

$$V_t^{(R)} = \begin{cases} \dfrac{P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x} \; per\ 0 < t < n \\ \dfrac{U - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x} \; per\ m \leq t < n \end{cases}$$

14.5.5 Vita intera

Premio unico: $U = A_a$ $V_t^{(R)} = \dfrac{A_x - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x}$ *con* $0 < t < n$

Premio annuo: $P = \dfrac{U}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$ *con* $m \leq n$

$$V_t^{(R)} = \begin{cases} \dfrac{P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x} \; per\ 0 < t < m \\ \dfrac{U - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x} \; per\ m \leq t < n \end{cases}$$

14.5.6 Mista a capitale raddoppiato

Premio unico: $U = A_x + {}_nE_x$

$$V_t^{(R)} = \begin{cases} \dfrac{U - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x} \; per\ 0 < t < n \\ \dfrac{U - ({}_nE_x + {}_{/t}A_x)}{{}_tE_x} \; per\ t \geq n \end{cases}$$

Premio annuo: $P = \dfrac{U}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$ $con\ m \leq n$

$$V_t^{(R)} = \begin{cases} \dfrac{P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x - {}_{/t}A_x}{} per\ 0 < t < n \\ \dfrac{U - ({}_nE_x + {}_{/t}A_x)}{{}_tE_x} \; per\ t \geq n \end{cases}$$

14.5.7 Rendita differita, posticipata, perpetua

Premio unico: $U = {}_{n/}a_x$

$$V_t^{(R)} = \begin{cases} \dfrac{U}{{}_tE_x} \; per\ 0 < t < n \\ \dfrac{{}_{n/}\ddot{a}_x - \frac{n}{t-n}a_x}{{}_tE_x} \; per\ t \geq n \end{cases}$$

Premio annuo: $P = \dfrac{U}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$ $con\ m \leq n$

$$V_t^{(R)} = \begin{cases} \dfrac{P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x}{{}_tE_x} \; per\ 0 < t < m \\ \dfrac{U - \frac{n}{t-n}a_x}{{}_tE_x} \; pert \geq n \\ \dfrac{U}{{}_tE_x} \; per\ m \leq t < n \end{cases}$$

14.5.8 Termine fisso

Premio unico: $U = v^n$ $V_t^{(R)} = \dfrac{U - v^n \cdot {}_{/t}q_x}{{}_tE_x}$ $per 0 < t < n$

[Premio annuo]: $P = \dfrac{U}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$ $con\ m \leq n$

$$V_t^{(R)} = \begin{cases} \dfrac{P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x - v^n{}_{/t}q_x}{{}_tE_x} \; per\ 0 < t < m \\ \dfrac{U - v^n{}_{/t}q_x}{{}_tE_x} \; per\ m \leq t < n \end{cases}$$

14.6 Relazione tra riserve prospettive e retrospettive

Consideriamo una generale polizza. Siano:

- **n**: durata del contratto
- **m**: durata pagamento premi annui
- **t**: epoca di valutazione con t<m

Se:

$$A(0,n) = A(0,t) + E(0,t) \cdot A(t,n) \tag{14.5}$$

e

$$\ddot{a}(0,n) = \ddot{a}(0,t) + E(0,t) \cdot \ddot{a}(t,m) \tag{14.6}$$

allora $\mathbf{V_t^{(R)}} = \mathbf{V_t^{(p)}}$

Dim: Consideriamo $P \cdot \ddot{a}(0,m) = A(0,n)$. Se valgono le ipotesi 14.5 e 14.6 si ha:

$P \cdot \ddot{a}(0,t) + E(0,t) \cdot P \cdot \ddot{a}(t,m) = A(0,t) + E(0,t) \cdot A(t,n)$

$P \cdot \ddot{a}(0,t) - A(0,t) = E(0,t)[A(t,n) - P \cdot \ddot{a}(t,m)]$

$\dfrac{P \cdot \ddot{a}(0,t) - A(0,t)}{E(0,t)} = A(t,n) - P \cdot \ddot{a}(t,n)$

14.6.1 Esempi

14.6.2 Vita intera a premio vitalizio con $P = \dfrac{A_x}{\ddot{a}_x}$

$V^{(P)} = A_{x+t} - P \cdot \ddot{a}_{x+t}$
Dalle ipotesi 14.5 e 14.6 si ha:
$A_x = {}_{/t}A_x + {}_tE_x \cdot A_{x+t} \Rightarrow A_{x+t} = \dfrac{A_x - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x}$

$\ddot{a}_x = {}_{/t}\ddot{a}_x + {}_tE_x \cdot \ddot{a}_{x+t} \Rightarrow \ddot{a}_{x+t} = \dfrac{\ddot{a}_x - {}_{/t}\ddot{a}_x}{{}_tE_x}$
Quindi: $V_t^{(P)} = \dfrac{A_x - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x} - \dfrac{P \cdot \ddot{a}_x - P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x}{{}_tE_x} = \dfrac{P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x} = V_t^{(R)}$

14.6.3 Misti semplice, $P = \dfrac{A_{\overline{x,n|}}}{_{/m}\ddot{a}_x}$

$V_t^{(P)} = ({}_{\overline{n-t}}A_{x+t} + {}_{n-t}E_{x+t}) - P \cdot {}_{\overline{m-t}}\ddot{a}_{x+t}$ *con* $t < m$

per 14.5 *e* 14.6 :

$A_{\overline{x,n|}} = {}_{/t}A_x + {}_tE_x({}_{\overline{n-t}}A_{x+t} + {}_{n-t}E_{x+t})$

${}_{/m}\ddot{a}_x = {}_{/t}\ddot{a}_{x t}E_x \cdot {}_{\overline{m-t}}\ddot{a}_{x+t}$

Si ha : $V_t^{(P)} = \dfrac{(A_{\overline{x,n|}} - {}_{/t}A_x) - P({}_{/m}\ddot{a}_x - {}_{/t}\ddot{a}_x)}{{}_tE_x} =$

$= \dfrac{P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x} = V_t^{(R)}$

14.6.4 Rendita vitalizia, immediata, posticipata e perpetua a premio unico, $U = R \cdot a_x$

$V_t^{(P)} = a_{x+t}$

Da 14.5 : $a_x = ax[/t]x + {}_tE_x \cdot a_{x+t} \Rightarrow a_{x+t} = \dfrac{a_x - {}_{/t}a_x}{{}_tE_x}$

Allora : $V_t^{(P)} = \dfrac{a_x - {}_{/t}a_x}{{}_tE_x} = \dfrac{U - {}_{/t}a_x}{{}_tE_x} = V_t^{(R)}$

14.6.5 Mista a capitale raddoppiato a premio annuo $P = \dfrac{U}{{}_{/n}\ddot{a}_x} = \dfrac{A_x + {}_nE_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$

Con $t < nV_t^{(P)} = (A_{x+t} + {}_{n-t}E_{x+t}) - P \cdot {}_{\overline{n-t}}\ddot{a}_{x+t}$

Si hanno : $A_x + {}_nE_x = {}_{/t}A_x + {}_tE_x(A_{x+t} + {}_{n-t}E_{x+t})$

${}_{/n}\ddot{a}_x = {}_{/t}\ddot{a}_x + {}_tE_x \cdot {}_{\overline{n-t}}\ddot{a}_{x+t}$

Quindi : $V_t^{(P)} = \dfrac{(A_x + {}_nE_x) - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x} - P \cdot \dfrac{{}_{/n}\ddot{a}_x - {}_{/t}\ddot{a}_x}{{}_tE_x} =$

$= \dfrac{P \cdot {}_{/t}\ddot{a}_x - {}_{/t}A_x}{{}_tE_x}$

Se $t > n \Rightarrow V_t^{(P)} = A_{x+t}$

$A_x + {}_nE_x = {}_{/t}A_x + {}_tE_x(A_{x+t}) + {}_nE_x$

$$Quindi: V_t^{(P)} = \frac{(A_x + {}_nE_x) - ({}_{/t}A_x + {}_nE_x)}{{}_tE_x} =$$

$$= \frac{U - ({}_{/t}A_x + {}_nE_x)}{{}_tE_x} = V_t^{(R)}$$

14.7 Riserve retrospettive in funzione dei Premi Naturali

Si consideri un generico contratto di assicurazione stipulato in t=0 e a scadenza in t=n. Per l'anno (t-1, t) consideriamo le prestazioni:

$$\begin{cases} H_1: \textbf{L'assicurato muore entro l'anno} \\ H_2: \textbf{L'assicurato supera in vita l'anno} \end{cases} \quad \text{Con } P\{H_1\} + P\{H_2\} = 1$$

Def: Il premio naturale $P_t^{(N)}$, per l'anno (t-1, t), è il valore attuale medio (VAM), all'inizio dell'anno, delle p—restazioni aleatorie della compagnia nell'anno t: $P^{(N)} = A^{(i)}[t-, t]$

14.7.1 Esempi

14.7.2 Capitale differito

Per $t = 1; n-1 \rightarrow \tilde{y}_{1;n-1} = \begin{cases} 0;\ 0 \\ q_x; P_x \end{cases} \quad P_{1;n-1}^{(N)} = E[\tilde{y}_{1;n-1}] = 0$

Per $t = n \rightarrow \tilde{y}_1 = \begin{cases} 0;\ v \\ q_{x+n-1}; P_{x+n-1} \end{cases} \quad P_n^{(N)} = E[\tilde{y}_n] = v \cdot {}_1P_{x+n-1} = {}_1E_{x+n-1}$

14.7.3 TCM

Per $t = 1, 2, \ldots, n$

$$\tilde{y}_t = \begin{cases} v;\ 0 \\ q_{x+t-1}; P_{x+t-1} \end{cases}$$

$$P_t^{(N)} = v \cdot q_{x+t-1} = {}_{/1}A_{x+t-1}$$

14.7.4 Mista semplice

Per $t = 1; 2; \ldots; n-1$

$$\tilde{y}_t = \begin{cases} v; \ 0 \\ q_{x+t-1}; P_{x+t-1} \end{cases} \rightarrow P_t^{(N)} = v \cdot q_{x+t-1} = {}_{/1}A_{x+t-1}$$

Per $t = n$

$$\tilde{y}_n = \begin{cases} v; \ v \\ q_{x+n-}; P_{x+t-} \end{cases} \rightarrow P_t^{(N)} = vq_{x+n-} + vP_{x+n-} = v$$

14.7.5 Mista a capitale raddoppiato

Per $t = 1, 2, \ldots, n$

$$\tilde{y}_t = \begin{cases} v; \ 0 \\ q_x; P_x \end{cases} \quad P_t^{(N)} = vq_{x+t-1} = {}_{/1}A_{x+t-1}$$

Per $t = n$

$$\tilde{y}_n = \begin{cases} v; \ v \\ q_{x+n-1}; P_{x+n-1} \end{cases} \quad P_n^{(N)} = v$$

Per $t > n$

$$\tilde{y}_t = \begin{cases} v; \ 0 \\ q_{x+n}; P_{x+n} \end{cases} \quad P_t^{(N)} = {}_{/1}A_{x+t-1}$$

In generale $P_t^{(N)} = v \cdot q_{x+t-1} = {}_{/1}A_{x+t-1}$

14.7.6 Termine fisso

Per $t = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\tilde{y}_t = \begin{cases} v^{n-t+1}, \ 0 \\ q_{x+t-1}; P_{x+t-1} \end{cases}$$

$$P_t^{(N)} = v^{n-t+1} \cdot {}_{/1}q_{x+t-1} = v^{n-t} \cdot {}_{/1}A_{x+t-1}$$

Per $t = n$

$$\tilde{y}_n = \begin{cases} v; \ v \\ q_{x+n-1}; P_{x+n-1} \end{cases} \quad P_n^{(N)} = v$$

