Matematica Avanzata

Lez. 5 – **Risoluzione per via grafica modelli di PL a 2 variabili**

Prof. Antonio VIOLI

Benevento 06/03/2023

Modelli di PL

Rappresentazione di un problema di PL

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$s.v$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

Nozioni di geometria poliedrale

Un «**iperpiano**» I di $\Re^n$ è un insieme di punti che soddisfa un'equazione lineare.

Dato un vettore $a \in \Re^n$, uno scalare b e un vettore di variabili $x \in \Re^n$, I può essere rappresentato come:

$$I = \left\{ x \in \Re^n : a^T x = b \right\}.$$

Il vettore a prende il nome di «**gradiente**» dell'iperpiano.

Nozioni di geometria poliedrale

L'iperpiano separa i punti di $\Re^n$ in due regioni dette «**semispazi**».

I punti di $\Re^n$ che non appartengono all'iperpiano sono partizionati in due semispazi, $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$, in modo che l'intersezione tra i due semispazi corrisponda proprio all'iperpiano.

Di conseguenza, i semispazi $S^{(1)}$ ed $S^{(2)}$ sono rappresentabili come:

$$S^{(1)} = \left\{ x \in \Re^n : a^T x \leq b \right\},$$

$$S^{(2)} = \left\{ x \in \Re^n : a^T x \geq b \right\}.$$

Nozioni di geometria poliedrale

1) L'unione dei due semispazi $S^{(1)}$ e $S^{(2)}$ corrisponde a $\Re^n$
2) Un semispazio è un insieme convesso.
3) Un iperpiano è un insieme convesso

Definizione

Un insieme $C \subseteq \Re^n$ è «**convesso**» se, dati due punti appartenenti a C, ogni punto del segmento che li unisce appartiene anch'esso a C.

In altri termini, C è convesso se, per ogni

$$v^{(1)}, v^{(2)} \in C, allora\_\bar{v} = \lambda v^{(1)} + (1-\lambda)v^{(2)} \in C, \forall \lambda \in [0,1].$$

Nozioni di geometria poliedrale

Definizione

Un «**poliedro**» P è l'intersezione di un numero finito di semispazi.

Data una matrice $A^{m*n} \in \Re^n$, un vettore $b \in \Re^m$ e un vettore di variabili $x \in \Re^n$, P può essere rappresentato come:

$$P = \left\{ x \in \Re^n : Ax \leq b \right\}.$$

Un poliedro P è «**limitato**» se esiste uno scalare M sufficientemente grande tale che, per ogni $x \in P$ si ha che $||x|| \leq M$.

Un poliedro limitato si dice «**politopo**».

Un poliedro è un insieme convesso.

Nozioni di geometria poliedrale

La soluzione di un problema di ottimizzazione consiste nel determinare tra tutti i punti appartenenti al poliedro P (rappresentativi delle soluzioni ammissibili) quello che rende ottima la funzione obiettivo.

Come vedremo, la ricerca della soluzione ottima può essere effettuata concentrandosi sui punti estremi.

Dato un poliedro P, un punto $\bar{x} \in P$ si dice «**vertice**» di P se non può essere ottenuto come combinazione convessa di altri punti di P.

Risoluzione di problemi di PL a 2 variabili

Nel piano cartesiano Ox_1x_2 l'equazione

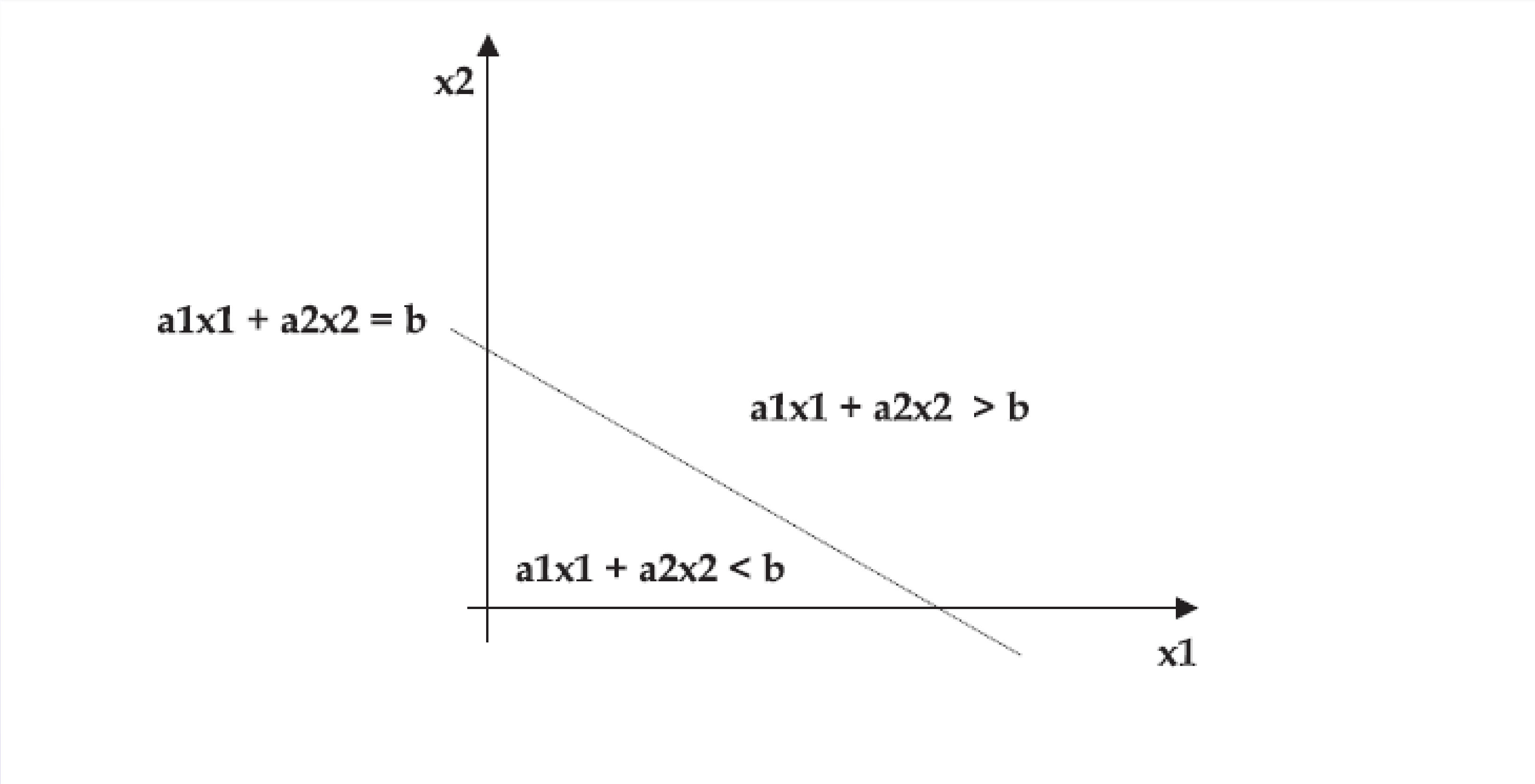
$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \tag{3.4}$$

rappresenta una retta che partiziona il piano in due semipiani, ciascuno dei quali caratterizzato da punti $P(x_1, x_2)$ che soddisfano le due disequazioni

