Diagramma di Dualità

Analisi dei Dati[1]

[1]Corso di Laurea in Scienze Statistiche e Attuariali
Dipartimento di Diritto, Economia, Management e Metodi Quantitativi (DEMM)
Università degli Studi del Sannio

Prof. Pietro Amenta

Fonte: *Pietro Amenta. Appunti di Analisi dei Dati Multidimensionali*

- Una **applicazione** f di un vettoriale V (spazio vettoriale di partenza) in un vettoriale W (spazio vettoriale d'arrivo) è **lineare** se

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \\ f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x}) \end{cases}$$

- **L'insieme** $L(V, W) = \{f / V \xrightarrow{f} W\}$ **delle applicazioni lineari** dal vettoriale V nel vettoriale W, munito delle operazioni seguenti

$$\text{Addizione:} \quad \begin{aligned} V &\xrightarrow{f_1 + f_2} W \\ \mathbf{x} &\longrightarrow f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$\text{Omotetia:} \quad \begin{aligned} V &\xrightarrow{\lambda f} W \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \lambda f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

è **uno spazio vettoriale.**

- L'insieme $L(V, W)$ delle applicazioni lineari $f : V \longmapsto W$ è uno spazio vettoriale di dimensione pari prodotto delle dimensioni di V e W
- Quando W ha dimensione 1, lo spazio delle applicazioni lineari $L(V, \Re)$ si chiama ***spazio vettoriale duale*** di V, e si denota con il simbolo V^*

$$V^* = \{f/V \xrightarrow{f} \Re; f \text{ lineare}\}$$

ed i suoi elementi vengono denominati ***funzionali lineari*** o ***forme lineari***

- Un *funzionale lineare* è quindi una funzione $f : V \longmapsto \Re$ tale che

$$f(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = af(\mathbf{v}) + bf(\mathbf{w})$$

con $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ e $a, b \in \Re$.

- Supponiamo che il vettoriale V di dimensione n è munito della base $\{\mathbf{v}_i / i = 1, \ldots, n\}$.
- Sia $\mathbf{v}_i^*$ inoltre una applicazione che, qualunque sia $\mathbf{x} \in V$, fornisce la sua i-esima coordinata rispetto alla base $\{\mathbf{v}_i / i = 1, \ldots, n\}$

$$
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{\quad \mathbf{v}_i^* \quad} & \Re \\
\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i & \longrightarrow & \mathbf{v}_i^*(\mathbf{x}) = x_i
\end{array}
$$

con $\mathbf{v}_i^*(\mathbf{v}_i) = 1$ e $\mathbf{v}_i^*(\mathbf{v}_j) = 0$ per $i \neq j$:

$\boxed{\mathbf{v}_i^* \text{ è quindi una forma lineare: } \mathbf{v}_i^* \in V^*}$

- Se f è un funzionale lineare qualunque

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\quad f \quad} \Re \\ \mathbf{x} &\longrightarrow f(\mathbf{x}) \in \Re \end{aligned}$$

la sua linearità ci permette di scrivere

$$f(\mathbf{x}) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i^*(\mathbf{x})$$

che risulta vera $\forall \mathbf{x}$, e quindi tutti i funzionali lineari risultano essere combinazioni lineari delle forme lineari $\mathbf{v}_i^*$

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i^* = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathbf{v}_i^*$$

con $f(\mathbf{v}_i) = f_i$.

- Lo spazio duale V^* di V, spazio vettoriale dei funzionali lineari su V ha quindi le stesse dimensioni di V, e a tutta la base $\{\mathbf{v}_i / i = 1, \ldots, n\}$ di V corrisponde in V^* la **base duale** $\{\mathbf{v}_i^* / i = 1, \ldots, n\}$
- Alla forma lineare f è associato inoltre il vettore $\mathbf{f} \in V^*$
- Con la notazione $< \mathbf{f}, \mathbf{x} >$ (o $< \mathbf{x}, \mathbf{f} >$) si indicherà l'immagine del vettore **x** tramite la forma lineare **f** (o l'immagine del vettore **f** tramite la forma lineare **x**)

$$f(\mathbf{x}) =< \mathbf{f}, \mathbf{x} >=< \mathbf{x}, \mathbf{f} >= \mathbf{x}(\mathbf{f})$$

- Un funzionale lineare scritto in coordinate ha sempre la forma di una funzione

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = f_1 x_1 + \ldots + f_n x_n$$

dove $(x_1, \ldots, x_n)$ sono le coordinate del vettore sul quale calcoliamo **f**

