Matematica Attuariale

- Teledidattica -

Rendita a Rata Costante, Annua

Rendita vitalizia perpetua (anticipata) immediata, $R=1$

Definizione: Pagamento della rata all'inizio di ogni anno, a partire dall'epoca di stipula, fin quando la testa assicurata è in vita.

$$\tilde{Y} = \begin{cases} v^0, & v^0+v, \quad v^0+v+v^2, \quad \dots, \quad v^0+v+v^2+\dots+v^{\omega-x-1} \\ {}_{0/1}q_x, & {}_{1/1}q_x, \quad {}_{2/1}q_x, \quad \dots, \quad {}_{\omega-x-1/1}q_x \end{cases}$$

$$U = E(\tilde{Y}) = v^0\,{}_{0/1}q_x + (v^0+v)\,{}_{1/1}q_x + (v^0+v+v^2)\,{}_{2/1}q_x + \dots + (v^0+v+\dots+v^{\omega-x-1})\,{}_{\omega-x-1/1}q_x$$

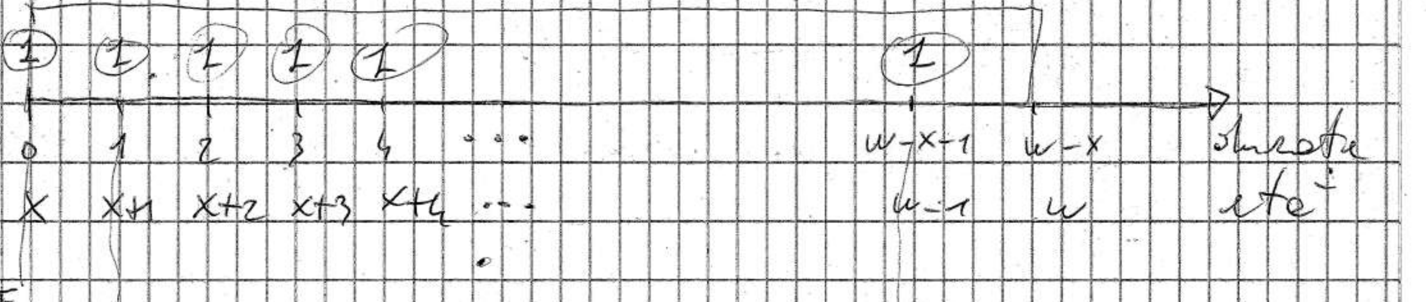
$$= v^0\left({}_{0/1}q_x + {}_{1/1}q_x + \dots + {}_{\omega-x-1/1}q_x\right) + v\left({}_{1/1}q_x + \dots + {}_{\omega-x-1/1}q_x\right) + \dots + v^{\omega-x-1}\,{}_{\omega-x-1/1}q_x$$

$$= v^0 \cdot 1 + v\left(1 - {}_1q_x\right) + v^2\left(1 - {}_2q_x\right) + \dots + v^{\omega-x-1}\left(1 - {}_{\omega-x-1}q_x\right)$$

$$= v^0\,{}_0p_x + v\,{}_1p_x + v^2\,{}_2p_x + \dots + v^{\omega-x-1}\,{}_{\omega-x-1}p_x$$

$$= {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + \dots + {}_{\omega-x-1}E_x$$

$$= \sum_{h=0}^{+\infty} {}_hE_x = \ddot{a}_x \longrightarrow \text{se } R \neq 1 \longrightarrow \boxed{U = R \cdot \ddot{a}_x}$$



$1 \cdot {}_0E_x$

$1 \cdot {}_1E_x$

$\vdots$

$1 \cdot {}_{\omega-x-1}E_x$

$\ddot{a}_x$

Rendite vitalizie, anticipate, differite, R=1

Definizione: Pagamento delle rate all'inizio di ogni anno, dopo il periodo di differimento, e finché l'assicurato è in vita.

$$\tilde{Y} = \begin{cases} 0, & v^m, & (v^m+v^{m+1}), & (v^m+v^{m+1}+v^{m+2}), & \dots, & (v^m+v^{m+1}+\dots+v^{\omega-x-1}) \\ {}_m q_x, & {}_{m/1}q_x, & {}_{m+1/1}q_x, & {}_{m+2/1}q_x, & \dots, & {}_{\omega-x-1/1}q_x \end{cases}$$

$$U = E(\tilde{Y}) = v^m \cdot {}_{m/1}q_x + (v^m+v^{m+1})\,{}_{m+1/1}q_x + \dots + (v^m+v^{m+1}+\dots+v^{\omega-x-1})\,{}_{\omega-x-1/1}q_x$$

