Statistica e tecnica assicurativa

Salvatore Forte

Il contratto di assicurazione

Art.1882 cod.civ.

"E' il contratto col quale l'assicuratore, verso il pagamento di un premio, si obbliga a rivalere l'assicurato, entro i limiti convenuti, dal danno ad esso prodotto da un sinistro, ovvero a pagare un capitale o una rendita al verificarsi di un evento attinente alla vita umana"

Il contratto di assicurazione

Caratteristiche del contratto:

- *A prestazioni corrispettive*
- *Aleatorio*
- *Ad esecuzione continuata*
- *Ciclo inverso produttivo*

Le assicurazioni contro i danni

Sono contratti con i quali l'Assicuratore, a fronte del pagamento di un premio, si impegna a risarcire (nei limiti convenuti) l'assicurato dei danni materiali provocati da sinistri

Caratteristiche:

- *funzione indennitaria*
- *durata del contratto breve (normalmente un anno)*
- *importo della eventuale prestazione dell'Assicuratore noto solo a posteriori*

Le assicurazioni contro i danni

Classificazione:

- **Danni a cose:** hanno per oggetto un bene materiale, mobile o immobile (incendio, furto, trasporto, eventi naturali, guasti,…)
- **Danni patrimoniali:** hanno per oggetto il patrimonio comprese le obbligazioni verso terzi in conseguenza di fatti lesivi (Responsabilità civile, inattività, …)
- **Danni a persone:** hanno per oggetto eventi che minacciano l’integrità fisica dell’individuo (infortuni, malattie,…)

La gestione dei “rischi assicurati”

- Tramite il contratto di assicurazione l’assicurato dunque attua il trasferimento di un rischio ed, in ogni caso, l’eliminazione di un’alea economica
- L’impresa assicurativa prende su di sé le alee dei propri assicurati e cerca di ridurle attraverso:
  - *La mutualità dei contratti*, con il fine di compensare le perdite e i guadagni
  - *Una esatta tariffazione,* che presuppone l’utilizzo di basi tecniche del 1° ordine il più possibile aderenti alle basi tecniche del 2° ordine

Le operazioni finanziarie aleatorie

Le operazioni finanziarie aleatorie

Sono scambi di importi monetari che si protraggono in successivi istanti di tempo, essendo gli importi e/o le scadenze delle variabili aleatorie

Elementi caratteristici:

- ✓ *Differimento: gli importi sono esigibili/pagabili a diverse scadenze*
- ✓ *Incertezza: può riguardare l'entità delle somme e/o le rispettive scadenze*

Le operazioni finanziarie aleatorie

Esempio:

Y = Variabile rappresentante una situazione aleatoria (ad esempio *V.A. danno*)

$$Y = \begin{cases} y & \text{con probabilità } p \\ 0 & \text{con probabilità } 1-p \end{cases}$$

- Se non si assicura: *Patrimonio iniziale **B*** $\longrightarrow$ *situazione aleatoria*

$$\begin{cases} B - y & \text{con probabilità } p \\ B & \text{con probabilità } 1-p \end{cases}$$

- Se si assicura: paga il premio π

$$B - \pi \longrightarrow \textit{situazione certa}$$

Le operazioni finanziarie aleatorie

SITUAZIONE ALEATORIA + **OPERAZIONE ASSICURATIVA**

SITUAZIONE CERTA

π = prezzo del trasferimento dell'alea

I criteri di scelta delle O. F. aleatorie

- **Criterio della** ***speranza matematica o valor medio*** (utilizzato quando l'investitore non si preoccupa affatto del rischio connesso alla scelta di un prospetto incerto)

- **Criterio dell'*****utilità attesa*** (utilizzato quando l'investitore tiene conto del suo atteggiamento nei confronti del rischio)

Il criterio della speranza matematica

X = Variabile Aleatoria ***guadagno***

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i}$$

E(X) *= Media aritmetica delle determinazioni ponderata con le rispettive probabilità*

Il criterio della speranza matematica

Se:

- $E(X) = 0 \longrightarrow$ *operazione indifferente*
- $E(X) > 0 \longrightarrow$ *operazione vantaggiosa*
- $E(X) < 0 \longrightarrow$ *operazione sfavorevole*

A fronte di due alternative A e B con rispettivi guadagni aleatori, se:

- $E(A) = E(B) \longrightarrow$ *alternative equivalenti*
- $E(A) > E(B) \longrightarrow$ *A è preferibile a B*

Il criterio della speranza matematica

Esempio: Assicurazione Danni

- Il verificarsi dell'evento E provoca un *danno* pari ad y. Stipulando un contratto di assicurazione, l'assicurato paga un premio **p** e ha diritto a riscuotere y se si verifica l'evento E, oppure 0 se E non si verifica. Indichiamo con p la probabilità che E si verifichi e con $(1 - p)$ la probabilità che E non si verifichi.
- Analizziamo le diverse situazioni dal punto di vista dell'assicurato e dell'assicuratore.

Il criterio della speranza matematica

- ***Per l'assicurato:*** il guadagno, conseguente alla stipula del contratto, è aleatorio ed è dato da:

$$X = \begin{cases} y - \pi & \text{con prob} \quad p \\ -\pi & \text{con prob} \quad 1-p \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E(X) = (y - \pi)\, p - \pi(1 - p) = y\, p - \pi}$$

Se:

- $\pi = p\,y \longrightarrow E(X) = 0 \longrightarrow$ *situaz. indifferente*
- $\pi > p\,y \longrightarrow E(X) < 0 \longrightarrow$ *situaz. sfavorevole*
- $\pi < p\,y \longrightarrow E(X) > 0 \longrightarrow$ *situaz. vantaggiosa*

Il criterio della speranza matematica

- ***Per l'assicuratore:*** il guadagno, conseguente alla stipula del contratto, è aleatorio ed è dato da:

$$-X = \begin{cases} \pi - y & \text{con prob} \quad p \\ \pi & \text{con prob} \quad 1-p \end{cases}$$

$$\boldsymbol{E(X) = (\pi - y)\,p + \pi(1 - p) = \pi - p\,y}$$

Se:

- $\pi = p\,y \longrightarrow E(X) = 0 \longrightarrow$ *situazione indifferente*
- $\pi > p\,y \longrightarrow E(X) > 0 \longrightarrow$ *situazione favorevole*
- $\pi < p\,y \longrightarrow E(X) < 0 \longrightarrow$ *situazione svantaggiosa*

Il criterio della speranza matematica

Esempio premio equo:

Un individuo stipula un contratto di assicurazione contro il furto della propria autovettura, il cui valore è di 10.000€. Se la probabilità che il furto si verifichi è pari al 20%, a quanto ammonta il *premio equo*?

$$X = \begin{cases} +\pi - 10.000 & \textit{prob} \quad 0,2 \\ +\pi & \textit{prob} \quad 0,8 \end{cases}$$

$$E(X) = (\pi - 10.000) * 0,2 + \pi * 0,8 = 0$$

$$\pi = \mathbf{2.000}$$

Il criterio della speranza matematica

Difetti del criterio della speranza matematica

- Se il valore atteso non risulta finito l’operazione aleatoria non è valutabile.
- A parità di valore atteso gli importi aleatori potrebbero essere valutati come diversi (varianze diverse) preferendosi quella meno rischiosa.
- Le operazioni assicurative non dovrebbero esistere in quanto l’assicuratore chiede un premio maggiore del premio equo.

Il criterio dell’utilità attesa

- **Il “gioco” che si fa con gli assicuratori non è dunque equo.**
- **Allora perché si stipulano tanti contratti di assicurazione?**
- Mostreremo come, nonostante i caricamenti, il contratto diventi vantaggioso per l’assicurato, e per la Compagnia lo diventi grazie ai caricamenti.
- Preliminare all’impostazione che seguiremo è la nozione di ***funzione di utilità***

Il criterio dell’utilità attesa

Esempio:

- Un investitore deve scegliere, a parità di impiego di capitale iniziale, fra un investimento certo **A** (ad esempio l’acquisto di un titolo certo), che consiste nel ricavare $\mathbf{x_A = 110}$ a fine periodo, ed un *investimento aleatorio **B*** (ad esempio l’acquisto di un titolo rischioso), che consiste nella variabile $\boldsymbol{X_B}$ e che prevede due possibili ricavi a fine periodo:

$$\boldsymbol{x_{B,1}} = \mathbf{105} \qquad \text{con } \boldsymbol{p_1} = \mathbf{0{,}5}$$

$$\boldsymbol{x_{B,2}} = \mathbf{115} \qquad \text{con } \boldsymbol{p_2} = \mathbf{0{,}5}.$$

Il criterio dell'utilità attesa

- Calcolando il valor medio dell'investimento ***B*** otteniamo:

$$\boldsymbol{E(X(B))} = 105 \cdot 0{,}5 + 115 \cdot 0{,}5 = \mathbf{110}$$

Pertanto: $\boldsymbol{E(X(B))} = \boldsymbol{E(x_A)}$

- In base al criterio del valor medio, i <u>due investimenti</u> sono quindi <u>equivalenti</u>.
- In realtà è plausibile che i due investimenti non siano equivalenti per tutti gli investitori.

<u>Infatti il criterio della speranza matematica non tiene conto delle preferenze degli investitori</u>

Il criterio dell'utilità attesa

Funzione di utilità *u(x)*:

- Funzione che associa ad ogni importo certo x un valore che ne misura il grado di preferibilità di un soggetto.

Caratteristiche di u(x):

- Non decrescente, cioè $u(x_1) > u(x_2)\ per\ x_1 > x_2\ [u'(x) > 0]$
- Derivabile almeno due volte, quindi continua.