- In generale, una espressione della forma

$$f_1 x_1 + \ldots + f_n x_n$$

può vedersi come una funzione tante delle $(f_1, \ldots, f_n)$ quanto delle $(x_1, \ldots, x_n)$; questa idea conduce al concetto di **prodotto scalare** classico che indichiamo con

$$f(\mathbf{x}) =< \mathbf{f}, \mathbf{x} >=< \mathbf{x}, \mathbf{f} >= \mathbf{x}(\mathbf{f})$$

- Sia $\mathbf{X}$ una matrice di dimensione $n \times p$ che raccoglie le rilevazioni delle variabili $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ su n unità statistiche.
- Il numero x_i^j, elemento delle i-esima riga e della j-esima colonna, risulta essere allora il valore preso dalla variabile j sull'i-esima unità statistica:

$$i \in I \qquad j \in J \qquad h_i(j) = x_i^j \in \Re$$

con $I = \{1, \ldots, n\}$ e $J = \{1, \ldots, p\}$

- All'insieme dei p numeri $\{x_i^1, \ldots, x_i^p\}$ è associato il vettore

$$\mathbf{x}_i = h(i) = (x_i^1, \ldots, x_i^p) = \sum_{k=1}^{p} x_i^k \mathbf{v}_k \in V = \Re^p$$

dove $\{v_1, \ldots, v_p\}$ è la base canonica dello **Spazio degli Individui** V.

- In modo simmetrico, il numero x_i^j, elemento delle *i*-esima riga e della *j*-esima colonna, risulta essere anche il valore preso dall'*i*-esima unità statistica sulla variabile *j*:

$$i \in I \qquad j \in J \qquad g_i(j) = x_i^j \in \Re$$

- All'insieme degli *n* numeri $\{x_1^j, \ldots, x_n^j\}$ è associato il vettore

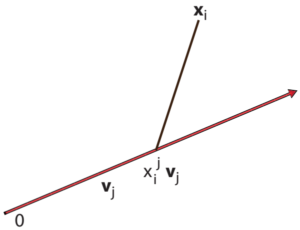
$$\mathbf{x}^j = g(j) = (x_1^j, \ldots, x_n^j)^T = \sum_{k=1}^{n} x_k^j \mathbf{f}_k \in F = \Re^n$$

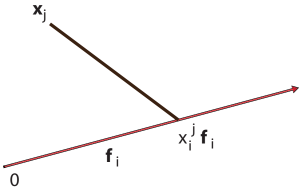
dove $\{f_1, \ldots, f_n\}$ è la base canonica dello **Spazio delle Variabili F.**

- $V^* = \Re^{p*}$ e $F^* = \Re^{n*}$ risultano essere spazi duali rispettivamente di V e F, muniti delle basi duali $\{\mathbf{v}_i^*/j = 1, \ldots, p\}$ e $\{\mathbf{f}_i^*/i = 1, \ldots, n\}$. Abbiamo allora

$$\boxed{x_i^j =< \mathbf{v}_j^*, \mathbf{x}_i >=< \mathbf{f}_i^*, \mathbf{x}^i >}$$

da cui, x_i^j è la coordinata dell'unità i rispetto alla base $\mathbf{v}_j$ in $\Re^p$, ed anche la coordinata della variabile j rispetto alla base $\mathbf{f}_i$ in $\Re^n$





Riassumendo, abbiamo che

Alla variabile $j \in J$ è associato:

- il vettore $\mathbf{x}^j \in \Re^n$;
- l'asse $\Delta_{\mathbf{e}_j} \in \Re^p = \oplus\{\Delta_{e_j}/j = 1, \dots, p\}$;
- il funzionale lineare $\mathbf{e}_j^* \in \Re^{p*}$.

All'unità statistica $i \in I$ è associato:

- il vettore $\mathbf{x}_i \in \Re^p$;
- l'asse $\Delta_{\mathbf{f}_i} \in \Re^n = \oplus\{\Delta_{f_i}/i = 1, \dots, n\}$;
- il funzionale lineare $\mathbf{f}_i^* \in \Re^{n*}$.

- E' naturale allora considerare l'applicazione lineare **X**

$$\begin{aligned} \Re^{p*} &\xrightarrow{\quad \mathbf{X} \quad} \Re^{n} \\ \mathbf{v}_j^* &\longrightarrow \mathbf{x}^j = \mathbf{X}(\mathbf{v}_j^*) \end{aligned}$$

  che, alla forma lineare $\mathbf{v}_j^*$, rappresentazione della variabile j in $\Re^{p*}$, fa corrispondere il vettore $\mathbf{x}^j$, rappresentazione della variabile j in $\Re^n$.
- Allo stesso modo consideriamo l'applicazione lineare $\mathbf{X}^T$ (trasposta di **X**)

$$\begin{aligned} \Re^{n*} &\xrightarrow{\quad \mathbf{X}^T \quad} \Re^{p} \\ \mathbf{f}_i^* &\longrightarrow \mathbf{x}_i = \mathbf{X}^T(\mathbf{f}_i^*) \end{aligned}$$

  che, alla forma lineare $\mathbf{f}_i^*$, rappresentazione dell'unità statistica i in $\Re^{n*}$, fa corrispondere il vettore $\mathbf{x}_i$, rappresentazione dell'unità statistica i in $\Re^p$.