14.7.7 Vita intera

$\forall t$ risulta:
$\tilde{y}_t = \begin{cases} v; \, 0 \\ q_{x+t-1}; \, P_{x+t-1} \end{cases} \qquad P_t^{(N)} = v \cdot q_{x+t-1} = {}_{/1}A_{x+t-1}$

14.7.8 Rendita vitalizia perpetua con R=1

Immediata posticipata

$$\forall t \to \tilde{y}_t = \begin{cases} R \cdot v; \, 0 \\ P_{x+t-1}; \, q_{x+t-1} \end{cases} \qquad P_t^{(N)} = v \cdot P_{x+t-1}$$

Immediata anticipata

$$\forall t \to \tilde{y}_y = \begin{cases} R; \, R \\ P_{x+t-1}; \, q_{x+t-1} \end{cases} \qquad P_t^{(N)} = R$$

Differita anticipata con differimento m

$$\text{Per } t \leq m \to \tilde{y}_t = \begin{cases} 0; \, 0 \\ P_{x+t-1}; \, q_{x+t-1} \end{cases} \qquad P_t^{(N)} = 0$$

Per $t > m \to \tilde{y}_t = \begin{cases} 1; \, 1 \\ P_{x+t-1}; \, q_{x+t-1} \end{cases} \qquad P_t^{(N)} = 1$

14.8 Proprietà dei premi naturali

Per ogni forma assicurativa, i premi naturali garantiscono l'equità dell'operazione in ogni anno di contratto e per tutta la durata dello stesso
$A^{(i)}[0,n] = P_1^{(N)} + P_2^{(N)} \cdot {}_1E_x + \cdots + P^{(N)} \cdot {}_{n-1}E_x$

Esempio: Capitale differito con $C = 1$

$A^{(i)}[0,n] = P_1^{(N)} \cdot v + P_2^{(N)} \cdot {}_1E_x + \cdots + P_n^{(N)} \cdot {}_{n-1}E_x =$

$= P_n^{(N)} \cdot {}_{n-1}E_x = {}_1E_{x+n-1} \cdot {}_{n-1}E_x = v \cdot {}_1P_{x+n-1 n-1}^{n-1}P_x =$

$= v^n \cdot \dfrac{S(x+n)}{S(x+n-1)} \cdot \dfrac{S(x+n-1)}{S(x)} = v^n \cdot {}_nP_x = {}_nE_x$

Per ogni forma assicurativa, se i premi annui sono pagati per tutta la

durata del contratto, allora il premio annuo costante è media aritmetica ponderata dei premi naturali

14.9 Premio a riserva

Consideriamo un contratto di vita intera a premio annuo costante e vitalizio. Risulta: Si definisce **Premio a Riserva** la differenza: $P_{h+1}^{(AS)} = P - P_{h+1}^{(N)}$

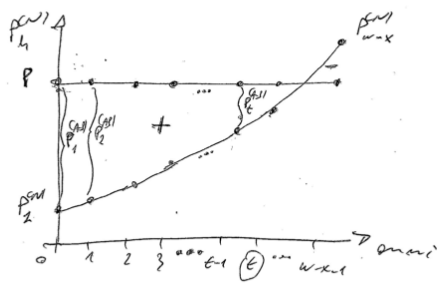

Figura 14.1: Differenza tra Premio annuo e Premi naturali

Risulta: $V_t^{(R)} = \sum_{h=0}^{t-1} \left(P_{h+1}^{(AS)} \cdot \frac{1}{{}_{t-h}E_{x+h}} \right) = \left(\sum_{h=0}^{t-1} P_{h+1}^{(AS)} \cdot {}_hE_x \right) \cdot \frac{1}{{}_tE_x} =$

$$= \frac{\sum_{h=0}^{t-1} \left(P - P_{h+1}^{(N)} \right) \cdot {}_hE_x}{{}_tE_x}$$

La riserva matematica retrospettiva all'epoca t, è il montante attuariale all'epoca t' della differenza tra i premi annui pagati e i premi naturali

14.10 Segno della riserva matematica

Per ogni forma assicurativa a Premio Unico:
$V_t^{(P)} = A(t,n) \geq 0, \forall t > 0$

Per ogni forma assicurativa a Premio Annuo:
$V_0^{(P)} = A(0,n) - P\ddot{a}\,(0,m) = 0 \; per \, t = 0$
$V_t^{(R)} = \frac{1}{{}_tE_x} \cdot \sum_{h=0}^{t-1} \left(P - P_{h+1}^{(N)} \right) \cdot {}_hE_x$

N.B. Se $V_t < 0$, allora: $P > \dfrac{A(t,n)}{\ddot{a}\,(t,m)} = P'$ dove P' è il premio annuo per la stima del contratto per la durata residua.

14.10.1 Soluzione operativa

Se $V_t < 0$, allora:

- Adozione della tariffa a Premio Unico
- Pagamento del premio annuo costante per una durata apparentemente ridotta. Si fissa una $m \leq n$ tale che: $P \geq P_1^{(N)}$
- Pagamento del Premio Annuo per tutta la durata del contratto, ma "convenientemente" decrescenti: è sufficiente che riescono superiori ai corrispondenti premi naturali

14.11 Riserve matematica prospettiva effettiva

Si definisce riserva matematica prospettiva effettiva la riserva matematica ottenuta con metodo prospettivo e adottando basi tecniche di secondo ordine, coerenti con lo stato di informazione all'epoca di valutazione.
Stato di informazione:

- Tasso di interesse
- Probabilità di morte
- Spese
- Modifica prestazione/ trasformazione del contratto

Capitolo 15

Equazione ricorrente di Fouret

Si consideri un generico contratto di assicurazione:
A premi annui: $\bar{P} = \{P_1; P_2; \ldots; P_n\}$

Con capitali pagati in caso di morte: $\bar{C}^{(d)} = \{C_1; C_2; \ldots; C_n\}$

E capitali pagati in caso di vita: $\bar{C}^{(v)} = \{0; 0; \ldots; C'_n\}$

Testa di età x alla stipula e con basi tecniche di primo ordine: i e $\{q_x\}$

Si calcola la riserva matematica prospettiva all'epoca t:
$V_t = \sum_{h=0}^{n-t-1} t + h + 1 \cdot {}_{\frac{1}{1}}A_{x+t} + n^{'} \cdot {}_{n-t}E_{x+t} - \sum_{h=0}^{n-t-1} P_{t+h+1} \cdot {}_hE_{x+t} =$

$= (t + 1 \cdot {}_{/1}A_{x+t} - P_{t+1}) + {}_1E_{x+t} \cdot V_{t+1}$

Si definisce l'equazione ricorrente di Fouret:

$$V_t + P_{t+1} = C_{t+1/1}A_{x+t} + {}_1E_{x+t} \cdot V_{t+1} \tag{15.1}$$

N.B. È un'equazione di bilancio relativa all'anno t+1
Le grandezze sono valutate finanziariamente e demograficamente all'epoca t
"Bilancio" in senso attuariale, con previsioni realizzate con la base tecnica di primo ordine

Si riscrive l'equazione ricorrente come

$$V_t + P_{t+1} = v \cdot t + 1 \cdot q_{x+t} + vV_{t+1}(1 - q_{x+t})$$

e

$$V_{t+1} = \frac{(V_t + P_{t+1})(1 + i) - t + 1q_{x+t}}{(1 - q_{x+t})}$$

Due equzioni che iterativamente calcolano le riserve successive (la seconda) e le precedenti (la prima)

$$V_{t+1} = \frac{1}{v}V_t + \frac{1}{v}\left[P_{t+1} - vq_{x+t}\left(C_{t+1} - V_{t+1}\right)\right] \tag{15.2}$$

Si definiscono **Premio di Risparmio**

$$P_{t+1}^{(S)} = P_{t+1} - vq_{x+t}(C_{t+1} - V_{t+1})$$

e **Premio di Rischio**

$$P_{t+1}^{(R)} = P_{t+1} - P_{t+1}^{(S)} = vq_{x+t}(C_{t+1} - V_{t+1})$$

Risulta: $P_{t+1} = P_{t+1}^{(S)} + P_{t+1}^{(R)}$

La 15.2 diventa:

$$V_{t+1} = (1+i)V_t + (1+i)P_{t+1}^{(S)} = (1+i)(V_t + P_{t+1}^{(S)})$$

La riserva matematica alla fine di ogni anno è il montante puramente finanziario della riserva matematica (finale) a inizio anno, V_t, e del premio di risparmio, $P_{t+1}^{(S)}$, dell'anno considerato.
Le riserve matematiche all'epoca t è il montante puramente finanziario dei premi di risparmio versati fino all'anno t:
Dalla 15, partendo da $V_0 = 0$ si ha:
$V_t = (1+i)^t P_1^{(S)} + (1+i)^{t-1} P_2^{(S)} + \cdots + (1+i)P_t^{(S)}$

Il premio di rischio: $P_{t+1}^{(R)} = vq_{x+t}(C_{t+1} - V_{t+1})$ equivale a $P_{t+1}^{(R)} = E[\tilde{y}_t]$, dove
$\tilde{y}_t = \begin{cases} v(C_{t+1} - V_{t+1}),\ 0 \\ q_{x+t},\ (1 - q_{x+t}) \end{cases}$
È consumato per capire il rischio di morte nell'anno t+1, per un capitale caso morte pari a $(t + 1 - V_{t+1})$ detto "Capitale sotto rischio".

15.1 Scomposizione e destinazione del premio puro

Poichè $P_{t+1} = P_{t+1}^{(S)} + P_{t+1}^{(R)}$, il premio di risparmio va a formare la riserva e il premio di rischio va a copertura. In caso di morte nell'anno $t + 1$, il capitale caso morte è così finanziato:

$$t+1 = (t+1-V_{t+1}) + V_{t+1}$$

N.B. La gestione di un contartto di assicurazione è composta da:

- Gestione finanziaria dei premi di risparmio finalizzata alla formazione della riserva matematica.
- Gestione assicurativa di contratti assicurativi di puro rischio a premi di rischio e per capitali variabili ? ai capitali sotto-rischio

15.2 Studio del segno di $P^{(S)}_{t+1}\, e\, P^{(R)}_{t+1}$

15.2.1 Assicurazioni a premio unico

Risulta: $P_{t+1} = P^{(S)}_{t+1} + P^{(R)}_{t+1} = 0$

Se $(t+1-V_{t+1}) > 0,\, allora\, P^{(R)}_{t+1} > 0,\, P^{(S)}_{t+1} < 0,\, e\, |P^{(R)}_{t+1}| = |P^{(S)}_{t+1}|$

Se $(t+1-V_{t+1}) < 0,\, allora\, P^{(R)}_{t+1} < 0,\; P^{(S)}_{t+1} > 0\, con\, |P^{(R)}_{t+1}| = |P^{(S)}_{t+1}|$

Capitale differito a premio annuo

Risulta $t+1 = 0,\, \forall t\, e\, (t+1-V_{t+1}) = -V_{t+1} < 0$

Quindi :$P^{(R)}_{t+1} = -vq_{x+t}V_{t+1} < 0$

$P^{(S)}_{t+1} = P + vq_{x+t}V_{t+1} > P$

Il premio annuo P non è sufficiente a coprere l'inremento di riserva. L'insufficienza del premio P è colamta con il VAM delle quote attribuite al contratto delle riserve matematiche relativi ai contratti in cui si avrà il decesso dell'assicurato. Poichè $(V_t+P)(1+i) < V_{t+1}$ il premio annuo P va integrato in modo che $(P+quote) = P^{(S)}_{t+1}$ e $(V_t + P^{(S)}_{t+1})(1+i) = V_{t+1}$
Si determinano le quote per interpolazione:
Gli $N_t q_{x+t}$: numero di contratti eliminati nell'anno; $N_t q_{x+t} V_{t+1}$: importo totale delle riserve liberate. In t, le riserve liberate saranno: $v(N_t q_{x+t} V_{t+1})$
Allora possiamo stimare di attribuire al contratto in essre all'epoca t la quota integrativa:

$$Q = \frac{vN_t q_{x+t} V_{t+1}}{N_t} = vq_{x+t}V_{t+1}$$

TCM a premio annuo P, e a capitale assicurato C

Poichè P è media dei $P_{t+1}^{(N)}$, $t = 0, 1, \dots, n-1$ allora

$$P = P_n^{(S)} + P_n^{(R)} < P_n^{(N)}$$

Ponendo $V_n = 0$ si ha:

$$P_n^{(R)} = vq_{x+n-1}(C - V_n) = vq_{x+n-1}C = P_n^{(N)}$$

Quindi dalla 15.2.1 e 15.2.1 si ricava: $P_n^{(S)} < 0$. Questa disuguaglianza sussite per ogni t di un intorno sinistro di $n-1$, e spiega l'andamento devrescente della riserva negli ultimi anni.