Il criterio dell'utilità attesa

- Se X è una grandezza aleatoria (ad esempio una V. A. discreta $(x_i\,,\ p_i)$), anche l'utilità del suo possesso è una Variabile Aleatoria dello stesso tipo:

$$\mathrm{U}(X) \longrightarrow [u(x_i),\ p_i]$$

$$\mathrm{E}(U) = \sum_{i=1}^{n} u(x_i) \cdot p_i$$

= Valore medio dell'utilità = *utilità attesa*

- Secondo il criterio dell'utilità attesa, un individuo razionale sceglierà l'alternativa che gli procura l'utilità maggiore, facendo riferimento al *valore atteso della corrispondente utilità.*

Il criterio dell'utilità attesa

Se:

- E (U) = 0 $\longrightarrow$ operazione indifferente
- E (U) > 0 $\longrightarrow$ operazione vantaggiosa
- E (U) < 0 $\longrightarrow$ operazione svantaggiosa

A fronte di <u>due alternative A e B</u> con i rispettivi guadagni aleatori, se:

- $E\ (U_A) = E\ (U_B)$ $\longrightarrow$ Alternative equivalenti
- $E\ (U_A) > E\ (U_B)$ $\longrightarrow$ A è preferibile a B

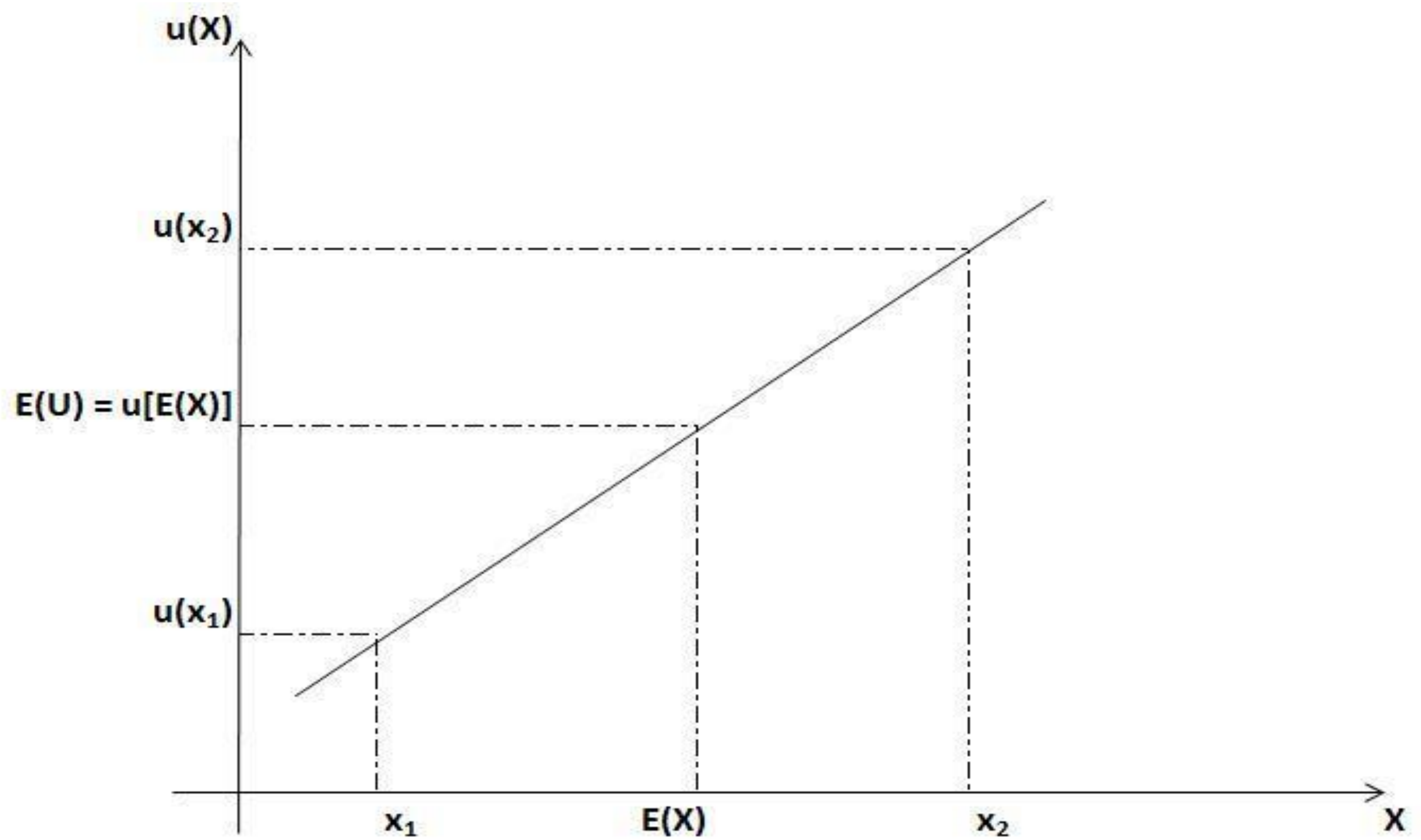
Il criterio dell’utilità attesa

La forma della funzione di utilità determina l’*attitudine dell’individuo nei confronti del rischio.*

- Se la *funzione di utilità è lineare* l’individuo è *neutrale nei confronti del rischio* (l’utilità attesa di prospetto aleatorio è uguale all’utilità del valore atteso di X):

$$\mathbf{E(U) = u[E(X)]}$$

Il criterio dell'utilità attesa



Il criterio dell'utilità attesa

- Per un individuo *neutrale nei confronti del rischio*, il criterio del valor medio ed il criterio dell'utilità attesa forniscono quindi il medesimo risultato.
- Con riferimento all'*esempio* precedente (scelta tra il titolo certo e il titolo rischioso), l'investitore "*indifferente*" al rischio giudica le due opportunità equivalenti.
- Il criterio della speranza matematica può quindi essere considerato come un caso particolare del criterio dell'utilità attesa.

Il criterio dell’utilità attesa

- Se **$E(U) < u\ [E(X)]$**, l’individuo è *avverso al rischio* (funzione concava).
- Riprendiamo l’*esempio* precedente:
- ✓ *Alternativa A*: acquisto titolo certo con ricavo $x_A = 110$
- ✓ *Alternativa B*: acquisto titolo rischioso, con possibili ricavi: $x_{B,1} = 105$, con $p_1 = 0{,}5$; $x_{B,2} = 115$,con $p_2 = 0{,}5$.
- L’individuo *avverso al rischio* preferisce il titolo certo *A* che gli assicura un reddito certo di 110, piuttosto che il titolo rischioso *B*
- Infatti, a parità di valor medio, “*preferisce non rischiare*” acquistando il titolo B, temendo che possa verificarsi l’esito $x_{B,1}$

Il criterio dell'utilità attesa

Esempio (avversione al rischio):

Sia **X** un investimento aleatorio che consente di ottenere un ricavo di 100€ con una probabilità pari al 60% oppure un ricavo di 20€ con una probabilità del 40%

- Il valore atteso di tale investimento è

$$E(X) = 0{,}6 \cdot 100 + 0{,}4 \cdot 20 = 68€$$

68€ rappresenta il guadagno atteso dell'investimento aleatorio, ma anche il prezzo equo dell'investimento stesso (capitale da investire in X). Se l'individuo non effettua l'investimento allora possiede certamente la somma di 68 €.

Sia $\mathrm{u}(X) = \sqrt{x}$ la funzione di utilità di un individuo avverso al rischio.

Il criterio dell'utilità attesa

- L'utilità che l'individuo percepirebbe se, invece di attuare l'investimento X aleatorio, si tenesse la somma di 68€ è data da:

$$u[E(X)] = \sqrt{68} = 8{,}25$$

- Invece, l'utilità attesa dell'investimento aleatorio è data da:

$$E(U) = 0{,}6 \cdot \sqrt{100} + 0{,}4 \cdot \sqrt{20} = 7{,}79$$

Come si può notare:

$$E(U) < u[E(X)]$$

che indica come, per tale individuo, le "somme incerte" valgono meno del loro valore atteso

Il criterio dell’utilità attesa

- Ci chiediamo: qual è quell’importo certo **E_C** (**Equivalente Certo**) che l’individuo considera equivalente all’investimento aleatorio, cioè quell’importo che assicura all’individuo la stessa utilità dell’investimento aleatorio?

