Modelli di Programmazione Intera

In questa lezione

- **Modelli di localizzazione**
- **Uso delle variabili binarie**

Modelli di localizzazione

- I modelli di localizzazione rappresentano i principali strumenti quantitativi per la pianificazione territoriale di reti di servizio.

- L'obiettivo che si vuole perseguire è quello di stabilire dove localizzare dei centri di servizio (impianti di produzione, centri di distribuzione, centri sanitari ecc.), in modo da **soddisfare** la domanda distribuita su una data area geografica e da **minimizzare** una funzione di costo opportunamente definita.

Modelli di localizzazione

- Le decisioni relative alla localizzazione di centri di servizio sono decisioni di tipo strategico, si riferiscono generalmente a un orizzonte di pianificazione di medio-lungo periodo, richiedono la realizzazione di investimenti di notevole entità e vengono prese congiuntamente con quelle di allocazione della domanda

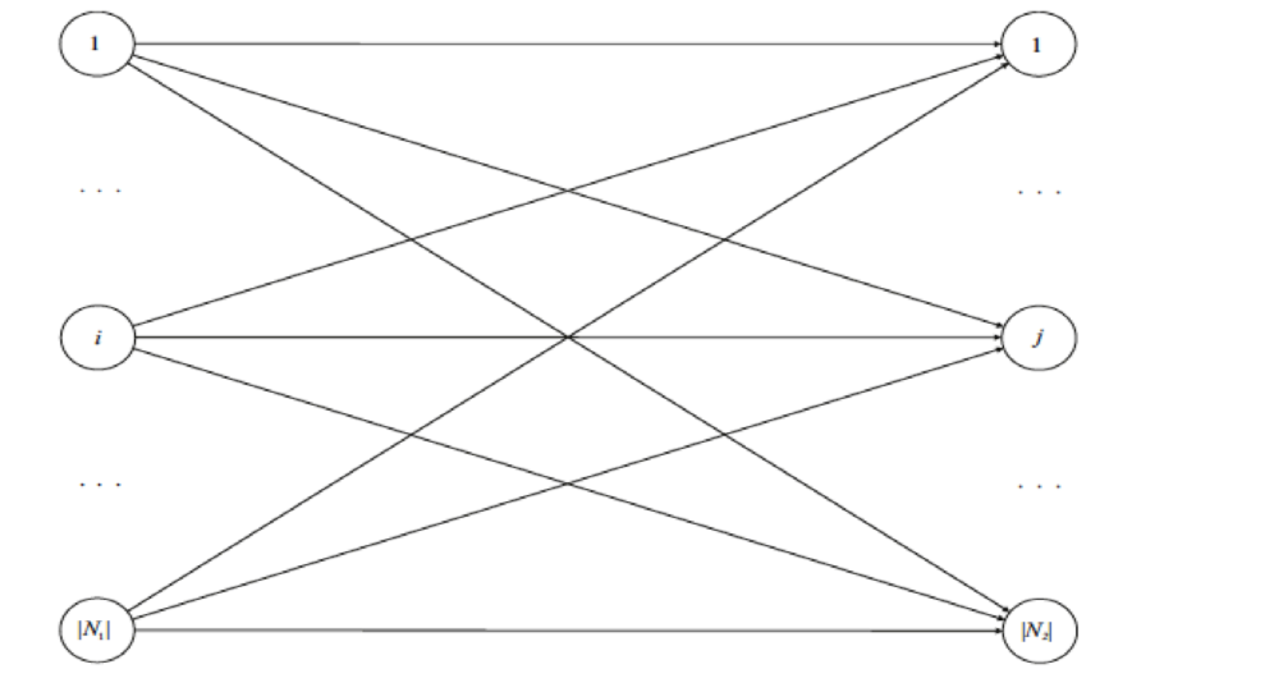
- Ci sono numerosissime varianti con le quali si possono presentare i modelli di localizzazione

Modelli di localizzazione

- Monotipo: la localizzazione riguarda centri di servizio dello stesso tipo (ad esempio, soltanto impianti di produzione)
- Discreto: si assume noto l’insieme N1 di siti potenziali e la scelta di localizzazione avviene selezionando uno o più siti appartenenti a N1
- A singolo prodotto: i flussi di prodotti (o servizi) presi in considerazione sono di uno stesso tipo
- A un livello: gli unici flussi presi in esame sono quelli tra i nodi da localizzare e quelli «a valle» (denominati successori), oppure tra i nodi «a monte» (denominati predecessori) e quelli da localizzare.

