Università degli Studi del Sannio
Scienze Statistiche e Attuariali

Teoria del rischio

Prof. N.E. D’Ortona

1. La riserva di rischio.

Definizione: La riserva di rischio di una Compagnia di Assicurazioni misura l'eccedenza delle Attività sulle Passività verso terzi.

Quantifica l'effettiva consistenza dei mezzi patrimoniali dell'impresa, quanto si assume che:

- a) le attività sono valutate a valori correnti di mercato, pertanto eventuali sottovalutazioni dell'attivo saranno interamente ricomprese nella riserva di rischio;
- b) le passività sono iscritte in bilancio per valori corrispondenti alla migliore stima possibile delle stesse. In particolare le riserve matematiche sono valutate con la base tecnica del primo ordine.

1.1 Il processo della riserva di rischio.

$$\mathbf{U_{t+1} = U_t} + \mathrm{UN}_{t+1} + \mathbf{[(YL_{t+1} + CH_{t+1}) - TX_{t+1} - DV_{t+1}]} \qquad (1)$$

dove :

- $\mathbf{U}_{t+1}$ = v.c. riserva di rischio al termine dell'esercizio t+1-esimo ;
- UN_{t+1} = apporto deterministico di capitali da parte degli azionizti
- $\mathbf{YL}_{t+1}$ = v.c. utile ordinario lordo di esercizio, non influenzato dalle partite straordinarie ed al lordo delle imposte ;
- $\mathbf{CH}_{t+1}$ = v.c. dei proventi (oneri) finanziari straordinari generati dalle variazioni dei valori di mercato delle attività dell'impresa;
- $\mathbf{TX}_{t+1}$ = v.c. ammontare delle imposte di competenza dell'esercizio;
- $\mathbf{DV}_{t+1}$ = v.c. dei dividendi da distribuire agli azionisti.

1.2 Il processo dell'utile ordinario lordo.

$$\mathbf{YL_{t+1} = Y_{t+1} + (JT_{t+1} - J_{t+1}) - D\underline{VB}_{t+1}} \qquad (2)$$

dove :

- $\mathbf{Y}_{t+1}$ = v.c. utile assicurativo dell'esercizio (risultato assicurativo);
- $\mathbf{JT}_{t+1}$ = v.c. interessi finanziari, posticipati, realizzati da tutte le attività dell'impresa;
- $\mathbf{J}_{t+1}$ = v.c. interessi finanziari dovuti all'investimento delle sole risorse assicurative (premi e riserve)
- $\mathbf{JT_{t+1} - J_{t+1}}$ = v.c. rendimento patrimonio impresa
- $\mathbf{D\underline{VB}_{t+1} = \underline{VB}_{t+1} - VB_{t+1}}$ = v.c. utili retrocessi agli assicurati alla fine dell'anno sotto forma di rivalutazione delle riserve matematiche;

1.3 Il processo dell'utile assicurativo.

$$\mathbf{Y_{t+1} = (\underline{VB}_t + B_{t+1} + J_{t+1}) - (E_{t+1} + S_{t+1} + X_{t+1} + VB_{t+1})} \qquad (3)$$

dove:

- $\underline{\mathbf{VB}}_t$ = v.c. riserva matematica completa inizio esercizio, includente le rivalutazioni della riserva assegnate agli assicurati fino al termine dell'esercizio precedente;
- $\mathbf{B}_{t+1}$ = v.c. premi di tariffa pagati dagli assicurati all'inizio dell'esercizio;
- $\mathbf{E}_{t+1}$ = v.c. delle spese assicurative, sostenute tutte all'inizio dell'esercizio;
- $\mathbf{S}_{t+1}$ = v.c. dei valori di riscatto complessivi, pagati tutti all'inizio dell'esercizio;
- $\mathbf{X}_{t+1}$ = v.c. risarcimenti per sinistri avvenuti nell'esercizio, pagati tutti alla fine dell'esercizio (si assume che non si formino riserve per somme da pagare);
- $\mathbf{VB}_{t+1}$ = v.c. riserva matematica completa, al netto delle rivalutazioni riconosciute agli assicurati al termine dell'esercizio.
- Pertanto, il processo dell'utile ordinario lordo si riscrive:
- $\mathbf{YL_{t+1} = Y_{t+1} + (JT_{t+1} - J_{t+1}) - D\underline{VB}_{t+1}}$
- $\mathbf{= (\underline{VB}_t + B_{t+1} + JT_{t+1}) - (E_{t+1} + S_{t+1} + X_{t+1} + \underline{VB}_{t+1})}$ (2bis)

1.4 I flussi di cassa e il valore dell'attivo patrimoniale.

Sia:

- $\mathbf{A}_t$ = la v.c. del valore complessivo delle attività della compagnia al tempo t, espressa a valori correnti di mercato;
- $\mathbf{CF}_{t+}$ = la v.c. flusso di cassa aleatorio che avviene un istante dopo l'inizio dell'esercizio (t, t+1].

Risulta:

$$\mathbf{CF}_{t+} = \mathbf{B}_{t+1} - \mathbf{E}_{t+1} - \mathbf{S}_{t+1} \qquad (4)$$

Mentre il flusso di cassa aleatorio al termine dell'esercizio (t, t+1] vale:

$$\mathbf{CF}_{t+1} = [\mathbf{JT}_{t+1} + UN_{t+1} + (L_{t+1} - L_t)] - (\mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{DV}_{t+1} + \mathbf{TX}_{t+1}) \qquad (5)$$

Osservazione.

La differenza (L_{t+1} - L_t) esprime la variazione di consistenza cerificatasi per i debiti diversi dalle riserve tecniche, avendo assunto che il criterio di valutazione degli stessi non si modifichi. Nella (5) non è presente la v.c. CH, in quanto le plusvalenze (minusvalenze) generate dalle valutazioni dei valori mobiliari e immobiliari non sono realizzate e pertanto non comportano flussi finanziari, ma solo variazioni del valore di bilancio con i conseguenti riflessi sul conto economico.

1.4 I flussi di cassa e il valore dell'attivo patrimoniale.

La valutazione dell'attivo al termine dell'esercizio risulta:

$$\mathbf{A}_{t+1} = \mathbf{A}_t + \mathbf{CF}_{t+} + \mathbf{CF}_{t+1} + \mathbf{CH}_{t+1} \qquad (6)$$

L'equazione di stato (6) è connessa alla equazione della riserva di rischio (1). Infatti, poiché al tempo t vale la relazione fondamentale di bilancio:

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{U}_t + \underline{\mathbf{VB}}_t + \mathrm{L}_t \qquad (7)$$

Sostituendo nella (6) l'espressione di $\mathbf{A}_t$ stabilita dalla (7). Tramite la (4) e la (5), al tempo t+1 risulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{t+1} &= \mathbf{U}_t + \underline{\mathbf{VB}}_t + \mathrm{L}_t + \mathbf{B}_{t+1} - \mathbf{E}_{t+1} - \mathbf{S}_{t+1} + [\mathbf{JT}_{t+1} + \mathrm{UN}_{t+1} + (\mathrm{L}_{t+1} - \mathrm{L}_t)] - (\mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{DV}_{t+1} + \mathbf{TX}_{t+1}) \\ &\quad +/- \underline{\mathbf{VB}}_{\mathbf{t+1}} + \mathbf{CH}_{t+1} \\ &= \mathbf{U}_t + \mathrm{UN}_{t+1} + \{[\underline{\mathbf{VB}}_t + \mathbf{B}_{t+1} + \mathbf{JT}_{t+1}] - [\mathbf{E}_{t+1} + \mathbf{S}_{t+1} + \mathbf{X}_{t+1} + \underline{\mathbf{VB}}_{\mathbf{t+1}}] + \mathbf{CH}_{t+1} - \mathbf{TX}_{t+1} - \mathbf{DV}_{t+1}\} \\ &\quad + \mathrm{L}_{t+1} + \underline{\mathbf{VB}}_{\mathbf{t+1}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_{t+1} = \mathbf{U}_{t+1} + \underline{\mathbf{VB}}_{t+1} + \mathrm{L}_{t+1} \qquad (8)$$

1.5 La determinazione dei proventi finanziari ordinari e dei capital gains.

Il valore delle attività della compagnia alla fine dell'esercizio:

$\mathbf{A}_{t+1} = \mathbf{A}_t + \mathbf{CF}_{t+} + \mathbf{CF}_{t+1} + \mathbf{CH}_{t+1}$

$\mathbf{CF}_{t+} = \mathbf{B}_{t+1} - \mathbf{E}_{t+1} - \mathbf{S}_{t+1}$: flusso di cassa all'inizio dell'esercizio
$\mathbf{CF}_{t+1} = [\mathbf{JT}_{t+1} + \mathrm{UN}_{t+1} + (\mathrm{L}_{t+1} - \mathrm{L}_t)] - (\mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{DV}_{t+1} + \mathbf{TX}_{t+1})$: flusso di cassa fine esercizio

Per la definizione delle v.a. $\mathbf{JT}_{t+1}$ e $\mathbf{CH}_{t+1}$ è necessario disporre della ripartizione delle attività della compagnia in t+.

$\mathbf{A}_t = \sum_k {}_k\mathbf{A}_{t+}$

Esempio:
k = 1 titoli obbligazionari a breve termine
k = 2 titoli obbligazionari medio-lungo termine
k = 3 azioni
k = 4 immobili

- L'interesse complessivo risulta:

$\mathbf{JT}_{t+1} = \mathbf{j}_{t+1}\ \mathbf{A}_{t+} = \sum_k [{}_k\mathbf{j}_{t+1}\ {}_k\mathbf{A}_{t+}]$

dove: $\mathbf{j}_{t+1} = \sum_k [{}_k\mathbf{j}_{t+1}\ {}_k\mathbf{A}_{t+}] / \mathbf{A}_{t+} = \sum_k {}_k\mathbf{Q}_{t+}\ {}_k\mathbf{j}_{t+1}$

${}_k\mathbf{j}_{t+1}$: v.a. tasso di rendimento ordinario, regolato per cassa, verificatosi nel mercato finanziario nel t+1-esimo esercizio per la categoria k-esima di investimento

${}_k\mathbf{Q}_{t+}$ indica la quota di attività della compagnia investita nella categoria k al tempo t+.

- Per le plusvalenze si ha:

$\mathbf{CH}_{t+1} = \mathbf{j'}_{t+1}\ \mathbf{A}_{t+} = \sum_k [{}_k\mathbf{j'}_{t+1}\ {}_k\mathbf{A}_{t+}]$

dove: $\mathbf{j'}_{t+1} = \sum_k [{}_k\mathbf{j'}_{t+1}\ {}_k\mathbf{A}_{t+}] / \mathbf{A}_{t+} = \sum_k {}_k\mathbf{Q}_{t+}\ {}_k\mathbf{j'}_{t+1}$

${}_k\mathbf{j'}_{t+1}$: v.a. tasso di variazione del valore di mercato registrato nel corso de t+1-esimo esercizio per la categoria k-esima categoria di investimento

Osservazione.

Per ottenere i tassi di rendimento aggregati che permettono di calcolare i proventi finanziari e il capital gains si deve definire:

1) una regola di allocazione dinamica delle risorse patrimoniali;

2) un modello finanziario per i tassi di inflazione e di rendimento;

3) un modello per la simulazione dei valori di mercato delle attività (Bonsdorff, 1991).

La regola di allocazione dinamica.
Siano: ${}_1\mathbf{Q}^*$, ${}_2\mathbf{Q}^*$, …, ${}_k\mathbf{Q}^*$ le aliquote di ripartizione dell'attivo che la Compagnia desidera mantenere durante l'orizzonte di gestione.

I nuovi investimenti/disinvestimenti verranno adottati in modo da mantenere il mix dell'attivo prossimo a quello desiderato.

I nuovi investimenti/disinvestimenti sono adottati a inizio anno.
Al tempo t^+ valgono complessivamente:

$$\mathbf{NI}_{t+} = \mathbf{CF}_t + \mathbf{CF}_{t+} = \mathbf{A}_{t+} - (\mathbf{A}_{t-1} + \mathbf{CH}_t)$$

E sono allocati fra le categorie con la regola (Pentikainen, 1989):

$${}_k\mathbf{NI}_{t+} = {}_k\mathbf{A}_{t+} - ({}_k\mathbf{A}_{t-1} + {}_k\mathbf{CH}_t) = [\xi_t \cdot {}_k\mathbf{h}_t + (1-\xi_t) \cdot {}_k\mathbf{Q}_t] \cdot \mathbf{NI}_{t+}$$

dove:
${}_k\mathbf{h}_t$: misura lo scostamento della quota d'investimento dal livello obiettivo
ξ_t : misura il grado di riallocazione necessario per l'adeguamento agli obiettivi
${}_k\mathbf{Q}_{t+} = [{}_k\mathbf{A}_{t-1+} + {}_k\mathbf{CH}_t + {}_k\mathbf{NI}_{t+}] / \sum_k[{}_k\mathbf{A}_{t-1+} + {}_k\mathbf{CH}_t + {}_k\mathbf{NI}_{t+}] = {}_k\mathbf{A}_{t+} / \mathbf{A}_{t+}$

Un modello per la simulazione dei tassi di inflazione (Wilkie, 1984; Pentikainen, 1989)

$$\mathbf{i}_{t+1} = i_m + a \cdot (\mathbf{i}_t - i_m) + c \cdot \xi_{t+1}$$

dove:

i_m = tasso medio d'inflazione

a = coefficiente di deviazione del processo dal valore medio i_m. Il processo non è stazionario se $|a| \geq 1$.

ξ_1, ξ_2, … = v.c. i.i.d con media 0 e varianza 1. Esprimono i fattori di disturbo del processo.

c = coefficiente del fattore di disturbo.

Osservazioni.

1) Nel modello considerato sono stati adottati i seguenti valori:
   $i_m = 6\%$; $a = 0{,}7$; $c = 0{,}025$.

2) $\xi + 2$ = Gamma(4,2): cosicché $E(\xi)=0$, $sqm(\xi) = 1$ e $skew(\xi) = 1$.

Un modello per la simulazione dei tassi di interesse (Pentikainen, 1986)

Relativamente alle categorie di investimento obbligazionario (k = 1, 2), si assume:

$$ {}_k\mathbf{j}_{t+1} = {}_kj_m + a_{1k} \cdot ({}_k\mathbf{j}_t - {}_kj_m) + [(a_{2k} \cdot \mathbf{i}_{t-1} + a_{3k} \cdot \mathbf{i}_{t-2}) - i_m] + c_{1k} \cdot \xi_{t+1} $$

dove:

${}_Kj_m$ = tasso medio di interesse per la categoria k.

a_{1k} = coefficiente di deviazione del processo dal valore medio ${}_kj_m$, per la cat. K.

a_{2k}, a_{3k} = pesi dei tassi di inflazione, con $a_{2k} + a_{3k} = 1$, per la categoria k.

ξ_1 , ξ_2 , … = v.c. i.i.d con media 0 e varianza 1. Non dipendono dalla categoria e corrispondono ai fattori di disturbo del processo del tasso di inflazione.

c_{1k} = coefficiente del fattore di disturbo per la categoria k.

Osservazioni.

1) Per i titoli a breve (k=1) si è ipotizzato:
   j_m = 8%; a_1 = 0,1; $a_2 = a_3$ = 0,5; c = 0,010; i_m = 6%.
2) Per i titoli a lungo termine (k=2) si è ipotizzato:
   j_m = 9%; a_1 = 0,2; $a_2 = a_3$ = 0,5; c = 0,004; i_m = 6%.

2. La determinazione dell'utile assicurativo per una generazione di polizze.

✓ L'approccio per generazioni considera il portafoglio dell'impresa (presente e futuro) come somma composita di varie generazione, ognuna costituita da polizze aventi caratteristiche analoghe, ad eccezione delle somme assicurate.