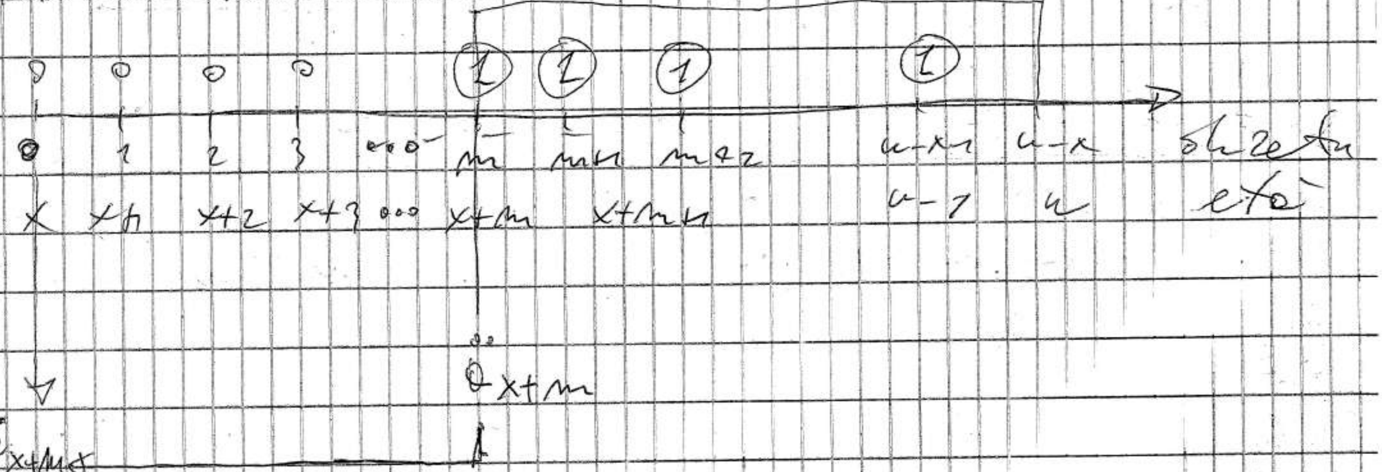
$$= v^m({}_{m/1}q_x + {}_{m+1/1}q_x + \dots + {}_{\omega-x-1/1}q_x) + v^{m+1}({}_{m+1/1}q_x + \dots + {}_{\omega-x-1/1}q_x) + \dots + v^{\omega-x-1}\,{}_{\omega-x-1/1}q_x$$

$$= v^m(1-{}_m q_x) + v^{m+1}(1-{}_{m+1}q_x) + v^{m+2}(1-{}_{m+2}q_x) + \dots + v^{\omega-x-1}(1-{}_{\omega-x-1}q_x)$$

$$= v^m\,{}_m p_x + v^{m+1}\,{}_{m+1}p_x + v^{m+2}\,{}_{m+2}p_x + \dots + v^{\omega-x-1}\,{}_{\omega-x-1}p_x$$

$$= \sum_{h=m}^{+\infty} {}_hE_x = {}_{m/}\ddot{a}_x \longrightarrow \text{se } R \geq 1 \longrightarrow \boxed{U = R \cdot {}_{m/}\ddot{a}_x}$$

$$= {}_mE_x \cdot \ddot{a}_{x+m}$$



Rendite vitalizie anticipate, immediate, temporanee, $R=1$

Definizione: Pagamento della rata all'inizio di ogni anno, a partire dalla stipula della polizza, fin quando la testa assicurata è in vita, e al più fino alla scadenza della polizza.

$$\tilde{Y} = \begin{cases} v^0, & (v^0+v), \quad (v^0+v+v^2), \quad \dots, \quad (v^0+v+\dots+v^{m-1}), \quad \dots, \quad (v^0+v+\dots+v^{m-1}) \\ {}_{0/1}q_x, & {}_{1/1}q_x, \quad {}_{2/1}q_x, \quad \dots, \quad {}_{m-1/1}q_x, \quad \dots, \quad {}_{\omega-x-1/1}q_x \end{cases}$$

$$V = E(\tilde{Y}) = v^0\,{}_{0/1}q_x + (v^0+v)\,{}_{1/1}q_x + (v^0+v+v^2)\,{}_{2/1}q_x + \dots + (v^0+v+\dots+v^{m-1})\,{}_{m-1/1}q_x + \dots$$

$$+ \dots + (v^0+v+\dots+v^{m-1})\,{}_{\omega-x-1/1}q_x$$

$$= v^0\left({}_{0/1}q_x + {}_{1/1}q_x + \dots + {}_{\omega-x-1/1}q_x\right) + v\left({}_{1/1}q_x + \dots + {}_{\omega-x-1/1}q_x\right) + \dots + v^{m-1}\left({}_{m-1/1}q_x + \dots + {}_{\omega-x-1/1}q_x\right)$$

$$= v^0\,{}_0p_x + v\,{}_1p_x + \dots + v^{m-1}\,{}_{m-1}p_x$$

$$= \sum_{h=0}^{m-1} {}_hE_x = {}_{/m}\ddot{a}_x \longrightarrow \text{se } R \geq 1 \longrightarrow \boxed{V = R \cdot {}_{/m}\ddot{a}_x}$$

1	1	1		1	0	0	0		0	
0	1	2	...	$m-1$	m	$m+1$	$m+2$	...	$\omega-x-1$	$\omega-x$
x	$x+1$	$x+2$	...	$x+m-1$	$x+m$	$x+m+1$	$x+m+2$	...	$\omega-1$	ω

Rendite vitalizie anticipate, differite, temporanee, R=1

Definizione. Pagamento delle rate all'inizio di ogni anno, dopo il periodo di differimento, finché l'assicurato è in vita e al più per n anni

$$\tilde{Y} = \begin{cases} 0, & v^m, \ (v^m + v^{m+1}), \ \dots, \ (v^m + v^{m+1} + \dots + v^{m+n-1}), \ \dots, \ (v^m + \dots + v^{m+n-1}) \\ {}_{/m}q_x, & {}_{m/1}q_x, \ {}_{m+1/1}q_x, \ \dots, \ {}_{m+n-1/1}q_x, \ \dots, \ {}_{\omega-x-1/1}q_x \end{cases}$$

