Appunti di Teoria del Rischio

Matteo Morella

28 giugno 2024

Indice

Capitolo 1

Introduzione

Teoria del Rischio: disciplina che studia scostamenti dei risultati economico finanziari di una compagnia rispetto alle previsioni, esaminando e proponendo al gestore le strategia per la gestione dei rischi.
La misura più utilizzata è la varianza.
Si definisce scostamento la differenza tra previsioni e osservazioni
Focus su bilancio: conto tecnico
Scopo: organizzare l'attività per avere utili; accantonare una riserva patrimoniale (patrimonio garante di solvibilità); costruire un modello per manovrare ricavi e costi; rendere i costi meno variabili. Se questi maggiori dei premi vado a quantificare il patrimonio che serve per coprire il disavanzo.

Esistono due approcci:

1. **Classico (1909) o individuale**: valutazione dei rischi in portafoglio individualmente
   Se i ricavi positivi lo sono per ogni contratto allora il totale è positivo

2. **Collettivo**, dovuto a Lundberg e Kramer (1926): considera la massa di rischi totali e la distribuzione di probabilità del processo assicurativo nel suo insieme.
   Applicabile per **Rischi omogenei**(contratti vita/morte) o per **Rischi di massa**(RCA)

Si individuano strumenti per lo studio di processi assicurativi (l'insieme di variabili aleatorie target che variano nel tempo).
Due approcci:

- Analitico

- Simulativo, più adatto a modelli complessi

Bisogna conoscere le cause che determinano i risultati;
creo un modello per collegare cause e risultati.
Analizzo gli scostamenti dei risultati rispetto ai valori attesi per analizzare il patrimonio netto che assicura la solvibilità dell'impresa (entro un prefissato intervallo di tempo e con una data probabilità, tenendo conto dei rischi in portafoglio).

Capitolo 2

Rischi nel ramo vita

I principali rischi del ramo vita sono due: **Rischio contrattuale** e **Rischio Gestionale**

2.1 Rischio Contrattuale

- **Contrattuale**: il rischio è l'assicurato
- **Generale**:
  - **Rischio normale**: l'assicurato ha una speranza di sopravvivenza che è funzione solo di sesso ed età
  - **Rischio aggregato**: l'assicurato ha una speranza di sopravvivenza che dipende anche dagli stili di vita. (es. fumatore, lavoratore duro, provenienza etc...)
- **Analoghi**: hanno stessi profili
- **Selezione dei rischi**: processo in cui si classificano i rischi e quindi cambia il premio

Parole chiave:

- **Capitale sotto Rischio**: capitale assicurato sotto rischio meno riserva matematica
- **Premio di Rischio**: parte del premio annuo
- **Rischio decrescente**:

2.2 Rischio Generale

Scostamenti dei risultati della gestione di un contratto/portafoglio/impresa rispetto alle previsioni.
Non esiste rischio senza aspettativa.
Occorre previsione su tassi; sulla sopravvivenza; sulle spese; sulle prestazioni economiche (inflazione); sulla politica fiscale.
Definite le basi tecniche di II ordine, fisso quelle di I ordine, le retrocessioni e i riscatti.
I risultati di vedono nei: cashflow (competenza pluriennale), gli utili annuali (competenza annuale); utili generali (competenza in un lasso di tempo maggiore).
Il rischio è lo scostamento, sia positivo che negativo, di queste grandezze dalle previsioni.
Focus su gestione patrimoniale

2.3 Cause che producono scostamenti

- Rischio demografico
- Rischio di investimento
- Rischio catastrofale
- Rischio di spese e di gestione
- Rischi di comportamento
- Rischio economico (inflazione, fiscalità, tassi di cambio)

2.3.1 Rischio demografico

2 accezioni:

- Il rischio di scarti accidentali del numero dei decessi rispetto al valore atteso dei decessi. Scarti imputabili alle normali fluttuazioni della mortalità nel portafoglio.
- Il rischio demografico di scarti sistematici da quella attesa.
  Il rischio di longevità consiste nell'incapacità di prevedere i reali anni di mortalità al variare degli anni.
  Scarti dovuti alla on corretta selezione dei rischi in problemi di mortalità (es. Proiezione di una tavola di sani su teste tarate[1])

[1] malati

2.3.2 Rischio finanziario

Causato da fatti concernenti i mercati in cui l'assicurato investe le riserve matematiche (accantonamento di premi) e il capitale proprio (capitale sociale e riserve patrimoniali).
L'IVASS ha specificato il rischio di investimento individuando 5 profili:

1. **Rischio di performance o di mercato**: se la polizza prevede garanzie su prestazioni e il valore di attività a copertura è minore degli impegni dell'assicuratore

2. **Rischio di controparte o di credito o di Default Risk**: rischio di fallimento (non avviene pagamento) o inadempienza (il pagamento avviene in maniera tardiva o in modo diverso) dell'emittente del titolo in cui ha investito le riserve matematiche

3. **Rischio di tasso di interesse**: dovuto al disallineamento temporale tra il passivo e i flussi di cassa dei titoli in cui sono investite le riserve

4. **Rischio base**: riguarda le unit-linked. Si ha quando gli investimenti della compagnia non rappresentano perfettamente il paniere di titoli cui sono collegate le prestazioni

5. **Rischio di liquidità**: legato alla difficoltà di trasformazione degli investimenti in liquidità senza subire perdite tali da compromettere le possibilità di pagare prestazioni

2.3.3 Rischio catastrofale

Rischio di avere una mortalità eccezionale al verificarsi di particolari fenomeni (terremoti, epidemie, etc...). Un rischio è catastrofale se ha una frequenza se ha una bassa frequenza e alta intensità.

2.3.4 Rischio di spese e gestione

Consiste nella possibilità di avere spese effettive maggiori dei caricamenti previsti a copertura. Anche il rischio di redditività è un rischio di gestione.

2.3.5 Rischio di comportamento

Causati da da scelte degli assicurati quali:

1. abbandono del portafoglio

2. richiesta di riscatto
3. clausola di trasformazione del contratto
4. rischio di opzione di rendita o capitale

2.3.6 Rischio economico

Rischi quali inflazione, fiscalità, tassi di cambio.
Incide sulla domanda di assicurazione e sull'utile dell'esercizio

2.4 Fattori di aggravamento delle cause di rischio

I fattori che aggravano le cause di rischio sono:

1. **Dimensione del portafoglio**: differenziazione tra
   - **Rischi Pooling**: effetto diminuisce all'aumento dei contratti (es. Rischio demografico di scarto accidentale)
   - **Rischi Non Pooling**: effetto aumenta all'aumentare dei contratti (es. Rischio demografico sistematico o rischio finanziario)

   I due rischi richiedono una diversa struttura probabilistica
2. **Tipologia contrattuale**: es. Una temporanea caso morto aumenta il rischio di scarti accidentali o una mista accentua il rischio finanziario perchè ho riserve maggiori da gestire
3. **Distribuzione di capitale assicurato**: la distribuzione del capitale assicurato accentua il rischio demografico
4. **Condizioni contrattuali**
5. **Struttura tariffaria**: Se uso una tavola sbagliata ho scarti sistematici di mortalità
6. **Approccio di analisi dei rischi**: differenza tra approccio Chiuso (Run-off) e Aperto (Going concern)

Parte I

Teoria del rischio vita

La gestione complessiva di un'assicurazione è esposta a scostamenti dei risultati effettivi rispetto a quelli attesi. Tali scostamenti producono saldi di gestione positivi (utili) o negativi (perdite). Lo studio probabilistico di tali saldi è oggetto della teoria del rischio. I saldi di gestione incrementano o riducono i mezzi patrimoniali dell'impresa, ovvero il patrimonio netto[2](surplus o asset margin). Se valutiamo le attività al fair value e le passività usando le migliori stime, allora l'effettiva consistenza dei mezzi patrimoniali dell'azienda è detta **Riserva di rischio**, l'eccedenza delle attività sulle passività verso terzi. Un modello di TdR ha come equazione fondamentale quella che lega la riserva di rischio a tutte le risorse tecniche, economiche, finanziarie e patrimoniali comuni alla compagnia.

[2]Attività - passività verso terzi

Capitolo 3

Definizione del modello

L'equazione fondamentale è così definita:

$$\widetilde{U}_{t+1} = \widetilde{U}_t + UN_{t+1} + [(\widetilde{Y}L_{t+1} - \widetilde{CH}_{t+1}) - \widetilde{TX}_{t+1} - \widetilde{DV}_{t+1}]$$

dove:

- $\widetilde{U_{t+1}}$: v.a. riserva di rischio al termine dell'esercizio t+1esimo
- UN_{t+1}: apporto deterministico di capitali da parte degli azionizti
- $\widetilde{YL_{t+1}}$: v.a. utile ordinario lordo di esercizio, non influenzato dalle partite straordinarie ed al lordo delle imposte
- $\widetilde{CH_{t+1}}$: v.a. dei proventi (oneri) finanziari straordinari generati dalle variazioni dei valori di mercato delle attività dell'impresa (plusvalenze)
- $\widetilde{TX_{t+1}}$: v.a. ammontare delle imposte di competenza dell'esercizio
- $\widetilde{DV_{t+1}}$: v.a. dividendi da distribuire agli azionisti

L'utile lordo invece è così definito:

$$\widetilde{YL_{t+1}} = \widetilde{Y_{t+1}} + (\widetilde{JT_{t+1}} - \widetilde{J_{t+1}} - \Delta\widetilde{\underline{VB}_{t+1}})$$

dove:

- $\widetilde{Y_{t+1}}$: v.a. utile assicurativo
- $\widetilde{JT_{t+1}}$: v.a. investimento di tutte le passività
- $\widetilde{J_{t+1}}$: v.a. investimento delle sole riserve matematiche

- $\Delta\widetilde{\underline{VB}_{t+1}}$): differenza tra due riserve matematiche complete: una (sottolineata) tiene conto degli adeguamenti delle prestazioni e una no

A sua volta l'utile assicurativo può essere definito come:

$$\widetilde{Y_{t+1}} = (\widetilde{\underline{VB}_{t+1}} + \widetilde{B_{t+1}} + \widetilde{J_{t+1}}) - (\widetilde{E_{t+1}} + \widetilde{S_{t+1}} + \widetilde{X_{t+1}} + \widetilde{VB_{t+1}})$$

dove:

- $\widetilde{\underline{VB}_t}$: v.a. riserva matematica completa inizio esercizio, includente le rivalutazioni della riserva assegnate agli assicurati fino al termine dell'esercizio precedente
- $\widetilde{B_{t+1}}$ v.a. premi di tariffa valutati all'<u>inizio</u> dell'esercizio
- $\widetilde{E_{t+1}}$: v.a. spese valutate all'<u>inizio</u> dell'esercizio
- $\widetilde{S_{t+1}}$ v.a. prezzi di riscatto <u>inizio</u>
- $\widetilde{X_{t+1}}$ v.a. risarcimenti sinistri pagati alla <u>FINE</u> dell'esercizio
- $\widetilde{VB_{t+1}}$ v.a. riserva matematica completa al netto delle rivalutazioni

Quindi l'utile lordo può essere riscritto come:

$$\widetilde{YL_{t+1}} = (\widetilde{\underline{VB}_t}\widetilde{B_{t+1}} + \widetilde{JT_{t+1}}) - (\widetilde{E_{t+1}} + \widetilde{S_{t+1}} + \widetilde{X_{t+1}} + \widetilde{\underline{VB}_{t+1}})$$

3.1 Cash flow e attivo patrimoniale

Siano:

- $\widetilde{A}_t$ v.a. valore complessivo attività all'<u>inizio</u> dell'anno (capitale investito)
- $\widetilde{CF}_{t+}$: v.a. cash flow aleatorio che avviene un istante dopo l'inizio dell'esercizio

Si ha:

$$\widetilde{CF}_{t+} = \widetilde{B}_{t+1} - \widetilde{E}_{t+1} - \widetilde{S}_{t+1}$$

$$\widetilde{CF}_{t+1} = [\widetilde{JT}_{t+1} + UN_{t+1} + (L_{t+1} - L_t)] - (\widetilde{X}_{t+1} + \widetilde{DV}_{t+1} + \widetilde{TX}_{t+1})$$

N.B: la differenza $L_{t+1} - L_t$ è la variazione dei debiti non tecnici, ovvero tutti quei debiti che non sono riserve.
Non sono presenti le plusvalenze in questa formula perchè non comportano flussi di cassa.

L'attivo al termine dell'esercizio quindi così risulta:
$\widetilde{A}_{t+1} = \widetilde{A}_t + \widetilde{CF}_{t+} + \widetilde{CF}_{t+1} + \widetilde{CH}_{t+1} \Rightarrow$ ho aggiunto le plusvalenze perchè valuto al fair value.
Sapendo che $\widetilde{A}_t = U_t + \underline{\widetilde{VB}}_t + L_t$ si ha:

$$\widetilde{A}_{t+1} = \widetilde{U}_{t+1} + \underline{\widetilde{VB}}_{t+1} + L_{t+1}$$

L'attivo può anche essere riscritto come:

$$\widetilde{A}_t = \sum_k {}_k\widetilde{A}_{t+}$$

dove k sono le varie modalità di investimento della compagnia.
L'interesse complessivo risulta:

$$\widetilde{JT}_{t+1} = \widetilde{j}_{t+1}\widetilde{A}_{t+} = \sum_k [{}_k\widetilde{j}_{t+1\,k}\widetilde{A}_{t+}]$$

con $\widetilde{j}_{t+1} = \dfrac{\sum_k \left[{}_k\widetilde{j}_{t+1\,k}\widetilde{A}_{t+}\right]}{\widetilde{A}_{t+}} = \sum_k {}_k\widetilde{Q}_{t+\,k}\widetilde{j}_{t+1}$
e con ${}_k\widetilde{j}_{t+1}$ v.a. tasso di rendimento nel t+1esimo esercizio per la k-esima modalità di investimento
e ${}_k\widetilde{Q}_{t+}$: quota di attività della compagnia investita nella k-esima categoria al tempo t+.

In maniera analoga si ha per le plusvalenze: $\widetilde{CH}_{t+1} = \widetilde{j}'_{t+1}\widetilde{A}_{t+} = \sum_k \left[{}_k\widetilde{j}'_{t+1\,k}\widetilde{A}_{t+}\right]$
con ${}_k\widetilde{j}'_{t+1}$: v.a. tasso di variazione del valore di mercato registrato al tempo t+1 per la k-esima categoria.

3.2 Modello per simulazione tassi

Allo stesso modo abbiamo bisogno di un modello per la simulazione della serie dei tassi di interesse. Il seguente è proposto da Wilkie(1984) e Pentikainen(1989):

$$\widetilde{i}_{t+1} = i_m + a \cdot (\widetilde{i}_t - i_m) + c \cdot \widetilde{\xi}_{t+1}$$

con:

- i_m: tasso medio d'inflazione
- a: coefficiente di deviazione del processo dal volere medio
- $\widetilde{\xi}_{t+1}$: processo white noise $\sim$ N(0; 1)

- c: coefficiente di disturbo

Analogamente si assume un modello per la simulazione dei tassi di interesse per le obbligazioni:

$$_k\widetilde{j}_{t+1} = {}_kj_m + a_{1k}({}_k\widetilde{j}_t - {}_kj_m) + [(a_{2k}\widetilde{i}_{t-1} + a_{3k}\widetilde{i}_{t-2})] + c_{1k}\widetilde{\xi}_{t+1}$$

con:

- $_kj_m$: tasso medio di interesse per la k-esima categoria
- a_{1k}: coefficiente di deviazione del processo dal valore medio per la k-esima categoria
- a_{2k}, a_{3k}: pesi dei tassi di inflazione per la k-esima categoria. Sommati danno 1
- $\widetilde{\xi}$: fattore di disturbo, processo white noise $\sim$ N(0, 1)
- c_{1k}: coefficiente di disturbo

Capitolo 4

Determinazione utile assicurativo

Si usa l'approccio per generazioni. Ogni generazione è analizzata separatamente e il risultato di portafoglio e la somma dei risultati delle generazioni: $\widetilde{Y} = \sum_h \widetilde{Y}_h$.
Le polizze appartenenti alla stessa generazione sono omogenee rispetto a:

- Forma assicurativa
- Anno di sottoscrizione
- Età assicurati alla stipula (x)
- Durata contratto (n)
- Periodo pagamento premi (m)
- Anni di differimento (m)

NON sono omogenei rispetto alle somme assicurate.

ANDARE A VEDERE LA PARTE DI ATTUARIALE SU TASSI DI PREMIO, TASSI DI RISERVA, EQ. DI FOURIER, TASSI DI TARIFFA PER PREMI E PER RISERVE MATEMATICHE, BASI TECNICHE DI PRIMO E SECONDO ORDINE

4.1 Relazioni numerosità polizze e capitali assicurati

Siano:

- $\widetilde{l}_{x+t+1}$: v.a. numero di polizze ancora in essere a t+1

- $\widetilde{r}_{x+t}$: numero di abbandoni tra t e t+1
- $\widetilde{\delta}_{x+t}$: tasso di abbandono
- $\widetilde{d}_{x+t}$: v.a. decessi tra t e t+1

con polizze tra generazioni indipendenti.
Si ha:

$$\begin{aligned}
\widetilde{l}_{x+t+1} =& \widetilde{l}_{x+t} - \widetilde{r}_{x+t} - \widetilde{d}_{x+t} \\
=& \widetilde{l}_{x+t} - \widetilde{\delta}_{x+t}\widetilde{l}_{x+t} - \widetilde{q}_{x+t}(\widetilde{l}_{x+t} - \widetilde{r}_{x+t}) \\
=& \widetilde{l}_{x+t}(1 - \widetilde{\delta}_{x+t})(1 - \widetilde{q}_{x+t}) \\
=& \widetilde{l}_x \prod_{h=0}^{t} [(1 - \widetilde{\delta}_{x+h})(1 - \widetilde{q}_{x+h})]
\end{aligned}$$

Per i capitali invece si ha:

- $\widetilde{w}_{x+t+1}$: v.a. valore dei capitali assicurati ancora in essere
- $\widetilde{s}_{t+1}$: a.a. valore capitali complessivi delle polizze abbandonate
- $\widetilde{z}_{t+1}$ v.a. valore delle polizze decedute

Ipotizzando che gli abbandoni avvengono SOLO all'inizio dell'esercizio e i decessi alla fine si ha:

$$\widetilde{w}_{t+1} = \widetilde{w}_t - \widetilde{s}_{t+1} - \widetilde{z}_{t+1}$$

4.2 Condizioni di equilibrio per polizze a prestazioni variabili

Se le polizze sono a prestazioni variabili al termine di ogni anno le riservo e/o i premi dovranno essere incrementati per assicurare l'equilibrio attuariale.
Sia:

- $\widetilde{j}^c_{t+1}$: v.a. incremento dei capitali assicurati
- $\widetilde{j}^b_{t+1}$ v.a. incremento dei premi prescelto nell'anno per gli assicurati della generazione
- $\widetilde{j}^v_{t+1}$: $\dfrac{\Delta\widetilde{VB}_{t+1}}{\widetilde{VB}_{t+1}}$: tasso aleatorio di rivalutazione della riserva matematica

Si avrà:

$$j_1^c = j_1^v \frac{v_1^b + \theta_1[(1-\beta^*)b \cdot {}_{/m-1}\ddot{a}_{x+1}]}{v_1^b + (1-\beta^*)b \cdot {}_{/m-1}\ddot{a}_{x+1}}$$

In particolare se $\theta_{t+1} = 1$ per ogni t, i tassi di rivalutazione sono coincidenti. Tenendo conto dell'esigenza di rivalutare capitali, premi e riserve, se rappresentiamo la v.c indice di rivalutazione al tempo t (con $Q_0 = 1$) con :

$$\widetilde{Q}_t = \prod_{h=1}^{t}(1+\widetilde{j}^v_h) = \prod_{h=1}^{t}(1+\widetilde{j}^b_h) = \prod_{h=1}^{t}(1+\widetilde{j}^c_h)$$

gli ammontari complessivi dei premi e delle riserve matematiche (iniziali e finali) risultano:

- $\underline{\widetilde{VB}_t} = v^b \widetilde{w}_t \widetilde{Q}_t$: riserva matematica completa iniziale, comprensiva delle rivalutazioni

- $\widetilde{B}_{t+1} = b_{t+1}(\widetilde{w}_t - \widetilde{s}_{t+1})\widetilde{Q}_t$: ammontare premi di tariffa riscossi all'inizio dell'esercizio
- $\widetilde{VB}_{t+1} = v^b_{t+1}\widetilde{w}_{t+1}\widetilde{Q}_t$: riserva matematica completa finale al netto delle rivalutazioni

4.3 Modello per spese

Quando oggetto di esame sono le spese "effettivamente" sostenute dalla compagnia, viene fatto riferimento alle basi tecniche del secondo ordine, economicamente contrapposte a quelle del primo ordine. L'ammontare complessivo delle spese assicurative sostenute dalla compagnia nell'esercizio (t, t+1) può essere espresso dalla v.a.

$$\widetilde{E_{t+1}} = \widetilde{{}_{\alpha}E_{t+1}} + \widetilde{{}_{\beta}E_{t+1}} + \widetilde{{}_{\gamma}E_{t+1}}$$

Si avranno:

Le provvigioni pagate agli agenti, che ricorrono solo nel primo anno della polizza, sono poste pari ad un aliquota deterministica $\alpha_{t+1}(n, m)$ dell'ammontare dei premi di tariffa riscossi nel primo anno:

$$\widetilde{{}_{\alpha}E_{t+1}} = \alpha_{t+1}\widetilde{B}_{t+1} = (\alpha^* - \Delta\alpha^*_{t+1})b_{t+1}(\widetilde{w}_t - \widetilde{s}_{t+1}\widetilde{Q}_t)$$

con $\alpha_{t+1} = 0$ per $t > 0$ e con $\Delta\alpha^*_{t+1}$ differenza tra le basi di primo e secondo ordine;

Le spese di incasso sostenute dalla compagnia ogni anno in cui è previsto il pagamento del premio, sono pari ad una aliquota deterministica β_{t+1} dell'ammontare dei premi di tariffa pagati nell'anno:

$$\widetilde{{}_{\beta}E_{t+1}} = \beta_{t+1}\widetilde{B}_{t+1} = (\beta^* - \Delta\beta^*_{t+1})b_{t+1}(\widetilde{w}_t - \widetilde{s}_{t+1}\widetilde{Q}_t)$$

con $\beta_{t+1} = 0$ per $t \geq m$ e con $\Delta\beta^*_{t+1}$ differenza tra le basi di primo e secondo ordine;

Le spese generali e di amministrazione, sono pari ad una aliquota deterministica γ_{t+1} dell'ammontare complessivo dei capitali assicurati in vigore all'inizio dell'esercizio considerato:

$$\widetilde{{}_{\gamma}E_{t+1}} = \gamma_{t+1}\widetilde{w}_t\widetilde{Q}_t = (\gamma^* - \Delta\gamma^*_{t+1})\widetilde{w}_t\widetilde{Q}_t$$

con $\Delta\gamma^*_{t+1}$ differenza tra le basi di primo e secondo ordine.

Si vanno a correlare le spese di gestione alla v.a. tasso di inflazione **I**:

$$\widetilde{{}_{\gamma}E_{t+1}} = [(1 - \lambda_\gamma)\gamma^*\widetilde{w}_t]\widetilde{I}_t$$

con λ_γ caricamento di sicurezza. Quindi a questo punto anche γ_{t+1} diventa una v.a. funzione dell'inflazione e del tasso di rivalutazione:

$$\begin{aligned}\gamma_{t+1}\widetilde{w}_t\widetilde{Q}_t =& [(1-\lambda_\gamma)\gamma^*\widetilde{w}_t]\widetilde{I}_t \\ \widetilde{\gamma_{t+1}} =& (1-\lambda_\gamma)\gamma^*\frac{\widetilde{I}_t}{\widetilde{Q}_t}\end{aligned}$$

e di conseguenza:

$$\Delta\widetilde{\gamma^*_{t+1}} = \left[1-(1-\lambda_\gamma)\gamma^*\frac{\widetilde{I}_t}{\widetilde{Q}_t}\right]\gamma^*$$

In definitiva l'ammontare complessivo delle spese assicurative sostenute dalla compagnia nell'esercizio (t, t+1) può essere così riscritto:

$$\widetilde{E_{t+1}} = (\alpha_{t+1}+\beta_{t+1})b_{t+1}(\widetilde{w}_t-\widetilde{s}_{t+1})\widetilde{Q}_t + \widetilde{\gamma_{t+1}}\widetilde{w}_t\widetilde{Q}_t$$

4.4 Valori di riscatto

Riscatto è un'opzione che non è detto che ci sia nel contratto. Essa è una fuoriuscita anticipata dal contratto, quindi è un'opzione complicata da gestire per la compagnia.
Se l'assicurato esce dal contratto, vuol dire che non sente più il bisogno di assicurarsi per quel dato rischio (es. in una TCM se credo di poter sopravvivere ancora a lungo). Questo processo è definito anti-selezione, e amplifica il rischio per quella generazione di contratti. Questo causa una maggiore incidenza dei costi sui ricavi che può dar luogo a un saldo negativo.
Per questo motivo l'opzione di riscatto generalmente si riserva a quei tipi di contratto in cui non può esserci un'anti-selezione e cioè le miste.
Il riscatto impedisce alla compagnia di generare utili in futuro su quel contratto. Quindi si tutela liquidando una somma inferiore alla riserve che teoricamente dovrebbe essere il debito che ha la compagnia nei confronti dell'assicurato.
L'ammontare complessivo dei valori di riscatto pagati dalla compagnia quindi è pari a:

$$\widetilde{S_{t+1}} = g_t(j_s)v_t^z\widetilde{s_{t+1}}\widetilde{Q_{t+1}}$$

dove v_t^z (riserva zillmerata in t) $\times\widetilde{s_{t+1}}$ (capitali assicurati rivalutati), tale prodotto dovrebbe essere il riscatto che quindi viene abbattuto di un tasso $g_t(j_s)$.

Tale tasso è pari a $g_t(j_s) = \begin{cases} 0 & se\ t<\tau \\ (1+j_s)^{-(m-t)} & se\, t>\tau \end{cases}$ dove τ è detto periodo di carenza, ovvero quel periodo in cui la riserva zillmerata è negativa e j_s è un tasso di tutela per l'anti-selezione.

Se si trascura l'anti-selezione si avrà $g_t = \begin{cases} 0 \ se \ v_t^z < 0 \\ 1 \, se \ v_t^z > 0 \end{cases}$

Capitolo 5

Espressione generale dell'utile assicurativo

Tornando alla definizione di utile assicurativo

$$\widetilde{Y_{t+1}} = (\underline{\widetilde{VB}}_t + \widetilde{B_{t+1}} + \widetilde{J_{t+1}}) - (\widetilde{E_{t+1}} + \widetilde{S_{t+1}} + \widetilde{X_{t+1}} + \widetilde{VB_{t+1}})$$

Possiamo riscrive $\widetilde{J_{t+1}}$ come:

$$\widetilde{J_{t+1}} = \widetilde{j_{t+1}}(\underline{\widetilde{VB}}_t + \widetilde{B_{t+1}} - \widetilde{E_{t+1}} + \widetilde{S_{t+1}})$$

che equivale all'investimento al tasso **j** della quota di capitali rappresentati da Riserve + Premi - Spese - Riscatti.
Quindi il nostro modello si può riscrivere come:

$$\widetilde{Y_{t+1}} = (\underline{\widetilde{VB}}_t + \widetilde{B_{t+1}} - \widetilde{E_{t+1}} + \widetilde{S_{t+1}}) \cdot (1 + \widetilde{j_{t+1}}) - (\widetilde{X_{t+1}} + \widetilde{VB_{t+1}})$$

Per quanto riguarda i risarcimenti sinistri a fine anno $\widetilde{X_{t+1}} = \widetilde{x_{t+1}}\widetilde{Q_t}$ esso dipenderà dal tipo di contratto:

$\widetilde{X_{t+1}} = \widetilde{z_{t+1}}\widetilde{Q_t} \Longrightarrow$ TCM e Miste

$\widetilde{X_{t+1}} = 0 \Longrightarrow$ Capitale differito con $t + 1 < m$

$$\widetilde{X_{t+1}} = \begin{cases} 0 & se\ t < m \\ \widetilde{w_{t+1}}\widetilde{Q_t} & se\ t \geq m \end{cases} \Longrightarrow \text{Rendita temporanea differita}$$

Capitolo 6

Scomposizione dell'utile

L'utile può essere scomposto come segue:

$$\widetilde{Y_{t+1}} = \widetilde{{}_1Y_{t+1}} + \widetilde{{}_2Y_{t+1}} + \widetilde{{}_3Y_{t+1}} + \widetilde{{}_4Y_{t+1}} + \widetilde{{}_5Y_{t+1}}$$

Che sono

1. Utile di mortalità
2. Utile di eliminazione
3. Utile di caricamento per spese
4. Utile di interesse
5. Utile residuo

6.1 Utile di mortalità

Si definisce utile di mortalità:

$$\begin{aligned}\widetilde{{}_1Y_{t+1}} =& \{[v_t^b + b_{t+1}(1-\alpha^* - \beta^*) - \gamma^*](\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}})(1+j^*) - (\widetilde{x_{t+1}} + \widetilde{w_{t+1}} v_{t+1}^b)\}\widetilde{Q_t} \\ =& [\underline{\widetilde{VB}}_t + \widetilde{B_{t+1}} - \widetilde{E_{t+1}}^* - (v_t^b - \gamma^*)\widetilde{s_{t+1}}](1+j^*) - (\widetilde{X_{t+1}} + \widetilde{VB_{t+1}})\end{aligned}$$

Si usano basi tecniche di I ordine tranne che per la mortalità: sto facendo un'analisi demografica, quindi fisso tutte le basi tranne la tavola.
La formula si divide in:

1. Disposizioni iniziali (valutate in t)
2. Capitalizzazione di un anno per j_t^* così da portare la somma in t+1

3. Sottrazione di risarcimenti e riserve finali (valutati in t+1)

Questa formula comporta utili o perdite di competenza dovute alla componente demografica

6.2 Utile di eliminazione

$$\widetilde{{}_2Y_{t+1}} = [v_t^b - \gamma^* - g_t v_t^z](1+j^*)\widetilde{s_{t+1}}\widetilde{Q_t}$$

L'equazione consiste nell'eccedenza delle riserve complete delle polizze abbandonate rispetto alle spese di gestione sostenute e dei riscatti pagati. $g \cdot v^z$ è il tasso di prezzo di riscatto.
Se non ci fosse riscatto, la compagnia andrebbe ad investire $g \cdot v^z$ al tasso j^* generando un utile/perdita. Più il tasso è penalizzante, più utili faccio, ma conseguentemente vado peggio dal punto di vista commerciale

6.3 Utile di caricamento

$$\begin{aligned}\widetilde{{}_3Y_{t+1}} =&(1+j^*)[(\Delta\alpha^*_{t+1} + \Delta\beta^*_{t+1})b_{t+1}(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}}) + \Delta\gamma^*_{t+1}\widetilde{w_t}]\widetilde{Q_t} \\ =&(1+j^*)[\widetilde{E^*_{t+1}} - \widetilde{E_{t+1}}]\end{aligned}$$

Rappresenta il montante al tasso tecnico di I ordine della differenza tra le spese previste e quelle effettive

6.4 Utile di sovrainteresse

$$\begin{aligned}\widetilde{{}_4Y_{t+1}} =&(\widetilde{j_{t+1}} - j^*)[v_t^b\widetilde{w_t} + b_{t+1}(1-\alpha^*-\beta^*)(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}}) - \gamma^*\widetilde{w_t} - g_t v_t^z\widetilde{s_{t+1}}]\widetilde{Q_t} \\ =&(\widetilde{j_{t+1}} - j^*)[\underline{VB}_t + \widetilde{B_{t+1}} - \widetilde{E^*_{t+1}} - \widetilde{S_{t+1}}]\end{aligned}$$

È la differenza tra rendimento realizzato e quello ipotizzato in contratto.
Se $\widetilde{j} > j^*$ realizzerò un utile sulle disponibilità
La differenza $(\widetilde{j} - j^*)$ è detto **Margine finanziario**

6.5 Utile residuo

$$\begin{aligned}\widetilde{{}_5Y_{t+1}} =& (\widetilde{j_{t+1}} - j^*)[(\Delta\alpha^*_{t+1} + \Delta\beta^*_{t+1})b_{t+1}(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}})]\widetilde{Q_t} \\ =& (\widetilde{j_{t+1}} - j^*)[\widetilde{E_{t+1}}^* - \widetilde{E_{t+1}}]\end{aligned}$$

È la correlazione tra gestione finanziaria e gestione delle spese

6.6 Considerazione sulle componenti dell'utile

In considerazione di quanto fatto in Appendice si può affermare:

$$\widetilde{{}_1Y^r_{t+1}} > 0 \text{ se } \begin{cases} D_{t+1} > 0 \\ [q^*_{x+t}(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}}) - \widetilde{z_{t+1}}] > 0 \end{cases}$$

Nelle forme TCM e Miste una mortalità effettiva minore di quella ipotizzata produce utili di sottomortalità

$$\widetilde{{}_1Y^r_{t+1}} > 0 \text{ se } \begin{cases} D_{t+1} < 0 \\ [q^*_{x+t}(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}}) - \widetilde{z_{t+1}}] < 0 \end{cases}$$

Nelle forme caso vita una mortalità effettiva maggiore di quelle ipotizzate produce utili di sovrammortalità

$$\widetilde{{}_1Y^{(er)}_{t+1}} > 0 \text{ se } \begin{cases} v^e_{t+1} < 0 \\ [q^*_{x+t}(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}}) - \widetilde{z_{t+1}}] > 0 \end{cases}$$

Se prevalgono le spese d'acquisto non ammortizzate, si formano utili. Se i contratti non si eliminano prima che le provvigioni siano state recuperate, quindi se la mortalità effettiva è inferiore a quella prevista

$$\widetilde{{}_1Y^{(er)}_{t+1}} > 0 \text{ se } \begin{cases} v^e_{t+1} > 0 \\ [q^*_{x+t}(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}}) - \widetilde{z_{t+1}}] < 0 \end{cases}$$

Quando prevalgono le riserve per spese di gestione, allora si formano utili da spese e caricamenti quando la mortalità effettiva è superiore alla previsione e consente alla riserva per spese di gestione dei contratti eliminati si possono "liberare" ed entrare nella disponibilità della compagnia.

Capitolo 7

Determinazione delle variabili assicurative

Come si generano le variabili assicurative?
Si seguono due approcci:

- **Approccio analitico**
- **Approccio simulativo**, che a sua volta si compone in:
  - Approccio Esatto
  - Approccio Semplice
  - Approccio Collettivo

7.1 Analisi One Year Ahed

Simulo anno per anno, dando per noti i risultati precedenti (es. simulo l'anno t = 2, sapendo già i risultati di t = 1, anche se questi vengono da una simulazione)

7.2 Analisi 1 y-ahead, Approccio individuale esatto

Le ipotesi sono:

- Sono note le somme assicurate per ciascuna polizza all'inizio dell'esercizio
- La distribuzione dei capitali è aggiornata ad ogni uscita

I passi dell'algoritmo sono i seguenti

1. Simulazione numero abbandoni (**r**)
2. Estraggo gli **r** contratti per avere **s** somma dei capitali eliminati per abbandono
3. Elimino gli **r** contratti abbandonati
4. Simulo i decessi **d**
5. Estraggo i **d** contratti per ottenere **z** somma dei capitali eliminati per decesso
6. Elimino i **d** contratti deceduti
7. Rivalutazione dei capitali assicurati ancora in essere alla fine dell'esercizio {t, t+1}

NB

I capitali rivalutati all'ultimo passo dell'algoritmo rappresentano i capitali all'inizio dell'anno successivo
r e **d** seguono una distribuzione binomiale

7.3 Analisi 1y-ahead, Approccio individuale semplice

Le ipotesi sono:

- I capitali delle polizze in essere in t sono descritte da una distribuzione teorica
- La forma della distribuzione teorica è invariante a meno di rivalutazioni

I passi dell'algoritmo sono i seguenti:

1. Simulo **r**
2. Genero **r** importi dalla distribuzione teorica per ottenere **s**
3. Simulo **d**
4. Genero **d** importi dalla distribuzione teorica e ottengo **z**
5. "Modifica" della distribuzione (non cambia la forma, al più i parametri)

NB

La modifica della distribuzione teorica consiste nella rivalutazione dei capitali assicurati
r e **d** seguono una distribuzione binomiale
La differenza tra l'approccio semplice e quello esatto è che nell'esatto ho la distribuzione esatta dei capitali assicurati mentre in quello semplice la distribuzione è teorica

7.4 Analisi 1 y-ahead, approccio collettivo

La distribuzione teorica non si riferisce al singolo capitale, ma alla somma complessiva di tutti i capitali in portafoglio
r e **d** in questo caso seguono una distribuzione di Poisson

7.5 Procedure di standardizzazione e simmetrizzazione

Se **X** è una v.a. non simmetrica, si trasforma con:
$\widetilde{y} = v(\widetilde{X})$ dove v è un opportuna funzione di trasformazione

1° caso: Standardizzazione

Noto **X**, si vuole approssimare $F(X) = \mathbb{P}(\widetilde{X} \leq x) \sim N(\mu, \sigma^2)$
in modo tale che $F(X) \sim N(0, 1)$
Se conosco F(X) per ottenere la determinazione della X opero una trasformazione del tipo:
$v(X) = N^{-1}(.) \Longrightarrow X = \mu_X + v(X)\sigma_X$

2° caso: Simmetrizzazione Se $F(x) = \mathbb{P}(\widetilde{X} \leq x) \sim$ distribuzione non standard e non simmetrica, si applica una trasformazione del tipo:
$F(\widetilde{X}) \simeq N(\widetilde{y})$

7.5.1 Approssimazione Normal Power

Sia $\widetilde{y} = v(\widetilde{X})$. Noto X si vuole approssimare $F(X) = \mathbb{P}(\widetilde{X} \leq x)$. Quindi scelgo la funzione di trasformazione tale che la sua inversa sia un polinomio di secondo grado:
$v^{-1}(y) = y + \dfrac{v_X}{6}(y^2 - 1)$ con $X > \mu_X$

$$x = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = y + \frac{v_X}{6}(y^2 - 1) \Rightarrow y^2 + \frac{6}{v_X}y - \left(1 + \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\frac{6}{v_X}\right) = 0$$

$$y = -\frac{3}{v_X} \pm \sqrt{1 + \frac{9}{v_X^2} + \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\frac{6}{v_X}}$$

$$F(X) \simeq N(v(X)) = N\left[-\frac{3}{v_X} + \sqrt{1 + \frac{9}{v_X^2} + \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}\frac{6}{v_X}}\right]$$

Se noto $F(X) \sim N[v(X)]$ X si determinerà così:

$$X = \mu_X + \left[y + \frac{v_X}{6}(y^2 - 1)\right]$$

7.5.2 Approssimazione di Wilson-Hilferty

Sia $\mathbf{y} = \mathrm{v}(\mathbf{X})$. Noto X, si vuole approssimare $F(X) = \mathbb{P}(\widetilde{X} \leq x)$. Quindi si trasformerà in questo modo:
$y = v(x) = c_1 + c_2(x + c_3)^{\frac{1}{3}}$ dove:

$c_1 = \dfrac{1}{3g} - 3g$, $c_2 = 3g^{\frac{2}{3}}$, $c_3 = g$, $g = \dfrac{2}{v_X}$, $x = \dfrac{X - \mu_X}{\sigma_X}$

$$F(X) \simeq N[y] = N\left[c_1 + c_2(x + c_3)^{\frac{1}{3}}\right]$$

Viceversa noto $F(X) = \mathbb{P}(\widetilde{X} \leq x)$ si deve determinare X.
Si cerca $N[v(x)] = F(X)$ e si ricava $y = v(x)$.
Si avrà $y = c_1 + c_2(x + c_3)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow x = \left(\dfrac{1}{c_2}\right)^3 (y - c_1)^3 - c_3$

$$X = \mu_X + x\sigma_X$$

7.6 Analisi Numero condizionato abbandoni

Ipotesi:

- Sia δ il tasso medio di abbandoni nell'anno
- Il numero condizionato di abbandoni $\widetilde{r^\circ} \sim$ Binomiale (δ)

All'inizio dell'esercizio si avrà

$$p_k(\widetilde{r^\circ}) = \mathbb{P}(\widetilde{r}^\circ = k) = \binom{l}{k}\delta^k(1-\delta)^{l-k}$$

Le funzioni generatrici dei momenti (fgm) e dei cumulanti (fgc) saranno:

$M_{r^\circ}(t) = E[e^{r^\circ t}] = [1-\delta+\delta e^t]^l$
$ln[M_{r^\circ}(t)] = l \cdot ln[1-\delta+\delta e^t]$

Da cui risultano:

$$Media = E[\widetilde{r^\circ}] = l \cdot \delta$$
$$Varianza = \sigma^2(\widetilde{r^\circ}) = l \cdot \delta(1-\delta)$$
$$Asimmetria = v(\widetilde{r^\circ}) = \frac{1-2\delta}{\sigma(\widetilde{r^\circ})}$$

NB: una qualunque variabile aleatoria con $\circ$ va a significare che tale v.a. è condizionata
Inoltre $v(\widetilde{r}^\circ) > 0 \, se \, \delta < 50\%$

7.7 Analisi numero condizionato di decessi

Ipotesi:

- Siano q e δ il tasso atteso di mortalità e di abbandoni
- Si ha: $\widetilde{d^\circ} \sim B(q)$ e $\widetilde{r^\circ} \sim B(\delta)$