✓ Ogni generazione è analizzata separatamente, mentre il risultato assicurativo annuo di portafoglio è somma dei risultati assicurativi ottenuti da ciascuna generazione:

$$\mathbf{Y} = \sum_h \mathbf{Y}_h$$

Le polizze appartenenti alla stessa generazione hanno in comune:

- la forma assicurativa
- l'anno di sottoscrizione
- l'età dell'assicurato alla stipula (x)
- la durata del contratto (n)
- il periodo di pagamento dei premi (m).
- il periodo di differimento delle rendite (m).

Esamineremo un portafoglio composto da quattro forme assicurative ordinarie individuali: temporanea, capitale differito, mista semplice, rendita differita.

2.1 Tassi di premio e di riserva.

❖ Basi tecniche

Consideriamo la seguente base tecnica del primo ordine:

- Tassi annuali di mortalità : $\{q^*_x\}$
- Tasso annuo di interesse: j^*
- Aliquota di caricamento per spese di acquisto: $\alpha^*_{n,m}$
- Aliquota di caricamento per spese di incasso: β^*
- Aliquota di caricamento per spese di gestione: γ^*

La base tecnica del secondo ordine sia:

- Tassi annuali (<u>aleatori</u>) di mortalità : $\{\mathbf{q}_x\}$
- Tasso annuo di interesse: $\mathbf{j} = j$ (deterministico)
- Aliquota di caricamento per spese di acquisto: $\alpha_{n,m}$
- Aliquota di caricamento per spese di incasso: β
- Aliquota di caricamento per spese di gestione: γ

I tassi annui di mortalità q^*_x includono un caricamento di sicurezza. Essi possono differire dai tassi di mortalità attesi $q_x = E(\mathbf{q}_x)$ secondo un coefficiente moltiplicativo λ (costante o variabile con l'età dell'assicurato), positivo o negativo a seconda della forma assicurativa considerata:

$$q^*_x = (1 + \lambda)q_x$$

dove:

$q_x = E(\mathbf{q}_x)$: tasso atteso di moralità

In genere risulta:

- $\lambda > 0$ ($q^*_x > q_x$), per le temporanee caso morte
- $\lambda < 0$ ($q^*_x < q_x$), per i capitali e le rendite differite.

Nota. Ipotizzeremo che i premi puri pagati dagli assicurati siano calcolati sulla base del valore atteso, ottenuto applicando i tassi di mortalità del primo ordine q^*_x (che includono un caricamento di sicurezza).

❖ Tassi di premio unico

Il valore attuale di una prestazione assicurativa sulla vita è una variabile aleatoria che dipende da:

- $\mathbf{T}_x$ = durata aleatoria residua di vita della testa assicurata
- $\{\mathbf{j}_t\}$ = successione dei tassi effettivi annui di interesse, aleatori.

Posto che il tasso effettivo annuo di interesse sia deterministico, il valore attuale di una polizza sulla vita è funzione della sola v.c. $\mathbf{T}_x$, con funzione di distribuzione:

$F(\mathbf{T}_x) = \Pr\{ \mathbf{T}_x \leq t\} = {}_{/t}q_x = 1 - {}_tp_x$.

Temporanea caso morte.

Tasso aleatorio di premio unico puro, per unità di capitale:

$_{/n}\mathbf{A}_x = \{(1 + j^*)^{-t}$, se $\{\mathbf{T}_x \leq n\}$; 0, altrimenti$\}$

Tasso di premio unico puro medio:

$E\,({}_{/n}\mathbf{A}_x) = \Sigma_{k\,(1\rightarrow n)}\,(1+j^*)^{-k}\ {}_{k-1/1}q_x$

Varianza delle prestazione assicurate:

$Var({}_{/n}\mathbf{A}_x) = \Sigma_{k\,(1\rightarrow n)}\,(1+j^*)^{-2k}\ {}_{k-1/1}q_x\ -\ [E\,({}_{/n}\mathbf{A}_x)]^2$

Capitale differito.

Tasso aleatorio di premio unico puro, per unità di capitale:

${}_n\mathbf{E}_x = \{(1 + j^*)^{-n}$, se $\{\mathbf{T}_x > n\}$; 0, altrimenti $\}$

Tasso di premio unico puro medio :

$E\,({}_n\mathbf{E}_x) = (1+j^*)^{-n}\ {}_np_x$

Varianza delle prestazioni assicurate:

$Var({}_n\mathbf{E}_x) = (1+j^*)^{-2n}\ {}_np_x\ -\ [E\,({}_n\mathbf{E}_x)]^2$

Mista semplice.

Tasso aleatorio di premio unico puro, per unità di capitale:

$\mathbf{A}_{x,n} = /_n\mathbf{A}_x + {}_n\mathbf{E}_x = \{(1 + j^*)^{-t}, \text{ se } \{\mathbf{T}_x \leq n\};\ (1 + j^*)^{-n}, \text{ se } \{\mathbf{T}_x > n\}\}$

Tasso di premio unico puro medio :

$E(\mathbf{A}_{x,n}) = E({}_{/n}\mathbf{A}_x) + E({}_n\mathbf{E}_x)$

Varianza delle prestazioni assicurate:

$Var(\mathbf{A}_{x,n}) = Var({}_{/n}\mathbf{A}_x) + Var({}_n\mathbf{E}_x) - 2\,E({}_{/n}\mathbf{A}_x)\,E({}_n\mathbf{E}_x)$

Rendita vitalizi differita e temporanea a rata anticipata.

Tasso aleatorio di premio unico puro:

${}_{m/n}\mathbf{a}_x = \{0, \text{ se } \{\mathbf{T}_x \leq m\} \;;\; {}_{m/}\mathbf{a}_{\overline{t-m}|\, j^*}, \text{ se } \{m < \mathbf{T}_x \leq m+n\};\; {}_{m/}\mathbf{a}_{\overline{n}|\, j^*}, \text{ se } \{\mathbf{T}_x > m+n\}\}.$

Tasso di premio unico puro medio

$E\,({}_{m/n}\mathbf{a}_x) = (1+j^*)^{-m}\; {}_{m}p_x \;\Sigma_{k\,(1\rightarrow n)}\; a_{\overline{k}|\, j^*}\;\; {}_{k-1/1}q_{x+m}$

Varianza delle prestazioni assicurate

$Var({}_{m/n}\mathbf{a}_x) = (1+j^*)^{-2m}\; {}_{m}p_x \;\Sigma_{k\,(1\rightarrow n)}\; [a_{\overline{k}|\, j^*}]^{2}\;\; {}_{k-1/1}q_{x+m} \;-\; [E\,({}_{m/n}\mathbf{a}_x)]^{2}$

❖ Tassi di premio annuo attesi (base tecnica I° ordine)

Sia

$\pi_{t+1} = \{\pi$, per $t+1 \leq m$; 0 per $t+1 > m$

il tasso di premio puro annuo per unità di capitale. Per le forme assicurative considerate, si ha:

- *Temporanea caso morte:*

$\pi = {}_{/n}A_x \,/\, {}_{/m}a_x$.

- *Mista semplice:*

$\pi = ({}_{/n}A_x + {}_{n}E_x) \,/\, {}_{/m}a_x$.

- *Capitale differito:*

$\pi = {}_{n}E_x \,/\, {}_{/m}a_x$.

- *Rendita temporanea differita:*

$\pi = {}_{m/n}a_x \,/\, {}_{/m}a_x$.

❖ Tassi annui di riserva matematica pura per unità di capitale (base tecnica I° ordine)

Ipotesi: i tassi di riserva matematica corrispondano al valore atteso delle relative variabili aleatorie “tassi annui di riserva” rispetto alle basi tecniche del primo ordine.

Utilizzando la formula ricorrente di Fouret:

$$v_t + \pi_{t+1} = q^*_{x+t}(1+j^*)^{-1} C_{t+1} + (1-q^*_{x+t})(1+j^*)^{-1} v_{t+1}$$

si ha:

- *Temporanea caso morte:*

$$v_{t+1} = \begin{cases} \dfrac{(v_t + \pi_{t+1})(1+j^*) - q^*_{x+t}}{1-q^*_{x+t}}, & t+1 = 1,2,\dots,n-1 \\ 0, & t+1 = n \end{cases}$$

- *Capitale differito:*

$$v_{t+1} = \begin{cases} \dfrac{(v_t + \pi_{t+1})(1 + j^*)}{1 - q^*_{x+t}}, & t+1 = 1,2,\ldots,n-1 \\ 1, & t+1 = n \end{cases}$$

- *Mista semplice:*

$$v_{t+1} = \begin{cases} \dfrac{(v_t + \pi_{t+1})(1 + j^*) - q^*_{x+t}}{1 - q^*_{x+t}}, & t+1 = 1,2,\ldots,n-1 \\ 1, & t+1 = n \end{cases}$$

- *Rendita temporanea differita:*

$$v_{t+1} = \frac{(v_t + \pi_{t+1})(1 + j^*)}{1 - q^*_{x+t}}, \quad t+1 = 1,2,\ldots,m$$

$$v_{t+1} = \begin{cases} \dfrac{v_t(1 + j^*) - (1 - q^*_{x+t})}{1 - q^*_{x+t}}, & t+1 = m+1,\ldots,m+n-1 \\ 0, & t+1 = m+n \end{cases}$$

❖ Tassi annui di tariffa

Tenendo conto delle tre categorie di spesa:

- provvigioni di acquisto;
- provvigioni di incasso;
- spese generali e di amministrazione.

Per ogni forma assicurativa esaminata si ipotizza:

a) I caricamenti per spese di acquisto sono commisurati al premio annuo di tariffa. L'aliquota risulterà diversa a seconda della forma assicurativa, la durata contrattuale e le modalità di pagamento dei premi.

b) I caricamenti per spese di incasso sono commisurati al premio di tariffa.

c) I caricamenti per spese generali e di amministrazione sono commisurati al capitale assicurato.

Nella base tecnica completa del primo ordine indichiamo con

- $\alpha^*_{n,m}$ = Aliquota di caricamento per spese di acquisto
- β^* = Aliquota di caricamento per spese di incasso
- γ^* = Aliquota di caricamento per spese di gestione

Nella base tecnica completa del secondo ordine, indichiamo con

- $\alpha_{n,m}$ = Aliquota di caricamento per spese di acquisto
- β = Aliquota di caricamento per spese di incasso
- γ = Aliquota di caricamento per spese di gestione

Indicato con bt+1 il tasso di premio annuo di tariffa pagato all'inizio dell'anno (t, t+1], per le forme temporanea, capitale differito e mista si ottiene:

$$b_{t+1} = \begin{cases} b = \pi + \left[\dfrac{\alpha^*_{n,m} b}{{}_{/m}\ddot{a}_x} + \beta^* b + \gamma^* \dfrac{{}_{/n}\ddot{a}_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x} \right], & t+1 \leq m \\ 0, & t+1 > m \end{cases}$$

mentre per la rendita temporanea differita si ha:

$$b_{t+1} = \begin{cases} b = \pi + \left[\dfrac{\alpha^*_{n,m} b}{{}_{/m}\ddot{a}_x} + \beta^* b + \gamma^* \dfrac{{}_{/m+n}\ddot{a}_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x} \right], & t+1 \leq m \\ 0, & t+1 > m \end{cases}$$

❖ Tassi annui di tariffa delle riserva matematiche

Il tasso di riserva completa somma il tasso di riserva matematica premi puri, il tasso di riserva per spese di acquisizione e il tasso di riserva per spese generali:

$$v^b_{t+1} = v_{t+1} + v^\alpha_{t+1} + v^\beta_{t+1} + v^\gamma_{t+1}$$

si ha:

$$v^\beta_{t+1} = 0$$

Pertanto, per le forme temporanea, capitale differito e mista, il tasso di riserva matematica completa è dato dalla formula generale:

$$v^b_{t+1} = v_{t+1} + [0 - \frac{\alpha^*_{n,m} b}{{}_{/m}\ddot{a}_x} {}_{/m-t-1}\ddot{a}_{x+t+1}] + [\gamma^* {}_{/n-t-1}\ddot{a}_{x+t+1} - \gamma^* \frac{{}_{/n}\ddot{a}_x}{{}_{/m}\ddot{a}_x} {}_{/m-t-1}\ddot{a}_{x+t+1}], \quad t+1 = 1,2,\ldots,m-1;$$

$$v^b_{t+1} = v_{t+1} + \gamma^* {}_{/n-t-1}\ddot{a}_{x+t+1}, \quad t+1 = m, m+1, \ldots, n.$$

Il tasso di riserva zillmerata: $v^z_{t+1} = v_{t+1} + v^\alpha_{t+1}$

Il tasso di riserva per spese: $v^b_{t+1} = v^\alpha_{t+1} + v^\gamma_{t+1}$

Esempio numerico: calcolo dei tassi di riserva

Dati	
Sesso	1
Età	35
Durata Contratto	25
Differimento Prestazio	25
Durata premi	25
Tasso	4%
Base demografica	1
Capitale	1000

Temporanea	
premio unico puro%	0,5170%
b%	0,6462%
alfa	65%
beta	5%
gamma	0,07%
Capitale differito	
premio unico puro%	2,0288%
b%	2,5352%
alfa	80%
beta	5%
gamma	0,25%
Mista	
premio unico puro%	2,5458%
b%	3,1660%
alfa	80%
beta	5%
gamma	0,30%
Rendita differita	
premio unico puro%	21,8145%
b%	27,6113%
alfa	75%
beta	5%
gamma	2,5%

Esempio numerico: tassi di riserva per 1000

Antidurata	**Età**	**Temporanea**			**Capitale differito**			**Mista semplice**		
t	x+t	v	ve = va	vb	v	ve = va	vb	v	ve = va	vb
0	35	0,00	0	0,00	0,00	0	0,00	0,00	0	0,00
1	36	3,72	-4,10	-0,38	21,13	-19,78	1,36	24,86	-24,70	0,16
2	37	7,44	-3,99	3,46	43,16	-19,26	23,90	50,60	-24,05	26,56
3	38	11,14	-3,88	7,27	66,12	-18,71	47,40	77,26	-23,37	53,89
4	39	14,79	-3,76	11,03	90,06	-18,16	71,90	104,85	-22,67	82,18
5	40	18,37	-3,64	14,73	115,04	-17,58	97,46	133,41	-21,95	111,47
6	41	21,86	-3,52	18,35	141,12	-16,98	124,14	162,98	-21,20	141,78
7	42	25,23	-3,39	21,84	168,36	-16,36	152,01	193,59	-20,42	173,17
8	43	28,42	-3,25	25,17	196,84	-15,71	181,13	225,26	-19,62	205,64
9	44	31,38	-3,12	28,26	226,65	-15,05	211,60	258,03	-18,79	239,23
10	45	34,08	-2,97	31,11	257,86	-14,36	243,50	291,94	-17,93	274,01
11	46	36,48	-2,83	33,66	290,59	-13,65	276,94	327,07	-17,04	310,03
12	47	38,56	-2,67	35,89	324,92	-12,91	312,01	363,48	-16,12	347,36
13	48	40,29	-2,51	37,78	360,96	-12,14	348,82	401,26	-15,17	386,09
14	49	41,59	-2,35	39,24	398,87	-11,35	387,52	440,46	-14,17	426,29
15	50	42,42	-2,18	40,24	438,77	-10,52	428,25	481,19	-13,14	468,05
16	51	42,66	-2,00	40,66	480,86	-9,66	471,19	523,51	-12,07	511,45
17	52	42,21	-1,82	40,39	525,32	-8,77	516,55	567,53	-10,95	556,58
18	53	40,97	-1,62	39,35	572,39	-7,84	564,55	613,36	-9,79	603,57
19	54	38,85	-1,42	37,42	622,30	-6,87	615,43	661,15	-8,58	652,57
20	55	35,72	-1,21	34,50	675,34	-5,86	669,48	711,06	-7,32	703,74
21	56	31,50	-0,99	30,51	731,78	-4,80	726,98	763,28	-6,00	757,29
22	57	26,03	-0,76	25,27	791,99	-3,69	788,30	818,03	-4,61	813,42
23	58	19,12	-0,52	18,59	856,42	-2,52	853,89	875,53	-3,15	872,38
24	59	10,55	-0,27	10,28	925,53	-1,30	924,24	936,08	-1,62	934,46
25	60	0,00	0,00	0,00	1000,00	0,00	1000,00	1000,00	0	1000,00