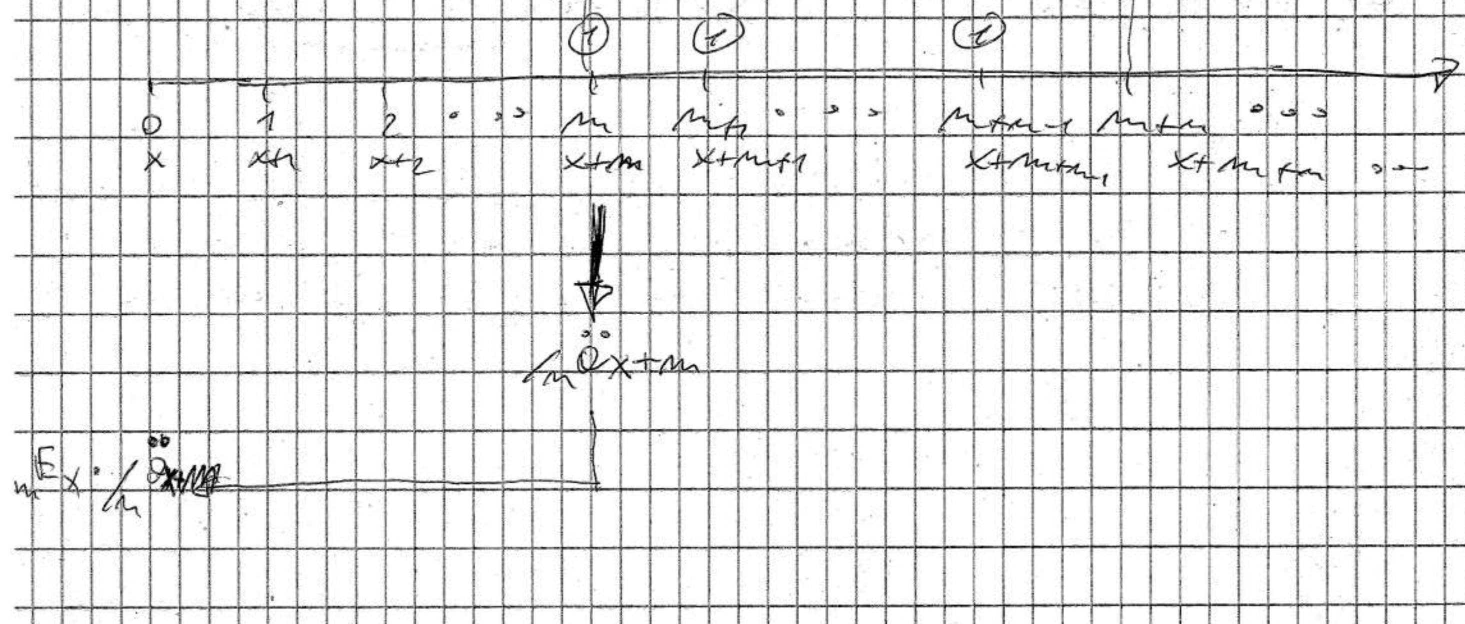
$$U = E(\tilde{Y}) = v^m \, {}_{m/1}q_x + (v^m + v^{m+1}) \, {}_{m+1/1}q_x + \dots + (v^m + \dots + v^{m+n-1}) \, {}_{\omega-x-1/1}q_x$$

$$= v^m \left({}_{m/1}q_x + {}_{m+1/1}q_x + \dots + {}_{\omega-x-1/1}q_x \right) + \dots + v^{m+n-1} \left({}_{m+n-1/1}q_x + \dots + {}_{\omega-x-1/1}q_x \right)$$

$$= v^m \, {}_m p_x + v^{m+1} \, {}_{m+1}p_x + \dots + v^{m+n-1} \, {}_{m+n-1}p_x$$

$$= \sum_{h=m}^{m+n-1} {}_hE_x = {}_{m/n}\ddot{a}_x \longrightarrow \text{se } R \neq 1 \longrightarrow \boxed{U = R \cdot {}_{m/n}\ddot{a}_x}$$

$$= {}_mE_x \cdot {}_n\ddot{a}_{x+m}$$



Rendita vitalizia perpetua, posticipata, immediata, R=1

Definizione: Pagamento della rata alla fine di ogni anno a partire dall'epoca di stipula, fin quando la testa assicurata è in vita.

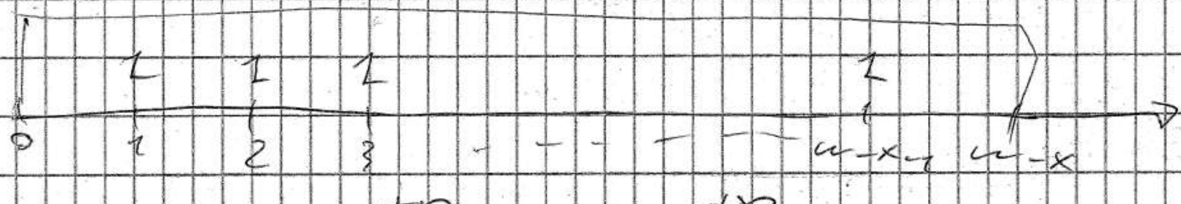
$$\tilde{Y} = \begin{cases} 0, & v, & v+v^2, & v+v^2+v^3, & \dots, & v+v^2+v^3+\dots+v^{\omega-x-1} \\ {}_{0/1}q_x, & {}_{1/1}q_x, & {}_{2/1}q_x, & {}_{3/1}q_x, & \dots, & {}_{\omega-x-1/1}q_x \end{cases}$$