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \qquad a_1x_1 + a_2x_2 \geq b.$$

Consideriamo una disequazione lineare del tipo $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$ rappresentativa di un vincolo di diseguaglianza. Per stabilire quale semipiano individua possiamo procedere nel seguente modo. Una volta convertito il vincolo in una eguaglianza, scegliamo un generico punto P del piano (tipicamente l'origine degli assi) e valutiamo l'espressione in quel punto. Se il valore così ottenuto risulta maggiore o uguale a b allora il semipiano individuato dalla diseguaglianza lineare è quello contente il punto P, altrimenti è quello opposto (si veda la Figura (3.1).

Risoluzione di problemi di PL a 2 variabili



Risoluzione di problemi di PL a 2 variabili

Come abbiamo visto, la funzione obiettivo di un problema di (PL) è una espressione matematica del tipo $c_1x_1 + c_2x_2$ che deve essere massimizzata o minimizzata. Per rappresentare questa funzione nel piano cartesiano Ox_1x_2 si considera la famiglia di rette parallele

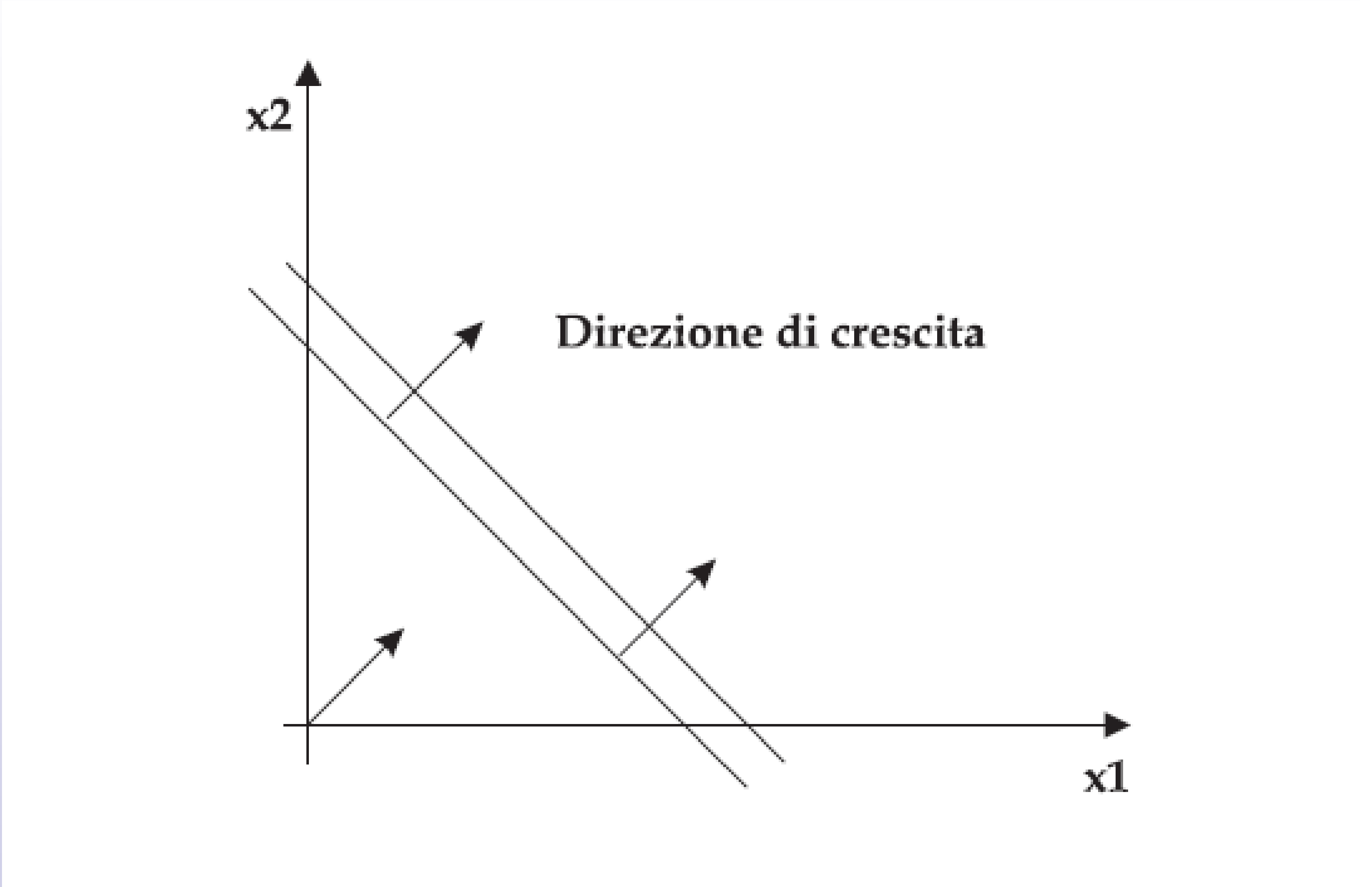
$$c_1x_1 + c_2x_2 = k \tag{3.5}$$

ottenuta al variare di k. Esse rappresentano le curve di livello della funzione $c(x_1, x_2) = c_1x_1+c_2x_2$, anche note come curve di isocosto (se il problema è di minimo) o isoprofitto (se il problema è di massimo).

Risoluzione di problemi di PL a 2 variabili

Nella pratica, per tracciare la funzione obiettivo si procede come segue. Si considera il vettore gradiente $c = (c_1 \ \ c_2)^T$ il quale individua una direzione ortogonale alle rette della famiglia (3.5) ed è orientato nel verso in cui k è crescente. Esso individua, pertanto, una direzione di crescita per la funzione obiettivo, mentre la direzione opposta sarà di decrescita. Quindi, un problema di massimizzazione consiste nel considerare la traslazione nel verso della direzione di crescita fino ad ottenere il più grande valore per k in corrispondenza di valori ammissibili per le variabili di decisione. Se il problema è di minimo occorre invece considerare la traslazione in senso opposto (si veda Figura (3.2).