Modelli di localizzazione

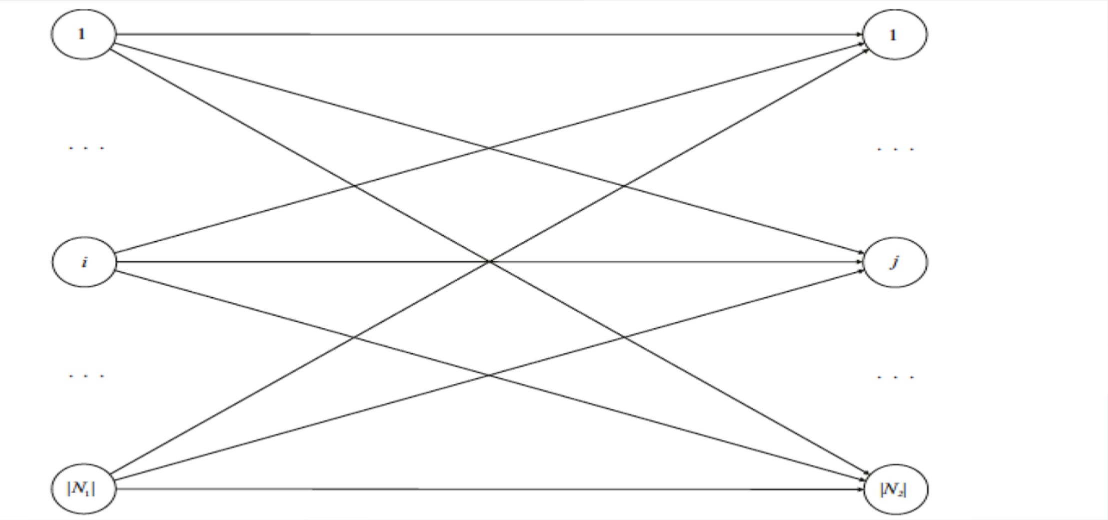
- Il problema di localizzazione più noto è il CPL («Capacitated Plant Location») che può essere schematizzato utilizzando un digrafo completo bipartito $G = (N_1 \, U \, N_2, A)$



- N_1 siti potenziali
- N_2 nodi di domanda
- $A = N_1 \, X \, N_2$ archi

Modelli di localizzazione

- d_j, $j \in N_2$, la stima della domanda media del nodo j
- $q_i, i \in N_1$, capacità del sito potenziale i
- $c_{ij}, i \in N_1, j \in N_2$, il costo unitario di trasporto dal sito potenziale i, al nodo j
- $f_i, i \in N_1$, il costo fisso medio di avviamento del sito potenziale i.



Modelli di localizzazione

Le variabili di decisione :

- y_i, $i \in N_1$, di tipo binario, assumono valore pari a 1 se si decide di attivare il sito potenziale i, 0 altrimenti
- x_{ij}, $i \in N_1, j \in N_2$, indicano il flusso di prodotto dal nodo i al nodo j.

I vincoli:

- vincoli sul soddisfacimento della domanda
- vincoli sulla capacità dei siti

Modelli di localizzazione

Il modello di CPL assume pertanto la seguente forma:

$$\min \; z(x,y) = \sum_{i\in N_1}\sum_{j\in N_2} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i\in N_1} f_i y_i$$

$$s.v.$$

$$\sum_{i\in N_1} x_{ij} = d_j \qquad j\in N_2$$

$$\sum_{j\in N_2} x_{ij} \le q_i y_i \qquad i\in N_1$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i\in N_1, j\in N_2$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i\in N_1$$

Modelli di localizzazione

- Il primo insieme di vincoli rappresenta il soddisfacimento della domanda per ogni nodo di domanda.

- Il secondo gruppo di vincoli, oltre a garantire che i flussi di prodotto in uscita da ciascun nodo i non eccedano il massimo livello di attività del nodo stesso, sono utilizzati per esprimere il legame esistente tra il valore delle variabili x_{ij} e quello delle variabili y_i.

- La funzione obiettivo da minimizzare è la somma dei costi fissi di avviamento e dei costi di trasporto.