All'inizio dell'esercizio si avrà:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\widetilde{d^\circ} = k) &= \sum_{l}^{h=0}[\mathbb{P}\{\widetilde{d^\circ} = k|\widetilde{r^\circ} = h\}] \cdot \mathbb{P}\{\widetilde{r^\circ} = h\} \\
&= \sum_{l}^{h=0}\left[\binom{l-h}{k} q^k (1-q)^{l-h-k}\right]\binom{l}{h}\delta^h(1-\delta)^{l-h} \\
&= \binom{l}{k}[q(1-\delta)]^k[1-q(1-\delta)]^{l-k}
\end{aligned}$$

Fgm e momenti saranno:

$$M_{\widetilde{d}}^{\circ}(t) = E[e^{\widetilde{d^\circ} t}] = [1 - q(1-\delta) + q(1-\delta)e^t]^l$$

$$Media = E[\widetilde{d^\circ}] = l \cdot q(1-\delta)$$

$$Varianza = \sigma^2(\widetilde{d^\circ}) = l \cdot q(1-\delta)[1-q(1-\delta)]$$

$$Asimmetria = v(\widetilde{d^\circ}) = \frac{1-2q(1-\delta)}{\sigma(\widetilde{d^\circ})}$$

NB: $v(\widetilde{d}^\circ) > 0\, se\, q < 50\%$

7.8 Numero condizionato di sopravviventi

Ipotesi:

- Siano q e δ siano tasso atteso di mortalità e di abbandono
- $\widetilde{d}^\circ \sim B(q)$ e $\widetilde{r}^\circ \sim B(\delta)$

Alla fine dell'esercizio si avrà:

$$\mathbb{P}(l - \widetilde{r}^\circ - \widetilde{d}^\circ = k) = \binom{l}{k}[(1-\delta)(1-q)]^k[1-(1-\delta)(1-q)]^{l-k}$$

Con fgm e momenti rispettivamente:

$$M_{l-\widetilde{r}^\circ-\widetilde{d}^\circ}(t) = [1-(1-\delta)(1-q) + (1-\delta)(1-q)e^t]^l$$
$$[2ex] Media = E[l - \widetilde{r}^\circ - \widetilde{d}^\circ] = l(1-\delta)(1-q) = l - E[\widetilde{r}^\circ + \widetilde{d}^\circ]$$

$$Varianza = \sigma^2(l - \widetilde{r}^\circ - \widetilde{d}^\circ) = l(1-\delta)(1-q)[1-(1-\delta)(1-q)] = \sigma^2(\widetilde{r}^\circ + \widetilde{d}^\circ)$$

$$Asimmetria = V(l - \widetilde{r}^\circ - \widetilde{d}^\circ) = \frac{1-2(1-\delta)(1-q)}{\sigma(l - \widetilde{r}^\circ - \widetilde{d}^\circ)} = -v(\widetilde{r}^\circ + \widetilde{d}^\circ)$$

7.9 Importo condizionato dei capitali eliminati per abbandono; Approccio individiduale esatto

Ipotesi:

- δ tasso medio di abbandoni
- $\widetilde{s}^{\circ} \sim B(\delta)$

Alla fine dell'esercizio si avrà:

$$\widetilde{s}^{\circ} = \sum_{i \in \{\widetilde{r}^{\circ}\}} C_i = \sum_{i=1}^{l} C_i \widetilde{u}_i$$

con $\{\widetilde{u}_1; \ldots ; \widetilde{u}_l\} \sim Ber(\delta)$
Si avranno fgm e momenti:

$$M_{\widetilde{s}^{\circ}}(t) = E[e^{\widetilde{s}^{\circ} t}] = \prod_{i=1}^{l}(1 - \delta + \delta e^{t \cdot C_i})$$

$$Media = E[\widetilde{s}^{\circ}] = l \cdot \delta \cdot E[C] = E[\widetilde{r}^{\circ}] \cdot E[C]$$

$$Varianza = \sigma^2(\widetilde{s}^{\circ}) = l \cdot \delta(1 - \delta)E[C^2] = l \cdot \delta(1 - \delta)E^2[C]r_{2c} = \sigma^2(\widetilde{r}^{\circ})E^2[C]r_{2c}$$

$$Asimmetria = v(\widetilde{s}^{\circ}) = \frac{1 - 2\delta}{[l \cdot \delta(1 - \delta)]^{0.5}} \cdot \frac{E[C^3]}{E(C^2)^{3/2}} = v(\widetilde{r}^{\circ}) \cdot \frac{r_{3c}}{(r_{2c})^{3/2}}$$

dove $r_{iC} = \dfrac{E[C^i]}{E[C]^i}$ è detto indice di rischio di ordine i-esimo

7.10 Importo condizionato polizze eliminate per decesso; Approccio individuale esatto

Ipotesi:

- q e δ tassi attesi di mortalità e abbandoni
- Decessi e abbandoni si distribuiscono come una Binomiale

Alla dine dell'esercizio risulta:

$$\widetilde{z}^{\circ} = \sum_{i \in \{\widetilde{d}^{\circ}\}} C_i = \sum_{i=1}^{l} C_i \cdot \widetilde{u}'_i$$

con $\{\widetilde{u}'_1; \dots; \widetilde{u}'_n\} \sim Ber(q(1-\delta))$
Fgm e momenti saranno:

$$M_{\widetilde{z}^{\circ}}(t) = E[e^{\widetilde{z}^{\circ} t}] = \prod_{i=1}^{l} (1 - q(1-\delta) + q(1-\delta)e^{t \cdot C_i})$$

$$Media = E[\widetilde{z}^{\circ}] = l \cdot q(1-\delta)E[C] = E[\widetilde{d}^{\circ}]E^2[C]r_{2c}$$

$$Varianza = \sigma^2(\widetilde{z}^{\circ}) = l \cdot q(1-\delta)[1 - q(1-\delta)]E^2[C]r_{2c} = \sigma^2(\widetilde{d}^{\circ})E^2[C]r_{2c}$$

$$Asimmetria = v(\widetilde{z}^{\circ}) = \frac{1 - 2q(1-\delta)}{[l \cdot q(1-\delta)(1 - q(1-\delta))]^{0.5}} \cdot \frac{r_{3c}}{r_{2c}^{3/2}} = v(\widetilde{d}^{\circ}) \cdot \frac{r_{3c}}{r_{2c}^{3/2}}$$

7.11 Analisi importo condizionato dei capitali in essere; Approccio individuale esatto

Ipotesi:

- q e δ tasso atteso di mortalità e abbandoni
- decessi e abbandoni si distribuiscono come una binomiale

Alla fine dell'esercizio risulta:

$$\widetilde{w}^{\circ} = \sum_{i=1}^{l} C_i \cdot \widetilde{u}_i'' = w_t - \widetilde{s}^{\circ} - \widetilde{z}^{\circ}$$

con $\{\widetilde{u}_1''; \ldots ; \widetilde{u}_l''\} \sim Ber(1-q)(1-\delta)$
Fgm e momenti saranno:

$$M_{\widetilde{w}^{\circ}}(t) = E[e^{\widetilde{w}^{\circ}t}] = \prod_{i=1}^{l} \{1 - [1 - (1-q)(1-\delta)] + (1-q)(1-\delta)e^{t \cdot C_i}\}$$

$$Media = E[\widetilde{w}^{\circ}] = l(1-q)(1-\delta)E[C] = [l - E[\widetilde{r}^{\circ} + \widetilde{d}^{\circ}]]E[C]$$

$$Varianza = \sigma^2(\widetilde{w}^{\circ}) = l(1-q)(1-\delta)[1-(1-q)(1-\delta)]E^2[C]r_{2c} = \sigma^2(\widetilde{r}^{\circ} + \widetilde{d}^{\circ})E^2[C]r_{2c}$$

$$Asimmetria = v(\widetilde{w}^{\circ}) = -v(\widetilde{r}^{\circ} + \widetilde{d}^{\circ})\frac{r_{3c}}{E[r_{2c}]^{3/2}}$$

La distribuzione iniziale delle somme assicurate influenza attraverso gli indici di rischio solo il valore dell'asimmetria ma non il suo segno.

7.12 Coefficienti di correlazione lineare

7.12.1 Correlazione tra $\tilde{s}^\circ$ e $\tilde{z}^\circ$

Ipotesi:

- q e δ siano tasso atteso di mortalità e abbandoni
- decessi e abbandoni si distribuiscono come una binomiale

$$\rho(\tilde{s}^\circ;\tilde{z}^\circ) = \frac{\sigma(\tilde{s}^\circ;\tilde{z}^\circ)}{\sigma(\tilde{s}^\circ)\sigma(\tilde{z}^\circ)} = \frac{-q\sigma^2(\tilde{s}^\circ)}{\sigma(\tilde{s}^\circ)\sigma(\tilde{z}^\circ)} - \sqrt{\frac{\delta q}{1-q(1-\delta)}} : \begin{cases} -1 & per\, q = 1 \\ < 0 & per\, q < 1 \\ 0 & per\, q = 0; \delta = 0 \end{cases}$$

7.12.2 Correlazione tra $\tilde{s}^\circ$ e $\widetilde{w}^\circ$

$$\rho(\tilde{s}^\circ;\widetilde{w}^\circ) = \frac{\sigma(\tilde{s}^\circ;\widetilde{w}^\circ)}{\sigma(\tilde{s}^\circ)\sigma(\widetilde{w}^\circ)} = -\sqrt{\frac{\delta(1-q)}{\delta+q(1-\delta)}} : \begin{cases} -1 & per\, q = 0 \\ < 0 & per\, q < 1 \\ 0 & per\, q = 1; \delta = 0 \end{cases}$$

7.12.3 Correlazione tra $\widetilde{w}^\circ$ e $\tilde{z}^\circ$

$$\rho(\widetilde{w}^\circ;\tilde{z}^\circ) = \frac{\sigma(\widetilde{w}^\circ;\tilde{z}^\circ)}{\sigma(\widetilde{w}^\circ)\sigma(\tilde{z}^\circ)} = -\sqrt{\frac{1}{1+\delta/[q(1-\delta)(1-\delta)^2]}} : \begin{cases} -1 & per\, \delta = 0 \\ < 0 & per\, q < 1 \\ 0 & per\, q = 0; q = 1 \\ 0 & per\, \delta = 1 \end{cases}$$

7.13 Distribuzione utile di mortalità

$$\widetilde{{}_1Y^{\circ}_{t+1}} = D^b_{t+1}[q^*_{x+t}(w_t - \widetilde{s}^{\circ}_{t+1}) - \widetilde{z}^{\circ}_{t+1}]Q_t$$

7.13.1 Valore atteso utile di mortalità

$$\begin{aligned}
E[\widetilde{{}_1Y^{\circ}_{t+1}}] &= D^b_{t+1}[q^*_{x+t} \cdot l \cdot E[C] - E[\widetilde{s}^{\circ}_{t+1}] - E[\widetilde{z}^{\circ}_{t+1}]]Q_t \\
&= D^b_{t+1}[q^*_{x+t}(l \cdot E[C] - l \cdot \delta \cdot E[C]) - l \cdot q_{x+t}(1-\delta)E[C]]Q_t \\
&= D^b_{t+1}[q^*_{x+t} \cdot l \cdot E[C](1-\delta) - l \cdot q_{x+t}(1-\delta) \cdot E[C]]Q_t \\
&= D^b_{t+1} \cdot [l \cdot E[C](1-\delta)(q^*_{x+t} - q_{x+t})]Q_t \\
&= D^b_{t+1}[l \cdot q_{x+t} \cdot E[C](1-\delta) \cdot \frac{q^*_{x+t} - q_{x+t}}{q_{x+t}}]Q_t \\
&= \lambda D^b_{t+1} \cdot E[\widetilde{z}^{\circ}]Q_t
\end{aligned}$$

Dove $\lambda = \dfrac{q^*_{x+t} - q_{x+t}}{q_{x+t}}$ è il tasso di caricamento di sicurezza demografico

NB: Il segno dell'utile atteso dipende da λD^b_{t+1}

- Per TCM e miste si deve avere $D^b_{t+1} > 0$, quindi per $E[\widetilde{{}_1Y^{\circ}_{t+1}}] > 0$ serve $\lambda > 0$
- Per caso vita $D^b_{t+1} < 0$, quindi per $E[\widetilde{{}_1Y^{\circ}_{t+1}}] > 0$ serve $\lambda < 0$

7.13.2 Varianza utile di mortalità

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\widetilde{{}_1Y^{\circ}_{t+1}}) &= var(D^b_{t+1}[q^*_{x+t}(w_t - \widetilde{s}^{\circ}) - \widetilde{z}^{\circ}_{t+1}]Q_t) \\
&= (D^b_{t+1})^2[(q^*_{x+t})^2\sigma^2(\widetilde{s}^{\circ}_{t+1}) + \sigma^2(\widetilde{z}^{\circ}_{t+1}) + 2\sigma(q^*_{x+t}\widetilde{s}^{\circ}_{t+1}; \widetilde{z}^{\circ}_{t+1})]Q_t^2 \\
&= (D^b_{t+1})^2[(q^*_{x+t})^2\sigma^2(\widetilde{s}^{\circ}_{t+1}) + \sigma^2(\widetilde{z}^{\circ}_{t+1}) - 2q_{x+t}q^*_{x+t}\sigma^2(\widetilde{s}^{\circ}_{t+1})]Q_t^2 \\
&= (D^b_{t+1})^2[\sigma^2(\widetilde{z}^{\circ}_{t+1}) - \sigma^2(\widetilde{s}^{\circ}_{t+1})(2q_{x+t} - q^*_{x+t})q^*_{x+t}]Q_t^2
\end{aligned}$$

Ponendo $(2q_{x+t} - q^*_{x+t})q^*_{x+t} = \frac{2q_{x+t} - q^*_{x+t}}{q^2_{x+t}} \cdot q^*_{x+t} \cdot q^2_{x+t} = \left(1 - \frac{q^*_{x+t} - q_{x+t}}{q_{x+t}}\right) \cdot \left(1 + \frac{q^*_{x+t} - q_{x+t}}{q_{x+t}}\right) \cdot q^2_{x+t} = (1-\lambda^2)q^2_{x+t}$ si ottiene

$$\sigma^2(\widetilde{{}_1Y^\circ_{t+1}}) = (D^b_{t+1})^2[\sigma^2(\widetilde{z}^\circ_{t+1}) - (1-\lambda^2)q^2_{x+t}\sigma^2(\widetilde{s}^\circ_{t+1})]Q^2_t$$

Quando si possono trascurare gli abbandoni si ha:

$$\sigma^2(\widetilde{{}_1Y^\circ_{t+1}}) \simeq (D^b_{t+1})^2 \cdot \sigma^2(\widetilde{z}^\circ_{t+1})Q^2_t = (D^b_{t+1})^2 \cdot \sigma^2(\widetilde{d}^\circ_{t+1})E[C]^2 \cdot r_{2c} \cdot Q^2_t$$

Quando sono trascurabili gli abbandoni, l'indice di asimmetria dipende solo dalla forma assicurativa:

$$v(\sigma^2(\widetilde{{}_1Y^\circ_{t+1}})) \simeq -v(\widetilde{z}^\circ_{t+1}) \qquad se\, D^b_{t+1} > 0\, per\, TCM\, e\, Miste$$

$$v(\sigma^2(\widetilde{{}_1Y^\circ_{t+1}})) \simeq v(\widetilde{z}^\circ_{t+1}) \qquad se\, D^b_{t+1} < 0\, per\, Caso\, vita$$

7.14 Distribuzione utile finanziario

Sia

$$\widetilde{{}_4Y^\circ_{t+1}} = (\widetilde{j}^\circ_{t+1} - j^*)[v^b_t w_t + b_{t+1}(1-\alpha^*-\beta^*)(w_t - \widetilde{s}^\circ_{t+1}) - \gamma^* w_t - g_t \cdot v^z_t \cdot \widetilde{s}^\circ_{t+1}]Q_t$$

Posto:

$${}_4A_{t+1} = v^b_t w_t + b_{t+1}(1-\alpha^*-\beta^*) - \gamma^*$$

$${}_4A'_{t+1} = b_{t+1}(1-\alpha^*-\beta^*) + g_t v^z_t$$

si ha:

$$\widetilde{{}_4Y^\circ_{t+1}} = (E[\widetilde{j}^\circ_{t+1}] - j^*)({}_4A_{t+1}w_t - {}_4A'_{t+1}\widetilde{s}^\circ_{t+1})Q_t$$

Valore atteso e varianza risultano:

$$E[\widetilde{{}_4Y^\circ_{t+1}}] = (E[\widetilde{j}^\circ_{t+1}] - j^*)({}_4A_{t+1}w_t - {}_4A'_{t+1}E[\widetilde{s}^\circ_{t+1}])Q_t$$

$$\sigma^2(\widetilde{{}_4Y^\circ_{t+1}}) = \{({}_4A_{t+1}w_t - {}_4A'_{t+1}E[\widetilde{s}^\circ_{t+1}])^2\sigma^2(\widetilde{j}^\circ_{t+1}) + [\sigma^2(\widetilde{j}^\circ_{t+1}) + (E[\widetilde{j}^\circ_{t+1}] - j^*)^2]{}_4A'_{t+1}\sigma^2(\widetilde{s}^\circ_{t+1})\}Q^2_t$$

Se gli abbandoni sono trascurabili ($\lambda \simeq 0$), si ha:

$$E[\widetilde{{}_4Y^{\circ}_{t+1}}] = (E[\tilde{j}^{\circ}_{t+1}] - j^*)\{{}_4A_{t+1}w_t \cdot Q_t\}$$

$$\sigma^2(\widetilde{{}_4Y^{\circ}_{t+1}}) = \sigma^2(\tilde{j}^{\circ}_{t+1})\{{}_4A_{t+1}w_t \cdot Q_t\}^2$$

$$v(\widetilde{{}_4Y^{\circ}_{t+1}}) = v(\tilde{j}^{\circ}_{t+1})$$

7.15 Distribuzione utile assicurativo per una generazione

Per l'utile assicurativo di una singola generazione di polizze si ha:

$$\widetilde{Y^{\circ}_{t+1}} = \widetilde{{}_1Y^{\circ}_{t+1}} + \widetilde{{}_2Y^{\circ}_{t+1}} + \widetilde{{}_3Y^{\circ}_{t+1}} + \widetilde{{}_4Y^{\circ}_{t+1}} + \widetilde{{}_5Y^{\circ}_{t+1}}$$

Valore atteso e varianza risultano:

$$E[\widetilde{Y^{\circ}_{t+1}}] = E[\widetilde{{}_1Y^{\circ}_{t+1}}] + E[\widetilde{{}_2Y^{\circ}_{t+1}}] + E[\widetilde{{}_3Y^{\circ}_{t+1}}] + E[\widetilde{{}_4Y^{\circ}_{t+1}}] + E[\widetilde{{}_5Y^{\circ}_{t+1}}]$$

$$\sigma^2(\widetilde{Y^{\circ}_{t+1}}) = \sum_{5}^{i=1} \sigma^2(\widetilde{{}_iY^{\circ}_{t+1}}) + \sum_{i=1}^{5}\sum_{h\neq i}^{5} \sigma(\widetilde{{}_iY^{\circ}_{t+1}}; \widetilde{{}_hY^{\circ}_{t+1}})$$

Capitolo 8

Analisi del utile assicurativo di portafoglio

L'utile assicurativo condizionato di portafoglio alla fine dell'anno risulta:

$$\widetilde{Y^\circ} = \sum_h \widetilde{Y_h^\circ} = \sum_h \left[\sum_{i=1}^{5} {}_i\widetilde{Y_h^\circ} \right]$$

Con media e varianza pari a:

$$E[\widetilde{Y^\circ}] = \sum_h E[\widetilde{Y_h^\circ}] = \sum_h \left[\sum_{i=1}^{5} E[{}_i\widetilde{Y_h^\circ}] \right]$$

$$\sigma^2(\widetilde{Y^\circ}) = \sigma^2 \left(\sum_h \widetilde{Y^\circ} \right) = \sum_h \sigma^2(\widetilde{Y_h^\circ}) \sum \sum \sigma(\widetilde{Y_h^\circ}; \widetilde{Y_k^\circ})$$

Se:

1. Esiste correlazione solo tra le variabili finanziarie
2. ${}_2\widetilde{Y_h^\circ} \simeq 0$ e ${}_5\widetilde{Y_h^\circ} \simeq 0$
3. ${}_3\widetilde{Y_h^\circ} = {}_3Y_h^\circ$ variabile deterministica

Allora si può approssimare la varianza con:

$$\sigma^2(\widetilde{Y^\circ}) \simeq \sum_h \left[\sigma^2({}_1\widetilde{Y_h^\circ}) + \sigma^2({}_4\widetilde{Y_h^\circ}) \right] + \sum \sum \sigma({}_4\widetilde{Y_h^\circ}; {}_4\widetilde{Y_k^\circ})$$

Questa varianza è ovviamente sottostimata e quindi si va a sottostimare il rischio e il fabbisogno di capitali a copertura dello stesso.

Tornando alla stima della varianza, sapendo che nell'esercizio risulta $\rho({}_4\widetilde{Y_h^\circ}; {}_4\widetilde{Y_k^\circ})$ si ha:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\widetilde{Y^\circ}) &\simeq \sum_h \sigma^2({}_1\widetilde{Y_h^\circ}) + \sum_h {}_4\widetilde{Y_h^\circ} + \sum\sum \sigma({}_4\widetilde{Y_h^\circ}; {}_4\widetilde{Y_k^\circ}) \\
&= \sum_h \sigma^2({}_1\widetilde{Y_h^\circ}) + \sum_h \sigma^2{}_4\widetilde{Y_h^\circ} + \sum\sum \sigma({}_4\widetilde{Y_h^\circ}) \cdot \sigma({}_4\widetilde{Y_k^\circ}) \\
&= \sum_h \sigma^2({}_1\widetilde{Y_h^\circ}) + \left[\sum_h \sigma({}_4\widetilde{Y_h^\circ})\right]^2
\end{aligned}$$

Inoltre se $\delta \simeq 0$, ovvero posso ignorare gli abbandoni si ha:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(\widetilde{Y^\circ}) &\simeq \sum_h (D_h^b \cdot Q_h)^2 \sigma^2(\widetilde{z}_h^\circ) + \left[\sum_h \sigma^2(\widetilde{j}^\circ)(\underline{VB}_h + B_h - E_h^*)\right]^2 \\
&= \sum_h (D_h^b \cdot Q_h)^2 \sigma^2(\widetilde{d}_h^\circ)\overline{C}_h^2 \cdot r_{2,c,h} + \sigma^2(\widetilde{j}^\circ)\left[\sum_h (\underline{VB}_h + B_h - E_h^*)\right]^2 \\
&= \sum_h \left[\frac{\sigma(\widetilde{d}_h^\circ)}{l_h}(D_h^b w_h Q_h)\right]^2 \cdot r_{2,C,h} + \sigma^2(\widetilde{j})\left[\sum_h (\underline{VB}_h + B_h - E_h^*)\right]^2
\end{aligned}$$

Se il portafoglio è composto per lo più da forme di risparmio (caso vita) con $D^b \simeq 0$ allora si avrà:

$$\sigma^2(\widetilde{Y^\circ}) \simeq \sigma^2(\widetilde{j}^\circ)\left[\sum_h (\underline{VB}_h + B_h - E_h^*)^2\right]$$

dove $\sigma^2(\widetilde{Y^\circ})$ ha affinità con l'aliquota del 4% presente nella formula del MMS-CEE

Se il portafoglio è composto per lo più da forme di rischio (caso morte) con $v^b \simeq 0$ allora si avrà:

$$\sigma^2(\widetilde{Y^\circ}) \simeq \sum_h \frac{\sigma^2(\widetilde{d}_h^\circ) \cdot r_{2C,h}}{l_h^2} \cdot (D_h^b - w_h - Q_h)$$

dove $\sigma^2(\widetilde{Y^\circ})$ presenta affinità con lo 0.3% presente nella formula del MMS-CEE

Capitolo 9

Solvibilità

Occorre pensare alla solvibilità in senso probabilistico e nel contesto di ipotesi realistiche riguardo ai possibili scenari in cui opera l'impresa.

Si potrebbe allora attribuire al termine di solvibilità la capacità di far fronte, con assegnata probabilità ed entro un prefissato orizzonte temporale, agli impegni aleatori realisticamente descritti da una struttura probabilistica.
Se accettiamo questa definizione bisogna:

- individuare quali risultati si considerano adeguati ad accertare la solvibilità
- definire un intervallo temporale entro cui considerare i risultati
- scegliere se ragionare in termini di risultati annuali o di sintesi
- scegliere se adottare un'impostazione di analisi "a portafoglio chiuso" o "a portafoglio aperto"
- specificare il valore della probabilità di far fronte agli impegni
- identificare i soggetti interessati alla solvibilità: assicurati, azionisti, autorità di controllo del mercato

Gli **assicurati** sono interessati:

- ai risultati annuali di cassa che misurano la capacità dell'impresa di pagare
- ai risultati di redditività in termini di capacità della compagnia di conseguire utili per garantire agli assicurati stessi le retrocessioni
- all'orizzonte temporale della generazione alla quale il contratto appartiene.

Gli **azionisti** sono interessati:

- ai risultati annuali di cassa intesi come capacità di pagare gli impegni già assunti e quelli futuri
- ai risultati reddituali che dimostrano la capacità della compagnia di produrre e distribuire utili
- ai risultati patrimoniali, ovvero la capacità della compagnia di accrescere il valore dell'impresa
- all'orizzonte temporale di lunga durata

L'**autorità di controllo** è interessata:

- ai risultati annuali di cassa, cioè la capacità dell'impresa di far fronte agli impegni già assunti e di quelli futuri
- ai risultati patrimoniali in termini di capacità di accrescere il patrimonio a garanzia della solvibilità dell'impresa stessa
- all'orizzonte temporale di lunga durata

9.1 Solvibilità patrimoniale

Per risultati annuali:

$$\mathbb{P}\left\{\prod_{t=1}^{T} \widetilde{M_t} \geq 0\right\} = 1 - \varepsilon$$

dove $\widetilde{M_t}$ è la differenza tra attivo e passivo e l'argomento della produttoria sta ad indicare una sequenza tutta positiva.
Per risultati di sintesi invece si ha:

$$\mathbb{P}\{\widetilde{M_t} \geq 0\} = 1 - \varepsilon$$

9.2 Solvibilità liquidità

$$\mathbb{P}\left\{\prod_{t=1}^{T} \left[\left(\widetilde{A}_{t-1}^{(L)} + \widetilde{P}_t^{(L)} - \widetilde{E}^{(L)}\right)\left(1 + \widetilde{j}_t^{(L)}\right) - \widetilde{x}_t \geq 0\right]\right\} = 1 - \varepsilon$$

Far fronte con probabilità X agli impegni che comportano pagamenti nello stesso anno.
Il termine $\widetilde{A}^{(L)}$ indica gli attivi liquidi.

9.3 Margine di solvibilità

Risultati annuali

Sia M_0 il capitale proprio in $t = 0$. Si definisce

$$\pi_0(M_0; T) = 1 - \mathbb{P}\left\{\prod_{t=1}^{T} \left(\widetilde{M}_t \geq 0\right)\right\}$$

probabilità di rovina entro T anni con capitale proprio iniziale M_0
M_0 è detto anche margine di solvibilità posseduta.
Sia fissata la probabilità di rovina $\{\varepsilon\}$. Si fissa il valore $M_0 = M_A^{(S)}$ tale che:

$$\pi_0\left(M_A^{(S)}; T\right) = \varepsilon$$

è detto margine minimo di solvibilità

Risultati di sintesi

sia M_0 il capitale proprio in $t = 0$ si definisce:

$$\rho_0(M_0; T) = 1 - \mathbb{P}\left\{\widetilde{M}_T \geq 0\right\}$$

probabilità di rovina entro T anni con capitale iniziale M_0
fissato $\{\varepsilon\}$ probabilità di rovina, si sceglie $M_B^{(S)}$ tale che:

$$\rho_0(M_B^{(S)}; T) = \varepsilon$$

è detto margine minimo di solvibilità.
Con uguale ε si ha $M_A^{(S)} \geq M_B^{(S)}$

9.4 Formule per il calcolo del margine di solvibilità

sia $M^{(S)} = f(Q_1; \ldots; Q_n)$ con:

- $M^{(S)}$: margine minimo di solvibilità
- f una funzione a valori reali
- $\{Q_1; \ldots; Q_n\}$ i fattori di rischio

9.4.1 Formula di Campagna (1961)

$$M^{(S)} = \alpha \cdot V$$

ca%lcolato come aliquota della riserva matematica di portafoglio all'epoca di valutazione.
Campagna formulò il modello per $T = 3$ $\alpha = 4\%$ e $\varepsilon = 5\%$
Questa formula considera maggiormente il rischio finanziario.
È condizionato dalle basi tecniche scelte e dalle forme contrattuali

9.4.2 Formula di Buol (1969)

$$M^{(S)} = V' - V$$

dove **V'** è la riserva matematica calcolata con basi tecniche finanziarie rafforzate e **V** è la riserva matematica calcolata con basi tecniche non rafforzate.
Sia $i_t^{(NR)}$ base tecnica non rafforzata
Si definisce base tecnica rafforzata: $i_t^{(R)} = 85\% i_t^{(NR)}$
Per il calcolo della base tecnica non rafforzata si ha bisogno della serie storica dei tassi degli ultimi 20 anni. Si calcola prima il tasso minimo degli ultimi 20 anni e il tasso tra (t-1; t). La base tecnica non rafforzata poi è calcolata come:

$$i_t^{(NR)} = \frac{2}{3} i_{[t-20;t]}^{(min)} + \frac{1}{3} i_{t-1;t}$$

Esempio di calcolo del mms per una mista:

$$\begin{aligned} M^{(S)} &= (A'_{\overline{x+t;n-t|}} - P_{/n-t}\ddot{a}'_{x+t}) - (A_{\overline{x+t;n-t|}} - P_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}) \\ &= (A'_{\overline{x+t;n-t|}} - P'_{/n-t}\ddot{a}'_{x+t}) - (A_{\overline{x+t;n-t|}} - P_{/n-t}\ddot{a}_{x+t}) + (P' - P)_{/n-t}\ddot{a}'_{x+t} \\ &= (V'_t - V_t) + (P' - P)_{/n-t}\ddot{a}'_{x+t} \\ &= {}_V M^{(S)} + {}_P M^{(P)} \end{aligned}$$

Buol ha poi proposto:

$$M^{(S)} = \alpha \cdot V + \beta(C^+ - V^{(+)})$$

Non viene considerato il rischio di longevità. Buol aveva proposto $\alpha = 9\%$ e $\beta = 6\%$

9.4.3 Formula CEE (Prima direttiva vita, Solvency 1)

$$M^{(S)} = 0.04 \cdot a \cdot V + 0.003 \cdot b(C^+ - V^+)$$

$$a = max\left\{0.85; \frac{V^{conservata}}{V}\right\}$$
$$b = max\left\{0.5; \frac{(C^+ - V^+)^{conservata}}{(C^+ - V^+)}\right\}$$

Dove per conservata si intende al netto della riassicurazione

9.4.4 Formula della facoltà degli attuari di Edimburgo (FA) (1986)

Il modello si compone in due fattori, uno per il rischio finanziario e uno per il rischio demografico:

$$M^{(S)} = {}_F M^{(S)} + {}_D M^{(S)}$$

Rischio Finanziario

$${}_F M^{(S)} = \alpha \cdot V$$

modello poi abbandonato

Rischio Demografico

Modello iniziale

$${}_D M^{(S)} = {}_{D1} M^{(S)} + {}_{D2} M^{(S)} + {}_{D3} M^{(S)}$$

con:

1. rischio di scarti accidentali
2. rischio di scarti sistematici
3. rischio di variazioni di breve periodo della mortalità per catastrofi, guerre ed epidemie

con ${}_{D1}M^{(S)} = 0$, perchè si può controllare con elevato premio di rischio
${}_{D2}M^{(S)} = 0.02V^-$ capitali sotto rischio negativi (caso vita)
${}_{D3}M^{(S)} = 0.009(C^+ - V^+) + 0.004(C^+ - V^+) + 0.004(C^- - V^-)$

9.4.5 Formula di Ammeter (1970) solo per TCM

$$M^{(S)} = \gamma_1 P + \gamma_2 \overline{C}$$

dove:

- **P**: premi con caricamenti di sicurezza
- $\overline{C}$ capitali medi assicurati
- γ_1 si riduce al crescere del portafoglio
- γ_2 si riduce al crescere del portafoglio

9.4.6 Modello Finlandese (1992 - LASWG)

Si considera la definizione di solvibilità in termini patrimoniali di sintesi in T = 3.
Fissata la probabilità di rovina $\{\varepsilon\}$ si ricava:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\widetilde{M}_3 \geq 0\right\} &= 1 - \varepsilon \\ &= \mathbb{P}\left\{\frac{\widetilde{M}_3 - E[\widetilde{M}_3]}{\sigma(\widetilde{M}_3)} \geq -\frac{E[\widetilde{M}_3]}{\sigma(\widetilde{M}_3)}\right\} \\ &= 1 - \psi\left(-\frac{E[\widetilde{M}_3]}{\sigma(\widetilde{M}_3)}\right)\end{aligned}$$

dove ψ è la funzione di ripartizione della variabile aleatoria $\widetilde{M}_3$ standardizzata ed è invariante rispetto alla distribuzione di $\widetilde{M}_3$
Pertanto fissato $\{\varepsilon\}$, $\varphi^{-1}(\varepsilon)$ è invariante rispetto alla distribuzione di $\widetilde{M}_3$, ovvero possiamo ammettere per tutte le compagnia lo stesso valore del percentile di $\varphi^{-1}(\varepsilon)$
Quindi fissato $\varepsilon = 0.03$ si ha $\varphi^{-1}(\varepsilon) = -1.8$
Considerando l'identità $E[\widetilde{M}_3] = M_0 + [E[\widetilde{M}_0] - M_0]$, se escludiamo apporti di capitale e distribuzioni nel triennio si ha:
$E[\widetilde{M}_3] - M_0 = U_3$ utile nel triennio
$E[\widetilde{M}_3] = M_0 + U_3$
Si ricava:

$$\varphi\left(-\frac{E[\widetilde{M}_3]}{\sigma(\widetilde{M}_3)}\right) = \varepsilon \Longrightarrow \varphi\left(-\frac{M_0 + U_3}{\sigma(\widetilde{M}_3)}\right) \Longrightarrow \frac{M_0 + U_3}{\sigma(\widetilde{M}_3)} = \varphi^{-1}(\varepsilon)$$

$$M_0 = -\varphi^{-1}(\varepsilon)\sigma(\widetilde{M}_3) - U_3$$

dove:

- $\varphi^{-1}(\varepsilon)$ indice di avversione al rischio
- $\sigma(\widetilde{M}_3)$ indice di rischio del portafoglio
- $U_3 = U_3^M + U_3^V + U_3^{D,E}$: utile attivo prodotto nel triennio derivante dall'investimento del capitale proprio e delle riserve matematiche e l'utile demografico e da caricamento per spese

9.4.7 Determinazione analitica del mms

Sia:

$$\mathbb{P}\left\{\widetilde{U}_{t+1} \geq 0 | \widetilde{U}_t = M_t\right\} = 1 - \varepsilon$$

dove: $\widetilde{U}_{t+1}$ riserva di rischio in t+1 ed M_t riserva di rischio nota in t.
Poiché

$$\widetilde{U}_{t+1} = \widetilde{U}_t + UN_{t+1} + \left[\left(\widetilde{YL}_{t+1} + \widetilde{CH}_{t+1}\right) - \widetilde{TX}_{t+1} - \Delta\widetilde{V}_{t+1}\right]$$

Si assume che

$$\begin{aligned} UN_{t+1} = TX_{t+1} = \Delta V_{t+1} = 0 \\ \Delta VB_{t+1} = 0 \end{aligned}$$

Inoltre sia $j_M = E[\widetilde{j}_{t+1} + \widetilde{j}'_{t+1}]$ il tasso atteso di investimento del patrimonio libero
Allora la probabilità di rovina dell'impresa al termine dell'esercizio sarà

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\widetilde{U}_{t+1} = M_t + j_M M_t + \widetilde{Y}_{t+1} + \widetilde{CH}_{t+1} \geq 0\right\} = 1 - \varepsilon \\ \mathbb{P}\left\{(1 + j_M)M_t \geq -\left[\widetilde{Y}_{t+1} + \widetilde{CH}_{t+1}\right]\right\} = 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

Posto: $\widetilde{W}_{t+1} = \widetilde{Y}_{t+1} + \widetilde{CH}_{t+1}$ si ha:

$$\mathbb{P}\left\{-\widetilde{W}_{t+1}(1 + j_M)^{-1} \leq M_t\right\} = 1 - \varepsilon$$

Utilizzando la formula di Wilson-Hilferty si ricava:

$$M_t \simeq (1 + j_M)^{-1} \left\{\left[\left(\frac{1}{c_2}\right)^3 (x_{1-\varepsilon})^3 - c_3\right] \sigma\left(\widetilde{W}_{t+1}\right) - E\left[\widetilde{W}_{t+1}\right]\right\}$$

Con $c_1; c_2; c_3$ coefficiente della formula di Wilson-Hilferty e con $X_{1-\varepsilon}$ quartile di livello 1-ε della normale standard

9.4.8 Il Risk Based Capital System (RBC)

Proposto dal NAIC negli USA nel 1992
Il RBC è il capitale minimo necessario per assicurare la solvibilità dell'impresa, tenendo conto del complesso dei rischio gestiti.
Il NAIC propone una formula di sintesi le cui componenti sono stimati con metodo simultaivo
I rischi considerati sono:

- Rischio di investimento
  - Rischio di performance
  - Rischio di credito
  - Rischio di tasso di interesse
- Rischio demografico
  - Rischio di scarti accidentali
- Rischio di spese e gestione

Rischio di Credito

$$M_1 = \eta_1 \cdot A$$

dove A è il valore del Capitale investito ed η_1 è funzione della composizione e diversificazione degli attivi

Rischio di Tasso di Interesse

$$M_2 = \eta_2 \cdot V$$

dove **V** è la riserva matematica di portafoglio ed η_2 è funzione dei pagamenti per riscatti

Rischio Demografico da Scarti Accidentali

$$M_3 = \eta_3(C^+ - V^+)$$

dove $(C^+ - V^+)$ rappresenta i capitali sotto rischio negativi ed η_3 è funzione della dimensione del portafoglio

Rischio di Spese e Gestione

$$M_4 = 0.02 \cdot P^T$$

dove P^T è il totale dei Premi di Tariffa.
La formula RBC (1992) per il calcolo dell'MMS è

$$M^{(S)} = \sqrt{(M_1 + M_2)^2 + M_3^2} + M_4$$

N.B. Dalla formula si evince che si è omessa la correlazione tra i rischi finanziari ma non tra questi e i rischi demografici

9.4.9 Requisiti di solvibilità tramite indici

Il requisito di solvibilità è espresso di termini di adeguato numero di indici di bilancio con valori appartenenti ad assegnati intervalli definiti normali.
Siano: $\{I_1; I_2; \ldots; I_n\}$ indici selezionati
$\{[a_1, b_1]; [a_2, b_2]; \ldots; [a_n, b_n]\}$ intervalli normali
Fissato $\overline{n} \Rightarrow 0 < \overline{n} < n$ il grado minimo di solvibilità da possedere.
Nell'istante di valutazione della solvibilità, sia r il numero di indici $I; \in [a, b]$, ossia il grado di solvibilità posseduto, allora l'impresa sarà solvibile se

$$r \geq \overline{n}$$

Capitolo 10

Rischio demografico in assicurazioni con capitale sotto rischio positivo

Siano fatte le seguenti ipotesi:

- Polizze tutte monoannuali di puro rischio
- Non si considerano spese e caricamenti
- Tasso di interesse tecnico pari a 0
- Assenza di versamenti di capitale proprio
- Riserve matematiche nulle

Le polizze saranno quindi di questo tipo

$$\widetilde{Y}_h \begin{cases} C_n & per\, q_h \\ 0 & per\, 1 - q_h \end{cases}$$

dove $h = 1; 2; \ldots; n$ si riferisce al singolo contratto.
Per ogni contratto si ha:
$P_h = E[\widetilde{Y}_h] = C \cdot q_h \Rightarrow$ Premio Puro
$\sigma^2(\widetilde{Y}_h) = C_h^2 \cdot q_h(1 - q_h)$
Sia m_h il caricamento di sicurezza si ha:
$P'_h = P_h + m_h$
$\widetilde{X}_h = P'_h - \widetilde{Y}_h \Rightarrow$ Guadagno aleatorio
$E[\widetilde{X}_h] = P'_h - E[\widetilde{Y}_h] = P'_h - P$
$\sigma^2(\widetilde{Y}_h) = \sigma^2(\widetilde{Y}_h)$

Per tutto il portafoglio si ha:

$P = \sum_{h=1}^{n} P$

$P' = \sum_{h=1}^{n} P'_h$

$m = \sum_{h=1}^{n} m$

$\widetilde{Y} = \sum_{h=1}^{n} \widetilde{Y}_h$

$\widetilde{X}_h = \sum_{h=1}^{n} \widetilde{X}_h$

$E[\widetilde{Y}] = \sum_{h=1}^{n} E[\widetilde{Y}_h]$

$E[\widetilde{X}] = \sum_{h=1}^{n} E[\widetilde{X}_h]$

"Ipotesi Speciali":

- Gli esborsi aleatori sono stocasticamente indipendenti.
  Per cui: $\sigma = \sigma(\widetilde{Y}_h) = \sqrt{\sum \sigma^2(\widetilde{Y}_h)} = \sigma(\widetilde{X})$
- Se $\lim_{n\to+\infty} \sigma(\widetilde{Y_h}) << \sigma$ allora
  $\widetilde{Y} \simeq N(P;\sigma)$
  $\widetilde{X} \simeq N(m;\sigma)$