- Poichè le basi $\{\mathbf{v}_j^*/j = 1, \ldots, p\}$ e $\{\mathbf{f}_i/i = 1, \ldots, n\}$ sono contenute, rispettivamente, negli spazi $\Re^{p*}$ e $\Re^n$, la matrice associata all'applicazione lineare $\mathbf{X}$ risulta essere allora la matrice $\mathbf{X}$ di dimensione $n \times p$, che raccoglie le rilevazioni delle variabili $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p$ su n unità statistiche.

$$\Re^{p*} \xrightarrow{\quad \mathbf{X} \quad} \Re^n$$

- Allo stesso modo, poichè le basi $\{\mathbf{f}_i^*/i = 1, \ldots, n\}$ e $\{\mathbf{v}_j^*/j = 1, \ldots, p\}$ sono contenute, rispettivamente, negli spazi $\Re^{n*}$ e $\Re^p$, la matrice associata all'applicazione lineare $\mathbf{X}^T$ risulta essere allora la matrice $\mathbf{X}^T$ di dimensione $p \times n$.

$$\Re^{p} \xleftarrow{\quad \mathbf{X}^T \quad} \Re^{n*}$$

- L'**aggiunta** di una trasformazione lineare $\mathbf{T} : V_1 \longmapsto V_2$ fra due spazi dotati del prodotto scalare, è definita come l'applicazione $\mathbf{T}^* : V_2 \longmapsto V_1$ tale che

$$< \mathbf{Tu}, \mathbf{z} >_2 = < \mathbf{u}, \mathbf{T}^*\mathbf{z} >_1$$

$\forall \mathbf{u} \in V_1, \mathbf{z} \in V_2$.

- Poichè prodotti scalari di tipo standard su $\Re^p$ e $\Re^n$ (e i rispettivi duali), allora $\mathbf{X}^*$ corrisponde alla matrice trasposta $\mathbf{X}^T$ di $\mathbf{X}$. Allora $\mathbf{X}^*\mathbf{X} = \mathbf{X}^T\mathbf{X}$ e $\mathbf{X}\mathbf{X}^* = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$, quindi

$$\Re^p \xleftarrow[\mathbf{X}^*(= \mathbf{X}^T)]{} \Re^{n*}$$

- Consideriamo ora la situazione dove i prodotti scalari (cioè le geometrie) su $\Re^p$ e $\Re^n$ sono non standard.
- In generale, alla forma bilineare simmetrica definita positiva $\mathbf{M}$

$$\Re^p \times \Re^p \xrightarrow{\quad \mathbf{M} \quad} \Re$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Re$$

è associato l'isoformismo denominato $\mathbf{M}$

$$\Re^p \xrightarrow{\quad \mathbf{M} \quad} \Re^{p*}$$
$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{x}) \in \Re^{p*}$$

tale che $\mathbf{M}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =< \mathbf{M}(\mathbf{x}), \mathbf{y} >=< \mathbf{x}, \mathbf{M}(\mathbf{y}) >$, dove $< \mathbf{M}(\mathbf{x}), \mathbf{y} >$ designa l'immagine del vettore $\mathbf{y} \in \Re^p$ attraverso la forma lineare $\mathbf{M}(\mathbf{x}) \in \Re^{p*}$.

- Assumiamo, quindi, che esistano delle matrici simmetriche, definite positive **Q** e **D**, di dimensioni rispettivamente $p \times p$ e $n \times n$, tali che i prodotti scalari sono così definiti

$$< \mathbf{u}, \mathbf{v} >_{\mathbf{Q}} = \mathbf{u}^T \mathbf{Q} \mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \Re^p$$

$$< \mathbf{w}, \mathbf{z} >_{\mathbf{D}} = \mathbf{w}^T \mathbf{D} \mathbf{z} \qquad \forall \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \Re^n$$

- **Q** può essere visto come una applicazione da $\Re^p$ a $\Re^{p*}$

$$\Re^p \xrightarrow{\mathbf{Q}} \Re^{p*}$$

- **D** può essere visto come una applicazione da $\Re^n$ a $\Re^{n*}$

$$\Re^n \xrightarrow{\mathbf{D}} \Re^{n*}$$

Se uniamo le relazioni ottenute sugli elementi di base di una tripletta statistica $(\mathbf{X}, \mathbf{Q}, \mathbf{D})$ in uno schema grafico, otteniamo lo schema di base del **Diagramma di Dualità**
(Cazes, 1970; Cailliez & Pages, 1976; Escoufier, 1987)

$$\begin{tikzcd}
\Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] & \Re^{n} \arrow[d, "\mathbf{D}"] \\
\Re^{p} \arrow[u, "\mathbf{Q}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"]
\end{tikzcd}$$

