

Introduction aux géométries courbes

Jean Peyen

Mémoire dirigé par Francis Nier

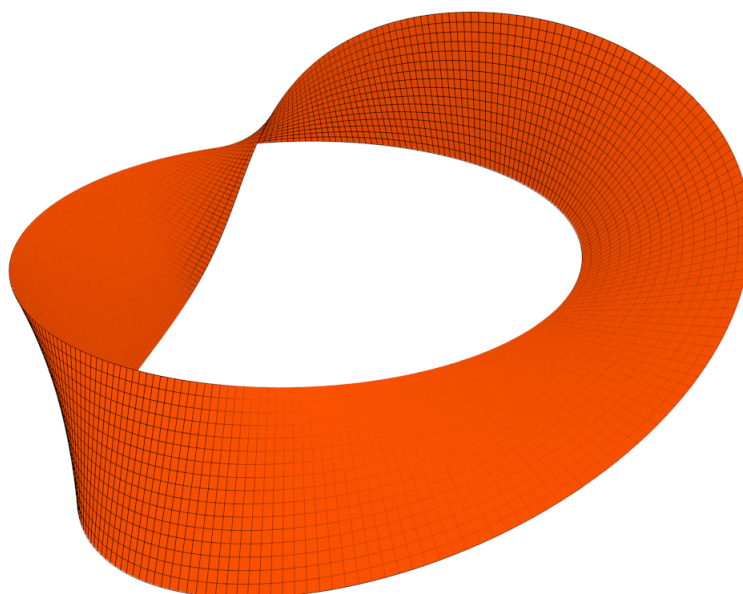


Table des matières

1	Introduction	3
2	Courbes dans \mathbf{R}^3	3
2.1	Courbes paramétrées et abscisses curvilignes	3
2.2	Repère de Frenet et courbure	4
2.3	Transformation d'une courbe	5
3	Surfaces bidimensionnelles régulières de \mathbf{R}^3	6
3.1	Les variétés en général	6
3.2	Surfaces bidimensionnelles régulières de \mathbf{R}^3	7
3.3	Espace tangent et première forme fondamentale	9
3.4	Géodésiques	11
3.5	L'application de Gauss	13
3.6	Un théorème remarquable!	17
3.7	Champs de tenseurs et dérivée covariante	20

Vecteurs et covecteurs

Commençons par faire quelques rappels sur la dualité.

Soit V un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension n , on appelle **espace dual** l'espace vectoriel des formes linéaires sur V :

$$V^* = L(V, \mathbf{R})$$

On appelle les éléments de V^* des **covecteurs**. De même que les covecteurs sont des applications qui prennent des vecteurs pour donner des scalaires, les vecteurs peuvent être vus comme des applications qui prennent en variable des covecteurs.

On définit la base duale (e^1, \dots, e^n) d'une base (e_1, \dots, e_n) par :

$$e^i(e_j) = \delta_{ij}$$

Les tenseurs

Posons maintenant (h, k) un couple d'entiers, un **tenseur** d'ordre (h, k) sur V est un élément de $(V^*)^h \times V^k$. On dit que h est le nombre d'indices covariants et k le nombre d'indices contravariants. On notera que les tenseurs de même ordre forment un espace vectoriel.

De façon analogue à ce que l'on fait pour les applications linéaires et bilinéaires on peut représenter un tenseur T d'ordre (h, k) en l'appliquant sur une base de vecteurs (e_1, \dots, e_n) et sa base de covecteurs associée (e^1, \dots, e^n) .

On notera ainsi :

$$T_{b_1, \dots, b_h}^{a_1, \dots, a_k} = T(e_{a_1}, \dots, e_{a_k}, e^{b_1}, \dots, e^{b_h})$$

Exemples de tenseurs

Outre les vecteurs et les covecteurs, il y a les exemples habituellement vus en licence. Un endomorphisme de V est un tenseur une fois covariant et une fois contravariant, une forme bilinéaire sur V est un tenseur deux fois covariant.

Produit tensoriel

Soient T et U deux tenseurs sur V respectivement d'ordre (h, k) et d'ordre (l, m) . Supposons donnée leur représentation dans une base (e_1, \dots, e_n) et sa base duale. On définit le produit tensoriel de T et de U comme le tenseur d'ordre $(h + l, k + m)$ représenté de la façon suivante :

$$(T \otimes U)_{b_1, \dots, b_{h+l}}^{a_1, \dots, a_{k+m}} = (T_{b_1, \dots, b_h}^{a_1, \dots, a_k})(U_{b_{h+1}, \dots, b_{h+l}}^{a_{k+1}, \dots, a_{k+m}})$$

Contraction d'un tenseur

On appelle **contraction** d'un tenseur ayant au moins un indice covariant et un indice contravariant, le tenseur défini en prenant les coefficients où ces deux indices sont égaux. Par exemple faire une contraction sur le produit tensoriel d'un vecteur et d'un covecteur revient à déterminer la valeur du covecteur appliqué au vecteur, faire une contraction sur un endomorphisme revient à calculer la trace de ce dernier...

Convention de sommation d'Einstein

Il arrive que certaines équations fassent intervenir des sommes sur de nombreux indices, aussi conviendrons nous de ne pas noter les sommes lorsqu'un même indice est répété en haut et en bas. Si bien que l'on a par exemple :

$$T^u U_u = \sum_u T^u U_u$$

1 Introduction

Les variétés... Se cachent derrière cette appellation des objets que l'on peut intuitivement se figurer. Une variété de dimension n est un objet qui ressemble localement à l'espace \mathbf{R}^n . Celles-ci ont des propriétés particulières, notamment une courbure, qui les rendent différentes de l'espace vectoriel auquel on les identifie. A ce titre on qualifie les espaces vectoriels de "plats".

Dans le cadre de ce mémoire nous allons essentiellement approcher de tels objets dans un cadre assez naturel qui laisse la part belle à l'intuition en commençant par étudier des courbes puis des surfaces plongées dans \mathbf{R}^3 .

Notez bien que si nous pouvons étudier une variété d'un point de vue extrinsèque, en considérant relativement à l'espace dans lequel elle "vit", on peut aussi le faire d'un point de vue intrinsèque. Il s'agit de remarquer que l'on peut déduire certaines propriétés d'une variété en restant dessus, comme le fait de vivre sur une terre courbée influence certaines expériences humaines.

2 Courbes dans \mathbf{R}^3

2.1 Courbes paramétrées et abscisses curvilignes

On appellera ici **courbe paramétrée** de \mathbf{R}^3 une application de classe C^1 par morceaux d'un intervalle de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^3 , dont la dérivée ne s'annule pas là où elle est définie. C'est presque un abus de langage de la désigner par un paramétrage mais cela est bien commode. Notez que l'on pourrait fixer des conditions de régularité plus strictes, mais il est parfois judicieux d'alléger les hypothèses pour s'accorder à certains problèmes.

Posons une courbe $X : I \rightarrow \mathbf{R}^3$ avec a et b les bornes respectivement inférieure et supérieure de I , on appellera **abscisse curviligne** du point σ la quantité suivante :

$$s(\sigma) = \int_a^\sigma \|X'(\xi)\| d\xi$$

Elle est bien définie puisque X est supposée C^1 par morceaux.

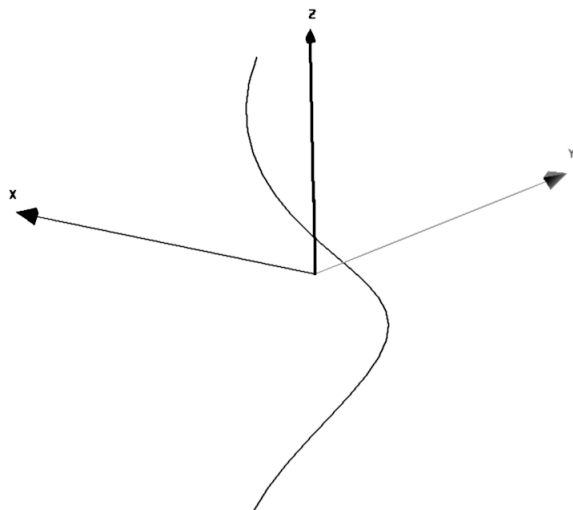
On notera que la valeur absolue de la différence entre l'abscisse curviligne de deux points correspond à la distance sur la courbe qui les sépare. En effet on peut calculer la distance entre deux points de la courbe infinitésimalement proches comme s'ils étaient liés par un segment de droite avec le théorème de Pythagore. Si on intègre cette quantité entre les deux coordonnées des points qui nous intéressent, on trouve donc la distance sur la courbe qui les sépare.

On peut, bien sûr, effectuer un paramétrage de la courbe par son abscisse curviligne puisque chaque point de la courbe et par conséquent de I correspond à une unique abscisse curviligne, car on suppose que X' ne s'annule pas sur I . Par la suite, il sera bien pratique d'utiliser ce paramétrage.

Exemple

Posons $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbf{R}^3 . On considère la spirale définie ainsi :

$$\begin{aligned} X : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \sigma &\mapsto \cos(\sigma)e_1 + \sin(\sigma)e_2 + \sigma e_3 \end{aligned}$$



On a $X'(\sigma) = (-\sin(\sigma), \cos(\sigma), 1)$, par conséquent l'abscisse curviligne du point de coordonnée σ dans le paramétrage fixé est :

$$s(\sigma) = \int_0^\sigma \| -\sin(\xi)e_1 + \cos(\xi)e_2 + e_3 \| d\xi = \int_0^\sigma \sqrt{2} d\xi = \sqrt{2}\sigma$$

Si $\tilde{x}(s)$ est le point de la courbe d'abscisse curviligne s on aura $\tilde{x}(s) = x(s/\sqrt{2})$.