$$U = E(\tilde{Y}) = v\,{}_{1/1}q_x + (v+v^2)\,{}_{2/1}q_x + (v+v^2+v^3)\,{}_{3/1}q_x + \dots + (v+v^2+\dots+v^{\omega-x-1})\,{}_{\omega-x-1/1}q_x$$

$$= v\left({}_{1/1}q_x + {}_{2/1}q_x + \dots + {}_{\omega-x-1/1}q_x\right) + v^2\left({}_{2/1}q_x + {}_{3/1}q_x + \dots + {}_{\omega-x-1/1}q_x\right) + \dots + v^{\omega-x-1}\,{}_{\omega-x-1/1}q_x$$

$$= v\,{}_1p_x + v^2\,{}_2p_x + \dots + v^{\omega-x-1}\,{}_{\omega-x-1}p_x$$

$$= \sum_{h=1}^{+\infty} {}_hE_x = a_x \longrightarrow \text{se } R \neq 1 \longrightarrow \boxed{U = R \cdot a_x}$$



Osservazione: $\ddot{a}_x = \sum_{h=0}^{+\infty} {}_hE_x = 1 + \sum_{h=1}^{+\infty} {}_hE_x = 1 + a_x$

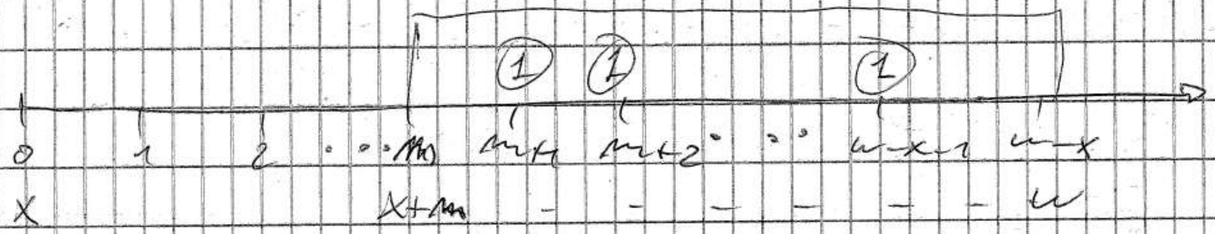
$$\longrightarrow \boxed{\ddot{a}_x = a_x + 1}$$

Rendita vitalizia, differita, posticipata, perpetua, $R=1$

Definizione: Pagamento delle rata alla fine di ogni anno dopo il periodo di differimento, e finché l'assicurato è in vita.

$$\tilde{Y} = \begin{cases} 0, & 0, \quad v^{m+1}, \quad (v^{m+1}+v^{m+2}), \quad \dots, \quad (v^{m+1}+\dots+v^{\omega-x-1}) \\ {}_{m}p_x, & {}_{m|1}q_x, \quad {}_{m+1|1}q_x, \quad {}_{m+2|1}q_x, \quad \dots, \quad {}_{\omega-x-1|1}q_x \end{cases}$$

$$U = E(\tilde{Y}) = \sum_{h=m+1}^{+\infty} {}_hE_x \longrightarrow \boxed{U = R \cdot {}_{m|}a_x}$$



a_{x+m}

${}_mE_x \cdot a_{x+m}$

$$U = R \cdot {}_mE_x \cdot a_{x+m}$$

Rendite vitalizie, immediate, posticipate, temporanee, $R=1$

Definizione. Pagamento delle rate alla fine di ogni anno, a partire dall'anno di stipula della polizza, se l'assicurato è in vita e al più per n-anni

$$\tilde{y} = \begin{cases} 0, & v, & (v+v^2), & \dots, & (v+v^2+\dots+v^n), & \dots, & (v+v^2+\dots+v^{\omega}) \\ {}_{0/1}q_x, & {}_{1/1}q_x, & {}_{2/1}q_x, & \dots, & {}_{n/1}q_x, & \dots, & {}_{\omega-x-1/1}q_x \end{cases}$$

$$V = E(\tilde{y}) = \sum_{h=1}^{n} {}_hE_x = {}_{/n}a_x \longrightarrow \text{se } R\neq 1 \longrightarrow \boxed{V = R\cdot {}_{/n}a_x}$$