Esempio

- Una compagnia di distribuzione deve rifornire i suoi 5 clienti dislocati in località diverse di una regione.
- Per ottimizzare il rifornimento, la compagnia sta valutando la possibilità di costruire dei depositi in alcune aree. Sulla base di un primo studio di fattibilità la compagnia individua tre potenziali aree di costruzione.
- La tabella 1 riporta il costo di costruzione dei depositi (in euro) e le loro capacità (in tonnellate).

Esempio

- La quantità di merce richiesta da ciascun utente ed i costi di trasporto unitari dai depositi ai clienti sono riportati nella tabella 2.

- Supponendo che la compagnia decida di attivare al più due depositi e che non vi siano delle limitazioni sulle quantità trasferibili su ogni collegamento, formulare un modello di ottimizzazione per risolvere il problema in esame.

Esempio

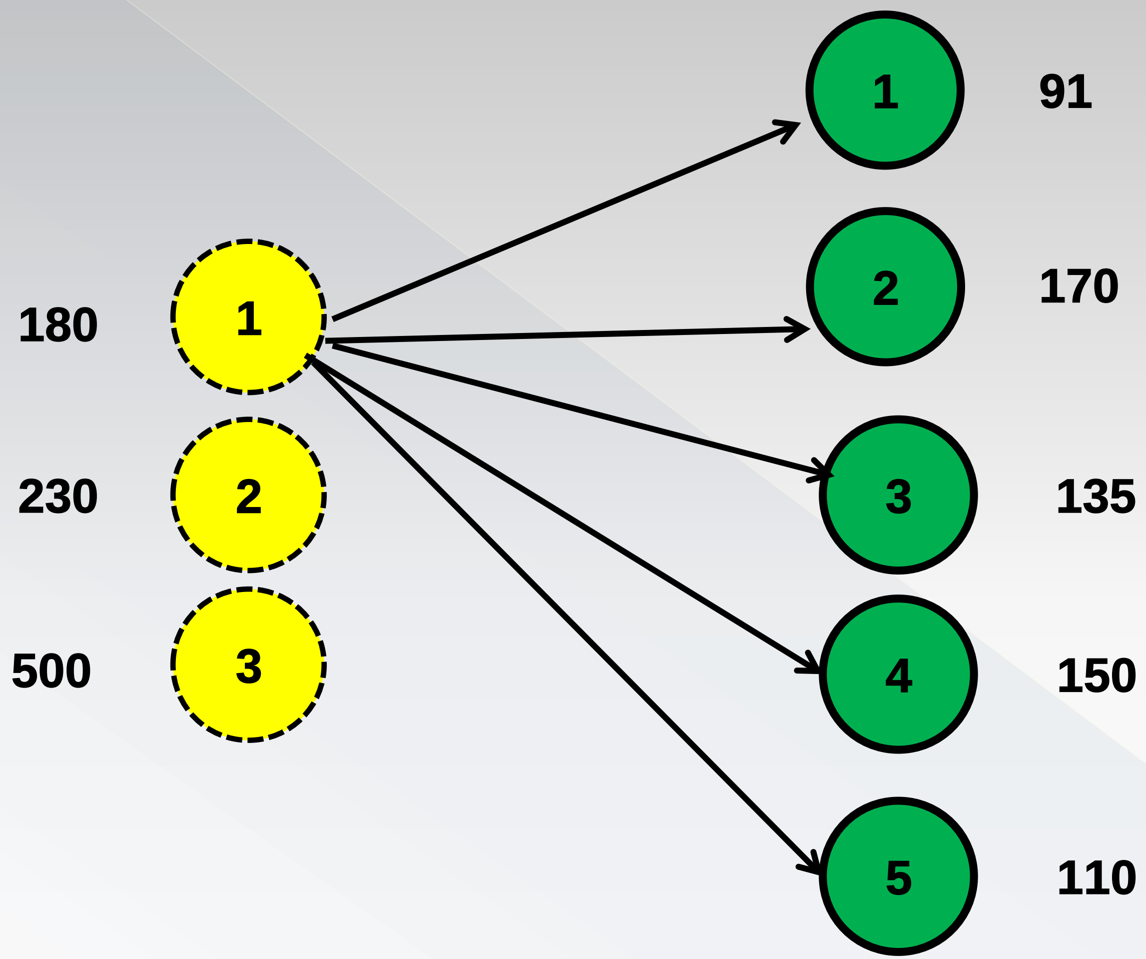
	Costo costruzione	Capacità
Deposito 1	5000	180
Deposito 2	7500	230
Deposito 3	6000	500