2.2 Repère de Frenet et courbure

Soit X une courbe paramétrée et σ un point où X est dérivable. On appelle **droite tangente** au point $X(\sigma)$ la droite affine passant par $X(\sigma)$ qui est dirigée par le vecteur $X'(\sigma)$. On appelle **vecteur unitaire tangent**, le vecteur unitaire de direction $X'(\sigma)$, on le notera $t(\sigma)$.

Remarquons que si \tilde{X} correspond à la courbe X paramétrée par l'abscisse curviligne et si on note $\tilde{t}(s)$ le vecteur tangent au point d'abscisse curviligne s , on aura $\tilde{t}(s) = \tilde{X}'(s)$. En d'autres termes il ne sera pas nécessaire d'effectuer une normalisation. Par la suite nous paramètrons donc par l'abscisse curviligne.

Preuve

$$t(\sigma) = \frac{X'(\sigma)}{\|X'(\sigma)\|} = \frac{(\tilde{X} \circ s)'(\sigma)}{\|X'(\sigma)\|} = \frac{\tilde{X}'(s(\sigma))s'(\sigma)}{\|X'(\sigma)\|} = \frac{\tilde{X}'(s(\sigma))\|X'(\sigma)\|}{\|X'(\sigma)\|} = \tilde{X}'(s(\sigma))$$

QED

Sous hypothèse qu'en un point d'abscisse curviligne s on ait $X''(s) \neq 0$ on définit la **droite normale** au point $X(s)$ comme la droite affine passant par ce dernier point et dirigée par $X''(s)$. Le **vecteur unitaire**

normal au point $X(s)$ correspond au vecteur unitaire dirigé par $X''(s)$, on le notera $n(s)$. Si en revanche $X''(s) = 0$, on posera $n(s)$ le vecteur unitaire dirigé par $t(s) \wedge e_3$ en posant e_3 le troisième vecteur de la base canonique de \mathbf{R}^3 .

Si on ajoute à ces deux vecteurs le **vecteur binormal**

$b(s) = t(s) \wedge n(s)$ on obtient un repère de l'espace \mathbf{R}^3 que l'on appelle **repère de Frenet**¹.

On appelle **courbure** au point $X(s)$ la quantité $c(s)$ telle que $X''(s) = c(s)n(s)$. Cette définition ne heurte pas l'intuition puisqu'elle consiste à une quantification de la vitesse à laquelle la courbe se différencie de sa droite tangente.

Il est important de remarquer que la définition du vecteur normal que nous avons donnée est sensée. En effet, dans tous les cas, le vecteur normal ainsi que le vecteur tangent en un même point seront bien orthogonaux. Si on fait le calcul dans les cas où X'' ne s'annule pas :

$$(t(s)|n(s)) = (\tilde{X}'(s(\sigma))|\frac{\tilde{X}''(s(\sigma))}{c(\sigma)}) = \frac{1}{2c(\sigma)} \frac{d}{ds} (\tilde{X}'(s(\sigma))|\tilde{X}'(s(\sigma))) = \frac{1}{2c(\sigma)} \frac{d}{ds} \|\tilde{X}'(s(\sigma))\|^2 = 0$$

Exemples

Segment de droite

Posons v un vecteur unitaire de \mathbf{R}^3 , on considère le segment de droite défini sur un intervalle I par :

$$\begin{aligned} X : I &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \sigma &\mapsto \sigma v \end{aligned}$$

On peut obtenir l'abscisse curviligne en translatant le paramètre σ par une constante k correspondant à la borne inférieure de I si on suppose que celle-ci n'est pas $-\infty$. On aura $s(\sigma) = \sigma + k$, nous pouvons maintenant travailler suivant le paramétrage curviligne. D'où les formules : $\tilde{X}(s) = X(s - k) = (s - k)v$; $\tilde{t}(s) = v$ et $\tilde{c}(s) = 0$ car la dérivée seconde de X s'annule toujours.

Arc de cercle

Posons $t \in [0, 2\pi[$ et $R \in]0, +\infty[$. On considère l'arc de cercle du plan engendré par les vecteurs e_1 et e_2 de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbf{R}^3 :

$$\begin{aligned} X : [0, t] &\rightarrow \mathbf{R}^3 \\ \sigma &\mapsto R \cos(\sigma) e_1 + R \sin(\sigma) e_2 \end{aligned}$$

Ici on peut écrire $s(\sigma) = \sigma R$, le paramétrage de X par l'abscisse curviligne donne $\tilde{X}(s) = R \cos(s/R) e_1 + R \sin(s/R) e_2$. On a donc le vecteur tangent $\tilde{t}(s) = -\sin(s/R) e_1 + \cos(s/R) e_2$ ainsi que le vecteur normal $\tilde{n}(s) = -\cos(s/R) e_1 - \sin(s/R) e_2$. On note par ailleurs que la courbure de l'arc de cercle est constante et égale à $1/R$ puisque $\tilde{t}'(s) = (1/R) \tilde{n}(s)$.

2.3 Transformation d'une courbe

On considère une courbe paramétrée de référence X_0 de longueur l_0 paramétrée par son abscisse curviligne ainsi qu'une courbe X dont le paramétrage varie sur le même intervalle que l'abscisse curviligne associée à X_0 . Pour nous, X sera la courbe déformée.

On dit que X a subi une **transformation rigide** par rapport à X_0 si pour tout couple de valeurs s_1 et s_2 de l'abscisse curviligne de X_0 , on a l'égalité $\|X(s_1) - X(s_2)\|_2 = \|X_0(s_1) - X_0(s_2)\|_2$.

1. **Jean Frédéric Frenet** 1816-1900, mathématicien, astronome, météorologue, français

Théorème

Toute transformation rigide d'une courbe est prolongeable en une isométrie affine de \mathbf{R}^3 .

Démonstration

Plusieurs cas se présentent. En effet une courbe dans \mathbf{R}^3 peut comporter deux à quatre (et plus) points affinement indépendants.

Supposons que X_0 comporte $n + 1$ points affinement indépendants $X_0(s_i)$ avec i variant de 0 à n et posons $f|_{X_0}$ la transformation rigide qui envoie la courbe de référence sur la courbe déformée. Par définition, pour i et j variant entre 0 et n on a :

$$\|X_0(s_i) - X_0(s_j)\| = \|f|_{X_0}(X_0(s_i)) - f|_{X_0}(X_0(s_j))\|$$

Sur le sous-espace affine F engendré par les $X_0(s_i)$ on peut donc définir le prolongement $f|_F$ comme l'unique isométrie envoyant $X_0(s_i)$ sur $X(s_i)$. Naturellement on peut ensuite définir f sur \mathbf{R}^3 en complétant les $X_0(s_i)$ en une base de \mathbf{R}^3 . Attention, ceci n'assure cependant pas l'unicité de la transformation.

QED

Remarque

Notez par ailleurs que même si toutes les courbes ne sont pas liées par des transformations rigides, la possibilité de paramétrer par l'abscisse curviligne nous permet d'affirmer que l'on peut toujours localement lier deux courbes sans modifier les distances sur ces courbes. En effet on peut toujours paramétrer des portions de même longueur par une abscisse curviligne variant dans le même intervalle. Quand nous étudierons des surfaces, ce fait ne sera pas toujours assuré.

3 Surfaces bidimensionnelles régulières de \mathbf{R}^3

Nous allons maintenant nous intéresser à des objets bidimensionnels plongés dans \mathbf{R}^3 , mais pour commencer il nous faudra évoquer quelques notions concernant les variétés en général.

3.1 Les variétés en général

On appelle **carte** de dimension n sur un espace topologique E , un couple (D, h) tel que D est un ouvert de E et h est un homéomorphisme de D dans un ouvert de l'espace vectoriel \mathbf{R}^n . L'application h^{-1} qui va de $h(D)$ dans D s'appelle la **paramétrisation** de D et D s'appelle le **domaine** de la carte. On appellera h le **passage** en coordonnées.

Un ensemble de cartes, toutes de dimension n dont les domaines recouvrent E , s'appelle un **atlas** de dimension n . Si on peut définir un tel ensemble sur un espace topologique, on dira que l'espace topologique est une **variété** de dimension n . En vertu du théorème suivant - que nous admettrons - on verra que la dimension d'une variété est définie de façon univoque.

Théorème : invariance du domaine

Soit U un ouvert de \mathbf{R}^n et soit $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ une application continue et injective. Alors $f(U)$ est un ouvert et f est un homéomorphisme de U sur $f(U)$.

Remarques

- Il est important de bien comprendre que l'hypothèse d'injectivité est cruciale. Par exemple, l'application qui aux réels associe leur valeur absolue est continue mais l'image de l'ouvert $] -3, +\infty[$ est $[0, +\infty[$ qui n'est pas ouvert.

- Dans le cas d'une application affine, ce théorème est plus simple à prouver. En effet la partie linéaire sera un isomorphisme de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^n , en particulier son image est de dimension n . Notons f la partie linéaire. Puisque U est ouvert, pour tout $x \in U$, pour tout vecteur v , il existe $\rho > 0$ tel que pour $-\rho < \delta < \rho$ on ait $x + \delta v \in U$. On a alors bien sûr $f(x + \delta v) = f(x) + \delta f(v) \in f(U)$. Puisque l'image de f est de dimension n , on décrit une boule ouverte en faisant varier v ainsi que δ . Enfin, la réciproque de f est aussi un isomorphisme. La proposition suit donc bien sûr pour l'application affine considérée. Plus généralement, le théorème s'avère assez clair pour des difféomorphismes, en effet, en tout point ils sont localement décrits par une application affine injective.