Risoluzione di problemi di PL a 2 variabili



Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = x_1 + 2x_2$$

$$s.v.$$

$$7x_1 + 9x_2 \leq 35$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

il cui poliedro, limitato, P è rappresentato nella figura successiva

Esercizio

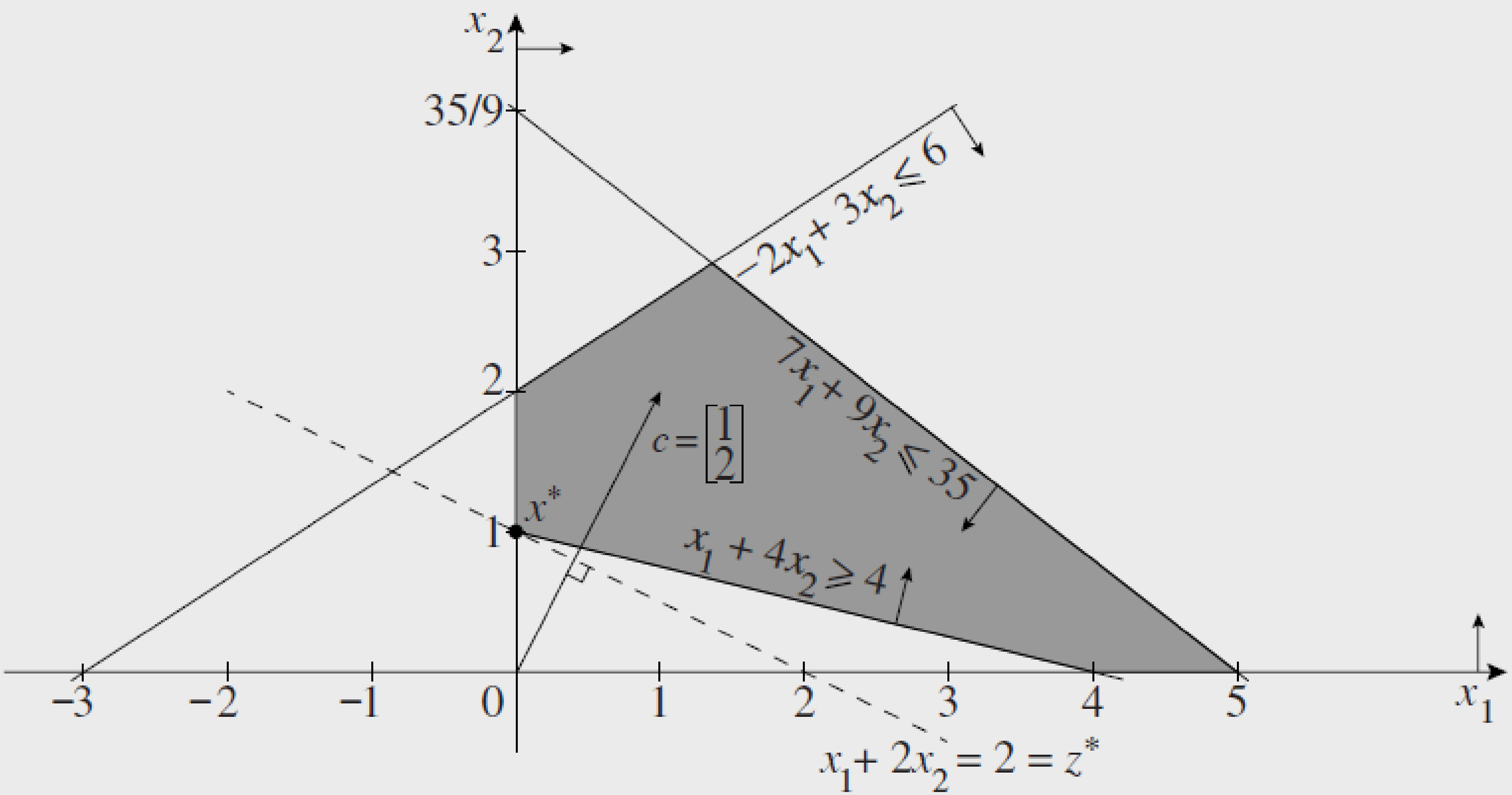


Figura 6.1. Caso di problema che ammette soluzione ottima.

Esercizio

La soluzione ottima del problema corrisponde al punto $x^* = [0\ 1]^T$, con valore $z^* = 2$.

Si osserva, infatti, che non esiste altra soluzione appartenente a P di valore inferiore.

La funzione obiettivo $z(x) = x_1 + 2x_2$ rappresenta, in R^2, il fascio di rette parallele che sono ortogonali al gradiente $c = [1\ 2]^T$ e risolvere il problema significa trovare la retta appartenente al fascio che abbia il più piccolo valore di $z(x)$ e che contenga almeno un punto di P.

Concetti preliminari

Se $P = 0$ allora il problema si dice «inammissibile».

Un problema inammissibile non ammette soluzione ottima e, per convenzione, si scrive che $z^* = +\infty$.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = {}^{3}/_{2}\, x_1 + x_2$$

$$s.v.$$

$$6x_1 + 17x_2 \leq 51$$

$$-3x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$6x_1 - 10x_2 \geq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Il poliedro P a esso associato è vuoto (vedi Figura successiva, 6.2). Il problema è dunque inammissibile.