$$u(E_C) = E(U)$$

cioè:
$$\sqrt{E_C} = 7{,}79$$

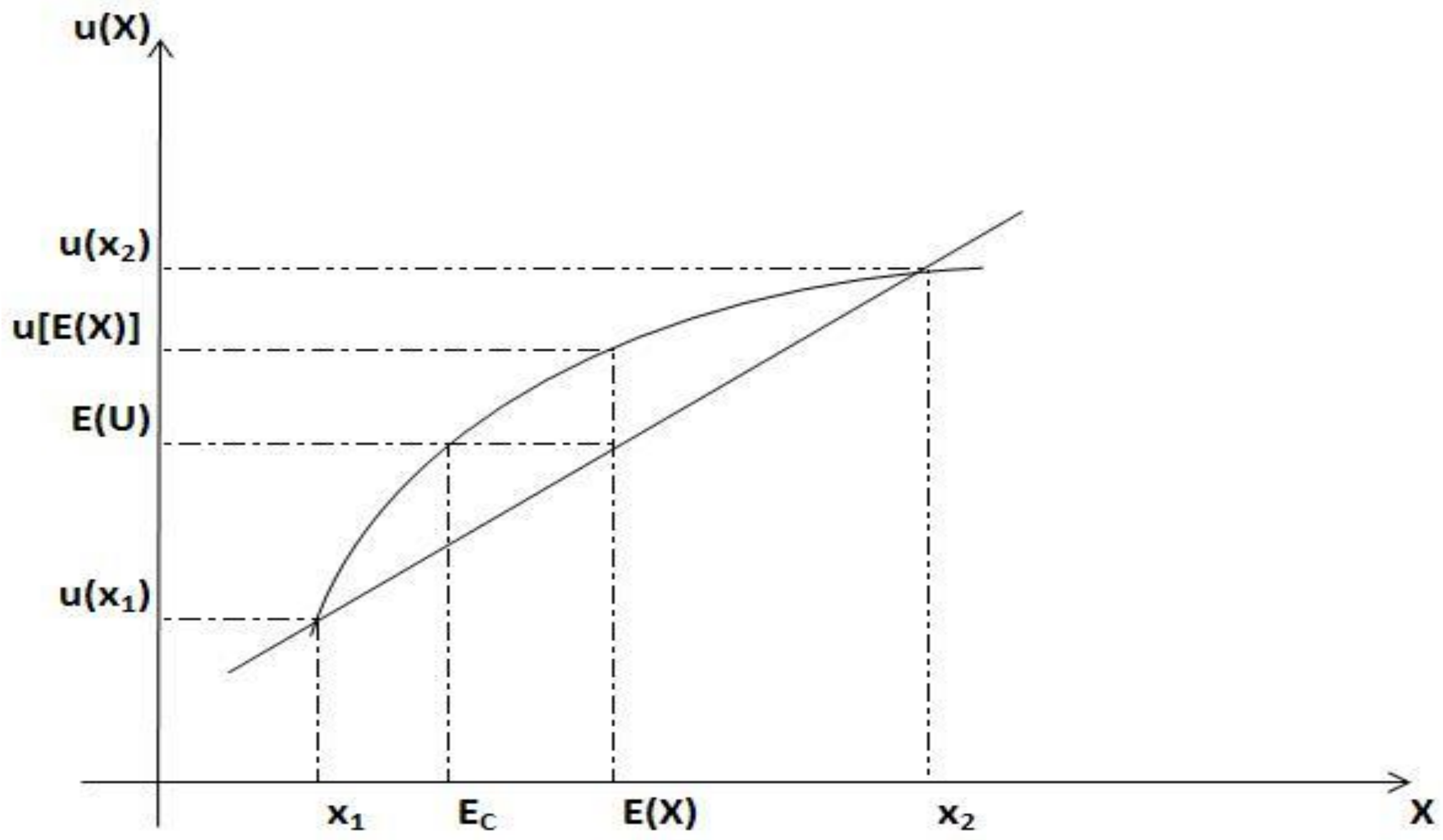
Da cui:
$$E_C = 60{,}68€$$

- Pertanto, l’individuo considera un valore certo di 60,68€ equivalente all’investimento aleatorio X, il cui valore atteso è invece pari a 68€.
- Questo dimostra la sua preferenza ad evitare situazioni rischiose.

$\Delta = E_c - E(X) < 0$ (“**premio per il rischio**”)

Il criterio dell'utilità attesa

Grafico individuo avverso al rischio



Il criterio dell'utilità attesa

- Se **E(U) > u[E(X)]**, l'individuo è *propenso al rischio*
- Con riferimento all'ultimo *esempio*, sia $\mathbf{u(x) = x^2}$ la funzione di utilità di un individuo propenso al rischio.
  - *Il valore atteso di tale investimento è:*

$$E(U) = 0{,}6 \cdot \mathbf{100} + 0{,}4 \cdot \mathbf{20} = 68€$$

  - *L'utilità che l'individuo percepirebbe se, invece di attuare l'investimento X aleatorio, si tenesse la somma di 68€ è data da:*

$$u\,[E(X)] = \mathbf{68^2} = 4.624$$

Il criterio dell'utilità attesa

- Invece, l'utilità attesa dell'investimento aleatorio è data da:

$$E(U) = 0{,}6 \cdot 100^2 + 0{,}4 \cdot 20^2 = 6.160$$

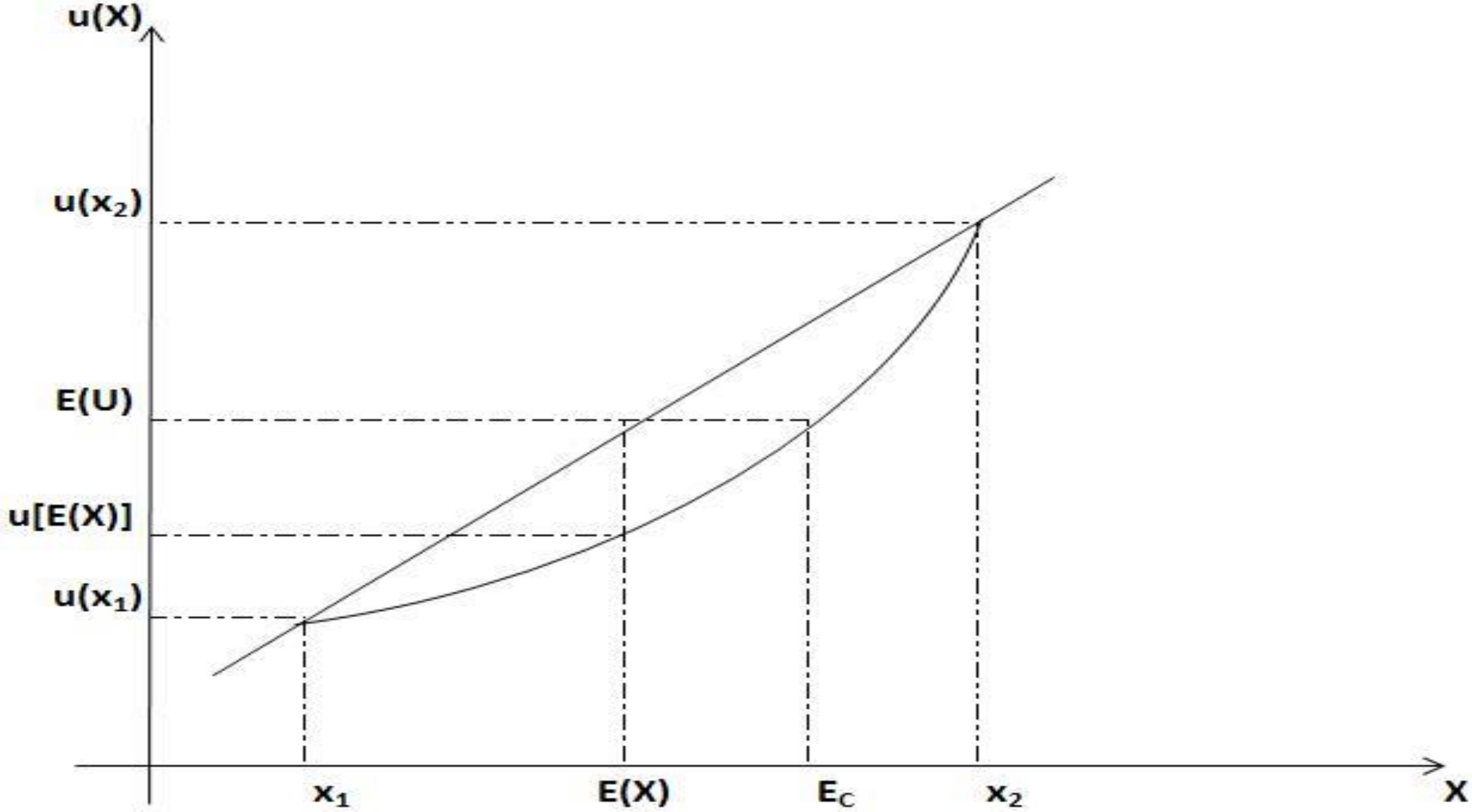
Come si può notare:

$$E(U) > u[E(X)]$$

L'individuo preferisce il gioco alla certezza di ottenere il suo valore atteso

Il criterio dell'utilità attesa

Grafico individuo propenso al rischio



Il criterio dell'utilità attesa

Esempio Assicurazione Danni:

- B = 100 patrimonio iniziale di un individuo
- y = *20* entità del danno (certo, se E si verifica)
- p = *50%* probabilità che E si verifichi
- **u(x) = ln(x)** *funzione di utilità dell'individuo*
- π = 10,15 premio assicurativo (premio equo + caricamenti)

- Calcolare il *premio equo* e valutare se per l'individuo è vantaggioso assicurarsi e, in caso affermativo, calcolare il *premio massimo* che è disposto a pagare e il *caricamento massimo sul premio equo* che è disposto a versare pur di trasferire il rischio che l'evento E si verifichi all'assicuratore.

Il criterio dell'utilità attesa

- *Calcoliamo il premio equo* (valor medio della V.A. danno):

$$\mathbf{P} = E(Y) = y * p + 0 * (1-p) = 20 * (1/2) = \mathbf{10}$$

Quindi, in un contratto assicurativo equo, il premio da pagare alla Compagnia sarebbe pari a 10.