Corollaire

On pose deux entiers n et m différents, alors un ouvert de \mathbf{R}^n ne peut pas être homéomorphe à un ouvert de \mathbf{R}^m .

Démonstration

On suppose que $m < n$. Soit U un ouvert de \mathbf{R}^m , alors U est homéomorphe à $\tilde{U} = U \times \{0\}^{n-m} \subset \mathbf{R}^n$ par l'application qui au m -uplet (x_1, \dots, x_m) associe le n -uplet $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$. Supposons maintenant qu'il existe un homéomorphisme f de \tilde{U} vers un ouvert de \mathbf{R}^n , c'est plus particulièrement une injection continue. D'après le théorème précédent $f(\tilde{U})$ est un ouvert de \mathbf{R}^n . En particulier, si on note pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \tilde{U}$, $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$ puisque $f(\tilde{U})$ est un ouvert alors il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte pour la norme usuelle de \mathbf{R}^n et de rayon ε soit incluse dans $f(\tilde{U})$. Notamment, si $(x_1, \dots, x_m) \in U$, alors $f(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) + \varepsilon e_{m+1} \in f(\tilde{U})$ en notant e_{m+1} le $m+1$ -ième vecteur de la base canonique de \mathbf{R}^n . C'est absurde puisque la $m+1$ -ième composante d'un vecteur de $f(\tilde{U})$ ne peut prendre que la valeur $f_{m+1}(0)$.

QED

Comme le domaine d'une carte de dimension n est homéomorphe à un ouvert de \mathbf{R}^n , ce domaine ne peut pas être aussi homéomorphe à un ouvert de \mathbf{R}^m si m est différent de n . Ceci justifie bien le fait que la dimension d'une variété soit définie.

Considérons maintenant une variété munie d'un atlas contenant les cartes (D_1, h_1) et (D_2, h_2) , alors l'application suivante s'appelle un **changement de carte** :

$$h_2 \circ h_1^{-1} : h_1(D_1 \cap D_2) \rightarrow h_2(D_1 \cap D_2)$$

On dira qu'un atlas est de **classe** C^n pour $n \in [0, \infty]$ si tous les changements de cartes sont des difféomorphismes de classe C^n . On appellera en outre l'application suivante un **changement de coordonnées** :

$$h_1^{-1} \circ h_2 : h_2^{-1}(h_1(D_1) \cap h_2(D_2)) \rightarrow h_1^{-1}(h_1(D_1) \cap h_2(D_2))$$

3.2 Surfaces bidimensionnelles régulières de \mathbf{R}^3

Soit $S \subset \mathbf{R}^3$ une variété de dimension 2. On dira que l'ensemble S est une **surface régulière** de \mathbf{R}^3 si on peut y définir un atlas qui vérifie les conditions suivantes :

1. Les paramétrisations associées aux cartes sont de classe C^∞ .

2. Si (D, h) est une carte de l'atlas dont le domaine contient un point p . L'application $D_p h^{-1} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ est injective.

Remarques

- Si l'on parle de cartes et d'atlas, ce n'est pas pour rien. Grâce au passage en coordonnées on peut associer à chaque point d'une variété un ensemble de scalaires - deux pour des surfaces - qui donnent sa localisation sur la variété.
- La condition **2.** revient à dire que le noyau de l'application $D_p h^{-1}$ est réduit au vecteur nul. Où bien encore, de façon plus concrète, que les quantités $\partial_1 h_p^{-1}$ et $\partial_2 h_p^{-1}$ sont linéairement indépendantes. Cette condition assure, en vertu du théorème d'inversion locale, que les cartes sont des difféomorphismes.

Exemples

Cylindre

Le cylindre suivant : $C = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1\}$ est une variété régulière. On peut naturellement le paramétrer par la fonction h , qui à un couple (u, v) associe $(\cos(u), \sin(u), v)$ avec $u \in [0, 2\pi]$ et $v \in \mathbf{R}$.

On note que $\partial_1(h)(u, v) = (-\sin(u), \cos(u), 0)$ et que $\partial_2(h)(u, v) = (0, 0, 1)$, ces quantités sont clairement linéairement indépendantes.

Cependant cette application ne peut pas constituer une paramétrisation correcte puisque $[0, 2\pi]$ est un fermé de \mathbf{R}^2 . Si on ajoute des valeurs possibles à u pour avoir un intervalle ouvert $] - \varepsilon, 2\pi + \varepsilon[$ l'application ne sera plus injective. Il va donc nous falloir recouvrir le cylindre en plusieurs domaines. Posons $\varepsilon \in]0, 2\pi[$, un atlas correct sur C peut par exemple être constitué des deux cartes suivantes :

$$\{(D_1 =]0, 2\pi - \varepsilon[\times \mathbf{R}, h_1 = h|_{D_1})\} \\ \text{et } \{(D_2 =]\varepsilon, 2\pi + \varepsilon[\times \mathbf{R}, h_2 = h|_{D_2})\}$$

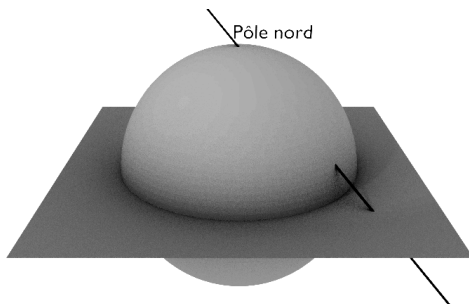
Sphère

Nous allons montrer que la sphère définie par

$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est une surface régulière tout en proposant un système de coordonnées sur celle-ci.

Projection stéréographique

On va obtenir un système de coordonnées à l'aide de ce que l'on appelle une projection stéréographique par rapport à un point. Le principe d'une telle application consiste à choisir un point de référence - le pôle nord - ainsi qu'un plan. Pour localiser un point de la sphère, il s'agira alors de considérer l'intersection de la droite contenant le point qui nous intéresse et le point de référence avec le plan. Ensuite on prendra les coordonnées de cette intersection dans une base génératrice du plan.



Pour cet exemple, le pôle nord sera le point $r = (0, 0, 1)$, nous allons faire la projection stéréographique d'un point $X = (x, y, z)$ de S^2 sur le plan $P = \{(x, y, 0) | (x, y) \in \mathbf{R}^2\}$. Le vecteur \overrightarrow{rX} a pour coordonnées

$(x, y, z - 1)$, on doit donc résoudre $r + k\overrightarrow{rX} \in P$ soit $k(z - 1) + 1 = 0$. Dans le cas où X n'est pas le pôle nord, on trouve $k = \frac{1}{1 - z}$, on en déduit l'application de passage en coordonnées suivante :

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z} \right) \text{ pour } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } z \neq 1$$

On a ainsi une carte sur la sphère privée du point $(0, 0, 1)$, pour obtenir un atlas, il nous suffit de construire une autre projection stéréographique en choisissant un autre pôle nord.

Reste à vérifier que la différentielle du paramétrage est injective pour chaque point du domaine d'une des cartes. Pour ce faire nous allons calculer le paramétrage dans le cas où $(0, 0, 1)$ est le pôle nord, l'autre étant similaire.

Posons $u = \frac{x}{1 - z}$ et $v = \frac{y}{1 - z}$. Puisque nous avons à faire aux points d'une sphère on a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

On peut ainsi calculer la valeur de z :

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 - z^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 + z}{1 - z} \Leftrightarrow u^2 + v^2 + 1 = \frac{2}{1 - z} \Leftrightarrow \frac{1}{1 + u^2 + v^2} = \frac{1 - z}{2} \Leftrightarrow z = 1 - \frac{2}{1 + u^2 + v^2}$$

On aura ainsi les relations :

$$x = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2} \text{ et } y = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}$$

Le paramétrage correspond donc à l'application définie par :

$$(u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, 1 - \frac{2}{1 + u^2 + v^2} \right)$$

3.3 Espace tangent et première forme fondamentale

Soit S une surface régulière et X une courbe paramétrée dont l'image est sur S et soit p un point de S tel que $X(t) = p$ pour une certaine valeur t du paramètre. Alors on dit que $X'(t)$ est un **vecteur tangent** à S en p .

Proposition

Soit $x : U \mapsto S$ une paramétrisation, alors l'ensemble des vecteurs tangents à S en un point p est un plan vectoriel de \mathbf{R}^3 qui coïncide avec $D_{\tilde{p}}x(\mathbf{R}^2)$, en posant que $\tilde{p} = x^{-1}(p)$.

Démonstration

On peut définir une courbe X sur S comme étant la composée d'une application $\tilde{X} : \mathbf{R} \rightarrow U$ et de x car x est un C^1 -difféomorphisme. On a alors :

$$\begin{aligned} X'(t) &= (x \circ \tilde{X})'(t) = D_t(x \circ \tilde{X})(1) \\ &= (D_{\tilde{X}(t)}x \circ D_t\tilde{X})(1) = D_{\tilde{X}(t)}x(\tilde{X}'(t)) \end{aligned}$$

En particulier on peut choisir \tilde{X} comme étant la restriction d'une application affine ayant la partie linéaire que l'on veut dans un voisinage de \tilde{p} par convexité des boules. Reste qu'en supposant que $\tilde{X}(t) = \tilde{p}$ on obtient le résultat.