Esempio numerico: tassi di riserva per 1000

Antidurata	**Età**	**Rendita temporanea differita**				
t	x+t	v	va	vg	ve	vb
0	35	0,00	0	0	0	0,00
1	36	227,25	-201,94	6,17	-195,76	31,48
2	37	464,05	-196,61	12,61	-184,00	280,05
3	38	710,91	-191,09	19,31	-171,78	539,13
4	39	968,35	-185,37	26,30	-159,07	809,28
5	40	1236,96	-179,46	33,60	-145,86	1091,10
6	41	1517,38	-173,33	41,22	-132,12	1385,26
7	42	1810,30	-166,99	49,17	-117,82	1692,48
8	43	2116,55	-160,44	57,49	-102,94	2013,60
9	44	2437,03	-153,65	66,20	-87,45	2349,57
10	45	2772,66	-146,63	75,31	-71,31	2701,34
11	46	3124,49	-139,35	84,87	-54,48	3070,01
12	47	3493,64	-131,81	94,90	-36,92	3456,72
13	48	3881,23	-123,99	105,43	-18,56	3862,67
14	49	4288,80	-115,87	116,50	0,63	4289,43
15	50	4717,87	-107,44	128,15	20,72	4738,58
16	51	5170,34	-98,67	140,44	41,77	5212,11
17	52	5648,45	-89,56	153,43	63,87	5712,33
18	53	6154,56	-80,07	167,18	87,11	6241,67
19	54	6691,22	-70,17	181,76	111,58	6802,80
20	55	7261,52	-59,84	197,25	137,41	7398,93
21	56	7868,39	-49,02	213,73	164,71	8033,10
22	57	8515,83	-37,68	231,32	193,63	8709,46
23	58	9208,52	-25,78	250,13	224,36	9432,88
24	59	9951,70	-13,24	270,32	257,08	10208,78
25	60	10752,38	0	292,07	292,07	11044,45
26	61	10387,04	0	282,83	282,83	10669,87
27	62	10020,66	0	273,56	273,56	10294,22
28	63	9653,91	0	264,27	264,27	9918,18

3. Relazioni fondamentali riguardanti la numerosità delle polizze e dei capitali assicurati

Siano:

- $\mathbf{l}_{x+t+1}$ = v.c. numero delle polizze ancora in essere al tempo t+1.
- $\mathbf{r}_{x+t}$ = v.c. numero degli abbandoni nell'esercizio (t, t+1]
- $\boldsymbol{\delta}_{x+t}$ = v.c. tasso di abbandono nell'esercizio (t, t+1]
- $\mathbf{d}_{x+t}$ = v.c. numero dei decessi nell'esercizio (t, t+1].

Ipotesi. Le polizze della generazione sono reciprocamente indipendenti.
Allora il numero aleatorio delle polizze ancora in essere al tempo t+1 risulta:

$$\mathbf{l}_{x+t+1} = \mathbf{l}_{x+t} - \mathbf{r}_{x+t} - \mathbf{d}_{x+t}$$

$$= \mathbf{l}_{x+t} - \boldsymbol{\delta}_{x+t}\, \mathbf{l}_{x+t} - \mathbf{q}_{x+t}(\mathbf{l}_{x+t} - \mathbf{r}_{x+t})$$

$$= \mathbf{l}_{x+t}(1 - \boldsymbol{\delta}_{x+t})(1 - \mathbf{q}_{x+t})$$

$$= \mathbf{l}_x \prod_{h=0}^{t} \left[(1-\boldsymbol{\delta}_{x+h})(1-\mathbf{q}_{x+h})\right]$$

In merito ai capitali assicurati, siano:

- $\mathbf{w}_{x+t+1}$ = v.c. dei capitali complessivi assicurati per le polizze della generazione ancora in essere al tempo t+1.
- $\mathbf{s}_{t+1}$ = v.c. dei capitali complessivi relativi alle polizze della generazione eliminate a causa di abbandono del contratto nel corso dell'esercizio (t, t+1]
- $\mathbf{z}_{t+1}$ = v.c. dei capitali complessivi relativi alle polizze della generazione eliminate a causa di decesso dell'assicurato nel corso dell'esercizio (t, t+1].

Ipotesi. a) gli abbandoni avvengano solo all'inizio dell'esercizio; b) i decessi avvengano solo alla fine dell'esercizio.

Si ha:

$$\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1} - \mathbf{z}_{t+1}$$

Osservazione .

1) Se i capitali assicurati sono tutti pari all'unità si ha $\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{l}_{t+1}$.
2) Se le polizze sono a capitale variabile, gli importi $\mathbf{w}_{t+1}$, $\mathbf{w}_t$, $\mathbf{s}_{t+1}$ e $\mathbf{z}_{t+1}$ devono essere moltiplicati per l'indice di rivalutazione.

4. Condizioni di equilibrio nel caso di polizze a prestazioni variabili

Se le polizze sono a prestazioni variabili (adeguabili, indicizzate, rivalutabili, ecc.) al termine di ogni anno le riserve e/o i premi dovranno essere incrementati per assicurare l'equilibrio attuariale con i nuovi livelli delle prestazioni assicurate.

Sia

- $\mathbf{j}^{c}_{t+1}$ = la v.c. che esprime l'incremento dei capitali assicurati;
- $\mathbf{j}^{b}_{t+1}$ = la v.c. che esprime l'incremento dei premi prescelto nell'anno dagli assicurati della generazione;
- $\mathbf{j}^{v}_{t+1} = \Delta \underline{\mathbf{VB}}_{t+1} \, / \, \mathbf{VB}_{t+1}$ = il tasso aleatorio di rivalutazione della riserva matematica completa

Osservazione. La determinazione del tasso aleatorio di rivalutazione dipenderà:

- dall'inflazione verificatasi nell'anno (per le polizze adeguabili o indicizzate)
- dalla misura del rendimento ottenuto nell'anno dagli investimenti della compagnia (nel caso di polizze rivalutabili).

Sia t = 0, cioè si consideri il primo anno di contratto. Al termine del primo anno l'esigenza di equilibrio attuariale tra i valori futuri delle rimesse premi e delle prestazioni impone che i tre tassi di variazione verifichino la seguente relazione:

$(1+ j^v_1)v^b_1 + (1+ j^b_1)b\ {}_{/m-1}a_{x+1} = (1+ j^c_1)A(x+1, n-1) + (1+ j^b_1)\ (b\beta^*)\ {}_{/m-1}a_{x+1} + (1+ j^c_1)\ \gamma^*\ {}_{/m-1}a_{x+1}$

dove: A(x+1, n-1) = tasso di premio unico puro relativo alla stessa polizza in oggetto per età e durata aggiornati alla fine del primo anno di contratto.
Si può verificare che:

$$(1+j_1^c) = (1+j_1^v)\frac{v_1^b}{A(x+1,n-1)+\gamma^*{}_{/n-1}\ddot{a}_{x+1}} + (1+j_1^b)\frac{b(1-\beta^*)_{/m-1}\ddot{a}_{x+1}}{A(x+1,n-1)+\gamma^*{}_{/n-1}\ddot{a}_{x+1}}$$

Dalla precedente relazione, se ipotizziamo che il tasso prescelto di incremento dei premi è pari ad un aliquota θ del tasso di incremento delle riserve

$j^b_1 = \theta_1\ j^v_1$

si ricava la nota soluzione del tassi di rivalutazione del capitale j^c_1.

Infatti, posto: $j^b_1 = \theta_1 \, j^v_1$, si ha:

$$(1+ j^v_1)v^b_1 + (1+\theta_1 \, j^v_1) b \, {}_{/m-1}a_{x+1} - (1+\theta_1 \, j^v_1) \, b\beta^* \, {}_{/m-1}a_{x+1} = (1+ j^c_1)[A(x+1, n-1) + \gamma^* \, {}_{/n-1}a_{x+1}]$$

$$[v^b_1 + b(1-\beta^*)_{/m-1}a_{x+1}] + j^v_1[v^b_1 + \theta_1(1-\beta^*)b_{/m-1}a_{x+1}] = j^c_1[A(x+1, n-1) + \gamma^* \, {}_{/n-1}a_{x+1}] + [A(x+1, n-1) + \gamma^* \, {}_{/n-1}a_{x+1}]$$

E poiché

$$v^b_1 + b(1-\beta^*)_{/m-1}a_{x+1} = A(x+1, n-1) + \gamma^* \, {}_{/n-1}a_{x+1}$$

$$v_1 + v^\alpha_1 + v^\beta_1 + v^\gamma_1 + b(1-\beta^*)_{/m-1}a_{x+1} = A(x+1, n-1) + \gamma^* \, {}_{/n-1}a_{x+1}$$

$$A(x+1, n-1) - \pi_{/m-1}a_{x+1} - (\alpha^* b \,/\, {}_{/m}a_x) \, {}_{/m-1}a_{x+1} + 0 + [\gamma^* \, {}_{/n-1}a_{x+1} - (\gamma^* \, {}_{/n}a_x \,/\, {}_{/m}a_x) \, {}_{/m-1}a_{x+1}] + b(1-\beta^*)_{/m-1}a_{x+1} = A(x+1, n-1) + \gamma^* \, {}_{/n-1}a_{x+1}$$

$$A(x+1, n-1) - [\pi_{/m-1}a_{x+1} + (\alpha^* b \,/\, {}_{/m}a_x) \, {}_{/m-1}a_{x+1} + (\gamma^* \, {}_{/n}a_x \,/\, {}_{/m}a_x) \, {}_{/m-1}a_{x+1}] + \gamma^* \, {}_{/n-1}a_{x+1} + b(1-\beta^*)_{/m-1}a_{x+1} = A(x+1, n-1) + \gamma^* \, {}_{/n-1}a_{x+1}$$

$$A(x+1, n-1) - b(1-\beta^*)_{/m-1}a_{x+1} + \gamma^* \, {}_{/n-1}a_{x+1} + b(1-\beta^*)_{/m-1}a_{x+1} = A(x+1, n-1) + \gamma^* \, {}_{/n-1}a_{x+1}$$

Risulta:

$$\boxed{j_1^c = j_1^v \frac{v_1^b + \theta_1[(1-\beta^*) b_{/m-1}\ddot{a}_{x+1}]}{v_1^b + (1-\beta^*) b_{/m-1}\ddot{a}_{x+1}}}$$

Se in particolare θ_{t+1}= 1, per t = 0, 1, 2, …, i tre tassi di rivalutazione risultano coincidenti. Tenendo conto dell'esigenza di rivalutare capitali, premi e riserve, se rappresentiamo la v.c indice di rivalutazione al tempo t (con $\mathbf{Q}_0$ = 1), con:

$$\mathbf{Q}_t = \prod_{h=1}^{t}(1+\mathbf{j}_h^v) = \prod_{h=1}^{t}(1+\mathbf{j}_h^b) = \prod_{h=1}^{t}(1+\mathbf{j}_h^c)$$

gli ammontari complessivi dei premi e delle riserve matematiche (iniziali e finali) risultano:

- $\underline{\mathbf{VB}}_t = v^b_t\, \mathbf{w}_t\, \mathbf{Q}_t$ = riserva matematica completa iniziale, comprensiva delle rivalutazioni di riserva riconosciute agli assicurati fino al termine dell'esercizio precedente (t-1, t]

- $\mathbf{B}_{t+1} = b_{t+1}\, (\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1})\, \mathbf{Q}_t$ = ammontare dei premi di tariffa riscossi all'inizio dell'esercizio.

- $\mathbf{VB}_{t+1} = v^b_{t+1}\, \mathbf{w}_{t+1}\, \mathbf{Q}_t$ = riserva matematica completa finale, al netto delle rivalutazioni di riserva riconosciute agli assicurati al termine dell'esercizio considerato (t, t+1]

5. Le spese assicurative e i valori di riscatto

❖ Spese assicurative

Quando oggetto di esame sono le spese “effettivamente” sostenute dalla compagnia, viene fatto riferimento alle basi tecniche del secondo ordine, economicamente contrapposte a quelle del primo ordine.
L’ammontare complessivo delle spese assicurative sostenute dalla compagnia nell’esercizio (t, t+1] può essere espresso dalla v.c.

$$\mathbf{E}_{t+1} = {}_{\alpha}\mathbf{E}_{t+1} + {}_{\beta}\mathbf{E}_{t+1} + {}_{\gamma}\mathbf{E}_{t+1}$$

Risulta:

1) Le provvigioni pagate agli agenti, che ricorrono solo nel primo anno della polizza, sono poste pari ad un aliquota deterministica $\alpha_{t+1}(n,m)$ dell’ammontare dei premi di tariffa riscossi nel primo anno:

$${}_{\alpha}\mathbf{E}_{t+1} = \alpha_{t+1}\ \mathbf{B}_{t+1} = (\alpha^{*} - \Delta\alpha^{*}_{t+1}\ )\ b_{t+1}\ (\mathbf{w}_{t} - \mathbf{s}_{t+1})\ \mathbf{Q}_{t}$$

dove $\alpha_{t+1} = 0$ per $t > 0$ mentre $\Delta\alpha^{*}_{t+1} = \alpha^{*} - \alpha_{t+1}$ esprime lo scarto tra le basi del primo e del secondo ordine;

2) Le spese di incasso sostenute dalla compagnia ogni anno in cui è previsto il pagamento del premio, sono pari ad una aliquota deterministica β_{t+1} dell'ammontare dei premi di tariffa pagati nell'anno:

$${}_{\beta}\mathbf{E}_{t+1} = \beta_{t+1}\,\mathbf{B}_{t+1} = (\beta^{*} - \Delta\beta^{*}_{t+1})\; b_{t+1}\,(\mathbf{w}_{t} - \mathbf{s}_{t+1})\;\mathbf{Q}_{t}$$

dove $\beta_{t+1} = 0$ per $t \geq m$ mentre $\Delta\beta^{*}_{t+1} = \beta^{*} - \beta_{t+1}$ esprime lo scarto tra le basi del primo e del secondo ordine;

3) Le spese generali e di amministrazione, sono pari ad una aliquota deterministica γ_{t+1} dell'ammontare complessivo dei capitali assicurati in vigore all'inizio dell'esercizio considerato:

$${}_{\gamma}\mathbf{E}_{t+1} = \gamma_{t+1}\,\mathbf{w}_{t}\,\mathbf{Q}_{t} = (\gamma^{*} - \Delta\gamma^{*}_{t+1})\;\mathbf{w}_{t}\,\mathbf{Q}_{t}$$

dove $\Delta\gamma^{*}_{t+1} = \gamma^{*} - \gamma_{t+1}$ esprime lo scarto tra le basi del primo e del secondo ordine.

Nel modello in esame si è ritenuto opportuno correlare le spese generali all'indice di inflazione, rappresentato dalla v.c. **I**, in modo che risulti:

$${}_{\gamma}\mathbf{E}_{t+1} = [(1 - \lambda_{\gamma})\gamma^{*}\ \mathbf{w}_t]\ \mathbf{I}_t$$

dove λ_{γ} esprime il caricamento di sicurezza per spese previsto nel calcolo dei premi e delle riserve. Pertanto, l'aliquota γ_{t+1} diviene a sua volta una v.c. funzione dell'indice inflattivo e di quello di rivalutazione:

$$\gamma_{t+1}\ \mathbf{w}_t\ \mathbf{Q}_t = [(1 - \lambda_{\gamma})\gamma^{*}\ \mathbf{w}_t]\ \mathbf{I}_t$$
$$\boldsymbol{\gamma}_{t+1} = (1 - \lambda_{\gamma})\gamma^{*}\ (\mathbf{I}_t / \mathbf{Q}_t)$$

e di conseguenza:

$$\Delta\boldsymbol{\gamma}^{*}_{t+1} = \gamma^{*} - \boldsymbol{\gamma}_{t+1} = [1 - (1 - \lambda_{\gamma})\ (\mathbf{I}_t / \mathbf{Q}_t)]\ \gamma^{*}$$

In definitiva l'ammontare complessivo delle spese assicurative sostenute dalla compagnia nell'esercizio (t, t+1] può essere così riscritto

$$\mathbf{E}_{t+1} = (\alpha_{t+1} + \beta_{t+1})\ b_{t+1}\ (\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1})\ \mathbf{Q}_t + \boldsymbol{\gamma}_{t+1}\ \mathbf{w}_t\ \mathbf{Q}_t$$

❖ I valori di riscatto

➢ Criteri per la determinazione del prezzo di riscatto:

a) evitare che venga erogato al beneficiario un importo quando il contraente è in debito verso la compagnia per le provvigione di acquisto non ammortizzate, cioè quanto la riserva zillmerata è negativa;

b) limitare fenomeni di anti-selezione che possono produrre perdite di mortalità.