10.1 Indicatori di Rischiosità

10.1.1 Varianza di $\widetilde{Y}$

Sia la varianza di $\widetilde{Y}$

$$\sigma^2 = \sigma^2(\widetilde{Y}) = \sigma^2(\widetilde{X}\, se\, indipendenti) = \sum_{h=1}^{n} \sigma^2(\widetilde{X}_h) = \sum_{h=1}^{n} C_{h=1}^2 C^2 q_h(1-q_h)$$

Se gli assicurati sono omogenei si ha $q_h = q$ da cui:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= q(1-q)\sum C_h^2 = q(1-q)n \cdot E[C^2] \\ &= n \cdot q(1-q)(\sigma^2(C) + E[C]^2)\end{aligned}$$

Più contratti ci sono nel portafoglio più aumenta il rischio.
Per massimizzare σ^2 posso lavorare sulla distribuzione di capitali; se i capitali fossero uniformi $\sigma^2(C)$ scende

10.1.2 Indice di Rischio

Definizione dell'indice di rischio

Si consideri l'evento rovina: $\left\{\widetilde{Y} > P + m\right\}$
Si vuole che $\mathbb{P}\left\{\widetilde{Y} > P + m\right\} = \varepsilon$
Si consideri la seguente legge di caricamento:

$$m = \mu \cdot \sigma \qquad \mu > 0$$

Per ricavare μ

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \mathbb{P}\left\{\widetilde{Y} > P + \mu \cdot \sigma\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\widetilde{Y} - P}{\sigma} > \mu\right\} = 1 - \varphi(\mu) \\ &= 1 - \varphi\left(\frac{m}{\sigma}\right) = \varepsilon\end{aligned}$$

Usando le "ipotesi speciali" abbiamo $\varphi(\mu) \sim N(0;1)$ da cui:

$$\varepsilon = 1 - \varphi(\mu) \Rightarrow \mu = \varphi^{-1}(1-\varepsilon)$$

Il caricamento globale è ripartita ad ogni polizza tramite la funzione "indice di fluttuazione":

$$f(\mu) = \frac{m}{p} = \mu\frac{\sigma}{p} \Rightarrow m_h = f(\mu)P_h \Rightarrow m = \sum_{h=1}^{n} m_h = \sum_{h=1}^{n} f(\mu)P_h$$

Più grande è $f(\mu)$ maggiore è la capacità di assorbire, mediante il caricamento di sicurezza **m**, le fluttuazioni accidentali della mortalità.
$\dfrac{\sigma}{P}$ è detto indice di rischio del portafoglio

Analisi della rischiosità

Primo caso Siano considerati rischi qualitativamente omogenei $q_h = q$ allora $E[\widetilde{Y}] = P = q \cdot \sum C_h$

$$\sigma = \sqrt{q(1-q)\sum C_h^2}\frac{\sigma}{P} = \sqrt{\frac{1-q}{q}} - \frac{\sqrt{\sum C_h^2}}{\sum C_h} = \sqrt{\frac{1-q}{q}} \cdot \frac{\sqrt{n \cdot E[C_h^2]}}{n \cdot E[C_h]}$$

Nel caso di rischi qualitativamente omogenei ma non quantitativamente, e se un capitale diverge molto dagli altri (es. tutti capitali da 10 e uno da 100k), il rapporto $\frac{\sqrt{\sum C_h^2}}{\sum C_h}$ tende a 1; si perde il fattore dimensione.
Non posso dire che con $\frac{\sigma}{P}$ al crescere del portafoglio il rischio si riduce

Secondo caso
Siano $q_h = q$ e $C_h = C$

$$\widetilde{Y} = \begin{cases} 0;\ 2C;\ \ldots;\ nC \\ \mathbb{P}\{k\} = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \end{cases}$$

allora
$E[\widetilde{Y}] = P = n \cdot C \cdot q$ e
$\sigma(\widetilde{Y}) = \sigma = C\sqrt{n \cdot q(1-q)}$

$$\frac{\sigma}{P} = \sqrt{\frac{1-q}{n \cdot q}} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\sigma}{P} = 0$$

Rischio Pooling: all'aumentare del portafoglio il rischio decresce

10.1.3 Probabilità di Rovina

Sia M la riserva libera della compagnia
L'evento sarà $\mathbb{P}\left\{\widetilde{Y} > P + m + M\right\}$
si fissa $\mathbb{P}\left\{\widetilde{Y} > P + m + M\right\} > \varepsilon'$

$$\varepsilon' = \mathbb{P}\left\{\widetilde{Y} > P + m + M\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\widetilde{Y} + P}{\sigma} > \frac{M + m}{\sigma}\right\} = 1 - \varphi\left(\frac{M + m}{\sigma}\right)$$

$$\varepsilon' = 1 - \varphi(S) \Rightarrow S = \varphi^{-1}(1 - \varepsilon')$$

dove $\dfrac{M + m}{\sigma} = S$ è detto indice di stabilità relativa del portafoglio
M, m e σ sono dette variabili strategiche della compagnia

$$\varphi(S) = 1 - S' \Rightarrow \frac{M + m}{\sigma} = \varphi^{-1}(1 - \varepsilon) \Rightarrow M = \varphi^{-1}(1 - \varepsilon)\sigma - m$$

Il livello di patrimonio minimo da possedere per avere un livello di rovina massimo pari a ε' è funzione del livello di rischio di portafoglio (se il portafoglio è molto aleatorio, quindi σ è molto grande, allora il patrimonio deve essere elevato), livello di rischio ponderato per un coefficiente di avversione al rischio (più si è avversi al rischio, maggiore è il valore del coefficiente) e dell'aspettativa di guadagno del portafoglio m (maggiore è l'aspettativa di guadagno a fine anno, minore è la necessità di patrimonio per coprire il rischio).
Il livello di patrimonio dipende dal portafoglio gestito (σ), dall'aspettativa di guadagno (m) e dipende dall'avversione al rischio attraverso il coefficiente $\varphi^{-1}(1 - \varepsilon)$ imposto dall'autorità di controllo.
Per avere un basso livello di rovina ε' è necessario aumentare il patrimonio o diventare meno competitivi aumentando i caricamenti e quindi i premi oppure ridurre σ ricorrendo alla riassicurazione (la riassicurazione ha sì un'effetto sul σ perchè si trasferiscono i rischi, ma anche sui caricamenti perchè si deve cedere anche una parte di patrimonio) o facendo una selezione dei rischi.

10.2 Disuguaglianze di Cantelli (1911)

Per la variabile aleatoria $\widetilde{Y}$ con $P = E[\widetilde{Y}]$ e $\sigma = \sigma(\widetilde{Y})$ si ha per la disuguaglianza di Tchebycheff

$$\mathbb{P}\left\{\left|\widetilde{Y} - P\right| \geq t\sigma\right\} \leq \frac{1}{t^2} \quad con \quad t > 0$$

Per Cantelli, limito il valore assoluto ottenendo

$$\mathbb{P}\left\{\tilde{Y} - P \geq t\sigma\right\} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

sostituisco $t\sigma = M + m \Rightarrow t = \dfrac{M+m}{\sigma} = S$ ottenendo

$$\mathbb{P}\left\{\tilde{Y} \geq P + M + m\right\} \leq \frac{1}{1+S^2}$$

Capitolo 11

Riassicurazione

Oggetto

Attività importante con la quale la compagnia cede una porzione dei propri rischi ad un'altra compagnia. Riduce le alee di portafoglio.
L'assicurazione p un *lavoro diretto* mentre la riassicurazione è un *lavoro indiretto*

Parti

La compagnia **cedente** da a compgnia **cessionaria** o **riassicuratrice**
La riassicurazione è attiva dal punto di vista del cesionario e passiva dal punto di vista del cedente.
Le compagnie che operano solo nel mercato riassicurativo sono dette *Riassicuratori professionali.*

Rapporti

I rapporti di riassicurazione possono essere

- facoltativo/facoltativo
- obbligatoria/facoltativo
- facoltativo/obbligatorio (facob)

gli ultimi due sono regolati dagli appositi trattati di rassicurazione.
Ci sono dei trattati stipulati tra le compagnia per cui tramite la riassicurazione si cercano di cedere vicendevolmente i rischi in modo tale da avere un portafoglio omogeneo. Questi trattati sono detti **Trattati di Reciprocità**
Il riassicuratore può porre nei limiti nel risarcimento

Scopi

- Riduzione delle alee di portafoglio
- Finanziamento della produzione della cedente
- Riduzione dell'MMS
- Assistenza tecnica che la compagnia cedente può ricevere in fase di progettazione di nuovi prodotti

Forma

Posso riassicurare l'intero portafoglio, sotto-portafoglio o per singolo contratto
Le forme riassicurative possono essere Proporzionali, Non proporzionali e Miste

11.1 Analisi

Siano $\left\{\widetilde{Y}_1; \widetilde{Y}_2; \ldots ; \widetilde{Y}_n\right\}$ v.a. esborsi delle polizze
La riassicurazione è una funzione che trasforma la funzione di probabilità dell'esborso di ogni contratto in una nuoca funzione di probabilità

$$g(h) : \widetilde{Y}_h = \begin{cases} \widetilde{Y}_h' \Rightarrow \ Esborso\ conservato \\ \widetilde{Y}_h'' = \widetilde{Y}_h - \widetilde{Y}_h' \Rightarrow \ Esborso\ ceduto \end{cases}$$

11.2 Forme proporzionali

Si realizza una ripartizione proporzionale o del **capitale assicurato** o del **capitale sotto rischio**
Possono essere definiti o per singolo contratto o per portafogli di contratti dello stesso tipo
La forma riassicurativa è detta *Strategia Riassicurativa*
Si definisce l'n-pla $\overline{a} : (a_1; a_2; \ldots ; a_n)$ dove $\overline{a}$ è la politica riassicurativa e $0 \leq a_h \leq 1$ sono le diverse aliquote di conservazione del rischio.

$$se\ a_h \neq a_j \Longrightarrow \ Politica\ quota\ individuale$$
$$se\ a_h = a_j \Longrightarrow \ Politica\ quota\ unica\ (quota\ share)$$

11.2.1 Riassicurazione a Premio di Rischio

Consideriamo un singolo contratto con:
C: capitale assicurato
V_t: tasso di riserva matematica Pura
a_t: aliquota conservata

$$Quota\ conservata = (1 - V_t)C \cdot a_t$$
$$Quota\ ceduta = (1 - V_t)C \cdot (1 - a_t)$$

Premio di riassicurazione

$$g(h) = \begin{cases} (1 + a_t)C(1 - V_t) \\ q'_{x+t} \end{cases}$$

dove q'_{x+t} può essere diversa dalla base tecnica di primo ordine

11.3 Determinazione di a_t

Sia:

- Capitale conservato: C^{cons}
- Capitale riassicurato: $R = C - C^{cons}$

11.3.1 Modalità RRM (reducing rethention method)

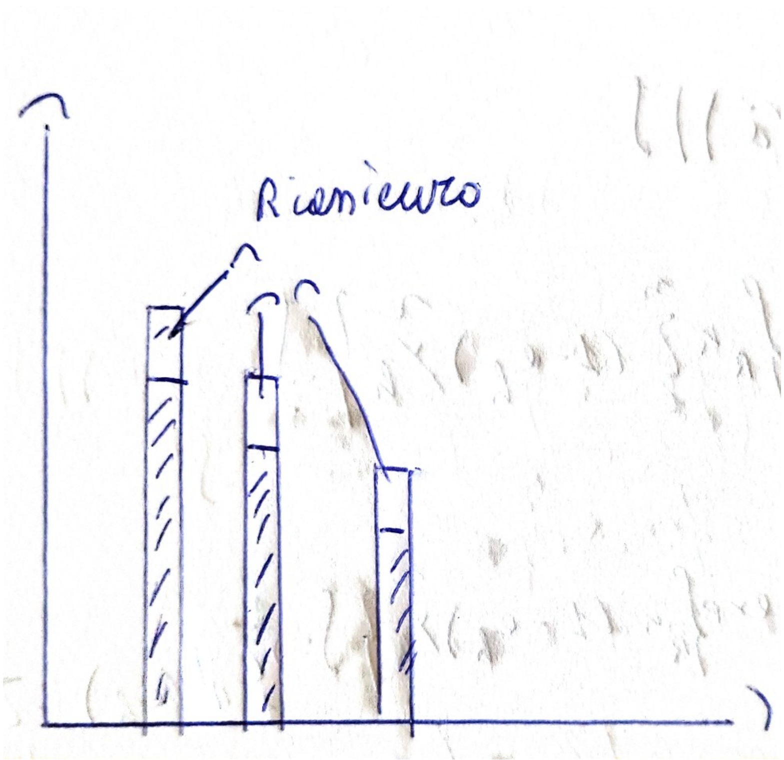
Siano:

- $R(1 - V_t)$: capitale sotto rischio riassicurato
- $C(1 - V_t) - R(1 - V_t) = C^{cons}(1 - V_t)$: capitale sotto rischio conservato

L'aliquota di conservazione è così definita:

$$a_t \cdot C(1 - V_t) = C^{cons}(1 - V_t) \Rightarrow a_t = \frac{C^{cons}}{C}$$

metodo non troppo efficiente



11.3.2 Modalità CRM (Constant Rethention Method)

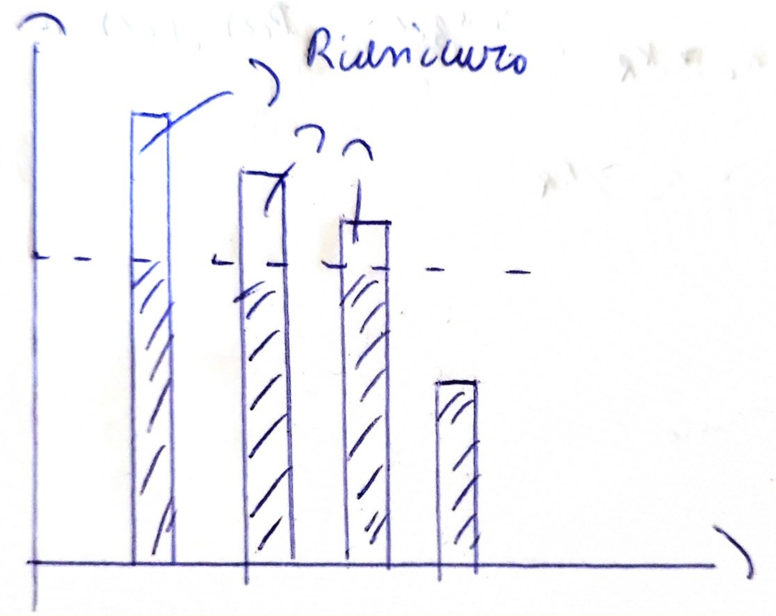
Capitale sotto rischio riassicurato: $max\left\{R - C \cdot V_t; 0\right\}$

Capitale S-R conservato: $C(1-V_t) \cdot max\left\{R - C \cdot V_t; 0\right\} = \begin{cases} C^{cons} & se \quad R - C \cdot V_t > 0 \\ C(1 - V_t) & se \quad R - C \cdot V_t \leq 0 \end{cases}$

L'aliquota di conservazione diventa:

$$a_t = min\left\{\frac{C^{cons}}{C(1 - V_t)}; 1\right\}$$

Questo metodo rende uniformi i capitali sotto rischio ed è più efficace per la riduzione del rischio demografico



11.4 Riassicurazione a Premio Commerciale

Ripartizione di tutte le componenti contrattuali. Questo implica che oltre al rischio trasferisco parte degli utili. In questo caso il riassicuratore paga anche delle "provvigioni" alla cedente

11.5 Forme non proporzionali

11.5.1 Stop Loss (per tutto il portafoglio)

L'obiettivo è limitare le perdite della gestione del portafoglio Siano:

- $\widetilde{L} = \widetilde{Y} - P'$: perdita aleatoria
- π: Premio di riassicurazione
- H: Priorità globale

Dopo la riassicurazione la perdita è così ripartita:
Perdita Cedente: $min\left\{\widetilde{L} + \pi; H\right\}$
Perdita Riassicuratore: $max\left\{\widetilde{L} - H; 0\right\}$
con probabilità di intervento: $\mathbb{P}\left\{\widetilde{L} + \pi > H\right\}$

11.5.2 Excess of Loss (o XL) (per singolo sinistro)

Sia la priorità individuale: $\widetilde{h} = (h_1; \ldots; h_n)$
L'esborso sarà così ripartito:
Cedente: $min\left\{\widetilde{Y}_j; h_j\right\}$
Riassicuratore: $max\left\{\widetilde{Y}_j - h_j; 0\right\}$

11.5.3 Eccedenti somma (Surplus) individuale per vita

Sia C^{cons} La somma minima che la cedente è disposta a conservare a suo carico, tenendo conto delle sue condizioni patrimoniali e del livello di rovina massimo accettabile. Si definisce **Pieno di Conservazione**
L'esborso sarà così ripartito:
Cedente: $min\left\{C_j; C^{cons}\right\}$
Riassicuratore: $max\left\{C_j - C^{cons}\right\}$
In termini di aliquota si ha:

$$a_j = \frac{min\left\{C_j; C^{cons}\right\}}{C_j} = min\left\{\frac{C^{cons}}{C_j}; 1\right\}$$

Con questo metodo si hha un livellamento dei capitali assicurati

Surplus collettivo

Siano

- $n = 1$ un singolo contratto collettivo
- N_a: numero assicurati
- C: capitali individuali
- N_aC: capitale complessivo

Si definisce il Pieno: $Y^* = N_c \cdot C$ con $N_c < N_a$ ovvero si stabilisce il numero massimo di teste che posso risarcire.
Sia N il numero di sinistrati si ha:

$$N_{Riass} = max\left\{N - N_c; 0\right\}$$

se $Y = N \cdot C$ esborso complessivo, viene così ripartito
cedente: $\left(\frac{Y^*}{N_a \cdot C}\right) N \cdot C = \frac{N_c \cdot C}{N_a \cdot C} = \frac{N_c}{N_a} \cdot N \cdot C = a \cdot Y$

Riassicuratore: $(1 - a)Y$

11.6 Forme miste

11.6.1 Combinazione tra XL e globale

Conservata: $\widetilde{Y}_j^* = \begin{cases} \widetilde{Y}_j & se \quad \widetilde{Y} \leq h_j \\ h_j + a(\widetilde{Y} - h_j) & se \quad \widetilde{Y}_j > h_j \end{cases}$
Responsabilizza la cedente

11.6.2 Surplus + Globale

Conservata: $C_j' = min\,\{a \cdot C_j; C^{cons}\}$

11.7 Effetti della Riassicurazione

La riassicurazione influisce sulla solvibilità del portafoglio $S = \dfrac{M+m}{\sigma}$ e sulla probabilità di rovina.
Siano.

$$\widetilde{Y} = \sum_{h=1}^{n} \widetilde{Y}_h \qquad \widetilde{Y}_h = \begin{cases} C_h \; per \; q_h \\ 0 \; per \; 1 - q_h \end{cases}$$

In riassicurazione proporzionale $\widetilde{a} = a \quad \forall h$

$\widetilde{Y}_h^* = \widetilde{Y}_h \cdot a = \begin{cases} a \cdot C_h \; per \; q_h \\ 0 \; per \; 1 - q_h \end{cases}$

$\sigma^2(\widetilde{Y}) = a^2 \sigma^2(\widetilde{Y}_h) = a^2 \sigma^2(\widetilde{X}_h^*) < \sigma^2(\widetilde{X}_h)$
e per tutto il portafoglio si ha: $\sigma^2(\widetilde{X}^*) = \sum_{h=1}^{n} \sigma^2(\widetilde{X}_h^*) = a^2 \sigma^2(\widetilde{X})$
con $\sigma^2(\widetilde{X}^*) \leq \sigma^2(\widetilde{X}) \Longrightarrow \sigma(\widetilde{X}^*) = \sigma(a) \leq \sigma(\widetilde{X}) = \sigma$
Inoltre si ha $\widetilde{X}^* = \sum_{h=1}^{n} \left[P_h' \cdot a - \widetilde{Y}_h \cdot a\right] = a \cdot \widetilde{X}$
$E\left[\widetilde{X}^*\right] = a \cdot E[\widetilde{X}] \Rightarrow E[\widetilde{X}^*] \leq E[\widetilde{X}] \Rightarrow m(a) \leq m$
Occorre impostare un problema di ottimizzazione per ottenere:

$$S^* = \frac{M + m(a)}{\sigma(a)} \geq S = \frac{M+m}{\sigma}$$

11.8 Problema dei Pieni

Ogni compagnia è esposta alle fluttuazioni che riguardano l'andamento dei rischi assunti, le conseguenze di queste fluttuazioni si manifestano sugli equilibri di gestione. Per ridurre le fluttuazioni a livelli accettabili, la compagnia si riassicura, cioè acquista sicurezza trasferendo ad altri portatori porzioni dei propri rischi. Lo scopo della riassicurazione è la trasformazione della funzione di ripartizione dei rischi assicurati al fine di accrescere la sicurezza e la stabilità della compagnia.
Esistono infiniti modi per trasformare la funzione di ripartizione dei rischi gestiti dalla cedente. Si deve definire una strategia efficiente in modo da ridurre i rischi entro i limiti dovuti, con la minima riduzione di guadagno atteso.
Si risolve il seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{array}{lrl} \max\limits_{\overline{a},\overline{h}} & \varphi[w(\overline{a};\overline{h})] & \\ \text{s.v.} & f^{(S)}(\overline{a};\overline{h}) \leq b_S, & S = 1, 2, \dots, m \\ & 0 \leq a_i \leq 1 & i = 1, 2, \dots, n \\ & 0 \leq h_i & i = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

11.9 Problema di Bruno de Finetti

Obiettivo: Minimizzazare la probabilità di rovina entro l'esercizio
Vincolo: guadagno trasferito al riassicuratore
Il problema si compone di due stadi:

- Nel primo stadio vengono determinati i Pieni Relativi
- Nel secondo stadio vengono date delle determinazioni numeriche ai Pieni

11.9.1 Problema di Ottimizzazione (de Finetti)

Viene scelta una riassicurazione proporzionale individuale

$$\begin{aligned} \min_{\overline{a}} \quad & \mathbb{P}\left\{\widetilde{Y}(\overline{a}) > P(\overline{a}) + m(\overline{a}) + M\right\} \\ \text{s.v} \quad & m - m(\overline{a}) = K \\ & 0 \leq a_j \leq 1 \end{aligned}$$

dove:

$$\widetilde{Y}(\overline{a}) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{Y}_j(a_j \sum_{j=1}^{n} a_j - \widetilde{Y}_j$$

$$P(\overline{a}) = \sum_{j=1}^{n} a_j P_j$$

$$m(\overline{a}) = m - K = \sum_{j=1}^{n} m_j - \sum_{j=1}^{n} (1 - a_j K_j)$$

$$K = \sum (1 - a_j) K_j \qquad \textit{con} \qquad K \in \left[0; \sum_{j=1}^{n} K_j\right]$$

$$K_j ><= m_j$$

$$K_j = m_j - \gamma_j \leq m_j$$

I°stadio

Si definisce l'n-pla quota di conservazione

$$\overline{a}^* = \bigg(a_1(K); \ldots ; a_n(K)\bigg)$$

Se le $\widetilde{Y}$ sono stocasticamente indipendenti si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\widetilde{Y}(\overline{a}) > P(\overline{a}) + m(\overline{a}) + M\right\} &= \mathbb{P}\left\{\frac{\widetilde{Y}(\overline{a}) - P(\overline{a})}{\sigma(\overline{a})} > \frac{M + m(\overline{a})}{\sigma(\overline{a})}\right\} \\ &= 1 - \varphi\left(\frac{M + m(\overline{a})}{\sigma(\overline{a})}\right) = 1 - \varphi\bigg(S(\overline{a})\bigg) \end{aligned}$$

L'obiettivo quindi diventa

$$\min_{(\overline{a})} \left[1 - \varphi\bigg(S(\overline{a})\bigg)\right] \Rightarrow \min_{(\overline{a})} \sigma^2(\overline{a}) \Rightarrow \min_{(\overline{a})} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma_j^2$$

Per cui il problema di ottimizzazione diventa

$$\begin{array}{cc}
\min\limits_{(\overline{a})} & \sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma_j^2 \\
\text{s.v} & \sum\limits_{i=1}^{n} (1-a_j) K_j = K \\
 & 0 \leq a_j \leq 1 \qquad \forall i \in [1; n]
\end{array}$$

Risolvo il lagrangiano:

$$F(a_1; a_2; \ldots; a_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \sigma_j^2 + 2A \left[\sum_{j=1}^{n} (1-a_j) K_j - K \right]$$

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}a_j} = 0 \ \forall j \Rightarrow a_j = A \frac{K_j}{\sigma_j^2} \Rightarrow a_j \cdot K = A \frac{K_j^2}{\sigma_j^2}$$

dove K_j è il costo della riassicurazione
A questo punto ho n equazioni. Il totale diventa

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot K_j = A \sum_{j=1}^{n} \frac{K_j^2}{\sigma_j^2} = \sum_{j}^{n} K_j - K$$

Per cui si ha:

$$A = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} K_j - K}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{K_j^2}{\sigma_j^2}} \geq 0$$

Quindi a_j dipenderà dalla distribuzione del rischio e dal costo di riassicurazione.
a_j cresce se A_j cresce, k_j cresce, σ_j^2 decresce e K decresce.
La formula $a_j = A \frac{k_j}{\sigma_j^2}$ è coerente con l'obiettivo e il vincolo. Infatti se consideriamo:

- $$a_1 = A \frac{k_1}{\sigma_1^2} \ e \ a_2 = A \frac{k_2}{\sigma_2^2} \ con \ k_1 = k_2 \ e \ \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

  si avrà:

  $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} > 1 \Longrightarrow a_1 > a_2$$

  conservo maggiormente il contratto meno rischioso.

- Se: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ e $k_1 < k_2$ allora:

  $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{k_1}{k_2} < 1 \Longrightarrow a_1 < a_2$$

  conservo meno del contratto che costa meno riassicurare

Vincolo di contingenza

Si aggiunge un nuovo parametro $B = \frac{\sum_{j=1}^{j_B} K_j - K}{\sum_{j=1}^{j_B} \frac{K_j^2}{\sigma_j^2}}$ per cui:

$$a_j^* = \min\left\{B\frac{K_j}{\sigma_j^2};1\right\}$$

dove j_B è il massimo indice per cui risulta $B\frac{K_j}{\sigma_j^2} \leq 1$

Si ordinano i rischi in questo modo $\frac{K_1}{\sigma_1^2} \leq \cdots \leq \frac{K_n}{\sigma_n^2}$ per cui si ha:

$$\sum_{j=1}^{n} (1-a_j) K_j = \sum_{j=1}^{n} K_j - \sum_{j=1}^{n} a_j K_j = \sum_{j=1}^{n} K_j - B\sum_{j=1}^{j_B} \frac{K_j^2}{\sigma_j^2} - \sum_{j=j_B+1}^{n} K_j = \sum_{j=1}^{j_B} K_j - B\sum_{j=1}^{j_B} \frac{K_j^2}{\sigma_j^2} = K$$

$$B = \frac{\sum_{j=1}^{j_B} K_j - K}{\sum_{j=1}^{j_B} \frac{K_j^2}{\sigma_j^2}} \quad B = A \; se \; j_B = n$$

II°stadio

Determinazione dei valori numerici delle aliquote di conservazione
Si pone B tale che:

$$1-\varphi\Bigg(S(\overline{a})\Bigg)=\varepsilon \Rightarrow S(\overline{a})=\varphi^{-1}\left(1-\varepsilon\right)=S'$$

Da S' si ricava B^*

$$S'=\frac{M+m(\overline{a})}{\sigma^2(\overline{a})}=\frac{M+m-\sum_{j=1}^{j_B}\left(1-a_j\right)K_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{j_B}a_j^2\sigma_j^2}}=\frac{M+m-\sum_{j=1}^{j_B}K_j+B\sum_{j=1}^{j_B}\frac{K_j^2}{\sigma_j^2}}{\sqrt{B^2\sum_{j=1}^{j_B}\frac{K_j^2}{\sigma_j^2}+\sum_{j=j_B+1}^{n}\sigma_j^2}}$$

ottenuto B si ricavano i valori numerici delle aliquote di conservazione:

$$a_j^*=\min\left\{B^*\cdot\frac{K_j}{\sigma_j^2};1\right\}$$

11.9.2 Applicazione di De Finetti in Surplus

Sia $q_h=q$; allora $\sigma^2=q(1-q)C_j^2$
sia $k_j=\alpha\cdot C_j$
L'ipotesi è verificata quando:

- $m_j=\beta\cdot P_j=(\beta\cdot q)C_j$
- $m_j=k_j$

fissato β risulta:

$$a_j=\min\left\{\beta\frac{\alpha\cdot C_j}{q(1-q)C_j^2};1\right\}=\min\left\{\beta\frac{\alpha}{q(1-q)}\frac{1}{C_j};1\right\}=\min\left\{\frac{C^{(cons)}}{C_j};1\right\}$$

con $C^{(cons)}=\dfrac{\beta\alpha}{q(1-q)}$
Il pieno conservato quindi diventa:

$$a_j\cdot C_j=\min\left\{\beta\frac{\alpha}{q(1-q);C_j}\right\}=\min\left\{C^{(cons)};C_j\right\}$$

11.10 Problema di Karl Borch

Si usa il criterio dell'utilità attesa: è scelta la politica di conservazione per la quale è massima l'utilità attesa della situazione patrimoniale dopo la riassicurazione

$$\begin{aligned} \max_{(\overline{a})} \quad & E[u_C(M_C + \widetilde{X}(\overline{a}))] \\ \text{s.v} \quad E[u_C(M_C + \widetilde{X})] \leq & E[u_C(M_C + \widetilde{X}(\overline{a}))] \\ & 0 \leq a_j \leq 1 \end{aligned}$$

con $\widetilde{X}(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n}[P'_h - {}_RP(a_j) - a_j\widetilde{Y}_j]$
con μ_C funzione di utilità attesa
e ${}_RP$ è il premio di riassicurazione
La politica di riassicurazione orrimale conduce ad una situazione patrimoniale cui la cedente attribuisce utilità attesa non minore di quella attribuita alla sua situazione patrimoniale iniziale

Esempio

Se $u_C(M + \widetilde{X}) = u_C(M) + \widetilde{X} - \dfrac{\widetilde{X}^2}{2a}$
Si ha $\dfrac{\partial u_C(\widetilde{X})}{\partial X} = u'(\widetilde{X}) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 u_C(\widetilde{X})}{\partial X^2} = u''(\widetilde{X}) < 0$
Sia r_C il coefficiente di avversione al rischio di Arrow Pratt si ha

$$r_C(\widetilde{X}) = -\frac{u''_C(\widetilde{X})}{u'_C(\widetilde{X})} = \frac{1}{a - X}$$

da cui:

$$E[u_C(M_C + \widetilde{X})] = u_C(M_C) + E[\widetilde{X}] - \frac{E[\widetilde{X}^2]}{2a} = u_C(M_C) + E[\widetilde{X}] - \frac{\sigma^2(\widetilde{X}) + E[\widetilde{X}]^2}{2a}$$

Se la funzione di utilità è di tipo quadratico allora Borch e de Finetti coincidono

Tornando al problema principale, se:

1. $u_c(X) = \frac{1}{k_C}\left(1 - e^{-k_C X}\right)$ funzione esponenziale negativa con k_C coefficiente di avversione al rischio

2. $\widetilde{X} \sim N(E[\widetilde{X}_j]; \sigma^2(\widetilde{X}_j))$ ovvero c'è simmetria informativa

3. ${}_RP(a_j) = (1 - a_j)(1 + \mu_j)E[\widetilde{X}_j]$

allora:

$$a_j^* = \begin{cases} \frac{\eta_j E[\widetilde{X}_j]}{k_C \sigma^2(\widetilde{X}_j)} & se\ \eta_j = \frac{E[\widetilde{X}_j]}{\sigma^2(\widetilde{X}_j)} < k_C \\ 1 & se\ altrimenti \end{cases}$$

Da cui risulta:
a_j^* cresce se:

- μ_j cresce
- k_C decresce
- $E[\widetilde{X}_j]$ cresce
- $\sigma^2(\widetilde{X}_j)$ decresce

11.10.1 Borch lato riassicuratore

Il problema di massimo è il seguente

$$\begin{aligned} \max_{\overline{a}} \quad & E[u_R(M_R + \widetilde{X}_R(\overline{a}))] \\ \text{s.v.} \quad & u_R(M_R) \leq E[u_R(M_R + \widetilde{X}_R(\overline{a}))] \\ & 0 \leq a_j \leq 1 \quad con\ j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Con $\widetilde{X}_R(\overline{a}) = \sum_{i=1}^{n} \left[{}_MP(a_j) - (1 - a_j)\widetilde{Y}_j\right]$
Assumendo la simmetria informativa tra cedente e riassicuratore, quindi vengono riprese le ipotesi 2 e 3 e assumendo che:

$$u_R(x) = \frac{1}{k_R}\left(1 - e^{-k_R x}\right)$$

dove k_R è il coefficiente di avversione al rischio del riassicuratore.
Si dimostra che le aliquote di conservazione ottimali, secondo il punto di vista del

riassicuratore, devono essere:

$$a_j^{**} = \begin{cases} 1 - \dfrac{u_j E[\widetilde{X}_j]}{k_R \sigma^2(\widetilde{X}_j)} & se\ k_R > u_j \dfrac{E[\widetilde{X}_j]}{\sigma^2(\widetilde{X}_j)} \\ 0 & se\ altrimenti \end{cases}$$

Da cui risulta che:
a_j^{**} cresce se:

- u_j decresce
- k_R cresce
- $E[\widetilde{X}_j]$ decresce
- $\sigma^2(\widetilde{X}_j)$ cresce

11.11 Problema con vincoli bilaterali

$$\begin{aligned} \max_{\overline{a}} \quad & E\left[u_C(M_C \widetilde{X}(\overline{a}))\right] \\ \text{s.v.} \quad & E[u_C(M_C + \widetilde{X})] \leq E[u_C(M_C + \widetilde{X}(\overline{a}))] \\ & u_R(M_a) \leq E[u_R(M_R + \widetilde{X}_R(\overline{a}))] \\ & 0 \leq a_j \leq 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

I due vincoli significativi, insieme alla relazione di uguaglianza, definiscono i premi di indifferenza delle parti.
I premi di indifferenza definiscono l'intervallo entro il quale il "Prezzo" riassicurativo può variare rispettando le condizioni di non-decremento delle utilità attese delle due parti del trattato.

11.11.1 Premio di indifferenza della cedente

Sia $G = M_C$ si ha:

$$E[u_C(G + \widetilde{X}(I))] \leq E[u_C(G + \widetilde{X}(\overline{a}))]$$

$$E\left[u_C\left(G + \sum_{h=1}^{n}\left(P\grave{\imath}_h - \widetilde{Y}_h\right)\right)\right] \leq E\left[u_C\left(G + \sum_{h=1}^{n}\left(P'_{hM}P(a_h) - a_h\widetilde{Y}_h\right)\right)\right]$$

$$E\left[\frac{1}{K_C}\left(1 - e^{C^K\left(G + \sum(P\grave{\imath}_h - \widetilde{Y}_h)\right)}\right)\right] \leq E\left[\frac{1}{K_C}\left(1 - e^{C^K\left(G + \sum\left(P'_h - {}_M P(a_h) - a_h\widetilde{Y}_h\right)\right)}\right)\right]$$

$$\frac{1}{K_C} - \frac{e^{\left({}_CK\left(G+\sum P'_h\right)\right)}}{{}_CK} E\left[e^{\left({}_CK\sum \widetilde{Y}\right)}\right] \leq \frac{1}{K_C} -$$
$$-\frac{e^{\left({}_CK\left(G+\sum P'_h\right)\right)}}{{}_CK} e^{\left({}_CK\sum {}_MP(a_h)\right)} E\left[e^{\left({}_CK\sum a_h\widetilde{Y}_h\right)}\right]$$

$$E\left[e^{\left({}_CK\sum \widetilde{Y}_h\right)}\right] \geq e^{\left({}_CK\sum {}_MP(a_h)\right)} \cdot E\left[e^{\left({}_CK\sum a_h\widetilde{Y}_h\right)}\right]$$

$$E^{\left({}_CK\sum {}_MP(a_h)\right)} \leq \frac{E\left[e^{\left({}_CK\sum \widetilde{Y}_h\right)}\right]}{E\left[e^{\left({}_CK\sum a_h\widetilde{Y}_h\right)}\right]}$$

$$\sum_{h=1}^{n} {}_MP(a_h) \leq \frac{1}{{}_CK} \ln \frac{E\left[e^{\left({}_CK\sum \widetilde{Y}_h\right)}\right]}{E\left[e^{\left({}_CK\sum a_h\widetilde{Y}_h\right)}\right]}$$

Poichè le $\widetilde{Y}_h$ sono stocasticamente indipendenti si ha:

$$\sum_{h=1}^{n} {}_MP(a_h) \leq \frac{1}{{}_CK} \ln \frac{E\left[e^{\left({}_CK\widetilde{Y}_1\right)}\right] \ldots E\left[e^{\left({}_CK\widetilde{Y}_n\right)}\right]}{E\left[e^{\left({}_CKa_1\widetilde{Y}_1\right)}\right] \ldots E\left[e^{\left({}_CK\widetilde{a}_nY_n\right)}\right]}$$

$$\sum_{h=1}^{n} {}_MP(a_h) \leq \frac{1}{{}_CK} \ln \frac{E\left[e^{\left({}_CK\widetilde{Y}_h\right)}\right]}{E\left[e^{\left({}_CK\widetilde{a}_hY_h\right)}\right]}$$

Posto:

$${}_CP(a_h) = \frac{1}{{}_CK} \ln \frac{E\left[e^{\left({}_CK\widetilde{Y}_h\right)}\right]}{E\left[e^{\left({}_CK\widetilde{a}_hY_h\right)}\right]}$$

Si ha:

$$\sum_{h=1}^{n} {}_MP(a_h) \leq \sum_{h=1}^{n} {}_CP(a_h)$$
$$\sum \left[{}_CP(a_h) - {}_MP(a_h)\right] \geq 0 \quad \textit{vincolo Cedente}$$

${}_CP(a_h)$ è il Prezzo massimo pagabile dalla cedente per cedere in riassicurazione la porzione di rischio $(1-a_h)\widetilde{Y}_h$. È funzione dell'avversione al rischio della cedente

e della distribuzione di probabilità del rischio.
Risulta:

$$ {}_CP(a_h) = (1-a_h)E[\widetilde{Y}] + \frac{1}{2}K_C\sigma^2(\widetilde{Y}_h)(1-a_h^2) \quad se \quad \widetilde{Y}_h \sim N(E[\widetilde{Y}_h];\sigma^2(\widetilde{Y}_h)) $$

11.11.2 Premio di indifferenza Riassicuratore

$$ \begin{aligned} M_R(G_R) &\leq E[e_R(G_R+\widetilde{X}_R(\overline{a}))] \\ \frac{1}{{}_RK}\left(1-e^{({}_RKG_R)}\right) &\leq E\left[\frac{1}{{}_RK}\left(1-e^{\left(-{}_RK\left(G_R+\sum_{h=1}^{n}\left({}_MP(a_h)-(1-a_h)\widetilde{Y}_h\right)\right)\right)}\right)\right] \\ \frac{1}{{}_RK}-\frac{e^{(-{}_RKG_R)}}{{}_RK} &\leq \frac{1}{{}_RK}-\frac{e^{(-{}_RKG_R)}}{{}_RK}E\left[e^{\left(-{}_RK\sum\left({}_MP(a_h)-(1-a_h)\widetilde{Y}_h\right)\right)}\right] \\ 1 &\geq e^{\left(-{}_RK\sum({}_MP(a_h))\right)}E\left[e^{\left({}_RK\sum(1-a_h)\widetilde{Y}_h\right)}\right] \\ e^{\left({}_RK\sum {}_MP(a_h)\right)} &\geq E\left[e^{\left({}_RK\sum(1-a_h)\widetilde{Y}_h\right)}\right] \\ \sum_{h=1}^{n} {}_MP(a_h) &\geq \frac{1}{{}_RK}\ln E\left[e^{\left({}_RK\sum(1-a_h)\widetilde{Y}_h\right)}\right] \end{aligned} $$

Per l'ipotesi di indipendenza stocastica tra le $\widetilde{Y}$ si ha:

$$ \sum_{h=1}^{n} {}_MP(a_h) \geq \sum_{h=1}^{n}\frac{1}{{}_RK}\ln E\left[e^{\left({}_RK(1-a_h)\widetilde{Y}_h\right)}\right] $$

Posto:

$$ {}_RP(a_h) = \frac{1}{{}_RK}\ln E\left[e^{\left({}_RK(1-a_h)\widetilde{Y}_h\right)}\right] $$

si riscrive:

$$\sum_{h=1}^{n} {}_{M}P(a_h) \geq \sum_{h=1}^{n} {}_{R}P(a_h)$$
$$\sum_{h=1}^{n} [{}_{M}P(a_h) - {}_{R}P(a_h)] \geq 0$$

${}_{R}P(a_h)$ è il prezzo minimo accettabile dal riassicuratore per accettare di riassicurare la porzione di rischio $(1-a_h)\widetilde{Y}_h$. È funzione dell'avversione al rischio del Riassicuratore e della distribuzione di probabilità del rischio.
Risulta:

$${}_{R}P(a_h) = (1-a_h)E[\widetilde{Y}_h] + \frac{1}{2}K_R\sigma^2(\widetilde{Y}_h)(1-a_h)^2 \quad se\ \widetilde{Y}_h \sim N(E[\widetilde{Y}_h], \sigma^2(\widetilde{Y}_h))$$