QED

Supposons maintenant que \mathbf{R}^3 est doté de sa structure euclidienne standard, alors naturellement ses sous-espaces vectoriels, et en particulier les plans tangents - on notera $T_p S$ le plan tangent à une surface S au point p - à la surface héritent de cette structure par restriction du produit scalaire.

Première forme fondamentale

Etant donnée x une paramétrisation et p un point de coordonnées \tilde{p} alors nous avons vu que l'on peut définir les vecteurs tangents en p par l'ensemble des combinaisons linéaires suivantes $a\partial_1 x(p) + b\partial_2 x(p)$ avec a et b des scalaires. En particulier les dérivées partielles $\partial_1 x(p)$ et $\partial_2 x(p)$ forment une base dans laquelle on peut exprimer le produit scalaire entre $u = (a_1, b_1)$ et $v = (a_2, b_2)$ de la façon suivante :

$$a_1 a_2 (\partial_1 x(p) | \partial_1 x(p)) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) (\partial_1 x(p) | \partial_2 x(p)) + b_1 b_2 (\partial_2 x(p) | \partial_2 x(p))$$

On appelle ce produit scalaire défini sur l'espace tangent la **première forme fondamentale** et on le note généralement $I(u, v)$ ou $g(u, v)$ (ici nous le noterons plutôt g), attention malgré cette notation g dépend implicitement du point de la surface où l'on considère l'espace tangent ! La première forme fondamentale est en fait un cas particulier de métrique riemannienne, nous adopterons la notation usuelle pour ses coefficients $g_{ij} = g_{ji} := (\partial_i x(p) | \partial_j x(p))$.

Notez que la première forme fondamentale nous donne une façon canonique de passer d'un espace tangent à son dual en fixant une des deux variables données à g de la même façon que nous passerions au dual dans un espace euclidien.

Distance sur une courbe d'une surface

La différentielle en des coordonnées \tilde{p} représentant un point p d'une surface S constitue un isomorphisme entre \mathbf{R}^2 et le plan tangent $T_p S$. On peut considérer une courbe paramétrée plane $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow D \subset \mathbf{R}^2$ dont l'image est dans un domaine d'une carte x d'un atlas représentant S . La composition $x \circ \gamma$ donne ainsi une courbe paramétrée sur la surface S . Si on pose $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ on peut écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned} (x \circ \gamma)'(\sigma) &= D_\sigma(x \circ \gamma) = D_{\gamma(\sigma)} x \circ \gamma'(\sigma) = D_{\gamma(\sigma)} x(\gamma'(\sigma)) \\ &= \partial_1 x(\gamma(\sigma))\gamma'_1 + \partial_2 x(\gamma(\sigma))\gamma'_2 \end{aligned}$$

De ce petit calcul on observe la correspondance entre les coordonnées d'un vecteur vitesse de \mathbf{R}^2 et ses coordonnées dans l'espace tangent grâce à la différentielle du paramétrage. On peut par ailleurs définir -en accord avec la notion de distance que nous avons vue dans la partie précédente- la distance entre deux points de la courbe paramétrés par des réels σ_1 et σ_2 par la quantité :

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{g(\gamma'(\xi), \gamma'(\xi))} d\xi$$

On peut aussi noter ceci avec des indices :

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \gamma'_i(\xi) \gamma'_j(\xi)} d\xi$$

Ou bien de façon plus compacte en omettant la variable et en adoptant les conventions données précédemment :

$$L(\varepsilon) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j} d\xi$$

Cette notation s'avère très pratique quand les indices sont nombreux, nous conviendrons de l'utiliser par la suite.

3.4 Géodésiques

On appelle **géodésique** d'un espace, le plus court chemin reliant deux points, par exemple dans un espace plat les géodésiques sont des segments de droites. Il est bien sûr naturel de se demander comment les caractériser.

Supposons connue une géodésique sur une surface donnée par :

$$\gamma : [\sigma_1, \sigma_2] \rightarrow R^2$$

Considérons maintenant une perturbation donnée par une autre courbe :

$$\delta : [\sigma_1, \sigma_2] \rightarrow R^2$$

telle que $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$. Pour tout ε la courbe donnée par $\gamma_\varepsilon = \gamma + \varepsilon\delta$ a bien sûr les mêmes extrémités que γ_0 et sa longueur est minimale pour $\varepsilon = 0$.

On considère la longueur suivante :

$$L(\varepsilon) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}_\varepsilon^i \dot{\gamma}_\varepsilon^j} d\xi$$

On peut en faire un développement limité au voisinage de $\varepsilon = 0$:

$$L(\varepsilon) = L(0) + \varepsilon \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{1}{2\sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}} \left(\delta^k \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j + \dot{\delta}^k \frac{\partial}{\partial \dot{x}^k} g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \right) d\xi + o(\varepsilon)$$

Ce qui se note encore :

$$L(\varepsilon) = L(0) + \varepsilon \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{1}{2\sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}} \left(\delta^k \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j + 2g_{ik} \dot{\gamma}^i \dot{\delta}^k \right) d\xi + o(\varepsilon)$$

Puisqu'il le minimum est atteint en $\varepsilon = 0$ il s'agit d'un point critique et donc on a :

$$0 = L'(0) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{1}{2\sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}} \left(\delta^k \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j + 2g_{ik} \dot{\gamma}^i \dot{\delta}^k \right) d\xi$$

On peut faire une intégration par parties sur le second terme entre parenthèses en se rappelant que $\delta(\sigma_1) = \delta(\sigma_2) = 0$.

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{1}{2\sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}} \left(\delta^k \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j - 2\delta^k \frac{\partial}{\partial \xi} g_{ik} \dot{\gamma}^i \right) d\xi$$

En vertu du lemme fondamental du calcul des variations et sachant que la quantité $2\sqrt{g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j}$ ne s'annule pas, l'équation prend donc la forme suivante pour tout indice k :

$$\frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j - \frac{\partial}{\partial \xi} (g_{ik} \dot{\gamma}^i) = 0$$

Pour les calculs, il faudra bien se rappeler que g varie selon le point où on se situe, donc selon ξ , en particulier on aura ici :

$$\frac{d}{d\xi} g_{ik} = \partial_j g_{ik} \dot{\gamma}^j$$

Au final l'équation des géodésiques devient donc :

$$\frac{1}{2} \partial_k g_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j - \partial_j g_{ik} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^i - g_{ik} \ddot{\gamma}^i = 0$$

Notez aussi que le calcul que nous avons fait est généralisable pour des surfaces riemanniennes de toute dimension. En outre, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, étant donné le vecteur vitesse initial et le point de départ, on peut déterminer une unique géodésique "maximale" partant de ce point. Donnons maintenant quelques exemples d'applications pour voir si la théorie s'accorde à l'intuition.

Exemples

Plan

Pour faciliter les calculs, on peut considérer sans perte de généralité un plan engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique. On a donc une paramétrisation :

$$x : (u, v) \mapsto ue_1 + ve_2 + p$$

La différentielle de x est donnée par l'application linéaire associée, ce qui donne les coefficients du tenseur métrique :

$$\{g\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'équation des géodésiques donne :

$$g_{ik}\ddot{\gamma}^i = 0$$

En reportant les coefficients du tenseurs métrique on obtient :

$$\ddot{\gamma}^1 = \ddot{\gamma}^2 = 0$$

γ est donc un segment de droite de \mathbf{R}^2 , par conséquent $x \circ \gamma$ est un segment de droite du plan $x(\mathbf{R}^2)$.

Sphère

Considérons maintenant la sphère localement paramétrée par la longitude et la latitude :

$$x : (\theta, \phi) \mapsto (\cos(\phi)\cos(\theta), \cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi))$$

La différentielle de x s'exprime ainsi :

$$\{D_{(\theta, \phi)}x\} = \begin{pmatrix} -\cos(\phi)\sin(\theta) & -\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\cos(\theta) & -\sin(\phi)\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Le tenseur métrique peut donc se représenter comme ceci :

$$\{g\} = \begin{pmatrix} \cos^2(\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

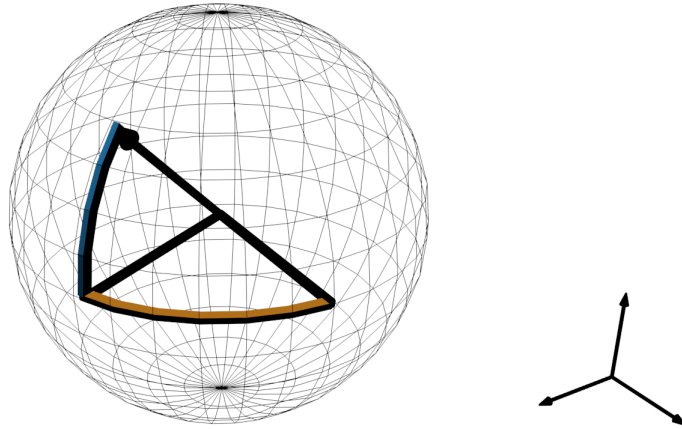
Si on reporte cela dans l'équation des géodésiques on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}^2 + \cos(\gamma^2)\sin(\gamma^2)(\dot{\gamma}^1)^2 = 0 \\ 2\cos(\gamma^2)\sin(\gamma^2)\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^1 - \cos^2(\gamma^2)\ddot{\gamma}^1 = 0 \end{cases}$$

Cette équation définit les portions des grands cercles sur la sphère. Par exemple si on prend :

$$\gamma : t \mapsto (t, 0)$$

L'équation est vérifiée. Plus généralement on peut la vérifier pour les autres grands cercles en translatant l'origine des (θ, ϕ) de façon à pouvoir écrire l'équation du grand cercle que l'on veut comme ci-dessus.