Il **Diagramma di Dualità** può essere visto come una visione complessiva dei sottostanti oggetti matematici usati nella descrizione teorica di una tecnica. Il diagramma ha diverse funzioni:

- rendere più facile la memorizzazione degli elementi caratteristici di diversi metodi;
- individuare facilmente le matrici che consentono particolari soluzioni;
- dove individuare particolari oggetti e procedere al loro calcolo;
- associare ad un data set un operatore dallo spazio delle osservazioni $\Re^p$ allo spazio delle variabili $\Re^n$ (Escoufier).

$$\begin{tikzcd}
\Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}"] & \Re^{n} \arrow[d, "\mathbf{D}"] \\
\Re^{p} \arrow[u, shift left, "\mathbf{Q}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"]
\end{tikzcd}$$

$$\mathbf{u} \in \Re^{p*}$$

$$\mathbf{Xu} \in \Re^{n}$$

$$\mathbf{DXu} \in \Re^{n*}$$

$$\underbrace{\mathbf{X}^T\mathbf{DX}}_{=\mathbf{V}}\mathbf{u} \in \Re^{p}$$

$$\begin{tikzcd}
\Re^{p*} \arrow[d, "\mathbf{V} = \mathbf{X}^T\mathbf{DX}"] \\
\Re^{p}
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
\Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] & \Re^{n} \arrow[d, shift left, "\mathbf{D}"] \\
\Re^{p} \arrow[u, "\mathbf{Q}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"] \arrow[u, shift left, "\mathbf{W}"]
\end{tikzcd}
$$

$$\mathbf{v} \in \Re^{n*}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{v} \in \Re^{p}$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{X}^T\mathbf{v} \in \Re^{p*}$$

$$\underbrace{\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{X}^T}_{=\mathbf{W}}\mathbf{v} \in \Re^{n}$$

$$
\begin{tikzcd}
\Re^{n*} \\
\Re^{n} \arrow[u, "\mathbf{W} = \mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{X}^T"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] & \Re^{n} \arrow[d, "\mathbf{D}"] \\
\Re^{p} \arrow[u, "\mathbf{Q}"] \arrow[ur, bend left, "\mathbf{XQ}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^{T}"]
\end{tikzcd}
$$

$$\mathbf{u} \in \Re^{p}$$

$$\mathbf{Qu} \in \Re^{p*}$$

$$\mathbf{XQu} \in \Re^{n}$$

$$
\begin{tikzcd}
\Re^{p} \arrow[d, "\mathbf{XQ}"] \\
\Re^{n}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] & \Re^{n} \arrow[d, "\mathbf{D}"] \arrow[dl, bend left, "\mathbf{X}^T\mathbf{D}"'] \\
\Re^{p} \arrow[u, "\mathbf{Q}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"]
\end{tikzcd}
$$

$$\mathbf{v} \in \Re^{n}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{v} \in \Re^{n*}$$

$$\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{v} \in \Re^{p}$$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge]
\Re^{n} \arrow[d, "\mathbf{X}^T\mathbf{D}"] \\
\Re^{p}
\end{tikzcd}
$$

Se uniamo le relazioni ottenute sugli elementi di base in uno schema grafico, otteniamo uno schema avanzato del **Diagramma di Dualità**

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}"] & \Re^{n} \arrow[d, shift left, "\mathbf{D}"] \arrow[dl, bend left, "\mathbf{X}^T\mathbf{D}"] \\
\Re^{p} \arrow[u, shift left, "\mathbf{Q}"] \arrow[ur, bend left, "\mathbf{XQ}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"] \arrow[u, shift left, "\mathbf{W}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}"] & \Re^{n} \arrow[d, shift left, "\mathbf{D}"] \arrow[dl, bend left=15, "\mathbf{X}^T\mathbf{D}"] \\
\Re^{p} \arrow[u, shift left, "\mathbf{Q}"] \arrow[ur, bend left=15, "\mathbf{XQ}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"] \arrow[u, shift left, "\mathbf{W}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} &\in \Re^{p} \\
\mathbf{Qu} &\in \Re^{p*} \\
\mathbf{XQu} &\in \Re^{n} \\
\mathbf{DXQu} &\in \Re^{n*} \\
\mathbf{X}^T\mathbf{DXQu} &\in \Re^{p} \\
\mathbf{VQu} &\in \Re^{p}
\end{aligned}
$$