Per tale motivo i valori di riscatto vengono determinati in relazione alla riserva zillmerata (v^z_t), la quale viene scontata ad un tasso ($j_s \geq j^*$) per un numero di anni pari a quello dei premi annui non pagati. Il tasso di sconto applicato è più o meno grande a seconda della forma assicurativa considerata.

Pertanto, l'ammontare complessivo dei valori di scatto pagati dalla compagnia all'inizio dell'anno è pari a:

$\mathbf{S}_{t+1} = g_t(j_s)\, v^z_t\, \mathbf{s}_{t+1}\, \mathbf{Q}_t$, dove il coefficiente di $g_t(j_s)$ è: $g_t(j_s) = \begin{cases} 0 & t < \tau \\ (1+j_s)^{-(m-t)+} & t \geq \tau \end{cases}$

dove τ misura il "periodo di carenza". Se si trascurano gli effetti futuri di anti-selezione, il tasso j_s è posto pari a 0 ed il coefficiente di riduzione $g_t(j_s)$ è sostituito dal seguente:

$$g_t = \begin{cases} 0 & v^z_t \leq 0 \\ 1 & v^z_t > 0 \end{cases}$$

6. Espressione generale dell'utile assicurativo per una generazione di polizze

Riprendiamo l'espressione dell'utile assicurativo (ora riferito ad una generazione di polizze):

$$\mathbf{Y}_{t+1} = (\underline{\mathbf{VB}}_t + \mathbf{B}_{t+1} + \mathbf{J}_{t+1}) - (\mathbf{E}_{t+1} + \mathbf{S}_{t+1} + \mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{VB}_{t+1})$$

Sia $\mathbf{j}_{t+1}$ = la v.c. che esprime il tasso di interesse realizzato dagli investimenti effettuati dalla compagnia nel corso dell'esercizio (t, t+1].
La v.c. $\mathbf{J}_{t+1}$, che indica l'ammontare degli interessi realizzati dall'investimento delle risorse assicurative (premi e riserve), può essere espressa nella forma:

$$\mathbf{J}_{t+1} = \mathbf{j}_{t+1}\,(\underline{\mathbf{VB}}_t + \mathbf{B}_{t+1} - \mathbf{E}_{t+1} - \mathbf{S}_{t+1})$$

A tal punto l'utile assicurativo di una generazione conseguito nell'esercizio (t, t+1] si può esprimere come:

$$\mathbf{Y}_{t+1} = (\underline{\mathbf{VB}}_t + \mathbf{B}_{t+1} - \mathbf{E}_{t+1} - \mathbf{S}_{t+1})(1 + \mathbf{j}_{t+1}) - (\mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{VB}_{t+1})$$

Dove, rammentando quanto esposto in precedenza, risulta:

- $\underline{\mathbf{VB}}_t = v^b_t\, \mathbf{w}_t\, \mathbf{Q}_t$
- $\mathbf{B}_{t+1} = b_{t+1}\, (\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1})\, \mathbf{Q}_t$
- $\mathbf{E}_{t+1} = (\alpha_{t+1} + \beta_{t+1})\, b_{t+1}\, (\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1})\, \mathbf{Q}_t + \gamma_{t+1}\, \mathbf{w}_t\, \mathbf{Q}_t$
- $\mathbf{S}_{t+1} = g_t\, v^z_t\, \mathbf{s}_{t+1}\, \mathbf{Q}_t$
- $\mathbf{VB}_{t+1} = v^b_{t+1}\, \mathbf{w}_{t+1}\, \mathbf{Q}_t$

Per quanto riguarda l'ammontare dei sinistri avvenuti nell'esercizio e regolati a fine anno:

- $\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{x}_{t+1}\, \mathbf{Q}_t$

esso dipende, come per i tassi delle riserve (v^b) e dei premi (b), dalla forma assicurativa della generazione considerata:

- $\mathbf{X}_{t+1} = \mathbf{z}_{t+1}\, \mathbf{Q}_t$ (temporanea e mista)
- $\mathbf{X}_{t+1} = 0$ (capitale differito, t+1 < m)

$$\mathbf{X}_{t+1} = \begin{cases} 0 & \text{se}\, t < m \\ \mathbf{w}_{t+1}\mathbf{Q}_t & \text{se}\ \ t \geq m \end{cases}$$ (rendita temporanea differita).

7. Scomposizione dell'utile assicurativo

$\mathbf{Y}_{t+1} = {}_1\mathbf{Y}_{t+1} + {}_2\mathbf{Y}_{t+1} + {}_3\mathbf{Y}_{t+1} + {}_4\mathbf{Y}_{t+1} + {}_5\mathbf{Y}_{t+1}$

= utile di mortalità

= utile di eliminazione

= utile di caricamento per spese

= utile di interesse

= utile residuo

❖ Utile di mortalità dell'anno

$_1\mathbf{Y}_{t+1}$ $=\{[v^b_t + b_{t+1}\,(1 - \alpha^* - \beta^*) - \gamma^*]\,(\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1})\,(1 + j^*) - (\mathbf{x}_{t+1} + \mathbf{w}_{t+1}\,v^b_{t+1})\}\,\mathbf{Q}_t$

$= [\underline{\mathbf{VB}}_t + \mathbf{B}_{t+1} - \mathbf{E}^*_{t+1} - (v^b_t - \gamma^*)\,\mathbf{s}_{t+1}]\,(1 + j^*) - (\mathbf{X}_{t+1} + \mathbf{VB}_{t+1})\}$

dove:

$\mathbf{E}^*_{t+1} = [(\alpha^* + \beta^*)b_{t+1}\,(\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1}) + \gamma^*\mathbf{w}_t]\,\mathbf{Q}_t$: spese valutate con b.t. I° ordine

- $\alpha^* = 0$ se $t > 0$
- $\beta^* = 0$ se $t > m-1$
- $\gamma^* = 0$ se $t > n-1$

Osservazione. Le riserve complete e la parte dei premi non spesi delle polizze ancora in essere in t+, capitalizzati per un anno al tasso tecnico j* dovranno far fronte al pagamento dei sinistri ed alla costituzione delle nuove riserve (complete) per gli assicurati ancora in vita alla fine dell'esercizio.

❖ Utile di eliminazione

$_{2}\mathbf{Y}_{t+1} = [v^{b}_{t} - \gamma^{*} - g_{t}\, v^{z}_{t}]\,(1 + j^{*})\, \mathbf{s}_{t+1}\, \mathbf{Q}_{t}$

Osservazione.
Consiste nell'eccedenza delle riserve complete delle polizze oggetto di abbandono rispetto alle spese di gestione sostenute ed all'ammontare dei riscatti pagati.

Può essere di importo significativo se il coefficiente di riscatto è piccolo.

Tale utile viene impiegato per coprire negli esercizi successivi la riduzione dell'utile di mortalità a causa del fenomeno dell'antiselezione.

❖ Utile di caricamento per spese

$$ {}_3\mathbf{Y}_{t+1} = (1 + j^*) [\Delta\alpha^*_{t+1} + \Delta\beta^*_{t+1})b_{t+1} (\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1}) + \Delta\gamma^*_{t+1} \mathbf{w}_t] \mathbf{Q}_t $$

$$ = (1 + j^*) [\mathbf{E}^*_{t+1} - \mathbf{E}_{t+1}] $$

dove:

$$ \Delta\alpha^*_{t+1} = \alpha^* - \alpha_{t+1} $$
$$ \Delta\beta^*_{t+1} = \beta^* - \beta_{t+1} $$
$$ \Delta\gamma^*_{t+1} = [1 - (1 - \lambda\gamma) (\mathbf{I}_t / \mathbf{Q}_t)] \gamma^* = \gamma^* - \gamma_{t+1} $$

Osservazione. Rappresenta la capitalizzazione per un anno al tasso tecnico j* dell'eccedenza delle spese ipotizzate rispetto a quelle sostenute, per la sola parte dovuta allo scostamento delle aliquote di spesa.

❖ Utile di sovrainteresse

$$_{4}\mathbf{Y}_{t+1} = (\mathbf{j}_{t+1} - j^*)\,[v^b_t\,\mathbf{w}_t + b_{t+1}\,(1 - \alpha^* - \beta^*)\,(\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1}) - \gamma^*\,\mathbf{w}_t - g_t\,v^z_t\,\mathbf{s}_{t+1}]\,\mathbf{Q}_t$$

$$= (\mathbf{j}_{t+1} - j^*)\,[\underline{\mathbf{VB}}_t + \mathbf{B}_{t+1} - \mathbf{E}^*_{t+1} - \mathbf{S}_{t+1}]$$

Osservazione.
Esprime il differenziale tra il rendimento realizzato e quello ipotizzato in tariffa.

Risulta rilevante nel caso delle generazioni di miste, capitali differiti e rendite differite a causa della particolare consistenza delle riserve matematiche.

❖ Utile residuo

$$_{5}\mathbf{Y}_{t+1} = (\mathbf{j}_{t+1} - j^*)\,[\Delta\alpha^*_{t+1} + \Delta\beta^*_{t+1})\,b_{t+1}(\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1}) + \Delta\gamma^*_{t+1}\,\mathbf{w}_t]\,\mathbf{Q}_t$$
$$= (\mathbf{j}_{t+1} - j^*)\,[\mathbf{E}^*_{t+1} - \mathbf{E}_{t+1}]$$

Osservazione.
Esprime il differenziale composto tra tassi attesi e tassi realizzati di rendimento e di spesa.

8. Osservazioni sull'utile di mortalità

Posto:

$\pi^r_{t+1} = (v_t + \pi_{t+1}) - v_{t+1}(1 + j^*)^{-1}$: quantità pura a rischio per unità di capitale assicurato

$\pi^e_{t+1} = b_{t+1} - \pi_{t+1}$: tasso complessivo di caricamento

$e^*_{t+1} = (\alpha^* + \beta^*)\, b_{t+1} + \gamma^*$: tasso di spesa ipotizzato

$\pi^{er}_{t+1} = (v^e_t + \pi^e_{t+1} - e^*_{t+1}) - v^e_{t+1}(1 + j^*)^{-1}$: quantità di spesa a rischio per unità di cap. assic.

L'utile di mortalità si può esprimere come somma di due componenti:

$${}_1\mathbf{Y}_{t+1} = ({}_1\mathbf{Y}^r_{t+1} + {}_1\mathbf{Y}^{er}_{t+1})\, \mathbf{Q}_t$$

dove:

${}_1\mathbf{Y}^r_{t+1} = [\pi^r_{t+1}(1 + j^*)(\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1}) + v_{t+1}\, \mathbf{z}_{t+1}] - x_{t+1}$: relativa alle pure prestazioni assicurate

${}_1\mathbf{Y}^{er}_{t+1} = \pi^{er}_{t+1}(1 + j^*)(\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1}) + v^e_{t+1}\, \mathbf{z}_{t+1}$: relativa alle spese assicurative

Osservazioni:

1) Per qualsiasi forma qui considerata, la quantità di spesa a rischio vale:

$\pi^{er}_{t+1} = - q^{*}_{x+t}\, v^{e}_{t+1}(1 + j^{*})^{-1}$, con $v^{e}_{t+1} > = < 0$

2) La quantità pura a rischio dipende dalla forma assicurativa:

- Temporanea e mista semplice: $\pi^{r}_{t+1} = q^{*}_{x+t}\,(1 - v_{t+1})(1 + j^{*})^{-1}$
- Capitale differito: $\pi^{r}_{t+1} = - q^{*}_{x+t}\, v_{t+1}\,(1 + j^{*})^{-1}$
- Rendita differita temporanea (t< m): $\pi^{r}_{t+1} = - q^{*}_{x+t}\, v_{t+1}\,(1 + j^{*})^{-1}$
- Rendita differita temporanea (t >= m): $\pi^{r}_{t+1} = - q^{*}_{x+t}\,(1+v_{t+1})(1 + j^{*})^{-1}$

Se introduciamo il tasso di capitale sotto rischio D_{t+1}:

- Temporanea e mista semplice: $D_{t+1} = (1 - v_{t+1})$
- Capitale differito: $D_{t+1} = - v_{t+1}$
- Rendita differita temporanea (t< m): $D_{t+1} = - v_{t+1}$
- Rendita differita temporanea (t >= m): $D_{t+1} = - (1+v_{t+1})$

per ogni forma assicurativa esaminata, si ottiene:

${}_{1}\mathbf{Y}^{r}_{t+1} = D_{t+1}\,[q^{*}_{x+t}\,(\mathbf{w}_{t} - \mathbf{s}_{t+1}) - \mathbf{z}_{t+1}]$, $\qquad {}_{1}\mathbf{Y}^{er}_{t+1} = - v^{e}_{t+1}\,[q^{*}_{x+t}\,(\mathbf{w}_{t} - \mathbf{s}_{t+1}) - \mathbf{z}_{t+1}]$

3) Applicando l'indice di rivalutazione $\mathbf{Q}_t$, si ottiene una forma compatta della formula dell'utile di mortalità:

$$ {}_1\mathbf{Y}_{t+1} = ({}_1\mathbf{Y}^{r}_{t+1} + {}_1\mathbf{Y}^{er}_{t+1})\, \mathbf{Q}_t = D^{b}_{t+1}\, [q^{*}_{x+t}\, (\mathbf{w}_t - \mathbf{s}_{t+1}) - \mathbf{z}_{t+1}]\, \mathbf{Q}_t $$

dove: $D^{b}_{t+1} = D_{t+1} - v^{e}_{t+1}$ è la quantità complessiva a rischio, che assume grande rilevanza nella determinazione dell'utile di mortalità.