3.5 L'application de Gauss

Vecteur normal et surfaces orientables

On définit le **vecteur unitaire normal** à un point p de coordonnées \tilde{p} d'une surface S paramétrée par x de la façon suivante :

$$N(\tilde{p}) = \frac{\partial_1 x(\tilde{p}) \wedge \partial_2 x(\tilde{p})}{\|\partial_1 x(\tilde{p}) \wedge \partial_2 x(\tilde{p})\|}$$

On appelle le champ de vecteurs N **l'application de Gauss**², si elle est définie et continue sur la surface, on dit que cette dernière est **orientable**.

Explications

Orienter un espace vectoriel euclidien revient à définir une base de référence et à définir l'ensemble des bases directes comme étant issues d'une application du groupe spécial-orthogonal à cette base de référence. Quand on considère une surface, on peut définir des plans tangents ainsi que des vecteurs normaux formant une base de \mathbf{R}^3 et définissant par la même une orientation.

Endomorphisme de Weingarten et courbure

Proposition/définition

On considère l'endomorphisme de \mathbf{R}^2 défini de la façon suivante :

$$W_{\tilde{p}} : (u, v) \mapsto (D_{\tilde{p}}x)^{-1} \circ D_{\tilde{p}}N(u, v)$$

On appelle W **l'endomorphisme de Weingarten**³ au point de coordonnées \tilde{p} , c'est un opérateur auto-adjoint.

2. **Carl Friedrich Gauss** 1777, 1855, mathématicien allemand

3. **Julius Weingarten** 1836, 1910 mathématicien allemand

Démonstration

Avant même de vérifier que c'est un opérateur auto-adjoint il convient d'assurer qu'il est bien défini, en d'autres termes il faut que $Im(D_{\tilde{p}}N)$ soit inclus dans le plan tangent en \tilde{p} . Ceci revient à montrer que pour tout vecteur v de \mathbf{R}^2 , $(D_{\tilde{p}}N(v)|N(\tilde{p})) = 0$.

Posons $\eta : \tilde{p} \mapsto (N(\tilde{p})|N(\tilde{p}))$, alors cette application est constante et égale à 1. En particulier $D_{\tilde{p}}\eta = 2(D_{\tilde{p}}N|N(\tilde{p})) = 0$ donc l'endomorphisme de Weingarten est convenablement défini puisque son image est orthogonale au vecteur normal donc elle est sur le plan tangent.

On sait maintenant que $\partial_1 N(\tilde{p})$ et que $\partial_2 N(\tilde{p})$ sont sur le plan tangent. Ainsi, en considérant les coordonnées de la dérivée du vecteur normal dans la base $\{\partial_1 x(\tilde{p}), \partial_2 x(\tilde{p})\}$ on écrit :

$$\begin{aligned} \partial_1 N(\tilde{p}) &= (\partial_1 N(\tilde{p}))^1 \partial_1 x(\tilde{p}) + (\partial_1 N(\tilde{p}))^2 \partial_2 x(\tilde{p}) \\ \text{ainsi que } \partial_2 N(\tilde{p}) &= (\partial_2 N(\tilde{p}))^1 \partial_1 x(\tilde{p}) + (\partial_2 N(\tilde{p}))^2 \partial_2 x(\tilde{p}) \end{aligned}$$

On notera bien que le terme $(\partial_i N(\tilde{p}))^j$ correspond en fait au coefficient en position i, j de la matrice de $W_{\tilde{p}}$ dans la base canonique.

Par ailleurs puisque $(N(\tilde{p})|\partial_1 x(\tilde{p}))$ est toujours égal à 0 on obtient les relations suivantes en dérivant :

$$\begin{cases} (\partial_1 N(\tilde{p})|\partial_1 x(\tilde{p})) + (N(\tilde{p})|\partial_{11} x(\tilde{p})) = 0 \\ (\partial_2 N(\tilde{p})|\partial_1 x(\tilde{p})) + (N(\tilde{p})|\partial_{21} x(\tilde{p})) = 0 \\ (\partial_1 N(\tilde{p})|\partial_2 x(\tilde{p})) + (N(\tilde{p})|\partial_{12} x(\tilde{p})) = 0 \\ (\partial_2 N(\tilde{p})|\partial_2 x(\tilde{p})) + (N(\tilde{p})|\partial_{22} x(\tilde{p})) = 0 \end{cases}$$

Puisque $(\partial_i N(\tilde{p}))^j = (\partial_i N(\tilde{p})|\partial_j x(\tilde{p}))$ la deuxième relation ainsi que la troisième nous donnent :

$$(\partial_2 N(\tilde{p}))^1 = (\partial_1 N(\tilde{p}))^2$$

QED

Notion de courbure

Puisque l'endomorphisme de Weingarten est autoadjoint, on peut le diagonaliser. On appellera alors ses valeurs propres les **courbures principales**. La moyenne des courbures principales s'appelle la **courbure moyenne** et enfin leur produit - qui correspond au déterminant de l'endomorphisme de Weingarten - s'appelle la **courbure de Gauss**.

On définit en outre la **seconde forme fondamentale** en \tilde{p} de la façon suivante :

$$II_{\tilde{p}}(v) = -(W_{\tilde{p}}(v)|v)$$

Posons maintenant $\gamma = x \circ \tilde{\gamma}$ une courbe tracée sur une surface localement paramétrée en abscisse curviligne par x . Supposons que $\tilde{p} = \tilde{\gamma}(\sigma)$ on appelle alors **courbure normale** de γ en $\gamma(\sigma)$ la quantité suivante :

$$c_n(\gamma, \sigma) = (N(\tilde{p})|\gamma''(\sigma))$$

En posant c la courbure de γ et n son vecteur unitaire normal on peut aussi écrire :

$$c_n(\gamma, \sigma) = c(N(\tilde{p})|n(\sigma))$$

On remarquera que si on considère une courbe dont le vecteur unitaire normal est égal à N , la courbure normale est égale à la courbure de γ .

Proposition

Supposons que $v = \tilde{\gamma}'(\sigma)$, alors :

$$II_{\tilde{p}}(v) = c_n(\gamma, \sigma)$$

Preuve

Par définition on peut écrire :

$$\begin{aligned} II_{\tilde{p}}(v) &= -(W_{\tilde{p}}(v)|v) = -(W_{\tilde{p}}(\tilde{\gamma}'(\sigma))|\tilde{\gamma}'(\sigma)) \\ &= -(D_{\tilde{p}}N(\gamma'(\sigma))|\gamma'(\sigma)) = -(D_{\tilde{p}}N(\gamma'(\sigma))|\gamma'(\sigma)) \end{aligned}$$

Posons $\tilde{N} = N \circ \tilde{\gamma}$, alors on aura $D_{\tilde{p}}N(\tilde{\gamma}'(\sigma)) = \tilde{N}'(\sigma)$.

Puisque $(\tilde{N}(\sigma)|\gamma'(\sigma)) = 0$, en dérivant on peut affirmer que $-(\tilde{N}'(\sigma)|\gamma'(\sigma)) = (\tilde{N}(\sigma)|\gamma''(\sigma))$. On obtient donc :

$$c_n(\gamma, \sigma) = II_{\tilde{p}}(v)$$

QED

Proposition

Les courbures principales sont le maximum et le minimum des courbures normales.

Preuve

C'est en fait un résultat qui ne s'avère pas spécifique à la théorie des surfaces. On peut considérer la seconde forme fondamentale comme exprimée en matrice dans différentes bases de vecteurs tangents.

On cherche les extrema de la seconde forme fondamentale sur le cercle unité, en effet en faisant un paramétrage de la courbe par l'abscisse curviligne on peut supposer que son vecteur tangent est unitaire. Ceci revient à chercher les extrema des coefficients diagonaux.

Nous allons donc appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange en utilisant l'invariance du déterminant et de la trace par changement de base.

Considérons l'ensemble des matrices 2×2 :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dont le déterminant vaut D et la trace vaut T .

On peut commencer par maximiser l'application $f : M \mapsto a$ suivant la contrainte :

$$\begin{cases} ad - bc = D \\ a + d = T \end{cases}$$

D'après le théorème des multiplicateurs de Lagrange appliqué à f suivant la contrainte ci dessus on doit avoir une dépendance linéaire de la forme :

$$(1, 0, 0, 0) = \lambda_1(d, -c, -b, a) + \lambda_2(1, 0, 0, 1)$$

En particulier on doit avoir $c = 0$ et $b = 0$ donc a et d sont valeurs propres.

Par ailleurs la trace est fixée et on doit avoir $a + d = T$, de fait si maximise a , on doit minimiser d .

QED

Exemples

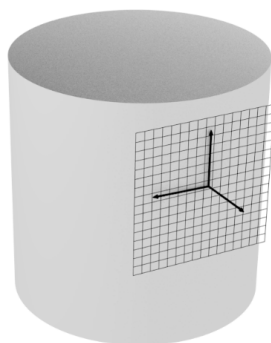
Caractérisation d'un plan

Soit l une application linéaire injective de $L(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$, on peut alors la considérer comme paramétrisation d'une surface régulière et plus particulièrement d'un plan (et à constante près, on peut même considérer un plan affine). Les composantes $\partial_1 l$ et $\partial_2 l$ sont constantes - elles correspondent aux colonnes de la matrice de l dans les bases usuelles - donc l'application de Gauss est constante. Les courbures principales du plan sont donc nulles, la notion mathématique de courbure semble donc en premier lieu correspondre à l'intuition.

