Matematica Avanzata

Lez. 2 – **Formulazione di un modello**

Prof. Antonio VIOLI

Benevento 15/02/2023

INDICE

- **Formulazione di un modello di ottimizzazione**
  - **Rappresentazione implicita**
  - **Rappresentazione esplicita**
  - **Classificazione dei modelli**
  - **Esempi**
- **Modelli di PL**
- **Modelli di pianificazione della produzione**

Come costruire un modello matematico

1

- Associare le **variabili di decisione** alle incognite del problema

2

- Esprimere quantitativamente i legami che esistono tra le variabili e le limitazioni derivanti da considerazioni di carattere fisico, economico. Tali legami e limitazioni definiscono **i vincoli**

3

- Esprimere **l'obiettivo** che si intende minimizzare o massimizzare

Formulazione di un modello

- Nel nostro esempio
  - Parametri → richiesta e costo delle materie prime, domanda
  - Decisioni → prodotti da realizzare
  - Vincoli → domanda da soddisfare
  - Funz. obiettivo → costo da minimizzare

- In termini matematici
  - x → decisioni
  - X → insieme di ammissibilità (decisioni che soddisfano i vincoli)
  - $Z(x)$ → funzione di costo

Formulazione di un modello

Rappresentazione implicita

$$\min \; z(x)$$

s.v.

$$x \in X$$

N.B. Si può parlare indifferentemente di «massimo» o di «minimo», dal momento che una soluzione x^* che renda minima la funzione $z(x)$, massimizza al tempo stesso la funzione $-z(x)$.

Possibili esiti

Esistenza di una soluzione ottima

Esiste una soluzione ammissibile $x^* \in X$ tale $z(x^*) \leq z(x)$, per ogni $x \in X$, mentre $z(x^*)$ è detto «ottimo» o valore ottimo

Problema inammissibile

L'insieme X è vuoto

Problema illimitato

Per ogni $k > 0$, esiste una soluzione $x \in X$ tale che $z(x) < -k$

Formulazione di un modello

Rappresentazione esplicita

Si assume che la regione ammissibile X sia descritta tramite un insieme finito di m vincoli funzionali del tipo $g_i(x) \geq b_i,\ i = 1, \dots, m$, con $x \in R^n$ e $g_i: R^n \to R, i = 1, \dots, m$

$$\min \ z(x)$$

s.v.

$$g_i(x) \geq b_i,\ i = 1, \dots, m$$

Formulazione di un modello

Se il vincolo è scritto nella forma di «minore o uguale»

$$g_i(x) \leq b_i, \; i = 1, \dots, m$$

esso si può riscrivere come

$$-g_i(x) \geq -b_i$$

Nel caso di vincolo di uguaglianza $g_i(x) = b_i$, esso si può sostituire con la coppia di vincoli

$$g_i(x) \geq b_i$$
$$-g_i(x) \geq -b_i$$

Classificazione dei modelli di ottimizzazione

Modello matematico

Variabili + Vincoli + Funzione obiettivo

- Variabili: sempre presenti
- Vincoli: vincolati e non vincolati
- Funzione obiettivo: senza obiettivo, uno o più obiettivi

- ## Classificazione
  - Rispetto alle variabili
    - Continua → variabili assumo valori reali
    - Discreta → le variabili assumono valori interi (eventualmente binarie)
  - Rispetto alla funzione di vincolo e/o obiettivo
    - Lineare → $z(x)$ e $g_i(x)$ sono funzioni lineari
    - Non lineare → $z(x)$ e/o $g_i(x)$ sono funzioni non lineari

Modelli di Programmazione Lineare (PL)

- Un modello di PL si ottiene assumendo che funzione obiettivo e vincoli nel modello generale siano lineari
- Il modello di PL può essere scritto come:

$$\min z(x) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$$

$$s.v.$$

$$a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \geq b_1$$

$$\ldots$$

$$a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \geq b_m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$$

Modelli di Programmazione Lineare (PL)

- In forma compatta un problema di PL si può scrivere come:

$$\min z(x) = c^{\mathrm{T}} x$$

s.v.

$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0$$

Modelli di Programmazione Lineare (PL)

Dove:

- $c \in R^n$ (vettore dei coefficienti della funzione obiettivo o vettore dei coefficienti di «costo», essendo la funzione obiettivo da minimizzare);
- $b \in R^m$ (vettore dei termini noti dei vincoli, vettore delle «risorse»);
- $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

(matrice (*m x n*) dei coefficienti delle variabili di decisione nei vincoli, matrice dei «coefficienti tecnologici»).

Vedi slide «Richiami di Algebra Lineare»

Modelli di Programmazione Lineare (PL)

L'ipotesi di linearità nei modelli di PL potrebbe non essere ragionevole in molte applicazioni pratiche:

- caso degli sconti di quantità (economie di scala) per acquisti di grossi quantitativi di merce;
- modelli di imposizione fiscale nei quali a imponibili via via crescenti corrispondono differenti percentuali di prelievo.