Esercizio

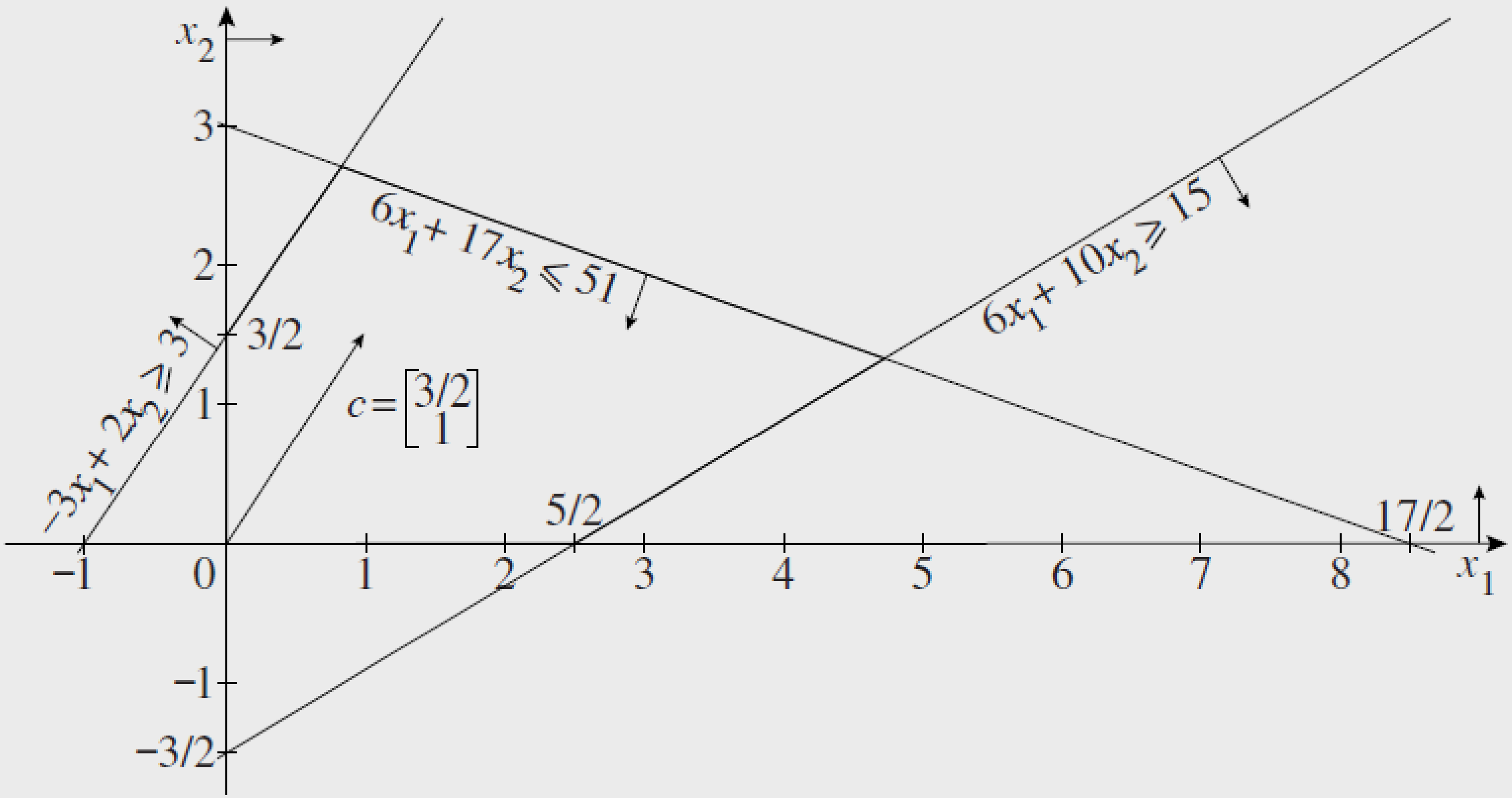


Figura 6.2. Caso di problema inammissibile.

Concetti preliminari

In un problema di minimo, se, per ogni punto $x \in P$, esiste un punto $\hat{x} \in P$ tale che $c^T\hat{x} < c^T x$, allora il problema si dice «illimitato inferiormente».

Anche i problemi illimitati inferiormente non ammettono soluzione ottima, e si assume che $z^* = -\infty$.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z(x) = x_1 - 2x_2$$

$$s.v.$$

$$-6x_1 + 2x_2 \le 9$$

$$x_1 - 4x_2 \le 4$$

$$4x_1 + 46x_2 \ge 23$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Il poliedro P a esso associato è illimitato.

In questo caso, il problema è illimitato inferiormente giacché, per qualsiasi soluzione ammissibile, è sempre possibile trovarne un'altra di valore inferiore.

Esercizio

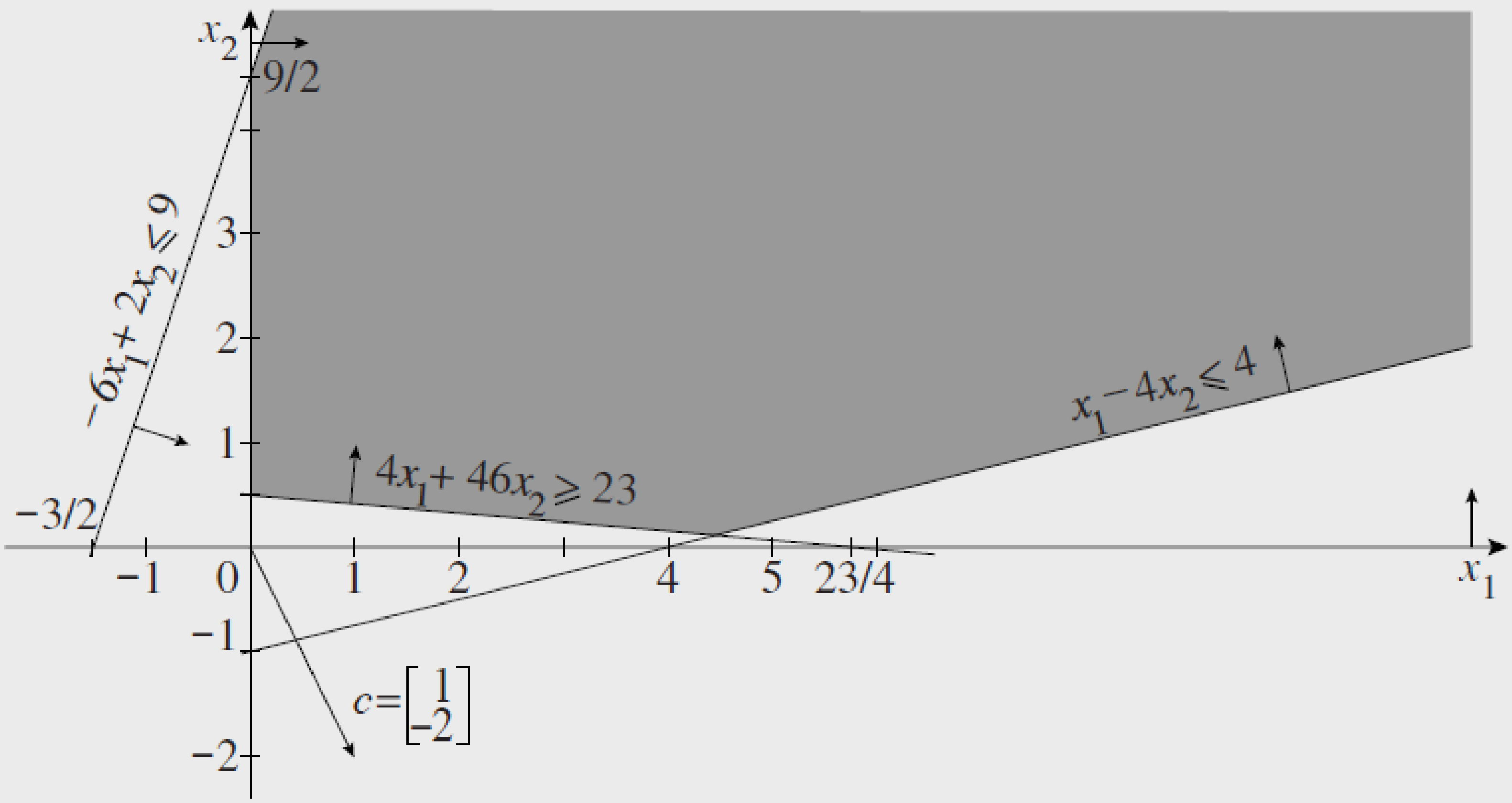


Figura 6.3. Caso di problema illimitato inferiormente.

