Matematica Avanzata

Lez. 3 – **Classi di modelli**

Prof. Antonio VIOLI

Benevento 21/02/2023

INDICE

- **Modelli di miscelazione**
- **Modelli multiperiodo**

Modelli di miscelazione

- Nei problemi di miscelazione si dispone di un insieme di materie prime («ingredienti»), ciascuna caratterizzata da un contenuto noto di determinati «componenti».
- L'obiettivo è miscelare gli ingredienti, secondo opportune proporzioni, per ottenere un prodotto finito («miscela»), che soddisfi determinati requisiti di qualità, esprimibili in termini di contenuto complessivo dei componenti nella miscela.
- Il più classico problema di miscelazione è il problema della dieta. Tuttavia, dal punto di vista economico, si trovano numerose applicazioni industriali del problema di miscelazione nelle industrie alimentari, siderurgiche, chimiche.

Modelli di miscelazione

- Variabili di decisione corrispondono al contenuto di ciascun ingrediente nella miscela.
- Vincoli sono tipicamente associati alle caratteristiche di qualità della miscela (che dipende dai componenti presenti negli ingredienti utilizzati) e alle disponibilità limitate degli ingredienti.
- Funzione obiettivo è rappresentata dal costo degli ingredienti impiegati.

Esempio

Un'industria conserviera deve produrre dei succhi di frutta miscelando polpa di frutta e dolcificante ottenendo un prodotto finale che deve soddisfare alcuni requisiti in termini di contenuto di vitamina C, di sali minerali e di zuccheri. La polpa di frutta ed il dolcificante sono acquistati al prezzo di 2 e 3 euro (all'etto), rispettivamente. Inoltre, dalle etichette si ricavano i seguenti contenti (per etto) riportati in Tabella. Determinare le quantità di polpa e di zucchero da utilizzare nella produzione del succo in modo da minimizzare il costo complessivo derivante dall'acquisto dei componenti di base.

	Polpa di frutta	Zucchero	Requisiti
Vitamina C	140 mg	-	70 mg
Sali minerali	20 mg	10 mg	30 mg
Zucchero	25 g	50 g	75 g

Esempio

- **Variabili di decisione**

  x_j , $j = 1{,}2$ quantità (in etti) di ingredienti da miscelare per la produzione del succo

- **Vincoli**
  - Qualità

    $140x_1 \geq 70$ (vitamina C)

    $20x_1 + 10x_2 \geq 30$ (Sali minerali)

    $25x_1 + 50x_2 \geq 75$ (zucchero)

  - Non negatività

    $x_1, x_2 \geq 0$

- **Funzione obiettivo**

$$\min z(x) = 2x_1 + 3x_2$$

Esercizio - ANSALMEC

La Ansalmec, azienda leader nella produzione dell'acciaio, ha di recente analizzato le caratteristiche di sei lotti di rottami di ferro con l'obiettivo di realizzare un dato quantitativo di acciaio 18/10. I dati raccolti sono riportati in Tabella unitamente al peso complessivo disponibile di ciascun lotto e al costo unitario di acquisto.

Componente	Ingrediente					
	Rottame 1 [%]	Rottame 2 [%]	Rottame 3 [%]	Rottame 4 [%]	Rottame 5 [%]	Rottame 6 [%]
Ferro	93	76	74	65	72	68
Nichel	5	13	11	16	6	23
Cromo	0	11	12	14	20	8
Impurità	2	0	3	5	2	1
Peso [q]	30	90	50	70	60	50
Costo [€]	50	100	80	85	92	115

Tabella 2.3 Dati relativi al problema di miscelazione della Ansalmec.

Esercizio - ANSALMEC

L'obiettivo dell'azienda è quello di produrre, al costo minimo, 100 quintali di acciaio 18/10 con una presenza del 18% di cromo, 10% di nichel, almeno il 65% di ferro e al più un 1% di impurità.

Esercizio - ANSALMEC

- **Variabili di decisione**

  x_j , $j = 1, \dots, 6,$ quantità (in quintali) di rottame di tipo j da utilizzare per la produzione dell'acciaio.