Mista combinata

$$\text{Per} \begin{cases} 0 < t < t' \longrightarrow (C^{(d)} - V_{t+1}) > 0 \\ t' < t < n \longrightarrow (C^{(d)} - V_{t+1}) < 0 \end{cases}$$

$$\text{Quindi} \begin{cases} 0 < t < t' \rightarrow P_{t+1}^{(R)} > 0 \\ t' < t < n \rightarrow P_{t+1}^{(R)} < 0 \, e \, P_{t+1}^{(S)} > P_{t+1} \end{cases}$$

15.3 Assicurazioni a rischio nullo

Consideriamo una forma assicurativa, durata n anni, a premio annuo costante P. Sia:

$$P_{t+1}^{(R)} = 0,\ t = 0, 1, \dots, n-1$$

allora $(t + 1 - V_{t+1}) = 0 \rightarrow t + 1 = V_{t+1}$ quindi in caso di decesso è liquidata la riserva matematica per finanziare il pagamento del capitale assicurato caso morte.
Dalla 15.3 segue che:
$P = P_{t+1}^{(S)} + P_{t+1}^{(R)} = P^{(S)}$
$V_{t+1} = P^{(S)} \cdot \ddot{S}_{\overline{t+1}|i} = P \cdot \ddot{S}_{\overline{t+1}|i}$

La riserva matematica è il montante puramente finanziario dei premi annui.
Il legame tra premio P e prestazioni $t+1$ non dipende dall'età dell'assicurato.
Riguarda operazioni di pura capitalizzazione finanziaria.

15.3.1 Rendita vitalizia differita, perpetua, anticipata

Siano: R: rata annua costante; m: differimento; n: periodo di pagamento dei premi annui; P: premio annuo costante.
All'epoca t, si ha: $V_t + P = C \cdot {}_{/1}A_{x+t} + V_{t+1} \cdot {}_1E_{x+t}$ (eq. Fouret)
Per la rendita considerata si ha:

$V_t + P = V_{t+1 1}E_{x+t}$, $t = 0, 1, \ldots, m-1$

$V_t - R = V_{t+1} \cdot {}_1E_{x+t}$, $t = m, m+1, \ldots$

Il premio di rischio è: $P_{t+1}^{(R)} = -V_{t+1} \cdot v \cdot q_{x+t} < 0$

Il premio di risparmio è: $P_{t+1}^{(S)} = P + V_{t+1} \cdot v \cdot q_{x+t}$, $t = 0, 1, \ldots, m-1$

$P_{t+1}^{(S)} = -R + V_{t+1} \cdot v \cdot q_{x+t}$, $t = m, m+1, \ldots$

Nella prima il premio di risparmio è integratp con la quota di riserve liberate
Nella seconda, la rata è finanziata dalla riserva del contratto e dalle quote delle riserve liberate.

15.4 Formule di scomposizione del premio annuo

$P_{t+1} = P_{t+1}^{(N)} + P_{t+1}^{(AS)}$

$P_{t+1} = P_{t+1}^{(S)} + P_{t+1}^{(R)}$

$P = \bar{P}^{(S)} + \bar{P}^{(R)}$ *dove*

$$\bar{P}^{(S)} = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} P_{t+1}^{(S)} {}_tE_x}{\sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x}$$

$$e\, P^{(R)} = \frac{\sum_{t=0}^{n-1} P_{t+1}^{(R)} {}_tE_x}{\sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x}$$

$U = U^{(R)} + U^{(S)}$ *dove*
$U^{(R)} = \bar{P}^{(R)} \cdot {}_{/n}\ddot{a}_x \rightarrow$ valore di Wright

$U^{(S)} = \bar{P}^{(S)}{}_{/n}\ddot{a}_x \, e \, \gamma = \dfrac{U^{(S)}}{U}$: indice di Tauler, indice del grado di capitalizzazione del contratto assicurativo.

$P = P^{(D)}_{t+1} + P^{(V)}_{t+1}$ si ricava dall'equazione di Fouret
con $P^{(D)} = (C \cdot v - V_t) \cdot q_{x+t} \, e \, P^{(V)}_{t+1} = (V_{t+1} \cdot v - V_t) \cdot P_{x+t}$

N.B. $V_t + P = vq_{x+t}C + vV_{t+1}P_{x+t}$
$P = vq_{x+t}C - V_t + vV_{t+1}P_{x+t} \pm V_t q_{x+t}$
$= (c \cdot v - V_t)q_{x+t} + V_t(1 - q_{x+t}) + vV_{t+1}P_{x+t} =$
$= (C \cdot v - V_t q_{x+t} + (V_{t+1} \cdot v - V_t)P_{x+t} =$
$= P^{(D)}_{t+1} + P^{(V)}_{t+1}$

dove: $P^{(D)}_{t+1}$: VAM impegno pagamento capitale C al netto delle riserve in caso di morte
$P^{(V)}_{t+1}$: VAM impegno assicurato le riserve in caso di sopravvivenza.

Risulta:
$P^{(D)}_{t+1} = (C \cdot v - V_t)q_{x+t} \pm v \cdot V_{t+1}q_{x+t} = P^{(R)}_{t+1} + (V_{t+1} \cdot v - V_t)q_{x+t}$
$P^{(V)}_{t+1} = (V_{t+1} \cdot v - V_t)P_{x+t} = P^{(S)}_t - (V_{t+1} \cdot v - V_t)q_{x+t}$
che equivale alla scomposizione di rischio e risparmio "spostando" l'incremento di riserve attese in caso di decesso

Capitolo 16

Calcolo della riserva per interpolazione

16.1 Contratto a premio unico

Sia $t \in N \, e \, 0 < r \leq 1$. Si vuole calcolare la riserva V_{t+r}
Si ha: $\hat{V}_{t+r} = (1-r)V_t + rV_{t+1}$ che è il risultato di: $\dfrac{\hat{V}_{t+r} - V_t}{V_{t+1} - V_t} = \dfrac{(t+r)-t}{(t+1)-t}$

16.2 Contratto a premio annuo

Sia $t \in N \, 0 < r \leq 1$. Si vuole calcolare la riserva V_{t+r}.
Si ha $\hat{V}_{t+r} = (1-r)(V_t + P) + rV_{t+1} = [(1-r)V_t + rV_{t+1}] + (1-r)P$
dove $(1-r)P$ è detto Riporto di premio annuo.

16.3 Contratto a premi annui frazionati

Sia $t \in N \, 0 < r \leq 1 \, m \leq n$, con m: durata pagamento premi ed n: durata contratto. Sia il premio annuo frazionato k-volte nell'anno. Il premio annuo frazionato risulta: $P^{(k)} = \dfrac{U}{{}_{/m}\ddot{a}_x^{(k)}} = P \cdot \dfrac{{}_{/m}\ddot{a}_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x^{(k)}}$
La riserva in $t = 1, 2, \ldots, n$ risulta:
$V^{(k)} = A(t,n) - P^{(k)} \cdot {}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t}^{(k)} =$
$= A(t,n) - P_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} + P_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} - P^{(k)}{}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} =$
$= V_t + (P_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} - P^{(k)}{}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t})$
Talvolta si approsima a $V_t^{(k)} \simeq V_t$ se il secondo addendo è di tralasciabile entità.

Si voglia calcolare la riserva:

$V^{(k)}_{t+\frac{h}{k}}$ $con\ t, h, k \in N\ e\ 0 < h < k$

L'epoca $\left(t + \dfrac{h}{k}\right)$ corrisponde ad un'epoca di pagamento di una frazione di premio annuo: $\dfrac{P^{(k)}}{k}$. Supponiamo di dover calcolare la riserva prima del pagamento della frazione di premio annuo. Per interpolazione si ha: $\hat{V}^{(k)}_{t+\frac{h}{k}} = \left(1 - \dfrac{h}{k}\right) V^{(k)}_t + \dfrac{h}{k} V^{(k)}_{t+1}$

Si deve calcolare la riserva ad un epoca non corrispondendte nè ad un anniversario di contratto, nè, più in generale, ad una scadenza di rata di premio. Indichiamo tale epoca com $t + \dfrac{h+r}{k}$, $con\, t, h, k \in N\, e\, 0 < h < k\, 0 < r < 1$

La riserva sarà: $V^{(k)}_{t+\frac{h+r}{k}} = (1-r)\left(V^{(k)}_{t+\frac{h}{k}} + \dfrac{P^{(k)}}{k}\right) + r \cdot V^{(k)}_{t+\frac{h+1}{k}}$ ovvero:

$V^{(k)}_{t+\frac{h+r}{k}} = \left[(1-r)\, V^{(k)}_{t+\frac{h}{k}} + r V^{(k)}_{t+\frac{h+1}{k}}\right] + (1-r)\dfrac{P^{(k)}}{k}$ dove $(1-r)\dfrac{P^{(k)}}{k}$ è detto Riporto di frazione di premio. Inoltre si ha che: $V^{(k)}_{t+\frac{h+r}{k}} = (1-r)\left(V^{(k)}_{t+\frac{h}{k}} + \dfrac{P^{(k)}}{k}\right) + r \cdot V^{(k)}_{t+\frac{h+1}{k}} = \left[1 - \left(\dfrac{h+r}{k}\right) V^{(k)}_t + \dfrac{h+r}{k} \cdot V^{(k)}_{t+1}\right] + (1-r)\,\dfrac{P^{(k)}}{k}$

Poichè $(1-r)\dfrac{P^{(k)}}{k} = \left(1 - \dfrac{h+r}{k}\right) P^{(k)} - [k - (h+1)]\,\dfrac{P^{(k)}}{k}$.

Sostituendolo nella formula del calcolo della riserva si ha:

$V^{(k)}_{t+\frac{h+r}{k}} = \left[\left(1 - \dfrac{h+r}{k}\right)\left(V^{(k)}_t + P^{(k)}\right) + \dfrac{h+r}{k} \cdot V^{(k)}_{t+1}\right] - [k - (h+1)] \cdot \dfrac{P^{(k)}}{k}$ dove $P^{(k)} = k \cdot \dfrac{P^{(k)}}{k}$

$[(k-1)] \cdot \dfrac{P^{(k)}}{k}$ è detto compimento all'epoca $\dfrac{h+r}{k}$. Il compimento consiste la "correzione" al riporto di Premio annuo $P^{(k)}$, relativa alla frazione di premio ancora dovuta.

Capitolo 17

Riserva matematica nel continuo

Si vuole valutare la riserva matematica di un contratto su una testa di età x, a prestazioni nel continuo.