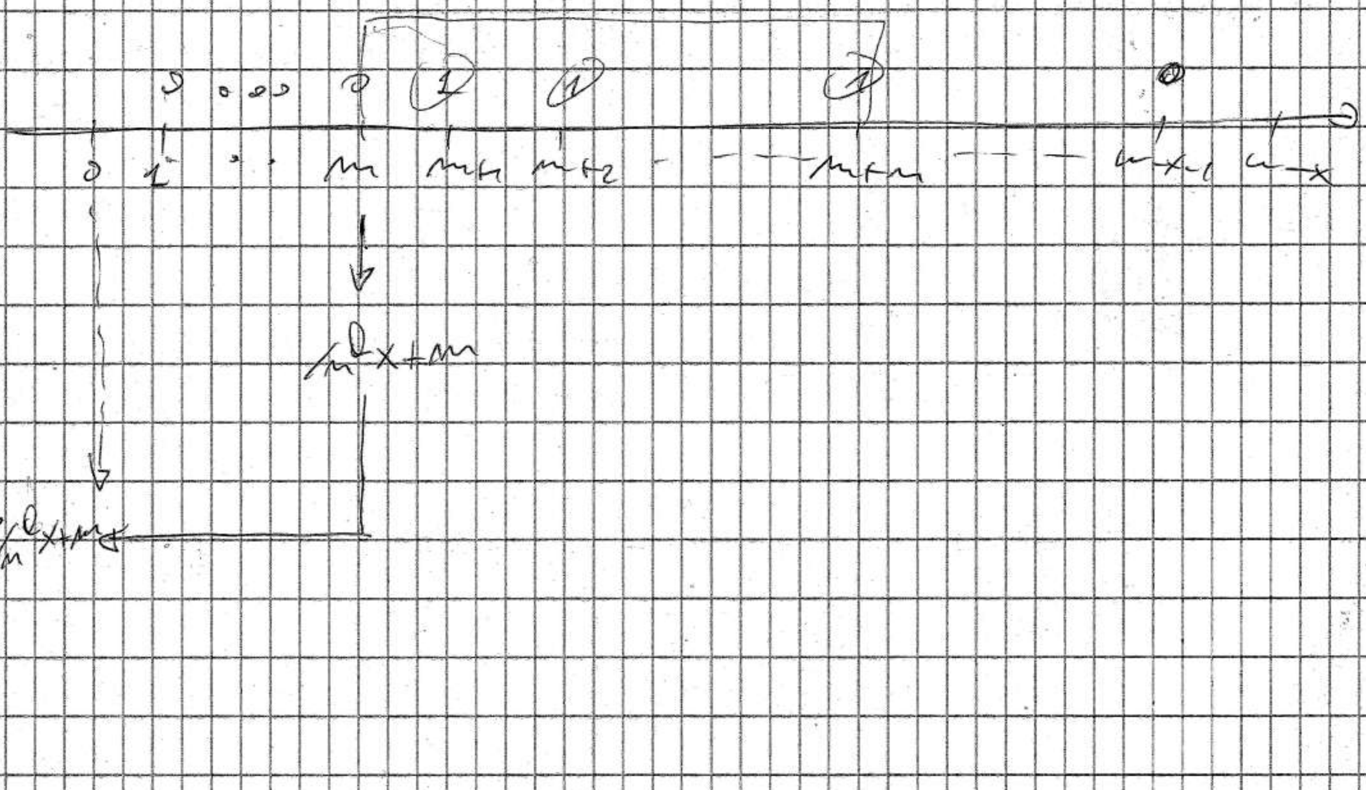
Rendita vitalizia, differita, posticipata, temporanea, $R=1$

Definizione. Pagamento della rata alla fine di ogni anno dopo il periodo di differimento, finché l'assicurato è in vita e al più per n-anni.

$$\tilde{Y} = \begin{cases} 0, & 0, \quad v^{m+1}, \quad (v^{m+1}+v^{m+2}), \quad \dots, \quad (v^{m+1}+\dots+v^{m+n}), \quad \dots, \quad // \\ {}_{/m}q_x, & {}_{m/1}q_x, \quad {}_{m+1/1}q_x, \quad {}_{m+2/1}q_x, \quad \dots, \quad {}_{m+n/1}q_x, \quad \dots, \quad {}_{\omega-x-1/1}q_x \end{cases}$$

$$V = E(\tilde{Y}) = \sum_{h=m+1}^{m+n} {}_hE_x = {}_{m/n}a_x \rightarrow \boxed{V = R \cdot {}_{m/n}a_x}$$

$$= {}_mE_x \cdot {}_n a_{x+m}$$

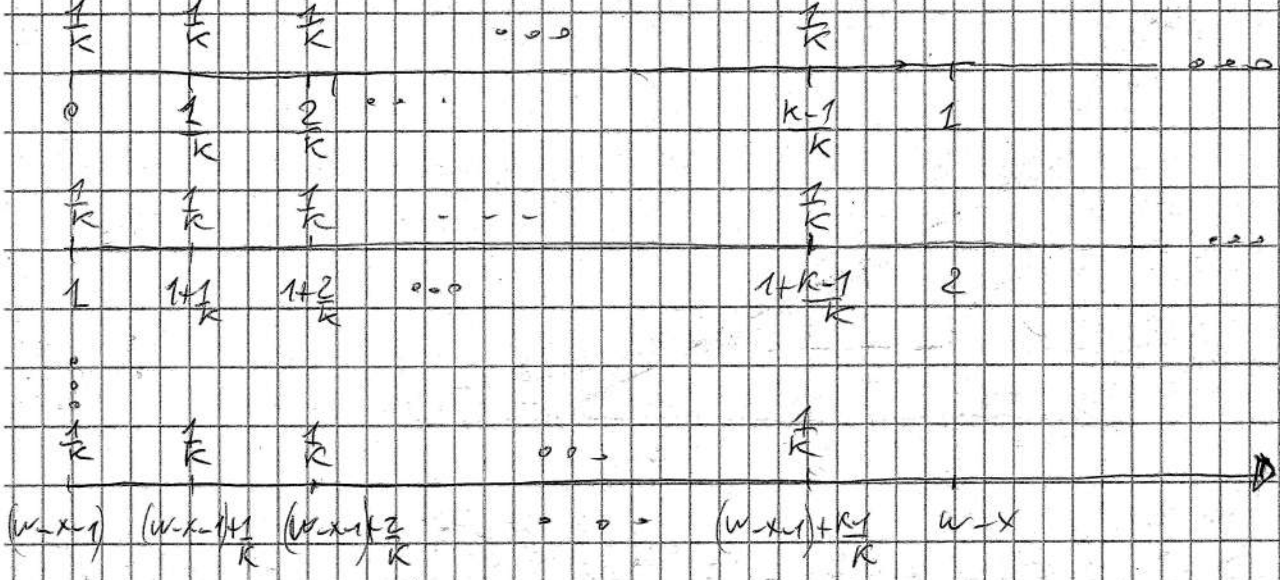


Rendita vitalizia, immediata, perpetua, anticipata, frazionata, $R=1$

Definizione. Pagamenti delle rate annue, compiute anticipatamente e frazionate nell'anno, a partire dalla stipula della polizza e finché l'assicurato è in vita.