Esercizio

Vale la pena osservare che se la funzione obiettivo fosse stata, ad esempio,

$$\min z(x) = 2x_1 + 3x_2$$

il problema avrebbe avuto soluzione ottima, in corrispondenza del punto $x^* = [0 \;\; {}^1/_2]^T$, con valore $z^* = {}^3/_2$.

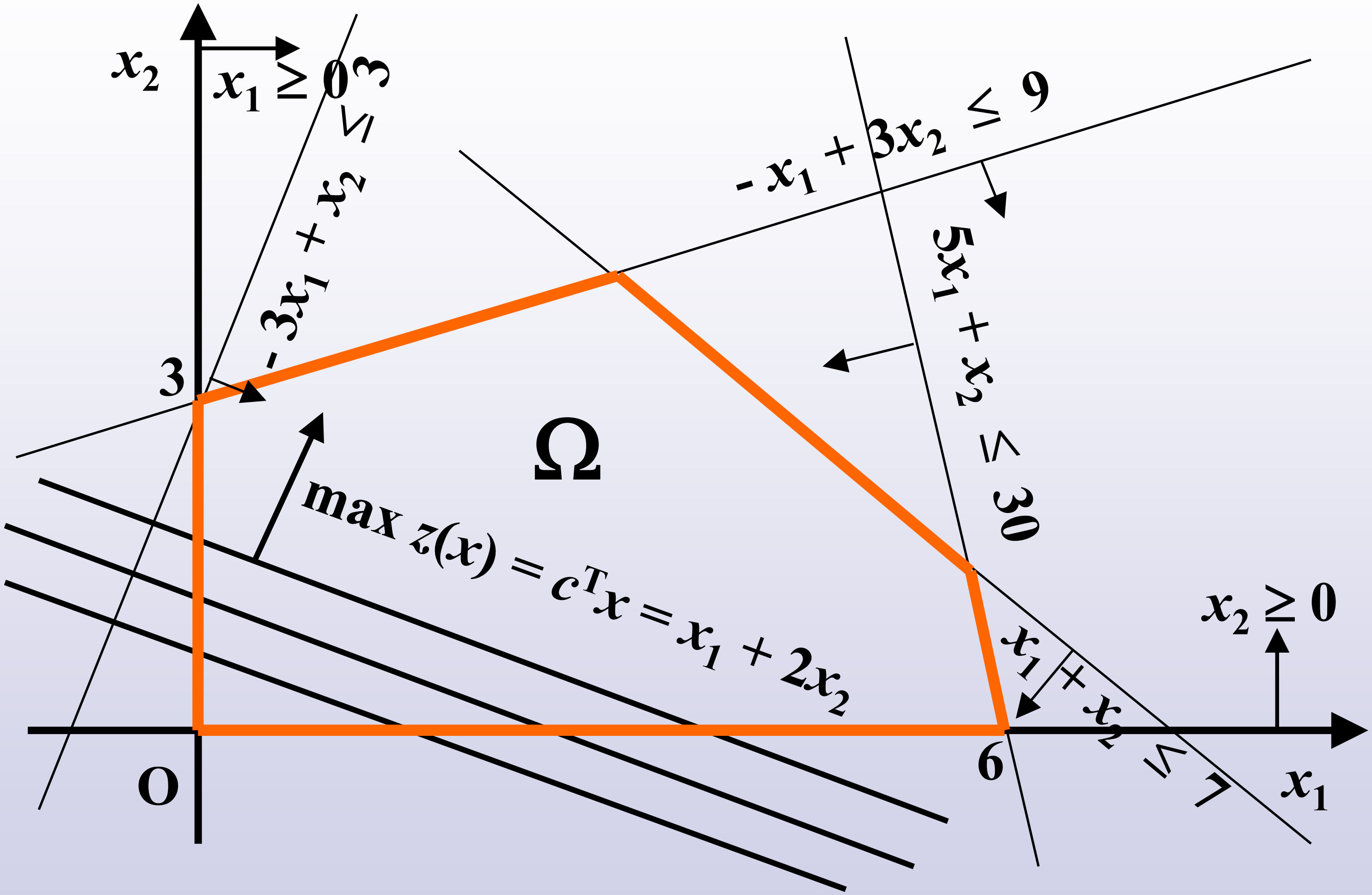
Ciò significa che, affinché un problema di PL sia illimitato inferiormente, è condizione necessaria che il poliedro P corrispondente sia illimitato, ma non sufficiente.