- Contraente: sia P(t) il flusso di premio corrisposto tra $t, t+\Delta t$. Allora $P(t)\cdot\Delta t$ è il premio corrisposto tra gli istanti $t, t+\Delta t$ (a meno di infinitesimo di ordine superiore a Δt)
- Assicuratore: sia C(t) il capitale da pagare in caso di morte dell'assicurato all'istante t.
- Siano V(t) e $V(t+\Delta t)$ le riserve matematiche relative agli istanti $t\,e\,\Delta t$ per un contratto su una testa di età x

Indicato con δ l'intensità istantanea di interesse, l'equazione ricorrente di Fouret nel continuo si scrive:
$V(t)+P(t)\Delta t = C(t)\mu(x+t)\Delta t + V(t+\Delta t)_{\Delta t}\bar{E}_{x+t} + O_1(\Delta t)$ che esprime una condizione di equilibrio relativa nell'intervallo $(t, t+\Delta t)$.
Riscriviamo ${}_{\Delta t}\bar{E}_{x+t}$: $\dfrac{{}_{\Delta t}\bar{E}_{x+t} - {}_0\bar{E}_{x+t}}{\Delta t} = \dfrac{\partial}{\partial v}({}_v\bar{E}_{x+t})_{v=0} + \dfrac{O_2(\Delta t)}{\Delta t}$

dove: $\dfrac{\partial}{\partial v}({}_v\bar{E}_{x+t})_{v=0} = \dfrac{\partial}{\partial v}\left[e^{-\delta v - \int_{x+t}^{x+t+v} \mu(z)\,dz} \right]_{v=0} =$

$$= \left[-\left(v + \mu(x+t+v) \right) \cdot e^{-\delta v - \int_{x+t}^{x+t+v} \mu(z)\,dz} \right]_{v=0} = -\left[v + \mu(x+t) \right]$$

$$\frac{{}_{\Delta t}\bar{E}_{x+t} - {}_0\bar{E}_{x+t}}{\Delta t} = -[v+\mu(x+t)] + \frac{O_2(\Delta t)}{\Delta t}$$

${}_{\Delta t}\bar{E}_{x+t} = 1 - [v + \mu(x+t)]\Delta t + O_2(\Delta t)$

Che sostituendo si ha: $V(t) + P(t)\Delta t = C(t)\mu(x+t)\Delta t + V(t+\Delta t)[\delta + \mu(x + t)]\Delta t + V(t+\Delta t) + V(t+\Delta t)\cdot O_2(\Delta t) + O_1(\Delta t)$

$\dfrac{V(t+\Delta t) - V(t)}{\Delta t} = V(t+\Delta t)[\delta + \mu(x+t)] + P(t) - C(t)\mu(x+t) - V(t+\Delta t)\cdot \dfrac{O_2(\Delta t)}{\Delta t} - \dfrac{O_1(\Delta t)}{\Delta t}$

Per $\Delta t \to 0$, ottiene la continuità di $V(t)$ con l'esistenza del limite finito, per il ???

Si definisce l'equazione differenziale di Thiele-Jorgensen

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} = V(t)[\delta + \mu(x+t)] + P(t) - C(t)\mu(x+t)$$

Con la condizione iniziale $V(0) = 0$ si ha soluzione:

$$V(t) = \frac{\displaystyle\int_0^t [P(S) - C(S)\mu(x+S)]\, e^{-\delta S - \int_0^S \mu(x+z)\,dz}\, dS}{e^{-\delta t - \int_0^t \mu(x+z)\,dz}}$$

Dall'equazione di Thiele si ottiene

$$dV(t) = \delta V(t)\,dt - [C(t) - V(t)]\mu(x+t)\,dt + P(t)\,dt \tag{17.1}$$

Le variazioni $dV(t)$ delle riserve nell'intervallo $[t, t+dt]$ è dovuta agli ? sulle riserve ? $\delta V(t)\,dt$, al premio ?, $P(t)\,dt$, ed al costo della copertura caso morte per il capitale sotto rischio, $[C(t) - V(t)]\cdot\mu(x+t)\,dt$.
Dalla 17.1 si ottiene: $P(t)\,dt = [C(t) - V(t)]\cdot\mu(x+t)\,dt + d\,V(t) - \delta V(t)\,dt$
$= P^{(R)}(t)\,dt + P^{(S)}(t)\,dt$ dove: $P^{(R)}(t) = [C(t) - V(t)]\mu(x+t)$ flusso di premio a rischio
$P^{(S)}(t) = \dfrac{dV(t)}{dt} - \delta V(t)$ flusso di premio di risparmio.

17.1 Analisi dell'utile assicurativo e Formule di contribuzione di Homans (condizioni pure)

Consideriamo un generico contratto di assicurazione stipulato in $t = 0$ e scadente in $t = n$ su una testa di età x. Il contratto prevede:

Premi annui: $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$

Capitali caso morte: $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$

Capitali caso vita: $\{0, 0, \ldots, C'_n\}$

Sia i: base tecnica finanziaria di primo ordine e $\{q_x\}$ base tecnica demografica di primo ordine.
Relativamente all'anno $[t, t+1]$ valgono:

$$V_t + P_{t+1} = t+1 \cdot q_{x+t} + V_{t+1} \cdot v \cdot P_{x+t} [eq.\, di\, Fouret] \tag{17.2}$$

$$(V_t + P_{t+1})(1+i) - (t+1 - V_{t+1})q_{x+t} - V_{t+1} = 0 [eq.\, di\, Kemmer] \tag{17.3}$$

Le relazioni 17.2 e 17.3 esprimono l'equilibrio attuariale nell'anno $(t+1)$-esimo dovuto all'utilizzo delle basi tecniche di primo ordine nel calcolo di: $(P_{t+1}); (V_t, V_{t+1}); (v, q_{x+t})$
Si considerano le basi tecniche di secondo ordine "realistica":
i*: tasso annuo di interesse effettivamento atteso sugli attivi
$\{q*_x\}$: tassi annui di mortalità realisticamente attesi sul collettivo assicurato.
La 17.3 diventa:

$$(V_t + P_{t+1})(1+i*) - V_{t+1} - (t+1 - V_{t+1})q*_{x+t} = \mu*_{t+1} \tag{17.4}$$

dove $\mu*_{t+1} \leq> 0$
Sostituendo la 17.3 dalla 17.4 si ottiene:

$$\mu*_{t+1} = [(V_t + P_{t+1})(i* - i)] + [(t+1 - V_{t+1})(q_{x+t} - q*_{x+t})] \tag{17.5}$$

La 17.5 è la formula di contribuzione di Homans in condizioni pure. Esprime il "contributo aggregato del contratto alla formazione dell'utile assicurativo della compagnia".
N.B. $\mu*_{t+1}$ è riferito finanziariamento all'epoca $t+1$ e demograficamente all'epoca t.

La quantità ${}_1\mu*_{t+1} = (V_t + P_{t+1})(i* - i)$ rappresenta il margine finanziario, positivo se $i* > i$.
La quantità ${}_2\mu*_{t+1} = (t+1 - V_{t+1})(q_{x+t} - q*_{x+t})$ rappresenta il margine demografico, positivo se $\{q_{x+t} > q*_{x+t}\; e\, (t+1 - V_{t+1}) > 0\}\; con\; {}_2\mu*_{t+1}$ utile di sottomortalità (assicurazioni caso morte), oppure $\{q_{x+t} < q*_{x+t}\; e\, (t+1 - V_{t+1}) < 0\}\; con\; {}_2\mu*_{t+1}$ utile di sovrammortalità (assicurazione caso vita).

Si supponga che ogni anno di contratto siano valutati gli utili annui attesi($u*_n$). È possibile calcolare l'utile totale atteso dal contratto calcolando la somma dei valori attuariali degli utili attesi all'epoca $t = 0$
$u* = \frac{u*_1}{(1+i*)} \cdot {}_0E_x^* + \frac{u*_2}{(1+i*)} \cdot {}_1E_x^* + \cdots + \frac{u*_{t+1}}{(1+i*)} \cdot {}_tE_x^* + \cdots + \frac{u*_n}{(1+i*)} \cdot {}_nE_x^* =$
$= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{u*_{t+1}}{(1+i*)} \cdot {}_tE_x^*$
dove ${}_tE_x^* = (1+i*)^{-t} \cdot {}_tP_x^*$

N.B. Tali formule rappresentano strumenti per la verifica e la scelta delle Basi Tecniche di primo ordine, idonee a produrre utili mediamente positivi.
N.B.2 Nelle valutazioni di secondo ordine è possibili utilizzare $\{i*_t,\ t = 1, 2, \dots\}$, strutture per scadenza di tassi o anche tassi $j* > i*$, che contemplano un "premio per il rischio" per l'assicuratore.

17.2 Prudenzialità di una Base tencica di primo odine

La formula di Homans pul essere utilizzata per verificare la prudenzialità di una base tecnica di primo ordine rispetto ad una base tecnica realistica di secondo ordine.
Def. 1: Una base tecnica di primo ordine (i, $\{q_x\}$) è prudenziale rispetto alla base tecnica di secondo ordine $(i*, \{q_x^*\})$ se e solo se:

$$i \leq i*\ e \begin{cases} q_{x+t} \leq q^*_{x+t},\ se\, prestazioni\, caso\, vita \\ q_{x+t} \geq q^*_{x+t},\ se\, prestazioni\, caso\, morte \end{cases}$$

Def. 2: Una base tecnica di primo ordine $(i, \{q_x\})$ è prudenziali rispetto alla base tecnica di secondo ordine $(i*, \{q_x^*\})$ se e solo se:

$[1]t + 1^* = (V_t + P_{t+1}(i * -i) \geq 0,\ \forall t$
$[2]t + 1^* = (t + 1 - V_{t+1})(q_{x+t} - q^*_{x+t}) \geq 0,\ \forall t$

ovvero: $i \leq i*,\ e \begin{cases} q_{x+t} \leq q^*_{x+t},\ se\,(t+1-V_{t+1}) \leq 0 \\ q_{x+t} \geq q^*_{x+t},\ se\,(t+1-V_{t+1}) \geq 0 \end{cases}$

Def. 3: Una base tecnica di primo ordine $(i, \{q_x\})$ è prudenziali rispetto alla base tecnica di secondo ordine $(i*, \{q_x^*\})$ se e solo se:

$t + 1^* \geq 0,\ \forall t$

Def. 4: Una base tecnica di primo ordine $(i, \{q_x\})$ è prudenziali rispetto alla base tecnica di secondo ordine $(i*, \{q_x^*\})$ se e solo se:

$$u* = \sum_{t=0}^{n-1} t + 1^*(1 + i*)^{-(t+1)} \cdot {}_tP_x^* \geq 0$$

Capitolo 18

Condizioni di tariffa

18.1 Premi di tariffa

Il premio puro: $U = E[\tilde{y}]$, non copre gli effetti negativi degli scostamenti tra previsioni demografiche-finanziarie e osservazioni. Non copre le spese sostenute dalla compagnia nell'esercizio della propria attività.
Alla prima esigenza si fa fronte con una negoziazione del premio e attraverso un caricamento per margine si sicurezza, di forma:

- Implicita: adottando una base tecnica di I ordine prudenziale.
- Esplicita: incrementando il premio in funzione della forma assicurativa, del livello delle prestazioni, dell'età dell'assicurato e della durata cintrattuale

Alla seconda esigenza di coprire in media le spese, la compagnia provvede con caricamenti per spese, quantificabili in modo:

- Forfettario: in percentuale del premio
- Razionale: secondo criteri di tipo tecnico-attuariale.

Si procede in maniera razionale per la determinazione dei caricamenti:

- Individuare delle categorie di spese.
- Quantificazione delle spese attribuite al contratto assicurativo,
- Quantificazione di una componente di caricamento per ciascuna categoria di spesa e per ciascun caricamento

Le categorie di spesa sono tre:
Spese d'acquisto (A), iniziali;
Spese d'incasso (P), ;
Spese di gestione (G),
Indicato con n la durata contrattuale e con m la durata di pagamento dei premi $(m \leq n)$, sarà:
$Caricamenti_h[0,m] \; = \; Spese_h[0,n], \; h = A, P, G$
il valore attuariale delle spese deve essere uguale al valore dei caricamenti in $t = 0$.