Tabella 1

	1	2	3	4	5
Domanda	91	170	135	150	110
Deposito 1	7	6	13	5	4
Deposito 2	6	10	7	10	2
Deposito 3	3	5	1	5	10

Tabella 2

Esempio

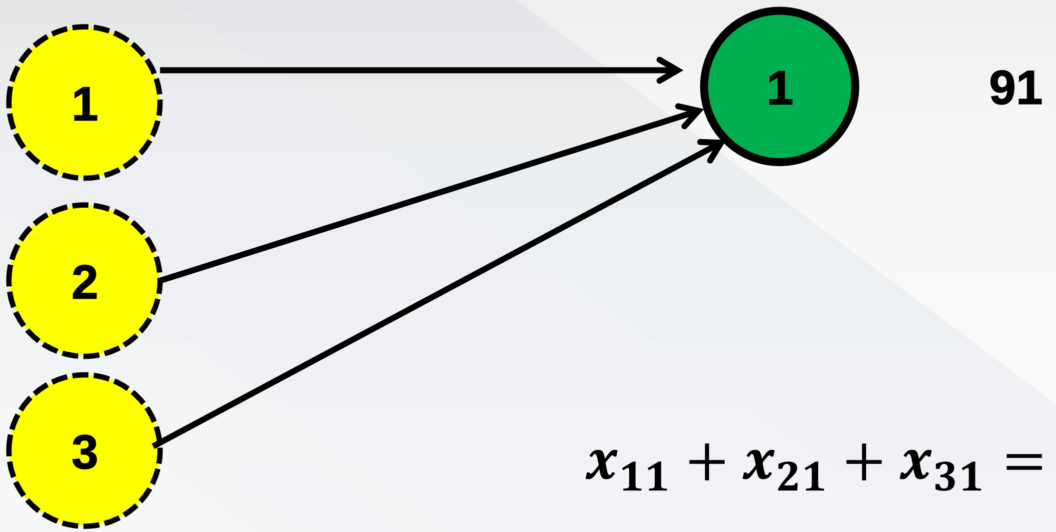


Esempio

Variabili di decisione

- $y_i, i = 1,2,3$ la variabile di decisione di tipo binario associata al deposito potenziale i
- $x_{ij}, i = 1,2,3, j = 1, \dots, 5$, la variabile di decisione che esprime la quantità di merce da inviare da i a j

Vincoli sul soddisfacimento della domanda



$$\boldsymbol{x_{11} + x_{21} + x_{31} = 91}$$

Esempio

Vincoli sul soddisfacimento della domanda

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 91$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 170$$