- **Vincoli**
  - *Produzione*

    $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 100$$

  - *Qualità dell'acciaio*

    $$\begin{array}{ll} 0{,}93x_1 + 0{,}76x_2 + 0{,}74x_3 + 0{,}65x_4 + 0{,}72x_5 + 0{,}68x_6 \geq 65 & \text{(ferro)} \\ 0{,}05x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}11x_3 + 0{,}16x_4 + 0{,}06x_5 + 0{,}23x_6 = 18 & \text{(cromo)} \\ 0{,}11x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}14x_4 + 0{,}20x_5 + 0{,}08x_6 = 10 & \text{(nichel)} \\ 0{,}02x_1 + 0{,}03x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}02x_5 + 0{,}01x_6 \leq 1 & \text{(impurità)} \end{array}$$

  - *Disponibilità limitata*

    $$x_1 \leq 30;\ x_2 \leq 90;\ x_3 \leq 50;\ x_4 \leq 70;\ x_5 \leq 60;\ x_6 \leq 50$$

  - *Non negatività*

    $$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Esercizio - ANSALMEC

- *Funzione obiettivo*

$$\min z(x) = 50x_1 + 100x_2 + 80x_3 + 85x_4 + 92x_5 + 115x_6$$

- *Soluzione*

$$x_1^* = 0;\ x_2^* = 40{,}18;\ x_3^* = 0;\ x_4^* = 9{,}59;$$
$$x_5^* = 1{,}83;\ x_6^* = 48{,}40;$$
$$z^* = 10567{,}58$$

Template modelli di miscelazione

Si supponga di avere a disposizione n ingredienti, ognuno dei quali contenente una certa quantità di ciascuno degli m componenti.

Si indichi, in particolare, con

- a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, la quantità di componente i presente nell'ingrediente j;
- b_i , $i = 1, \dots, m$, la quantità minima di componente i presente nella miscela;
- c_j, $j = 1, \dots, n$, il costo unitario dell'ingrediente j;
- x_j, $j = 1, \dots, n$, variabile di decisione corrispondenti alla quantità di ingrediente j presente nella miscela da realizzare.

Template modelli di miscelazione

$$\min z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.v$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

Modelli di miscelazione

Ulteriori vincoli potrebbero essere necessari.

Ad esempio, nel caso in cui sia richiesto che un dato componente i sia presente nella miscela in un quantitativo non superiore a un valore prefissato d_i, occorre imporre che:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq d_i$$

In altri casi, potrebbero essere imposte limitazioni u_j sul massimo quantitativo di ingrediente j da utilizzare per realizzare la miscela:

$$x_j \leq u_j$$

Modelli di miscelazione

Nel caso in cui sia necessario produrre un quantitativo prefissato q di miscela, occorre aggiungere il seguente vincolo:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = q$$

Nel caso in cui il numero di miscele da realizzare siano $p > 1$, il modello generale di miscelazione si modifica in accordo alla scelta delle variabili di decisione, che, in questo caso, sono del tipo x_{jk}, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, p$, ciascuna delle quali rappresentante la quantità di ingrediente j necessaria per realizzare la miscela k.

Esercizio - Baraldi

Baraldi è un'industria chimica veneta che produce due tipi di concimi, A e B, che si differenziano per il diverso contenuto di azoto e ferro.

Il concime di tipo A deve contenere almeno il 25% di azoto e almeno il 10% di ferro, mentre il concime di tipo B deve contenere esattamente il 20% di azoto e almeno il 16% di ferro.

I concimi si ottengono facendo reagire dei composti contenenti azoto e ferro. L'industria dispone di 30.000 kg di composto 1, acquistato al prezzo di 3 €/kg, e di 25.000 kg di composto 2, acquistato al prezzo di 4 €/kg.

Il composto 1 contiene il 40% di ferro e il 50% di azoto, il composto 2 contiene il 6% di ferro e il 70% di azoto.

Deve essere prodotto un lotto di 40.000 kg di concime di tipo A e 50.000 kg di concime di tipo B al costo minimo di produzione.

Esercizio - Baraldi

- Variabili di decisione

  x_{ij}, $i = 1,2$, $j = A, B$, quantità di composto i necessaria per produrre il concime di tipo j.

- Vincoli
  - Vincoli sul peso

$$x_{1A} + x_{2A} = 40000$$
$$x_{1B} + x_{2B} = 50000$$

  - Qualità del concime di tipo A

$$0{,}5x_{1A} + 0{,}7x_{2A} \geq 10000$$
$$0{,}4x_{1A} + 0{,}06x_{2A} \geq 4000$$