18.1.1 Spese di acquisto(A)

Sono: Provvigioni d'acquisto della rete di distribuzione e le spese di emissione della polizza.

Calcolo del caricamento

In funzione del capitale assicurato:
Premio Unico: $K^{(A)} = \alpha \cdot C$
Premio annuo: $K^{(A)} \cdot {}_{/m}\ddot{a}_x = \cdot C \; con \; 3\% \leq \alpha \leq 4\%$
In funzione del premio di tariffa:
Premio Unico: $K^{(A)} = \theta \cdot U^T$
Premio Annuo: $K^{(A)} \cdot {}_{/m}\ddot{a}_x = \theta_{(m)} \cdot P^T$ con $\theta_{(m)}$ crescente con m.

18.1.2 Spese di incasso di premi(P)

Sono: provvigioni di incasso, spese di incasso (quietanza/ contabilizzazioni).

Calcolo del caricamento

Premio Unico: $K^{(P)} = \beta \cdot U^T$
Premio Annuo: $K^{(P)} = \beta \cdot P^T$

18.1.3 Spese di Gestione(G)

Sono: varie spese generali fisse

Calcolo del caricamento

Premio Unico: $K^{(G)} = (\gamma \cdot C) \cdot {}_{/n}\ddot{a}_x$
Premio annuo: $K^{(G)} \cdot {}_{/m}\ddot{a}_x = (\gamma \cdot C) \cdot {}_{/n}\ddot{a}_x \; con \; 0.002 \leq \gamma \leq 0.003$

Fissati i parametri (α, β, γ), si può procedere al calcolo del premio di tariffa:
$U^{(T)} = U + K^{(A)} + K^{(P)} + K^{(G)} = U + \alpha C + \beta U^T + \gamma C_{/n}\ddot{a}_x$

$U^T = \dfrac{U + \alpha C + \gamma C_{/n}\ddot{a}_x}{1 - \beta}$

Da cui: $P^T = \dfrac{U^T}{_{/m}\ddot{a}_x}$

18.2 Tassi di caricamento

$$\text{Premio Unico: } \begin{cases} \epsilon = \dfrac{U^T - U}{U^T} \Rightarrow U^T = \dfrac{U}{1-\epsilon} \\ \epsilon' = \dfrac{U^T - U}{U^T} \Rightarrow U^T = U(1+\epsilon') \end{cases}$$

$$\text{Premio annuo: } \begin{cases} \epsilon = \dfrac{P^T - P}{P^T} \Rightarrow P^T = \dfrac{P}{1-\epsilon} \\ \epsilon' = \dfrac{P^T - P}{P^T} \Rightarrow P^T = P(1+\epsilon') \end{cases}$$

Da cui si ha che: $\epsilon = \epsilon^{(A)} + \epsilon^{(P)} + \epsilon^{(G)}\, e\, 1 - \epsilon = \dfrac{P}{P^T}$
Le diverse aliquote ϵ, per ogni forma di assicurazione, dipendono dalla durata contrattuale (n), della durata del pagamento dei premi (m) e dall'età (x) dell'assicurato.

18.3 Base tecnica completa

Si definisce base tecnica completa del I ordine:

$$\begin{cases} i\ =\ tasso\, tecnico \\ \{q_x\}\ =\ tasso\, di\, mortalit \\ \{\alpha, \beta, \gamma\}\ :\ aliquota\, di\, caricamento\, spese \end{cases}$$

18.4 Riserva per caricamenti

Lo sfasamento temporale tra la copertura delle spese da parte della compagnia e il pagamento dei caricamenti da parte del contraente richiede la costituzione di Riserve per caricamenti. Secondo l'approccio prospettivo si ha:
$V_t^{(h)}\ =\ Spese_{(h)}[t, n] - Caricamenti_{(h)}[t, m]\, h = A, P, G\, se\, t \leq m$
$V_t^{(h)}\ =\ Spese : (h)[t, n]\, se\, t > m$
$e\, V_0^{(h)} = 0$, se il contatto è a premio periodico.

18.4.1 Riserve per spese d'incasso premi

Non essendoci sfasamento temporale tra spese d'incasso e caricamenti non viene costituita una riserva.

18.4.2 Riserve per spese d'acquisizione

Solitamente la spesa è sostenuta in un'unica soluzione alla stipula del contratto.

Premio Unico

In caso di premio unico la spesa è reintegrata immediatamente dal caricamento sul premio $\rightarrow V_t^{(A)} = 0\,\forall t$

Premio Annuo

In questo caso la spesa è reintegrata progressivamente attraverso il caricamento contenuto nel premio annuo. La spesa è totalmente reintegrata col pagamento di tutti i premi.
$V_t^{(A)} = -K^{(A)} \cdot {}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t};\ m \leq n\,e\,t < m$
$V_t^{(A)} = -\dfrac{\alpha}{{}_{/m}\ddot{a}_x} \cdot {}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} < 0$ con α: aliquota di spese commisurata al capitale assicurato.
$V_t^{(A)} = 0\,t \geq m$
La riserva è detta "Provvigione d'acquisto non ammortizzata"
Si definisce riserva Zillmerata: $V_t^{(ZILL)} = V_t + V_t^{(A)}$ e risulta:
$V_t^{(ZILL)} = V_t$, se il contratto è a premio unico o annuo con $m \leq t \leq n$
$V_t^{(ZILL)} < 0$, nei primi ann9i di contratto
$V_t^{(ZILL)} < V_t$, se il contratto è a premio annio con $0 < t < m$

18.4.3 Riserve per spese di gestione

Queste spese sono ricorrenti mentre i caricamenti sono riscossi per la durata del contratto.
Se $m = n$, supponendo che le spese siano sempre sostenute a inizio anno, allora non vi è sfasamento temporale e non viene costituita una riserva: $V_t^{(G)} = 0$, $\forall t$
Se $m < n$, allora è necessario costituire la riserva per spese di gestione.
$V_t^{(G)} = \gamma \cdot {}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} - K^{(G)} \cdot {}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} > 0\,t < m\,con\,K^{(G)} = \gamma\dfrac{{}_{/n}\ddot{a}_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x}$
Se premio unico o $m \leq t \leq n$ allora: $V_t^{(G)} = \gamma \cdot {}_{n-t}\ddot{a}_{x+t} > 0$, $\forall t$

Si definisce "Riserva d'investimento"

$V_t^{(I)} = V_t + V_t^{(G)} \geq V_t \, se \, m = n$
Si definiscono Premi di inventario: $P^{(I)} = P + K^{(G)}$
Si definisce riserva completa (o Zillmerata d'inventario):
$V_t^{(C)} = V_t + V_t^{(A)} + V_t^{(G)}$
Si definisce riserva per spese:
$V^{(S)} = V_t^{(A)} + V^{(G)} \leq> 0$

Risulta: $V^{(C)} \begin{cases} > V_t, \, con \, V_t^{(A)} = 0 \\ = V_t \, in \, caso \, di \, compensazione \, tra \, V_t^{(A)} \, e \, V_t^{(G)} \\ < V_t \, se \, |V_t^{(A)}| > |V_t^{(G)}| \end{cases}$

18.5 Equazione ricorrente di Fouret

Consideriamo un contratto di vita intera. Siano:
αC: spese d'aquisto
βP^T: spese d'incasso
γC: spesa annua di gestione.
Supponiamo premi annui P^T per m-anni. Siano:
$K^{(A)} = \frac{\alpha C}{_{/m}\ddot{a}_x}$: caricamento del premio annuo per le spese d'acquisizione

$K^{(P)} = \beta P^T$: caricamento del premio annuo per le spese di incasso.

$K^{(G)} = C\frac{\gamma_{/n}\ddot{a}_x}{_{/m}\ddot{a}_x}$: caricamento del premio annuo per le spese di gestione

$K = K^{(A)} + K^{(P)} + K^{(G)}$: caricamento del premio annuo per le spese complessive.
All'epoca $t < m_i$, la riserva completa risulta:
$V_t^{(C)} = V_t - K^{(A)}{}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} + \gamma C \ddot{a}_{x+t} - K^{(G)}{}_{/m}\ddot{a}_{x+t}$
e l'equazione di Fouret in condizioni pure:
$V_t + P = C \cdot vq_{x+t} + V_{t+1} \cdot vP_{x+t}$

Sommando le due equazioni si ottiene:
$V_t^{(C)} + P = C \cdot v \cdot q_{x+t} + V_{t+1} \cdot v \cdot q_{x+t} - K^{(A)} \cdot {}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} + \gamma C \ddot{a}_{x+t} - K^{(G)}{}_{/m-t}\ddot{a}_{x+t} =$
$= C \cdot v \cdot q_{x+t} + V_{t+} \cdot v \cdot q_{x+t} - K^{(A)} - K^{(A)} \cdot v \cdot P_{x+t} \cdot {}_{m-t-1}\ddot{a}_{x+t+1} + \gamma C + \gamma C \cdot v \cdot P_{x+t}\ddot{a}_{x+t+1} - K^{(G)} - K^{(G)} \cdot vP_{x+t/m-t-1}\ddot{a}_{x+t+1}$
$V_t^{(C)} + P + K^{(A)} + K^{(G)} + \beta P^T = Cvq_{x+t} + vP_{x+t}(V_{t+} + V_{t+1}^{(A)} + V_{t+1}^{(G)}) + \gamma C + \beta P^T$

$$V_t^{(C)} + P^T = C \cdot vq_{x+t} + vP_{x+t}V_{t+1}^{(C)} + \gamma C + \beta P^T$$

In $t = 0$ diventa: $P^T = Cvq_x + vP_xV_1^{(C)} + \gamma C + \beta P^T$
che trascura le spese d'acquisto pari ad αC. Per generalizzare a qualunque t si

riscrive:

$$V_t^{(C)} + P^T = Cvq_{x+t} + V_{t+1}^{(C)} vP_{x+t} + E_{t+1}(\alpha, \beta, \gamma)$$

dove $E_{t+1}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{cases} \alpha C + \beta P^T + \gamma C, \; t = 0 \\ \beta P^T + \gamma C, \; t = 1, 2, \ldots, m-1 \end{cases}$

e per $t \geq m$ si ha:

$V_t^{(C)} = Cvq_{x+t} + V_{t+1}^{(C)} vP_{x+t} + \gamma C$

18.6 Scomposizione del premio di tariffa

Si riscrive la 18.5, aggiungendo al secondo membro $\pm V_{t+1} \cdot vq_{x+t}$

$V_t^{(C)} + P^T = Cvq_{x+t} + V_{t+1}^{(C)} vP_{x+t} + E_{t+1}(\alpha,\beta,\gamma) \pm V_{t+1}vq_{x+t}$

$V_t^{(S)} + V_t + P^T = (C - V_{t+1})vq_{x+t} + [V_t^{(S)} + V_t]vP_{x+t} + E_{t+1}(\alpha,\beta,\gamma) + V_{t+1}vq_{x+t} =$

$= (C - V_{t+1})vq_{x+t} + V_{t+1}v + V_{t+1}^{(S)} vP_{x+t} + E_{t+1}(\alpha,\beta,\gamma)$

$P^T = (C - V_{t+1})vq_{x+t} + (V_{t+1}v - V_t) + (V_{t+1}^{(S)} vP_{x+t} - V_t^{(S)}) + E_{t+1}(\alpha,\beta,\gamma)$

Sia: $P : \begin{cases} P_{t+1}^{(R)} = vq_{x+t}(C - V_{t+1}) \\ P_{t+1}^{(S)} = V_{t+1}v - V_t \end{cases}$

e $\Gamma : \begin{cases} \Gamma_{t+1}^{(1)} = (V_{t+1}^{(S)} vP_{x+t} - V_{t+1}^{(S)}) \\ \Gamma_{t+1}^{(2)} = E_{t+1}(\alpha,\beta,\gamma) \end{cases}$

Da cui si ha la divisione del premio di tariffa con il premio puro che va a coprire il premio a rischio e il premio a risparmio; e il premio Γ che va a coprire, con $Gamma^{(1)}$, la gestione della riserva per spese e, con $\Gamma^{(2)}$, le spese immediate.