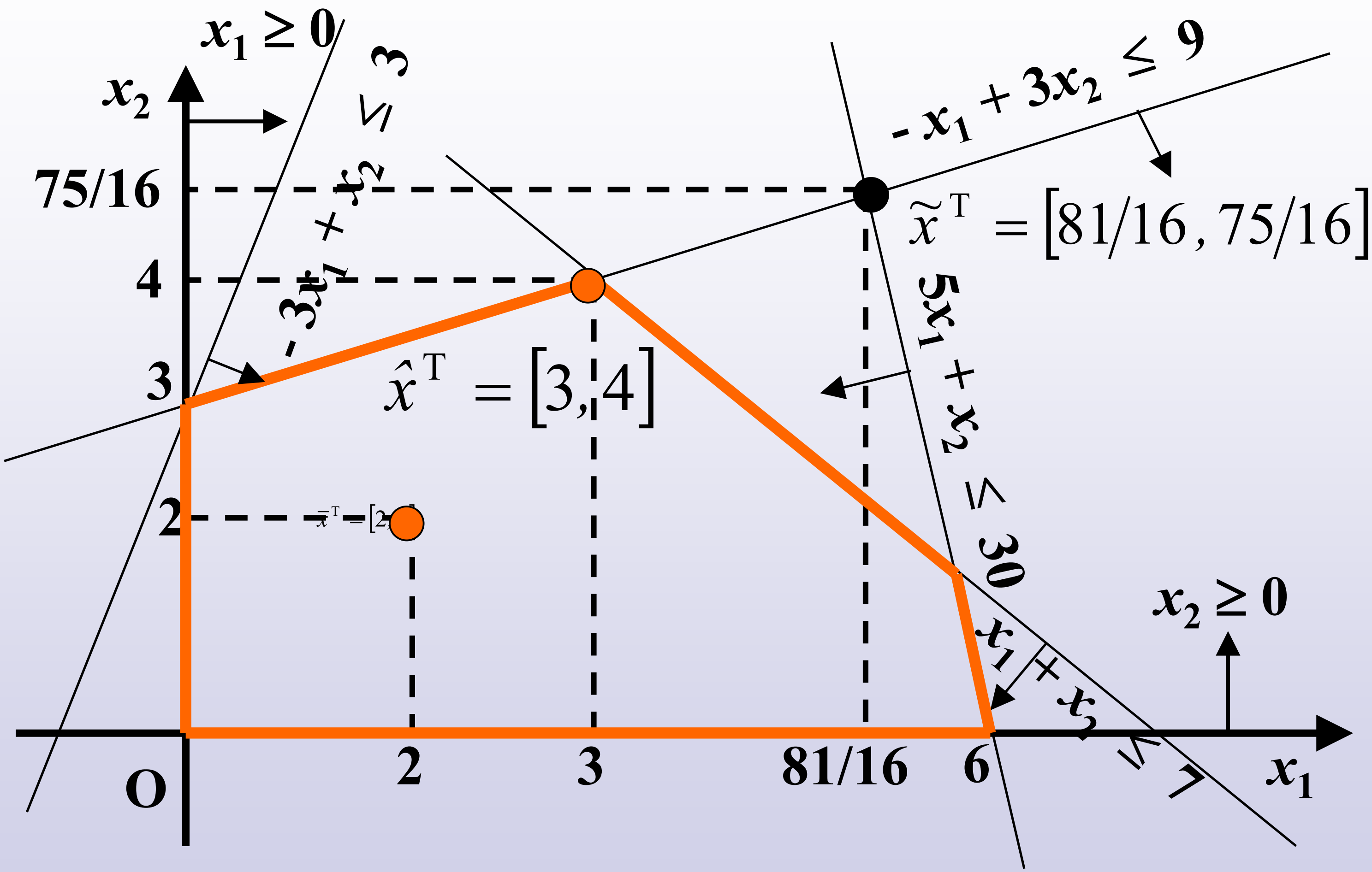
Esercizio

$$\max \quad z(x) = x_1 + 2x_2$$

s.v

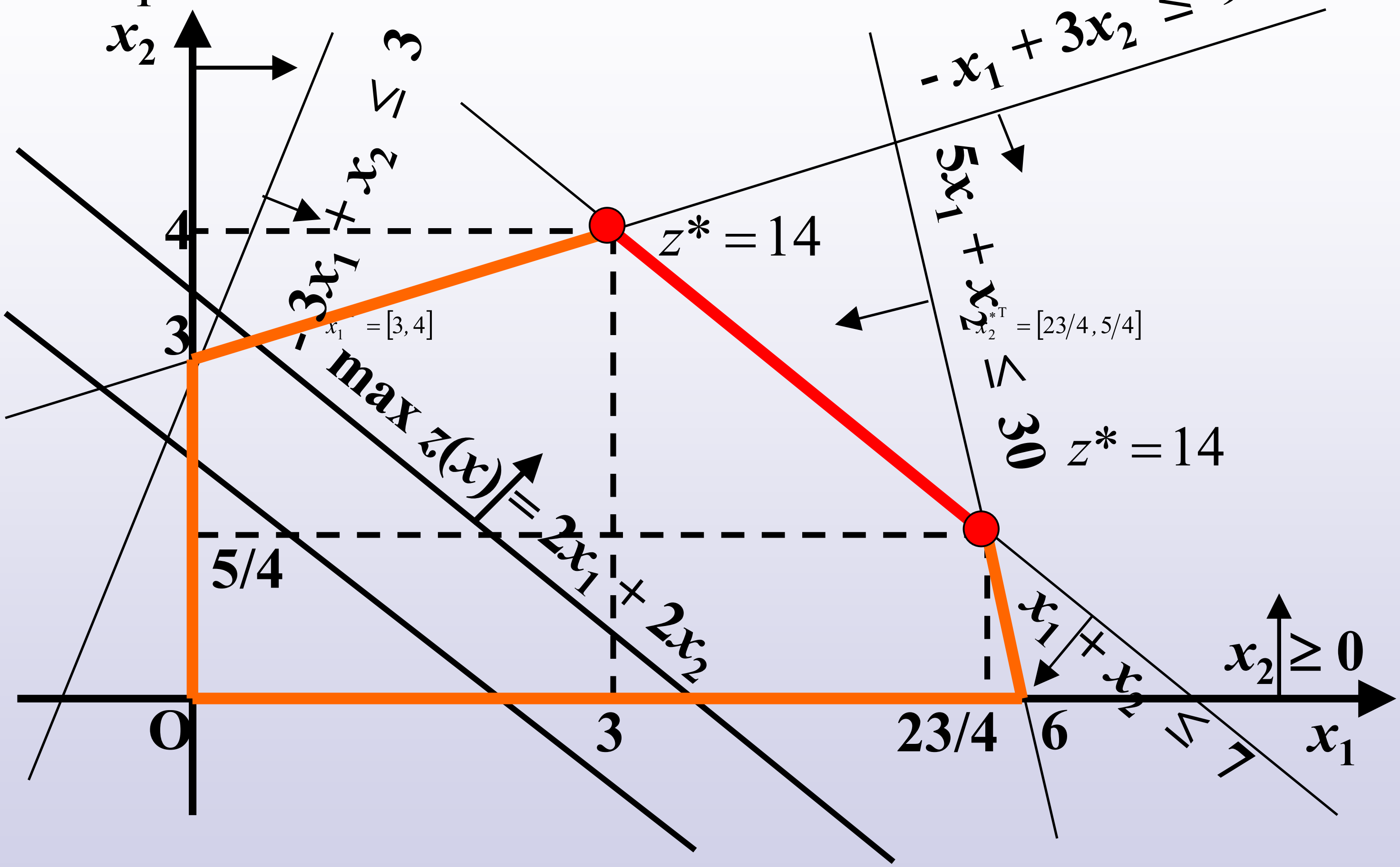
$$
\begin{array}{rrcl}
-3x_1 & +x_2 & \leq & 3 \\
-x_1 & +3x_2 & \leq & 9 \\
+5x_1 & +x_2 & \leq & 30 \\
+x_1 & +x_2 & \leq & 7 \\
x_1, & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