Tuttavia, anche in questi casi, i modelli di PL rappresentano comunque una buona base di partenza per successive elaborazioni.

Approcci alla formulazione

- Da template di riferimento – classi di problemi
  - Mix produttivo, miscelazione, scorte, reti …
- Costruttivo
  - Variabili + Vincoli + Funzione obiettivo

Esempio - Dieta

Un atleta, in prossimità di una gara, deve perdere peso senza perdere massa muscolare durante gli allenamenti. Il proprio regime alimentare giornaliero prevede l'assunzione di carne, legumi e pasta, conditi con olio. Di seguito è riportato il contenuto in grassi, carboidrati e proteine di ciascuno di questi alimenti, il loro contenuto calorico e la minima richiesta nutrizionale di ciascun macronutriente.

	Alimento				
Macronutriente	Carne [g/h]	Legumi [g/h]	Pasta [g/h]	Olio [g/h]	Richiesta giornaliera [g]
Grassi	2,6	1,5	1,5	100,0	30
Carboidrati	0,0	60,7	74,7	0,0	90
Proteine	20,2	22,3	13,0	0,0	60
Calorie [Kcal/h]	110	337	371	884	–

Tabella 1.1 Dati relativi al problema della dieta dell'atleta.

Esempio - Dieta

Occorre stabilire il regime dietetico giornaliero che garantisce all'atleta un apporto nutrizionale non inferiore a quello richiesto, con il minimo apporto calorico.

- **Variabili di decisione**
  - x_j , $j = 1, \dots, 4$, corrispondono alla quantità giornaliera (espressa in etti) di alimento j (1 = carne, 2 = legumi, 3 = pasta, 4 = olio) che deve entrare nella dieta.

- **Vincoli**
  - Minima richiesta nutrizionale

    Se 100g di carne contengono 2,6g di grassi, si può determinare l'apporto di grassi (in g) proveniente da x_1 etti di carne pari a $2{,}6x_1$.

    1) $2{,}6x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}5x_3 + 100x_4 \geq 30$
    2) $60{,}7x_2 + 74{,}7x_3 \geq 90$
    3) $20{,}2x_1 + 22{,}3x_2 + 13x_3 \geq 60$
  - Non negatività

    $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Esempio - Dieta

- **Funzione obiettivo**

$$\min z(x) = 110x_1 + 337x_2 + 371x_3 + 884x_4$$

- **Soluzione del problema**
  - $x_1^* = 1{,}3335;\ x_2^* = 1{,}4827\ ;\ x_3^* = 0\ ;\ x_4^* = 0{,}2431$
  - $z^* = z(x^*) = 861{,}2416$ Kcal

Modelli di pianificazione della produzione

- I modelli di pianificazione della produzione consentono di formulare problemi per l'allocazione ottimale di «risorse» (materie prime, macchinari, manodopera), disponibili in quantità limitata e utilizzate per realizzare un numero finito di «prodotti».
- Per ciascun prodotto è noto il processo produttivo, riassumibile nel consumo di un quantitativo noto di risorse.
- La vendita di ciascuna unità di prodotto genera un profitto noto e la funzione obiettivo consiste nel massimizzare il profitto derivante dalla vendita di tutti i prodotti realizzati.

Esercizio - MEKO

La Meko è una multinazionale specializzata nella produzione di due tipi di biocarburanti: il biometanolo e il biodimetiletere.

Il processo produttivo richiede la lavorazione nei tre stabilimenti di preparazione, purificazione ed estrazione.

I tempi necessari per la lavorazione di una tonnellata dei due biocarburanti sono riportati nella Tabella unitamente alla capacità produttiva giornaliera dei tre stabilimenti.

	Ore di lavorazione a tonnellata		
Stabilimento	Biometanolo	Biodimetiletere	Capacità giornaliera [h]
Preparazione	0,72	0,85	18
Purificazione	1,68	1,42	18
Estrazione	1,92	2,12	16

Tabella 2.1 Dati relativi al problema di produzione della Meko.

Esercizio - MEKO

Il responsabile del marketing aziendale ha confermato che ogni tonnellata prodotta di biometanolo e di biodimetiletere può essere venduta, realizzando un profitto (in €) pari a 540 e 590, rispettivamente.

Definire il piano di produzione ottimale.