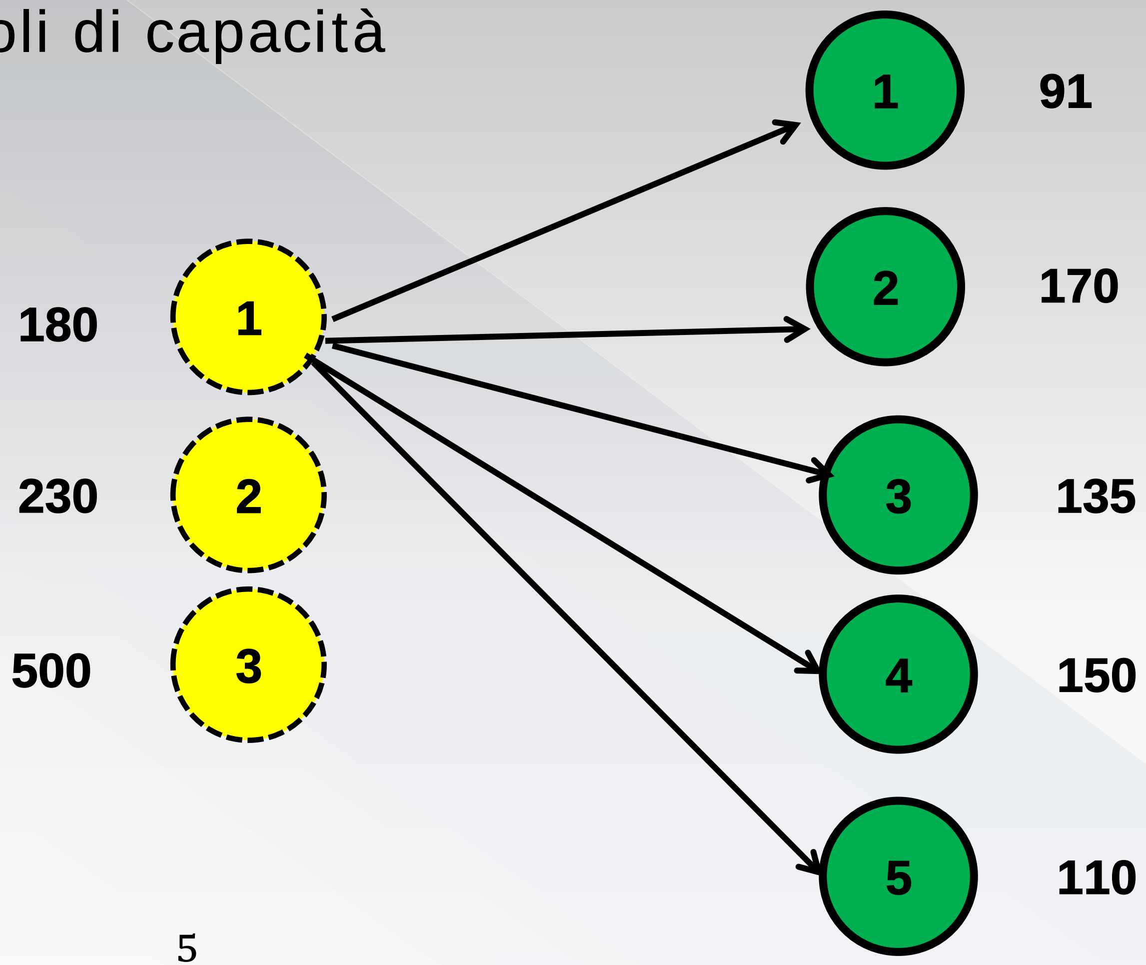
$$\sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 135$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 153$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i5} = 110$$

Esempio

Vincoli di capacità



$$\sum_{j=1}^{5} x_{1j} \leq 180\, y_1$$

Esempio

Vincoli sulla capacità

$$\sum_{j=1}^{5} x_{1j} \leq 180\, y_1$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{2j} \leq 230\, y_2$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{3j} \leq 500\, y_3$$

Vincolo sul numero di siti

$$\sum_{i=1}^{3} y_i \leq 2$$

Esempio

- Funzione obiettivo: minimizzazione dei costi totali (attivazione e trasporto)

$$
\begin{aligned}
&Min\ z(x, y) = \\
&7x_{11} + 6x_{12} + 13x_{13} + 5x_{14} + 4x_{15} + 6x_{21} + 10x_{22} + 17x_{23} + 10x_{24} \\
&\quad + 2x_{25} + 3x_{31} + 5x_{32} + x_{33} + 8x_{34} + 10x_{35} + \\
&5000y_1 + 7500y_2 + 6000y_3
\end{aligned}
$$

Osservazione

- E' possibile anche una formulazione alternativa equivalente, nella quale le variabili x_{ij} indicative della quantità di merce inviate da *i* a *j* sono espresse come

$$x_{ij} = d_j\, s_{ij}$$

  dove s_{ij} indica la frazione di domanda del nodo *j* soddisfatta dal nodo *i*
- In questo caso i vincoli vengono scritti in maniera diversa ...
- Noi utilizzeremo la formulazione introdotta nelle slide

Esempio

- La Buzzar Bank, istituto di credito ucraino, vuole determinare la posizione ottimale di due sportelli bancari nella città di Odessa.

- Il territorio cittadino è stato suddiviso in otto diversi quartieri (che nel modello in esame formano l'insieme N_2), mentre sono stati individuati sei diversi siti potenziali (che formano l'insieme N_1), dove ubicare i due sportelli bancari.

- I sei siti sono caratterizzati da costi di attivazione che sono stati assunti identici per ogni sito.

