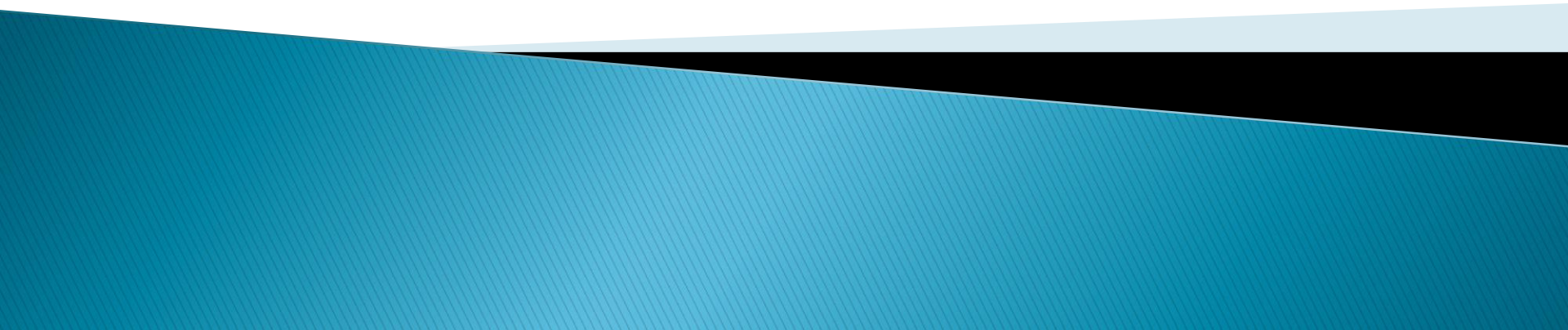


# STATISTICA E TECNICA ASSICURATIVA

Salvatore Forte

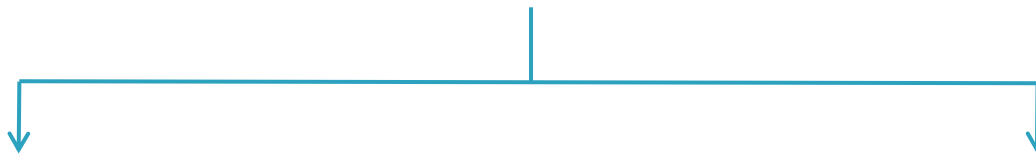


# LA PERSONALIZZAZIONE DEL PREMIO

Obiettivo principale per l'assicuratore che opera nelle assicurazioni contro i danni è la determinazione di un premio che rifletta il più possibile il livello di sinistrosità di ciascun rischio assunto



***PERSONALIZZAZIONE DEL PREMIO***  
*due fasi distinte*



***PERSONALIZZAZIONE A PRIORI***  
*al momento di stipula del contratto*

***PERSONALIZZAZIONE A POSTERIORI***  
*durante i “periodi di osservazione”*

# LA PERSONALIZZAZIONE A PRIORI

Generalmente, il tasso di premio teorico è determinato, considerando la seguente formula:

$$\tau' = \frac{\sum_{j=1}^n y_j}{\sum_{k=1}^N w_k}$$

dove:

- $y_j$ , è l'ammontare del risarcimento pagato o riservato in riferimento al *j-esimo* sinistro
- $w_k$ , è il valore assicurato in riferimento al *k-esimo* rischio
- $n$ , è il numero di sinistri registrati all'interno di un definito arco temporale (1 anno)
- $N$ , è il numero di rischi presenti nel portafoglio nel medesimo arco temporale

# LA PERSONALIZZAZIONE A PRIORI

## LA PERSONALIZZAZIONE A PRIORI

- Occorre suddividere i rischi in classi di rischio (o anche classi tariffarie)
- Una classe di rischio di rischio è caratterizzata da:
  - fattori di rischio (o anche variabili tariffarie)
  - in corrispondenza di ciascuna variabile tariffaria, un certo numero di modalità
- Ogni classe è costituita da rischi omogenei, ognuna con un proprio premio calcolato mediante le usuali metodologie di calcolo