Il premio richiesto dalla Compagnia è invece pari a 10,15 ed è composto dal premio equo P (=10) + il caricamento C (=0,15)

$$\boldsymbol{\pi = P + C}$$

- *Valutiamo la convenienza ad assicurarsi*
  - ✓ La *situazione aleatoria* dell'individuo (*se non stipula il contratto*) è la seguente:

Il criterio dell'utilità attesa

$$\begin{cases} B - y = 80 & \text{con prob} \quad 50\% \\ B = 100 & \text{con prob} \quad 50\% \end{cases}$$

- ✓ Sostituiamo agli importi monetari le loro utilità:

$$U = \begin{cases} \mathbf{ln\ (80)} = 4{,}3820 & \text{con prob} \quad 50\% \\ \mathbf{ln\ (100)} = 4{,}6052 & \text{con prob} \quad 50\% \end{cases}$$

Il criterio dell'utilità attesa

- ✓ Calcoliamo l' *utilità attesa* della *situazione aleatoria* (*se non si assicura*)

$$E\,[U] = u(B - y) * p + u(B) * (1\text{-}p) =$$

$$= 4{,}3820 * 0{,}5 + 4{,}6052 * 0{,}5 = \mathbf{4{,}4936}$$

- ✓ L' *utilità della situazione certa* (*se si assicura*), invece è:

$$u(B - \pi) = \ln\,(100 - 10{,}15) = \ln\,(89{,}85) = \mathbf{4{,}498}$$

Poiché l'utilità *se si assicura* è maggiore dell'utilità attesa *se non si assicura*, gli conviene assicurarsi.

Il criterio dell'utilità attesa

- *Calcoliamo il premio massimo* (π_{max}) che è disposto a pagare per assicurarsi.
  - ✓ L'utilità di ($B - \pi_{max}$) deve risultare = all'utilità attesa della situazione aleatoria (*se non si assicura*).
  - ✓ Risolviamo quindi rispetto a π_{max} la seguente equazione:

$$u(B - \pi_{max}) = E(U)$$

$$\ln(100 - \pi_{max}) = 4{,}4936$$

da cui: $$100 - \pi_{max} = e^{4{,}4936}$$

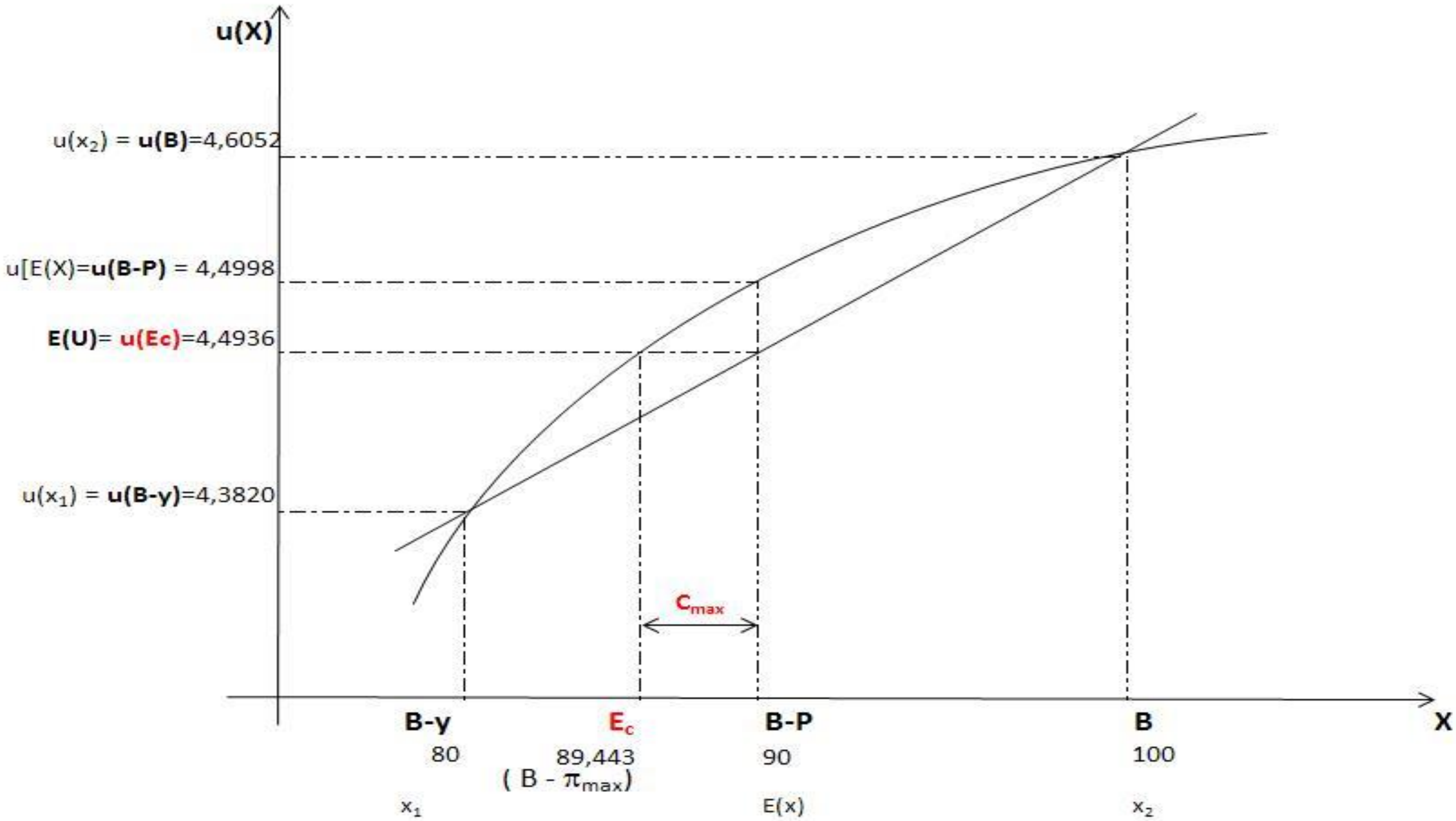
$$\pi_{max} = 100 - e^{4{,}4936} = 100 - 89{,}443 = \mathbf{10{,}557}$$

Il criterio dell'utilità attesa

- *Calcoliamo il caricamento massimo* (= **C_{max}**) sul premio equo, che l'individuo è disposto a pagare pur di togliersi dalla situazione rischiosa:

$$\mathbf{C_{max}} = \pi_{max} - E(X) = 10{,}557 - 10 = \mathbf{0{,}557}$$

Il criterio dell’utilità attesa



Le caratteristiche del business assicurativo

- I prodotti assicurativi
  - <u>L’assicurazione contro i danni</u>
    - L’assicurazione contro i danni: una possibile classificazione
      - Rami Auto
      - Rami Elementari
    - La classificazione dei rischi nei rami danni
  - L’assicurazione sulla vita

L’assicurazione contro i danni

- **<u>L’assicurazione contro i danni</u>**:
  - Oggetto: risarcire l’assicurato nel caso in cui questi sia colpito da eventi che comportano una riduzione della sua ricchezza o una diminuzione della capacità di generare reddito
  - il rischio con particolare riferimento ai rischi puri
  - L’assicuratore immette il singolo rischio in una collettività di rischi omogenei → mutualità
  - Se il rischio non è interamente supportabile → ripartizione dei rischi
    - Coassicurazione
    - Riassicurazione

L’assicurazione contro i danni

- **<u>Una classificazione sulla base dell’oggetto della copertura assicurativa</u>**:
  - Le assicurazioni di persone
  - Le assicurazioni delle cose e del patrimonio
  - Le assicurazioni di responsabilità

L’assicurazione contro i danni

- Le assicurazioni di persone:
  - copertura contro i rischi derivanti da infortuni o da malattie
    - Spese necessarie per le cure mediche
    - Perdita di reddito a causa dell’inabilità dell’assicurato
      - Invalidità parziale o totale, temporanea o duratura
    - Infortuni: risarcimento in denaro (capitale o rendita) qualora una causa fortuita, violenta ed esterna comporti l’invalidità permanente o l’inabilità temporanea o la morte
      - Entità del risarcimento → funzione della riduzione di capacità dell’assicurato di produrre reddito
      - Escluse dalla copertura → infortuni avvenuti in seguito ad attività o discipline sportive altamente rischiose
    - Malattia: indennità giornaliera, rimborso spese mediche per cause interne e non violente

L’assicurazione contro i danni

- Le assicurazioni delle cose e del patrimonio:
  - Copertura contro i rischi che possono colpire i beni di proprietà, ovvero il patrimonio → furto, incendio
  - Coperture che offrono garanzie di tipo finanziario
    - Credito: copertura del rischio di inadempimento da parte di un creditore dell’assicurato
    - Cauzioni: copertura del rischio di inadempimento da parte dell’assicurato verso terzi
    - Tutela giudiziaria: nel caso in cui l’assicurato è chiamato in causa da terzi
    - Perdite pecuniarie: dovute a fattori esogeni rispetto al comportamento dell’assicurato
    - Assistenza: la prestazione è solitamente un servizio
      - Ad esempio: trasporto del veicolo incidentato

L’assicurazione contro i danni

- Le assicurazioni di responsabilità:
  - Copertura in riferimento ai potenziali danni che l’assicurato potrebbe causare a terzi in seguito ad azioni di cui egli, i suoi figli minorenni o i beni di sua proprietà sono responsabili
    - Attività industriali o professionali
    - R.C. Auto
    - Attività non professionali → attività sportive (sci)
  - Obbligatorietà di alcune di esse
  - Delimitazione della validità temporale
    - *Losses occurring*: il sinistro si verifica nel periodo in cui è in vigore la copertura
    - *Claims made*: il sinistro viene denunciato durante il periodo in cui è vigore la polizza
      - Danni ambientali, responsabilità mediche

L’assicurazione contro i danni: una possibile classificazione

- **I Rami Auto**
  - Responsabilità civile Auto: copertura in riferimento ai potenziali danni che l’assicurato potrebbe causare a terzi con il proprio autoveicolo
  - Corpi veicoli terrestri (CVT): copertura dei rischi collegati ai danni subiti dall’autoveicolo ad esclusione della responsabilità civile
    - incendio, furto, grandine, ecc.
- **I principali Rami non Auto (rami elementari)**
  - Responsabilità civile generale: copertura in riferimento ai potenziali danni che l’assicurato potrebbe causare a terzi diversi da quelli auto
  - Infortuni: copertura in riferimento ai potenziali danni corporali causati da eventi esterni violenti o fortuiti