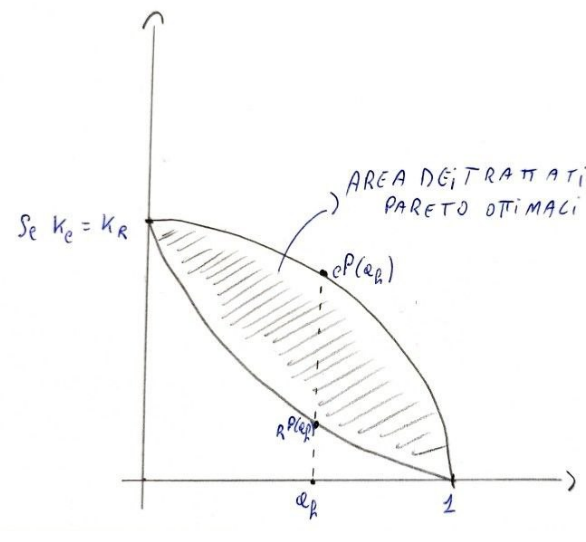
11.11.3 Studio di ${}_{C}\mathbf{P}(\mathbf{a_h})$ e ${}_{R}\mathbf{P}(\mathbf{a_h})$

$$\text{Se } a_h = 0 \Longrightarrow \begin{cases} {}_{R}P(0) = {}_{C}P(0), & se\ K_C = K_R \\ {}_{R}P(0) < {}_{C}P(0), & se\ K_C > K_R \end{cases}$$

Se $a_h = 1 \Longrightarrow {}_{R}P(1) = {}_{C}P(1) = 0$

Se $0 < a_h < 1 \Longrightarrow {}_{R}P(a_h) < {}_{C}P(a_h), \quad se\ K_C \geq K_R$

Se $0 \leq a_h \leq 1$ e $K_C = K_R$ si ha:



Dove per Pareto-Ottimali si intendono tutte quei trattati vantaggiosi per entrambe le parti. Al di fuori dell'area Pareto-Ottimale i trattati sono vantaggiosi per una

e svantaggiosi per l'altra
Il problema riassicurativo di ottimo per la cedente con vincoli bilaterali si riscrive:

$$\begin{array}{ll}
\max\limits_{\overline{a}} & \sum\limits_{h=1}^{n} [{}_CP(a_h) - {}_MP(a_h)] \\
\text{s.v.} & \sum\limits_{h=1}^{n} [{}_CP(a_h) - {}_MP(a_h)] \geq 0 \\
& \sum\limits_{h=1}^{n} [{}_MP(a_h) - {}_RP(a_h)] \geq 0 \\
& 0 \leq a_h \leq 1, \quad con\ h = 1, 2, \ldots, n
\end{array}$$

Ovvero:

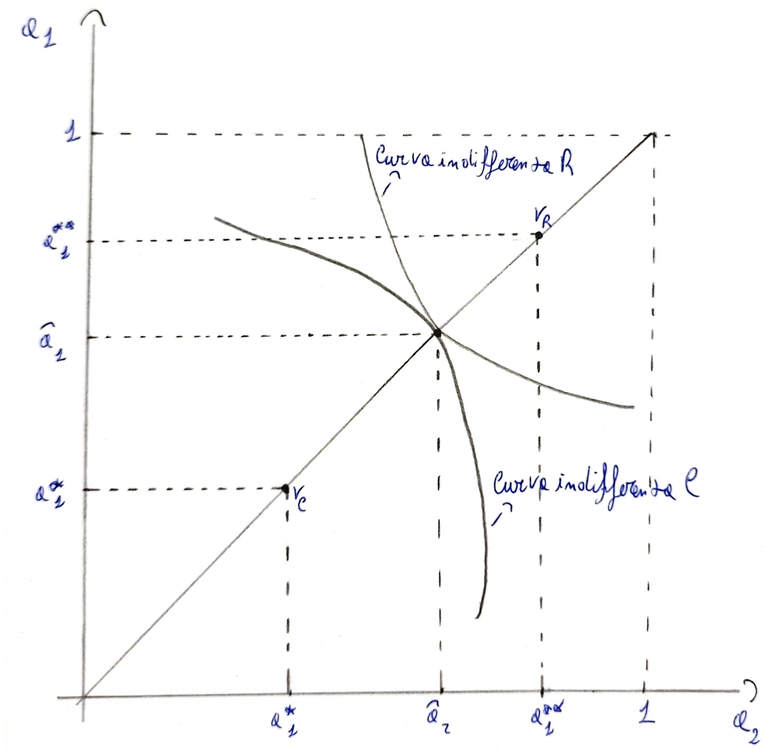
$$\begin{array}{ll}
\max_{\overline{a}} & \sum\limits_{h=1}^{n} \left[\frac{{}_CK\sigma^2(\widetilde{Y}_h)(1-a_h^2)}{2} - u_h E[\widetilde{Y}_h](1-a_h) \right] \\
\text{s.t.} & \sum\limits_{h=1}^{n} \left[\frac{{}_CK\sigma^2(\widetilde{Y}_h)(1-a_h^2)}{2} - u_h E[\widetilde{Y}_h](1-a_h) \right] \geq 0 \\
& \sum\limits_{h=1}^{n} \left[u_h E[\widetilde{Y}_h](1-a_h) - \frac{K_R\sigma^2(\widetilde{Y}_h^2)(1-a_h)}{2} \right] \geq 0 \\
& 0 \leq a_h \leq 1, \quad \text{con } h = 1, 2, \ldots, n
\end{array}$$

11.11.4 Soluzione del problema C', ovvero C"

$$\hat{\overline{a}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_n) \text{ con } \hat{a}_n = A^{\frac{1}{2}} a_h^* + \left(1 - A^{\frac{1}{2}}\right) a_h^{**}$$

dove: $A = \dfrac{\sum\limits_{h=1}^{n} (1-a_h^{**})^2 \sigma^2(\widetilde{Y}_h)}{\sum\limits_{h=1}^{n} (a_h^{**} - a_h^*)^2 \sigma^2(\widetilde{Y}_h)} = \text{costante}$

Sia $n = 2$ e indichiamo con V_C e V_R i vertici sul piano di coordinate (a_1, a_2) delle funzioni obiettivo individuali delle parti sono:



Con $K_C \geq K_R$

Sia $n = 1$

$$\hat{a} = A^{\frac{1}{2}} a^* + (1 - A^{\frac{1}{2}}) a^{**}$$

dove: $a^* = \dfrac{ME[\widetilde{X}]}{K_C \sigma^2(\widetilde{X})}$, $a^{**} = 1 - \dfrac{ME[\widetilde{X}]}{K_R \sigma^2(\widetilde{X})}$, $A^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1 - a^{**}}{a^{**} - a^*}$
Sia $K_C > K_R$
Dato K_C, se K_R sale, allora A scende e $\hat{a}$ tende ad a^{**}, perché $(1 - a^{**})$ scende e $(a^{**} - a^*)$ sale
Dato K_R se K_C sale, allora A scende e $\hat{a}$ tende ad a^{**} perché $(a^{**} - a^*)$ sale
Dati sia K_C che K_R, se σ^2 sale, allora A scende e $\hat{a}$ tende ad a^{**} perché a^* scende e a^{**} sale.
Quindi la soluzione di ottimo bilaterale è tanto più vicina a quella della cedente quanto minore è la rischiosità dei contratti, quanto minore è l'avversione al rischio del riassicuratore e quanto maggiore è l'avversione al rischio della cedente.

11.12 Analisi del Rischio demografico per un Portafoglio di rendita

In $t = 0$ consideriamo:

a Portafoglio di rendita vitalizia, immediata, perpetua, di rata costante R, anticipata, chiuso e a premio unico

b La generazione di contratti sia costituita da $N_0 = n$ assicurati, coetanei di età x, omogenei e indipendenti

c Assumiamo:

- assenza di spese
- tasso di rendimento degli investimenti certo, pari a i
- Assenza di movimenti di capitale proprio

d Sia $\left\{\widetilde{N}_t, t = 1, 2, \dots\right\}$ il processo del numero di sopravviventi

e Sia $\left\{\widetilde{R}_t = R \cdot \widetilde{N}_{t-1}, t = 1, 2, \dots\right\}$ il processo stocastico del totale di rata pagata nell'anno t

f Sia $V_t = R \cdot \ddot{a}_{x+t},\ t = 0, 1, \dots$ la riserva matematica all'epoca t per il generico contratto

g Sia $\left\{\widetilde{V}_t = \widetilde{N}_t \cdot V_t, t = 0, 1, \dots\right\}$ il processo stocastico della riserva di portafoglio

h Sia $\left\{\widetilde{Z}_t, t = 0, 1, \dots\right\}$ il processo stocastico del fondo aleatorio di portafoglio e Z_t un assegnato valore iniziale

i La quantità $\left\{\widetilde{Z}_t - \widetilde{N}_t V_t, t = 0, 1, \dots\right\}$ rappresentano il processo stocastico del fondo libero di portafoglio

j L'evento $\left\{\widetilde{Z}_t - \widetilde{N}_t V_t < 0\right\}$ corrisponde alla rovina della compagnia in un approccio di analisi basato su un risultato di sintesi

La probabilità $\mathbb{P}\left\{\widetilde{Z}_t - \widetilde{N}_t V_t < 0\right\}, t \geq 1$ è controllata

- quando sul fondo libero $Z_0 - N_0 V_0$, corrispondente al Margine di solvibilità M

- quando delle basi tecniche di $I°$ ordine, per il calcolo del premio unico complessivo N_0V_0 e sulla riserva matematica, in modo da introdurre caricamenti di sicurezza.
- quando nella fase di selezione dei rischi per ridurre la volatilità della variabile aleatoria $\widetilde{N}_t, t \geq 1$

Assegnare una determinazione al parametro di sopravvivenza
$p = {}_tp_x = \dfrac{S(x+t)}{S(x)} = \dfrac{L_{x+t}}{L_x}$ significa condizionare la v.a $\widetilde{N}_t, t \geq 1$. Infatti

$$\mathbb{P}\left\{\widetilde{N}_t = K|\widetilde{p} = p\right\} = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k},$$

In generale il parametro $\widetilde{p} \sim \varphi(p)$ e risulta:

$$\mathbb{P}\left\{\widetilde{N}_t = K\right\} = \int_0^1 \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\varphi(p)\,dp,$$

$$con\ E[\widetilde{N}_t] = E[E[\widetilde{N}_t|\widetilde{p} = p]]\ e\ Var(\widetilde{N}_t) > Var(\widetilde{N}_t|\widetilde{p} = p)$$

k La dimensione del fondo di portafoglio

$$\widetilde{Z}_t = (\widetilde{Z}_{t-1} - \widetilde{R}_t)(1+i), t = 1, 2, \ldots,\ con\ \widetilde{R}_t = R\widetilde{N}_{t-1}$$

$$ovvero:\ \widetilde{Z}_t = Z_0(1+i)^t - \sum_{h=0}^{t-1} R \cdot \widetilde{N}_h(1+i)^{t-h}$$

Dipende dall'assicurato del numero di sopravviventi alle successive età (rischio demografico): $N_0, \widetilde{N}_1, \widetilde{N}_2, \ldots, \widetilde{N}_t, \ldots$. E se rimuoviamo l'ipotesi di costanza del fattore finanziario, le dinamiche del fondo di portafoglio dipenderebbe anche dal tasso annuo di investimento (rischio finanziario).

l L'evento rovina si riscrive $\widetilde{Z}_t = \widetilde{N}_tV_t \leq 0$:

$$Z_0(1+i)^t = \sum_{h=0}^{t-1} R\widetilde{N}_h(1+i)^{t-h} < \widetilde{N}_tV_t \tag{11.1}$$

m L'equazione ricorrente della riserva matematica per ogni contratto risulta:

$$(V_{t-1} - R)(1+i) = V_{t1}P_{x+t-1}$$

Ovvero, partendo da $t = 0$:

$$V_0(1+i)^t - \sum_{h=0}^{t-1} R_hP_x(1+i)^{t-h} = V_t(N_{0t}P_x)$$

$$N_0V_0(1+i)^t - \sum_{h=0}^{t-1} R \cdot E[\widetilde{N}_t](1+i)^{t-h} = E[\widetilde{N}_t]V_t \tag{11.2}$$

dove $E[\widetilde{N}_t]V_t$ è la Riserva matematica attiva di portafoglio

n Confrontando la 11.1 e la 11.2 osserviamo che se:
$Z_0 = N_0V_0$:

(a) Il fondo finanzia in media il pagamento della rata fino a t-1

(b) Il fondo finanzia la riserva attesa in t

o Si potrà avere:

$$\widetilde{N}_tV_t >< = E[\widetilde{N}_t]V_t$$

Sia $\pi_t(k) = \mathbb{P}\left\{\widetilde{N}_t = k|\widetilde{p} = p\right\}$ allora la probabilità di rovina vale:

$$\mathbb{P}\left\{\widetilde{N}_tV_t > E[\widetilde{N}_t]V_t\right\} = \mathbb{P}\left\{\widetilde{N}_t > E[\widetilde{N}_t]\right\} = \sum_{k:k>E[\widetilde{N}_t]} \pi_t(k) \tag{11.3}$$

La 11.3 è una misura del rischio demografico di longevità cui è esposta la compagnia

p Se $Z_0 = N_0V_0 + M$, con $M \geq 0$, l'evento rovina si riscrive:

$$\left\{\widetilde{N}_t > E[\widetilde{N}_t]V_t + M(1+i)^t\right\}$$

con probabilità:

$$\mathbb{P}\left\{\widetilde{N}_t > E[\widetilde{N}_t] + \frac{M(1+i)^t}{V_t}\right\} = \sum_{k:k>E[\widetilde{N}_t]+\dfrac{M(1+i)^*}{V_t}} \pi_t(k) \tag{11.4}$$

La 11.4 è una misura del rischio demografico di longevità. È decrescente al crescere di M.
Il rapporto $\dfrac{M(1+i)^t}{V_t}$ indica il numero di contratti le cui riserve sono finanziate dal patrimonio se $\widetilde{N}_t > E[\widetilde{N}_t]$

Il rischio principale in un portafoglio di questo tipo è il rischio di longevità, ovvero non saper prevedere il trend. Questo rischio comporta il pericolo di non avere fondi sufficienti in riserva per liquidare i contratti. La tavola di sopravvivenza sottostima la mortalità degli assicurati.

11.12.1 Riassicurazione del rischio demografico di longevità

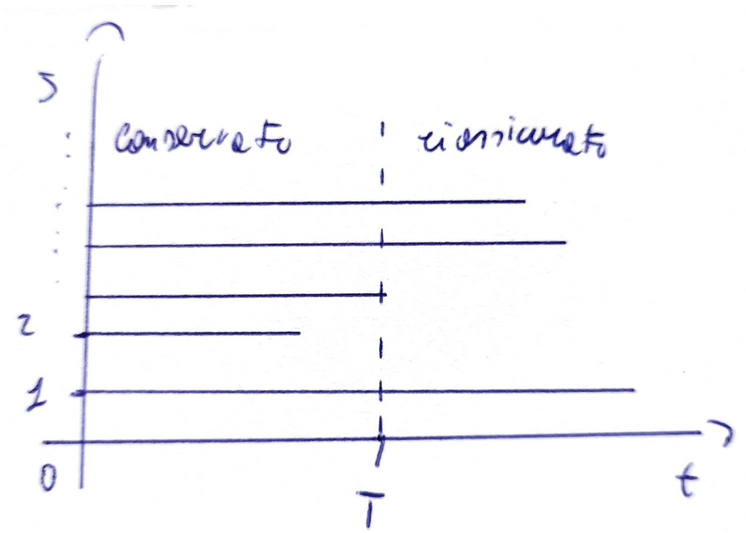
Il rischio demografico di longevità si può mitigare con:

- Basi tecniche prudenziali (caricamenti di sicurezza, tavole selezionate e proiettate)
- Margine di solvibilità
- Strategia riassicurativa (tradizionali e finanziarie)

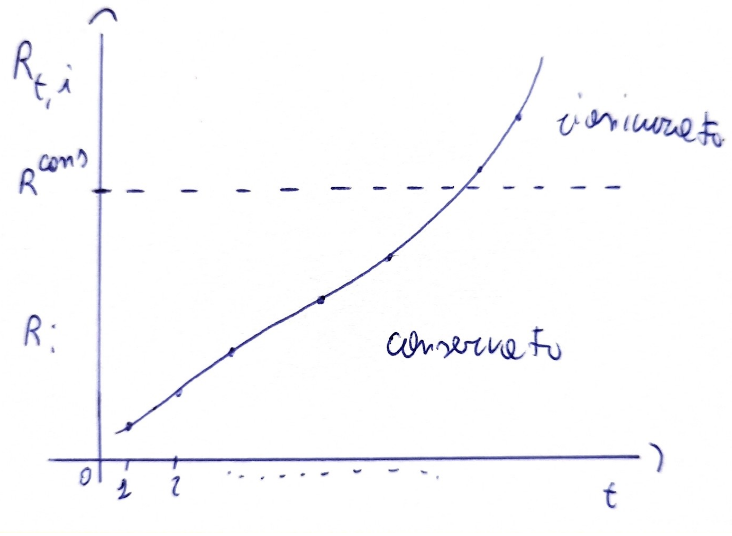
I principali trattati di riassicurazione sono:

Eccedente di somma (Surplus)

In $t = 0$, sia R^{cons}: pieno e $R_i, (i = 1, 2, \ldots n)$: rata assicurata.
Si conserva: $min\left\{R^{cons}; R_j\right\}, \forall i \in (1, n)$



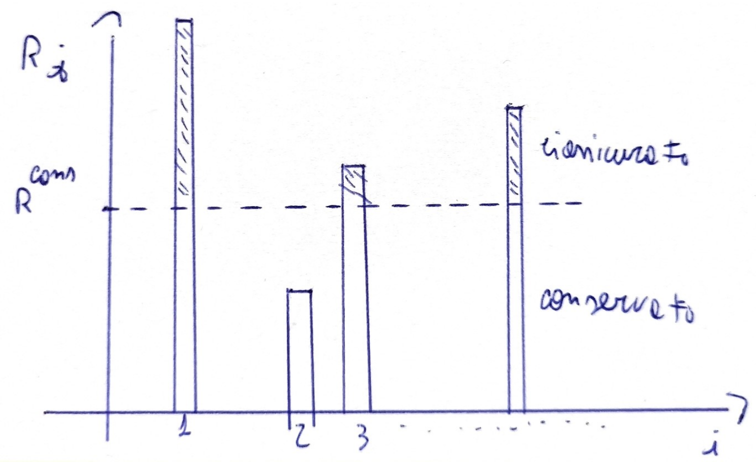
Se la longevità è variabile si ha:
$R_{t,i} = R_i(1 + k_t)^{t-1}$, con $t = 1, 2, \ldots$ e k_t: tasso di rivalutazione.
Si conserva: $min\left\{R^{cons}; R_{t,j}\right\}$



Eccesso singolo sinistro (XL)

Si conserva il pagamento della rata ad una prefissata durata oltre la quale subentra il riassicuratore.
In $t = 0$ siano:
$\widetilde{T}_j^* = min\left\{\widetilde{T}_{x,i}; T\right\}$, $\widetilde{T}_j^{**} = max\left\{\widetilde{T}_{x,i} - T; 0\right\}$, $i = 1, 2, \ldots$
Conservato (v.a.m. in $t = 0$) = $R_j \cdot {}_{/T}\ddot{a}_x$
Riassicurato (v.a.m. in $t = 0$) = $R_j \cdot {}_{T/}\ddot{a}_x$

N.B.
T è la vita residua modale a livello di singolo contratto
Il riassicurato assume il rischio di sopravvivere oltre T
Il premio di riassicurazione conterà un caricamento di sicurezza crescente al decrescere di T

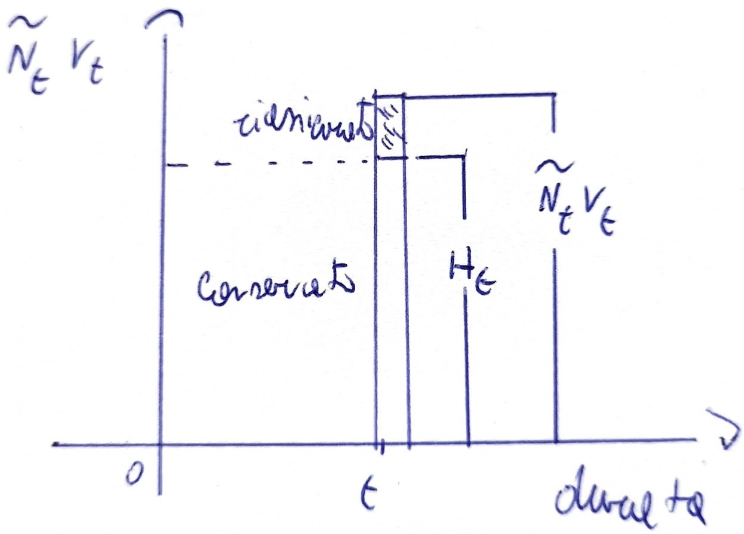


Stop-loss (eccesso globale di perdita)

Siano:

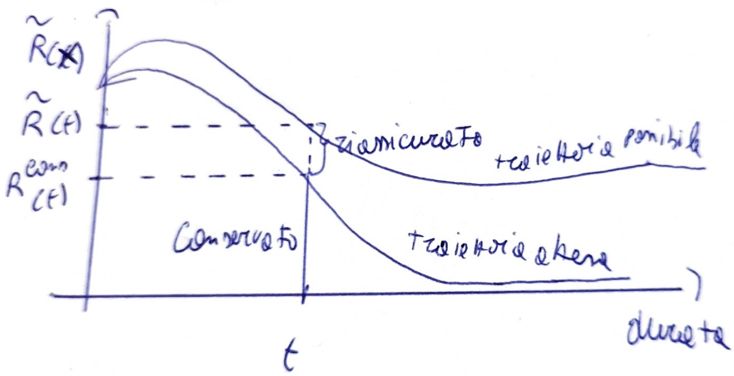
- π: premio di riassicurazione
- $\widetilde{N}_t$: numero aleatorio di contratti in essere in t
- V_t: riserva matematica pura in t, per il generico contratto
- i: tasso di interesse
- M: margine di solvibilità allocato al portafoglio

Sia $\widetilde{N}_t V_t$ riserva aleatoria di portafoglio in $t = 1, 2, \dots$
Ai fini della costituzione della riserva matematica di portafoglio in t, la ripartizione degli impegni risulta:
Conservato: $min\left\{\widetilde{N}_t V_t; (E[\widetilde{N}_t]V_t + M(1+i)^t) - \pi\right\}$ con $(E[\widetilde{N}_t]V_t + M(1+i)^t) = H_t$
Riassicurato: $max\left\{\widetilde{N}_t V_t - H_t, 0\right\}$



Stop-loss sui cash-flow

A livello di portafoglio siano:
$\widetilde{R}_t = \widetilde{N}_t R$: totale rate pagate nell'anno t
$R_t^{cons} = E[\widetilde{N}_t]R(i+r),\ r > 0$: Pieno sul totale rata int.
Conservato: $min\left\{\widetilde{R}_t; R_t^{cons}\right\}$
Riassicurato: $max\left\{\widetilde{R}_t - R_t^{cons}; 0\right\}$



Parte II

Teoria del rischio Danni

Ci si concentra sul bilancio della compagnia danni.

Stato Patrimoniale

Attvo	**Passivo**
Investimenti: • Immobili • Titoli • Azioni • Depositi $Hp = 0 : \begin{cases} \textit{Riserve tecniche a carico Riass.} \\ \textit{Crediti verso Riass.} \\ \textit{Crediti verso agenti} \\ \textit{Crediti verso altri} \end{cases}$	$\left.\begin{array}{l} \textit{Capitale sociale} \\ \textit{Riserva patrimoniale} \end{array}\right\} : U_t$ Fonti patrimoniali $\left.\begin{array}{l} \textit{Riserva Premi } V_t \\ \textit{Riserva sinistri } C_t \\ \textit{Debiti verso Riass. } L = 0 \\ \textit{Debiti verso banche } W_t \\ \textit{Debiti verso altri } L_{0,t} \end{array}\right\}$ Mezzi tecnici

Conto economico

Costi:

- Riserve iniziali verso Riass.
- Premi ceduti: B'^{RE}
- Sinistri pagati: X'
- E: $\begin{cases} \textit{Oneri acquisizione} \\ \textit{Spese gestione} \end{cases}$
- Tasse e imposte: TX
- Riserva premi finali: V_t
- Riserva sinistri finali: C_t

Ricavi:

- Riserva premi iniziali: V_{t-1}
- Riserva sinistri iniziali: C_{t-1}

- Premi emessi: B'
- Sinistri a carico Riass.: X'^{RE} per hp: $= 0$
- Proventi finanziari ordinari: J
- Proventi finanziari straordinari CH
- Riserve tecniche finali a carico Riass.: per hp $= 0$

Capitolo 12

Equazioni fondamentali

12.1 Engaging costs equation (cash flow equation)

$$\begin{aligned} A_t = A_{t-1} \\ &+ \left[B'_t + (J_t + CH_t) + (X'_t)^{\text{RE}} + U_t^{NEW} + \Delta W_t\right] - \\ &- \left[B_t'^{RE} + X'_t + E_t + TX_t + D_t\right] \end{aligned}$$

Dove A_t: attivo; U_t^{NEW}: nuovi utili; ΔW_t: nuovi debiti; D_t: dividenti
se $A_t > A_{t-1}$: nuovi investimenti
se $A_t < A_{t-1}$: disinvestimenti

12.1.1 Premi e sinistri di competenza

$B_t = (B'_t + V_{t-1}) - V_t \Longrightarrow$ Premi di competenza complessivi
$X_t = (X'_t + C_t) - C_{t-1} \Longrightarrow$ Sinistri di competenza.

12.2 Accounting equation

Poichè:

$$A_t = U_t + L_t = U_t + (V_t + C_t + W_t - L_{0,t})$$

Allora:

$$\begin{aligned}
\Delta U_t = U_t - U_{t-1} &= (A_t - L_t) - (A_{t-1} - L_{t-1}) = \\
&= [B_t + (J_t + CH_t) - X_t - E_t] - (B_t^{RE} - X_t^{RE}) \\
&+ (U_t^{NEW} - TX_t - D_t) - (L_{0,t} - L_{0,t-1})
\end{aligned}$$

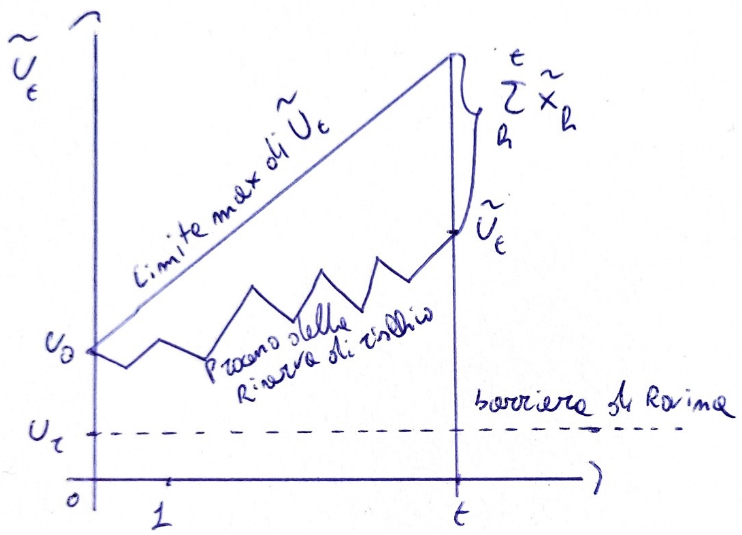
Nella TdR classica si ha:

$$\begin{aligned}
\widetilde{U}_t - \widetilde{U}_{t-1} = B_t - (\widetilde{X}_t + E_t) &= \\
&= [P_t(1+\lambda) + E_t] - (\widetilde{X}_t + E_t) = \\
&= P_t(1+\lambda) - \widetilde{X}_t
\end{aligned}$$

Equazione che rappresenta la variazione annua della riserva di rischio (utile o perdita d'esercizio)
dove: P_t: premio puro e λ: caricamento di sicurezza

Se $P_t = P = E[\widetilde{X}_1] = \cdots = E[\widetilde{X}_t]$ (costi aggregati annui uguali) allora:

$$\widetilde{U}_t = U_0 + \left[(1+\lambda) \cdot P \cdot t - \sum_{h=1}^{t} \widetilde{X}_h\right]$$



12.3 Capitale a rischio e Probabilità di Rovina

[inserire immagine] Si considera la probabilità

$$\varepsilon = \mathbb{P}\left\{\widetilde{U}_t < U_t' | U_0\right\}$$

Per analizzarla si usa o il Capitale a Rischio: $U_0 - U_t'$ che è il capitale che può essere perso al massimo con intervallo di confidenza $1 - \varepsilon$
Oppure la probabilità di rovina: $\mathbb{P}\{\widetilde{U}_t < U_r | U_0\}$

12.4 Riserva di Rischio - Orizzonte Annuale (Short-View)

Si consideri

$$\widetilde{U}_1 = U_0 + [P + \lambda P - \widetilde{X}]$$

dove $[P + \lambda P - \widetilde{X}]$ è il risultato di esercizio.
Per far previsioni su $\widetilde{U}_1$ ho bisogno della distribuzione di $\widetilde{X}$. Si usano due approcci: Individuale e Collettivo.

12.4.1 Approccio individuale

Sia N il numero di rischi in un portafoglio o singolo ramo assicurativo
Il costo aggregato sinistri $\widetilde{X}$ è:

$$\widetilde{X}_{IND} = \sum_{i=1}^{N} \widetilde{Y}_i$$

dove $\widetilde{Y}_i$ è il costo sinistri generato dal rischio i-esimo.
Sia

$$F_{\widetilde{Y}_i}(y) = \mathbb{P}\{\widetilde{Y}_i \leq y\}$$

Se gli N rischi sono reciprocamente indipendenti allora si ha:

$$F_{\widetilde{X}_{IND}}(x) = \mathbb{P}\{\widetilde{X}_{IND} \leq x\} = \mathbb{P}\{\widetilde{Y}_1 + \cdots + \widetilde{Y}_N \leq x\} = F_{\widetilde{Y}_1}(x) * \cdots * F_{\widetilde{Y}_N}(x) = F^{*^N}$$

che indica una convoluzione tra le N funzioni di ripartizione

12.4.2 Approccio Collettivo

Si usa quando il ramo è formato da rischi più o meno omogenei. Si fanno delle ipotesi

1. Reciproca indipendenza di tutti i sinistri
2. Costo sinistri di $\widetilde{z}_j$ di ogni singolo sinistro è identicamente distribuito secondo:

$$S(x) = \mathbb{P}\{\widetilde{z}_j \leq x\} = \mathbb{P}\{\widetilde{z}_{j+1} \leq x\} = \mathbb{P}\{\widetilde{z}_{j+2} \leq x\} = \dots$$

3. $\widetilde{z}_j$ e $\widetilde{k}$ sono stocasticamente indipendenti

Sia $\widetilde{k}$ la variabile aleatoria numero sinistri generato dal portafoglio (o ramo) nell'unità di tempo (un anno). Risulta:

$$\widetilde{X}_{COLL} = \sum_{j=1}^{\widetilde{k}} \widetilde{z}_j$$

Si ha per la terza ipotesi:

$$\begin{aligned}
F_{\widetilde{X}_{COLL}}(x) &= \mathbb{P}\{\widetilde{X}_{COLL} \leq x\} \\
&= \mathbb{P}\{\widetilde{z}_1 + \cdots + \widetilde{z}_{\widetilde{k}} \leq x\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\widetilde{k} = k\} \cdot \mathbb{P}\{\widetilde{z}_1 + \cdots + \widetilde{z}_k \leq x\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\widetilde{k} = k\} \cdot S^{*^k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P_k S^{*^k}(x)
\end{aligned}$$

Dove S^{*^k} è la convoluzione delle k distribuzioni $S(x)$

Per la $\widetilde{X} = \sum_{j=1}^{\widetilde{k}} \widetilde{z}_j$ si dimostra:

$$\begin{aligned}
E[\widetilde{X}] &= E[\widetilde{k}]E[\widetilde{z}] \\
\sigma^2(\widetilde{X}) &= E[\widetilde{k}]\sigma^2(\widetilde{z}) + \sigma^2(\widetilde{k})\overline{E[\widetilde{z}]}^2
\end{aligned}$$

In particolare se $\widetilde{k} \sim Poisson$

$$\sigma^2(\widetilde{X}) = E[\widetilde{k}]E[\widetilde{z}^2]$$

Capitolo 13

Distribuzione numero sinistri

13.1 Poisson

$\widetilde{k} \sim$ Poisson se:

- i numeri dei sinistri che si verificano in due intervalli di tempo diversi sono indipendenti (indipendenza degli incrementi)
- ciascun evento puù dar luogo ad un solo sinistro (esclusione sinistri multipli)
- la probabilità che un sinistro si verifichi ad un punto temporale dato è pari a 0 (esclusione di punti temporali speciali)

$$P_k = \mathbb{P}\{\widetilde{k} = k\} = \frac{e^{-n}n^k}{k!}$$

dove n è il numero di sinistri atteso
I momenti sono:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= k_1 = n \\ \sigma^2 &= k_2 = n \\ \gamma &= \frac{k_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \gamma_2 &= \frac{k_4}{\sigma^n} = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Teorema 13.1.1. *Se per gli m rischi in portafoglio le rispettive variabili aleatorie* ***numero sinistri*** $\widetilde{k}_1, \ldots, \widetilde{k}_m$ *sono tutte reciprocamente indipendenti e distribuite ognuno secondo una Poisson di parametri rispettivamente* $n_1, \ldots, n_m$*, allora anche la variabile aleatoria* ***numero totale sinistri*** *in portafoglio* $\widetilde{k} = \widetilde{k}_1 + \cdots + \widetilde{k}_m$ *si distribuisce secondo una Poisson di parametro* $n = n_1 + \cdots + n_m$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}\varphi_{\sum \widetilde{k}_i}(S) &= \sum_{i=1}^{m} \varphi_{\sum \widetilde{k}_i}(S) = \sum_{i=1}^{m} n_i(e^S - 1)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} n_i\right)\left(e^S - 1\right)\\ &= n\left(e^S - 1\right)\end{aligned}$$

Per l'esatta corrispondenza tra la funzione di distribuzione e la funzione generatrice dei cumulanti, vuol dire che anche $\sum \widetilde{k}_i$ si distribuisce come una Poisson di parametro n □

13.1.1 Esempi numerici

Portafoglio di 5 rischi, per ognuno dei quali $\widetilde{k} \sim Poisson(n_i)$ con $n_1 = 0.1$, $n_2 = 0.15$, $n_3 = 0.2$, $n_4 = 0.25$, $n_5 = 0.65$.
Supponiamo che i 5 rischi siano indipendenti, allora:

$$\widetilde{k} = (\widetilde{k}_1 + \cdots + \widetilde{k}_5) \sim Poisson(n = \sum_{i=1}^{5} n_i = 1.35)$$

$$P_k = \mathbb{P}\{\widetilde{k} = k\} = e^{-1.35}\frac{1.35^k}{k!}$$

si ha:

$$\begin{aligned}E[\widetilde{k}] &= n = 1.35\\ \sigma^2(\widetilde{k}) &= n = 1.35\\ sigma(\widetilde{k}) &= \sqrt{1.35} = 1.162\\ \gamma(\widetilde{k}) = \frac{1}{\sqrt{n}} &= 0.86\end{aligned}$$

Calcola $\mathbb{P}\{\widetilde{k} \leq 2\}$

$$\mathbb{P}\{\widetilde{k} \leq 2\} = e^{-1.35}\left(\frac{1.35^0}{0!} + \frac{1.35^1}{1!} + \frac{1.35^2}{2!}\right) = 0.26 \cdot 3.26 = 0.845$$

13.2 Poisson mista (Mistura)

Fattori esterni possono provocare variazioni delle intensità di sinistro delle unità assicurate non comprese nelle oscillazioni casuali proprie di ogni variabile aleatoria. Tali fattori posso comportare:

- Oscillazioni di breve periodo
- Trends (positivi o negativi)
- Cicli (lungo periodo)
- Tutti e tre

13.2.1 Caso 1: Variazione aleatoria della propensione al rischio delle unità di rischio assicurate

La condizione di indipendenza degli incrementi della Poisson non è rispettata
Sia $\widetilde{q}$ un fattore moltiplicativo aleatorio di disturbo della propensione al rischio con funzione di ripartizione: $H(q) = \mathbb{P}\{\widetilde{q} \leq q\}$
Assumiamo che $E[\widetilde{q}] = 1$
Tale ipotesi esclude la presenza di trend, ma considera l'esistenza di oscillazioni di breve durata e/o cicli di lungo periodo. Nelle applicazioni pratiche della funzione di ripartizione $H(q)$ possiamo conoscere:

- la sua funzione in forma analitica
- la sua distribuzione in forma tabellare
- solamente le caratteristiche principali (metodo dei momenti)
  Conoscere media, varianza, asimmetria e kurtosi è sufficiente a ricavare le formule fondamentali sulla distribuzione del costo sinistri aggregato $\widetilde{X}$ di portafoglio

Caratteristiche della Poisson mista $\widetilde{k}|\widetilde{q}$

La **distribuzione di probabilità** di $\widetilde{k}$ è una media ponderata del tipo:

$$P_k = \mathbb{P}\{\widetilde{k} = k\} = E[\mathbb{P}\{\widetilde{k} = k|\widetilde{q}\}] = \int_0^{+\infty} e^{-nq} \frac{(nq)^k}{k!} \, dH(q)$$

La **funzione di ripartizione** di $\widetilde{k}$ è:

$$F_k = \mathbb{P}\{\widetilde{k} \leq k\} = E[\mathbb{P}\{\widetilde{k} \leq k|\widetilde{q}\}] = \int_0^{+\infty} F_{nq}(k) \, dH(q) = \int_0^{+\infty} \left[\sum_{h \leq k} e^{nq} \frac{(nq)^h}{h!} \right] dH(q)$$

La **funzione generatrice dei momenti** di $\widetilde{k}$ è:

$$M_{\widetilde{k}}(S) = E[M_{\widetilde{k}(S|\widetilde{q})}] = \int_0^{+\infty} e^{nq(e^S - 1)} \, dH(q) = E\left[e^{n\widetilde{q}(e^S-1)}\right] = M_{\widetilde{q}}\left[n(e^S - 1)\right]$$

La **funzione generatrice dei cumulanti** di $\widetilde{k}$ è:

$$\varphi_{\widetilde{k}}(S) = \ln M_{\widetilde{q}}\left[n(e^S - 1)\right] = \varphi_{\widetilde{q}}\left[n(e^S - 1)\right] = \varphi\left(g(S)\right)$$

dove $g(S) = n(e^S - 1)$ è la funzione generatrice dei cumulanti della Poisson pura di parametro n
I primi 4 cumulanti risultano:

$$k_1 = E[\widetilde{k}] = E[E[\widetilde{k}|\widetilde{q}]] = \varphi'_{\widetilde{q}}(g(0)) = \varphi'_{\widetilde{q}}(0)g'(0) = n$$

$$k_2 = \sigma^2_{\widetilde{k}} = \varphi''_{\widetilde{k}}(0) = \varphi''_{\widetilde{q}}(g(0))\overline{g'(0)}^2 + \varphi'_{\widetilde{q}}(g(0))g''(0) = \sigma^2_{\widetilde{q}}n^2 + n$$

$$k_3 = n + mn^2\sigma^2_{\widetilde{q}} + n^{3\widetilde{q}} \Rightarrow \gamma_{\widetilde{k}} = \frac{k_3}{\sigma^3_{\widetilde{k}}} = \frac{n + 3n^2\sigma^2\widetilde{q} + n^3\gamma_{\widetilde{q}}\sigma^3_{\widetilde{q}}}{\sigma^3_{\widetilde{k}}}$$

$$k_n = n + 7n^2\sigma^2_{\widetilde{q}} + 6n^3\gamma_{\widetilde{q}} + n^4 k_{4,\widetilde{q}} \Rightarrow \gamma_{2,\widetilde{k}} = \frac{k_5}{\sigma^4_{\widetilde{k}}}$$

13.2.2 Caso 2: Variazioni deterministiche della propensione al rischio

Sia $\widetilde{q} = q =$ costante
Le tre condizione della Poisson pura sono generalmente soddisfatte, ma con un parametro nq invece di n
Pertanto se $\widetilde{q} = q =$ costante e $\widetilde{k} \sim Poisson(nq)$

$$\mathbb{P}\{\widetilde{k} = k\} = e^{-nq}\frac{(nq)^k}{k!}$$

Se $q > 1 \implies$ peggioramento della sinistrosità
Se $q < 1 \implies$ miglioramento della sinistrosità
La presenza del fattore di disturbo aleatorio $\widetilde{q} \neq$ costante, introduce un doppio stadio di aleatorietà sulla variabile aleatoria numero sinistri:

- il primo stadio riguarda l'aleatorietà del parametro di sinistrosità sottostante n
- il secondo stadio riguarda gli scostamenti casuali che (una volta determinata il parametro) si verificheranno come per ogni variabile aleatoria

13.3 Binomiale Negativa (o Polya)

Se $\widetilde{q} \sim \Gamma(h, h)$ allora:

$$H(q) = \frac{\displaystyle\int_0^{hq} e^{-z} z^{h-1}\, dz}{\Gamma(h)} = \frac{\displaystyle\int_0^{hq} e^{-z} z^{h-1}\, dz}{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-n} n^{h-1}\, dn}$$

le cui caratteristiche sono:

- $h = \dfrac{1}{\sigma_q^2}$
- $E[\widetilde{q}] = \dfrac{h}{h} = 1$
- $\sigma_q = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$
- $\gamma_q = \dfrac{2}{\sqrt{h}}$
- $\gamma_{2,q} = \dfrac{6}{h}$

Si dimostra che se $H(q) \sim \Gamma(h, h)$ allora:

$$P_k = E[\mathbb{P}\{k|\widetilde{q}\}] = \binom{h+k-1}{k} q^h (1-P)^k$$

La funzione generatrice dei momenti con relativi momenti sono:

$$M(S) = \left(\frac{h}{h+n-ne^S}\right)^h$$

$$E[\widetilde{k}] = n$$

$$\sigma_k^2 = n + \frac{n^2}{h} > n$$

$$\gamma_k = \frac{n + \dfrac{3n^2}{h} + \dfrac{2n^3}{h^2}}{\sigma_k^3}$$

Se $h \to +\infty$ allora $P_k \simeq e^{-n}\dfrac{n^k}{k!}$ e cioè $\widetilde{k} \sim Poisson$
Le probabilità della binomiale negativa si possono calcolare con la seguente formula ricorsiva:

$$P_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) P_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

con:

$$\begin{aligned} P_0 &= p^h \\ p &= \frac{h}{n+h} \\ a &= 1-p \\ b &= (h-1)a \end{aligned}$$

La distribuzione binomiale negativa ha un solo parametro libero h, per la mistura della distribuzione: limite per l'adattamento ai dati.
Non è possibile "aggiustare" la distribuzione gamma-mista in modo che abbia contemporaneamente varianza e asimmetria con designati valori.
La distribuzione binomiale negativa è una generalizzazione della Poisson pura in due modi diversi:

- come mistura della Poisson con Gamma
- come composto di una Poisson con una distribuzione secondaria logaritmica

13.4 Binomiale

Se $\widetilde{X} \sim Binom(l, q)$

$$\mathbb{P}\{\widetilde{X} = k\} = \binom{l}{k} q^k (1-q)^{l-k}$$

$$\begin{aligned} M(S) = E[e^{S\widetilde{X}}] &= \sum_{k=0}^{l} e^{Sk} \binom{l}{k} q^k (1-q)^{l-k} \\ &= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} (qe^S)^k (1-q)^{l-k} \\ &= \Big[(1-q) + qe^S\Big]^l \end{aligned}$$

Da cui si ha:

$$\varphi(S) = \ln M(S) = l \ln(1 - q + qe^S)$$

$$\varphi'(S) = \frac{lqe^S}{1-q+qe^S} \qquad \varphi'(0) = lq$$

$$\varphi''(S) = \frac{lq[(1-q)e^S]}{(1-q+qe^S)^2} \qquad \varphi''(0) = lq(1-q)$$

$$\varphi'''(S) = \frac{lq(1-q)e^S(1-q+qe^S)[(1-q+qe^S) - 2qe^S]}{(1-q+qe^S)^4} \qquad \varphi'''(0) = lq(1-q)(1-2q)$$

Da cui i momenti diventano:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= k_1 = lq \\
\sigma^2 &= k_2 = lq(1-q) \\
\gamma &= \frac{k_3}{\sigma^3} = \frac{1-2q}{\sqrt{lq(1-q)}} \; \textit{negativo se } q > \frac{1}{2} \\
\gamma_2 &= \frac{k_4}{\sigma^4} = \frac{1-6q(1-q)}{lq(1-q)}
\end{aligned}$$

La binomiale è utile perchè ha un supporto finito.
$\sigma^2(\widetilde{k}) = lq(1-q) < E[\widetilde{k}] = lq$ dove l è il numero di rischi
La binomiale ha applicazioni in:

- Assicurazione sulla vita
- Assicurazione auto
  - modello per numero di individui coinvolti in un singolo incidente
- Polizza malattia nucleo familiare
- In tutte le situazione per le quali si ritiene ragionevole avere una probabilità positiva oltre una certa frequenza. Ad esempio: numero di incidenti entro un anno provocati da una stessa automobile

13.5 Geometrica

È una binomiale negativa con $h = 1$.
Distribuzione con mancanza di memoria, utile se si sono verificati m sinistri: la distribuzione che il numero di sinistri eccede m non dipende da m
Utilizzata per classificare la distribuzione di conteggio a coda spessa o sottile. Nel continuo vale lo stesso per l'esponenziale.