Se consideriamo due sole variabili tariffarie A e B, rispettivamente con un numero di modalità  $c_1$  e  $c_2$ , avremo  $c_1 \cdot c_2$  classi di rischio:

A/B	1	2	...	j	...	$c_2$
1	(1,1)			...		(1, $c_2$ )
2		$\ddots$				
$\vdots$						
i	$\vdots$			(i,j)		$\vdots$
$\vdots$					$\ddots$	
$c_1$	( $c_1$ ,1)			...		( $c_1$ , $c_2$ )

## LA PERSONALIZZAZIONE A PRIORI

- All'atto della stipula ad ogni contratto viene assegnata una classe di rischio
- Per ogni classe di rischio viene calcolato un tasso di premio equo in base all'osservazione statistica
- Il tasso di premio della classe (i,j):

$$\tau'_{i,j} = \frac{R_{i,j}}{E_{i,j}}$$

- Relativamente alla classe (i,j):
  - $R_{i,j}$  → ammontare dei risarcimenti
  - $E_{i,j}$  → ammontare dei valori assicurati (totale delle esposizioni monetarie)
- Con riferimento all'intera collettività il tasso di premio medio è:

$$\tau' = \frac{\sum_i R_{i,0}}{\sum_i E_{i,0}} = \frac{\sum_j R_{0,j}}{\sum_j E_{0,j}} = \frac{R}{E}$$

- $R$  → totale dei risarcimenti
- $E$  → totale dei valori assicurati

## LA PERSONALIZZAZIONE A PRIORI

### Modelli di tariffazione per classi

Determinati i tassi di premio specifici per ogni classe (i,j), a causa del ridotto numero di contratti che popolano alcune classi di rischio, si devono perequare i  $\tau'_{ij}$  per ottenere i tassi di premio specifici perequati  $\tau_{ij}$ .

A tal fine bisogna scegliere una funzione, ovvero un modello di tariffazione, che associa ad ogni classe di rischio un tasso di premio (equo).

Tale funzione dipende da alcuni parametri chiamati relatività, i quali vengono stimati (e sottoposti a periodici adeguamenti) a partire dai dati disponibili.

- **Modello additivo**  $\rightarrow \tau_{ij} = \tau + \alpha_i + \beta_j$
- **Modello moltiplicativo**  $\rightarrow \tau_{ij} = \tau \cdot \alpha_i \cdot \beta_j$  oppure  $\tau_{ij} = \alpha_i \cdot \beta_j$
- **Modello misto** (con 3 o più fattori di rischio)  $\rightarrow \tau_{ijk} = \tau \cdot (\alpha_i \beta_j + \gamma_k)$

## LA PERSONALIZZAZIONE A PRIORI

### La stima dei parametri: il modello del Chi-Quadro modificato

Voglio minimizzare la seguente quantità:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{c_1} \sum_{j=1}^{c_2} \frac{(E_{i,j} \tau'_{i,j} - E_{i,j} \tau_{i,j})^2}{E_{i,j}}$$

I valori  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  ottimi, sono quelli che minimizzano la quantità  $\chi^2$ , quindi sono le soluzioni del sistema che si ottiene annullando le derivate parziali del  $\chi^2$  rispetto ai parametri  $\alpha_i$  e  $\beta_j$ .