I Rami Auto

- Funzione sociale
- Obbligatorietà della copertura R.C. Auto
  - Obbligo da parte della domanda: ogni proprietario di autoveicolo è obbligato a stipulare una polizza R.C. Auto
  - Obbligo da parte dell'offerta (obbligo a contrarre): obbligo da parte delle compagnie di accettare tutte le proposte di assicurazione
  - Legge n. 990/1969 → attuazione della Convenzione di Strasburgo del 1959 per la tutela delle vittime stradali
    - Fondo di Garanzia Vittime della Strada (FGVS): rimborso in caso di sinistro causato da un veicolo non identificato oppure assicurato presso una compagnia insolvente in quanto in liquidazione coatta amministrativa
- Fino al 7/1994 → tariffa amministrata con delibera del Comitato Interministeriale Prezzi (CIP)
- Dopo il 7/1994 → liberalizzazione delle tariffe

I Rami elementari

- Responsabilità civile generale:
  - Le compagnie sono molto attente onde evitare selezione avversa
  - Responsabilità professionale: carenza di offerta assicurativa
    - Medici: ginecologi, chirurghi
    - Tale tendenza è in linea con gli altri paesi europei
  - Andamenti tecnici spesso non profittevoli
    - Mutamento dell'atteggiamento degli assicurati → maggiore tendenza alla valutazione dell'adeguatezza delle cure, dell'operato e delle strutture mediche
    - Cambiamenti normativi a vantaggio degli assicurati
- Malattia

Indici sintetici di sinistralita' in assicurazioni danni

Quota danni

- Si ipotizzi di aver esaminato la storia di ciascuno di un certo numero *r* di rischi, giudicati "analoghi", per un intero periodo di esposizione (anno)
- Siano stati registrati globalmente *n* sinistri i cui rispettivi costi (risarcimenti all'assicurato al netto delle spese di liquidazione) siano stati $c_1, c_2, \ldots, c_n$
- Il rapporto tra il costo globale ed il numero *r* delle esposizioni è detto *quota danni* (esso è propriamente un risarcimento medio)

$$\boxed{Q = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{r}}$$

- Pensando di imputare a ciascuno degli *r* rischi un costo *Q* avremmo realizzato l'equilibrio con il costo effettivamente sostenuto, quindi *Q* ha le "sembianze" del premio equo

Costo medio

- Facendo intervenire anche il numero n dei sinistri risarciti, la quota danni può essere riscritta mettendo in evidenza il costo medio di sinistro $\bar{c}$

$$\boxed{Q = \frac{n}{r} \cdot \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n} = \frac{n}{r} \cdot \bar{c}}$$

Indice di sinistrosità

- Il rapporto *n/r* è a sua volta interpretabile come numero medio di sinistri che colpiscono in un periodo di osservazione un rischio. Esso è detto a volte *indice di sinistrosità*
- Si osservi in proposito che, di norma, il rapporto *n/r* si mantiene inferiore a 1 ma in base alle definizioni di n e di r esso potrebbe superare l'unità, come accade, ad esempio, nei contratti di assicurazione collettiva contro l'infortunio. Una singola polizza (*r=1*) può registrare un numero n anche elevato di sinistri nel periodo contrattuale

Indice di ripetibilità

- Decomposto, allo scopo, il numero r di rischi nella somma $r=r_0+r_1+\ldots+r_h$, dove r_j è il numero r dei rischi hanno registrato esattamente j sinistri ($j=0,1,2,\ldots,h$ e sarà $h \leq n$), di conseguenza, avremo:

$$n = r_1 + 2r_2 + \ldots + hr_h$$

- La "frequenza" può essere fattorizzata nella seguente forma

$$\frac{n}{r} = \underbrace{\frac{r_1 + 2r_2 + \ldots + hr_h}{r_1 + r_2 + \ldots + r_h}}_{\text{Indice di ripetibilità}} \cdot \underbrace{\frac{r - r_0}{r}}_{\text{Frequenza di almeno un sinistro}}$$

- Il primo rapporto rappresenta il numero medio di sinistri per rischio sinistrato e ad esso si dà il nome di *indice di ripetibilità*
- Il secondo rapporto è il complemento a 1 della frequenza osservata di non sinistro

Grado medio di danno

- Con riferimento ad r rischi "analoghi", siano w_1, w_2, …, w_r, i valori delle rispettive esposizioni (somme assicurate) e, indicando con $\overline{w}$ la somma media assicurata, si ha che la somma assicurata complessiva risulta pari a

$$w = \sum_{k=1}^{r} w_k = r\overline{w}$$

- Siano c_1, c_2, …, c_n i risarcimenti imputabili agli n sinistri denunciati nell'esercizio dagli r rischi; il costo medio è definito come

$$\sum_{h=1}^{n} c_h = n\overline{c}$$

- Il rapporto tra il costo medio e l'esposizione media prende il nome di *grado medio di danno*

$$\boxed{\frac{\overline{c}}{\overline{w}}}$$

Tasso di premio statistico

- E' detto *tasso di premio statistico* (propriamente, tasso medio di premio relativo agli r rischi statisticati) il rapporto tra risarcimento globale ed esposizione globale, cioè il rapporto

$$\boxed{\tau = \frac{\sum_{h=1}^{n} c_h}{\sum_{k=1}^{r} w_k} = \frac{n\bar{c}}{r\bar{w}} = \frac{n}{r} \cdot \frac{\bar{c}}{\bar{w}}}$$

- Il tasso di premio è il prodotto della frequenza di sinistro per il grado medio di danno

Il calcolo del premio

IL CARICAMENTO DI SICUREZZA

Π = premio incassato

S = risarcimento globale

→ ***G*** = ***Π*** - ***S*** = guadagno dell'assicuratore

Il premio equo è quel premio che rende nullo il guadagno → ***principio di equità***

$$\boldsymbol{E(G) = \Pi - E(S) = 0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Pi = P = E(S)}$$

Il premio equo è ***privo di interesse economico*** in quanto non consente all'assicuratore di conseguire un guadagno positivo, infatti egli è disposto ad acquisire la copertura solo se

$$\Pi > E(S)$$

CARICAMENTO DI SICUREZZA

$$\Pi = E(S) + r \qquad\qquad E(G) = E(\Pi) - E(S) = r$$

Il calcolo del premio

IL PREMIO PURO

Definizione

Premio equo + Caricamento di sicurezza = PREMIO PURO

Distinguiamo:

- Caricamento ***implicito*** → utilizzo una base tecnica più prudenziale, favorevole all'assicuratore
- Caricamento ***esplicito*** → è pari ad uno o più valori caratteristici della distribuzione di probabilità di S

Il calcolo del premio

IL PREMIO PURO

$$\Pi = H(S)$$

Cos'è H?

- È chiamato *"principio di calcolo del premio puro"*
- È un "funzionale" che associa un numero reale (premio puro) alla distribuzione di probabilità di S
- Dipende dalla funzione di ripartizione di S oppure utilizza alcuni valori caratteristici della distribuzione di probabilità di S

Il calcolo del premio

IL PREMIO PURO

Alcuni principi di calcolo del premio puro

Principio del valore atteso → $\Pi = (1+\alpha) \cdot E(S)$ con $\alpha > 0$

Utilizzato per la sua semplicità, sintetizza la rischiosità del contratto solo nel valor atteso del risarcimento globale con un caricamento proporzionale ad E(S)

Principio della varianza → $\Pi = E(S) + \beta \cdot Var(S)$ con $\beta > 0$

In base a tale principio, il caricamento di sicurezza è proporzionale alla rischiosità del contratto, misurata mediante la varianza di S

Principio dello scarto quadratico medio → $\Pi = E(S) + \gamma \cdot \sigma(S)$ con $\gamma > 0$

In base a tale principio, il caricamento di sicurezza è proporzionale alla dev.std di S

Il calcolo del premio

IL CARICAMENTO PER SPESE E IL PREMIO DI TARIFFA

Nelle assicurazioni contro i danni bisogna considerare, ad esempio:

1.Le spese di acquisizione del contratto, come ad esempio la provvigione di acquisto che costituisce il compenso dell'agente

2.Le spese di incasso premi, come ad esempio la provvigione di incasso corrisposta all'agente come compenso per aver curato l'incasso dei premi

3.Le spese generali di gestione che comprendono varie voci di spese generali sostenute dall'impresa assicuratrice per l'amministrazione del contratto

Tali importi sono imputati all'assicurato mediante un caricamento per spese determinato mediante un principio di equità, ovvero per ciascuna categoria di spesa, avendo però un atteggiamento prudenziale.

Premio di tariffa (o commerciale) $\Rightarrow$ $C = \Pi + s$

dove s rappresenta il caricamento per spese

Il calcolo del premio

IL PREMIO DI TARIFFA

I principi di calcolo

Principio del caricamento proporzionale → $C = \Pi \cdot (1+a)$ con $a > 0$

Il caricamento è proporzionale al premio puro (adatto per le spese di acquisizione del contratto e incasso dei premi), fa sì che gli assicurati con più alti livelli di sinistrosità contribuiscano alle spese, in misura proporzionalmente maggiore rispetto agli assicurati con più bassi livelli di sinistrosità.