Inoltre si ha per $t \geq m$: $\begin{cases} P_{t+1}^{(R)} + P_{t+1}^{(S)} = 0 \to |P^{(R)}| = |P^{(S)}| \\ \Gamma_{t+1}^{(1)} + \Gamma_{t+1}^{(2)} = 0 \to |\Gamma^{(1)}| = |\Gamma^{(2)}| \end{cases}$

18.7 Analisi dell'utile (Formula generalizzata di Homans)

Si riscrive la 18.5 come: $V_t + V_t^{(S)} + P + \Gamma - (C - V_{t+1})vq_{x+t} - V_{t+1}v - V_{t+1}^{(S)} vP_{x+t} - E_{t+1}(\alpha,\beta,\gamma) = 0$

$$(V_t + P)(1+i) + (V_t^{(S)} + \Gamma)(1+i) - (C - V_{t+1})q_{x+t} - V_{t+1} - V_{t+1}^{(S)} P_{x+t} - E_{t+1}(\alpha,\beta,\gamma)(1+i) = 0$$

La relazione di equilibrio della 18.7 è dovuto all'utilizzo di basi tecniche complete di primo ordine. Se adottiamo una base tecnica di II ordine, si ha:

$(V_t+P)(1+i*)+(V^{(S)}+\Gamma)(1+i*)q^*_{x+t}-V_{t+1}-V^{(S)}_{t+1}P^*_{x+t}-E_{t+1}(\alpha*,\beta*,\gamma*)(1+i*)=u^{T*}_{t+1}$

dove $u^{(T*)}_{t+1}$: utile annuo atteso di tariffa.

18.8 Scomposizione dell'utile annuo atteso di tariffa

Sottraendo la 18.7 alla 18.7 si ha:

$$u^{T*}_{t+1}=u_{t+1}+u^{\Gamma}_{t+1}$$

dove $u_{t+1}=(V_t+P)(i*-i)+(C-V_{t+1})(q_{x+t}-q^*_{x+t})$: margine finanziario + margien demografico.
$u^{\Gamma}=(V^{(S)}_t+\Gamma)(1*-i)+E_{t+1}(\alpha,\beta,\gamma)(1+i)-E_{t+1}(\alpha*,\beta*,\gamma*)(1+i*)+V^{(S)}_{t+1}(P_{x+t}-P^*_{x+t})$: margine da spese e caricamenti.

Riorganizzando l'equazione dell'utile:

$u^{T*}_{t+1}={}_1u^{T*}_{t+1}+{}_2u^{T*}_{t+1}+u^E_{t+1}$ dove:

${}_1u^{T*}_{t+1}=(V^{(C)}_t+P^T)(1*-i)$, margine finanziario di tariffa.

${}_2u^{T*}_{t+1}=(C-V^{(C)}_{t+1})(q_{x+t}-q^*_{x+t}$, margine demografico di tariffa.

$u^E_{t+1}=E_{t+1}(\alpha,\beta,\gamma)(1+i)-E_{t+1}(\alpha*,\beta*,\gamma*)(1+i*)$, margine di spesa immediata.

L'utile totale atteso di tariffa risulta: $u^{T*}=\sum_{t=0}u^{T*}_{t+1}(1+i*)^{-(t+1)}{}_tP^*_x$

Capitolo 19

Trasformazione di polizza

19.1 Controassicurazione

È un'assicurazione aggiuntiva atta a restituire i premi di tariffa pagati dal contraente se la copertura principale non da luogo a prestazione. La somma del premio dell'assicurazione principale e dell'assicurazione aggiuntiva di controassicurazione è detta Premio Globale.

Esempio TCM

Assicurazione principale: $U_p = C_{/n}A_x$

Controassicurazione: $U_C = \bar{U}_n E_x$

Premio puro globale: $U = U_p + U_C = C_{/n}A_x + \bar{U}_n E_x$

Premio di tariffa: $U^T = U + \alpha C + \beta \bar{U} + (\gamma C)_{/n}\ddot{a}_x = \dfrac{U + \alpha C + (\gamma C)_{/n}\ddot{a}_x}{1-\beta}$

19.2 Trasformazione di Polizza

Dopo un certo numero di anni, il contraente chiede che la polizza venga sostituita con una di diverso tipo. In teoria la riserva V_t della vecchia polizza dovrebbe essere considerata come premio unico di tariffa della nuova polizza. In pratica si confrontano singolarmente la V_t della vecchia polizza con quella della nuova polizza V_t', come se la nuova polizza fosse stipulata in $t = 0$. Quindi:

$V_t = V_t'$: il contraente subentra nel nuovo contratto pagando solo i premi previsti dal primo contratto.

$V_t < V_t'$: il contraente integra in un'unica soluzione la riserva, versando $V_t' - V_t$, e paga i premi del nuovo contratto.

$V_t > V_t'$: la compagnia accredita al contraente la differenza $V_t' - V_t$ a titolo di riduzione dei premi del nuovo contratto con: $(V - V') = \Delta P'_{/h}\ddot{a}_{x+t}$ e $P = P^{nuovo} - \Delta P'$

19.3 Clausola di opzione

Se il contratto prevede il pagamento di un capitale a scadenza si concede la facoltà di scelta al benificiario tra:

- Incassare il capitale
- Trasformare il capitale in un premio unico di tariffa di un nuovo contratto, ad esempio di rendita

19.4 Variazione di scadenza

La clausola comporta la sospensione dei premi e la conservazione del contratto con la stessa forma e con lo stesso capitale, ma con una variazione della scadenza del capitale assicurato. La nuova scadenza è determinata utilizzando le riserve matematiche accreditate dalla compagnai come premio unico del nuovo contratto.
Esempio, Capitale Differito
Si vuole modificare la scadenza da n a m, $\eta'_t \cdot V_t^{ZILL} = C \cdot {}_mE_{x+t}$

19.5 Variazione del numero di premi annui

Si vuole cambiare, all'epoca $t > 0$, il numero dei premi annui ancora da pagare. Ad esempio si vuole passare da un premio annuo vitalizio P_v a un premio temporaneo P_T. Si ricava:
$P_V \ddot{a}_{x+t} = P_{T/T}\ddot{a}_{x+t} \Longrightarrow P_T = P_V \dfrac{\ddot{a}_{x+t}}{{}_{/T}\ddot{a}_{x+t}}$

19.6 Operazione di riduzione

La riduzione è l'operazione con cui il contraente sospende il pagamento dei premi e ottiene che la compagnia mantenga in vigore il contratto assicurativo, riducendo il capitale assicurato. Il capitale ridotto viene calcolato per step:
Si calcola la riserva Zillmerata all'epoca di sospensione dei premi
Si decurta la V_t^{ZILL} moltiplicandola per un coefficiente $\eta_t < 1$
Si utilizza la riserva decurtata $\eta_t \cdot V_t^{ZILL}$ come premio unico di tariffa di un contratto dello stesso tipo stipulato all'epoca t, per un capitale assicurato pari al nuovo capitale ridotto.
Esempio, mista semplice
$\eta \cdot V_t^{ZILL} = C^{(ridotto)}(A_{\overline{x+t,n-t|}} + \gamma_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}$
Il capitale ridotto può anche essere calcolato come: $C_t^{(rid)} = C\dfrac{t}{m}$

19.7 Operazione di riscatto

Nei contratti a premio annuo, la clausola di riscatto consente al contraente di interrompere il pagamento dei premi e di chiedere la risoluzione del contratto, ottenendo la liquidazione del "Prezzo di riscatto"(Z_t):
Forma assicurativa: La clausola di riscatto è limitata ad assicurazioni di tipo misto per evitare fenomeni di antiselezione degli assicurati
Prezzo di riscatto: è usualmente calcolato in funzione della riserva Zillmerata. Se $V_t^{ZILL} < 0, cheaccadequandotminoredel''Periododicarenza'', ilprezzodiriscattonullo$
$Calcoloteorico:$Z$_t = \eta_t V_t^{ZILL}\, \eta_t < 1$
Calcolo empirico (esempio di mista semplice): $Z_t = min.(\frac{t}{m}; 1) \cdot v^{n-t} \cdot C\, conv = \dfrac{1}{1+i*}\, e\, i > i*$

Capitolo 20

Prestazioni adeguabili

Consideriamo un'assicurazione mista ordinaria con: x: età della testa; C: capitale assicurato; n:durata del contratto; m=n: durata pagamento premi; $P = C\frac{A_{\overline{x,n|}}}{_{/n}\ddot{a}_x}$: premio annuo costante; t=0: epoca di stipula.
Ad un epoca $0 < t < n$ il contraente chiede l'adeguamento del capitale assicurato per proseguire l'assicurazione per il periodo $n - t$, con un capitale $C' > C$
La soluzione attuatiale è quella di "sommare" al pre-esistente contratto un nuovo contratto di mista ordinaria per il capitale integrativo: $\Delta C = C' - C$ per i restanti $n - t$ anni, sulla testa di età $x + t$.
La compagnia può finanzia la copertura integrativa in tre modi:

1. Modalità I: a premio unico

2. Modalità II: a premio annuo

3. Modalità III: in parte a premio unico e in parte a premio annuo

Le tre modalità sono equivalenti dal punto di vista attuariale.

20.1 I modalità base di adeguamento

Copertura del maggior oppure a premio unico:
$U = \Delta C \cdot A_{\overline{x+t,n-t|}}$ *con* $\Delta C = C' - C$

20.2 II modalità base di adeguamento

Il premio U, a copertura del maggior annuo, può essere rateizzato sulla durata residua $n-t$. Si ottiene un premio annuo addizionale, ΔC^{II}, che si aggiunge al premio annuo inizialmente pattuito:
$\Delta P = \frac{U}{{}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}} = \Delta C \cdot \frac{A_{\overline{x+t,n-t|}}}{{}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}}$
e i restanti premi annui pagati per i restanti anni di contratto: $P^{II} = P + \Delta P$

20.3 III modalità base di adeguamento

La copertura del maggiore onere ΔC per i residui $n-t$ anni avviene mediante:

- un versamento una-tantum
- un premio annuo addizionale a quello iniziale

Supponiamo che il contratto fosse stato stipulato in $t=0$ per un capitale assicuratp C'. Allora, il premio annuo sarebbe: $P^{III} = C' \frac{A_{\overline{x.n|}}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$ e all'epoca $0 < t < n$ la riserva prospettiva effettiva sarebbe: $V_t^{(fe)} = C' \cdot A_{\overline{x+t,n-t|}} - P^{III}{}_{n-t}\ddot{a}_{x+t}$
Se il contraente vuole entrare nel contratto di capitale C', allora dovrà integrare la riserva del vecchio contratto V_t in misura pari a: $\Delta V_t = V_t^{(Pe)} - V_t = (C' - C)A_{\overline{x+t,n-t|}} - (P^{III} - P)_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}$ dove questa quantità è detta **Salto di dirserva**. Quindi il transito dal vecchio al nuovo contratto può avvenire con il pagamento da parte del contraente:
Dell'importo una-tantum: $\Delta V_t = V_t^{(Pe)} - V_t$
e del premio addizionale annuo: $\Delta P^{III} = P^{III} - P$

N.B.: Se $\Delta V_t > 0$, allora $\Delta P^{III} > \Delta P^{III}$
Dimostrazione:
Hp: $\Delta V_t = (C' - C) \cdot A_{\overline{x+t,n-z|}} - (P^{III} - P)_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} > 0$

Nella II modalità si ha: $\Delta P^{II} = \Delta C \cdot \frac{A_{\overline{x+t,n-t|}}}{{}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}}$

Da cui si ha: $(C' - C)A_{\overline{x+t,n-t|}} = \Delta P^{II}{}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}$
Quindi, usando l'ipotesi: $\Delta V_t > 0$, si ha:
$\Delta V_t = \Delta P^{II}{}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} - \Delta P^{III}{}_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} > 0$
$(\Delta P^{II} - \Delta P^{II})_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} > 0$
$\Delta P^{II} > \Delta P^{III}$

20.4 Problema generale di adeguamento

Le tre modalità base sono soluzioni particolari di un più generale problema di adeguamento. Considerando ancora una mista ordinaria, all'epoca t di rischiesta di adeguamento, la condizione di equilibrio risulta:

$$V_t + P_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = CA_{\overline{x+t,n-t|}}$$

Se il contraente rischiede un incremento del capitale assicurato, si ha: $C' = C + \Delta C = C(1+j)$, con j: tasso di adeguamento capitale, allora occorre provvedere con un congruo incremento di riserva e/o di premio annuo:

$$V_t(1+\epsilon) + P(1+\phi)_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = C(1+j)A_{\overline{x+t,n-t|}}$$

che, fissato $j > 0$, è un'equazione in $\epsilon, \phi \geq 0$ che ammette, in genere, infinite soluzioni.