Cylindre

On considère le cylindre localement paramétré par :

$$c(\theta, h) = (\cos(\theta), \sin(\theta), h)$$



La différentielle de c se représente de la façon suivante dans les bases usuelles :

$$\begin{pmatrix} -\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur unitaire normal au point de coordonnées (θ, h) est donc donné par $(\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$. On peut représenter l'endomorphisme de Weingarten au point de coordonnées (θ, h) par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les courbures principales sont donc 1 et 0, la courbure de Gauss est nulle.

Sphère

On prend le paramétrage d'une sphère de rayon R par sa longitude et sa latitude :

$$x : (\theta, \phi) \mapsto R(\cos(\phi)\cos(\theta), \cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi))$$

Grâce aux calculs que l'on a fait précédemment on montre facilement que :

$$N = \left(\frac{1}{R}\right) x$$

En particulier on arrive à $W_{\bar{p}} = \left(\frac{1}{R^2}\right) D_{\bar{p}}x$, les courbures principales valent $1/R$ et la courbure de Gauss vaut $1/R^2$.

3.6 Un théorème remarquable !

Dans la partie précédente, en utilisant l'application de Gauss, nous avons défini la courbure de façon extrinsèque, c'est-à-dire liée à l'espace dans lequel la variété est plongée - en l'occurrence \mathbf{R}^3 -, le theorema egregium permet de définir intrinsèquement la courbure, c'est à dire uniquement en "restant sur la surface".

Définition

Soient S et S' deux surfaces régulières, on dit qu'elles sont **isométriques** si il existe un difféomorphisme f de S sur S' tel que pour tout $p \in S$, pour tout couple de vecteurs u et v de $T_p S$:

$$(u|v) = (D_p f(u)|D_p f(v))$$

On dira en outre que f est une **isométrie** au sens riemannien. Si f est seulement un difféomorphisme local on parlera d'**isométrie locale**.

Proposition

Soient S et S' deux surfaces régulières. Supposons qu'il existe des paramétrisations locales $x : U \rightarrow S$ et $y : U \rightarrow S'$ telles que x et y donnent la même première forme fondamentale. Alors l'application $y \circ x^{-1} : x(U) \rightarrow S'$ est une isométrie locale.

Preuve

Soit p un point de $x(U)$ de coordonnées \tilde{p} pour le paramétrage x . Commençons par exprimer l'application $D_p y \circ x^{-1}$.

Puisque $x \circ x^{-1} = Id$ on a $D_p(x \circ x^{-1}) = Id$ soit

$$D_{\tilde{p}} x \circ D_p x^{-1} = Id$$

En particulier $D_p x^{-1} = (D_{\tilde{p}} x)^{-1}$

On a donc $D_p(y \circ x^{-1}) = D_{\tilde{p}} y \circ (D_{\tilde{p}} x)^{-1}$

Posons maintenant $g_{\tilde{p}}$ le tenseur métrique associé à x aux coordonnées \tilde{p} et g'_p le tenseur métrique associée à y aux mêmes coordonnées. Si on prend u et v deux vecteurs de \mathbf{R}^2 on a alors :

$$g_{\tilde{p}}(u, v) = g'_p(u, v)$$

Par définition de la première forme fondamentale on a :

$$g_{\tilde{p}}(u, v) = (D_{\tilde{p}} x(u)|D_{\tilde{p}} x(v)) \text{ et } g'_p(u, v) = (D_{\tilde{p}} y(u)|D_{\tilde{p}} y(v))$$

ce qui donne :

$$(D_{\tilde{p}} x(u)|D_{\tilde{p}} x(v)) = (D_{\tilde{p}} y(u)|D_{\tilde{p}} y(v))$$

On a bien sûr $D_{\tilde{p}} y = D_{\tilde{p}} y \circ (D_{\tilde{p}} x)^{-1} \circ D_{\tilde{p}} x$

De plus $D_{\tilde{p}} x$ est un isomorphisme de \mathbf{R}^2 vers $T_p S$ donc on peut poser de façon univoque $U = D_{\tilde{p}} x(u)$, $V = D_{\tilde{p}} x(v)$

On a donc $(U|V) = (D_{\tilde{p}} y \circ (D_{\tilde{p}} x)^{-1}(U)|D_{\tilde{p}} y \circ (D_{\tilde{p}} x)^{-1}(V))$ pour tout couple de vecteurs U et V de $T_p S$

Sachant que $D_{\tilde{p}} y \circ (D_{\tilde{p}} x)^{-1} = D_p(y \circ x^{-1})$ on a alors bien l'égalité voulue.

QED

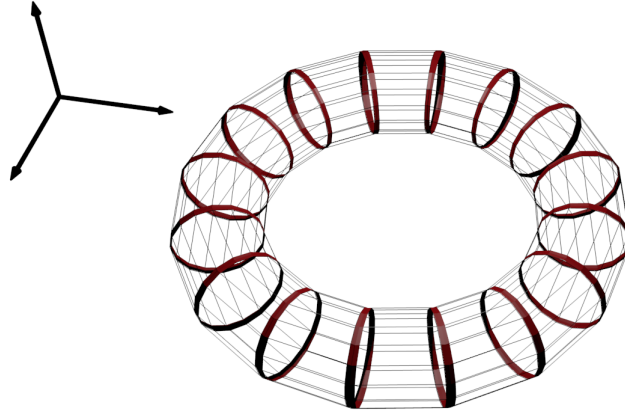
Exemples

Les plans, les cylindres et les tores sont localement isométriques, en revanche ces derniers ne sont pas isométriques à des sphères.

En ce qui concerne les plans et les cylindres c'est assez clair, nous avons calculé les vecteurs dérivés pour un paramétrage du cylindre, on retrouve ainsi le même tenseur métrique que pour un plan c'est à dire le produit scalaire usuel.

On peut construire un tore par rotation d'un cercle autour d'un axe. Prenons par exemple le cercle localement paramétré par $\theta \mapsto (\cos(\theta) + r, 0, \sin(\theta) + r)$ et appliquons lui une rotation d'angle ϕ autour de l'axe des hauteurs. On obtient ainsi le paramétrage local suivant :

$$x : (\theta, \phi) \mapsto ((\cos(\theta) + r)\cos(\phi), (\cos(\theta) + r)\sin(\phi), \sin(\theta) + r)$$



On a ainsi les vecteurs dérivés suivant :

$$\begin{aligned}\partial_1 x(\theta, \phi) &= (-\sin(\theta)\cos(\phi), -\sin(\theta)\sin(\phi), \cos(\theta)) \\ \partial_2 x(\theta, \phi) &= ((-\cos(\theta) + r)\sin(\phi), (-\sin(\theta) + r)\sin(\phi), \cos(\theta))\end{aligned}$$

Là encore si on fait leur produit scalaire on retrouve la représentation canonique du produit scalaire.

Concernant la sphère, le théorème suivant nous permettra de comprendre pourquoi elle n'est pas localement isométrique au plan.

Theorema egregium de Gauss

Deux surfaces isométriques ont la même courbure de Gauss.

Preuve

Nous allons exprimer la courbure de Gauss uniquement en fonction des coefficients de la première forme fondamentale et de leurs dérivées. On considère un paramétrage x , nous reprendrons de plus la notation g_{ij} pour la première forme fondamentale, par ailleurs pour alléger les calculs on omettra le point (par exemple on notera x plutôt que $x(\tilde{p})$). On posera $x = x^i e_i$, enfin notons K la courbure de Gauss. La démonstration de ce résultat est lourde en calculs, nous nous inspirerons de la preuve donnée par Michèle Audin dans l'ouvrage "Géométrie".

On avait vu que :

$$(\partial_i N | \partial_j x) = -(N | \partial_{ij} x)$$

Commençons par calculer N :

$$\begin{aligned} \partial_1 x \wedge \partial_2 x &= (\partial_1 x^2 \partial_2 x^3 - \partial_1 x^3 \partial_2 x^2) e_1 \\ &\quad + (\partial_1 x^3 \partial_2 x^1 - \partial_1 x^1 \partial_2 x^3) e_2 \\ &\quad + (\partial_1 x^1 \partial_2 x^2 - \partial_1 x^2 \partial_2 x^1) e_3 \end{aligned}$$

On peut ainsi remarquer que $\|\partial_1 x \wedge \partial_2 x\| = \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}$. On a donc :

$$N = \frac{\partial_1 x \wedge \partial_2 x}{\sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2}}$$

D'après sa définition on peut représenter l'endomorphisme de Weingarten par la matrice dont les coefficients sont :

$$(\partial_i N | \partial_j x) = (\partial_1 x \wedge \partial_2 x | \partial_{ij} x)$$

On peut alors exprimer la courbure de Gauss :

$$\begin{aligned} K &= (N | \partial_{11} x)(N | \partial_{22} x) - (N | \partial_{12} x)^2 \\ &= \frac{(\partial_1 x \wedge \partial_2 x | \partial_{11} x)(\partial_1 x \wedge \partial_2 x | \partial_{22} x) - (\partial_1 x \wedge \partial_2 x | \partial_{12} x)^2}{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} \end{aligned}$$