13.6 Approssimazione di $F(k)$

- $F(k) = \mathbb{P}\{\widetilde{k} \leq k\} = \sum_{j=0}^{k} e^{-n}\frac{n_j}{j!}$
- Distribuione di classe $(a, b, 0)$
  Definizione: Sia P_k la funzione di probabilità di una variabile aleatoria

discreta. Tale variabile è distribuita in classe $(a, b, 0)$, se esistono le costanti a e b tale che:

$$\frac{p_k}{P_{k-1}} = a + \frac{b}{k} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Esempi:

- Poisson (n): a = 0, b = n, $p_0 = e^{-n}$
- Polya (n, h): a = $\dfrac{n}{n+h}$, b = $(h-1)a$, $p_0 = (1-p^h)$
- Binomiale (p, n): a = $-\dfrac{p}{1-p}$, b = $\dfrac{(N+1)p}{1-p}$, $P_0 = (1-p)^N$
- Geometrica (p): a = p, b = 0, $P_0 = p$
  La Polya $\left(\dfrac{p}{1-p}, 1\right)$ è una Geometrica (p).
  In Polya (n, h), $p = \dfrac{h}{n+h}$
  $k\dfrac{p_k}{p_{k-1} = b + ak}$

- Collettività sufficientemente numeroso (approssimazione normale)
  Sia M il numero di rischi.
  Se le $\widetilde{k}_i \sim Poisson(n_i)$ sono reciprocamente indipendenti, una prima approssimazione di $F(k)$ è data dalla normale standardizzata

$$F(k) = \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{m} \widetilde{k}_i \leq k\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m} \widetilde{k}_i - n}{\sqrt{n}} \leq \frac{k-n}{\sqrt{n}}\right\} \Rightarrow N\left(0, \frac{k-n}{\sqrt{n}}\right)$$

$$dove\ N\left(0, \frac{k-n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{k-n}{\sqrt{n}}} e^{\frac{n^2}{2}}\, dn$$

  Quindi per il teorema limite centrale si ha $F(k) \simeq N\left(0, \dfrac{k-n}{\sqrt{n}}\right)$ per $m \to \infty$.
  Si ha una buona approssimazione già per $m > 1000$

- Anscombe Approximation (1960)

$$F(k) \sim N\left(0, \frac{3}{2}\left(k + \frac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}} n^{-\frac{1}{6}} - \frac{3}{2}\sqrt{n}\frac{1}{24\sqrt{n}}\right)$$

  Buona approssimazione per $m > 35$

- Peizer-Pratt approximation (1974)

$$F(k) \sim N\left(0, \left[\frac{k-n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{2}{3} + \frac{0.022}{k+1}\right)\right]\sqrt{1+T(z)}\right)$$

$$\begin{aligned} dove\ z &= \frac{k+0.5}{n} \\ T(z) &= \frac{1-z^2 2z\ln(z)}{1-z^2};\ T(1)=0 \end{aligned}$$

Buona approssimazione per $n \geq 6$

Capitolo 14

Distribuzione singolo danno $\widetilde{z}$

14.1 Distribuzione esponenziale

La distribuzione del danno può distribuirsi come una esponenziale se:

$$\begin{aligned} f(z) &= \lambda e^{-\lambda z},\ z > 0 \\ F(z) &= 1 - e^{-\lambda z},\ z > 0 \\ \overline{F}(z) = 1 - F(z) &= \mathbb{P}\{\widetilde{z} > z\} = e^{-\lambda z} \\ M(S) &= \left(1 - \frac{S}{\lambda}\right)^{-1},\ S < \lambda \\ \varphi(S) &= -\ln\left(1 - \frac{S}{\lambda}\right) = \ln M(S) \end{aligned}$$

da cui derivano i momenti:

$$\begin{aligned} \varphi'(S) &= \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{S}{\lambda}\right)^{-1} \Longrightarrow \varphi'(0) = \frac{1}{\lambda} = E[\widetilde{z}] \\ \varphi''(S) &= \frac{1}{\lambda^2}\left(1 - \frac{S}{\lambda}\right)^{-2} \Longrightarrow \varphi''(0) = \frac{1}{\lambda^2} = \sigma^2(\widetilde{z}) \\ \varphi'''(S) &= \frac{2}{\lambda^3}\left(1 - \frac{S}{\lambda}\right)^{-3} \Longrightarrow \varphi'''(0) = \frac{2}{\lambda^3} = k_3 \\ \gamma(z) &= \frac{k_3}{\sigma^3} = 2 > 0 \end{aligned}$$

Gode di **Mancanza di Memoria** Sia $\widetilde{z} \sim Exp(\lambda)$ e $d \geq 0$, allora:

$$\mathbb{P}\{\widetilde{z} > z + d | \widetilde{z} > d\} = \mathbb{P}\{\widetilde{z} > z\}$$

Quindi $(\widetilde{z} - d) \sim Exp(\lambda),\ (\widetilde{z} > d)$
Ovvero gli importi $\widetilde{z}$ e $\widetilde{z} - d$ sono identicamente distribuiti.
La distribuzione esponenziale è usata:

- per la sua trattabilità matematica
- per l'analisi in presenza di limitazione contrattuali come franchigie e massimali
- riassicurazione per eccesso di sinistro con priorità d
- base statistica incompleta

Contro:

- sottovaluta il peso di grandi sinistri
- la funzione di densità è monotona decrescente

14.2 Distribuzione Gamma

La distribuzione del danno sarà una Gamma se:

$$f(z) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\lambda z},\ z > 0 \quad con\ \alpha, \lambda \geq 0$$

Risultano:

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^z S(n)\, dn,\ z > 0 \\ M(S) &= \left(1 - \frac{S}{\lambda}\right)^{-\alpha},\ s < \lambda \\ \varphi(S) &= \ln M(S) = -\alpha \ln\left(1 - \frac{S}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

da cui derivano i momenti:

$$\begin{aligned} \varphi'(S) &= \frac{\alpha}{\lambda}\left(1 - \frac{S}{\lambda}\right)^{-1} \Longrightarrow \varphi'(0) = \frac{\alpha}{\lambda} = E[\tilde{z}] \\ \varphi''(S) &= \frac{\alpha}{\lambda^2}\left(1 - \frac{S}{\lambda}\right)^{-2} \Longrightarrow \varphi''(0) = \frac{\alpha}{\lambda^2} = \sigma^2(\tilde{z}) \\ \varphi'''(S) &= \frac{2\alpha}{\lambda^3}\left(1 - \frac{S}{\lambda}\right)^{-3} \Longrightarrow \varphi'''(0) = \frac{2\alpha}{\lambda^3} = k_3 \\ \gamma &= \frac{k_3}{\sigma^3} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}} > 0 \end{aligned}$$

Se $\alpha = 1$ risulta:

$$f(z) = \lambda e^{-\lambda z},\ z > 0$$

Quindi $\Gamma(1, \lambda) = Exp(\lambda)$

14.3 Distribuzione log-normale

Una variabile del costo singolo sinistro $\widetilde{z}$ si distribuisce come una log-normale se:

$$\widetilde{z} = d + e^{\widetilde{y}},\ d \geq 0$$

dove d: punto iniziale del range di $\widetilde{z}$ (il valore minimo del danno). Quindi $\widetilde{z} \geq d$
$\widetilde{y}$ è una variabile aleatoria normale (μ, σ^2)

$$e^{\widetilde{y}} = \widetilde{z} - d \Longrightarrow \widetilde{y} = \ln(\widetilde{z} - d)$$

Quindi si ha:

$$f(z) = \mathbb{P}\{\widetilde{z} \leq z\} = \mathbb{P}\{\widetilde{y} \leq \ln(z - d)\} = N\left[\ln(z - d)\right]$$

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{(z-d)\sigma\sqrt{2\pi}},\ x = \ln(z - d) - \mu,\ z > d$$

$F(z) = S(z) = \Phi(x)$ dove $\Phi(x)$ è la funzione di ripartizione di una normale standard.
Si ricavano i momenti:

$$E[\widetilde{z}] = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} + d$$
$$\sigma^2(\widetilde{z}) = e^{(2\mu + \sigma^2)}\left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$
$$\gamma(\widetilde{z}) = \left(e^{\sigma^2} + 2\right)\sqrt{e^{\sigma^2} - 1} > 0$$

$\gamma(\widetilde{z})$ sale se sale σ^2

Se dai dati osservati si hanno:
$E[\widetilde{z}] = m,\ \sigma^2(\widetilde{z}) = \sigma,\ \gamma(\widetilde{z}) = \gamma$
i parametri della log-normale si ottengono così:

$$d = m - \frac{\sigma}{\eta},$$
$$\sigma^2 = \ln(1 + \eta),$$
$$\mu = \ln(m - d) - \frac{\sigma^2}{2}$$

Dove η è una variabile ausiliaria, radice dell'equazione:

$$\eta^2 + 3\eta - \gamma = 0$$

Se γ sale allora salgono anche μ e d
Se l'asimmetria γ è molto elevata, la distribuzione potrebbe non essere adatta a rappresentare l'intero range del danno $\widetilde{z}$

- La distribuzione log-normale è adatta a descrivere la distribuzione del danno generato da
  - molti fattori
  - ugualmente distribuiti
  - reciprocamente indipendenti
  - agenti in senso moltiplicativo l'uno con l'altro
- È molto utile per rappresentare il costo sinistri quando
  - sinistri di piccolo importo hanno bassa frequenza
  - sinistri di medio importo hanno elevata frequenza
  - sinistri di elevato importo hanno scarsa frequenza
- La funzione generatrice dei momenti non esiste finita per ogni valore del parametro positivo e non può essere scritta in forma chiusa
- Siano $\widetilde{X}_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2$ con $n \to +\infty$ variabile aleatoria positiva e iid $\forall i$. Se le $\widetilde{X}$ sono positive, allora la distribuzione log-normale può fornire un'approssimazione per il loro prodotto

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(\widetilde{X}_i),\ con\ \widetilde{z} = \prod_{i=1}^{n} \widetilde{X}_i$$

14.4 Distribuzione di Pareto

La distribuzione del danno può seguire una distribuzione di Pareto se:

$$S(z) = F(z) = 1 - \left(\frac{D+\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha}, \; z \geq D, \; \alpha > 0, \; \beta > -D$$

- Il parametro α, parametro di forma, esprime la pesantezza della coda della distribuzione:

  $$\overline{F}(z) = \left(\frac{D+\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha}$$

  e poiché $\left(\frac{D+\beta}{z+\beta}\right) \leq 1$, essendo $z \geq D$ allora $\overline{F}(z)$ sale se α scende

- Il parametro β, parametro di posizione, influenza maggiormente il range sinistro della distribuzione

- Il parametro D definisce il range di $\tilde{z}$

La formula di Pareto è spesso appropriata per la distribuzione del danno $\tilde{z}$ quando possono avvenire sinistri di eccezionale gravità (che richiedono alti risarcimenti)
Si ricavano i momenti:

$$\begin{aligned} E[\tilde{z}] &= \frac{\alpha \cdot D + \beta}{\alpha - 1}, \; \exists \; \textit{solo se} \; \alpha > 1 \\ \sigma^2(\tilde{z}) &= \frac{\alpha(D+\beta)^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \; \exists \; \textit{solo se} \; \alpha > 2 \\ \gamma(\tilde{z}) &= 2\frac{\alpha+1}{\alpha-3}\sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}}, \; \exists \; \textit{solo se} \; \alpha > 3 \end{aligned}$$

- Solo un numero finito di momenti esiste:

  $$E\left[\tilde{z}^n\right] = +\infty, \; \textit{per} \; n \geq \alpha$$

- L'asimmetria (quando esiste) è sempre positiva

- Valori di α appropriati per la rappresentazione dei dati reali in genere variano in $(1^- < \alpha < 3^+)$

- La distribuzione non ha una funzione generatrice dei momenti

NB

- La Pareto può essere utilmente impiegata per descrivere, in maniera analiticamente semplice, la coda della distribuzione del danno
- Il problema di avere momenti infiniti è risolvibile mediante un trattamente della distribuzione della forma

$$\overline{F}(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{D+\beta}{z+\beta}\right)^{\alpha}, & se\ D \leq z < M < \infty \\ 0, & se\ z \geq M \end{cases}$$

dove M assume il ruolo di MPL: Maximum possible loss (Massimo danno possibile)

14.5 Distribuzione di Weibull (Frechet)

Se $\widetilde{Y} \sim Exp(\lambda)$ allora la va $\widetilde{z} = \widetilde{y}^{\frac{1}{C}}$, C>0 è detta distribuzione di Weibull con:

$$f(z) = C\lambda z^{C-1} e^{-\lambda z^C},\ z > 0$$
$$S(z) = F(z) = 1 - e^{-\lambda z^C},\ z > 0$$

- Se $C = 1 \Rightarrow \overline{F} = e^{-\lambda z} \Rightarrow$ distribuzione esponenziale (λ)
- Se $0 < C < 1 \Rightarrow$ Coda della Weibull più pesante dell'esponenziale
- Se $C > 1 \Rightarrow$ Coda dell'esponenziale più pesante della Weibull

La distribuzione esponenziale rappresenta la distribuzione di riferimento per definire lo "spessore" della coda di una distribuzione continua

14.6 Casi Particolari

14.6.1 Distribuzione di Erlang

Il danno $\widetilde{z}$ segue una distribuzione di Erlang di parametri (n, λ) quando può essere generata dalla somma di n addendi stocasticamente indipendenti e distribuiti tutti secondo la distribuzione esponenziale di parametro λ. Allora:

$$f(z) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-\lambda z}, \qquad z > 0$$
$$\overline{F}(z) = e^{-\lambda z} \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda z)^k, \qquad z > 0,\ n \in N,\ \lambda \geq 0$$

Risultano:

$$E[\tilde{z}] = \frac{n}{\lambda},\ \sigma^2(\tilde{z}) = \frac{n}{\lambda^2},\ \gamma(\tilde{z}) = \frac{2}{\sqrt{n}} > 0$$

$\gamma(\tilde{z}) \to 0$ se $n \to \infty$

14.6.2 Distribuzione shifted Gamma

Se la va $\widetilde{Y} \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, allora la variabile aleatoria $\tilde{z} = \widetilde{Y} + d$, $d \geq 0$ ha distribuzione shifted-Gamma (α, λ, d) con α, $\lambda \geq 0$. Risulta:

$$E[\tilde{z}] = d + \frac{\alpha}{\lambda}$$
$$\sigma^2(\tilde{z}) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$
$$\gamma(\tilde{z}) = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

Se i dati ci forniscono

$$E[\tilde{z}] = m,\ \sigma^2(\tilde{z}) = \sigma^2,\ \gamma(\tilde{z}) = \gamma$$

si ricava:

$$\alpha = \frac{4}{\gamma^2};\ \lambda = \frac{2}{\sigma\gamma};\ d = m - 2\frac{\sigma}{\gamma}$$

NB: d è funzione di m, σ, γ. Usata per problema dei sinistri di piccolo importo

Capitolo 15

Distribuzione per il grado di danno (Ramo proprietà)

Sia $\tilde{z}$: importo del danno e S: somma assicurata
Il grado di danno risulta:

$$\widetilde{X} = \frac{\tilde{z}}{S}$$

Per la quantificare la distribuzione $F(x) = \mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\}$ si considerano, ad esempio, funzioni della famiglia delle distribuzioni Beta o funzioni di densità di forma quadratica

15.1 La distribuzione di Burr

Una distribuzione che rappresenta la coda pesante della distribuzione empirica del danno, più flessivile e con densità non-monotona è la distribuzione di Burr:

$$f(z) = r\alpha\lambda^{\alpha}\frac{(z-d)^{r-1}}{[\lambda + (z-d)^r]^{\alpha+1}},\ z \geq d$$
$$S(z) = F(z) = 1 - \left[\frac{\lambda}{\lambda + (z-d)^r}\right]^{\alpha}$$

con α, λ, r $> 0 \Rightarrow$ Parametri della Burr
Se r $= 1$ e $\lambda = D + \beta$ si ritrova la distribuzione di Pareto

Capitolo 16

Studio della Coda di una distribuzione (Problema dei Grandi sinistri)

16.1 Equivalenza Asintotica

Considerate due funzioni $a(x)$ e $b(x)$, se

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a(x)}{b(x)} = 1$$

allora $a(x) \sim b(x)$, per $x \to +\infty$

16.2 Confronto delle code di due distribuzioni

Siano $\overline{F}_{\widetilde{X}}(x)$ e $\overline{F}_{\widetilde{Y}}(x)$ (o $f_{\widetilde{X}}(x)$ e $f_{\widetilde{Y}}(x)$) le code (le funzioni densità) delle distribuzioni di due variabili aleatorie $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$.

$$Se \lim_{x\to+\infty} \frac{f_{\widetilde{X}}(x)}{f_{\widetilde{Y}}(x)} = 1$$
$$allora\ f_{\widetilde{X}}(x) \sim f_{\widetilde{Y}}(x)\ per\ x \to +\infty.$$

Le code hanno stesso peso.

$$Se \lim_{x\to+\infty} \frac{f_{\widetilde{X}}(x)}{f_{\widetilde{Y}}(x)} = 0$$
$$allora\ f_{\widetilde{Y}}(x) >> f_{\widetilde{X}}(x)\ per\ x \to +\infty.$$

La coda di $\widetilde{Y}$ è più pesante.

$$Se \lim_{x\to+\infty} \frac{f_{\widetilde{X}}(x)}{f_{\widetilde{Y}}(x)} = +\infty$$
$$allora\ f_{\widetilde{X}}(x) >> f_{\widetilde{Y}}(x)\ per\ x \to +\infty.$$

La coda di $\widetilde{X}$ è più pesante

16.2.1 Confronto tra Esponenziale negativa e Weibull

Consideriamo:

$$f_{\widetilde{X}}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow Exp\ neg(\lambda > 0)$$
$$f_{\widetilde{Y}}(x) = C\beta x^{C-1} e^{-\beta x^C} \Rightarrow Weibull(C > 0, \beta > 0)$$

Si calcola:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f_{\widetilde{X}}(x)}{f_{\widetilde{Y}}(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{C\beta x^{C-1} e^{-\beta x^C}} = \frac{\lambda}{C\beta} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-\lambda x} e^{\beta x^C}}{x^{C-1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x\left(\lambda-\beta x^{C-1}\right)}}{x^{C-1}} = \begin{cases} +\infty, & se\ C > 1 \\ 0, & se\ 0 < C < 1 \end{cases}$$

Quindi:

$$f_{\widetilde{X}}(x) >> f_{\widetilde{Y}}(x), \quad per\ C > 1$$
$$f_{\widetilde{Y}}(x) >> f_{\widetilde{X}}(x), \quad per\ 0 < C < 1$$

NB: si ha $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^p}$ con $p, \alpha > 0$

16.2.2 Confronto tra Gamma e Pareto

Consideriamo:

$$f_{\widetilde{X}}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\beta x} \Rightarrow \Gamma(\alpha, \beta)$$
$$f_{\widetilde{Y}}(x) = \frac{\tau C^\tau}{(X+\beta)^{\tau+1}} = \tau C^\tau (x+\beta)^{-(\tau+1)} \Rightarrow Pareto(\tau, C)$$

Si calcola:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f_{\widetilde{X}}(x)}{f_{\widetilde{Y}}(x)} &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\tau C^\tau} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{(x+\beta)^{-(\tau+1)}} \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\tau C^\tau} \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1}e^{-\beta x}(x+\beta)^{\tau+1} \\
&= \exp\left(\lim_{x\to+\infty} \ln\left[x^{\alpha-1}e^{-\beta x}(x+\beta)^{(1+\tau)}\right]\right)
\end{aligned}
$$

NB: $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\ln(x)} = e^{\lim_{x\to+\infty} \ln\ln(x)}$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} \ln\left[x^{\alpha-1}e^{-\beta x}(x+\beta)^{(1+\tau)}\right] = \\
&\lim_{x\to+\infty} \left[(\alpha-1)\ln(x) - \beta x + (1+\tau)\ln(x+\beta)\right] = -\infty \\
&e^{-\infty} = 0
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\lim_{x\to+\infty} \frac{f_{\widetilde{X}}(x)}{f_{\widetilde{Y}}(x)} = 0 \Rightarrow f_{\widetilde{Y}}{}^{1} >> f_{\widetilde{X}}(x)^{2}
$$

NB: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^p}$ con $p > 0$

16.2.3 Confronto tra Gamma e Lognormale

Siano:

$$
\begin{aligned}
f_{\widetilde{X}}(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x-\mu))^2\right) \\
f_{\widetilde{Y}}(x) &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-\beta x}
\end{aligned}
$$

---

[1] Pareto

[2] Gamma

Si calcola:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{f_{\widetilde{X}}(x)}{f_{\widetilde{Y}}(x)} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}}\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2\right)}{x^{\alpha-1}\exp\left(-\beta x\right)} \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}}\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}\lim_{x\to+\infty}x^{-\alpha}e^{\beta x}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2\right) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}}\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}\lim_{x\to+\infty}M(x) \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{(2\pi)}}\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha}\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\ln(M(x))\right) \\
\lim_{x\to+\infty}\ln(M(x)) &= \lim_{x\to+\infty}\ln\left[x^{-\alpha}e^{\beta x}+\ln\left(\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x)-\mu)^2\right)\right)\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x^{-\alpha})+\ln\left(e^{\beta x}\right)+\ln\left(\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln(x-\mu)^2\right)\right)\right)\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[-\alpha\ln(x)+\beta x-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\ln(x-\mu)\right)^2\right] = +\infty
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}M(x) = e^{+\infty} = +\infty \\
&\lim_{x\to+\infty}\frac{f_{\widetilde{X}}(x)}{f_{\widetilde{Y}}(x)} = +\infty \Longrightarrow f_{\widetilde{X}}(x)^3 >> f_{\widetilde{Y}}(x)^4
\end{aligned}$$

16.3 Confronto tra Pareto e Log-Normale

Sia:

$$\begin{aligned}
f_{\widetilde{X}}(x) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x-\mu))^2\right) \Rightarrow Log-Normale(\mu,\sigma^2) \\
f_{\widetilde{Y}}(x) &= \frac{\tau C^\tau}{(x+\beta)^{\tau+1}} = \tau C^\tau(x+\beta)^{-(\tau+1)} \Rightarrow Pareto(\tau, C)
\end{aligned}$$

Consideriamo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f_{\widetilde{X}}(x)}{f_{\widetilde{Y}}(x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-1}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x-\mu))^2\right)}{(x+\beta)^{-(\tau+1)}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+\beta)^{\tau+1}}{x}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x-\mu))^2\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty} M(x) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\ln(M(x))\right) \\
\lim_{x\to+\infty} M(x) &= \lim_{x\to+\infty} \ln\left[\frac{(x+\beta)^{1+\tau}}{x}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x-\mu))^2\right)\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x+\beta)^{1+\tau} - \ln(x) + \ln\left(\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x-\mu))^2\right)\right)\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left[(1+\tau)\ln(x+\beta) - \ln(x) - \frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x-\mu))^2\right] = -\infty \\
\lim_{x\to+\infty} M(x) &= e^{-\infty} = 0
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$
\lim_{x\to+\infty} \frac{f_{\widetilde{X}}(x)}{f_{\widetilde{Y}}(x)} = 0 \Longrightarrow f_{\widetilde{Y}}(x)^5 >> f_{\widetilde{X}}(x)^6
$$

[5] Pareto

[6] Log-Normale

Capitolo 17

Costo sinistri aggregato

Si consideri un portafoglio composto da una sola classe di rischio. Sia:

$$\widetilde{X} = \sum_{i=1}^{\widetilde{K}} \widetilde{z}_i$$

il costo sinistri aggregato del portafoglio con:
$\widetilde{K}$: numero totale di sinistri nel portafoglio
$\widetilde{z}_i$: il costo aleatorio dell'i-esimo rischio.
Siano $\widetilde{z}_i$ e $\widetilde{K}$ indipendenti. Allora:

$$F(x) = \mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\widetilde{K} = k\} \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k} \widetilde{z}_i \leq x\right\}$$

Assumiamo che le variabili aleatorie $\widetilde{z}_i$ siano tutte iid. Allora:

$$S(z) = \mathbb{P}\{\widetilde{z}_i \leq z\}, \ \forall i$$

Allora si può assumere che:
$\widetilde{X}$ variabile composta
$F_{\widetilde{X}}(x)$ distribuzione composta.
In particolare se:
Se $\widetilde{K} \sim$ Poisson $\Rightarrow \widetilde{X}$ è Poisson composita
Se $\widetilde{K} \sim$ Poisson Mista $\Rightarrow \widetilde{X}$ è Poisson Mista composita
Se $\widetilde{K} \sim$ Binomiale Negativa $\Rightarrow \widetilde{X}$ è Binomiale negativa composita
Se

$$S^{k*}(x) = \mathbb{P}\left\{\sum_{i=1}^{k} \widetilde{z}_i \leq x\right\}$$

allora:

$$F_{\widetilde{X}}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\widetilde{K} = k\} S^{k*}(x)$$

La funzione generatrice dei momenti di $\widetilde{X}$, poste le ipotesi di sopra e $\widetilde{K}=k$ è:

$$\begin{aligned}
M_{\widetilde{X}}(S|\widetilde{K}=k) &= M_{\widetilde{z}_1+\dots+\widetilde{z}_k} \\
&= M_{\widetilde{z}_1}(S)\dots M_{\widetilde{z}_k}(S) \\
&= M_{\widetilde{z}}(S)\dots M_{\widetilde{z}} \quad k-volte \\
&= [M_{\widetilde{z}}(S)]^k
\end{aligned}$$

Allora la funzione generatrice dei momenti di $\widetilde{X}$ non condizionata è:

$$\begin{aligned}
M_{\widetilde{X}}(S) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\widetilde{K}=k\} M_{\widetilde{X}}(S|\widetilde{K}=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\widetilde{K}=k\} \, [M_{\widetilde{z}}(S)]^k \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\widetilde{K}=k\} e^{(k\ln(M_{\widetilde{z}}(S)))} \\
&= E\left[e^{(\widetilde{K}\ln(M_{\widetilde{z}}(S)))}\right] = M_{\widetilde{K}}\left(\ln(M_{\widetilde{z}}(S))\right) \\
&= M_{\widetilde{K}}(\varphi_{\widetilde{z}}(S))
\end{aligned}$$

Quindi la funzione generatrice dei cumulanti sarà:

$$\varphi_{\widetilde{X}}(S) = \ln(M_{\widetilde{K}}(\varphi_{\widetilde{Z}}(S))) = \varphi_{\widetilde{K}}(\varphi_{\widetilde{z}}(S))$$

- Se $\widetilde{K} \sim$ Poisson(n):

$$\varphi_{\widetilde{X}}(S) = \varphi_{\widetilde{K}}(\varphi_{\widetilde{z}}(S)) = n\left(e^{\varphi_{\widetilde{z}}(S)} - 1\right) = ne^{\ln(M_{\widetilde{z}}(S))} - n = nM_{\widetilde{z}}(S) - n$$

$$\varphi'_{\widetilde{X}}(S) = nM'_{\widetilde{z}}(S) \Rightarrow E[\widetilde{X}] = \varphi'_{\widetilde{X}}(0) = na_1 = n\cdot m$$

$$\varphi''_{\widetilde{X}}(S) = nM''_{\widetilde{z}}(S) \Rightarrow \sigma^2(\widetilde{X}) = \varphi_{\widetilde{X}}(0) = n\cdot a_2$$

$$\varphi'''_{\widetilde{X}}(S) = nM'''_{\widetilde{z}}(S) \Rightarrow k_3(\widetilde{X}) = \varphi'''_{\widetilde{X}}(0) = n\cdot a_3 \Rightarrow \gamma_{\widetilde{X}} = \frac{a_3}{a_2^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}}$$

- Se $\widetilde{K} \sim$ Poisson Mista

$$\varphi_{\widetilde{X}}(S) = \varphi_{\widetilde{K}}(\varphi_{\widetilde{z}}(S)) = \varphi_{\widetilde{q}}\left(n\left(e^{\varphi_{\widetilde{z}}(S)} - 1\right)\right) = \varphi_{\widetilde{q}}\left(n\left(M_{\widetilde{z}}(S) - 1\right)\right)$$

$$\varphi'_{\widetilde{X}}(S) = nM'_{\widetilde{z}}(S)\varphi'_{\widetilde{q}}(n(M_{\widetilde{z}}(S) - 1))$$

$$\varphi''_{\widetilde{X}}(S) = nM''_{\widetilde{z}}(S)\varphi'_{\widetilde{q}}(n(M_{\widetilde{z}}(S) - 1)) + \left[nM'_{\widetilde{z}}(S)\right]^2 \varphi''_{\widetilde{q}}(n(M_{\widetilde{z}}(S) - 1))$$

$$\varphi'''_{\widetilde{X}}(0) = [...]na_3 + 3n^2ma_2\sigma^2_{\widetilde{q}} + n^3m^3\gamma_{\widetilde{q}}\sigma^2_{\widetilde{q}} = k_3(\widetilde{X})$$

$$E[\widetilde{X}] = \varphi'_{\widetilde{X}}(0) = na_1\varphi'_{\widetilde{q}}(0) = na_1E[\widetilde{q}] = n \cdot m \quad \textit{Risk Premium}(\mu_x, p)$$

$$\sigma^2(\widetilde{X}) = \varphi''_{\widetilde{X}}(0) = na_2\varphi'_{\widetilde{q}}(0) + (na_1)^2\varphi''_{\widetilde{q}}(0) = na_2E[\widetilde{q}] + n^2a_1^2\sigma^2_{\widetilde{q}} = na_2 + n^2m^2\sigma^2_{\widetilde{q}}$$

$$\gamma(\widetilde{X}) = \frac{na_3 3n^2ma_2\sigma^2_{\widetilde{q}} + n^3m^3\gamma_{\widetilde{q}}\sigma^3_{\widetilde{q}}}{\left(na_2 + n^2m^2\sigma^2_{\widetilde{q}}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Introducendo gli indici di rischio:

$$r_2 = \frac{a_2}{m^2};\ r_3 = \frac{a_3}{m^3}$$

i momenti possono scriversi così:

$$\mu_{\widetilde{X}} = n \cdot m$$

$$\sigma^2_{\widetilde{X}} = n^2 \cdot m^2 \left[\frac{r_{2,\widetilde{z}}}{n} + \sigma^2_{\widetilde{q}}\right]$$

$$\gamma_{\widetilde{X}} = \frac{\frac{r_{3,\widetilde{z}}}{n^2} + 3r_{2,\widetilde{z}}\frac{\sigma^2_{\widetilde{q}}}{n} + \gamma_{\widetilde{q}}\sigma^3_{\widetilde{q}}}{\left(\frac{r_{2,\widetilde{z}}}{n} + \sigma^2_{\widetilde{q}}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

con

$$r_{2,\widetilde{z}} = \frac{a_2}{m^2} = \frac{\sigma^2_{\widetilde{z}} + m^2}{m^2} = 1 + \left(\frac{\sigma(\widetilde{z})}{E[\widetilde{z}]}\right)^2$$

Indicato con $\frac{\widetilde{X}}{p}$ il log-ratio, la sua deviazione standard è

$$\sigma\left(\frac{\widetilde{X}}{p}\right) = \frac{\sigma_{\widetilde{X}}}{p} = \frac{n \cdot m\sqrt{\frac{r_{2,\widetilde{z}}}{n} + \sigma^2_{\widetilde{q}}}}{n \cdot m} = \sqrt{\frac{r_{2,\widetilde{z}}}{n} + \sigma^2_{\widetilde{q}}}$$

Con $\lim_{n \to +\infty} \sigma\left(\frac{\widetilde{X}}{p}\right) = \sigma_{\widetilde{q}}$

Esempi numerici.