$$\Re^{p} \xrightarrow{\mathbf{VQ}} \Re^{p}$$

VQ operatore (**Q**-simmetrico) caratteristico del diagramma

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\mathfrak{R}^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}"] & \mathfrak{R}^{n} \arrow[d, shift left, "\mathbf{D}"] \arrow[dl, bend left=15, "\mathbf{X}^T\mathbf{D}"] \\
\mathfrak{R}^{p} \arrow[u, shift left, "\mathbf{Q}"] \arrow[ur, bend left=15, "\mathbf{XQ}"] & \mathfrak{R}^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"] \arrow[u, shift left, "\mathbf{W}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} &\in \mathfrak{R}^{n} \\
\mathbf{Dv} &\in \mathfrak{R}^{n*} \\
\mathbf{X}^T\mathbf{Dv} &\in \mathfrak{R}^{p} \\
\mathbf{QX}^T\mathbf{Dv} &\in \mathfrak{R}^{p*} \\
\mathbf{XQX}^T\mathbf{Dv} &\in \mathfrak{R}^{n} \\
\mathbf{WDv} &\in \mathfrak{R}^{n}
\end{aligned}
$$

$$\mathfrak{R}^{n} \xrightarrow{\mathbf{WD}} \mathfrak{R}^{n}$$

WD operatore (**D**-simmetrico) caratteristico del diagramma

Possiamo quindi includere gli operatori caratteristici nel diagramma

$$
\begin{tikzcd}
\circledcirc \arrow[d, bend left] & & \Re^{p*} \arrow[rr, "\mathbf{X}"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}"] & & \Re^{n} \arrow[dll, bend left, "\mathbf{X}^T\mathbf{D}"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{D}"] & & \Re^{n} \arrow[d, bend left, "\mathbf{WD}"] \\
\Re^{p} \arrow[u, bend left, "\mathbf{VQ}"] & & \Re^{p} \arrow[u, shift left, "\mathbf{Q}"] \arrow[urr, bend left, "\mathbf{XQ}"] & & \Re^{n*} \arrow[ll, "\mathbf{X}^T"] \arrow[u, shift left, "\mathbf{W}"] & & \circledcirc \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}
$$

Escoufier associa ad un data set un operatore dallo spazio delle osservazioni $\Re^p$ allo spazio delle variabili $\Re^n$ e viceversa

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}"] & \Re^{n} \arrow[d, shift left, "\mathbf{D}"] \arrow[dl, bend left, "\mathbf{X}^T\mathbf{D}"] \\
\Re^{p} \arrow[u, shift left, "\mathbf{Q}"] \arrow[ur, bend left, "\mathbf{XQ}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"] \arrow[u, shift left, "\mathbf{W}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}^T\mathbf{DXQu} &\in \Re^p & \mathbf{XQX}^T\mathbf{Dv} &\in \Re^n \\
\mathbf{VQu} &\in \Re^p & \mathbf{WDv} &\in \Re^n \\
\mathbf{QVQu} &\in \Re^{p*} & \mathbf{DWDv} &\in \Re^{n*} \\
\mathbf{XQ}(\mathbf{VQ})\mathbf{u} &\in \Re^n & \mathbf{X}^T\mathbf{D}(\mathbf{WD})\mathbf{v} &\in \Re^p
\end{aligned}
$$

$$
\Re^p \xrightarrow{\quad \mathbf{XQ} \quad} \Re^n \qquad \Re^n \xrightarrow{\quad \mathbf{X}^T\mathbf{D} \quad} \Re^p
$$

La decomposizione di **VQ** conduce a quella di **WD** e la transizione fra componenti principali ed assi principali.

Gli operatori caratteristici **VQ** e **WD** potrebbero però non essere simmetrici. Per ottenere un operatore simmetrico da diagonalizzare possiamo utilizzare il diagramma di dualità e la **decomposizione di Cholesky** degli operatori **Q** e **D**:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E}^T\mathbf{E} \qquad \mathbf{D} = \mathbf{B}^T\mathbf{B}$$

dove dim(**E**) è $q \times p$ e dim(**B**) è $g \times n$.

$$\begin{tikzcd}
\Re^{q*} \arrow[r, "\mathbf{E}^T"] & \Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] & \Re^{n} \arrow[r, "\mathbf{B}"] \arrow[d, "\mathbf{D}"] & \Re^{g} \arrow[d, "\mathbf{I}_g"] \\
\Re^{q} \arrow[u, "\mathbf{I}_q"] & \Re^{p} \arrow[u, "\mathbf{Q}"] \arrow[l, "\mathbf{E}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"] & \Re^{g*} \arrow[l, "\mathbf{B}^T"]
\end{tikzcd}$$