En utilisant le fait que le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée et que le déterminant d'un produit est égal au produit des déterminants ainsi que la formule du produit mixte on a :

$$\begin{aligned} K (g_{11}g_{22} - (g_{12})^2) &= \det \left(\begin{pmatrix} {}^t\{\partial_1 x\} \\ {}^t\{\partial_2 x\} \\ {}^t\{\partial_{11} x\} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \{\partial_1 x\} & \{\partial_2 x\} & \{\partial_{22} x\} \end{pmatrix} \right) - \det \left(\begin{pmatrix} {}^t\{\partial_1 x\} \\ {}^t\{\partial_2 x\} \\ {}^t\{\partial_{12} x\} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \{\partial_1 x\} & \{\partial_2 x\} & \{\partial_{12} x\} \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & (\partial_1 x | \partial_{22} x) \\ g_{21} & g_{22} & (\partial_2 x | \partial_{22} x) \\ (\partial_{11} x | \partial_1 x) & (\partial_{11} x | \partial_2 x) & (\partial_{11} x | \partial_{22} x) \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & (\partial_1 x | \partial_{12} x) \\ g_{21} & g_{22} & (\partial_2 x | \partial_{12} x) \\ (\partial_{12} x | \partial_1 x) & (\partial_{12} x | \partial_2 x) & (\partial_{12} x | \partial_{12} x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On se rappellera que $g_{ij} = (\partial_i x | \partial_j x)$ et on utilisera les égalités suivantes :

$$\partial_k g_{ij} = \partial_k (\partial_i x | \partial_j x) = (\partial_{ki} x | \partial_j x) + (\partial_i x | \partial_{kj} x)$$

$$\partial_i g_{ij} - \frac{1}{2} \partial_j g_{ii} = \partial_i (\partial_i x | \partial_j x) - \frac{1}{2} \partial_j (\partial_i x | \partial_i x) = (\partial_{ii} x | \partial_j x)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \partial_{11} g_{22} + \partial_{12} g_{12} - \frac{1}{2} \partial_{22} g_{11} &= -\partial_1 (\partial_2 x | \partial_{12} x) - \partial_2 (\partial_1 x | \partial_{12} x) \\ &\quad + \partial_1 ((\partial_{21} x | \partial_2 x) + (\partial_1 x | \partial_{22} x)) \\ &= (\partial_{11} x | \partial_{22} x) - (\partial_{12} x | \partial_{12} x) \end{aligned}$$

Ce qui donne l'expression suivante :

$$\begin{aligned} K (g_{11}g_{22} - (g_{12})^2) &= \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \partial_2 g_{12} - \frac{1}{2} \partial_1 g_{22} \\ g_{21} & g_{22} & \frac{1}{2} \partial_2 g_{22} \\ \frac{1}{2} \partial_1 g_{11} & \partial_1 g_{12} - \frac{1}{2} \partial_2 g_{11} & (\partial_{11} x | \partial_{22} x) \end{pmatrix} \\ &\quad - \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \frac{1}{2} \partial_2 g_{11} \\ g_{21} & g_{22} & \frac{1}{2} \partial_1 g_{22} \\ \frac{1}{2} \partial_2 g_{11} & \frac{1}{2} \partial_1 g_{22} & (\partial_{12} x | \partial_{12} x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On peut développer les deux déterminants par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{aligned}
K(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2) &= ((\partial_{11}x|\partial_{22}x) - (\partial_{12}x|\partial_{12}x))(g_{11}g_{22} - (g_{12})^2) \\
&\quad - (\partial_1g_{12} - \frac{1}{2}\partial_2g_{11})(\frac{1}{2}g_{11}\partial_2g_{22} + \frac{1}{2}g_{21}\partial_1g_{22} - g_{21}\partial_2g_{12}) \\
&\quad + (\frac{1}{2}\partial_1g_{11})(\frac{1}{2}g_{21}\partial_2g_{22} + \frac{1}{2}g_{22}\partial_1g_{22} - g_{22}\partial_2g_{12}) \\
&\quad + (\frac{1}{2}\partial_1g_{22})(\frac{1}{2}g_{11}\partial_1g_{22} - \frac{1}{2}g_{21}\partial_2g_{11}) \\
&\quad - (\frac{1}{2}\partial_2g_{11})(\frac{1}{2}g_{21}\partial_1g_{22} - \frac{1}{2}g_{22}\partial_2g_{11})
\end{aligned}$$

En se rappelant que : $(\partial_{11}x|\partial_{22}x) - (\partial_{12}x|\partial_{12}x) = -\frac{1}{2}\partial_{11}g_{22} + \partial_{12}g_{12} - \frac{1}{2}\partial_{22}g_{11}$ on obtient une expression de la courbure en fonction des coefficients de la première forme fondamentale.

QED

3.7 Champs de tenseurs et dérivée covariante

Remarque

Etant donné les conditions de régularité exigées, il est clair que l'on peut très bien identifier une fonction sur une surface à une fonction sur le domaine d'une carte, ce qui peut s'avérer plus pratique.

Champ de tenseurs

On appelle **champ de vecteurs** sur une surface S paramétrée localement par x à partir d'un ouvert U une application C^1 sur U de la forme :

$$v : \tilde{p} \in U \mapsto v(\tilde{p}) \in T_{x(\tilde{p})}S$$

De même on appelle **champ de covecteurs** sur U une application C^1 de la forme :

$$v^* : \tilde{p} \in U \mapsto v(\tilde{p}) \in T_{x(\tilde{p})}S^*$$

On peut plus généralement définir un **champ de tenseurs** d'ordre (h, k) comme une application C^1 de la forme :

$$T : \tilde{p} \in U \mapsto T(\tilde{p}) \in (T_{x(\tilde{p})}S^*)^k \times (T_{x(\tilde{p})}S)^l$$

Dérivée covariante, transport parallèle

Il apparaît clair qu'un champ de vecteur sur une surface ne se dérive pas tout à fait de la même façon que sur un espace plat dont les coordonnées sont fixes. En effet si on note x une paramétrisation de la surface et que l'on exprime le champ de vecteur v en fonction de la base de vecteurs tangents associée de la façon suivante : $v = \partial_i x(\tilde{p})v^i$

On obtient :

$$\partial_j v = \partial_j(\partial_i x(\tilde{p})v^i) = (\partial_j \partial_i x(\tilde{p}))v^i + \partial_i x(\tilde{p})(\partial_j v^i)$$

Il ne suffit pas de dériver les coordonnées de v . Les dérivées de la base des vecteurs tangents interviennent, on définit ainsi les **symboles de Christoffel**⁴ (on peut permuter i et j d'après le lemme de Schwarz) qui représentent l'évolution de cette base :

4. **Elwin Bruno Christoffel** 1829-1900, mathématicien et physicien allemand

$$\Gamma_{ij}^k \partial_k x(\tilde{p}) = \partial_j \partial_i x(\tilde{p})$$

Ou plus généralement, si on considère une base mobile (e_i) , comme nous conviendrons de le faire par la suite, à la place des d riv es partielles du paramétrage :

$$\Gamma_{ij}^k e_k = \partial_j e_i$$

Si on pose (e^k) la base de covecteurs associ e   (e_k) on a :

$$\Gamma_{ij}^k = e^k(\partial_j e_i)$$

On notera la dérivée $\nabla_j v$, que l'on appellera **dérivée covariante**, pour ne pas oublier le terme supplémentaire qui s'ajoute. En ce qui concerne les champs scalaires, il est clair que la dérivée covariante se calcule comme la dérivée classique.

Il peut aussi être intéressant d'exprimer les composantes de la dérivée covariante d'un vecteur :

$$\begin{aligned} \nabla_j v &= \nabla_j(v^i e_i) = \partial_j(v^i) e_i + v^i \Gamma_{ij}^k e_k \\ &= \partial_j(v^k) e_k + v^i \Gamma_{ij}^k e_k \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\nabla_j v^k = \partial_j(v^k) + v^i \Gamma_{ij}^k$$

Exemple : plan décrit en coordonnées polaires

On considère le paramétrage local du plan de hauteur nulle suivant :

$$x : (r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta), 0)$$

Les vecteurs dérivés s'expriment ainsi dans le plan :

$$\{e_1\} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \text{ et } \{e_2\} = \begin{pmatrix} -r \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

La base duale associ e est la suivante :

$$\begin{aligned} \{e^1\} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &\text{et} \\ \{e^2\} &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \sin(\theta) + (\cos^2(\theta)/\sin(\theta)) & \cos(\theta) + (\sin^2(\theta)/\cos(\theta)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc les symboles de Christoffel suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0 & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = 0 & \Gamma_{22}^1 &= -r \\ \Gamma_{11}^2 &= 0 & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} & \Gamma_{22}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Proposition

On peut calculer les symboles de Christoffel à partir des coefficients du tenseur métrique avec la formule suivante :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_j g_{il} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ji})$$

Preuve

On rappelle que :

$$\partial_j e_i = \Gamma_{ij}^k e_k \text{ et } g_{ij} = (e_i | e_j)$$

On a donc :

$$(\partial_j e_i | e_l) = \Gamma_{ij}^k g_{kl}$$

Soit :

$$\Gamma_{ij}^k g_{kl} = (\partial_j e_i | e_l) = \partial_j (e_i | e_l) - (e_i | \partial_j e_l) = \partial_j g_{il} - (e_i | \partial_j e_l)$$

De même que ci-dessus on a :

$$(e_i | \partial_j e_l) = \Gamma_{lj}^k g_{ki}$$

Donc on obtient :

$$\Gamma_{ij}^k g_{kl} + \Gamma_{lj}^k g_{ki} = \partial_j g_{il}$$

Malheureusement, l'affaire est loin d'être entendue puisque k est un indice de sommation.