4) Se i capitali assicurati sono costanti e pari a 1, l'utile di mortalità si calcola con la formula:

$$ {}_1\mathbf{Y}_{t+1} = D^{b}_{t+1}\, [q^{*}_{x+t}\, (\mathbf{l}_{x+t} – \mathbf{r}_{x+t}) – \mathbf{d}_{x+t}]\, \mathbf{Q}_t $$

$$ = D^{b}_{t+1}\, [q^{*}_{x+t}\, \mathbf{l}_{x+t} - \mathbf{l}_{x+t}\, \delta_{x+t}\, q^{*}_{x+t} - \mathbf{l}_{x+t}\, (1- \delta_{x+t}) q_{x+t}\,]\, \mathbf{Q}_t $$

$$ = D^{b}_{t+1}\, \mathbf{l}_{x+t}\, (q^{*}_{x+t} - q_{x+t})(1 - \delta_{x+t})\, \mathbf{Q}_t $$

Esempio numerico: quantità complessiva a rischio

Dati	
Sesso	1
Età	35
Durata Contratto	25
Durata premi	25
Tasso	4%
Base demografica	1
Capitale	1000
t	10
lx+t	25000
q*x+t	0,0045
delta	4%
rx+t	1000
qx+t	0,003
d*x+t	108
dx+t	72
Capitale	1000
x+t+1	46

D^{b}_{11} = [1 – (0,03647 – 0,00282)] x 100

= (1 – 0,03365) x 100

= 96,63

Valori dei capitali sotto rischio Db_t+1 (%)

Età	Temporanea	Capitale differito	mista	rendita
x+t	%	%	%	%
35	100,00	0,00	100,00	0,00
36	100,04	-0,14	99,98	-3,15
37	99,65	-2,39	97,34	-28,01
38	99,27	-4,74	94,61	-53,91
39	98,90	-7,19	91,78	-80,93
40	98,53	-9,75	88,85	-109,11
41	98,17	-12,41	85,82	-138,53
42	97,82	-15,20	82,68	-169,25
43	97,48	-18,11	79,44	-201,36
44	97,17	-21,16	76,08	-234,96
45	96,89	-24,35	72,60	-270,13
46	96,63	-27,69	69,00	-307,00
47	96,41	-31,20	65,26	-345,67
48	96,22	-34,88	61,39	-386,27
49	96,08	-38,75	57,37	-428,94
50	95,98	-42,83	53,20	-473,86
51	95,93	-47,12	48,86	-521,21
52	95,96	-51,66	44,34	-571,23
53	96,07	-56,45	39,64	-624,17
54	96,26	-61,54	34,74	-680,28
55	96,55	-66,95	29,63	-739,89
56	96,95	-72,70	24,27	-803,31
57	97,47	-78,83	18,66	-870,95
58	98,14	-85,39	12,76	-943,29
59	98,97	-92,42	6,55	-1020,88
60	100,00	-100,00	0,00	-1104,45
61				-1166,99
62				-1129,42

Variabili assicurative

$\mathbf{w}_t$: capitali complessivi delle polizze in essere all'inizio dell'esercizio (t,t+1]
$\mathbf{s}_{t+1}$: capitali complessivi delle polizze riscattate all'inizio dell'esercizio (t,t+1]
$\mathbf{z}_{t+1}$: capitali complessivi delle polizze eliminate per decesso alla fine dell'esercizio (t,t+1]
$\mathbf{l}_{x+t}$: numero delle polizze in essere all'inizio dell'esercizio (t,t+1]
$\mathbf{r}_{x+t}$: numero delle polizze riscattate all'inizio dell'esercizio (t,t+1]
$\mathbf{d}_{x+t}$: numero delle polizze eliminate per decesso alla fine dell'esercizio (t,t+1]

Metodi

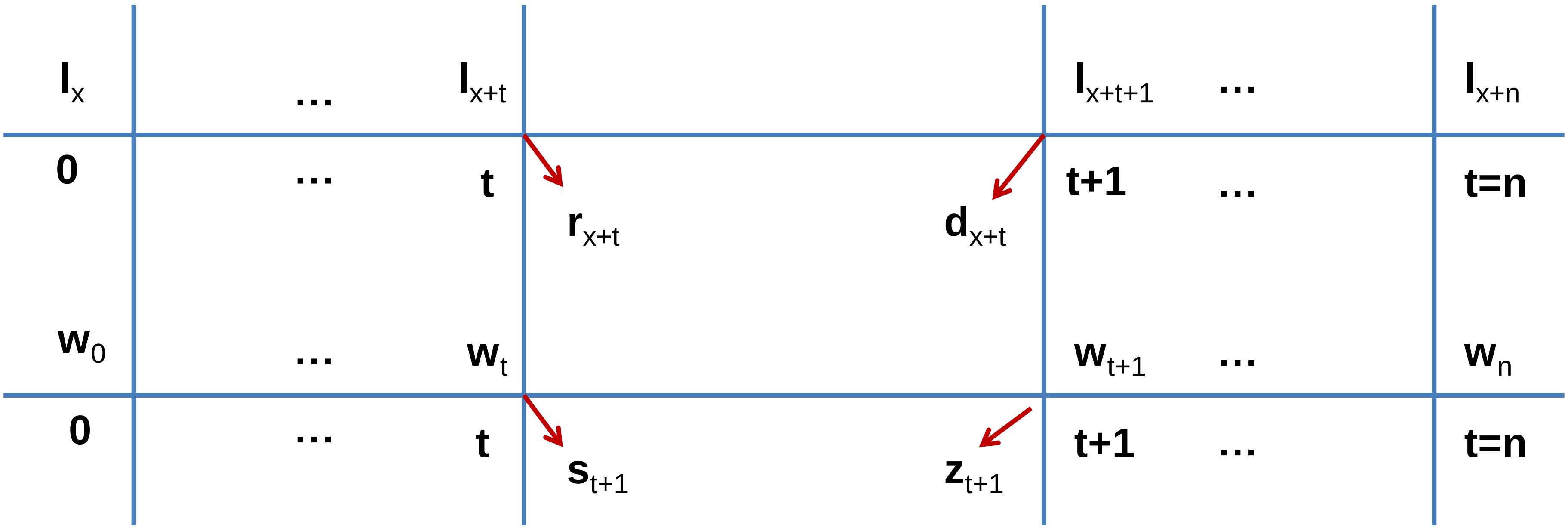
Per valutare le distribuzioni di probabilità delle variabili assicurative:

- Metodo analitico
- Metodo simulativo

Approcci simulativi

a) individuale esatto
b) individuale semplice
c) collettivo

Metodo simulativo



Analisi "one-year ahead"

Relativamente all'esercizio (t,t+1], si considerano noti:

Ipotesi.

i. Il numero delle polizze all'inizio dell'esercizio $\mathbf{l}_{x+t} = l_{x+t}$ e l'ammontare dei capitali assicurati $\mathbf{w}_t = w_t$

ii. L'indice di inflazione $\mathbf{I}_t$;

iii. L'indice di rivalutazione $\mathbf{Q}_t$;

iv. Le variabili finanziarie degli anni precedenti

Analisi "one-year ahead": numero condizionato di abbandoni

Ipotesi.

i. Sia δ il tasso atteso degli abbandoni nell'anno
ii. Il numero condizionato di abbandoni segue distribuzione binomiale

All'inizio dell'esercizio (t,t+1], omettendo gli indici temporali si ha:

$$p_k(\mathbf{r}°) = \Pr(\mathbf{r}°=k) = \binom{l}{k} \cdot \delta^k \cdot (1-\delta)^{l-k}$$

Le funzioni generatrici dei momenti (f.g.m.) e dei cumulanti di **r°** sono:

$$M_{\mathbf{r}°}(t) = E(e^{\mathbf{r}° t}) = [1 - \delta + \delta e^t]^{\,l}$$
$$\log [M_{\mathbf{r}°}(t)] = l \cdot \log[1 - \delta + \delta e^t]$$

Risultano:

Media $= E(\mathbf{r}°) = l \cdot \delta$
Varianza $= \sigma^2(\mathbf{r}°) = l \cdot \delta \cdot (1-\delta)$
Asimmetria $= \nu(\mathbf{r}°) = (1-2\delta) / \sigma(\mathbf{r}°)$

Osservazione $\nu(\mathbf{r}°) > 0$ se $\delta < 50\%$.

Analisi “one-year ahead”: numero condizionato di decessi

Ipotesi.

i. Siano q e δ rispettivamente il tasso atteso di mortalità e degli abbandoni nell’anno

ii. I numeri condizionati di decessi e degli abbandoni segue distribuzione binomiale

All’inizio dell’esercizio (t,t+1], la distribuzione di probabilità di **d** si scrive:

$\Pr(\mathbf{d}°=k) = \sum_{h=0}^{l} [\Pr\{\mathbf{d}°=k \mid \mathbf{r}°=h\}] \cdot \Pr\{\mathbf{r}°=h\}$
$= \sum_{h=0}^{l} [\binom{l-h}{k} \cdot q^k \cdot (1-q)^{l-h-k}] \cdot \binom{l}{h} \cdot \delta^h \cdot (1-\delta)^{l-h}$
$= \binom{l}{k} \cdot [q(1-\delta)]^k \cdot [1 - q(1-\delta)]^{l-k}$

La funzione generatrice dei momenti (f.g.m.) e i principali momenti di **d°** sono:

$M_{\mathbf{d}°}(t) = E(e^{\mathbf{d}°t}) = [1 - q(1-\delta) + q(1-\delta)e^t]^{l}$

Media $= E(\mathbf{d}°) = l \cdot q(1-\delta)$
Varianza $= \sigma^2(\mathbf{d}°) = l \cdot q(1-\delta) \cdot [1-q(1-\delta)]$
Asimmetria $= \nu(\mathbf{d}°) = (1-2q(1-\delta)) / \sigma(\mathbf{d}°)$

Osservazione $\nu(\mathbf{d}°) > 0$ se $q < 50\%$ (età degli assicurati non avanzate)

Analisi "one-year ahead": numero condizionato di sopravviventi

Ipotesi.

i. Siano q e δ rispettivamente il tasso atteso di mortalità e degli abbandoni nell'anno
ii. I numeri condizionati di decessi e degli abbandoni seguono distribuzione binomiale

Il numero di sopravviventi (l - $\mathbf{r}°$ - $\mathbf{d}°$) alla fine dell'esercizio (t,t+1] ha distribuzione:

$$\Pr(l - \mathbf{r}° - \mathbf{d}° = k) = \binom{l}{k} \cdot [\,(1-\delta)\,(1-q)]^k \cdot [1 - (1-\delta)(1-q)])^{l-k}$$

La funzione generatrice dei momenti (f.g.m.) e i principali momenti sono:

$$M_{l-\mathbf{r}°-\mathbf{d}°}(t) = [1 - (1-\delta)\,(1-q) + (1-\delta)\,(1-q)e^t]^{\,l}$$

Media $= E(l - \mathbf{r}° - \mathbf{d}°) = l \cdot (1-\delta)\,(1-q) = l - E(\mathbf{r}° + \mathbf{d}°)$

Varianza $= \sigma^2(l - \mathbf{r}° - \mathbf{d}°) = l \cdot (1-\delta)\,(1-q) \cdot [1 - (1-\delta)\,(1-q)] = \sigma^2(\mathbf{r}° + \mathbf{d}°)$

Asimmetria $= \nu(l - \mathbf{r}° - \mathbf{d}°) = (1 - 2\,(1-\delta)\,(1-q)) \,/\, \sigma(l - \mathbf{r}° - \mathbf{d}°) = -\,\nu(\mathbf{r}° + \mathbf{d}°)$

Analisi "one-year ahead": Approccio individuale esatto

Ipotesi:

i. All'inizio dell'esercizio è noto il vettore delle somme assicurate per ciascuna polizza
ii. La distribuzione dei capitali è aggiornata ad ogni uscita (abbandono/decesso)

Passi di programmazione per ciascun esercizio

1. Simulazione del numero di abbandoni r;
2. Estrazione di r polizze a caso tra quelle in essere e somma dei capitali per ottenere s
3. Aggiornamento del vettore dei capitali, eliminando le r polizze
4. Simulazione del numero dei decessi d
5. Estrazione di d polizze a caso tra quelle in essere e somma per ottenere z
6. Aggiornamento del vettore dei capitali, eliminando le d polizze
7. Rivalutazione dei capitali assicurati delle polizze in essere alla fine dell' esercizio (t,t+1]

Osservazione.

- Il vettore dei capitali alla fine dell'esercizio (t,t+1] costituisce il vettore dei capitali all'inizio dell'esercizio successivo.
- Si associa la distribuzione binomiale alle variabili r e d.

Approccio individuale esatto

Dati primo esercizio - Polizze : {1, 2, …, l = 10}, Vettore Capitali : $\{C_1, C_2, \ldots, C_{10}\}$

Passi di programmazione:

1. Simulazione del numero di abbandoni $r = 3$
2. Estrazione di r polizze a caso tra quelle in essere e somma dei capitali per ottenere s
   - 2.1 Polizze abbandonate : {2, 5, 9}
   - 2,2 Capitali abbandonati: $\{C_2, C_5, C_9\}$
   - 2.3 Capitali complessivi abbandonati: $s = C_2 + C_5 + C_9$
3. Aggiornamento del vettore dei capitali. Polizze in essere: {1, 3, 4, 6, 7, 8, 10}
4. Simulazione del numero dei decessi $d=2$
5. Estrazione di $d=2$ polizze a caso tra quelle in essere e somma per ottenere z
   - 5.1 Polizze eliminate: {1, 8}
   - 5.2 Capitali eliminati: $\{C_1, C_8\}$
   - 5.3 Capitali complessivi eliminati: $z = C_1 + C_8$
6. Aggiornamento del vettore dei capitali. Polizze in essere: {3, 4, 6, 7, 10}
7. Rivalutazione dei capitali assicurati delle polizze in essere alla fine dell’ esercizio
   - 8.1 Vettore capitali rivalutati = $\{C_3, C_4, C_6, C_7, C_{10}\} \times (1+j^c)$
   - 8.2 Capitali complessivi assicurati = $w_1 = (C_3 + C_4 + C_6 + C_7 + C_{10}) \times (1+j^c)$

Approccio individuale esatto

importo condizionato dei capitali delle polizze eliminate per abbandono

Ipotesi.

i. Sia δ il tasso atteso degli abbandoni all'inizio dell'esercizio (t,t+1]

ii. Il numeri condizionato degli abbandoni segue distribuzione binomiale

L'ammontare condizionato dei capitali relativi alle polizze abbandonate risulta:

$$\mathbf{s}° = \sum_{i \in \{\mathbf{r}°\}} C_i = \sum_{i=1}^{l} C_i \cdot \mathbf{u}_i$$

con $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_l$ variabili aleatorie bernulliane , i.i.d., con valore atteso $E\mathbf{u}_i = \delta$

La funzione generatrice dei momenti (f.g.m.) e i momenti principali sono:

$$M_{\mathbf{s}°}(t) = E[e^{\mathbf{s}° \cdot t}] = \prod_{i=1}^{l} (1 - \delta + \delta e^{tC_i})$$

Media $= E(\mathbf{s}°) = l \cdot \delta \cdot E(C) = E(\mathbf{r}°) \cdot E(C)$

Varianza $= \sigma^2(\mathbf{s}°) = l \cdot \delta \cdot (1-\delta) \cdot E(C^2) = l \cdot \delta \cdot (1-\delta) \cdot E^2(C) \cdot r_{2c} = \sigma^2(\mathbf{r}°) \cdot E^2(C) \cdot r_{2c}$

Asimmetria $= \nu(\mathbf{s}°) = (1-2\delta) / [l \cdot \delta \cdot (1-\delta)]^{0,5} \cdot E(C^3) / E(C^2)^{3/2} = \nu(\mathbf{r}°) \cdot r_{3c} / (r_{2c})^{3/2}$

dove: $E(C) = \sum_{i=1}^{l} C_i / l$; $E(C^2) = \sum_{i=1}^{l} C^2_i / l$; $E(C^3) = \sum_{i=1}^{l} C^3_i / l$;

$r_{iC} = E(C^i) / E(C)^i$: indice di rischio di ordine i-esimo della distribuzione dei capitali

Approccio individuale esatto

importo condizionato dei capitali delle polizze eliminate per decesso

Ipotesi.

i. Siano q e δ rispettivamente il tasso atteso di mortalità e degli abbandoni nell'anno
ii. I numeri condizionati dei decessi e degli abbandoni seguono distribuzione binomiale

L'ammontare condizionato dei capitali relativi alle polizze eliminate per decesso risulta:

$$\mathbf{z}° = \sum_{i \in \{\mathbf{d}°\}} C_i = \sum_{i=1}^{l} C_i \cdot \mathbf{u}'_i$$

con $\mathbf{u}'_1$, $\mathbf{u}'_2$, …, $\mathbf{u}'_l$ variabili aleatorie bernulliane , i.i.d., con valore atteso $E\mathbf{u}'_i = q(1-\delta)$

La funzione generatrice dei momenti (f.g.m.) e i momenti principali sono:

$$M_{\mathbf{z}°}(t) = E[e^{\mathbf{z}° \cdot t}] = \prod_{i=1}^{l} (1 - q(1-\delta) + q(1-\delta)e^{tC_i})$$