Sia $K =$ n° frazioni della rata $\rightarrow R = 1 = \frac{1}{K} \times K$

Esaminiamo sul diagramma tempi/importi le rendite:



Applicando il principio di composizione dei contratti:

$$\ddot{a}_x^{(K)} = \frac{1}{K}\Big[\Big({}_0E_x + {}_{\frac{1}{K}}E_x + {}_{\frac{2}{K}}E_x + \dots + {}_{\frac{K-1}{K}}E_x\Big) +$$

$$+ \Big({}_1E_x + {}_{1+\frac{1}{K}}E_x + \dots + {}_{1+\frac{K-1}{K}}E_x\Big) +$$

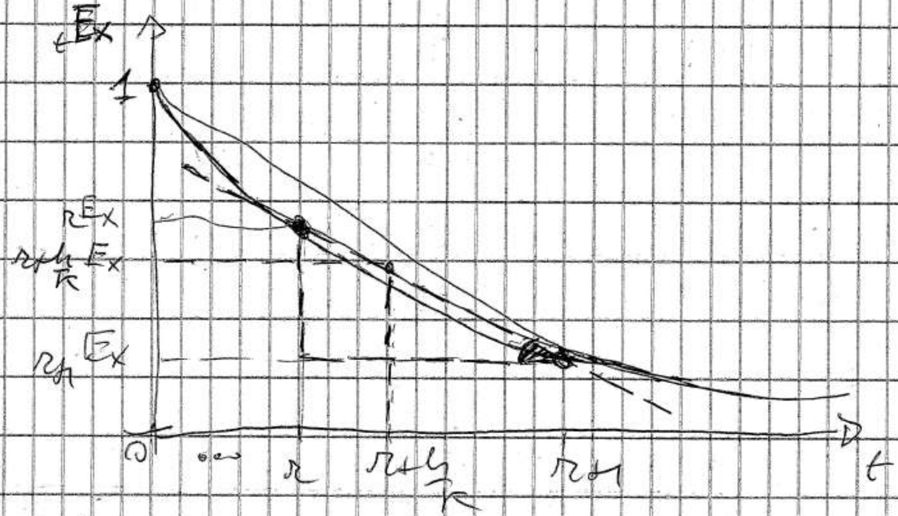
$$+ \Big({}_2E_x + {}_{2+\frac{1}{K}}E_x + \dots + {}_{2+\frac{K-1}{K}}E_x\Big) + \dots$$

$$+ \Big({}_{(w-x-1)}E_x + {}_{(w-x-1)+\frac{1}{K}}E_x + \dots + {}_{(w-x-1)+\frac{K-1}{K}}E_x\Big)\Big]$$

$$\ddot{a}_x^{(k)} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{r=0}^{\omega-x-1} \sum_{h=0}^{k-1} {}_{r+\frac{h}{k}}E_x$$

Formula approssimata (interpolazione lineare):

$${}_{r+\frac{h}{k}}E_x \cong {}_rE_x - \frac{h}{k}\left({}_rE_x - {}_{r+1}E_x\right)$$



$$\ddot{a}_x^{(k)} \cong \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{+\infty} \sum_{h=0}^{k-1} \left[{}_rE_x - \frac{h}{k}\left({}_rE_x - {}_{r+1}E_x\right) \right] = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{+\infty} \left[\sum_{h=0}^{k-1} {}_rE_x - \frac{1}{k}\left({}_rE_x - {}_{r+1}E_x\right) \sum_{h=0}^{k-1} h \right]$$

$$\cong \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{+\infty} \left[k \cdot {}_rE_x - \frac{k-1}{2}\left({}_rE_x - {}_{r+1}E_x\right) \right] = \frac{1}{2k} \sum_{r=0}^{+\infty} \left[(k+1)\,{}_rE_x + (k-1)\,{}_{r+1}E_x \right]$$

$$\cong \frac{1}{2k} \left[(k+1) \sum_{r=0}^{+\infty} {}_rE_x + (k-1) \sum_{r=0}^{+\infty} {}_{r+1}E_x \right]$$