Nella I modalità di adeguamento si ha $\phi = 0$ e sottraendo dalla 20.4 la 20.4, si ottiene:
$\epsilon \cdot V_t = C \cdot jA_{\overline{x+t,n-t|}}$, dove$\epsilon V_t = U$

Nella II modalità di adeguamento si ha: $\epsilon = 0$ e l'incremento di premio sarà:
$\phi P = \dfrac{C \cdot jA_{\overline{x+t,n-t|}}}{_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}}$, cioè $\phi P = \Delta P^{II}$

Nella III modalità si ha: $\epsilon = \phi = j$ e quindi:
$\Delta V_t = V_t^{Pe} - V_t = C \cdot jA_{\overline{x+t,n-t|}} - \phi P_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}$
$= j[CA_{\overline{x+t,n-i|}} - P_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}] = j \cdot V_t \rightarrow V_t^{(Pe)} = V_t(1+j)$
$e\ \Delta P^{III} = j \cdot P \rightarrow P^{III} = P(1+j)\ e\ C' = C(1+j)$

N.B. Sottraendo alla 20.4 la 20.4, membro a membro, si ha l'equazione degli incrementi:

$$V_t \cdot \epsilon + P\phi_{/n-t}a_{x+t} = C \cdot jA_{\overline{x+t,n-t|}}$$

da cui si ha:
$j = \dfrac{V_t \cdot \epsilon}{CA_{\overline{x+t,n-t|}}} + \dfrac{P\phi_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}}{=} \dfrac{\epsilon V_t}{CA_{\overline{x+t,n-t|}}} + \dfrac{\phi P_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}}{CA_{\overline{x+t,n-t|}}}$

Quindi il tasso di adeguamento j è media ponderata dei tassi di adeguamento della riserva e del premio

20.5 Adeguamenti ricorrenti

L'adeguamento delle prestazioni può avvenire:

- a) occasionalmente, su richiesta del contraente per mutamenti dei suoi obiettivi assicurativi

- b) in forma ricorrente, ad ogni anniversario di contratto, secondo quanto pattuito in polizza

Dato C_1, il capitale inizialmente assicurato, nel caso b, si verrà a determinare progressivamente una sequenza di capitali $C_1 \leq C_2 \leq \cdots \leq C_n$, a fronte dei quali occorerà procedere ad una sequenza di adeguamenti di controprestazioni secondo una delle tre modalità.

Prima modalità Esempio di mitsa a capitale variabile
$\Delta C_1 = C_2 - C_1,\ \Delta C_2 = C_3 - C_2,\ \ldots\ \Delta C_{n-1} = C_n - C_{n-1}$
$C_1,\ C_2 = C_1 + \Delta C_1,\ C_n = C_{n-1} + \Delta C_{n-1} = C_1 + \sum_{h=1}^{n-1} \Delta C_h$

Controprestazione: Premio annuo variabile:

$P_1 = C_1 \frac{A_{\overline{x,n}|}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$

$P_n = P_1 + U_{n-1} \longrightarrow U_{n-1} = \Delta C_{n-1} A_{\overline{x+n-1,1}|}$

Riserve:
$t = 0 : V_0^{P_e} = C_1 A_{\overline{x,n}|} - P_{1/n}\ddot{a}_x$
$t = 1 : V_1^{P_e} = (C_1 + \Delta C_1) A_{\overline{x+1,n-1}|} - P_{1/n-1}\ddot{a}_{x+1} - U_1$
$t = 2 : V_2^{P_e} = (C_1 + \Delta C_1 + \Delta C_2) A_{\overline{x+2,n-2}|} - P_{1/n-2}\ddot{a}_{x+2} - U_2$
$t = n-1 : V_{n-1}^{P_e} = (C_1 + \sum_{h=1}^{n-1} \Delta C_h) A_{\overline{x+n-1,1}|} - P_{1/1}\ddot{a}_{x+n-1} - U_{n-1}$

Ripartizioni utili:

Fisso gli utili da distribuire: R

Criterio di ripartizione: in funzione di V_t: $R = \eta_t \sum_{h=1}^{N_t} V_t^{(h)}$ dove h: contratto h-esimo; N_t: numero contratti; η_t: tasso posticipato.
Quote utili: $\eta_t V_t^{(h)}$
Utilizzo quote utili:
Da riduzione premio annuo: $P' = (P - \eta_t V_t^{(h)})$

incremento di capitale assicurato: $\eta_t V_t^{(C)} = \Delta C_t A_{\overline{x+t,n-t|}} \Rightarrow C'_t = C_t + \Delta C_t$
$\eta_t V_t^{(h)} = \Delta P_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} \Rightarrow P' = (P - \Delta P)^t$

II modalità
$< C_1;\ C_2 = C_1 + \Delta C_1, ;\ C_n = C_{n-1} + \Delta C_{n-1}$
sia j_t: tasso di adeguamento del capitale tra $(t-1,t)$, $t = 1, 2, \ldots, n-1$
$\Delta C_1 = j_1 C_1,\ \Delta C_2 = j_2 C_2, \ldots, \Delta C_{n-1} = j_{n-1} C_{n-1}$
$C_1,\ C_2 = C_1(1+j_1),\ C_3 = C_2(1+j_2),\ C_n = C_{n-1}(1+j_{n-1} = C_1 \prod_{h=1}^{n-1}(1+j_h)$

Controprestazioni: Premi annui variabili

$$P_1 = C_1 \frac{A_{\overline{x,n|}}}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

$$P_2 = P_1 + \Delta P_1 \longrightarrow \Delta P_1 = \Delta C_1 \frac{A_{\overline{x+1,n-1|}}}{{}_{/n-1}\ddot{a}_{x+1}}$$

$$P_n = P_{n-1} + \Delta P_{n-1} = P_1 + \sum_{h=1}^{n-1} \Delta P_h \longrightarrow \Delta P_{n-1} = \Delta C_{n-1} \frac{A_{\overline{x+n-1,1|}}}{{}_{/n-(n-1)}\ddot{a}_{x+n-1}}$$

Riserva:
$t = 0 : V^{(P_e)} = C_1 A_{\overline{x,n|}} - P_{1/n}\ddot{a}_x$
$t = 1 : V_1^{(P_e)} = (C_1 + \Delta C_1) A_{\overline{x+1,n-1|}} - (P_1 + \Delta P_1)_{/n-1}\ddot{a}_{x+1} = V_1 + \Delta V_1$
$$t = n-1 : V_{n-1}^{(P_e)} = V_{n-1} + \sum_{h=1}^{n-1} \Delta V_h$$

III modalità

$C_1,\ C_2 = C_1 + \Delta C_1,\ C_n = C_{n-1} + \Delta C_{n-1}$
Sia $\Delta C_t = (1 + j_t)$ con j_t: tasso di adeguamento annuo.
$$C_2 = C_1(1+j_2),\ C_3 = C_2(1+j_3),\ C_n = C_1 \prod_{h=1}^{n-1}(1+j_h)$$

Controprestazioni:
$$P_1 = C_1 \frac{A_{\overline{x,n|}}}{{}_{/n}\ddot{a}_x};\ P_2 = C_2 \frac{A_{\overline{x,n|}}}{{}_{/n}\ddot{a}_x} = C_2 \frac{P_1}{C_1} = P_1(1+j_1)$$
$$P_n = P_1 \prod_{h=1}^{n-1}(1+j_h)\, con\, P_n - P_{n-1} = \Delta P_{n-1}$$

Integrazione riserva matematica
$t = 0 : V_0^{(P)} = V_0^{(Pe)} = C_1 A_{\overline{x,n|}} - P_{1/n}\ddot{a}_x$
$t = 1 : V_1^{(Pe)} = C_2 A_{\overline{x+1,n-1|}} - P_{2/n-1}\ddot{a}_{x+1}$

$V_1^{(P)} = C_1 A_{\overline{x+1,n-1|}} - P_{1/n-1}\ddot{a}_{x+1}$
$\Delta V_1 = V_1^{(Pe)} - V_1^{(P)} = j_1 V_1$
$t = t : V_t^{(Pe)} = C_{t+1} A_{\overline{x+t,n-t|}} - P_{t+1/n-t}\ddot{a}_{x+t}$
$V_t^{(P)} = C_t A_{\overline{x+t,n-t|}} - P_{t/n-t}\ddot{a}_{x+t}$
$\Delta V_t = j_t V_t$

N.B. $V_t^{(Pe)} = \prod_{h=1}^{t}(1+j_h)[C_1 A_{\overline{x+t,n-t|}} - P_{1/n-t}\ddot{a}_{x+t} = \prod_{h=1}^{t}(1+j_h)V_t^{(P)}$

20.6 Assicurazioni Index e Unit linked

Nelle forme assicurative con adeguamenti ricorrenti è necessario stabilire il parametro economico-finanziarioda cui dipende l'adeguamento delle prestazioni. Si hanno:

- a) Assicurazioni indicizzare, se il parametro di riferimento per l'adeguamento delle prestazioni è un indice del costo della vita
- b) Assicurazioni rivalutabili se il parametro di riferimento è il tasso di rendimento di di un paniere di titoli di investimento gestito dalla compagnia
- c) Assicurazioni Unit-Linked, se il parametro di riferimento è il "valore" delle "unità di conto" (oro, valute, parti di un fondo) assegnate al contratto
- d) Assicurazioni Index-Linked, se le prestazioni sono legate all'andamento di uno o più indici di riferimento

20.7 Assicurazioni indicizzate

Siano I_{t-1}, I_t i livelli di un indice del costo della vita rilevati rispettivamente all'inizio e alla fine dell'anno t.
Risulta: $\delta = \dfrac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}$: tasso di adeguamento variazione indice anno t.
Sia j_t: tasso di adeguamento prestazioni assicurate nell'anno t. Il tasso di adeguamento può essere una funzione del tasso di inflazione:

$$j_t = \begin{cases} j', \; se\, \alpha\delta_t < j' \\ \alpha\delta_t, \; se\, j' \leq \alpha\delta_t < j'' \\ j'', \; se\, \alpha\delta_t \geq j'' \end{cases}$$

dove: j': soglia di adeguamento minimo
j": soglia di adeguamento massimo

α: aliquota di adeguamento, $0 < \alpha \leq 1$
L'adeguamento delle prestazioni avviene in III modalità. Ad esempio, per una mista si ha:
$V_t(1+j_t) + P_t(1+j_t)_{/n-t}\ddot{a}_{x+t} = C_t A_{\overline{x+t,n-t|}}$
Se il meccanismo di indicizzazione è applicato a una rendita (usuale), lo sviluppo delle rate e della riserva di una rendita posticipata, a premio unico e immediato, sarebbe:
$t = 0 \longrightarrow U = R_1 a_x$
$t = 1 \longrightarrow R_2 = R_1(1+j_1)\, V_1^{(Pe)} = R_2 a_x = R_1(1+j_1)a_{x+1} = (1+j_1)V_1$
.
.
.
$int \longrightarrow R_{t+1} = R_t(1+j_t)$, $t = 1, 2, \ldots$
$V_t^{(Pe)} = (1+j_t)V_t^{(P)}$, $\forall t$
Clausole: Stabilizzazione dei premi
Probelmi finanziari: in III modalità: salto di riserva, periodi di carenza. In II modalità: scarsa diffusione
Forme caso morte: adeguamento come "copertura complementare con modesto sovrappremio"

