## Analisi del rischio demografico in assicurazioni a capitale sotto rischio positivo.

Per analizzare solo il rischio demografico di scarti accidentali della mortalità dai valori attesi, consideriamo le seguenti ipotesi:

1) il portafoglio sia costituito da polizze monoannuali di puro rischio stipulate tutte in $t=0$ e scadenza $t=1$;
2) escludiamo spese e caricamenti;
3) Tasso tecnico di interesse posto $i=0$;
4) Assenza di movimenti di capitale proprio;
5) Riserve matematiche nulle.

Per ciascuna polizza, l'esborso aleatorio attualizzato risulta:

$$\tilde{Y}_h = \begin{cases} C_h \,, & 0 \\ q(h) \,, & 1-q(h) \end{cases} \,, \quad h = 1, 2, \dots, n$$

con $C_h$: valore attuale del capitale assicurato

$q(h)$: probabilità di decesso $h$-esimo assicurato

$\tilde{Y}_h$ = valore attuale aleatorio esborso $h$-esima polizza.

Per ogni contratto $h = 1, 2, \ldots, n$, si definiscono:

$P_h = E(\tilde{Y}_h) = C_h \cdot p_{(h)}$ : premio puro

$\sigma^2(\tilde{Y}_h) = C_h^2 \, p_{(h)} (1 - p_{(h)})$ : varianza esborso attualizzato

$m_h$ = caricamento di sicurezza

$P'_h = P_h + m_h$ : premio caricato

$\tilde{X}_h = P'_h - \tilde{Y}_h$ : guadagno aleatorio del contratto

$E(\tilde{X}_h) = P'_h - E(\tilde{Y}_h) = P'_h - P_h = m_h \geq 0$

$\sigma^2(\tilde{X}_h) = \sigma^2(\tilde{Y}_h) = C_h^2 \cdot p_{(h)} (1 - p_{(h)})$

Per l'intero portafoglio, si ha:

$P = \sum_{h=1}^{n} P_h$ : totale dei premi equi

$P' = \sum_{h=1}^{n} P'_h$ : Totale premi caricati

$m = \sum_{h=1}^{n} m_h$ : Totale caricamenti

$\tilde{Y} = \sum_{h=1}^{n} \tilde{Y}_h$ : esborso aleatorio globale

$\tilde{X} = \sum_{h=1}^{n} \tilde{X}_h$ : guadagno aleatorio globale

$E(\tilde{Y}) = \sum_{h=1}^{n} E(\tilde{Y}_h) = \sum_{h=1}^{n} P_h = P$ : esborso atteso globale

$E(\tilde{X}) = \sum_{h=1}^{n} E(\tilde{X}_h) = \sum_{h=1}^{n} m_h = m$ : guadagno atteso globale.

Ipotesi speciali.

Se: i) le v.a. $\tilde{y}_i$ sono stocasticamente indipendenti (o non correlate);

$$\Rightarrow \sigma = \sigma(\tilde{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2(\tilde{y}_i)} = \sigma(\tilde{x})$$

ii) $\{ n \to +\infty \ \cap \ \sigma(\tilde{y}_i) \ll \sigma \}$ allora per il teorema di Centrale convergenza:

$$\tilde{y} \cong N(0, \sigma)$$

$$\tilde{x} \cong N(m, \sigma)$$

Indicatori di rischiosità del portafoglio

A) Consideriamo la $\boxed{\text{varianza}}$ di $\tilde{Y}$:

$$\sigma^2 = \sigma^2(\tilde{Y}) = \sigma^2(\tilde{X}) \underset{\text{ipotesi indipendenza}}{\underbrace{=}} \sum_{h=1}^{n} \sigma^2(\tilde{X}_h) = \sum_{h=1}^{n} e_h^2 \cdot P(E_h)(1 - P(E_h))$$

Se gli assicurati sono "omogenei" rispetto alle probabilità di decesso:

$$q(h) = q \quad , \quad \forall\, h = 1, 2, \dots, n$$

allora

$$\sigma^2 = q(1-q) \cdot \sum_{h=1}^{n} e_h^2$$

$$= q(1-q) \cdot n \cdot \bar{e}^{(2)}$$

$$= \boxed{n \cdot q(1-q) \cdot \left[\sigma_e^2 + \bar{e}^2\right]}$$

dove

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{h=1}^{n} e_h$$

$$\bar{e}^{(2)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{h=1}^{n} e_h^2$$

Osservazioni:

(...) La distribuzione dei capitali assicurati è un fattore di rischio di portafoglio.

B) Consideriamo l'Indice di rischio del Portafoglio.

L'evento : $\{\tilde{y} > P + m\} \longrightarrow$ "rovina" (1)

ha probabilità : $P_r\{\tilde{y} > P + m\}$

Si vuole che $P_r\{\tilde{y} > P + m\} = \varepsilon$ (2)

con $\varepsilon$ = probabilità di rovina minima accettabile.

Per realizzare l'obiettivo (2), consideriamo la seguente legge di caricamento:

$m = \eta \cdot \sigma \quad , \quad \eta > 0$

Per ricavare $\eta$, risolviamo:

$$\varepsilon = P_r\{\tilde{y} > P + \eta \cdot \sigma\} = P_r\left\{\frac{\tilde{y} - P}{\sigma} > \eta\right\} = 1 - \Phi(\eta) = 1 - \Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)$$

quindi : $\varepsilon = 1 - \Phi\left(\frac{m}{\sigma}\right)$

Se valgono le "ipotesi speciali", allora $\Phi \cong N(0,1)$ e

$$\varepsilon = 1 - \Phi(\eta) \rightarrow \eta = \Phi^{-1}(1-\varepsilon)$$

dove $\eta$ è il quantile di ordine $(1-\varepsilon)$ della $\Phi$.