Sia $\Omega = \mathbf{BXE}^T$. L'operatore $\Omega^T\Omega = \mathbf{EX}^T\mathbf{B}^T\mathbf{BXE}^T$ di dimensione $q \times q$, risulta essere simmetrico, e la sua diagonalizzazione è pari a

$$\Omega^T\Omega = \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T \text{ con } \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_q$$

$$\begin{tikzcd}
\Re^{q*} \arrow[d, bend left] \\
\circledcirc \arrow[u, bend left, "\Omega^T\Omega"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Re^{q*} \arrow[r, "\mathbf{E}^T"] & \Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] & \Re^{n} \arrow[r, "\mathbf{B}"] \arrow[d, "\mathbf{D}"] & \Re^{g} \arrow[d, "\mathbf{I}_g"] \\
\Re^{q} \arrow[u, "\mathbf{I}_q"] & \Re^{p} \arrow[l, "\mathbf{E}"] \arrow[u, "\mathbf{Q}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"] & \Re^{g*} \arrow[l, "\mathbf{B}^T"]
\end{tikzcd}$$

Si consideri la decomposizione della matrice $\Omega^T\Omega$

$$
\begin{aligned}
\Omega^T\Omega &= \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T \\
\mathbf{E}\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{E}^T &= \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T \\
\mathbf{E}\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{E}^T\mathbf{V} &= \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T\mathbf{V} \\
\mathbf{E}\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{E}^T\mathbf{V} &= \mathbf{V}\Lambda \\
\mathbf{E}^T\mathbf{E}\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{E}^T\mathbf{V} &= \mathbf{E}^T\mathbf{V}\Lambda \qquad \text{poniamo } \boxed{\mathbf{F} = \mathbf{E}^T\mathbf{V}} \\
\mathbf{Q}\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{F} &= \mathbf{F}\Lambda \qquad \Longleftarrow \boxed{\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{F} = \mathbf{F}\Lambda} \\
\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F} &= \mathbf{F}\Lambda \\
\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\underbrace{\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F}}_{=\mathbf{H}} &= \underbrace{\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F}}_{=\mathbf{H}}\Lambda \\
\underbrace{\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}}\mathbf{H} &= \mathbf{H}\Lambda
\end{aligned}
$$

e allora $\mathbf{H}^T\mathbf{H} = \mathbf{I} = \mathbf{F}^T\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{F} \qquad \Longleftarrow \boxed{\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{I}}$

Si consideri la decomposizione della matrice $\Omega^T\Omega$

$$\begin{aligned}
\Omega^T\Omega &= \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T \\
\mathbf{E}\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{E}^T &= \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T \\
\mathbf{E}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{E}^T &= \mathbf{E}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T \\
\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{E}^T\mathbf{E} &= \mathbf{E}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T\mathbf{E} \\
\mathbf{X}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{Q} &= \mathbf{E}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T\mathbf{E} \\
\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{E}^{-1} &= \mathbf{E}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T\mathbf{E}\mathbf{E}^{-1} \\
\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{E}^{-1} &= \mathbf{E}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T \\
\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{V} &= \mathbf{E}^{-1}\mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T\mathbf{V} \qquad \text{poniamo } \boxed{\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{V}} \\
\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{A} &= \mathbf{A}\Lambda \qquad \Longleftarrow \boxed{\mathbf{V}\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{A}\Lambda}
\end{aligned}$$

da cui

$$\mathbf{X}^T\mathbf{DXQA} = \mathbf{A}\Lambda \qquad \Longleftarrow \boxed{\mathbf{VQA} = \mathbf{A}\Lambda}$$

$$\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^T\mathbf{DXQA} = \mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}\Lambda$$

$$\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^T\mathbf{DXQ}^{\frac{1}{2}}\underbrace{\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}}_{=\mathbf{H}} = \underbrace{\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A}}_{=\mathbf{H}}\Lambda$$

$$\underbrace{\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}^T\mathbf{DXQ}^{\frac{1}{2}}}\mathbf{H} = \mathbf{H}\Lambda$$

e allora $\mathbf{H}^T\mathbf{H} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^T\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{Q}^{\frac{1}{2}}\mathbf{A} \qquad \Longleftarrow \boxed{\mathbf{A}^T\mathbf{QA} = \mathbf{I}}$

Sia $\Omega = \mathbf{BXE}^T$. L'operatore $\Omega\Omega^T = \mathbf{BXE}^T\mathbf{EX}^T\mathbf{B}^T$ di dimensione $g \times g$, risulta essere simmetrico, e la sua diagonalizzazione è pari a

$$\Omega\Omega^T = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T \text{ con } \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}_g$$

$$\begin{tikzcd}
\Re^{q*} \arrow[r, "\mathbf{E}^T"] & \Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] & \Re^{n} \arrow[r, "\mathbf{B}"] \arrow[d, "\mathbf{D}"] & \Re^{g} \arrow[d, "\mathbf{I}_g"] & \odot \arrow[d, bend left, "\Omega\Omega^T"] \\
\Re^{q} \arrow[u, "\mathbf{I}_q"] & \Re^{p} \arrow[l, "\mathbf{E}"] \arrow[u, "\mathbf{Q}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"] & \Re^{g*} \arrow[l, "\mathbf{B}^T"] & \Re^{g*} \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}$$