  - Qualità del concime di tipo B

$$0{,}5x_{1B} + 0{,}7x_{2B} = 10000$$
$$0{,}4x_{1B} + 0{,}06x_{2B} \geq 8000$$

Esercizio - Baraldi

- Vincoli
  - Vincoli sulla disponibilità delle risorse

$$x_{1A} + x_{1B} \leq 30000$$
$$x_{2A} + x_{2B} \leq 25000$$

  - Vincoli di non negatività

$$x_{1A}, x_{1B}, x_{2A}, x_{2B} \geq 0$$

- Funzione obiettivo

$$\min z(x) = 3(x_{1A} + x_{1B}) + 4(x_{2A} + x_{2B})$$

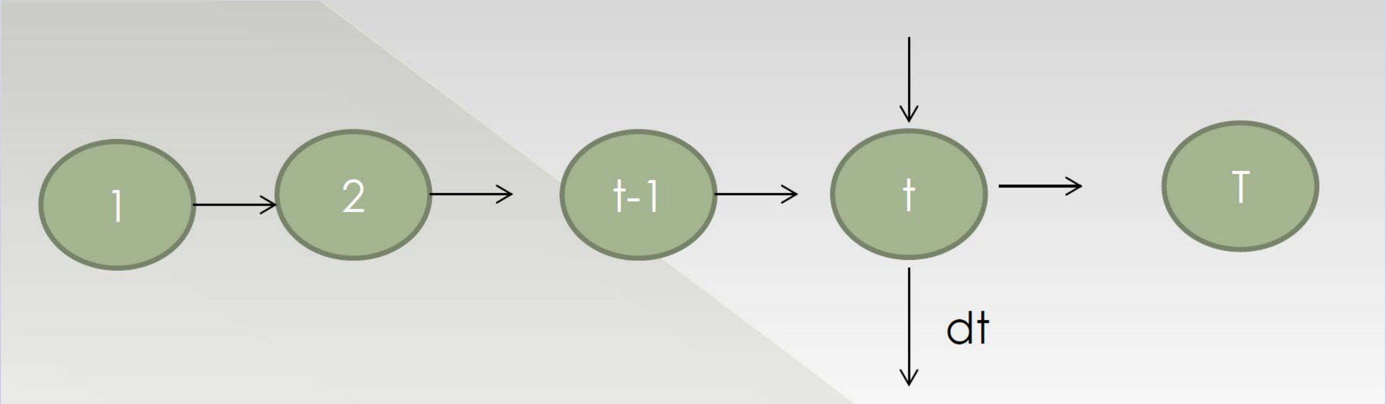
Modelli multiperiodo

I modelli di PL multiperiodo consentono di assumere decisioni riguardanti un orizzonte temporale più lungo, che si assume discreto e suddiviso in T periodi di tempo.

Tali modelli possono riguardare differenti contesti.

Per semplicità si farà riferimento soltanto al caso della pianificazione della produzione multiperiodo di un unico prodotto.

Per formulare il modello, si indichi con $t, t = 1, \dots, T$, il generico periodo dell'orizzonte temporale di pianificazione. Per ogni t, $t = 1, \dots, T$, si assumono note la quantità d_t richiesta di prodotto e il costo unitario c_t di produzione.



Modelli multiperiodo

In ogni periodo di tempo è possibile immagazzinare le quantità di prodotto non vendute e che faranno parte della disponibilità di prodotto per i periodi successivi.

Il costo unitario di stoccaggio si suppone noto e pari a $h_t,\ t = 1, \dots, T$.

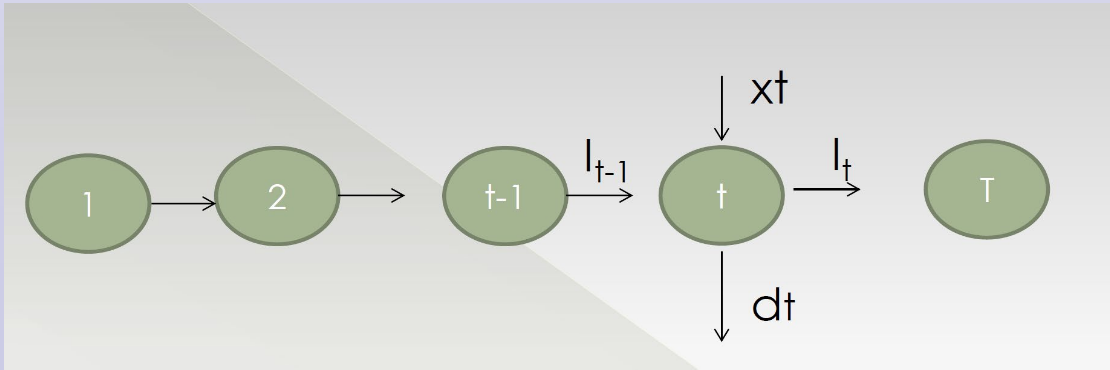
Il problema consiste nel determinare le quantità di prodotto da realizzare in ciascun periodo dell'orizzonte di pianificazione, in modo da soddisfare le richieste della clientela in ogni periodo di tempo, minimizzando il costo complessivo dato dalla somma dei costi di produzione e di stoccaggio.