On rappelle que l'on peut permuer les indices inférieurs des symboles de Christoffel. En faisant des permutations circulaires sur les indices i, j et l on arrive à :

$$\begin{cases} \Gamma_{ij}^k g_{kl} + \Gamma_{lj}^k g_{ki} = \partial_j g_{il} \\ \Gamma_{li}^k g_{kj} + \Gamma_{ji}^k g_{kl} = \partial_i g_{lj} \\ \Gamma_{jl}^k g_{ki} + \Gamma_{il}^k g_{kj} = \partial_l g_{ji} \end{cases}$$

Si on somme les deux premières lignes et que l'on retranche la dernière on obtient :

$$2\Gamma_{ij}^k g_{kl} = \partial_j g_{il} + \partial_i g_{lj} - \partial_l g_{ji}$$

Reste à diviser par deux et à multiplier par les coefficients du tenseur métrique inverse pour parvenir au résultat voulu.

QED

En fait on peut définir la dérivée covariante pour d'autres champs de tenseurs.

Définition

Soit (e_i) une base mobile de vecteurs, l'opérateur ∇_i entre des espaces de champs tensoriels sur une variété est une **dérivé covariante** s'il vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla_i (T + S) &= \nabla_i T + \nabla_i S \\ \nabla_i (T \otimes S) &= \nabla_i T \otimes \nabla_i S \end{aligned}$$

On exige de plus que la dérivée covariante d'un champ scalaire soit égale à la dérivée classique suivant le vecteur e_i .

On définit, plus généralement, la dérivée covariante suivant un champs de vecteurs en ajoutant à ces hypothèses une condition de linéarité suivant le champ de vecteur selon lequel on dérive :

$$\nabla_{au+bv} T = a \nabla_u T + b \nabla_v T$$

Calcul de la dérivée d'un champ de covecteurs

En posant le covecteur $c = e^i c_i$ on a :

$$\nabla_j c_k = \partial_j c_k - \Gamma_{kj}^i c_i$$

Preuve

Considérons un champ de covecteurs $c = c_i e^i$ ainsi qu'un champ de vecteurs $v = v^i e_i$. La dérivée covariante du champ scalaire $c(v) = c_k v^k$ est égale à la dérivée classique, on peut donc poser le calcul suivant :

$$\nabla_j (v^k c_k) = \partial_j (v^k c_k) = v^k (\partial_j c_k) + (\partial_j v^k) c_k$$

Par ailleurs on a :

$$v^k c_k = v \otimes c_k^k$$

Donc on a :

$$\nabla_j (v^k c_k) = \nabla_j (v^k) c_k + v^k \nabla_j (c_k)$$

Ce qui donne :

$$v^k \nabla_j (c_k) = \partial_j (v^k) c_k + v^k \partial_j (c_k) - \nabla_j (v^k) c_k$$

Enfin si on prend $v = e_k$ pour un certain k on obtient la formule recherchée.

QED

Remarque

Plus généralement en faisant des contractions sur les indices on peut obtenir une formule pour la dérivée covariante de n'importe quel tenseur. Nous le ferons pour un tenseur deux fois covariant pour calculer la dérivée covariante du champ de tenseurs métriques.

Dérivée covariante d'un vecteur vitesse

Donnons nous une courbe par ses coordonnées γ sur la surface, on note son vecteur vitesse ainsi :

$$\dot{\gamma}(s) e_i(\gamma(s))$$

Pour plus de lisibilité nous allons encore une fois omettre de noter les variables, pour autant il reste essentiel de les considérer lors des calculs.

En utilisant la formule de la dérivée d'une fonction composée on obtient :

$$\ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}^i e_i + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \partial_j e_i = \ddot{\gamma}^i e_i + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k e_k$$

On donne ainsi la dérivée covariante des coordonnées du vecteur vitesse :

$$\nabla \gamma^k = \ddot{\gamma}^k + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k$$

Transport parallèle et géodésiques

Un champ de tenseurs v sur une surface ou sur une courbe est dit **parallèlement transporté** si sa dérivée covariante est toujours nulle. Ici on s'intéressera plus particulièrement à des champs de vecteurs. La proposition suivante montre que la notion de transport parallèle est étroitement liée à la notion de dérivée covariante.

Proposition

Soit γ une courbe sur une surface, alors c'est une géodésique si et seulement si son vecteur vitesse est parallèlement transporté.

Lemme

La dérivée covariante du champ de tenseurs métriques est nulle.

Preuve de lemme

Commençons par calculer de façon générale la dérivée d'un champ de tenseurs deux fois covariant.

Soit $v = v^i e_i$ un champ de vecteur, $v^i g_{ij}$ définit les composantes d'un covecteur, donc on a :

$$\nabla_k(v^i g_{ij}) = \partial_k(v^i g_{ij}) - \Gamma_{jk}^l v^i g_{il}$$

En utilisant la règle du produit on peut aussi écrire :

$$\nabla_k(v^i g_{ij}) = \nabla_k(v \otimes g_{ij}) = \nabla_k(v^i) g_{ij} + v^i \nabla_k(g_{ij})$$

Ce qui donne :

$$v^i \nabla_k(g_{ij}) = \partial_k(v^i g_{ij}) - \Gamma_{jk}^l v^i g_{il} - \nabla_k(v^i) g_{ij} = \partial_k(v^i g_{ij}) - \Gamma_{jk}^l v^i g_{il} - (\partial_k(v^i) + v^j \Gamma_{jk}^i) g_{ij}$$

On prend le champ de vecteurs v défini par $v^i = 1$ pour tout indice i et on effectue un changement d'indices muets sur le dernier terme :

$$\nabla_k(g_{ij}) = \partial_k(g_{ij}) - \Gamma_{jk}^l g_{il} - \Gamma_{ik}^l g_{lj}$$

On utilise maintenant l'expression des symboles de Christoffel en fonction des coefficients du tenseur métrique pour vérifier que la dérivée covariante s'annule :

$$\begin{aligned} \nabla_k(g_{ij}) &= \partial_k(g_{ij}) - \frac{1}{2} g^{lm} (\partial_k g_{jm} + \partial_j g_{mk} - \partial_m g_{kj}) g_{il} - \frac{1}{2} g^{lm} (\partial_k g_{im} + \partial_j g_{mk} - \partial_m g_{ki}) g_{lj} \\ &= \partial_k(g_{ij}) - \frac{1}{2} \delta_i^m (\partial_k g_{jm} + \partial_j g_{mk} - \partial_m g_{kj}) - \frac{1}{2} \delta_j^m (\partial_k g_{im} + \partial_j g_{mk} - \partial_m g_{ki}) \\ &= \partial_k(g_{ij}) - \frac{1}{2} (\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ik} - \partial_i g_{kj}) - \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_j g_{jk} - \partial_j g_{ki}) = 0 \end{aligned}$$

QED

Preuve de la proposition

Ayant donné la dérivée covariante d'un vecteur vitesse l'objectif est de mettre l'équation des géodésiques que nous avons trouvée sous la forme suivante :

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0$$

On se rappellera que l'équation était la suivante :

$$\frac{1}{2} \partial_k(g_{ij}) \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j - \partial_j(g_{ik}) \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^i - g_{ik} \ddot{\gamma}^i = 0$$

D'après le lemme précédent, les dérivées covariantes du champ de tenseurs métriques sont nulles on a donc les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_k g_{ij} &= \Gamma_{jk}^l g_{il} + \Gamma_{ik}^l g_{lj} \\ \partial_j g_{ik} &= \Gamma_{kj}^l g_{il} + \Gamma_{ij}^l g_{lk} \end{aligned}$$

En introduisant ces formules dans l'équation des géodésiques on obtient :

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^l g_{il} + \Gamma_{ik}^l g_{lj})\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j - (\Gamma_{kj}^l g_{il} + \Gamma_{ij}^l g_{lk})\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = g_{ij} \ddot{\gamma}^i$$

C'est à dire :

$$(-\frac{1}{2}\Gamma_{jk}^l g_{il} + \frac{1}{2}\Gamma_{ik}^l g_{lj} - \Gamma_{ij}^l g_{lk})\dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = g_{ik} \ddot{\gamma}^i$$

Dans le second terme à l'intérieur de la parenthèse on peut échanger les indices i et j qui sont muets, en utilisant la symétrie du tenseur métrique les deux premiers termes s'annulent :

$$-\Gamma_{ij}^l g_{lk} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = g_{ik} \ddot{\gamma}^i$$

A gauche on peut effectuer un changement d'indices muets pour parvenir à l'équation suivante (on fera attention à ne pas faire de confusion avec le k muet et l'autre), à droite on peut remplacer le i par un k :

$$-\Gamma_{ij}^k g_{kk} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = g_{kk} \ddot{\gamma}^k$$

On multiplie par les coefficients du tenseur métrique inverse :

$$-\delta_k^k \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = \ddot{\gamma}^k$$

Ce qui donne encore :

$$\Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = \ddot{\gamma}^k$$

QED

Références

- [1] *Differential geometry of curves and surfaces*
Manfredo P. do Carmo
- [2] *Géométrie contemporaine, méthodes et applications*
Boris Doubrovine, Sergeï Novikov, Anatoli Fomenko
- [3] *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*
Frédéric Pham
- [4] *Géométrie différentielle*
Catherine Doss-Bachelet, Jean-Pierre Francoise, Claude Piquet
- [5] *Géométrie*
Michèle Audin
- [6] *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*
Gregorio Ricci-Curbastro, Tullio Levi-Civita

Logiciels utilisés

Texmaker, Blender, K3DSurf, GeoGebra, Gimp