La rappresentazione congiunta degli operatori $\Omega^T\Omega$ e $\Omega\Omega^T$ risulta essere allora

$$
\begin{tikzcd}
\Re^{q*} \arrow[d, bend left] \arrow[d, phantom, "\Omega^T\Omega"', xshift=-4ex] & \Re^{q*} \arrow[r, "\mathbf{E}^T"] & \Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] & \Re^{n} \arrow[r, "\mathbf{B}"] \arrow[d, "\mathbf{D}"] & \Re^{g} \arrow[d, "\mathbf{I}_g"] & \odot \arrow[d, bend left] \arrow[d, phantom, "\Omega\Omega^T", xshift=4ex] \\
\odot \arrow[u, bend left] & \Re^{q} \arrow[u, "\mathbf{I}_q"] & \Re^{p} \arrow[l, "\mathbf{E}"] \arrow[u, "\mathbf{Q}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"] & \Re^{g*} \arrow[l, "\mathbf{B}^T"] & \Re^{g*} \arrow[u, bend left]
\end{tikzcd}
$$

Si consideri la decomposizione della matrice $\Omega\Omega^T$

$$\Omega\Omega^T = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T$$
$$\mathbf{BXE}^T\mathbf{EX}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T$$
$$\mathbf{B}^T\mathbf{BXE}^T\mathbf{EX}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^T\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T$$
$$\mathbf{DXQX}^T\mathbf{B}^T\mathbf{U} = \mathbf{B}^T\mathbf{U}\Lambda\underbrace{\mathbf{U}^T\mathbf{U}}_{=\mathbf{I}} \qquad \text{poniamo } \boxed{\mathbf{G} = \mathbf{B}^T\mathbf{U}}$$
$$\mathbf{DXQX}^T\mathbf{G} = \mathbf{G}\Lambda \qquad \Longleftarrow \boxed{\mathbf{DWG} = \mathbf{G}\Lambda}$$
$$\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{XQX}^T\mathbf{G} = \mathbf{G}\Lambda$$
$$\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{XQX}^T\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\underbrace{\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{G}}_{=\mathbf{H}} = \underbrace{\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{G}}_{=\mathbf{H}}\Lambda$$
$$\underbrace{\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{XQX}^T\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}}\mathbf{H} = \mathbf{H}\Lambda$$

e allora $\mathbf{H}^T\mathbf{H} = \mathbf{I} = \mathbf{G}^T\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{G} \qquad \Longleftarrow \boxed{\mathbf{G}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}}$

Si consideri la decomposizione della matrice $\Omega\Omega^T$

$$
\begin{aligned}
\Omega\Omega^T &= \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T \\
\mathbf{BXE}^T\mathbf{EX}^T\mathbf{B}^T &= \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T \\
\mathbf{B}^{-1}\mathbf{BXE}^T\mathbf{EX}^T\mathbf{B}^T &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T \\
\mathbf{XE}^T\mathbf{EX}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T\mathbf{B} \\
\mathbf{XQX}^T\mathbf{DB}^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T\mathbf{BB}^{-1} \\
\mathbf{XQX}^T\mathbf{DB}^{-1} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T \\
\mathbf{XQX}^T\mathbf{DB}^{-1}\mathbf{U} &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}\Lambda\underbrace{\mathbf{U}^T\mathbf{U}}_{=\mathbf{I}} \qquad \text{poniamo } \boxed{\mathbf{K} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{U}} \\
\mathbf{XQX}^T\mathbf{DK} &= \mathbf{K}\Lambda \qquad \Longleftarrow \boxed{\mathbf{WDK} = \mathbf{K}\Lambda}
\end{aligned}
$$

da cui

$$\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{K} = \mathbf{K}\Lambda \qquad \Longleftarrow \boxed{\mathbf{W}\mathbf{D}\mathbf{K} = \mathbf{K}\Lambda}$$

$$\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{X}^T\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{K} = \mathbf{K}\Lambda$$

$$\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{X}^T\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\underbrace{\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{K}}_{=\mathbf{H}} = \underbrace{\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{K}}_{=\mathbf{H}}\Lambda$$

$$\underbrace{\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{X}^T\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}}\mathbf{H} = \mathbf{H}\Lambda$$

e allora $\mathbf{H}^T\mathbf{H} = \mathbf{I} = \mathbf{K}^T\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{K} \qquad \Longleftarrow \boxed{\mathbf{K}^T\mathbf{D}\mathbf{K} = \mathbf{I}}$

