Il caricamento globale $m = \eta \cdot \sigma$ è ripartito tra le singole polizze con la funzione:

$$f(\eta) = \frac{m}{P} = \boxed{\eta \cdot \frac{\sigma}{P}}$$ → Indice di fluttuazione del portafoglio.

Quindi: $m_h = f(\eta) \cdot P_h \quad , \forall h = 1, 2, \dots, n$

in modo che $m = \sum_{h=1}^{n} m_h = \sum_{h=1}^{n} P_h \cdot f(\eta)$

Osservazione. (...)

Il rapporto $\boxed{\frac{\sigma}{P}}$ = Indice di rischio del Portafoglio.

Analisi dell'indice di rischio

1) Siano $\boxed{q(h) = q}, \forall h$

allora: $E(\tilde{Y}) = P = q \cdot \sum_{h=1}^{n} C_h$

$$\sigma(\tilde{Y}) = \sigma = \sqrt{q(1-q) \sum_{h=1}^{n} C_h^2}$$

quindi:

$$\frac{\sigma}{P} = \sqrt{\frac{1-q}{q}} \cdot \frac{\sqrt{\sum_{h=1}^{n} C_h^2}}{\sum_{h=1}^{n} C_h} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{1-q}{q}} \cdot \frac{\sqrt{n \cdot \bar{C}^{(2)}}}{n \cdot \bar{C}}}$$

Osservazioni: (...)

2) Siano: $p_{(h)} = p$ e $C_h = C$, $\forall h = 1, 2, \dots, n$

$\Rightarrow$ Portafoglio di contratti quali-quantitativamente omogenei.

Allora: $\tilde{Y} = \begin{cases} 0, C, 2C, \dots, n \cdot C \\ P_r\{k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{cases}$

con $E(\tilde{Y}) = P = n \cdot C \cdot p$

$\sigma(\tilde{Y}) = \sigma = C \cdot \sqrt{n \cdot p(1-p)}$

L'indice di rischio risulta:

$\frac{\sigma}{P} = \sqrt{\frac{1-p}{n \cdot p}}$ decrescente al crescere di n.

<u>Osservazioni</u>: (...)

c) Consideriamo la $\boxed{\text{Probabilità di rovina nell'esercizio}}$

Sia Π = riserve libere della compagnia.

L'evento $\{\tilde{Y} > P + m + \Pi\} \rightarrow$ "rovina"

con $\Pr\{\tilde{Y} > P + m + \Pi\} \rightarrow$ prob. rovina nell'esercizio.

Sia ε' la probabilità di rovina massima accettabile.

Si vuole che:

$$\varepsilon' = \Pr\{\tilde{Y} > P + m + \Pi\} = \Pr\left\{\frac{\tilde{Y} - P}{\sigma} > \frac{\Pi + m}{\sigma}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{\Pi + m}{\sigma}\right) \quad (1)$$

Posto $\delta = \frac{\Pi + m}{\sigma}$, si ottiene:

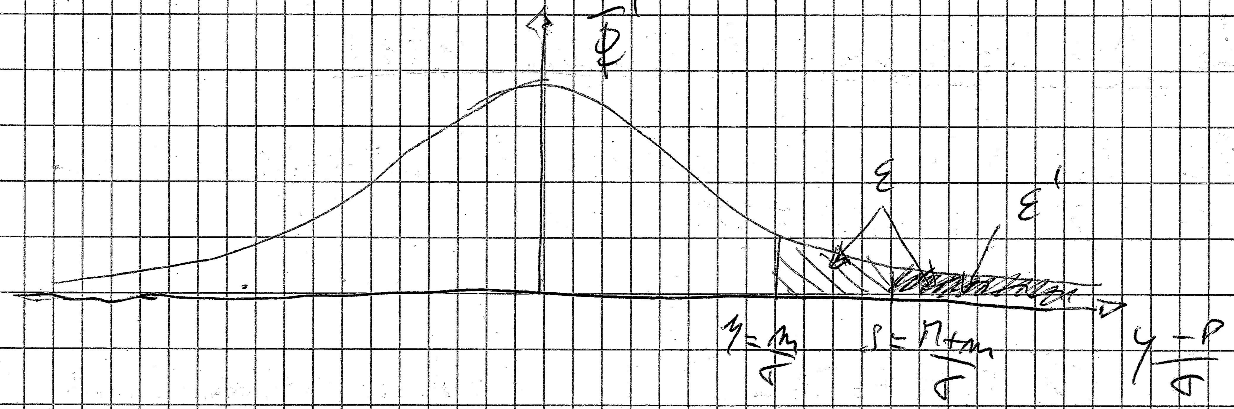
$$\varepsilon' = 1 - \Phi(\delta) \rightarrow \delta = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon')$$

dove $\boxed{\delta = \frac{\Pi + m}{\sigma}}$ è l'indice di stabilità relativa del portafoglio

Il livello di δ che consente di raggiungere l'obiettivo (1) si può conseguire operando sulle tre variabili strategiche:

Π : Patrimonio
m : Caricamenti
σ : volatilità

Osservazioni : (...)



Osservazione. Dato ε', volendo ricavare M, si ha:

$$1-\Phi\left(\frac{M+m}{\sigma}\right)=\varepsilon'$$

$$\Phi\left(\frac{M+m}{\sigma}\right)=1-\varepsilon'$$

$$\frac{M+m}{\sigma}=\Phi^{-1}(1-\varepsilon')$$

$$\boxed{M=\Phi^{-1}(1-\varepsilon')\cdot\sigma-m}$$

Commento (...)

La Disuguaglianza del Cantelli (1911)

Per la v.a. $\tilde{y}$ = estrazione di portafoglio, con $P = E(\tilde{y})$ e $\sigma = \sigma(\tilde{y})$, vale:

$$Pr\left\{ |\tilde{y} - P| \geq t \cdot \sigma \right\} \leq \frac{1}{t^2}, \quad (t > 0)$$: Disuguaglianza di Bienaymé - Chebicev

Quindi interessa considerare: $Pr\left\{ \tilde{y} - P \geq t \cdot \sigma \right\}$ (1)

Una limitazione superiore della (1) è:

$$Pr\left\{ \tilde{y} - P \geq t \cdot \sigma \right\} \leq \frac{1}{1+t^2}, \quad (t > 0)$$: Disuguaglianza di Cantelli.

Allora, per l'evento $\tilde{y} \geq P + m + \Pi$, deve essere:

$$t \cdot \sigma = \Pi + m \rightarrow t = \frac{\Pi + m}{\sigma} = s$$

In conclusione:

$$\boxed{Pr\left\{ \tilde{y} \geq P + m + \Pi \right\} \leq \frac{1}{1+s^2}}$$

Osservazione. L'indice s assume un ruolo significativo nella limitazione superiore della probabilità di rovina.