20.8 Assicurazioni Index-Linked

Sono forme assicurative, solitamente miste, usualmente a premio unico, in cui le prestazioni sono legate all'andamento di uno o più "indici" di riferimento. Usualmente vengono utilizzati indici di borsa o azionari. L'indice deve avere una base ampia, così da evitare le eccessive oscillazioni causate dall'andamento delle quotazioni di un numero ristretto di titoli. In queste forme è usuale la presenza di una garanzia minima per contenere l'aleatorietà del contratto

20.8.1 Garanzie di mimimo

La garanzia fondamentale è una garanzia di minimo sull'importo versato alla stipulazione. Le assicurazioni index linked sono così classificate:

- assicurazioni index-linked pure cioè senza alcuna garanzia di minimo
- assicurazione index-linked con garanzia, nelle quali è garantito un importo $U\lambda$
  - se $< \lambda < 1$ l'assicurazione è detta index-linked con garanzia parziale

- se $\lambda = 1$ l'assicurazione è detta index-linked con garanzia di capitale
- se $\lambda > 1$ l'assicurazione è detta index-linked con garanzia di capitale e interessi, l'aliquota λ rappresenta in questo caso il fattore montante per n anni al tasso garantito r: $U\lambda = U(1+r)^n$

20.8.2 Prestazione a scadenza

Se il contratto ha durata n, la prestazione all'epoca n è collegata all'indice di riferimento sull'intera durata contrattuale, ed è assistita da una garanzia di minimo:
$S = max\{U\lambda, \, U \cdot \phi(I_0, I_1, \ldots, I_n)\}$
dove I è il livello dell'indice all'epoca t (anniversario di contratto)
ϕ: funzione di partecipazione alla performance dell'indice. È un "riassunto" dell'andamento dell'indice.

20.8.3 Funzione di partecipazione

Siano: $g_t = \dfrac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}$, tasso di valutazione dell'indice nel t-esimo anno
j_t tasso di variazione riconosciuto all'assicurato

$$j_t = \begin{cases} 0, \; se\, g_t < 0 \\ g_t \, se\, 0 \leq g_t < g' \\ g', \; se\, g_t \geq g' \end{cases}$$

20.8.4 Partecipazione integrale

$$\phi = \prod_{t=1}^{n} (1 + g_t) = \frac{I_n}{I_0}$$

20.8.5 Cliquet

$\phi = \alpha \prod_{t=1}^{n} (1 + j_t)$ dove α: aliquota di partecipazione delle variazione dell'indice
Il valore massimo della prestazione è: $U\alpha(1+g')^n$

20.8.6 Partecipazione additiva

$$\phi = 1 + \alpha \sum_{t=1}^{n} j_t$$

Il valore massimo della prestazione è: $U(1 + \alpha n g')$

20.8.7 Variazione media

$\phi = 1 + \alpha\, max\{\frac{I_{medio} - I_0}{I_0}, 0\} + \beta$

dove $I_{medio} = \frac{1}{n+1}\sum_{t=0}^{n} I_t$; β: indice di rivalutazione dell'importo U.

20.8.8 Rung (gradino) o step-up

Si ponga $\rho_0 = 1$ e si fissino gli m scaglioni tali che $\rho_0 < \rho_1 < \cdots < \rho_m$
$I_{rung} = max\{\rho_k I_0 | I_t \geq \rho_k I_0\, per\, almeno\, un\, t,\ 1 \leq t \leq n\}$
$\phi = 1 + max\{\frac{I_n - I_0}{I_0}, \frac{I_{rung} - I_0}{I_0}$
Si consolida il gradino più alto raggiunto ad anniversario di epoche

20.8.9 Europea

$\alpha \frac{I_n}{I_0}\, con\, \alpha > 0$

20.8.10 Asiatico o ARO(Average rate options)

$\phi = \alpha \frac{I_{medio}}{I_0}\, con\, \alpha > 0$

20.8.11 Cliquet con Ratche options

$$\phi = 1 + \alpha \sum \left(\frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}}\right) = 1 + \alpha \sum max\{g_t; 0\}$$

20.8.12 Asia lookback

$\phi = \alpha \frac{max\{I_0, I_1, \ldots, I_n\}}{I_0}$

20.8.13 Ladder

Fissato un intervallo di riferimento, si indichi con I_s il valore assunto dall'indice in un generico istante.
$f_T = max_{t-1 \leq s \leq t}\{\frac{I_s}{I_{t-1}} - 1\}$. La prestazione a scadenza non è definita dalla sequenza degli indici ad anniversario di epoca, bensì ad ogni istante, quindi da una

funzione $\psi(I_s,\, 0 \leq s \leq n)$

$$\psi(I_s,\, 0 \leq s \leq n) = 1 + \alpha \sum_{t=1}^{n} h_t \; con \; h_t = \begin{cases} f_t \, se \, 0 \leq f_t < f' \\ f' \, se \, f_t > f' \end{cases}$$

20.9 Assicurazioni Unit-Linked

Le assicurazioni Unit-Linked sono forme assicurative le cui prestazioni sono collegate al valore unitario di un titolo o alla singola quota di un fondo di investimento. Sia $w_0,\, w_1\, dots,\, w_n$ la successione di determinazioni incognite del valore unitario di un titolo.

Sia $g_1,\, g_2,\, g_n$ la successione dei tassi di rivalutazione del titolo in ogni anno.

Risulta: $w_t = w_{t-1}(1+g_t),\; t = 1, 2, n \longrightarrow w_t = w_0 \left[\prod_{h=1}^{t}(1+g_h)\right] \; P_1^v = C_1^v {}_nE_x \rightarrow$
$C_1^v = m_1 \cdot w_0$

$$C_1^v(n) = m_1 \cdot w_n = m_1 \left[\prod_{h=0}^{n}(1+g_h)\right] w_0 = C_1^v \prod_{h=1}^{n}(g_h+1)$$

A scadenza: $C^v = \sum_{t=0}^{n-1} C_t^{(v)}(n) = \sum_{t=0}^{n-1} m_{t+1} w_n = w_n \sum_{t=0}^{n-1} m_{t+1} = w_n M_n$

dove M_n: numero totale di azioni acquistate nel periodo contrattuale

20.9.1 Esempio di mista semplice

Per il capitale caso morte: $C^{(d)}$

$$\sum_{t=0}^{n-1}(P - P_{t+1}^v)_t E_x = C^{(d)}{}_{/n}A_x^{(d)} = \sum_{t=0}^{n-1}(P - P_{t+1}^v)\frac{{}_tE_x}{{}_{/n}A_x}$$

$$P \cdot \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = C^{(d)}{}_{/n}A_x + \sum_{t=0}^{n-1} P_{t+1}^{(v)} \cdot {}_tE_x \Rightarrow P\,{}_{/n}\ddot{a}_x = C^{(d)}{}_{/n}A_x + \sum_{t=0}^{n-1}(C_{t+1}^v \cdot {}_{/n-t}E_{x+t})_t E_x$$

$$P = \frac{C^{(d)} \cdot {}_{/n}A_x + \sum_{t=0}^{n-1} C_{t+1}^v \cdot {}_nE_x}{{}_{/n}\ddot{a}_x}$$

Fissati P; $P^{(v)}$; $P^{(d)}$ si ricavano $C^{(d)}$; $C^{(v)}$
$V_t = V_t^{(d)} + V_t^{(v)}$

$$V_t^{(d)} = C^{(d)} \cdot {}_{/n-t}A_x - \sum_{h=t}^{n-1}(P - P_{h+1}^{(v)})_{h-t}E_{x+t}$$

$$V_t^{(v)} = \left(\frac{C^{(v)}}{\prod\limits_{h=t+1}^{n} (1+g_h)} \right] \cdot {}_{n-t}E_{x+t} - P_{t+1}^{(v)} - \sum \frac{P_{k+1}^{(v)} \cdot {}_{n-t}E_{x+t}}{\prod\limits_{h=t+1}^{k} (1+g_h)}$$

$$V_t^{(v)} = M_t \cdot w_t \cdot {}_{n-t}E_{x+t} = C^{(v)}(t) \cdot {}_{n-t}E_{x+t}$$

Capitolo 21

Indice analitico

$$F = P\{T_x = 1 - \frac{S(x+t)}{S(x)}$$
$$f = F' = \frac{S'(x+t)}{S(x)}$$
$$S = P = 1 - F = 1 - q_x \quad P_x = \frac{S(x+1)}{S(x)}$$
$$\mu_x = \frac{f(x)}{S(x)} = -\frac{S'(x)}{S(x)} \quad \epsilon = -\mu(x) \cdot x$$
$$m = 2 \cdot \frac{S(x) - S(x+1)}{S(x) + S(x+1)} = 2 \cdot \frac{1 - P_x}{1 + P_x} = 2 \cdot \frac{q_x}{2 - q_x}$$
$$e_x = \frac{1}{S(x)} \sum_{h=1}^{\infty} [S(x+h)] = \ddot{e} - 1 = 2\dot{e} - 1$$
Gompertz:$\mu(x) = e^{\beta x}\alpha \quad (\alpha; \beta > 0)$
Makeham:$\mu(x) = e^{\beta x}\alpha + \gamma \quad (\alpha; \beta > 0; \gamma \geq 0)$
Lazarus:$e^{\beta_1 x}\alpha_1 + e^{\beta_2 x}\alpha_2 + \gamma \quad (\alpha_{1,2}; \beta_{1,2} > 0; \gamma \geq 0)$
Thiele:$\mu(x) = \alpha_1 \cdot e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 \cdot e^{\beta_2 x} + \gamma + \alpha_3 \cdot e^{[-\frac{1}{2}\beta_3(x-\gamma)]} \quad (\alpha_{1,2}; \beta_{1,2}; \alpha_3; \beta_3; \gamma \geq 0)$
Weibull:$\mu(x) = \frac{c}{\theta^c} x^{c-1}$
Quiquet:$\mu(x) = \sum_{i=1}^{r} P_i(x) \cdot e^{\beta_i x}$
De Moivre:$S(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{\omega} \; per \; 0 \leq x \leq \omega \\ 0 \; per \; x > \omega \end{cases}$
De Graaf:$S(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x}{\omega}\right)^n \; per 0 \leq x \leq \omega \\ 0 \; per \; x > \omega \end{cases} \quad con\, n \geq 1$
Dormoy:$S(x) = e^{-\mu \cdot x}\, per\, x \geq 0$

Lexis: $f_0(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\dfrac{(x-\bar{x})^2}{2^2}\right] \; per \; x \geq x'$

Capitolo 22

Note di matematica finanziaria

$$m(t_0; t_n) = \frac{C_{t_n}}{C_{t_0}} \quad v(t_0; t_n) = \frac{C_{t_0}}{C_{t_n}} \quad i(t_0; t_n) = \frac{C_{t_n}}{C_{t_0}} - 1$$

Regime composto: $m = (1 + i)^n \quad v = (1 + i)^{-n}$