Principio del caricamento costante → $C = \Pi + b$ con $b > 0$

Il caricamento è indipendente dalla rischiosità del contratto (adatto per le spese di gestione)

Principio del caricamento lineare → $C = \Pi \cdot (1+a') + b'$ con $a', b' > 0$

Rappresenta una buona soluzione per dividere i caricamenti proporzionali da quelli non proporzionali

I Modelli Probabilistici per le assicurazioni contro i danni

Sinistri, Danni, Risarcimenti

- Nel periodo di copertura, in genere un anno, il contratto di assicurazione è colpito da un ***numero aleatorio, N,*** di **sinistri.**

- Ciascun sinistro ***i*** (*i=1,2,…*) ***in ordine cronologico*** determina un **danno** ***di importo aleatorio*** $\boldsymbol{Z_i}$.

N: variabile aleatoria che rappresenta il **numero di sinistri**, *le cui possibili determinazioni sono i numeri naturali*

$\boldsymbol{Z_i}$***:*** variabile aleatoria che rappresenta il **danno** relativo all'*i*-esimo sinistro, *le cui possibili determinazioni sono i numeri reali*

Sinistri, Danni, Risarcimenti

- In corrispondenza del danno Z_i l'assicuratore effettua, a beneficio dell'assicurato, il ***pagamento dell'importo aleatorio*** $\boldsymbol{Y_i}$, denominato **risarcimento**.

Relazione tra il **Danno** ed il **Risarcimento**

$$Y_i = \varphi(Z_i)$$

ovviamente
$0 \leq Y_i \leq Z_i$

φ(·) è funzione di risarcimento rappresentativa delle condizioni contrattuali di copertura.

Sinistri, Danni, Risarcimenti

ESEMPI

- Copertura a *valore intero o garanzia illimitata* $Y = Z$

- Copertura con *massimale M* $Y = \min(Z, M)$

Ossia →

$$Y = \begin{cases} Z & se\ Z \leq M \\ M & se\ Z > M \end{cases}$$

- Copertura *a primo rischio relativo* $Y = \min(\rho \cdot Z, M)$

con ρ = V'/V ossia è il rapporto tra il valore dichiarato dall'assicurato V' ed il valore del bene V.

Sinistri, Danni, Risarcimenti

ESEMPI

- Copertura con *franchigia assoluta f* $Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le f \\ Z - f & \text{se } Z > f \end{cases}$

- Copertura con *franchigia relativa* $Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le f \\ Z & \text{se } Z > f \end{cases}$

- Copertura con *franchigia assoluta f* e *massimale di garanzia M*

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{se } Z \le f \\ Z - f & \text{se } f < Z \le M \\ M - f & \text{se Z > M} \end{cases}$$

- Copertura con *aliquota di scoperto ξ* $Y = (1 - \xi) \cdot Z$

Il Costo Sinistri Aggregato

Il ***risarcimento globale X*** relativo ad un dato intervallo temporale, solitamente un anno, è dato da:

$$\boxed{S = \sum_{i=0}^{N} Y_i}$$

dove Y_0 è l'importo certo nullo.

S è una variabile aleatoria *le cui possibili determinazioni sono i numeri reali non negativi.*

NOTA: Si evidenzia che è ***trascurata*** la **componente finanziaria** relativa alla diversa collocazione temporale dei sinistri e dei conseguenti risarcimenti posti a carico dell'assicuratore. Ciò si giustifica con l'usuale ***brevità del periodo di copertura***.

La Base Tecnica del Rischio

Si consideri un **portafoglio di contratti** di assicurazione ***riferiti*** ad un **medesimo tipo di rischio**

IPOTESI:

1. I contratti siano tutti contemporaneamente stipulati
2. I contratti siano contraddistinti da un eguale periodo di copertura
3. Il portafoglio sia composto da **rischi analoghi**, con riferimento:

   a) alle caratteristiche del rischio adeguatamente valutabili, all'epoca di stipulazione del contratto, da parte dell'assicuratore;

   b) alle condizioni contrattuali di copertura;

   c) ai valori monetari di esposizione al rischio *(ad esempio i valori dei beni assicurati o i massimali di garanzia).*

La Base Tecnica del Rischio

Sotto tali ipotesi i **rischi** del portafoglio sono tra loro :

- qualitativamente e quantitativamente **omogenei** ***rispetto ai suddetti elementi***;

- **eterogenei** ***rispetto*** ad eventuali ***caratteristiche non*** adeguatamente ***valutabili all'epoca di stipula del contratto*** *(ad esempio, nell'assicurazione di responsabilità civile autoveicoli: il comportamento alla guida, la conoscenza del codice, i chilometri annui percorsi,...);*

Si scelga a caso un rischio nel portafoglio e sia

$$S = \sum_{i=0}^{N} Y_i \ ,$$

il **risarcimento globale** a carico dell'assicuratore, con $Y_i = \varphi(Z_i)$.

La Base Tecnica del Rischio

La Teoria collettiva del rischio

N numero aleatorio di sinistri che colpiscono il portafoglio
$\boldsymbol{Y_1, Y_2, \dots, Y_N}$ importo aleatorio del risarcimento da associare ad ogni sinistro

$\boldsymbol{S = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N}$ importo del ***risarcimento aggregato***

Ipotesi di indipendenza

1. condizionatamente all'evento "$N=n$", le variabili aleatorie $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sono indipendenti e identicamente distribuite;
2. condizionatamente all'evento "$N=n$", la distribuzione delle variabili aleatorie $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ non dipende da n;
3. la distribuzione di N non dipende dai valori assunti dalla variabili aleatorie $Y_1, Y_2, \dots$

Conseguenze

1. medesima funzione di ripartizione per ogni variabile aleatoria $F_Y(y) = \Pr ob(Y_i \leq y)$
2. la distribuzione di X risulta determinata una volta note le distribuzioni del numero di sinistri e del loro costo

$$F_S(s) = \Pr(S \leq s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \Pr(S \leq s \mid N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_Y^{*n}(s)$$

$$f_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_Y^{*n}(s)$$

$$\boxed{E(S) = E(N) \cdot E(Y)}$$

$$\boxed{Var(S) = E(N) \cdot Var(Y) + Var(N) \cdot [E(Y)]^2}$$

La Base Tecnica del Rischio

La varianza di S può essere calcolata nel seguente modo:

$$Var(S) = E(S^2) - E(S)^2$$

Il primo termine:

$$E(S^2) = \sum_{h=1}^{+\infty} P(N=h) E(S^2 \mid N=h)$$

$$= \sum_{h=1}^{+\infty} \pi_h E\left[\left(\sum_{i=1}^{h} Y_i \right)^2 \middle| N=h \right]$$

$$= \sum_{h=1}^{+\infty} \pi_h \left[\sum_{i=1}^{h} E(Y_i^2 \mid N=h) + \sum_{i=1}^{h} \sum_{i \neq j} E(Y_i Y_j \mid N=h) \right]$$

La Base Tecnica del Rischio

A seguito delle ipotesi di indipendenza:

$$E(Y_i^2 \mid N = h) = E(Y_i^2) \quad \forall i$$

$$E(Y_i Y_j \mid N = h) = E(Y_i Y_j) \quad \forall i, j$$

A seguito delle ipotesi di identità in distribuzione:

$$E(Y_i) = E(Y_1)$$

Sostituendo i risultati otteniamo:

$$E(S^2) = \sum_{h=1}^{+\infty} \pi_h h E(Y_1^2) + \sum_{h=1}^{+\infty} \pi_h h(h-1) E(Y_1)^2$$

$$= E(N)E(Y_1^2) + E[N(N-1)]E(Y_1)^2$$

$$= E(N)E(Y_1^2) + E(N^2 - N)E(Y_1)^2$$

$$= E(N)E(Y_1^2) - E(N)E(Y_1)^2 + E(N^2)E(Y_1)^2$$

$$= E(N)Var(Y_1) + E(N^2)E(Y_1)^2$$

La Base Tecnica del Rischio

Sostituendo $E(S^2)$ nella formula della varianza otteniamo:

$$\begin{aligned}
Var(S) &= E(S^2) - E(S)^2 \\
&= \{E(N)Var(Y_1) + E(N^2)E(Y_1)^2\} - \{[E(N) \cdot E(Y_1)]^2\} \\
&= E(N)Var(Y_1) + E(Y_1)^2[E(N^2) - E(N)^2] \\
&= E(N)Var(Y_1) + E(Y_1)^2 Var(N)
\end{aligned}$$

La Base Tecnica del Rischio

La **Base Tecnica del Rischio**

è la ***distribuzione di probabilità del risarcimento globale S***

Sotto le Hp classiche della Teoria del Rischio

Le ***distribuzioni di probabilità del numero di sinistri N*** e ***del danno Y*** costituiscono la **base tecnica del rischio.**

E' possibile:

Modellare N e Y ottenendo S

Modellare direttamente S

La Base Tecnica del Rischio

- La valutazione del numero di sinistri che un assicurato può causare in un determinato periodo futuro richiede la determinazione di una distribuzione con delle specifiche caratteristiche.

- In particolare, vengono usate distribuzioni discrete le cui probabilità sono definite solamente all'interno del sottoinsieme costituito da valori interi e non negativi (*counting distribution*). Infatti, in un contesto assicurativo, le *counting distribution* vengono usate per descrivere il numero di eventi che determinano una perdita per l'assicuratore o, più semplicemente, il numero di sinistri che colpiscono una Compagnia.

- Un elemento necessario per la descrizione della variabile aleatoria *N* che descrive il numero di sinistri è la funzione di probabilità, la quale stabilisce la probabilità che si verifichi l'evento *"il numero di sinistri è esattamente uguale a k"*:

$$p_k = \Pr(N = k) \quad \text{dove } k = 0, 1, 2, \ldots$$

Modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE DI POISSON → *Poisson (λ)*

La distribuzione di Poisson o poissoniana, detta anche legge degli eventi rari, è una tipologia di distribuzione molto utile quando si ha a che fare con eventi decisamente rari, che accadono con un media temporale ben definita.