## Esempio

*Ipotizziamo di avere:*

- *2 variabili di personalizzazione A e B*
  - *A: “regione di residenza”, nell’esempio le regioni sono state suddivise in 3 classi → la variabile A è formata da 3 modalità*
  - *B: “tipo di garanzia”, nell’esempio le garanzie sono:*
    - *Valore a nuovo (VN)*
    - *Valore commerciale (VC)*
    - *Danno totale (DT)*
    - *Eventi socio-politici e naturali (ESPN)*
- *Sono noti:*
  - *il numero di rischi anno di ogni classe*
  - *il numero di sinistri di ogni classe*
  - *gli importi risarciti per sinistri*
  - *i valori assicurati per ogni rischio*

### Obiettivo

*utilizzare un modello che stimi il tasso di premio di ciascuna classe, in maniera da poter consentire una classificazione a priori date le modalità di A e di B*



# LA PERSONALIZZAZIONE A PRIORI

Importo dei <b>risarcimenti</b> per classe					
A/B	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	Totale
$a_1$	13.236	13.575	5.362	4.949	37.123
$a_2$	12.261	5.195	10.992	3.988	32.436
$a_3$	29.417	30.903	8.740	4.158	73.218
Totale	54.914	49.672	25.094	13.096	142.777

Importo delle <b>esposizioni</b> per classe					
A/B	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	Totale
$a_1$	771.236	616.977	660.898	911.473	2.960.584
$a_2$	580.241	339.209	710.211	507.847	2.137.509
$a_3$	839.836	630.223	384.267	601.973	2.456.298
Totale	2.191.314	1.586.409	1.755.376	2.021.293	7.554.392

*MODELLO ADDITIVO*



$$\tau_{i,j} = \tau + \lambda_i + \mu_j$$
$$i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4$$

*MODELLO DEI TOT. MARGINALI*



$$\tau_{i,j} = \lambda_i \cdot \mu_j$$
$$i = 1,2,3 \quad j = 1,2,3,4$$

## *STIMA DEL MODELLO ADDITIVO – METODO CHI-QUADRATO*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{c_1} \sum_{j=1}^{c_2} \frac{[R_{i,j} - E_{i,j}(\tau + \lambda_i + \mu_j)]^2}{E_{i,j}}$$

- $R_{i,j} \rightarrow$  risarcimento complessivo della classe  $(i, j)$
- $E_{i,j} \rightarrow$  esposizione monetaria complessiva della classe  $(i, j)$
- $\tau \rightarrow$  tasso medio di premio
- $\lambda_i, \mu_j \rightarrow$  parametri da stimare

I valori ottimi  $\hat{\lambda}_i, \hat{\mu}_j$  sono soluzione del sistema ottenuto annullando le derivate parziali di  $\chi^2$  rispetto a  $\lambda_i$  e  $\mu_j$ , cioè il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{c_2} [R_{h,j} - E_{h,j}(\tau + \lambda_h + \mu_j)] = 0, & h = 1, 2, \dots, c_1 \\ \sum_{i=1}^{c_1} [R_{i,k} - E_{i,k}(\tau + \lambda_i + \mu_k)] = 0, & k = 1, 2, \dots, c_2 \end{cases}$$

È un sistema di  $c_1 + c_2$  equazioni in  $c_1 + c_2$  incognite  $\lambda_h, \mu_k$

# LA PERSONALIZZAZIONE A PRIORI

- Il sistema è determinato a meno di una costante additiva
- Una soluzione del sistema si ha con metodo iterativo assegnando dei valori iniziali alle  $\mu_k$  se  $c_1 \geq c_2$ , oppure alle  $\lambda_h$  se  $c_1 < c_2$  nelle seguenti formule:

$$\lambda_h = \frac{(R_{h,0} - \tau \cdot E_{h,0}) - \sum_j E_{h,j} \mu_j}{E_{h,0}} \qquad \mu_k = \frac{(R_{0,k} - \tau \cdot E_{0,k}) - \sum_i E_{i,k} \lambda_i}{E_{0,k}}$$

- Nel nostro caso  $c_1 = 3$  e  $c_2 = 4$
- Avviamo il processo con  $\lambda_1 = 0,01$ ,  $\lambda_2 = 0,00$  e  $\lambda_3 = 0,00$