Esempio 6. Calcolare media, varianza e asimmetria della v.a. $\tilde{z}$ costo singolo sinistro avente le seguenti distribuzioni (discrete).

z (€/mln)	$P_r\{\tilde{z} = z\}$
0,5	30%
1,0	25%
2	20%
3	15%
5	5%
10	5%
	$\Sigma = 100\%$

Risulta:

$a_1 = m = E(\tilde{z}) = 2$

$a_2 = E(\tilde{z}^2) = 8,725$

$a_3 = E(\tilde{z}^3) = 62,1875$

Quindi:

$m = 2$

$\sigma^2(\tilde{z}) = a_2 - a_1^2 = 4,725$

$\gamma(\tilde{z}) = +2,52$

Gli indici di rischio di secondo e terzo ordine valgono:

$$r_{2,\tilde{z}} = \frac{a_2}{m^2} = 2,18$$

$$r_{3,\tilde{z}} = \frac{a_3}{m^3} = 7,77$$

Esempio 7. Confronto delle distribuzioni di $\tilde{X}$ per tre compagnie.

$$\begin{cases} \text{Compagnia Alfa} \ (n=10) \\ \text{Compagnia Beta} \ (n=1000) \\ \text{Compagnia Gamma} \ (n=10 \ , \ \tilde{\rho}=1) \end{cases}$$

Per tutte le compagnie si ha:

$$\begin{cases} m=2 \ , \ \sigma^2_{\tilde{Z}} = 4{,}725 \ , \ \gamma_{\tilde{Z}} = +2{,}52 \\ E(\tilde{\rho})=1 \ , \ \sigma^2_{\tilde{\rho}} = 0{,}18125 \ , \ \gamma_{\tilde{\rho}} = 0 \end{cases}$$

Risulta:

	Alfa	Beta	Gamma
$E(\tilde{X})$	20	2000	20
$\sigma^2(\tilde{X})$	159,75 $\uparrow$	733.725	87,25 $\downarrow$
$\gamma(\tilde{X})$	+0,778	+0,015 $\downarrow$	+0,763
$\frac{\sigma(\tilde{X})}{E(\tilde{X})}$	0,63	0,43 $\downarrow$	0,47
	$n=10$	$n=1000$	$n=10 \ , \ \tilde{\rho}=1$

17.1 Scomposizione della varianza

Se $\widetilde{X} \sim$ Poisson mista, si ha

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\widetilde{X}} &= na_2 + n^2m^2\sigma^2_{\widetilde{q}} \\
&= (na_2 + n^2m^2\sigma^2_{\widetilde{q}}) + nm^2 - nm^2 \\
&= nm^2 + n(a_2 - m^2) + n^2m^2\sigma^2_{\widetilde{q}} \\
&= m^2VAR(Poisson(n)) + nVAR(\widetilde{z}) + n^2m^2VAR(\widetilde{q}) \\
&= V_1(Dipende\ da\ \widetilde{k}) + V_2(Dipende\ da\ \widetilde{z}) + V_3(Dipende\ da\ \widetilde{q})
\end{aligned}$$

17.2 Metodi di calcolo per $F_{\widetilde{X}}(x)$

Le principali distribuzioni di probabilità relative a $\widetilde{X}$ costo sinistri aggregato, si possono calcolare con formule ricorsive se soddisfatte le due condizioni:

- Il numero dei sinistri del portafoglio ha una distribuzione che appartiene alla classe $(a, b, 0)$ per cui vale:

$$P_k = \mathbb{P}\{\widetilde{K} = k\} = \left(a + \frac{b}{k}\right) P_{k-1},\ k = 1, 2, \dots$$

- La distribuzione del costo del singolo sinistro eìè non-negativa, discreta e equidistante.
  Quindi le determinazioni di $\widetilde{z}$ sono:

$$z_i = iC,\ i = 0, 1, \dots, r$$

  dove $C > 0$ "step-length" o "passo"
  e r: numero di possibili determinazioni del costo del singolo sinistro

Nel caso siano soddisfatte le condizioni risulta:

$$f_j = \mathbb{P}\left\{\widetilde{X} = jC\right\} = \begin{cases} f_0 = \begin{cases} P_0, & se\ S_0 = 0 \\ \sum\limits_{i=0}^{+\infty} P_i S_0^i = M_{\widetilde{k}}(\ln S_0), & se\ S_0 > 0 \vee j = 0 \end{cases} \\ \dfrac{1}{1 - aS_0} \sum\limits_{i=1}^{min(j,r)} \left(a + \dfrac{ib}{j}\right) S_i f_{j-1},\ per\ j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

dove

- f_0 è il valore iniziale e dipende dalla distribuzione di P_k
- $S_i = \mathbb{P}\{\widetilde{z} = iC\}$

La funzione di ripartizione risulta:

$$F_{\widetilde{X}}(jC) = \mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq jC\} = \sum_{i=0}^{j} f_i$$

Il calcolo di $F_{\widetilde{X}}$ è molto laborioso nel caso di un r molto grande (cioè un numero elevato di possibili determinazione di $\widetilde{z}$), il che comporta elevati tempi di elaborazione.
La forma ricorrente di sopra è detta forma di Panjer

17.2.1 Esempio di approssimazione di Panjer

Sia

$$\begin{aligned} \widetilde{K} &\sim Poisson(n) \Longrightarrow a = 0,\ b = n \\ \widetilde{z} &\sim Logaritmica(p),\ p \in (0,1) \\ S_i &= \left(\frac{1}{-\ln(1-p)}\right)\frac{p^i}{i} = C\frac{p^i}{i},\ i = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Quindi $r = +\infty$, con $S_0 = 0$.
Risultano:

$$f_0 = \mathbb{P}\{\widetilde{K} = 0\} = P_0 = e^n$$

e

$$f_j = \sum_{i=1}^{j} i\frac{n}{j} S_i f_{j-1}$$

Da cui risultano:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= nS_1 f_0 = e^{-n} eCp \\
f_2 &= \frac{n}{2} S_1 f_1 + nS_2 f_0 = e^{-n} nC(1+nC)\frac{p^2}{2} \\
f_3 &= \frac{n}{3} S_1 f_2 + \frac{2}{3} nS_2 f_1 + nS_3 f_0 \\
&= \frac{n}{3} Cpe^{-n} nC(1+nC)\frac{p^2}{3} + \frac{2}{3} nC\frac{p^2}{2} e^{-n} nCp + nC\frac{p^3}{3} e^{-n} \\
&= e^{-n} nC \left[\frac{n}{3} C(1+nC)\frac{p^3}{2} + nC\frac{p^3}{3} + \frac{p^3}{3}\right] \\
&= e^{-n} nC \left[\frac{nC}{2}(1+nC) + (1+nC)\right]\frac{p^3}{3} \\
&= e^{-n} nC\,(1+nC)\left(1+\frac{nC}{2}\right)\frac{p^3}{3} \\
f_k &= e^{-n}\binom{nC+k-1}{k} p^k
\end{aligned}
$$

17.3 Forme di approssimazione di $F_{\widetilde{X}}(x)$

Per ovviare all'inconvenienza di eccessivi tempi di elaborazione, si può ricorrere a formule di approssimazione di $F_{\widetilde{X}}(x)$

- **Normal approximation (N)**

  $$F_{\widetilde{X}}(x) = \mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\widetilde{X} - E[\tilde{z}]}{\sigma_{\widetilde{X}}} \leq \frac{x - E[\widetilde{X}]}{\sigma_{\widetilde{X}}}\right\} \simeq N\left(0, \frac{x - E[\widetilde{X}]}{\sigma_{\widetilde{X}} enominatore}\right)$$

  Non tiene conto dell'asimmetria di $\widetilde{X}$. È adatta se $\gamma_{\widetilde{X}}$ è molto piccolo

- **Normal Power (NP)**

  $$F_{\widetilde{X}}(x) = \mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\} \simeq N\left(0, -\frac{3}{\gamma_{\widetilde{X}}} + \sqrt{\frac{9}{\gamma^2_{\widetilde{X}}} + 1 + \frac{6}{\gamma_{\widetilde{X}}}\frac{x - E[\widetilde{X}]}{\sigma_{\widetilde{X}}}}\right)$$

  Valida solo per la coda destra di $F_{\widetilde{X}}(x)$, $(x > E[\widetilde{X}])$. Fornisce una discreta approssimazione per $\gamma_{\widetilde{X}} \leq 1$

- **Wilson-Hilferty (WH)**

$$F_{\widetilde{X}}(x)\mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\} \simeq N\left(0, C_1 + C_2(H + C_3)^{\frac{1}{3}}\right)$$

dove: $H = \dfrac{x - E[\widetilde{X}]}{\sigma_{\widetilde{X}}}$, $C_1 = \dfrac{\gamma_{\widetilde{X}}}{6}$, $C_2 = 3\left(\dfrac{2}{\gamma_{\widetilde{X}}}\right)^{\frac{2}{3}}$, $C_3 = \dfrac{2}{\gamma_{\widetilde{X}}}$

Vale anche per la coda sinistra ($x < E[\widetilde{X}]$). Fornisce una discreta approssimazione per $\gamma_{\widetilde{X}} \leq 1, 2, \ldots$

Per livelli di asimmetria elevati, i metodi di sopra diventano inaffidabili e non dovrebbero essere utilizzati

17.3.1 Modello di Erlang per il costo sinistri aggregato

Sia $\widetilde{X} = \tilde{z}_1 + \cdots + \tilde{z}_{\widetilde{K}} = \sum_{k=1}^{\widetilde{K}} \tilde{z}_k$ costo sinistro aggregato. Ipotesi:

- $\tilde{z}_k$ reciprocamente indipendenti
- $\tilde{z}_k$ identicamente distribuiti
  - $\tilde{z} \sim$ Esponenziale negativa con $F_{\tilde{z}}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
- $\widetilde{K} \sim$ Poisson(n)

allora

$$F_{\widetilde{X}}(x) = \mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{n^k}{k!} e^{-n}\right) G_k(\lambda x),\ x > 0$$

dove $G_0(x) = 1,\ G_k(\lambda x) = 1 - e^{-x\lambda} \sum_{h=0}^{k-1} \left(\dfrac{(\lambda x)^h}{h!}\right),\ k > 1$

Dimostrazione. Consideriamo inizialmente il caso $\widetilde{K} = 2,\ \widetilde{X} = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2$. In tal caso

$$F_{\widetilde{X}}(x) = \mathbb{P}\{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 \leq x\}$$

Per l'ipotesi di indipendenza si ha

$$\mathbb{P}\{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 \leq x\} = \int_{y=0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\tilde{z}_2 \leq x - y\}\mathbb{P}\{y < \tilde{z}_1 \leq y + dy\}$$

Per l'ipotesi sulla distribuzione di $\tilde{z}$ si ha

$$\mathbb{P}\{\tilde{z}_2 \leq x - y\} = \begin{cases} 1 - e^{-(x-y)\lambda}, & \text{per } 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{per } y > x \end{cases}$$

e

$$\mathbb{P}\{y < \tilde{z}_1 \leq y + dy\} = \lambda e^{-\lambda y} dy$$

Quindi si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 \leq x\} &= \int_0^x \left[1 - e^{-(x-y)\lambda}\right] e^{-\lambda y} \lambda \, dy \\
&= \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \, dy - \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} \, dy \\
&= -e^{-\lambda y}\Big|_0^x - e^{-\lambda x} \lambda x = -e^{-\lambda x} \lambda x \\
&= 1 - (1 + \lambda x) e^{-\lambda x}, \ x \geq 0
\end{aligned}$$

Se ora consideriamo il caso k>2, $\widetilde{X} = \tilde{z}_1 + \cdots + \tilde{z}_k$, allora si ha:

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{h=1}^{k} \tilde{z}_h \leq x\right\} = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{h=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^h}{h!} = G_k(\lambda x)$$

Quindi $\widetilde{X} | \widetilde{K} = k \sim \Gamma(k, \lambda)$
con $E[\widetilde{X}] = k \dfrac{1}{\lambda}, \ \sigma^2(\widetilde{X}) = k \left(\dfrac{1}{\lambda}\right)^2$

Per il calcolo della distribuzione di $\widetilde{X} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{z}_k$ seguiamo il seguente ragionamento:

$$\begin{aligned}
&\quad\ \ \textit{Se} \ \left(\widetilde{K} = 0 \ con \ P_0 = e^{-n}\right) && e \ \left(\widetilde{X} = 0 \leq x \ con \ \mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\} = 1\right) \\
&\textit{Oppure se} \ \left(\widetilde{K} = 1 \ con \ P_1 = n e^{-n}\right) && e \ \left(\widetilde{X} = \tilde{z}_1 \leq x \ con \ \mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\} = 1 - e^{-\lambda x} = G_1(\lambda x)\right) \\
&\textit{Oppure se} \ \left(\widetilde{K} = 2 \ con \ P_1 = \frac{n^2}{2!} e^{-n}\right) && e \ \left(\widetilde{X} = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 \leq x \ con \ \mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\} = G_2(\lambda x)\right) \\
&\qquad\qquad . \\
&\qquad\qquad . \\
&\qquad\qquad . \\
&\textit{Oppure se} \ \left(\widetilde{K} = 1 \ con \ P_k = \frac{n^k}{k!} e^{-n}\right) && e \ \left(\widetilde{X} = \tilde{z}_1 + \cdots + \tilde{z}_k \leq x \ con \ \mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\} = G_k(\lambda x)\right)
\end{aligned}$$

Aggiungendo le probabilità, sostituendo all'operatore "e" il prodotto e all'operatore "o" la somma, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\} &= e^{-n} + n e^{-n}(1 - e^{-\lambda x}) + \cdots + \frac{n^k}{k!} e^{-n} \left[1 - e^{-\lambda x} \sum_{h=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^h}{h!}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} e^{-n} G_k(\lambda x), \ x > 0
\end{aligned}$$

NB
La complessità del calcolo di $\mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq x\}$ ha condotto allo sviluppo di

- Metodi di approssimazione (N, NP; WH)
- Metodi ricorsivi (Panjer)

□

17.4 Costo sinistri aggregato in un portafoglio suddiviso per classi di rischio

Sia L il numero di classi di rischio $\widetilde{X}_j$, $j = 1, 2, \ldots, L$ il costo sinistri aggregato relativo alla j-esima classe di rischio. Il costo sinistri aggregato di portafoglio risulta:

$$\widetilde{X} = \sum_{j=1}^{L} \widetilde{X}_j$$

1. Assumiamo che le $\widetilde{X}_j$, $j = 1, 2, \ldots, L$ siano reciprocamente indipendenti. Allora i momenti sono:

$$E[\widetilde{X}] = \sum_{j=1}^{L} E[\widetilde{X}_j]$$

$$\sigma^2(\widetilde{X}) = \sum_{j=1}^{L} \sigma^2(\widetilde{X}_j)$$

$$\gamma(\widetilde{X}) = \frac{\sum_{j=1}^{L} \gamma(\widetilde{X}_j)\sigma^3(\widetilde{X}_j)}{\left[\sum_{j=1}^{L} \sigma^2(\widetilde{X}_j)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

1.1. Se assumiamo che le $\widetilde{X}_j$ si distribuiscono come una variabile aleatoria Poisson composta si ha:

$$\begin{aligned}\varphi_{\widetilde{X}}(S) = \varphi_{\sum \widetilde{X}_j}(S) &= \sum_{j=1}^{L} \varphi_{\widetilde{X}_j}(S) = \sum_{j=1}^{L} \left[n_j M_{\widetilde{z}_j}(S) - n_j\right] \\ &= n \sum_{j=1}^{L} \frac{n_j}{n} M_{\widetilde{z}_j}(S) - n = n M_{\widetilde{z}}(S) - n\end{aligned}$$

dove:

$$
\begin{aligned}
n &= \sum_{j=1}^{L} n_j \\
M_{\widetilde{z}}(S) &= \sum_{j=1}^{L} \frac{n_j}{n} M_{\widetilde{z},j}(S) = \sum_{j=1}^{L} \frac{n_j}{n} E\left[e^{\widetilde{z}_j S}\right] \\
&= \sum_{j=1}^{L} \frac{n_j}{n} \int_0^{+\infty} e^{zS}\, dS_j(z) = \int_0^{+\infty} e^{zS}\, d\left(\sum_{j=1}^{L} \frac{n_j}{n} S_j(z)\right)
\end{aligned}
$$

Quindi si ha:

$$
\begin{aligned}
a_k = E[\widetilde{z}^k] &= \int_0^{+\infty} z^k\, dS(z) = \int_0^{+\infty} z^k\, d\left[\sum_{j=1}^{L} \frac{n_j}{n} S_j(z)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{L} \frac{n_j}{n} \int_0^{+\infty} z^k\, dS_j(z) = \sum_{j=1}^{L} \frac{n_j}{n} E[\widetilde{z}_j^k] \\
&= \sum_{j=1}^{L} \frac{n_j}{n} a_{k,j}
\end{aligned}
$$

Momento di ordine k della distribuzione di $\widetilde{z}$ di portafoglio
Pertanto poichè:

$$\varphi_{\widetilde{X}}(S) = nM_{\widetilde{z}}(S) - n$$

si ha:

$$
\begin{aligned}
\varphi'_{\widetilde{X}}(S) = nM'_{\widetilde{z}}(S) &\Rightarrow E[\widetilde{X}] = nM'_{\widetilde{z}}(0) = na_1 = \sum_{j=1}^{L} M_j a_{1,j} \\
\varphi''_{\widetilde{X}}(S) = nM''_{\widetilde{z}}(S) &\Rightarrow \sigma^2(\widetilde{X}) = nM''_{\widetilde{z}}(0) = na_2 = \sum_{j=1}^{L} n_j a_{2,j} \\
\varphi'''_{\widetilde{X}}(S) = nM'''_{\widetilde{z}}(S) &\Rightarrow \mu_3(\widetilde{X}) = nM'''_{\widetilde{z}}(0) = na_3 = \sum_{j=1}^{L} n_j a_{3,j} \\
\gamma(\widetilde{X}) &= \frac{\sum_{j}^{L} n_j a_{3,j}}{\left[\sum_{j=1}^{L} n_j a_{2,j}\right]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

1.2. Se assumiamo invece che le $\widetilde{X}_j$ sono variabili Poisson composte miste con variabili di disturbo $\widetilde{q}_j$ tutte indipendenti tra loro si ha:

$$\varphi_{\widetilde{X}}(S) = \varphi_{\sum \widetilde{X}_j}(S) = \sum_{j=1}^{L} \varphi_{\widetilde{X}_j}(S) = \sum_{j=1}^{L} \left[\varphi_{\widetilde{q}}\left(M_j(M_{\widetilde{z}_j}(S) - 1)\right)\right]$$

Da cui si ricava:

$$\varphi'_{\widetilde{X}}(S) = \sum_{j=1}^{L} \left[n_j M'_{\widetilde{z}_j}(S) \varphi'_{\widetilde{q}_j}(M_j(M_{\widetilde{z}_j}(S) - 1))\right]$$

$$\varphi'_{\widetilde{X}}(0) = E[\widetilde{X}] = \sum_j a_{1,j} E[\widetilde{q}_j] = \sum_{j=1}^{L} n_j a_{1,j} = \sum_{j=1}^{L} E[\widetilde{X}_j]$$

$$\varphi''_{\widetilde{X}}(S) = \sum_{j=1}^{L} \left[n_j M''_{\widetilde{z}_j}(S) \varphi'_{\widetilde{q}_j}(n_j(M_{\widetilde{z}_j}(S) - 1)) + (n_j M'_{\widetilde{z}_j}(S))^2 \varphi''_{\widetilde{q}_j}(n_j(M_{\widetilde{z}_j}(S) - 1))\right]$$

$$\varphi''_{\widetilde{X}}(0) = \sigma^2(\widetilde{X}) = \sum_{j=1}^{L} \left(n_j a_{2,j} E[\widetilde{q}] + n_j^2 a_{1,j}^2 \sigma^2_{\widetilde{q}_j}\right) = \sum_{j=1}^{L} \sigma^2(\widetilde{X}_j)$$

Per analogia si ha anche:

$$\mu_3(\widetilde{X}) = \sum_{j=1}^{L} \mu_3(\widetilde{X}_j) \Longrightarrow \gamma(\widetilde{X}) = \frac{\mu_3(\widetilde{X})}{\sigma^3(\widetilde{X})}$$

2. Assumiamo che le $\widetilde{X}_j$ siano variabili Poisson composte miste ma con variabili di disturbo sincronizzate ($\widetilde{q}_j = \widetilde{q},\ j = 1, 2, \ldots, L$). Allora le variabili aleatorie $\widetilde{X}_j$ non sono più reciprocamente indipendenti. Pertanto:

$$\varphi_{\widetilde{X}}(S) = \varphi_{\sum \widetilde{X}_j}(S) \neq \sum_{j=1}^{L} \varphi_{\widetilde{X}_j}(S)$$

e quindi:

$$\sigma^2(\widetilde{X}) \neq \sum_{j=1}^{L} \sigma^2(\widetilde{X}_j)$$

$$\mu_3(\widetilde{X}) \neq \sum_{j=1}^{L} \mu_3(\widetilde{X}_j)$$

NB

- Se $\widetilde{q}_j$ tutte positivamente correlate

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma(\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j)}{\sigma(\widetilde{X}_i)\sigma(\widetilde{X}_j)} > 0,\ \forall (i,j) i \neq j$$

  allora:

$$\sigma^2(\widetilde{X}) = \sum_{j=1}^{L} \sigma^2(\widetilde{X}_j) + \sum \sum_{i \neq j}^{L} \sigma(\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j) > \sum_{j=1}^{L} \sigma_j^2$$

  Aumenta la probabilità di rovina

- Se $\widetilde{q}_j$ tutte negativamente correlate

$$\rho_{i,j} = \frac{\sigma(\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j)}{\sigma(\widetilde{X}_i)\sigma(\widetilde{X}_j)} < 0,\ \forall (i,j) i \neq j$$

  allora:

$$\sigma^2(\widetilde{X}) = \sum_{j=1}^{L} \sigma^2(\widetilde{X}_j) + \sum \sum_{i \neq j}^{L} \sigma(\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j) < \sum_{j=1}^{L} \sigma_j^2$$

  diminuisce la probabilità di rovina
  Se vale il secondo caso

  - Principio della composizione tra i rami
  - Diversificazione del portafoglio per immunizzarlo da $\widetilde{q}_j$

Capitolo 18

Analisi di breve periodo di $\widetilde{U}_r$

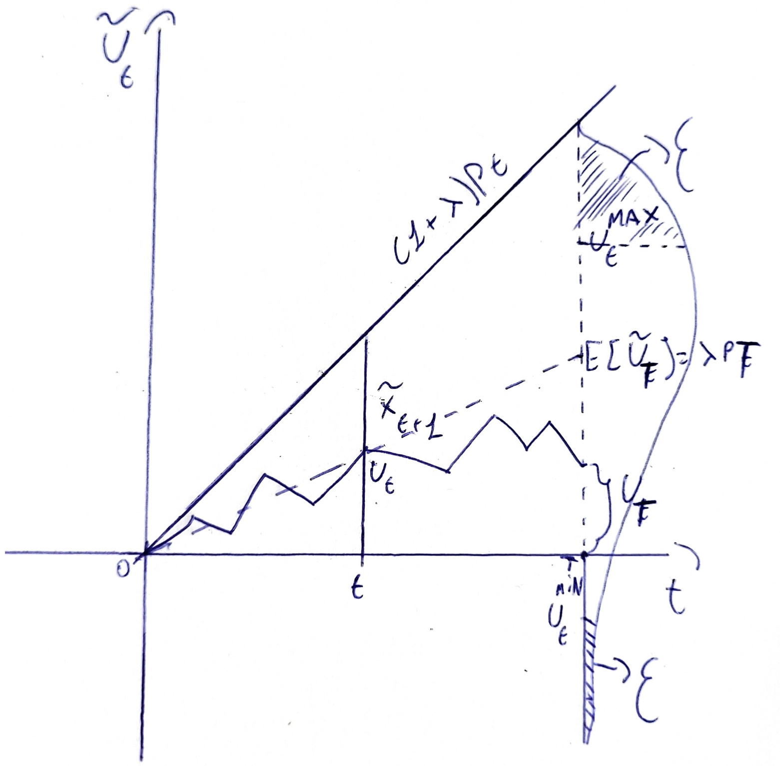
Nella TdR classica il processo di rischio è così definito:

$$\widetilde{U}_t = U_0 + (1 + \lambda)Pt - \widetilde{X}(t)$$

dove:

- $U_0 = 0$ riserva di rischio iniziale
- $P_t = P = E[\widetilde{X}_1] = \ldots E[\widetilde{X}_t]$ premio di rischio (risk-premium)
- $\lambda_t = \lambda$ caricamento di sicurezza
- $\widetilde{X}(t) = \sum_{h=1}^{t} \widetilde{X}_h$ costo sinistri nell'orizzonte temporale $[0; t]$

Nell'analisi di breve periodo ignoriamo i rendimenti finanziari annui J_t



Un importante problema è quello di valutare il range di varianza

$$R = U_T^{(MAX)} - U_T^{(MIN)}$$

in cui la riserva di rischio $\widetilde{U}_T$ cade con designata probabilità. I limiti di confidenza di $U_T^{(MAX)}$ e $U_T^{(MIN)}$ sono fissati dalla seguente relazione:

$$\mathbb{P}\{U_T^{(MIN)} \leq \widetilde{U}_T \leq U_T^{(MAX)}\} = 1 - 2\varepsilon$$

dove ε rappresenta la probabilità di confidenza fissata.
Un secondo importante problema è la valutazione del *Capitale a Rischio* U_r che, al tempo T, è pari a:

$$U_{r,T} = -U_T^{(MIN)}$$

Fissato un livello di confidenza $1 - \varepsilon$, il capitale a rischio $U_{r,T}$ può essere definito come quella parte di capitale proprio della compagnia che al tempo 0, sulla base di una fissata probabilità di confidenza, può essere considerata a rischio di erosione nel periodo $[0; T]$ a seguito di caricamenti di sicurezza che nell'orizzonte $[0; T]$ non riescono a far fronte agli scarti del costo sinistri in eccessi alla media (cioè si verifica $(1 + \lambda)PT < \widetilde{X}(T)$ oppure $\lambda PT < \widetilde{X}(T) - PT$. E quindi:

$$\mathbb{P}\{\widetilde{U}_T \geq -U_{r,T}\} = \mathbb{P}\{\widetilde{U}_T \geq U_T^{(MIN)}\} = 1 - \varepsilon$$

$$\mathbb{P}\{(1+\lambda)PT - \widetilde{X}(T) \geq -U_{r,T} = U_T^{(MIN)} | U_0\} = 1 - \varepsilon$$

Nell'analisi di breve periodo si pone di solito T = 1 (orizzonte annuale). Questi semplifica le analisi ma sottovaluta gli effetti ciclici che comportano fluttuazioni dei rischi possibili perdite anche per più anni consecutivi. Gli approcci alla relazione:

$$\mathbb{P}\{\widetilde{U} \geq -U_r\} = 1 - \varepsilon$$

con $\widetilde{U} = (1+\lambda)P - \widetilde{X}$, possono essere di due tipi:

- Fissata una probabilità $1 - \varepsilon$ cercare il valore di U_r
- Fissato U_r determinare la probabilità associata $1 - \varepsilon$

18.1 Momenti della Riserva di Rischio e determinazione della probabilità di rovina

Consideriamo, su un orizzonte annuale, la riserva di rischio a fine esercizio:

$$\widetilde{U} = U_0 + [(1+\lambda)P - \widetilde{X}],\ U_0 \geq 0$$

Risulta:

$$E[\widetilde{U}] = U_0 + [(1+\lambda)P - E[\widetilde{X}]] = U_0 + \lambda P,\ \textit{poichè}\ P = E[\widetilde{X}]$$

$$\sigma^2(\widetilde{U}) = \sigma^2(\widetilde{X})$$

$$\mu_3(\widetilde{U}) = -\mu_3(\widetilde{X}) \Rightarrow \gamma(\widetilde{X}) = \frac{\mu(\widetilde{U})}{\sigma^2(\widetilde{U})} = -\frac{\mu_3(\widetilde{X})}{\sigma^3(\widetilde{X})} = -\gamma(\widetilde{X})$$

La probabilità di rovina risulta:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \mathbb{P}\{\widetilde{U} < 0\} = \mathbb{P}\{U_0 + (1+\lambda)P - \widetilde{X} < 0\} \\ &= \mathbb{P}\{\widetilde{X} > U_0 + (1+\lambda)P\} = 1 - \mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq U_0 + (1+\lambda)P\} \\ &= 1 - F_{\widetilde{X}}(U_0 + (1+\lambda)P)\end{aligned}$$

Il limite superiore della probabilità di rovina tramite il teorema di Cantelli diventa:

$$\varepsilon = \mathbb{P}\left\{\widetilde{U} = U_0 + (1+\lambda)P - \widetilde{X} < 0\right\} \leq \frac{1}{1 + \left[\frac{U_0 + \lambda P}{\sigma(\widetilde{X})}\right]^2}$$

Esempio

Esempio. Calcolo della probabilità di rovina (approximata) per tre ipotetiche compagnie.

Consideriamo le seguenti ipotetiche compagnie:

Compagnia ALFA $\to n=10 \to \tilde{K}|\tilde{p}$

Compagnia BETA $\to n=1.000 \to \tilde{K}|\tilde{p}$

Compagnia GAMMA $\to n=10$ e $\tilde{p}=1 \to \tilde{K}|\tilde{p}=1$

Sia:

$$\tilde{K}\,|\,p=1 \sim \text{Poisson}(n) \longrightarrow \begin{cases} E(\tilde{K}|\tilde{p}=1)=n \\ \sigma^2(\tilde{K}|\tilde{p}=1)=n \\ \gamma(\tilde{K}|\tilde{p}=1)=1/\sqrt{n} \\ \sigma/E \quad = 1\sqrt{n} \end{cases}$$

$$\tilde{p}=\begin{cases} 0{,}25 & 10\% \\ 0{,}50 & 10\% \\ 0{,}75 & 15\% \\ 1 & 30\% \\ 1{,}25 & 15\% \\ 1{,}50 & 10\% \\ 1{,}75 & 10\% \end{cases} \to \begin{cases} E(\tilde{p})=1 \\ \sigma^2(\tilde{p})=0{,}18125 \\ \gamma(\tilde{p})=0 \\ \sigma/E=0{,}426 \end{cases}$$

$$\tilde{z}=\begin{cases} 0{,}5 & 30\% \\ 1 & 25\% \\ 2 & 20\% \\ 3 & 15\% \\ 5 & 5\% \\ 10 & 5\% \end{cases} \to \begin{cases} E(\tilde{z})=m=2 \\ \sigma^2(\tilde{z})=4{,}725 \\ \gamma(\tilde{z})=+2{,}52 \\ \sigma/E=1{,}087 \end{cases} \to \begin{cases} a_1=2 \\ a_2=8{,}725 \\ a_3=62{,}1875 \end{cases}$$

1) Sia $\lambda = 0$ e $U_0 = 0$. Allora

$$\alpha = \Pr\{\tilde U < 0\} = \Pr\{P - \tilde X < 0\} = \Pr\{\tilde X > P\} = 1 - \Pr\{\tilde X \le P\}$$

$$= 1 - F_{\tilde X}(P)$$

Per la Compagnia Alfa con $P = 20$, $\sigma^2_{\tilde X} = 159,75$ e $\gamma_{\tilde X} = +0,0778$, si ha:

a) Approssimazione-N:

$$F_{\tilde X}(P) \simeq N\left[\frac{P - E(\tilde X)}{\sigma_{\tilde X}}\right] = N\left[\frac{20-20}{\sqrt{159,75}}\right] = N[0] = 50\%$$

b) Approssimazione-NP:

$$F_{\tilde X}(P) \simeq N\left[-\frac{3}{\gamma_{\tilde X}} + \sqrt{\frac{9}{\gamma^2_{\tilde X}} + 1 + \frac{6}{\gamma_{\tilde X}} \cdot \frac{P - E(\tilde X)}{\sigma_{\tilde X}}}\right] =$$

$$\simeq N\left[-\frac{3}{0,778} + \sqrt{\frac{9}{0,778^2} + 1 + \frac{6}{0,778} \cdot \frac{20-20}{\sqrt{159,75}}}\right] = N[0,128] =$$ [redacted]

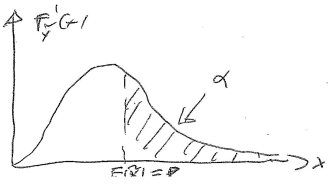
$=$ [redacted]

c) Approssimazione W-H

$$F_{\tilde X}(P) \simeq N\left[\left(\frac{\gamma_{\tilde X}}{6} - \frac{6}{\gamma_{\tilde X}}\right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{\gamma_{\tilde X}}\right)^{2/3} \cdot \left[\frac{P - E(\tilde X)}{\sigma_{\tilde X}} + \frac{2}{\gamma_{\tilde X}}\right]^{\frac{1}{3}}\right]$$

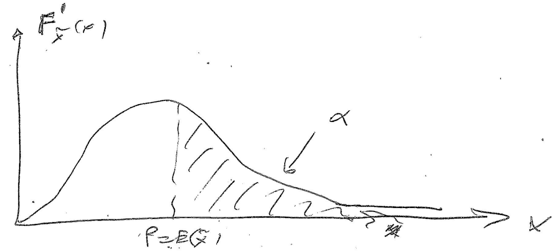
$$= N\left[\left(\frac{0,778}{6} - \frac{6}{0,778}\right) + 3\left(\frac{2}{0,778}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left[\frac{20-20}{\sqrt{159,75}} + \frac{2}{0,778}\right]^{\frac{1}{3}}\right]$$

$= N[0,130]$ [redacted]



Se $d=0$ e $U_0=0$. Per tutte le compagnie otteniamo le seguenti approssimazioni della probabilità di sopravvivenza $\alpha = 1 - F_X(P)$:

	ALFA	BETA	GAMMA
	$P=20$; $\sigma_X^2=159{,}75$; $\gamma_X=0{,}778$	$P=2000$; $\sigma_X^2=733.725$; $\gamma_X=0{,}015$	$P=80$; $\sigma_X^2=87{,}25$; $\gamma_X=0{,}763$
N	$1-N[0]=50\%$	$1-N[0]=50\%$	$1-N[0]=50\%$
NP	$1-N[0{,}128]=44{,}91\%$	$1-N[0{,}0025]=49{,}90\%$	$1-N[0{,}1252]=45{,}02\%$
WH	$1-N[0{,}130]=44{,}83\%$	$1-N[0{,}0024]=49{,}91$	$1-N[0{,}1272]=44{,}94\%$



Se $\lambda = 10\%$ e $U_0 = 40\% \cdot P$. Risulta: $\alpha = \Pr\{\tilde{U} < 0\} = \Pr\{U_0 + (1+\lambda)P < \tilde{x}\} =$

2)

$= \Pr\{\tilde{x} > U_0 + (1+\lambda)P\} = \Pr\{\tilde{x} > 40\% \cdot P + 1{,}10 \cdot P\}$

$= \Pr\{\tilde{x} > 1{,}5\,P\} = 1 - \Pr\{\tilde{x} \le 1{,}5\,P\} = 1 - F_{\tilde{x}}(1{,}5 \cdot P)$

	ALFA $\lambda P = 2$; $U_0 = 8$	BETA $\lambda P = 200$; $U_0 = 800$	GAMMA : $\lambda P = 2$; $U_0 = 8$
N	$1 - N[0{,}7912] = 21{,}45\%$ (*)	$1 - N[1{,}1674] = 12{,}15\%$ (**)	$1 - N[1{,}0706] = 14{,}22\%$ (***)
NP	$1 - N[0{,}8313] = 20{,}28\%$	$1 - N[1{,}1665] = 12{,}17\%$	$1 - N[1{,}0558] = 14{,}55\%$
NVH	$1 - N[0{,}8512] = 19{,}74\%$	$1 - N[1{,}1665] = 12{,}17\%$	$1 - N[1{,}0781] = 14{,}05\%$

NOTA: $\tilde{x} \le U_0 + (1+\lambda)P \rightarrow \frac{\tilde{x} - P}{\sigma_{\tilde{x}}} \le \frac{U_0 + \lambda P}{\sigma_{\tilde{x}}}$ dove $s = \frac{U_0 + \lambda P}{\sigma_{\tilde{x}}}$ = Indice di stabilità relativa del portafoglio

Risulta: (*) $0{,}79 = \frac{8+2}{12{,}64}$; (**) $1{,}17 = \frac{800+200}{856{,}58}$; (***) $1{,}07 = \frac{8+2}{9{,}34}$

Quindi strategie per ridurre α ? $\rightarrow$
- $U_0 \uparrow$ $\rightarrow$ problemi di reperimento capitale
- $\lambda \uparrow$ $\rightarrow$ problemi di competitività
- $\sigma_{\tilde{x}} \downarrow$ $\rightarrow$ selezione dei rischi; riassicurazione.

Il limite superiore di α del Cantelli:

$$\alpha = P_r \left\{ \tilde{U} = U_0 + (1+\lambda)P - \tilde{X} < 0 \right\} \leq \frac{1}{1 + \left[\frac{U_0 + \lambda P}{\sigma(\tilde{X})} \right]^2}$$

ALFA S.p.A $\qquad \alpha \leq \frac{1}{1+(0,79)^2} = 61,6\%$

BETA S.p.A. $\qquad \alpha \leq \frac{1}{1+(1,17)^2} = 42,2\%$

GAMMA S.p.A. $\qquad \alpha \leq \frac{1}{1+(1,07)^2} = 46,6\%$

18.2 Ricerca di U_r fissata la probabilità di rovina ε

Dalla relazione

$$\mathbb{P}\{\widetilde{U} = (1+\lambda)P - \widetilde{X} \geq -U_r\} = 1-\varepsilon$$

$$\mathbb{P}\{U_r \geq \widetilde{X} - (1+\lambda)P\} = 1-\varepsilon$$

$$\mathbb{P}\{\widetilde{X} \leq U_r + (1+\lambda)P\} = 1-\varepsilon$$

$$X_\varepsilon = U_r + (1+\lambda)P$$

Pertanto si ricava la soluzione

$$U_\varepsilon - (1+\lambda)P$$

che esprime l'ammontare del capitale che è necessario disporre in $t=0$ in modo da far fronte (con probabilità $1-\varepsilon$) alle avverse fluttuazioni del costo sinistri $\widetilde{X}$. La U_r si può ricavare con formule di approssimazione N, NP, WH o con "formule abbreviate" che collegano U_r alle variabili assicurative $(\lambda, n, m, a_2, a_3, \dots)$

18.2.1 Soluzione di U_r con Normal Power

Poichè

$$U_r = (X_\varepsilon - P) - \lambda P = (X_\epsilon - E[\widetilde{X}]) - \lambda P$$

e per la Normal Power risulta

$$\frac{X_\varepsilon - E[\widetilde{X}]}{\sigma_{\widetilde{X}}} \simeq y_\varepsilon + \frac{\gamma_{\widetilde{X}}}{6}\left(y_\varepsilon^2 - 1\right) \; se \; X_\varepsilon > E[\widetilde{X}]$$

si ha:

$$X_\varepsilon - E[\widetilde{X}] \simeq y_\varepsilon \sigma_{\widetilde{X}} + \frac{\gamma_{\widetilde{X}}}{6}\left(y_\varepsilon^2 - 1\right)\sigma_{\widetilde{X}}$$

e quindi si ottiene:

$$U_r \simeq y_\varepsilon \sigma_{\widetilde{X}} - \lambda P + R_\gamma$$

dove:

- y_ε è lo (1-ε) quantile della distribuzione normale standardizzata
- R_γ è il termine di conversione che introduce l'effetto della skewkness

$$R_\gamma = \frac{1}{6}\left(y_\varepsilon^2 - 1\right)\gamma_{\widetilde{X}}\sigma_{\widetilde{X}}$$

Si osservi che per valori piccoli di ε, cioè per $y_\varepsilon \to 1$ si ha:

$$se\ \gamma_{\widetilde{X}} > 0 \Longrightarrow R_\gamma > 0 \Rightarrow U_r\ cresce$$

$$se\ \gamma_{\widetilde{X}} < 0 \Longrightarrow R_\gamma < 0 \Rightarrow U_r\ diminuisce$$

Inoltre sapendo che:

$$\sigma_{\widetilde{X}} = P\sqrt{\frac{r_{2,\widetilde{z}}}{n} + \sigma^2_{\widetilde{q}}}$$

$$\gamma_{\widetilde{X}}\sigma_{\widetilde{X}} = P\frac{\frac{r_{3,\widetilde{z}}}{n^2} + \frac{3r_{2,\widetilde{z}}}{n} + \gamma_{\widetilde{q}}\sigma^3_{\widetilde{q}}}{\frac{r_{2,\widetilde{z}}}{n} + \sigma^2_{\widetilde{q}}}$$

Si può ottenere:

$$U_r = y_\varepsilon P\sqrt{\frac{r_{2,\widetilde{z}}}{n} + \sigma^2_{\widetilde{q}}} - \lambda P + R_\gamma$$

dove $R_\gamma = P\frac{(y^2_\varepsilon - 1)}{6}\frac{\frac{r_{3,\widetilde{z}}}{n^2} + \frac{3r_{2,\widetilde{z}}\sigma^2_{\widetilde{q}}}{n} + \gamma_{\widetilde{q}}\sigma^2_{\widetilde{q}}}{\frac{r_{2,\widetilde{z}}}{n} + \sigma^2_{\widetilde{q}}}$

Per determinare il capitale a rischio U_r abbiamo bisogno di conoscere le quantità:

$$n = E[\widetilde{K}],\ m = E[\widetilde{z}],\ \lambda,\ \sigma_{\widetilde{q}},\ r_2(o\ a_2),\ \gamma_{\widetilde{q}},\ r_3(o\ a_3)$$

NB

Qualora esiste un ammontare minimo M per ogni singolo sinistro ($\widetilde{z} \leq M$), tale variabile influirà sui valori di m, a_2 e a_3, essendo in tal caso:

$$a_j = \int_0^M z^j\, dS(z) + M^j[1 - S(M)]$$

dove M può essere ad esempio un massimale di copertura o un limite di conservazione in un trattato di riassicurazione

18.2.2 Soluzione di U_r tramite distribution free

Quest'approssimazione è utile quando:

- la distribuzione di S(z) non è conosciuta
- non si conoscono i momenti di $\widetilde{z}$
- c'è una limitazione M (es. massimale o riassicurazione)

In tal caso poichè:

$$a_j = \int_0^M z^j \, dS(z) + M^j(1-S(M)) \leq M \int_0^M z^{j-1} \, dS(z) + M \cdot M^{j--1}(1-S(M)) = M \cdot a_{j-1}$$

si ha:

$$\begin{aligned}
&a_2 \leq M a_1 \\
&a_3 \leq M a_2 \leq M^2 a_1 \\
&r_2 = \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{M a_1}{a_1} = \frac{M}{m} \quad con\ m = E[\tilde{z}] = a_1 \\
&r_3 = \frac{a_3}{a_1^3} \leq \frac{M^2 a_1}{a_1^3} = \frac{M^2}{m^2} = \left(\frac{M}{m}\right)^2
\end{aligned}$$

Allora se:

- $\widetilde{X} \sim$ Poisson composta semplice:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\widetilde{X}} = \sqrt{n a_2} \leq \sqrt{nMm} = \sqrt{MP} \\
&\gamma_{\widetilde{X}} = \frac{a_3}{a_2^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}} = \frac{a_3}{a_2 \sqrt{n a_2}} = \frac{a_3}{a_2} \frac{1}{\sigma_{\widetilde{X}}} \leq \frac{M}{\sigma_{\widetilde{X}}} \Rightarrow \gamma_{\widetilde{X}} \sigma_{\widetilde{X}} \leq M
\end{aligned}$$

  Si può osservare quindi che:

$$\sigma_{\widetilde{X}} \leq \sqrt{PM} \Longrightarrow \frac{\sigma_{\widetilde{X}}}{\sqrt{PM}} \leq 1$$

  Da uno studio condotto sulle compagnie europee è risultato un rapporto di circa 0.7. Per cui:

$$k = \frac{\sigma_{\widetilde{X}}}{\sqrt{PM}} \approx 0.7 \Longrightarrow \sigma_{\widetilde{X}} \approx 0.7 \Longrightarrow \sigma_{\widetilde{X}} \approx k^2 PM$$

- Se $\widetilde{X} \sim$ Poisson composto misto:

$$\sigma_{\widetilde{X}} = \sqrt{n a_2 + P^2 \sigma_{\widetilde{q}}^2} = \sqrt{k^2 MP + P^2 \sigma_{\widetilde{q}}^2}$$

Tenendo conto di tali relazioni si potranno ottenere dei limiti massimi per la riserva di rischio

$$U_r \simeq y_\varepsilon \sigma_{\widetilde{X}} - \lambda P + R_\gamma$$

a seconda che $\widetilde{X}$ sia una Poisson semplice o mista.