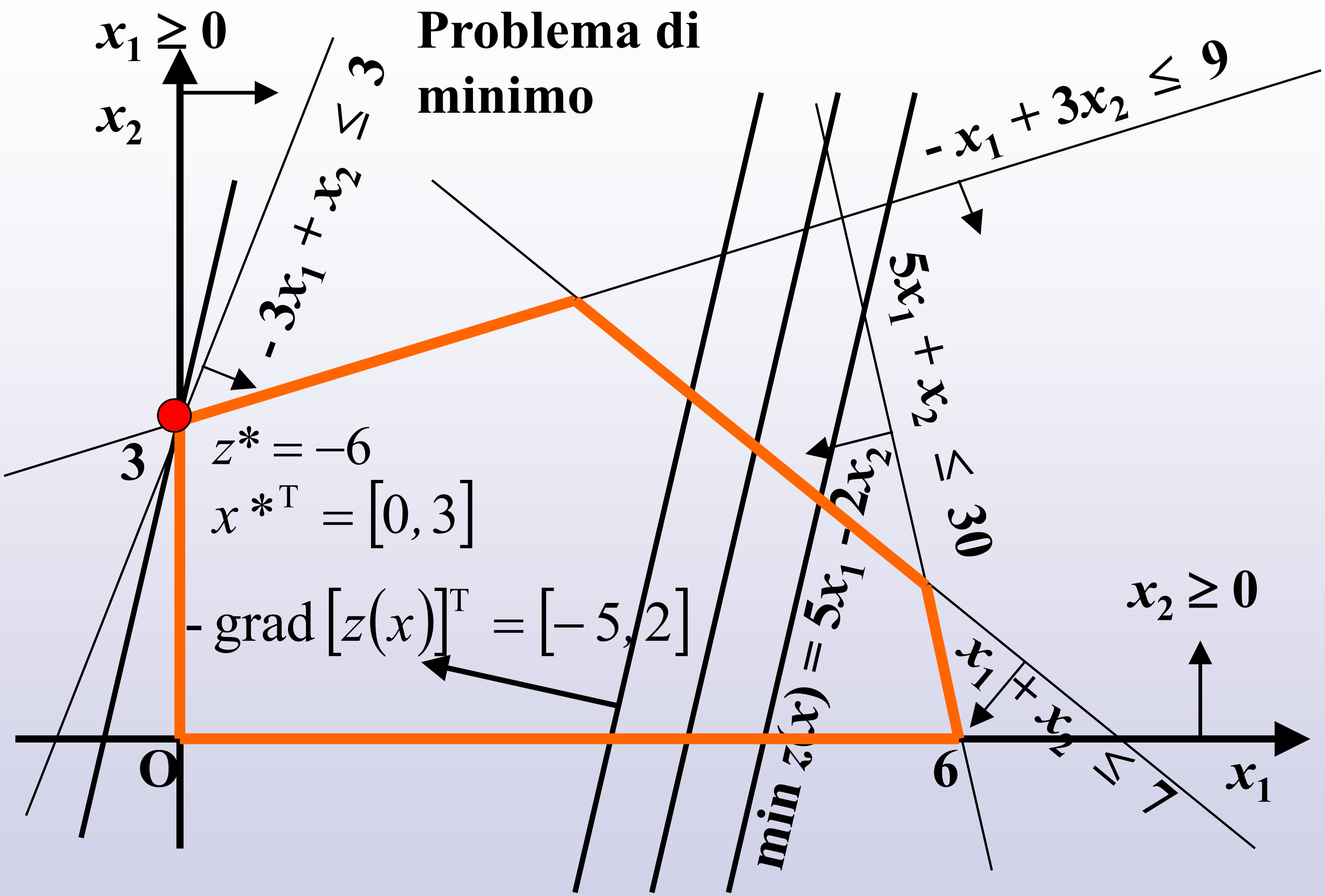

x_2
$x_1 \geq 0$
$-3x_1 + x_2 \leq 3$
$-x_1 + 3x_2 \leq 9$
$5x_1 + x_2 \leq 30$
$x_1 + x_2 \leq 7$
$x_2 \geq 0$
x_1
3
6
O
Ω
$\max z(x) = c^T x = x_1 + 2x_2$



$x_1 \geq 0$
x_2
$-3x_1 + x_2 \leq 3$
$-x_1 + 3x_2 \leq 9$
75/16
4
3
2
O
2
3
81/16
6
$\tilde{x}^{T} = [81/16, 75/16]$
$\hat{x}^{T} = [3, 4]$
$5x_1 + x_2 \leq 30$
$x_1 + x_2 \leq 7$
$x_2 \geq 0$
x_1