Modelli multiperiodo

Le variabili di decisione sono rappresentate da x_t, $t = 1, \dots, T$, ciascuna delle quali indicante la quantità di prodotto da realizzare al periodo di tempo t. Inoltre, si indichi con I_t, $t = 1, \dots, T$, la quantità di prodotto stoccata al periodo di tempo t. Tali variabili sono dipendenti dalle variabili x_t, $t = 1, \dots, T$, dal momento che, per ogni periodo di tempo t, $t = 1, \dots, T$, valgono le seguenti relazioni (vincoli di «bilanciamento»):

$$I_{t-1} + x_t = d_t + It$$

per le quali si assume noto il valore I_0, cioè, il livello iniziale di scorta di prodotto.



Modelli multiperiodo

In taluni casi si assume che debba essere nullo il livello delle scorte di prodotto al termine della pianificazione, cioè, $I_T = 0$. Oltre ai vincoli di bilanciamento, sono presenti le condizioni di non negatività sulle variabili di decisione, mentre la funzione obiettivo consiste nella minimizzazione della somma dei costi di produzione e di stoccaggio, cioè, in termini formali,

$$z(x_t, I_t) = \sum_{t=1}^{T} (c_t x_t + h_t I_t)$$

Modelli multiperiodo

Di seguito il modello complessivo:

$$\min z(x_t, I_t) = \sum_{t=1}^{T}(c_t x_t + h_t I_t)$$

$$s.v.$$

$$I_{t-1} + x_t = d_t + I_t \qquad t = 1, \dots, T$$

$$x_t, I_t \geq 0 \qquad t = 1, \dots, T$$

Modelli multiperiodo

In tale modello possono essere inseriti anche vincoli sulla capacità produttiva o sul livello di scorte per ogni periodo di tempo, cioè,

$$x_t \leq u_t$$
$$I_t \leq S_t$$

per qualche $t = 1, \dots, T$, dove u_te S_t sono, rispettivamente, la capacità produttiva e il massimo livello di scorte ammesso al periodo di tempo t.

Esercizio - Setelam

Setelam, azienda livornese specializzata nella lavorazione dei lamierati, riceve una commessa per la produzione di lamierati di zinco di una data dimensione. La quantità richiesta deve essere fornita periodicamente, improrogabilmente alla fine di ogni mese. Le richieste su un orizzonte temporale di tre mesi sono riportate nella Tabella 2.8.

	Periodo		
	1	2	3
Domanda	270	290	250
Capacità	250	220	280
Costo unitario di produzione [€]	12	14	16
Costo unitario di stoccaggio [€]	1,2	1,1	0,9

Tabella 2.8 Dati relativi al problema di produzione multiperiodo della Setelam.

Esercizio - Setelam

Per la lavorazione dei lamierati si utilizza un unico impianto di produzione a ciclo continuo di capacità limitata. La seconda riga della Tabella 2.8 riporta il numero massimo di pezzi di lamiera che possono essere prodotti mensilmente.

Le ultime due righe riportano, invece, i costi unitari di produzione e quelli di stoccaggio. Nel magazzino sono presenti inizialmente 100 lamiere di zinco della dimensione desiderata.

Per definire per ogni mese dell'orizzonte di pianificazione il piano di produzione che consenta di minimizzare i costi totali, si scelgono le seguenti variabili di decisione: $x_t, t = 1{,}2{,}3$, pari al numero di lamiere di zinco prodotte durante il mese t, e I_t, $t = 1{,}2{,}3$, corrispondente al livello delle scorte alla fine del mese t.

Esercizio - Setelam

I vincoli di bilanciamento sono i seguenti:

$x_1 + 100 - I_1 = 270;$

$x_2 + I_1 - I_2 = 290;$

$x_3 + I_2 - I_3 = 250.$

Oltre ai vincoli di non negatività sulle variabili di decisione,

$$x_1, x_2, x_3, I_1, I_2, I_3 \geq 0,$$

occorre considerare le restrizioni sulla capacità produttiva

$$x_1 \leq 250;\ x_2 \leq 220;\ x_3 \leq 280.$$

La funzione obiettivo $z(x, I)$, da minimizzare, è data dalla somma dei costi di produzione e di stoccaggio

$$z(x, I) = 12x_1 + 14x_2 + 16x_3 + 1{,}2I_1 + 1{,}1I_2 + 0{,}9I_3.$$

Esercizio - Setelam

La soluzione ottima del problema è:

$$x_1^* = 250;\ x_2^* = 220;\ x_3^* = 240;\ I_1^* = 80\ ;I_2^* = 10\ ;\ \ I_3^* = 0;$$

a cui corrisponde un valore ottimo pari a $z^* = 10.027$.