- Se $\widetilde{X} \sim$ Poisson Composto semplice

$$U_r \simeq y_\varepsilon \sigma_{\widetilde{X}} - \lambda P + R_\gamma \leq y_\varepsilon \sqrt{MP} - \lambda P + R_\gamma \leq y_\varepsilon \sqrt{PM} - \lambda P + \frac{y_\varepsilon^2}{6} M$$

Inoltre se M non è elevato, allora R_γ si può trascurare e posto $k = \dfrac{\sigma_{\widetilde{X}}}{\sqrt{PM}} = 0.7$ spesso risulta valida anche l'approssimazione:

$$U_r \simeq y_\varepsilon 0.7 \sqrt{PM} - \lambda P$$

$$\begin{aligned} Se\ \varepsilon = 1\% \Rightarrow y_\varepsilon = 2.33 &\Longrightarrow U_r \simeq 1.6\sqrt{PM} - \lambda P \\ \varepsilon = 0.1\% \Rightarrow y_\varepsilon = 3.09 &\Longrightarrow U_r \simeq 2.2\sqrt{PM} - \lambda P \end{aligned}$$

- Se $\widetilde{X} \sim$ Poisson Composta mista, ottenuto il fattore di conversione R_γ, si ha:

$$\begin{aligned} U_r &= y_\varepsilon \sigma_{\widetilde{X}} - \lambda P \\ &= y_\varepsilon \sqrt{n a_2 + P^2 \sigma_{\widetilde{q}}^2} - \lambda P \\ &\leq y_\varepsilon \sqrt{k^2 PM + P^2 \sigma_{\widetilde{q}}^2} - \lambda P \end{aligned}$$

Esempio

Esempi della distribution-free approximation (con $R_f=0$).

$$U_r \simeq y_\varepsilon \cdot \sqrt{0{,}49 \cdot P \cdot M + P^2 \cdot \sigma_{\tilde{p}}^2} - \lambda P$$

1) Sia $\sigma_{\tilde{p}} = 0$ e $\varepsilon = 1\% \longrightarrow y_\varepsilon = 2{,}33$

Con $P = 300$ ML	$P = 285$ ML	$P = 280$ ML
$M = 10$ ML	$M = 1$ ML $\downarrow$	$M = 0{,}5$ ML $\downarrow$
$\lambda = 8\%$	$\lambda = 6\%$	$\lambda = 5\%$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$U_r \simeq 63{,}6$ ML	$U_r \simeq 9{,}8$ ML $\downarrow$	$U_r \simeq 4{,}9$ ML $\downarrow$
$\frac{U_r}{P} \simeq 21{,}2\%$	$\frac{U_r}{P} \simeq 3{,}3\%$	$\frac{U_r}{P} \simeq 1{,}8\%$

2) Sia $\sigma_p = 0{,}10$ e $\varepsilon = 1\%$, nei tre casi si ha:

- $U_r \simeq 2{,}33 \cdot \sqrt{0{,}49 \cdot 300 \cdot 10 + 300^2 \cdot 0{,}10^2} - 8\% \cdot 300 =$
  $\simeq 2{,}33 \cdot 48{,}68 - 24 = 113{,}42 - 24 = 89{,}42$ ML $\uparrow$
  Con $U_r/P \simeq 29{,}8\%$
- $U_r \simeq 2{,}33 \sqrt{0{,}49 \cdot 285 \cdot 1 + 285^2 \cdot 0{,}10^2} - 6\% \cdot 285 = 56{,}5$ ML $\uparrow$
  Con $U_r/P \simeq 19{,}2\%$
- $U_r \simeq 2{,}33 \sqrt{0{,}49 \cdot 280 \cdot 0{,}5 + 280^2 \cdot 0{,}10^2} - 5\% \cdot 280 = 54{,}0$ ML $\uparrow$
  Con $U_r/P \simeq 19{,}3\%$

NB
Usando approssimazioni diverse si ha:

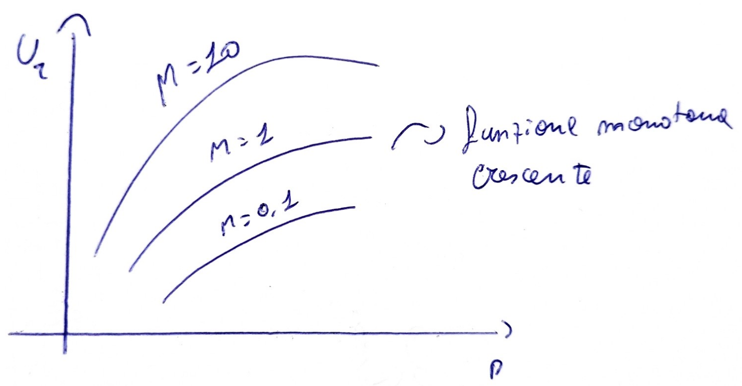
- $U_r^{WH} \simeq U_r^{NP}$
- $U_r^{N} \leq U_r^{NP}$
- $U_r^{DF} \leq U_r^{NP}$ se M basso
  $U_r^{DF} \geq U_r^{NP}$ se M alto

18.3 Studio di U_r in funzione di P e M

Sia

$$U_r = y_\varepsilon \sigma_{\widetilde{X}} - \lambda P + R_\gamma$$

con P: volume dei premi
e M: livello di conservazione in caso di riassicurazione.
Ricordando che P = P(M) e $\sigma_{\widetilde{X}} = \sigma_{\widetilde{X}}(M)$ sono funzioni di M, e con $R_\gamma = R_\gamma(M)$ risulta:



NB
Fissato M, il fabbisogno di capitale a rischio è una funzione crescente di P e quindi della diminuzione di portafoglio. Tuttavia il requisito di capitale non è linearmente proporzionale al volume dei premi P. La riserva è concava verso il basso, cioè accade perchè al crescere della dimensione di portafoglio si riduce $\gamma_{\widetilde{X}}$
Fissato P, il requisito di capitale U_r cresce perchè cresce $\sigma_{\widetilde{z}}$ e quindi $\sigma_{\widetilde{X}}$.
L'andamento parabolico della funzione $U_r(P)$, fissato M è simile a quello presenta nella formulazione del margine minimo di solvibilità fissato dalla direttiva CEE (danni), calcolato sui premi lordi, approssimata dalla spezzata:

$$U = U_0 + aB - b(B - B_0)^+ = \begin{cases} U_0 + aB & se\ B \leq B_0 \\ (U_0 + bB_0) + (a - b)B & se\ B > B_0 \end{cases}$$

con $B_0 = 10MLN\ ECU^1,\ a = 1.8\%,\ b = 2\%,\ B = P + Spese = premi\ lordi$

18.4 Studio del ratio $\frac{U_r}{P}$

Sia:

$$\frac{U_r}{P} = y_\varepsilon \sqrt{\frac{r_{2,\widetilde{z}}}{n} + \sigma^2_{\widetilde{q}}} - \lambda + \frac{R_\gamma}{P}$$

[1]Moneta contabile europea

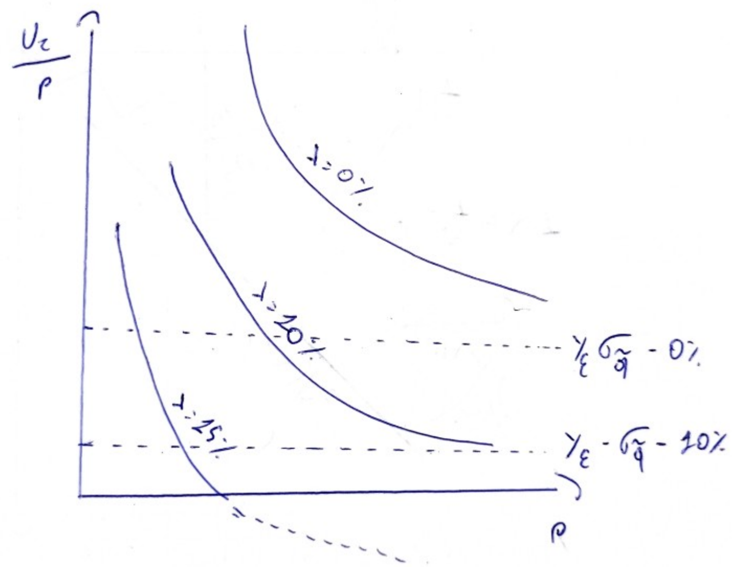
con $P = nm \Rightarrow n = E[\widetilde{K} \mid q = 1];\ m = E[\widetilde{z}],\ r_2 = \dfrac{a_2}{m^2}$.

Risulta:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_r}{P} = \lim_{n\to+\infty} \left\{ y_\varepsilon \sqrt{\frac{r_2}{n} + \sigma^2_{\widetilde{q}}} - \lambda + \frac{R_\gamma}{P} \right\} = y_\varepsilon \sigma_{\widetilde{q}}$$

deve risultare:

$$y_\varepsilon \sigma_{\widetilde{q}} - \lambda \geq 0 \Longrightarrow \lambda \leq y_\varepsilon \sigma_{\widetilde{q}}$$



Se $y_\varepsilon \sigma_{\widetilde{q}} - \lambda < 0$: esiste un limite critico per P oltre il quale non è necessario alcun capitale iniziale, ovvero il caricamento λP applicato sarà sufficiente da un certo volume di premi in poi a far fronte alle ovvie oscillazioni di $\widetilde{X}$ con confidenza $1 - \varepsilon$.

18.5 La funzione di due compagnie

Caso in cui due compagnie si fondono. Avviene in caso di fallimento, di dissesto economico o semplicemente di una acquisizione.
Siano $C_i,\ i = 1, 2$ due compagnie di assicurazione con riserva di rischio (approssimata dalla NP):

$$U_{r,i} = \left(y_\varepsilon + \frac{\gamma_i}{6}(y_\varepsilon^2 - 1) \right) \sigma_i - \lambda_i P_i,\ i = 1, 2$$

Supponiamo che i portafogli siano indipendenti.
L'obiettivo è trovare il capitale a rischio richiesto alla nuova compagnia fusione

delle due precedenti.
Per la nuova compagnia si avrebbe:

$$U_r = \left(y_\varepsilon + \frac{\gamma}{6}(y_\varepsilon^2 - 1)\right)\sigma - \lambda P$$

dove:

- $P = P_1 + P_2 \Longrightarrow \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$
- $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < \sigma_1 + \sigma_2$
- $\gamma \cdot \sigma = \frac{k_3}{\sigma^2} = \frac{k_{3,1}}{\sigma_1^2} + \frac{k_{3,2}}{\sigma_2^2} < \frac{k_{3,1}}{\sigma_1^2} + \frac{k_{3,2}}{\sigma_2^2} = \gamma_1\sigma_1 + \gamma_2\sigma_2 > \gamma\sigma$

Quindi, per piccoli valori di ε (< 0.15) risulta:

$$U_{r,1} + U_{r,2} - U_r = y_\varepsilon(\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma) - (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 - \lambda P) + \frac{1}{6}(y_\varepsilon^2 - 1)(\gamma_1\sigma_1 + \gamma_2\sigma_2 - \gamma\sigma) > 0$$

La conclusione è che la riserva di rischio necessaria per la nuova compagnia è minore della somma delle riserve necessarie per le due compagnie separatamente. Il risultato è dovuto a due fattori:

- l'aumento della diminuzione del portafoglio
- l'utilizzo più efficiente delle riserve di rischio se il livello di sicurezza $1 - \varepsilon$ risulta inalterato.

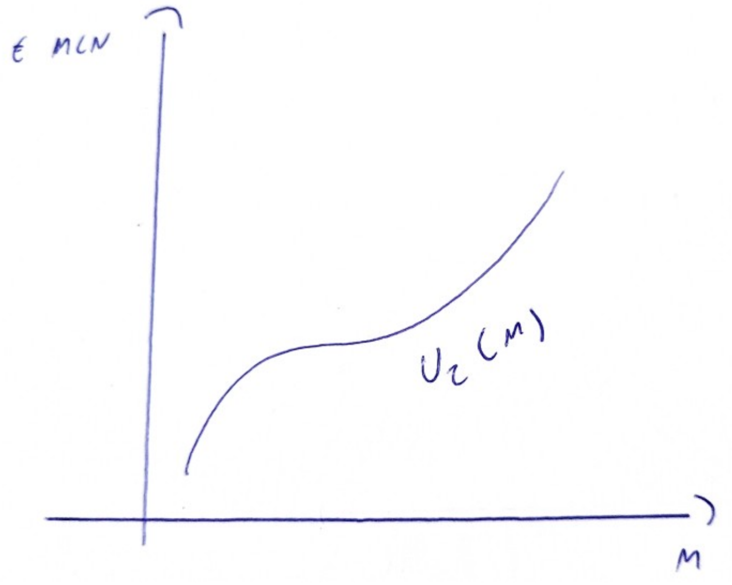
È possibili generalizzare il risultato alla combinazione di portafogli dipendenti o a più compagnie.
È possibili ottenere lo stesso vantaggio (in termini di riduzione del capitale a rischio necessario) attraverso un tarttato di riassicurazione su basi di reciprocità

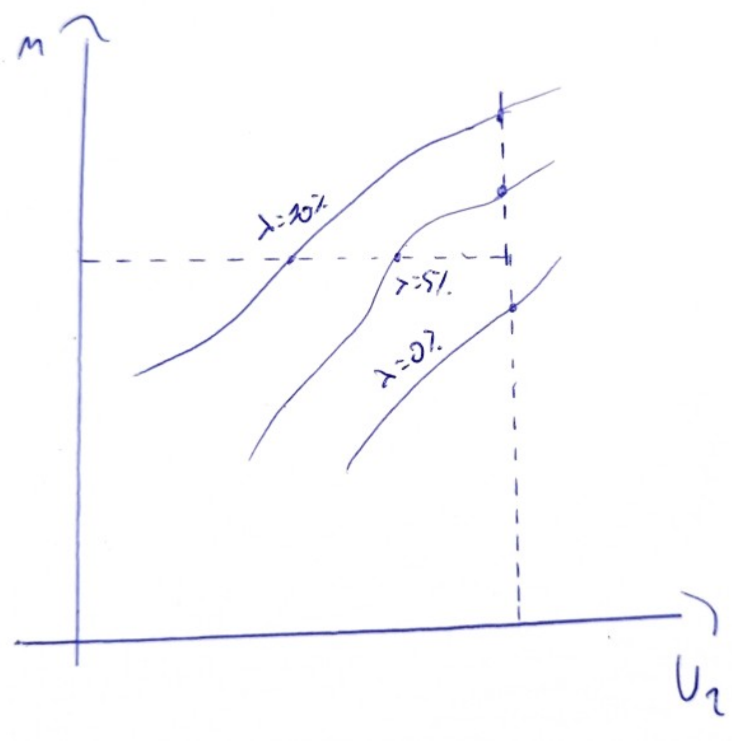
18.6 Alcune relazione per la determinazione del limite di conservazione netta M

Si consideri:

$$U_r = X_\varepsilon - (1 + \lambda)P$$

Si osservano le seguenti relazioni:





NB

- dato M, U_r cresce se decresce λ

- dato U_r, M decresce se λ decresce
- Per valori ridotti di U_r non esiste una soluzione possibile di M in quanto rimane la validità $\sigma_{\widetilde{q}}$ che un trattato di XL non può ridurre poichè agisce su $\widetilde{z}$ ma non su $\widetilde{K}$:

$$U_r = y_\varepsilon P\sqrt{\frac{r_2}{n} + \sigma^2_{\widetilde{q}}} - \lambda P + R_\gamma,\ e\ U_r \simeq y_\varepsilon\sqrt{k^2MP + P^2\sigma^2_{\widetilde{q}}} - \lambda P$$

18.6.1 Una relazione interessante tra $U_r e M$

Utilizzando le formule finali della DF per U_r, esplicitandole rispetto a M, si ha:

$$U_r \simeq y_\varepsilon\sqrt{k^2PM + P^2\sigma^2_{\widetilde{q}}} - \lambda P$$
$$(U_r + \lambda P)^2 \simeq y_\varepsilon^2(k^2PM + P^2\sigma^2_{\widetilde{q}})$$

$$M \simeq \frac{(\lambda^2 - y_\varepsilon^2\sigma^2_{\widetilde{q}})P^2 + 2\lambda U_r P + U_r^2}{k^2Py_\varepsilon^2} \tag{18.1}$$

Indichiamo con

$$W = \frac{M}{U_r},\ e\ u = \frac{U_r}{P}$$

La (18.1) si riscrive:

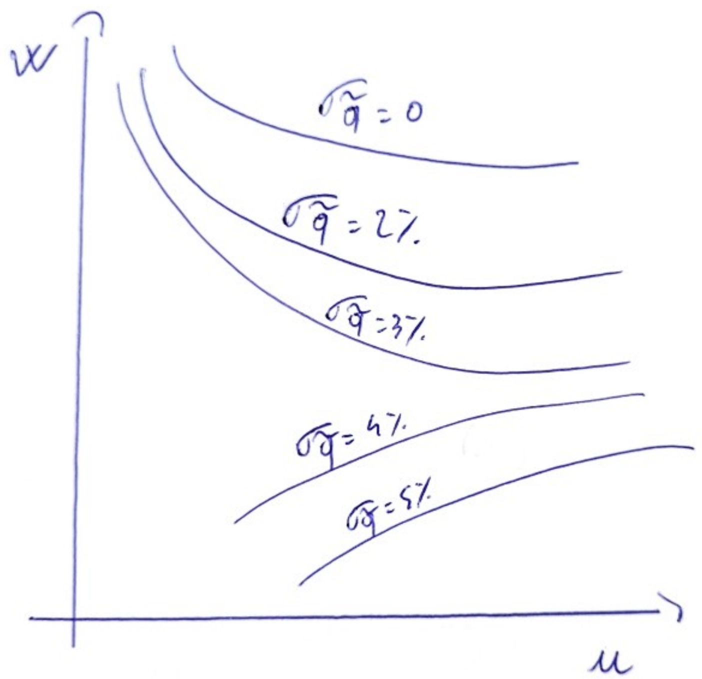
$$W = \frac{1}{k^2y_\varepsilon^2}\left(\frac{\beta}{u} + u + 2\lambda\right) \tag{18.2}$$

dove

$$\beta = \lambda^2 - y_\varepsilon^2\sigma^2_{\widetilde{q}}$$

Se $\beta > 0$, la (18.2), detta funzione iperbolica, ha un minimo al punto:

$$u = \sqrt{\beta},\ W = \frac{2(\lambda + \sqrt{\beta})}{k^2y_\varepsilon^2}$$



di conseguenza (*per* $\beta > 0$) esisterà la seguente disuguaglianza

$$\frac{M}{U_r} \geq \frac{2(\lambda + \sqrt{\beta})}{k^2 t_\varepsilon^2}$$

che può essere semplificata in ($\sigma_{\widetilde{q}} = 0$)

$$M \geq \frac{4\lambda}{k^2 y_\varepsilon^2} U_r \tag{18.3}$$

Esempio
Se $k = 0.7$, $\varepsilon = 1\% \Rightarrow y_\varepsilon = 2.33$
si ha: $M \geq 1.5\lambda U_r$
e se: $\lambda = 6\%$ e $U_r = 10\ MLN \Rightarrow M \geq 0.9\ MLN$
Dalla (18.3) si ha: M decresce se λ decresce, y_ε cresce. ε decresce, $\sigma_{\widetilde{X}}$ cresce e U_r decresce.

Capitolo 19

Analisi di lungo periodo del processo $\widetilde{U}$

Considerando i rendimenti finanziari J_t, il processo di rischio è definito dalla relazione:

$$\widetilde{U}_t = \widetilde{U}_{t-1} + (1+\lambda_t) - P_t + \widetilde{J}_t - \widetilde{X}_t \tag{19.1}$$

dove: $P_t = E[\widetilde{X}_t]$ premio di rischio e $\widetilde{J}_t = j_t(\widetilde{U}_{t-1} + L_{t-1})$ con j_t tasso di rendimento e L_{t-1} le passività (riserve tecniche).
Sia:

$$B_t = P_t + \lambda_t P_t + E_t \quad (dove\ E_t\ sono\ premi\ di\ tariffa)$$

ovvero:

$$B_t = B_{t-1}(1 + i_t^{(g)})(1 + i_t)$$

dove i_t è il tasso di inflazione e $i_t^{(g)}$ è il tasso di crescita reale. Rapportando la (19.1) al volume dei premi di tariffa B_t si ottiene:

$$\frac{\widetilde{U}_t}{B_t} = (1+j_t)\frac{\widetilde{U}_{t-1}}{B_t} + \frac{(1+\lambda_t)P_t}{B_t} - \frac{\left\{\widetilde{X}_t - j_t L_{t-1}\right\}}{B_t} \tag{19.2}$$

dove $\left\{\widetilde{X}_t - j_t L_{t-1}\right\}$ è il costo sinistri attualizzati
Riscrivendo la (19.2) in termini di ratio si ha:

$$\widetilde{u}_t = (1+j_t)\widetilde{u}_{t-1}\frac{B_{t-1}}{B_t} + (1+\lambda_t)\widetilde{P}_t - \widetilde{X}_t^{(att)} \tag{19.3}$$

Indicando con r_t il fattore composto

$$r_t = (1+j_t)\frac{B_{t-1}}{B_t} = \frac{(1+j_t)}{(1+i_t^{(g)})(1+i_t)}$$

si ottiene

$$\widetilde{u}_t = r_t \widetilde{u}_{t-1} + (1+\lambda_t)\widetilde{P}_t - \widetilde{X}_t^{(att)} \tag{19.4}$$

Infine se consideriamo:

- $r_t = r =$ costante
- $\lambda_t = \lambda =$ costante
- $\widetilde{X}_t = E[\widetilde{X}_t] + \widetilde{\varepsilon}_X$ con $E[\widetilde{\varepsilon}_X] = 0$
- $\widetilde{P}_t = E[\widetilde{X}_t] + \widetilde{\varepsilon}_P$ con $E[\widetilde{\varepsilon}_P] = 0$
- $E[\widetilde{X}_t] = \mu_X =$ costante

La (19.4) diventa

$$\widetilde{u}_t = r\widetilde{u}_{t-1} + \lambda E[\widetilde{X}_t] + [(1+\lambda)\widetilde{\varepsilon}_P - \widetilde{\varepsilon}_X]$$

$$\widetilde{u}_t = r\widetilde{u}_{t-1} + \lambda\mu_X + \widetilde{\varepsilon_u} \; con \; E[\widetilde{\varepsilon}_u] = 0 \tag{19.5}$$

Il valore medio del ratio $\widetilde{u}_t$ è pari a:

$$\begin{aligned} E[\widetilde{u}_t] &= r^t u_0 + \lambda\mu_X \frac{1-r^t}{1-r}, && se\ r \neq 1 \\ &= u_0 + \lambda\mu_X t, && se\ r = 1 \end{aligned}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} E[\widetilde{u}_t] &= rE[\widetilde{u}_{t-1}] + \lambda\mu_X \\ &= r[rE[\widetilde{u}_{t-2}]6\lambda\mu_X] = r^2E[\widetilde{u}_{t-2}] + \lambda\mu_X(1+r) \\ &. \\ &. \\ &. \\ &= r^t u_0 + \lambda\mu_X(1 + r + r^2 + \cdots + r^{t-1}) \\ &= \begin{cases} r^t u_0 + \lambda\mu_X \dfrac{1-r^t}{1-r}, & ser \neq 1 \\ u_0 + \lambda\mu_X t, & se\ r = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Per $t \to +\infty$, se $r < 1$ il processo del capital ratio converge verso un livello di equilibrio:

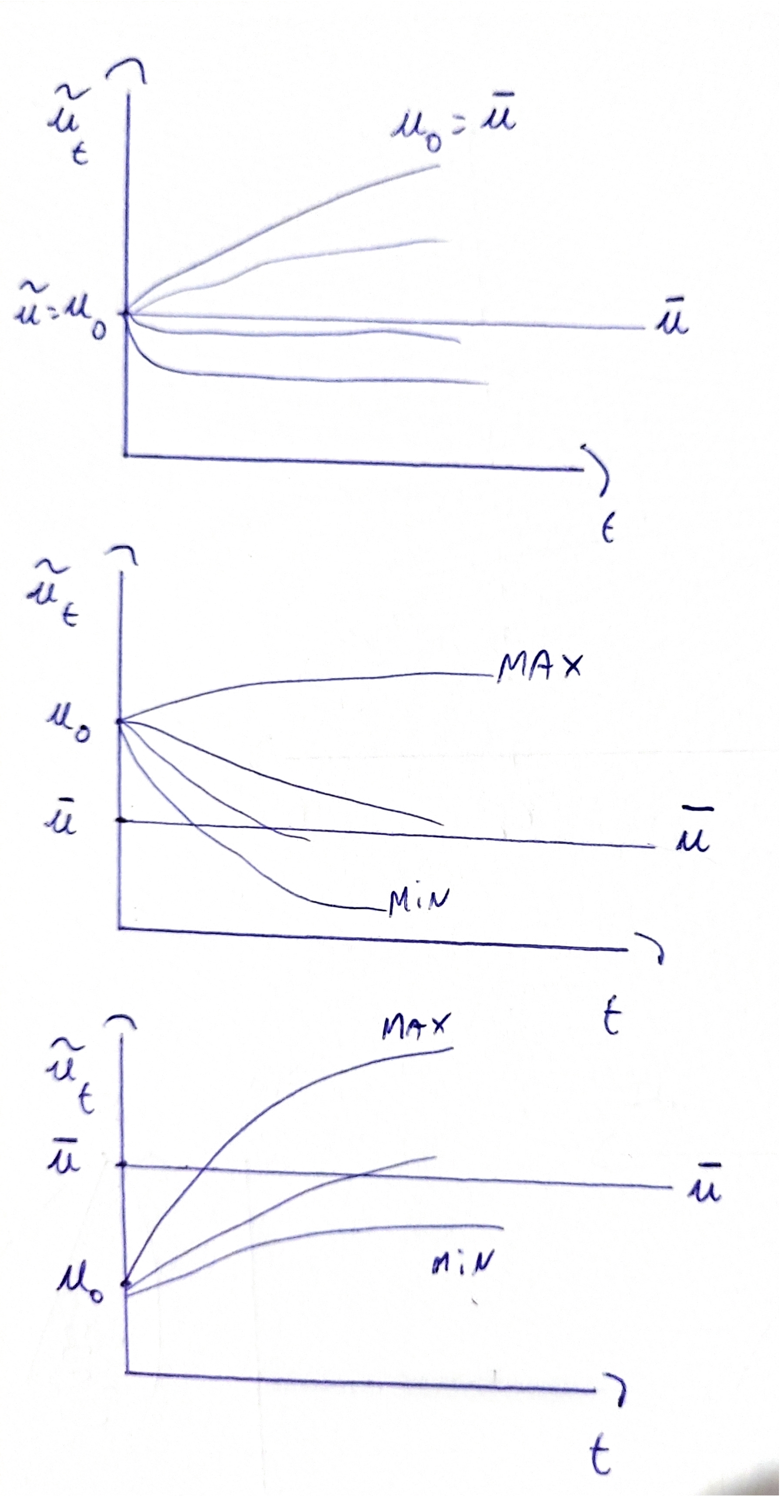
$$\bar{u} = \lim_{t \to +\infty} E[\widetilde{u}_t] = \lim_{t \to +\infty} \left[r^t u_0 + \lambda \mu_X \frac{1 - r^t}{1 - r} \right] = \frac{\lambda \mu_X}{1 - r}$$

NB

Il valore di equilibrio $\bar{u}$ dipende dai parametri $\lambda, \mu_X, j_t, i_t^{(g)}, i_t$. In particolare:
$\bar{u}$ cresce se: λ cresce, μ_X cresce, j_t cresce $\Rightarrow$ relazione diretta
$\bar{u}$ decresce se $i_t^{(g)}$ cresce, i_t cresce $\Rightarrow$ relazione inversa.
Si osservi che $\bar{u}$ non dipende da u_0. Inoltre la condizione

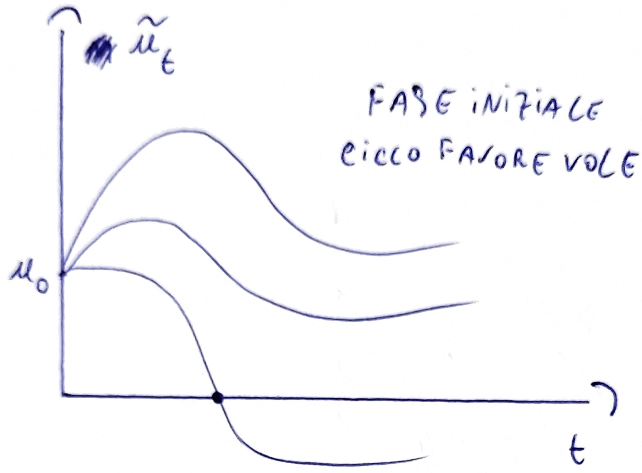
$$r = \frac{1 + j_t}{(1 + i_t^{(g)})(1 + i_t)} < 1$$

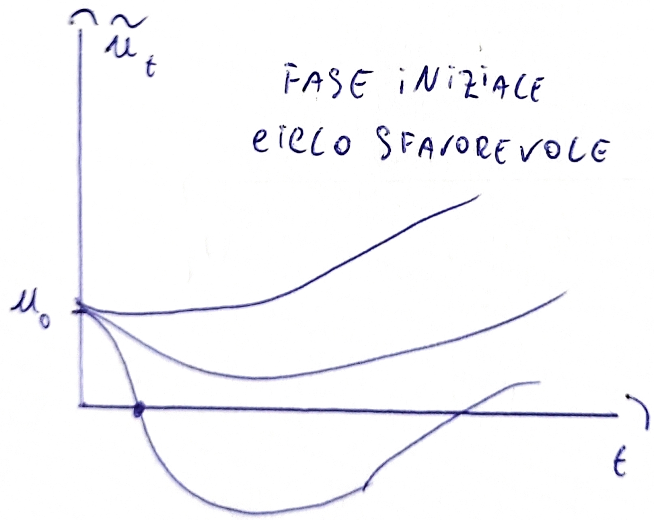
non sempre è soddisfatta e per realizzarla occorre un controllo dinamico dei premi e dei proventi finanziari per far divergere il processo di rischio $\widetilde{u}_t$.
Se esiste un livello di equilibrio finito $\bar{u}$, a seconda del valore iniziale u_0 si verificheranno i seguenti casi:



Se u_0 è elevato è più probabile che u^{MIN} sia lontano dall'asse delle ascisse e

cioè dal punto di rovina.
Se la compagnia agisce in un contesto economico in cui sono presenti fenomeni ciclici, i cammini simulati avranno circa i seguenti andamenti:





Si può osservare che per $\bar{u}$ finito si potrà scrivere:

$$\tilde{u}_t - \bar{u} = r(\tilde{u}_{t-1} - \bar{u}) + \tilde{\varepsilon}_u$$

processo AR1.

Dimostrazione. Poichè

$$\widetilde{u}_t = r\widetilde{u}_{t-1} + \lambda\mu_X + \widetilde{\varepsilon}_u$$

e

$$\bar{u} = \frac{\lambda\mu_X}{1-r} \Longrightarrow \bar{u} = r\bar{u} + \lambda\mu_X$$

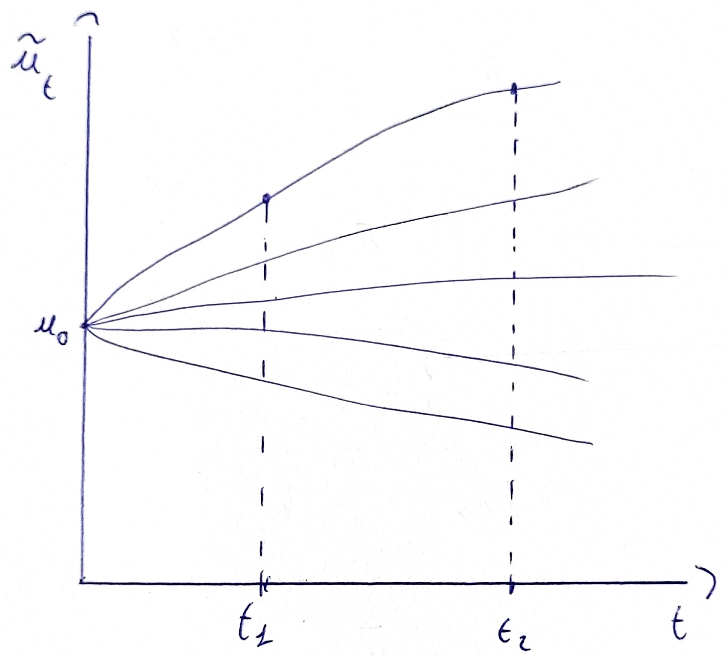
Allora:

$$\widetilde{u}_t - \bar{u} = r\widetilde{u}_{t-1} + \lambda\mu_X + \widetilde{\varepsilon}_u - \bar{u} = r\widetilde{u}_{t-1} + \lambda\mu_X + \widetilde{\varepsilon}_u - r\bar{u} - \lambda\mu_X$$

$$\widetilde{u}_t - \bar{u} = r(\widetilde{u}_{t-1} - \bar{u}) + \widetilde{\varepsilon}_u$$

□

Per quanto concerne le scelte dell'orizzonte temporale T, si osserva che:



al crescere dell'orizzonte di analisi cresce la variabilità del processo e di conseguenza per dato capitale iniziale, la probabilità di rovina aumenta al crescere dell'orizzonte di analisi [0; T].
Per comprendere il concetto di crescita della variabilità all'aumentare dell'orizzonte temporale considerato, analzziamo il processo di rischio:

$$\widetilde{U}_t = U_0 + (1+\lambda)Pt - -\sum_{i=1}^{t} \widetilde{X}_i$$

dove si escludono i rendimenti finanziari e si assume che il portafoglio rimanga identico lungo tutto l'orizzonte temporale (0, t): per ogni esercizio si hanno gli stessi valori di $E[\widetilde{X}], \sigma_{\widetilde{X}}, \mu_{3,\widetilde{X}}, \gamma_{\widetilde{X}}, etc...$
In questo caso si ricavano:

$$E[\widetilde{U}_t] = U_0 + \lambda P t$$

$$\sigma^2(\widetilde{U}_t) = \sigma^2(\sum_{i=1}^{t} \widetilde{X}_i) = \sum_{i=1}^{t} \sigma^2(\widetilde{X}_i) = \sum_{i=1}^{t} \sigma^2_{\widetilde{X}} = t\sigma^2_{\widetilde{X}}$$

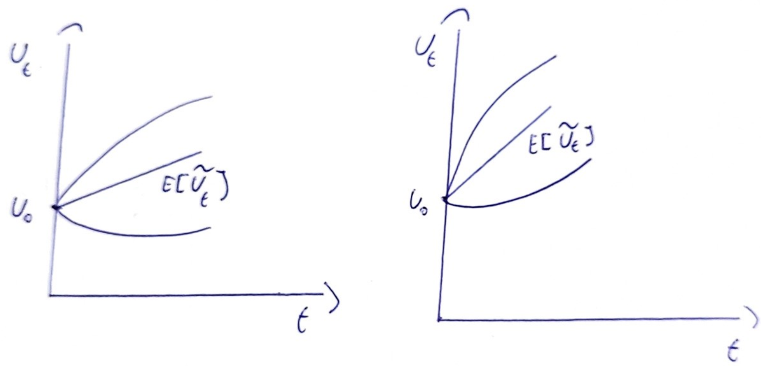
$$\sigma(\widetilde{U}_t) = \sigma_{\widetilde{X}} \sqrt{t}$$

$$\gamma(\widetilde{U}_t) = \frac{\mu_3(\widetilde{U}_t)}{\sigma^3(\widetilde{U}_t)} = -\frac{\mu_3\left(\sum_{i=1}^{t} \widetilde{X}_i\right)}{\sigma^3(\widetilde{U}_t)} = \frac{-t\mu_3(\widetilde{X}_i)}{\sigma^3_{\widetilde{X}} t\sqrt{t}} = \frac{\mu_{3,\widetilde{X}}}{\sigma^3_{\widetilde{X}}} \frac{1}{\sqrt{t}} = -\gamma_{\widetilde{X}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

- $E[\widetilde{U}_t]$ cresce linearmente rispetto a t
- $\sigma(\widetilde{U}_t)$ cresce in proporzione a $\sqrt{t}$
- $\gamma(\widetilde{U}_t)$ decresce in ragione di $\frac{1}{\sqrt{t}}$

Per far crescere il valore medio di $\widetilde{U}_t$:

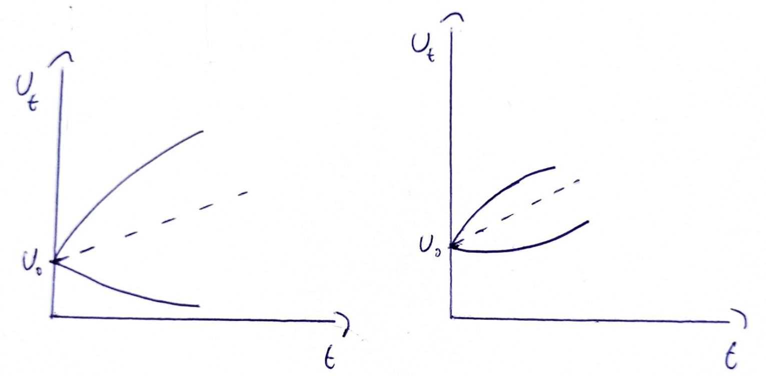
- aumentare i tassi di caricamento λ
- aumentare i rendimenti finanziari (a patto che non comporti un aumento della variabilità)



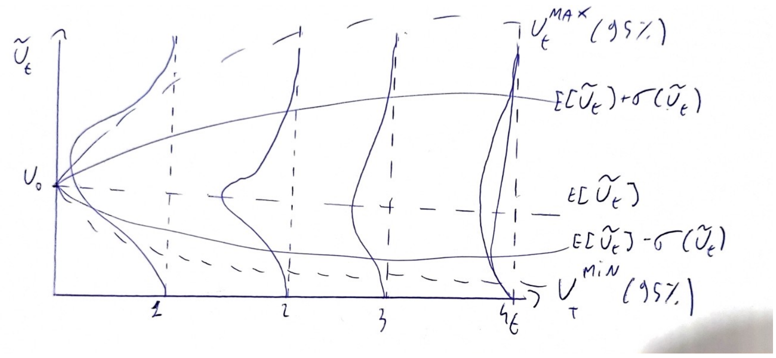
Per ridurre lo scarto quadratico medio di $\widetilde{U}_t$ posso ad esempio:

- diminuire $n = E[\widetilde{K}|\widetilde{q} = 1]$
- diminuire il livello di conservazione M

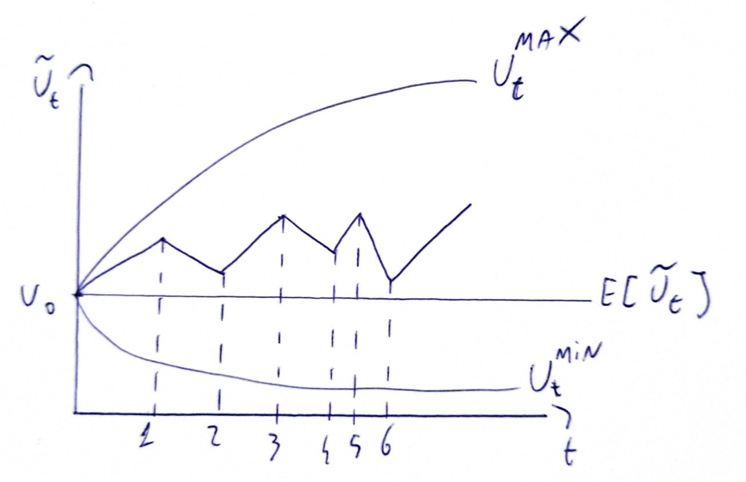
- maggiore selezione dei contratti (omogeneità)



19.1 Determinazione dei limiti di confidenza U^{MAX} e U^{MIN}



Per determinare i limiti di confidenza U^{MAX} e U^{MIN} per $t > 3$ si ricorre alle simulazioni. In pratica, attribuita una distribuzione di probabilità alle variabili aleatorie presenti nel modello (numero di sinistri, costo singolo sinistro, rendimenti finanziari, inflazione, etc.) si tratterà di simulare l'andamento del processo $\widetilde{U}$ mediante la generazione di numeri pseudorandomici da attribuire alle predette variabili aleatorie in modo da ottenere un cammino simulato di $\widetilde{U}_t$ o del ratio $\widetilde{u}_t$



Ripetuto il procedimento per il numero di volte che si ritiene necessario affinchè i risultati possano considerarsi attendibili, si ottiene un fascio di cammini simulati. Dei risultati numerici ottenuti dalle simulazioni ricaviamo per ciascun anno t i momenti di $\widetilde{U}_t$ e quindi calcoliamo, mediante le formule di approssimazione NP, WH, ecc., i limiti di confidenza U_t^{MAX} e U_t^{MIN}

Capitolo 20

Probabilità di rovina

20.1 Il fabbisogno di Prestazione Riassicurativa

Consideriamo:

$$T = T_h = \{t | t = vh, \ v = 0, 1, \dots\} \tag{20.1}$$

orizzonte infinito discreto.