Media $= E(\mathbf{z}°) = l \cdot q(1-\delta) \cdot E(C) = E(\mathbf{d}°) \cdot E(C)$

Varianza $= \sigma^2(\mathbf{z}°) = l \cdot q(1-\delta)[1- q(1-\delta)] \cdot E^2(C) \cdot r_{2c} = \sigma^2(\mathbf{d}°) \cdot E^2(C) \cdot r_{2c}$

Asimmetria $= \nu(\mathbf{z}°) = (1-2\, q(1-\delta)) / [l\, q(1-\delta)(1- q(1-\delta))]^{0,5} \cdot r_{3c} \,/\, r_{2c}^{\;3/2} = \nu(\mathbf{d}°) \cdot r_{3c} / (r_{2c})^{3/2}$

Approccio individuale esatto

importo condizionato dei capitali delle polizze in essere alla fine dell'esercizio

Ipotesi.

i. Siano q e δ rispettivamente il tasso atteso di mortalità e degli abbandoni nell'anno
ii. I numeri condizionati dei decessi e degli abbandoni seguono distribuzione binomiale

L'ammontare condizionato dei capitali relativi alle polizze in essere alla fine dell'esercizio risulta:

$$\mathbf{w}° = \sum_{i=1}^{l} C_i \cdot \mathbf{u}''_i = w_t - \mathbf{s}° - \mathbf{z}°$$

con $\mathbf{u}''_1$, $\mathbf{u}''_2$, …, $\mathbf{u}''_l$ variabili aleatorie bernulliane , i.i.d., con valore atteso $E\mathbf{u}_i = (1\text{-}q)(1\text{-}\delta)$

La funzione generatrice dei momenti (f.g.m.) e i momenti principali sono:

$M_{\mathbf{w}°}(t) = E[e^{\mathbf{w}° \cdot t}] = \prod_{i=1}^{l} \{1\text{-}[1\text{-} (1\text{-}q)(1\text{-}\delta)] + (1\text{-}q)(1\text{-}\delta)e^{tC_i}\}$

Media	$= E(\mathbf{w}°) = l \cdot (1\text{-}q)(1\text{-}\delta) \cdot E(C) = [l - E(\mathbf{r}°+\mathbf{d}°)] \cdot E(C)$
Varianza	$= \sigma^2(\mathbf{w}°) = l \cdot (1\text{-}q)(1\text{-}\delta)[1\text{-} (1\text{-}q)(1\text{-}\delta)] \cdot E^2(C) \cdot r_{2c} = \sigma^2(\mathbf{r}° + \mathbf{d}°) \cdot E^2(C) \cdot r_{2c}$
Asimmetria	$= \nu(\mathbf{w}°) = - \nu(\mathbf{r}°+\mathbf{d}°) \cdot r_{3c} / E(r_{2c})^{3/2}$

Osservazione. La distribuzione iniziale delle somme assicurate influenza attraverso gli indici di rischio solo il valore dell'asimmetria ma non il suo segno.

Approccio individuale esatto

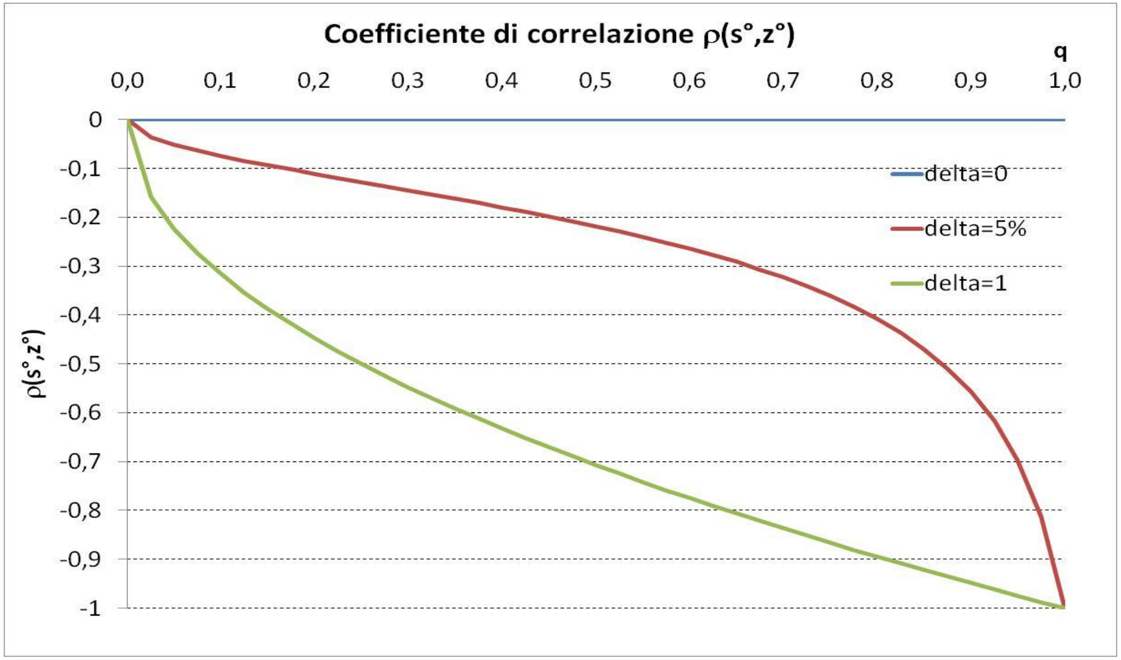
Coefficienti di correlazione lineare

Ipotesi.

i. Siano q e δ rispettivamente il tasso atteso di mortalità e degli abbandoni nell'anno

ii. I numeri condizionati dei decessi e degli abbandoni seguono distribuzione binomiale

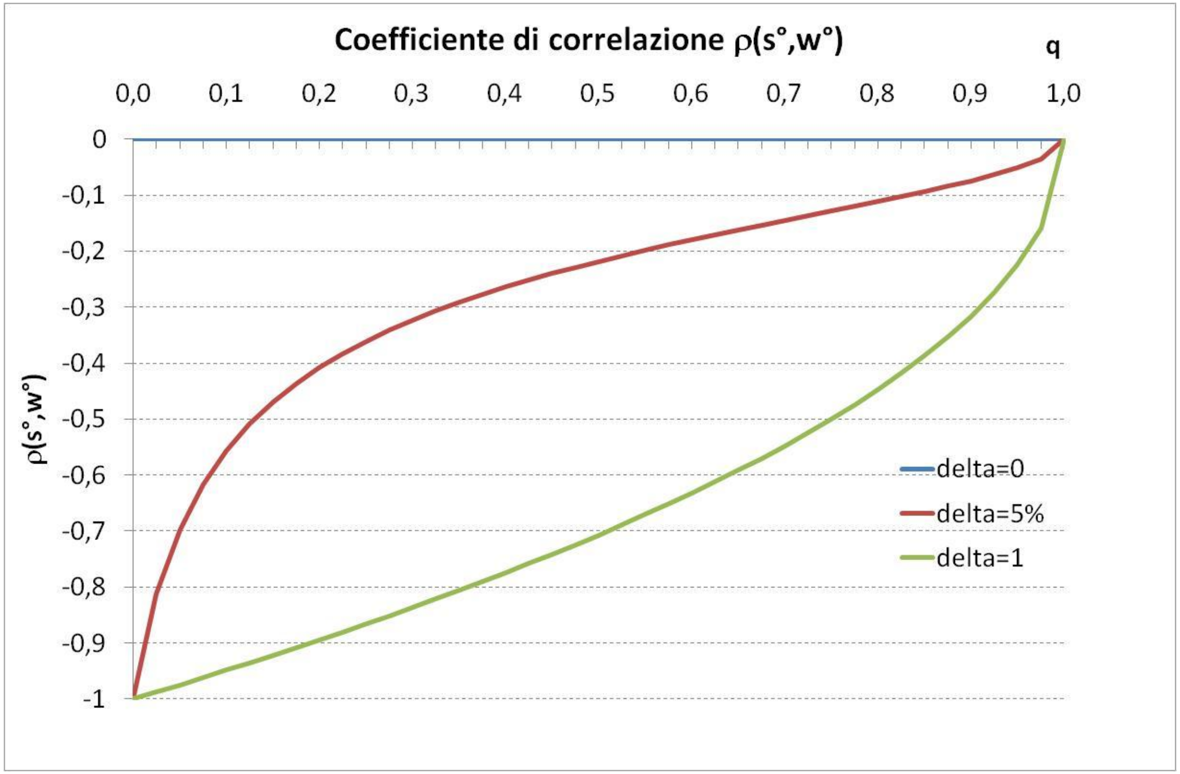
$$\rho(\mathbf{s}^\circ,\mathbf{z}^\circ)=\frac{\sigma(\mathbf{s}^\circ,\mathbf{z}^\circ)}{\sigma(\mathbf{s}^\circ)\sigma(\mathbf{z}^\circ)}=\frac{-q\sigma^2(\mathbf{s}^\circ)}{\sigma(\mathbf{s}^\circ)\sigma(\mathbf{z}^\circ)}-\sqrt{\frac{\delta q}{1-q(1-\delta)}}:\begin{cases}-1, & q=1\\ <0, & q<1\\ 0, & q=0;\delta=0\end{cases}$$



Approccio individuale esatto

Coefficienti di correlazione lineare

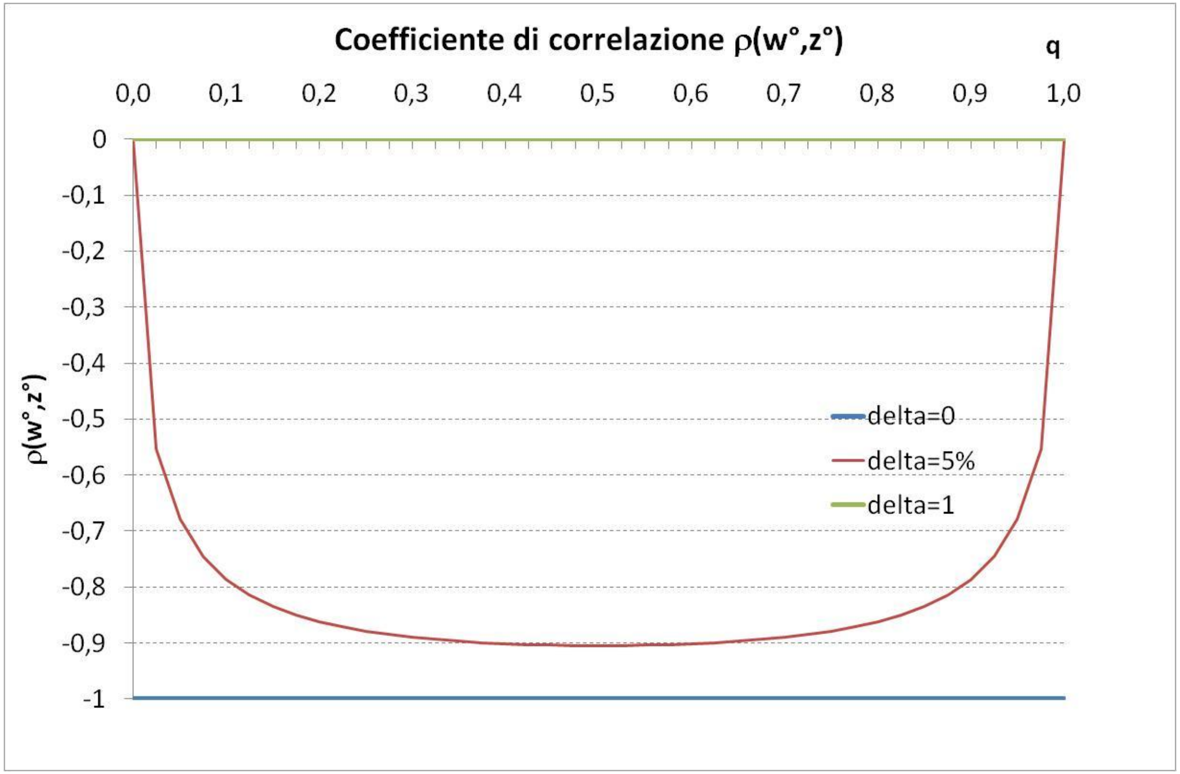
$$\rho(\mathbf{s}^\circ,\mathbf{w}^\circ)=\frac{\sigma(\mathbf{s}^\circ,\mathbf{w}^\circ)}{\sigma(\mathbf{s}^\circ)\sigma(\mathbf{w}^\circ)}=-\sqrt{\frac{\delta(1-q)}{\delta+q(1-\delta)}}:\begin{cases}-1, & q=0\\ <0, & q<1\\ 0, & q=1;\delta=0\end{cases}$$



Approccio individuale esatto

Coefficienti di correlazione lineare

$$\rho(\mathbf{w}^\circ,\mathbf{z}^\circ)=\frac{\sigma(\mathbf{w}^\circ,\mathbf{z}^\circ)}{\sigma(\mathbf{w}^\circ)\sigma(\mathbf{z}^\circ)}=-\sqrt{\frac{1}{1+\delta/[q(1-\delta)(1-\delta)^2]}}:\begin{cases}-1, & \delta=0\\ <0, & q<1\\ 0, & q=0;q=1\\ 0, & \delta=1\end{cases}$$



Approccio individuale semplice

Ipotesi:

i. La distribuzione iniziale dei capitali assicurati è descritta da una distribuzione teorica
ii. La forma della distribuzione teorica è invariante (a meno delle rivalutazioni)

Passi di programmazione per ciascun esercizio

1. Simulazione del numero di abbandoni r;
2. Generazione di r importi singoli dalla distribuzione teorica dei capitali per ottenere s
3. Simulazione del numero dei decessi d
4. Generazione di d importi singoli dalla distribuzione teorica dei capitali per ottenere z
5. « Modifica » della distribuzione teorica dei capitali alla fine dell' esercizio (t,t+1]

Osservazione.

- La modifica della distribuzione teorica dei capitali al termine dell'esercizio consiste nell'applicazione dell'eventuale fattore di rivalutazione dei capitali assicurati. La « forma » della distribuzione non cambia (così come coefficiente di variazione e asimmetria), mentre cambiano media e varianza dei capitali.
- Si associa la distribuzione binomiale alle variabili r e d.

Approccio individuale semplice

Dati primo esercizio - Polizze : {1, 2, …, $l = 10$}, Vettore Capitali : {C_1, C_2, …, C_{10}}

Ipotesi: La distribuzione effettiva dei capitali è rappresentabile con la funzione teorica G_C le cui caratteristiche principali, a_{1c}, σ^2_c, ν_c , sono ricavate dal vettore dei capitali iniziali.