$\tau = 0,019$

Somme marginali Risarcimenti	
R(0,1)	54.914
R(0,2)	49.672
R(0,3)	25.094
R(0,4)	13.096
R(1,0)	37.123
R(2,0)	32.436
R(3,0)	73.218

Somme marginali Esposizioni	
E(0,1)	2.191.314
E(0,2)	1.586.409
E(0,3)	1.755.376
E(0,4)	2.021.293
E(1,0)	2.960.584
E(2,0)	2.137.509
E(3,0)	2.456.298

Esempio →  $\mu_1 = \frac{(R_{0,1} - \tau \cdot E_{0,1}) - \sum_i E_{i,1} \lambda_i}{E_{0,1}} = \frac{(54.914 - 0,19 \cdot 2.191.314) - (771.236 \cdot \lambda_1 + 580.241 \cdot \lambda_2 + 839.836 \cdot \lambda_3)}{3.191.314}$

- Iterando più volte si giunge ad una soluzione di stabilità con i seguenti valori per

$$\lambda_1 = -0,002$$

$$\lambda_2 = 0.001$$

$$\lambda_3 = 0.013$$

$$\mu_1 = 0.001$$

$$\mu_2 = 0,008$$

$$\mu_3 = -0.007$$

$$\mu_4 = -0.016$$

utilizzando il modello arrivo alla perequazione dei tassi di premio per classe:

$$\tau_{i,j} = \tau + \lambda_i + \mu_j$$

Tassi	Perequati	Grezzi
$\tau_{1,1}$	0,0185	0,0172
$\tau_{1,2}$	0,0247	0,0220
$\tau_{1,3}$	0,0099	0,0081
$\tau_{1,4}$	0,0012	0,0054
$\tau_{2,1}$	0,0212	0,0211
$\tau_{2,2}$	0,0273	0,0153
$\tau_{2,3}$	0,0125	0,0155
$\tau_{2,4}$	0,0039	0,0079
$\tau_{3,1}$	0,0338	0,0350
$\tau_{3,2}$	0,0400	0,0490
$\tau_{3,3}$	0,0252	0,0227
$\tau_{3,4}$	0,0166	0,0069

Verifichiamo la bontà dell'approssimazione mediante la seguente formula

$$\tau \approx \sum \tau_{i,j} \frac{R_{i,j}}{R}$$

che fornisce il tasso medio come media ponderata dei tassi perequati

Lo stesso procedimento può essere effettuato con un altro modello di tariffazione per classi

## *STIMA DEL MODELLO – TOTALI MARGINALI*

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{c_1} \sum_{j=1}^{c_2} \frac{[R_{i,j} - E_{i,j} \cdot \lambda_i \cdot \mu_j]^2}{E_{i,j}}$$

- $R_{i,j} \rightarrow$  risarcimento complessivo della classe  $(i, j)$
- $E_{i,j} \rightarrow$  esposizione monetaria complessiva della classe  $(i, j)$
- $\lambda_i, \mu_j \rightarrow$  parametri da stimare

I valori ottimi  $\hat{\lambda}_i, \hat{\mu}_j$  sono soluzione del sistema ottenuto annullando le derivate parziali di  $\chi^2$  rispetto a  $\lambda_i$  e  $\mu_j$ , cioè il seguente sistema:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{c_2} E_{h,j} \cdot \lambda_h \cdot \mu_j = \sum_{j=1}^{c_2} R_{h,j}, & h = 1, 2, \dots, c_1 \\ \sum_{i=1}^{c_1} E_{i,k} \cdot \lambda_i \cdot \mu_k = \sum_{i=1}^{c_1} R_{i,k}, & k = 1, 2, \dots, c_2 \end{cases}$$

È un sistema di  $c_1 + c_2$  equazioni in  $c_1 + c_2$  incognite  $\lambda_h, \mu_k$