Sia il tempo misurato in anni (h = 1 anno). Dopo n anni la riserva di rischio (secondo la TdR classica) risulta:

$$\widetilde{U}_n = U_0 + P_j - \sum_{j=1}^{n} \widetilde{X}_j$$

dove:
U_0: riserva di rischio iniziale
$\widetilde{X}_j$: costo sinistri aggregato nell'anno j
$P_j = (1 + \theta)E[\widetilde{X}_j]$
θ: tasso di caricamento del premio assicurativo.
La (20.1) si riscrive:

$$\widetilde{U}_n = U_0 + \sum_{j=1}^{n}(P_j - \widetilde{X}_j) = U_0 + \sum_{j=1}^{n} \widetilde{Y}_j$$

dove $\widetilde{Y}_j$ è il risultato tecnico nell'anno j, con $j = 1, 2, \dots, n$.
La compagnia è in rovina se:

$$\begin{aligned} rovina &= \{U_n < 0, \ per \ qualche \ n\} \\ &= \{U_0 < \sum_{j=1}^{n}(\widetilde{X}_j - P_j), \ per \ qualche \ n\} \\ &= \{U_0 < \max_{1 \le n \le +\infty} \sum_{j=1}^{n}(\widetilde{X}_j - P_j)\} \end{aligned} \tag{20.2}$$

L'attività riassicurativa comporta una cessione di premi e una trasformazione della distribuzione del costo sinistri e del risultato tecnico. Sia:
$\widetilde{X}_j^{(C)}$: costo sinistri aggregato conservato
$\widetilde{X}_j^{(R)}$: costo sinistri aggregato riassicurato
$P_j^{(C)}$: premi conservati
$P_j^{(R)} = (1+\theta^{(R)})E[\widetilde{X}_j^{(R)}]$: premi riassicurati/ceduti, con $\theta^{(R)}$ tasso di caricamento di riassicurazione.
Assumiamo l'ipotesi che: $\widetilde{X}_j \sim$ Poisson composta iid, $\forall j \Rightarrow \widetilde{X}_j = \widetilde{X}$
$\widetilde{X}_i^{(C)} = \widetilde{X}^{(C)}$ e $\widetilde{X}_i^{(R)} = \widetilde{X}^{(R)}, \forall j$
$\widetilde{Y}_j iid, \forall j \Rightarrow \widetilde{Y}_j = \widetilde{Y}$
$P_j = P, \forall j$
$P_j^{(C)} = P^{(C)},\ P_j^{(R)} = P^{(R)}, \forall j$
$\widetilde{Y}_j^{(C)} = P_j^{(C)} - \widetilde{X}_j^{(C)} = \widetilde{Y}^{(R)}, \forall j$

20.1.1 Disuguaglianza di Cramèr

Nel quadro tecnico descritto, dopo la riassicurazione, l'evento rovina risulta

$$U_0 < \max_{1\leq n\leq +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\widetilde{X}_j^{(C)} - P_j^{(C)}\right) \tag{20.3}$$

e la relativa probabilità di rovina è limitata superiormente da

$$\varphi(U_0) \leq e^{-RU_0} \Longrightarrow Disuguaglianza\ di\ Cram\acute{e}r \tag{20.4}$$

con $R : E\left[e^{-R\widetilde{Y}^{(C)}}\right] = 1$
Per ricavare il coefficiente di aggiustamento R risolviamo:

$$\ln E\left[e^{-R\widetilde{Y}^{(C)}}\right] = 0$$

Sviluppando in serie si ha:

$$\begin{aligned} 0 - RE\left[\widetilde{Y}^{(C)}\right] + \frac{R^2}{2} Var\left(\widetilde{Y}^{(C)}\right) &= 0 \\ R = 2\frac{E\left[\widetilde{Y}^{(C)}\right]}{Var\left(\widetilde{Y}^{(C)}\right)} & \\ = \frac{2E\left[\widetilde{Y}^{(C)}\right]}{Var\left(\widetilde{X}^{(C)}\right)} & \end{aligned} \tag{20.5}$$

Considerando l'uguaglianza della (20.4) e ponendo $\varphi(U_0) = \varepsilon =$ probabilità di rovina massima tollerata si ha:

$$\varepsilon = e^{-RU_0} \Longrightarrow R = -\frac{\ln \varepsilon}{U_0} \tag{20.6}$$

Per la (20.5) e (20.6) risulta:

$$-\frac{ln\varepsilon}{2U_0} = \frac{E\left[\widetilde{Y}^{(C)}\right]}{Var\left(\widetilde{X}^{(C)}\right)} \tag{20.7}$$

e moltiplicando per $Var(\widetilde{X})$ e dividendo per $E[\widetilde{X}]$ ambo i membri della (20.7) si ha:

$$q = \frac{E[\widetilde{X}]}{U_0} v[\widetilde{X}] \left(-\frac{\ln \varepsilon}{2}\right) = \frac{\dfrac{E\left[\widetilde{Y}^{(C)}\right]}{E[\widetilde{X}]}}{\dfrac{Var\left(\widetilde{X}^{(C)}\right)}{Var[\widetilde{X}]}} \tag{20.8}$$

dove:
q: fabbisogno di protezione riassicurativa
$\dfrac{U_0}{E[\widetilde{X}]}$: riserva di rischio iniziale per unità di esborso per sinistri attesi annuali
$v(\widetilde{X}) = \dfrac{Var(\widetilde{X})}{E[\widetilde{X}]^2} = \left(\dfrac{\sigma_{\widetilde{X}}}{E[\widetilde{X}]}\right)^2$ coefficiente di variazione di $\widetilde{X}$ al quadrato
$-\dfrac{\ln \varepsilon}{2}$ coefficiente di avversione al rischio della cedente (più piccolo ε, tanto maggiore è tale coefficiente)
$\dfrac{E[\widetilde{Y}^{(C)}]}{E[\widetilde{X}]}$: risultato netto annuo atteso per unità do esborso annuo atteso
$\dfrac{Var\left(\widetilde{X}^{(C)}\right)}{Var(\widetilde{X})}$: indicatore di efficienza del trattato riassicurativo.
NB

- Coerentemente con l'intuizione, la (20.8) ci dice che il fabbisogno di protezione riassicurativa decresce al crescere della riserva (patrimoniale) iniziale, decresce al decrescere della variabilità relativa del costo sinistri aggregato e decresce al crescere della tolleranza al rischio di rovina
- Si noti che il fabbisogno riassicurativo puù essere espresso in due modi:
  - primo membro di q: non dipende dal tipo di riassicurazione
  - secondo membro di q: dipende dal tipo di trattato di riassicurazione

20.2 Trattato riassicurativo in Quota unica globale

Determiniamo una regola generale, coerente con la (20.8), per determinare l'aliquota di conservazione a in un trattato di riassicurazione globale in quota ("quota share"). A tal fine, occorre calcolare $E\left[\widetilde{Y}^{(C)}\right]$ e $Var(\widetilde{X}^{(C)})$.
Si ha:

$$E\left[\widetilde{Y}^{(C)}\right] = E\left[P - P^{(R)} - \widetilde{X}^{(C)}\right] = (1+\theta)\,E\left[\widetilde{X}\right] - \left(1+\theta^{(R)}\right)E\left[\widetilde{X}^{(R)}\right] - E\left[\widetilde{X}^{(R)}\right]$$

e poichè $E[\widetilde{X}] = E\left[\widetilde{X}^{(C)}\right] + E\left[\widetilde{X}^{(R)}\right]$ si ha:

$$E\left[\widetilde{Y}^{(C)}\right] = \theta E\left[\widetilde{X}^{(C)}\right] - \left(\theta^{(R)} - \theta\right)E\left[\widetilde{X}^{(R)}\right]$$

Nel trattato quota share risulta:

$$E\left[\widetilde{X}^{(C)}\right] = aE[\widetilde{X}];\ E\left[\widetilde{X}^{(R)}\right] = (1-a)E[\widetilde{X}];\ Var\left(\widetilde{X}^{(C)}\right) = a^2 Var\left(\widetilde{X}^{(C)}\right)$$

Se assumiamo $\theta = \theta^{(R)} \Rightarrow$ ne profitti ne perdita per caricamenti di riassicurazione.
Si ha:

$$q = \frac{\theta E\left[\widetilde{X}^{(C)}\right]}{E\left[\widetilde{X}^{(C)}\right]/a}\frac{Var(\widetilde{X})}{a^2 Var(\widetilde{X})} = \frac{\theta}{a} \tag{20.9}$$

E quindi $a = \dfrac{\theta}{q}$, che per il primo membro della (20.8), si riscrive:

$$a = \frac{\dfrac{U}{E[\widetilde{X}]}\left(-\dfrac{2}{\ln\varepsilon}\right)\theta}{v(\widetilde{X})} \tag{20.10}$$

che si legge

$$\text{Conservazione} = \frac{\text{(Capitale proprio)(Propensione al rischio)(margine di profitto atteso)}}{\text{Volatilità dei risultati/sinistri di portafoglio}}$$

a cresce se U_0 cresce, la propensione cresce, i margini crescono e la volatilità scende
Esempio

Esempio: Si supponga di aver rilevato nei cinque anni precedenti l'epoca di valutazione t, i seguenti dati:

Anno	Premi lordi	Spese	Costo sinistri	Risultato Anno
t-5	1000	300	600	+100
t-4	1000	300	900	-200
t-3	1000	300	300	+400
t-2	1000	300	800	-100
t-1	1000	300	400	+300
Media	1000	300	600	+100
			$E(\tilde{X})$	$\theta \cdot E(\tilde{X})$

Da cui: $\theta = \frac{100}{600} = 16{,}7\%$

e $V(\tilde{X}) = 18{,}06\%$

Sia: $U_0 = 900$, $\varepsilon = 1\%$ e $\theta^{(R)} = \theta$.

Allora, "se le statistiche sono rappresentative per il futuro", la (10) stabilisce un livello di conservazione razionale:

$$a = \frac{\frac{900}{600} \cdot \left(\frac{2}{-\ln 1\%}\right) \cdot 16{,}7\%}{18{,}06\%} \cong 60\%$$

riassicurando la quota $1-a = 40\%$.
Si noti che l'avversione al rischio $= \left(-\frac{\ln \varepsilon}{2}\right) = 2{,}303$.

20.3 Probabilità di Rovina

Sia $\widetilde{U}_t$ la riserva di rischio in t$\in$ T, con T l'insieme delle epoche di valutazione di $\widetilde{U}_t$. L'evento rovina si scrive:

$$\left\{\widetilde{U}_t < 0\right\}$$

A seconda della scelta dell'insieme T, si hanno quattro differenti definizioni di probabilità di rovina:

1. $\varphi_1(u)$: Probabilità di rovina nel continuo con orizzonte finito

$$T_1 = \{t | 0 \leq t \leq t_1 < \infty\}, \; u = U_0$$

2. $\varphi_2(u)$: Probabilità di rovina nel continuo con orizzonte infinito

$$T_2 = \{t|0 \leq t \leq \infty\}\,,\ u = U_0$$

3. $\varphi_3(u)$: Probabilità di rovina nel discreto con orizzonte finito

$$T_3 = \{t|t = vh, v = 0, 1, \ldots, n < \infty\}\,,\ u = U_0$$

4. φ_4: Probabilità di rovina nel discreto con orizzonte infinito

$$T_4 = \{t|t = vh, v = 0, 1, \ldots\}\ u = U_0$$

20.3.1 Il modello del processo della Riserva di Rischio

Sia:

$$\widetilde{U}_t = u + ct - \widetilde{X}_t,\ t \geq 0$$

dove: $u = U_0$ è la riserva iniziale.
Assumiamo che:

1. il numero dei sinistri $\{\widetilde{K}; t \geq 0\}$ è un processo di Poisson con parametro n

2. i singoli risarcimenti $\{\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \ldots\}$ sono indipendenti e identicamente distribuiti, indipendenti da $\widetilde{K}_t$, con funzione di ripartizione $S(z)$ e media $m < \infty$

3. il costo sinistri aggregato in $[0, t]$ è:

$$\begin{cases} \widetilde{X}_t = 0, & se\ \widetilde{K}_t = 0 \\ \widetilde{X}_t = \sum_{j=1}^{\widetilde{K}_t} \tilde{z}_j, & se\ \widetilde{K}_t > 0 \end{cases}$$

   Per un fissato t, $\widetilde{X}_t$ ha una distribuzione di Poisson composta.
   Il processo $\{\widetilde{X}_t; t \geq 0\}$ è un processo di Poisson composto.
   Poiché $\{\widetilde{K}_t; t \geq 0\}$ è un processo a incrementi stazionari e indipendenti, anche $\{\widetilde{X}_t; t \geq 0\}$ è a incrementi stazionari e indipendenti.
   Inoltre:

$$E[\widetilde{X}_t] = E[\widetilde{K}_t]E[\tilde{z}_j] = n \cdot t \cdot m$$

   dove $P = nm$ è il premio puro di rischio per unità di tempo

4. Supponiamo che i prmei siano pagati con continuità, con un flusso costante per unità di tempo pari a:

$$c = \text{flusso di premi per unità di tempo}$$

5. Assumiamo che il totale dei premi netti sia:

$$ct = (1+\theta)nmt$$

dove $\theta > 0$ è il tempo di caricamento di sicurezza.
Risulta:

$$ct > E[\widetilde{X}_t] = nmt$$

che implica:

$$c > nm = P$$

6. Consideriamo la probabilità:

$$\varphi_2(u) = \mathbb{P}\{\widetilde{U}_t < 0, \forall t \geq 0 | U_0 = u\} = \varphi(n)$$

$$\Phi_2(u) = \mathbb{P}\{\widetilde{U} \geq 0, \forall t \geq 0 | U_0 = u\} = \Phi(u)$$

con $T = T_2$

20.3.2 Coefficiente di Aggiustamento

Per ricavare una limitazione superiore di $\varphi(u)$, introduciamo il coefficiente di aggiustamento.

Definizione 20.3.1. *Sia $t = R$ la più piccola soluzione positiva dell'equazione*

$$1 + (1+\theta)mt = M_{\widetilde{z}}(t)$$

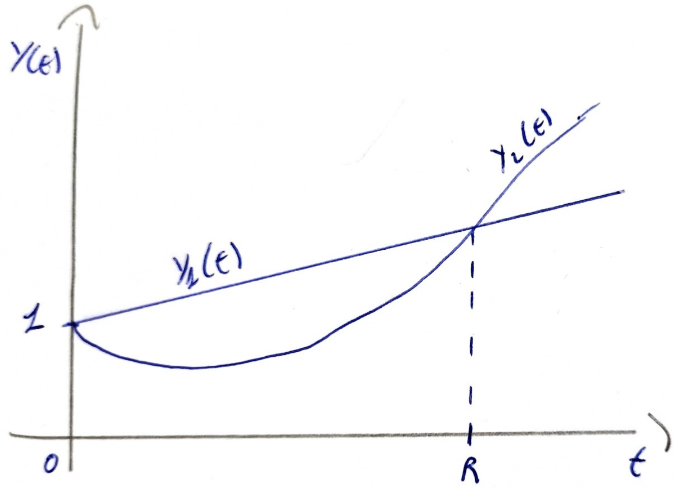
dove $M_{\widetilde{z}}(t) = E\left[e^{t\widetilde{z}}\right]$ è la funzione generatrice dei momenti di $\widetilde{z}$. Se tale valore (R) esiste, è detto coefficiente di aggiustamento

NB
Il coefficiente di aggiustamento non esiste se le distribuzione del costo singolo sinistro $\widetilde{z}$ non ha una fgm (come succede per la Pareto e la Lognormale).

Dimostrazione. Per vedere che possa esistere il coefficiente di aggiustamento consideriamo:

$$y_1(t) = 1 + (1+\theta)mt$$
$$y_2(t) = E\left[e^{t\widetilde{z}}\right]$$

Assumiamo che $\forall t \geq 0$ esiste $M_{\widetilde{z}}(t)$. Allora nel piano cartesiano (t, y) la curva rappresentativa di $y_1(t)$ e $y_2(t)$ si intersecano in un punto di ascissa $t = R$:



Poiché $y_1(0) = y_2(0) = 1$ allora:

$$y_1'(t) = (1+\theta)m \ e \ y_2'(t) = E\left[\tilde{z}e^{t\tilde{z}}\right]$$

con:

$$y_2'(0) = E[\tilde{z}] = m < y_1'(0) = (1+\theta)m$$
$$y_2''(t) = E\left[\tilde{z}^2 e^{t\tilde{z}}\right] > y_1''(t) = 0$$

$\square$

Esempio:
Se $\tilde{z} \sim$ Esponenziale negativa con $E[\tilde{z}] = m$ e $F(z) = 1 - e^{\left(-\frac{x}{m}\right)}, \ x \geq 0$, allora,

$$M_{\tilde{z}}(t) = (1-mt)^{-1}, \ t < m^{-1}$$

Il coefficiente di aggiustamento risulta:

$$1 + (1+\theta)mR = (1-mR)^{-1}$$
$$mR\theta - m^2R^2(1+\theta) = 0$$
$$mR[\theta - mR(1+\theta)] = 0$$

$$R = 0 \ e \ \theta - mR(1+\theta) = 0$$
$$R = \frac{\theta}{1+\theta}\frac{1}{m} > 0$$

20.3.3 Limite superiore di R

Il coefficiente di aggiustamento R non può essere esplicitamente determinato per ogni tipo di distribuzione $\widetilde{z}$. Possiamo determinare però sempre un suo limite superiore.
Consideriamo:

$$\begin{aligned}
1+(1+\theta)mR &= E\left[e^{R\widetilde{z}}\right] \\
&= E\left[1+R\widetilde{z}+\frac{1}{2}R^2\widetilde{z}^2+\dots\right] \\
&> E\left[1+R\widetilde{z}+\frac{1}{2}R^2\widetilde{z}^2\right] \\
&= 1+RE[\widetilde{z}]+\frac{1}{2}R^2E[\widetilde{z}^2] \\
&= 1+Rm+\frac{1}{2}R^2E[\widetilde{z}^2]
\end{aligned}$$

Semplificando si ottiene:

$$R < \frac{2\theta m}{E[\widetilde{z}^2]}$$

Il secondo membro della disequazione rappresenta un limite superiore di R e il valore da cui partire in un procedimento di ricerca numerica di R.

Definizione 20.3.2.

$$H(t) = 1+(1+\theta)mt - M_{\widetilde{z}}(t)$$

Il coefficiente di aggiustamento $R > 0$ soddisfa:

$$H(R) = 0$$

Per risolvere tale equazione si uda la formula di Newton-Rapson:

$$R_{j+1} = R_j - \frac{H(R_j)}{H'(R_j)}$$

dove $H'(t) = (1+\theta)m - M'_{\widetilde{z}}(t)$, iniziando da un valore R_0 iniziale (ad esempio dal limite superiore precedentemente trovato).

Esempio:
Sia $\widetilde{K} \sim$ Poisson$(n=4)$, $c=7$, $\mathbb{P}\{\widetilde{z}=1\}=0.6$, e $\mathbb{P}\{\widetilde{z}=2\}=0.4$
Determiniamo il coefficiente di aggiustamento. Si ha:

$$\begin{aligned}
m = E[\widetilde{z}] &= (1)(0.6)+(2)(0.4) = 1.4 \\
E[\widetilde{z}^2] &= (1)^2(0.6)+(2^2)(0.4) = 2.2
\end{aligned}$$

Dalla relazione $c = (1+\theta)nm$ si ricava:

$$\theta = \frac{c}{nm} - 1 = \frac{7}{(4)(1.4)} - 1 = 0.25$$

Dal limite superiore di R si ricava:

$$R_0 = \frac{(2)(0.25)(1.4)}{2.2} = 0.3182$$

Inoltre:

$$M_{\widetilde{z}}(t) = 0.6e^{1t} + 0.4e^{2t} = E\left[e^{\widetilde{z}t}\right]$$

Quindi:

$$\begin{aligned} H(t) &= 1 + 1.75t - 0.6e^{t} - 0.4e^{2t} \\ M'_{\widetilde{z}}(t) &= 1 + 1.75t - 0.6e^{t} - 0.4e^{2t} \end{aligned}$$

$$H'(t) = 1.75 - 0.6e^{t} - 0.8e^{2t}$$

Partendo da $R_0 = 0.3182$ si ha:

$$\begin{aligned} H(R_0) &= -0.02381 \; e \; H'(R_0) = -0.5865 \\ R_1 &= 0.3182 - \frac{-0.02381}{-0.5865} = 0.2776 \end{aligned}$$

Quindi:

$$H(R_1) = -0.003091;\; H'(0.2776) = -0.4358 \; e \; R_2 = 0.2776 - \frac{-0.003091}{-0.4358} = 0.2705$$

20.3.4 Coefficiente di aggiustamento 2

Definizione 20.3.3. *Il coefficiente di aggiustamento è la più piccola soluzione positiva dell'equazione*

$$(1+\theta) = \int_0^{+\infty} e^{Rz} f_e(z)\, dz$$

dove $f_e(z) = \dfrac{1 - S(z)}{m}$*,* $z > 0$ *è detta funzione di densità di equilibrio.*
Questa e la (20.3.1) coincidono

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} e^{Rz} \frac{1-F(z)}{m}\, dz \\
&= \frac{e^{Rz}}{Rm} \left[1-F(z)\right]\Bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{Rz}}{Rm} \left(-f(z)\right)\, dz \\
&= -\frac{1}{Rm} + \frac{M_{\tilde{z}}(R)}{Rm} \\
&= \frac{M_{\tilde{z}}(R)-1}{mR}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
(1+\theta) &= \frac{M_{\tilde{z}}(R)-1}{mR} \\
1+(1+\theta)mR &= M_{\tilde{z}}(R)
\end{aligned}$$

□

20.3.5 Disuguaglianza di Lundberg

Teorema 20.3.1. *Sia $R > 0$ soluzione positiva (la minore dell'equazione $1 + (1 + \theta)mR = M_{\tilde{z}}(R)$. Allora la probabilità di rovina $\varphi(u)$ soddisfa:*

$$\varphi(u) \leq e^{-Ru}, \ u \geq 0$$

con $u = U_0$

Dimostrazione. Sia $\varphi_k(u)$ la probabilità che la rovina si verifichi prima o in corrispondenza del k-esimo sinistro, con $k = 0, 1, \ldots$. Proviamo per induzione su k che $\varphi_k(u) \leq e^{-Ru}$

Step 1 Vale ovviamente

$$\varphi_0(u) = 0 \leq e^{-Rm}$$

Step 2 Valutiamo ciò che accade al primo sinistro

- il tempo intercorrente fino al primo sinistro è distribuito in modo esponenziale con funzione di densità ne^{-nt}
- se il sinistro si verifica al tempo $t > 0$, la riserva di rischio disponibile per pagare il sinistro è $u + ct$
- Se x è l'importo del risarcimento, la rovina si verifica se:

  $$\{x > u + ct\} \ \text{ con } \ \mathbb{P}\{x > u + ct\} = 1 - F(u + ct)$$

  Mentre si ha rovina se

  $$\{0 \leq x \leq u + ct\} \ \text{ con } \ \mathbb{P}\{0 \leq x \leq u + ct\} = F(u + ct)$$

  Dopo il pagamento del primo sinistro la riserva di rischio rimanente è:

  $$u + ct - x$$

  Se la rovina non si verifica al primo sinistro potrebbe verificarsi nei successivi k sinistri. Ma poichè il problema del surplus (riserva di rischio) ha incrementi stazionari e indipendenti, la distribuzione di probabilità non cambia e occorre considerare il processo come se fosse iniziato al momento del primo sinistro, ma con riserva di rischio pari a:

  $$u + ct - x$$

Step 3 Assumiamo che la disuguaglianza di Lundberg sia valida per k sinistri, cioè:

$$\varphi_k \leq e^{-Ru} \Rightarrow \text{ipotesi induttiva}$$

Step 4 Proviamo che è anche vera per $k+1$ sinistri.

Per la legge della probabilità totale, si ha la seguente relazione ricorrente:

$$\varphi_{kH}(u) = \int_0^{+\infty} \left[1 - F(u+ct) + \int_0^{u+ct} \varphi_k(u+ct-x)\, dF(x)\right] ne^{-nt}\, dt$$

Allora, usando l'ipotesi induttiva, si ha:

$$\begin{aligned}
\varphi_{kH}(u) &= \int_0^{+\infty} \left[\int_{n+ct}^{+\infty} 1\, dF(x) + \int_0^{u+ct} \varphi_k(u+ct-x)\, dF(x)\right] ne^{nt}\, dt \\
&\leq \int_0^{\infty} \left[\int_{n+ct}^{\infty} e^{-R(u+ct-x)}\, dF(x) + \int_0^{n+ct} e^{-R(u+ct-x)}\, dF(x)\right] ne^{-nt}\, dt
\end{aligned}$$

poiché

$$-R(u+ct-x) > 0$$

quando

$$u+ct-x < 0 \Rightarrow x > u+ct$$

e poiché

$$\varphi_k(u+ct-x) \leq e^{-R(u+ct-x)}$$

per l'ipotesi induttiva

$$\begin{aligned}
\varphi_{kH}(u) &\leq \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-R(u+ct-x)}\, dF(x)\right] ne^{-nt}\, dt \\
&= ne^{-Ru} \int_0^{\infty} e^{-Rct} \left[\int_0^{\infty} e^{Rx}\, dF(x)\right] e^{-nt}\, dt \\
&= ne^{-Ru} \int_0^{\infty} e^{-(n+Rc)t} \left[M_{\tilde{z}}(R)\right]\, dt \\
&= nM_{\tilde{z}}(R) e^{-Ru} \int_0^{\infty} e^{-(n+Rc)t}\, dt \\
&= \frac{nM_{\tilde{z}}(R)}{n+Rc} e^{-Ru}
\end{aligned}$$

Ma

$$\frac{nM_{\tilde{z}}(R)}{n+Rc} = \frac{n[1+(1+\theta)mR]}{n+Rc} = \frac{n+(1+\theta)nmR}{n+Rc} = \frac{n+cR}{n+Rc} = 1$$

Quindi

$$\varphi_n(u) \leq e^{-Ru},\ \forall u$$

e quindi:

$$\varphi(u) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(u) \leq e^{-Ru}$$

□

20.3.6 Applicazione del teorema di Lundberg

La disuguaglianza di Lundberg è utile per esaminare la relazione tra il surplus u e il tasso di caricamento di sicurezza θ

Caso Si disponga di una riserva di rischio pari a u e si tolleri al massimo una probabilità di rovina pari ad α. Ricaviamo il tasso di caricamento di sicurezza θ che soddisfi il problema. Dall'equazione del coefficiente di aggiustamento si trova:

$$\theta = \frac{M_{\tilde{z}}(R) - 1}{Rm} - 1$$

Posto $R = -\dfrac{\ln \alpha}{n}$, si ha:

$$\theta = \frac{uE\left[e^{\left(-\frac{\ln \alpha}{n}\tilde{z}\right)} - n\right]}{-m \ln \alpha} - 1$$

che rappresenta il livello del caricamento di sicurezza che garantisce che R sia un coefficiente di aggiustamento e che:

$$\varphi(u) \leq e^{-Ru} = e^{\ln \alpha} = \alpha$$

cioè che la probabilità di rovina non sia superiore a quella massima tollerata α

Caso 2 Se, al contrario si fissa il coefficiente di caricamento di sicurezza θ, il livello della riserva di rischio richiesta che assicura una probabilità di rovina non superiore ad α è data da:

$$u = \frac{-\ln \alpha}{R}$$

dove R è il coefficiente di aggiustamento soluzione dell'equazione:

$$1 + (1 + \theta)mR = M_{\tilde{z}}(R)$$

Caso 3 Il teorema di Lundberg ci consente di stabilire che:

$$\varphi(\infty) = \lim_{n \to +\infty} \varphi(u) = 0$$
$$\Phi(\infty) = \lim_{u \to \infty} \Phi(u) = 1$$

Infatti:

$$0 \leq \varphi(u) \leq e^{-Rn}$$
$$\text{e } 0 \leq \lim_{n \to +\infty} \varphi(u) \leq \lim_{n \to +\infty} e^{-Rn} = 0$$

Inoltre

$$\Phi(\infty) = 1 - \varphi(\infty) = 1$$

20.3.7 La formula della probabilità di rovina asintotica, approssimata, di Cramèr

Teorema 20.3.2. *Sia $R > 0$ un coefficiente di aggiustamento. Allora la probabilità di rovina soddisfa:*

$$\varphi(u) \sim Ce^{-Ru}, \; n \to +\infty$$

ovvero:

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\varphi(u)}{Ce^{-Ru}} = 1$$

dove

$$C = \frac{m\theta}{M'_{\tilde{z}}(R) - m(1+\theta)} \text{ e } M_{\tilde{z}}(R) = E\left[e^{R\tilde{z}}\right]$$

Dimostrazione. Si utilizza la teoria dei rinnovi $\square$

NB

- La formula è accurata anche per n non molto grande
- La formula rivela che la probabilità di rovina si comporta come una funzione esponenziale
- Per la disuguaglianza di Lundberg, deve esserci $C \leq 1$

Esempio:

Sia $S(z) = F(z) = 1 - e^{-\frac{z}{m}}, \; z \geq 0$.
Quindi $\tilde{z} \sim$ Esponenziale con media $E[\tilde{z}] = m$. Poichè la distribuzione esponenziale è:

$$M_{\tilde{z}}(t) = (1 - mt)^{-1}$$

il coefficiente di aggiustamento risulta:

$$1 + (1+\theta)mR = (1 - mR)^{-1} \Rightarrow R = \frac{\theta}{m(1+\theta)}$$

Quindi

$$M'_{\tilde{z}}(t) = \frac{d}{dt}(1 - mt)^{-1} = m(1 - mt)^{-2}$$
$$M'_{\tilde{z}}(R) = m(1 - mR)^{-2} = m\left[1 - \theta(1+\theta)^{-1}\right]^{-2} = m(1+\theta)^2$$

Pertanto:

$$C = \frac{m\theta}{m(1+\theta)^2 - m(1+\theta)} = \frac{\theta}{(1+\theta)(1+\theta-1)} = \frac{1}{1+\theta} \leq 1 \text{ se } \theta \geq 0$$

E la formula di Cramèr risulta (per $n \to +\infty$):

$$\varphi(u) \sim \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\frac{u}{m}} = \frac{1}{1+\theta} e^{-n\frac{\theta}{1+\theta}\frac{u}{nm}}$$

NB:
Se $u = 0$

$$\varphi(0) \sim \frac{1}{1+\theta} = \frac{nm}{(1+\theta)nm} = \frac{P}{C} = \begin{cases} < 1, & se\ \theta > 0 \\ \geq 1, & se\ \theta \leq 0 \end{cases}$$

dove $P = E[\widetilde{X}]$
Esempio (importante)
Sia $S(z) = F(z) = 1 - e^{-\frac{z}{m}}$, con $z \geq 0$. Quindi $\tilde{z} \sim$ esponenziale con media $E[\tilde{z}] = m$. Poichè per la distribuzione esponenziale è

$$M_{\tilde{z}}(t) = (1 - mt)^{-1}$$

il coefficiente di aggiustamento risulta:

$$1 + (1+\theta)mR = (1 - mR)^{-1} \Longrightarrow R = \frac{\theta}{m(1+\theta)}$$

Quindi si ha:

$$M'_{\tilde{z}}(t) = \frac{d}{dt}(1-mt)^{-1} = m(1-mt)^{-2}$$
$$M'_{\tilde{z}}(R) = m(1-mR)^{-2} = m\left[1 - \theta(1+\theta)^{-1}\right]^{-2} = m(1+\theta)^2$$

Pertanto

$$C = \frac{m\theta}{m(1+\theta)^2 - m(1+\theta)} = \frac{\theta}{(1+\theta)(1+\theta-1)} = \frac{1}{1+\theta}$$

E la formula di Cramer risulta (per $n \to \infty$):

$$\varphi(u) \simeq \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\frac{u}{m}} = \frac{1}{1+\theta} e^{-n\frac{\theta}{1+\theta}\frac{u}{nm}}$$

NB
Se $u = 0$ allora:

$$\varphi(0) \simeq \frac{1}{1+\theta} = \frac{nm}{(1+\theta)nm} = \frac{P}{C} = \begin{cases} < 1, & se\ \theta > 0 \\ \geq 1, & se\ \theta \leq 0 \end{cases}$$

dove $P = E[\widetilde{X}]$

20.3.8 La formula di Lundberg

Nel caso di orizzonte infinito ($T = \infty$) si dimostra che la probabilità di rovina è pari a:

$$\varphi(u) = C(u)e^{-Ru} \tag{20.11}$$

dove la (20.11) è detta *Formula di Lundberg* e con :

$\mathbf{u} = \mathbf{U_0}$ capitale a riserva iniziale

$\mathbf{C(u)}$ funzione ausiliare con valori compresi tra 0 e 1

$\mathbf{R}$ è detto *coefficiente di aggiustamento* o *di Lundberg* o di *correzione*

Nel caso di $\widetilde{X} \sim$ poisson composta semplice si dimostra che:

$$R = \frac{2\theta}{mr_{2,\widetilde{z}}} = \frac{2\theta}{m(M)r_{2,\widetilde{z}}(M)} = \frac{2\theta m}{a_2}\frac{n}{n} = 2\theta\frac{E[\widetilde{X}]}{\sigma^2(\widetilde{X})}$$

NB
$\varphi(u)$ decresce se R cresce $\Longrightarrow \theta$ cresce, P cresce e $\sigma^2(\widetilde{X})$ decresce
La (20.11) non tiene conto dei fenomeni ciclici, della redditività degli investimenti e dell'inflazione
$\varphi(u) < 1$ solo se $u \to \infty$
Supponiamo che esiste un limite superiore M per il costo del singolo sinistro (es. riassicurazione XL). Si dimostra che:

$$e^{-RM} < C(u) < 1$$

E pertanto vale la seguente disuguaglianza:

$$e^{-RM}e^{-Ru} < \varphi(u) = C(u)e^{-Ru} < e^{Ru}$$

Poichè $M << u$ i due limiti sono molto ravvicinati tra loro, per cui una buona stima di $\varphi(u)$ è:

$$\varphi(u) \simeq e^{-Ru} \tag{20.12}$$

Nel caso di $\widetilde{X} \sim$ Poisson composta semplice, sarà:

$$\varphi(u) \simeq exp\left\{-\frac{2\theta}{m(M)r_{2,\widetilde{z}}(M)}u\right\} = exp\left\{-\frac{2\theta m(M)}{a_2(M)}u\right\}$$

NB
La (20.12) non è ininfluente della dimensione dell'impresa (manca il numero medio di sinistri n)

20.3.9 Processo di Poisson

Definizione 20.3.4. *Il numero dei sinistri è un processo* $\{\widetilde{K}_t; t \geq 0\}$ *di Poisson con parametro* $n > 0$ *se valgono le tre seguenti condizioni*

1. $k_0 = 0$
2. *Il processo ha incrementi stazionari e indipendenti*
3. *Il numero di sinistri in un intervallo di lunghezza* t *è distribuito come una Poisson con media* nt*. Vale a dire che,* $\forall S,\ t > 0$ *si ha:*

$$\mathbb{P}\left\{\widetilde{K}_{t+S} - \widetilde{K}_S = k\right\} = e^{-nt}\frac{(nt)^k}{k!},\ k = 1, 2, \ldots$$

NB

Incrementi stazionari *: la distribuzione del numero dei sinistri in un dato intervallo di tempo dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo di tempo dipende solo dalla lunghezza dell'intervallo e non da quando l'intervallo si verifica (ad esempio aumenta di trend)*

Incrementi indipendenti *il numero di sinistri in un intervallo è statisticamente indipendente dal numero di sinistri in ogni altro intervallo*

Incrementi stazionari e indipendenti *il processo può pensarsi avviato in qualsiasi punto dell'asse dei tempi*

Proprietà del processo di Poisson

gli intervalli tra i sinistri sono iid, con distribuzione esponenziale, ognuno con media $\frac{1}{n}$

Dimostrazione. Sia

$\widetilde{W}_j,\ j = 1, 2, \ldots,$ il tempo intercorrente tra il (j-1)esimo e il j-esimo sinistro

Allora:

$$\mathbb{P}\{\widetilde{W}_1 > t\} = \mathbb{P}\{\widetilde{K}_t = 0\} = e^{-nt}$$

che rappresenta l'espressione della coda di una esponenziale con media $\frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\widetilde{W}_2 > t|\widetilde{W}_1 = S\} &= \mathbb{P}\{\widetilde{W}_1 + \widetilde{W}_2 > S + t|\widetilde{W}_1 = S\} \\
&= \mathbb{P}\{\widetilde{K}_{t+S} = 1|\widetilde{K}_S = 1\} = \mathbb{P}\{\widetilde{K}_{t+S} = 1|\widetilde{K}_S - k_0 = 1\} \\
&= \mathbb{P}\{\widetilde{K}_{t+S} - \widetilde{K}_S = 0|\widetilde{K}_S - k_0 = 1\} \\
&= \mathbb{P}\{\widetilde{K}_{t+S} - \widetilde{K}_S = 0\} \iff \text{per l'indipendenza degli incrementi} \\
&= e^{-nt} \iff \text{per la terza condizione del processo di Poisson}
\end{aligned}$$

Poichè il risultato è vero $\forall$ S, allora:

$$\mathbb{P}\{\widetilde{W}_2 > t\} = e^{-nt}$$

e $\widetilde{W}_2$ è indipendente da $\widetilde{W}_1$
Così anche $\widetilde{W}_3, \widetilde{W}_4, \ldots,$ sono iid come esponenziali di media $\dfrac{1}{n}$ $\square$

Appendice A

Analisi dell'utile di Mortalità

$\widetilde{{}_1Y_{t+1}} = [v_t^b + b_{t+1}(1-\alpha^*-\beta^*)-\gamma^*](\widetilde{w_t}-\widetilde{s_{t+1}})(1+j^*)-(\widetilde{x_{t+1}}+\widetilde{w_{t+1}}v_{t+1}^b)$
Trascuro $\widetilde{Q_t}$

$$
\begin{aligned}
=&[v_t^b + b_{t+1}(1-\alpha^*-\beta^*)-\gamma^*](\widetilde{w_t}\widetilde{s_{t+1}})(1+j^*)-[\widetilde{x_{t+1}}+(\widetilde{w_t}-\widetilde{s_{t+1}}-\widetilde{z_{t+1}})v_{t+1}^b]\\
=&[v_t+v_t^e\pm\pi_{t+1}+b_{t+1}-b_{t+1}(\alpha^*+\beta^*)-\gamma^*](\widetilde{w_t}-\widetilde{s_{t+1}})(1+j^*)\\
=&[\widetilde{x_{t+1}}+(\widetilde{w_t}-\widetilde{s_{t+1}}-\widetilde{z_{t+1}})(v_{t+1}+v_{t+1}^e)]\\
=&\{(v_t+\pi_{t+1})+v_t^e+(b_t-\pi_{t+1})-[(\alpha^*+\beta^*)b_{t+1}+\gamma^*]\}(\widetilde{w_t}-\widetilde{s_{t+1}})(1+j^*)-\\
-&\widetilde{x_{t+1}}-v_{t+1}(\widetilde{w_t}-\widetilde{s_{t+1}})+v_{t+1}\widetilde{z_{t+1}}-(\widetilde{w_t}-\widetilde{s_{t+1}})v_{t+1}^e+\widetilde{z_{t+1}}v_{t+1}^e\\
=&\{[(v_t+\pi_{t+1})-v_{t+1}(1+j^*)^{-1}](1+j^*)(\widetilde{w_t}-\widetilde{s_{t+1}})+v_{t+1}\widetilde{z_{t+1}}\}-\widetilde{x_{t+1}}+\\
+&\{v_t^e+(b_{t+1}-\pi_{t+1})-[(\alpha^*+\beta^*)b_{t+1}+\gamma^*]-v_{t+1}^e(1+j^*)^{-1}\}(1+j^*)(\widetilde{w_t}-\widetilde{s_{t+1}})+v_{t+1}^e\widetilde{z_{t+1}}
\end{aligned}
$$

Poniamo:
$\pi_{t+1}^r = (v_t+\pi_{t+1})-v_{t+1}(1+j^*)^{-1} \Rightarrow$ quantità pura a rischio
$\pi_{t+1}^e = b_{t+1}-\pi_{t+1} \Rightarrow$ tasso complessivo di caricamento
$e_{t+1}^* = (\alpha^*)b_{t+1}+\gamma^* \Rightarrow$ tasso di spesa ipotizzata
$\pi_{t+1}^{er} = (v_t^e+\pi_{t+1}^e-e_{t+1}^*)-v_{t+1}^e(1+j^*)^{-1} \Rightarrow$ quantità di spesa a rischio
Da cui si ha per l'utile:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{{}_1Y_{t+1}} =&\{[\pi_{t+1}^r(1+j^*)(\widetilde{w_t}-\widetilde{s_{t+1}})+v_{t+1}\widetilde{z_{t+1}}]-\widetilde{x_{t+1}}\}+\{\pi_{t+1}^{er}(1+j^*)(\widetilde{w_t}-\widetilde{s_{t+1}})+v_{t+1}^e\widetilde{z_{t+1}}\}\\
=&\widetilde{{}_1Y_{t+1}^{(r)}}+\widetilde{{}_1Y_{t+1}^{(er)}}
\end{aligned}
$$

Dove la prima parte è relativa alla quantità pura (prestazioni assicurate) e la seconda è relativa alle spese

Nota Bene

Per ogni forma assicurativa si ha:

$$\pi_{t+1}^{er} = -q_{x+t}^{*} v_{t+1}^{e} (1+j^{*})^{-1}$$

A seconda della forma assicurativa si ha:

$$TCM\,/\,MS \Longrightarrow \pi_{t+1}^{(r)} = q_{x+t}^{*}(1-v_{t+1})(1+j^{*})^{-1} > 0$$

$$CD \Longrightarrow \pi_{t+1}^{r} = -q_{x+t}^{*}(1+j^{*})^{-1} v_{t+1} < 0$$

$$RD \Longrightarrow \pi_{t+1}^{r} = \begin{cases} -q_{x+1}^{*} v_{t+1}(1+j^{*})^{-1},\ t < m \\ -q_{x+t}^{*}(1+v_{t+1})(1+j^{*})^{-1},\ t \geq m \end{cases}$$

Indichiamo con:

$$D_{t+1} = 1 - v_{t+1} \Longrightarrow TCM\,/\,MS$$

$$D_{t+1} = -v_{t+1} \Longrightarrow CD$$

$$D_{t+1} = \begin{cases} -v_{t+1}\, per & t < m \\ -(1+v_{t+1})\, per & t \geq m \end{cases} \Longrightarrow RD$$

In tutti i casi si avrà:

$$\widetilde{\pi_{t+1}^{r}} = q_{x+t}^{*} D_{t+1}(1+j)^{-1}$$

Da cui l'utile diventa:

$$\widetilde{{}_1Y_{t+1}^{r}} = [q_{x+t}^{*} D_{t+1}(1+j^{*})^{-1}(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}}) + v_{t+1}\widetilde{z_{t+1}}] - \widetilde{x_{t+1}}$$

$$\widetilde{{}_1Y_{t+1}^{er}} = -q_{x+t}^{*} v_{t+1}^{e}(1+ji^{*})^{-1}(1+j^{*})(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}}) + v_{t+1}^{e}\widetilde{z_{t+1}}$$

Quindi per ogni forma assicurativa si ha:

$$\widetilde{{}_1Y_{t+1}^{(r)}} = D_{t+1}[q_{x+t}^{*}(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}}) - \widetilde{z_{t+1}}]$$

$$\widetilde{{}_1Y_{t+1}^{(er)}} = -v_{t+1}^{e}[q_{x+t}^{*}(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}}) - \widetilde{z_{t+1}}]$$

Ovvero:

$$\widetilde{{}_1Y_{t+1}} = D_{t+1}^{b}[q_{x+t}(\widetilde{w_t} - \widetilde{s_{t+1}}) - \widetilde{z_{t+1}}]\widetilde{Q_t}$$

Con $D_{t+1}^{b} = D_{t+1} - v_{t+1}^{e}$ è la quantità complessiva sotto rischio.

In più si ha:

$$v_{t+1}\widetilde{z_{t+1}} - \widetilde{x_{t+1}} = \begin{cases} v_{t+1}\widetilde{z_{t+1}} - \widetilde{z_{t+1}} = -\widetilde{z_{t+1}}(1-v_{t+1}) = -\widetilde{z_{t+1}} - D_{t+1} & per\, TCM\,/\,MS \\ v_{t+1}\widetilde{z_{t+1}} - 0 = -\widetilde{z_{t+1}} D_{t+1} & per\, CD \end{cases}$$