Passi di programmazione:

1. Simulazione del numero di abbandoni $r = 3$
2. Estrazione casuale di $r=3$ polizze e generazione dei relativi capitali assicurati dalla distribuzione teorica G_C per ottenere s
    - 2.1 Polizze abbandonate : {(1), (2), …, (r=3)}
    - 2.2 Capitali abbandonati: {$C_{(1)}$, $C_{(2)}$, …, $C_{(r=3)}$}
    - 2.3 Capitali complessivi abbandonati: $s = C_{(1)} + C_{(2)} + \ldots + C_{(r=3)}$

3. Simulazione del numero dei decessi $d=2$
4. Estrazione casuale di $d=2$ polizze e generazione dei relativi capitali assicurati dalla distribuzione teorica G_C per ottenere z
    - 4.1 Polizze eliminate: {(1), (d=2)}
    - 4.2 Capitali eliminati: {$C_{(1)}$, $C_{(2)}$}
    - 4.3 Capitali complessivi eliminati: $z = C_{(1)} + C_{(2)}$

5. Rivalutazione dei capitali assicurati alla fine dell' esercizio
    - 8.1 $w_1 = (l - r° - d°) \cdot a_{1c} \cdot (1+j^c)$

Approccio individuale semplice: analisi "one-year ahead"

importo condizionato dei capitali delle polizze eliminate per abbandono

Ipotesi.

i. Sia δ il tasso atteso degli abbandoni all'inizio dell'esercizio (t,t+1]
ii. Il numeri condizionato degli abbandoni segue distribuzione binomiale
iii. I capitali assicurati sono v.a. i.i.d secondo la funzione G_c

L'ammontare condizionato dei capitali relativi alle polizze abbandonate risulta:

$$\mathbf{s}° = \sum_{i \in \{\mathbf{r}°\}} \mathbf{C}_i = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \ldots + \mathbf{C}_{\mathbf{r}°}$$

La funzione generatrice dei momenti (f.g.m.) e i momenti principali sono:

$$M_{\mathbf{s}°}(t) = E[e^{\mathbf{s}° \cdot t}] = \sum_{k=0}^{l} [\binom{l}{k} q^k (1-q)^{l-k}] \cdot [M_{\mathbf{C}}(t)]^k = [1 - q + q \cdot M_{\mathbf{C}}(t)]^l$$

Media $= E(\mathbf{s}°) = l \cdot \delta \cdot a_{1c}$

Varianza $= \sigma^2(\mathbf{s}°) = l \cdot \delta \cdot (1-\delta) \cdot a_{2c} + l \cdot \delta^2 \cdot \sigma^2_c$

Asimmetria $= \nu(\mathbf{s}°) = (r_{3c} - 3\delta r_{2c} + 2\delta^2) / [l \cdot \delta \cdot (r_{2c} - \delta)^3]^{0,5}$

dove: a_{1c} e σ^2_c indicano la media e la varianza della distribuzione teorica capitali

$r_{iC} = a_{ic} / (a_{1c})^i$: indice di rischio di ordine i-esimo della distribuzione teorica dei capitali

Approccio individuale semplice: analisi "one-year ahead"

importo condizionato dei capitali delle polizze eliminate per decesso

Ipotesi.

i. Siano q e δ rispettivamente il tasso atteso di mortalità e degli abbandoni nell'anno
ii. I numeri condizionati dei decessi e degli abbandoni seguono distribuzione binomiale
iii. I capitali assicurati sono v.a. i.i.d secondo la funzione G_c

L'ammontare condizionato dei capitali risulta:

$$\mathbf{z}^\circ = \sum_{i \in \{\mathbf{d}^\circ\}} \mathbf{C}_i = \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 + \dots + \mathbf{C}_{\mathbf{d}^\circ}$$

La funzione generatrice dei momenti (f.g.m.) e i momenti principali sono:

$$M_{\mathbf{z}^\circ}(t) = E[e^{\mathbf{z}^\circ \cdot t}] = \sum_{k=0}^{l} \{\binom{l}{k} \cdot [q(1-\delta)^k] \cdot [1-q(1-\delta)]^{l-k} \cdot [M_{\mathbf{C}}(t)]^k\} = [1-q(1-\delta) + q(1-\delta) \cdot M_{\mathbf{C}}(t)]^l$$

Media $= E(\mathbf{z}^\circ) = l \cdot q(1-\delta) \cdot a_{1c}$

Varianza $= \sigma^2(\mathbf{z}^\circ) = l \cdot q(1-\delta) \cdot [1-q(1-\delta)] \cdot a_{2c} + l \cdot [q(1-\delta)]^2 \cdot \sigma^2_c$

Asimmetria $= \nu(\mathbf{z}^\circ) = (r_{3c} - 3q(1-\delta)r_{2c} + 2[q(1-\delta)]^2) / [l \cdot q(1-\delta) \cdot (r_{2c} - q(1-\delta))^3]^{0,5}$

dove: a_{1c} e σ^2_c indicano la media e la varianza della distribuzione teorica capitali

$r_{iC} = a_{ic} / (a_{1c})^i$: indice di rischio di ordine i-esimo della distribuzione teorica dei capitali

Approccio individuale semplice: analisi “one-year ahead”

importo condizionato dei capitali delle polizze in essere alla fine dell’esercizio

Ipotesi.

i. Siano q e δ rispettivamente il tasso atteso di mortalità e degli abbandoni nell’anno
ii. I numeri condizionati dei decessi e degli abbandoni seguono distribuzione binomiale
iii. I capitali assicurati sono v.a. i.i.d secondo la funzione G_c

L’ammontare condizionato dei capitali risulta:

$\mathbf{w}° = (l - \mathbf{r}° - \mathbf{d}°) \cdot a_{1c}$

I momenti principali sono:

Media $= E(\mathbf{w}°) = [l - E(\mathbf{r}° + \mathbf{d}°)] \cdot a_{1c}$
Varianza $= \sigma^2(\mathbf{w}°) = \sigma^2(\mathbf{r}° + \mathbf{d}°) \cdot a^2_{1c}$
Asimmetria $= \nu(\mathbf{w}°) = - \nu(\mathbf{r}° + \mathbf{d}°)$

dove: a_{1c} indica la media della distribuzione teorica capitali

Approccio collettivo

Ipotesi:

i. La generazione consiste di un numero elevato di polizze
ii. La distribuzione iniziale dei capitali può essere rappresentata con una distribuzione teorica (invariante nel tempo)
iii. Le funzioni di distribuzione dei capitali assicurati relativi alle polizze eliminate o decedute sono approssimabili mediante formule particolari.

Passi di programmazione per ciascun esercizio

1. Simulazione del numero di abbandoni r;
2. Generazione di 1 importo dalla distribuzione teorica dei capitali per ottenere s
3. Simulazione del numero dei decessi d
4. Generazione di 1 importo dalla distribuzione teorica dei capitali per ottenere z
5. « Modifica » della distribuzione teorica dei capitali alla fine dell' esercizio (t,t+1]

Osservazione.

- L'approccio è necessario nel caso di distribuzioni di capitali a « coda lunga »
- Si associa la distribuzione teorica di Poisson alle variabili r e d.

Approccio collettivo

Dati primo esercizio - Polizze : {1, 2, …, l = 10}, Vettore Capitali : $\{C_1, C_2, \dots, C_{10}\}$

Ipotesi:

i. La distribuzione effettiva dei capitali è rappresentabile con la funzione teorica G_C le cui caratteristiche principali, a_{1c}, $\sigma^2{}_c$, ν_c , sono ricavate dal vettore dei capitali iniziali.

ii. Abbandoni e decessi si distribuiscono come v.a. Poisson.

Passi di programmazione:

1. Simulazione del numero di abbandoni $r = 3$
2. Generazione di n.1 importo di capitale complessivo assicurato dalla distribuzione teorica G_C per ottenere s
3. Simulazione del numero dei decessi $d=2$
4. Generazione di n.1 importo di capitale complessivo assicurato dalla distribuzione teorica G_C per ottenere z
5. Rivalutazione dei capitali assicurati alla fine dell' esercizio: $w_1 = (l - r° - d°) \cdot a_{1c} \cdot (1+j^c)$

Confronto degli approcci

1. Gli approcci individuali conducono agli stessi valori medi delle variabile **s**°, **z**°, **w**°.
2. L'approccio individuale semplice sovrastima gli s.q.m. delle v.a. **s**°, **z**°, rispetto ai valori forniti dall'approccio individuale esatto; lo s.q.m. di **w**° è sottostimato.

3. Gli approcci individuali forniscono valutazioni discostanti in un analisi pluriennale.

4. L'approccio collettivo può fornire buone valutazioni se la variabilità e l'asimmetria della distribuzione iniziale delle somme assicurate non sono elevate.

5. Quando gli errori di approssimazione sono trascurabili, la scelta di uno dei tre approcci dipende dai tempi di elaborazione richiesti.

6. Gli errori di approssimazione dovuti ai tre metodi sono trascurabili rispetto agli errori che si possono determinare per effetto di una errata ponderazione delle variabili economico – finanziarie di gestione.

Osservazione. Alla base dell'approccio collettivo risiede l'ipotesi che le funzioni di distribuzione dei capitali abbandonati e dei capitali relativi alle polizze eliminate per decesso siano <u>approssimabili mediante opportune formule</u>.

Formule di approssimazione della funzione di distribuzione

Se **X** è una v.a. non simmetrica, si considera la v.a. ausiliare:

y = v(**X**)

dove *v* è una opportuna funzione di trasformazione capace di rendere la distribuzione della v.a. **y** approssimativamente simmetrica e standardizzata.

1° Caso

A) Noto X, si vuole approssimare F(X) = Pr(**X** ≤ X) ~ Normale non standardizzata. Per ottenere una valutazione approssimata della probabilità F(X) , si sceglie

$$v(X) = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

in modo tale che F(X) ~ N[v(X)], con N ~ Normale Standardizzata. Quindi si utilizzano le tavole della Normale Standardizzata.

B) Se conosco F(X), per ottenere la determinazione X della v.a., pongo F(X) = N[v(X)] calcolo l'inversa della funzione di distribuzione N:

$$v(X) = N^{-1}(.)$$

Ricavo: $\boxed{X = \mu_X + v(X) \cdot \sigma_X}$

2° Caso (simmetrizzazione)

Se F(x) = Pr(**X** ≤ X) ~ Distribuzione non standardizzata e non simmetrica, si applica una trasformazione in modo da ottenere una v.a. **y** = v(**X**) standardizzata e simmetrica, quindi tale che:

F(**X**) ≈ N(**y**)

2.1 Approssimazione Normal Power

A) Sia **y** = v(**X**). Noto X, si vuole approssimare F(X) = Pr(**X** ≤ X). Quindi si sceglie la funzione di trasformazione in modo che la sua inversa sia un polinomio di secondo grado:

$$v^{-1}(y) = y + \frac{v_X}{6}(y^2 - 1), \qquad X > \mu_X$$

$$x = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} = y + \frac{v_X}{6}(y^2 - 1) \quad \longrightarrow \quad y^2 + \frac{6}{v_X} \cdot y - \left(1 + \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \cdot \frac{6}{v_X}\right) = 0$$

$$y = -\frac{3}{v_X} \pm \sqrt{1 + \frac{9}{v_X^2} + \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \cdot \frac{6}{v_X}}$$

$$\boxed{F(X) \approx N(v(X)) = N\left[-\frac{3}{v_X} + \sqrt{1 + \frac{9}{v_X^2} + \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \cdot \frac{6}{v_X}}\right]}$$

B) Viceversa, noto F(X) ~ N[v(X)], si vuole determinare X. Quindi invertiamo per ricavare v(X)

$y = v(X) = N^{-1}[.]$

Si pone

$$\frac{X-\mu_X}{\sigma_X} = y + \frac{v_X}{6}(y^2-1)$$

da cui:

$$X = \mu_X + \left[y + \frac{v_X}{6}(y^2-1) \right] \cdot \sigma_X,$$

Osservazione. Vale per la coda destra di **X** e per $0 \leq v_X < 1$.

2.2 Approssimazione Wilson-Hilferty

A) Sia **y** = v(**X**). Noto X, si vuole approssimare F(X) = Pr(**X** ≤ X). Quindi si sceglie la funzione di trasformazione:

$$y = v(x) = c_1 + c_2 \cdot (x + c_3)^{\frac{1}{3}}$$

$$c_1 = \frac{1}{3g} - 3g, \quad c_2 = 3g^{\frac{2}{3}}, \quad c_3 = g, \quad g = \frac{2}{v_X}, \quad x = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

Poniamo $\boxed{F(X) \approx N[y] = N\left[c_1 + c_2 \cdot (x + c_3)^{\frac{1}{3}} \right]}$

B) Viceversa, noto F(X) = Pr(**X** ≤ X), si voglia determinare X.

Si cerca N[v(x)] = F(X) e si ricava y = v(x). Poniamo: $y = c_1 + c_2 \cdot (x + c_3)^{\frac{1}{3}}$

Ricaviamo: $x = \left(\frac{1}{c_2} \right)^3 \cdot (y - c_1)^3 - c_3$

Da cui: $X = \mu_X + x \cdot \sigma_X,$

Osservazione. Si applica per valori di asimmetria $0 \le v_X \le 1{,}2$.

La distribuzione dell'utile di mortalità (approccio individuale esatto)

$_1\mathbf{y}^\circ_{t+1} = D^b_{t+1}\,[q^*_{x+t}\,(w_t - \mathbf{s}^\circ_{t+1}) - \mathbf{z}^\circ_{t+1}]\,Q_t$

L'utile di mortalità atteso risulta:

$E(_1\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = D^b_{t+1}\,[q^*_{x+t}\,(l\cdot E(C) - E(\mathbf{s}^\circ_{t+1}) - E(\mathbf{z}^\circ_{t+1})]\,Q_t$
$= D^b_{t+1}\,[q^*_{x+t}\,(l\cdot E(C) - l\cdot\,\delta\cdot E(C)) - l\cdot\,q_{x+t}\,(1\text{-}\delta)\cdot E(C)]\,Q_t$
$= D^b_{t+1}\,[q^*_{x+t}\cdot l\cdot E(C)\cdot(1\text{-}\,\delta) - l\cdot\,q_{x+t}\,(1\text{-}\delta)\cdot E(C)]\,Q_t$
$= D^b_{t+1}\cdot l\cdot E(C)\cdot(1\text{-}\,\delta)\cdot(q^*_{x+t} - q_{x+t})]\,Q_t$
$= D^b_{t+1}\cdot l\cdot\,q_{x+t}\cdot E(C)\cdot(1\text{-}\,\delta)\cdot(q^*_{x+t} - q_{x+t})/\,q_{x+t}]\,Q_t$
$= \lambda D^b_{t+1}\,E(\mathbf{z}^\circ_{t+1})\,Q_t$

dove: $\lambda = (q^*_{x+t} - q_{x+t})/\,q_{x+t}$ misura il tasso di caricamento di sicurezza demografico.