Esercizio - MEKO

- **Variabili di decisione (*Cosa dobbiamo determinare?*)**
  - x_j, *j = 1, 2*, livello di produzione giornaliera dei due biocarburanti (1 = biometanolo, 2 = biodimetiletere).
  - N.B. ATTENZIONE alle unità di misura (in questo caso tonnellate)
- **Vincoli (*legami tra variabili e limitazioni*)**
  - Vincoli sulla capacità di produzione giornaliera
    - $0{,}72x_1 + 0{,}85x_2 \leq 18$
    - $1{,}68x_1 + 1{,}42x_2 \leq 18$
    - $1{,}92x_1 + 2{,}12x_2 \leq 16$
  - Vincoli di non negatività
    - $x_1, x_2 \geq 0$
- **Funzione obiettivo**
  - $\max z(x) = 540x_1 + 590x_2$

Esercizio - MEKO

- Soluzione ottima
  - $x_1^* = \frac{25}{3} = 8{,}3333 \quad x_2^* = 0$
  - $z^* = 4500$

Template modelli di pianificazione della produzione

Si supponga di disporre di un numero m di risorse disponibili per la produzione di n prodotti.

Si indichi con:

- a_{ij} , $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, la quantità di risorsa i necessaria per produrre una unità di prodotto j;
- b_i, $i = 1,\ldots,m$, la disponibilità massima della risorsa i;
- p_j, $j = 1,\ldots,n$, il profitto lordo unitario ricavabile dalla vendita del prodotto j;
- x_j, $j = 1,\ldots,n$, variabili di decisione indicante il livello di produzione del prodotto j.

Template modelli di pianificazione della produzione

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$s.v.$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

Varianti

- Varianti del problema possono essere ottenute considerando come obiettivo la minimizzazione dei costi complessivi di produzione, oppure includendo vincoli di budget, di mercato (che impongono livelli massimi di produzione per uno o più prodotti) o di sfruttamento degli impianti (in base ai quali si fissano eventualmente livelli minimi di produzione).
- In alcuni casi, la realizzazione di un prodotto richiede la scelta di risorse disponibili tra più alternative (ad esempio, un'operazione meccanica di tornitura può essere eseguita su uno qualsiasi dei torni disponibili nell'officina).
- In questo caso le variabili di decisione esprimono il livello produttivo per ogni prodotto utilizzando una specifica risorsa, hanno un doppio indice x_{ij}, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, ed indicano la quantità di prodotto j realizzata utilizzando la risorsa i.

Esercizio - ITACA

Itaca è un'industria toscana specializzata nella produzione di materiali per l'edilizia sostenibile. Nello stabilimento di Arezzo si realizzano tre tipi di malte di argilla, A, B e C, utilizzando allo scopo tre reparti, ognuno in grado di realizzare un qualsiasi tipo di malta. I tempi di lavorazione disponibili presso ogni reparto per ogni tipo di malta sono riportati in Tabella, insieme alla capacità produttiva dei reparti e al profitto derivante dalla vendita. Studi di mercato hanno mostrato che una pianificazione ottimale dovrebbe prevedere un livello di produzione della malta di tipo A compresa tra il 50% e il 70% della produzione totale. Definire il piano di produzione ottimale.

Reparto	Malta A	Malta B	Malta C	Capacità [h]	Profitto [€/q]
1	0,18	0,21	0,24	90	18
2	0,20	0,18	0,21	85	21
3	0,12	0,22	0,23	80	24

Esercizio - ITACA

- **Variabili**
  - x_{ij}, $i = 1,2,3$, $j = A, B, C$, quantità di malta (espressa in quintali) di tipo j prodotta presso il reparto i.
- **Vincoli**
  - Capacità produttiva

$$0{,}18x_{1A} + 0{,}21x_{1B} + 0{,}24x_{1c} \leq 90$$
$$0{,}20x_{2A} + 0{,}18x_{2B} + 0{,}21x_{2c} \leq 85$$
$$0{,}12x_{3A} + 0{,}22x_{3B} + 0{,}23x_{3c} \leq 80$$

  - Limiti di produzione

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \geq 0{,}5(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3C})$$
$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 0{,}7(x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} + x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{3A} + x_{3B} + x_{3C})$$

  - Non negatività

$$x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{3A}, x_{3B}, x_{3C} \geq 0$$

Esercizio - ITACA

- **Vincoli**
  - Sarebbe errato scrivere

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \geq 0{,}5$$
$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} \leq 0{,}7$$

  - Attenzione alla coerenza delle unità di misura!!!

Esercizio - ITACA

- ***Funzione obiettivo***

$$\max 18(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) + 21(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) + 24(x_{1C} + x_{2C} + x_{3C})$$

- ***Soluzione***

$x^*_{1A} = 64{,}63;$ $x^*_{1B} = 0;$ $x^*_{1C} = 326{,}53;$

$x^*_{2A} = 0;$ $x^*_{2B} = 0;$ $x^*_{2C} = 404{,}76;$

$x^*_{3A} = 666{,}67;$ $x^*_{3B} = 0;$ $x^*_{3C} = 0$

$z^* = 24992{,}18$ €

Template modelli di pianificazione della produzione con risorse alternative

$$\max z(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

$s.v.$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i \qquad i = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$$