Esempio

- I costi di collegamento tra i siti potenziali e i centroidi degli otto quartieri sono proporzionali alle relative distanze chilometriche che sono riportate in tabella:

	Quartiere							
Sito potenziale	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2,1	1,7	2,8	0,3	0,8	2,2	1,8	0,7
2	1,5	2,2	3,1	2,2	0,2	1,9	2,3	1,3
3	0,9	1,6	2,3	0,3	1,7	1,6	0,9	2,7
4	1,8	3,1	2,7	2,6	3,1	0,6	0,2	0,7
5	0,1	2,5	1,8	3,1	0,4	1,2	0,7	1,1
6	0,5	1,4	3,1	0,5	0,2	1,5	2,2	0,8

Tabella 3.11 Distanze chilometriche tra i siti potenziali e i centroidi dei quartieri di Odessa per il problema della Buzzar Bank.

Esempio

- Per ricordare la notazione si può costruire il grafo bipartito relativo al problema in esame
- L'insieme N_1 dei siti potenziali è costituito da 6 nodi, mentre l'insieme N_2 dei punti di domanda da 8 nodi

- Variabili di decisione
  - y_i, $i \in N_1$, la variabile di decisione binaria, che assume valore 1 se nel sito i verrà localizzato uno sportello bancario, 0 altrimenti
  - x_{ij}, $i \in N_1, j \in N_2$, la variabile di decisione binaria, che assume valore 1 se lo sportello bancario attivato nel sito *i* servirà il quartiere j, 0 altrimenti.

Esempio

Vincoli

- Tutti i quartieri devono essere serviti

$$\sum_{i \in N_1} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N_2$$

- Devono essere localizzati due sportelli

$$\sum_{i \in N_1} y_i = 2$$

- Il quartiere j può essere servito dal sito i solo se i è aperto

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall i, j$$

Esempio

- Osserviamo che i vincoli

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall\, i, j$$

- Possono essere anche riscritti come

$$\sum_{j \in N_2} x_{ij} \leq |N_2| y_i \quad \forall\, i$$

- La funzione obiettivo prevede la minimizzazione dei costi totali.

- Poiché i costi di attivazione sono uguali e devono essere attivati esattamente due siti, i costi fissi possono essere omessi

$$\min z(x) = \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} c_{ij} x_{ij}$$

Esempio

- La soluzione ottima prevede la localizzazione dei due sportelli bancari nei siti 5 e 6.

- I quartieri 1, 3, 6 e 7 sono assegnati allo sportello bancario localizzato nel sito 5 , mentre i quartieri 2, 4, 5 e 8 sono assegnati allo sportello bancario localizzato nel sito 6.

Usi delle variabili di decisione binarie

- Le variabili di decisione di tipo binario vengono generalmente utilizzate nei modelli di ottimizzazione per rappresentare scelte dicotomiche, cioè, le scelte fra «si» o «no», oppure fra «vero» o «falso».

- Nel problema dello zaino le variabili di tipo binario sono utilizzate per rappresentare la decisione di selezionare o meno un oggetto da inserire nello zaino.

- Oltre alla rappresentazione di scelte alternative, le variabili di decisione di tipo binario vengono usate anche per esprimere condizioni logiche, per gestire il soddisfacimento di vincoli alternativi e per trattare il caso di alcune funzioni obiettivo non lineari.

Rappresentazione di condizioni logiche

- Si assume che α, β e γ siano tre condizioni logiche, che possono assumere valore «vero» o «falso», rappresentate mediante tre variabili binarie x_α, x_β e x_γ (il valore 1 corrisponde al valore vero, 0 al valore falso).
- La relazione logica «se α è vera anche β deve essere vera» (implicazione), si esprime tramite il vincolo

$$x_\alpha \leq x_\beta$$

Rappresentazione di condizioni logiche

- Date due condizioni logiche α e β, sia γ l'unione di α e β. Di conseguenza, la relazione logica «γ è vera se almeno una delle due condizioni α e β è vera» (**relazione logica di tipo «OR»**), può essere espressa matematicamente mediante i seguenti vincoli:

γ	α	β
0	0	0
1	1	0
1	0	1
1	1	1

$$x_\alpha \leq x_\gamma$$
$$x_\beta \leq x_\gamma$$
$$x_\gamma \leq x_\alpha + x_\beta$$

Rappresentazione di condizioni logiche

- La **relazione logica di tipo «AND»**, cioè «γ è vera se entrambe le condizioni α e β sono vere» (intersezione), viene rappresentata formalmente mediante i seguenti vincoli:

γ	α	β
0	0	0
0	1	0
0	0	1
1	1	1

$$x_\alpha \geq x_\gamma$$
$$x_\beta \geq x_\gamma$$
$$x_\gamma \geq x_\alpha + x_\beta - 1$$

Altri usi delle variabili binarie

- La condizione che «**al massimo una tra le tre condizioni $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ sia vera**» si esprime formalmente attraverso:

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma \leq 1$$

- Se si vuole garantire che «**esattamente una tra le tre condizioni $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ sia vera**», è necessario imporre il soddisfacimento del seguente vincolo:

$$x_\alpha + x_\beta + x_\gamma = 1$$

Esercizio Motorfriends

Motorfriends è un'associazione culturale laziale che desidera organizzare un'esposizione di macchine d'epoca.