# LA PERSONALIZZAZIONE A PRIORI

- Il sistema è determinato a meno di una costante additiva
- Una soluzione del sistema si ha con metodo iterativo assegnando dei valori iniziali alle  $\mu_k$  se  $c_1 \geq c_2$ , oppure alle  $\lambda_h$  se  $c_1 < c_2$  nelle seguenti formule:

$$\lambda_h = \frac{\sum_j R_{h,j}}{\sum_j E_{h,j} \mu_j} = \frac{R_{h,0}}{\sum_j E_{h,j} \mu_j} \quad \mu_k = \frac{\sum_i R_{i,k}}{\sum_i E_{i,k} \lambda_i} = \frac{R_{0,k}}{\sum_i E_{i,k} \lambda_i}$$

- Nel nostro caso  $c_1 = 3$  e  $c_2 = 4$
- Avviamo il processo con  $\lambda_1 = 0,01$ ,  $\lambda_2 = 0,00$  e  $\lambda_3 = 0,00$

Somme marginali Risarcimenti	
R(0,1)	54.914
R(0,2)	49.672
R(0,3)	25.094
R(0,4)	13.096
R(1,0)	37.123
R(2,0)	32.436
R(3,0)	73.218

Somme marginali Esposizioni	
E(0,1)	2.191.314
E(0,2)	1.586.409
E(0,3)	1.755.376
E(0,4)	2.021.293
E(1,0)	2.960.584
E(2,0)	2.137.509
E(3,0)	2.456.298

Esempio →

$$\mu_1 = \frac{R_{0,1}}{E_{1,1} \cdot \lambda_1 + E_{2,1} \cdot \lambda_2 + E_{3,1} \cdot \lambda_3} = \frac{54.914}{771236 \cdot \lambda_1 + 580.241 \cdot \lambda_2 + 839.839 \cdot \lambda_3}$$

- Iterando più volte si giunge ad una soluzione di stabilità con i seguenti valori per

$$\lambda_1 = 0,003$$

$$\lambda_2 = 0,003$$

$$\lambda_3 = 0,006$$

$$\mu_1 = 6,509$$

$$\mu_2 = 8,104$$

$$\mu_3 = 4,153$$

$$\mu_4 = 1,804$$

utilizzando il modello arrivo alla perequazione dei tassi di premio per classe:

$$\tau_{i,j} = \lambda_i \cdot \mu_j$$



# LA PERSONALIZZAZIONE A PRIORI

Tassi	Perequate additivo	Perequate totali marginali	Grezze
$\tau_{1,1}$	0,0185	0,0168	0,0172
$\tau_{1,2}$	0,0247	0,0209	0,0220
$\tau_{1,3}$	0,0099	0,0107	0,0081
$\tau_{1,4}$	0,0012	0,0046	0,0054
$\tau_{2,1}$	0,0212	0,0203	0,0211
$\tau_{2,2}$	0,0273	0,0253	0,0153
$\tau_{2,3}$	0,0125	0,0130	0,0155
$\tau_{2,4}$	0,0039	0,0056	0,0079
$\tau_{3,1}$	0,0338	0,0360	0,0350
$\tau_{3,2}$	0,0400	0,0448	0,0490
$\tau_{3,3}$	0,0252	0,0229	0,0227
$\tau_{3,4}$	0,0166	0,0100	0,0069

Verifichiamo la bontà dell'approssimazione mediante la seguente formula

$$\tau \approx \sum \tau_{i,j} \frac{R_{i,j}}{R}$$

che fornisce il tasso medio come media ponderata dei tassi perequati

- Daboni L. (1989): *“Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni”*, Ed. LINT Trieste
- Daykin C. D., Pentikäinen T., Pesonen M. (1994): *“Practical Risk Theory for Actuaries”*, Ed. Chapman & Hall
- Klugman S. A., Panjer H. H., Willmot G. E. (2004): *“Loss models – from data to decisions”*, Ed. Wiley – Interscience