Osservazione. Il segno dell'utile atteso dipende dal prodotto λD^b_{t+1}

a) Per le Temporanee e le miste, $D^b_{t+1} > 0$, affinché $E(_1\mathbf{y}^\circ_{t+1}) > 0$, occorre $\lambda > 0$
b) Per i capitali differiti e le rendite, $D^b_{t+1} < 0$, affinché $E(_1\mathbf{y}^\circ_{t+1}) > 0$, quindi occorre $\lambda < 0$

La distribuzione dell'utile di mortalità (approccio individuale esatto)

La varianza dell'utile di mortalità risulta:

$\sigma^2({}_1\mathbf{y}°_{t+1}) = \mathrm{var}\{D^b_{t+1}\,[q^*_{x+t}\,(w_t - \mathbf{s}°_{t+1}) - \mathbf{z}°_{t+1}]\; Q_t\}$

$= (D^b_{t+1})^2 \cdot [q^{2*}_{x+t}\,\sigma^2(\mathbf{s}°_{t+1}) + \sigma^2(\mathbf{z}°_{t+1}) + 2\,\sigma(q^*_{x+t}\mathbf{s}°_{t+1}, \mathbf{z}°_{t+1})]\; Q^2_t$

$= (D^b_{t+1})^2 \cdot [q^{2*}_{x+t}\,\sigma^2(\mathbf{s}°_{t+1}) + \sigma^2(\mathbf{z}°_{t+1}) - 2q_{x+t}q^*_{x+t}\,\sigma^2(\mathbf{s}°_{t+1})]\; Q^2_t$

$= (D^b_{t+1})^2 \cdot [\sigma^2(\mathbf{z}°_{t+1}) - \sigma^2(\mathbf{s}°_{t+1})(2q_{x+t} - q^*_{x+t})\, q^*_{x+t}]\; Q^2_t$

Trasformando il fattore $(2q_{x+t} - q^*_{x+t}) \cdot q^*_{x+t} = (2q_{x+t} - q^*_{x+t})/\, q^2_{x+t} \cdot q^*_{x+t} \cdot q^2_{x+t}$

$= [1 - (q^*_{x+t} - q_{x+t})/\, q_{x+t}] \cdot [1 + (q^*_{x+t} - q_{x+t})/\, q_{x+t}] \cdot q^2_{x+t} = (1 - \lambda^2)\, q^2_{x+t}$

Si ottiene la formula della varianza:

$\sigma^2({}_1\mathbf{y}°_{t+1}) = (D^b_{t+1})^2 \cdot [\sigma^2(\mathbf{z}°_{t+1}) - (1 - \lambda^2)\, q^2_{x+t}\,\sigma^2(\mathbf{s}°_{t+1})]\; Q^2_t$

Osservazione. Quando sia trascurabile il fattore q^2_{x+t}, ovvero gli abbandoni ($\delta \approx 0$), si ha

$\sigma^2({}_1\mathbf{y}°_{t+1}) \approx (D^b_{t+1})^2 \cdot \sigma^2(\mathbf{z}°_{t+1}) \cdot Q^2_t = (D^b_{t+1})^2 \cdot \sigma^2(\mathbf{d}°_{t+1}) \cdot E(C)^2 \cdot r_{2c} \cdot Q^2_t$

Osservazione. Quando siano trascurabili gli abbandoni ($\delta \approx 0$), l'indice di asimmetria dipende solo dalla forma assicurativa (posto che $q_{x+t} < 50\%$):

$\nu({}_1\mathbf{y}°_{t+1}) \approx -\,\nu(\mathbf{z}°_{t+1})$ se $D^b_{t+1} > 0$ (Tcm e miste)

$\nu({}_1\mathbf{y}°_{t+1}) \approx \nu(\mathbf{z}°_{t+1})$ se $D^b_{t+1} < 0$ (capitali differiti e rendite)

La distribuzione dell'utile finanziario (approccio individuale esatto)

$_4\mathbf{y}^\circ_{t+1} = (\mathbf{j}^\circ_{t+1} - j^*)\ [v^b_t\, w_t + b_{t+1}\, (1 - \alpha^* - \beta^*)\, (w_t - \mathbf{s}^\circ_{t+1}) - \gamma^*\, w_t - g_t\, v^z_t\, \mathbf{s}^\circ_{t+1}]\ Q_t$

posto:

$_4A_{t+1} = [v^b_t\, w_t + b_{t+1}\, (1 - \alpha^* - \beta^*) - \gamma^*]$

$_4A'_{t+1} = [b_{t+1}\, (1 - \alpha^* - \beta^*) + g_t\, v^z_t\,]$

si ha: $_4\mathbf{y}^\circ_{t+1} = (\mathbf{j}^\circ_{t+1} - j^*) \cdot [_4A_{t+1} \cdot w_t - {_4A'_{t+1}} \cdot \mathbf{s}^\circ_{t+1}]\ Q_t$

L'utile finanziario atteso e la varianza risultano:

$E(_4\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = [E(\mathbf{j}^\circ_{t+1}) - j^*] \cdot [_4A_{t+1} \cdot w_t - {_4A'_{t+1}} \cdot E(\mathbf{s}^\circ_{t+1})] \cdot Q_t$

$\sigma^2(_4\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = \{[_4A_{t+1} \cdot w_t - {_4A'_{t+1}} \cdot E(\mathbf{s}^\circ_{t+1})]^2 \cdot \sigma^2(\mathbf{j}^\circ_{t+1}) + [\sigma^2(\mathbf{j}^\circ_{t+1}) + (E(\mathbf{j}^\circ_{t+1}) - j^*)^2] \cdot {_4A'^2_{t+1}}\, \sigma^2(\mathbf{s}^\circ_{t+1})\} \cdot Q^2_t$

Se gli abbandoni sono trascurabili ($\delta \approx 0$), si ha:

$E(_4\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = [E(\mathbf{j}^\circ_{t+1}) - j^*] \cdot \{_4A_{t+1} \cdot w_t \cdot Q_t\}$

$\sigma^2(_4\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = \sigma^2(\mathbf{j}^\circ_{t+1}) \cdot \{_4A_{t+1} \cdot w_t \cdot Q_t\}^2$

$\nu(_4\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = \nu(\mathbf{j}^\circ_{t+1})$

La distribuzione dell'utile assicurativo per una generazione (approccio individuale esatto)

Per l'utile assicurativo di una generazione di polizze si ha:

$$\mathbf{y}^{\circ}_{t+1} = {}_{1}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1} + {}_{2}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1} + {}_{3}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1} + {}_{4}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1} + {}_{5}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1}$$

L'utile atteso risulta:

$$E(\mathbf{y}^{\circ}_{t+1}) = E({}_{1}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1}) + E({}_{2}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1}) + E({}_{3}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1}) + E({}_{4}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1}) + E({}_{5}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1})$$

E la varianza

$$\sigma^2(\mathbf{y}^{\circ}_{t+1}) = \sum^{5}_{i=1} \sigma^2({}_{i}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1}) + \sum^{5}_{i=1} \sum^{5}_{h\neq i} \sigma({}_{i}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1}, {}_{h}\mathbf{y}^{\circ}_{t+1})$$

Formule semplificate per valutazioni approssimate si possono ricavare nel caso di scarsa frequenza degli abbandoni.

Esempio: calcolo dell’utile di mortalità

Dati:

$x = 35$

$m = 25$

$t = 10$

$l_{x+t} = 25000$

$q^*_{x+t} = 0,0045$

$q_{x+t} = 0,003$

$C = 1$

$\delta = 4\%$

$Q = 1$

$(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*; b)$: (65%, 5%, 0,07%; 0,6461%), temporanea caso morte

$(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*; b)$: (80%, 5%, 0,25%; 2,5351%), capitale differito

$(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*; b)$: (80%, 5%, 0,3%; 3,1659%), mista semplice

Esempio: calcolo dell'utile di mortalità

Il tasso lordo di capitale sotto rischio, a seconda della generazione, risulta:

$D^b_{t+1} = 1 – (v_{t+1} + v^e_{t+1})$

$D^b_{t+1} = 1 – 0{,}03365 = 0{,}96635$: temporanea

$D^b_{t+1} = 1 – 0{,}31001 = 0{,}68999$: mista

$D^b_{t+1} = – 0{,}27694$: capitale differito

$D^b_{t+1} = – 3{,}07002$: rendita

Inoltre, poiché

$r_{x+t} = 4\% \cdot l_{x+t} = 4\% \cdot 25000 = 1000$

$d_{x+t} = 0{,}003 \cdot (l_{x+t} - r_{x+t}) = 72$

$q^*_{x+t} (l_{x+t} – \mathbf{r}°_{t+1}) = 0{,}0045 \cdot (25000 - 1000) = 108$

L'utile di mortalità, a seconda della generazione, risulta:

${}_1\mathbf{y}°_{t+1} = D^b_{t+1} [q^*_{x+t} (l_{x+t} – \mathbf{r}°_{t+1}) – \mathbf{d}°_{t+1}] Q_t$

${}_1\mathbf{y}°_{10+1} = 0{,}96635 \cdot (108 – 72) = 34{,}79$: temporanea

${}_1\mathbf{y}°_{10+1} = 0{,}68999 \cdot (108 – 72) = 24{,}84$: mista

${}_1\mathbf{y}°_{10+1} = -0{,}27694 \cdot (108 – 72) = -9{,}97$: capitale differito

${}_1\mathbf{y}°_{10+1} = -3{,}07002 \cdot (108 – 72) = -110{,}52$: rendita

Esempio: calcolo dei momenti dell'utile di mortalità e dell'utile finanziario

Dati:

$x = 35$

$m = 25$

$t = 10$

$l_{x+t} = 25000$

$q^*_{x+t} = 0{,}0045$; $q_{x+t} = 0{,}003$

$\lambda = (q^*_{x+t}/\ q_{x+t}) - 1 = +50\%$

$j^* = 4\%$;

$E(\mathbf{j}°_{t+1}) = 5\%$; $\sigma(\mathbf{j}°_{t+1}) = 0{,}8\%$; $\nu(\mathbf{j}°_{t+1}) = +0{,}8$

$C \neq 1$; $E(C) = 1$

$r_{2c} = 1{,}28$

$r_{3c} = 1{,}98$

$\delta = 0$

$Q = 1$

$(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*; b)$: (65%, 5%, 0,07%; 0,6461%), temporanea caso morte

$(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*; b)$: (80%, 5%, 0,25%; 2,5351%), capitale differito

$(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*; b)$: (80%, 5%, 0,3%; 3,1659%), mista semplice

Esempio: calcolo dei momenti dell'utile di mortalità e dell'utile finanziario

L'utile di mortalità risulta:

$${}_1\mathbf{y}^\circ_{t+1} = D^b_{t+1} [q^*_{x+t} w_t - \mathbf{z}^\circ_{t+1}] Q_t$$

con:

$$E({}_1\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = \lambda D^b_{t+1} E(\mathbf{z}^\circ_{t+1})$$
$$\sigma^2({}_1\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = (D^b_{t+1})^2 \sigma^2(\mathbf{z}^\circ_{t+1})$$
$$\nu({}_1\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = -/+ \nu(\mathbf{z}^\circ_{t+1})$$

L'unica variabile aleatoria è l'importo dei capitali pagati per decesso, con le seguenti caratteristiche:

$$E(\mathbf{z}^\circ_{x+t}) = l_{x+t} \cdot q_{x+t} \cdot E(C) = 25000 \cdot 0{,}003 \cdot 1 = 75$$
$$\sigma^2(\mathbf{z}^\circ_{x+t}) = l_{x+t} \cdot q_{x+t} [1- q_{x+t}] \cdot E^2(C) \cdot r_{2c} = 25000 \cdot 0{,}003 \cdot 0{,}997 \cdot 1 \cdot 1{,}28 = (9{,}783)^2$$
$$\nu(\mathbf{z}^\circ_{x+t}) = (1-2\, q_{x+t}) / [l_{x+t}\, q_{x+t} (1- q_{x+t})]^{0,5} \cdot r_{3c} \;/\; r_{2c}^{\;3/2} = 0{,}11 \cdot 1{,}37 = 0{,}16$$

Esempio: calcolo dei momenti dell'utile di mortalità e dell'utile finanziario

L'utile finanziario risulta:

$_4\mathbf{y}^\circ_{t+1} = (\mathbf{j}^\circ_{t+1} - j^*) \cdot {}_4A_{t+1} \cdot w_t \cdot Q_t$

dove: $_4A_{t+1} = v^b_t + b_{t+1} (1 - \alpha^* - \beta^*)$

con caratteristiche, che dipendono dalla forma assicurativa, seguenti:

$E({}_4\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = [E(\mathbf{j}^\circ_{t+1}) - j^*] \cdot \{{}_4A_{t+1} \cdot w_t \cdot Q_t\}$

$\sigma^2({}_4\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = \sigma^2(\mathbf{j}^\circ_{t+1}) \cdot \{{}_4A_{t+1} \cdot w_t \cdot Q_t\}^2$

$\nu({}_4\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = \nu(\mathbf{j}^\circ_{t+1})$

Esempio: calcolo dei momenti dell'utile di mortalità e dell'utile finanziario

Generazione di **Temporanea caso morte**

Caratteristiche dell'utile di mortalità:

$E({}_1\mathbf{y}°_{t+1}) = \lambda\ D^b_{t+1}\ E(\mathbf{z}°_{t+1}) = 0{,}5 \cdot 0{,}96635 \cdot 75 = +36{,}24$

$\sigma({}_1\mathbf{y}°_{t+1}) = D^b_{t+1} \cdot \sigma(\mathbf{z}°_{t+1}) = 0{,}96635 \cdot 9{,}783 = 9{,}45$

$\nu({}_1\mathbf{y}°_{t+1}) = -/+\ \nu(\mathbf{z}°_{t+1}) = -0{,}16$

Caratteristiche dell'utile finanziario:

$E({}_4\mathbf{y}°_{t+1}) = [E(\mathbf{j}°_{t+1}) - j^*] \cdot {}_4A_{t+1} \cdot w_t$
$= (0{,}05-0{,}04)[0{,}0311+(1-0{,}65-0{,}05)\cdot 0{,}006461-0{,}0007]\cdot 25000 = 0{,}01 \cdot 808{,}46 = 8{,}08$

$\sigma({}_4\mathbf{y}°_{t+1}) = \sigma(\mathbf{j}°_{t+1}) \cdot {}_4A_{t+1} \cdot w_t = 0{,}008 \cdot 808{,}46 = 6{,}47$

$\nu({}_4\mathbf{y}°_{t+1}) = \nu(\mathbf{j}°_{t+1}) = +0{,}8$

Esempio: calcolo dei momenti dell'utile di mortalità e dell'utile finanziario

Generazione di **Miste ordinarie**

Caratteristiche dell'utile di mortalità:

$E({}_1\mathbf{y}°_{t+1}) = \lambda\ D^b_{t+1}\ E(\mathbf{z}°_{t+1}) = 0{,}5 \cdot 0{,}68999 \cdot 75 = +25{,}87$

$\sigma({}_1\mathbf{y}°_{t+1}) = D^b_{t+1} \cdot \sigma(\mathbf{z}°_{t+1}) = 0{,}68999 \cdot 9{,}783 = 6{,}75$

$\nu({}_1\mathbf{y}°_{t+1}) = -\ \nu(\mathbf{z}°_{t+1}) = -0{,}16$

Caratteristiche dell'utile finanziario:

$E({}_4\mathbf{y}°_{t+1}) = (0{,}05-0{,}04)\cdot[0{,}27404 + (1-0{,}8-0{,}05) \cdot 0{,}031659 - 0{,}003] \cdot 25000$
$= 0{,}01 \cdot 6894{,}72 = 68{,}95$

$\sigma({}_4\mathbf{y}°_{t+1}) = \sigma(\mathbf{j}°_{t+1}) \cdot {}_4A_{t+1} \cdot w_t = 0{,}008 \cdot 6894{,}72 = 55{,}16$

$\nu({}_4\mathbf{y}°_{t+1}) = \nu(\mathbf{j}°_{t+1}) = +0{,}8$

Esempio: calcolo dei momenti dell'utile di mortalità e dell'utile finanziario

Generazione di **Capitali differiti**

Caratteristiche dell'utile di mortalità:

$E({}_1\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = \lambda\, D^b_{t+1}\, E(\mathbf{z}^\circ_{t+1}) = 0{,}5 \cdot (-0{,}27694) \cdot 75 = -10{,}38$

$\sigma({}_1\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = D^b_{t+1} \cdot \sigma(\mathbf{z}^\circ_{t+1}) = 0{,}27694 \cdot 9{,}783 = 2{,}71$

$\nu({}_1\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = +\,\nu(\mathbf{z}^\circ_{t+1}) = +0{,}16$

Caratteristiche dell'utile finanziario:

$E({}_4\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = (0{,}05-0{,}04)\cdot[0{,}24350 + (1 - 0{,}8 - 0{,}05) \cdot 0{,}025351 - 0{,}0025] \cdot 25000$
$= 0{,}01 \cdot 6120{,}07 = 61{,}20$

$\sigma({}_4\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = \sigma(\mathbf{j}^\circ_{t+1}) \cdot {}_4A_{t+1} \cdot w_t = 0{,}008 \cdot 6120{,}07 = 48{,}96$

$\nu({}_4\mathbf{y}^\circ_{t+1}) = \nu(\mathbf{j}^\circ_{t+1}) = +0{,}8$

Esempio: riepilogo dei risultati

Temporanee caso morte				
	Utile di mortalità		Utile finanziario	
	λ=50%	λ=5%	E(j°)=5%	E(j°)=6%
media	36,24	3,62	8,08	16,16
s.q.m.	9,45		6,47	
asimmetria	-0,16		0,8	

Capitali differiti				
	Utile di mortalità		Utile finanziario	
	λ=50%	λ=5%	E(j°)=5%	E(j°)=6%
media	-10,38	-1,04	61,2	122,4
s.q.m.	2,71		48,96	
asimmetria	0,16		0,8	

Miste ordinarie				
	Utile di mortalità		Utile finanziario	
	λ=50%	λ=5%	E(j°)=5%	E(j°)=6%
media	25,87	2,59	68,95	137,9
s.q.m.	6,75		55,16	
asimmetria	-0,16		0,8	