Ciò comporta che le relazioni

$$
\begin{aligned}
\Omega^T\Omega &= \mathbf{V}\Lambda\mathbf{V}^T && \text{con } \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_q \\
\mathbf{Q}\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{F} &= \mathbf{F}\Lambda && \text{con } \mathbf{F}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{I}_q \\
\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{A} &= \mathbf{A}\Lambda && \text{con } \mathbf{A}^T\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{I}_q \\
\Omega\Omega^T &= \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T && \text{con } \mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{I}_g \\
\mathbf{D}\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X}^T\mathbf{G} &= \mathbf{G}\Lambda && \text{con } \mathbf{G}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}_g \\
\mathbf{X}\mathbf{Q}\mathbf{X}^T\mathbf{D}\mathbf{K} &= \mathbf{K}\Lambda && \text{con } \mathbf{K}^T\mathbf{D}\mathbf{K} = \mathbf{I}_g
\end{aligned}
$$

hanno tutte gli stessi $r \leqslant \min(n, p, q, g)$ autovalori non negativi $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_r > 0$, raccolti nella matrice diagonale Λ di dimensione $r \times r$

possiamo allora definire

Matrice	Autovettori	Normalizzazione	Denominazione	Criterio
QV	$\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_r]$	$\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{I}_q$	**Fattori** Principali	$\lvert\lvert\mathbf{Xf}\rvert\rvert^2_{\mathbf{D}}$
VQ	$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_r]$	$\mathbf{A}^T\mathbf{Q}\mathbf{A} = \mathbf{I}_q$	**Assi** Principali	$\lvert\lvert\mathbf{XQa}\rvert\rvert^2_{\mathbf{D}}$
DW	$\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_r]$	$\mathbf{G}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}_g$	**Cofattori** Principali	$\lvert\lvert\mathbf{X}^T\mathbf{g}\rvert\rvert^2_{\mathbf{Q}}$
WD	$\mathbf{K} = [\mathbf{k}_1, ..., \mathbf{k}_r]$	$\mathbf{K}^T\mathbf{D}\mathbf{K} = \mathbf{I}_g$	**Componenti** Principali	$\lvert\lvert\mathbf{X}^T\mathbf{Dk}\rvert\rvert^2_{\mathbf{Q}}$

Il termine dualità è giustificato dalle connessioni fra le quattro diagonalizzazioni e tali che possiamo calcolare solo un sistema di assi per ottenere gli altri tre. Valgono le seguenti **formule di transizione**:

$$\mathbf{F} = \mathbf{QA} \qquad \mathbf{G} = \mathbf{DK}$$
$$\mathbf{K} = \mathbf{XF}\Lambda^{-\frac{1}{2}} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{X}^T\mathbf{G}\Lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$\boxed{\text{Fattori Principali } \mathbf{F}}$

$\mathbf{QVF} = \mathbf{F}\Lambda$

$\mathbf{F}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{F} = \mathbf{I}$

$\xrightarrow{\mathbf{K} = \mathbf{XF}\Lambda^{-\frac{1}{2}}}$

$\boxed{\text{Componenti Principali } \mathbf{K}}$

$\mathbf{WDK} = \mathbf{K}\Lambda$

$\mathbf{K}^T\mathbf{DK} = \mathbf{I}$

$\mathbf{F} = \mathbf{QA}$ $\uparrow\downarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{F}$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
\Re^{p*} \arrow[r, "\mathbf{X}"] \arrow[d, shift left, "\mathbf{V}"] & \Re^{n} \arrow[d, shift left, "\mathbf{D}"] \arrow[dl, bend left=15, "\mathbf{X}^T\mathbf{D}"] \\
\Re^{p} \arrow[u, shift left, "\mathbf{Q}"] \arrow[ur, bend left=15, "\mathbf{XQ}"] & \Re^{n*} \arrow[l, "\mathbf{X}^T"] \arrow[u, shift left, "\mathbf{W}"]
\end{tikzcd}
$$

$\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{G}$ $\uparrow\downarrow$ $\mathbf{G} = \mathbf{DK}$

$\mathbf{VQA} = \mathbf{A}\Lambda$

$\mathbf{A}^T\mathbf{QA} = \mathbf{I}$

$\boxed{\text{Assi Principali } \mathbf{A}}$

$\xleftarrow[\mathbf{A} = \mathbf{X}^T\mathbf{G}\Lambda^{-\frac{1}{2}}]{}$

$\mathbf{DWG} = \mathbf{G}\Lambda$

$\mathbf{G}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}$

$\boxed{\text{Cofattori Principali } \mathbf{G}}$