È molto conveniente quando, definiti:

P = probabilità che si manifesti il fenomeno;

n = numero di misure, ognuna indipendente da ciascun altra,

risulta che il prodotto tra P ed n ci definisce l'importantissimo parametro λ

Modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE DI POISSON → *Poisson* (λ)

Si ipotizzi che la variabile aleatoria “numero di sinistri” sia distribuita come una Poisson con unico parametro λ; indicando con $N(t, t+\Delta t)$ il numero di sinistri che si verificano in un intervallo di tempo $(t, t+\Delta t)$, si formulino le seguenti ***ipotesi***:

1. $P[N(t, t+\Delta t)=1] = \lambda\, \Delta t + o(\Delta t)$

   La probabilità di avere un sinistro in un piccolo intervallo di tempo Δt è proporzionale all'ampiezza di tale intervallo → tale probabilità non dipende dal momento di inizio dell'intervallo ed eventuali traslazioni sull'asse temporale non modificano la sua misura.

   Inoltre, è addizionato un fattore $o(\Delta t)$ che però è infinitesimo di ordine superiore a Δt → se $\Delta t \to 0$, anche $o(\Delta t)$ tenderà a 0 ma più velocemente dello stesso Δt.

2. $P[N(t, t+\Delta t)>1] = o(\Delta t)$

   La probabilità del verificarsi di due o più sinistri in un piccolo intervallo di tempo è trascurabile. Tale ipotesi è immediatamente riconducibile alla prima.

3. $P[N(\tau) = k, N(\tau') = k'] = P[N(\tau) = k] \cdot P[N(\tau') = k']$

   Il numero di sinistri relativi a intervalli di tempo disgiunti sono indipendenti

Modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE DI POISSON → Poisson (λ)

A partire da queste ipotesi si può definire la probabilità del verificarsi di *k* sinistri in un intervallo di tempo *t* come segue:

$$p_k(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \qquad k = 0,1,2....$$

dove:

- λ è un qualsiasi valore positivo equivalente al numero di successi che ci si aspetta che si verifichino in un dato intervallo di tempo
- *e* è la base del logaritmo naturale
- *k* è il numero intero non negativo delle occorrenze (successi) per cui si vuole prevedere la probabilità

Modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE DI POISSON → Poisson (λ)

Proprietà

1. Media = Varianza
2. Date *n* variabili indipendenti $N_1, N_2, \dots, N_n$ che si distribuiscono secondo una Poisson di parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, la variabile ottenuta dalla loro somma $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ è ancora una variabile poissoniana con parametro dato dalla somma dei parametri, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$
3. Sotto le seguenti ipotesi:
   - il numero di sinistri che si verificano in un fissato intervallo di tempo (es. un anno) segue una distribuzione di Poisson con parametro λ.
   - i sinistri si possono classificare all'interno di *m* classi distinte ad ognuna delle quali è associata una probabilità $p_1, p_2, \dots, p_m$
   - gli eventi appartenenti ad ogni classe sono indipendenti dagli altri.

   il numero di sinistri all'interno di ogni classe $N_1, N_2, \dots, N_m$ sono variabili aleatorie mutuamente indipendenti distribuite secondo una Poisson i cui parametri sono, rispettivamente, $\lambda_{p1}, \lambda_{p2}, \dots, \lambda_{pm}$.

Modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE DI POISSON → Poisson (λ)

La distribuzione di Poisson, per la sua semplice struttura, per la presenza di un solo parametro e per le ipotesi che la contraddistinguono rappresenta una buona approssimazione del fenomeno *"Numero di sinistri"* in relazione ad un singolo rischio.

Allo stesso tempo, però, non è particolarmente adatta per la modellizzazione relativa all'intero complesso di rischio presenti in un portafoglio; infatti, avendo la media pari alla varianza, la sua applicazione potrebbe portare ad una *sottostima* della variabilità del numero di sinistri.

Perciò la Poisson è una distribuzione che si applica principalmente sotto l'ipotesi di ***omogeneità del portafoglio assicurativo***.

Modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA → *Bin Neg (α,τ)*

La distribuzione binomiale negativa può essere vista come un'*estensione della Poisson* in quanto viene ottenuta da tale distribuzione, sotto specifiche ***ipotesi***.

1. Il "numero di sinistri" relativamente ad un singolo rischio (o un singolo assicurato) segue una distribuzione di Poisson di parametro λ

   $N(t, t+1) \sim \text{Poisson}(\lambda) \rightarrow$ $$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

2. Il parametro λ non è costante ma è il risultato della variabile aleatoria Λ con *f.d.d.* $u(\lambda)$ e *f.d.r.* $U(\lambda)$

La probabilità che accadano esattamente *k* sinistri si ottiene calcolando il valore atteso di $P(N=k)$ condizionata all'evento "$\Lambda = \lambda$". Per il teorema delle probabilità totali:

$$p_k = \Pr(N=k) = E[\Pr(N=k) \mid \Lambda] = \int_0^\infty \Pr(N=k \mid \Lambda=\lambda)u(\lambda)d\lambda = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \cdot u(\lambda)d\lambda$$

→ Il valore atteso così definito dipenderà dalla ***distribuzione assunta da Λ***

Modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA → *Bin Neg (α,τ)*

Ipotizziamo che la variabile aleatoria *Λ* si distribuisca secondo una Gamma di parametri α>0 e τ>0 con *f.d.d.*

$$u(\lambda) = \frac{e^{-\tau\lambda} \cdot \tau^{\alpha} \cdot \lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

$$p_k = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\tau\lambda} \cdot \tau^{\alpha} \cdot \lambda^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\lambda = \ldots = \binom{k+\alpha-1}{k} \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{1+\tau}\right)^{k}$$

con *k* = 0,1,2,… e α>0 e τ>0

Formula ricorsiva

$$p_0 = \left(\frac{\tau}{1+\tau}\right)^{\alpha}$$

$$p_k = p_{k-1} \cdot \frac{k+\alpha-1}{k \cdot (1+\tau)}$$

Modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA → *Bin Neg (α,τ)*

Proprietà

1. Media = $\mu = \dfrac{\alpha}{\tau}$ Varianza = $\sigma^2 = \dfrac{\alpha}{\tau} \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\tau}\right)$

2. Essendo τ un parametro che assume solo valori positivi, nella distribuzione Binomiale Negativa la varianza eccede sempre la media; quindi, per un particolare insieme di dati, se la varianza osservata è maggiore della media osservata, la Binomiale Negativa ***risulta essere una scelta migliore*** per la rappresentazione del numero di sinistri rispetto alla Poisson.

Modelli per la distribuzione del numero dei sinistri

LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA → *Bin Neg (α,τ)*

La distribuzione Binomiale negativa, essendo generata a partire dalla Poisson con parametro non costante, permette la creazione di un modello che tenga conto della differenziazione in classi di rischio, ognuna delle quali si distribuisce secondo una Poisson con un particolare parametro. Perciò, la Binomiale Negativa è maggiormente adatta nel caso in cui il portafoglio assicurativo studiato è composto da ***rischi eterogenei***.

Modelli per la distribuzione dell'importo dei sinistri

- In genere, le distribuzioni empiriche degli importi dei sinistri evidenziano, asimmetria positiva e quindi code molto pesanti.
- Buoni modelli per la rappresentazione del fenomeno sono quelli caratterizzati da un valore positivo dell'indice di asimmetria:

Lognormale di parametri μ e σ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\ln x - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma} \right) \Big/ (\sigma x)$$

$$E[X] = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \qquad Var[X] = \left(E[X]\right)^2 (e^{\sigma^2} - 1)$$

Pareto di parametri a e α e θ

$$f(x) = \frac{\alpha \theta^a}{(x+\theta)^{\alpha+1}}$$

$$E[X] = \frac{\theta}{\alpha - 1} \qquad Var[X] = \frac{\alpha \theta^2}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)}$$

Gamma di parametri a e τ

$$f(x) = \frac{\tau^a e^{-\tau x} x^{a-1}}{\Gamma(a)}$$

$$E[X] = \frac{a}{\tau} \qquad Var[X] = \frac{a}{\tau^2}$$

$$se\ X_i \approx Gamma(a_i, \tau) \quad \Rightarrow \quad X = \sum_{i=1}^{n} X_i \approx Gamma\left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \tau \right)$$

Esponenziale di parametro θ

$$f(x) = \frac{e^{-x/\theta}}{\theta}$$

$$E[X] = \theta \qquad Var[X] = \theta^2$$

Modelli per la distribuzione dell'importo dei sinistri

Anche per l'importo del singolo sinistro, chiamato anche "*severity*",

valgono le stesse considerazioni fatte per la frequenza sinistri, ovvero:

- Scelta della distribuzione
- Stima dei parametri
- Test per la verifica della bontà di adattamento

Modelli per la distribuzione del danno aggregato

L'***<u>ammontare del danno</u>*** è l'importo che la Compagnia si trova a dover pagare quando si manifestano gli eventi assicurati.

Ciò che l'assicuratore vuole conoscere è il totale degli importi da erogare a seguito del verificarsi di un determinato numero di sinistri.

L'***<u>obbiettivo</u>*** che ci si pone è sviluppare un modello che rappresenti l'ammontare della perdita complessiva generata da tutti i sinistri all'interno di un determinato intervallo temporale e riferito ad uno specifico portafoglio.