Le auto disponibili sono:

- una Fiat 500 (1)
- una Alfa Romeo Giulia Sprint GTA (2)
- una Bianchina Autobianchi (3)
- una Fiat Abarth Simca (4)
- una Lancia Flavia Sport (5)
- una Innocenti Austin A40 (6)

Per organizzare l'evento si ha a disposizione un budget di 15000 €.

Esercizio Motorfriends

- Il valore di ogni auto è stato determinato calcolando il numero medio giornaliero di persone potenzialmente interessate a partecipare alla mostra per ammirare l'auto stessa.
- Tale numero è pari, rispettivamente, a 58, 37, 42, 40, 55 e 33 persone per le auto sopra elencate.
- Per organizzare l'evento si ha a disposizione un budget di 15000 €.
- Il costo da sostenere per trasportare le auto dalla loro localizzazione attuale alla sede della mostra e il costo di assicurazione è pari (in €), rispettivamente, a 6000, 4000, 3800, 4200, 5500 e 3200, per le auto sopra elencate.

Esercizio Motorfriends

- L’obiettivo che si vuole raggiungere è quello di selezionare le auto da presentare durante l’esposizione, rispettando il vincolo di budget e massimizzando il numero dei visitatori giornalieri.
  - Inoltre, è necessario che:
    - almeno tre auto siano selezionate fra le sei disponibili;
    - se la Bianchina Autobianchi (3) è scelta, allora dovrà essere inclusa nella mostra anche la Lancia Flavia Sport (5);
    - se la Fiat 500 (1) non è inclusa nell’esposizione, allora l’Alfa Romeo Giulia Sprint GTA (2) deve essere selezionata.

Esercizio Motorfriends

- Le variabili di decisione sono di tipo binario (con valore 1 se il modello è selezionato, 0 altrimenti):
  - $x_j, j = 1, \dots, 6$ (1=Fiat 500, 2=Alfa Romeo Giulia Sprint GTA, 3=Bianchina Autobianchi, 4=Fiat Abarth Simca, 5=Lancia Flavia Sport, 6=Innocenti Austin A40),

- Il vincolo di budget assume quindi la seguente forma:

$$6000x_1 + 4000x_2 + 3800x_3 + 4200x_4 + 5500x_5 + 3200x_6 \leq 15000;$$

Dal momento che è necessario selezionare almeno tre auto, è necessario imporre il seguente vincolo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 3;$$

Esercizio Motorfriends

- Dal momento che è necessario selezionare almeno tre auto, è necessario imporre il seguente vincolo:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 3$$

- Si vuole, inoltre, garantire che se la Bianchina Autobianchi è scelta, allora dovrà essere inclusa nella mostra anche la Lancia Flavia Sport

se $x_3 = 1$, allora x_5 deve assumere il valore 1

$$x_3 \leq x_5.$$

Esercizio Motorfriends

- Deve essere soddisfatta anche la condizione che, se la Fiat 500 non è inclusa nella esposizione, allora l'Alfa Romeo Giulia Sprint GTA deve essere selezionata

se $x_1 = 0$, allora x_2 deve essere posta pari ad 1

- Pertanto, è necessario introdurre il seguente vincolo:

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

Esercizio Motorfriends

- La formulazione del modello di ottimizzazione risulta:

$$\max z(x) = 58x_1 + 37x_2 + 42x_3 + 40x_4 + 55x_5 + 33x_6$$

$s.v.$

$$6000x_1 + 4000x_2 + 3800x_3 + 4200x_4 + 5500x_5 + 3200x_6 \leq 15000;$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 3;$$
$$x_3 \leq x_5;$$
$$x_1 + x_2 \geq 1;$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \{0,1\}$$

- La soluzione ottima è

x1* =1, x2*, x3*, x4*=0, x5*, x6*=1, z*=146