Infinite soluzioni ottime

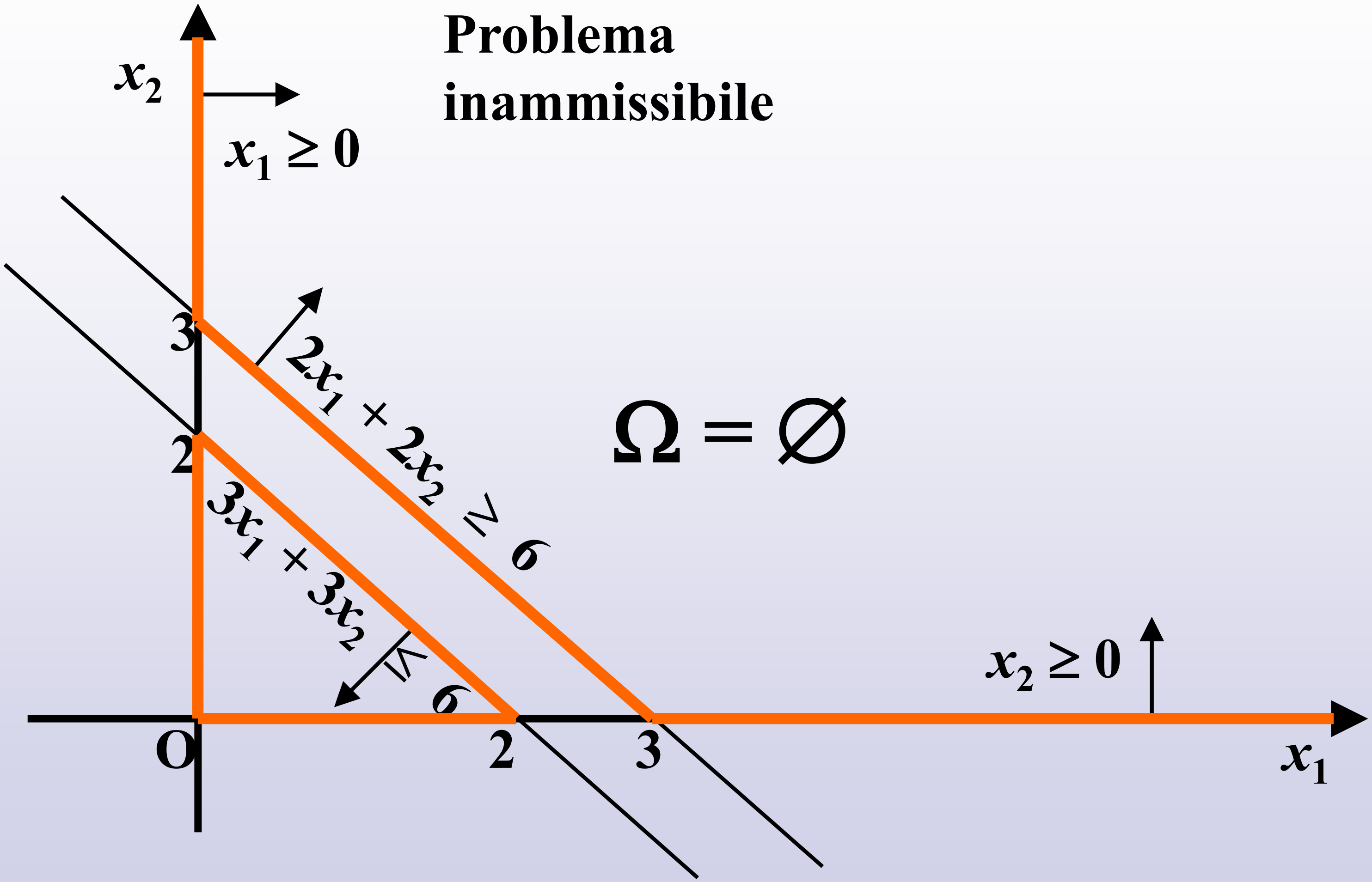




$x_1 \geq 0$
x_2
Problema di minimo
$-3x_1 + x_2 \leq 3$
$-x_1 + 3x_2 \leq 9$
$5x_1 + x_2 \leq 30$
$x_1 + x_2 \leq 7$
$x_2 \geq 0$
x_1
3
O
6
$z^* = -6$
$x^{*\mathrm{T}} = [0, 3]$
$-\,\mathrm{grad}\,[z(x)]^{\mathrm{T}} = [-5, 2]$
$\min z(x) = 5x_1 - 2x_2$

Esercizio

$$
\begin{array}{lllllll}
\max & z(x) & = & -x_1 & -x_2 & & \\
\text{s.v} & & & & & & \\
& 2x_1 & + & 2x_2 & & \geq & 6, \\
& 3x_1 & + & 3x_2 & & \leq & 6 \\
& x_1, & & x_2 & & \geq & 0
\end{array}
$$



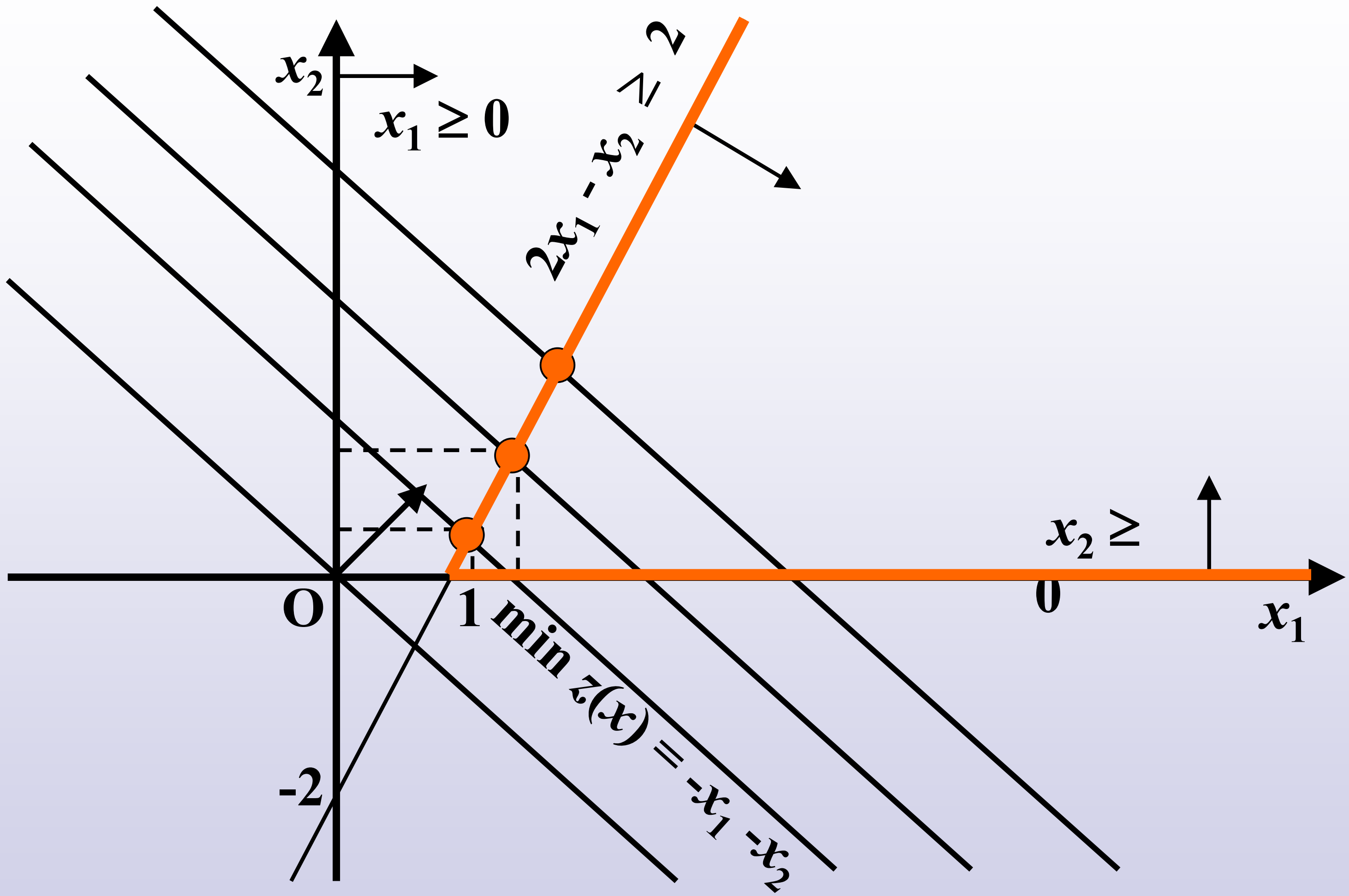
Problema
inammissibile
x_2
$x_1 \geq 0$
$2x_1 + 2x_2 \geq 6$
$3x_1 + 3x_2 \leq 6$
$\Omega = \varnothing$
$x_2 \geq 0$
x_1
O
2
3

Esercizio

$$\min \quad z(x) = -x_1 - x_2$$

s.v

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geq 2 \\ x_1, \; x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



x_2
$x_1 \geq 0$
$2x_1 - x_2 \geq 2$
$x_2 \geq$
0
O
1
-2
x_1
min $z(x) = -x_1 - x_2$

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$max\, z(x) = x_1 - x_2$$

$$s.v.$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Si determinino le coordinate dei vertici della regione ammissibile
- Si risolva il problema per via grafica
- Si verifichi come cambia la soluzione risolvendo il problema di minimo al posto del problema di massimo

Esercizio

Dato il seguente problema di PL:

$$\max z(x) = 3x_1 + x_2$$

$$s.v.$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Lo si risolva per via grafica determinando le coordinate del punto di ottimo ed il valore ottimo di funzione obiettivo
- Si determini la soluzione ottima del problema precedente assumendo che la funzione obiettivo preveda la minimizzazione

Esercizio

Dato il seguente problema di PL:

$$max\, z(x) = x_1 - x_2$$

$$s.v.$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$-2x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2\, x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Si determinino le coordinate dei vertici della regione ammissibile
- Lo si risolva per via grafica determinando le coordinate del punto di ottimo ed il valore ottimo di funzione obiettivo