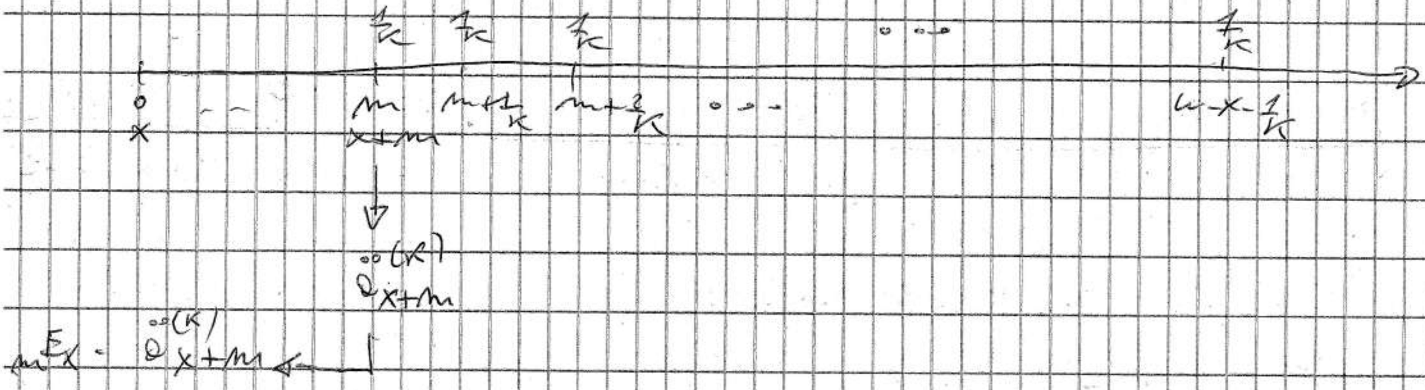
$$\cong \frac{1}{2k} \left[(k+1)\, \ddot{a}_x + (k-1)(\ddot{a}_x - 1) \right]$$

$$\cong \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} \to \boxed{\ddot{a}_x^{(k)} = \ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}} \geq \ddot{a}_x$$

$$U = R \cdot \ddot{a}_x^{(k)} \to U = R \cdot \left(\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\right).$$

Rendita frazionata, anticipata, differita, perpetua, R=1

Diagramma prestazioni:

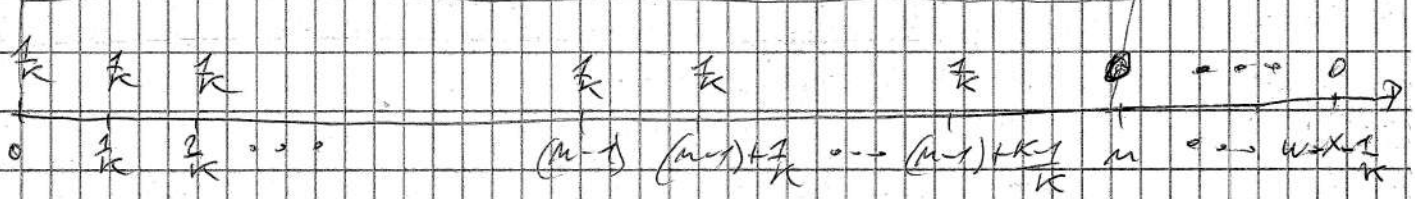


$$U = R \cdot {}_{m|}\ddot{a}^{(k)}_{x} = R \cdot {}_mE_x \cdot \ddot{a}^{(k)}_{x+m} = R \cdot {}_mE_x \left[\ddot{a}_{x+m} - \frac{k-1}{2k} \right]$$

$$\boxed{= R \cdot \left[{}_{m|}\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k} \cdot {}_mE_x \right]}$$

Rendita frazionata, anticipata, immediata, temporanea, R=1

Diagramma prestazioni:



Principio di composizione:

$${}_{/n}\ddot{a}_x^{(k)} = \ddot{a}_x^{(k)} - {}_{n/}\ddot{a}_x^{(k)}$$

$$= \left(\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\right) - \left({}_{n/}\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\,{}_nE_x\right)$$

$$= \left(\ddot{a}_x - {}_{n/}\ddot{a}_x\right) - \frac{k-1}{2k}\left(1 - {}_nE_x\right)$$

$$\boxed{= {}_{/n}\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\left(1 - {}_nE_x\right)}$$

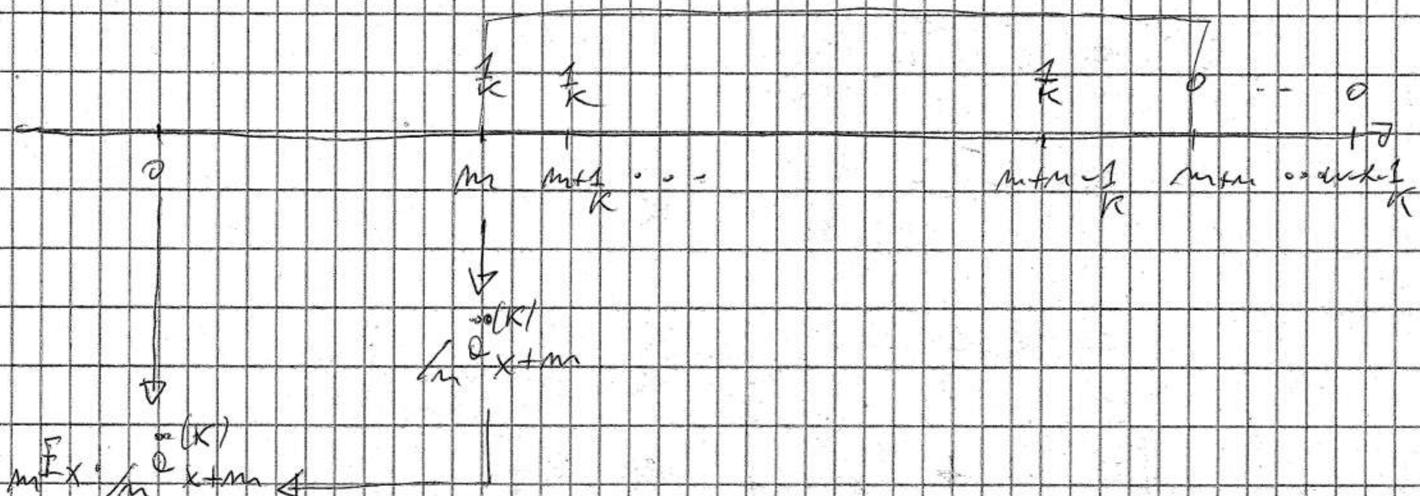
Osservazione:

$$\ddot{a}_x = {}_{/n}\ddot{a}_x + {}_{n/}\ddot{a}_x$$

$$\ddot{a}_x^{(k)} = {}_{/n}\ddot{a}_x^{(k)} + {}_{n/}\ddot{a}_x^{(k)}$$

Rendita frazionata, anticipata, differita, temporanea, $R=1$

Diagramma prestazioni



Allora: $${}_{m/n}\ddot{a}^{(k)}_x = {}_mE_x \cdot {}_{/n}\ddot{a}^{(k)}_{x+m}$$

$$= {}_mE_x\left[\ddot{a}^{(k)}_{x+m} - {}_{n/}\ddot{a}^{(k)}_{x+m}\right]$$

$$= {}_mE_x\left[\left(\ddot{a}_{x+m} - \frac{k-1}{2k}\right) - \left({}_{n/}\ddot{a}_{x+m} - \frac{k-1}{2k}\,{}_nE_{x+m}\right)\right]$$

$$= {}_mE_x\left[{}_{/n}\ddot{a}_{x+m} - \frac{k-1}{2k}\left(1 - {}_nE_{x+m}\right)\right]$$

$$= \boxed{{}_{m/n}\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\left({}_mE_x - {}_{m+n}E_x\right)}$$

$$U = R \cdot {}_{m/n}\ddot{a}^{(k)}_x$$

Rendita frazionata, posticipata, immediata, perpetua, R=1

Tasso di premio unico puro è:

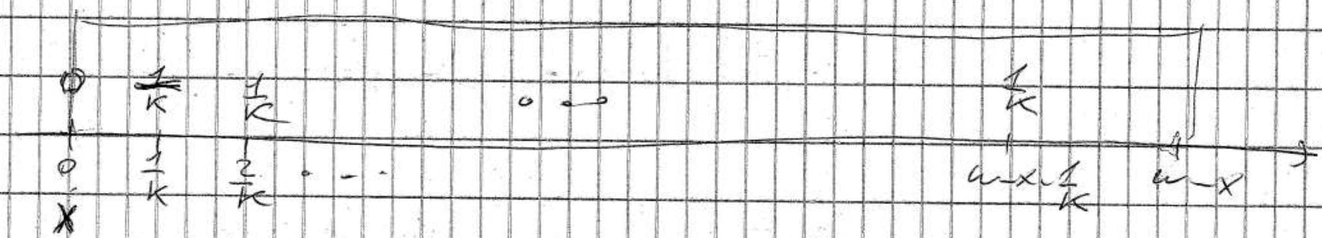
$$a_x^{(k)} = \ddot{a}_x^{(k)} - \frac{1}{k}$$

$$= \left(\ddot{a}_x - \frac{k-1}{2k}\right) - \frac{1}{k}$$

$$= (a_x + 1) - \frac{k-1}{2k} - \frac{1}{k}$$

$$\boxed{= a_x + \frac{k-1}{2k}}$$ a_x

$$V = R \cdot \left(a_x + \frac{k-1}{2k}\right)$$



Osservazione:

$$a_x^{(k)} \geq a_x$$

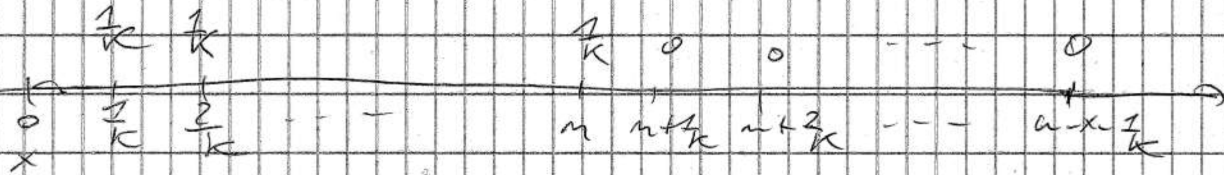
Rendita frazionata, posticipata, differita, perpetua, $R=1$

$$_{m/}a_x^{(k)} = {}_mE_x \cdot a_{x+m}^{(k)} = {}_mE_x\left(a_{x+m} + \frac{k-1}{2k}\right) = {}_{m/}a_x + \frac{k-1}{2k}\,{}_mE_x$$

Rendita frazionata, posticipata, immediata, temporanea, $R=1$

$$_{/m}a_x^{(k)} = a_x^{(k)} - {}_{m/}a_x^{(k)} =$$

$$= {}_{/m}a_x + \frac{k-1}{2k}\left(1 - {}_mE_x\right)$$



Rendita frazionata, posticipata, differita, temporanea, $R=1$

$$_{m/n}a_x^{(k)} = {}_mE_x \cdot {}_{/n}\ddot{a}_{x+m} = {}_{m/n}a_x + \frac{k-1}{2k}\left({}_mE_x - {}_{m+n}E_x\right)$$