⇓

<u>La Teoria collettiva del rischio</u>

Modello simulativo per il danno aggregato

L'obiettivo è

1. Costruire la distribuzione per il numero dei sinistri partendo dai dati

2. Costruire la distribuzione dell'importo del singolo sinistro

3. Utilizzare le due distribuzioni al fine di ottenere la distribuzione per il danno aggregato

$$S = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

Modelli composto per il danno aggregato

Esempio

- *Consideriamo un portafoglio con le seguenti caratteristiche:*
  - $E(N) = 6{,}7$
  - $\sigma(N) = 2{,}3$
  - $E(X) = 179.247$
  - $\sigma(X) = 52.141$
- *Obiettivo 1: determinare la media e la varianza del danno aggregato*
- *Obiettivo 2: sotto l'ipotesi che il danno aggregato segua una distribuzione lognormale di parametri A e B, calcolare il 50°, il 75° e il 99° percentile*

Modelli composto per il danno aggregato

Esempio

- ***Obiettivo 1***: *determinare la media e la varianza del danno aggregato*

$$E(S) = \mu'_1(S) = E(N) \cdot E(X)$$

$$E(S) = 6{,}7 \cdot 179.247 = 1.200.955$$

$$\sigma^2(S) = \mu_2(S) = E(N) \cdot \sigma^2(X) + \sigma^2(N) \cdot [E(X)]^2$$

$$\sigma^2(S) = 6{,}7 \cdot (52.141)^2 + (2{,}3)^2 \cdot (179.247)^2 = 1{,}88180 \times 10^{11}$$

$$\sigma(S) = (1{,}88180 \times 10^{11})^{0{,}5} = 433.797$$

Modelli composto per il danno aggregato

Esempio

- ***Obiettivo 2***: *sotto l'ipotesi che il danno aggregato segua una distribuzione lognormale di parametri A e B, calcolare il 50°, il 75° e il 99° percentile*

E(S) = 1.200.955

σ²(S)= 1,88.180.168.280

σ (S)=433.797

$$A = \ln\left(\frac{[E(S)]^2}{\sqrt{Var(S) + [E(S)]^2}}\right) = 13{,}937$$

$$B = \sqrt{\ln\left(\frac{Var(S) + [E(S)]^2}{[E(S)]^2}\right)} = 0{,}350$$

Percentile

50%	75%	99%
1.129.527	1.430.468	2.550.968

Stima dei parametri della distribuzione

- L'approccio simulativo si basa sulla costruzione di distribuzioni teoriche dei fenomeni oggetto di studio al fine di valutare processi reali.
- Il ricorso alle variabili aleatorie, le quali dipendono dai parametri che le costituiscono, necessita dell'introduzione di un ***metodo in grado di stimare i parametri della variabile*** stessa.
- I metodi per la stima dei parametri sono procedure di tipo logico-matematico che consentono di stabilire l'insieme delle operazioni da applicare ai dati di un campione empirico per pervenire al valore di stima.
- Si distinguono in:
  - *metodi di stima puntuale* → la procedura si traduce in un solo valore numerico che si assume come stima del parametro
  - *metodi di stima per l'intervallo* → si calcolano gli estremi di un intervallo che con una prestabilita probabilità contiene al suo interno il valore incognito del parametro oggetto di stima

Stima dei parametri della distribuzione

Il metodo dei momenti

Il metodo postula l'uguaglianza tra i momenti campionari dello stesso ordine.

Se la legge distributiva di una generica popolazione *P*, sulla quale viene osservato il fenomeno, è caratterizzata da *r* parametri $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r$, si ottiene un sistema di *r* equazioni nelle *r* incognite $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r$.

Il metodo si fonda sul presupposto che i momenti di *P* siano funzioni dei parametri $\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r$; per il momento di ordine *h* di *P* si può scrivere infatti (nel caso discreto):

$$\mu_{X^h} = \sum X^h f(X;\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r) = \mu_{X^h}(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r)$$

Consideriamo allora il sistema di *r* equazioni che segue, dove con $\overline{x}_1$ è indicato il primo momento campionario e con $\overline{x}_r$ il momento di ordine *r*,

$$\begin{cases} \mu_X(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r) = \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \mu_{X^r}(\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_r) = \overline{x}_r \end{cases}$$

la soluzione $(\underline{\theta}_1,\underline{\theta}_2,\dots,\underline{\theta}_r)$, se esiste, rappresenta la ***<u>stima congiunta dei parametri incogniti</u>***.

Stima dei parametri della distribuzione

IL TEST DEL CHI-QUADRO

L'utilizzo di distribuzioni teoriche (variabili casuali) per la descrizione di un fenomeno reale comporta delle approssimazioni.

Il test di verifica delle ipotesi è un metodo statistico mediante il quale si "verifica" che le ipotesi adottate siano probabilisticamente compatibili con i dati.

In particolare, lo scopo del test del Chi-quadro è quello di conoscere se le frequenze osservate differiscono significativamente dalle frequenze teoriche.

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$$

dove:

- n_k → frequenze assolute osservate
- np_k → frequenze assolute teoriche
- m → numero di modalità (o classi)

Stima dei parametri della distribuzione

IL TEST DEL CHI-QUADRO

$$
\begin{cases}
H_0 = & \text{i dati provengono da una popolazione in cui le frequenze sono date dalle } p_k \\
H_1 = & \text{i dati provengono da un'altra popolazione}
\end{cases}
$$

Indichiamo con:

- α → livello di significatività (ad es. 5%)
- $g = m\text{-}1\text{-}n_{par}$

Se $\chi^2 < \chi^2_{(g,1-\alpha)}$ → accetto il “fit”

Se $\chi^2 > \chi^2_{(g,1-\alpha)}$ → rifiuto il “fit”

Esempio 1 - stima dei parametri della distribuzione

Esempio

- ***Consideriamo la distribuzione del numero dei sinistri per un portafoglio R.C.A.***
- ***Obiettivo:***
  - ***"fittare" la distribuzione dei dati empirici sia con una Poisson che con una Binomiale Negativa attraverso il metodo dei momenti***
  - ***Verificare l'adattamento della distribuzione stimata attraverso il test del X^2***

Numero sinistri	*Numero polizze*	*Frequenze relative*
0	97.000	0,9043
1	9.520	0,0888
2	698	0,0065
3	40	0,0004
4	6	0,0001
>4	-	-
Totale	**107.264**	**1,0000**

Media = 0,1031

Varianza = 0,1084

Esempio 1 - stima dei parametri della distribuzione

1. Stimiamo i parametri della Poisson con il metodo dei momenti:

$$\bar{x} = \lambda = 0{,}1031$$

$$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Numero sinistri	***Numero polizze***	***F.R. Poisson*** $p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$	***F.A. Poisson***
0	97.000	0,9020	96.755,10
1	9.520	0,0930	9.976,43
2	698	0,0048	514,34
3	40	0,0002	17,68
4	6	0,0000	0,46
>4	-	-	-
Totale	**107.264**	**1**	**107.264**

Esempio 1 - stima dei parametri della distribuzione

2. *Calcoliamo la bontà di adattamento con il metodo del Chi-quadro con*

a = 0,05

g = 4-1-1=2

Tenuto conto della numerosità teorica nelle singole classi raggruppiamo l'ultima classe in ">3"

Numero sinistri	*Numero polizze*	*F.A. Poisson*	*Chi-quadro*
0	97.000	96.755,10	0,6199
1	9.520	9.976,43	20,8817
2	698	514,34	65,5853
>=3	46	18,13	42,8242
Totale	**107.264**	**107.263,99**	**129,91**

$$\chi^2 = 129{,}911 > \chi^2_{(2;0{,}95)} = 5{,}991$$

<u>CONCLUSIONI</u> → "fittare" i dati a disposizione con una distribuzione di Poisson ci porta a commettere un errore troppo elevato

Esempio 1 - stima dei parametri della distribuzione

1. ***Stimiamo i parametri della Binomiale Negativa con il metodo dei momenti:***

$$E(N) = a/\tau$$

$$\sigma^2(N) = \frac{a}{\tau}\left(1+\frac{1}{\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} E(N) = \bar{x} \\ \sigma^2(N) = s^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tau = \dfrac{E(N)}{\sigma^2(N) - E(N)} = 19{,}49 \\ a = \dfrac{E(N)^2}{\sigma^2(N) - E(N)} = 2{,}01 \end{cases}$$

Numero sinistri	***Numero polizze***	***F.R. Bin-Neg***	***F.A. Bin-Neg***
0	97.000	0,9043	97.002,97
1	9.520	0,0887	9.513,74
2	698	0,0065	698,75
3	40	0,0004	45,58
4	6	0,0000	2,79
>4	-	0,0000	0,17
Totale	**107.264**	**1,0000**	**107.264,00**

Esempio 1 - stima dei parametri della distribuzione

2. Calcoliamo la bontà di adattamento con il metodo del Chi-quadro con

$$\alpha = 0{,}05$$

g = 4-1-2=1

Tenuto conto della numerosità teorica nelle singole classi raggruppiamo l'ultima classe in ">3"

Numero sinistri	*Numero polizze*	*F.A. Bin-Neg*	*Chi-quadro*
0	97.000,00	97.002,97	0,0001
1	9.520,00	9.513,74	0,0041
2	698,00	698,75	0,0008
>=3	46,00	48,54	0,1332
Totale	**107.264,00**	**107.264,00**	**0,1382**

$$\chi^2 = 0{,}1382 < \chi^2_{(1;0,95)} = 3{,}8415$$

<u>CONCLUSIONI</u> → "fittare" i dati a disposizione con una distribuzione Binomiale Negativa ci porta a commettere un errore accettabile